ERNESTO CESÁRO

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКАГО АНАЛИЗА И ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНО МАЛЫХЪ

КНИГА ПЕРВАЯ.

Теорія опредѣлителей. Линейныя и квадратичныя формы.

ТЕОРІЯ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ.

Подстановки.

1. Въ элементарной алгебрѣ разсматриваются такъ называемыя перестановки (Permutation) *) и доказывается, что число всѣхъ перестановокъ, которыя можно образовать изъ n элементовъ, равно

$$n! = 1.2 \ldots n,$$

т. е. произведенію n первыхъ цѣлыхъ чиселъ. Одну изъ перестановокъ, выбранную по произволу, въ отличіе отъ всѣхъ другихъ называютъ главною. Если въ другой перестановкѣ какіе-нибудь два элемента расположены не въ томъ порядкѣ, въ какомъ они находились въ главной, а въ обратномъ, то говорятъ, что эти элементы представляютъ обращеніе (безпорядокъ, нарушеніе порядка, инверсію) (Inversion) независимо отъ числа элементовъ, которыми они раздѣляются въ сопоставляемыхъ перестановкахъ. Наибольшее число обращеній встрѣчается въ такъ называемой обратной перестановкѣ, въ которой всѣ элементы главной перестановки написаны въ обратномъ порядкѣ. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ каждая пара элементовъ представляетъ обращеніе; число ихъ равно $\frac{1}{2}n(n-1)$. Чтобы опредѣлить число обращеній въ любой перестановкѣ, надо сосчитать, сколько обращеній представляетъ каждый ея элементъ

*) См. Веберъ и Вельштейнъ. „Энциклопедія Элементарной Математики". Переводъ съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. В. Кагана. Т. I, (второе изданіе, 1911), стр. 193. Въ дальнѣйшихъ ссылкахъ на эту книгу мы будемъ ее называть просто „Веберъ и. Вельштейнъ".

при сопоставленіи съ элементами, слѣдующими за нимъ, и сложить всѣ полученныя такимъ образомъ числа. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ обозначать элементы перестановокъ первыми n цѣлыми числами и примемъ перестановку $123\ldots n$ за главную. Тогда число обращеній, которыя можетъ дать какой-нибудь элементъ, — напримѣръ, i — равно числу чиселъ, меньшихъ i и слѣдующихъ за нимъ (т. е. написанныхъ вправо отъ него). Перестановка называется четною или перваго класса, если въ ней содержится четное число обращеній, и нечетною или второго класса, если въ ней нечетное число обращеній. Такъ, напримѣръ, перестановка 465187293 четная, потому что въ ней имѣется $3+4+3+3+2+1=16$ обращеній.

2. Когда какая-нибудь перестановка раздѣлена на двѣ части, то, въ виду дальнѣйшихъ приложеній, полезно знать, сколько обращеній представляютъ элементы первой части съ элементами второй. Положимъ, что $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_\nu$ обозначаютъ элементы первой части, расположенные въ возрастающемъ порядкѣ. Элементъ i_r можетъ представить обращеніе только съ элементами $1, 2, 3, \ldots, i_r - 1$; изъ нихъ надо выкинуть тѣ, которые не входятъ во вторую часть, а такими будутъ элементы $i_1, i_2, \ldots i_{r-1}$ (входящіе въ первую часть). Поэтому число обращеній, происходящихъ отъ одного элемента i_r, равно

$$i_r - 1 - (r-1) = i_r - r,$$

а, слѣдовательно, число всѣхъ обращеній, образуемыхъ элементами первой части съ элементами второй, равно

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_\nu - \nu) = i_1 + i_2 + \cdots + i_\nu - \tfrac{1}{2}\nu(\nu+1).$$

3. Операція, посредствомъ которой отъ одной перестановки переходятъ къ другой, составленной изъ тѣхъ же элементовъ, называютъ подстановкою или субституціей (Substitution) (I). Чтобы выполнить переходъ отъ одной перестановки къ другой, т. е. произвести данную подстановку, можно поступать слѣдующимъ образомъ. Сперва замѣнить элементъ α первой перестановки соотвѣтствующимъ (см. примѣчаніе I) ему элементомъ β второй; затѣмъ элементъ β первой перестановки — соотвѣтствующимъ ему элементомъ γ второй и т. д. Поступая такимъ образомъ, мы необходимо дойдемъ до такого элемента λ, которой надо будетъ замѣнить элементомъ α, съ котораго начали. Такую цѣпь замѣщеній, въ которой послѣдній элементъ замѣщается первымъ, называютъ цикломъ и обозначаютъ символомъ $(\alpha\beta\gamma\ldots\lambda)$ Если однимъ цикломъ еще не исчерпывается переходъ отъ первоначальной перестановки къ новой, то беремъ какой-нибудь элементъ α', еще не стоящій на требуемомъ мѣстѣ, и съ него начинаемъ новый циклъ $(\alpha'\beta'\gamma'\ldots\lambda')$. Продолжая такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока не остается ни одного элемента, не

поставленнаго на требуемое мѣсто, мы и выполнимъ данную подстановку. Слѣдовательно, всякая подстановка распадается на нѣсколько цикловъ (если не приводится къ одному циклу) и можетъ быть изображена такъ:

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\lambda)\ (\alpha'\beta'\gamma'\ldots\lambda')\ (\alpha''\beta''\gamma''\ldots\lambda'')\ldots$$

Такъ, напримѣръ,

$$\begin{pmatrix}123456789\\465187293\end{pmatrix} = (14)\,(267)\,(3589).$$

4. Подстановка, состоящая изъ одного цикла, называется **круговою или циклическою** (zirkulare). Въ частности, когда циклъ состоитъ изъ двухъ только элементовъ, напримѣръ, (14), онъ называется **транспозиціей** и равносиленъ простому перемѣщенію его элементовъ. Результатъ круговой подстановки, произведенной надъ n элементами, можетъ быть наглядно изображенъ слѣдующимъ образомъ. Размѣстимъ элементы данной перестановки по окружности круга въ данномъ порядкѣ по опредѣленному направленію и въ равныхъ одинъ отъ другого разстоянiяхъ. Затѣмъ повернемъ кругъ въ обратномъ направленіи на уголъ $\frac{2\pi}{n}$; тогда на мѣста данныхъ элементовъ станутъ новые въ требуемомъ порядкѣ (рис. 1).

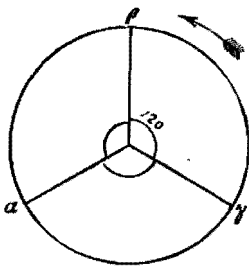


Рис. 1.

5. **Всякая подстановка разлагается на нѣсколько транспозицій.** Дѣйствительно, всякая подстановка разлагается, какъ мы видѣли, на нѣсколько круговыхъ. Легко видѣть, съ другой стороны, что всякая круговая подстановка распадается на нѣсколько транспозицій. Въ самомъ дѣлѣ, круговую подстановку $(\alpha\beta\gamma\ldots\lambda)$, очевидно, можно выполнить, переставляя послѣдовательно элементъ α съ каждымъ изъ остальныхъ, что и выражается формулою

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\lambda) = (\alpha\beta)\ (\alpha\gamma)\ldots(\alpha\lambda).$$

6. **Классъ перестановки измѣняется при всякой транспозиціи.** Эта теорема очевидна въ томъ случаѣ, когда транспонируются два смежныхъ элемента α и β, потому что тогда либо создается одно новое обращеніе (при $\alpha < \beta$), либо уничтожается одно обращеніе (при $\alpha > \beta$), и классъ перестановки, очевидно, мѣняется въ обоихъ случаяхъ. Остается теперь только показать, что любая транспозиція двухъ несмежныхъ элементовъ равносильна нечетному числу транспозицій смежныхъ элементовъ. Положимъ, что между α и β находится ν промежуточныхъ элементовъ. Транспозицію $(\alpha\beta)$ можно произвести слѣдующимъ образомъ. Помѣстимъ

послѣдовательно α вправо отъ каждаго изъ ν промежуточныхъ элементовъ, потомъ перемѣстимъ α и β, и, наконецъ, помѣщаемъ послѣдовательно β влѣво отъ каждаго изъ ν промежуточныхъ элементовъ. Результатъ, очевидно, получится тотъ же, какъ и отъ простой транспозиціи $(\alpha\beta)$, но при этомъ мы производимъ, какъ видно, $2\nu+1$ транспозицій смежныхъ элементовъ, что и требовалось показать.

7. Легко видѣть, что число четныхъ перестановокъ изъ n элементовъ равно числу нечетныхъ. Дѣйствительно, транспонируя два опредѣленныхъ элемента во всѣхъ $n!$ перестановкахъ изъ n элементовъ, мы получимъ опять всѣ $n!$ перестановокъ, только въ другомъ порядкѣ; но при этомъ всякая четная перестановка дѣлается нечетною, и обратно. Слѣдовательно, число первыхъ перестановокъ необходимо должно быть равно числу вторыхъ.

8. Изъ § 6 слѣдуетъ, что всякая перестановка, къ которой примѣняется нѣкоторая подстановка, измѣнитъ свой классъ, либо сохранитъ прежній, смотря по тому, будетъ ли число транспозицій, на которыя разлагается данная подстановка, числомъ нечетнымъ или четнымъ. Отсюда слѣдуетъ, что всякая подстановка равносильна либо только четному, либо только нечетному числу транспозицій, ибо, въ противномъ случаѣ, она, будучи примѣнена къ перестановкѣ, преобразовала бы послѣднюю въ такую, которая принадлежала бы, какъ къ классу четныхъ, такъ и къ классу нечетныхъ перестановокъ. Это ведетъ къ раздѣленію самихъ подстановокъ на четныя и нечетныя.

9. Разложеніе подстановокъ на циклы, помимо другихъ выгодъ, представляетъ еще то преимущество, что позволяетъ непосредственно видѣть, будетъ ли данная подстановка четною или нечетною. Дѣйствительно, если данная подстановка, разлагаясь на ν цикловъ, содержитъ всего n элементовъ, и если число элементовъ въ r-омъ циклѣ обозначимъ черезъ n_r, то, на основаніи формулы § 5, находимъ, что подстановка равносильна

$$(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_\nu-1)=n-\nu$$

транспозиціямъ *). Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе: подстановка будетъ четною, если число цикловъ и число элементовъ во всѣхъ ея циклахъ оба четныя или оба нечетныя, она будетъ нечетною — если одно изъ этихъ чиселъ четное, а другое нечетное. Напримѣръ, подстановка (14)(267)(3589) четная, потому что число цикловъ 3 и число всѣхъ элементовъ 9 — оба нечетныя (II).

10. Всякая четная подстановка разлагается на круговыя по три элемента въ каждой. Такъ какъ каждая четная под-

*) Потому что формула § 5 показываетъ, что число транспозицій, на которыя разлагается циклъ, на единицу меньше числа элементовъ цикла.

становка разлагается на нѣсколько паръ транспозицій, то достаточно показать, что всякая пара транспозицій равносильна одной или нѣсколькимъ круговымъ подстановкамъ по три элемента въ каждой. Если транспозиціи имѣютъ одинъ общій элементъ, то непосредственно видно, что

$$(\alpha\beta)\,(\alpha\gamma) = (\alpha\beta\gamma);$$

а на основаніи этого замѣчанія можно написать

$$(\alpha\beta)\,(\gamma\delta) = (\alpha\beta)\,(\alpha\gamma)\,(\gamma\alpha)\,(\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma)\,(\gamma\alpha\delta),$$

и теорема доказана. Замѣтимъ, что, обратно, всякая подстановка, разлагающаяся на нѣсколько круговыхъ подстановокъ по три элемента въ каждой, будетъ четною, потому что каждая изъ составляющихъ подстановокъ четная.

Матриссы и опредѣлители.

11. Прямоугольная схема

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

состоящая изъ m строкъ по n чиселъ въ каждой (или изъ n столбцовъ по m чиселъ въ каждомъ), называется матриссою. Различаютъ матриссы квадратныя и прямоугольныя; въ первыхъ $m = n$, во вторыхъ $m \neq n$. Опредѣлителемъ (или детерминантомъ) называютъ алгебраическое выраженіе, получаемое изъ квадратной матриссы по закону, который мы сейчасъ укажемъ. Полагая

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

называютъ число n порядкомъ опредѣлителя D. Выраженіе этого опредѣлителя получается слѣдующимъ образомъ. Составляемъ всевозможныя произведенія по n элементовъ матриссы въ каждомъ произведеніи, при чемъ въ каждое произведеніе входитъ только одинъ элементъ изъ каждой строки и только одинъ элементъ изъ каждаго столбца. Каждому изъ этихъ произведеній мы приписываемъ знакъ $+$

или —, смотря по тому, принадлежатъ ли перестановки первыхъ указателей (указателей строкъ) и вторыхъ указателей (указателей столбцовъ), въ разсматриваемомъ произведеніи, къ одному классу или къ разнымъ классамъ. Затѣмъ беремъ сумму всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ членовъ; эта сумма и будетъ искомымъ выраженіемъ опредѣлителя D. Иными словами, если $i_1, i_2, \dots i_n$ и $j_1, j_2, \dots j_n$ изображаютъ любыя двѣ перестановки первыхъ n цѣлыхъ чиселъ, то будемъ имѣть:

$$D = \sum (-1)^{r+s} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_n j_n},$$

гдѣ r обозначаетъ число обращеній въ первой перестановкѣ, а s — число обращеній во второй. Чтобы оправдать такое опредѣленіе *), необходимо показать, что знакъ каждаго члена останется безъ измѣненія при измѣненіи порядка сомножителей (несмотря на претерпѣваемыя при этомъ измѣненія чиселъ r и s). Условимся говорить, что два числа будутъ одинаковой четности, если оба они четныя или оба нечетныя, и разной четности въ противномъ случаѣ. Замѣтимъ теперь, что всякая подстановка, примѣненная къ буквамъ a, влечетъ за собою таковую же для буквъ i и j, при чемъ, очевидно, перестановки $i_1 i_2 \dots i_n$ и $j_1 j_2 \dots j_n$ либо одновременно измѣнятъ свой классъ, либо одновременно сохранятъ прежній. Если числа r и s до подстановки были $\frac{\text{одинаковой}}{\text{разной}}$ четности, то и послѣ подстановки они останутся таковыми-же. Поэтому, если $r+s$ до измѣненія порядка сомножителей было числомъ $\frac{\text{четнымъ}}{\text{нечетнымъ}}$, то оно останется такимъ же и послѣ измѣненія этого порядка, и знакъ $(-1)^{s+r}$ останется безъ измѣненія (II).

12. На основаніи вышесказаннаго мы можемъ при вычисленіи D считать, что вторые, напримѣръ, значки расположены въ возрастающемъ порядкѣ ($s = 0$) и писать

$$D = \sum (-1)^r a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \dots a_{i_n n}.$$

Еще короче иногда пишутъ:

$$D = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn},$$

при чемъ подразумѣвается, что первые или вторые значки должны быть переставлены всѣми возможными способами и каждый членъ долженъ быть взятъ со знакомъ + или —, смотря по тому, будетъ ли

*) Т. е. доказать, что оно даетъ для опредѣлителя одно вполнѣ опредѣленное выраженіе при данныхъ элементахъ и не содержитъ логическаго противорѣчія.

соотвѣтствующая этому члену перестановка четной или нечетной. Въ составъ опредѣлителя Δ входятъ, между прочимъ, члены

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \dots a_{nn}, \qquad (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\ a_{n1}\ a_{n-1,\,2}\ a_{n-2,\,3} \dots a_{1n}.$$

Элементы, входящіе въ первое изъ этихъ произведеній, называются главными или элементами главной діагонали; элементы второго принадлежатъ второй діагонали. Число всѣхъ членовъ опредѣлителя n-го порядка равно $n!$ Половина ихъ войдетъ со знакомъ $+$, другая половина со знакомъ $-$, какъ то слѣдуетъ изъ сказаннаго въ §§ 1 и 7 *).

13. Примѣры. Выраженіе

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

есть опредѣлитель второго порядка. Въ приложеніяхъ часто встрѣчаются опредѣлители третьяго порядка. При вычисленіи ихъ удобно пользоваться слѣдующимъ правиломъ Саррюса (Sarrus) (фиг. 2 и 3).

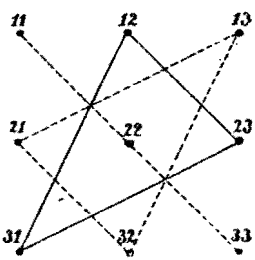


Рис. 2.

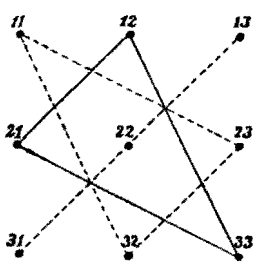


Рис. 3.

Надо перемножить между собою элементы, стоящіе въ вершинахъ обоихъ треугольниковъ фиг. 2, и прибавить къ суммѣ этихъ двухъ произведеній произведеніе элементовъ главной діагонали; такимъ образомъ, получатся положительные члены опредѣлителя (т. е. тѣ, которые надо взять со знакомъ $+$); отрицательные члены получаются аналогичнымъ образомъ изъ фиг. 3:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

*) Въ примѣрахъ, вмѣсто того, чтобы обозначать элементы опредѣлителя одною буквою съ двумя значками, мы обозначаемъ ихъ разными буквами съ однимъ значкомъ или вовсе безъ значковъ

Вѣрность этого правила вытекаетъ изъ того, что изъ шести перестановокъ 123, 231, 312, 321, 213, 132 первыя три — четныя, а вторыя три — нечетныя.

14. Изъ основного опредѣленія, даннаго въ § 11, непосредственно вытекаютъ главныя свойства опредѣлителей (III). Положимъ, что произведено нѣкоторое перемѣщеніе столбцовъ опредѣлителя, вслѣдствіе чего опредѣлитель D превращается въ опредѣлитель

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \dots & a_{nj_n} \end{vmatrix}.$$

На основаніи сказаннаго въ § 12 мы получимъ значеніе опредѣлителя D', если въ суммѣ

$$D' = \sum (-1)^r a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_n j_n}$$

распространимъ суммированіе на всѣ возможныя перестановки первыхъ значковъ. Съ другой стороны, мы получимъ значеніе опредѣлителя D, если, расположивъ вторые значки въ данномъ порядкѣ $j_1 j_2 \dots j_n$ (представляющемъ s обращеній), переставимъ затѣмъ всѣми возможными способами одни только первые значки, такъ что

$$D = \sum (-1)^{r+s} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} = (-1)^s \sum (-1)^r a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$$

т. е. $D = (-1)^s . D'$ *). Итакъ, подстановка, примѣненная къ нѣсколькимъ параллельнымъ рядамъ (перемѣщеніе однихъ на мѣсто другихъ) не измѣняетъ абсолютной величины опредѣлителя; она мѣняетъ лишь его знакъ, если она нечетная, и не измѣняетъ ничего, если она четная. Въ частности, можно транспонировать два параллельныхъ ряда, измѣнивъ въ то же время знакъ опредѣлителя (IV).

15. Другое замѣчательное свойство опредѣлителей состоитъ въ томъ, что при умноженіи всѣхъ элементовъ одного и того же ряда на одно и то же число опредѣлитель умножается на это же число. Дѣйствительно, всякій членъ раскрытаго выраженія опредѣлителя содержитъ множителемъ одинъ и только одинъ изъ тѣхъ элементовъ, которые умножаются на данное число k. Ясно поэтому, что и все выраженіе умножится на это число k. Въ частности, при $k = -1$ находимъ, что перемѣна знака всѣхъ

*) Все сказанное о столбцахъ, очевидно, примѣнимо и къ строкамъ. Въ дальнѣйшимъ столбцы или строки безразлично мы будемъ называть параллельными рядами.

элементовъ одного и того же ряда измѣняетъ знакъ опредѣлителя, не измѣняя его абсолютной величины.

16. Опредѣлитель, въ которомъ два параллельныхъ ряда тождественны или эквивалентны, равенъ нулю. Два параллельныхъ ряда называются эквивалентными, если соотвѣтственные элементы ихъ пропорціональны. Умножая всѣ элементы одного изъ этихъ рядовъ на коэффиціентъ пропорціональности k, мы сдѣлаемъ эти ряды тождественными, при чемъ опредѣлитель D обратится въ kD. Транспозиція двухъ тождественныхъ рядовъ, конечно, не измѣняетъ значенія опредѣлителя kD; а, съ другой стороны, мы знаемъ, что всякая транспозиція измѣняетъ kD въ $-kD$. Слѣдовательно, $kD = -kD$, и $D = 0$.

17. Разлагая элементы одного и того же ряда на нѣсколько слагаемыхъ, можно представить опредѣлитель въ видѣ суммы нѣсколькихъ опредѣлителей. Такъ, напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha & a_2 & a_3 \\ b_1+\beta & b_2 & b_3 \\ c_1+\gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Это слѣдуетъ изъ того, что каждый членъ раскрытаго выраженія опредѣлителя содержитъ одинъ и только одинъ изъ элементовъ, разложенныхъ на слагаемыя (V).

Принимая во вниманіе сказанное въ предыдущемъ §, тотчасъ заключаемъ, что значеніе опредѣлителя не измѣнится, если къ элементамъ нѣкотораго ряда прибавимъ одинаковыя кратныя соотвѣтственныхъ элементовъ параллельнаго ему ряда. Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1+ma_3 & a_2 & a_3 \\ b_1+mb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1+mc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

потому что

$$\begin{vmatrix} ma_3 & a_2 & a_3 \\ mb_3 & b_2 & b_3 \\ mc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

какъ имѣющій два эквивалентныхъ столбца.

18. Опредѣлители, получаемые изъ данной матриссы, когда всѣми возможными способами извѣстное число строкъ комбинируемъ съ равнымъ ему числомъ столбцовъ, называются содержащимися въ данной матриссѣ. Тѣ изъ этихъ опредѣлителей, которые имѣютъ наивысшій порядокъ, называются старшими опредѣлителями, а всѣ другіе — младшими или, короче, минорами. Ран-

гомъ матриссы называется наивысшій порядокъ содержащихся въ ней опредѣлителей, отличныхъ отъ нуля. Такъ, напримѣръ, рангъ матриссы

$$\begin{vmatrix} 0 & c & -b & b-c \\ -c & 0 & a & c-a \\ b & -a & 0 & a-b \end{vmatrix},$$

въ которой не всѣ элементы равны нулю, равенъ двумъ, потому что, какъ легко убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ (§ 13), всѣ ея старшіе опредѣлители 3-го порядка равны нулю, а опредѣлители второго порядка не равны нулю.

Миноры.

19. Разсмотримъ одинъ изъ миноровъ, содержащихся въ матриссѣ опредѣлителя D, — положимъ, слѣдующій:

$$Q = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} & \dots & a_{i_1 j_\nu} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} & \dots & a_{i_2 j_\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\nu j_1} & a_{i_\nu j_2} & a_{i_\nu j_3} & \dots & a_{i_\nu j_\nu} \end{vmatrix}.$$

Если $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, $\dots$, $i_n = j_n$, то миноръ называется главнымъ, и главные его элементы принадлежатъ главной діагонали старшаго опредѣлителя D. Два минора называются сопряженными, если указатели строкъ одного равны указателямъ столбцовъ другого, и наоборотъ. Каждый главный миноръ сопряженъ самъ съ собою. Въ частности каждый элементъ можно разсматривать, какъ миноръ перваго порядка. Элементы a_{ij} и a_{ji} сопряжены одинъ съ другимъ; главный элементъ a_{ii} сопряженъ самъ съ собою.

20. Миноръ Q можно себѣ представить полученнымъ изъ опредѣлителя D черезъ опусканіе изъ послѣдняго извѣстнаго числа строкъ и такого же числа столбцовъ. Если опустимъ изъ опредѣлителя D тѣ именно строки и столбцы, которыя входятъ въ составъ Q, то получимъ нѣкоторый миноръ Q', порядка $n - \nu$; миноры Q и Q' называются взаимно-дополнительными: Q есть дополненіе минора Q' и наоборотъ. Далѣе, алгебраическимъ дополненіемъ минора Q' называютъ его обыкновенное дополненіе Q, взятое со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, будетъ ли сумма указателей всѣхъ строкъ и всѣхъ столбцовъ въ Q число четное или нечетное. Иными словами, если Q есть обыкновенное дополненіе

минора Q', то алгебраическое дополненіе того же минора Q' равно $(-1)^{\sigma}Q$, гдѣ для сокращенія положено

$$\sigma = i_1 + i_2 + \cdots + i_\nu + j_1 + j_2 + \cdots + j_\nu.$$

Замѣтимъ, что, если σ' обозначаетъ число, аналогичное σ для минора Q', то сумма $\sigma + \sigma'$, очевидно, равна суммѣ указателей всѣхъ строкъ и всѣхъ столбцовъ въ опредѣлителѣ D, такъ что

$$\sigma + \sigma' = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

Отсюда видно, что числа σ и σ' всегда одинаковой четности, а потому, чтобы два взаимно-дополнительныхъ минора были алгебраически дополнительными, надо приписать имъ одинъ и тотъ же знакъ, т. е. если алгебраическое дополненіе минора Q' есть Q или $-Q$, то алгебраическое дополненіе минора Q будетъ соотвѣтственно Q' или $-Q'$. Въ частности, алгебраическое дополненіе элемента a_{ij} есть опредѣлитель, получаемый изъ D выкидываніемъ i-ой строки и j-аго столбца, и взятый со знакомъ $+$ при $i+j$ четномъ и со знакомъ $-$ при $i+j$ нечетномъ.

21. Лемма. Произведеніе минора на его алгебраическое дополненіе есть составная часть раскрытаго выраженія старшаго опредѣлителя.

Въ самомъ дѣлѣ, каждый членъ такого произведенія равенъ произведенію нѣкотораго члена изъ минора Q на нѣкоторый членъ минора Q', взятому со знакомъ $(-1)^{\sigma}$, гдѣ σ имѣетъ указанное въ § 20 значеніе. Это произведеніе, независимо отъ знака, совпадаетъ съ нѣкоторымъ членомъ опредѣлителя D, потому что заключаетъ въ себѣ $\nu + (n - \nu) = n$ элементовъ, взятыхъ изъ различныхъ между собою рядовъ. Что касается знака, то его можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ. Первые указатели въ разсматриваемомъ произведеніи представляютъ собою нѣкоторую перестановку изъ чиселъ 1, 2, 3, ..., n, раздѣленную на двѣ части, причемъ въ первой части будетъ ν чиселъ, а во второй $n - \nu$; то же самое относится и ко вторымъ указателямъ. Обозначимъ черезъ r число обращеній въ первой части перестановки первыхъ указателей (i), черезъ r' — число обращеній во второй части той же перестановки, черезъ s и s' аналогичныя имъ числа для перестановки вторыхъ указателей (j). Примѣняя правило опредѣленія знаковъ, указанное въ § 11, найдемъ, что разсматриваемое произведеніе будетъ имѣть знакъ

$$(-1)^{r+r'} \cdot (-1)^{s+s'} \cdot (-1)^{\sigma} = (-1)^{r+r'+s+s'+\sigma}.$$

Мы покажемъ сейчасъ, что тотъ же знакъ будетъ имѣть это произведеніе, если будемъ его разсматривать, какъ членъ опредѣлителя D. При этомъ предположеніи число всѣхъ обращеній въ пере-

становкѣ первыхъ указателей, очевидно, равно $r + r' + \varepsilon$, гдѣ ε равно числу обращеній, образуемыхъ числами первой части этой перестановки съ числами второй ея части. Точно такъ же число всѣхъ обращеній въ перестановкѣ вторыхъ указателей равно $s + s' + \eta$, гдѣ η есть число обращеній, образуемыхъ числами первой части этой перестановки съ числами второй ея части. По правилу § 11, разсматриваемый членъ опредѣлителя D будетъ имѣть знакъ $(-1)^{r+r'+s+s'+\varepsilon+\eta}$. Но мы видѣли въ § 2, что

$$\varepsilon = i_1 + i_2 + \cdots + i_\nu - \tfrac{1}{2}\nu(\nu+1), \quad \eta = j_1 + j_2 + \cdots + j_\nu - \tfrac{1}{2}\nu(\nu+1).$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\varepsilon + \eta = \sigma - \nu(\nu+1)$. Замѣчая, что $\nu(\nu+1)$ всегда есть четное число, мы и находимъ:

$$(-1)^{r+r'+s+s'+\varepsilon+\eta} = (-1)^{r+r'+s+s'+\sigma}.$$

Лемма, такимъ образомъ, доказана.

22. Теорема. Всякій опредѣлитель равенъ суммѣ произведеній всѣхъ миноровъ порядка ν, содержащихся въ ν параллельныхъ рядахъ *), на соотвѣтствующія имъ алгебраическія дополненія.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ доказанной леммы вытекаетъ, что всѣ полученные при такихъ умноженіяхъ члены войдутъ въ составъ опредѣлителя. Далѣе, очевидно, что всѣ эти члены различны между собою. Остается показать, что число ихъ равно $n!$, гдѣ n — порядокъ опредѣлителя, чтобы убѣдиться, что, кромѣ этихъ членовъ, въ выраженіи даннаго опредѣлителя никакихъ другихъ не заключается. Число всѣхъ миноровъ, содержащихся въ ν параллельныхъ рядахъ, очевидно, равно числу сочетаній изъ n элементовъ по ν, т. е.

$$\frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}.$$

Каждый изъ нихъ содержитъ $\nu!$ членовъ, а алгебраическое дополненіе, ему соотвѣтствующее, $(n-\nu)!$ членовъ. Слѣдовательно, каждый миноръ, умноженный на свое алгебраическое дополненіе, дастъ $\nu!\,(n-\nu)!$ членовъ, и число всѣхъ членовъ будетъ равно

$$\nu!\,(n-\nu)!\,\frac{n!}{\nu!\,(n-\nu!)} = n!$$

23. Слѣдствіе. Всякій опредѣлитель равенъ суммѣ произведеній, получаемыхъ отъ умноженія каждаго элемента одного ряда на соотвѣтствующее элементу алгебраическое дополненіе **).

---

*) Т. е. въ матриссѣ, состоящей изъ ν столбцовъ и n строкъ или изъ ν строкъ и n столбцовъ, гдѣ n — порядокъ опредѣлителя (см. Веберъ и Вельштейнъ, l. c., стр. 219).

**) Частный случай теоремы § 22, при $\nu = 1$.

Поэтому, если a_{ij} есть алгебраическое дополненіе элемента a_{ij} то

$$D = a_{i1}\,a_{i1} + a_{i2}\,a_{i2} + a_{i3}\,a_{i3} + \cdots + a_{in}\,a_{in}$$

для всякаго $i = 1\ 2, \ldots n$. Сокращенно также пишутъ:

$$D = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}\,a_{ir}.$$

24. Сумма произведеній элементовъ нѣкотораго ряда на алгебраическія дополненія соотвѣтственныхъ элементовъ другого, параллельнаго первому, ряда равна нулю. Дѣйствительно, сумма

$$a_{i1}\,a_{j1} + a_{i2}\,a_{j2} + a_{i3}\,a_{j3} + \cdots + a_{in}\,a_{jn}$$

представляетъ собою разложеніе опредѣлителя D послѣ того, какъ въ его матриссѣ элементы a_{i1}, a_{i2}, ... замѣнены элементами a_{j1}, a_{j2}, ...; а такой опредѣлитель, какъ имѣющій два тождественныхъ параллельныхъ ряда, равенъ нулю (§ 16). Слѣдовательно,

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}\,a_{jr} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

25. Въ заключеніе докажемъ еще другую важную формулу, которой въ дальнѣйшемъ мы часто будемъ пользоваться. Совокупность всѣхъ членовъ въ разложеніи опредѣлителя D, въ составъ которыхъ входитъ данный элементъ a_{rs}, есть $a_{rs}A_{rs}$. Это прямо слѣдуетъ изъ § 23. Всякій другой членъ разложенія содержитъ въ себѣ непремѣнно одинъ членъ r-той строки и одинъ элементъ s-таго столбца, оба отличные отъ a_{rs}. Пусть эти два элемента будутъ a_{rj} и a_{is}. Они образуютъ съ элементами a_{rs} и a_{ij} миноръ

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix} = a_{ij}\,a_{rs} - a_{is}\,a_{rj}.$$

Этотъ миноръ, умноженный на его алгебраическое дополненіе, которое обозначимъ черезъ α_{ij}, войдетъ въ составъ опредѣлителя (§ 22). Слѣдовательно, коэффиціентъ при $a_{is}a_{rj}$, гдѣ $i \neq r$, $j \neq s$, въ выраженіи опредѣлителя D будетъ равенъ $-\alpha_{ij}$, и мы будемъ имѣть

$$D = a_{rs}\,A_{rs} - \sum_{i,\,j} \alpha_{ij}\,a_{is}\,a_{rj}.$$

гдѣ надо дать указателю i всѣ значенія 1, 2, 3, ..., n, за исключеніемъ r, а указателю j всѣ тѣ же значенія, за исключеніемъ s. Далѣе, важно замѣтить, что α_{ij} можно разсматривать, какъ алгебраическое дополненіе элемента a_{ij}, но не въ опредѣлителѣ D, а въ опредѣлителѣ A_{rs} (въ алгебраическомъ дополненіи элемента a_{rs}) (VI).

Вычисленіе опредѣлителей.

26. Изъ доказанныхъ въ предыдущихъ §§ свойствъ опредѣлителей вытекаютъ правила, позволяющія быстро ихъ вычислять. Умножая элементы рядовъ на надлежаще выбранные множители и вычитая одинъ рядъ изъ другихъ, можно достигнуть того, что всѣ элементы нѣкотораго ряда, за исключеніемъ одного, обратятся въ нуль. Тогда (§ 23) опредѣлитель сведется къ произведенію этого одного элемента на его алгебраическое дополненіе, которое будетъ опредѣлителемъ низшаго порядка, чѣмъ данный. Полезно также замѣтить, что, если всѣ элементы, лежащіе по одну сторону отъ главной діагонали, будутъ равны нулю, то опредѣлитель будетъ равенъ произведенію его главныхъ элементовъ, что прямо вытекаетъ изъ разложенія опредѣлителя по элементамъ перваго ряда, въ которомъ, при нашемъ предположеніи, всѣ элементы, кромѣ одного, будутъ нули (VII).

27. Упражненія. a) Значеніе опредѣлителя

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{vmatrix}$$

можно вычислить, примѣняя ко второму столбцу теорему § 23:

$$D = -2ab \cdot cd(ad-bc) + (ad+bc)\,(a^2d^2 - b^2c^2) - 2cd \cdot ab\,(ad-bc).$$

Отсюда

$$D = (ad-bc)\,[(ad+bc)^2 - 4abcd] = (ad-bc)^3.$$

b) Требуется вычислить опредѣлитель

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Сложивъ первый столбецъ съ суммою всѣхъ прочихъ, выведя за знакъ опредѣлителя общій множитель $a+b+c+d$ и вычитая затѣмъ первую строку изъ всѣхъ остальныхъ, получимъ:

$$D = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & d-c & a-d \end{vmatrix}.$$

Складывая въ послѣднемъ опредѣлителѣ послѣдній столбецъ съ первымъ,

выдѣляя общій множитель $a-b+c-d$ и вычитая, наконецъ, послѣднюю строку изъ первой, получимъ:

$$(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 1 & d-c & a-d \end{vmatrix} = (a-b+c-d)\begin{vmatrix} b-d & c-a \\ a-c & b-d \end{vmatrix},$$

Поэтому

$$D=(a+b+c+d)\ (a-b+c-d)\ [(a-c)^2+(b-d)^2].$$

c) Если въ опредѣлитель

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

къ первому столбцу прибавимъ сумму всѣхъ другихъ, то обнаружится общій множитель $a+b+c+d$. Если сперва перемѣнимъ знаки у элементовъ двухъ послѣднихъ столбцовъ и двухъ послѣднихъ строкъ (что, очевидно, значенія D не мѣняетъ) и потомъ произведемъ указанную операцію, то обнаружится множитель $a+b-c-d$. Аналогичнымъ путемъ обнаруживаются множители $a-b+c-d$ и $a-b-c+d$. Такъ какъ D, очевидно, есть полиномъ четвертой степени относительно буквъ a, b, c, d, то онъ можетъ отличаться только численнымъ множителемъ k отъ произведенія вышеупомянутыхъ четырехъ множителей. Значеніе множителя k получимъ, сравнивая коэффиціенты, напримѣръ, при a^4, въ выраженіи D и въ этомъ произведеніи, что и дастъ $k=1$. Поэтому

$$D=(a+b+c+d)\ (a+b-c-d)\ (a-b+c-d)\ (a-b-c+d).$$

d) Опредѣлителемъ Вандермонда (Vandermonde) называютъ нижеслѣдующій опредѣлитель

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Прямо видно, что D есть полиномъ степени $1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$ относительно $a_1, a_2, \dots a_n$. При $a_i=a_j$ два параллельныхъ ряда опредѣлителя дѣлаются тождественными, и опредѣлитель обращается въ нуль. Слѣдовательно, онъ дѣлится на a_i-a_j. Разсматривая всевозможныя пары указателей i и j, получаемъ $\frac{1}{2}n(n-1)$ множителей вида a_i-a_j, отъ произведенія которыхъ D можетъ отличаться только численнымъ множителемъ, такъ что

$$D=k(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)\ (a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)\dots(a_{n-1}-a_n).$$

Чтобы опредѣлить k, замѣчаемъ, что k есть коэффиціентъ при

$$a_1^{n-1}\,a_2^{n-2}\dots a_{n-1}$$

въ развернутомъ произведеніи, написанномъ въ правой части предыдущаго равенства. Съ другой стороны, написанный выше членъ есть произведеніе элементовъ второй діагонали въ опредѣлителѣ D и входитъ въ его выраженіе (§ 12) съ коэффиціентомъ $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. Поэтому $k = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. Для краткости принято писать:

$$D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{r=1}^{r=n-1} (a_r - a_{r+1})(a_r - a_{r+2}) \dots (a_r - a_n),$$

гдѣ символъ $\prod_{r=1}^{r=n-1}$ обозначаетъ произведеніе всѣхъ множителей, за нимъ написанныхъ, соотвѣтствующихъ значеніямъ

$$r = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Очевидно, что можно также писать

$$D = \prod_{r=1}^{r=n-1} (a_{r+1} - a_r)(a_{r+2} - a_r) \dots (a_n - a_r).$$

e) Многіе другіе опредѣлители легко приводятся къ опредѣлителю Вандермонда. Такъ, напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & a_1 b_1 \\ a_2^2 & b_2^2 & a_2 b_2 \\ a_3^2 & b_3^2 & a_3 b_3 \end{vmatrix} = -a_1^2 a_2^2 a_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 \\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^2 \end{vmatrix},$$

и вторая часть равенства тотчасъ замѣняется выраженіемъ

$$-a_1^2 a_2^2 a_3^2 \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3}\right)\left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\right)$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Такъ же получаемъ равенство

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma \end{vmatrix} = \sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta).$$

f) При помощи обыкновеннаго дѣленія и вычитанія рядовъ или тѣмъ пріемомъ, который мы примѣнили къ вычисленію опредѣлителя Вандермонда, находятъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_n b_n \end{vmatrix}$$

равенъ

$$a_1 b_n (a_2 b_1 - a_1 b_2) (a_3 b_2 - a_2 b_3) \dots (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n)$$

g) Положимъ

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Изъ всѣхъ столбцовъ вычтемъ послѣдній. Получимъ

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & a_2 - x & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & a_3 - x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x - a_n & x - a_n & x - a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Выдѣляя изъ строкъ множители $a_1 - x$, $a_2 - x$, ..., $a_n - x$, видимъ, что D есть произведеніе $(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)$ на опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{x}{a_1 - x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{x}{a_2 - x} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{x}{a_3 - x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \frac{a_n}{a_n - x} \end{vmatrix}.$$

Послѣдній приводится къ опредѣлителю

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \frac{x}{a_1 - x} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{x}{a_2 - x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_n}{a_n - x} + \sum_1^{n-1} \frac{x}{a_r - x} \end{vmatrix},$$

если къ послѣдней строкѣ прибавимъ сумму всѣхъ другихъ. Всѣ элементы, стоящіе влѣво отъ главной діагонали, равны нулю; поэтому опредѣлитель

равенъ произведенію его главныхъ элементовъ, такъ что

$$D = (a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{a_n}{a_n - x} + \sum_1^{n-1}\frac{x}{a_r - x}\right)$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

h) Если данъ нѣкоторый опредѣлитель D, то, на основаніи сказаннаго въ § 17, легко вычислить опредѣлитель $D(x)$, который получится изъ D, если къ каждому его элементу прибавимъ одно и то же число x, т. е. опредѣлитель

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель, составленный изъ первыхъ слагаемыхъ каждаго элемента въ $D(x)$, равенъ D. Далѣе, опредѣлитель, который получимъ, взявъ въ первомъ столбцѣ вторыя слагаемыя, а въ другихъ первыя, будетъ

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}),$$

гдѣ a_{ij}, какъ всегда, обозначаетъ алгебраическое дополненіе элемента a_{ij}. Поступая также съ каждымъ столбцомъ, получимъ, послѣ сложенія, произведеніе числа x на сумму алгебраическихъ дополненій всѣхъ элементовъ D. Замѣчая еще, что опредѣлители, которые получатся, если въ двухъ или болѣе столбцахъ возьмемъ вторыя слагаемыя, будутъ равны нулю, какъ имѣющіе тождественные столбцы, найдемъ окончательно

$$D(x) = D + x\sum_{i,j} a_{ij}.$$

Если, въ частности, всѣ элементы въ D, кромѣ главныхъ, равны нулю, то, обозначая эти послѣдніе черезъ $a_1, a_2, \dots a_n$, замѣтимъ, что $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а при $i = j$ a_{ii} приводятся къ произведенію своихъ главныхъ элементовъ, т. е. къ D, дѣленному на a_i. Поэтому

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} = x a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Замѣняя каждое a_i черезъ $a_i - x$, получаемъ результатъ предыдущаго упражненія инымъ лишь путемъ.

i) Аналогичнымъ путемъ вычисляется опредѣлитель, получаемый изъ опредѣлителя D прибавленіемъ числа x къ однимъ только главнымъ его

элементамъ. Обозначивъ черезъ σ_ν сумму всѣхъ главныхъ миноровъ (§ 19) опредѣлителя D, и написавъ вмѣсто a_{ij}, при $i \neq j$, $a_{ij} + 0$, тотчасъ увидимъ (§ 17), что

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = D + x\sigma_{n-1} + x^2\sigma_{n-2} + \dots + x^{n-1}\sigma_1 + x^n$$

j) Чтобы вычислить опредѣлитель

$$D = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_3+a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix},$$

вычитаемъ первый столбецъ изъ второго, измѣненный этимъ путемъ второй изъ третьяго и т. д. Ту же операцію повторяемъ со строками и затѣмъ измѣнимъ знаки элементовъ всѣхъ строкъ и столбцовъ съ четными указателями. Тогда D приметъ видъ опредѣлителя, вычисленнаго въ упражненіи *h*), лишь съ замѣною x на a_0, и мы найдемъ

$$D = a_0 a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

k) Къ послѣднему результату можно придти также, примѣняя разложеніе опредѣлителя по элементамъ послѣдней строки и послѣдняго столбца (§ 25). Обозначая данный опредѣлитель черезъ D_n, тотчасъ найдемъ (VIII), что

$$D_n = (a_{n-1} + a_n) D_{n-1} - a_{n-1}^2 D_{n-2}.$$

Эту формулу можно написать такъ:

$$D_n - a_n D_{n-1} = a_{n-1} (D_{n-1} - a_{n-1} D_{n-2}).$$

Замѣняя здѣсь n на $n-1$, $n-2$, ..., 4, 3 и замѣчая, что

$$D_1 = a_0 + a_1,\ D_2 = a_1 a_2 + a_2 a_0 + a_0 a_1,\ D_2 - a_2 D_1 = a_0 a_1,$$

получаемъ путемъ умноженія

$$D_n - a_n D_{n-1} = a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}$$

или

$$\frac{D_n}{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} - \frac{D_{n-1}}{a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \frac{1}{a_n}.$$

Замѣняя здѣсь, наконецъ, опять n черезъ $n-1, n-2, \dots 3, 2$ и складывая, находимъ

$$\frac{D_n}{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

l) Континуантами (Kontinuante) называются опредѣлители, въ которыхъ всѣ элементы, за исключеніемъ главныхъ и лежащихъ на двухъ линіяхъ, параллельныхъ главной діагонали и смежныхъ съ нею, равны нулю. Элементы, лежащіе на одной изъ этихъ линій, равны 1, а на другой (— 1); главные элементы—произвольныя числа. Названіе континуантовъ объясняется связью ихъ съ непрерывными дробями (fractions continues) *). Мы будемъ обозначать континуантъ, имѣющій главные элементы $a_1, a_2, \dots a_n$, символомъ $(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)$, такъ что

$$(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Разлагая этотъ опредѣлитель по минорамъ, содержащимся въ первыхъ ν столбцахъ (§ 22), легко убѣдимся, что

$$(1) \qquad (a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1 a_2 \dots a_\nu)\,(a_{\nu+1} a_{\nu+2} \dots a_n) + (a_1 a_2 \dots a_{\nu-1})\,(a_{\nu+2} a_{\nu+3} \dots a_n).$$

Въ частности, имѣемъ

$$(2) \qquad (a_1 a_2 \dots a_n) = a_1\,(a_2 a_3 \dots a_n) + (a_3 a_4 \dots a_n),$$

$$(3) \qquad (a_1 a_2 \dots a_n) = a_n\,(a_1 a_2 \dots a_{n-1}) + (a_1 a_2 \dots a_{n-2}).$$

Изъ формулы (3) получается законъ образованія любого континуанта. Дѣло сводится къ тому, чтобы изъ произведенія $a_1 a_2 \dots a_n$ послѣдовательно выкидывать всѣми возможными способамн всѣ пары двухъ смежныхъ элементовъ. Напримѣръ, чтобы вычислить континуантъ $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ надо изъ произведенія $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ послѣдовательно выкиuуть $a_4 a_5$, $a_3 a_4$, $a_2 a_3$, $a_1 a_2$, потомъ $a_4 a_5$ и $a_2 a_3$, $a_4 a_5$ и $a_1 a_2$, $a_3 a_4$ и $a_1 a_2$. Тогда получимъ

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5.$$

Далѣе, принимая во вниманіе равенство (2), легко видѣть, что

$$a_1 = (a_1),\ a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{(a_1 a_2)}{(a_2)},\ a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{(a_2 a_3)}, \dots$$

*) См. Веберъ и Вельштейнъ, l. c., стр. 358.

и что вообще

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{(a_1 a_2 a_3 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)}.$$

m) Разсмотримъ, въ частности, континуантъ

$$u_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \dots 0 \\ -1 & 1 & 1 \dots 0 \\ 0 & -1 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix}.$$

Изъ формулы (3) находимъ

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \tag{4}$$

откуда видно, что каждый членъ ряда $u_1, u_2, u_3, \dots$ равенъ суммѣ двухъ предшествующихъ. Значенія чиселъ u_n будутъ, слѣдовательно,

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Этотъ рядъ извѣстенъ подъ именемъ ряда Фибоначчи (Fibonacci) (итальянскій математикъ XIII вѣка) [1]. Онъ обладаетъ интересными свойствами [2], и нѣкоторыя непосредственно вытекаютъ изъ результатовъ предыдущаго упражненія. Напримѣръ, соотношеніе (1) даетъ

$$u_n = u_\nu u_{n-\nu} + u_{\nu-1} u_{n-\nu-1}$$

и, въ частности, $u_{2\nu} = u_\nu^2 + u_{\nu-1}^2$, т. е. сумма квадратовъ двухъ смежныхъ членовъ ряда есть также членъ ряда. Чтобы найти значеніе u_n, положимъ

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \beta = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Числа α и β будутъ корнями уравненія $x^2 - x - 1 = 0$. Тотчасъ видно, что уравненіе (4) удовлетворится тождественно выраженіемъ

$$u_n = a\,\alpha^n + b\,\beta^n,$$

гдѣ a и b отъ n не зависятъ. Эти коэффиціенты опредѣлятся по начальнымъ условіямъ $u_{-1} = 0$, $u_0 = 1$, которыя требуютъ, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = 0, \quad a + b = 1,$$

---

[1]) Liber Abbaci. См. „Recherches“ E. Lucas въ Bullettino bibliografico di Boncompagni (Roma, 1877).

[2]) См. сообщеніе Lamé Парижской Академіи Наукъ (Comptes rendus, 1814 г., стр. 867) (IX).

т. е.

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{-\beta} = \frac{1}{a-\beta},$$

откуда

$$u_n = \frac{a^{n+1} - \beta^{n+1}}{a-\beta}.$$

Замѣтимъ еще, что u_n обозначаетъ число членовъ любого континуанта n-го порядка. Число это, слѣдовательно, равно

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

или

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{1} + 5\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} + 25\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right).$$

Чтобы доказать, что это число цѣлое, можно его представить въ слѣдующемъ видѣ (§ 48, c):

$$1 + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-2)\,(n-3)}{1\cdot 2} + \frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Умноженіе матриссъ.

28. Положимъ, что a_{ij} и b_{ij} обозначаютъ элементы двухъ подобныхъ матриссъ, т. е. такихъ, которыя содержатъ одно и то же число m столбцовъ и одно и то же число n строкъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}.$$

Перемножимъ элементы i-той строки первой матриссы на соотвѣтствующіе элементы j-той строки второй и сложимъ всѣ полученныя произведенія. Тогда мы получимъ общій членъ

(5) $$c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + a_{i3}b_{j3} + \cdots + a_{im}b_{jm}$$

квадратной матриссы n-го порядка

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

На основаніи свойствъ, къ доказательству которыхъ мы сейчасъ перейдемъ, опредѣлитель C называется произведеніемъ обѣихъ данныхъ матриссъ. Въ частности изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что выраженіе (5) есть произведеніе i-той и j-той строкъ данныхъ матриссъ, потому что любую строку элементовъ можно разсматривать, какъ матриссу, состоящую изъ одной строки. Замѣтимъ, что умноженіе матриссъ можно производить и по столбцамъ, а не по строкамъ, такъ что, собственно говоря, получаются два произведенія, но, въ случаѣ прямоугольныхъ матриссъ, одно изъ нихъ, какъ мы вскорѣ увидимъ, всегда равно нулю.

29. Теорема Бине (Binet) [1]. Разложимъ числа c_{ij} на одночлены, которые написаны въ выраженіи (5), и въ первомъ столбцѣ опредѣлителя C вмѣсто каждаго изъ c_{i1} напишемъ только одно изъ его слагаемыхъ $a_{ij_1} b_{1j_1}$, гдѣ j_1 обозначаетъ любое изъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots m$. Точно такъ же во второмъ столбцѣ вмѣсто каждаго c_{i2} напишемъ только одно изъ его слагаемыхъ $a_{ij_2} b_{2j_2}$, гдѣ j_2 опять любое изъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots m$. Подобно этому поступаемъ съ каждымъ изъ столбцовъ въ опредѣлителѣ C. Такимъ путемъ, вмѣсто этого опредѣлителя получимъ слѣдующій:

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a_{1j_1} b_{1j_1} & a_{1j_2} b_{2j_2} \cdots a_{1j_n} b_{nj_n} \\ a_{2j_1} b_{1j_1} & a_{2j_2} b_{2j_2} \cdots a_{2j_n} b_{nj_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{nj_1} b_{1j_1} & a_{nj_2} b_{2j_2} \cdots a_{nj_n} b_{nj_n} \end{vmatrix} = b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} a_{1j_2} \cdots a_{1j_n} \\ a_{2j_1} a_{2j_2} \cdots a_{2j_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{nj_1} a_{nj_2} \cdots a_{nj_n} \end{vmatrix}.$$

Сумма всѣхъ аналогичныхъ ему выраженій, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ способамъ, какими можно выбрать числа $j_1, j_2, \ldots j_n$ изъ ряда $1, 2, 3, \ldots m$, и будетъ равна опредѣлителю C, какъ то слѣдуетъ изъ § 17. Замѣтимъ теперь, что, если какія-нибудь два числа изъ ряда $j_1, j_2, \ldots, j_n$ будутъ между собою равны, то соотвѣтствующій опредѣлитель (6) будетъ равенъ нулю, потому что въ немъ будутъ два тождественныхъ столбца. Поэтому можно ограничиться только тѣми изъ опредѣлителей (6), въ которыхъ всѣ j_k между собою различны. Но, въ случаѣ $m < n$, такихъ, очевидно, не будетъ вовсе, потому что всѣхъ чиселъ j_k имѣется n, а различныхъ значеній, которыя они могутъ имѣть, всего m. Итакъ, если $m < n$ (число столбцовъ меньше числа строкъ), то $C = 0$. Когда $m = n$, т. е. когда данныя матриссы изображаютъ два опре-

[1]) Въ той общей формѣ, въ которой здѣсь эта теорема изложена, она принадлежитъ Коши (Cauchy) (Journ. de l'Ecole polytechn., 1815).

дѣлителя A и B, то, на основаніи § 14, выраженіе (6) будетъ равно слѣдующему:

$$(-1)^s b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^s A b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n},$$

гдѣ s обозначаетъ число обращеній въ перестановкѣ $j_1 j_2 j_3 \dots j_n$ *). Слѣдовательно, на основаніи § 12, находимъ

$$C = A\Sigma(-1)^s b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n} = AB,$$

т. е. опредѣлитель C равенъ произведенію данныхъ опредѣлителей, въ обыкновенномъ смыслѣ. Наконецъ, если $m > n$, то, примѣняя послѣдній результатъ къ каждой системѣ n различныхъ между собою чиселъ, выбираемыхъ изъ ряда $1, 2, 3, \dots m$, найдемъ, что C есть сумма всѣхъ произведеній, получаемыхъ отъ умноженія каждаго старшаго опредѣлителя изъ первой матриссы на соотвѣтствующій опредѣлитель изъ второй (X).

30. Если, въ частности, данныя матриссы тождественны, то полученный умноженіемъ по строкамъ квадратъ матриссы изъ m столбцовъ и n строкъ при $m < n$ равенъ нулю, а въ случаѣ $m \geqq n$ онъ равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ старшихъ опредѣлителей матриссы. Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \dots a_n \\ b_1 b_2 b_3 \dots b_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n & b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ b_1 b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix}^2 + \dots,$$

т. е.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + \dots$$

31. Положимъ, что изъ данныхъ матриссъ A и B мы выдѣлили двѣ новыя, состоящія всего изъ ν строкъ ($\nu < n$), соотвѣтствующихъ двумъ системамъ значеній указателей i и j, по ν чиселъ, взятыхъ изъ ряда $1, 2, \dots n$, въ каждой системѣ. Выдѣлимъ затѣмъ изъ произведенія C двухъ подобныхъ матриссъ A и B, полученнаго умноженіемъ по строкамъ, тотъ миноръ ν-го порядка, который опредѣляется упомянутыми системами указателей i и j. Перемножая по строкамъ выдѣленныя двѣ матриссы, мы тотчасъ увидимъ, что ихъ

*) Потому что новый опредѣлитель получается изъ (6) перемѣщеніемъ столбцовъ (подстановкою), переводящимъ перестановку $j_1 j_2 \dots j_n$ въ главную перестановку $1\,2\,3 \dots n$.

произведеніе равно этому минору. Итакъ, если произведеніе двухъ подобныхъ матриссъ получено умноженіемъ по строкамъ, то миноръ этого произведенія, опредѣляемый двумя системами указателей по ν въ каждой, равенъ произведенію тѣхъ матриссъ, которыя образуются строками, соотвѣтствующими въ A и B тѣмъ же системамъ указателей. Въ частномъ случаѣ, когда обѣ системы совпадаютъ, $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, ..., т. е. когда разсматриваемый миноръ будетъ главнымъ (§ 19), и когда, кромѣ того, матриссы A и B тождественны, оказывается, что въ квадратѣ матриссы всякій главный миноръ есть квадратъ нѣкоторой матриссы (XI).

32. Предположимъ далѣе, что A и B суть квадратныя матриссы и разсмотримъ въ ихъ произведеніи миноръ γ'_{ij}, обыкновенное дополненіе элемента c_{ij}. Чтобы вычислить γ'_{ij}, надо выкинуть въ матриссѣ A i-тую строку, а въ B j-тую строку и перемножить полученныя при этомъ матриссы по строкамъ. Старшіе опредѣлители первой (новой) матриссы мы получимъ, выкидывая въ ней послѣдовательно 1-ый, 2-ой, ..., n-ый столбецъ; мы получаемъ тогда, очевидно, обыкновенныя дополненія $\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2}, \ldots, \alpha'_{in}$ элементовъ $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Аналогично этому старшіе опредѣлители второй (новой) матриссы будутъ $\beta'_{j1}, \beta'_{j2}, \ldots, \beta'_{jn}$. На основаніи теоремы Бине будемъ имѣть

$$\gamma'_{ij} = \alpha'_{i1}\beta'_{j1} + \alpha'_{i2}\beta'_{j2} + \alpha'_{i3}\beta'_{j3} + \cdots + \alpha'_{in}\beta'_{jn}.$$

Замѣчая, что алгебраическое дополненіе элемента a_{ij} равно

$$a_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha'_{ij},$$

находимъ изъ предыдущаго равенства

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\sum_{r=1}^{r=n}[(-1)^{i+r}a_{ir}\cdot(-1)^{j+r}\beta_{jr}] = \sum_{r=1}^{r=n}a_{ir}\beta_{jr},$$

т. е.

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{j1} + \alpha_{i2}\beta_{j2} + \alpha_{i3}\beta_{j3} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{jn}.$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что алгебраическія дополненія элементовъ опредѣлителей A, B и C связаны между собою такъ же, какъ и самые элементы.

33. Упражненія. Предложимъ себѣ вычислить опредѣлитель Смита (Smith):

$$D = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \ldots (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \ldots (2,n) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \ldots (3,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots \\ (n,1) & (n,2) & (n,3) \ldots (n,n) \end{vmatrix},$$

гдѣ (i, j) обозначаетъ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ i и j. Напомнимъ сперва, что если $\varphi(n)$ обозначаетъ число чиселъ, простыхъ съ n и не превышающихъ n, то сумма значеній $\varphi(n)$, въ которыхъ на мѣсто n подставлены по очереди всѣ дѣлители числа n, какъ разъ равно n *). Отсюда слѣдуетъ, что $(i, j) = \Sigma\varphi(m)$, гдѣ суммированіе распространяется на всѣ значенія m, дѣлящія (i, j), т. е. на всѣ общіе дѣлители чиселъ i и j. Поэтому можно представить (i, j) въ слѣдующей формѣ

$$(7)\quad (i, j) = a_{i1}\,a_{j1}\,\varphi(1) + a_{i2}\,a_{j2}\,\varphi(2) + a_{i3}\,a_{j3}\,\varphi(3) + \ldots + a_{in}\,a_{jn}\,\varphi(n),$$

условившись считать $a_{ij} = 1$, когда i дѣлится на j, и $a_{ij} = 0$, когда i не дѣлится на j (такъ что для всѣхъ значеній $i < j$ $a_{ij} = 0$). Въ самомъ дѣлѣ, при этихъ условіяхъ, коэффиціентъ

$$a_{iv}\,a_{jv} \text{ при } \varphi(v)$$

будетъ равенъ 1, когда i и j оба дѣлятся на v, и равенъ 0, когда v не общій дѣлитель чиселъ i и j, такъ что въ формулѣ (7) во второй части будемъ имѣть $\Sigma\varphi(v)$, распространенную на всѣхъ общихъ дѣлителей v чиселъ i и j. Отсюда слѣдуетъ, что въ формулѣ (5) § 28 можно положить $b_{ij} = a_{ij}\varphi(j)$, $c_{ij} = (i, j)$, и опредѣлитель D будетъ равенъ произведенію опредѣлителей

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

и

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}\varphi(1) & a_{12}\varphi(2) & \ldots & a_{1n}\varphi(n) \\ a_{21}\varphi(1) & a_{22}\varphi(2) & \ldots & a_{2n}\varphi(n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\varphi(1) & a_{n2}\varphi(2) & \ldots & a_{nn}\varphi(n) \end{vmatrix} = A\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n).$$

Опредѣлитель A, въ которомъ (по условію $a_{ij} = 0$ при $i < j$) всѣ элементы по одну сторону діагонали равны 0, приводится къ произведенію главныхъ элементовъ, т. е къ 1. Поэтому

$$D = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\ldots\varphi(n).$$

Этотъ результатъ можно представить въ видѣ

$$D = n!\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{2}{3}\right)^{\left[\frac{n}{3}\right]}\left(\frac{4}{5}\right)^{\left[\frac{n}{5}\right]}\left(\frac{6}{7}\right)^{\left[\frac{n}{7}\right]}\left(\frac{10}{11}\right)^{\left[\frac{n}{11}\right]}\ldots,$$

гдѣ $[x]$ обозначаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x. а 2, 3, 5, 7, 11, ... представляютъ рядъ простыхъ чиселъ (XII).

b) Составимъ квадратъ опредѣлителя Вандермонда (§ 27, d). Въ немъ $a_{ij} = a_j^{i-1}$, поэтому

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}\,a_{jr} = \sum_{r=1}^{r=n} a_r^{i+j-2} = s_{i+j-2},$$

*) См., напр., Д. Граве, „Элементарный курсъ теоріи чиселъ“. Кіевъ., 1909, стр. 25.

если

$$s_p = a_1^p + a_2^p + a_3^p + \ldots + a_n^p.$$

Итакъ, опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots s_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

равенъ $(a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2 \ldots (a_{n-1} - a_n)^2$. Это выраженіе называется дискриминантомъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Замѣтимъ, что условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы не всѣ эти числа были различны между собою, состоитъ въ томъ, что дискриминантъ ихъ обращается въ нуль.

c) Опредѣлители, въ которыхъ различныя строки получаются при помощи круговой подстановки, произведенной надъ элементами первой строки, называются циркулянтами. Мы увидимъ впослѣдствіи, что уравненіе $x^n - 1 = 0$ имѣетъ n различныхъ между собою корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, въ числѣ которыхъ всегда находится единица. Чтобы вычислить значеніе циркулянта

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n \\ a_n & a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 \ldots a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_3 & a_1 \ldots a_1 \end{vmatrix},$$

умножимъ его на опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \ldots \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Если положимъ для сокращенія

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1},$$

то произведеніе всякой строки $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ опредѣлителя Δ на первую строку опредѣлителя D равно $f(\alpha)$, а произведеніе той же строки въ Δ на i-тую строку въ D равно

$$a_{n-i+2} + a_{n-i+3}\,\alpha + \cdots + a_n \alpha^{i-2} + a_1 \alpha^{i-1} + a_2 \alpha^i + \cdots + a_{n-i+1} \alpha^{n-1}$$

или, если принять во вниманіе, что $\alpha^n = 1$,

$$a_1 \alpha^{i-1} + a_2 \alpha^i + \cdots + a_{n-i+2} \alpha^n + a_{n-i+3} \alpha^{n+1} + \cdots + a_n \alpha^{n+i-2} = \alpha^{i-1} f(\alpha).$$

Слѣдовательно,

$$D\Delta = \begin{vmatrix} f(a_1) & a_1 f(a_1) & a_1^2 f(a_1) \dots a_1^{n-1} f(a_1) \\ f(a_2) & a_2 f(a_2) & a_2^2 f(a_2) \dots a_2^{n-1} f(a_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(a_n) & a_n f(a_n) & a_n^2 f(a_n) \dots a_n^{n-1} f(a_n) \end{vmatrix},$$

а этотъ опредѣлитель, по выдѣленіи множителей $f(a_1), f(a_2), \dots f(a_n)$, приводится къ Δ. Поэтому, принимая во вниманіе, что Δ не равенъ 0,

$$D = f(a_1) f(a_2) f(a_3) \dots f(a_n).$$

Если умѣемъ найти числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ (а это будетъ потомъ показано), то сумѣемъ вычислить всякій циркулянтъ по предыдущей формулѣ. Для $n = 4$ мы уже, напримѣръ, знаемъ, что уравненіе $x^4 - 1 = 0$ имѣетъ корни $1, -1, \sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, получаемые рѣшеніемъ уравненій $x^2 - 1 = 0$ и $x^2 + 1 = 0$. Поэтому для циркулянта, опредѣляемаго элементами a, b, c, d, имѣемъ

$$f(1) = a + b + c + d, \qquad f(\sqrt{-1}) = a - c + (b - d)\sqrt{-1},$$
$$f(-1) = a - b + c - d, \quad f(-\sqrt{-1}) = a - c - (b - d)\sqrt{-1},$$

а потому (ср. съ § 27, b)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = (a + b + c + d)\,(a - b + c - d)\,[(a - c)^2 + (b - d)^2].$$

d) Положимъ, что данъ нѣкоторый симметрическій опредѣлитель A порядка n, т. е. такой, въ которомъ сопряженные элементы между собою равны ($a_{ij} = a_{ji}$). Обозначимъ черезъ $f(x)$ тотъ опредѣлитель, который получимъ, прибавивъ къ каждому изъ главныхъ элементовъ опредѣлителя A число x. Мы знаемъ (§ 27, i), что $f(x)$ есть полиномъ степени n относительно x. Такой полиномъ обращается въ нуль только при n значеніяхъ числа x, какъ будетъ впослѣдствіи доказано (§ 449). Съ помощью умноженія опредѣлителей легко доказать, какъ это сдѣлалъ Сильвестеръ (Sylvester, Philosophical Magazine, 1852), что, если всѣ элементы симметрическаго опредѣлителя A вещественны, то и всѣ корни полинома $f(x)$, т. е. корни уравненія $f(x) = 0$, также вещественны. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что всѣ корни уравненія $f(x)f(-x) = 0$ вещественны. Обозначимъ черезъ c_{ij} общее выраженіе элемента въ опредѣлителѣ C, равномъ квадрату A. Тогда общій членъ произведенія опредѣлителей $f(x)f(-x)$ будетъ

$$a_{i1}a_{j1} + \dots + (a_{ii} + x)\,a_{ji} + \dots + a_{ij}\,(a_{jj} - x) + \dots + a_{in}a_{jn} = c_{ij}$$

при $i \neq j$, и

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + (a_{ii} + x)\,(a_{ii} - x) + \dots + a_{in}^2 = c_{ii} - x^2,$$

при $i = j$. Слѣдовательно, уравненіе $f(x)f(-x) = 0$ можно представить

въ видѣ

$$\begin{vmatrix} c_{11}-x^2 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-x^2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}-x^2 \end{vmatrix} = 0$$

или (§ 27, i) въ видѣ

$$(8)\quad C+\sigma_{n-1}(-x^2)+\sigma_{n-2}(-x^2)^2+\dots+\sigma_1(-x^2)^{n-1}+(-x^2)^n=0,$$

гдѣ σ_ν обозначаетъ сумму всѣхъ главныхъ миноровъ порядка ν въ опредѣлителѣ C. Но извѣстно (§ 31), что, какъ C, такъ и всѣ σ_ν — числа существенно положительныя. Поэтому уравненіе (8) не можетъ имѣть корней вида $q\sqrt{-1}$, при q вещественномъ, неравномъ нулю, такъ какъ при такихъ значеніяхъ x лѣвая часть уравненія (8) есть число положительное. А чтобы удостовѣриться, что уравненіе (8) не можетъ имѣть корней вида $p+q\sqrt{-1}$, стоитъ только включить число p въ главные элементы опредѣлителя A и свести такимъ образомъ этотъ случай къ предыдущему. Слѣдовательно, всякое значеніе x, удовлетворяющее данному уравненію, непремѣнно будетъ вещественнымъ *).

Взаимные опредѣлители.

34. Обозначая черезъ a_{ij} алгебраическое дополненіе элемента a_{ij}, разсмотримъ опредѣлитель

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель Δ называется взаимнымъ (reziproke) опредѣлителемъ отъ даннаго D. Мы докажемъ слѣдующую теорему: Каждый миноръ второго порядка въ Δ равенъ алгебраическому дополненію соотвѣтствующаго ему минора въ D, умноженному на D. Прежде всего замѣтимъ, что a_{rs} можно получить изъ D, если въ немъ на мѣсто a_{rs} поставимъ 1, а на мѣсто всѣхъ другихъ элементовъ r-ой строки 0. Дѣйствительно, разлагая полученный такимъ образомъ опредѣлитель по элементамъ r-ой строки (§ 23), тотчасъ увидимъ, что это разложеніе приведется къ одному члену, равному a_{rs}.

*) Эту теорему можно, напримѣръ, примѣнить къ доказательству вещественности корней уравненія 3-ей степени, которое разсматривается въ аналитической геометріи при опредѣленіи направленія осей поверхностей 2-го порядка.

Итакъ,

$$a_{rs} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1s} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{is} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots 0 \dots 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{ns} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Въ этомъ новомъ опредѣлителѣ умножимъ всѣ элементы j-аго столбца на a_{ij}, $(i \neq r,\ j \neq s)$ и прибавимъ къ нимъ соотвѣтственные элементы всѣхъ другихъ столбцовъ, предварительно умноживъ ихъ по очереди на $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$. Тогда на r-омъ мѣстѣ j-аго столбца окажется элементъ a_{is}, а на всякомъ другомъ ν-омъ мѣстѣ $(\nu \neq r)$ того же столбца будетъ (§ 24)

$$a_{\nu 1}a_{i1} + a_{\nu 2}a_{i2} + a_{\nu 3}a_{i3} + \dots + a_{\nu n}a_{in} = \begin{cases} D & \text{при } \nu = i, \\ 0 & \text{при } \nu \neq i. \end{cases}$$

Съ другой стороны, произведенная операція даетъ въ результатѣ произведеніе $a_{ij}a_{rs}$ (§§ 15 и 17). Слѣдовательно,

$$a_{ij}a_{rs} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots 0 \dots a_{1s} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots D \dots a_{is} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots a_{is} \dots 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots 0 \dots a_{ns} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначимъ послѣдній опредѣлитель буквою D' и замѣтимъ, что онъ отличается отъ даннаго D только элементами i-ой и r-ой строки и j-го и s-аго столбца; всѣ остальные элементы въ D' и D одинаковы. Разложимъ теперь опредѣлитель D' по элементамъ j-аго столбца. Такъ какъ въ этомъ столбцѣ, за исключеніемъ элементовъ a_{is} и D, всѣ остальные равны нулю, то въ разложеніи его останутся только два члена: произведеніе a_{is} на его алгебраическое дополненіе въ D' и произведеніе элемента D на его алгебраическое дополненіе въ D'. Алгебраическое дополненіе элемента a_{is}, какъ легко видѣть, равно a_{rj}. Чтобы получить алгебраическое дополненіе элемента D, надо въ D' выкинуть i-ую строку и j-ый столбецъ, въ пересѣченіи которыхъ стоитъ D, и приписать результату знакъ $(-1)^{i+j}$. Получаемый при этомъ опредѣлитель отличается отъ a_{ij} только тѣмъ, что вмѣсто элементовъ

$$a_{r1},\ a_{r2}, \dots, a_{rs}, \dots, a_{rn}$$

стоятъ элементы

$$0,\ 0,\ \ldots\ 1,\ \ldots\ 0.$$

Поэтому искомое алгебраическое дополненіе элемента D въ D' получимъ, если выкинемъ въ послѣднемъ еще r-ую строку и s-ый столбецъ, и припишемъ знакъ $(-1)^{r+s}$. Припоминая сказанное о видѣ опредѣлителей D и D', а именно, что они отличаются только элементами, стоящими въ выкидываемыхъ строкахъ и столбцахъ, находимъ, что найденное выраженіе совпадаетъ съ тѣмъ, которое получится, если въ данномъ опредѣлителѣ D выкинемъ i-ую и r-ую строки, j-ый и s-ый столбцы и припишемъ результату знакъ $(-1)^{i+j+r+s}$. А тогда, какъ извѣстно, получается алгебраическое дополненіе минора

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix}$$

въ опредѣлителѣ D. Обозначая это дополненіе буквою $\mathfrak{a}_{ijrs}$, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$a_{ij}\,a_{rs} = a_{is}\,a_{rj} + D\,\mathfrak{a}_{ijrs}, \tag{9}$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix} = D\,\mathfrak{a}_{ijrs},$$

что и требовалось доказать *).

35. Изъ формулы (9) легко вывести полученную уже раньше важную формулу (§ 25). Умножая обѣ части равенства (9) на $a_{is}\,a_{rj}$ и суммируя по i и j, находимъ

$$a_{rs}\sum_{i,\,j} a_{ij}\,a_{is}\,a_{rj} = \sum_{i,\,j} a_{is}\,a_{rj}\,a_{is}\,a_{rj} + D\sum_{i,\,j}\mathfrak{a}_{ijrs}\,a_{is}\,a_{rj}.$$

Сумма въ лѣвой части (§§ 23 и 24) равна

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{is}(a_{r1}\,a_{i1} + a_{r2}\,a_{i2} + \cdots + a_{rn}\,a_{in}) = D\,a_{rs},$$

а первую сумму въ правой части можно написать такъ:

$$\sum_{i} a_{is}\,a_{is}\cdot\sum_{j} a_{rj}\,a_{rj} = D^2.$$

А потому (срав. съ § 25)

$$a_{rs}\,a_{rs} = D + \sum_{i,\,j}\mathfrak{a}_{ijrs}\,a_{is}\,a_{rj}.$$

---

*) См. примѣчаніе (XIII).

36. Если какой-нибудь опредѣлитель обращается въ нуль, то и взаимный его опредѣлитель обратится въ нуль. Кромѣ того, обратятся тогда въ нуль и всѣ миноры взаимнаго опредѣлителя до миноровъ второго порядка включительно. Дѣйствительно, изъ § 34 слѣдуетъ, что при $D = 0$ всѣ миноры второго порядка въ Δ будутъ равны нулю. Отсюда далѣе вытекаетъ, что и всѣ миноры высшаго порядка и сама Δ будутъ равны нулю. Чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ только представить себѣ всѣ эти опредѣлители разложенными по минорамъ, содержащимся въ какихъ-нибудь двухъ столбцахъ или строкахъ. Замѣтимъ еще, что изъ соотношеній

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j3} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j2} & a_{j3} \end{vmatrix} = 0, \ldots$$

слѣдуетъ

$$\frac{a_{i1}}{a_{j1}} = \frac{a_{i2}}{a_{j2}} = \frac{a_{i3}}{a_{j3}} = \cdots = \frac{a_{in}}{a_{jn}},$$

т. е. что при $D = 0$ въ опредѣлителѣ Δ всѣ параллельные между собою ряды эквивалентны (§ 16). Иными словами: Если какой-нибудь опредѣлитель равенъ нулю, то алгебраическія дополненія элементовъ любого ряда пропорціональны алгебраическимъ дополненіямъ элементовъ всякого другого параллельнаго ему ряда *).

37. Если D не равно 0, то и Δ не равно 0. Дѣйствительно, опредѣлитель Δ равенъ D^{n-1}, если n есть порядокъ даннаго опредѣлителя D. Чтобы это доказать, перемножимъ D и Δ по строкамъ. Общее выраженіе элемента произведенія будетъ

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ir} a_{jr} = \begin{cases} D & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Слѣдовательно,

$$D\Delta = \begin{vmatrix} D & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & D \end{vmatrix} = D^n,$$

откуда, при $D \neq 0$, получимъ $\Delta = D^{n-1}$. Это равенство справедливо и при $D = 0$, потому что тогда и $\Delta = 0$.

---

*) Полезно замѣтить, что то же самое можно сказать и объ обыкновенныхъ дополненіяхъ, потому что замѣна алгебраическихъ дополненій обыкновенными въ приведенныхъ выше равенствахъ равносильна умноженію всѣхъ дробей на $(-1)^{i+j}$.

38. Во взаимномъ опредѣлителѣ опредѣлителя D всякій миноръ порядка ν равенъ алгебраическому дополненію соотвѣтствующаго ему минора въ D, умноженному на $D^{\nu-1}$. При $\nu = 1$ эта теорема есть не что иное, какъ опредѣленіе взаимнаго опредѣлителя; при $\nu = 2$ она доказана въ § 34. Пусть теперь $\nu > 2$. Обозначимъ черезъ Δ_ν тотъ миноръ въ Δ, который опредѣляется указателями $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ и $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_{n-\nu}$ будутъ числа, оставшіяся въ рядѣ $1, 2, \ldots n$, когда изъ него исключимъ числа $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$, а $s_1, s_2, \ldots, s_{n-\nu}$, аналогично—числа, оставшіяся въ томъ-же рядѣ, по исключеніи изъ него чиселъ $j_1, j_2, \ldots j_\nu$ *). Опредѣлитель Δ_ν можно написать въ видѣ:

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i_1 s_1} & a_{i_1 s_2} & \ldots & a_{i_1 s_{n-\nu}} & a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\nu} \\ a_{i_2 s_1} & a_{i_2 s_2} & \ldots & a_{i_2 s_{n-\nu}} & a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_\nu s_1} & a_{i_\nu s_2} & \ldots & a_{i_\nu s_{n-\nu}} & a_{i_\nu j_1} & a_{i_\nu j_2} & \ldots & a_{i_\nu j_\nu} \end{vmatrix}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если разложимъ написанный здѣсь опредѣлитель по минорамъ, содержащимся въ послѣднихъ ν столбцахъ, то тотчасъ увидимъ, что всѣ члены разложенія обратятся въ нуль, за исключеніемъ одного

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix} \Delta_\nu = 1 . \Delta_\nu .$$

Съ другой стороны, перемѣщеніемъ строкъ, а также и столбцовъ въ данномъ опредѣлителѣ D, его можно представить въ видѣ

$$D = (-1)^\varrho \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & a_{r_1 s_2} & \ldots & a_{r_1 s_{n-\nu}} & a_{r_1 j_1} & a_{r_1 j_2} & \ldots & a_{r_1 j_\nu} \\ a_{r_2 s_1} & a_{r_2 s_2} & \ldots & a_{r_2 s_{n-\nu}} & a_{r_2 j_1} & a_{r_2 j_2} & \ldots & a_{r_2 j_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r_{n-\nu} s_1} & a_{r_{n-\nu} s_2} & \ldots & a_{r_{n-\nu} s_{n-\nu}} & a_{r_{n-\nu} j_1} & a_{r_{n-\nu} j_2} & \ldots & a_{r_{n-\nu} j_\nu} \\ a_{i_1 s_1} & a_{i_1 s_2} & \ldots & a_{i_1 s_{n-\nu}} & a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\nu} \\ a_{i_2 s_1} & a_{i_2 s_2} & \ldots & a_{i_2 s_{n-\nu}} & a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_\nu s_1} & a_{i_\nu s_2} & \ldots & a_{i_\nu s_{n-\nu}} & a_{i_\nu j_1} & a_{i_\nu j_2} & \ldots & a_{i_\nu j_\nu} \end{vmatrix},$$

*) Всѣ написанные выше ряды чиселъ предположимъ расположенными въ возрастающемъ порядкѣ.

гдѣ ϱ обозначаетъ число всѣхъ обращеній въ перестановкахъ $r_1 r_2 \dots r_{n-\nu} i_1 i_2 \dots i_\nu$ и $s_1 s_2 \dots s_{n-\nu} j_1 j_2 \dots j_\nu$ *). Это число ϱ одинаковой четности съ числомъ

$$\sigma = r_1 + r_2 + \dots + r_{n-\nu} + s_1 + s_2 + \dots + s_{n-\nu}.$$

Дѣйствительно, по сдѣланному предположенію о порядкѣ расположенія числъ r, i, s и j, число обращеній въ указанныхъ перестановкахъ будетъ равно числу обращеній, образуемыхъ элементами группы $r_1, r_2 \dots r_{n-\nu}$ съ элементами группы $i_1, i_2 \dots i_\nu$, плюсъ число обращеній, образуемыхъ элементами группы $s_1, s_2 \dots s_{n-\nu}$ съ элементами группы $j_1, j_2 \dots j_\nu$. Примѣняя къ счету этихъ двухъ чиселъ формулу § 2, мы найдемъ

$$\varrho = \sigma - (n-\nu)(n-\nu+1),$$

откуда прямо и вытекаетъ сказанное о числахъ ϱ и σ.

Теперь перемножимъ D и Δ по строкамъ, пользуясь формулою (5) § 28; тогда найдемъ:

$$D\Delta_\nu = (-1)^\sigma \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & a_{r_1 s_2} & \dots & a_{r_1 s_{n-\nu}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{r_2 s_1} & a_{r_2 s_2} & \dots & a_{r_2 s_{n-\nu}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_{n-\nu} s_1} & a_{r_{n-\nu} s_2} & \dots & a_{r_{n-\nu} s_{n-\nu}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i_1 s_1} & a_{i_1 s_2} & \dots & a_{i_1 s_{n-\nu}} & D & 0 & \dots & 0 \\ a_{i_2 s_1} & a_{i_2 s_2} & \dots & a_{i_2 s_{n-\nu}} & 0 & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\nu s_1} & a_{i_\nu s_2} & \dots & a_{i_\nu s_{n-\nu}} & 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix}.$$

Отсюда, разлагая по минорамъ, содержащимся въ послѣднихъ ν столбцахъ (при чемъ опять обратятся въ 0 всѣ члены разложенія, кромѣ одного съ минором

$$\begin{vmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix} = D^\nu)$$

и раздѣляя на $D \neq 0$, получимъ:

$$\Delta_\nu = (-1)^\sigma D^{\nu-1} \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & a_{r_1 s_2} & \dots & a_{r_1 s_{n-\nu}} \\ a_{r_2 s_1} & a_{r_2 s_2} & \dots & a_{r_2 s_{n-\nu}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_{n-\nu} s_1} & a_{r_{n-\nu} s_2} & \dots & a_{r_{n-\nu} s_{n-\nu}} \end{vmatrix},$$

*) Это слѣдуетъ изъ того, что произведеніе элементовъ главной діагонали опредѣлителя въ правой части формулы входитъ въ его выраженіе со знакомъ $+$, а въ выраженіе D именно со знакомъ $(-1)^\varrho$.

что и доказываетъ теорему, потому что множитель при $D^{\nu-1}$ въ правой части, очевидно, изображаетъ алгебраическое дополненіе минора, который опредѣляется указателями $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ и $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ въ опредѣлителѣ D и который соотвѣтствуетъ минору Δ_ν въ Δ. Полученный результатъ справедливъ и при $D = 0$ и $\nu > 1$, потому что даетъ тогда, согласно доказанному въ § 36, $\Delta_\nu = 0$.

39. Алгебраическое дополненіе минора Δ_ν порядка ν въ Δ есть миноръ $\Delta_{n-\nu}$ порядка $n-\nu$, взятый съ тѣмъ же знакомъ, съ какимъ надо взять миноръ D_ν въ D, соотвѣтствующій минору Δ_ν, чтобы получить алгебраическое дополненіе минора $D_{n-\nu}$, соотвѣтствующаго минору $\Delta_{n-\nu}$. Поэтому, на основаніи теоремы § 38, алгебраическое дополненіе минора Δ_ν равно произведенію $D^{n-\nu-1}$ на миноръ D_ν. Иными словами: алгебраическое дополненіе минора порядка ν во взаимномъ опредѣлителѣ опредѣлителя D равно соотвѣтствующему минору въ D, умноженному на $D^{n-\nu-1}$. Въ частности, при $\nu = 1$, мы видимъ, что алгебраическое дополненіе элемента во взаимномъ опредѣлителѣ Δ опредѣлителя D равно соотвѣтствующему элементу въ D, умноженному на D^{n-2}. Отсюда слѣдуетъ, что взаимный опредѣлитель взаимнаго опредѣлителя D есть

$$\begin{vmatrix} a_{11}D^{n-2} & a_{12}D^{n-2} & \ldots & a_{1n}D^{n-2} \\ a_{21}D^{n-2} & a_{22}D^{n-2} & \ldots & a_{2n}D^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}D^{n-2} & a_{n2}D^{n-2} & \ldots & a_{nn}D^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Его значеніе должно быть равно $(n-1)$-ой степени отъ D^{n-1} (§ 37), и дѣйствительно оно равно

$$D^{(n-2)n}D = D^{n^2-2n+1} = D^{(n-1)^2}.$$

(см. примѣч. XIV).

40. Сдѣлаемъ еще одно замѣчаніе. Если перемножимъ взаимные опредѣлители двухъ данныхъ, то полученное произведеніе будетъ равно взаимному опредѣлителю произведенія данныхъ опредѣлителей. Само собою разумѣется, что умноженія производятся въ обоихъ случаяхъ по строкамъ, или въ обоихъ случаяхъ по столбцамъ. Дѣйствительно, производя умноженія по строкамъ, напримѣръ, мы найдемъ слѣдующее общее выраженіе элемента произведенія взаимныхъ опредѣлителей

$$\alpha_{i1}\beta_{j1} + \alpha_{i2}\beta_{j2} + \alpha_{i3}\beta_{j3} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{jn},$$

а изъ § 32 извѣстно, что эта сумма есть алгебраическое дополненіе γ_{ij} элемента c_{ij} въ произведеніи данныхъ опредѣлителей.

41. Теорема, доказанная въ концѣ § 36, допускаетъ обобщеніе, которое полезно замѣтить. Обозначимъ черезъ μ рангъ опредѣлителя D (§ 18), равнаго нулю, и разсмотримъ нѣкоторый его миноръ

$$\begin{vmatrix}
a_{i_1r_1} & a_{i_1r_2} & \dots & a_{i_1r_q} & a_{i_1r_{q+1}} & a_{i_1s_{q+1}} & a_{i_1s_{q+2}} & \dots & a_{i_1s_\mu} \\
a_{i_2r_1} & a_{i_2r_2} & \dots & a_{i_2r_q} & a_{i_2r_{q+1}} & a_{i_2s_{q+1}} & a_{i_2s_{q+2}} & \dots & a_{i_2s_\mu} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i_pr_1} & a_{i_pr_2} & \dots & a_{i_pr_q} & a_{i_pr_{q+1}} & a_{i_ps_{q+1}} & a_{i_ps_{q+2}} & \dots & a_{i_ps_\mu} \\
a_{i_{p+1}r_1} & a_{i_{p+1}r_2} & \dots & a_{i_{p+1}r_q} & a_{i_{p+1}r_{q+1}} & a_{i_{p+1}s_{q+1}} & a_{i_{p+1}s_{q+2}} & \dots & a_{i_{p+1}s_\mu} \\
a_{j_{p+1}r_1} & a_{j_{p+1}r_2} & \dots & a_{j_{p+1}r_q} & a_{j_{p+1}r_{q+1}} & a_{j_{p+1}s_{q+1}} & a_{j_{p+1}s_{q+2}} & \dots & a_{j_{p+1}s_\mu} \\
a_{j_{p+2}r_1} & a_{j_{p+2}r_2} & \dots & a_{j_{p+2}r_q} & a_{j_{p+2}r_{q+1}} & a_{j_{p+2}s_{q+1}} & a_{j_{p+2}s_{q+2}} & \dots & a_{j_{p+2}s_\mu} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{j_\mu r_1} & a_{j_\mu r_2} & \dots & a_{j_\mu r_q} & a_{j_\mu r_{q+1}} & a_{j_\mu s_{q+1}} & a_{j_\mu s_{q+2}} & \dots & a_{j_\mu s_\mu}
\end{vmatrix}.$$

Этотъ миноръ также равенъ нулю, потому ли что онъ можетъ имѣть эквивалентные паралельные ряды, или потому, что порядокъ его во всякомъ случаѣ больше μ *). Если условимся обозначить черезъ $\mathfrak{a}_{pq}$ обыкновенное дополненіе перваго изъ слѣдующихъ четырехъ элементовъ

$$\begin{vmatrix} a_{i_{p+1}r_{q+1}} & a_{i_{p+1}s_{q+1}} \\ a_{j_{p+1}r_{q+1}} & a_{j_{p+1}s_{q+1}} \end{vmatrix}$$

въ выше написанномъ опредѣлителѣ, то ясно, что обыкновенныя дополненія остальныхъ трехъ будутъ $\mathfrak{a}_{p,\,q+1}$, $\mathfrak{a}_{p+1,\,q}$, $\mathfrak{a}_{p+1,\,q+1}$. Поэтому (см. § 36 и выноску къ нему), будемъ имѣть

$$\frac{\mathfrak{a}_{p,\,q}}{\mathfrak{a}_{p+1,\,q}} = \frac{\mathfrak{a}_{p,\,q+1}}{\mathfrak{a}_{p+1,\,q+1}};$$

переписавъ это въ видѣ

$$\frac{\mathfrak{a}_{p,\,q}}{\mathfrak{a}_{p,\,q+1}} = \frac{\mathfrak{a}_{p+1,\,q}}{\mathfrak{a}_{p+1,\,q+1}}$$

и давая числу p значенія 0, 1, 2, ..., $\mu - 1$, получимъ

$$\frac{\mathfrak{a}_{0q}}{\mathfrak{a}_{0,\,q+1}} = \frac{\mathfrak{a}_{1q}}{\mathfrak{a}_{1,\,q+1}} = \frac{\mathfrak{a}_{2q}}{\mathfrak{a}_{2,\,q+1}} = \dots = \frac{\mathfrak{a}_{\mu q}}{\mathfrak{a}_{\mu,\,q+1}},$$

а отсюда выведемъ далѣе

$$\frac{\mathfrak{a}_{00}}{\mathfrak{a}_{\mu 0}} = \frac{\mathfrak{a}_{01}}{\mathfrak{a}_{\mu 1}} = \frac{\mathfrak{a}_{02}}{\mathfrak{a}_{\mu 2}} = \dots = \frac{\mathfrak{a}_{0\mu}}{\mathfrak{a}_{\mu\mu}}.$$

*). Порядокъ его равенъ $p + 1 + \mu - (p + 1) + 1 = \mu + 1$.

Замѣтимъ въ то же время, что

$$a_{\mu\mu} = \begin{vmatrix} a_{i_1r_1} & a_{i_1r_2} & \cdots & a_{i_1r_\mu} \\ a_{i_2r_1} & a_{i_2r_2} & \cdots & a_{i_2r_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_\mu r_1} & a_{i_\mu r_2} & \cdots & a_{i_\mu r_\mu} \end{vmatrix}, \quad a_{\mu 0} = \begin{vmatrix} a_{i_1s_1} & a_{i_1s_2} & \cdots & a_{i_1s_\mu} \\ a_{i_2s_1} & a_{i_2s_2} & \cdots & a_{i_2s_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_\mu s_1} & a_{i_\mu s_2} & \cdots & a_{i_\mu s_\mu} \end{vmatrix},$$

$$a_{0\mu} = \begin{vmatrix} a_{j_1r_1} & a_{j_1r_2} & \cdots & a_{j_1r_\mu} \\ a_{j_2r_1} & a_{j_2r_2} & \cdots & a_{j_2r_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_\mu r_1} & a_{j_\mu r_2} & \cdots & a_{j_\mu r_\mu} \end{vmatrix}, \quad a_{00} = \begin{vmatrix} a_{j_1s_1} & a_{j_1s_2} & \cdots & a_{j_1s_\mu} \\ a_{j_2s_1} & a_{j_2s_2} & \cdots & a_{j_2s_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_\mu s_1} & a_{j_\mu s_2} & \cdots & a_{j_\mu s_\mu} \end{vmatrix}.$$

(См. прим. XV.).

Итакъ, если рангъ даннаго опредѣлителя, обращающагося въ нуль, равенъ μ, то всѣ миноры, содержащіеся въ нѣкоторыхъ μ строкахъ (или столбцахъ), пропорціональны соотвѣтствующимъ минорамъ*), содержащимся въ какихъ угодно другихъ μ строкахъ (или столбцахъ) (XV).

Свойства нѣкоторыхъ опредѣлителей особаго вида.

42. Опредѣлитель, въ которомъ каждый элементъ равенъ своему сопряженному, $a_{ij} = a_{ji}$, называется симметрическимъ (§ 33, *d*). Опредѣлитель называется косымъ симметрическимъ, если каждые два сопряженные элементы равны между собою по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку, $a_{ij} = -a_{ji}$; а слѣдовательно, въ частности всѣ главные элементы равны нулю: $a_{ii} = 0$. Если вмѣсто нулей на мѣстѣ главныхъ элементовъ косого симметрическаго опредѣлителя поставимъ числа, не равныя нулю одновременно, то получимъ псевдосимметрическій опредѣлитель.

Такъ, напримѣръ, изъ двухъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} a & r & -q \\ -r & b & p \\ q & -p & c \end{vmatrix} = abc + ap^2 + bq^2 + cr^2, \quad \begin{vmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

первый псевдосимметрическій, второй косой симметрическій.

Примѣромъ симметрическаго опредѣлителя можетъ служить опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

*) Соотвѣтствующими называются миноры, содержащіеся въ данныхъ строкахъ (столбцахъ) и составленные изъ равноименныхъ столбцовъ (строкъ).

Симметрическимъ будетъ всякій опредѣлитель, получаемый возвышеніемъ въ квадратъ любого опредѣлителя *). Всѣ опредѣлители трехъ упомянутыхъ типовъ пользуются тѣмъ общимъ имъ всѣмъ свойствомъ, что главные миноры опредѣлителя даннаго типа будутъ опредѣлителями того же типа, т. е. главный миноръ симметрическаго опредѣлителя есть также симметрическій и т. д.

43. Симметрическіе опредѣлители. Ясно, что сопряженные миноры (§ 19) симметрическаго опредѣлителя между собою равны, потому что строки одного совпадаютъ со столбцами другого и наоборотъ (см. прим. III). Въ частности алгебраическія дополненія двухъ сопряженныхъ элементовъ равны между собою т. е. при $a_{ij} = a_{ji}$ и $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, а потому взаимный опредѣлитель симметрическаго опредѣлителя также симметрическій. Далѣе, если примѣнимъ теорему § 41 ($a_{00}\,\alpha_{\mu\mu} = a_{0\mu}\,\alpha_{\mu 0}$) и сдѣлаемъ указатели $r_1, r_2, r_3, \ldots$ и $s_1, s_2, s_3, \ldots$ соотвѣтственно равными указателямъ $i_1, i_2, i_3, \ldots$ и $j_1, j_2, j_3 \ldots$, то найдемъ, замѣчая, что въ нашемъ случаѣ $a_{0\mu} = a_{\mu 0}$, слѣдующее равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_\mu} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_\mu j_1} & a_{i_\mu j_2} & \ldots & a_{i_\mu j_\mu} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_\mu} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_\mu i_1} & a_{i_\mu i_2} & \ldots & a_{i_\mu i_\mu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{j_1j_1} & a_{j_1j_2} & \ldots & a_{j_1j_\mu} \\ a_{j_2j_1} & a_{j_2j_2} & \ldots & a_{j_2j_\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j_\mu j_1} & a_{j_\mu j_2} & \ldots & a_{j_\mu j_\mu} \end{vmatrix}.$$

Итакъ, если рангъ симметрическаго опредѣлителя равенъ μ, то квадратъ всякаго минора порядка μ равенъ произведенію двухъ главныхъ миноровъ того же порядка. Отсюда слѣдуетъ, что главные миноры порядка μ не могутъ всѣ одновременно обратиться въ нуль, потому что тогда и всѣ вообще миноры порядка μ были-бы равны нулю, и рангъ опредѣлителя былъ бы ниже μ.

44. Косые симметрическіе опредѣлители. Если у всѣхъ элементовъ косого симметрическаго опредѣлителя измѣнимъ знаки на противоположные, то произойдетъ лишь замѣна строкъ столбцами и наоборотъ, такъ что опредѣлитель своей величины не измѣнитъ. Но, съ другой стороны, при подобномъ преобразованіи (умноженіи всѣхъ элементовъ на -1), какъ извѣстно (§ 15), опредѣлитель пріобрѣтаетъ множитель $(-1)^n$. Слѣдовательно, $D = (-1)^n D$, и при n нечетномъ $D = 0$. Итакъ, всякій косой симметрическій опредѣлитель нечетнаго порядка равенъ нулю. Примѣняя такой же способъ разсужденія къ двумъ сопряженнымъ минорамъ, тотчасъ увидимъ, что во всякомъ косомъ симметрическомъ опредѣлителѣ сопряженные миноры либо равны между собою, либо равны только по абсолютной величинѣ, смотря по тому, будутъ-ли они четнаго или нечетнаго порядка.

*) См. формулу (5) § 28 при $a_{ij} = b_{ij}$.

Отсюда, въ частности, слѣдуетъ, что алгебраическія дополненія двухъ сопряженныхъ элементовъ косого симметрическаго опредѣлителя порядка n (какъ сопряженные миноры порядка $n-1$) будутъ между собою равны, если n число нечетное, или равны только по абсолютной величинѣ, если n число четное. Наконецъ, изъ этой теоремы вытекаетъ, что взаимный опредѣлитель даннаго косого симметрическаго опредѣлителя будетъ симметрическимъ, когда онъ нечетнаго порядка, и косымъ симметрическимъ, когда онъ четнаго порядка (XVI).

45. Положимъ, что нѣкоторый опредѣлитель D, равный нулю, имѣетъ взаимный симметрическій опредѣлитель. Въ этомъ послѣднемъ, какъ извѣстно (§ 36), всѣ миноры второго порядка равны нулю, такъ что

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 = 0, \quad a_{ij} = \sqrt{a_{ii}a_{jj}},$$

откуда

$$(10) \qquad \frac{a_{i1}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{a_{i2}}{\sqrt{a_{22}}} = \frac{a_{i3}}{\sqrt{a_{33}}} = \cdots = \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}}} = \cdots = \frac{a_{in}}{\sqrt{a_{nn}}} = \sqrt{a_{ii}}.$$

Иными словами: если взаимный опредѣлитель даннаго опредѣлителя, равнаго нулю, есть опредѣлитель симметрическій, то элементы любого его ряда пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ соотвѣтственныхъ имъ главныхъ его элементовъ.

Въ частности эту теорему можно примѣнить ко всякому симметрическому опредѣлителю, равному нулю (§ 43), и, на основаніи перваго и послѣдняго свойства косыхъ симметрическихъ опредѣлителей, доказанныхъ въ § 44, къ взаимному опредѣлителю всякаго косого симметрическаго опредѣлителя нечетнаго порядка. Важно замѣтить слѣдующее: чтобы перейти отъ формулы $a_{ij} = \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$ къ формуламъ (10), надо первую написать въ видѣ $a_{ij} = \sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}$, одному изъ корней квадратныхъ можно приписать любой знакъ, а знакъ другого вполнѣ опредѣлится по знаку извѣстной лѣвой части формулы, т. е. по знаку числа $a_{ij} = a_{ji}$. Такимъ образомъ, если мы выберемъ по произволу знакъ, напримѣръ, у $\sqrt{a_{11}}$, то знаки всѣхъ другихъ $\sqrt{a_{22}}, \ldots \sqrt{a_{nn}}$ опредѣлятся изъ формулъ

$$a_{12} = a_{21} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}, \ldots a_{1n} = a_{n1} = \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{nn}}.$$

46. Всякій косой симметрическій опредѣлитель четнаго порядка n равенъ квадрату выраженія, цѣлаго и раціональ-

наго относительно его элементовъ. Теорема очевидна при $n = 2$, такъ какъ

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2.$$

Поэтому достаточно показать, что она будетъ справедлива для косого симметрическаго опредѣлителя четнаго порядка n, если допустимъ, что она справедлива для опредѣлителей четнаго порядка, меньшаго n. Примѣняя извѣстную (§ 25) формулу и пользуясь равенствами $a_{ir} = -a_{ri}$, $a_{rr} = 0$, получимъ

$$D = a_{rr}a_{rr} - \sum_{i,j} \mathfrak{a}_{ij} a_{ir} a_{rj} = \sum_{i,j} \mathfrak{a}_{ij} a_{ri} a_{rj},$$

гдѣ опредѣлитель $\mathfrak{a}_{ij}$ есть алгебраическое дополненіе элемента a_{ij}, но не въ D, а въ a_{rr}. Опредѣлитель a_{rr} есть главный миноръ взаимнаго отъ D опредѣлителя, т. е. также косого симметрическаго опредѣлителя (§ 44). Поэтому a_{rr} есть (§ 42) косой симметрическій опредѣлитель нечетнаго порядка $n-1$, а потому, на основаніи § 45, имѣемъ равенство $\mathfrak{a}_{ij} = \sqrt{\mathfrak{a}_{ii}} \cdot \sqrt{\mathfrak{a}_{jj}}$, а, слѣдовательно,

$$D = \sum_{i,j} \left(a_{ri}\sqrt{\mathfrak{a}_{ii}} \cdot a_{rj}\sqrt{\mathfrak{a}_{jj}} \right) = \left(\sum_{i} a_{ri}\sqrt{\mathfrak{a}_{ii}} \right)^2$$

или

$$\sqrt{D} = a_{r1}\sqrt{\mathfrak{a}_{11}} + a_{r2}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}} + a_{r3}\sqrt{\mathfrak{a}_{33}} + \cdots + a_{rn}\sqrt{\mathfrak{a}_{nn}}, \tag{11}$$

гдѣ, на основаніи замѣчанія § 45, въ правой части у одного изъ квадратныхъ корней можно выбрать любой знакъ, а знаки всѣхъ другихъ тогда вполнѣ опредѣлятся. Замѣчаемъ теперь, что всѣ $\mathfrak{a}_{ii}$ (§ 42) будутъ косые симметрическіе опредѣлители порядка $(n-2)$, и по предположенію будутъ квадратами цѣлыхъ раціональныхъ выраженій относительно элементовъ. Подставляя эти выраженія въ $\sqrt{D}$, мы найдемъ для него цѣлое раціональное выраженіе, что и требовалось доказать. Наконецъ, легко видѣть, что разложеніе $\sqrt{D}$ заключаетъ въ себѣ $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (n-1)$ членовъ*) (XVII).

47. Псевдосимметрическіе опредѣлители. Положимъ, что D псевдосимметрическій опредѣлитель, всѣ главные элементы котораго равны x. Положивъ $x = 0$, получимъ косой симметрическій опредѣлитель D_0. Можно считать, что D происходитъ изъ D_0 отъ прибавленія числа x къ каждому изъ главныхъ элементовъ послѣдняго, а потому по формулѣ § 27, і будемъ имѣть

$$D = D_0 + x\sigma_{n-1} + x^2\sigma_{n-2} + \cdots + x^{n-1}\sigma_1 + x^n,$$

*) Т. е. одночленовъ, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно элементовъ D.

гдѣ σ_ν есть сумма всѣхъ главныхъ миноровъ въ D_0 порядка ν. Каждый изъ этихъ миноровъ есть косой симметрическій опредѣлитель (§ 42). и обращается въ 0 при ν нечетномъ (§ 44), а при ν четномъ (§ 46) есть квадратъ цѣлаго раціональнаго выраженія относительно элементовъ. Поэтому

$$D = x^n + x^{n-2}\sigma_2 + x^{n-4}\sigma_4 + \cdots$$

Если n число четное, то $x^{n-2\nu}\sigma_{2\nu}$ есть сумма квадратовъ, т. е. всякій псевдосимметрическій опредѣлитель четнаго порядка, съ равными между собой главными элементами, разлагается на сумму квадратовъ. Если n — нечетное, то D равно произведенію x на сумму квадратовъ. Если $x = 1$, то, сопоставляя оба предыдущія заключенія, находимъ, что всякій псевдосимметрическій опредѣлитель съ главными элементами, равными 1, есть сумма квадратовъ.

48. Примѣры. a) Замѣтимъ слѣдующіе простые результаты

$$\begin{vmatrix} x & r & -q \\ -r & x & p \\ q & -p & x \end{vmatrix} = x^3 + (p^2+q^2+r^2)x, \qquad \begin{vmatrix} 1 & r & -q \\ r & 1 & p \\ q & p & 1 \end{vmatrix} = 1 + p^2 + q^2 + r^2.$$

b) Чтобы вычислить опредѣлитель

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & r & q \\ b & r & 0 & p \\ c & q & -p & 0 \end{vmatrix}$$

съ помощью формулы (11), нужно обратить вниманіе на опредѣленіе знаковъ квадратныхъ корней, согласно замѣчанію, сдѣланному въ § 45. Главные миноры опредѣлителя a_{11} у насъ будутъ p^2, q^2, r^2; если возьмемъ $\sqrt{p^2} = p$ (а не $-p$), то должны будемъ взять $\sqrt{q^2} = q$, $\sqrt{r^2} = r$ и получимъ по формулѣ (11) $D = (ap + bq + cr)^2$. Болѣе общій результатъ даетъ примѣръ

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & r & -q \\ -b & r & x & p \\ -c & q & -p & x \end{vmatrix} = x^4 + (a^2+b^2+c^2+p^2+q^2+r^2)x^2 + (ap+bq+cr)^2.$$

c) Наконецъ, легко доказать, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} x & a & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -a & x & a \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -a & x \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & x & a \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a & x \end{vmatrix}$$

равенъ

$$x^n + \frac{n-1}{1} a^2 x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2} a^4 x^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} a^6 x^{n-6} + \cdots$$

(см. прим. XVII).

ЛИНЕЙНЫЯ ФОРМЫ.

Линейныя уравненія.

49. Разсмотримъ систему n линейныхъ уравненій, т. е. уравненій первой степени, съ n неизвѣстными

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = k_n. \end{cases}$$

Рѣшеніемъ системы уравненій называется система значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющая всѣмъ уравненіямъ системы. Опредѣлитель D, общій элементъ котораго есть a_{ij}, т. е. опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ данныхъ уравненій, называется опредѣлителемъ системы. Обозначая, какъ обыкновенно, черезъ a_{ij} алгебраическое дополненіе элемента a_{ij} въ D, умножимъ данныя уравненія по порядку на $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ и сложимъ полученные результаты; тогда найдемъ

$$(2)\qquad \sum_{j=1}^{j=n} x_j (a_{1j}a_{1i} + a_{2j}a_{2i} + \cdots + a_{nj}a_{ni}) = k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} + \cdots + k_n a_{ni}.$$

Въ лѣвой части коэффиціентъ при x_j равенъ нулю, когда $j \neq i$, и равенъ D, когда $j = i$. Правая часть есть результатъ замѣны элементовъ i-аго столбца числами $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Поэтому, вводя обозначенія

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ k_2 & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ k_n & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \cdots a_{1n} \\ a_{21} & k_2 \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & k_n \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots k_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots k_2 \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots k_n \end{vmatrix},$$

приведемъ уравненіе (2) къ виду $Dx_i = D_i$. Мы видимъ такимъ образомъ, что всякое рѣшеніе системы (1) будетъ и рѣшеніемъ системы

$$(3)\qquad Dx_1 = D_1, \quad Dx_2 = D_2, \ldots, \quad Dx_n = D_n.$$

50. Правило Крамера. Если $D \neq 0$, то система (3), очевидно, имѣетъ одно и только одно рѣшеніе, а именно:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{4}$$

Это единственное рѣшеніе, которое можетъ имѣть система (1), и мы покажемъ сейчасъ, что система значеній (4) дѣйствительно удовлетворяетъ всѣмъ уравненіямъ системы (1). Выберемъ любое изъ нихъ, напримѣръ, r-тое. Подставляя въ него на мѣсто неизвѣстныхъ значенія (4), получимъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ri}\,\tilde{x}_i = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{i=n} a_{ri}\,D_i \text{ гдѣ } D_i = \sum_{j=1}^{j=n} k_j\,a_{ji}.$$

Слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ri}\,x_i = \frac{1}{D}\sum_{i,\,j} k_j\,a_{ri}\,a_{ji} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{j=n} k_j\,(a_{r1}\,a_{j1} + a_{r2}\,a_{j2} + \cdots + a_{rn}\,a_{jn}).$$

Коэффиціентъ при k_j равенъ 0, если $j \neq r$, и равенъ D, если $j = r$. Поэтому правая часть равенства приводится къ k_r, и r-тое уравненіе удовлетворяется. Резюмируя сказанное, получаемъ слѣдующее правило Крамера:

Если опредѣлитель системы n линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными не равенъ нулю, то система имѣетъ одно и только одно рѣшеніе. Это рѣшеніе состоитъ изъ системы значеній, получаемыхъ черезъ послѣдовательную замѣну каждаго столбца въ опредѣлителѣ системы столбцомъ извѣстныхъ членовъ уравненій, и раздѣленіе получаемыхъ такимъ образомъ n опредѣлителей на опредѣлителя системы *).

51. Если $D = 0$, а одинъ, по крайней мѣрѣ, изъ опредѣлителей $D_1, D_2, \ldots D_n$ не равенъ нулю, то невозможно удовлетворить всѣмъ уравненіямъ системы (3), потому что одно изъ нихъ приметъ видъ $0 \cdot x_i \neq 0$. Въ этомъ случаѣ уравненія системы (1) несовмѣстны. Примѣромъ можетъ служить система:

$$x + y + z = 1,\quad x + y + 2z = 0,\quad x + y + 3z = 0.$$

Она несовмѣстна, потому что соотвѣтствующая ей система (3) будетъ $0 \cdot x = 1$, $0 \cdot y = -1$, $0 \cdot z = 0$ и, очевидно, не имѣетъ рѣшенія, такъ что и данная его не имѣетъ. Положимъ, далѣе, что опредѣлитель D и всѣ опредѣлители $D_1, D_2, \ldots, D_n$ одновременно равны нулю. Тогда система (3) удовлетворяется совершенно произволь-

*) При этомъ, для полученія значенія неизвѣстнаго x_i надо замѣнить i-тый столбецъ въ D столбцомъ извѣстныхъ членовъ уравненій.

ными значеніями неизвѣстныхъ. Отсюда, однако, еще нельзя заключить, что тоже самое имѣетъ мѣсто и для системы (1). Напримѣръ, уравненія

$$x+y+z=1,\quad x+y+z=2,\quad x+y+z=3,$$

очевидно, несовмѣстны, а уравненія (3) въ данномъ случаѣ приведутся къ $0\cdot x=0$, $0\cdot y=0$, $0\cdot z=0$, т. е. къ системѣ, вполнѣ неопредѣленной. Это показываетъ, что при $D=0$ нельзя утверждать эквивалентности системъ (1) и (3), т. е. нельзя сказать, что всякое рѣшеніе одной изъ нихъ есть рѣшеніе другой и наоборотъ. Полное изслѣдованіе системы (1) мы будемъ въ состояніи произвести послѣ того, какъ докажемъ весьма важную теорему Руше (Rouché), къ изложенію которой теперь и приступимъ.

52. Разсмотримъ болѣе общій случай, а именно: систему m уравненій съ n неизвѣстными:

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=k_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=k_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=k_n, \end{cases}$$

Если всѣ коэффиціенты при неизвѣстныхъ равны нулю, то, очевидно, уравненія будутъ либо неопредѣленными, когда въ то же время всѣ извѣстные члены равны нулю, либо несовмѣстными, когда хотя одинъ изъ послѣднихъ не равенъ нулю. Этотъ совершенно исключительный случай, не представляющій никакого интереса, мы исключимъ изъ разсмотрѣнія и будемъ всегда предполагать, что не всѣ коэффиціенты при неизвѣстныхъ во всѣхъ уравненіяхъ равны нулю. Кромѣ того, можно всегда предположить, что число уравненій больше числа неизвѣстныхъ, $m>n$, потому что, въ противномъ случаѣ, ничто не мѣшаетъ присоединить къ системѣ (5) нѣсколько уравненій, числомъ болѣе $n-m$, въ которыхъ всѣ коэффиціенты при неизвѣстныхъ и всѣ извѣстные члены равны нулю. Тогда система (5) замѣнится системою, очевидно, ей эквивалентною и удовлетворяющею поставленному выше условію. Имѣя въ виду все сказанное, разсмотримъ теперь матриссу нашей системы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{vmatrix}$$

и положимъ, что ея рангъ (§ 18) равенъ $\mu<n$. Въ ней будетъ содержаться, по крайней мѣрѣ, одинъ опредѣлитель μ-таго порядка, не равный нулю (по самому опредѣленію ранга). Этотъ опредѣли-

тель, или одинъ изъ такихъ, если ихъ будетъ нѣсколько, мы назовемъ главнымъ опредѣлителемъ системы. Онъ характеризуется тѣмъ свойствомъ, что онъ самъ не равенъ нулю, между тѣмъ какъ всѣ опредѣлители высшаго порядка, содержащіеся въ матриссѣ системы, равны нулю. Элементами его будутъ коэффиціенты при нѣкоторыхъ μ неизвѣстныхъ въ нѣкоторыхъ μ уравненіяхъ данной системы. Но понятно, что, переставляя, если нужно, уравненія системы и буквы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обозначающія неизвѣстныя, мы можемъ всегда достигнуть того, что неизвѣстныя и уравненія, коэффиціенты которыхъ будутъ элементами главнаго опредѣлителя, займутъ мѣсто первыхъ μ строкъ и первыхъ μ столбцовъ. Такая операція, очевидно, не мѣняетъ системы рѣшеній данныхъ уравненій, а главный опредѣлитель приметъ форму

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\mu} \\ \ldots & \ldots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \ldots a_{\mu\mu} \end{vmatrix}.$$

Введемъ еще слѣдующее обозначеніе:

$$\delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\mu} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\mu} & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \ldots a_{\mu\mu} & k_\mu \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{r\mu} & k_r \end{vmatrix}.$$

Опредѣлители $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ называются характеристическими опредѣлителями системы. Замѣтимъ, что первые μ изъ нихъ всегда равны нулю, потому что у нихъ послѣдняя строка тождественна съ одною изъ предыдущихъ. Мы вскорѣ увидимъ, что условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы уравненія данной системы были совмѣстны, состоитъ въ томъ, что и остальные $m - \mu$ характеристическихъ опредѣлителей равны нулю. Теперь мы можемъ формулировать самую теорему.

53. Теорема Руше. Если характеристическіе опредѣлители системы m линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными, гдѣ $n < m$, не всѣ равны нулю, то уравненія несовмѣстны. Въ противномъ случаѣ система имѣетъ одно единственное рѣшеніе, когда рангъ матриссы ея равенъ n, и безчисленное множество рѣшеній, когда рангъ матриссы ея меньше n [1].

[1] Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1875.

а) Перенесемъ неизвѣстныя $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$ въ правыя части уравненій и дадимъ этимъ неизвѣстнымъ произвольныя значенія $c_{\mu+1}, c_{\mu+2}, \ldots, c_n$. Данная система приведется тогда къ системѣ m уравненій съ μ неизвѣстными:

$$(6)\qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots a_{1\mu}\,x_\mu = k_1', \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots a_{2\mu}\,x_\mu = k_2', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots a_{m\mu}\,x_\mu = k_m', \end{cases}$$

гдѣ

$$(7)\qquad k_r' = k_r - \sum_{s=\mu+1}^{s=n} a_{rs}\,c_s$$

при $\mu < n$, и $k_r' = k_r$ при $\mu = n$. Прежде всего замѣтимъ, что система (6) имѣетъ тотъ же главный опредѣлитель и тѣ же характеристическіе опредѣлители, какъ и система (5). Въ самомъ дѣлѣ, матрисса системы (6) не можетъ содержать въ себѣ опредѣлителей порядка выше μ (потому что въ ней число столбцовъ равно μ); между тѣми же, порядокъ которыхъ равенъ μ, заключается опредѣлитель δ, который и можно принять за главный, такъ какъ онъ не равенъ нулю. Что касается характеристическихъ опредѣлителей

$$\delta_r' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} & k_1' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} & k_2' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} & k_\mu' \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r\mu} & k_r' \end{vmatrix},$$

то, на основаніи извѣстнаго свойства опредѣлителей (§ 17) и формулы (7), можно, разложивъ послѣдній столбецъ на слагаемыя, написать

$$\delta_r' = \delta_r - \sum_{s=\mu+1}^{s=n} c_s \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} & a_{\mu s} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r\mu} & a_{rs} \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель, на который здѣсь умножается c_s, очевидно, содержится въ матриссѣ (5) и обращается въ нуль, потому что его порядокъ больше μ. Поэтому $\delta_r' = \delta_r$, что и требовалось доказать.

b) Теперь замѣтимъ, что по извѣстной формулѣ § 25 будемъ имѣть

$$\delta_r' = \delta k_r' - \sum_{i,j} k_i' a_{rj} a_{ij} \text{ *)}, \tag{8}$$

гдѣ i и j получаютъ значенія $1, 2, \ldots \mu$. Возьмемъ въ системѣ (6) первыя μ уравненій и еще одно r-тое, умножимъ послѣднее на δ, а каждое i-тое изъ первыхъ μ на число

$$(a_{r1} a_{i1} + a_{r2} a_{i2} + \cdots + a_{r\mu} a_{i\mu}) = - \sum_{j=1}^{j=\mu} a_{rj} a_{ij},$$

и сложимъ полученные результаты. Тогда въ правой части, на основаніи формулы (8), получится

$$\delta k_r' \quad \sum_{i,j} k_i' a_{rj} a_{ij} = \delta_r'.$$

Въ лѣвой части коэффиціентъ при x_s будетъ

$$\delta a_{rs} - \sum_{i,j} a_{is} a_{rj} a_{ij},$$

а это есть результатъ замѣны въ δ_r' чиселъ

$$k_1', k_2', \ldots, k_\mu', k_r'$$

числами

$$a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{\mu s}, a_{rs},$$

какъ показываетъ та же формула (8). Если же сдѣлаемъ эти замѣны въ написанномъ раньше выраженіи δ_r' въ видѣ опредѣлителя, то увидимъ, что результатъ всѣхъ нашихъ операцій надъ уравненіями (6) даетъ равенство

$$\sum_{s=1}^{s=\mu}{}' x_s \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} & a_{\mu s} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r\mu} & a_{rs} \end{vmatrix} = \delta_r'.$$

Опредѣлитель, на который здѣсь умножается x_s, равенъ нулю, потому что послѣдній столбецъ совпадаетъ съ s-тымъ, и послѣднее равенство приведется къ равенству

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_\mu = \delta_r',$$

---

*) Такъ какъ δ есть алгебраическое дополненіе элемента k_r' въ δ_r', а a_{ij} алгебраическое дополненіе a_{ij} въ δ.

которому нельзя удовлетворить, когда $\delta_r' \neq 0$. Слѣдовательно, уравненія нашей системы несовмѣстны, если хотя бы одинъ изъ характеристическихъ опредѣлителей не равенъ нулю, что и доказываетъ первую часть теоремы.

c) Если всѣ характеристическіе опредѣлители равны нулю, то формула (8) даетъ

$$k_r' = \frac{1}{\delta} \sum_{i,\,j} k_i' \, a_{rj} \, a_{ij}.$$

А это показываетъ, что уравненію

$$a_{r1} \, x_1 + a_{r2} \, x_2 + \cdots + a_{r\mu} \, x_\mu = k_r',$$

каковъ бы ни былъ значекъ r, можно удовлетворить, положивъ

$$x_j = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{i=\mu} k_i' A_{ij}.$$

Далѣе, инымъ способомъ уравненіямъ (6) удовлетворить нельзя, потому что первыя μ уравненій системы (6) представляютъ систему μ уравненій съ μ неизвѣстными и опредѣлителемъ $\delta \neq 0$, допускающую, какъ извѣстно (§ 50), лишь одно рѣшеніе.

d) Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ, что въ томъ случаѣ, когда всѣ характеристическіе опредѣлители обращаются въ нуль, система (5) имѣетъ одно и только одно рѣшеніе, если $\mu = n$, или безчисленное множество рѣшеній, если $\mu < n$, потому что, въ послѣднемъ случаѣ, всякой произвольно выбранной системѣ значеній $c_{\mu+1}, c_{\mu+2}, \ldots, c_n$ неизвѣстныхъ $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$, соотвѣтствуетъ опредѣленная система значеній неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ (а въ первомъ случаѣ, когда $\mu = n$, чиселъ $c_{\mu+1}, \ldots, c_n$, очевидно, не существуетъ). Въ случаѣ $\mu < n$ мы будемъ говорить, что система (5) допускаетъ $\infty^{n-\mu}$ (безконечность степени $n - \mu$) рѣшеній ($(n-\mu)$-fach unendliche), выражая этимъ, что каждое изъ безконечнаго множества значеній любой изъ $n - \mu$ неизвѣстныхъ $x_{\mu+1}$, $x_{\mu+2}, \ldots, x_n$ можно комбинировать съ каждымъ изъ безконечнаго множества значеній всѣхъ другихъ и опредѣленною системою значеній остальныхъ неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$. Мы въ правѣ такъ говорить, потому что, какъ сейчасъ покажемъ, всякое рѣшеніе системы (5) заключается въ числѣ тѣхъ, которыя даетъ изложенная выше метода. Чтобы это показать, замѣтимъ, что каково бы ни было выбранное по произволу рѣшеніе системы (5)

$$x_1 = c_1', \; x_2 = c_2', \ldots x_{\mu+1} = c_{\mu+1}', \ldots x_n = c_n',$$

мы можемъ положить $c_{\mu+1} = c_{\mu+1}'$, $c_{\mu+2} = c_{\mu+2}'$, $\ldots$, $c_n = c_n'$, а тогда рѣшеніемъ системы, состоящей изъ μ первыхъ уравненій системы (6), непремѣнно будетъ система значеній

$$x_1 = c_1', \; x_2 = c_2', \ldots x_\mu = c_\mu',$$

иначе упомянутая сейчасъ система μ уравненій съ μ неизвѣстными имѣла бы болѣе одного рѣшенія, между тѣмъ какъ ея опредѣлитель $\delta \neq 0$, что невозможно (§ 50). Теорема Руше доказана вполнѣ.

54. Примѣчанія. a) Вышеизложенныя изслѣдованія показываютъ, что если система допускаетъ рѣшенія, то μ уравненій необходимы и достаточны для нахожденія всѣхъ этихъ рѣшеній, такъ что рангъ матриссы системы даетъ наименьшее число уравненій, къ которымъ можно свести данную систему.

b) Въ случаѣ системы n уравненій съ n неизвѣстными за матриссу системы можно взять ту, которая получится, когда къ матриссѣ опредѣлителя системы D прибавимъ одну строку элементовъ, равныхъ нулю. Если $D \neq 0$, то ($\mu = n$) главный опредѣлитель есть D, и всѣ характеристическіе опредѣлители, очевидно, равны 0. Слѣдовательно, имѣемъ одно единственное рѣшеніе. Если $D = 0$, то главный опредѣлитель надо искать между его минорами. Его порядокъ будетъ всегда меньше n, такъ что въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто либо несовмѣстность, либо неопредѣленность. Поэтому условіе $D \neq 0$ есть не только достаточное, но и необходимое условіе единственности рѣшенія системы. Этимъ восполняется пробѣлъ, на который было указано въ § 51.

c) Условія совмѣстности нѣсколькихъ линейныхъ уравненій можно, слѣдуя Капелли [1]), высказать просто и изящно. Матрисса

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & k_m \end{vmatrix} \tag{9}$$

содержитъ въ себѣ $\delta \neq 0$. Ея рангъ, слѣдовательно, не меньше μ. Но онъ не можетъ быть больше $\mu + 1$, потому что всѣ опредѣлители порядка, большаго $\mu + 1$, содержащіеся въ ней, равны нулю. Дѣйствительно, либо это будутъ опредѣлители, содержащіеся въ матриссѣ системы (когда буквы k въ нихъ не входятъ), либо опредѣлители, содержащіе буквы k; первые равны нулю по условію, вторые, потому что всѣ дополненія этихъ элементовъ равны 0 и въ разложеніи ихъ по элементамъ k всѣ члены обратятся въ нуль. Итакъ, рангъ матриссы (9) равенъ μ или $\mu + 1$. Въ первомъ случаѣ всѣ опредѣлители порядка $\mu + 1$, содержащіеся въ ней, къ числу которыхъ принадлежатъ и характеристическіе опредѣлители, обратятся въ нуль, и уравненія системы, слѣдовательно, совмѣстны. Во второмъ случаѣ въ (9) содержится, по крайней мѣрѣ, одинъ опредѣлитель порядка $\mu + 1$, не равный нулю, а такъ-какъ такой опредѣлитель не можетъ содержатся въ матриссѣ системы (рангъ которой μ), то

[1]) Capelli. „Rivista di Matematica" 1892, pag. 54.

онъ долженъ заключать въ себѣ буквы k. Въ тоже время дополненія этихъ элементовъ въ немъ не могутъ быть всѣ равны нулю, иначе самъ опредѣлитель обратился бы въ нуль. Поэтому, по крайней мѣрѣ, одно изъ этихъ дополненій не будетъ нулемъ, и мы можемъ его выбрать за главный опредѣлитель въ матриссѣ системы. А тогда разсматриваемый опредѣлитель, не равный нулю, будетъ характеристическимъ опредѣлителемъ, и по теоремѣ Руше, уравненія системы несовмѣстны. Резюмируя, находимъ, что уравненія системы совмѣстны или несовмѣстны, смотря по тому, будетъ-ли рангъ матриссы (9) μ или $\mu + 1$. Иными словами, для совмѣстности системы линейныхъ уравненій необходимо и достаточно, чтобы матрисса системы сохранила свой рангъ, когда къ ней добавимъ столбецъ извѣстныхъ членовъ уравненій.

Системы линейныхъ формъ.

55. Между цѣлыми раціональными выраженіями, зависящими отъ n перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, особаго вниманія заслуживаютъ однородныя, т. е. такія, въ которыхъ всѣ члены имѣютъ одну и ту же степень m относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или иначе говоря, гдѣ сумма показателейстепеней чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ во всѣхъ членахъ одна и та-же. Такія выраженія называются алгебраическими формами, линейными при $m = 1$, квадратичными при $m = 2$, кубическими при $m = 3$, биквадратичными при $m = 4$, формами 5-ой, 6-ой и т. д. степени при $m = 5$, 6 и т. д. Форма любой степени съ двумя перемѣнными ($n = 2$) называется бинарною, съ тремя ($n = 3$) тройничною *). Въ этой главѣ мы будемъ заниматься линейными и квадратичными формами. Общій видъ линейной формы есть

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

а разложеніе u^m по степенямъ перемѣнныхъ даетъ простѣйшій примѣръ формы m-ой степени. Замѣтимъ, что изъ этого разложенія можно получить любую форму m-ой степени, умножая каждый членъ разложенія на произвольные коэффиціенты, не зависящіе отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и что число членовъ въ самой общей формѣ m-ой степени съ n перемѣнными равно числу членовъ въ разложеніи m-ой степени n — членнаго полинома, т. е. числу различныхъ сочетаній изъ $m + n - 1$ буквъ по m (XIX).

56. Когда дана система, состоящая изъ m линейныхъ формъ съ n перемѣнными, то важно бываетъ знать, могутъ ли всѣ эти формы обращаться въ нуль при значеніяхъ перемѣнныхъ, не рав-

*) Для формъ съ 4-мя и т. д. перемѣнными, на русскомъ языкѣ особыхъ терминовъ не употребляютъ.

ныхъ нулю одновременно. Иными словами, спрашивается: имѣетъ-ли система линейныхъ однородныхъ уравненій

$$(10)\qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = 0, \end{cases}$$

рѣшенія, кромѣ очевиднаго

$$(11)\qquad x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0.$$

Ясно, что характеристическіе опредѣлители для нашей системы всѣ равны нулю, потому что послѣдній столбецъ каждаго такого опредѣлителя образуется извѣстными членами уравненій, а эти члены всѣ равны нулю. Теорема Руше учитъ, что случай несовмѣстности не можетъ встрѣтиться, и это подтверждается тѣмъ, что одно рѣшеніе, а именно (11), существуетъ. Та же теорема учитъ, что если рангъ матриссы системы равенъ n, то возможно только одно рѣшеніе, и тогда оно необходимо совпадаетъ съ (11). Слѣдовательно, необходимое и достаточное условіе, для того, чтобы нѣсколько линейныхъ однородныхъ формъ могли одновременно обращаться въ нуль, для значеній перемѣнныхъ, не равныхъ нулю одновременно, состоитъ въ томъ, чтобы рангъ матриссы коэффиціентовъ былъ меньше числа неизвѣстныхъ.

57. Въ случаѣ $m > n$, число рѣшеній системы (10), какъ мы знаемъ, будетъ $\infty^{n-\mu}$, если μ есть рангъ матриссы. Въ случаѣ $m < n$ надо къ матриссѣ системы присоединить болѣе чѣмъ $(n - m)$ строкъ нулей, а потому при разысканіи главнаго опредѣлителя мы можемъ ограничиться тѣми m строками, которыя состоятъ не изъ однихъ нулей, потому что всякій опредѣлитель со строкою однихъ нулей равенъ нулю. Такимъ образомъ мы видимъ, что порядокъ главнаго опредѣлителя не можетъ быть больше m, т. е. $\mu \leqq m$ и $n - \mu \geqq n - m$. Отсюда теорема: Всякая система m линейныхъ однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными, при $n > m$ имѣетъ по крайней мѣрѣ ∞^{n-m} рѣшеній. Во всѣхъ случаяхъ, чтобы рѣшить систему (10) достаточно, послѣ того какъ будетъ выбранъ опредѣленный главный опредѣлитель системы

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2\mu} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \cdots a_{\mu\mu} \end{vmatrix},$$

рѣшить первыя μ уравненій системы относительно $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$.

Полагая

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1,\,i-1} & a_{1j} & a_{1,\,i+1} \dots a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2,\,i-1} & a_{2j} & a_{2,\,i+1} \dots a_{2\mu} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \dots a_{\mu,\,i-1} & a_{\mu j} & a_{\mu,\,i+1} \dots a_{\mu\mu} \end{vmatrix}.$$

по правилу Крамера получимъ

$$x_i = -\frac{1}{\delta} \sum_{j=\mu+1}^{j=n} \delta_{ij}\, x_j, \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ \mu)$$

при чемъ можемъ по произволу выбрать значенія каждой изъ неизвѣстныхъ $x_{\mu+1}$, $x_{\mu+2}$, ..., x_n. При всякомъ другомъ выборѣ главнаго опредѣлителя δ' въ тѣхъ-же μ столбцахъ, въ которыхъ содержится δ, получается формула, не отличающаяся отъ предыдущей, и чтобы это провѣрить, достаточно замѣтить, что въ силу теоремы, высказанной въ концѣ § 41, мы имѣемъ $\delta\,\delta' = \delta_{ij}/\delta'_{ij}$. (Прим. XX.)

58. Разсмотримъ теперь въ частности случай n линейныхъ формъ съ n перемѣнными. Если опредѣлитель D этой системы не равенъ нулю, то эти формы не могутъ обращаться въ нуль одновременно при значеніяхъ перемѣнныхъ, не равныхъ нулю одновременно *). Если опредѣлитель $D = 0$ и рангъ его $= \mu$, то существуетъ, какъ было доказано, $\infty^{n-\mu}$ системъ значеній перемѣнныхъ, не равныхъ нулю одновременно и обращающихъ всѣ данныя формы въ нуль. Обращая нѣкоторымъ образомъ эту теорему, можно сказать, что необходимое и достаточное условіе для того, чтобы рангъ нѣкотораго опредѣлителя n-го порядка былъ равенъ μ, состоитъ въ томъ, чтобы между элементами каждой изъ его строкъ (или каждаго изъ столбцовъ) существовало $n - \mu$ линейныхъ однородныхъ соотношеній. Этимъ хотятъ сказать, что возможно найти $n - \mu$ различныхъ системъ значеній λ_1, λ_2, ... λ_n, для которыхъ

$$\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \dots + \lambda_n a_{in} = 0$$

при всякомъ значеніи $i = 1,\ 2, \dots n$.

(См. прим. XXI).

Въ частности имѣемъ слѣдующую теорему: Для того, чтобы нѣкоторый опредѣлитель былъ равенъ нулю, необходимо и достаточно, чтобы между элементами каждой его строки (каждаго столбца) существовало одно и тоже линейное однородное соотношеніе.

(См. примѣчаніе (V) къ § 17.)

---

*) Потому что система линейныхъ однородныхъ уравненій, получаемыхъ отъ приравниванія всѣхъ этихъ формъ нулю, имѣетъ тогда единственное рѣшеніе: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Изъ нашей теоремы слѣдуетъ, кромѣ того, что всякій опредѣлитель порядка n и ранга μ, при помощи извѣстныхъ операцій (§ 17), можетъ быть преобразованъ въ такой, въ которомъ всѣ элементы въ $n-\mu$ параллельныхъ рядахъ будутъ равны нулю. Въ частности всякій опредѣлитель, равный нулю, можетъ быть преобразованъ въ другой, въ которомъ всѣ элементы одного (по крайней мѣрѣ) ряда равны нулю.

59. Для приложеній особенно интересенъ тотъ случай, когда $D=0$, а по крайней мѣрѣ одинъ изъ элементовъ взаимного опредѣлителя не равенъ нулю. Если, напримѣръ, $a_{11}\neq 0$, то главный опредѣлитель $\delta=a_{11}$ будетъ порядка $n-1$, и система допускаетъ ∞^1 рѣшеній. Чтобы ихъ найти, поступаемъ какъ въ § 57, т. е. переносимъ члены съ x_1 въ правую часть и опредѣляемъ остальныя неизвѣстныя изъ $n-1$ уравненій. Такимъ образомъ найдемъ, что $a_{11}x_i=a_{1i}x_1$, и, измѣняя i, будемъ имѣть

$$\frac{x_1}{a_{11}}=\frac{x_2}{a_{12}}=\frac{x_3}{a_{13}}=\cdots=\frac{x_n}{a_{1n}}.$$

Извѣстныя свойства опредѣлителя дѣлаютъ полученный результатъ очевиднымъ. Случай $n-1$ однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными приводится къ разсмотрѣнному присоединеніемъ къ данной системѣ одного уравненія съ нулевыми коеффиціентами.

60. Примѣры. а) Система

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z=0,\quad a_3x+b_3y+c_3z=0$$

только тогда имѣетъ рѣшенія, кромѣ очевидного $x=y=z=0$, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

При выполненіи этого условія система имѣетъ безконечное число рѣшеній, опредѣляемыхъ формулами

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2}$$

въ томъ предположеніи, что не всѣ знаменатели равны нулю. Такъ напримѣръ, система

$$x+y+z=0,\quad x+y+2z=0,\quad x+y+3z=0$$

имѣетъ безчисленное множество рѣшеній (∞^1), опредѣляемыхъ формулами $x=\lambda$, $y=-\lambda$, $z=0$, гдѣ λ можно измѣнять отъ $-\infty$ до $+\infty$.

b) Принимая во вниманіе послѣднее замѣчаніе § 59, находимъ для рѣшеній системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0 \end{cases}$$

формулы

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{t}{-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Никакихъ другихъ рѣшеній система не имѣетъ, если предположимъ, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ знаменателей не равенъ нулю.

61. Говорятъ, что между формами $u_1, u_2, \dots u_m$ существуетъ линейная зависимость, если возможно найти такія числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, которыя не равны нулю одновременно и для которыхъ выраженіе $\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \dots + \lambda_mu_m$ обращается въ нуль тождественно (т. е. независимо отъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n$, отъ которыхъ зависятъ $u_1, u_2, \dots u_m$). Если такого соотношенія между формами не существуетъ, то формы называются линейно независимыми. Установивъ это опредѣленіе, положимъ, что формы $u_1, u_2, \dots, u_m$ изображаютъ лѣвыя части уравненій (10). Вслѣдствіе произвольности значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n$, предполагаемыхъ независимыми, уравненіе

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0$$

разбивается на n уравненій, а именно:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1} = 0, \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_m a_{m2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn} = 0. \end{cases}$$

Чтобы нельзя было удовлетворить этимъ уравненіямъ значеніями $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, не равными нулю одновременно, необходимо и достаточно, чтобы рангъ матриссы системы былъ равенъ m (§ 56). Итакъ, имѣемъ теорему: Для того, чтобы m линейныхъ формъ съ n перемѣнными были независимы, необходимо и достаточно, чтобы рангъ ихъ матриссы былъ равенъ m. Какъ частный случай отсюда вытекаетъ, что условіе, необходимое и достаточное для независимости n линейныхъ формъ съ n перемѣнными, состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлитель ихъ не былъ равенъ нулю.

62. Если $m > n$, то рангъ матриссы непремѣнно меньше m, потому что онъ не можетъ быть больше n. Отсюда слѣдуетъ,

что не можетъ существовать больше, чѣмъ n независимыхъ формъ отъ n перемѣнныхъ. Такъ напримѣръ, формы $ax+by$ и $a'x+b'y$ независимы при $ab' \neq a'b$, но невозможно найти еще третью форму $a''x+b''y$, независимую отъ первыхъ двухъ. Дѣйствительно, каковы бы ни были a'' и b'' всегда имѣетъ мѣсто тождество

$$(a'b''-b'a'')(ax+by)+(ba''-ab'')(a'x+b'y) \\ +(ab'-ba')(a''x+b''y)=0.$$

Во всякомъ случаѣ наименьшее число формъ, къ которому приводится данная система линейныхъ формъ, равно рангу ихъ матриссы, т. е. если μ есть рангъ матриссы, то $m-\mu$ формъ могутъ быть выражены черезъ остальныя μ, которыя одна отъ другой не зависятъ. Къ тому же заключенію приводитъ слѣдующее замѣчаніе. Если перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дадимъ произвольныя значенія, не равныя нулю одновременно, и вычислимъ соотвѣтствующія имъ значенія $u_1, u_2, \ldots u_m$, то уравненія

$$u_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n, \quad (i=1, 2, \ldots m),$$

опредѣляющія эти формы, можно разсматривать, какъ систему совмѣстныхъ уравненій, для которой поэтому всѣ характеристическіе опредѣлители должны быть равны нулю. Поэтому всегда имѣемъ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1\mu} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2\mu} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \cdots a_{\mu\mu} & u_\mu \\ a_{r1} & a_{r2} \cdots a_{r\mu} & u_r \end{vmatrix} = 0,$$

и на основаніи § 25 и 53, c) находимъ

$$u_r = \frac{1}{\delta}\sum_{i,\,j} a_{rj}a_{ij}u_i \qquad (r=\mu+1,\ \mu+2, \ldots, m)$$

чѣмъ и доказывается вышесказанное.

63. Теперь мы можемъ доказать одну теорему, которая облегчаетъ опредѣленіе ранга данной матриссы. Допустимъ, что найденъ такой опредѣлитель $\delta \neq 0$ порядка μ, что всѣ опредѣлители порядка $\mu+1$, содержащіеся въ матриссѣ и содержащіе въ себѣ δ, равны нулю, такъ что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1\mu} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2\mu} & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} \cdots a_{\mu\mu} & a_{\mu s} \\ a_{r1} & a_{r2} \cdots a_{r\mu} & a_{rs} \end{vmatrix} = 0,$$

при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ r и s. Разлагая этотъ опредѣлитель по элементамъ послѣдняго столбца и раздѣляя на δ, получимъ равенство

$$a_{rs} = \lambda_1 a_{1s} + \lambda_2 a_{2s} + \cdots + \lambda_\mu a_{\mu s},$$

въ которомъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ отъ s не зависятъ. А это показываетъ, что формы

$$u_r = a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rn} x_n \qquad (r = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, m)$$

выражаются линейно черезъ $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ (уже независимыя одна отъ другой, потому что $\delta \neq 0$). Поэтому рангъ матриссы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{vmatrix}$$

какъ разъ равенъ μ. Итакъ, чтобы можно было утверждать, что рангъ матриссы равенъ μ, достаточно найти въ ней одинъ такой опредѣлитель порядка μ, не равный нулю, что всѣ опредѣлители порядка $\mu + 1$, его въ себѣ содержащіе, равны нулю. Отсюда, какъ частный случай, вытекаетъ такая теорема: Если не всѣ опредѣлители, содержащіеся въ какихъ нибудь $m - 1$ столбцахъ написанной выше матриссы, равны нулю, а всѣ старшіе опредѣлители, содержащіе въ себѣ тѣ же столбцы, равны нулю, то и всякій другой старшій опредѣлитель равенъ нулю.

Линейныя преобразованія.

64. Представимъ себѣ, что въ одной или въ нѣсколькихъ алгебраическихъ формахъ съ n перемѣнными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, числа x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ замѣняются слѣдующими выраженіями

$$(12) \qquad \begin{cases} x_1 = k_{11} y_1 + k_{12} y_2 + \cdots + k_{1n} y_n, \\ x_2 = k_{21} y_1 + k_{22} y_2 + \cdots + k_{2n} y_n, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ x_n = k_{n1} y_1 + k_{n2} y_2 + \cdots + k_{nn} y_n. \end{cases}$$

Данныя формы превращаются тогда въ такое же число формъ съ перемѣнными $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Операція, изображаемая уравненіями (12), переводящая данныя формы въ новыя, называется линейнымъ преобразованіемъ. Модулемъ преобразованія называютъ опредѣлитель

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \dots k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} \dots k_{2n} \\ \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} \dots k_{nn} \end{vmatrix},$$

который надо предполагать не равнымъ нулю, иначе между перемѣнными $x_1, x_2, \dots, x_n$ установилось бы линейное соотношеніе (§ 61), и онѣ не были-бы независимыми перемѣнными. Если $K = 1$, то преобразованіе называютъ унимодулярнымъ.

65. Чтобы возвратиться отъ преобразованныхъ формъ къ первоначальнымъ, нужно къ преобразованнымъ формамъ примѣнить нѣкоторое другое линейное преобразованіе, которое называется обратнымъ относительно перваго. Формулы обратнаго преобразованія очевидно получатся, если рѣшимъ уравненія (22) относительно чиселъ y. Если $\varkappa_{ij}$ есть алгебраическое дополненіе элемента k_{is} въ $K \neq 0$, то правило Крамера даетъ

$$(13) \quad \begin{cases} Ky_1 = \varkappa_{11}\, x_1 + \varkappa_{21}\, x_2 + \dots + \varkappa_{n1}\, x_n, \\ Ky_2 = \varkappa_{12}\, x_1 + \varkappa_{22}\, x_2 + \dots + \varkappa_{n2}\, x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Ky_n = \varkappa_{1n}\, x_1 + \varkappa_{2n}\, x_2 + \dots + \varkappa_{nn}\, x_n. \end{cases}$$

Модуль обратнаго преобразованія есть (§ 37)

$$\frac{1}{K^n} \begin{vmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{21} \dots \varkappa_{n1} \\ \varkappa_{12} & \varkappa_{22} \dots \varkappa_{n2} \\ \dots & \dots \\ \varkappa_{1n} & \varkappa_{2n} \dots \varkappa_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{K}.$$

66. Если примѣнимъ преобразованіе (12) къ системѣ формъ

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n, \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то эта система преобразуется въ систему

$$b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \dots + b_{in} y_n, \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

гдѣ числа b весьма просто связаны съ числами a. А именно, если мы примѣнимъ преобразованіе (12) къ i-ой формѣ первой системы, то эта форма преобразуется въ

$$a_{i1}\,(k_{11} y_1 + \dots + k_{1n} y_n) + a_{i2}\,(k_{21} y_1 + \dots + k_{2n} y_n) + \dots + a_{in}\,(k_{n1} y_1 + \dots + k_{nn} y_n).$$

Поэтому, отбирая коэффиціенты при y_j, найдемъ

$$b_{ij} = a_{i1} k_{1j} + a_{i2} k_{2j} + \dots + a_{in} k_{nj}.$$

По правилу умноженія опредѣлителей тотчасъ видимъ, что

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} \dots k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} \dots k_{n2} \\ \dots & \dots \\ k_{1n} & k_{2n} \dots k_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е.: Опредѣлитель системы формъ, полученной черезъ линейное преобразованіе данной системы линейныхъ формъ, равенъ опредѣлителю первоначальной системы, умноженному на модуль преобразованія.

67. Послѣдовательное примѣненіе нѣсколькихъ линейныхъ преобразованій равносильно примѣненію одного такого преобразованія, модуль котораго равенъ произведенію модулей всѣхъ данныхъ преобразованій. При доказательствѣ этого предложенія мы можемъ, конечно, ограничиться случаемъ двухъ послѣдовательныхъ преобразованій

$$x_i = k_{i1} y_1 + k_{i2} y_2 + \dots + k_{in} y_n, \qquad y_i = k'_{i1} z_1 + k'_{i2} z_2 + \dots + k'_{in} z_n.$$

Результатъ послѣдовательнаго примѣненія этихъ двухъ преобразованій, очевидно, равносиленъ преобразованію, опредѣляемому формулами, дающими выраженія перемѣнныхъ x непосредственно черезъ перемѣнныя z. Разсматривая $x_1, x_2, \dots, x_n$, какъ систему линейныхъ формъ отъ $y_1, y_2, \dots, y_n$, имѣющую опредѣлитель K, и обозначая черезъ K' модуль второго преобразованія, на основаніи предыдущаго § тотчасъ находимъ, что KK' есть опредѣлитель новой системы формъ, т. е. модуль преобразованія, равносильнаго двумъ даннымъ.

68. Ортогональныя преобразованія. Между линейными преобразованіями особенно важное значеніе имѣютъ ортогональныя. Они оставляютъ безъ измѣненія сумму квадратовъ перемѣнныхъ. Чтобы преобразованіе (12) было ортогонально, необходимо, слѣдовательно, чтобы тождественно удовлетворялось равенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2, \tag{14}$$

т. е. въ выраженіи

$$(k_{11} y_1 + \dots + k_{1n} y_n)^2 + (k_{21} y_1 + \dots + k_{2n} y_n)^2 + \dots + (k_{n1} y_1 + \dots + k_{nn} y_n)^2$$

коэффиціентъ при y_i^2 долженъ быть 1, а коэффиціентъ при $y_i y_j$, гдѣ $i \neq j$, долженъ быть 0. Разлагая квадраты по степенямъ буквъ y, находимъ, что

$$k_{1i} k_{1j} + k_{2i} k_{2j} + \dots + k_{ni} k_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \tag{15}$$

Обратно, если условія (15) выполнены, то и тождество (14) выполняется, и преобразованіе будетъ ортогонально.

69. Опредѣлитель называется ортогональнымъ, если имъ можно воспользоваться въ качествѣ модуля ортогональнаго преобразованія, для чего необходимо и достаточно, чтобы между его элементами k_{ij} существовали соотношенія (15). Всякій ортогональный опредѣлитель равенъ ± 1. Дѣйствительно, въ силу соотношеній (15), квадратъ его

$$K^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда $K = \pm 1$. Преобразованіе съ модулемъ K называется правовращающимъ при $K = +1$, и лѣвовращающимъ при $K = -1$.

70. Всякій ортогональный опредѣлитель характеризуется тѣмъ, что каждый его элементъ равенъ своему алгебраическому дополненію, взятому притомъ съ обратнымъ знакомъ, когда опредѣлитель равенъ -1.

Въ самомъ дѣлѣ, давая въ формулахъ (15) числу i значенія $1, 2, 3, \dots, n$, получимъ

$$\begin{cases} k_{11}\,k_{1j} + k_{21}\,k_{2j} + \dots + k_{n1}\,k_{nj} = 0, \\ k_{12}\,k_{1j} + k_{22}\,k_{2j} + \dots + k_{n2}\,k_{nj} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{1j}\,k_{1j} + k_{2j}\,k_{2j} + \dots + k_{nj}\,k_{nj} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{1n}\,k_{1j} + k_{2n}\,k_{2j} + \dots + k_{nn}\,k_{nj} = 0, \end{cases}$$

Рѣшая эту систему относительно $k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{nj}$ по правилу Крамера, находимъ

$$Kk_{ij} = 0 \cdot \varkappa_{i1} + 0 \cdot \varkappa_{i2} + \dots + 1 \cdot \varkappa_{ij} + \dots + 0 \cdot \varkappa_{in} = \varkappa_{ij},$$

откуда и слѣдуетъ сказанное. Обратно, если

$$Kk_{ij} = \varkappa_{ij}, \tag{16}$$

то лѣвая часть въ формулѣ (15) будетъ

$$\frac{1}{K}(k_{1i}\varkappa_{1j} + k_{2i}\varkappa_{2j} + \dots + k_{ni}\varkappa_{nj});$$

она равна 0 при $i \neq j$, и 1 при $i = j$. Уравненія (15) удовлетворяются и опредѣлитель ортогоналенъ.

71. Болѣе обще, каждый миноръ ортогональнаго опредѣлителя равенъ соотвѣтствующему алгебраическому дополненію, и при-

томъ съ обратнымъ знакомъ, если опредѣлитель равенъ — 1. Дѣйствительно, разсмотримъ въ опредѣлителѣ, взаимномъ съ K, какой нибудь миноръ ν-го порядка. На основаніи формулы (16) онъ равенъ соотвѣтствующему минору K_ν въ K, умноженному на K^ν. Съ другой стороны (§ 38), мы знаемъ, что тотъ-же миноръ равенъ алгебраическому дополненію K_ν, умноженному на $K^{\nu-1}$; раздѣляя полученное равенство на $K^{\nu-1}$, находимъ, что алгебраическое дополненіе минора K_ν равно KK_ν, что и требовалось доказать.

72. Чтобы нѣкоторое преобразованіе было ортогональнымъ, необходимо и достаточно, чтобы модуль его, по замѣнѣ въ немъ столбцовъ строками, совпалъ съ модулемъ обратнаго преобразованія. Въ самомъ дѣлѣ, если преобразованіе (12) ортогонально, то, внося въ формулы (13) выраженія x_{ij} изъ формулъ (16), тотчасъ увидимъ, что упомянутое условіе небходимо. Обратно, если формулы

$$x_i = k_{i1}y_1 + k_{i2}y_2 + k_{i3}y_3 + \cdots + k_{in}y_n$$
$$y_i = k_{1i}x_1 + k_{2i}x_3 + k_{3i}x_3 + \cdots + k_{n1}x_n$$

при $i = 1, 2, 3, \ldots n$ изображаютъ два обратныхъ преобразованія, то изъ нихъ слѣдуетъ тотчасъ и соотношеніе (16), а слѣдовательно, оба преобразованія ортогональны.

73. Построеніе ортогональныхъ преобразованій. Элементы ортогональнаго опредѣлителя n-го порядка, число которыхъ равно n^2, должны удовлетворять условіямъ (15). Число послѣднихъ равно $n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$, а именно n тѣхъ, у которыхъ правая часть равна 1 и $\frac{1}{2}n(n-1)$ тѣхъ, гдѣ правая часть равна нулю. Отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ дать произвольныя значенія $n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ элементамъ, и тогда, вообще говоря, остальные $\frac{1}{2}n(n+1)$ элементовъ, удовлетворяющіе такому же числу условій, уже опредѣлятся. Вмѣсто того, чтобы приписывать произвольныя значенія $\frac{1}{2}n(n+1)$ элементамъ, можно поставить себѣ задачу выразить всѣ n^2 элементовъ черезъ $\frac{1}{2}n(n-1)$ произвольныхъ величинъ. Эта задача рѣшена Кейли (Cayley) съ помощью весьма изящной методы, которую мы и изложимъ. Пусть

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

будетъ псевдосимметрическій опредѣлитель, котораго главные элементы всѣ равны 1, такъ что

(17) $$a_{ij} = -a_{ji} \text{ при } i \neq j \text{ и } a_{ii} = 1,$$

Въ опредѣлителѣ A произвольны только элементы, лежащіе по одну сторону главной діагонали, число ихъ равно $\frac{1}{2}n(n-1)$, и мы ихъ можемъ выбрать за величины, въ которыхъ надо выразить всѣ n^2 элементовъ модуля K. Разсмотримъ преобразованія, опредѣляемыя формулами

$$x_i = a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + a_{i3}z_3 + \cdots + a_{in}z_n,$$
$$y_i = a_{1i}z_1 + a_{2i}z_2 + a_{3i}z_3 + \cdots + a_{ni}z_n,$$

для $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Складывая эти формулы и принимая во вниманіе равенства (17), находимъ

$$x_i + y_i = 2z_i. \tag{18}$$

Преобразованія, обратныя предыдущимъ двумъ, выражаются формулами

$$Az_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 + \cdots + a_{ni}x_n,$$
$$Az_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + \cdots + a_{in}y_n,$$

которыя, въ силу (18), приводятся къ слѣдующимъ

$$y_i = \frac{2}{A}a_{1i}x_1 + \frac{2}{A}a_{2i}x_2 + \cdots + \left(\frac{2}{A}a_{ii} - 1\right)x_i + \cdots + \frac{2}{A}a_{ni}x_n,$$
$$x_i = \frac{2}{A}a_{i1}y_1 + \frac{2}{A}a_{i2}y_2 - \cdots + \left(\frac{2}{A}a_{ii} - 1\right)y_i + \cdots + \frac{2}{A}a_{in}y_n,$$

А это показываетъ, что (§ 72) преобразованіе, въ которомъ общее выраженіе элемента модуля есть

$$k_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{A}a_{ii} - 1 & \text{при } i = j \\ \frac{2}{A}a_{ij} & \text{при } i \neq j, \end{cases} \tag{19}$$

будетъ ортогональнымъ.

74. Построенное такимъ образомъ преобразованіе всегда правовращающее. Въ самомъ дѣлѣ, модуль его

$$K = \left(\frac{2}{A}\right)^n \begin{vmatrix} a_{11} - \frac{1}{2}A & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{2}A & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \frac{1}{2}A \end{vmatrix}.$$

Произведеніе A на опредѣлитель, стоящій въ правой части, есть опредѣлитель, въ которомъ общее выраженіе элемента имѣетъ слѣдующій видъ:

$$c_{ij} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{ij}(a_{jj} - \tfrac{1}{2}A) + \cdots + a_{in}a_{jn},$$

т. е.

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}a_{jr} - \tfrac{1}{2}Aa_{ij}.$$

Первый членъ въ правой части этого равенства равенъ нулю при $i \neq j$, и равенъ A, при $i = j$. Слѣдовательно,

$$c_{ij} = -\tfrac{1}{2}Aa_{ij} = \tfrac{1}{2}Aa_{ji} \quad \text{при } i \neq j$$
$$c_{ii} = A - \tfrac{1}{2}Aa_{ii} = \tfrac{1}{2}A.$$

Слѣдовательно, всегда $c_{ij} = \frac{1}{2}Aa_{ji}$, $(a_{ii} = 1)$, откуда слѣдуетъ, что

$$AK = \left(\frac{2}{A}\right)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2}Aa_{11} & \frac{1}{2}Aa_{21} & \dots & \frac{1}{2}Aa_{n1} \\ \frac{1}{2}Aa_{12} & \frac{1}{2}Aa_{22} & \dots & \frac{1}{2}Aa_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}Aa_{1n} & \frac{1}{2}Aa_{2n} & \dots & \frac{1}{2}Aa_{nn} \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{A}\right)^n \left(\frac{A}{2}\right)^n A = A,$$

Припоминая, что A никогда не можетъ быть нулемъ (§ 47), мы и находимъ, что $K = 1$.

75. Примѣръ. Для построенія самаго общаго ортогональнаго опредѣлителя 3-го порядка замѣтимъ прежде всего, что взаимный опредѣлитель опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} 1 & r & -q \\ -r & 1 & p \\ q & -p & 1 \end{vmatrix} = 1 + p^2 + q^2 + r^2$$

будетъ

$$\begin{vmatrix} 1+p^2 & r+pq & -q+pr \\ -r+qp & 1+q^2 & p+qr \\ q+rp & -p+rq & 1+r^2 \end{vmatrix}.$$

Съ помощью формулы (19) тотчасъ находимъ, что искомый опредѣлитель будетъ

$$\begin{vmatrix} \frac{1+p^2-q^2-r^2}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(r+pq)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(-q+pr)}{1+p^2+q^2+r^2} \\ \frac{2(-r+qp)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{1-p^2+q^2-r^2}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(p+qr)}{1+p^2+q^2+r^2} \\ \frac{2(q+rp)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(-p+rq)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{1-p^2-q^2+r^2}{1+p^2+q^2+r^2} \end{vmatrix}.$$

Обозначая черезъ α, β, γ три числа, удовлетворяющія равенству $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, всегда можемъ положить

$$p = \alpha \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \quad q = \beta \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \quad r = \gamma \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}.$$

Тогда предыдущій опредѣлитель представится въ болѣе простомъ видѣ

$$\begin{vmatrix} \cos\vartheta+\alpha^2(1-\cos\vartheta) & \gamma\sin\vartheta+\alpha\beta(1-\cos\vartheta) & -\beta\sin\vartheta+\alpha\gamma(1-\cos\vartheta) \\ -\gamma\sin\vartheta+\beta\alpha(1-\cos\vartheta) & \cos\vartheta+\beta^2(1-\cos\vartheta) & \alpha\sin\vartheta+\beta\gamma(1-\cos\vartheta) \\ \beta\sin\vartheta+\gamma\alpha(1-\cos\vartheta) & -\alpha\sin\vartheta+\gamma\beta(1-\cos\vartheta) & \cos\vartheta+\gamma^2(1-\cos\vartheta) \end{vmatrix}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что самое общее ортогональное преобразованіе тройничной формы опредѣляется формулами

$$(20)\quad \begin{cases} x' = x\cos\vartheta+(\gamma y-\beta z)\sin\vartheta+\alpha(1-\cos\vartheta)(\alpha x+\beta y+\gamma z), \\ y' = y\cos\vartheta+(\alpha z-\gamma x)\sin\vartheta+\beta(1-\cos\vartheta)(\alpha x+\beta y+\gamma z), \\ z' = z\cos\vartheta+(\beta x-\alpha y)\sin\vartheta+\gamma(1-\cos\vartheta)(\alpha x+\beta y+\gamma z) \end{cases}$$

извѣстными въ Аналитической Геометріи подъ именемъ „формулъ Эйлера“ [1]). Такъ какъ, очевидно, $\alpha x'+\beta y'+\gamma z' = \alpha x+\beta y+\gamma z$, то это преобразованіе оставляетъ безъ измѣненія выраженія $x^2+y^2+z^2$ и $\alpha x+\beta y+\gamma z$, а слѣдовательно, и выраженіе $\varrho^2 = x^2+y^2+z^2 - (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 = (\gamma y-\beta z)^2+(\alpha z-\gamma x)^2+(\beta x-\alpha y)^2$. Разсматривая α, β, γ какъ косинусы угловъ, образуемыхъ нѣкоторымъ направленіемъ съ тремя осями прямоугольной системы координатъ, а x, y, z, какъ Декартовы координаты нѣкоторой точки M, мы видимъ, что точка M, при переходѣ въ другую точку M' съ координатами x', y', z', вращается около прямой, проходящей черезъ начало координатъ и опредѣлямой направленіемъ (α, β, γ), всегда оставаясь въ разстояніи, равномъ ϱ, отъ этой прямой. Направленіе общаго къ этой прямой и прямой OM перпендикуляра опредѣляется косинусами

$$\frac{\gamma y-\beta z}{\varrho},\quad \frac{\alpha z-\gamma x}{\varrho},\quad \frac{\beta x-\alpha y}{\varrho}$$

а потому косинусъ угла, на который должна повернуться точка M около прямой, чтобы попасть въ M', равенъ частному отъ дѣленія (29) произведенія матриссъ

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = xx'+yy'+zz'-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

на ϱ^2, т. е. $\cos\vartheta$. Итакъ, формулы (20) обозначаютъ вращеніе на уголъ ϑ около прямой, проходящей черезъ начало координатъ въ направленіи (α, β, γ). (Примѣч. XXII.)

---

[1]) Онѣ вновь были найдены Родригомъ (Rodrigues) T. V. Journal Jiouville (p. 405).

КВАДРАТИЧНЫЯ ФОРМЫ.

Основныя понятія изъ теоріи квадратичныхъ формъ.

76. Въ приложеніяхъ Алгебры особенно важное значеніе имѣютъ квадратичныя формы (55) съ n перемѣнными:

$$U = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots$$

Для сокращенія принято писать

$$U = \sum_{i,\,j} a_{ij}x_ix_j,$$

причемъ подразумѣвается, что указатели i и j, одинъ независимо отъ другого, принимаютъ всѣ значенія (цѣлыя) отъ 1 до n.

Симметрическій опредѣлитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

гдѣ $a_{ij} = a_{ji}$, называется дискриминантномъ формы U, а квадратичная форма

$$V = \sum_{i,\,j} a_{ij}x_ix_j,$$

дискриминантъ которой есть опредѣлитель взаимный съ опредѣлителемъ A, называется формою взаимною съ U.

77. Съ изученіемъ квадратичной формы U находится въ тѣсной связи разсмотрѣніе системы линейныхъ формъ, опредѣлитель которой равенъ дискриминанту формы, а именно:

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Прежде всего замѣчаемъ, что имѣемъ равенство

$$(2)\qquad U = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n.$$

Это даетъ для U выраженіе, симметричное относительно буквъ x и u.

Примемъ теперь за новыя перемѣнныя числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$, предполагая, что они независимы. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $A \neq 0$ (§ 61). Если введемъ эти новыя перемѣнныя въ выраженіе U, то эта форма перейдетъ въ взаимную съ нею (раздѣленную на A). Дѣйствительно, прилагая правило Крамера къ рѣшенію системы (1) относительно перемѣнныхъ x, найдемъ систему уравненій

$$(1^a) \qquad \begin{cases} Ax_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n, \\ Ax_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ax_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n. \end{cases}$$

Подставляя эти выраженія въ равенство (2), получимъ

$$(3) \qquad U = \frac{1}{A}\sum_{i,\,j} a_{ij}u_iu_j$$

78. Къ тому же результату можно придти иначе. Условіе совмѣстности уравненій (1) и (2), съ неизвѣстными x_i, требуетъ, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & u_2 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 \cdots u_n & U \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда (§ 17) получимъ для U выраженіе

$$U = -\frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & u_2 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 \cdots u_n & 0 \end{vmatrix},$$

которое (§ 25) не отличается отъ выраженія (3). Если, аналогично этому, выразимъ условія совмѣстности уравненій (1^a) и (2), съ неизвѣстными $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то можно будетъ написать

$$U = -\frac{1}{A^{n-2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & x_2 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 \cdots x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Полезно удержать оба выраженія для U.

(См. прим. XXIII).

79. Само по себѣ понятно, что всякую квадратичную форму можно выразить въ произвольно большомъ числѣ перемѣнныхъ; стоитъ только замѣнить каждую изъ перемѣнныхъ, въ которыхъ форма первоначально выражена, линейною формою новыхъ перемѣнныхъ, число которыхъ больше числа первоначальныхъ. Обратно, весьма важно имѣть возможность узнать, можетъ ли данная форма быть приведена къ формѣ съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ. Допустимъ, что въ квадратичной формѣ

$$U = \sum_{i,\,j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

n перемѣнныхъ x могутъ быть линейно сгруппированы такъ, чтобы для U получилось выраженіе, зависящее отъ m новыхъ перемѣнныхъ

$$\begin{cases} y_1 = k_{11}\, x_1 + k_{12}\, x_2 + \cdots + k_{1n}\, x_n, \\ y_2 = k_{21}\, x_1 + k_{22}\, x_2 + \cdots + k_{2n}\, x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = k_{m1}\, x_1 + k_{m2}\, x_2 + \cdots + k_{mn} x_n. \end{cases}$$

Пусть

$$U = \sum_{i,\,j}^{m} b_{ij} y_i y_j$$

будетъ это новое выраженіе формы U. Представляя себѣ, что въ него подставлены выраженія y-овъ черезъ x, и сравнивая результатъ съ первоначальнымъ выраженіемъ U, получаемъ

$$c_{rs} = \sum_{i,\,j}^{m} b_{ij}\, k_{ir}\, k_{js} = \sum_{j=1}^{j=n} c_{jr}\, k_{js}, \tag{4}$$

гдѣ

$$c_{jr} = \sum_{i=1}^{i=m} b_{ij}\, k_{ir}. \tag{5}$$

Уравненіе (4) показываетъ, что дискриминантъ A равенъ произведенію матриссъ

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2} \cdots c_{mn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} k_{12} & k_{12} \cdots k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} \cdots k_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ k_{m1} & k_{m2} \cdots k_{mn} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

составленному по столбцамъ. Если $m < n$, то это произведеніе равно нулю (§ 29). Итакъ, если квадратичная форма можетъ быть приведена къ формѣ съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ, то ея дискриминантъ равенъ нулю. Мы увидимъ вскорѣ, что обратно, если дискриминантъ формы обращается въ нуль, то форма будетъ при-

водима, и поэтому можно будетъ высказать такую теорему: Для того, чтобы квадратичная форма была неприводима необходимо и достаточно, чтобы ея дискриминантъ не былъ равенъ нулю.

80. Если $m = n$, то $A = CK$ *), и уравненіе (5) показываетъ, что и $C = BK$. Слѣдовательно, $A = BK^2$, т. е. квадратичная форма, полученная линейнымъ преобразованіемъ данной формы имѣетъ дискриминантъ, равный дискриминанту данной формы, умноженному на квадратъ модуля преобразованія.

81. Рангъ дискриминанта квадратичной формы равенъ наименьшему числу перемѣнныхъ, къ которому можетъ быть приведена данная форма. На основаніи замѣчанія, сдѣланнаго въ концѣ § 43, всегда можно предположить, что за главный опредѣлитель въ A взятъ одинъ изъ главныхъ миноровъ порядка μ (μ — рангъ A). Пусть

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

будетъ этотъ опредѣлитель. Совмѣстность уравненій (1) и (2) требуетъ, чтобы (§ 53)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} & u_\mu \\ u_1 & u_2 & \dots & u_\mu & U \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, по формулѣ § 25, находимъ

$$U = \frac{1}{\delta} \sum_{i,j}^{\mu} \alpha_{ij} u_i u_j,$$

гдѣ α_{ij} алгебраическое дополненіе a_{ij} въ δ. Такимъ образомъ мы видимъ, что въ дѣйствительности U приводится къ квадратичной формѣ съ μ лишь перемѣнными, которыя уже независимы, такъ-какъ $\delta \neq 0$ **). Такъ какъ дискриминантъ новой формы равенъ (§ 37) $\frac{\delta^{\mu-1}}{\delta} = \delta^{\mu-2}$ и также не равенъ 0, то дальнѣйшее приведеніе къ меньшему числу перемѣнныхъ невозможно.

*) Понятно, что C и K обозначаютъ опредѣлители съ элементами, соотвѣтственно равными c_{ij} и k_{ij}.

**) Такимъ образомъ доказано то предложеніе, о которомъ было упомянуто въ § 79.

шему числу перемѣнныхъ невозможно (§ 79). Послѣднее утвержденіе можно еще доказать слѣдующимъ образомъ. Всякій миноръ ν-таго порядка въ A равенъ произведенію двухъ атриссъ (§ 31), которыя получаются выборомъ нѣкоторыхъ ν столбцовъ изъ матриссъ (6). Пока $\nu > m$, произведеніе такихъ двухъ матриссъ, по теоремѣ Бине, равно нулю. Слѣдовательно, всѣ миноры порядка $\nu > m$ въ A будутъ равны нулю и потому его рангъ $\mu \leqq m$, т. е. $m \geqq \mu$, иными словами, невозможно привести квадратичную форму къ меньшему, чѣмъ μ, числу перемѣнныхъ.

82. Для неприводимыхъ квадратичныхъ формъ показано было въ §§ 77 и 78 возможность перехода отъ данныхъ формъ къ взаимнымъ. Легко видѣть, что подобный переходъ невозможенъ для формъ приводимыхъ. Прежде всего замѣтимъ, что при $\mu < n - 1$, взаимныхъ формъ не существуетъ вовсе, потому что всѣ миноры a_{ij}, будучи порядка $n - 1 > \mu$, обратятся въ нуль (по опредѣленію чсила μ). Если же $\mu = n - 1$, то взаимная форма существуетъ, но рангъ ея дискриминанта равенъ 1 (§ 36). Слѣдовательно, эта взаимная форма приведется (§ 81) къ одному квадрату линейной формы. Иными словами, взаимная форма отъ данной приводимой квадратичной формы, если существуетъ, есть квадратъ линейной формы. Это можно доказать и непосредственно. Прежде всего замѣтимъ, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ главныхъ элементовъ a_{rr} взаимнаго опредѣлителя долженъ быть отличенъ отъ нуля, иначе всѣ его элементы (§ 45) были бы равны нулю. Затѣмъ можемъ написать

$$a_{rr} V = \sum_{i,\,j} a_{rr} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,\,j} a_{ir} a_{rj} x_i x_j \quad (\S\ 36)$$

или

$$a_{rr} V = \sum_{i,\,j} a_{ri} x_i \cdot a_{rj} x_j = (a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rn} x_n)^2 \text{ *)}.$$

Инваріантныя свойства.

83. Инваріанты. Положимъ, что a, b, c, ... обозначаютъ коэффиціенты нѣкоторой алгебраической формы степени m, и a', b', c', ... аналогичные имъ коэффиціенты формы, получаемой изъ данной при помощи нѣкотораго линейнаго преобразованія **)

*) Надо помнить, что при $a_{ij} = a_{ji}$ и $a_{ij} = a_{ji}$ (§ 43).

**) Коэффиціенты a и a' называютъ аналогичными, если они стоятъ передъ членами, соотвѣтствующими другъ другу въ данной и преобразованной формѣ такъ, что если въ данной формѣ былъ членъ $a x_i^k x_j^l$, то въ преобразованной будетъ членъ $a' y_i^k y_j^l$.

Положимъ, что каково бы ни было это преобразованіе всегда имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = K^p \varphi(a, b, c, \ldots), \tag{7}$$

гдѣ K модуль преобразованія. Въ такомъ случаѣ выраженіе φ называется инваріантомъ данной формы. Если $p = 0$, то между коэффиціентами данной и коэффиціентами новой формы существуетъ соотношеніе, независящее отъ сдѣланнаго преобразованія, и инваріантъ называется тогда абсолютнымъ. Въ такомъ случаѣ, вообще говоря, невозможно данную форму преобразовать въ другую тоже наперед заданную, потому что новые коэффиціенты не могутъ быть заданы произвольно, а должны удовлетворять равенству

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots). \tag{8}$$

84. Принявъ во вниманіе вышесказанное, легко рѣшить вопросъ: существуютъ ли формы m-ой степени съ n перемѣнными, не имѣющія абсолютныхъ инваріантовъ? Если въ формѣ n-ой степени имѣется ν коэффиціентовъ, то легко видѣть, что, вообще говоря, можно найти такое линейное преобразованіе, которое переведетъ данную форму въ другую произвольно заданную, если число коэффиціентовъ преобразованія, т. е. n^2, не меньше числа условій, которымъ надо удовлетворить, т. е. ν; эти условія мы получаемъ, выражая, что коэффиціенты преобразованной формы равны заданнымъ a priori числамъ a', b', c', ... Припоминая сказанное въ § 55 о числѣ коэффиціентовъ въ формѣ m-ой степени съ n перемѣнными, находимъ, что, если не имѣютъ мѣста соотношенія вида (8), то должно быть

$$\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{4} \cdots \frac{n+m-1}{m} \leqq n.$$

Замѣтимъ теперь, что произведеніе первыхъ двухъ множителей въ лѣвой части

$$\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2) = n + \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2) \geq n,$$

гдѣ подъ n подразумѣвается цѣлое число, большее единицы. Такъ какъ всѣ слѣдующіе множители больше 1, то написанное неравенство не можетъ удовлетворяться при $m > 3$. Слѣдовательно, $m = 2$ или $m = 3$. Въ первомъ случаѣ n произвольно, во второмъ n обязательно должно быть $= 2$ *). Итакъ, соотношенія (8) не могутъ существовать для квадратичныхъ и для бинарныхъ кубическихъ формъ. Эти формы не имѣютъ абсолютныхъ инваріантовъ. Для всѣхъ другихъ формъ будемъ имѣть $\nu > n^2$ и $\nu - n^2$ равно числу ихъ абсолютныхъ инваріантовъ. Напримѣръ, бинарная форма

*) Иначе $n + \frac{1}{6}(n-1)(n-2) > n$.

m-ой степени, при $m>3$, имѣетъ $m-3$ абсолютныя инваріанты, тройничная форма той же степени имѣетъ ихъ $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)-9$ и т. д.

85. Форма, не имѣющая абсолютнаго инваріанта, не можетъ имѣть болѣе одного обыкновеннаго инваріанта. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что форма имѣетъ два инваріанта φ и ψ, переходящіе при линейномъ преобразованіи въ φK^p и ψK^q, тогда выраженіе $\varphi^q\psi^{-p}$ переходило бы въ $(\varphi K^p)^q(\psi K^q)^{-p}=\varphi^q\psi^{-p}$ и было бы абсолютнымъ инваріантомъ разсматриваемой формы, что противно предположенію.

86. Квадратичная форма имѣетъ только одинъ инваріантъ, а именно дискриминантъ формы. Въ § 80 уже было доказано, что дискриминантъ есть инваріантъ. Другого же не можетъ существовать потому что квадратичная форма (§ 85) не имѣетъ абсолютнаго инваріанта (§ 84).

87. На томъ же основаніи бинарная квадратичная форма

$$a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$$

не можетъ имѣть болѣе одного инваріанта. Этотъ единственный инваріантъ есть

$$4(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)-(a_0a_3-a_1a_2)^2,$$

какъ впослѣдствіи будетъ показано. Впрочемъ, непосредственное вычисленіе безъ особаго труда покажетъ, что приведенное выше выраженіе при линейномъ преобразованіи пріобрѣтаетъ только множитель K^6. Биквадратичная форма

$$a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4$$

имѣетъ, кромѣ инваріанта

$$I=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,$$

переходящаго при линейномъ преобразованіи съ модулемъ K въ K^4I, еще инваріантъ

$$J=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_4\end{vmatrix}=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3-a_0a_3^2-a_4a_1^2,$$

переходящій въ K^6J *). Поэтому единственный абсолютный инваріантъ (§ 85) этой формы будетъ $I^3:J^2$.

---

*) Все это будетъ доказано въ книгѣ V, §§ 482, 483.

88. Вмѣсто одной формы можно разсматривать **систему формъ** и опредѣлять инваріантъ системы такъ же, какъ и раньше (§ 83), представляя себѣ, что онъ выраженъ въ коэффиціентахъ всѣхъ формъ данной системы. Такъ напримѣръ, опредѣлитель системы n линейныхъ формъ съ n перемѣнными есть инваріантъ системы, потому что онъ удовлетворяетъ условію (7) при $p = 1$ (§ 66). Если извѣстенъ инваріантъ одной формы, то легко получить изъ нея инваріантъ системы подобныхъ ей формъ *). Мы ограничимся случаемъ двухъ квадратичныхъ формъ, но обращаемъ вниманіе на то, что излагаемая ниже метода примѣнима къ любому числу формъ. Положимъ, что нѣкоторое линейное преобразованіе переводитъ формы

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j, \qquad \Sigma b_{ij} x_i x_j$$

соотвѣтственно въ формы

$$\Sigma a'_{ij} x_i x_j, \qquad \Sigma b'_{ij} x_i x_j. \text{ **)}$$

Ясно, что то же самое преобразованіе переводитъ форму

$$\Sigma (a_{ij} + \lambda b_{ij}) x_i x_j \quad \text{въ} \quad \Sigma (a'_{ij} + \lambda b'_{ij}) x_i x_j,$$

при чемъ λ обозначаетъ совершенно произвольное число. Обозначая черезъ K модуль преобразованія и припоминая, что дискриминантъ формы (§ 80) есть ея инваріантъ, будемъ имѣть

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + \lambda b'_{11} & a'_{12} + \lambda b'_{12} & \cdots & a'_{1n} + \lambda b'_{1n} \\ a'_{21} + \lambda b'_{21} & a'_{22} + \lambda b'_{22} & \cdots & a'_{2n} + \lambda b'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n1} + \lambda b'_{n1} & a'_{n2} + \lambda b'_{n2} & \cdots & a'_{nn} + \lambda b'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= K^2 \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} & \cdots & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} & \cdots & a_{2n} + \lambda b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + \lambda b_{n1} & a_{n2} + \lambda b_{n2} & \cdots & a_{nn} + \lambda b_{nn} \end{vmatrix}$$

Каждая часть этого равенства можетъ быть представлена въ видѣ полинома, расположеннаго по степенямъ λ (§ 17). Напримѣръ, лѣвую часть можно представить въ видѣ

$$\varphi_0 + \lambda \varphi_1 + \lambda^2 \varphi_2 + \cdots + \lambda^n \varphi_n.$$

Обозначая черезъ φ'_ν то выраженіе, въ которое обращается φ_ν, когда

*) Т. е. формъ той же степени съ тѣмъ же числомъ перемѣнныхъ.

**) Новыя перемѣнныя, послѣ преобразованія, обозначаютъ тѣми же буквами, какъ и старыя.

въ немъ замѣнимъ коэффиціенты первоначальныхъ формъ коэффиціентами преобразованныхъ, будемъ имѣть

$$\varphi_0' + \lambda\varphi_1' + \cdots + \lambda^n\varphi_n' = K^2(\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \cdots + \lambda^n\varphi_n),$$

каково-бы ни было значеніе λ. Поэтому

$$\varphi_\nu' = K^2\varphi_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

слѣдовательно, φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ будутъ инваріанты системы. Замѣтимъ, что $\varphi_0 = A$, $\varphi_n = B$, гдѣ A и B опредѣлители съ элементами a_{ij} и b_{ij} соотвѣтственно. Новыми инваріантами будутъ только $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Выраженіе φ_1, напримѣръ, будетъ

$$\varphi_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

и т. д. Замѣтимъ еще, что каждое изъ φ_i можно разсматривать, какъ частный инваріантъ одной изъ формъ, а именно, какъ инваріантъ при такихъ линейныхъ преобразованіяхъ, которыя не мѣняютъ другой.

89. Ортогональные инваріанты. Если потребуемъ, чтобы $\varphi(a, b, c, \ldots)$ былъ инваріантомъ не для всевозможныхъ линейныхъ преобразованій, а лишь для ортогональныхъ (§ 68) то получимъ такъ называемые ортогональные инваріанты, число которыхъ, очевидно, больше, чѣмъ число разсмотрѣнныхъ выше общихъ инваріантовъ. Такъ, квадратичная форма съ n перемѣнными, кромѣ дискриминанта, имѣетъ еще $n-1$ ортогональныхъ инваріантовъ, разысканіемъ которыхъ мы сейчасъ и займемся. На основаніи замѣчанія, сдѣланнаго въ концѣ предыдущаго §, всякій инваріантъ системы, состоящей изъ формы U и формы $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ (не мѣняющейся при ортогональномъ преобразованіи) будетъ ортогональнымъ инваріантомъ U. На основаніи того, что изложено въ томъ же §, всѣ коэффиціенты $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ ($\varphi_n = 1$) при различныхъ степеняхъ λ въ разложеніи опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + \lambda \end{vmatrix}$$

будутъ ортогональными инваріантами формы U. Раньше, а именно въ § 27, *i*, было найдено, что φ_ν есть сумма всѣхъ главныхъ миноровъ ν-аго порядка въ опредѣлителѣ A. Поэтому имѣемъ теорему:

сумма всѣхъ главныхъ миноровъ одного и того же порядка въ дискриминантѣ квадратичной формы есть ортогональный инваріантъ этой формы.

90. Примѣры для упражненія. a) Найти ортогональные инваріанты тройничной квадратичной формы

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

Дискриминантъ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

имѣетъ слѣдующіе главные миноры, кромѣ a, b, c,

$$\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} = bc - f^2, \quad \begin{vmatrix} c & g \\ g & a \end{vmatrix} = ca - g^2, \quad \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2.$$

Слѣдовательно, ортогональные инваріанты будутъ

$$a + b + c, \quad bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2.$$

(и, конечно, дискриминантъ).

b) Найти инваріантъ системы двухъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ. Пусть данныя формы будутъ вышенаписанная (въ a) и слѣдующая

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy.$$

Искомый инваріантъ будетъ

$$\begin{vmatrix} a' & h & g \\ h' & b & f \\ g' & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h' & g \\ h & b' & f \\ g & f' & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h & g' \\ h & b & f' \\ g & f & c' \end{vmatrix}$$

или, въ раскрытомъ видѣ,

$$bca' + cab' + abc' - (a'f^2 + b'g^2 + c'h^2) + 2(ghf' + hfg' + fgh') - 2(aff' + bgg' + chh').$$

Канонической выраженія формъ.

91. Когда какая нибудь форма съ помощью линейнаго преобразованія приведена къ наипростѣйшему изъ всѣхъ видовъ, въ которыхъ она можетъ быть представлена, то говорятъ, что она приведена къ каноническому виду. Впрочемъ, выборъ наипростѣйшаго, т. е. каноническаго вида есть до извѣстной степени дѣло соглашенія, хотя и не вполнѣ произволенъ. Такъ напримѣръ, бинарная кубическая форма

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dx^3$$

можетъ быть приведена при помощи линейнаго преобразованія къ

виду x^3+y^3. Для этого надо положить $x=\alpha x'+\beta y'$, $y=\gamma x'+\delta y'$ и опредѣлить четыре коэффиціента α, β, γ, δ такъ, чтобы четыре коэффиціента преобразованной формы были равны соотвѣтствующимъ коэффиціентамъ въ x^3+y^3. Эту форму и можно принять за каноническое выраженіе данной формы. Напротивъ того, выраженіе $x^3+y^3+z^3$ нельзя принять за каноническое выраженіе тройничной кубической формы, потому что число величинъ, которыми можно распорядиться (коэффиціентовъ линейнаго преобразованія), здѣсь равно 9, а число условій, которымъ надо удовлетворить равно числу коэффиціентовъ формы т. е. 10. На этомъ основаніи вводятъ еще десятое неопредѣленное k и принимаютъ

$$x^3+y^3+z^3+6kxyz$$

за каноническое выраженіе формы. Слѣдуетъ, однако, имѣть всегда въ виду, что подобнаго рода приведенія могутъ въ частныхъ случаяхъ и неудаваться. Такъ напримѣръ, существуютъ бинарныя кубическія формы, которыя не приводятся къ виду x^3+y^3, но могутъ быть приведены къ виду xy^2.

92. За каноническое выраженіе квадратичной формы принимаютъ

$$U=a_1y_1^2+a_2y_2^2+\cdots+a_ny_n^2, \tag{9}$$

гдѣ a_i $(i=1,\ 2,\ \ldots\ n)$ величины постоянныя, а y_i — линейныя функціи первоначальныхъ перемѣнныхъ. Приведеніе квадратичной формы къ указанному виду возможно не однимъ, а безчисленнымъ множествомъ линейныхъ преобразованій, потому что n^2 коэффиціентовъ искомаго преобразованія

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=k_{11}y_1+k_{12}y_2+\cdots+k_{1n}y_n,\\ x_2&=k_{21}y_1+k_{22}y_2+\cdots+k_{2n}y_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=k_{n1}y_1+k_{n2}y_2+\cdots+k_{nn}y_n \end{aligned}\right. \tag{10}$$

должны удовлетворять всего $\frac{1}{2}n(n-1)$ условіямъ. Дѣйствительно, чтобы привести U къ виду (9) съ помощью преобразованія (10) нужно опредѣлить элементы k_{ij} такъ, чтобы въ преобразованной квадратичной формѣ было $a_{ij}=0$ при $i\neq j$ *). Но преобразованіе будетъ вполнѣ опредѣленнымъ, если потребуемъ, чтобы оно было ортогональнымъ. Оно должно тогда удовлетворять $\frac{1}{2}n(n+1)$ условіямъ ортогональности (§ 73) и еще $\frac{1}{2}n(n-1)$ условіямъ, для того, чтобы преобразованная форма была вида (9). Общее число условій будетъ

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)+\tfrac{1}{2}n(n-1)=n^2,$$

*) А число такихъ a_{ij} очевидно есть $\frac{n(n-1)}{3}$.

т. е. равно числу неопредѣленныхъ элементовъ k_{ij}. Опредѣленіемъ ихъ изъ указанныхъ условій мы и займемся.

93. Представимъ себѣ, что мы переходимъ отъ формы (9) къ первоначальной, при помощи преобразованія обратнаго искомому (10); это обратное преобразованіе, въ силу требуемой ортогональности искомого опредѣлится формулами (§ 72)

$$\begin{cases} y_1 = k_{11}x_1 + k_{21}x_2 + \cdots + k_{n1}x_n, \\ y_2 = k_{12}x_1 + k_{22}x_2 + \cdots + k_{n2}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = k_{1n}x_1 + k_{2n}x_2 + \cdots + k_{nn}x_n, \end{cases}$$

форма (9) обратится въ

$$U = \sum_{r=1}^{r=n} a_r (k_{1r}x_1 + k_{2r}x_2 + \cdots + k_{nr}x_n)^2.$$

Отождествляя это выраженіе U съ первоначальнымъ, получимъ

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} a_r k_{ir} k_{jr},$$

т. е. полагая $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{cases} a_{i1} = a_1 k_{i1} k_{11} + a_2 k_{i2} k_{12} + \cdots + a_n k_{in} k_{1n}, \\ a_{i2} = a_1 k_{i1} k_{21} + a_2 k_{i2} k_{22} + \cdots + a_n k_{in} k_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{in} = a_1 k_{i1} k_{n1} + a_2 k_{i2} k_{n2} + \cdots + a_n k_{in} k_{nn}. \end{cases}$$

Разсматривая $a_1 k_{i1}$, $a_2 k_{i2}$, $\ldots$, $a_n k_{in}$ какъ неизвѣстныя, по правилу Крамера получимъ

$$K a_j k_{ij} = a_{i1}\varkappa_{1j} + a_{i2}\varkappa_{2j} + \cdots + a_{in}\varkappa_{nj}$$

(гдѣ $\varkappa_{ij}$ алгебраическое дополненіе k_{ij} въ K). Отсюда, на основаніи извѣстныхъ свойствъ (формула (16) § 70), слѣдуетъ

$$a_j k_{ij} = a_{i1} k_{1j} + a_{i2} k_{2j} + \cdots + a_{in} k_{nj}.$$

Полагая здѣсь $i = 1, 2, \ldots, n$, получаемъ систему

$$(11) \qquad \begin{cases} (a_{11} - a_j) k_{1j} + a_{12} k_{2j} + \cdots + a_{1n} k_{nj} = 0, \\ a_{21} k_{1j} + (a_{22} - a_j) k_{2j} + \cdots + a_{2n} k_{nj} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} k_{1j} + a_{n2} k_{2j} + \cdots + (a_{nn} - a_j) k_{nj} = 0, \end{cases}$$

которую можно разсматривать, какъ систему n линейныхъ однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными. Для того, чтобы ей удовле-

творяли значенія $k_{1j}, k_{2j}, \ldots, k_{nj}$, не равныя нулю одновременно, необходимо и достаточно, чтобы опредѣлитель системы

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_j & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-a_j & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-a_j \end{vmatrix} \tag{12}$$

обращался въ нуль. Слѣдовательно, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будутъ корнями уравненія

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

и имѣютъ поэтому всегда вещественныя значенія (§ 33, d). Къ послѣднему результату, впрочемъ, легко придти непосредственно, разсматривая форму $U-a(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$, которая преобразуется въ

$$(a_1-a)y_1^2+(a_2-a)y_2^2+\cdots+(a_n-a)y_n^2$$

и поэтому для $a=a_1, a_2, \ldots, a_n$ приводится къ меньшему числу перемѣнныхъ. Отсюда слѣдуетъ, что (§ 79) ея дискриминантъ обращается въ нуль для этихъ значеній a.

94. Теперь уже легко опредѣлить элементы искомаго ортогональнаго преобразованія съ помощью системы (11), въ которой числа a_j уже можно разсматривать, какъ извѣстныя. Взявъ ту систему (11), которая соотвѣтствуетъ данному значенію j, мы знаемъ, что неизвѣстныя пропорціональны алгебраическимъ дополненіямъ элементовъ одного ряда (§ 59) или корнямъ квадратнымъ изъ алгебраическихъ дополненій главныхъ элементовъ (§ 45), принимая во вниманіе, что опредѣлитель системы симметрическій. Обозначая черезъ a_{ij} алгебраическое дополненіе элемента $a_{ii}-a_j$ въ опредѣлителѣ (12), для каждаго значенія j будемъ имѣть

$$\frac{k_{1j}}{\sqrt{a_{1j}}}=\frac{k_{2j}}{\sqrt{a_{2j}}}=\cdots=\frac{k_{nj}}{\sqrt{a_{nj}}}=\frac{1}{\sqrt{a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}}},$$

такъ какъ $k_{1j}^2+k_{2j}^2+\cdots+k_{nj}^2=1$ (§ 70). Слѣдовательно,

$$k_{ij}=\sqrt{\frac{a_{ij}}{a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}}}.$$

95. Замѣчая, что дискриминантъ формы (9) равенъ $a_1 a_2 \ldots a_n$ и потому не равенъ нулю, если ни одно изъ чиселъ a не равно нулю, мы видимъ, что всякое каноническое выраженіе формы само по себѣ неприводимо. Изложенная въ предыдущихъ двухъ §§ ме-

тода имѣетъ то преимущество, что она примѣнима и къ приводимымъ формамъ и даетъ при этомъ приведеніе формы къ наименьшему числу перемѣнныхъ. Дѣйствительно, уравненіе (13) можно представить (§ 26, i) въ видѣ

$$A - x\sigma_{n-1} + x^2\sigma_{n-2} - \cdots \mp x^{n-1}\sigma_1 \pm x^n = 0,$$

обозначая черезъ σ_ν сумму всѣхъ главныхъ миноровъ въ A порядка ν. Всѣ эти миноры, порядокъ которыхъ больше ранга μ опредѣлителя A, обратятся въ нуль. Поэтому, если форма приводима, то послѣднее уравненіе приведется къ

$$(\sigma_\mu - x\sigma_{\mu-1} + x^2\sigma_{\mu-2} - \cdots \mp x^{\mu-1}\sigma_1 \pm x^\mu)\, x^{n-\mu} = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ $n - \mu$ корней, равныхъ нулю, и въ каноническомъ выраженіи (9) останутся только μ членовъ, такъ что квадратичная форма будетъ приведена къ наименьшему числу перемѣнныхъ (§ 81).

96. Изложимъ еще одинъ интересный способъ приведенія квадратичной формы къ каноническому виду, исходя изъ того замѣчанія, что преобразованіе

$$(14)\qquad \begin{cases} y_1 = x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + \ldots + k_{1n}x_n, \\ y_2 = \qquad x_2 + k_{23}x_3 + \ldots + k_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \qquad\qquad\qquad\qquad x_n \end{cases}$$

заключаетъ въ себѣ, какъ разъ столько неопредѣленныхъ величинъ k_{ij}, сколько условій, которымъ надо удовлетворить, а именно $\frac{1}{2}n(n-1)$. Положимъ $x_{\nu+1} = 0$, $x_{\nu+2} = 0$, $\ldots$ $x_n = 0$. Это обозначаетъ, что число перемѣнныхъ въ данной формѣ уменьшено до ν; съ другой стороны ясно, что преобразованіе (14), если въ немъ замѣнимъ n на ν, будетъ именно то, которое переводитъ форму $a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \cdots + a_\nu y_\nu^2$ въ первоначальную форму съ ν перемѣнными, $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ потому что $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \ldots, y_n$ обращаются въ 0 вмѣстѣ съ соотвѣтствующими числами x. Дискриминантъ послѣдней формы равенъ $a_1a_2\ldots a_\nu$, дискриминантъ той, въ которую она переходитъ, равенъ

$$A_\nu = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

а преобразованіе (14), очевидно, унимодулярное (§ 64) *).

*) Потому что въ опредѣлителѣ K, ей соотвѣтствующемъ, главные элементы $= 1$, а всѣ элементы по одну сторону діагонали $= 0$, откуда $K = 1$.

Поэтому (§ 80) имѣемъ

$$A_\nu = a_1 a_2 a_3 \dots a_\nu,$$

откуда, въ предположеніи, что опредѣлители $A_1, A_2, \dots, A_n = A$ не равны нулю, находимъ

$$a_1 = A_1, \; a_2 = \frac{A_2}{A_1}, \; a_3 = \frac{A_3}{A_2}, \; \dots, \; a_n = \frac{A}{A_{n-1}}.$$

Итакъ, мы видимъ, что квадратичная форма приводится къ каноническому виду

$$A_1 y_1^2 + \frac{A_2}{A_1} y_2^2 + \frac{A_3}{A_2} y_3^2 + \dots + \frac{A}{A_{n-1}} y_n^2. \tag{16}$$

гдѣ A_ν имѣютъ значенія (15). Практически это приведеніе дѣлается слѣдующимъ манеромъ: изолируютъ одну изъ перемѣнныхъ, выдѣляя выраженіе, равное квадрату линейной формы (и приводятъ форму къ суммѣ одного квадрата и формы съ числомъ перемѣнныхъ на единицу меньшимъ первоначальнаго, съ которою поступаютъ такимъ же образомъ и т. д.). Напримѣръ, если a_{11} не равенъ 0, то тотчасъ видимъ, что въ $a_{11}U$ члены, содержащіе x_1, входятъ въ составъ квадрата формы $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n$. Слѣдовательно, полагая

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \dots,$$

получимъ $U = y_1^2 + U'$, гдѣ U' квадратичная форма съ $(n-1)$ перемѣнными $x_2, x_3, \dots, x_n$. Предполагая, что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ не равно 0, можемъ такимъ же путемъ изолировать x_2. Полагая

$$y_2 = x_2 + \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 + \frac{a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_4 + \dots$$

находимъ $U' = a_2 y_2^2 + U''$, гдѣ $U'' = a_3 x_3^2 + \dots$ и т. д. Чтобы такимъ путемъ получить выраженіе (9), нужно, какъ видно, разсматривать перемѣнныя $x_1, x_2, \dots, x_n$ въ извѣстномъ порядкѣ, съ тѣмъ, чтобы въ рядѣ чиселъ $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ не было нулей. Это, однако, не всегда возможно.

97. Законъ инерціи. Мы уже замѣтили (§ 92), что квадратичную форму можно привести къ каноническому виду безчисленнымъ множествомъ преобразованій, распоряжаясь лишними $\frac{1}{2}n(n+1)$ элементами преобразованія по нашему произволу. Но замѣчательно, что всевозможныя различныя каноническія изображенія одной и той-же формы обладаютъ однимъ весьма важнымъ общимъ свойствомъ, указаннымъ Сильвестеромъ (Sylwester). Мы говоримъ о такъ называемомъ законѣ инерціи квадратичныхъ формъ. Положимъ, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ обозначаютъ коэффиціенты въ

двухъ различныхъ каноническихъ выраженіяхъ одной и той же формы, такъ что

$$(17) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \cdots + \beta_n y_n^2$$

для всевозможныхъ значеній чиселъ x или y. Примемъ числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ за независимыя перемѣнныя, тогда $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будутъ линейныя выраженія относительно чиселъ x. Положимъ, что въ одной части равенства (17) имѣется μ, а въ другой ν отрицательныхъ коэффиціентовъ, и допустимъ, что $\mu < \nu$. Дадимъ тѣмъ μ перемѣннымъ x, квадраты которыхъ въ лѣвой части имѣютъ отрицательные коэффиціенты, значенія, равныя нулю. Въ лѣвой части останется $n - \mu$ перемѣнныхъ x, которыми можно распорядиться такъ, чтобы въ правой части исчезли всѣ числа y, передъ квадратами которыхъ коэффиціенты положительны. Въ самомъ дѣлѣ, число такихъ y-въ равно $n - \nu$ и $n - \nu < n - \mu$, при $\nu > \mu$, а потому (§ 57) требуемымъ условіямъ можно удовлетворить безчисленнымъ множествомъ способовъ. При $\mu > \nu$, мы могли бы такимъ же путемъ уничтожить положительные члены въ лѣвой и отрицательные въ правой части равенства (17). Итакъ, при $\mu \neq \nu$ существовало бы безчисленное множество системъ значеній перемѣнныхъ, для которыхъ равенство (17) обращалось бы въ невозможное равенство между существенно положительнымъ и существенно отрицательнымъ числами. Поэтому должно быть $\mu = \nu$. Иными словами: во всѣхъ различныхъ каноническихъ выраженіяхъ одной и той же квадратичной формы число членовъ съ опредѣленнымъ знакомъ $+$ или $-$, одно и то же. При этомъ, конечно, подразумѣвается, что коэффиціенты формы и коэффиціенты преобразованій числа вещественныя.

98. Изъ закона инерціи прямо вытекаетъ, что для опредѣленія числа квадратовъ съ опредѣленнымъ знакомъ въ каноническихъ выраженіяхъ данной квадратичной формы достаточно замѣтить знаки при квадратахъ въ какомъ либо одномъ изъ этихъ выраженій, напримѣръ въ (16). Числа a_ν имѣютъ очевидно знакъ $+$ или $-$, смотря потому, будутъ-ли $A_{\nu-1}$ и A_ν одинаковыхъ или противныхъ знаковъ*). Отсюда слѣдуетъ, что число отрицательныхъ членовъ въ каждомъ каноническомъ выраженіи квадратичной формы равно числу перемѣнъ знаковъ въ рядѣ $1, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A$. При этомъ существенно предполагается, что ни одинъ изъ членовъ этого ряда не равенъ нулю. Мы покажемъ, однако, ограничиваясь предположеніемъ, что при $A_\nu = 0$, сосѣдніе члены $A_{\nu-1}$ и $A_{\nu+1}$ не равны нулю, что высказанный выше

*) Въ первомъ случаѣ говорятъ, что $A_{\nu-1}$ и A_ν представляютъ постоянство, а во второмъ перемѣну знака.

результатъ остается справедливымъ и въ послѣднемъ случаѣ, подъ условіемъ, что при счетѣ перемѣнъ знака, A_ν выкидывается. Прежде всего докажемъ, что, при $A_\nu = 0$, $A_{\nu-1}$ и $A_{\nu+1}$ будутъ непремѣнно числа разныхъ знаковъ. Дѣйствительно, если $A_\nu = 0$, то формула § 25 дастъ

$$A_{\nu+1} = -\sum_{i,\,j}^{\nu} a_{ij}\, a_{i,\,\nu+1}\, a_{\nu+1,\,j}.$$

Умножая обѣ части равенства на $A_{\nu-1} = a_{\nu\nu}$ и пользуясь формулами § 36, получимъ

$$A_{\nu-1}\, A_{\nu+1} = -\sum_{i,\,j}^{\nu} a_{i\nu}\, a_{\nu j}\, a_{i,\,\nu+1}\, a_{\nu+1,\,j} = -\sum_{i,\,j}^{\nu} a_{i\nu}\, a_{i,\,\nu+1}\cdot a_{j\nu}\, a_{j,\,\nu+1},$$

или

$$A_{\nu-1}\, A_{\nu+1} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,\,\nu-1} & a_{1,\,\nu+1} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,\,\nu-1} & a_{2,\,\nu+1} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} \cdots a_{\nu,\,\nu-1} & a_{\nu,\,\nu+1} \end{vmatrix}^2,$$

откуда и слѣдуетъ сказанное (см. XXIV). Теперь разсмотримъ вмѣсто формы U другую форму U', которую получимъ, если изъ главныхъ элементовъ дискриминанта формы U вычтемъ одно и то же число α. Если представимъ себѣ, что обѣ формы U и U' приведены къ каноническому виду, по способу § 93, то найдемъ для U' выраженіе

$$U' - (a_1 - \alpha)\, y_1^2 + (a_2 - \alpha)\, y_2^2 + \cdots + (a_n - \alpha)\, y_n^2,$$

Число α можно выбрать достаточно малымъ по абсолютной величинѣ для того, чтобы соотвѣтствующіе члены въ каноническихъ выраженіяхъ обѣихъ формъ имѣли одинаковые знаки. Достаточно взять за α число, лежащее между наибольшимъ отрицательнымъ и наименьшимъ положительнымъ корнемъ уравненія (13). Поэтому на основаніи закона инерціи можно, при счетѣ отрицательныхъ членовъ въ каноническихъ выраженіяхъ, замѣнить форму U формой U'. Далѣе, такъ какъ вычитаніе изъ главныхъ элементовъ дискриминанты формы U произвольно малого по абсолютной величинѣ числа α, произведутъ въ A_1, A_2, ..., измѣненія, которыя также будутъ сколь угодно малыми (XXV), то легко видѣть, что при достаточно маломъ α^2, тѣ изъ названныхъ членовъ ряда, которые не были нулями, сохранятъ свои знаки, а тотъ членъ, который былъ нулемъ можно будетъ сдѣлать не равнымъ нулю. Поэтому, если $A_{\nu-1}$, A_ν, $A_{\nu+1}$ измѣнятся въ $A'_{\nu-1}$, A'_ν и $A'_{\nu+1}$ то $A'_{\nu-1}$ и $A'_{\nu+1}$ будутъ числа разныхъ знаковъ, и одна перемѣна знаковъ, представляемая парою $A_{\nu-1}$ и $A_{\nu+1}$, дастъ также одну перемѣну $A'_{\nu-1}$, A'_ν, $A'_{\nu+1}$, каковъ бы ни былъ знакъ числа A'_ν.

99. Примѣры. a) Если a и $ab - h^2$ не равны нулю, то пріемомъ, изложеннымъ въ § 96, можно привести квадратичную форму

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

къ нижеслѣдующему (каноническому) виду

$$U = a\left(x + \frac{h}{a}y + \frac{g}{a}z\right)^2 + \frac{ab - h^2}{a}\left(y + \frac{af - gh}{ab - h^2}z\right)^2 + \frac{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2}{ab - h^2}z^2.$$

Это тождество теряетъ смыслъ, когда a, b, c или b, c, g, h одновременно будутъ нулями, и съ помощью того же пріема § 96 нельзя найти какое-нибудь другое аналогичное тождество взамѣнъ предыдущаго. Въ этихъ случаяхъ надо прибѣгнуть къ пріему § 93, который всегда приведетъ къ цѣли.

b) Такъ напримѣръ, квадратичная форма $U = yz + zx + xy$ приводится къ виду

$$U = \tfrac{1}{3}(x + y + z)^2 - \tfrac{1}{4}(x - y)^2 - \tfrac{1}{12}(x + y - 2z)^2.$$

Къ этой формѣ пріемъ § 96 не примѣнимъ, потому что въ рядѣ

$$1,\ A_1 = 0,\ A_2 = -\tfrac{1}{4},\ A = \tfrac{1}{4}$$

есть одинъ членъ, равный нулю. Но такъ какъ неисчезающіе члены имѣютъ знаки $+\ -\ +$ и даютъ двѣ перемѣны знака, то можно быть увѣреннымъ, что въ любомъ каноническомъ выраженіи данной формы будетъ два отрицательныхъ члена. Провѣрить это можно, взявъ вмѣсто U форму

$$U' = U - a(x^2 + y^2 + z^2),$$

каноническое выраженіе которой при $-\tfrac{1}{2} < a < 1$ будетъ имѣть столько-же отрицательныхъ членовъ, сколько ихъ имѣется въ каноническомъ выраженіи U. Дѣйствительно, пріемъ § 93 дастъ

$$U' = \frac{1 - a}{3}(x + y + z)^2 - \frac{1 + 2a}{4}(x - y)^2 - \frac{1 + 2a}{12}(x + y - 2z)^2.$$

Второй пріемъ (§ 96) дастъ

$$U' = -a\left(x - \frac{y + z}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{4a} - a\right)\left(y + \frac{z}{1 - 2a}\right)^2 - \left(\frac{1}{1 - 2a} + a\right)z^2$$

и мы видимъ, что достаточно взять $a < \tfrac{1}{2}$, чтобы въ рядѣ

$$1,\ A_1' = -a,\ A_2' = -\tfrac{1}{4} + a^2,\ A' = (1 - a)(\tfrac{1}{2} + a)^2$$

неисчезающіе члены имѣли тѣ же знаки, какіе они имѣли для U, а исчезающій получаетъ знакъ, не имѣющій вліянія на счетъ перемѣнъ знака, потому что знаки $+ \pm -$ первыхъ трехъ членовъ представляютъ всегда одну перемѣну знака. Замѣтимъ наконецъ, что при $a = \tfrac{1}{2}$ $A_2' = 0$, но знаки неисчезающихъ членовъ $+\ -\ +$ опять представляютъ двѣ перемѣны знака.

c) Возвратимся теперь къ общей тройничной квадратичной формѣ примѣра a), и примѣнимъ къ ней критерій § 98. Если хоть одинъ изъ коэф-

фиціентовъ a, b, c не равенъ нулю, то всегда можемъ предположить, что, напримѣръ, $a > 0$. Тогда данная форма приведется къ виду $X^2 + Y^2 - Z^2$, если ея дискриминантъ A отрицателенъ, а если дискриминантъ положителенъ, то къ виду $X^2 + Y^2 + Z^2$, когда $ab > h^2$ и къ виду $X^2 - Y^2 - Z^2$, когда $ab < h^2$. Замѣтимъ еще, что въ случаѣ $A > 0$ $ab - h^2$ и $ac - g^2$ будутъ числа одинаковыхъ знаковъ, какъ видно изъ тождества

$$Aa = (ab - h^2)(ac - g^2) - (af - gh)^2.$$

Поэтому, если $ab - h^2 > 0$, то b и c тоже больше 0, какъ и a. Если, наконецъ, всѣ три числа a, b, c равны нулю, то квадратичная форма приведется къ виду $X^2 - Y^2 - Z^2$ или къ виду $X^2 + Y^2 - Z^2$ смотря потому, будетъ ли $A > 0$ или < 0 *).

100. Въ приложеніяхъ часто приходится имѣть дѣло съ существенно положительными квадратичными формами. Онѣ обладаютъ свойствомъ принимать только положительныя значенія при любыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, не равныхъ нулю одновременно. Каноническое выраженіе такой формы не можетъ въ себѣ заключать отрицательныхъ квадратовъ. Иначе, приравнивая нулю тѣ перемѣнныя, которыхъ квадраты положительны, получили бы для формы отрицательныя значенія. Поэтому необходимо, чтобы опредѣлители A_1, A_2, ..., A были всѣ положительны; этого и достаточно, по формулѣ (16), чтобы форма имѣла всегда одни лишь положительныя значенія. Вслѣдствіе этого мы можемъ высказать слѣдующую весьма важную теорему:

Для того, чтобы неприводимая квадратичная форма

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots$$

была существенно положительна, необходимы и достаточны слѣдующія условія:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того, чтобы форма была, напротивъ того, существенно отрицательна, необходимо и достаточно, чтобы тѣ же опредѣлители были попеременно положительны и отрицательны, начиная съ перваго a_{11}, который долженъ быть отрицательнымъ. Надо, однако, замѣтить, что благодаря пробѣламъ, оставшимся въ § 98, можетъ возникнуть сомнѣніе въ справедливости сдѣланныхъ выше заключеній въ тѣхъ случаяхъ, когда въ рядѣ A_1, A_2, ... встрѣтятся члены, равные нулю. Но легко прямо доказать, что въ такихъ случаяхъ квадратичная форма не можетъ всегда сохранять одинъ и тотъ же знакъ. Если

*) Большія буквы X, Y, Z обозначаютъ линейныя функціи отъ x, y, z.

положимъ, что $a_{11} = 0$, то форму U можно представить въ видѣ $U = \alpha x_1 + \beta$, гдѣ α и β отъ x_1 не зависятъ. Выбравъ какія нибудь значенія остальныхъ перемѣнныхъ, не обращающія только α въ нуль, очевидно можемъ затѣмъ распорядиться числомъ x_1 такъ, чтобы U получило любое значеніе, положительное или отрицательное. Далѣе, если a_{11} не равно нулю, а A_ν первый исчезающій членъ въ рядѣ A_1, A_2, ..., то замѣтимъ, что при $A_{\nu-1} \neq 0$, всегда можно дать числамъ x_1, x_2, ..., $x_{\nu-1}$ значенія, отличающіяся отъ x_ν лишь постоянными множителями, чтобы было

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{i\nu} x_\nu = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$$

Обозначая, слѣдовательно, черезъ β совокупность тѣхъ членовъ въ U, которые не содержатъ въ себѣ первыхъ ν перемѣнныхъ, будемъ имѣть

$$U = \beta + 2\sum_{i=1}^{i=\nu}(a_{i,\nu+1} x_{\nu+1} + a_{i,\nu+2} x_{\nu+2} + \cdots + a_{in} x_n) x_i,$$

откуда $U = \alpha x_\nu + \beta$, гдѣ положено

$$\alpha = \frac{2}{A_{\nu-1}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,\nu-1} & a_{1,\nu+1} x_{\nu+1} + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,\nu-1} & a_{2,\nu+1} x_{\nu+1} + \cdots + a_{2n} x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} \cdots a_{\nu,\nu-1} & a_{\nu,\nu+1} x_{\nu+1} + \cdots + a_{\nu n} x_n \end{vmatrix},$$

Какъ видимъ, и α зависитъ только отъ $x_{\nu+1}$, $x_{\nu+2}$, ..., x_n. Придавъ этимъ перемѣннымъ любыя значенія, не обращающія α въ 0, всегда можно дать числу x_ν такое положительное или отрицательное значеніе, достаточно большое по абсолютной величинѣ, чтобы U получило по желанію положительное или отрицательное значеніе. Остается устранить еще одно сомнѣніе, а именно: не можетъ ли α тождественно обратиться въ нуль? Но тогда мы имѣли бы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,\nu-1} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,\nu-1} & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} \cdots a_{\nu,\nu-1} & a_{\nu i} \end{vmatrix} = 0$$

при $i = \nu$, $\nu + 1$, ..., n. Слѣдовательно, (§ 63) всѣ миноры опредѣлителя A, содержащіеся въ первыхъ ν строкахъ его, были бы равны нулю, а тогда и A было бы равно нулю (§ 22), вопреки предположенію, что U форма неприводимая; слѣдовательно, α тождественно нулемъ быть не можетъ (XXVI).

101. Теперь мы оставимъ на время квадратичныя формы и заключимъ эту первую книгу нѣкоторыми указаніями, касающи-

мися приведенія бинарныхъ формъ вообще къ каноническому виду. Предложимъ себѣ преобразовать форму

$$a_0 x^m + \frac{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{m-2} y^2 + \cdots + a_m y^m \tag{18}$$

въ сумму m-хъ степеней

$$a_1 (x + k_1 y)^m + a_2 (x + k_2 y)^m + \cdots + a_r (x + k_r y)^m , \tag{19}$$

при чемъ число r этихъ степеней должно быть по возможности малымъ. Отождествляя выраженія (18) и (19) получимъ $m+1$ условныхъ уравненій, а число входящихъ въ (19) неопредѣленныхъ величинъ (a и k), которыми можно располагать, равно $2r$. Чтобы ихъ можно было опредѣлить согласно требуемымъ условіямъ, вообще необходимо, чтобы $2r$ было $\geqq m+1$, и потому за r надо брать наименьшее цѣлое число, котораго не превосходитъ $\frac{m+1}{2}$. При $m = 2n-2$, $r = n$ и у насъ будетъ $2n-1$ условій и $2n$ неизвѣстныхъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ случаѣ бинарныхъ формъ четнаго порядка, можно безчисленнымъ множествомъ способовъ привести такую форму къ виду (19). Напротивъ того, если $m = 2n-1$, то $r = n$ и имѣемъ $2n$ условій съ $2n$ неизвѣстными. Положимъ, что

$$\begin{aligned} &a_0 x^{2n-1} + (2n-1) a_1 x^{2n-2} y + \cdots + a_{2n-1} y^{2n-1} \\ &= a_1 (x + k_1 y)^{2n-1} + a_2 (x + k_2 y)^{2n-1} + \cdots + a_n (x + k_n y)^{2n-1} . \end{aligned}$$

Отождествляя, находимъ

$$\left| \begin{array}{llll} a_0 & = a_1 & + a_2 & + \cdots + a_n , \\ a_1 & = a_1 k_1 & + a_2 k_2 & + \cdots + a_n k_n , \\ a_2 & = a_1 k_1^2 & + a_2 k_2^2 & + \cdots + a_n k_n^2 , \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & = a_1 k_1^{2n-1} & + a_2 k_2^{2n-1} & + \cdots + a_n k_n^{2n-1} . \end{array} \right. \tag{20}$$

Разсмотримъ тѣ $n+1$ уравненій, которыя слѣдуютъ за i-тымъ, и припомнимъ, что эти уравненія, содержащія n неизвѣстныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, только тогда совмѣстны, когда

$$\left| \begin{array}{llll} a_i & 1 & 1 & \ldots 1 \\ a_{i+1} & k_1 & k_2 & \ldots k_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i+} & k_1^n & k_2^n & \ldots k_n^n \end{array} \right| = 0$$

или

$$\varkappa_0 a_i + \varkappa_1 a_{i+1} + \varkappa_2 a_{i+2} + \cdots + \varkappa_n a_{i+n} = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

гдѣ $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ обозначаютъ алгебраическія дополненія перваго

столбца. Далѣе, замѣняя первый столбецъ какимъ угодно другимъ, получимъ

$$\varkappa_0 + \varkappa_1 k_i + \varkappa_2 k_i^2 + \cdots + \varkappa_n k_i^n = 0.$$

Поэтому, замѣчая, что числа $\varkappa$ отъ i не зависятъ, будемъ имѣть

$$\left\{\begin{array}{llll} \varkappa_0 & + \varkappa_1 k_i + \varkappa_2 k_i^2 & + \cdots + \varkappa_n k_i^n & = 0, \\ \varkappa_0 a_0 & + \varkappa_1 a_1 + \varkappa_2 a_2 & + \cdots + \varkappa_n a_n & = 0, \\ \varkappa_0 a_1 & + \varkappa_1 a_2 + \varkappa_2 a_3 & + \cdots + \varkappa_n a_{n+1} & = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varkappa_0 a_{n-1} & + \varkappa_1 a_n + \varkappa_2 a_{n+1} & + \cdots + \varkappa_n a_{2n-1} & = 0. \end{array}\right.$$

Это система $n+1$ линейныхъ однородныхъ уравненій относительно чиселъ $\varkappa$, а потому, если эти числа не равны нулю одновременно, какъ то и будетъ, если числа x_i всѣ различны между собою, опредѣлитель этой системы будетъ равенъ нулю, такъ что

$$\left|\begin{array}{llll} 1 & x & x^2 & \cdots x^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots a_{2n-1} \end{array}\right| = 0 \tag{21}$$

для $x = k_1, k_2, \ldots, k_n$. Достаточно рѣшить уравненіе (21), чтобы найти значенія $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Подставляя ихъ въ любыя n уравненій (20) получимъ и значенія чиселъ a.

102. Примѣръ для упражненія. Привести къ каноническому виду бинарную кубическую форму

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

Если $a_0 a_2 = a_1^2$, то данная форма прямо получается въ искомомъ видѣ, а именно:

$$\frac{1}{a_0^2}(a_0 x + a_1 y)^3 + \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{a_0} y^3$$

Пусть теперь $a_0 a_2 \neq a_1^2$. Если ея инваріантъ (§ 87)

$$\Delta = 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2$$

не равенъ нулю, то уравненіе (21) даетъ два различныхъ корня

$$k_1 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 + \sqrt{-\Delta}}{2(a_0 a_2 - a_1^2)}, \quad k_2 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 - \sqrt{-\Delta}}{2(a_0 a_2 - a_1^2)},$$

а изъ уравненій $\alpha_1 + \alpha_2 = a_0$, $\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = a_1$ получаемъ значенія α_1 и α_2, для которыхъ данная форма принимаетъ видъ $\alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \eta^3$, гдѣ $\xi = x + k_1 y$,

$\eta = x + k_2 y$. Замѣтимъ, что ξ и η равны линейнымъ множителямъ, на которыя разлагается квадратичная форма

$$\begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & a_1 x + a_2 y \\ a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y \end{vmatrix} = (a_0 a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)xy + (a_1 a_3 - a_2^2)y^2.$$

дискриминантъ которой равенъ $\frac{1}{4}\Delta$. Дѣйствительно, эта квадратичная форма, какъ показываетъ непосредственное разложеніе, принимаетъ видъ $(a_0 a_2 - a_1^2)\xi\eta$. Наконецъ, если между коэффиціентами данной формы существуетъ соотношеніе $\Delta = 0$, то ее нельзя привести къ суммѣ кубовъ, если она сама не равна кубу линейной формы. Но ее можно привести (срав. съ § 91) къ виду $a_0\xi^2\eta$, гдѣ $\xi = x + k_1 y$, $\eta = x + k_2 y$, и

$$k_1 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{2(a_0 a_2 - a_1^2)} = 2\frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_0 a_3 - a_1 a_2}, \quad k_2 = \frac{a_3(a_0 a_2 - a_1^2)}{a_0(a_1 a_3 - a_2^2)}.$$

Примѣчанія къ первой книгѣ.

I (къ § 3).

Термины Permutation и Substitution мы переводимъ соотвѣтственно терминами перестановка и подстановка. Вмѣсто послѣдняго часто встрѣчается иностранный терминъ субституція. Мы остановились на русскомъ терминѣ подстановка на томъ основаніи, что онъ уже давно вошелъ въ употребленіе, и что можно не опасаться смѣшенія двухъ сходно звучащихъ русскихъ терминовъ, если разъ навсегда замѣтить, что перестановка обозначаетъ само размѣщеніе элементовъ, а подстановка — операцію переводящую одно размѣщеніе въ другое. Замѣтимъ еще, что подстановка, переводящая одну перестановку, напримѣръ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ въ другую, напримѣръ $\beta\delta\varepsilon\gamma\alpha$, обозначается символомъ

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \\ \beta\delta\varepsilon\gamma\alpha \end{pmatrix},$$

при чемъ элементы, занимающіе одинаковыя мѣста въ разсматриваемыхъ перестановкахъ незываются соотвѣтствующими и пишутся одинъ подъ другимъ.

II (къ § 11).

Пояснимъ сказанное здѣсь примѣромъ. Разсмотримъ опредѣлитель четвертаго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

и опредѣлимъ знакъ $\pm$ при членѣ $a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}$. Въ перестановкѣ первыхъ указателей 3 4 2 1 число обращеній равно $2+2+1=5$, $r=5$; въ перестановкѣ вторыхъ указателей 1 2 3 4 число обращеній $s=0$, $r+s=5$. Поэтому знакъ разсматриваемаго члена есть

(-1), т. е., минусъ. Положимъ теперь, что перемѣнили порядокъ множителей и написали тотъ же членъ въ видѣ $a_{42}a_{14}a_{31}a_{23}$, т. е. произвели подстановки

$$\begin{pmatrix}3&4&2&1\\4&1&3&2\end{pmatrix}=(3\,4\,1\,2),\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=(1\,2\,4\,3).$$

Каждая изъ этихъ подстановокъ состоитъ изъ одного цикла при 4-хъ элементахъ, т. е. обѣ нечетныя ($n-\nu=3$). Теперь число обращеній r въ перестановкѣ 4 1 3 2 равно $3+1=4$, а число s въ перестановкѣ 2 4 1 3 равно $1+2=3$; $r+s=7$ есть число нечетное, какъ и раньше, и знакъ—передъ разсматриваемымъ членомъ сохраняется.

III (къ § 14).

Замѣтимъ прежде всего слѣдующее свойство опредѣлителей: Два опредѣлителя, въ которыхъ строки одного служатъ столбцами другого, и наоборотъ, равны между собой, иными словами: опредѣлитель не мѣняетъ своей величины при замѣнѣ строкъ столбцами, и наоборотъ. Это свойство вытекаетъ непосредственно изъ самого закона составленія опредѣлителя, изложеннаго въ § 11, такъ какъ строки и столбцы при этомъ составленіи играютъ совершенно одинаковую роль. Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

Впрочемъ, чтобы вполнѣ ясно убѣдиться въ справедливости этой теоремы, замѣтимъ слѣдующее. Разсматриваемое въ ней преобразованіе состоитъ, какъ видимъ, въ перемѣщеніи каждаго элемента даннаго опредѣлителя, стоящаго на мѣстѣ (ij), т. е. въ пересѣченіи i-той строки и j-таго столбца, на мѣсто (ji), симметричное съ первымъ относительно главной діагонали, причемъ главные элементы, конечно, остаются на своихъ мѣстахъ. Слѣдовательно, если обозначимъ элементы преобразованнаго опредѣлителя буквами b_{ij}, причемъ первый значекъ опять указываетъ строку, а второй—столбецъ, то $b_{ij}=a_{ji}$. Каждому члену $(-1)^{r+s}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$ даннаго опредѣлителя соотвѣтствуетъ равный ему по величинѣ и по знаку членъ $(-1)^{s+r}b_{j_1i_1}b_{j_2i_2}\dots b_{j_ni_n}$ преобразованнаго, а потому значеніе прерваго равно значенію второго.

IV (къ § 14).

Теорема этого § въ общемъ случаѣ еще легче доказывается, если сперва докажемъ упомянутый въ концѣ частный случай, а затѣмъ припомнимъ опредѣленіе четной и нечетной подстановки.

V (къ § 17).

Въ виду частыхъ приложеній указаннаго здѣсь разложенія приведемъ еще примѣръ.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+\beta_1 \\ a_2 & b_2+\beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1+\beta_1 \\ \alpha_2 & b_2+\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Вообще, если элементы нѣсколькихъ столбцовъ разложены каждый на нѣсколько слагаемыхъ, то опредѣлитель можетъ быть разложенъ на сумму нѣсколькихъ опредѣлителей, которые получимъ, комбинируя каждый столбецъ слагаемыхъ въ каждомъ столбцѣ съ каждымъ столбцомъ слагаемыхъ во всѣхъ другихъ столбцахъ. Все сказанное о столбцахъ, очевидно, относится и къ строкамъ. Изъ того, что сказано въ §§ 16 и 17, вытекаетъ слѣдующее важное слѣдствіе. Если между элементами всѣхъ строкъ (столбцовъ) опредѣлителя существуетъ одно и тоже линейное однородное соотношеніе

$$\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_n a_{in} = 0, \tag{1}$$

при $i = 1, 2, \ldots, n$, гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не равны нулю одновременно, то опредѣлитель равенъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, если, напримѣръ, λ_1 не равно 0, то изъ уравненія (1) получимъ

$$a_{i1} = \mu_2 a_{i2} + \mu_3 a_{i3} + \cdots + \mu_n a_{in}.$$

На основаніи § 17 опредѣлитель будетъ равенъ суммѣ нѣсколькихъ опредѣлителей съ эквивалентными столбцами, т. е. равныхъ нулю (§ 16). Впослѣдствіи въ § 57 мы увидимъ, что существованіе соотношенія (1) не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы опредѣлитель былъ равенъ нулю.

VI (къ § 25).

Въ справедливости послѣдняго замѣчанія, весьма важнаго для приложеній, можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ черезъ $\tilde{\omega}_{ij}$ алгебраическое дополненіе элемента a_{ij} въ опредѣлителѣ a_{rs} т. е. въ алгебраическомъ дополненіи элемента a_{rs} въ опредѣлителѣ D. Мы получимъ $\tilde{\omega}_{ij}$ изъ a_{rs}, если выкинемъ въ немъ i-тую строку и j-тый столбецъ, и возьмемъ полученный опредѣлитель со знакомъ $(-1)^{i+j}$ (§ 20). Но a_{rs} получается изъ D, если въ немъ выкинемъ r-тую строку и s-тый столбецъ, и возьмемъ полученный опредѣлитель со знакомъ $(-1)^{r+s}$. Слѣдовательно, $\tilde{\omega}_{ij}$ можно получить изъ D, выкидывая въ немъ i-тую и r-тую строки, j-тый и s-тый столбцы, и взявъ полученный тогда опредѣлитель со

знакомъ $(-1)^{i+r+j+s}$. Съ другой стороны, совершенно такимъ же образомъ получается изъ D опредѣлитель $\mathfrak{a}_{ij}$ — алгебраическое дополненіе минора (§ 20)

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно, $\tilde{\omega}_{ij} = \mathfrak{a}_{ij}$, что и надо было показать.

VII (къ § 26).

Напримѣръ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}.$$

VIII (къ § 27, k.).

Надо обратить вниманіе на то, что предпослѣдніе элементы въ послѣдней строкѣ и послѣднемъ столбцѣ равны a_{n-1}, а всѣ остальные, кромѣ главнаго, равны нулю. Обозначая, какъ и раньше, элементы опредѣлителя черезъ a_{ij}, имѣемъ поэтому $a_{nn} = a_{n-1} + a_n$, $a_{n,\,n-1} = a_{n-1,\,n} = a_{n-1}$, и $a_{in} = a_{nj} = 0$, при i и $j < n-1$. Формула § 25, при $r = s = n$, дастъ

$$D_n = a_{nn}\, \mathfrak{a}_{nn} - \sum_{(i,\,j)} \mathfrak{a}_{ij}\, a_{in}\, a_{nj},$$

и вся сумма $\sum_{(i,\,j)}$ сведется къ одному члену, именно къ члену $a_{n-1}^2\, \mathfrak{a}_{n-1,\,n-1}$. Затѣмъ, очевидно, $a_{nn} = D_{n-1}$, $\mathfrak{a}_{n-1,\,n-1} = D_{n-2}$ и $D_n = (a_{n-1} + a_n)\, D_{n-1} - a_{n-1}^2\, D_{n-2}$. Къ тому же результату можно придти при помощи простого разложенія опредѣлителя D_n по элементамъ послѣдней строки (§ 23), не прибѣгая къ формулѣ § 25.

IX (§ 27, m).

Фибоначчи — итальянскій математикъ, написавшій въ 1228 г. замѣчательный для своего времени ариѳметическій трактатъ подъ названіемъ „Liber abaci“, о которомъ можно прочесть у Кантора: Cantor, „Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, B. II. стр. 6. „Abacus“ — (абакъ) названіе разграфленной доски, употреблявшейся въ древности для производства вычисленій.

X (къ § 29).

Примѣры. a) $m = n$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}, & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = A.B.$$

b) $m > n$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13}, & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13}, & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}.$$

c) $m < n$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}, & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}, & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12}, & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22}, & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

XI къ § 31.

Для поясненія теоремы этого § положимъ, что матриссы A и B состоятъ изъ 5-ти столбцовъ и 4-хъ строкъ ($m = 5$, $n = 4$). Произведеніе ихъ будетъ опредѣлитель 4-го порядка

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix},$$

гдѣ c_{ij} составляются по формулѣ (5) § 28. Возьмемъ въ немъ, напримѣръ, миноръ

$$C_{12} = \begin{vmatrix} c_{21} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix},$$

опредѣляемый системами значеній $i = 2, 3, 4$, $j = 1, 3, 4$. Онъ долженъ быть равенъ произведенію матриссъ, состоящихъ изъ

2-ой, 3-ей и 4-ой строкъ въ матриссахъ A и B. Одна изъ нихъ будетъ

$$A' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix},$$

другая B' аналогичная ей, съ буквами b. Произведеніе A' на B' будетъ опредѣлитель

$$C' = \begin{vmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} \end{vmatrix},$$

гдѣ c'_{ij} составляются изъ элементовъ A' и B' по формулѣ (5). Составимъ, напримѣръ, c'_{11}:

$$c'_{11} = a_{21}\,b_{21} + a_{22}\,b_{22} + a_{23}\,b_{23} + a_{24}\,b_{24} + a_{25}\,b_{25},$$

а эта сумма, какъ видимъ, равна c_{21} (по формулѣ (5)). Такимъ же образомъ, убѣждаемся, что каждый элементъ въ C' равенъ соотвѣтствующему элементу въ C_{12}, такъ что $C' = C_{12}$.

XII (къ 33, а).

Послѣдній результатъ легко получить, пользуясь извѣстнымъ выраженіемъ

$$\varphi(m) = m \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{\beta - 1}{\beta} \cdots \frac{\delta - 1}{\delta}, \text{ гдѣ}$$

$\alpha, \beta, \ldots, \delta$ различные простые дѣлители числа m (см. Д. Граве, Элем. теорія чиселъ, или Веберъ и Вельштейнъ l. c. стр. 299) и замѣчая, что $\left[\frac{m}{\alpha}\right]$ равно числу чиселъ, меньшихъ m и дѣлящихся на α.

XIII (къ § 34).

Приведенное нами доказательство развито нѣсколько подробнѣе, чѣмъ въ нѣмецкомъ подлинникѣ, въ которомъ изложеніе его намъ кажется не вполнѣ точнымъ. Кромѣ того, мы считаемъ полезнымъ, для лучшаго уясненія теоремы и ея доказательства, провести его на частномъ примѣрѣ. Разсмотримъ опредѣлитель 4-го порядка D и его взаимный Δ:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

и докажемъ, что

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} = D.\ \mathfrak{a}_{1324},$$

гдѣ $\mathfrak{a}_{1324}$ есть алгебраическое дополненіе минора

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$$

въ опредѣлителѣ D. Мы положимъ, слѣдовательно, $r = 2$, $s = 4$, $i = 1$, $j = 3$. Мы имѣемъ здѣсь

$$a_{rs} = a_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{41} \end{vmatrix};$$

умножая элементы (i-аго) 3-го столбца на (a_{ij}) a_{13} и прибавляя къ нему элементы 1-го, 2-го и 4-го столбцовъ, умноженные на a_{11}, a_{12}, a_{14}, получимъ

$$(a_{ij}\, a_{rs} =)\ a_{13}\, a_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & D & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{14} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = D'.$$

Алгебраическое дополненіе (a_{is}) a_{14} въ D' равно

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{23}\,(a_{rj}).$$

Алгебраическое дополненіе элемента D въ D' равно

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix},$$

т. е. равно алгебраическому дополненію минора

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix},\ [(-1)^{i+j+r+s} = (-1)^{10} = +1]$$

въ опредѣлителѣ D. Слѣдовательно, $a_{13}\, a_{24} = a_{14}\, a_{23} + D.\ \mathfrak{a}_{1324}$, или

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = D.\ \mathfrak{a}_{1324}.$$

XIV (къ § 39).

Для поясненія приведеннаго здѣсь доказательства замѣтимъ слѣдующее. Положимъ, что алгебраическое дополненіе минора $D_{n-\nu}$ есть εD_ν, гдѣ $\varepsilon = \pm 1$; тогда $\varepsilon D_{n-\nu}$ есть алгебраическое дополненіе минора D_ν и въ тоже время $\varepsilon \Delta_{n-\nu}$ есть алгебраическое дополненіе минора Δ_ν въ Δ, такъ какъ ε зависитъ только отъ указателей, а они одинаковы въ D_ν и Δ_ν, и въ $D_{n-\nu}$ и $\Delta_{n-\nu}$. По теоремѣ § 38, замѣнивъ въ ней ν на $n-\nu$, находимъ, что $\Delta_{n-\nu}$ равно степени $D^{n-\nu-1}$, умноженной на алгебраическое дополненіе минора $D_{n-\nu}$, т. е. на εD_ν, а слѣдовательно $\varepsilon \Delta_{n-\nu} = D^{n-\nu-1} \cdot D_\nu$, что и доказываетъ теорему.

XV (къ § 41).

Въ опредѣлителѣ § 41 числа p и q могутъ имѣть любое изъ значеній 0, 1, 2, ..., $(\mu-1)$, но условившись писать $i_{\mu-1} = j_\mu$, $r_{\mu+1} = s_\mu$, можно числамъ p и q дать и значенія $p = \mu$, $q = \mu$. При $p = q = \mu$, этотъ опредѣлитель напишется такъ

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 r_1} & a_{i_1 r_2} \cdots a_{i_1 r_\mu} & a_{i_1 s_\mu} \\ a_{i_2 r_1} & a_{i_2 r_2} \cdots a_{i_2 r_\mu} & a_{i_2 s_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_\mu r_1} & a_{i_\mu r_2} \cdots a_{i_\mu r_\mu} & a_{i_\mu s_\mu} \\ a_{j_\mu r_1} & a_{j_\mu r_2} \cdots a_{j_\mu r_\mu} & a_{j_\mu s_\mu} \end{vmatrix}$$

откуда и видно, что $\alpha_{\mu\mu}$ — обыкновенное дополненіе элемента $a_{j_\mu s_\mu}$ имѣетъ написанное въ § 41 выраженіе. Такимъ же образомъ провѣряются и остальныя три выраженія: $\alpha_{0\mu}$, $\alpha_{\mu 0}$, α_{00}. Пояснимъ теорему § 41 (т. е. собственно говоря, частный ея случай, доказанный въ § 36) частнымъ примѣромъ. Возьмемъ опредѣлитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рангъ его очевидно есть 2. Составимъ обыкновенныя дополненія его 9 элементовъ; обозначая черезъ α_{pq} обыкновенное дополненіе элемента $a_{p+1, q+1}$ мы найдемъ

$$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{01} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\alpha_{02} = 1, \quad \alpha_{10} = 2, \quad \alpha_{11} = -4, \quad \alpha_{12} = -2$$
$$\alpha_{20} = -3, \quad \alpha_{21} = 6, \quad \alpha_{22} = 3.$$

Въ 1-омъ и 2-омъ столбцахъ опредѣлителя D содержатся миноры 2-го порядка

$$\alpha_{22}, \quad \alpha_{12}, \quad \alpha_{02};$$

въ 1-омъ и 3-емъ столбцахъ, соотвѣтствующіе имъ, т. е, составленные изъ равноименныхъ строкъ, миноры будутъ

$$a_{21},\quad a_{11},\quad a_{01};$$

наконецъ во 2-омъ и 3-емъ столбцахъ

$$a_{20},\quad a_{10},\quad a_{00}.$$

Согласно теоремѣ найдемъ

$$\frac{c_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{02}}{a_{01}} = \frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Точно также повѣряются равенства

$$\frac{a_{22}}{a_{20}} = \frac{a_{12}}{a_{10}} = \frac{a_{02}}{a_{00}} = -1.$$

XVI (къ § 44).

Напримѣръ, въ опредѣлителѣ

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$$

сопряженные миноры 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -b & -c \end{vmatrix}$$

оба равны ac. Въ опредѣлителѣ

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

сопряженные миноры 3-го порядка, а именно алгебраическія дополненія элементовъ c и $-c$, будутъ:

$$\gamma = -\begin{vmatrix} -a & 0 & d \\ -b & -d & 0 \\ -c & -e & -f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & 0, & d \\ b & -d & 0 \\ c & -e & -f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & -d & -e \\ d & 0 & -f \end{vmatrix},$$

$$-\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} = -\gamma.$$

XVII (къ § 46).

Символъ $\sum_{i,j}'$ обозначаетъ, что надо каждое изъ значеній $i = 1, 2, \ldots, n$ сочетать съ каждымъ изъ значеній $j = 1, 2, \ldots, n$, и взять сумму всѣхъ слагаемыхъ, соотвѣтствующихъ этимъ сочетаніямъ. Суммируя сперва по j при i постоянномъ, а полученный результатъ затѣмъ по i, мы и получимъ преобразованіе двойной суммы въ выраженіи D въ квадратъ простой:

$$\sum_{ij}' A_i A_j = \sum_i' \left\{ A_i \sum_j' A_j \right\} = \sum_j' A_j \cdot \sum_i' A_i = \left[\sum_i' A_i \right]^2.$$

Замѣчаніе о числѣ членовъ разложеніи $\sqrt{D}$ доказывается, какъ и сама теорема § 46, повѣркою при $n = 2$ и переходомъ отъ $n - 2$ къ n, замѣтивъ, что въ (11) число членовъ равно $n - 1$.

XVIII (къ 48, b и c).

b) Опредѣлитель α_{11}, алгебраическое дополненіе элемента a_{11} въ D, выражается такъ:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

α_{22} есть алгебраическое дополненіе элемента $a_{22} = 0$ въ опредѣлителѣ α_{11}, т. е.

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{vmatrix} = p^2.$$

Такъ же найдемъ $\alpha_{33} = q^2$, $\alpha_{44} = r^2$. Положивъ $\sqrt{\alpha_{22}} = p$, для опредѣленія

$$\sqrt{\alpha_{33}} = \sqrt{q^2} = \pm q; \text{ и } \sqrt{\alpha_{44}} = \sqrt{r^2} = \pm r$$

имѣемъ формулы

(1) $$\alpha_{23} = \sqrt{\alpha_{22}} \cdot \sqrt{\alpha_{33}}, \quad \alpha_{24} = \sqrt{\alpha_{22}} \cdot \sqrt{\alpha_{44}},$$

гдѣ α_{23} — алгебраическое дополненіе a_{23} въ α_{11}, т. е.

$$\alpha_{23} = -\begin{vmatrix} -r, & p \\ q, & 0 \end{vmatrix} = pq$$

и

$$\alpha_{24} = \begin{vmatrix} -r, & 0 \\ q, & -p \end{vmatrix} = pr.$$

Поэтому формулы (1) при $\sqrt{a_{22}} = p$, дадутъ $\sqrt{q^2} = q$, $\sqrt{r^2} = r$, и формула (11), гдѣ $a_{12} = a$, $a_{13} = b$, $a_{14} = c$, дастъ $\sqrt{D} = ap + bq + cr$.

c) Замѣчаемъ соотношеніе

$$D_n = x\,D_{n-1} + a^2\,D_{n-2},$$

гдѣ D_n данный опредѣлитель ($n \geqq 3$) и значенія $D_1 = x$, $D_2 = x^2 + a^2$.

Изъ этихъ формулъ уже легко получить и общее выраженіе D_n, приведенное въ § 18, с.

XIX (къ § 55).

Число членовъ въ разложеніи $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m$, какъ легко видѣть, равно числу членовъ вида

$$a_1^{\alpha}\,a_2^{\beta} \ldots a_n^{\gamma},$$

въ которыхъ $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ получаютъ всѣ положительныя цѣлыя значенія (и нуль), сумма которыхъ равна m. Иными словами, это число равно числу сочетаній съ повтореніями изъ n буквъ по m, а это число, какъ извѣстно, равно числу различныхъ сочетаній изъ $m + n - 1$ буквъ по m, т. е.

$$\frac{(m+n-1)\,(m+n-2)\cdots n}{1 \cdot 2 \cdots m} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots m}$$

(см. Веберъ и Вельштейнъ, т. I стр. 198).

XX (къ § 57).

Теорему а) § 57 можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ:

Если число неизвѣстныхъ (n) въ данной системѣ m линейныхъ однородныхъ уравненій превышаетъ число уравненій, т. е. $n > m$, то системѣ удовлетворяетъ безчисленное множество значеній неизвѣстныхъ, не равныхъ нулю одновременно.

При этомъ, по крайней мѣрѣ, $n - m$ неизвѣстнымъ можно дать произвольныя значенія; но нельзя утверждать, что любымъ $n - m$ изъ неизвѣстныхъ можно приписать произвольныя значенія. Дѣйствительно, эти значенія, какъ мы видѣли, зависятъ отъ выбора главнаго опредѣлителя системы и не всякій опредѣлитель порядка μ, гдѣ μ рангъ матриссы системы, содержащійся въ этой матриссѣ, можетъ быть взятъ за главный, такъ какъ могутъ существовать между упомянутыми опредѣлителями и равные нулю. Такъ, въ системѣ уравненій

$$x + y + z + u = 0$$
$$2x + 2y + 3z + 2u = 0$$
$$3x + 3y + 2z + 3u = 0,$$

матрисса которой имѣетъ рангъ 2, нельзя, напримѣръ, по произволу выбрать значенія неизвѣстныхъ z и u, или z и x, или z и y, потому что данная система, очевидно, удовлетворяется только при $z=0$ и $x+y+u=0$. Выбравъ по произволу, напр., x и y, получимъ опредѣленныя значенія $z=0$ и $u=-(x+y)$.

b) Выраженіе для x_j въ § 57 получается слѣдующимъ образомъ. Первыя μ уравненій системы (10) переписываемъ такъ

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1\mu}x_\mu=-\sum_{j=\mu+1}^{j=n}a_{1j}x_j$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2\mu}x_\mu=-\sum_{j=\mu+1}^{j=n}a_{2j}x_j$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{\mu 1}x_1+a_{\mu 2}x_2+\cdots+a_{\mu\mu}x_\mu=-\sum_{j=\mu+1}^{j=n}a_{\mu j}x_j.$$

Правило Крамера дастъ

$$x_i=\frac{\delta_i}{\delta}\text{, гдѣ}$$

$$\delta_i=\begin{vmatrix} a_{11},\ \cdots\ a_{1,\,i-1},-\sum_{j=\mu+1}^{j=n}a_{1j}x_j,\ a_{1,\,i+1},\ \cdots a_{1\mu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\mu,1}\cdots a_{\mu,\,i-1},-\sum_{j=\mu+1}^{j=n}a_{\mu j}x_j,\ a_{\mu,\,i+1},\cdots a_{\mu} \end{vmatrix},$$

а на основаніи § 17, получимъ

$$\delta_i=-\sum_{j=\mu+1}\delta_{ij}x_j,$$

гдѣ δ_{ij} имѣетъ данное въ § 57 выраженіе.

XXI (къ § 58).

Для выясненія заключеній, сдѣланныхъ въ этомъ §, замѣтимъ слѣдующее. Мы доказали раньше, что если рангъ матриссы (опредѣлителя въ нашемъ случаѣ) системы

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0 \qquad (2)$$

(гдѣ $i=1, 2, \ldots, n$) равенъ μ, то система (2) имѣетъ $\infty^{n-\mu}$ рѣшеній, гдѣ не всѣ x_i равны нулю. Обратно, если система (2) имѣетъ $\infty^{n-\mu}$

рѣшеній упомянутаго свойства, то это значитъ, что, выбравъ по произволу значенія нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ, число которыхъ равно $n - \mu$, для остальныхъ μ неизвѣстныхъ получимъ вполнѣ опредѣленныя значенія, а потому въ нашемъ опредѣлителѣ порядка n долженъ содержаться по крайней мѣрѣ одинъ опредѣлитель порядка μ, не равный нулю, а всѣ опредѣлители порядка выше μ будутъ равны нулю. А это и значитъ, что рангъ опредѣлителя системы (2) равенъ μ. Итакъ, доказано, что существованіе $\infty^{n-\mu}$ числа рѣшеній системы (2) упомянутаго свойства есть условіе необходимое и достаточное для того, чтобы рангъ опредѣлителя системы былъ равенъ μ.

Далѣе, пусть

$$x_1 = \lambda_1,\ x_2 = \lambda_2,\ \ldots\ x_n = \lambda_n$$

есть одна изъ системъ рѣшеній уравненій (2), при чемъ не всѣ λ_i равны нулю. Ясно, что изъ этой системы получимъ безчисленное множество другихъ, замѣняя числа λ_i числами, имъ пропорціональными. Всѣ получаемыя такимъ образомъ системы мы считаемъ за одну. Эта система даетъ одно соотношеніе между элементами опредѣлителя, вида

$$\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_n a_{in} = 0,\ (i = 1,\ 2,\ \cdots n). \tag{3}$$

Оно и будетъ единственнымъ, если рангъ опредѣлителя равенъ $n - 1$, т. е. если система (2) имѣетъ ∞^1 рѣшеній. Если же рангъ опредѣлителя равенъ $n - 2$, то будетъ существовать еще одно соотношеніе, вида:

$$\mu_1 a_{i1} + \mu_2 a_{i2} + \cdots + \mu_n a_{in} = 0\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

въ которомъ числа μ_i не пропорціональны числамъ λ_i, и т. д.

Въ этомъ смыслѣ и надо понимать утвержденіе § 58, что условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы рангъ опредѣлителя системы (2) былъ равенъ μ, состоитъ въ томъ, что существуютъ $n - \mu$ различныхъ системъ значеній $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$, не равныхъ нулю одновременно, удовлетворяющихъ соотношенію (3) при всякомъ $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

XXII (къ § 75).

Въ курсахъ Аналитической Геометріи подъ именемъ формулъ Эйлера приводятся не формулы (20) § 75, а формулы преобразованія однихъ ортогональныхъ координатъ въ другія, въ которыхъ коэффиціенты, т. е. девять косинусовъ угловъ, образуемыхъ осями одной ортогональной системы съ осями другой, выражены въ трехъ, такъ называемыхъ, углахъ Эйлера θ, φ, ψ. Эти выра-

женія не симметричны, и Эйлеръ далъ и другія, симметричныя выраженія, введя въ разсмотрѣніе величины, обозначенныя у насъ черезъ ϑ и (α, β, γ) (см. въ Encyklopädie der math. Wissensch. B. VI, Heft 2, стр. 204). Выраженія девяти косинусовъ въ трехъ параметрахъ p, q, r, совпадающія съ элементами опредѣлителя, разсматриваемаго нами въ § 75, извѣстны теперь подъ названіемъ формулъ Родрига (Rodrigues). Весьма простымъ способомъ Кёнигъ (Kœnigs, Leçons de Cinematique) получилъ формулы Родрига изъ первоначальныхъ формулъ Эйлера. Мы предлагаемъ читателю, въ видѣ легкаго упражненія, сдѣлать это преобразованіе, на основаніи слѣдующихъ указаній. Обозначимъ черезъ a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' косинусы угловъ между осями двухъ системъ, распредѣляя ихъ по слѣдующей схемѣ:

	X,	Y,	Z
X'	a	b	c
Y'	a'	b'	c'
Z'	a''	b''	c''

такъ что $a = \cos(x\,x')$, $b = \cos(y\,x')$, $c = \cos(z\,x')$ и т. д.

Возьмемъ извѣстныя выраженія этихъ косинусовъ черезъ углы Эйлера, а именно:

$$
(1)\quad \left|\begin{array}{rcl}
a &=& \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta,\\
b &=& \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta,\\
c &=& \sin\varphi\sin\vartheta,\\
a' &=& -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta,\\
b' &=& -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta,\\
c' &=& \cos\varphi\sin\vartheta,\\
a'' &=& \sin\psi\sin\vartheta,\ b'' = -\cos\psi\sin\vartheta,\ c'' = \cos\vartheta,
\end{array}\right.
$$

выводъ которыхъ можно найти въ любомъ курсѣ Аналитической Геометріи. Введемъ теперь, слѣдуя Кёнигу, перемѣнныя t, u, v, w слѣдующимъ образомъ:

$$
(2)\quad \left|\begin{array}{l}
t = \sin\dfrac{\vartheta}{2}\cos\dfrac{\psi-\varphi}{2}, \qquad u = \sin\dfrac{\vartheta}{2}\sin\dfrac{\psi-\varphi}{2},\\[2ex]
v = \cos\dfrac{\vartheta}{2}\sin\dfrac{\psi+\varphi}{2}, \quad w = -\cos\dfrac{\vartheta}{2}\cos\dfrac{\psi+\varphi}{2},
\end{array}\right.
$$

при чемъ, очевидно,

$$
(3)\qquad t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 1.
$$

Тогда можно будетъ и всѣ девять косинусовъ a, b, c, ..., выразить въ t, u, v, w, пользуясь формулами (1) и (2), и принимая во вниманіе (3). Если еще положимъ $p = \dfrac{t}{w}$, $q = \dfrac{u}{w}$, $r = \dfrac{v}{w}$, то вы-

раженія косинусовъ въ p, q, r совпадутъ съ выраженіями элементовъ опредѣлителя § 75, именно такъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

будетъ тождественъ съ опредѣлителемъ § 75. Для поясненія сказаннаго въ § 75 о механическомъ значеніи формулъ (20) замѣтимъ слѣдующее. Изъ формулъ (20) выводимъ, умножая ихъ по очереди на x, y, z и складывая:

$$xx' + yy' + zz' = (x^2 + y^2 + z^2)\cos\vartheta - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2(1 - \cos\vartheta),$$

т. е.

$$xx' + yy' + zz' - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \\ = \left[x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2\right]\cos\vartheta = \varrho^2\cos\vartheta,$$

гдѣ ϱ, какъ извѣстно, изображаетъ разстояніе отъ точки (x, y, z) до прямой, проходящей черезъ начало координатъ въ направленіи (α, β, γ). Чтобы показать, что формулы (20) выражаютъ вращеніе на уголъ ϑ около прямой $OA(\alpha, \beta, \gamma)$, замѣтимъ, что при переходѣ точки $M(x, y, z)$ въ точку $M'(x', y', z')$, при чемъ разстояніе ϱ отъ M до OA не мѣняется, плоскость OAM придетъ въ положеніе OAM', повернувшись на уголъ, равный углу между нормалями къ этимъ плоскостямъ. Нормаль къ плоскости OAM, какъ перпендикуляръ къ $OA(\alpha, \beta, \gamma)$ и $OM\left(\frac{x}{\varrho}, \frac{y}{\varrho}, \frac{z}{\varrho}\right)$, имѣетъ направленіе (a, b, c), гдѣ

$$a = \frac{\gamma y - \beta z}{\varrho}, \quad b = \frac{\alpha z - \gamma x}{\varrho}, \quad c = \frac{\beta x - \alpha y}{\varrho}$$

Аналогично выразятся косинусы угловъ нормали къ плоскости OAM', и косинусъ угла между этими нормалями выразится формулою

$$\omega = \frac{(\gamma y - \beta z)(\gamma y' - \beta z') + (\alpha z - \gamma x)(\alpha z' - \gamma x') + (\beta x - \alpha y)(\beta x' - \alpha y')}{\delta^2}$$

Числитель въ ω есть сумма произведеній старшихъ опредѣлителей въ матриссѣ

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$ умноженныхъ на старшіе опредѣлители въ матриссѣ $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x' & y' & z' \end{vmatrix},$$

и, по теоремѣ Бине, равенъ произведенію этихъ матриссъ, т. е. опредѣлителю

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

гдѣ

$$c_{11} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad c_{12} = c_{21} = \alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$
$$c_{22} = xx' + yy' + zz'.$$

Поэтому

$$C = xx' + yy' + zz' - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \delta^2 \cos\vartheta,$$

и $\omega = \cos\vartheta$, что и требовалось доказать. Замѣтимъ въ заключеніе, что формулы (20) выражаютъ зависимости между координатами двухъ различныхъ положеній движущейся точки относительно неподвижной системы координатъ, а не формулы преобразованія координатъ, т. е. зависимость между координатами неподвижной точки относительно двухъ различныхъ системъ координатныхъ осей; послѣднія получаются изъ формулы (20), если въ этихъ формулахъ замѣнимъ буквы x, y, z на x', y', z' и обратно.

XXIII (къ § 78).

Для поясненія замѣтимъ слѣдующее:

a) Представимъ элементы послѣдняго столбца въ первомъ опредѣлителѣ § 78, приравненномъ нулю, въ видѣ:

$$u_1 + 0,\ u_2 + 0, \cdots u_n + 0,\ 0 + U,$$

и разложимъ опредѣлитель на два слагаемыхъ. Одно изъ нихъ будетъ

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 \dots u_n & 0 \end{vmatrix},$$

а другое равно AU; сумма ихъ равна нулю, поэтому $U = -\frac{D}{A}$.

b) Примѣняя къ опредѣлителю D формулу § 25, выдѣливъ элементъ 0, получимъ

$$D = 0 \cdot A - \sum_{i,\,j} a_{ij}\, u_i\, u_j,$$

откуда и видно, что первое выраженіе U совпадаетъ съ формулою (3).

c) Наконецъ, поступая аналогично предыдущему съ опредѣлителемъ, который надо приравнять нулю, чтобы выразить условіе совмѣстности уравненій (1^a) и (2), и припоминая еще (§ 37), что опредѣлитель, взаимный съ A, равенъ A^{n-1}, получимъ и второе выраженіе для U.

XXIV (къ § 98).

Примѣнимъ формулу § 25 къ опредѣлителю $D = A_{\nu+1}$, гдѣ $A_{\nu+1}$ составленъ по формулѣ (15) § 98, съ замѣною ν на $\nu+1$, и положимъ еще $r = s = \nu+1$. Тогда $a_{rs} = a_{\nu+1,\,\nu+1}$ будетъ алгебраическое дополненіе элемента $a_{\nu+1,\,\nu+1}$ въ $A_{\nu+1}$ и, очевидно, равно A_ν т. е., по условію, равно нулю. Первый членъ правой части въ формулѣ § 25 пропадетъ и получится

$$A_{\nu+1} = -\sum_{i,\,j} \mathfrak{a}_{ij}\, a_{i,\,\nu+1}\, a_{\nu+1,\,j},$$

гдѣ i и j принимаютъ всѣ значенія $1, 2, \ldots \nu$. Далѣе $\mathfrak{a}_{ij}$ есть алгебраическое дополненіе элемента a_{ij} въ опредѣлителѣ A_ν (§ 25), а потому $\mathfrak{a}_{\nu\nu}$ есть алгебраическое дополненіе элемента $a_{\nu\nu}$ въ A_ν, т. е.

$$\mathfrak{a}_{\nu\nu} = A_{\nu-1}.$$

Слѣдовательно,

$$A_{\nu-1} A_{\nu+1} = -\sum_{i,\,j} \mathfrak{a}_{\nu\nu}\, \mathfrak{a}_{ij}\, a_{i,\,\nu+1}\, a_{\nu+1,\,j}.$$

Но такъ какъ опредѣлитель $A_\nu = 0$, то алгебраическія дополненія соотвѣтствующихъ элементовъ его въ двухъ строкахъ или столбцахъ пропорціональны (§ 36).

Поэтому

$$\frac{\mathfrak{a}_{ij}}{\mathfrak{a}_{\nu j}} = \frac{\mathfrak{a}_{iv}}{\mathfrak{a}_{\nu\nu}}$$

или

$$\mathfrak{a}_{\nu\nu}\, \mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_{iv}\, \mathfrak{a}_{\nu j}$$

и

$$\begin{aligned} A_{\nu-1} A_{\nu+1} &= -\sum_{i,\,j} \mathfrak{a}_{iv}\, a_{i,\,\nu+1}\, \mathfrak{a}_{\nu j}\, a_{\nu+1,\,j} \\ &= -\sum_{i,\,j} \mathfrak{a}_{iv}\, a_{i,\,\nu+1}\, \mathfrak{a}_{jv}\, a_{j,\,\nu+1}, \end{aligned}$$

потому что A_ν опредѣлитель симметрическій. Наконецъ, двойная сумма въ правой части, очевидно, равна квадрату суммы

$$\sum_i \mathfrak{a}_{iv}\, a_{i,\,\nu+1} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,\,\nu-1}\, a_{1,\,\nu+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\nu 1} \ldots a_{\nu,\,\nu-1}\, a_{\nu,\,\nu+1} \end{vmatrix},$$

какъ видно изъ разложенія этого опредѣлителя по элементамъ послѣдняго столбца.

XXV (къ § 98).

Высказанное здѣсь положеніе можно вполнѣ строго доказать лишь послѣ того, какъ будутъ доказаны основныя теоремы изъ теоріи предѣловъ, которой посвящена вторая книга. Опредѣлители A_ν равны суммѣ конечнаго числа членовъ, которые сами равны произведеніямъ нѣсколькихъ изъ чиселъ a_{ii}, умноженныхъ на величины, отъ нихъ независящія. Сказанное въ § 98 объ этихъ опредѣлителяхъ есть прямое слѣдствіе теоремъ о предѣлахъ суммъ и произведеній, изложенныхъ въ §§ 132 и 133 книги II.

XXVI (къ § 100).

Для разъясненія сказаннаго въ этомъ § приведемъ нижеслѣдующее вычисленіе. Данную форму U прежде всего представимъ въ видѣ суммы трехъ членовъ, относя къ первому слагаемому всѣ члены, въ которые входятъ только первыя ν перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ко второму тѣ, въ которые входятъ произведенія этихъ ν перемѣнныхъ на остальныя $x_{\nu+1}, \ldots, x_n$, и наконецъ, къ третьему тѣ члены, въ которые входятъ только послѣднія $n-\nu$ перемѣнныхъ $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n$. Принимая во вниманіе, что $a_{ij}=a_{ji}$, мы можемъ, слѣдовательно, представить U такъ

$$U=\sum_{i=1}^{i=\nu}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{i\nu}x_\nu)x_i+2\sum_{i=1}^{i=\nu}(a_{i,\nu+1}x_{\nu+1}+\cdots+a_{in}x_n)x_i+\beta,$$

обозначая черезъ β третье слагаемое, зависящее только отъ $x_{\nu+1}, \ldots x_n$. Теперь первое слагаемое, т. е.

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{i\nu}x_\nu)x_i$$

можно обратить въ нуль, независимо отъ значенія x_ν. Въ самомъ дѣлѣ, для этого, очевидно, достаточно удовлетворить системѣ ν линейныхъ однородныхъ уравненій съ ν неизвѣстными

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1\nu}x_\nu=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2\nu}x_\nu=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\nu1}x_1+a_{\nu2}x_2+\cdots+a_{\nu\nu}x_\nu=0, \end{cases}$$

что всегда возможно, потому что, по условію, опредѣлитель этой системы A_ν равенъ нулю. Замѣчая еще, что, по условію, алгебраическое дополненіе элемента $a_{\nu\nu}$, очевидно равное $A_{\nu-1}$, не равно нулю, мы получимъ, при x_ν совершенно произвольномъ, слѣдующее рѣшеніе системы (1)

$$(2)\qquad \frac{x_1}{a_{\nu1}}=\frac{x_2}{a_{\nu2}}=\cdots=\frac{x_{\nu-1}}{a_{\nu,\nu-1}}=\frac{x_\nu}{a_{\nu\nu}},$$

гдѣ $a_{vv} = A_{v-1}$ и вообще a_{vi} — алгебраическое дополненіе элемента a_{vi} въ A_v (§ 59). Подставляя найденныя значенія $x_1, x_2, \ldots, x_{v-1}$, выраженныя черезъ x_v, въ написанное выше выраженіе U, мы получимъ $U = 2\alpha x_v + \beta$, гдѣ

$$(3) \qquad \alpha = \frac{2}{A_{v-1}} \sum_{i=1}^{i=v}{}' [a_{i,\,v+1}\, x_{v+1} + \cdots + a_{in}\, x_n]\, a_{vi}.$$

Чтобы убѣдиться, что выраженіе (3) совпадаетъ съ тѣмъ, которое дано въ § 100, въ видѣ опредѣлителя, стоитъ только представить себѣ, что этотъ опредѣлитель разложенъ по элементамъ послѣдняго столбца.

Наконецъ, чтобы убѣдиться, что въ случаѣ α тождественно, т. е. при произвольныхъ значеніяхъ $x_{v+1}, \ldots, x_n$, равнаго нулю, слѣдующій опредѣлитель § 100 равенъ нулю при $i = v, v+1, \ldots, n$, надо припомнить, что при $i = v$, этотъ опредѣлитель есть A_v, равный нулю по условію, и при другихъ значеніяхъ i онъ получается изъ предыдущаго (т. е. изъ выраженія $\frac{A_{v-1}\alpha}{2}$), если послѣдовательно положимъ всѣ перемѣнныя $x_{v+1}, x_{v+2}, \ldots, x_n$, кромѣ перваго, второго и т. д., равными нулю.

КНИГА ВТОРАЯ.

Ирраціональныя числа. Предѣлы. Безконечные ряды и произведенія.

ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.

Основныя понятія.

103. Изъ элементарной математики мы знакомы съ теоріею раціональныхъ чиселъ, т. е. чиселъ цѣлыхъ (включая сюда и нуль) и дробныхъ. Представимъ себѣ теперь, что вся эта область чиселъ раздѣлена на два класса, которые мы назовемъ нижнимъ и верхнимъ, такимъ образомъ, что всякое число нижняго класса меньше любого числа верхняго класса. При этомъ можетъ случиться, что въ нижнемъ классѣ существуетъ число a, большее всѣхъ другихъ чиселъ этого класса, или что въ верхнемъ классѣ существуетъ число b, меньшее всѣхъ другихъ чиселъ этого класса. Въ этихъ случаяхъ говорятъ, что сдѣланное раздѣленіе опредѣляетъ раціональное число, именно число a въ первомъ случаѣ или число b во второмъ. Замѣтимъ тутъ же, что числа a и b не могутъ существовать одновременно. Иначе между этими числами можно было бы вставить безчисленное множество раціональныхъ чиселъ, которыя не принадлежали бы ни къ нижнему, ни къ верхнему классу. Но можетъ случиться, что не существуетъ ни числа a, ни числа b, обладающихъ указанными свойствами. Въ такомъ случаѣ, условимся говорить, что указанный способъ раздѣленія всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса опредѣляетъ ирраціональное число. Итакъ, ирраціональныя числа опредѣляются такими раздѣленіями раціональной области на два класса, которыя обладаютъ слѣдующими свойствами:

1) Всякое число нижняго класса меньше любого числа верхняго класса. 2) Въ нижнемъ классѣ нѣтъ числа, превосходящаго

всѣ другія числа того же класса (наибольшаго). 3) Въ верхнемъ классѣ нѣтъ числа, которое было бы меньше всѣхъ другихъ чиселъ того же класса (наименьшаго).

104. Примѣры. a) Если отнесемъ къ нижнему классу раціональное число a и всѣ раціональныя числа, меньшія a, то верхній классъ будетъ состоять изъ всѣхъ раціональныхъ чиселъ, большихъ a, и въ этомъ классѣ не будетъ наименьшаго числа. Дѣйствительно, взявъ въ верхнемъ классѣ любое число a', мы можемъ, какъ извѣстно изъ теоріи раціональныхъ чиселъ [1]), вставить между a и $a' > a$ безчисленное множество раціональныхъ чиселъ, которые по необходимости будутъ принадлежать верхнему классу и будутъ $< a'$. Но нижній классъ не обладаетъ свойствомъ не заключать въ себѣ наибольшаго числа, потому что такое число существуетъ, а именно число a. Сдѣланное раздѣленіе не опредѣляетъ ирраціональнаго числа, а опредѣляетъ раціональное число a.

b) Иначе обстоитъ дѣло съ $\sqrt{2}$; это число не существуетъ, если мы ограничимся областью однихъ раціональныхъ чиселъ. Но его можно опредѣлить, какъ ирраціональное число, соотвѣтствующее раздѣленію всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса, на основаніи слѣдующаго критеріума. Отнесемъ къ верхнему классу всѣ положительныя раціональныя числа, квадраты которыхъ больше 2, а къ нижнему всѣ остальныя раціональныя числа (т. е. положительныя, которыхъ квадраты меньше двухъ, нуль и всѣ отрицательныя). Чтобы доказать, что такое раздѣленіе опредѣляетъ ирраціональное число, надо показать, что оба класса обладаютъ всѣми необходимыми для этой цѣли свойствами. Прежде всего очевидно, что любое число нижняго класса меньше всякаго числа верхняго класса, такъ какъ изъ двухъ положительныхъ чиселъ то будетъ меньше другого, котораго квадратъ меньше квадрата другого (и всякое отрицательное число меньше положительнаго). Далѣе, если a какое нибудь число нижняго класса, то всегда найдется другое число того же класса, которое будетъ больше a *) (т. е. въ нижнемъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа). Чтобы въ этомъ убѣдиться, надо показать, что существуетъ такое положительное число h, для котораго $a + h$ принадлежитъ нижнему классу, т. е. не только $a^2 < 2$, но и $(a + h)^2 < 2$, или $(2a + h)\,h < 2 - a^2$. Взявъ $h < 1$, мы удовлетворимъ предыдущему неравенству при $h < \frac{2 - a^2}{2a + 1}$. Слѣдовательно, достаточно взять h положительнымъ и меньшимъ наименьшаго изъ чиселъ 1 и $\frac{2 - a^2}{2a + 1}$. Аналогичнымъ путемъ можно было бы показать, что если a принадлежитъ верхнему классу, то всегда найдется число, меньшее a и принадлежащее тому же классу, т. е. что въ верхнемъ классѣ нѣтъ наименьшаго числа

105. Равенство и неравенство **). Говорятъ, что два числа a и β равны между собою, и пишутъ $a = \beta$, если классы, опредѣляющіе a, совпадаютъ съ соотвѣтствующими классами, опредѣляющими β. При этомъ очевидно, что совпаденіе нижнихъ классовъ влечетъ за собой совпаденіе верхнихъ, и наоборотъ. Говорятъ, что

---

[1]) Надо помнить, что отъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія въ области раціональныхъ чиселъ всегда получаются числа той же области.

*) Причемъ, конечно, можно ограничиться предположеніемъ, что $a > 0$.

**) Въ дальнѣйшихъ §§ раціональныя числа мы будемъ обозначать преимущественно латинскими буквами, а ирраціональныя греческими, при чемъ, однако, не исключается возможность, того, что греческая буква обозначаетъ, въ частномъ случаѣ, раціональное число.

α меньше β, и пишутъ $\alpha < \beta$, если существуетъ такое раціональное число, которое одновременно принадлежитъ верхнему классу числа α и нижнему классу числа β. Если, въ частности, β раціональное число, то неравенство $\alpha < \beta$ выражаетъ собою только то, что β принадлежитъ верхнему классу числа α. Точно также, если α раціональное число, то неравенство $\alpha < \beta$ обозначаетъ, что α принадлежитъ нижнему классу числа β. Далѣе говорятъ, что α число положительное, если оно больше 0, т. е. если нижній классъ числа α содержитъ въ себѣ нуль; число α — отрицательное, если нуль принадлежитъ верхнему его классу.

106. Числа, равныя по абсолютной величинѣ. Перемѣнимъ знаки у всѣхъ чиселъ нижняго класса числа α на противоположные, и будемъ ихъ разсматривать, какъ числа, образующія верхній классъ нѣкотораго числа β; нижній классъ этого числа β будетъ очевидно, состоять изъ чиселъ верхняго класса числа α, взятыхъ съ обратными знаками. Ясно, что такія два числа α и β будутъ одно положительное, а другое отрицательное, потому что 0 будетъ одновременно находиться въ нижнемъ классѣ одного изъ нихъ и въ верхнемъ другого. При такихъ обстоятельствахъ условимся говорить, что числа α и β равны по абсолютной величинѣ и писать $\beta = -\alpha$. Замѣтивъ, что продѣлавъ съ классами числа β ту операцію, которую произвели съ классами числа α, мы, очевидно, получимъ изъ β число α. Иными словами, если $\beta = -\alpha$, то $\alpha = -\beta$.

107. Обратныя числа. Предполагая $\alpha > 0$ и ограничиваясь областью однихъ положительныхъ раціональныхъ чиселъ, возьмемъ обратныя значенія *) чиселъ обоихъ классовъ, опредѣляющихъ α, и въ то же время переставимъ эти классы (т. е. нижній на верхній и обратно). Тогда опредѣлится новое число β, которое мы назовемъ обратнымъ относительно α, и будемъ писать $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Легко видѣть, что изъ $\beta = \frac{1}{\alpha}$ вытекаетъ $\alpha = \frac{1}{\beta}$. Если, далѣе, $\alpha < 0$, то символъ $\frac{1}{\alpha}$ изображаетъ отрицательное число, абсолютная величина котораго есть число, обратное абсолютной величинѣ α. Иными словами, если $\alpha < 0$, то, для опредѣленія символа $\frac{1}{\alpha}$, условились писать

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{-\alpha}.$$

Наконецъ, установимъ разъ навсегда, что при $\alpha = 0$, символъ $\frac{1}{\alpha}$ ничѣмъ не опредѣленъ и потому никакого смысла не имѣетъ.

---

*) Обратнымъ значеніемъ раціональнаго числа α называется число $\frac{1}{\alpha}$.

108. Если $\alpha < \beta$, то существуетъ безчисленное множество раціональныхъ чиселъ, лежащихъ между α и β. По условію существуетъ такое раціональное число a, что

$$\alpha < a < \beta.$$

Такъ какъ a не можетъ быть наибольшимъ числомъ въ нижнемъ классѣ числа β, то въ этомъ классѣ существуетъ раціональное число $a' > a$, принадлежащее также къ верхнему классу числа α, такъ что

$$\alpha < a < a' < \beta.$$

Но между раціональными числами a и a' можно вставить безчисленное множество раціональныхъ чиселъ, которыя всѣ будутъ принадлежать верхнему классу числа α и нижнему классу числа β, что и надо было показать. Далѣе ясно, что теорема остается справедливой и тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одно изъ чиселъ α и β раціонально.

109. Изъ неравенствъ $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, слѣдуетъ неравенство $\alpha < \gamma$. Замѣчаемъ, что опредѣленіе неравенствъ $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ заключаетъ въ себѣ утвержденіе, что существуютъ два такихъ раціональныхъ числа a и b, для которыхъ $\alpha < a < \beta$, $\beta < b < \gamma$. Отсюда видно, что a принадлежитъ нижнему, а b верхнему классу числа β; слѣдовательно, $a < b$. Далѣе b принадлежитъ нижнему классу числа γ, поэтому и a принадлежитъ тому же классу, т. е. существуетъ число a, принадлежащее одновременно верхнему классу α и нижнему γ, откуда $\alpha < \gamma$.

110. Между двумя раціональными числами, разность которыхъ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою (по абсолютной величинѣ) можетъ заключаться только одно число. Допустимъ обратное, т. е. положимъ, что $\alpha < a < b$, и $\alpha < \beta < b$. Если $\alpha < \beta$, то можно указать два опредѣленныхъ числа a' и b' такихъ, что $\alpha < a' < b' < \beta$, а тогда и $\alpha < a' < b' < b$, а откуда $b - a > b' - a'$ т. е. $b - a$ нельзя сдѣлать, вопреки предложенію, меньшимъ чѣмъ $b' - a'$; аналогичное заключеніе получается и при $\alpha > \beta$.

Итакъ, нельзя допустить, что β не совпадаетъ съ α, если положительное число $b - a$ можно сдѣлать меньшимъ любого положительнаго числа.

111. Всякое число α можно заключить между двумя раціональными числами, разность которыхъ по абсолютной величинѣ будетъ меньше любого положительнаго числа. Если α лежитъ между a и $b > a$, то $\frac{1}{2}(a + b)$ будетъ принадлежать либо нижнему, либо верхнему классу числа α. Въ первомъ случаѣ положимъ $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = b$, во второмъ $a_1 = a$, $b_1 = \frac{1}{2}(a + b)$. Въ обоихъ случаяхъ α будетъ заключаться между числами a_1 и b_1,

причемъ $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$. Поступивъ такъ же съ a_1 и b_1, найдемъ два такихъ числа a_2 и b_2, что

$$a_2 < a < b_2 \text{ и } b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b - a).$$

Продолжая такъ далѣе, получимъ числа a_3 и b_3 и т. д., и наконецъ a_n и b_n, для которыхъ

$$a_n < a < b_n \text{ и } b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a).$$

Выбирая n достаточно большимъ, мы можемъ сдѣлать $b_n - a_n$ меньшимъ любого положительнаго числа.

112. Изъ нижняго класса ирраціональнаго числа всегда можно выдѣлить неубывающую послѣдовательность раціональныхъ чиселъ, въ которой найдется число, превышающее любое изъ чиселъ этого класса *). Составленная въ предыдущемъ § послѣдовательность чиселъ a, a_1, a_2, a_3 ... такова, что $a \leqq a_1$, $a_1 \leqq a_2$ и т. д., т. е. что каждый послѣдующій членъ не меньше предыдущаго, слѣдовательно, это послѣдовательность неубывающая **). Остается показать, что какое бы число a' мы ни выбрали въ нижнемъ классѣ числа a, всегда найдется въ нашей послѣдовательности такое число a_n, что $a_n > a'$. Такъ какъ a' не наибольшее число въ нижнемъ классѣ a (такого не существуетъ), то найдется число $a'' > a'$, принадлежащее тому же классу. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видѣли, что $b_n - a_n$ можно сдѣлать, взявъ n достаточно большимъ, меньшимъ любого положительнаго числа, въ частности, слѣдовательно, меньшимъ $a'' - a'$. Изъ неравенства $b_n - a_n < a'' - a'$ слѣдуетъ $a_n > b_n - a'' + a' > a'$, потому что $b_n - a'' > 0$, такъ какъ a'' принадлежитъ нижнему, а b_n верхнему классу числа a.

113. Изъ сказаннаго ясно, что послѣдовательность a_1, a_2, a_3, ..., какъ и послѣдовательность b_1, b_2, b_3, ... ***) могутъ служить для опредѣленія ирраціональнаго числа. А именно, предполагая, что эта послѣдовательность дана, мы видимъ, что она приводитъ къ раздѣленію всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса, обладающихъ требуемыми свойствами. Достаточно отнести каждое раціональное число a' къ нижнему классу, если въ данной послѣдовательности возможно найти число, не меньшее a', и къ верхнему, если въ данной послѣдовательности найти такое число невозможно. Это

---

*) Неубывающею послѣдовательностью чиселъ a_1, a_2, a_3, ... a_n, ..., называется такая, въ которой каждое число не меньше (больше или равно) предыдущаго.

**) Въ самомъ дѣлѣ $a_1 = \frac{1}{2}(a + b) > a$ при $b > a$, или $a_1 = a$, $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) > a_1$ или $a_2 = a_1$, и т. д.

***) Послѣдовательность b_1, b_2, b_3, ... есть послѣдовательность невозрастающая, такъ какъ $b \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq b_3$ ...

замѣчаніе важно въ томъ отношеніи, что оно открываетъ новый путь для изученія ирраціональныхъ чиселъ, опредѣляя эти числа при помощи послѣдовательностей раціональныхъ чиселъ. Теорія числовыхъ послѣдовательностей была строго обоснована Гейне [1]) и теорія ирраціональныхъ чиселъ тѣсно съ нею связана работами Г. Кантора, Липшица и др. Но уже за 30 лѣтъ до того Каталанъ въ своемъ преподаваніи и небольшихъ замѣткахъ положилъ основаніе новой теоріи ирраціональныхъ чиселъ [2]). Вайерштрассъ основываетъ теорію ирраціональныхъ чиселъ на болѣе тонкихъ понятіяхъ, разсматривая эти числа, какъ суммы безконечно большого числа раціональныхъ чиселъ. Мы предпочитаемъ въ дальнѣйшемъ изложеніи пользоваться раздѣленіемъ на классы, принадлежащимъ Дедекинду и принятымъ Дини, Таннери и другими (I).

Дѣйствія надъ ирраціональными числами.

114. Сложеніе. а) Суммою двухъ чиселъ α и β называютъ и обозначаютъ черезъ $\alpha+\beta$ такое число, раціональное или ирраціональное, которое больше суммы любыхъ двухъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ, чѣмъ α и β, и меньше суммы любыхъ двухъ чиселъ, соотвѣтственно бо́льшихъ, чѣмъ α и β, такъ что

$$a+b<\alpha+\beta<a'+b',$$

если $a<\alpha<a'$, $b<\beta<b'$, каковы бы ни были раціональныя числа a и b, a' и b', удовлетворяющія вторымъ неравенствамъ.

Установивъ такое опредѣленіе, покажемъ, что всегда существуетъ число $\alpha+\beta$ и что болѣе одного такого числа не можетъ быть.

b) Положимъ

(1) $$a<\alpha<a', \quad b<\beta<b'.$$

Всякое раціональное число r, не имѣющее вида $a+b$, т. е. не разлагающееся на два слагаемыхъ, изъ которыхъ одно меньше α, другое меньше β, непремѣнно будетъ больше всѣхъ чиселъ, имѣющихъ этотъ видъ. Потому что, если бы $r<a+b$, то $r-a<b<\beta$ и, вопреки предположенію, r равнялось бы суммѣ двухъ раціональныхъ чиселъ a и $r-a$, гдѣ

$$a<\alpha, \quad r-a<\beta.$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что всякое раціональное число, не имѣющее вида $a'+b'$, будетъ меньше всѣхъ чиселъ этого вида,

---

[1]) „Die Elemente der Funttionenlehre (Crelles Journal, Bd. 74)

[2]) См. „Mathesis“ 1886. стр. 151. (Журналъ, издаваемый въ Брюсселѣ.)

Поэтому, если существуетъ раціональное число r, не имѣющее ни вида $a+b$ ни вида $a'+b'$, гдѣ a, b, a', b' удовлетворяютъ выше указаннымъ неравенствамъ, то будемъ имѣть

$$a+b<r<a'+b',$$

каковы бы ни были числа a, b, a', b', удовлетворяющія условіямъ (1). Въ этомъ случаѣ сумма $\alpha+\beta$ существуетъ и равна этому числу r.

c) Положимъ теперь, что такого числа r не существуетъ; это значитъ, что всякое раціональное число будетъ либо вида $a+b$, либо вида $a'+b'$. Образуемъ изъ этихъ чиселъ два класса. Этимъ опредѣлится нѣкоторое ирраціональное число γ, потому что всегда $a+b<a'+b'$, и въ нижнемъ классѣ нѣтъ наибольшаго, а въ верхнемъ нѣтъ наименьшаго числа. Дѣйствительно, мы всегда можемъ найти два числа a_1 и b_1 такихъ, чтобы было

$$a<a_1<\alpha,\quad b<b_1<\beta,\quad \text{откуда}\quad a+b<a_1+b_1 \text{ и т. д.}$$

Такъ какъ всегда

$$a+b<\gamma<a'+b',$$

то искомая сумма есть γ.

d) Итакъ, всегда существуетъ число, раціональное или ирраціональное, подходящее подъ опредѣленіе суммы $\alpha+\beta$. Остается доказать единственность этого числа. Согласно § 111 мы всегда можемъ заключить число α между двумя числами a и $a'>a$, такими, что $a'-a$ будетъ меньше любого положительнаго числа. То же самое можно сдѣлать съ β. Но изъ неравенствъ

$$a'-a<\tfrac{1}{2}\varepsilon,\quad b'-b<\tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

гдѣ ε произвольно заданное положительное число, выводимъ, путемъ сложенія: $a'+b'-(a+b)<\varepsilon$. Поэтому (§ 110) число $\alpha+\beta$, лежащее между двумя числами, положительная разность которыхъ меньше любого числа ε, есть число, вполнѣ опредѣленное (единственное).

115. Свойства суммы. a) Такъ какъ сумма $\alpha+\beta$ опредѣляется суммами $a+b$ и $a'+b'$, не измѣняющимися при перестановкѣ слагаемыхъ, то очевидно $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

b) Аналогично этому доказываютъ, что

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \text{ и т. п.}$$

c) Если $\beta=0$, то числа b — отрицательныя, а числа b' — положительныя раціональныя числа. Отсюда слѣдуетъ, что

$$a+b<\alpha<a',\quad a'+b'>a'>\alpha.$$

Слѣдовательно, классы $a+b$ и $a'+b'$ опредѣляютъ число α. Иными словами

$$\alpha+0=\alpha.$$

d) Если $\beta = -a$, то числа b равны числамъ a', взятымъ съ обратными знаками (§ 106), и такъ какъ $a' > a$, то $a + b = a - a' < 0$. Точно такъ же числа b' равны числамъ a съ обратными знаками и $a' + b' = a' - a > 0$. Число, лежащее всегда между $a + b$ и $a' + b'$ есть, слѣдовательно, 0. Иными словами $a + (-a) = 0$ или короче $a - a = 0$.

e) Отъ сложенія числа съ неравными числами получаются неравныя суммы. Дѣйствительно, если $a < \beta$, то можно себѣ представить такія два числа a и b, что $a < a < b < \beta$. Кромѣ того, (§ 111) всякое число γ можно заключить между двумя числами c и c' такими, что $c' - c < b - a$ или $a + c' < b + c$. Съ другой стороны, изъ опредѣленія суммъ $a + \gamma$ и $\beta + \gamma$ слѣдуетъ, что $a + \gamma < a + c'$, $\beta + \gamma > b + c$, $a + \gamma < a + c' < b + c < \beta + \gamma$, т. е., если $a < \beta$, то $a + \gamma < \beta + \gamma$.

116. Вычитаніе. Всегда существуетъ число, которое, будучи сложено съ β, дастъ въ суммѣ a. Это число есть $a + (-\beta)$. Дѣйствительно, по свойствамъ суммы имѣемъ

$$a + (-\beta) + \beta = a + (-\beta + \beta) = a + 0 = a.$$

Не существуетъ другого числа, обладающаго тѣмъ же свойствомъ, потому что было показано, что два различныхъ числа, сложенныя съ однимъ и тѣмъ же, не могутъ давать одну и ту же сумму. Итакъ, число $a + (-\beta)$ или короче $a - \beta$, дающее при сложеніи съ β число a, есть единственное. Оно по опредѣленію и есть разность между числомъ a и числомъ β.

117. Умноженіе. Положимъ сперва, что a и β положительныя числа, и a, b, a', b' положительныя раціональныя числа, удовлетворяющія условіямъ (1) § 114. Всякое положительное раціональное число r будетъ либо вида ab, либо вида $a'b'$, либо ни того, ни другого. Если r не имѣетъ вида ab, то $r > ab$. Иначе изъ неравенства $r < ab$ мы вывели бы, что $\frac{r}{a} < b < \beta$ и вопреки предположенію число r разлагалось бы на множители $a < a$ и $\frac{r}{a} < \beta$. Такимъ же образомъ покажемъ, что если r не имѣетъ вида $a'b'$, то $r < a'b'$. Слѣдовательно, если r не будетъ ни вида ab, ни вида $a'b'$, то $ab < r < a'b'$, для всѣхъ значеній a, b, a', b', удовлетворяющихъ условіямъ (1). Если нѣтъ раціональнаго числа упомянутаго свойства, то это значитъ, что всякое раціональное число будетъ либо вида ab, либо вида $a'b'$. Тогда разсмотримъ ирраціональное число, опредѣляемое классами чиселъ ab и $a'b'$. Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что навѣрно существуетъ число γ, раціональное или ирраціональное, обладающее тѣмъ свойствомъ, что оно будетъ больше произведенія любыхъ двухъ

положительныхъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно меньшихъ чѣмъ α и β, и меньше произведенія любыхъ двухъ раціональныхъ чиселъ, соотвѣтственно бо́льшихъ, чѣмъ α и β: $ab < \gamma < a'b'$. Это число единственное. Чтобы это доказать, надо лишь убѣдиться, что каково бы ни было положительное число ε, всегда можно выбрать числа a, b, a', b' такъ, чтобы $a'b' - ab$ было меньше ε. (§ 110). Съ этой цѣлью, выберемъ между числами верхняго класса наибольшаго изъ чиселъ α и β число c такое, чтобы c^2 было больше $\frac{1}{3}\varepsilon$, гдѣ ε выбранное по произволу положительное число. Это, очевидно, всегда возможно, и будемъ имѣть $a < c$, $b < c$ и $c^2 > \frac{\varepsilon}{3}$ или $\frac{\varepsilon}{3c} < c$. Затѣмъ выбираемъ числа a, a', b, b' такъ, чтобы $a' - a$ и $b' - b$ были меньше $\frac{\varepsilon}{3c}$, что также всегда возможно. Тогда, такъ какъ $a + b + \frac{\varepsilon}{3c} < 3c$, мы будемъ имѣть

$$a'b' < \left(a + \frac{\varepsilon}{3c}\right)\left(b + \frac{\varepsilon}{3c}\right) = ab + \left(a + b + \frac{\varepsilon}{3c}\right)\frac{\varepsilon}{3c} < ab + \varepsilon$$

и $a'b' - ab < \varepsilon$. Поэтому (§ 110) число γ, лежащее всегда между ab и $a'b'$ — единственное, вполнѣ опредѣленное. Оно и будетъ по опредѣленію произведеніемъ данныхъ чиселъ α и β, и обозначается знакомъ $\alpha\beta$.

118. Такимъ образомъ опредѣляется произведеніе двухъ чиселъ лишь въ томъ случаѣ, когда эти числа оба положительны. Вообще же произведеніемъ двухъ чиселъ α и β называютъ произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, будутъ ли числа α и β одинаковыхъ или разныхъ знаковъ. Иными словами

$$\alpha\beta = -(-\alpha)\beta, \quad \alpha\beta = -\alpha(-\beta), \quad \alpha\beta = (-\alpha)(-\beta).$$

Произведеніе α на 0 будетъ по опредѣленію равно нулю. Въ послѣдующемъ мы будемъ для сокращенія рѣчи считать α и β положительными. Всѣ найденныя при этомъ свойства легко обобщить на всѣ другіе случаи.

119. Свойства произведенія. a) $\alpha\beta = \beta\alpha$, b) $\alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ и т. д. c) $\alpha \cdot 1 = \alpha$, d) $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$, e) если умножимъ число на неравныя числа, то получимъ неравныя произведенія. Всѣ эти свойства легко доказываются съ помощью разсужденій, аналогичныхъ тѣмъ, которыми мы пользовались въ § 115.

120. Дѣленіе. Всегда существуетъ число, которое по умноженіи на $\beta \neq 0$ даетъ α. Оно равно произведенію $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, которое для краткости обозначаютъ знакомъ $\frac{\alpha}{\beta}$. Дѣйствительно, по

свойствамъ произведенія, имѣемъ

$$\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right)\beta = \alpha\left(\frac{1}{\beta}\cdot\beta\right) = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Не существуетъ другого числа съ тѣмъ же свойствомъ, потому что два различныхъ числа,умноженныя на β, какъ мы видѣли, даютъ различныя произведенія. Поэтому, число $\frac{\alpha}{\beta}$, которое по умноженіи на β даетъ α — единственное. Оно, по опредѣленію, есть частное отъ дѣленія α на β. Здѣсь также замѣтимъ, что при $\beta = 0$, символъ $\frac{\alpha}{\beta}$ смысла не имѣетъ.

121. Аналогичнымъ образомъ можно обобщить всѣ правила алгебраическаго вычисленія на ирраціональныя числа. Напримѣръ, чтобы доказать, что $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, достаточно разсмотрѣть соотвѣтствующія раздѣленія на классы и обнаружить тождество одноименныхъ классовъ. Для насъ достаточно было намѣтить путь, которому надо слѣдовать при подобныхъ доказательствахъ, тѣмъ болѣе, что полное распространеніе алгебраическаго вычисленія на ирраціональныя числа, само собою и совершенно естественно получается изъ той важной теоріи, которую мы теперь и разовьемъ.

ТЕОРІЯ ПРЕДѢЛОВЪ.

Стремленіе къ предѣлу.

122. Опредѣленіе. a) Число a_n, измѣняющееся съ измѣненіемъ натуральнаго (цѣлаго положительнаго) числа n, называется безконечно большимъ при безконечномъ n, если при безпредѣльно возрастающемъ n, число a_n въ концѣ концовъ становится и остается бо́льшимъ сколь угодно большого числа. Выражаясь точнѣе, если каждому выбранному по произволу числу L соотвѣтствуетъ нѣкоторое число ν такого рода, что при $n > \nu$ всегда будетъ $a_n > L$, то говорятъ, что a_n число безконечно большое, или что a_n возрастаетъ безпредѣльно или стремится къ безконечности.

b) Говорятъ, что a_n при безконечномъ n есть число безконечно малое, если при безпредѣльномъ возрастаніи n, абсолютная величина числа a_n въ концѣ концовъ становится и остается меньшею сколь угодно малаго положительнаго числа. Точнѣе выражаясь: если каждому положительному числу ε соотвѣтствуетъ нѣкоторое

число ν такого рода, что при $n > \nu$ всегда $|a_n| < \varepsilon$ *), то говорятъ, что a_n безконечно мало или стремится къ нулю (II).

c) Когда вообще говорятъ, что a_n при безконечномъ n стремится къ a или, что послѣдовательность чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ имѣетъ предѣлъ (limes) a, и пишутъ $\lim a_n = a$, то этимъ выражаютъ, что разность $a_n - a$ число безконечно малое. Въ частности предѣлъ безконечно малаго числа есть нуль.

d) Принято также писать $\lim a_n = \infty$ и говорить, что a_n имѣетъ предѣломъ положительную безконечность или просто безконечность, чтобы выразить, что a_n число безконечно большое. Конечно, подобный способъ выраженія есть дѣло простого соглашенія и вводится лишь для сокращенія рѣчи. Съ тою же цѣлью говорятъ, что a_n имѣетъ предѣломъ отрицательную безконечность, и пишутъ $\lim a_n = -\infty$, чтобы выразить, что $(-a_n)$ стремится къ безконечности.

123. Примѣчанія. a) Если a_n стремится къ a, то $-a_n$ стремится къ $-a$. Дѣйствительно, разности

$$a_n - a, \quad -a_n - (-a) = a - a_n$$

равны между собою по абсолютной величинѣ, и потому одна изъ нихъ не можетъ быть безконечно малою безъ того, чтобы и другая не была таковою же.

b) Если число a_n заключается между двумя безконечно малыми, то оно само безконечно малое. Дѣйствительно, абсолютное значеніе a_n не можетъ быть больше абсолютныхъ значеній обоихъ данныхъ чиселъ (между которыми оно заключается), а потому оно должно сдѣлаться и оставаться меньшимъ любого положительнаго числа.

c) Если при безконечномъ n число a_n стремится къ a, то его абсолютная величина стремится къ абсолютной величинѣ a. Дѣйствительно, такъ какъ абсолютная величина разности двухъ чиселъ всегда больше или равна разности абсолютныхъ величинъ этихъ чиселъ **), то будемъ имѣть

$$|a_n - a| \geq |a_n| - |a|.$$

Поэтому разность $|a_n| - |a|$ будетъ безконечно малою одновременно съ $a_n - a$.

d) Если a_n число безконечно большое, то обратное ему число $\frac{1}{a_n}$ будетъ безконечно малымъ. Дѣйствительно, если ε

---

*) Символомъ $|x|$ всегда будемъ обозначать абсолютную величину x.

**) Извѣстно, что $|a+b| \leq |a| + |b|$; положивъ $b = c - a$, находимъ $|c| \leq |a| + |c-a|$, $|c-a| \geq |c| - |a|$.

произвольно заданное, сколь угодно малое число, то всегда можно найти такое значеніе ν, чтобы при $n > \nu$ было

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ откуда } \frac{1}{a_n} < \varepsilon.$$

Иначе говоря, если $\lim a_n = \infty$, то $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

e) Обратное заключеніе несправедливо. Можно лишь утверждать, что число, обратное положительному безконечно малому числу имѣетъ предѣломъ $+\infty$, а обратное отрицательному безконечно малому имѣетъ предѣломъ $-\infty$. Если же a_n, стремясь къ нулю, не будетъ въ концѣ концовъ сохранять одинъ и тотъ же знакъ, то обратное число $\frac{1}{a_n}$ будетъ лишь колебаться между положительными и отрицательными числами, сколь угодно большими по абсолютной величинѣ, не стремясь ни къ какому предѣлу. Такъ напримѣръ, послѣдовательность чиселъ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ имѣетъ предѣломъ нуль, а послѣдовательность обратныхъ чиселъ $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$ не имѣетъ никакого (ни конечнаго, ни безконечнаго) предѣла.

124. Способъ предѣловъ. Этотъ многообъемлющій способъ состоитъ въ переходѣ отъ данныхъ соотношеній между перемѣнными числами къ аналогичнымъ соотношеніямъ между предѣлами этихъ чиселъ. Онъ основанъ на небольшомъ числѣ теоремъ, которыя доказываются весьма просто, если примемъ во вниманіе, что, на основаніи самого опредѣленія предѣла (§ 122, b, c), существованіе предѣла a перемѣннаго числа a_n заключаетъ въ себѣ возможность всегда найти такое значеніе ν числа n, что при $n > \nu$ a_n будетъ превосходить любое число, меньшее a, и оставаться меньшимъ любого числа, большаго a. Для этого достаточно взять число ε (§ 122) меньшимъ абсолютной величины разности между a и вышеупомянутыми числами (III). Замѣтимъ еще, что, опираясь на сказанное выше (§§ 112 и 113) объ ирраціональныхъ числахъ, мы можемъ утверждать, что всякое ирраціональное число можно разсматривать, какъ предѣлъ нѣкоторой послѣдовательности раціональныхъ чиселъ (III a).

125. Перемѣнное число не можетъ одновременно стремиться къ различнымъ предѣламъ. Дѣйствительно, допустивъ, что a_n стремится къ двумъ неравнымъ между собою предѣламъ a и b, мы могли бы, обозначая черезъ c число, лежащее между a и b, $(a < c < b)$, найти такое значеніе указателя n, для котораго одновременно $a_n > c$ и $a_n < c$ (§ 124), что невозможно. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что a_n можетъ стремиться къ различнымъ предѣламъ при различныхъ формахъ указателя n. Напримѣръ, послѣдовательность $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$ никакого предѣла не имѣетъ, послѣдовательность чиселъ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, имѣетъ

предѣломъ нуль, а послѣдовательность чиселъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ, имѣетъ предѣломъ 1 (IV). Важно замѣтить еще слѣдующее. Изъ опредѣленія предѣла данной послѣдовательности чиселъ вытекаетъ, что всякая послѣдовательность, состоящая изъ безконечнаго числа чиселъ, выдѣленная изъ послѣдовательности, имѣющей предѣлъ, сама имѣетъ тотъ же самый предѣлъ.

126. Изъ двухъ перемѣнныхъ чиселъ a_n и b_n, стремящихся къ различнымъ между собою предѣламъ a и b, то, которое стремится къ бо́льшему предѣлу, въ концѣ концовъ, сдѣлается больше другого. Иными словами, если

$$\lim a_n > \lim b_n, \text{ то } a_n > b_n,$$

начиная съ нѣкотораго значенія указателя n. Дѣйствительно, выбравъ какое нибудь число c между a и b, $a > c > b$, при достаточно большомъ значеніи n и для всѣхъ еще бо́льшихъ, будемъ имѣть (§ 124) $a_n > c$, $b_n < c$, откуда $a_n > b_n$.

127. Если одно перемѣнное число въ концѣ концовъ дѣлается и остается меньше другого, то предѣлъ перваго не можетъ быть больше предѣла второго. Иными словами: если

$$a_n < b_n, \text{ то } \lim a_n \leqq \lim b_n.$$

Дѣйствительно, если бы $\lim a_n$ былъ больше $\lim b_n$, то въ концѣ концовъ имѣли бы $a_n > b_n$, вопреки предположенію.

128. Изъ послѣднихъ теоремъ вытекаютъ нѣкоторыя слѣдствія, заслуживающія вниманія. Прежде всего важно замѣтить, что перемѣнное число въ концѣ концовъ принимаетъ и сохраняетъ знакъ (+ или −) своего предѣла, т. е. если $\lim a_n > 0$, то въ концѣ концовъ будетъ и $a_n > 0$. Послѣдовательность чиселъ, стремящаяся къ положительному предѣлу, можетъ поэтому заключать въ себѣ лишь ограниченное число отрицательныхъ или равныхъ нулю чиселъ. Обратно, если $a_n > 0$, то $\lim a_n \geqq 0$, т. е. положительное перемѣнное число можетъ стремиться только къ положительному предѣлу или къ нулю. Равнымъ образомъ, отрицательное перемѣнное число не можетъ стремиться къ положительному предѣлу. Изъ этого слѣдуетъ, что послѣдовательность, состоящая изъ безчисленнаго множества положительныхъ и безчисленнаго множества отрицательныхъ чиселъ, ни къ какому предѣлу, кромѣ нуля, стремиться не можетъ.

129. Сумма и произведеніе конечнаго числа безконечно малыхъ чиселъ суть числа безконечно малыя (V). Если ν число заданныхъ слагаемыхъ или сомножителей, и ε произвольно заданное положительное число, то достаточно сдѣлать абсолютную величину каждаго слагаемаго меньшей $\frac{\varepsilon}{\nu}$, и каждаго множителя

меньшей $\sqrt[\nu]{\varepsilon}$, чтобы сумма и произведеніе, по абсолютной величинѣ, сдѣлались меньше ε. Дѣйствительно, извѣстно, что абсолютная величина произведенія равна произведенію абсолютныхъ величинъ сомножителей, а абсолютная величина суммы не больше суммы абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ.

130. Если два перемѣнныхъ числа стремятся къ одному и тому же предѣлу, то всякое число, лежащее между данными перемѣнными числами, стремится къ тому же предѣлу. Положимъ, что при всякомъ n*), $a_n < b_n < c_n$, и $\lim a_n = \lim c_n = a$. Разность $b_n - a$ (§ 123, b) безконечно мала, потому что заключается между $a_n - a$ и $c_n - a$, безконечно малыми по условію. Слѣдовательно, $\lim b_n = a$.

131. Если нѣкоторое перемѣнное число b_n стремится къ предѣлу a, и всегда заключается между перемѣнными a_n и c_n, разность которыхъ стремится къ нулю, то эти перемѣнныя a_n и c_n стремятся къ тому же предѣлу a, какъ и b_n. Пусть $a_n < b_n < c_n$, $\lim b_n = a$, $\lim (a_n - c_n) = 0$; напишемъ $a_n - a = (a_n - b_n) + (b_n - a)$. Разность $a_n - b_n$, лежащая между 0 и безконечно малою разностью $a_n - c_n$, имѣетъ предѣломъ 0; разность $b_n - a$, по условію, безконечно мала; слѣдовательно, $\lim a_n = a$, а такъ какъ $c_n - a = (c_n - a_n) + (a_n - a)$, то и $\lim c_n = a$.

132. Предѣлъ суммы конечнаго числа перемѣнныхъ, стремящихся къ опредѣленнымъ предѣламъ, равенъ суммѣ предѣловъ слагаемыхъ. Дѣйствительно, если перемѣнныя a_n, b_n c_n, ..., k_n стремятся соотвѣтственно къ предѣламъ a, b, c, ..., k, то это значитъ, что (§ 122, c) $a_n - a$, $b_n - b$, $c_n - c$, ... $k_n - k$ числа безконечно малыя, а потому (§ 129) и сумма ихъ

$$(a_n + b_n + c_n + \cdots + k_n) - (a + b + c + \cdots + k).$$

число безконечно малое. Иначе

$$\lim (a_n + b_n + c_n + \cdots + k_n) = a + b + c + \cdots + k$$
$$= \lim a_n + \lim b_n + \lim c_n + \cdots + \lim k_n.$$

Какъ одно изъ слѣдствій этой теоремы, замѣтимъ слѣдующее: если разность двухъ перемѣнныхъ стремится къ нулю, и одно изъ нихъ стремится къ нѣкоторому предѣлу, то и другое стремится къ тому же предѣлу. Дѣйствительно, если $\lim a_n = a$ и

$$\lim (b_n - a_n) = 0, \text{ то } \lim b_n = \lim a_n + \lim (b_n - a_n) = a.$$

133. Предѣлъ произведенія конечнаго числа сомножителей, стремящихся къ опредѣленнымъ предѣламъ, равенъ

*) Начиная съ нѣкотораго мѣста.

произведенію предѣловъ сомножителей. Дѣйствительно, перемножая числа

$$a_n = a + (a_n - a), \quad b_n = b + (b_n - b), \quad c_n = c + (c_n - c), \ldots$$

получимъ произведеніе $abc \ldots$, сложенное съ конечнымъ числомъ безконечно малыхъ слагаемыхъ (VI). Поэтому

$$\lim a_n b_n c_n \cdots = a\,b\,c \cdots = \lim a_n \cdot \lim b_n \cdot \lim c_n \cdots$$

134. Если a_n стремится къ предѣлу a, отличному отъ нуля, то $\frac{1}{a_n}$ стремится къ предѣлу $\frac{1}{a}$. Выбравъ по произволу положительное число ε, меньшее 1 и, замѣчая, что предѣлъ числа $\frac{a_n}{a}$, равнаго произведенію a_n на $\frac{1}{a}$, есть 1, мы можемъ дать числу n такое значеніе, начиная съ котораго $\frac{a_n}{a} > \varepsilon$, и въ то же время $|a_n - a| < \varepsilon^2 a^2$. Тогда

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \frac{\varepsilon^2 a}{a_n} < \varepsilon, \quad \lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

135. Предѣлъ частнаго равенъ частному отъ дѣленія предѣла числителя на предѣлъ знаменателя, предполагая послѣдній не равнымъ нулю. Дѣйствительно, на основаніи сказаннаго въ предыдущемъ §, имѣемъ

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{\lim b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

Важно никогда не упускать изъ вида существеннаго ограниченія, что $\lim b_n \neq 0$.

Основныя теоремы.

136. Теорема I. Всякое возрастающее перемѣнное число имѣетъ конечный или безконечный предѣлъ.

Если a_n не возрастаетъ до безконечности, то существуетъ по крайней мѣрѣ одно число, котораго a_n не превзойдетъ, и ясно, что тѣмъ же свойствомъ обладаетъ всякое число, большее упомянутаго. Замѣтивъ это, раздѣлимъ всѣ раціональныя числа на два класса слѣдующимъ образомъ. Отнесемъ раціональное число r къ нижнему классу, если въ послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ возможно найти число, большее r; наоборотъ, отнесемъ раціональное число r къ верхнему классу, если въ послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ не воз-

можно найти число, превышающее r. Числа нижняго класса, очевидно, меньше чиселъ верхняго класса; кромѣ того легко показать, что въ нижнемъ классѣ нѣтъ наибольшаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, когда возьмемъ любое число r нижняго класса и найдемъ число a_n бо́льшее r, что по условію возможно, то всякое раціональное число, лежащее между r и a_n, т. е. бо́льшее r и меньшее a_n, будетъ принадлежать тому же классу, согласно опредѣленію этого класса. Слѣдовательно, какое бы число нижняго класса ни выбрали, всегда найдутся числа того же класса, бо́льшія выбраннаго. Указанное раздѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ опредѣляетъ, слѣдовательно, (§ 103) нѣкоторое раціональное или ирраціональное число a [1]). Далѣе, изъ теоріи ирраціональныхъ чиселъ (§ 112) слѣдуетъ, что какъ бы мало ни было произвольно заданное число ε, въ нижнемъ классѣ числа a всегда найдется такое число r, которое превзойдетъ число $a-\varepsilon$. Поэтому, найдя еще число a_n бо́льшее r, a fortiori будемъ имѣть $a_n > a-\varepsilon$, т. е. положительная разность $a-a_n < \varepsilon$ и остается $< \varepsilon$, при возрастаніи n, такъ какъ a при этомъ не мѣняется, а a_n возрастаетъ. Слѣдовательно, $\lim a_n = a$. Подобнымъ же образомъ доказывается, что всякое убывающее (или лучше не возрастающее) перемѣнное число стремится къ отрицательной безконечности или къ конечному предѣлу.

137. Лемма. Изъ всякой послѣдовательности, заключающей въ себѣ неограниченное число чиселъ, можно выдѣлить другую послѣдовательность, стремящуюся къ нѣкоторому конечному или безконечному предѣлу.

Если въ данной послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ заключается лишь конечное число чиселъ, меньшихъ или равныхъ a_1, то въ ней навѣрно будетъ безконечное число чиселъ, превосходящихъ a_1. Чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, мы и предположимъ, что въ нашей послѣдовательности безконечное число чиселъ, большихъ a_1. Пусть одно изъ нихъ будетъ a_{r_1}. Можетъ случиться, что между слѣдующими за нимъ числами найдется число $a_{r_2} > a_{r_1}$, между слѣдующими за a_{r_2} число $a_{r_3} > a_{r_2}$ и т. д. Если такой подборъ чиселъ можно продолжать безпредѣльно, то изъ данной послѣдовательности выдѣлится послѣдовательность постоянно возрастающихъ чиселъ, имѣющая по доказанной теоремѣ (§ 136) конечный или безконечный предѣлъ. Въ противномъ случаѣ встрѣтится наконецъ нѣкоторое число a_{r_λ}, котораго не превзойдетъ ни одно изъ слѣдующихъ за нимъ чиселъ и выдѣлится группа изъ конечнаго числа чиселъ

$$a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} \cdots < a_{r_\lambda}.$$

Между числами, слѣдующими за a_{r_λ}, опять будетъ, по предполо-

---

[1]) a будетъ раціонально, если въ верхнемъ классѣ будетъ наименьшее число.

женію, безконечное число чиселъ, большихъ a_1, но не превосходящихъ a_{r_λ}. Начиная съ одного изъ нихъ a_{s_1} составляемъ подобно предыдущему, послѣдовательность возрастающихъ чиселъ, которая подобно первой, либо продолжится безпредѣльно (и тогда лемма будетъ доказана), либо оборвется на нѣкоторомъ числѣ a_{s_μ}, котораго не превзойдетъ ни одно изъ слѣдующихъ, но само оно будетъ не больше a_{r_λ}. Такимъ образомъ получится новая группа изъ конечнаго числа чиселъ

$$a_1 < a_{s_1} < a_{s_2} < \cdots < a_{s_\mu}, \quad \text{и} \quad a_{r_\lambda} \geqq a_{s_\mu}.$$

Продолжая такимъ образомъ, получимъ рядъ группъ

$$\begin{aligned} &a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \cdots < a_{r_\lambda}, \\ &a_1 < a_{s_1} < a_{s_2} < \cdots < a_{s_\mu}, \\ &a_1 < a_{t_1} < a_{t_2} < \cdots < a_{t_\nu}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

При этомъ либо дойдемъ до послѣдовательности съ безконечнымъ числомъ возрастающихъ чиселъ (и лемма будетъ доказана), либо получимъ послѣдовательность съ безконечнымъ числомъ не возрастающихъ чиселъ

$$a_{r_\lambda} \geqq a_{s_\mu} \geqq a_{t_\nu} \geqq \cdots,$$

имѣющую (§ 136) конечный предѣлъ (а не $-\infty$, такъ какъ всѣ ея числи больше a_1) (VII).

138. Примѣчанія. a) Положимъ, что a_n и b_n перемѣнныя числа, о которыхъ извѣстно слѣдующее: 1) когда a_n стремится къ нѣкоторому предѣлу a, то и b_n стремится къ нѣкоторому предѣлу b *), и 2) различнымъ значеніямъ a соотвѣтствуютъ различныя значенія b. Тогда можно утверждать, что если существуетъ опредѣленный предѣлъ для b_n, то существуетъ и опредѣленный предѣлъ для a_n (не зависящій отъ послѣдовательности значеній n). Дѣйствительно, если бы послѣдовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ не имѣла опредѣленнаго предѣла, то мы могли бы выдѣлить изъ нея послѣдовательности, имѣющія различные предѣлы a, которымъ соотвѣтствовали бы и различныя значенія b, что противорѣчитъ существованію опредѣленнаго предѣла для b_n.

b) Въ § 125 была уже приведена послѣдовательность, которая разбивается на двѣ, имѣющія различные предѣлы. Не мѣшаетъ замѣтить, что въ случаѣ безконечнаго числа выдѣляемыхъ послѣдовательностей различные ихъ предѣлы могутъ дать сплошной рядъ

*) При чемъ эти предѣлы могутъ быть различны для различныхъ послѣдовательностей значеній числа n.

чиселъ (т. е. всѣ числа, лежащіе въ нѣкоторомъ промежуткѣ между двумя данными числами). Приведемъ слѣдующій примѣръ: Пусть ν обозначаетъ число цифръ въ числѣ n. Перемѣнное число $a_n = \frac{10^\nu}{n}$ можетъ имѣть предѣломъ любое число a, лежащее между 1 и 10. Дѣйствительно, если заставимъ число n послѣдовательно принимать значенія, равныя наибольшему цѣлому числу, заключающемуся въ числахъ

$$\frac{10}{a}, \quad \frac{100}{a}, \quad \frac{1000}{a}, \quad \frac{10\,000}{a}, \ldots$$

то a_n будетъ стремиться къ данному числу a (VIII).

139. Теорема II. Условіе, необходимое и достаточное для существованія конечнаго предѣла числа a_n, состоитъ въ томъ, чтобы каждому сколь угодно малому положительному числу ε соотвѣтствовало такое число ν, для котораго

$$|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon,$$

при всякой парѣ значеній n' и n'', большихъ ν.

Если a_n стремится къ a, то это значитъ, что при произвольно заданномъ положительномъ числѣ ε, какъ бы оно мало ни было, всегда можно найти такое число ν, чтобы было

$$|a_{n'} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad |a_{n''} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

для всѣхъ значеній n' и n'', большихъ ν. Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$|a_{n'} - a_{n''}| \leq |a_{n'} - a| + |a - a_{n''}| < \varepsilon,$$

т. е. условіе необходимо. Обратно, положимъ, что при данномъ ε можно найти такое ν, чтобы $|a_{n'} - a_{n''}| < \frac{1}{2}\varepsilon$, для всѣхъ значеній n' и n'', большихъ ν. Тогда, въ частности, фиксируя значеніе n', увидимъ, что всѣ числа a_n, для которыхъ $n > \nu$, будутъ заключаться между $a_{n'} - \frac{\varepsilon}{2}$ и $a_{n'} + \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда слѣдуетъ, что если мы изъ послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ способомъ, указаннымъ въ § 137, выдѣлимъ послѣдовательность $a_r, a_s, a_t, \ldots$, имѣющую предѣлъ, то этотъ предѣлъ будетъ навѣрно числомъ конечнымъ. Обозначимъ его черезъ a. Опредѣлимъ затѣмъ въ рядѣ указателей $r, s, t, \ldots$ число $\mu > \nu$, достаточно большое, чтобы $|a_\mu - a|$ было меньше $\frac{1}{2}\varepsilon$. Тогда для всякаго $n > \nu$ будемъ имѣть

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_\mu| + |a_\mu - a| < \varepsilon,$$

откуда $\lim a_n = a$. Итакъ, условіе и достаточно.

140. Теорема III. Если при безпредѣльномъ возрастаніи n, перемѣнныя a_n и b_n стремятся къ нулю и, кромѣ того, b_n постоянно убываетъ *), то

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}, \tag{1}$$

предполагая, что второй предѣлъ существуетъ. Обозначая черезъ l значеніе правой части равенства (1), мы можемъ, при произвольно заданномъ положительномъ ε, найти такое значеніе n, что всѣ дроби

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}, \quad \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{b_{n+1} - b_{n+2}}, \ldots, \quad \frac{a_{n+\nu-1} - a_{n+\nu}}{b_{n+\nu-1} - b_{n+\nu}}$$

будутъ заключаться между $l - \frac{\varepsilon}{2}$ и $l + \frac{\varepsilon}{2}$. Замѣчая, что знаменатели всѣхъ этихъ дробей числа положительныя, можемъ сказать, что между тѣми же числами будетъ заключаться дробь, числитель которой равенъ суммѣ числителей и знаменатель суммѣ знаменателей данныхъ дробей **), т. е.

$$\left| \frac{a_n - a_{n+\nu}}{b_n - b_{n+\nu}} - l \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

какъ бы велико ν ни было, при всѣхъ значеніяхъ n, начиная съ нѣкотораго

Дробь $\frac{a_n - a_{n+\nu}}{b_n - b_{n+\nu}}$, при данномъ n и безпредѣльно возрастающемъ ν, стремится къ предѣлу $\frac{a_n}{b_n}$. По этому всегда можно выбрать ν такъ, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_{n+\nu}}{b_n - b_{n+\nu}} \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

а тогда получимъ

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = l.$$

141. Теорема IV. Если при безпредѣльно возрастающемъ n число b_n, постоянно возрастая, превосходитъ всякое данное число, то

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \tag{2}$$

---

*) Это второе условіе можно выразить неравенствомъ $b_{n+1} < b_n$ при всякомъ n. Оно не вытекаетъ изъ перваго, потому что b_n можетъ приближаться къ 0, не постоянно убывая, а то возрастая, то убывая, колеблясь около нуля.

**) Это извѣстная теорема элементарной Алгебры. (См. напр. Алгебра Ж. Бертрана, перев. Пирожкова 1899. 1 часть, стр. 88. Замѣтимъ только, что условіе, чтобы оба члена дробей были > 0, поставленное у Бертрана, излишне.)

Алгебра стр. 88

въ предположеніи, что второй предѣлъ существуетъ.

Обозначая черезъ l значеніе второй части равенства (2), можемъ найти такое число ν, что при $n>\nu$ всегда

$$\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-l\right|<\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Другими словами, всѣ дроби

$$\frac{a_{\nu+1}-a_\nu}{b_{\nu+1}-b_\nu},\ \frac{a_{\nu+2}-a_{\nu+1}}{b_{\nu+2}-b_{\nu+1}},\ \ldots,\ \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

содержатся между $l-\frac{1}{2}\varepsilon$ и $l+\frac{1}{2}\varepsilon$; вмѣстѣ съ тѣмъ, такъ какъ всѣ знаменатели положительны, будемъ имѣть

$$\left|\frac{a_n-a_\nu}{b_n-b_\nu}-l\right|<\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Мы возьмемъ ν достаточно большимъ для того, чтобы имѣло мѣсто не только послѣднее неравенство, но и неравенство $b_\nu>0$, что всегда возможно, потому что по условію b_n возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n. На томъ же основаніи, при постоянномъ ν, можно выбрать n такимъ, чтобы число $\frac{1}{2}\varepsilon b_n$ превзошло абсолютную величину числа $a_\nu-lb_\nu$ и затѣмъ при возрастаніи n оставалось постоянно большимъ послѣдняго числа. Замѣчая теперь, что

$$\frac{a_n}{b_n}-l=\frac{a_\nu-lb_\nu}{b_n}+\left(1-\frac{b_\nu}{b_n}\right)\left(\frac{a_n-a_\nu}{b_n-b_\nu}-l\right),$$

непосредственно находимъ

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon,\quad \lim\frac{a_n}{b_n}=l.$$

142. Слѣдствія. а) Если нѣкоторая послѣдовательность чиселъ стремится къ конечному предѣлу, то къ тому же предѣлу стремится и среднее ариѳметическое и среднее геометрическое значеніе ея первыхъ n членовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи послѣдней теоремы имѣемъ

$$\lim\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim a_n, \tag{3}$$

если предѣлъ во второй части существуетъ*).

Впослѣдствіи мы увидимъ (§ 150), что предѣлъ логариѳма перемѣннаго числа равенъ логариѳму отъ предѣла этого

*) Полагаемъ въ теоремѣ IV $b_n=n$ и замѣняемъ a_n черезъ $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

перемѣннаго. Считая это доказаннымъ и замѣняя въ предыдущемъ равенствѣ a_n черезъ $\log a_n$, получимъ

$$\lim \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim \log a_n,$$

откуда

$$\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim a_n, \tag{4}$$

предполагая, что предѣлъ въ правой части равенства существуетъ*).

b) Если въ нѣкоторой послѣдовательности отношеніе n-таго члена къ предыдущему стремится къ нѣкоторому конечному предѣлу, то къ тому же предѣлу стремится корень n-ой степени изъ n-го члена. Дѣйствительно, стоитъ только замѣнить въ равенствѣ (4) a_n черезъ $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, чтобы получить

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

т. е.

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{5}$$

143. Примѣчанія. a)**) Вторая теорема § 142 (выражаемая формулою (4)) доказана въ предположеніи, что не только $a_n > 0$, но и $\lim a_n > 0$ (иначе $\log a_n$ и $\log(\lim a_n)$ не имѣли бы смысла въ области вещественныхъ чиселъ). Поэтому формула (4) остается не доказанною для того случая, когда $\lim a_n = 0$. Чтобы пополнить этотъ пробѣлъ, достаточно было бы доказать, что формула (3), а слѣдовательно, и (4) остаются справедливыми и тогда, когда a_n стремится къ безконечности. (Дѣйствительно, формула (4) не измѣнится, если замѣнимъ a_i на $\frac{1}{a_i}$ и, будучи доказана для случая $\lim a_n = \infty$, будетъ справедлива и для $\lim a_n = 0$). Впрочемъ, легко доказать, что самая теорема § 141 при указанномъ обобщеніи на случай безконечнаго предѣла правой части остается справедливой (а слѣдовательно, остаются справедливыми и ея слѣдствія въ § 142), т. е., что имѣетъ мѣсто слѣдующее предложеніе:

Если b_n при безпредѣльно возрастающемъ n, въ концѣ концовъ, постоянно возрастаетъ, и если

$$\lim b_n = \infty, \ \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \infty, \tag{A}$$

*) Изъ самаго доказательства теоремъ III и IV и ихъ слѣдствій видно, что здѣсь предполагается, что существуетъ конечный предѣлъ.

**) Это примѣчаніе принадлежитъ бывшему ученику Чезаро G. Sannia и помѣщено въ концѣ нѣмецкаго изданія.

то и

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty .$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть l есть сколь угодно большое число, а ν выбрано такъ, что при $n > \nu$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} > 2l;$$

тогда, повторяя разсужденія § 141, найдемъ

$$\frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} > 2l, \quad \frac{a_n}{b_n} - l > \frac{a_\nu - lb_\nu}{b_n} + \left(1 - \frac{b_\nu}{b_n}\right) l.$$

Поэтому, взявъ n достаточно большимъ и замѣчая, что предѣлъ второго члена послѣдняго неравенства при безконечномъ n равенъ l (а первый членъ по абсолютной величинѣ становится сколь угодно малымъ), будемъ имѣть при всякомъ достаточно большомъ n

$$\frac{a_n}{b_n} > l, \quad \text{т. е.} \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \infty .$$

Къ тому же заключенію можно придти, замѣчая, что a_n въ концѣ концовъ постоянно возрастаетъ и стремится къ ∞ (изъ второго условія (A)); поэтому можно примѣнить теорему § 141 къ $\frac{b_n}{a_n}$ и тогда получимъ $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$ и т. д. Аналогично этому обобщается и теорема § 140.

b) Въ предыдущихъ теоремахъ всегда предполагалось существованіе предѣловъ въ правыхъ частяхъ равенствъ (1), (2), (3) и (4), и изъ этого предположенія выводились заключенія о существованіи предѣловъ лѣвыхъ частей. Однако, послѣдніе могутъ существовать и тогда, когда первые не существуютъ. Напримѣръ, мы видѣли (формула (3)), что если существуетъ предѣлъ a послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, то существуетъ и предѣлъ послѣдовательности

$$a_1, \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2), \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3), \tfrac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \cdots$$

и равенъ тому же a. Но вторая послѣдовательность можетъ имѣть предѣлъ, когда первая его не имѣетъ. Такъ напримѣръ, изъ послѣдовательности

(6) $$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

выводится указаннымъ путемъ слѣдующая

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{6}, \tfrac{4}{7}, \tfrac{4}{8}, \ldots,$$

имѣющая предѣлъ $\frac{1}{2}$ *), тогда какъ первая никакого предѣла, очевидно, не имѣетъ.

c) Можно построить безчисленное множество послѣдовательностей, представляющихъ подобное явленіе. Положимъ, напримѣръ, что совокупность всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ разбита на r системъ $A_1, A_2, \ldots, A_r$, при чемъ каждая изъ этихъ системъ содержитъ въ себѣ безконечное множество чиселъ. Положимъ, далѣе, что a_n стремится къ предѣлу l_i, когда число n проходитъ всѣ значенія, принадлежащія системѣ A_i. Пусть n_i обозначаетъ число чиселъ этой группы, не превосходящихъ n, а a_{in} сумму членовъ разсматриваемой послѣдовательности (a_n), соотвѣтствующихъ этимъ n_i значеніямъ указателя n. Тогда для той частной послѣдовательности, члены которой стремятся къ предѣлу l_i, имѣемъ $\lim \frac{a_{in}}{n_i} = l_i$ **), такъ какъ n_i, очевидно, возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n: иначе система A_i заключала бы въ себѣ конечное число чиселъ. Ясно, что можно написать

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{a_{1n}}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n} + \frac{a_{2n}}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n} + \cdots + \frac{a_{rn}}{n_r} \cdot \frac{n_r}{n}$$

(по самому опредѣленію чиселъ a_{in}).

Предѣлъ $\frac{n_i}{n}$ можно назвать вѣроятностью того, что произвольно выбранное цѣлое положительное число принадлежитъ системѣ A_i. (Опредѣленіе математической вѣроятности можно найти напр. у С. Савича „Элементарная теорія страхованія“ 1909 стр. 3.) Обозначимъ эту вѣроятность черезъ p_i. Тогда при безпредѣльно возрастающемъ n будемъ имѣть

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = l_1 p_1 + l_2 p_2 + \cdots + l_r p_r.$$

Напримѣръ, въ послѣдовательности (6) имѣемъ двѣ системы: систему A_1 нечетныхъ чиселъ и систему A_2 четныхъ чиселъ. Очевидно, здѣсь $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, $l_1 = 1$, $l_2 = 0$. Предѣлъ второй послѣдовательности (среднихъ ариѳметическихъ) равенъ, слѣдовательно, $1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

d) Аналогичнымъ образомъ изъ данной послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ можно образовать другую

$$a_1, \sqrt[2]{a_1 a_2}, \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}, \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}, \ldots$$

---

*) При n четномъ $a_n = \frac{1}{2}$, при n нечетномъ $a_n = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$ и $\lim a_n = \frac{1}{2}$ при всякомъ n.

**) По формулѣ (3) § 142.

и примѣнить къ ней тѣ же разсужденія (см. формулу (4) § 142). Если системы A_i, предѣлы l_i и вѣроятности p_i существуютъ, то будемъ имѣть

$$\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = l_1^{p_1} l_2^{p_2} \dots l_r^{p_r}.$$

144. Теорема V. Если $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, то

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1) = ab.$$

Положимъ, что ν обозначаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{n}{2}$; тогда

$$\lim \frac{\nu}{n} = \lim \frac{n-\nu}{n} = \frac{1}{2}.$$ *)

Такъ какъ $\lim a_n = a$, то $\lim |a_n| = |a|$, и (§ 142, a)

$$\lim \frac{1}{n}(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_\nu|)$$
$$= \lim \frac{\nu}{n} \lim \frac{1}{\nu}(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_\nu|) = \tfrac{1}{2}|a|.$$

Поэтому, взявъ число $\alpha > \frac{1}{2}|a|$, можемъ утверждать, что для достаточно большого значенія n, всегда будемъ имѣть

$$\frac{1}{n}(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_\nu|) < \alpha$$

Предпославъ это, разсмотримъ выраженіе

$$\sigma_n = \frac{1}{n}[a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \dots + a_\nu(b_{n-\nu+1} - b)].$$

Мы можемъ принять, что число n взято достаточно большимъ, чтобы абсолютная величина разности $b_r - b$ была меньше $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ для всѣхъ значеній r, бо́льшихъ $n - \nu$. Такимъ образомъ, для нѣкотораго значенія n и для всѣхъ значеній еще бо́льшихъ будемъ имѣть

$$|\sigma_n| < \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{|a_1| + |a_2| + | + \dots + |a_\nu|}{n} < \varepsilon$$

и слѣдовательно, $\lim \sigma_n = 0$, т. е.

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_\nu b_{n-\nu+1}) = b \lim \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_\nu).$$

---

*) $\nu = \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2} - \varrho$, гдѣ $0 < \varrho < 1$; $n - \nu = \frac{n}{2} + \varrho$; и $\lim \frac{\varrho}{n} = 0$.

Правая часть равна

$$b \lim \frac{\nu}{n} \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu}{\nu} = \tfrac{1}{2} ab.$$

Поэтому

$$\lim \frac{1}{n} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_\nu b_{n-\nu+1}) = \tfrac{1}{2} ab.$$

Аналогично этому доказали бы, что

$$\lim \frac{1}{n} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_{\nu+1} b_{n-\nu}) = \tfrac{1}{2} ab.$$

Путемъ сложенія получаемъ

$$\lim \frac{1}{n} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = ab.$$

145. Теорема VI. Если b_n при безпредѣльномъ возрастаніи n стремится къ нулю, постоянно убывая, а $b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n$ безпредѣльно возрастаетъ, то

$$\lim \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

предполагая, что второй предѣлъ существуетъ.

Замѣтимъ, что въ томъ случаѣ, когда существуетъ предѣлъ a_n, теорема эта прямо вытекаетъ изъ теоремы IV, и притомъ безъ всякихъ ограниченій, наложенныхъ нами на b_n. Дѣйствительно, замѣнивъ въ формулѣ (2) § 141 a_n на $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ и b_n на $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, тотчасъ получимъ

$$\lim \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim a_n = \lim \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Но настоящая теорема именно тогда и полезна, когда $\lim a_n$ не существуетъ. Для этого случая ее и докажемъ. Положимъ

$$a_1 + a_2 \cdots + a_n = n a_n$$

и примемъ, что a_n стремится къ предѣлу a при безпредѣльномъ возрастаніи n. Тогда можно написать

$$\begin{aligned} &a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= a_1 b_1 + (2a_2 - a_1) b_2 + \cdots + (n a_n - (n-1) a_{n-1}) b_n \\ &= a_1 (b_1 - b_2) + 2 a_2 (b_2 - b_3) + \cdots + n a_n (b_n - b_{n+1}) + n a_n b_{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда, положивъ $c_i = i (b_i - b_{i+1})$ и замѣтивъ, что

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = b_1 + b_2 + \cdots b_n - n b_{n+1},$$

находимъ

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n + a_n \left[(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)\right],$$

и далѣе

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = a_n + \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}\left(\frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} - a_n\right). \tag{7}$$

Такъ какъ b_n убываетъ, то $c_n > 0$. Кромѣ того, $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ возрастаетъ безпредѣльно. Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы велико ни было число l, всегда можно достигнуть того, что $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ будетъ больше l. Для этого достаточно выбрать ν столь большимъ, чтобы сумма $b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu$ превзошла l, и затѣмъ выбрать n такимъ, чтобы было

$$b_{n+1} < \frac{1}{\nu}(b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu - l).$$

И то, и другое возможно, потому что $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ возрастаетъ безпредѣльно, а b_n при возрастаніи n стремится къ нулю. Принимая еще во вниманіе, что b_n постоянно убываетъ, будемъ имѣть

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n > b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu + (n - \nu)\, b_{n+1} - n b_{n+1}\ ^*),$$

т. е.

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n > b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu - \nu b_{n+1} > l.$$

Замѣтивъ это, имѣемъ (§ 141, формула (2))

$$\lim \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} = \lim \frac{a_n c_n}{c_n} = \lim a_n.$$

Второй членъ правой части есть произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ второй стремится къ нулю (по доказанному выше), а первый

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = 1 - \frac{n\, b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

всегда заключается между 0 и 1 (т. е. представляетъ собой число конечное); поэтому этотъ второй членъ стремится къ 0, а первый

---

*) $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - n b_{n+1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu + (b_{\nu+1} + b_{\nu+2} + \cdots + b_n) - n b_{n+1}$ и $(b_{\nu+1} + b_{\nu+2} + \cdots + b_n) > (n - \nu) b_{n+1}$, вслѣдствіе убыванія b_n.

къ предѣлу, равному a. Слѣдовательно,

$$\lim \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = a,$$

что и требовалось доказать.

Упражненія на вычисленіе предѣловъ.

146. Дано положительное число a и требуется найти предѣлъ a^n при возрастаніи n до безконечности. При $a = 1$ имѣемъ всегда $a^n = 1$. При $a < 1$, имѣемъ $a^n = a^{n-1} \cdot a < a^{n-1}$, т. е. a^n постоянно убываетъ и потому, на основаніи теоремы I должно стремиться къ конечному предѣлу $l \geq 0$, Но изъ тождества $a^n = a^{n-1} \cdot a$, при возрастаніи n до ∞, слѣдуетъ $l = la$, $(a-1)l = 0$, слѣдовательно, $l = 0$. При $a > 1$, имѣемъ $a^n = a^{n-1} \cdot a > a^{n-1}$, слѣдовательно, a^n, постоянно возрастая вмѣстѣ съ n, должно стремиться къ конечному или безконечному предѣлу; но этотъ предѣлъ конечнымъ быть не можетъ, потому что онъ долженъ былъ бы быть положительнымъ числомъ l, а предыдущее тождество при безконечномъ n даетъ $l = la$ $(a-1)l = 0$, $l = 0$. Итакъ,

$$\lim a^n = 0 \text{ при } a < 1, \quad \lim a^n = \infty \text{ при } a > 1.$$

Впрочемъ, каждый изъ этихъ результатовъ есть слѣдствіе другого (§ 123, d, e).

147. Еще легче опредѣляется предѣлъ $\frac{a^n}{n!}$. Тождество

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{a}{n}$$

показываетъ, что разсматриваемое число, при какомъ угодно данномъ положительномъ числѣ a, въ концѣ концовъ начинаетъ убывать, а именно, начиная съ того значенія n, которое больше a. Поэтому оно должно стремиться къ нѣкоторому предѣлу $l \geq 0$. Но вышенаписанное тождество, при переходѣ къ предѣлу, даетъ $l = l \cdot 0$, т. е. $l = 0$. Слѣдовательно,

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Далѣе, очевидно, что тотъ же результатъ имѣетъ мѣсто и при $a < 0$.

148. Положимъ, что предѣлъ a_n *) существуетъ и равенъ a. Чему тогда равенъ предѣлъ a_n^m? Если m цѣлое положительное число, то a_n^m есть произведеніе изъ m сомножителей, имѣющихъ каждый предѣломъ a; поэтому (§ 133) $\lim a_n^m = a^m$. Далѣе, если $m = \frac{1}{m'}$, гдѣ m' цѣлое положительное число, и положимъ $a_n^m = b_n$, то $a_n = b_n^{m'}$. Такъ какъ a_n стремится къ предѣлу $b^{m'}$, когда b_n стремится къ b, то, обратно, можно утверждать (§ 138, a), что если предѣлъ a_n существуетъ, то существуетъ и предѣлъ b_n,

*) Въ §§ 148, 150 и 151 предполагается $a_n > 0$.

и притомъ имѣемъ $a = b^{m'}$, т. е. $b = a^m$. Если $m = p/q$, гдѣ p и q цѣлыя положительныя числа, то можно написать

$$\lim a_n^m = \lim \sqrt[q]{a_n^p} = \sqrt[q]{a^p} = a^m.$$

Наконецъ, если $m = -m'$, гдѣ m' положительное раціональное число, то (§ 134) имѣемъ

$$\lim a_n^m = \lim \frac{1}{a_n^{m'}} = \frac{1}{a^{m'}} = a^m.$$

Итакъ, $\lim a_n^m = (\lim a_n)^m$, при всякомъ раціональномъ значеніи m.

149. Если допустимъ, что существуетъ $\lim a_n = a$, то каковъ будетъ предѣлъ b^{a_n}? Предположимъ сперва, что число b, которое должно быть всегда положительнымъ *), меньше 1, и обозначимъ черезъ α_n абсолютную величину $a_n - a$. Когда задано нѣкоторое сколь угодно малое положительное число ε, то всегда можно (§ 146) найти такое число ν, чтобы $(1-\varepsilon)^\nu$ было меньше b. Не измѣняя ν, выберемъ теперь n такимъ, чтобы α_n было меньше $1/\nu$ и оставалось такимъ при дальнѣйшемъ возрастаніи n (что возможно, потому что $\lim \alpha_n = 0$). Тогда будемъ имѣть

$$1 - b^{a_n} < 1 - (1-\varepsilon)^{\nu \alpha_n} < 1 - (1-\varepsilon) = \varepsilon.$$

Отсюда послѣдовательно получаемъ

$$\lim b^{a_n} = 1, \quad \lim b^{\alpha_n} = b^\alpha, \text{ т. е. } \lim b^{a_n} = b^{\lim a_n}$$

При $b > 1$, можно написать

$$\lim b^{a_n} = \lim \frac{1}{b^{-a_n}} = \frac{1}{b^{-a}} = b^a.$$

150. Допуская, что a_n стремится къ предѣлу a, найти предѣлъ $\log a_n$. Изъ равенства $\alpha_n = \log a_n$ слѣдуетъ: $a_n = b^{\alpha_n}$, гдѣ b есть основаніе разсматриваемой системы логариѳмовъ. Если a_n стремится къ предѣлу a, то (§ 149) a_n стремится къ предѣлу b^α. Поэтому (§ 138, а), обратно, если существуетъ предѣлъ a_n, то существуетъ и предѣлъ α_n, при чемъ

$$a = b^\alpha, \quad \alpha = \log a.$$

Слѣдовательно,

$$\lim \log a_n = \log (\lim a_n). \quad \text{(Ср. § 142.)}$$

151. Если a_n и b_n при безпредѣльномъ возрастаніи n соотвѣтственно стремятся къ предѣламъ a и b, то къ какому предѣлу стремится $a_n^{b_n}$? Полагая $c_n = a_n^{b_n}$ имѣемъ $\log c_n = b_n \log a_n$, откуда $\log c = b \log a$ и $c = a^b$. Слѣдовательно,

$$\lim a_n^{b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n}. \tag{8}$$

---

*) Иначе b^{a_n} можетъ не имѣть смысла въ области вещественныхъ чиселъ.

152. Полагая, что a_n стремится къ предѣлу a найти предѣлъ $n(a_n - a_{n-1})$. Допуская, что такой предѣлъ существуетъ и равенъ l, можемъ написать (§ 141)

$$a = \lim \frac{n a_n}{n} = \lim n\,[a_n - (n-1)a_{n-1}] = \lim n\,(a_n - a_{n-1}) + \lim a_{n-1}$$

или $a = l + a$, откуда $l = 0$. Слѣдовательно, $n(a_n - a_{n-1})$ либо ни къ какому предѣлу не стремится, либо стремится къ 0. Далѣе, легко показать, что среднее ариѳметическое значеніе первыхъ n членовъ вида $n(a_n - a_{n-1})$ всегда стремится къ нулю. Дѣйствительно, это среднее ариѳметическое можно написать такъ *):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

и предѣлъ его будетъ (§ 142, а) $a - a$, т. е. нуль.

153. Даны два положительныхъ числа a и $b > a$; черезъ a_1 обозначимъ ихъ среднее геометрическое, черезъ b_1 ихъ среднее ариѳметическое, т. е. положимъ

$$a_1 = \sqrt{ab}, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

Изъ чиселъ a_1 и b_1 составимъ такимъ же образомъ числа a_2 и b_2, изъ нихъ a_3 и b_3 и т. д. Вообще, пусть будутъ

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n). \tag{9}$$

Очевидно, для всякого значенія n, имѣемъ $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$, т. е.

$$a < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < b_3 < b_2 < b_1 < b.$$

Число a_n возрастаетъ вмѣстѣ съ n, оставаясь меньше b, тогда какъ b_n постоянно убываетъ, оставаясь больше a. Отсюда слѣдуетъ (§ 136), что a_n и b_n стремятся соотвѣтственно къ конечнымъ предѣламъ α и β. Изъ второго, напр., соотношенія (9) получается, при переходѣ къ предѣламъ: $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, слѣдовательно $\alpha = \beta$. Этотъ общій предѣлъ чиселъ a_n и b_n называется ариѳметически-геометрическимъ среднимъ чиселъ a и b. Аналогичнымъ путемъ доказываютъ, что послѣдовательности чиселъ a_n и b_n, опредѣляемыхъ слѣдующимъ закономъ

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n)$$

имѣютъ общимъ предѣломъ геометрическое среднее чиселъ a и b, которое поэтому можно называть также ариѳметически-гармоническимъ среднимъ чиселъ a и b (IX).

154. Положимъ, что дана послѣдовательность чиселъ, въ которой каждый членъ равенъ ариѳметическому среднему двухъ предшествующихъ членовъ. Тогда ясно, что числа a_1, a_3, a_5, ... измѣняются въ одномъ,

*) $a_0 = 0$.

а числа $a_2, a_4, a_6, \ldots$ въ другомъ направленіи (т. е., если первыя возрастаютъ, то вторыя убываютъ, и наоборотъ). Такъ какъ при этомъ и тѣ, и другія остаются между первыми числами a и b ($a = a_1$, $b = a_2$) обѣихъ послѣдовательностей, то обѣ послѣдовательности стремятся къ нѣкоторымъ конечнымъ предѣламъ. Эти предѣлы равны между собою. Это тотчасъ сдѣлается очевиднымъ, когда въ соотношеніи $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ мы будемъ увеличивать n до безконечности и перейдемъ къ предѣламъ. Впрочемъ, въ этомъ можно прямо убѣдиться и вычислить этотъ общій предѣлъ, найдя общее выраженіе членовъ данной послѣдовательности, а именно:

$$a_n = \frac{a + 2b}{3} + (-1)^n \frac{b - a}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

Отсюда тотчасъ находимъ

$$\lim a_n = \tfrac{1}{3}(a + 2b) \quad (\text{X}).$$

155. Здѣсь намъ надо будетъ сдѣлать небольшое отступленіе, чтобы доказать нѣкоторыя неравенства, полезныя при рѣшеніи различныхъ вопросовъ. Положимъ, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ суть положительныя числа, меньшія 1. Обозначимъ черезъ $\sigma_{n,r}$ сумму произведеній изъ n первыхъ чиселъ данной послѣдовательности, по r множителей въ каждомъ. Тогда, какъ извѣстно,

$$(10) \qquad (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_n) = 1 - \sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} - \cdots \pm \sigma_{n,n},$$

(изъ правила умноженія многочленовъ). Мы покажемъ, что всегда можно написать

$$(11) \qquad (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_n) = 1 - \sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} - \cdots \pm \theta\sigma_{n,r},$$

гдѣ θ лежитъ между 0 и 1. Иными словами, если въ правой части равенства (10) опустимъ всѣ члены, слѣдующіе за $\sigma_{n,r}$ (при данномъ r), то получимъ число, меньшее или большее, чѣмъ то, что находится въ лѣвой части, смотря потому, будетъ ли r нечетное или четное. Для доказательства, конечно, достаточно показать, что равенство (11), очевидно справедливое при $n = r$, будетъ справедливо при замѣнѣ n на $n + 1$, если оно справедливо при какомъ нибудь n; умножая обѣ части равенства (11) на $(1 - \alpha_{n+1})$, получимъ

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_{n+1}) = 1 - \sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} - \cdots \pm \theta\sigma_{n,r} - \alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}\sigma_{n,1} - \cdots \pm \alpha_{n+1}\sigma_{n,r-1} \mp \theta\alpha_{n+1}\sigma_{n,r}.$$

Замѣчая еще, что $\sigma_{n+1,r} = \sigma_{n,r} + \alpha_{n+1}\sigma_{n,r-1}$ находимъ

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_{n+1}) = 1 - \sigma_{n+1,1} + \sigma_{n+1,2} - \cdots \mp \sigma_{n+1,r-1} \pm (\alpha_{n+1}\sigma_{n,r-1} + \theta(1 - \alpha_{n+1})\sigma_{n,r}).$$

Величина въ скобкахъ, очевидно, положительная, не больше

$$\alpha_{n+1}\sigma_{n,r-1} + (1 - \alpha_{n+1})\sigma_{n,r} = \sigma_{n+1,r} - \alpha_{n+1}\sigma_{n,r} < \sigma_{n+1,r}.$$

Поэтому ее можно представить въ видѣ $\theta'\sigma_{n+1,r}$, гдѣ θ' лежитъ между 0 и 1, что и требовалось показать.

156. Мы воспользуемся формулою (11), чтобы изслѣдовать, какъ измѣняется $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при безпредѣльномъ возрастаніи n. Если a

положительное число, меньшее 1, то $(1-\alpha)^n > 1-n\alpha$ *), и въ частности, при $\alpha = \frac{1}{n^2}$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n}, \text{ т. е. } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}.$$

Замѣчая далѣе, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \tag{12}$$

получаемъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Слѣдовательно, разсматриваемое число постоянно возрастаетъ. Но по той-же формулѣ (11)

$$(1-\alpha)^n > 1-\frac{n}{1}\alpha+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3$$

и въ частности, при $\alpha = \frac{1}{n}$,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > \frac{n^2-1}{3n^2} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

А отсюда, съ помощью тождества (12), найдемъ

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} > \frac{1}{3}, \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < 3.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что число $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, постоянно возрастая вмѣстѣ съ n, не можетъ однако превзойти 3. Поэтому оно должно стремиться къ конечному предѣлу. Этотъ предѣлъ обозначаютъ черезъ e; онъ играетъ чрезвычайно важную роль въ Математикѣ. Итакъ, при безпредѣльномъ возрастаніи n,

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Можно тутъ же замѣтить, что это равенство справедливо и тогда, когда n стремится къ $(-\infty)$. Дѣйствительно, полагая $n = -m$, гдѣ m положительное безпредѣльно возрастающее число, на основаніи тождества (12) имѣемъ

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1-\frac{1}{m}\right)^{1-m} = \lim\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} = e.$$

157. Положимъ, что a_n стремится къ безконечности при безпредѣльномъ возрастаніи n; чему равенъ предѣлъ $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$? Если m наибольшее цѣлое число, заключающееся въ a_n, то $m \leqq a_n < m+1$; слѣдова-

*) Изъ формулы (11) при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha$, $\sigma_{n-1} = n\alpha$, $r = 1$.

тельно $m+1$ (а вмѣстѣ съ нимъ и m) возрастаютъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n. Въ то же время имѣемъ

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

или

$$\frac{m+1}{m+2}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \frac{m+1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Припоминая послѣднее замѣчаніе § 125, видимъ, что $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ заключается между двумя числами, стремящимися къ общему предѣлу e. Поэтому (§ 130)

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Къ тому же результату, очевидно, придемъ и въ томъ случаѣ, когда a_n стремится къ $(-\infty)$.

158. Допуская, что a_n стремится къ предѣлу a, найти предѣлъ $\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n$. Положимъ $n = a_n \alpha_n$. Если $a \neq 0$, то ясно, что α_n стремится къ $+\infty$ или $-\infty$, смотря по знаку a (§ 123, е). Между тѣмъ имѣемъ

$$\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{a_n \alpha_n} = \left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{\alpha_n},$$

а потому, на основаніи формулы (8),

$$\lim\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = e^a.$$

Полученный результатъ справедливъ и при $a=0$. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая въ послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, только положительные или только отрицательные члены, мы можемъ примѣнить предыдущія разсужденія и получаемъ, что искомый предѣлъ равенъ $e^0 = 1$. А для тѣхъ членовъ нашей послѣдовательности, которые равны нулю, если таковые имѣются, разсматриваемое число само равно 1.

159. Положимъ, что предѣлъ a_n существуетъ и равенъ a. Чему равенъ предѣлъ $n(\sqrt[n]{a_n}-1)$? $(a_n > 0)$. Полагая

$$b_n = n(\sqrt[n]{a_n}-1),$$

находимъ

$$a_n = \left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n.$$

Когда n стремится къ $\pm\infty$, то, переходя къ предѣламъ, получимъ $a = e^b$, т. е. $b = \log a$, при чемъ символъ log здѣсь и во всей книгѣ дальше обозначаетъ такъ называемый натуральный или Неперовъ логарнѳмъ *),

*) По имени изобрѣтателя логариѳмовъ Непера (Napir).

т. е. логариѳмъ, взятый по той системѣ, основаніе которой есть число e. Замѣтимъ еще, что $\lim b_n$ существуетъ (§ 138, a), если существуетъ $\lim a_n$. Итакъ,

$$\lim n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right)=\log a.$$

160. Разсмотримъ число

$$l_n=\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n,$$

которое при $n=1$ равно среднему ариѳметическому чиселъ a и b, при $n=2$ совпадаетъ съ среднимъ ариѳметическимъ средняго ариѳметическаго и средняго геометрическаго чиселъ a и b. Легко показать, что при безпредѣльномъ возрастаніи n число l_n стремится къ предѣлу, равному среднему геометрическому $\sqrt{ab}$. Дѣйствительно, напишемъ l_n въ видѣ

$$l_n=\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}+1\right)^n.$$

Положимъ затѣмъ

$$c_n=\tfrac{1}{2}\left\{n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)+n\left(\sqrt[n]{b}-1\right)\right\}.$$

Тогда $l_n=\left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n$. Замѣтимъ теперь, что (§ 159)

$$c=\lim c_n=\tfrac{1}{2}(\log a+\log b)=\log\sqrt{ab}$$

Слѣдовательно (§ 158), $l=e^c=\sqrt{ab}$. Итакъ, при безпредѣльномъ возрастаніи n имѣемъ

$$\lim\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}.$$

161. Предѣлъ $\sqrt[n]{n}$ при безконечномъ n прямо получается (§ 142, b) изъ того, что

$$\lim\sqrt[n]{n}=\lim\frac{n+1}{n}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Къ тому же результату придемъ, если покажемъ, что логариѳмъ $\sqrt[n]{n}$ стремится къ нулю. А къ этому приводитъ теорема IV, въ силу которой

$$\lim\frac{\log n}{n}=\lim\left\{\log(n+1)-\log n\right\}=\lim\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=0.$$

Общѣе, если p сколь угодно большое число, то отношеніе $(\log n)^p$ къ n имѣетъ предѣломъ нуль, откуда, возвышая это отношеніе въ степень $q=\frac{1}{p}$, выводимъ, что отношеніе $\log n$ къ n^q, какъ бы мало ни было положительное число q, всегда имѣетъ предѣломъ нуль. Эти теоремы мы установимъ въ болѣе общемъ видѣ въ одномъ изъ ближайшихъ параграфовъ.

162. Разсмотримъ послѣдовательность чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$, постоянно и безпредѣльно возрастающихъ, и положимъ

$$\lim n(a_n - a_{n-1}) = l. \tag{13}$$

На основаніи сказаннаго въ § 152 предположеніе $l \neq 0$ исключаетъ возможность существованія конечнаго предѣла для a_n. Но можно утверждать и нѣчто большее, а именно, что равенство (13) при $l \neq 0$, заключаетъ въ себѣ утвержденіе, что a_n стремится къ $\pm\infty$. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы IV, имѣемъ

$$\lim \frac{a_n}{\log n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{\log n - \log(n-1)} = \lim \frac{n(a_n - a_{n-1})}{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}} = l.$$

Поэтому, если $l > 0$, и α призвольное положительное число, меньшее l, то, начиная съ нѣкотораго значенія n, будемъ имѣть $a_n > \alpha \log n$, откуда $\lim a_n = \infty$. Такимъ же образомъ увидимъ, что при $l < 0$ $\lim a_n = -\infty$. То же самое можно получить и иначе, выражая, что среднее ариѳметическое n первыхъ значеній числа $n(a_n - a_{n-1})$ (§ 152) должно стремиться къ предѣлу l:

$$\lim\left(a_n - \frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{n}\right) = l.$$

Если бы a_n стремилось къ конечному предѣлу, то l было бы равно 0. Слѣдовательно, если $l \neq 0$, то a_n, постоянно возрастая или постоянно убывая при безпредѣльномъ возрастаніи n, смотря потому будетъ ли $l > 0$ или $l < 0$, стремится въ первомъ случаѣ къ $+\infty$, а во второмъ къ $(-\infty)$.

163. Основываясь на предыдущемъ, покажемъ, что, какъ бы велико ни было число p, отношеніе $\frac{a_n^p}{n}$ всегда имѣетъ предѣломъ 0 *). Замѣтимъ прежде всего, что

$$\lim \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim\left(1 - \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}\right) = 1;$$

поэтому, при p — цѣломъ

$$\lim \frac{a_n^p - a_{n-1}^p}{(a_n - a_{n-1})\, a_n^{p-1}} = \lim\left\{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{p-1}\right\} = p.$$

Теперь теорема IV дастъ

$$\lim \frac{a_n^p}{n} = \lim(a_n^p - a_{n-1}^p) = p \lim(a_n - a_{n-1})\, a_n^{p-1} = pl \cdot \lim \frac{a_n^{p-1}}{n}.$$

Примѣняя полученный результатъ нѣсколько разъ, находимъ

$$\lim \frac{a_n^p}{n} = pl \cdot \lim \frac{a_n^{p-1}}{n} = p(p-1)\, l^2 \cdot \lim \frac{a_n^{p-2}}{n} = \cdots = p!\, l^p \cdot \lim \frac{1}{n} = 0.$$

*) При условіи, что l (формула 13) число конечное.

Ясно, что найденный результатъ будетъ справедливъ и при p не цѣломъ, потому что тогда можно замѣнить p цѣлымъ числомъ $p' > p$ и замѣтить, что $a_n^p < a_n^{p'}$, если выберемъ n достаточно большимъ для того, чтобы a_n было больше 1. Наконецъ, какъ бы мало ни было число q, взявъ $p = \frac{1}{q}$, получимъ (§ 148)

$$\lim \frac{a_n}{n^q} = \lim \left(\frac{a_n^p}{n}\right)^q = \left(\lim \frac{a_n^p}{n}\right)^q = 0.$$

Замѣтимъ при этомъ, что при $q = 0$ лѣвая часть есть ∞ *).

164. Найти предѣлъ $\frac{1}{n}\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, при безконечномъ n. Полагая

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

получаемъ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

отсюда

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Поэтому (§ 142, b)

$$\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{1}{e}.$$

165. Найти предѣлъ $\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$, при безконечномъ n. Полагая

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n},$$

найдемъ отсюда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{4n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Слѣдовательно,

$$\lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n} = \frac{4}{e}.$$

Къ тому же результату приходимъ, принимая во вниманіе тождество

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n} = \frac{4\left(\frac{1}{2n}\sqrt[2n]{(2n)!}\right)^2}{\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}}.$$

*) Доказанное въ этомъ § и составляетъ обѣщанное въ § 161 обобщеніе Результаты § 161 получаются отсюда при $a_n = \log n$, при чемъ $l = 1$.

166 *). Чтобы найти предѣлъ

$$\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

при n безконечномъ, примѣняемъ снова теорему IV и получаемъ

$$\lim\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\frac{n^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}=\lim\frac{1}{n\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}\right\}}$$

$$=\lim\frac{1}{(p+1)\left(1-\frac{p}{2n}+\cdots\right)}=\frac{1}{p+1}.$$

167. Требуется найти предѣлъ

$$\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}$$

при n безконечномъ. Приведя данное выраженіе къ общему знаменателю и примѣняя теорему IV, найдемъ

$$\lim\frac{(p+1)\,(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}}{(p+1)n^p}=\lim\frac{(p+1)\,n^p\quad[n^{p+1}-(n-1)^{p+1}]}{(p+1)\quad[n^p-(n-1)^p]}$$

Правая часть имѣетъ такое же значеніе, какъ и выраженіе

$$\lim\frac{n^p-\left(n^p-\frac{1}{2}pn^{p-1}+\cdots\right)}{pn^{p-1}-\frac{1}{2}p(p-1)n^{p-2}+\cdots}=\lim\frac{\frac{1}{2}-\frac{p-1}{6n}+\cdots}{1-\frac{p-1}{2n}+\cdots}=\frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно,

$$\lim\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\text{**)}$$

168. Требуется найти предѣлъ выраженія

$$\frac{n}{p-1}-\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^p+\left(\frac{n}{n+2}\right)^p+\left(\frac{n}{n+3}\right)^p+\cdots\right\}.$$

при n безконечномъ. Выраженіе въ скобкахъ состоитъ изъ безконечнаго числа членовъ и мы еще не знаемъ, какой оно имѣетъ смыслъ. Но скоро увидимъ (см. теорію рядовъ, § 179 и слѣдующіе), что это выраженіе изображаетъ при $p>1$ вполнѣ опредѣленное число, измѣняющееся при измѣ-

---

*) Въ §§ 166–168 число p считается цѣлымъ и положительнымъ. Предполагается извѣстною формула бинома Ньютона для цѣлаго положительнаго показателя.

**) Въ этомъ примѣрѣ, какъ и въ предыдущемъ и слѣдующемъ, примѣняется разложеніе двучлена по формулѣ бинома Ньютона, при чемъ выписываются только два или три члена; всѣ остальные въ предѣлѣ обращаются въ нуль.

неніи n и, кромѣ того, мы увидимъ, что это число по раздѣленіи на множителя n^p стремится къ нулю при возрастаніи n до безконечности. Поэтому, обозначая черезъ l_n все предложенное выраженіе, мы можемъ сказать, что число

$$n^{-p} l_n = \frac{1}{(p-1)\,n^{p-1}} - \left\{ \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \frac{1}{(n+3)^p} + \cdots \right\}$$

при безконечномъ n имѣетъ предѣломъ нуль. Чтобы найти теперь предѣлъ $\lim l_n = l$, примѣняемъ теорему III и получаемъ

$$l = \lim \frac{n^{-p} l_n}{n^{-p}} = \lim \frac{n^{-p} l_n - (n+1)^{-p} l_{n+1}}{n^{-p} - (n+1)^{-p}} = \lim \frac{\frac{p-1}{n+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1} - 1\right\} - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p} - 1}$$

$$= \lim \frac{\frac{p}{2n} + \frac{p(p-2)}{6n^2} + \cdots}{\frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \cdots} = \frac{1}{2}.$$

Въ трехъ послѣднихъ параграфахъ число p, какъ уже сказано, предполагалось цѣлымъ. Но мы увидимъ, послѣ того какъ пріобрѣтемъ нѣкоторыя новыя свѣдѣнія, что это ограниченіе можно будетъ отбросить *).

Границы и предѣлы числовыхъ ансамблей.

169. Къ понятію о „предѣлѣ“ съ болѣе широкой точки зрѣнія мы придемъ, разсматривая такъ называемые ансамбли (Mengen) чиселъ, т. е. совокупности чиселъ, заданныхъ сразу, а не слѣдующихъ одно за другимъ по извѣстному закону, какъ это было въ разсматриваемыхъ до сихъ поръ послѣдовательностяхъ (Folgen) (XI). Всякая послѣдовательность чиселъ, если не обращать вниманія на порядокъ, въ которомъ они расположены, есть въ то же время нѣкоторый ансамбль, но обратно, не во всякомъ ансамблѣ можно расположить числа такъ, чтобы можно было сказать какое число непосредственно слѣдуетъ за даннымъ. Простѣйшій примѣръ ансамбля представляетъ совокупность всѣхъ чиселъ (раціональныхъ и ирраціональныхъ), лежащихъ между двумя данными a и b. Такой ансамбль называется интерваломъ (промежуткомъ) и обозначается символомъ (a, b). Числа a и b называются границами интервала и разсматриваются обыкновенно, если не указанно противоположное, какъ принадлежащія данному интервалу. Меньшее изъ чиселъ a и b

*) А именно, будетъ показано (§ 222 и § 332 d), что разложеніе степени бинома по формулѣ Ньютона при извѣстныхъ условіяхъ можетъ быть обобщено на случай дробнаго показателя. Въ §§ 166 и 167 останется только очевидное ограниченіе $p + 1 > 0$, безъ котораго вычисленія не имѣютъ смысла.

называютъ нижнею, а бо́льшее—верхнею границею интервала. Абсолютная величина разности этихъ чиселъ служитъ мѣрою величины интервала. Кромѣ конечныхъ интерваловъ, всѣ числа которыхъ лежатъ между двумя данными, могутъ встрѣчаться и безконечные, т. е. такіе, величина которыхъ можетъ быть сколь угодно большою. Напримѣръ, подъ интерваловъ (a, ∞) понимаютъ интервалъ (a, b), въ которомъ числу b можно дать сколь угодно большое значеніе. Онъ содержитъ въ себѣ всѣ числа, не меньшія a, подобно тому какъ интервалъ $(-\infty, b)$ содержитъ въ себѣ всѣ числа, не большія b. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ приходится разсматривать интервалы сколь угодно малые. Чтобы выразить, что нѣкоторое свойство имѣетъ мѣсто въ сколь угодно маломъ интервалѣ, въ которомъ нижняя (или верхняя) граница есть данное число a, говорятъ, что это свойство имѣетъ мѣсто вправо (или влѣво) отъ a, при чемъ само число a всегда исключается, и что оно имѣетъ мѣсто въ окрестности a (Umgebung), или въ смежности съ a, если оно имѣетъ мѣсто и вправо и влѣво отъ a, не исключая однако возможности того, что иногда (въ частныхъ случаяхъ) оно окажется справедливымъ лишь съ одной стороны. Иными словами, правая сторона отъ a обнимаетъ собою всѣ числа, бо́льшія a и сколь угодно къ нему близкія, лѣвая всѣ числа, меньшія a и сколь угодно къ нему близкія, а окрестность a и тѣ и другія, за исключеніемъ самого a. Если почему либо такого исключенія не хотятъ дѣлать, то надо оговорить особо, что разсматриваются правая или лѣвая сторона, или обѣ, и само число a.

170. Ансамбль называется конечнымъ, если всѣ его числа принадлежатъ конечному интервалу. Само собою разумѣется, что этотъ интервалъ (a, b) можно сдѣлать какъ угодно большимъ, увеличивая b или уменьшая a, не лишая его свойства содержать въ себѣ всѣ числа даннаго ансамбля. Но его нельзя уменьшать безпредѣльно, не нарушая этого свойства, если ансамбль не приводится къ одному единственному числу. Когда a возрастаетъ, а b убываетъ, то можетъ случиться (и, какъ увидимъ дальше, непремѣнно случится), что въ концѣ концовъ встрѣтятся два числа λ и μ со слѣдующимъ свойствомъ: Всякое число даннаго ансамбля, содержащееся въ интервалѣ (a, b) будетъ содержаться и въ интервалѣ (λ, μ), но какъ только увеличимъ λ или уменьшимъ μ какъ угодно мало, то получимъ новый интервалъ, въ которомъ уже не всѣ числа даннаго ансамбля содержатся *). Границы λ и μ этого наименьшаго интервала, содержащаго всѣ числа даннаго ансамбля, называются соотвѣтственно нижнею и верхнею границами даннаго ансамбля. (Иногда еще прибавляютъ эпитетъ: точ-

*) Т. е. найдется, по крайней мѣрѣ, одно число ансамбля вправо отъ верхней границы и, по крайней мѣрѣ, одно влѣво отъ нижней границы новаго интервала.

ныя нижняя и верхняя границы ансамбля). На основаніи выше сказаннаго, мы можемъ установить слѣдующія опредѣленія: Нижняя граница ансамбля есть наибольшее изъ чиселъ, не превосходящихъ ни одного числа даннаго ансамбля. Верхняя граница ансамбля есть наименьшее изъ чиселъ, которыхъ не превосходитъ ни одно число даннаго ансамбля. (XII). Нижняя и верхняя граница ансамбля не всегда принадлежатъ данному ансамблю (т. е. не равны какимъ нибудь числамъ этого ансамбля). Но если которая нибудь изъ этихъ границъ принадлежитъ ансамблю, то она, очевидно, будетъ наименьшимъ или наибольшимъ числомъ въ ансамблѣ. Обратно, если въ ансамблѣ есть наименьшее или наибольшее число, то оно необходимо будетъ соотвѣтственно нижнею или верхнею его границею. Напримѣръ, послѣдовательность постоянно возрастающихъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$, стремящихся къ предѣлу a, имѣетъ нижнюю границу a_1, верхнюю a; но въ то время какъ a_1 есть наименьшее число даннаго ансамбля, a не будетъ наибольшимъ его числомъ, потому что, при всякомъ n, $a_n < a$, и a вовсе къ ансамблю не принадлежитъ; оно будетъ лишь верхнею его границею, потому что каково бы ни было число $a' < a$, при достаточно большомъ n, всегда a_n будетъ больше a', откуда и видно, что a есть наименьшее изъ всѣхъ чиселъ, которыхъ не превосходитъ ни одно число даннаго ансамбля. Напротивъ, во всякой послѣдовательности чиселъ, которыя стремятся къ конечному предѣлу, колеблясь около него, т. е. переходя съ одной его стороны на другую, всегда есть и наименьшее и наибольшее число. Другой примѣръ представляетъ нижній (или верхній) классъ ирраціональнаго числа a. Это ансамбль раціональныхъ чиселъ, между которыми по опредѣленію числа a (§ 103) нѣтъ наибольшаго (наименьшаго), и именно поэтому число a есть верхняя (нижняя) граница этого ансамбля (§ 112).

171. Лемма. Всякій критерій, дающій возможность разложить совокупность всѣхъ чиселъ *) на два класса, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что всякое число одного класса меньше всякаго числа другого класса, опредѣляетъ число, которое будетъ либо наибольшимъ въ нижнемъ классѣ, либо наименьшимъ въ верхнемъ.

Чтобы это доказать, возьмемъ нѣкоторое число a въ нижнемъ и нѣкоторое число b въ верхнемъ классѣ и числомъ $c = \frac{1}{2}(a+b)$ раздѣлимъ интервалъ (a, b) на два. Если c будетъ принадлежать нижнему классу, то выберемъ изъ этихъ двухъ интервалъ (c, b), а если c принадлежитъ верхнему классу, то выберемъ интервалъ (a, c). Новый выбранный нами интервалъ обозначимъ черезъ (a_1, b_1); въ первомъ случаѣ $a_1 = c > a$, $b_1 = b$, во второмъ $a_1 = a$, $b_1 = c < b$. Въ обоихъ случаяхъ

$$a_1 \geq a, \; b_1 \leq b, \; b_1 - a_1 = \tfrac{1}{2}(b-a).$$

*) Какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ.

Такимъ же образомъ, какимъ изъ интервала (a, b) получили интервалъ (a_1, b_1), мы можемъ изъ второго получить третій (a_2, b_2), изъ третьяго четвертый (a_3, b_3) и т. д. Въ концѣ концовъ дойдемъ до интервала (a_n, b_n), который, какъ бы велико n ни было, будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ, какъ первоначальный, а именно нижняя его граница будетъ принадлежать нижнему классу, а верхняя верхнему. Въ то же время будемъ имѣть

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots, \quad b \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

откуда видно, что числа a_n, оставаясь $< b$, постоянно вырастаютъ или, по крайней мѣрѣ, не убываютъ. Слѣдовательно, они стремятся къ нѣкоторому конечному предѣлу ξ (§ 36), къ которому стремятся и числа b_n, потому что

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0, \quad \lim b_n = \lim a_n + \lim (b_n - a_n) = \xi;$$

это число ξ и опредѣляется данными двумя классами. Выбравъ по произволу число $x < \xi$, можно всегда найти достаточно большое значеніе n, чтобы a_n было больше x, потому что $\lim a_n = \xi$, а тогда x будетъ принадлежать, какъ и a_n, нижнему классу. Такимъ же образомъ покажемъ, что всякое число $x > \xi$ будетъ принадлежать верхнему классу. Но самое число ξ необходимо должно принадлежать тому или другому классу, потому что мы предположили что наша классификація распространяется на всѣ числа. Далѣе ясно, что въ томъ классѣ, которому принадлежитъ ξ, оно будетъ наибольшимъ или наименьшимъ, потому что какъ бы мало мы его ни увеличили въ первомъ случаѣ или уменьшили во второмъ, оно тотчасъ переходитъ въ другой классъ*).

172. Теорема I. Всякій конечный ансамбль имѣетъ нижнюю и верхнюю границу.

Отнесемъ къ одному классу, который назовемъ нижнимъ, всѣ числа, не превосходящія ни одного числа даннаго ансамбля, а въ другой всѣ числа, которыя превосходятъ какое нибудь число даннаго ансамбля. Всякое число a нижняго класса будетъ меньше любого числа b верхняго класса. Дѣйствительно, когда мы говоримъ, что b принадлежитъ верхнему классу, то это значитъ, что существуетъ въ данномъ ансамблѣ, по крайней мѣрѣ, одно число a, меньшее a; съ другой же стороны a не можетъ превзойти a, такъ что $a \leqq a < b$. Подобная классификація всѣхъ чиселъ, по доказанной леммѣ, опредѣляетъ нѣкоторое число λ. Въ верхнемъ классѣ не можетъ быть наименьшаго числа b, потому что всякое число b',

*) Изъ этой леммы слѣдуетъ, что „сѣченія“ въ области ирраціональныхъ чиселъ не могутъ давать новаго обобщенія понятія о числѣ, а даютъ опять прежнія числа. См. Веберъ и Вельштейнъ, l. c. T. I. стр. 81.

лежащее между a и b, $(a < b' < b)$, принадлежитъ тому же классу. Слѣдовательно, λ есть наибольшее число нижняго класса, т. е. наибольшее изъ чиселъ, не превосходящихъ ни одного числа даннаго ансамбля. Это и есть нижняя граница его, по опредѣленію (§ 170). Аналогичнымъ образомъ доказывается существованіе верхней границы ансамбля.

173. Распространеніе понятія о предѣлѣ. Если нѣкоторый ансамбль представляетъ собою послѣдовательность безконечно большого числа чиселъ, имѣющую конечный предѣлъ, то этотъ предѣлъ, очевидно, характеризуется тѣмъ, что въ его окрестности находится безконечное число чиселъ даннаго ансамбля. Это наводитъ на мысль и вообще назвать предѣломъ какого угодно ансамбля всякое число, обладающее вышеуказаннымъ свойствомъ*). Послѣдовательности чиселъ, стремящихся къ конечному предѣлу, представятъ тогда особый родъ ансамблей, имѣющихъ одинъ только предѣлъ. Вообще же ансамбль можетъ имѣть нѣсколько и даже безконечное число предѣловъ (точекъ сгущенія). Можетъ даже случиться, что всѣ его числа и еще другія, ему не принадлежащія, будутъ его предѣлами (въ обобщенномъ смыслѣ слова). Простымъ примѣромъ служитъ ансамбль всѣхъ раціональныхъ чиселъ, такъ какъ въ окрестности любого раціональнаго или ирраціональнаго числа всегда находится безчисленное множество раціональныхъ чиселъ. Замѣтимъ, что если справа (слѣва) отъ нѣкотораго предѣла ξ лежитъ безконечное число чиселъ ансамбля, то ξ есть нижняя (верхняя) граница тѣхъ чиселъ ансамбля, которыя больше (меньше) ξ. Обратно, нижняя и верхняя граница ансамбля, когда онѣ къ нему не принадлежатъ, будутъ очевидно его предѣлами.

174. Теорема II. Всякій конечный ансамбль, содержащій въ себѣ безконечное число чиселъ, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ предѣлъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если раздѣлимъ пополамъ, какъ въ § 171, интервалъ (a, b), содержащій въ себѣ всѣ числа даннаго ансамбля, то, по крайней мѣрѣ, въ одной изъ частей должно содержаться безконечное число чиселъ ансамбля. Такой интервалъ, вдвое меньшій даннаго, обозначимъ черезъ $(a_1\ b_1)$; изъ него подобнымъ же образомъ выдѣлимъ послѣдовательность убывающихъ по величинѣ интерваловъ (a_n, b_n), границы которыхъ, какъ мы видѣли, будутъ стремиться къ нѣкоторому общему предѣлу ξ, и которые не перестаютъ содержать въ себѣ безконечное число чиселъ даннаго ансамбля. Назначивъ по произволу положительное число h, какъ

*) Эти „предѣлы" ансамбля суть не что иное, какъ такъ называемыя точки сгущенія (по Вейерштрассу). См. Г. Ковалевскій, „Введеніе въ исчисленіе безконечно малыхъ" (Одесса, 1909), стр. 12, или его „Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій" (Одесса, 1911), стр. 12. Обѣ книги переведены подъ ред. прив.-доц. С. О. Шатуновскаго.

угодно малое, всегда можемъ найти такое значеніе n, при которомъ $a_n > \xi - h$ и $b_n < \xi + h$. Интервалъ $(\xi - h, \xi + h)$ будетъ заключать въ себѣ интервалъ (a_n, b_n) и подобно послѣднему содержать въ себѣ безконечное число чиселъ даннаго ансамбля, какъ бы мало h ни было. Слѣдовательно, ξ будетъ предѣломъ ансамбля.

175. Теорема III. Всякій конечный ансамбль, содержащій въ себѣ безконечное число чиселъ, имѣетъ наибольшій и наименьшій изъ предѣловъ*).

Предѣлы ансамбля, содержащагося въ интервалѣ (λ, μ) и не содержащагося ни въ какомъ интервалѣ, меньшемъ (λ, μ), сами составляютъ конечный ансамбль и имѣютъ, слѣдовательно, нижнюю границу $\lambda_0 \geq \lambda$ и верхнюю $\mu_0 \leqq \mu$. Чтобы доказать теорему, достаточно показать, что λ_0 и μ_0 сами будутъ предѣлами ансамбля, т. е. будутъ принадлежать тому ансамблю, нижнюю и верхнюю границу котораго они составляютъ: λ_0 будетъ тогда наименьшій, и μ_0 — наибольшій изъ предѣловъ. Относительно λ_0 это будетъ доказано, если удастся найти число $x > \lambda_0$, столь близкое къ λ_0, что въ интервалѣ (λ_0, x) по исключеніи изъ него нижней границы не будетъ заключаться ни одного предѣла ансамбля**). Если же такого числа x найти нельзя, то это значитъ, что въ интервалѣ (λ_0, x), какъ бы близко x ни подходило къ λ_0, находится по крайней мѣрѣ одинъ изъ предѣловъ даннаго ансамбля, а съ нимъ, и безконечное число чиселъ этого ансамбля (лежащихъ въ окрестности этого предѣла). Слѣдовательно, λ_0 будетъ также предѣломъ ансамбля. Аналогично этому то же самое доказывается о числѣ μ_0.

176. Чтобы показать, насколько бо́льшая общность понятій способствуетъ сокращенію доказательствъ и уясненію истинъ, покажемъ, какимъ образомъ изъ теоремы II непосредственно вытекаетъ лемма, доказанная въ § 137. Если числовой ансамбль $a_1, a_2, a_3, \ldots$ не ограниченъ справа или слѣва, то, конечно, изъ него можно выдѣлить послѣдовательность, стремящуюся къ ∞ или $-\infty$. Если же ансамбль конечный, то существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно число ξ, въ окрестности котораго содержится безконечное число чиселъ ансамбля. Если всѣ эти числа лежатъ, напримѣръ, справа отъ ξ, то, начавъ съ нѣкотораго $a_r > \xi$, можемъ найти другое $a_s < a_r$, затѣмъ третье $a_t < a_s$ и т. д. до безконечности. Получится убыва-

---

*) Понятіе и названіе наибольшаго изъ предѣловъ принадлежитъ Коши. См. Гурса, „Курсъ математическаго Анализа", перев. подъ ред. Б. Млодзѣевскаго. 1911. стр. 595. Т. I.

**) Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ λ_0 нижняя граница ансамбля предѣловъ, то въ интервалѣ (λ_0, x) долженъ находиться хотя бы одинъ предѣлъ; а если въ (λ_0, x) по исключеніи λ_0, такового не оказывается, то этотъ предѣлъ и будетъ само число λ_0.

ющая послѣдовательность чиселъ, бо́льшихъ ξ, очевидно, стремящаяся къ конечному предѣлу. Впрочемъ, послѣ изложеннаго въ §§ 172—175, лемма § 137 уже становится не нужною для доказательства теоремы § 139. А именно, принимая во вниманіе, что совпаденіе наибольшаго изъ предѣловъ съ наименьшимъ, очевидно, необходимы и достаточно для существованія единственнаго предѣла ансамбля, легко вывести необходимое и достаточное условіе того, чтобы числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ стремились къ опредѣленному конечному предѣлу. Въ самомъ дѣлѣ, если при произвольно заданномъ сколь угодно маломъ ε возможно найти такое число ν, что при всякихъ n' и n'', бо́льшихъ ν, $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$, то всѣ числа $a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots$, будутъ лежать въ интервалѣ $(a_{\nu+1} - \varepsilon,\ a_{\nu+1} + \varepsilon)$. Слѣдовательно, только въ этомъ интервалѣ можетъ находиться предѣлъ ξ даннаго ансамбля, и таковой дѣйствительно тамъ найдется, на основаніи теоремы (II) § 174. Другого же предѣла ξ' существовать не можетъ, потому что, если два числа ξ и ξ' лежатъ въ интервалѣ $(a_{\nu+1} - \varepsilon,\ a_{\nu+1} + \varepsilon)$, то $2\varepsilon > |\xi - \xi'|$, и число ε нельзя было бы выбрать такъ, чтобы ε было меньше $\frac{1}{2}|\xi - \xi'|$, вопреки предположенію *).

177. Въ нѣкоторыхъ вопросахъ число λ_0 и μ_0 играютъ даже болѣе важную роль, чѣмъ λ и μ. Они не мѣняются, чего вообще нельзя сказать о λ и μ, когда изъ даннаго ансамбля выключимъ одно или нѣсколько чиселъ (конечное число чиселъ), потому что такое выключеніе не мѣняетъ ни одного изъ предѣловъ ансамбля. Если λ_0 не равно λ, то въ интервалѣ (λ, x) при $x < \lambda_0$ не можетъ находиться безконечное множество чиселъ даннаго ансамбля (иначе λ_0 не былъ бы наименьшимъ изъ предѣловъ), а при $x > \lambda_0$, въ интервалѣ (λ, x), наоборотъ, навѣрно будетъ безконечное множество такихъ чиселъ. Аналогичное замѣчаніе относится и къ μ_0. Слѣдовательно, λ_0 и μ_0 будутъ соотвѣтственно верхнею и нижнею границею всѣхъ чиселъ x, для которыхъ въ интервалахъ (λ, x) или (x, μ) не заключается безконечное множество чиселъ даннаго ансамбля. Этимъ, однако, не исключается возможность такого случая, въ которомъ и внѣ интервала (λ_0, μ_0), т. е. влѣво отъ λ_0 и вправо отъ μ_0 все еще находится безконечное множество чиселъ даннаго ансамбля. Вѣдь λ_0, напримѣръ, можетъ не принадлежать къ ансамблю тѣхъ чиселъ x, верхнею границею котораго оно служитъ.

178. Чтобы представить предыдущія соображенія еще въ болѣе ясномъ свѣтѣ, вообразимъ себѣ, что изъ послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ограниченной снизу и сверху, выключены первые n членовъ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Оставшаяся послѣдовательность $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ всегда имѣетъ нижнюю границу $\lambda_n \geqq \lambda_{n-1}$

*) Здѣсь доказана только достаточность условія; но необходимость его уже была доказана въ § 139 независимо отъ леммы § 137.

и верхнюю границу $\mu_n \leqq \mu_{n-1}$ *). Числа λ, λ_1, λ_2, ..., не убывающія, но очевидно, меньшія μ, стремятся къ нѣкоторому предѣлу $\lambda_0 \leqq \mu$; числа μ, μ_1, μ_2, ..., не возрастающія и большія λ, также стремятся къ нѣкоторому предѣлу $\mu_0 \geqq \lambda$. Легко убѣдиться, что эти два предѣла совпадаютъ съ числами λ_0 и μ_0, опредѣленными выше. Они характеризуются слѣдующими свойствами:

a) Всѣ числа данной послѣдовательности, начиная съ нѣкотораго мѣста, будутъ больше любого числа, которое меньше λ_0, и меньше любого числа, которое больше μ_0.

b) Какъ бы далеко мы ни подвинулись въ нашей послѣдовательности, всегда еще встрѣтятся числа и меньшія и большія любого числа, лежащаго между λ_0 и μ_0.

На основаніи перваго свойства, лѣвая сторона наименьшаго и правая сторона наибольшаго изъ предѣловъ имѣютъ совершенно тотъ же характеръ, какъ лѣвая и правая сторона единственнаго предѣла, если таковой существуетъ, и можно поэтому сказать, что числа данной послѣдовательности колеблются около нѣкотораго интервала (λ_0, μ_0), который въ исключительныхъ случаяхъ можетъ свестись къ одному единственному числу. Если же такого числа, т. е. единственнаго предѣла, не существуетъ, то невозможно при произвольно заданномъ положительномъ числѣ ε найти такое число ν, чтобы $|a_{n'} - a_{n''}|$ было меньше ε, для всякихъ n' и n'', большихъ ν. Дѣйствительно, на основаніи второго свойства, при $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$ всегда найдутся достаточно большія значенія n' и n'', для которыхъ $|a_{n'} - a_{n''}| > \varepsilon$, стоитъ только взять

$$a_{n'} < \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon), \quad a_{n''} > \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon),$$

что всегда возможно **) (XIII).

ТЕОРІЯ РЯДОВЪ.

Основныя опредѣленія и примѣры.

179. Одно изъ главнѣйшихъ приложеній теоріи предѣловъ состоитъ въ томъ, чтобы изслѣдовать какой смыслъ можетъ имѣть выраженіе $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$, содержащее безчисленное множество чиселъ и называемое безконечнымъ рядомъ, и въ какой мѣрѣ

---

*) Границы части послѣдовательности не могутъ быть шире границъ цѣлой послѣдовательности.

**) На основаніи свойства b), замѣчая, что при $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$, $\frac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon)$ и $\frac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon)$ лежатъ между λ_0 и μ_0.

возможно приложить къ такому выраженію извѣстныя свойства суммъ, состоящихъ изъ конечнаго числа слагаемыхъ. Мы будемъ обозначать черезъ S_n сумму n первыхъ членовъ ряда. При безпредѣльномъ возрастаніи n S_n можетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу, а можетъ и не стремиться ни къ какому предѣлу. Въ первомъ случаѣ рядъ называется сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ ли предѣлъ S_n конечнымъ или безконечнымъ; во второмъ — рядъ называется неопредѣленнымъ. Замѣтимъ здѣсь же, что неопредѣленный рядъ, посредствомъ извѣстной группировки членовъ, всегда можетъ быть преобразованъ такъ, чтобы онъ сдѣлался сходящимся или расходящимся. Дѣйствительно, намъ извѣстно, что (§ 137) всегда можно указать такую послѣдовательность возрастающихъ чиселъ $r, s, t, \ldots$, что S_n будетъ стремиться къ конечному или безконечному предѣлу, когда будемъ давать числу n послѣдовательно значенія $r, s, t, \ldots$ Иными словами, рядъ

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_r) + (u_{r+1} + \cdots + u_s) + (u_{s+1} + \cdots + u_t) + \cdots,$$

въ которомъ сумма членовъ въ каждой скобкѣ разсматривается какъ одинъ членъ, будетъ сходящимся или расходящимся. Уже это одно обстоятельство показываетъ, что сложеніе безконечнаго числа слагаемыхъ не подчиняется такъ называемому сочетательному закону, а дальше мы увидимъ, что и перемѣстительный законъ не всегда имѣетъ мѣсто *). Обратно, важно замѣтить, что нельзя разлагать члены сходящагося или расходящагося ряда на части. Такое разложеніе можетъ обратить данный рядъ въ неопредѣленный.

180. Если рядъ сходящійся, то предѣлъ S, къ которому стремится S_n при безконечномъ n, называютъ суммою ряда, при чемъ условились писать

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots.$$

Разность $R_n = S - S_n$, стремящаяся къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи n, называется остаткомъ. Очевидно R_n обозначаетъ то, что останется отъ суммы даннаго ряда, когда откинемъ въ немъ первые n членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если въ равенствѣ

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$$

будемъ увеличивать p безпредѣльно, сохраняя за n постоянное значеніе, то лѣвая часть будетъ стремиться къ предѣлу $S - S_n$, т. е. къ R_n, и поэтому можно писать

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

---

*) См. Веберъ и Вельштейнъ, l. c. стр. 24.

181. Важно замѣтить, что рядъ съ одними положительными членами неопредѣленнымъ быть не можетъ. Дѣйствительно, такъ какъ

$$S_n = S_{n-1} + u_n > S_{n-1},$$

то ясно, что S_n постоянно возрастаетъ при возрастаніи n, а слѣдовательно, стремится къ конечному или безконечному предѣлу, т. е. рядъ будетъ сходящійся или расходящійся. То же самое справедливо для рядовъ съ одними отрицательными членами. Всякій неопредѣленный рядъ поэтому необходимо содержитъ въ себѣ безконечное число положительныхъ и безконечное число отрицательныхъ членовъ.

182. Примѣры. Геометрическая прогрессія $1+x+x^2+x^3+\cdots$ даетъ примѣры сходящагося, расходящагося и неопредѣленнаго ряда. Если $|x|<1$, то (§ 146) x^n стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи n. Если $x>1$, то x^n возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n. Если $x<-1$, то x^n по абсолютной величинѣ возрастаетъ безпредѣльно, но будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, будетъ ли n число четное или нечетное. Замѣчая еще, что

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x},$$

тотчасъ видимъ, что данный рядъ расходящійся при $x>1$, сходящійся при $-1<x<+1$ и неопредѣленный при $x<-1$. Въ частныхъ случаяхъ при $x=1$ и $x=-1$, получаемъ ряды

$$1+1+1+1+\cdots, \quad 1-1+1-1+\cdots,$$

изъ которыхъ первый, очевидно, расходящійся ($S_n = n$). Второй же неопредѣленный, потому что S_n принимаетъ попеременно значенія 1 и 0, смотря по тому, будетъ ли n нечетное или четное. Резюмируя, можемъ сказать, что данный рядъ будетъ сходящимся только тогда, когда x лежитъ въ интервалѣ $(-1, +1)$, не совпадая съ его границами. На этомъ основаніи означенный интервалъ называютъ интерваломъ сходимости даннаго ряда. Мы разсмотримъ теперь другіе примѣры сходящихся и расходящихся рядовъ, которые будутъ намъ полезны для дальнѣйшаго.

183. Гармоническій рядъ. Между расходящимися рядами замѣчателенъ такъ называемый гармоническій рядъ

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots.$$

Сумма первыхъ n членовъ обыкновенно обозначаютъ черезъ H_n. Достаточно замѣтить тождество $n(H_n - H_{n-1}) = 1$, чтобы сказать (§ 162), что H_n возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n; къ

этому можно добавить, что гармоническій рядъ слабо расходящійся, потому что H_n возрастаетъ до ∞, какъ натуральный логариѳмъ n, т. е. весьма медленно по сравненію съ n (XIV). Расходимость можно еще установить также тѣмъ, что (§ 156) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ предѣлу e постоянно возрастая, такъ что будемъ имѣть послѣдовательно

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \frac{1}{n} > \log\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad H_n > \log(n+1), \quad \lim H_n = \infty.$$ *)

Чтобы получить нѣчто болѣе точное, разсмотримъ числа $a_n = H_n - \log n$, очевидно положительныя. Мы вскорѣ (§ 186) увидимъ, что

$$\frac{1}{n} < -\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log\frac{n}{n-1} \quad \text{(XV)}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \log\frac{n}{n-1} < 0,$$

такъ что числа a_n, оставаясь больше 0, постоянно убываютъ, а потому и стремятся къ конечному предѣлу. Этотъ предѣлъ обыкновенно обозначаютъ буквою C и называютъ Эйлеровою постоянною. При помощи другихъ средствъ значеніе этого числа удалось опредѣлить съ большою точностью и получить

$$C = 0{,}5772156649015328\ldots$$

Замѣтимъ, между прочимъ, что можно написать

$$H_n = \log n + C + \varrho_n, \tag{1}$$

гдѣ ϱ_n стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи n.

184. Показательный рядъ. Этимъ именемъ называютъ рядъ

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

потому что его сумма равна e^x, каково бы ни было значеніе x. Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ бинома Ньютона имѣемъ

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n,$$

---

*) Изъ соотношеній $\frac{1}{n} > \log\frac{n+1}{n}$ и $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$, находимъ, что $H_n > \log\left\{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{2}{1}\right\} = \log(n+1)$.

если, для сокращенія, положимъ

$$v_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}\cdot\frac{x^r}{n^r} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\frac{x^r}{r!}.$$

Замѣтимъ, что при r постоянномъ

$$\lim_{n=\infty} v_r = \frac{x^r}{r!}.$$

Далѣе надо различать два случая. Если $x>0$, то имѣемъ

$$v_{r+\nu} = v_r\,\frac{\left(1-\frac{r}{n}\right)\left(1-\frac{r+1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r+\nu-1}{n}\right)}{(r+1)(r+2)\cdots(r+\nu)}\,x^\nu < v_r\left(\frac{x}{r+1}\right)^\nu.$$

Отсюда слѣдуетъ, полагая r не меньшимъ, чѣмъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x,

$$v_{r+1}+v_{r+2}+\cdots+v_n < v_r\left(\frac{x}{r+1}+\frac{x^2}{(r+1)^2}+\cdots\right) = \frac{xv_r}{r+1-x}.$$

Слѣдовательно,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \frac{xv_r}{r+1-x} < 1+v_1+v_2+\cdots+v_r < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

увеличивая n безпредѣльно, найдемъ

$$e^x - \frac{x^{r+1}}{r!\,(r+1-x)} < 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!} < e^x$$

и, наконецъ, увеличивая r до безконечности и припоминая (§ 147), что общій членъ даннаго ряда стремится къ 0, получаемъ

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots.$$

Если же $x<0$, то можно написать (§ 155)

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+v_1+v_2+\cdots+v_{r-1}+\theta v_r,$$

гдѣ θ лежитъ между 0 и 1, въ предположеніи, что n больше абсолютной величины x. При безпредѣльномъ возрастаніи n, правая часть окончательно принимаетъ значенія, лежащія между

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \quad \text{и} \quad 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}$$

между тѣмъ, какъ лѣвая стремится къ предѣлу e^x (§ 158). Если теперь будемъ безпредѣльно увеличивать r, то объ выше означенныя суммы, между которыми всегда заключается e^x, и разность

которыхъ стремится къ нулю, необходимо стремятся къ предѣлу, равному e^x (§ 131). Слѣдовательно, формула (2) справедлива при всякомъ значеніи x.

185. Изъ предыдущаго параграфа въ частности слѣдуетъ, что число e есть сумма безконечнаго ряда

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots.$$

Можно, очевидно, также написать

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{r!}+\frac{\theta}{r!\,r},$$

гдѣ θ лежитъ между 0 и 1, а r какъ угодно велико. Напримѣръ, $l=2+\theta$, т. е. $2<e<3$. Взявъ r достаточно большимъ, найдемъ [1])

$$e=2{,}718281828459045\ldots$$

Это число ирраціонально. Дѣйствительно, если оно было бы равно раціональной дроби p/q, то, взявъ $r=q$, получили бы изъ предыдущей формулы, по умноженіи на $q!$, равенство между цѣлымъ числомъ и числомъ θ/q, которое больше 0 и меньше 1. Такое равенство невозможно.

186. Логариѳмическій рядъ. Изслѣдованія, аналогичныя приведеннымъ въ § 184, даютъ еще одинъ интересный примѣръ сходящагося ряда. Извѣстно (§ 159), что, при безконечномъ n,

$$\lim n\left(1-(1-x)^{\frac{1}{n}}\right)=-\log(1-x).$$

Мы предположимъ, что x число положительное и меньшее единицы. Мы увидимъ впослѣдствіи (§ 222), что формула бинома Ньютона, дающая разложеніе $(1-x)^m$ по степенямъ x, справедлива и тогда, когда m не цѣлое положительное число. Принявъ это, можемъ написать

$$(1-x)^{\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{n}x+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}x^2-\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$n\left(1-(1-x)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{x^3}{3}+\cdots.$$

---

[1]) Въ „Intermédiaire des mathématiciens (t. VII. p. 53) находимъ значеніе e съ 205 десятичными знаками, вычисленное Шанксомъ (W. Shanks).

Правую часть можно написать въ видѣ $v_1+v_2+v_3+\cdots$, положивъ

$$v_r=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(r-1)n}\right)\frac{x^r}{r};$$

замѣтимъ теперь, что если r остается постояннымъ, а n возрастаетъ безпредѣльно, то v_r стремится къ предѣлу $\frac{x^r}{r}$. Въ тоже время имѣемъ

$$v_{r+\nu}=v_r\left(1-\frac{1}{rn}\right)\left(1-\frac{1}{(r+1)n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(r+\nu-1)n}\right)\frac{x^\nu}{r+\nu}<v_r x^\nu,$$

откуда слѣдуетъ

$$v_{r+1}+v_{r+2}+v_{r+3}+\cdots<v_r(x+x^2+x^3+\cdots)=\frac{xv_r}{1-x},$$

а слѣдовательно,

$$n(1-(1-x)^{\frac{1}{n}})-\frac{xv_r}{1-x}<v_1+v_2+\cdots+v_r<n(1-(1-x)^{\frac{1}{n}}).$$

Увеличивая здѣсь n безпредѣльно, не измѣняя при этомъ числа r, получаемъ

$$-\log(1-x)-\frac{x^{r+1}}{r(1-x)}<\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^r}{r}<-\log(1-x).$$

Наконецъ, при безпредѣльномъ возрастаніи r, находимъ

$$-\log(1-x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots. \tag{3}$$

Предыдущая формула выражаетъ собою то, что

$$-\log(1-x)=\lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right).$$

Замѣнивъ здѣсь x на x^2, а n на наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{n}{2}$ (XVI), и замѣтивъ, что

$$\log(1+x)=-\log(1-x)+\log(1-x^2),$$

получимъ

$$\log(1+x)=\lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\pm\frac{x^n}{n}\right),$$

т. е.

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots. \tag{4}$$

Впрочемъ, каждая изъ формулъ (3) и (4) заключаетъ въ себѣ другую (что прямо видно, если замѣнимъ x на $-x$), такъ что намъ достаточно разсмотрѣть одну изъ нихъ, и мы можемъ сказать, что онѣ справедливы для всѣхъ значеній x, лежащихъ между -1 и $+1$, при чемъ пока обѣ эти границы мы исключаемъ. Но легко видѣть, что формула (3) и при $x=-1$, а слѣдовательно (4) при $x=+1$, остаются справедливыми. Дѣйствительно, сумму $2n$ первыхъ членовъ ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ можно написать въ видѣ

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=H_{2n}-H_n.$$

Поэтому, пользуясь формулою (1), имѣемъ

$$S_{2n}=\log 2+\varrho_{2n}-\varrho_n,$$

а потому при безконечномъ n:

$\lim S_{2n}=\log 2$, $\lim S_{2n-1}=\lim\left(S_{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\log 2$, и окончательно

$$\log 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots.$$

Наоборотъ, тотчасъ видно, что ни формула (3) при $x=1$, ни (4) при $x=-1$ не имѣютъ мѣста. Мы можемъ поэтому утверждать, что интервалъ сходимости (§ 182) обоихъ рядовъ есть $(-1, +1)$, за исключеніемъ верхней границы для перваго и нижней для второго ряда.

Основныя теоремы.

187. Общій признакъ сходимости. Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сумма S_n первыхъ n членовъ ряда, при безпредѣльномъ возрастаніи n, стремилась къ конечному предѣлу. А это будетъ имѣть мѣсто тогда, когда (§ 139) каждому положительному числу ε соотвѣтствуетъ такое значеніе n, что для этого значенія и всѣхъ большихъ его, абсолютная величина разности $S_{n+p}-S_n$ будетъ меньше ε. Иными словами для сходимости ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots$ необходимо и достаточно, чтобы, задавъ по произволу положительное число ε, можно было найти такое значеніе n, начиная съ котораго, независимо отъ значенія числа p, имѣло бы мѣсто неравенство

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

Въ этомъ состоитъ общій признакъ сходимости ряда. Замѣтимъ, что увеличивая n безпредѣльно и давая числу p различныя значе-

нія, постоянныя или измѣняющіяся вмѣстѣ съ n, будемъ имѣть (на основаніи предыдущаго неравенства).

$$\lim_{n=\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p})=0$$

Въ этомъ равенствѣ содержится безконечное число условій, изъ которыхъ каждое необходимо, но ни одно, взятое отдѣльно, не достаточно для сходимости ряда.

188. Примѣчанія. a) Положивъ $p=1$, находимъ, что во всякомъ сходящемся рядѣ общій членъ (u_{n+1}) стремится къ нулю. Но рядъ можетъ и не быть сходящимся, хотя общій его членъ имѣетъ предѣломъ нуль. Примѣромъ тому служитъ гармоническій рядъ (§ 183), расходящійся, между тѣмъ какъ $\lim\frac{1}{n}=0$. Далѣе, при всякомъ данномъ (постоянномъ) p, имѣемъ

$$\lim\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right]=0.$$

(потому что при данномъ p число членовъ конечное и каждый членъ стремится къ 0). Но можно сказать еще больше этого! Если обратимъ вниманіе на то, что каждая дробь въ скобкахъ меньше $1/n$, а число ихъ p, такъ что сумма въ скобкахъ меньше p/n, то увидимъ, что она стремится къ нулю даже при безпредѣльномъ возрастаніи p, лишь бы при этомъ p/n стремилось къ нулю. А это возможно въ безчисленномъ множествѣ случаевъ, напримѣръ, когда p равно числу цифръ числа n или $[\sqrt{n}]$, т. е. наибольшему цѣлому числу, содержащемуся въ $\sqrt{n}$, и т. д. (XVII).

b) Нельзя никоимъ образомъ полагать, что если рядъ неопредѣленный, то условіе $\lim u_n=0$ не можетъ выполняться. Такъ напримѣръ [1]) рядъ, общій членъ котораго равенъ

$$u_n=\sin(\pi\sqrt{n})-\sin(\pi\sqrt{n-1}),$$

а сумма n первыхъ членовъ равна, очевидно, $\sin(\pi\sqrt{n})$, ни къ какому предѣлу не стремится, а колеблется въ интервалѣ $(-1,+1)$ между тѣмъ, какъ общій членъ его

$$u_n=\sin(\pi\sqrt{n})-\sin(\pi\sqrt{n-1})$$
$$=2\sin\frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\cos\left[\frac{\pi}{2}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\right],$$

очевидно, стремится къ 0. Такимъ же образомъ рядъ, для кото-

[1]) См. Genocchi — Peano. Calcolo differentiale стр. XVI, № 55.

раго сумма n первыхъ членовъ равна $\sin(\pi\sqrt{\log n})$, очевидно, неопредѣленный, между тѣмъ, какъ не только u_n, но даже сумма

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}$$
$$= 2\sin\frac{\frac{1}{2}\pi\log 2}{\sqrt{\log n} + \sqrt{\log 2n}}\cos\left(\frac{\pi}{2}(\sqrt{\log n} + \sqrt{\log 2n})\right)$$

стремится къ 0.

c) Въ итогѣ получается заключеніе, что, когда сумма $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$ стремится къ нулю, все еще ничего нельзя сказать о сходимости ряда, потому что для рѣшенія вопроса о сходимости нужно было бы исчерпать всѣ возможныя постоянныя и перемѣнныя (зависящія отъ n) значенія цѣлаго числа p. Но, если найдемъ, что вышеозначенная сумма при постоянномъ ли p, или при возрастающемъ вмѣстѣ съ n по какому нибудь закону значеніи p, не стремится къ нулю, то можно утверждать наверно, что рядъ не будетъ сходящимся. Напримѣръ, возвращаясь къ гармоническому ряду, разсмотримъ сумму

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n};$$

она не можетъ стремиться къ нулю, потому что состоитъ изъ n убывающихъ дробей и потому больше, чѣмъ послѣдняя изъ нихъ, умноженная на n, т. е. больше $\frac{1}{2}$. Слѣдовательно, гармоническій рядъ не сходящійся. Онъ расходящійся (§ 181), потому что всѣ его члены положительны. Вслѣдствіе невозможности съ помощью вышеуказаннаго общаго признака сходимости опредѣленно установить сходимость ряда, приходится прибѣгать къ спеціальнымъ признакамъ сходимости, надлежащее примѣненіе которыхъ дозволяетъ въ большомъ числѣ случаевъ узнать, будетъ ли данный рядъ сходящимся или нѣтъ.

189. Теорема I. Всякій сходящійся рядъ съ положительными членами остается сходящимся послѣ того, какъ умножимъ его члены на числа, не превосходящія по абсолютной величинѣ даннаго числа.

Положимъ, что абсолютныя величины чиселъ a_1, a_2, a_3, ... всѣ меньше l. Если рядъ сходящійся, то это значитъ, что каково бы ни было произвольно заданное, сколь угодно малое положительное число ε, можно найти такое значеніе числа n, начиная съ котораго, независимо отъ значенія p, имѣетъ мѣсто неравенство

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} < \frac{\varepsilon}{l}$$

Слѣдовательно, для тѣхъ же значеній n и p, имѣемъ

$$\begin{aligned} &a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}, \\ &< (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p})\, l < \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда, на основаніи общаго признака сходимости заключаемъ, что рядъ $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots$ сходящійся.

190. Слѣдствія. a) Рядъ будетъ сходящимся, если рядъ абсолютныхъ величинъ его членовъ сходящійся. Для доказательства стоитъ только въ предыдущей теоремѣ положить нѣкоторыя изъ чиселъ a равными 1, а другія равными —1. Обратная теорема несправедлива.

b) Рядъ будетъ сходящимся, если абсолютныя величины его членовъ не превосходятъ соотвѣтствующихъ членовъ другого сходящагося ряда съ положительными членами. Чтобы это доказать, достаточно положить, что числа a по абсолютной величинѣ не превосходятъ единицы.

c) Расходящійся рядъ съ положительными членами остается расходящимся послѣ того, какъ умножимъ его члены на числа, не меньшія даннаго положительнаго числа. Дѣйствительно, если бы полученный рядъ былъ сходящимся, то и данный рядъ былъ бы сходящимся по теоремѣ I. Впрочемъ, теорема сама по себѣ очевидна, потому что, если ни одно изъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ не меньше a, то, очевидно, сумма n первыхъ членовъ ряда $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots$ не меньше aS_n и возрастаетъ безпредѣльно такъ же, какъ и S_n, вмѣстѣ съ n.

191. Теорема II. Рядъ съ положительными членами будетъ сходящимся, если, начиная съ нѣкотораго мѣста, отношеніе послѣдующаго члена къ предыдущему будетъ меньше соотвѣтствующаго отношенія въ другомъ сходящемся рядѣ, и расходящимся, если вышеупомянутое отношеніе, начиная съ нѣкотораго мѣста, больше соотвѣтствующаго отношенія другого расходящагося ряда съ положительными членами.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$, слѣдуетъ, при u_n и v_n положительныхъ, какъ мы предполагаемъ, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}$, такъ что $\frac{u_n}{v_n}$, начиная съ нѣкотораго мѣста, постоянно убываетъ и потому дѣлается и остается меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа. Поэтому, если $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ рядъ сходящійся, то (§ 189) и рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ будетъ сходящійся. Напротивъ того, изъ неравенства $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ слѣдуетъ, что $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} > \frac{u_n}{v_n}$ такъ что $\frac{u_n}{v_n}$, на-

чиная съ нѣкотораго мѣста, постоянно возрастаетъ и дѣлается и остается больше нѣкотораго опредѣленнаго положительнаго числа. Поэтому, (§ 190, c) если рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ расходящійся, то и рядъ $u_1 + u_2 + u_3 \cdots$ будетъ расходящимся.

§ 192. Лемма Абеля. [1]) Если положительныя числа a_1, a_2, a_3, ... представляютъ возрастающую или убывающую послѣдовательность, и абсолютныя величины суммъ $\sigma_1 = u_{n+1}$, $\sigma_2 = u_{n+1} + u_{n+2}$, $\cdots \sigma_p = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$ всѣ меньше даннаго числа l, то абсолютная величина суммы $a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}$ будетъ меньше la_{n+1}, когда послѣдовательность a_1, a_2, a_3, ... убывающая, и меньше la_{n+p}, когда эта послѣдовательность возрастающая.

Дѣйствительно, сумму $a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}$ можно написать такъ:

$$a_{n+1}\sigma_1 + a_{n+2}(\sigma_2 - \sigma_1) + a_{n+3}(\sigma_3 - \sigma_2) + \cdots + a_{n+p}(\sigma_p - \sigma_{p-1})$$
$$= (a_{n+1} - a_{n+2})\sigma_1 + (a_{n+2} - a_{n+3})\sigma_2 + \cdots + a_{n+p}\sigma_p.$$

Если a_n постоянно убываетъ при возрастаніи n, то всѣ разности $a_{n+1} - a_{n+2}$, $a_{n+2} - a_{n+3}$, ... положительны, и потому абсолютная величина разсматриваемой суммы меньше, чѣмъ

$$\{(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}\}\, l = la_{n+1}.$$

Если, наоборотъ, a_n постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, то всѣ упомянутыя разности отрицательны и абсолютная величина разсматриваемой суммы меньше, чѣмъ

$$\{(a_{n+2} - a_{n+1}) + \cdots + (a_{n+p} - a_{n+p-1}) + a_{n+p}\}\, l < 2l\, a_{n+p}.$$

193. Теорема III. Всякій сходящійся рядъ остается сходящимся послѣ того, какъ его члены будутъ умножены на числа, которыя, слѣдуя одно за другимъ въ данномъ порядкѣ, измѣняются постоянно въ одномъ направленіи (т. е. постоянно возрастая или постоянно убывая) и остаются при этомъ по абсолютной величинѣ меньше даннаго числа [2]).

Прежде всего замѣтимъ, что числа a_n (на которыхъ умножаемъ члены даннаго ряда) необходимо стремятся къ конечному предѣлу, и потому въ концѣ концовъ сохраняютъ знакъ этого пре-

---

[1]) Abel, Oeuvres, 2-e éd. стр. 222.

[2]) Въ „Comptes rendus de l'Ac. des sc. de Paris", 24 Nov. 1890. La Maestra показалъ, что теорема остается справедливою и тогда, когда множители a_n то убываютъ, то возрастаютъ, лишь бы среднее ариѳметическое первыхъ n множителей постоянно возрастало или постоянно убывало.

дѣла. Если этотъ предѣлъ равенъ нулю, то (согласно условію), всѣ a_n будутъ положительными или всѣ отрицательными. Во всякомъ случаѣ, слѣдовательно, указателю n можно дать такое значеніе, начиная съ котораго знакъ a_n остается неизмѣннымъ. Мы можемъ считать, что это будетъ знакъ $+$, такъ какъ противоположный случай сводится къ этому посредствомъ перемѣны знака у всѣхъ a_n и у всѣхъ членовъ даннаго ряда на противоположный. Въ такомъ предположеніи, мы можемъ сказать на основаніи сходимости даннаго ряда $u_1, u_2, u_3, \ldots$, что суммы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ предыдущаго § могутъ быть сдѣланы (§ 187) по абсолютной величинѣ меньше любого положительнаго сколь угодно малаго числа, и то же самое можемъ сказать и о числѣ l, которое можно разсматривать, какъ наибольшую изъ этихъ абсолютныхъ величинъ. Если числа a_n образуютъ убывающую послѣдовательность, то можно взять $l < \varepsilon/a_1$ (гдѣ ε произвольное положительное число), и по леммѣ Абеля написать

$$|a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}| < la_{n+1} < \frac{a_{n+1}}{a_1}\varepsilon < \varepsilon.$$

Если же наоборотъ числа a_n постоянно возрастаютъ, оставаясь меньше даннаго числа a, то, положивъ $l < \varepsilon/2a$, найдемъ

$$|a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}| < 2la_{n+p} < \frac{a_{n+p}}{a}\varepsilon < \varepsilon.$$

На основаніи общаго признака сходимости мы и заключаемъ, что рядъ $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots$ сходящійся.

194. Теорема IV. Если неопредѣленный рядъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма произвольнаго числа послѣдовательныхъ его членовъ всегда остается конечною, т. е. меньшей нѣкотораго постояннаго числа, то такой рядъ обратится въ сходящійся, когда умножимъ его члены на числа, образующія убывающую послѣдовательность, и стремящуюся къ нулю.

На основаніи леммы Абеля, абсолютная величина суммы $a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}$ меньше la_{n+1}. Чтобы она была меньше ε, достаточно сдѣлать $a_{n+1} < \varepsilon/l$, а это всегда возможно, потому что по условію a_{n+1} стремится къ нулю.

195. Слѣдствіе. Если члены ряда поперемѣнно положительны и отрицательны, а абсолютныя ихъ величины постоянно убываютъ и стремятся къ нулю, то рядъ будетъ сходящійся. Эта теорема прямо вытекаетъ изъ предыдущей.

Стоитъ только принять за неопредѣленный рядъ въ § 194 рядъ $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Однако, въ виду важности настоя-

щей теоремы мы дадимъ прямое ея доказательство. Положимъ, что $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > 0$ и разсмотримъ рядъ $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$. Группируя члены слѣдующимъ образомъ

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \cdots,$$

видимъ, что суммы S_2, S_4, S_6, ... образуютъ возрастающую послѣдовательность. Группируя иначе:

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \cdots,$$

видимъ, что суммы S_1, S_3, S_5, ... постоянно убываютъ. Въ то же время замѣтимъ, что $S_n < S_{n-1} < S_1$ при n четномъ, и $S_n > S_{n-1} > S_2$ при n нечетномъ. Слѣдовательно, сумма S_{2n} постоянно возрастаетъ оставаясь меньше S_1 и стремится поэтому къ конечному предѣлу. То же самое можно сказать о суммѣ S_{2n-1}, которая постоянно убываетъ, оставаясь больше S_2. Наконецъ, предѣлъ S_{2n} равенъ предѣлу S_{2n-1}, потому что разность $S_{2n} - S_{2n-1} = -u_{2n}$ стремится къ нулю, по условію.

196. Примѣчанія. a) Если бы $\lim u_n \neq 0$, то рядъ былъ бы неопредѣленный, такъ какъ S_n при n четномъ стремилась бы къ одному предѣлу, а при n нечетномъ къ другому. Разность этихъ предѣловъ равна предѣлу u_n.

b) Если члены ряда, хотя и стремятся къ нулю, но не постоянно убываютъ, то рядъ можетъ и не быть сходящимся. Напримѣръ, рядъ

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \cdots$$

имѣетъ попеременно положительные и отрицательные члены, стремящіеся къ нулю. Однако, рядъ расходящійся, потому, что, группируя члены попарно, найдемъ, что $S_{2n} = 2H_n$ (§ 183).

c) Если въ какомъ нибудь знакоперемѣнномъ рядѣ (такъ называются ряды, о которыхъ мы говоримъ въ §§ 195 — 196) удержимъ первые n членовъ для полученія приближеннаго значенія суммы ряда S, то сдѣлаемъ погрѣшность, по абсолютной величинѣ меньшую перваго изъ отброшенныхъ членовъ. Дѣйствительно, мы видѣли, что S_n больше или меньше S_{n-1}, смотря потому, будетъ ли n нечетное или четное. Отсюда слѣдуетъ, что общій предѣлъ S всегда лежитъ между S_n и S_{n+1}, при какомъ угодно n, такъ что

$$|S - S_n| < |S_{n+1} - S_n| = \pm u_{n+1}.$$

А это можно написать такъ

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots \pm u_n \mp \vartheta u_{n+1},$$

гдѣ ϑ лежитъ между 0 и 1, каково бы ни было значеніе n.

Сравненіе рядовъ съ положительными членами.

197. О болѣе или менѣе сильной расходимости ряда съ положительными членами естественно судить на основаніи большей или меньшей быстроты, съ которою сумма первыхъ n его членовъ стремится превзойти всякую границу при безпредѣльномъ возрастаніи n. Поэтому, обозначая черезъ U_n и V_n сумму n первыхъ членовъ въ рядахъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

говорятъ, что первый рядъ слабѣе расходится, чѣмъ второй, если отношеніе U_n къ V_n стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи n. Если, наоборотъ, это отношеніе безпредѣльно возрастаетъ, то первый рядъ сильнѣе расходится, чѣмъ второй. Замѣтимъ, что на основаніи такого опредѣленія, къ числу рядовъ, расходящихся слабѣе даннаго, можно отнести всѣ сходящіеся ряды.

198. Сходимость ряда тѣмъ сильнѣе, чѣмъ быстрѣе остатокъ ряда (§ 180) стремится къ нулю. Если α_n и β_n обозначаютъ остатки сходящихся рядовъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

то говорятъ, что первый рядъ сходится сильнѣе или слабѣе второго смотря потому, стремится ли отношеніе α_n къ β_n къ нулю или возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ возрастаніемъ n.

199. Теорема I. Если отношеніе общихъ членовъ двухъ рядовъ съ положительными членами стремится къ нулю, то первый рядъ слабѣе расходится или сильнѣе сходится, чѣмъ второй.

Положимъ, что предѣлъ отношенія u_n/v_n равенъ нулю и что рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ расходящійся. Замѣчая, что V_n возрастаетъ безпредѣльно, на основаніи извѣстной теоремы (§ 141) имѣемъ

$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \lim \frac{U_n - U_{n-1}}{V_n - V_{n-1}} = \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Первый рядъ, слѣдовательно, слабѣе расходится, чѣмъ второй, причемъ не исключается возможность первому ряду быть сходящимся. Если, далѣе, рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ сходящійся, то и рядъ $u_1 + u_2 + u_2 + \cdots$ сходящійся, (§ 189) потому что отношеніе $\frac{u_n}{v_n}$,

стремясь, по предположенію, къ нулю, остается конечнымъ. Кромѣ того, замѣчая, что α_n и β_n стремятся къ нулю, постоянно убывая, имѣемъ (§ 140)

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\beta_n - \beta_{n+1}} = \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Поэтому рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ сильнѣе сходится, чѣмъ рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$

200. Примѣчанія. a) Мы видѣли, что общій членъ сходящагося ряда (§ 188, a) необходимо стремится къ нулю, но обратнаго заключенія сдѣлать нельзя. Теперь мы можемъ утверждать, что всякій рядъ съ положительными членами, имѣющими предѣломъ нуль, будетъ либо сходящійся, либо слабѣе расходящійся, чѣмъ рядъ $1 + 1 + 1 + \cdots$

b) Понятно, что если рядъ при передвиженіи его на одинъ членъ впередъ, даетъ сильнѣе сходящійся рядъ *), то можно его считать весьма сильно сходящимся. Изъ доказанной теоремы вытекаетъ, что такое обстоятельство будемъ имѣть мѣсто тогда, когда отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ нулю. Вслѣдствіе этого, въ приложеніяхъ теоріи рядовъ, стараются преобразовывать сходящіеся ряды такъ, чтобы это условіе выполнялось.

201. Теорема II. Если данъ нѣкоторый рядъ съ положительными членами, то всегда можно построить другой, слабѣе сходящійся или слабѣе расходящійся рядъ.

a) Пусть $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ будетъ данный рядъ, который предположимъ сходящимся. Сохраняя обозначенія предыдущихъ §§, положимъ

$$v_1 = \sqrt{U} - \sqrt{\alpha_1},\ v_2 = \sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2},\ v_3 = \sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_3}, \ldots$$

Рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ будетъ сходящимся, потому что сумма n первыхъ его членовъ $V_n = \sqrt{U} - \sqrt{\alpha_n}$ и при n безконечномъ $V = \sqrt{U}$. Кромѣ того, такъ какъ остатокъ.

$$\beta_n = V - V_n = \sqrt{U} - V_n = \sqrt{\alpha_n},$$

то $\lim(\alpha_n/\beta_n) = \lim\sqrt{\alpha_n} = 0$. Слѣдовательно, новый рядъ слабѣе сходится, чѣмъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$

---

*) Т. е. если рядъ $u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{n+1} + \cdots$ сходится сильнѣе ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

b) Если рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ расходящійся, то положимъ

$$v_1 = \sqrt{U_1},\ v_2 = \sqrt{U_2} - \sqrt{U_1},\ v_3 = \sqrt{U_3} - \sqrt{U_2}, \ldots$$

Рядъ $v_1 + v_2 + v_3 \cdots$ расходящійся, потому что $V_n = \sqrt{U_n}$ безпредѣльно возрастаетъ вмѣстѣ съ n. Но такъ какъ $\lim (V_n/U_n) = \lim \frac{1}{\sqrt{U_n}} = 0$, то новый рядъ слабѣе расходится, чѣмъ данный.

202. Примѣчаніе. Нельзя установить границы между сходящимися и расходящимися рядами. Иными словами, если даны два ряда, одинъ сходящійся, другой расходящійся, то можно составить безчисленное множество сходящихся и безчисленное множество расходящихся рядовъ, при чемъ первые будутъ слабѣе сходиться, чѣмъ данный сходящійся рядъ, а вторые слабѣе расходиться, чѣмъ данный расходящійся рядъ. Это впервые замѣтилъ Абель, которому мы обязаны тѣми интересными соображеніями, которыя за этимъ слѣдуютъ.

203. Теорема III. Если рядъ съ положительными членами

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \cdots$$

расходящійся, то расходящимся будетъ и рядъ

$$\frac{1}{a_1 \sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2} + \frac{1}{a_3 \sigma_3} + \cdots,$$

въ которомъ σ_n обозначаетъ сумму n первыхъ членовъ даннаго ряда, но расходимость новаго ряда слабѣе расходимости даннаго.

Обозначивъ черезъ τ_n сумму n первыхъ членовъ новаго ряда, очевидно, будемъ имѣть

$$\tau_{n+p} \quad \tau_n \geqq \left[\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \cdots + \frac{1}{a_{n+p}}\right] \frac{1}{\sigma_{n+p}} = 1 - \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+p}}.$$

Оставляя n безъ измѣненія, мы можемъ, благодаря расходимости даннаго ряда, всегда найти такое значеніе p, чтобы σ_{n+p} было больше $2\sigma_n$. Тогда $\tau_{n+p} - \tau_n$ будетъ больше $\frac{1}{2}$. Увеличивая теперь n до безконечности и обозначая черезъ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ тѣ значенія p, которыя при разныхъ n удовлетворяютъ вышеупомянутому условію найдемъ, что $\tau_{n+p} - \tau_n$ не будетъ стремиться къ нулю, когда p будетъ послѣдовательно получать значенія $p_1, p_2, p_3, \ldots$, и необходимое для сходимости ряда условіе (§ 187) не будетъ выполнено. Слѣдовательно, новый рядъ расходящійся. Далѣе, его расходимость слабѣе расходимости даннаго, потому что отношеніе общихъ членовъ, равное $1/\sigma_n$, стремится къ нулю.

204. Построеніе скалы расходящихся рядовъ. Если члены перваго ряда § 203 остаются конечными, то предыдущую теорему можно иначе доказать и въ тоже время показать, что сумма τ_n безпредѣльно возрастаетъ, какъ $\log \sigma_n$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по условію, a_n не убываетъ безпредѣльно, то $a_n \sigma_n$ безпредѣльно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, и потому (§ 157), примѣняя извѣстную теорему (§ 141), будемъ имѣть

$$\lim \frac{\log \sigma_n}{\tau_n} = \lim \frac{\log \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}}{\frac{1}{a_n \sigma_n}} = \lim \log \left[1 + \frac{1}{a_n \sigma_n} \right]^{a_n \sigma_n} = 1.$$

Замѣтивъ это, мы можемъ изъ второго ряда вывести новый тѣмъ же манеромъ, какимъ второй получился изъ перваго. Это будетъ рядъ

$$\frac{1}{a_1 \sigma_1 \tau_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2 \tau_2} + \frac{1}{a_3 \sigma_3 \tau_3} + \cdots,$$

который мы можемъ (§ 190, c) замѣнить слѣдующимъ

$$\frac{1}{a_1 \sigma_1 \log \sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2 \log \sigma_2} + \frac{1}{a_3 \sigma_3 \log \sigma_3} + \cdots,$$

такъ какъ отношеніе общихъ членовъ послѣднихъ двухъ рядовъ имѣетъ предѣломъ единицу. Сумма n первыхъ членовъ послѣдняго ряда возрастаетъ безпредѣльно, какъ $\log \tau_n$, т. е. какъ $\log \log \sigma_n$, и изъ этого ряда можно вывести слѣдующій *)

$$\frac{1}{a_1 \sigma_1 \log \sigma_1 \log \log \sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2 \log \sigma_2 \log \log \sigma_2} + \frac{1}{a_3 \sigma_3 \log \sigma_3 \log \log \sigma_3} + \cdots,$$

который расходится слабѣе предыдущихъ, но остается расходящимся и т. д. Взявъ, напримѣръ, $a_n = 1$, получимъ расходящіеся ряды

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots,$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$
$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \cdots,$$
$$\frac{1}{2 \log 2 \log \log 2} + \frac{1}{3 \log 3 \log \log 3} + \frac{1}{4 \log 4 \log \log 4} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

изъ которыхъ каждый расходится слабѣе предыдущаго.

---

*) Въ рядахъ, общій членъ которыхъ имѣетъ видъ

$$\frac{1}{n \lg n \cdot \lg \lg n \cdot \lg \lg \lg n \cdots},$$

первые члены могутъ не имѣть смысла и должны быть откинуты, но, начиная съ достаточно большого значенія n, эти члены будутъ вещественными и положительными числами.

Спеціальные признаки сходимости.

205. Теорема I. Въ сходящемся рядѣ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, произведеніе $a_n u_n$ не можетъ стремиться, при безпредѣльномъ возрастаніи n, къ предѣлу, отличному отъ нуля, если рядъ

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots \tag{5}$$

есть расходящійся рядъ съ положительными членами

Дѣйствительно, если $\lim_{n=\infty} a_n u_n$ будетъ число положительное, напримѣръ, то и члены ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ будутъ, начиная съ нѣкотораго мѣста, числа положительныя, и этотъ рядъ можно разматривать, какъ выведенный изъ ряда (5) посредствомъ умноженія его членовъ на $a_1 u_1$, $a_2 u_2$, $a_3 u_3$, ... Но эти числа, начиная съ нѣкотораго мѣста, были бы, при нашемъ предположеніи больше нѣкотораго даннаго положительнаго числа. Слѣдовательно, (§ 190, c) данный рядъ былъ бы расходящимся, вопреки условію.

206. Слѣдствіе. Ни въ какомъ сходящемся рядѣ произведеніе nu_n не можетъ стремиться къ предѣлу, не равному нулю. Это вытекаетъ прямо изъ предыдущей теоремы, если примемъ за рядъ (5) гармоническій рядъ. Но легко дать другое доказательство сказанному здѣсь, не предполагая извѣстною расходимость гармоническаго ряда; это новое доказательство, напротивъ того, можетъ служить для утвержденія расходимости этого ряда. Стоитъ только припомнить, что раньше (§ 152) было доказано слѣдующее: если S_n стремится къ конечному предѣлу, то $n\,(S_n - S_{n-1})$, т. е. nu_n, либо ни къ какому предѣлу не стремится, либо стремится къ предѣлу, равному нулю.

207. Примѣчанія. a) Изъ предыдущей теоремы прямо слѣдуетъ, что, если $a_n u_n$ стремится къ предѣлу, отличному отъ нуля, то рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ расходящійся. Но, кромѣ того, видно, что условіе $\lim a_n u_n = 0$ **необходимо** для сходимости, потому что предѣлъ $a_n u_n$ можетъ и не существовать, это условіе въ то же время и **не достаточно** для сходимости, потому что оно выполняется для безконечно большого числа расходящихся рядовъ, расходимость которыхъ слабѣе расходимости ряда (5).

b) Въ частности, условіе $\lim nu_n = 0$ ни необходимо, ни достаточно для сходимости ряда. Оно не достаточно, потому что существуютъ расходящіеся ряды, для которыхъ оно удовлетворяется; таковъ напримѣръ, рядъ (§ 204)

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots.$$

Оно не необходимо, потому что существуютъ сходящіеся ряды, для которыхъ nu_n не имѣетъ предѣла. Такъ напримѣръ, рядъ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

сходящійся (§ 186 или § 195), а между тѣмъ nu_n постоянно колеблется отъ -1 къ $+1$. Точно такъ же мы дальше увидимъ, что нижеслѣдующій рядъ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \cdots$$

сходящійся. Онъ построенъ такъ, что $u_n = 1/n$, если n квадратъ цѣлаго числа, и $u_n = 1/n^2$, если n не квадратъ. Между тѣмъ здѣсь nu_n, очевидно, не имѣетъ предѣломъ нуль, потому что оно равно единицѣ всякій разъ, какъ n есть квадратъ.

c) Можно однако доказать, что условіе $\lim nu_n = 0$ необходимо удовлетворяется [1]), если члены ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ слѣдуютъ одинъ за другимъ, постоянно убывая, по крайней мѣрѣ, начиная съ нѣкотораго мѣста. Въ самомъ дѣлѣ, тогда и рядъ

$$(u_1 - u_2) + 2(u_2 - u_3) + 3(u_3 - u_4) + \cdots,$$

всѣ члены котораго положительны, будетъ сходящимся, потому что сумма его первыхъ $n-1$ членовъ равна $S_n - nu_n < S_n < S$. Если $S' \leqq S$ есть сумма этого второго ряда, то $\lim nu_n = S - S'$. Но S' не можетъ быть меньше S, иначе $\lim nu_n > 0$ и рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ былъ бы расходящимся. Поэтому $S' = S$ и $\lim nu_n = 0$. Къ тому же заключенію можно придти съ помощью теоремы, доказанной въ § 141, положивъ тамъ $a_n = \frac{S_n}{u_n} - n$, $b_n = \frac{1}{u_n}$ и замѣтивъ, что

$$\frac{a_n}{b_n} = S_n - nu_n, \quad \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = S_{n-1}.$$

d) Съ другой стороны, какъ уже было сказано, существованіе $\lim nu_n$, отличнаго отъ нуля, достаточно для того, чтобы можно было утверждать расходимость ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$. Для примѣра возьмемъ рядъ

$$1 + (1 - \tfrac{1}{2}\log 2)^2 + (1 - \tfrac{1}{3}\log 3)^3 + (1 - \tfrac{1}{4}\log 4)^4 + \cdots$$

Положивъ для сокращенія $\nu = n/\log n$, замѣтимъ, что

$$\log nu_n = \left\{1 + \nu \log\left[1 - \frac{1}{\nu}\right]\right\} \log n.$$

---

[1]) Borel, Théorie des fonctions entières. p. 17.

Въ то же время, такъ какъ (см. § 183)

$$\frac{1}{\nu} < -\log\left[1-\frac{1}{\nu}\right] = \log\left[1+\frac{1}{\nu-1}\right] < \frac{1}{\nu-1},$$

то

$$0 < -\log n u_n < \frac{\log n}{\nu-1}.$$

Но мы уже знаемъ (§ 161), что при n безконечномъ и ν безконечно, поэтому

$$\lim \frac{\log n}{\nu-1} = \lim \frac{\nu}{\nu-1}\cdot\frac{\log^2 n}{n} = 0,$$

слѣдовательно, $\lim \log n u_n = 0$, $\lim n u_n = 1$. Мы можемъ поэтому утверждать, что данный рядъ расходящійся.

е) Выбирая для a_n выраженія все быстрѣе и быстрѣе возрастающія вмѣстѣ съ n, можно достигать все болѣе и болѣе слабой расходимости ряда (5) и такимъ образомъ болѣе и болѣе ограничивать область расходящихся рядовъ, для которыхъ $\lim a_n u_n = 0$, такъ какъ каждый разъ исключается безконечное число расходящихся рядовъ. Но невозможно исключить всѣ расходящіеся ряды, потому что для этого надо было бы построить рядъ, расходящійся слабѣе всякого другого расходящагося ряда, а мы знаемъ, что такого ряда не существуетъ. Поэтому нельзя надѣяться приличнымъ выборомъ чиселъ a_n достигнуть того, чтобы разысканіе предѣла $a_n u_n$ дало рѣшающій признакъ для сужденія о сходимости любого ряда; этимъ замѣчаніемъ мы обязаны Абелю [1]), который доказалъ, что, ограничиваясь даже рядами съ положительными членами, нельзя подобрать чиселъ a_n такимъ образомъ, чтобы любой рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ былъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ ли $\lim a_n u_n = 0$ или $\lim a_n u_n > 0$. Въ самомъ дѣлѣ, прежде всего замѣтимъ, что рядъ

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$$

долженъ быть расходящимся, потому что въ немъ $u_n = 1/a_n$, $a_n u_n = 1$. Но извѣстно, что (§ 203) тогда и рядъ

$$\frac{1}{a_1\sigma_1} + \frac{1}{a_2\sigma_2} + \frac{1}{a_3\sigma_3} + \cdots,$$

гдѣ σ_n есть сумма n первыхъ членовъ перваго ряда, также расходящійся. Между тѣмъ для него

$$u_n = \frac{1}{a_n\sigma_n},\quad \lim a_n u_n = \lim \frac{1}{\sigma_n} = 0.$$

---

[1]) Oeuvres, 2-e éd., p. 398.

208. Теорема II. (Теорема Куммера.) Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ есть нѣкоторая послѣдовательность положительныхъ чиселъ. Если при безпредѣльномъ возрастаніи n выраженіе

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}, \tag{6}$$

начиная съ нѣкотораго значенія n, остается больше нѣкотораго положительнаго числа, то рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ съ положительными членами будетъ сходящимся. Если наоборотъ, разсматриваемое выраженіе, начиная съ нѣкотораго значенія n остается отрицательнымъ, и рядъ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$ расходящійся, то и рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ расходящійся [1]).

Дѣйствительно, изъ неравенства $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > l$, при $u_{n+1} > 0$, слѣдуетъ

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > l u_{n+1}, \tag{7}$$

откуда видно, что положительное число $a_n u_n$ постоянно убываетъ съ возрастаніемъ n и потому стремится къ конечному предѣлу. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$(a_1 u_1 - a_2 u_2) + (a_2 u_2 - a_3 u_3) + (a_3 u_3 - a_4 u_4) + \cdots$$

сходящійся, потому что сумма первыхъ n его членовъ $a_1 u_1 - a_{n+1} u_{n+1}$ стремится къ конечному предѣлу. Послѣдній рядъ останется сходящимся, когда помножимъ его члены на $1/l$. Данный рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ будетъ также сходящимся, потому что его члены по условію положительные, начиная съ нѣкотораго мѣста, будутъ меньше соотвѣтствующихъ членовъ сходящагося ряда, какъ видно изъ неравенства (7). Наоборотъ, изъ неравенства $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < 0$ вытекаетъ, что $a_n u_n$ возрастаетъ вмѣстѣ съ n, а потому (§ 205) рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ расходящійся (конечно при условіи, что рядъ

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$$

расходящійся).

209. Примѣчаніе. Въ приложеніяхъ этой теоремы обыкновенно ищутъ предѣлъ выраженія (6) при n безконечномъ. Рядъ

---

[1]) Болѣе общія теоремы можно найти въ работѣ Dini „Sulle serie convergenti et divergenti a termini positivi" (Annali dell' Univ. Tosc., IX).

будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ ли этотъ предѣлъ числомъ положительнымъ или отрицательнымъ. Когда онъ равенъ нулю, тогда о сходимости или расходимости ряда ничего нельзя сказать, за исключеніемъ того случая, когда выраженіе (6), приближаясь къ нулю, остается постоянно отрицательнымъ, потому что въ этомъ случаѣ можно утверждать, что рядъ будетъ расходящимся.

210. Слѣдствія. a) Рядъ съ положительными членами будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ ли предѣлъ отношенія послѣдующаго члена къ предыдущему, при безконечномъ n, меньше или больше единицы *). Эта теорема есть частный случай теоремы Куммера (при $a_n = 1$), но ее можно доказать и независимо отъ послѣдней, сравнивъ данный рядъ съ геометрическою прогрессіею $1+x+x^2+\cdots$, сходящеюся при $x<1$ и расходящеюся при $x \geqq 1$, и пользуясь теоремою § 191.

b) Рядъ съ положительными членами будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ ли предѣлъ выраженія $n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right]$, при n безконечномъ, больше или меньше единицы. Это есть признакъ Раабе (Raabe). Онъ получается также изъ теоремы Куммера, при $a_n = n$.

c) Рядъ съ положительными членами будетъ сходящійся или расходящійся, смотря по тому, будетъ ли предѣлъ выраженія

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n$$

при безконечномъ n больше или меньше единицы. Дѣйствительно, пусть этотъ предѣлъ равенъ l. При $a_n = n\log n$ выраженіе (6) равно разности между даннымъ выраженіемъ и $(n+1)\log\left[1+\frac{1}{n}\right]$, и стремится (XVIII) поэтому къ предѣлу, равному $l-1$, т. е. положительному или отрицательному, смотря по тому, будетъ ли $l>1$ или $l<1$.

211. Примѣчанія. a) Рядъ слѣдствій изъ теоремы Куммера можно продолжать безгранично, полагая послѣдовательно

$$a_n = n\log n,\quad n\log n\cdot\log\log n,\quad n\log n\cdot\log\log n\cdot\log\log\log n,\ldots$$

---

*) Этотъ признакъ данъ былъ Д'Аламбертомъ и рѣшаетъ вопросъ о сходимости или расходимости въ весьма большомъ числѣ частныхъ случаевъ. Обыкновенно его и ставятъ въ началѣ теоріи сходимости рядовъ.

Такимъ образомъ получаемъ выраженія

$$\left(\left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right)\log n-1\right)\log\log n,$$

$$\left(\left(\left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right)\log n-1\right)\log\log n-1\right)\log\log\log n, \text{ и т. д.}$$

Эти выраженія, вмѣстѣ съ тремя разсмотрѣнными въ изложенныхъ выше слѣдствіяхъ, могутъ имѣть предѣлы l, l', l'', ... Но изъ нихъ только одно можетъ имѣть конечное значеніе, не равное единицѣ, потому что ясно (XIX), что тогда всѣ предыдущіе равны 1, а всѣ послѣдующіе безконечны. Достаточно одного изъ этихъ предѣловъ, не равнаго единицѣ, чтобы рѣшить вопросъ о сходимости или расходимости ряда. Результатъ опредѣляется тѣмъ, будетъ ли этотъ предѣлъ больше или меньше единицы.

b) Существуютъ, конечно, ряды, для которымъ всѣ безчисленные разсматриваемые предѣлы равны 1. Но существуетъ также безчисленное множество другихъ формъ чиселъ a_n въ теоремѣ Куммера и если окажется, что при выбранной формѣ a_n выраженіе (6) стремится къ 0 (и вопросъ о характерѣ ряда остается не рѣшеннымъ), можно вмѣсто выраженія (6) разсмотрѣть произведеніе его на σ_n, гдѣ σ_n, какъ всегда, обозначаетъ сумму

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}.$$

Смотря по тому, остается ли это произведеніе, начиная съ нѣкотораго значенія n, меньше 1 или больше l, гдѣ $l>1$, рядъ будутъ расходящимся или сходящимся. Эта теорема по существу не отличается отъ теоремы Куммера и получается изъ нея, если замѣнимъ a_n на $a_n b_n$ и замѣтимъ, что

$$a_n\sigma_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\sigma_{n+1}=\left[a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\right]\sigma_n-1.$$

c) Впрочемъ, всѣ эти признаки, несмотря на большую пользу, которую они приносятъ при разсмотрѣніи рядовъ чаще всего встрѣчающихся, далеки отъ того, чтобы дать истинные и существенные симптомы сходимости и расходимости рядовъ. Такъ, напримѣръ, ограничиваясь простѣйшимъ случаемъ ($a_n=1$), полезно замѣтить, что рядъ можетъ быть сходящимся, не смотря на то, что отношеніе u_{n+1}/u_n, при возрастаніи n, не перестаетъ принимать значенія большія единицы и даже сколь угодно большія. Такое обстоятельство встрѣчается, напримѣръ, въ очень простомъ рядѣ $\alpha+\beta^2+\alpha^3+\beta^4+\cdots+\alpha^{2m-1}+\beta^{2m}+\cdots$, который имѣетъ всѣ члены положительные и будетъ сходящимся, если

α и β лежать въ интервалѣ (0, 1) за исключеніемъ границъ. Если, кромѣ того, $\alpha < \beta$, то отношеніе n-го члена къ предыдущему имѣетъ предѣломъ 0 при нечетномъ n, а при n четномъ возрастаетъ безпредѣльно. (См. XX).

Однако надо замѣтить, что такая неправильность всегда можетъ быть устранена [1]) приличною группировкою членовъ безъ измѣненія ихъ порядка. Дѣйствительно, какъ бы мало ни было данное положительное число k, всегда можно найти такое значеніе n, начиная съ котораго будемъ имѣть $kS_n > R_n$, потому что S_n стремится къ предѣлу $S > 0$, а остатокъ ряда R_n стремится къ нулю. Неравенство $kS_n > R_n$ остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда будемъ разсматривать данный рядъ не съ начала, а съ нѣкотораго члена. Отсюда слѣдуетъ, что можно такъ группировать члены даннаго ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, не мѣняя ихъ порядка, чтобы получился новый рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ (каждый членъ котораго равенъ суммѣ членовъ одной группы членовъ даннаго ряда), въ которомъ удовлетворяется неравенство

$$kv_n > v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \cdots$$

и тѣмъ болѣе неравенство $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < k$. Такимъ образомъ исчезаетъ тотъ обманчивый симптомъ расходимости, который являлся въ первоначальномъ рядѣ.

212. Примѣры. a) Требуется изслѣдовать характеръ ряда

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

Замѣчаемъ, что

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left[1 + \frac{1}{n}\right]^p, \quad \lim n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = p.$$

На основаніи правила Раабе заключаемъ, что данный рядъ сходящійся при $p > 1$, расходящійся при $p < 1$. При $p = 1$, какъ мы уже знаемъ, рядъ будетъ расходящійся. Слѣдовательно, лишь при $p > 1$ данный рядъ сходящійся.

b) Разсмотримъ болѣе общій рядъ, общій членъ котораго, при $n > 1$, имѣетъ видъ

$$u_n = \frac{1}{n^p (\log n)^q}.$$

---

[1]) Это замѣчаніе принадлежитъ Lerch und Weyr (Journal de Sciencias, 1886—87, pp. 79, 97).

Прежде всего замѣчаемъ, что

$$\frac{1}{n+1} < -\log\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = \log\left[1+\frac{1}{n}\right] < \frac{1}{n},$$

а потому можно написать

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1+\frac{\theta}{n\log n},$$

гдѣ θ лежитъ между 0 и 1 и при безконечномъ n имѣетъ предѣломъ 1. Поэтому

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left[1+\frac{1}{n}\right]^p\left[1+\frac{\theta}{n\log n}\right]^q = \left[1+\frac{p}{n}+\cdots\right]\left[1+\frac{q\theta}{n\log n}+\cdots\right],$$

а отсюда, выполняя умноженіе и отбрасывая члены, которые по умноженіи на $n\log n$ имѣютъ предѣломъ нуль, находимъ

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right] = p+\frac{q\theta}{\log n}+\cdots, \quad \lim n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right] = p.$$

Итакъ, при $p>1$ рядъ сходящійся, при $p<1$ расходящійся. При $p=1$, имѣемъ

$$\lim\left[n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right]-1\right]\log n = q\lim\theta = q.$$

Слѣдовательно, при $q<1$ рядъ расходящійся, при $q>1$ сходящійся (§ 210, c). Наконецъ, при $p=1$ и $q=1$, какъ мы уже знаемъ (§ 204), рядъ расходящійся. Резюмируя, находимъ, что данный рядъ

сходящійся при $\left|\begin{array}{l} p>1,\ q \text{ произвольномъ} \\ p=1,\ q>1 \end{array}\right.$

расходящійся при $\left|\begin{array}{l} p<1,\ q \text{ произвольномъ} \\ p=1,\ q\leqslant 1. \end{array}\right.$

Въ случаѣ $p<1$, при q произвольномъ, расходимость слѣдуетъ также изъ того (§ 206), что (§ 161)

$$\lim n u_n = \lim\frac{n^{1-p}}{(\log n)^q} = \infty.$$

213. Теорема III. Если для нѣкотораго ряда $u_1+u_2+u_3+\cdots$ съ положительными членами $\sqrt[n]{u_n}$, начиная съ нѣкотораго мѣста, остается меньше даннаго числа, которое само меньше

единицы, то рядъ сходящійся. Если же $\sqrt[n]{u_n}$, начиная съ нѣкотораго мѣста никогда не меньше единицы, то рядъ расходящійся.

Дѣйствительно, изъ неравенства $\sqrt[n]{u_n} < x < 1$ слѣдуетъ $u_n < x^n$, а сходимость ряда, котораго общій членъ x^n, при $x < s$, извѣстна (§ 182). Слѣдовательно, данный рядъ и подавно сходящійся (§ 190, b). Наоборотъ, если $\sqrt[n]{u_n} \geqq 1$, то $u_n \geqq 1$ и т. д. Одинъ изъ способовъ прилагать эту теорему состоитъ въ разысканіи предѣла $\sqrt[n]{u_n}$ при n безконечномъ. Если этотъ предѣлъ меньше 1, рядъ сходящійся, если больше 1, расходящійся. Если $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, ничего нельзя сказать, за исключеніемъ того случая, когда приближаясь къ 1, $\sqrt[n]{u_n}$, начиная съ нѣкотораго мѣста, никогда не дѣлается меньше 1; въ этомъ случаѣ рядъ также расходящійся.

214. Примѣчанія. Предыдущій признакъ, можно сказать, эквивалентенъ съ тѣмъ, который основанъ на разсмотрѣніи отношенія u_{n+1}/u_n; такъ какъ извѣстно, что (§ 142, b), если это отношеніе имѣетъ предѣлъ l, то существуетъ и предѣлъ $\sqrt[n]{u_n}$, равный тому же l. Этому не противорѣчитъ то обстоятельство, что рядъ можетъ быть сходящимся, между тѣмъ какъ ни тотъ, ни другой предѣлъ не существуетъ, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто для разсмотрѣннаго выше ряда $\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \cdots$. Признакъ, основанный на разсмотрѣніи предѣла $\sqrt[n]{u_n}$, рѣдко можно прилагать, хотя теоретически онъ имѣетъ преимущество передъ тѣмъ, который основанъ на разсмотрѣніи предѣла отношенія u_{n+1}/u_n, потому что этотъ второй предѣлъ можетъ не существовать, когда первый существуетъ. Разсмотримъ, напримѣръ, вмѣстѣ съ Лерхомъ (Lerch) [1]) рядъ, котораго общій членъ равенъ

$$u_n = q^{n-\nu} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \quad (0 < q < 1,\ x > 1),$$

гдѣ ν обозначаетъ число цифръ въ n. Такъ какъ $\nu - 1$ не больше обыкновеннаго (десятичнаго) логарифма n, то, при безпредѣльномъ возрастаніи n, отношеніе ν^p/n стремится къ нулю (§ 163), каково бы ни было число p. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim q^{1-\frac{\nu}{n}} x^{\frac{\nu^2}{2n}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} = q < 1.$$

[1]) Abhandlungen der böhmischen Akad. der Wissensch. 1885. (Мемуары Богемской Академіи Наукъ.)

Слѣдовательно, рядъ будетъ сходящійся, какъ бы велико ни было x. Если бы вмѣсто этого мы стали разсматривать отношеніе u_{n+1}/u_n, то не могли бы вывести никакого заключенія. Дѣйствительно, если ν' обозначаетъ число цифръ въ $(n-1)$, то разность $\nu-\nu'$, вообще равная нулю, дѣлается равною 1 всякій разъ, когда n получаетъ значеніе, равное степени 10. Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q^{1-(\nu-\nu')} \cdot x^{\frac{1}{2}(\nu-\nu')(\nu+\nu'+1)}$$

вообще равное q, дѣлается равнымъ x^ν при n равномъ степени 10. Существуетъ послѣдовательность значеній n

$$n = 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ldots$$

для которыхъ отношеніе u_{n+1}/u_n въ концѣ концовъ превзойдетъ любое данное число, а рядъ остается сходящимся. Это согласно съ тѣмъ, что было сказано въ замѣчаніи c) § 211.

215. Теорема IV. (Теорема Жамэ) (Jamet). Рядъ съ положительными членами $u_1+u_2+u_3+\cdots$ будетъ сходящимся, если при безпредѣльномъ возрастаніи n, выраженіе

$$(1-\sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n} \tag{8}$$

въ концѣ концовъ остается большимъ нѣкотораго числа, которое само больше 1, и расходящимся, если то же выраженіе въ концѣ концовъ никогда не превосходитъ единицы [1]).

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $u_n = n^{-p_n}$ и замѣчая, что неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{-\frac{p_n}{n}} = e^{-\frac{p_n}{n}\log n} > 1 - \frac{p_n}{n}\log n$$

влечетъ за собою слѣдующее:

$$p_n > (1-\sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n},$$

мы видимъ, что въ томъ случаѣ, когда выраженіе (8) больше $p>1$, будемъ имѣть и $p_n > p > 1$. А тогда данный рядъ будетъ сходящимся, потому что (§ 190, b) члены его въ концѣ концовъ будутъ меньше соотвѣтствующихъ членовъ сходящагося ряда (§ 212, a)

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots.$$

[1]) „Mathesis“ (1892, стр. 80). (Брюссель.)

Если же выраженіе (8), начиная съ нѣкотораго n, будетъ всегда меньше 1 или равно 1, то это значитъ, что начиная съ нѣкотораго мѣста

$$(1 - \sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n} \leqq 1, \text{ т. е. } u_n \geqq \left[1 - \frac{1}{n}\log n\right]^n.$$

А тогда данный рядъ будетъ расходящимся (§ 190, c), потому что его члены не меньше членовъ расходящагося ряда (§ 207, d)

$$1 + (1 - \tfrac{1}{2}\log 2)^2 + (1 - \tfrac{1}{3}\log 3)^3 + (1 - \tfrac{1}{4}\log 4)^4 + \cdots.$$

216. Примѣчаніе. Теорема Жамэ примѣняется, подобно предыдущей, посредствомъ разысканія предѣла выраженія (8) при $n = \infty$. Рядъ будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ ли этотъ предѣлъ больше или меньше 1. Когда этотъ предѣлъ равенъ единицѣ, то безъ дальнѣйшаго изслѣдованія нельзя ничего сказать, за исключеніемъ того случая, когда выраженіе (8), приближаясь къ 1, остается постоянно $\leqq 1$: тогда рядъ будетъ расходящійся. Въ другихъ случаяхъ нужно добыть новый признакъ, дополняющій первый. Можно, напримѣръ, вмѣсто выраженія (8) разсмотрѣть слѣдующее:

$$\left[(1 - \sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n} - 1\right]\frac{\log n}{\log\log n}.$$

Для доказательства достаточно положить $u_n = \dfrac{1}{n(\log n)^{q_n}}$, отсюда вывести, что q_n превзойдетъ данное выраженіе и припомнить, что (§ 212, b) рядъ

$$\frac{1}{2(\log 2)^q} + \frac{1}{3(\log 3)^q} + \frac{1}{4(\log 4)^q} + \cdots$$

сходящійся при $q > 1$, и расходящійся при $q \leqq 1$.

217. Примѣры. Данъ рядъ

$$\frac{1}{(\log 2)^2} + \frac{1}{(\log 3)^3} + \frac{1}{(\log 4)^4} + \cdots.$$

Чтобы доказать его сходимость, можно, принявъ $u_1 = 0$ за первый его членъ, замѣтить, что

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{1}{\log n} = 0.$$

Для рядовъ съ общими членами

$$u_n = \frac{1}{(\log n)^{\log n}}, \quad \frac{1}{(\log\log n)^{\log n}}, \quad \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$$

находимъ, что $\sqrt[n]{u_n} = 1$, и можемъ прибѣгнуть къ признаку Жамэ. На практикѣ удобнѣе непосредственно примѣнять тотъ принципъ, на которомъ этотъ признакъ основанъ, состоящій въ сравненіи даннаго ряда съ другимъ, общій членъ котораго есть n^p. Это сводится къ тому, что вмѣсто выраженія (8) разсматривается отношеніе $p_n = \log\frac{1}{u_n} : \log n$, при чемъ можно утверждать, что рядъ будетъ сходящимся, если это отношеніе въ концѣ концовъ остается большимъ нѣкотораго числа, которое само больше единицы, и расходящимся, если это отношеніе, въ концѣ концовъ, никогда не дѣлается меньше единицы. Напримѣръ, для данныхъ выше рядовъ имѣемъ соотвѣтственно

$$p_n = \log\log n, \quad \log\log\log n, \quad \frac{(\log\log n)^2}{\log n}.$$

Первыя два изъ этихъ выраженій p_n возрастаютъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n, а третье имѣетъ предѣломъ нуль, слѣдовательно, первые два ряда сходящіеся, а третій расходящійся. Если получится для p_n предѣлъ, равный 1, то можно перейти къ разсмотрѣнію отношенія $\log\frac{1}{nu_n}$ къ $\log\log n$ и т. д. Конечно, могутъ встрѣтиться и такіе ряды, къ которымъ предпочтительно прилагать признакъ Жамэ въ его первоначальной формѣ. Такъ напримѣръ, для $u_n = \left[1 - \frac{x}{n}\log n\right]^n$, предѣлъ выраженія (8) равенъ x, и тотчасъ видимъ, что рядъ (срав. съ § 207, d)

$$\left[1 - \frac{x}{2}\log 2\right]^2 + \left[1 - \frac{x}{3}\log 3\right]^3 + \left[1 - \frac{x}{4}\log 4\right]^4 + \cdots$$

будетъ сходящимся только при $x > 1$.

Упражненія и приложенія.

218. Упражненія. a) Немногіе доказанные выше признаки сходимости рядовъ даютъ возможность весьма быстро узнать характеръ рядовъ, разсмотрѣнныхъ въ §§ 184, 186. Для показательнаго ряда, напримѣръ, достаточно замѣтить, что

$$\text{для } u_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\frac{x}{n} = 0.$$

Слѣдовательно, рядъ сходящійся для всякаго положительнаго x (§ 210). Онъ будетъ сходящимся и при всякомъ отрицательномъ значеніи x, потому что (§ 190, a) въ этомъ случаѣ члены его, попеременно

положительные и отрицательные, начиная съ нѣкотораго мѣста, а именно съ того, для котораго $n > |x|$, постоянно убываютъ и, кромѣ того, имѣютъ предѣломъ нуль. Подобно этому поступаютъ и съ логариѳмическимъ рядомъ. Общій его членъ $u_n = \pm \frac{x^n}{n}$ возрастаетъ безпредѣльно (по абсолютной величинѣ) или стремится къ нулю, смотря по тому, будетъ ли $|x|$ больше или не больше 1, откуда и видно, что условіе $|x| \leqq 1$ необходимо для сходимости ряда (§ 188, a). Отношеніе послѣдующаго члена къ предыдущему въ рядѣ абсолютныхъ величинъ членовъ даннаго ряда имѣетъ предѣломъ

$$\lim \frac{n|x|}{n+1} = |x|.$$

Поэтому рядъ будетъ сходящимся при $|x| < 1$ (§§ 210; 190, a). Для $|x| = 1$, рядъ будетъ расходящимся при $x = -1$, потому что тогда онъ обращается въ гармоническій рядъ, и сходящимся при $x = 1$, потому что тогда члены его, попеременно положительные и отрицательные, постоянно убываютъ и имѣютъ предѣломъ нуль. Впрочемъ, послѣднія два свойства справедливы при всякомъ положительномъ x, не большемъ 1, потому что неравенство

$$\frac{x^n}{n} > \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

справедливо при $x < 1 + \frac{|1|}{n}$, а потому и при $x \leqq 1$, каково бы ни было значеніе n.

b) Въ частности, нами было найдено (§ 186), что

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \log 2 = 0{,}6931471 \ldots, \tag{9}$$

и именно съ помощью формулы (1) § 183, которая весьма полезна, потому что даетъ возможность вычислять суммы различныхъ рядовъ типа (9). Дѣйствительно, мы видѣли что сумма σ_{2n} первыхъ $2n$ членовъ ряда (9), очевидно, равная

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

имѣетъ предѣломъ $\log 2$, при безконечномъ n. Если данъ рядъ

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots, \tag{10}$$

то сейчасъ видимъ, что

$$S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

$$= H_{4n} - \frac{1}{2} H_{2n} - \frac{1}{2} H_n = \sigma_{2n} + \frac{1}{2} \sigma_n,$$

откуда $S = \frac{3}{2}\log 2 = 1{,}0397207\ldots$, такъ какъ S_{3n-1} и S_{3n-2} отличаются отъ S_{3n} на величины, имѣющія предѣломъ нуль. Этотъ примѣръ показываетъ, что не всегда можно мѣнять порядокъ членовъ ряда. Дѣйствительно, ряды (9) и (10) отличаются только порядкомъ членовъ, а имѣютъ различныя суммы. Для ряда

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \cdots$$

подобнымъ же образомъ имѣемъ

$$S_{3n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n,$$

откуда $S = \frac{1}{2}\log 2 = 0{,}3465735\ldots$ Наконецъ, для ряда

$$1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \cdots$$

находимъ

$$S_{3n} = H_{3n} - H_n,\ S = \log 3 = 1{,}0986122\ldots$$

Въ болѣе общемъ случаѣ находимъ, что $\log m$ есть сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - 1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2m+1} + \cdots$$

c) Не цѣлесообразно прибѣгать къ признакамъ сходимости, когда можно прямо вычислить сумму ряда, какъ показываютъ выше приведенные примѣры. Если, напримѣръ, данъ рядъ

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots,$$

то можно, конечно, доказать его сходимость, замѣчая, что

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1 + \frac{2}{n},\quad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 2$$

или принимая во вниманіе (§ 190, b), что $u_n < \frac{1}{n^2}$, и припоминая, что $\frac{1}{n^2}$ есть общій членъ сходящагося ряда (§ 212, a). Но это изслѣдованіе излишне, потому что достаточно написать u_n въ видѣ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, чтобы сейчасъ же найти

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},\ S = 1.$$

Точно также, когда предложенъ рядъ

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 10\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 14\cdot 15} + \cdots,$$

гдѣ $u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}$, то положимъ

$$u_n = \frac{\alpha}{(4n-3)(4n-2)} + \frac{\beta}{(4n-2)(4n-1)}$$

и постараемся опредѣлить α и β такъ, чтобы имѣть тождественно (при всякомъ n)

$$(4n-1)\alpha + (4n-3)\beta = 1,$$

т. е. $\alpha + \beta = 0$, $\alpha + 3\beta = -1$, откуда $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$. Тогда получимъ $u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(4n-3)(4n-2)} - \frac{1}{(4n-2)(4n-1)}\right]$ и разлагая, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, каждую дробь на двѣ, находимъ

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n-1}\right).$$

Отсюда найдемъ $S_n = \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{1}{4}\sigma_n$ и $S = \frac{1}{4}\log 2 = 0{,}1732867\cdots$
Если данъ рядъ

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{4}{5\cdot 6} + \frac{8}{9\cdot 10} + \frac{13}{14\cdot 15} + \frac{19}{20\cdot 21} + \cdots$$

то, какъ легко видѣть, числитель n-той дроби равенъ

$$1 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) - 2 = \tfrac{1}{2}n(n+3) - 1,$$

а, слѣдовательно, знаменатель ея будетъ

$$\tfrac{1}{2}n(n+3)\left[\tfrac{1}{2}n(n+3) + 1\right] = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Тогда положимъ

$$u_n = \frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{\beta}{(n+1)(n+2)} + \frac{\gamma}{(n+2)(n+3)},$$

при чемъ тождественно должны имѣть

$$(n+2)(n+3)\alpha + n(n+3)\beta + n(n+1)\gamma = 2(n^2 + 3n - 2).$$

Полагая послѣдовательно $n = 0$, $n = -3$, находимъ $\alpha = \gamma = -\frac{2}{3}$. Сравнивая затѣмъ коэффиціенты при n^2, получимъ $\alpha + \beta + \gamma = 2$, откуда $\beta = \frac{10}{3}$. Окончательно получимъ

$$S = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{10}{3}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{9}.$$

d) Чтобы доказать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+x} + \cdots \tag{11}$$

($x > 0$), можно группировать члены попарно и замѣтить, что

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}, \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n(n+x)}{(n+1)(n+x+1)} = 1.$$

Примѣняя теперь правило Раабе (§ 210, b)

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim \left(1 + \frac{n+1}{n+x}\right) = 2.$$

Рядъ сходящійся. Проще еще слѣдующій пріемъ. Замѣтимъ, что $u_n < \frac{x}{n^2}$, и что рядъ $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ сходящійся. Конечно, такимъ образомъ будетъ доказано лишь то, что сумма S_n первыхъ n членовъ ряда (11) стремится къ нѣкоторому предѣлу S, когда n проходитъ черезъ одни четныя значенія. Но при n нечетномъ, имѣемъ

$$S_n = S_{n-1} + \frac{2}{n+1}, \quad \lim S_n = \lim S_{n-1} = S.$$

Если x равно цѣлому положительному числу m, то сумма ряда (11) равна суммѣ первыхъ m членовъ гармоническаго ряда. Дѣйствительно, сумма первыхъ $2n$ членовъ равна

$$H_n - \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+n}\right) = H_m - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m}\right)$$

и, очевидно, имѣетъ предѣломъ H_m, когда при постоянномъ m число n возрастаетъ безпредѣльно.

e) Для ряда

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1 \cdot 2}{(x+1)(x+2)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$

имѣемъ

$$u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}, \quad \lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = 1.$$

Примѣняя правило Раабе, находимъ

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim \frac{nx}{n+1} = x.$$

Слѣдовательно, рядъ сходящійся при $x > 1$, расходящійся, при $x < 1$; онъ расходящійся и при $x = 1$, что видно непосредственно. Между прочимъ, въ случаѣ сходимости легко найти и сумму ряда. Стоитъ только замѣтить, что очевидное тождество $(x+n)u_n = nu_{n-1}$ можно написать въ видѣ

$$(x-1)u_n = nu_{n-1} - (n+1)u_n,$$

такъ что, замѣняя n послѣдовательно на $n-1$, $n-2, \ldots 3, 2, 1$, и суммируя, получимъ

$$(x-1)\,S_n = 1 - (n+1)\,u_n.$$

А такъ какъ члены ряда слѣдуютъ одинъ за другимъ въ убывающемъ порядкѣ, то (§ 207, c), какъ извѣстно, $\lim nu_n = 0$. Слѣдовательно, $S = \dfrac{1}{x-1}$.

f) При положительномъ значеніи $x < e$, рядъ

$$\frac{x}{1} + 2!\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3!\left(\frac{x}{3}\right)^3 + 4!\left(\frac{x}{4}\right)^4 + \cdots \tag{12}$$

будетъ сходящимся. Дѣйствительно,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}, \quad \lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{e} < 1.$$

При $x > e$, рядъ расходящійся. Онъ расходящійся и при $x = e$, потому что при этомъ предположеніи разсматриваемое отношеніе, приближаясь къ e, остается постоянно больше 1 (§ 156). Читатель можетъ доказать, что въ болѣе общемъ случаѣ рядъ, для котораго $u_n = \dfrac{n!}{n^p}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ будетъ сходящимся только при $p > \frac{1}{2}$. (XXI).

Рядъ (12) принадлежитъ къ типу рядовъ

$$\frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_1 a_2} + \frac{x^3}{a_1 a_2 a_3} + \frac{x^4}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \cdots,$$

въ которыхъ предполагается, что a_n стремится къ конечному предѣлу a при n безконечномъ. Такъ какъ

$$\lim\frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim\frac{x}{a_n} = \frac{x}{a},$$

то прямо видно, что при $x < a$ рядъ сходящійся, а при $x > a$ расходящійся. Онъ будетъ рясходящимся и при $x = a$, если числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ постоянно возрастаютъ, потому что тогда $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{a}{a_n}$ всегда больше 1. Въ другихъ случаяхъ характеръ ряда при $x = a$ зависитъ отъ свойства данной послѣдовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, а прежде всего отъ значеній выраженія $n(a_n - a)$ при безпредѣльномъ возрастаніи n *).

g) Требуется изслѣдовать характеръ ряда

$$\frac{1!\,x}{x+a_1} + \frac{2!\,x^2}{(x+a_1)\,(2x+a_2)} + \frac{3!\,x^3}{(x+a_1)\,(2x+a_2)\,(3x+a_3)} + \cdots$$

*) См. правило Раабе.

въ томъ предположеніи, что существуетъ конечный предѣлъ a чиселъ a_n, при безконечномъ n. Мы имѣемъ здѣсь

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{nx}{nx + a_n}, \quad \lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1.$$

Правило Раабе ведетъ затѣмъ къ изслѣдованію слѣдующаго предѣла

$$\lim n\left(\frac{nx + a_n}{nx} - 1\right) = \lim \frac{a_n}{x} = \frac{a}{x}.$$

Отсюда вытекаетъ, что рядъ сходящійся при $x < a$, расходящійся при $x > 0$. При $x = a$ тотъ или другой характеръ прежде всего зависитъ отъ значеній выраженія $(a_n - a)\log n$ при безпредѣльномъ возрастаніи n.

h) Расходимость ряда

$$\sin\frac{a}{1} + \sin\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{3} + \sin\frac{a}{4} + \cdots$$

при всякомъ положительномъ и отрицательномъ a слѣдуетъ прямо изъ того замѣчанія, что

$$\lim n u_n = a \lim \frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} = a$$

Напротивъ того, рядъ

$$\sin\frac{a}{1} + \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{a}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{a}{4} + \cdots$$

будетъ сходящимся при всякомъ a, потому что абсолютная величина его общаго члена меньше произведенія $\frac{1}{n^2}$ на $|a|$.

i) Рядъ

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \cdots \tag{13}$$

не сходящійся, потому что общій членъ его не имѣетъ предѣломъ нуль (предполагая, конечно, что a не краткое отъ π). Рядъ этотъ неопредѣленный. Въ самомъ дѣлѣ, если умножимъ всѣ члены суммы S_n на $\sin\frac{a}{2}$, то, припоминая соотношеніе

$$2\sin\nu a \sin\frac{a}{2} = \cos(2\nu - 1)\frac{a}{2} - \cos(2\nu + 1)\frac{a}{2},$$

получимъ

$$2 S_n \sin\frac{a}{2} = \cos\frac{a}{2} - \cos(2n + 1)\frac{a}{2} = 2\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}.$$

Сумма

$$S_n = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \sin(n+1)\frac{\alpha}{2},$$

оставаясь конечною, ни къ какому предѣлу не приближается, а колеблется безъ конца. Принимая еще во вниманіе, что

$$S_{n+p} - S_n = \frac{\sin\frac{p\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \sin\left(n\alpha + \frac{p+1}{2}\alpha\right)$$

не возрастаетъ безпредѣльно, видимъ, что рядъ (13) принадлежитъ къ числу рядовъ, о которыхъ шла рѣчь въ теоремѣ IV § 194. Отсюда слѣдуетъ, что можно утверждать сходимость ряда

$$a_1 \sin\alpha + a_2 \sin 2\alpha + a_3 \sin 3\alpha + a_4 \sin 4\alpha + \cdots$$

въ которомъ числа a_1, a_2, a_3, ... могутъ быть какими угодно, лишь бы они постоянно убывали и стремились къ нулю. Такъ напр., рядъ

$$\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}\sin 3\alpha + \tfrac{1}{4}\sin 4\alpha + \cdots$$

сходящійся при всякомъ α.

j) Доказать сходимость ряда

$$\frac{x\sin^2\alpha}{1+x\cos^2\alpha} + \frac{x^2\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha}{(1+x\cos^2\alpha)(1+x\cos^2 2\alpha)} + \cdots$$

при $0 < x < 1$. Здѣсь имѣемъ

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{x\sin^2 n\alpha}{1+x\cos^2 n\alpha}.$$

При безпредѣльномъ возрастаніи n, $\sin^2 n\alpha$ и $\cos^2 n\alpha$ постоянно колеблются между 0 и 1, а потому разсматриваемое выраженіе ни къ какому предѣлу не стремится. Тѣмъ не менѣе, сейчасъ же видно, что всегда

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < x < 1,$$

а этого достаточно, чтобы установить сходимость ряда

k) Доказать, что рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ съ положительными членами будетъ сходящимся, если возможно найти такое положительное перемѣнное число a_n, чтобы, начиная съ нѣкотораго значенія n, имѣло мѣсто неравенство

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq a_n\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Дѣйствительно, изъ этого неравенства слѣдуетъ

$$\frac{u_n}{a_n} - \frac{u_{n+1}}{a_{n+1}} \geqq u_{n+1}.$$

Отсюда видно, что $\frac{u_n}{a_n}$ постоянно убываетъ, оставаясь больше 0, и потому стремится къ конечному предѣлу. Этимъ доказана сходимость ряда

$$\left(\frac{u_1}{a_1} - \frac{u_2}{a_2}\right) + \left(\frac{u_2}{a_2} - \frac{u_3}{a_3}\right) + \left(\frac{u_3}{a_3} - \frac{u_4}{a_4}\right) + \cdots$$

(для котораго $S_n = \frac{u_1}{a_1} - \frac{u_{n+1}}{a_{n+1}}$), а тѣмъ самымъ a fortiori и сходимость даннаго ряда [1]).

l) Дана произвольная послѣдовательность положительныхъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Доказать сходимость ряда

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \cdots.$$

Достаточно замѣтить, что

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = a_n\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right),$$

чтобы видѣть, что сходимость даннаго ряда есть прямое слѣдствіе доказанной въ предыдущемъ примѣрѣ теоремы. Впрочемъ, можно также замѣтить, что

$$u_n = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

откуда

$$S_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

Слѣдовательно, сумма S_n постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, оставаясь меньше 1; поэтому она стремится къ нѣкоторому предѣлу $S \leqq 1$.

m) Данъ рядъ

$$\frac{1}{a_1\sigma_1^p} + \frac{1}{a_2\sigma_2^p} + \frac{1}{a_3\sigma_3^p} + \frac{1}{a_4\sigma_4^p} + \cdots,$$

---

[1]) Этотъ признакъ сходимости данъ былъ Ф. Джюдиче (Giudice) въ Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1890).

въ которомъ σ_n обозначаетъ сумму n первыхъ членовъ расходящагося ряда съ положительными членами

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots$$

Тогда имѣемъ

$$u_n=\frac{1}{a_n\sigma_n^p},\quad a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}=\frac{1}{\sigma_n^p}\cdot\frac{\sigma_{n+1}^p-\sigma_n^p}{\sigma_{n+1}-\sigma_n},$$

и далѣе

$$\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\right)\sigma_n=1+\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}+\left(\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right)^{p-1}>p.$$

Слѣдовательно (§ 211, b),если $p>1$, то рядъ сходящійся. Мы знаемъ уже (§ 203), что при $p=1$ a fortiori при $p<1$ рядъ расходящійся. На этомъ основаніи читателю легко будетъ обобщить теорему Жамэ (§ 215), а именно показать, что рядъ (съ положительными членами) $u_1+u_2+u_3+\cdots$ будетъ сходящійся, если выраженіе

$$\left(1-\frac{\sigma_n}{\sqrt[\sigma_n]{a_n u_n}}\right)\frac{\sigma}{\log\sigma_n}$$

въ концѣ концовъ остается больше нѣкотораго числа, которое само больше 1, и расходящійся, если это выраженіе въ концѣ концовъ остается меньшимъ или равнымъ 1. Впрочемъ, вмѣсто вышеуказаннаго выраженія можно разсматривать отношеніе $\log\frac{1}{a_n u_n}$ къ $\log\sigma_n$.

219. Вычисленіе натуральныхъ логариѳмовъ. Логариѳмическій рядъ имѣетъ много весьма полезныхъ приложеній. Принимая во вниманіе сказанное въ концѣ § 186, находимъ, что черезъ сложеніе формулъ (3) и (4) получается формула

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\cdots\right),$$

справедливая только для x, лежащаго въ интервалѣ $(-1,+1)$, за исключеніемъ его границъ. Въ частности для $x=\frac{1}{2n+1}$ находимъ

$$(14)\quad \log(n+1)=\log n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right)$$

и можемъ, слѣдовательно, вычислить натуральный логариѳмъ любого цѣлаго числа, если знаемъ натуральный логариѳмъ предшествующаго цѣлаго числа. Такъ напримѣръ, при $n=1$, находимъ

$$(15)\qquad \log 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 9^2}+\frac{1}{7\cdot 9^3}+\cdots\right),$$

и, ограничиваясь восемью первыми членами, получимъ

$$\log 2 = 0{,}69314718\ldots,$$

при чемъ можно ручаться за вѣрность всѣхъ написанныхъ десятичныхъ знаковъ, такъ какъ сдѣланная погрѣшность

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{17\cdot 9^8}+\frac{1}{19\cdot 9^9}+\frac{1}{21\cdot 9^{10}}+\cdots\right)<\frac{2}{3\cdot 17}\left(\frac{1}{9^8}+\frac{1}{9^9}+\frac{1}{9^{10}}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{4\cdot 3\cdot 17\cdot 9^7}=\frac{1}{975725676}<\frac{1}{10^8}.$$

Чтобы получить такое же приближеніе съ помощью формулы (9) § 218-го намъ нужно было бы (§ 196, c) удержать въ ней болѣе ста милліоновъ членовъ. Впрочемъ извѣстны различныя другія формулы [1]), еще болѣе выгодныя, чѣмъ формула (14). Положивъ въ основной формулѣ $x=\frac{2}{n^3-3n}$ и замѣчая, что

$$n^3-3n\pm 2=(n\pm 2)\,(n\mp 1)^2,$$

получимъ

$$\log\frac{(n+2)\,(n-1)^2}{(n-2)\,(n+1)^2}=\frac{4}{n^3-3n}+\frac{4^2}{3\,(n^3-3n)^3}+\frac{4^3}{5\,(n^3-3n)^5}+\cdots,$$

откуда, ограничиваясь первымъ членомъ разложенія, получаемъ формулу

$$\log(n+2)=2\log(n+1)-2\log(n-1)+\log(n-2)+\frac{4}{n^3-3n}.$$

Она даетъ $\log(n+2)$ съ двадцатью четырьмя десятичными знаками, когда извѣстны логариѳмы $n+1$, $n-1$ и $n-2$, предполагая, что число цифръ въ n больше 3. Дѣйствительно, погрѣшность происходящая отъ пренебреженія всѣми членами разложенія, начиная со второго, меньше

$$\frac{4^2}{3(n^3-3n)^3}\left(1+\frac{4}{(n^3-3n)^2}+\frac{4^2}{(n^3-3n)^4}+\cdots\right)=\frac{16}{3n(n^2-4)\,(n^2-3)\,(n^2-1)^2},$$

т. е. (если $n>1000$) меньше $\frac{1}{10^{26}}$.

220. Вычисленіе обыкновенныхъ логариѳмовъ. Извѣстно, что логариѳмъ числа, взятый по какому нибудь основанію a, получается черезъ умноженіе натуральнаго логариѳма того же числа на нѣ-

---

[1]) Онѣ даны Лавернедомъ (Lavernède) (Nouvelles Annales de Math. t. X. p. 72) и Секретаномъ (Secretan) (Comptes rendus de l'Ac. des sc. de Paris t. XLIV. p. 12176) См. объ этомъ указанія Брокара (Brocard) въ Intermèdiaire des Math. (t. VII. p. 252).

которое число M, называемое модулемъ разсматриваемой системы. По самому опредѣленію логариѳмовъ, имѣемъ $n = e^{\log n} = a^{\operatorname{Log} n}$, гдѣ $\operatorname{Log} n$ взятъ по основанію a. Отсюда, взявъ логариѳмы сперва по основанію a, а потомъ по основанію e находимъ,

$$\operatorname{Log} n = \log n . \operatorname{Log} e, \quad \operatorname{Log} n \log a = \log n,$$

такъ что, полагая $\operatorname{Log} n = M \log n$, имѣемъ $M = \operatorname{Log} e = \frac{1}{\log a}$. Для вычисленія обыкновенныхъ логариѳмовъ ($a = 10$) надо прежде всего вычислить модуль $M = \frac{1}{\log 10}$. По формулѣ (14) имѣемъ

$$\log 5 = \log 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \cdots\right),$$

откуда, припоминая формулу (15), получаемъ

$$\log 10 = 2\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \cdots\right) + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 81} + \frac{1}{5 \cdot 81^2} + \cdots\right).$$

Ограничиваясь немногими членами въ этихъ рядахъ, находимъ

$$\log 10 = 2{,}302585092 \ldots, \quad M = 0{,}434294481 \ldots$$

Послѣ этого, умножая обѣ части равенства (14) на M, получаемъ формулу

$$\operatorname{Log}(n+1) = \operatorname{Log} n + 2M\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right),$$

достаточно удобную для построенія таблицы обыкновенныхъ логариѳмовъ. Желая, напримѣръ, имѣть логариѳмы чиселъ, меньшихъ 100000, достаточно вычислить логариѳмы чиселъ между 10^4 и 10^5, и поэтому въ предыдущей формулѣ можемъ предположить $n \geqq 10^4$. Ограничиваясь даже однимъ первымъ членомъ разложенія, сдѣлаемъ погрѣшность

$$2M\left(\frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right) < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{(2n+1)^5} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{12n(n+1)(2n+1)} < \frac{1}{24n^3} < \frac{1}{10^{13}},$$

Слѣдовательно, примѣняя формулу

$$\operatorname{Log}(n+1) = \operatorname{Log} n + \frac{2M}{2n+1}$$

для вычисленія обыкновенныхъ логариѳмовъ, можно ручаться, что получаемые результаты даютъ приближеніе, вѣрное до одной единицы 13-го десятичнаго разряда. Еще большаго приближенія можно достигнуть, примѣняя другія формулы, упомянутыя въ предыдущемъ параграфѣ.

221. Формула Стирлинга. Чтобы показать одно изъ интереснѣйшихъ приложеній ряда (14), начнемъ съ того, что представимъ формулу (14) въ видѣ

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots.$$

Сумма ряда, написаннаго въ правой части, очевидно, меньше, чѣмъ

$$1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right)=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

или, переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ,

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}. \tag{16}$$

Послѣ этого положимъ

$$a_n=\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \tag{17}$$

и замѣтимъ, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}.$$

Неравенства (16) дадутъ

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}},$$

т. е.

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}<\cdots<a_{n+1}<a_n.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что числа $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ постоянно возрастаютъ вмѣстѣ съ n, оставаясь всегда меньше чиселъ a_n, образующихъ съ своей стороны убывающую послѣдовательность. Поэтому тѣ и другія стремятся къ нѣкоторымъ конечнымъ предѣламъ, по необходимости равнымъ между собою. Если положимъ

$$\lim_{n=\infty}a_n=\lim_{n=\infty}a_n e^{-\frac{1}{12n}}=a,$$

то для всякаго значенія n будемъ имѣть

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n, \text{ т. е. } a = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}}$$

при нѣкоторомъ значеніи θ между 0 и 1. Подставляя вмѣсто a_n его выраженіе (17), получаемъ $n! = an^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$. Впослѣдствіи увидимъ, что $a = \sqrt{2\pi}$ *). Поэтому напишемъ теперь же

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n+\frac{\vartheta}{12n}}.$$

Это есть формула Стирлинга, дающая возможность вычислять $n!$ при большихъ значеніяхъ n съ большою точностью.

222. Биноміальный рядъ. Такъ называютъ рядъ

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots.$$

Впослѣдствіи будетъ доказано **), что въ тѣхъ случаяхъ, когда рядъ этотъ сходящійся (за исключеніемъ значеній $m = 0$ и $x = -1$) сумма его равна $(1+x)^m$, такъ что въ частномъ случаѣ, когда m цѣлое положительное число, мы снова находимъ извѣстное разложеніе $(1+x)^m$ въ видѣ полинома, состоящаго изъ $m+1$ членовъ (биномъ Ньютона). Для какихъ же значеній m и x биноміальный рядъ будетъ сходящимся? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, удобно будетъ представить этотъ рядъ въ видѣ

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots,$$

полагая

$$a_n = \left(1 - \frac{\mu}{1}\right)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\left(1 - \frac{\mu}{3}\right) \cdot \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right),$$

гдѣ $\mu = m + 1$. При возрастаніи n до безконечности коэффиціенты дѣлаются въ концѣ концовъ числами одного и того же знака, потому что

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n}{n-\mu}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что абсолютная величина отношенія послѣдующаго члена къ предыдущему имѣетъ предѣломъ абсолютную величину x. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе (на основаніи сказаннаго въ § 210, при $x < 0$, и въ § 190, при $x > 0$). Рядъ будетъ сходящимся при $|x| < 1$ и не будетъ сходящимся при $|x| > 1$, каково

*) Это есть слѣдствіе такъ называемой формулы Валлиса (см. § 464, а).

**) См. § 332, е) и примѣчаніе XXII.

бы ни было значеніе m. Другими словами, интервалъ сходимости биноміальнаго ряда есть $(-1, +1)$. Остается изслѣдовать характеръ ряда на границахъ интервала. При $x = -1$ рядъ обращается въ $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ и, такъ какъ

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{n}{n-\mu} - 1\right) = \lim_{n=\infty} \frac{n\mu}{n-\mu} = \mu,$$

то рядъ будетъ сходящимся при $m > 0$ (и при $m = 0$), расходящимся при $m < 0$. При $x = 1$ нашъ рядъ обращается въ $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$ и члены его, начиная съ нѣкотораго мѣста, будутъ попеременно положительные и отрицательные. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ не будетъ сходящимся, если, начиная съ нѣкотораго мѣста, $a_n \geqq a_{n-1}$. А это условіе выполняется при $m \leqq -1$. Онъ будетъ, наоборотъ, сходящимся, когда $m > -1$, потому что тогда не только $a_n < a_{n-1}$, при достаточно большомъ n, но и $\lim a_n = 0$. Дѣйствительно, при постоянномъ $\nu > m$, имѣемъ

$$\frac{a_\nu}{a_n} > \left(1 + \frac{\mu}{\nu+1}\right)\left(1 + \frac{\mu}{\nu+2}\right)\cdots\left(1 + \frac{\mu}{n}\right) > 1 + (H_n - H_\nu)\mu,$$

далѣе, припоминая расходимость гармоническаго ряда, находимъ $\lim_{n=\infty} a_\nu/a_n = \infty$, и наконецъ $\lim_{n=+\infty} a_n = 0$. Резюмируя можемъ сказать: интервалъ сходимости биноміальнаго ряда есть $(-1, 1)$, при чемъ надо исключить обѣ границы, когда m не больше -1, и только нижнюю, когда $m > 1$, но < 0.

223. Вычисленіе корней изъ чиселъ. Биноміальный рядъ можно примѣнить къ выводу болѣе или менѣе удобныхъ ариѳметическихъ правилъ для извлеченія корней изъ чиселъ. Мы ограничимся, напримѣръ, квадратными корнями. Положимъ, что дано цѣлое число N и пусть a^2 наибольшій квадратъ, не превышающій N; тогда, полагая $N = a^2 + x$, имѣемъ

$$\sqrt{N} = a\left(1 + \frac{x}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + \frac{x^3}{16a^5} - \cdots.$$

Рядъ въ правой части весьма быстро сходится, если отношеніе $\frac{x}{a^2}$ достаточно мало. Впрочемъ, ясно, что изъ $a^2 \leqq N < (a+1)^2$ вытекаетъ

$$0 \leqq x < 2a + 1,$$

или

$$0 \leqq \frac{x}{a^2} < \frac{2a+1}{a^2} < 1,$$

предполагая, что N больше 9. Послѣднее предположеніе всегда можно сдѣлать, потому что при $N < 9$ достаточно его умножить на полный квадратъ k^2, извлечь корень изъ k^2N и раздѣлить ре-

зультатъ на k. Такъ какъ теперь члены ряда, начиная со второго, попеременно положительные и отрицательные, то, остановившись на любомъ членѣ, можно быть увѣреннымъ, что погрѣшность по абсолютной величинѣ не превыситъ слѣдующаго члена. Можно также вычислять съ помощью послѣдовательныхъ приближеній, принявъ за первое приближеніе число a_1, получаемое при удержаніе небольшого числа членовъ ряда, напримѣръ, первыхъ трехъ:

$$a_1 = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3}.$$

Если бы ограничились первыми двумя, то пришли бы къ обыкновенному способу приближеннаго вычисленія корней, излагаемому въ курсахъ начальной Алгебры. Полагая затѣмъ $N = a_1^2 + x_1$ вычисляемъ

$$a_2 = a_1 + \frac{x_1}{2a_1} - \frac{x_1^2}{8a_1^3}.$$

Затѣмъ полагаемъ $N = a_2^2 + x_2$ и вычисляемъ $a_3 = a_2 + \frac{x_2}{2a_2} - \frac{x_2^2}{8a_2^3}$ и т. д. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ быстро приближаются къ $\sqrt{N}$. Дѣйствительно, относительная погрѣшность (XXIII), которую дѣлаемъ, принимая a_1 за значеніе $\sqrt{N}$, меньше $\frac{x^3}{16a^6} < \frac{0^3}{16}$, когда $\frac{x}{a^2} < 0$. Съ другой стороны,

$$x_1 = x - (a_1^2 - a^2) = \frac{x^3}{8a^4} - \frac{x^4}{64a^6}, \quad \frac{x_1}{a_1^2} < \frac{x^3}{8a^6} < \frac{0^3}{8},$$

поэтому погрѣшность при второмъ приближеніи меньше $\frac{x_1^3}{16a_1^6} < \frac{0^9}{2^{13}}$, и такимъ же образомъ находимъ, что при послѣдующихъ приближеніяхъ погрѣшности будутъ меньше $\frac{0^{27}}{2^{40}}, \frac{0^{81}}{2^{121}}, \frac{0^{243}}{2^{364}} \cdots$

Вліяніе перемѣны порядка членовъ на характеръ ряда.

224. Опредѣленія. О двухъ данныхъ рядахъ мы будемъ говорить, что они отличаются одинъ отъ другого только порядкомъ членовъ, если каждый членъ, встрѣчающійся извѣстное число разъ въ одномъ рядѣ, столько же разъ встрѣчается и въ другомъ, и наоборотъ. При этомъ не обращается вниманія на члены, обращающіеся въ нуль. Измѣнить порядокъ членовъ ряда значитъ образовать изъ него новый, отличающійся отъ него только порядкомъ членовъ. Въ этихъ опредѣленіяхъ заключается предположеніе, что одинъ и тотъ же членъ ряда встрѣчается въ немъ лишь конечное число разъ. Далѣе, чтобы нѣкоторое измѣненіе порядка

членовъ было вполнѣ опредѣлено, нужно однозначнымъ образомъ указать то мѣсто n', на которое, по измѣненіи порядка, попадаетъ членъ, занимавшій до него мѣсто n. Такимъ образомъ каждому конечному значенію n соотвѣтствуетъ конечное значеніе n'; сказать, что u_n передвигается въ безконечность, не значитъ опредѣлить мѣсто, которое должно занять u_n послѣ измѣненія порядка.

225. Само собою возникаетъ вопросъ: позволительно ли мѣнять порядокъ членовъ ряда? Мы увидимъ, что это не всегда позволительно, потому что измѣненіе порядка членовъ можетъ не только повліять на значеніе суммы ряда, въ случаѣ его сходимости, но можетъ измѣнить и самый характеръ ряда. Мы будемъ говорить, что рядъ абсолютно сходящійся или абсолютно расходящійся, если онъ сохраняетъ свой характеръ при любомъ порядкѣ членовъ. Мы докажемъ, что для такихъ рядовъ не только характеръ, но и значеніе суммы остается безъ измѣненія. Просто сходящимся (расходящимся) мы назовемъ не абсолютно сходящійся (расходящійся) рядъ.

226. Мы ограничимся изученіемъ такихъ рядовъ, для которыхъ $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$, потому что такіе ряды всегда допускаютъ измѣненіе порядка членовъ, какъ мы его опредѣлили во § 224. Прежде всего замѣтимъ что въ такихъ рядахъ никакой членъ $a \gtrless 0$ не можетъ встрѣтиться безконечное число разъ, потому что, назначивъ какое нибудь число ε между 0 и $|a|$, всегда найдемъ такое число ν, что при $n > \nu$ будемъ имѣть $|u_n| < \varepsilon$, и поэтому, члены, равные a, необходимо будутъ заключаться въ числѣ первыхъ ν членовъ, значитъ, число ихъ ограничено. Кромѣ того, условіе, что $\lim u_u = 0$, т. е. что общій членъ рядъ имѣетъ предѣломъ нуль, сохранится при всякомъ измѣненіи порядка членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ ν' то мѣсто, на которое попадаетъ, послѣ измѣненія порядка членовъ, тотъ изъ членовъ $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, который въ новомъ рядѣ станетъ правѣе всѣхъ прочихъ названныхъ ν членовъ. Тогда въ числѣ первыхъ ν' членовъ новаго ряда необходимо будутъ заключаться всѣ тѣ члены, абсолютная величина которыхъ не меньше ε (XXIV). Слѣдовательно, каково бы ни было заданное число $\varepsilon > 0$, всегда существуетъ такое число ν', что при $n > \nu'$, $|u_n| < \varepsilon$. Поэтому и при новомъ порядкѣ $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$.

227. Теорема I. Рядъ съ положительными членами можетъ быть только абсолютно сходящимся или абсолютно расходящимся.

Положимъ, что данъ расходящійся рядъ и въ немъ произведено нѣкоторое измѣненіе порядка членовъ, пусть новый рядъ будетъ $u_1' + u_2' + u_3' + \cdots$. Если въ этомъ рядѣ возьмемъ n' чле-

новъ, въ числѣ которыхъ находятся всѣ члены суммы S_n, то $S'_{n'} \geqq S_n$, и такъ какъ, по условію, S_n возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n, то тоже самое будетъ и съ $S'_{n'}$, потому что $n' (\geqq n)$ возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n. Слѣдовательно, рядъ остается расходящимся и послѣ преобразованія. Если далѣе рядъ былъ сходящійся, то возьмемъ въ немъ сумму n первыхъ членовъ S_n, выбравъ n достаточно большимъ, чтобы въ ней заключались всѣ n' членовъ суммы $S'_{n'}$. Тогда $S'_{n'} \leqq S_n$, и такъ какъ, по условію, S_n стремится къ конечному предѣлу S, когда n', а слѣдовательно, и n безпредѣльно возрастаютъ, то то же самое можно сказать и объ $S'_{n'}$, которая постоянно возрастаетъ при возрастаніи n'. Слѣдовательно, рядъ остается сходящимся.

228. Въ послѣднемъ случаѣ, кромѣ того, всегда $S' \leqq S$. Если же, наоборотъ, во второмъ рядѣ возьмемъ n' членовъ, въ числѣ которыхъ заключаются всѣ n членовъ суммы S_n, то $S'_{n'} \geqq S_n$. Вмѣстѣ съ тѣмъ, такъ какъ существованіе S' уже доказано, одновременно будемъ имѣть $S' \geqq S$. Слѣдовательно, $S' = S$. Мы видимъ такимъ образомъ, что измѣненіе порядка членовъ сходящагося ряда съ положительными членами не только не нарушаетъ сходимости ряда, но не мѣняетъ и его суммы.

229. Теорема II. (Теорема Римана.)[1]) Данъ рядъ, члены котораго стремятся къ предѣлу, равному нулю; пусть

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \quad b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

будутъ ряды, состоящіе изъ положительныхъ и изъ абсолютныхъ величинъ отрицательныхъ членовъ даннаго ряда, расположенныхъ въ томъ самомъ порядкѣ, въ какомъ они были расположены въ данномъ рядѣ. Если ряды (a) и (b) сходящіеся, то данный рядъ абсолютно сходящійся. Если изъ этихъ двухъ рядовъ только одинъ сходящійся, то данный рядъ абсолютно расходящійся, если оба предыдущіе ряда расходящіеся, то характеръ даннаго ряда зависитъ отъ порядка членовъ, такъ какъ приличнымъ измѣненіемъ этого порядка можно сдѣлать рядъ сходящимся, расходящимся или неопредѣленнымъ, и въ случаѣ сходимости даннаго ряда достигнуть того, что сумма его можетъ принять любое значеніе.

а) Разсматривая n первыхъ членовъ даннаго ряда, положимъ, что между ними α положительныхъ и β отрицательныхъ. Тогда, обозначая черезъ A_n и B_n суммы n первыхъ членовъ рядовъ (a) и (b), будетъ имѣть

$$S_n = A_\alpha - B_\beta . \tag{18}$$

---

[1]) Эта теорема дана Риманомъ въ 1834 г.; см. B. Riemanns Gesammelte Werke" стр. 221.

Замѣтимъ, что числа α и β возрастаютъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n, иначе всѣ члены даннаго ряда, начиная съ нѣкотораго мѣста, были бы числами одного знака. Если оба ряда (a) и (b) сходящіеся, то S_n стремится къ предѣлу $S = A - B$, слѣдовательно, данный рядъ сходящійся. Онъ, кромѣ того, абсолютно сходящійся, потому что въ § 227 было показано, что какъ въ (a), такъ и въ (b) можно переставлять, члены какъ угодно, не нарушая ихъ сходимости, а слѣдовательно, и сходимости даннаго ряда.

b) Если одинъ изъ рядовъ (a) и (b) сходящійся, а другой расходящійся, то S_n возрастаетъ безпредѣльно по абсолютной величинѣ. Слѣдовательно, данный рядъ расходящійся и притомъ, на основаніи сказаннаго въ § 227, абсолютно.

c) Положимъ теперь, что ряды (a) и (b) оба расходящіеся. Равенство (18) теперь ничего не даетъ, потому что A_α и B_β возрастаютъ безпредѣльно, при чемъ ничего нельзя утверждать о томъ, какимъ образомъ измѣняется при этомъ ихъ разность. Необходимо прибѣгнуть къ новымъ средствамъ. Покажемъ сперва, что члены даннаго ряда можно расположить такъ, что рядъ будетъ сходящимся и имѣть сумму, равную любому наперед заданному числу σ. Возьмемъ какъ разъ столько членовъ ряда (a), сколько нужно, чтобы получить сумму, большую σ, т. е. чтобы $a_1 + a_2 \cdots + a_\mu > \sigma$, $a_1 + a_2 + \cdots a_{\mu-1} \leqq \sigma$, или

$$S_\mu > \sigma, \quad S_{\mu-1} \leqq \sigma .$$

Это всегда возможно, потому что рядъ (a) по условію расходящійся. Точно также расходимость ряда (b) позволяетъ отнять отъ S_μ какъ разъ столько членовъ этого ряда, сколько нужно, чтобы получилась сумма, не большая σ, такъ что

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu - b_1 - b_2 - \cdots - b_\nu \leqq \sigma ,$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu - b_1 - b_2 - \cdots - b_{\nu-1} > \sigma$$

или

$$S_{\mu+\nu} \leqq \sigma, \quad S_{\mu+\nu-1} > \sigma .$$

Аналогичнымъ образомъ прибавляемъ опять μ' членовъ ряда (a) и отнимаемъ ν' членовъ ряда (b) и продолжаемъ такое образованіе суммъ, выполняющихъ возможно малыя колебанія около даннаго числа σ. Полученныя выше неравенства и слѣдующія за ними:

$$S_{\mu+\nu+\mu'} > \sigma, \qquad S_{\mu+\nu+\mu'-1} \leqq \sigma,$$
$$S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'} \leqq \sigma, \qquad S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'-1} > \sigma,$$
$$S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'+\mu''} > \sigma, \qquad S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'+\mu''-1} \leqq \sigma,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

могутъ быть написаны слѣдующимъ образомъ:

$$0 < S_\mu - \sigma \leqq a_\mu,$$
$$0 \leqq \sigma - S_{\mu+\nu} < b_\nu,$$
$$0 < S_{\mu+\nu+\mu'} - \sigma \leqq a_{\mu+\mu'},$$
$$0 \leqq \sigma - S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'} < b_{\nu+\nu'},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Они показываютъ, что когда число n получаетъ послѣдовательно значенія

$$(19) \quad \mu,\ \mu+\nu,\ \mu+\nu+\mu',\ \mu+\nu+\mu'+\nu',\ \mu+\nu+\mu'+\nu'+\mu'',\ \ldots,$$

то разности между S_n и σ, по абсолютной величинѣ, не превосходятъ членовъ ряда

$$a_\mu,\ b_\nu,\ a_{\mu+\mu'},\ b_{\nu+\nu'},\ a_{\mu+\mu'+\mu''},\ b_{\nu+\nu'+\nu''},\ \ldots,$$

имѣющихъ, по условію, предѣломъ нуль. Итакъ,

$$\lim S_n = \sigma,$$

когда n проходитъ послѣдовательность значеній (19). Если значеніе n не принадлежитъ къ этой послѣдовательности, то оно заключается между двумя ея числами i и j, и мы будемъ имѣть

$$S_i < S_n < S_j \quad \text{oder} \quad S_i > S_n > S_j,$$

смотря по тому, занимаетъ ли i четное или нечетное мѣсто въ послѣдовательности (19). Итакъ, S_n всегда заключается между двумя числами, стремящимися къ предѣлу σ, и равенство (20) справедливо безъ всякихъ ограниченій. Наконецъ, чтобы доказать, что данный рядъ можно сдѣлать расходящимися или неопредѣленнымъ достаточно повторить предыдущія разсужденія. Замѣняя постоянное число σ перемѣннымъ, возрастающимъ безпредѣльно съ n или не стремящимся ни къ какому предѣлу.

230. Теорема III. (Теорема Дирихле.) Для абсолютной сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы рядъ абсолютныхъ величинъ его членовъ былъ сходящимся [1]).

Сумма первыхъ n членовъ ряда абсолютныхъ величинъ членовъ даннаго ряда равна $A_\alpha + B_\beta$. Этотъ рядъ будетъ, слѣдовательно, расходящимся, если хотя одинъ изъ рядовъ (a) или (b) расходящійся, и сходящимся только въ случаѣ одновременной сходимости обоихъ рядовъ (a) и (b). На основаніи предыдущей теоремы эта одновременная сходимость имѣетъ мѣсто

---

[1]) Эта важная теорема, какъ указано, принадлежитъ Lejeune-Dirichlet (Crellés Journal 1829). (XXV).

тогда и только тогда, когда данный рядъ абсолютно сходящійся.

231. Теорема IV. Сумма абсолютно сходящагося ряда не мѣняется ни при какомъ измѣненіи порядка его членовъ.

Мы видѣли, что въ случаѣ абсолютной сходимости даннаго ряда, ряды (a) и (b) сходящіеся. Сумма n первыхъ членовъ $A_\alpha - B_\beta$ обращается при измѣненіи порядка членовъ въ $A'_{\alpha'} - B'_{\beta'}$. Но сходящійся рядъ (a) имѣетъ всѣ члены положительные, а мы уже доказали (§ 228), что сумма такого ряда не зависитъ отъ порядка членовъ, такъ что при безпредѣльномъ возрастаніи α или α' числа A_α и $A'_{\alpha'}$ стремятся къ одному и тому же предѣлу A. То же самое относится и къ числамъ B_β и $B'_{\beta'}$, стремящихся къ предѣлу B. Слѣдовательно, сумма даннаго ряда всегда равна $A-B$.

232. Теорема V. Если члены просто сходящагося ряда по абсолютной величинѣ постоянно убываютъ, то отношеніе числа положительныхъ членовъ, содержащихся въ числѣ первыхъ n членовъ ряда, къ числу отрицательныхъ, содержащихся тамъ же, при безпредѣльномъ возрастаніи n, не можетъ стремиться къ предѣлу, отличному отъ единицы [1]).

Полагая $a_n = 1$ или $a_n = -1$, смотря по тому, будетъ ли общій членъ ряда, абсолютную величину котораго обозначимъ черезъ u_n, положительнымъ или отрицательнымъ, мы можемъ написать данный рядъ въ видѣ

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \cdots$$

На основаніи теоремы Дирихле (III), рядъ абсолютныхъ величинъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ будетъ расходящимся. Кромѣ того, члены ряда, убывая по абсолютной величинѣ, стремятся къ нулю, слѣдовательно, (см. § 145)

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} = 0,$$

предполагая, что первый предѣлъ существуетъ. Замѣтимъ теперь, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, очевидно, изображаетъ собою избытокъ числа положительныхъ членовъ надъ числомъ отрицательныхъ, содержащихся въ числѣ первыхъ n членовъ ряда *). Предѣлъ отношенія

---

[1]) См. въ Bulletin des sciences math. et astronom. (1888) остроумное доказательство этой теоремы, принадлежащее Г. Багнера (G. Bagnera).

*) Такъ что число положительныхъ членовъ равно $\frac{n + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{2}$, а число отрицательныхъ равно $\frac{n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{2}$.

перваго числа ко второму будетъ

$$\lim \frac{n + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{1 - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = 1,$$

какъ и утверждаетъ теорема. Ее можно формулировать такъ: положительныя числа встрѣчаются такъ же часто, какъ и отрицательныя.

233. Упражненія. a) Рядъ

$$1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9} + \cdots$$

можетъ быть развѣ только просто сходящимся, потому что рядъ абсолютныхъ величинъ расходящійся. Но замѣчая, что абсолютныя величины членовъ постоянно убываютъ, а положительные члены встрѣчаются чаще отрицательныхъ, можемъ утверждать, на основаніи предыдущей теоремы, что рядъ не можетъ быть сходящимся. Дѣйствительно, съ помощью формулы (1) (§ 183 и слѣд.) видимъ, что сумма n первыхъ членовъ S_n возрастаетъ безпредѣльно, какъ $\frac{1}{3}\log n$ (XXVI).

b) Рядъ $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$ очевидно неопредѣленный при $p < 0$, потому что его члены суть числа поперемѣнно положительныя и отрицательныя, и не стремящіеся къ нулю. Напротивъ при $p > 0$ рядъ будетъ сходящимся, потому что абсолютныя величины его членовъ постоянно убываютъ и стремятся къ нулю. Съ другой стороны, мы знаемъ, что при $p > 1$, рядъ абсолютныхъ величинъ членовъ даннаго ряда сходящійся (§ 212, a). Слѣдовательно, данный рядъ

абсолютно сходящійся при $p > 1$,

просто сходящійся „ $0 < p \leqq 1$,

неопредѣленный „ $p \leqq 0$.

c) Въ частности просто сходящимся будетъ рядъ

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots,$$

поэтому на основаніи теоремы Римана возможно расположить члены ряда въ такомъ порядкѣ, чтобы сумма ряда равнялась произвольно выбранному числу σ. Мы покажемъ, что этого можно достигнуть, располагая члены ряда такимъ образомъ, чтобы вѣроятность найти въ новомъ рядѣ положительный членъ была равна

(21) $$\tilde{\omega} = \frac{e^{2\sigma}}{e^{2\sigma}+4}$$ *),

предполагая, что при этомъ мы не мѣняемъ той послѣдовательности, въ которой расположены члены одинаковыхъ знаковъ въ данномъ рядѣ. Дѣйствительно, если въ числѣ n первыхъ членовъ даннаго ряда будетъ α положительныхъ и β отрицательныхъ, и положимъ

$$\lim\frac{\alpha}{n} = \tilde{\omega}, \text{ а слѣдовательно } \lim\frac{\beta}{n} = 1 - \tilde{\omega}$$ **),

то можемъ написать

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2\alpha - 1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2\beta}\right).$$

и, на основаніи формулы (1) (§ 183)

$$S_n = H_{2\alpha} - \tfrac{1}{2}H_\alpha - \tfrac{1}{2}H_\beta = \log 2\alpha - \tfrac{1}{2}\log\alpha\beta + \varrho_{2\alpha} - \tfrac{1}{2}(\varrho_\alpha + \varrho_\beta).$$

откуда, при безконечномъ n,

$$S = \frac{1}{2}\lim\log\frac{4\alpha}{\beta} = \log\left(2\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{1-\tilde{\omega}}}\right).$$

Приравнивъ это выраженіе числу σ и вычисливъ отсюда $\tilde{\omega}$, мы и получимъ выраженіе (21). Если желаемъ, напримѣръ, чтобы сумма даннаго ряда осталась безъ измѣненія, т. е., чтобы $\sigma = \log 2$, должны взять $\tilde{\omega} = \frac{1}{2}$. Слѣдовательно, необходимо, чтобы положительные и отрицательные члены встрѣчались одинаково часто. Напримѣръ,

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \cdots = \log 2.$$

Точно также, если желаемъ, чтобы сумма была равна нулю, положимъ въ (21) $\sigma = 0$, откуда $\tilde{\omega} = \frac{1}{5}$ (т. е. на 5 членовъ въ n членахъ должно быть 4 отрицательныхъ и 1 положительный). Напримѣръ,

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{5} - \cdots = 0.$$

d) Разсмотримъ снова биноміальный рядъ съ цѣлью узнать, въ какихъ случаяхъ онъ будетъ абсолютно сходящимся. Мы видѣли,

---

*) Вѣроятность эта равна предѣлу отношенія числа положительныхъ членовъ, содержащихся въ n членахъ ряда, которое обозначимъ черезъ α, къ числу n, при безпредѣльномъ возрастаніи n.

**) Потому что вѣроятность встрѣтить отрицательный членъ, какъ событіе противоположное первому, въ суммѣ съ вѣроятностью перваго должна дать достовѣрность, т. е. вѣроятность, равную 1.

что при x отрицательномъ всѣ члены ряда, начиная съ нѣкотораго мѣста, будутъ числами одного и того же знака (§ 222) и поэтому (§ 227) рядъ будетъ абсолютно сходящимся въ интервалѣ $(-1, 0)$, не исключая верхней границы. Отсюда, на основаніи теоремы Дирихле, заключаемъ, что сходимость будетъ абсолютною и въ интервалѣ $(0, 1)$, за исключеніемъ верхней границы. Простая сходимость можетъ, слѣдовательно, имѣть мѣсто только при $x = 1$, и дѣйствительно имѣетъ мѣсто для тѣхъ значеній m, для которыхъ рядъ не будетъ сходящимся при $x = -1$. Припоминая, что при $x = -1$ рядъ будетъ сходящимся только при $m \geqq 0$, а при $x = 1$ онъ сходится при $m > -1$, приходимъ къ заключенію, что биноміальный рядъ будетъ просто сходящимся лишь при $x = 1$ и при значеніяхъ m между -1 и 0, за исключеніемъ границъ.

е) Полагая, напримѣръ, въ биноміальномъ рядѣ $x = 1$, получаемъ формулу

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

справедливую лишь при $m > 1$. При этомъ важно знать, что при отрицательномъ m порядка членовъ мѣнять нельзя. Полагая далѣе $m = \frac{1}{2}$, при произвольномъ x, получаемъ формулу

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots,$$

справедливую независимо отъ порядка членовъ при всякомъ x, абсолютная величина котораго не превышаетъ 1, т. е. при $|x| \leqq 1$. При $m = -\frac{1}{2}$ получаемъ другую важную формулу

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \cdots,$$

справедливую при всякомъ x, котораго абсолютная величина меньше 1 ($|x| < 1$). Она остается справедливою и при $x = 1$, но въ этомъ случаѣ порядка членовъ мѣнять нельзя.

Дѣйствія надъ рядами.

234. Опредѣленія. Сложить два данныхъ ряда съ общими членами u_n и v_n значитъ составить новый рядъ, общій членъ котораго равенъ

$$w = u_n + v_n;$$

перемножить эти ряды значитъ составить новый рядъ, общій членъ котораго равенъ

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-2} + \cdots + u_n v_1.$$

Первый изъ составленныхъ рядовъ называется суммою, второй — произведеніемъ данныхъ рядовъ.

235. Теорема I. Сложеніе двухъ сходящихся рядовъ даетъ новый сходящійся рядъ, сумма котораго получается черезъ сложеніе суммъ данныхъ рядовъ.

Если U_n и V_n обозначаютъ суммы n первыхъ членовъ данныхъ рядовъ, то аналогичная имъ сумма для ряда, полученнаго сложеніемъ ихъ, будетъ

$$W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n$$
$$= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = U_n + V_n.$$

Слѣдовательно, W_n при n безконечномъ стремится къ предѣлу $W = U + V$. Замѣтимъ, что эта теорема, очевидно, справедлива при всякомъ конечномъ числѣ слагаемыхъ рядовъ. Съ другой стороны ниже мы увидимъ, что она вовсе не всегда справедлива, если имѣемъ дѣло съ безконечнымъ числомъ рядовъ.

236. Теорема II. (Теорема Абеля.) Если черезъ умноженіе двухъ сходящихся рядовъ получается также сходящійся рядъ, то его сумма равна произведенію суммъ данныхъ рядовъ.

Складывая n первыхъ членовъ ряда, полученнаго отъ умноженія данныхъ рядовъ, т. е. чиселъ

$$w_1 = u_1 v_1,\ w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1,\ w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1, \ldots$$

получимъ

$$W_n = u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + u_3 V_{n-2} + \cdots + u_n V_1, \tag{22}$$

далѣе, сложивъ $W_1,\ W_2, \ldots, W_n$ и раздѣливъ сумму на n, находимъ

$$\frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \frac{1}{n}(U_1 V_n + U_1 V_{n-1} + \cdots + U_n V_1). \tag{23}$$

Такъ какъ, по условію, всѣ три ряда сходящіеся, то существуютъ предѣлы $U,\ V,\ W$ чиселъ $U_n,\ V_n,\ W_n$ при безконечномъ n. Поэтому существуютъ (§§ 142, а; 144) и предѣлы обѣихъ частей равенства (23), а именно W и UV. Слѣдовательно, $W = UV$.

237. Примѣчанія. а) Умноженіе двухъ сходящихся рядовъ можетъ дать рядъ неопредѣленный. Расходящійся рядъ не можетъ быть полученъ этимъ путемъ никогда, потому что иначе лѣвая часть равенства (23), при безпредѣльномъ возрастаніи W_n, также возрастала бы безпредѣльно, вмѣсто того, чтобы приближаться къ предѣлу UV. Чтобы показать далѣе, что произведеніе дѣйствительно можетъ быть неопредѣленнымъ, перемножимъ ряды

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,\quad \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \cdots, \tag{24}$$

оба сходящіеся (§ 195). Общій членъ произведенія не стремится къ нулю, потому что его абсолютная величина

$$\frac{1}{\log(n+1)}+\frac{1}{2\log n}+\frac{1}{3\log(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\log 2}>\frac{H_n}{\log(n+1)}$$

и въ концѣ концовъ превзойдетъ всякое число, меньшее 1 *). Слѣдовательно, произведеніе данныхъ рядовъ, рядъ несходящійся. Надо, однако, замѣтить, что данные ряды оба просто сходящіеся. Теорема слѣдующаго параграфа покажетъ, что только въ этомъ случаѣ и можетъ получиться не сходящееся произведеніе.

b) Въ частности можетъ случиться, что, возводя просто сходящійся рядъ въ квадратъ, получимъ не сходящійся рядъ. Возвысимъ, напримѣръ, въ квадратъ рядъ

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\cdots,$$

тогда получимъ рядъ, въ которомъ абсолютная величина общаго члена

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt{3(n-2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}$$

не стремится къ нулю при безконечномъ n. Дѣйствительно,

$$\sqrt{\nu(n-\nu+1)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2-(n+1-2\nu)^2}\leqq\tfrac{1}{2}(n+1),$$

и выше написанная сумма состоитъ изъ n дробей, изъ которыхъ каждая не меньше $\frac{2}{n+1}$; слѣдовательно, въ концѣ концовъ она превзойдетъ всякое число, меньшее 2.

c) Можетъ случиться и обратное, т. е. что квадратъ просто сходящагося ряда будетъ тоже сходящійся рядъ. Если, напримѣръ, возвысимъ въ квадратъ рядъ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$, то получимъ рядъ съ членами попеременно положительными и отрицательными **), но абсолютная величина общаго члена

$$\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}=\frac{2H_n}{n+1}$$

постоянно убываетъ и стремится къ нулю, такъ какъ

$$\frac{2}{n}H_{n-1}-\frac{2}{n+1}H_n=\frac{2}{n}\left[\frac{H_n}{n+1}-\frac{1}{n}\right]>0.$$

---

*) Такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty}\left[\frac{H_n}{\log(n+1)}\right]=1$, (форм. 1) § 183).

**) Какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ.

Припоминая теперь, что сумма даннаго ряда равна $\log 2$, на основаніи теоремы Абеля будемъ имѣть

$$\tfrac{1}{2}H_1 - \tfrac{1}{3}H_2 + \tfrac{1}{4}H_3 - \tfrac{1}{5}H_4 + \cdots = \tfrac{1}{2}(\log 2)^2.$$

238. Теорема III. Отъ умноженія двухъ сходящихся рядовъ, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ абсолютно сходящійся, получается сходящійся рядъ [1]). Равенство (22) можно представить въ видѣ

$$W_n = u_1(V - \varrho_n) + u_2(V - \varrho_{n-1}) + \cdots + u_n(V - \varrho_1) = U_n V - \sigma_n,$$

если обозначить черезъ ϱ_n остатокъ въ рядѣ (v) и положить

$$\sigma_n = u_1\varrho_n + u_2\varrho_{n-1} + u_3\varrho_{n-2} + \cdots + u_n\varrho_1.$$

Если было бы доказано, что при n безконечномъ σ_n стремится къ нулю, то сейчасъ можно было бы написать

$$W = \lim W_n = V \lim U_n = U V.$$

Все дѣло сводится поэтому къ доказательству, что σ_n стремится къ 0. Предположимъ, что рядъ (u) абсолютно сходящійся, а рядъ (v) просто сходящійся. Разложимъ число n на два слагаемыхъ ν и $n-\nu$, оба безпредѣльно возрастающія вмѣстѣ съ n. Пусть ϱ и ϱ' обозначаютъ соотвѣтственно наибольшія изъ абсолютныхъ величинъ чиселъ

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_{n-\nu} \text{ и } \varrho_{n-\nu+1}, \varrho_{n-\nu+2}, \ldots, \varrho_n.$$

Такъ какъ рядъ (v) сходящійся, то число ϱ остается конечнымъ, когда n безпредѣльно возрастаетъ. Кромѣ того, ϱ' стремится къ нулю, когда $n-\nu$ вмѣстѣ съ n безпредѣльно возрастаетъ и всѣ числа $\varrho_{n-\nu+1}, \varrho_{n-\nu+2}, \ldots$ стремятся къ нулю. Замѣтивъ это, можемъ написать

$$\sigma_n = (u_1\varrho_n + u_2\varrho_{n-1} + \cdots + u_\nu\varrho_{n-\nu+1}) + (u_{\nu+1}\varrho_{n-\nu} + \cdots + u_n\varrho_1),$$

и тотчасъ видимъ, что абсолютная величина σ_n не больше чѣмъ

$$\varrho'(u_1' + u_2' + \cdots + u_\nu') + \varrho(u_{\nu+1}' + u_{\nu+2}' + \cdots + u_n') = \varrho' U_\nu' + \varrho(U_n' - U_\nu'),$$

---

[1]) Эта теорема была впервые высказана и доказана Коши въ его „Cours d'Analyse" p. 147, но только для случая, когда оба умножаемые ряда абсолютно сходящіеся. Затѣмъ Мертенсъ (Mertens, Crelle's Journ. B. 79 p. 182) доказалъ, что она справедлива, когда лишь одинъ изъ нихъ абсолютно сходящійся. Приводимое здѣсь доказательство принадлежитъ Іенсену (Iensen, Nouv. Corr. math. 1879 p. 430).

гдѣ $u'_1, u'_2, \ldots$, абсолютныя величины чиселъ $u_1, u_2, \ldots$ Такъ какъ рядъ (u) абсолютно сходящійся, то и рядъ (u') сходящійся. Отсюда слѣдуетъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи n, U'_ν стремится къ конечному предѣлу, а $\varrho' U'_\nu$ къ нулю. Также и $U'_n - U'_\nu$ стремится къ нулю, а съ нимъ и произведеніе его на ϱ. Итакъ, $\lim \sigma_n = 0$.

239. Теорема IV. Ряды, получаемые отъ сложенія или умноженія двухъ абсолютно сходящихся рядовъ, будутъ также абсолютно сходящіеся.

Если ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

абсолютно сходящіеся, то, на основаніи теоремы Дирихле, будутъ сходящимися и ряды

$$u'_1 + u'_2 + u'_3 + \cdots, \quad v'_1 + v'_2 + v'_3 + \cdots,$$

составленные изъ абсолютныхъ величинъ членовъ данныхъ рядовъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ будутъ сходящимися, на основаніи теоремы I и III, ряды, опредѣляемые общими членами

$$u'_n + v'_n, \quad u'_1 v'_n + u'_2 v'_{n-1} + \cdots + u'_n v'_1.$$

Обозначая черезъ w'_n абсолютную величину общаго члена въ суммѣ или произведеніи данныхъ рядовъ, найдемъ, что въ случаѣ сложенія $w'_n \leqq u'_n + v'_n$, а въ случаѣ умноженія $w'_n \leqq u'_1 v'_n + u'_2 v'_{n-1} + \cdots + u'_n v'_1$*). Слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ рядъ (w') будетъ сходящимся, потому что его члены положительны и меньше соотвѣтствующихъ членовъ сходящихся рядовъ. Итакъ, рядъ (w) абсолютно сходящійся.

Двойные ряды.

240. Опредѣленія. Сложеніе безконечнаго числа рядовъ приводитъ къ разсмотрѣнію двойныхъ рядовъ:

$$\begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + \cdots \\ + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + \cdots \\ + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{25}$$

*) Потому что абсолютная величина суммы не превосходитъ суммы абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ.

Пусть S_{mn} обозначаетъ сумму членовъ, заключающихся въ прямоугольникѣ, содержащемъ m первыхъ строкъ и n первыхъ столбцовъ, т. е. пусть

$$\begin{aligned} S_{nm} = \quad & a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{1n} \\ & + a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \cdots + a_{mn}. \end{aligned}$$

Рядъ называется сходящимся, если S_{mn} при безпредѣльномъ возрастаніи m и n стремится къ конечному предѣлу S, независящему отъ закона возрастанія чиселъ m и n. Если, наоборотъ, S_{mn} возрастаетъ безпредѣльно, то рядъ называется расходящимся. Во всѣхъ другихъ случаяхъ онъ будетъ неопредѣленнымъ.

241. Двойные ряды можно суммировать по строкамъ, т. е. вычислить суммы u_1, u_2, u_3, ... строкъ въ схемѣ (25) и изъ нихъ образовать рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$. Можно ихъ суммировать и по столбцамъ, т. е. вычислить суммы столбцовъ v_1, v_2, v_3, ... въ схемѣ (25) и изъ нихъ образовать рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$. Если двойной рядъ сходящійся или расходящійся, то оба полученные такимъ образомъ ряда будутъ соотвѣтственно сходящимися или расходящимися, и въ случаѣ сходимости суммы U и V этихъ рядовъ совпадаютъ съ суммою S двойного ряда. Замѣтимъ, что суммированіе двойного ряда по строкамъ состоитъ въ томъ, что въ суммѣ S_{mn} сперва увеличиваютъ безпредѣльно n, не мѣняя при этомъ m, а потомъ въ полученномъ предѣлѣ при n безконечномъ увеличиваютъ безпредѣльно m. При суммированіи по столбцамъ, наоборотъ, сперва возрастаетъ безпредѣльно m при постоянномъ n, а потомъ въ полученномъ предѣлѣ возрастаетъ безпредѣльно n. Иными словами, два способа суммированія даютъ для S нижеслѣдующія выраженія:

$$S = \lim_{m=\infty}\left(\lim_{n=\infty} S_{mn}\right), \quad S = \lim_{n=\infty}\left(\lim_{m=\infty} S_{mn}\right).$$

Чтобы можно было назвать данный двойной рядъ сходящимся, необходимо, чтобы всякій другой способъ сложенія давалъ ту же сумму. Такъ, напримѣръ, мы должны имѣть $S = \lim_{n=\infty} S_{mn}$.

242. Правило сложенія рядовъ привело бы къ приравниванію суммъ U и V между собою, если онѣ существуютъ. Но легко видѣть, что суммированіе по столбцамъ можетъ дать результатъ отличный отъ того, который получается при суммированіи по строкамъ. Ясно, кромѣ того, что равенство получаемыхъ такимъ образомъ результатовъ еще не достаточно для того, чтобы утверждать сходимость двойного ряда, потому что другіе способы увеличивать

безпредѣльно m и n могли бы давать другіе результаты, и даже расходящіеся или неопредѣленные ряды. Чтобы привести примѣры двойныхъ рядовъ, представляющихъ различныя выше упомянутыя особенности, достаточно выбирать различныя формы S_{mn}, такъ какъ каждой изъ этихъ формъ соотвѣтствуетъ двойной рядъ, опредѣляемый общимъ членомъ

$$a_{mn} = S_{mn} - (S_{m,n-1} + S_{m-1,n}) + S_{m-1,n-1},$$

при чемъ тѣ изъ S_{kl}, которыхъ хотя одинъ изъ указателей равенъ нулю, считаются нулями (XXVII).

243. Такъ, чтобы получить примѣры неопредѣленныхъ рядовъ, можно давать S_{mn} значенія

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^n,\ \frac{m}{m+n},\ \frac{mn}{(m+n)^2},\ \frac{mn(m-n)}{(m+n)^3},\ \dots$$

Первый рядъ при суммированіи по строкамъ, очевидно, расходящійся, между тѣмъ какъ при суммированіи по столбцамъ, онъ сходящійся и сумма его равна 1. При $m = n$, сумма его равна e, а при другихъ законахъ безпредѣльнаго возрастанія m и n можно получить для S любое значеніе, большее единицы. При тѣхъ же обстоятельствахъ второй рядъ оказывается сходящимся и сумма его будетъ соотвѣтственно равна 0, 1, $\frac{1}{2}$, а при другихъ выбранныхъ законахъ возрастанія m и n сумма ряда можетъ получить любое положительное значеніе, не большее 1*). Третій рядъ при сложеніи по строкамъ и по столбцамъ даетъ $S = 0$, а при $m = n$ $S = \frac{1}{4}$. Наконецъ, четвертый рядъ, дающій $S = 0$ при всѣхъ трехъ упомянутыхъ способахъ сложенія, при другихъ можетъ дать сумму, равную любому числу, квадратъ котораго не больше $\frac{1}{108}$ (XXVIII). Ниже мы приводимъ еще очень простой примѣръ неопредѣленнаго ряда

$$\begin{aligned}
&0+1+0+0+0+\cdots\\
&-1+0+1+0+0+\cdots\\
&+0-1+0+1+0+\cdots\\
&+0+0-1+0+1+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

При сложеніи по строкамъ получаемъ 1, по столбцамъ -1. Вообще, предѣлъ S_{mn} равенъ 1, 0 или -1, смотря по тому, будетъ ли $m < n$, $m = n$ или $m > n$. Чтобы, съ другой стороны, имѣть безчисленное множество примѣровъ двойныхъ сходящихся рядовъ, или лучше сказать, чтобы построить двойной рядъ, имѣющій ту же сумму, какъ нѣкоторый простой сходящійся рядъ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, можно разсмотрѣть рядъ

$$\begin{aligned}
&(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots\\
&+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+(a_4-a_5)+\cdots\\
&+(a_3-a_4)+(a_4-a_5)+(a_5-a_6)+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

---

*) Положивъ $m = kn$, найдемъ $(k > 0)$ $\lim S_{mn} = \frac{k}{k+1}$.

Если A_n сумма n первыхъ членовъ даннаго простого ряда, то

$$S_{mn} = A_m + A_n - A_{m+n},\ \lim S_{mn} = A.$$

244. Преобразованіе Клаузена (Clausen) [1]. Положимъ, что данъ сходящійся двойной рядъ. Положимъ

$$w_n = a_{nn} + (a_{n,\,n+1} + a_{n+1,\,n}) + (a_{n,\,n+2} + a_{n+2,\,n}) + \cdots$$

Замѣтимъ, что

$$u_n + v_n = (a_{1n} + a_{n1}) + (a_{2n} + a_{n2}) + \cdots + (a_{n-1,\,n} + a_{n,\,n-1}) + a_{nn} + w_n,$$

а слѣдовательно, $U_n + V_n = S_{nn} + W_n$. Такъ какъ при безконечномъ n

$$\lim U_n = \lim V_n = \lim S_{nn} = S,$$

то также и $\lim W_n = S$. Преобразованіе двойного ряда въ простой $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ часто бываетъ выгоднѣе, чѣмъ преобразованіе въ одинъ изъ рядовъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ или $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$. Но не всегда. Напримѣръ, нѣтъ выгоды дѣлать это преобразованіе въ послѣднемъ рядѣ предыдущаго параграфа.

245. Теорема. Двойной рядъ будетъ сходящимся, если по замѣнѣ всѣхъ членовъ абсолютными ихъ величинами рядъ, полученный черезъ сложеніе по строкамъ (или столбцамъ), будетъ сходящимся.

По предположенію всѣ строки схемы (25) будутъ абсолютно сходящимися рядами. Пусть

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \cdots \\
\sigma_2 &= |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}| + |a_{24}| + \cdots \\
\sigma_3 &= |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}| + |a_{34}| + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

будутъ суммы рядовъ, составленныхъ изъ абсолютныхъ величинъ членовъ, а u_{mn} пусть обозначаетъ сумму n первыхъ членовъ m-ой строки схемы (25), такъ что

$$S_{mn} = u_{1n} + u_{2n} + u_{3n} + \cdots + u_{mn}.$$

Очевидно, имѣемъ

$$|u_{mn}| \leq |a_{m1}| + |a_{m2}| + |a_{m3}| + \cdots + |a_{mn}| < \sigma_m.$$

Если теперь задано по произволу положительное число ε, то схо-

[1] Crelles Journal, III, p. 94.

димость ряда $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots$ позволяетъ найти такое число μ, что

$$|\sigma_{\mu+1} + \sigma_{\mu+2} + \sigma_{\mu+3} + \cdots + \sigma_m| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

и a fortiori

$$|u_{\mu+1,\,n} + u_{\mu+2,\,n} + u_{\mu+3,\,n} + \cdots + u_{mn}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \tag{26}$$

для всякаго $m > \mu$ и для произвольнаго n. То же число μ можно выбрать достаточно большимъ, чтобы выполнялось неравенство

$$|u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_\mu - U| < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{27}$$

Дѣйствительно, рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, сходящійся, потому что абсолютныя величины его членовъ не больше соотвѣтствующихъ членовъ ряда $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots$, по условію сходящагося. Не мѣняя теперь μ выбраннаго, какъ сказано выше, замѣтимъ что вслѣдствіе того, что

$$\lim_{n=\infty}(u_{1n} + u_{2n} + \cdots + u_{\mu n}) = u_1 + u_2 + \cdots + u_\mu,$$

можно найти такое число ν, чтобы при $n > \nu$ постоянно имѣло мѣсто неравенство

$$|u_{1n} + u_{2n} + \cdots + u_{\mu n} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_\mu)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Складывая его съ неравенствами (26) и (27), получимъ

$$|S_{mn} - U| < \varepsilon$$

для всякой пары значеній m и n, соотвѣтственно большихъ, чѣмъ μ и ν. Итакъ, S_{mn} стремится всегда къ предѣлу U, по какому закону ни возрастали бы до безконечности числа m и n.

246. Примѣчанія. а) Если какое нибудь одно изъ условій теоремы § 245 не будетъ выполнено, то можетъ случиться, что теорема не будетъ справедлива. Положимъ, напримѣръ, что положительныя числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ всѣ меньше 1 и стремятся къ нулю. Тогда ряды

$$\left|\begin{array}{l} a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_4 + \cdots \\ a_1(1-a_1) - a_2(1-a_2) + a_2(1-a_2) - a_3(1-a_3) + \cdots \\ a_1(1-a_1)^2 - a_2(1-a_2)^2 + a_2(1-a_2)^2 - a_3(1-a_3)^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{28}$$

будутъ сходящіеся. Дѣйствительно, сумма нечетнаго числа членовъ въ m-мъ рядѣ

$$a_1(1-a_1)^{m-1} - a_2(1-a_2)^{m-1} + a_2(1-a_2)^{m-1} - a_3(1-a_3)^{m-1} + \cdots$$

равна $a_1(1-a_1)^{m-1}$, а сумма четнаго числа $(2n)$ членовъ равна

$$a_1(1-a_1)^{m-1} - a_{n+1}(1-a_{n+1})^{m-1}$$

и стремится къ предѣлу $a_1(1-a_1)^{m-1}$ при возрастаніи n до безконечности. Слѣдовательно,

$$u_m = a_1(1-a_1)^{m-1},$$

поэтому рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ сходящійся и сумма его равна

$$a_1 + a_1(1-a_1) + a_1(1-a_1)^2 + \cdots = \frac{a_1}{1-(1-a_1)} = 1.$$

Если же будемъ суммировать въ схемѣ (28) по столбцамъ, то получимъ

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 + a_1(1-a_1) + a_1(1-a_1)^2 + \cdots = 1, \\ -v_2 = v_3 &= a_2 + a_2(1-a_2) + a_2(1-a_2)^2 + \cdots = 1, \\ -v_4 = v_5 &= a_3 + a_3(1-a_3) + a_3(1-a_3)^2 + \cdots = 1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

и рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ вмѣсто того, чтобы быть сходящимся и имѣть сумму 1, оказывается неопредѣленнымъ и приводится къ ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

b) Если рядъ $a_1 + a_2 + a_3 \ldots$ былъ бы расходящимся, то можно было бы думать, что теорема не оправдывается, потому что ряды (28) не абсолютно-сходящіеся. Не мѣшаетъ, однако, замѣтить, что теорема можетъ не имѣть мѣста и въ такомъ случаѣ, когда и ряды (28) и рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ абсолютно сходящіеся. Чтобы привести примѣръ, достаточно взять за $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ какой нибудь сходящійся рядъ, напримѣръ $x + x^2 + x^3 + \ldots (0 < x < 1)$. Мы получаемъ тогда схему

$$\begin{aligned} &x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + \cdots \\ &x(1-x) - x^2(1-x^2) + x^2(1-x^2) - x^3(1-x^3) + \cdots \\ &x(1-x)^2 - x^2(1-x^2)^2 + x^2(1-x^2)^2 - x^3(1-x^3)^2 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

состоящую изъ абсолютно сходящихся рядовъ, суммы которыхъ даютъ рядъ

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots = 1,$$

также абсолютно сходящійся. Между тѣмъ суммированіе по столбцамъ даетъ снова неопредѣленный рядъ

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Это происходитъ только отъ расходимости ряда $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots$

c) Нужно, однако замѣтить, что условія, поставленныя въ формулировкѣ теоремы только достаточны, но вовсе не необходимы. Въ самомъ дѣлѣ, если $\lim a_n = 0$, то двойной рядъ, составленный слѣдующимъ образомъ

$$\begin{array}{l} a_1 - a_2 + 0 + 0 + 0 + \cdots \\ + 0 + a_2 - a_3 + 0 + 0 + \cdots \\ + 0 + 0 + a_3 - a_4 + 0 + \cdots \\ + 0 + 0 + 0 + a_4 - a_5 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

будетъ сходящійся, потому что сумма S_{mn} равна a_1, когда $m = n$, и равна $a_1 - a_{m-1}$, когда $m \neq n$, поэтому всегда $\lim S_{mn} = a_1$, хотя рядъ $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots$ можетъ быть и расходящимся; онъ и будетъ такимъ, если $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ расходящійся рядъ съ положительными членами.

d) Наконецъ, замѣтимъ, что теорема, о которой идетъ рѣчь, заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, теорему Коши объ умноженіи двухъ абсолютно сходящихся рядовъ (§ 238). Дѣйствительно, если ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 \ldots$ абсолютно сходящіеся, то ясно, что въ двойномъ рядѣ

$$\begin{array}{r} u_1v_1 + u_1v_2 + u_1v_3 + u_1v_4 + \cdots \\ + u_2v_1 + u_2v_2 + u_2v_3 + \cdots \\ + u_3v_1 + u_3v_2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

сложеніе по строкамъ, послѣ замѣны всѣхъ членовъ ихъ абсолютными величинами, дастъ простой сходящійся рядъ

$$u_1' V' + u_2' V' + u_3' V' + \cdots = U' V'.$$

Поэтому и двойной рядъ будетъ сходящимся и сумма его, полученная сложеніемъ по строкамъ

$$u_1 V + u_2 V + u_3 V + \cdots = UV,$$

будетъ равна суммѣ простого ряда, полученнаго сложеніемъ по столбцамъ, т. е.

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\cdots.$$

247. Упражненія. a) Чтобы найти сумму ряда $x+2x^2+3x^3+\ldots$, сходящагося при $|x|<1$, можно его представить въ видѣ двойного ряда

$$\begin{array}{r} x+x^2+x^3+x^4+\cdots \\ +x^2+x^3+x^4+\cdots \\ +x^3+x^4+\cdots \\ +x^4+\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}$$

Суммируя одинъ разъ по строкамъ, а другой разъ по столбцамъ, находимъ:

$$x+2x^2+3x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x}+\frac{x^3}{1-x}+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

b) Разсмотримъ двойной рядъ

$$\begin{array}{r} ax+a^2x^2+a^3x^3+a^4x^4+\cdots \\ +ax^2+a^2x^4+a^3x^6+a^4x^8+\cdots \\ +ax^3+a^2x^6+a^3x^9+a^4x^{12}+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{29}$$

Если абсолютныя величины x и ax меньше 1, то получимъ абсолютно сходящіеся ряды, суммируя, какъ по строкамъ, такъ и по столбцамъ. Въ первомъ случаѣ получимъ суммы

$$u_1=\frac{ax}{1-ax},\quad u_2=\frac{ax^2}{1-ax^2},\quad u_3=\frac{ax^3}{1-ax^3},\ \ldots,$$

во второмъ

$$v_1=\frac{ax}{1-x},\quad v_2=\frac{a^2x^2}{1-x^2},\quad v_3=\frac{a^3x^3}{1-x^3},\ \ldots$$

Такимъ образомъ, приходимъ къ слѣдующему результату:

$$\frac{ax}{1-ax}+\frac{ax^2}{1-ax^2}+\frac{ax^3}{1-ax^3}+\cdots=\frac{ax}{1-x}+\frac{a^2x^2}{1-x^2}+\frac{a^3x^3}{1-x^3}+\cdots. \tag{30}$$

c) Рядомъ Ламберта называютъ слѣдующій:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}+\cdots,$$

при чемъ, конечно, предполагаютъ x отличнымъ отъ 1 и -1. Такъ какъ, далѣе,

$$u_n = \frac{x^n}{1-x^n},$$

то видно, что рядъ не можетъ быть сходящимся внѣ интервала $(-1, +1)$, такъ какъ тогда имѣли бы $\lim u_n = -1$. Напротивъ, при $|x| < 1$, условіе $\lim u_n = 0$ выполняется, и далѣе видимъ, что тогда рядъ будетъ абсолютно сходящимся, потому что

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x^{n+1}}, \quad \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|.$$

Итакъ, рядъ будетъ абсолютно сходящимся въ интервалѣ $(-1, +1)$, за исключеніемъ границъ. Замѣтивъ это, разложимъ каждый членъ въ (абсолютно-сходящійся) рядъ слѣдующимъ образомъ:

$$u_p = \frac{x^p}{1-x^p} = x^p + x^{2p} + x^{3p} + x^{4p} + \cdots.$$

Затѣмъ напишемъ

$$\begin{aligned}
S = {} & x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \cdots \\
& + x^2 \quad + x^4 \quad + x^6 \quad + x^8 + \cdots \\
& \quad + x^3 \quad\quad + x^6 \quad\quad + \cdots \\
& \quad\quad + x^4 \quad\quad + x^8 + \cdots \\
& \quad\quad\quad + x^5 \quad\quad + \cdots \\
& \quad\quad\quad\quad + x^6 \quad + \cdots \\
& \quad\quad\quad\quad\quad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Ясно, что x_n появится въ u_p тогда и только тогда, когда n дѣлится на p, и потому, суммируя по столбцамъ, получимъ

$$S = x^{\vartheta(1)} + x^{2\vartheta(2)} + x^{3\vartheta(3)} + x^{4\vartheta(4)} + \cdots, \tag{31}$$

гдѣ $\vartheta(n)$ обозначаетъ число дѣлителей n. Изъ этого уравненія ясно, почему рядъ Ламберта играетъ важную роль въ ариѳметикѣ[1]).

d) Приложимъ теперь преобразованіе Клаузена къ ряду Ламберта. Этотъ рядъ равнозначенъ ряду (29), если въ послѣд-

---

[1]) Первый, кто показалъ подобныя ариѳметическія приложенія, былъ Шеркъ (Scherk, Crelles Journal, IX p. 162, X. p. 207). Многіе математики пытались затѣмъ вывести изъ ряда Ламберта законъ распредѣленія простыхъ чиселъ, но тщетно.

немъ положимъ $a = 1$. Чтобы примѣнить преобразованіе Клаузена (§ 244), прежде всего замѣтимъ, что

$$w_n = x^{n^2} + 2x^{n(n+1)} + 2x^{n(n+2)} + 2x^{n(n+3)} + \cdots,$$

т. е.

$$w_n = x^{n^2}\left(1 + 2(x^n + x^{2n} + x^{3n} + \cdots)\right) = \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2}.$$

Слѣдовательно, сумму ряда Ламберта можно представить въ видѣ

$$S = \frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \frac{1+x^4}{1-x^4}x^{16} + \cdots.$$

Новый рядъ есть рядъ, быстро сходящійся (§ 200, b), потому что

$$\lim\frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim\frac{(1-x^n)(1+x^{n+1})}{(1+x^n)(1-x^{n+1})}x^{2n+1} = 0.$$

На этомъ то и основана польза преобразованія Клаузена. При $x = \frac{1}{10}$, напримѣръ, получимъ

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \cdots = \frac{11}{90} + \frac{101}{990000} + \frac{1001}{999000000000} + \cdots.$$

Въ рядѣ правой части достаточно взять одинъ членъ, чтобы получить значеніе суммы ряда, вѣрное до третьяго десятичнаго знака включительно, въ лѣвой, для достиженія того же приближенія, надо взять три члена. Можно даже доказать, что въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ ν членовъ ряда Ламберта даютъ только ν вѣрныхъ десятичныхъ знаковъ, тогда какъ преобразованіе Клаузена около $(\nu+1)^2$ знаковъ. Далѣе, въ общемъ случаѣ легко найти выраженіе остатка ряда. Стоитъ только въ уравненіи (30) положить $a = x^n$; тогда получимъ

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} + \frac{x^{3n+3}}{1-x^3} + \cdots < x^n S \quad (x > 0),$$

Отсюда видно, что относительная погрѣшность, которую дѣлаемъ, взявъ всего n членовъ, меньше x^n. Слѣдовательно, преобразованіе тѣмъ выгоднѣе, чѣмъ меньше x. Но его выгода уменьшается все болѣе и болѣе, чѣмъ больше x приближается къ 1 [1]). (XXIX.)

e) Преобразованіе ряда Ламберта въ рядъ Клаузена можно вывести также изъ изученія ряда

$$S' = \frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^9}{1-x^3} + \frac{x^{16}}{1-x^4} + \cdots$$

---

[1]) Для этого случая Шлёмильхъ (Schlömilch) далъ другое преобразованіе въ Journal de Liouville (1863, p. 101).

Этотъ рядъ сильнѣе сходящійся (§ 199), чѣмъ рядъ Ламберта, потому что отношеніе общихъ членовъ равно $x^{n(n-1)}$, и вслѣдствіе того, что $|x|<1$, стремится къ 0 при n безконечномъ. Для даннаго ряда

$$u_p=\frac{x^{p^2}}{1-x^p}=x^{p^2}+x^{p(p+1)}+x^{p(p+2)}+x^{p(p+3)}+\cdots.$$

При сложеніи по столбцамъ членовъ $u_1+u_2+u_3+\cdots$ видно, что x^n войдетъ въ u_p въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда n будетъ вида $n=pq$, при $q\geqq p$. Слѣдовательно, p должно быть такимъ дѣлителемъ n, чтобы было $p\leqq q=\frac{n}{p}$, т. е. $p\leqq\sqrt{n}$. Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ при x^n равенъ числу дѣлителей n, не превосходящихъ $\sqrt{n}$. Онъ равенъ, слѣдовательно, вообще $\frac{1}{2}\theta(n)$, и только въ томъ случаѣ, когда n точный квадратъ, онъ равенъ $\frac{\theta(n)+1}{2}$ (XXX). Слѣдовательно, припоминая формулу (31), находимъ

$$S'=\tfrac{1}{2}S+\tfrac{1}{2}(x+x^4+x^9+\cdots),$$

откуда получается

$$S=2\sum_1^\infty{}'\frac{x^{n^2}}{1-x^n}-\sum_1^\infty x^{n^2}=\sum_1^\infty{}'\frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2}.$$

f) Если $\varphi(n)$ обозначаетъ число чиселъ, простыхъ съ n и не превосходящихъ n, то, какъ извѣстно (§ 33, a), имѣетъ мѣсто равенство

$$\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c)+\cdots=n,$$

гдѣ a, b, c, ... всѣ различные дѣлители числа n. Основываясь на этомъ, легко найти сумму ряда

$$S=\frac{x\varphi(1)}{1-x}+\frac{x^2\varphi(2)}{1-x^2}+\frac{x^3\varphi(3)}{1-x^3}+\frac{x^4\varphi(4)}{1-x^4}+\cdots,$$

поступая такимъ же образомъ, какъ и съ рядомъ Ламберта. Разлагая каждый членъ по восходящимъ степенямъ x, увидимъ, что коэффиціентъ при x^n какъ разъ равенъ написанной выше суммѣ, т. е. n. Полагая, какъ это необходимо, $|x|<1$, и припоминая результатъ перваго упражненія, получимъ

$$S=x+2x^2+3x^3+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Напримѣръ,

$$\frac{\varphi(1)}{9}+\frac{\varphi(2)}{99}+\frac{\varphi(3)}{999}+\frac{\varphi(4)}{9999}+\cdots=\frac{10}{81}.$$

Безконечныя произведенія.

248. Въ тѣсной связи съ теоріею безконечныхъ рядовъ находится и теорія безконечныхъ произведеній, о которой мы скажемъ здѣсь нѣсколько словъ, съ цѣлью показать потомъ одно интересное ея приложеніе. Пусть при безпредѣльномъ возрастаніи n произведеніе P_n первыхъ n членовъ нѣкоторой послѣдовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots$ стремится къ нѣкоторому конечному предѣлу P; въ такомъ случаѣ принято писать $P = u_1 u_2 u_3 \ldots$ и говорить, что $u_1 u_2 u_3 \ldots$ есть сходящееся безконечное произведеніе, значеніе котораго равно P. Если же P_n безпредѣльно возрастаетъ вмѣстѣ съ n или ни къ какому предѣлу не стремится, то говорятъ, что произведеніе расходящееся или неопредѣленное. Такъ какъ

$$\log P_n = \log u_1 + \log u_2 + \log u_3 + \cdots + \log u_n,$$

то оказывается, что сходимость ряда

$$\log u_1 + \log u_2 + \log u_3 + \log u_4 + \cdots \tag{32}$$

есть условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы безконечное произведеніе $u_1 u_2 u_3 \ldots$ было сходящимся и не равнымъ нулю. Произведеніе будетъ сходящимся и тогда, когда рядъ (32) расходящійся, стремящійся къ $(-\infty)$, но тогда значеніе $P = 0$. Слѣдовательно, всякое условіе, необходимое для сходимости ряда (32), необходимо для того, чтобы разсматриваемое произведеніе было сходящимся и отличнымъ отъ нуля. Замѣтимъ въ частности условіе

$$\lim \log u_n = 0 \quad \text{или} \quad \lim u_n = 1.$$

249. Теорема I. Чтобы безконечное произведеніе $u_1 u_2 u_3 \ldots$, всѣ множители котораго больше нуля и меньше единицы или всѣ больше единицы, было сходящимся и не равнымъ нулю, необходимо и достаточно, чтобы рядъ

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + (u_3 - 1) + \cdots \tag{33}$$

былъ сходящимся.

Въ самомъ дѣлѣ, если данное произведеніе сходящееся и не равно нулю, то и рядъ (32) сходящійся и, слѣдовательно, предѣлъ общаго члена ряда (33) есть нуль. Слѣдовательно, его можно представить въ видѣ $u_n - 1 = \frac{1}{a_n}$, гдѣ a_n стремится къ $+\infty$ при $u_n > 1$ и къ $-\infty$ при $u_n < 1$. Въ то же время имѣемъ (§ 157)

$$\lim \frac{\log u_n}{u_n - 1} = \lim a_n \log\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \log \lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = 1. \tag{34}$$

А поэтому и рядъ (33) сходящійся (§ 189) *). Обратно, если рядъ (33) сходящійся, то $\lim u_n = 1$, откуда видно, въ силу той же формулы (34), остающейся справедливой, что и рядъ (32) сходящійся, а потому произведеніе $u_1 u_2 u_3 \ldots$ сходящееся и не равно нулю.

250. Теорема II. Безконечное произведеніе $u_1 u_2 u_3 \ldots$ будетъ сходящимся и не равнымъ нулю, если ряды

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + (u_3 - 1) + \cdots,$$
$$(u_1 - 1)^2 + (u_2 - 1)^2 + (u_3 - 1)^2 + \cdots \tag{35}$$

будутъ сходящимися.

Такъ какъ въ силу сходимости перваго ряда $\lim u_n = 1$, то члены произведенія, начиная съ нѣкотораго мѣста, будутъ всѣ положительные, и потому рядъ, общій членъ котораго $v_n = u_n - 1 - \log u_n$ будетъ имѣть, начиная съ нѣкотораго мѣста, всѣ члены вещественные. Такъ какъ, кромѣ того,

$$\lim \frac{v_n}{(u_n - 1)^2} = \lim a_n \left\{ 1 - a_n \log\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \right\} = \frac{1}{2}, \text{ **)}$$

то отсюда вытекаетъ, что рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ будетъ сходящимся вмѣстѣ съ рядомъ (35). А потому будетъ сходящимся и рядъ (32), какъ разность двухъ сходящихся рядовъ, поэтому и данное произведеніе сходящееся и не равно нулю. Замѣтимъ еще, что если только первый рядъ былъ бы сходящимся, то рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ имѣлъ бы положительные члены и былъ бы расходящимся. Рядъ (32) стремился бы къ $(-\infty)$ и произведеніе $u_1 u_2 u_3 \ldots$ было бы сходящимся и равнымъ нулю.

251. Слѣдствіе. Безконечное произведеніе $u_1 u_2 u_3 \ldots$ будетъ сходящимся и не равнымъ нулю, если рядъ

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + (u_3 - 1) + \cdots$$

абсолютно сходящійся.

Дѣйствительно, такъ какъ абсолютная величина $u_n - 1$, начиная съ нѣкотораго мѣста, будетъ меньше 1, то также будемъ имѣть, начиная съ нѣкотораго мѣста $(u_n - 1)^2 < |u_n - 1|$. Такъ какъ по теоремѣ Дирихле рядъ съ общимъ членомъ $|u_n - 1|$ сходящійся, и a fortiori такимъ же будетъ и рядъ (35), то вмѣстѣ съ тѣмъ, въ силу теоремы II, и безконечное произведеніе будетъ сходящимся и не равнымъ нулю.

---

*) Такъ какъ отношеніе общихъ членовъ рядовъ (32) и (33) число конечное въ силу формулы (34).

**) $\lim a_n \left(1 - a_n \log\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\right) = \lim a_n \left\{1 - a_n \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2a_n^2} + \cdots\right)\right\} = \frac{1}{2}$.

252. Приложеніе къ функціи Γ.

a) Весьма важное значеніе въ различныхъ частяхъ математическаго анализа имѣетъ безконечное произведеніе

$$\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^x}{1+\frac{x}{1}}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1+\frac{x}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{1+\frac{x}{3}}\cdot\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^x}{1+\frac{x}{4}}\cdots,$$

обозначаемое черезъ $\Gamma(x+1)$ и называемое функціею Гамма*). Разумѣется, при разсмотрѣніи этого произведенія, надо избѣгать да, вать числу x значенія $-1, -2, -3, \ldots$ (т. е. всѣ цѣлыя и отрицательныя); при всякомъ другомъ значеніи x, какъ легко показать-$\Gamma(x+1)$ есть произведеніе сходящееся. Замѣтимъ, въ самомъ дѣлѣ, что вслѣдствіе извѣстной формулы (§ 222)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = 1+\frac{x}{n}+\frac{x(x-1)}{2n^2}+\cdots$$

общему члену этого произвененія можно дать видъ $1+\frac{a_n}{n^2}$, гдѣ a_n стремится къ предѣлу $\frac{1}{2}x(x-1)$ при безконечномъ n. Поэтому, на основаніи теоремы I, произведеніе будетъ сходящимся, потому что такимъ же будетъ рядъ, получаемый отъ умноженія членовъ завѣдомо сходящагося ряда $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$, соотвѣтственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$, не превосходящія (по абс. величинѣ) нѣкотораго конечнаго числа. На основаніи этого позволительно писать

$$\Gamma(x+1) = \prod_1^\infty \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}. \quad (36)$$

**)

b) Безконечное произведеніе, общій членъ котораго равенъ $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$, есть произведеніе сходящееся. Его значеніе (§ 183) равно

$$\prod_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{e^{C+\varepsilon_n}}{1+\frac{1}{n}} = e^C,$$

*) Отъ греческаго названія буквы Γ.

**) Буква Π есть символъ произведенія множителей даннаго вида, подъ нимъ написанныхъ, при чемъ n принимаетъ всѣ цѣлыя положительныя значенія, начиная съ 1.

гдѣ C есть Эйлерова постоянная. Но такъ какъ произведеніе (36) не равно нулю, то мы можемъ написать

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \prod_1^\infty \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x} \cdot \frac{1+\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}} = \prod_1^\infty \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\right)^x \cdot \prod_1^\infty \frac{1+\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}}$$

и приходимъ, такимъ образомъ, къ важной формулѣ Вейерштрасса (Weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_1^\infty \left\{\left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}\right\}.$$

c) Опредѣленію (36) функціи Γ цѣлесообразно дать другую форму, введенную Гауссомъ *). Нужно только замѣтить, что правая часть равенства (36) равнозначна съ

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n+1)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}, \quad **)$$

чтобы получить возможность написать

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} n^x \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Если замѣтимъ, что

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{n+x} = x,$$

то тотчасъ же получаемъ основное свойство

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Такъ какъ при $x=0$ формула (37) даетъ $\Gamma(1)=1$, то находимъ

$$\Gamma(2)=1!,\ \Gamma(3)=2!,\ \Gamma(4)=3!,\ \Gamma(5)=4!,\ \ldots$$

d) Изъ формулы (37) выводимъ

$$\Gamma(x+1)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \lim_{n=\infty} \frac{4^n \cdot n^{2x-\frac{1}{2}} (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}{(2x+1)(2x+2)(2x+3)\cdots(2x+2n)}.$$

---

*) Она еще раньше встрѣчается у Эйлера.

**) $$\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x =$$
$$= 2^x\cdot\frac{3^x}{2^x}\cdot\frac{4^x}{3^x}\cdots\frac{n^x}{(n-1)^x}\cdot\frac{(n+1)^x}{n^x} = (n+1)^x.$$

Съ другой стороны, замѣняя въ той же формулѣ x и n на $2x$ и $2n$, найдемъ

$$\Gamma(2x+1) = 4^x \lim_{n=\infty} \frac{n^{2x} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{(2x+1)(2x+2)(2x+3)\cdots(2x+2n)}.$$

Изъ этихъ двухъ формулъ, припоминая формулу Стирлинга (§ 221), находимъ

$$\frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x+1)} = \frac{1}{4^x} \lim_{n=\infty} \frac{4^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2}{\sqrt{n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{4^x}. \tag{38}$$

Такимъ образомъ приходимъ къ формулѣ Лежандра

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \cdot \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)}.$$

Въ частности, при $x=0$, изъ (38) вытекаетъ, что $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, и далѣе, съ помощью послѣдней формулы и основной, получимъ

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^2},\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^3},\ \ldots.$$

Примѣчанія ко второй книгѣ.

I (къ § 113).

Приведенная здѣсь теорія ирраціональныхъ чиселъ принадлежитъ Дедекинду (Dedekind) и изложена имъ въ основныхъ чертахъ въ статьѣ „Непрерывность и ирраціональныя числа“ (Stetigkeit und irrationale Zahlen), переводъ С. Шатуновскаго, Одесса 1909 г. Раздѣленіе всѣхъ раціональныхъ чиселъ на два класса, обладающихъ указанными здѣсь свойствами, называютъ сѣченіемъ (Schnitt) въ области раціональныхъ чиселъ.

Болѣе подробное изложеніе теоріи Дедекинда см. Веберъ и Вельштейнъ, стр. 72 и слѣд.

II (къ § 122).

Выраженія „въ концѣ концовъ“, „начиная съ нѣкотораго n“, „при достаточно большомъ n“ и т. п., съ которыми часто будемъ встрѣчаться въ этой книгѣ, введены для сокращенія рѣчи. Истинный ихъ смыслъ состоитъ въ слѣдующемъ. Когда разсматриваются перемѣнныя числа a_n, b_n, $\cdots$, въ которыхъ указатель n послѣдовательно принимаетъ всѣ значенія 1, 2, 3, ... до безконечности, и говорятъ, что эти числа a_n, b_n, ... „въ концѣ концовъ“ и т. д. удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ, то этимъ утверждаютъ существованіе такого числа ν, что данныя условія выполняются при всякомъ значеніи n, равномъ или большемъ ν, т. е. при $n \geqq \nu$.

III (къ § 124).

Положимъ $\lim a_n = a$ и $a' < a < a''$, гдѣ a' и a'' произвольныя числа, удовлетворяющія этимъ неравенствамъ. Условіе $\lim a_n = a$ равносильно условію $|a_n - a| < \varepsilon$, гдѣ ε произвольное положительное число; послѣднее условіе равносильно неравенствамъ

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Взявъ $\varepsilon < a - a'$, получимъ $a_n > a - \varepsilon > a - (a - a') = a'$, а взявъ $\varepsilon < a'' - a$, получимъ $a_n < a + \varepsilon < a + (a'' - a) = a''$. Слѣдовательно, „начиная съ нѣкотораго значенія n“, $a' < a_n < a''$, что и требовалась показать.

Замѣтимъ здѣсь, что часто встрѣчающееся впослѣдствіи выраженіе при „произвольно выбранномъ сколь угодно маломъ, положительномъ числѣ ε“, заключаетъ въ себѣ плеоназмъ. Если ε можно выбрать по произволу, то само собою разумѣется, что его можно взять сколь угодно малымъ. Если тѣмъ не менѣе послѣдній эпитетъ прибавляется, то дѣлается это для того, чтобы подчеркнуть существенное свойство числа ε удовлетворять неравенству $\varepsilon < h$, какъ бы мало ни было данное положительное число h.

IIIa (къ § 124).

Развивая послѣднее замѣчаніе и принимая во вниманіе сказанное въ §§ 112 и 113, можемъ высказать слѣдующее положеніе:

Всякое ирраціональное число a можно разсматривать, какъ общій предѣлъ двухъ послѣдовательностей

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

и

(2) $$b_1, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots,$$

изъ которыхъ (1) не убывающая, а (2) не возрастающая, при чемъ $b_n - a_n > 0$ при всякомъ n, и $b_n - a_n < \varepsilon$ при достаточно большомъ n, и сколь угодно маломъ ε. Число a всегда будетъ заключаться между a_n и b_n, которыя можно разсматривать, какъ приближенныя значенія числа a, a_n по недостатку, b_n по избытку. Полагая приближенно $a = a_n$ или $a = b_n$ мы дѣлаемъ погрѣшность, меньшую $b_n - a_n$, т. е. при достаточно большомъ n—меньшую любого даннаго числа. Замѣтимъ, что извѣстный изъ элементарной алгебры процессъ извлеченія $\sqrt{A}$, гдѣ A не точный квадратъ, съ точность до $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$, .. по недостатку и по избытку даетъ двѣ послѣдовательности (1) и (2), обладающія необходимыми для опредѣленія ирраціональнаго числа $\sqrt{A}$ свойствами.

IV (къ § 125).

Общее выраженіе чиселъ данной послѣдовательности при n нечетномъ есть $a_{2m+1} = \frac{1}{m+3}$, а при n четномъ $a_{2m} = \frac{m+1}{m+2}$. Взявъ $m + 3 > \frac{1}{\varepsilon}$, имѣемъ $a_{2m+1} < \varepsilon$, т. е. $\lim a_{2m+1} = 0$; взявъ

$m+2>\frac{1}{\varepsilon}$, имѣемъ $1-a_{2m}<\varepsilon$, т. е. $\lim a_{2m}=1$. Когда n будетъ проходить всѣ значенія 1, 2, 3. ... четныя и нечетныя, то a_n, очевидно, будетъ колебаться между 0 и 1, не стремясь ни къ какому предѣлу. Послѣднее замѣчаніе этого § надо понимать такъ: если данная послѣдовательность a_1, a_2, a_3, ... имѣетъ нѣкоторый предѣлъ a, то этотъ же предѣлъ a будетъ имѣть послѣдовательность, которую получимъ, выкинувъ изъ данной, напримѣръ, всѣ числа съ четными указателями или вообще всѣ числа, указатели которыхъ удовлетворяютъ извѣстному условію, лишь бы въ оставшейся послѣдовательности было безконечное число чиселъ. Послѣднее условіе необходимо.

V (къ § 129).

Конечнымъ числомъ называется 1) всякое постоянное опредѣленное число, 2) всякое перемѣнное число, всѣ значенія котораго заключаются между двумя данными числами. Терминъ „конечное" противополагается, слѣдовательно, „безконечно большому", а не „безконечно малому". Если нужно оттѣнить, что нѣкоторое перемѣнное число стремится къ конечному предѣлу, отличному отъ нуля, то необходимо оговорить, что предѣлъ не равенъ нулю.

VI (къ § 133).

Заключеніе это основано на томъ, что сказано въ § 129, и на очевидномъ предложеніи, что произведеніе конечнаго числа на безконечно малое само безконечно малое.

VII (къ § 137).

Аналогично этому лемма доказывается и въ томъ случаѣ, когда данная послѣдовательность заключаетъ въ себѣ безконечное множество чиселъ, меньшихъ a. Въ этомъ случаѣ изъ данной послѣдовательности всегда можно выдѣлить другую, имѣющую предѣломъ конечное число или $-\infty$. Замѣтимъ еще, что если данная послѣдовательность предѣла не имѣетъ, то выдѣляемыя изъ нея послѣдовательности будутъ имѣть различные предѣлы, иначе общій ихъ предѣлъ былъ бы и предѣломъ данной послѣдовательности, что противорѣчитъ предположенію.

VIII (къ § 138).

Обозначая символомъ $[N]$ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ N, имѣемъ $N=[N]+\varrho$, гдѣ $0\leqq\varrho<1$. Замѣтимъ, далѣе, что при $1<a\leqq 10$ число цифръ въ $\left[\frac{10^\nu}{a}\right]$ равно ν, потому

что $10^{\nu-1} \leqq \frac{10^\nu}{a} < 10^\nu$. Поэтому, полагая $n = \left[\frac{10^\nu}{a}\right]$, будемъ имѣть по условію

$$a_n = \frac{10^\nu}{n} = \frac{10^\nu}{\left[\frac{10^\nu}{a}\right]}, \quad a_n - a = \frac{10^\nu - a\left[\frac{10^\nu}{a}\right]}{\left[\frac{10^\nu}{a}\right]} = \frac{a\varrho}{\left[\frac{10^\nu}{a}\right]},$$

гдѣ $0 \leqq \varrho < 1$, откуда $\lim\limits_{\nu=\infty}(a_n - a) = 0$, $\lim a_n = a$.

IX (къ § 153).

Число $a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ называется среднимъ гармоническимъ чиселъ a_n и b_n. Изъ тождества

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

слѣдуютъ неравенства

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} < \sqrt{a_n b_n} < \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}.$$

Замѣчая еще, что

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n = \cdots = ab,$$

имѣемъ $a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1}$, откуда и видно, что $\lim a_{n+1} = \lim b_{n+1} = \sqrt{ab}$.

Соотношеніе между a_{n+1}, a_n и b_n можно писать также въ слѣдующихъ видахъ:

$$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}, \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}.$$

Рядъ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, съ которымъ впослѣдствіи будемъ часто встрѣчаться, называется гармоническимъ, потому что каждый его членъ равенъ среднему гармоническому двухъ смежныхъ съ нимъ членовъ.

X (къ § 154).

Общее выраженіе для a_n

$$a_n = \frac{a + 2b}{3} + (-1)^n \frac{b - a}{3 \cdot 2^{n-2}}$$

можно провѣрить способомъ полной индукціи. При $n = 2$ и $n = 3$ оно непосредственно повѣряется и даетъ $a_2 = b$, $a_3 = \frac{a+b}{2}$, какъ

и должно быть. Остается показать, что если оно вѣрно для указателей $n-1$ и n, то оно будетъ вѣрно и для указателя $n+1$, если

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Эту легкую выкладку мы предоставляемъ самому читателю. Интереснѣе показать, какъ эта формула можетъ быть выведена изъ закона составленія чиселъ нашей послѣдовательности, т. е. изъ уравненія

$$a_{n+2} = \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_n). \tag{1}$$

Для этого замѣчаемъ сперва, что уравненію (1) очевидно, удовлетворяютъ значенія $a_n = 1$, и $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

Затѣмъ легко показать, что ему удовлетворяетъ и выраженіе

$$a_n = C_1 + C_2\frac{(-1)^n}{2^n}, \tag{2}$$

гдѣ C_1 и C_2 отъ b не зависятъ и могутъ быть поэтому опредѣлены по частнымъ значеніямъ числа n. Полагая $n=1$, найдемъ $(a_1 = a)$

$$a = C_1 - \frac{C_2}{2}, \tag{3}$$

а полагая $n=2$, получимъ $(a_2 = b)$

$$b = C_1 + \frac{C_2}{4}. \tag{4}$$

Рѣшая уравненія (3) и (4) относительно C_1 и C_2 и подставляя въ (2), мы и найдемъ общее выраженіе

$$a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^n\frac{b-a}{3\cdot 2^{n-2}}.$$

Уравненіе (1) есть частный случай такъ называемыхъ линейныхъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ съ постоянными коэффиціентами. Изложенное нами рѣшеніе есть приложеніе общаго способа рѣшенія такихъ уравненій (См. А. Марковъ „Исчисленіе конечныхъ разностей“. Изданіе „Mathesis“ 1910 г. Гл. VI).

XI (къ § 169).

Французскій терминъ „ансамбль“ (ensemble), принятый нами для перевода нѣмецкаго „Menge“, употребляется и другими авторами (см. напримѣръ Б. Букрѣевъ „Введеніе въ теорію рядовъ“. Кіевъ. 1906). Нѣкоторые авторы переводятъ то же слово терминомъ

„множество", подходящимъ ближе къ нѣмецкому, но менѣе опредѣлительнымъ и имѣющимъ на русскомъ языкѣ и другой смыслъ. Задать ансамбль чиселъ значитъ указать признакъ, позволяющій судить, принадлежитъ ли данное число къ данному ансамблю или нѣтъ. Примѣровъ различныхъ ансамблей читатель найдетъ достаточно въ самой книгѣ.

XII (къ § 170).

Слѣдуетъ замѣтить и другую формулировку опредѣленія нижней и верхней границы ансамбля, менѣе краткую, чѣмъ данная въ § 170, но болѣе удобную для приложеній и потому принятую большинствомъ авторовъ. Нижняя граница ансамбля есть число λ, обладающее слѣдующими свойствами:

1° Въ ансамблѣ нѣтъ ни одного числа, меньшаго λ.

2°. Какъ бы мало ни было положительное число ε, въ ансамблѣ есть по крайней мѣрѣ одно число, меньшее $\lambda+\varepsilon$.

Верхняя граница ансамбля есть число μ, обладающее слѣдующими свойствами:

1°. Въ ансамблѣ нѣтъ ни одного числа большаго μ.

2°. Какъ бы мало ни было положительное число ε, въ ансамблѣ есть по крайней мѣрѣ одно число, большее $\mu-\varepsilon$. Опредѣленія эти равносильны прежнимъ. Покажемъ это для нижней границы λ. Первое свойство выражаетъ, что λ есть число, не превосходящее ни одного изъ чиселъ ансамбля. Второе показываетъ, что λ есть наибольшее изъ такихъ чиселъ, потому что какъ бы мало мы ни увеличили λ, тотчасъ получаемъ число $\lambda+\varepsilon$ уже превосходящее по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ ансамбля.

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ совпаденіи прежняго и новаго опредѣленія μ.

XIII (къ § 178).

Слишкомъ сжатое изложеніе въ этомъ § дѣлаетъ не лишними слѣдующія разъясненія.

1) Чтобы доказать, что числа $\lambda_0=\lim\lambda_n$ и $\mu_0=\lim\mu_n$ совпадаютъ съ наименьшимъ и наибольшимъ изъ предѣловъ данной послѣдовательности, разсудимъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ по произволу сколь угодно малое положительное число ε и разсмотримъ окрестность числа λ_0, т. е. интервалъ $(\lambda_0-\varepsilon,\ \lambda_0+\varepsilon)$. Мы покажемъ, что въ немъ находится безконечно большое число чиселъ даиной послѣдовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ a_{n+1}\ldots, \tag{1}$$

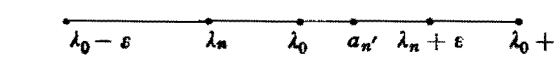
т. е., что λ_0 есть одинъ изъ ея предѣловъ (точекъ сгущенія). Для этого замѣчаемъ, что въ этотъ интервалъ попадутъ всѣ числа

$$\lambda_n,\ \lambda_{n+1},\ \lambda_{n+2},\ \ldots,$$

начиная съ нѣкотораго мѣста и притомъ именно слѣва отъ λ_0, т. е. въ интервалъ $(\lambda_0-\varepsilon,\ \lambda_0)$, такъ какъ λ_0 есть $\lim \lambda_n$ и всѣ $\lambda_n,\ \lambda_{n+1},\ \ldots$ меньше λ_0. Съ другой стороны, справа отъ каждаго изъ этихъ чиселъ, т. е. въ каждомъ изъ интерваловъ

$$(\lambda_n,\ \lambda_n+\varepsilon),\quad (\lambda_{n+1},\ \lambda_{n+1}+\varepsilon)\ \ldots,$$

будетъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ членовъ нашей послѣдовательности, потому что $\lambda_n,\ \lambda_{n+1},\ \ldots$ нижнія границы частей ея. (См. примѣчаніе XII). Всѣ эти интервалы на основаніи сказаннаго о положеніи чиселъ $\lambda_n,\ \lambda_{n+1},\ \ldots$, очевидно будутъ заключаться въ интервалѣ $(\lambda_0-\varepsilon,\ \lambda_0+\varepsilon)$, въ которомъ такимъ образомъ и окажется безчисленное множество чиселъ послѣдовательности (1).



Фиг. I.

Совершенно аналогичнымъ путемъ доказывается, что μ_0 одинъ изъ предѣловъ данной послѣдовательности. Остается показать, что λ_0 наименьшій, а μ_0 наибольшій изъ предѣловъ. Это почти очевидно; допустимъ, напримѣръ, что существуетъ предѣлъ $\lambda_0' < \lambda_0$. Мы всегда можемъ дать числу n достаточно большое значеніе, чтобы λ_n было ближе къ λ_0, чѣмъ λ_0', т. е., чтобы $\lambda_0' < \lambda_n \leqq \lambda_0$, а такое равенство невозможно, такъ какъ λ_0' попало бы въ интервалъ $(\lambda,\ \lambda_n)$, въ которомъ находится только конечное число первыхъ n членовъ нашей послѣдовательности и λ_0' предѣломъ ея быть не можетъ.

2) Для доказательства свойства a) § 178 возьмемъ какое угодно число $a < \lambda_0$, выберемъ положительное число $\varepsilon < \lambda_0 - a$ и n достаточно большимъ, чтобы было $\lambda_0 - \lambda_n < \varepsilon$, т. е. $\lambda_0 - \lambda_n < \lambda_0 - a$, откуда $\lambda_n > a$ и всѣ числа (1), начиная съ a_{n+1}, будучи больше λ_n, будутъ и подавно больше a. Такимъ же образомъ доказывается, что всѣ числа (1), начиная съ нѣкотораго мѣста, будутъ меньше β, если $\beta > \mu_0$.

3) Чтобы доказать свойство b) § 178, беремъ какое нибудь число γ между λ_0 и μ_0, т. е. такъ, чтобы было $\lambda_0 < \gamma < \mu_0$, и выберемъ $\varepsilon < \gamma - \lambda_0$. Такъ какъ λ_n нижняя граница части

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ \ldots \tag{2}$$

нашей послѣдовательности, то между числами (2) найдется, по крайней мѣрѣ, одно $a_{n'}$ $(n' > n)$, лежащее въ интервалѣ $(\lambda_n,\ \lambda_n+\varepsilon)$ (см. XII). Тогда имѣемъ $a_{n'} < \lambda_n + \varepsilon < \lambda_n + \gamma - \lambda_0 \leqq \gamma$, потому

что $\lambda_n \leqq \lambda_\theta$. Такимъ же образомъ, взявъ $\varepsilon < \mu_0 - \gamma$, докажемъ, что въ послѣдовательности (2) найдется число $a_{n''}$ $(n'' > n)$, бо́льшее γ, каково бы ни было n.

XIV (къ § 183).

Если a_n и b_n возрастаютъ безпредѣльно, а $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, то говорятъ, что a_n возрастаетъ, какъ b_n. Условіе это, очевидно, будетъ выполнено, если $a_n - b_n$ остается конечнымъ, что и показывается въ § 183 для H_n и $\log n$. Выраженіе „$\log n$ возрастаетъ весьма медленно, сравнительно съ n^α напоминаетъ доказанное въ § 161 равенство $\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Можно также сказать, что $\log n$ возрастаетъ безконечно медленнѣе, чѣмъ всякая степень n^q, какъ бы малъ ни былъ показатель $q > 0$, потому что тамъ же доказано, что $\lim \frac{\log n}{n^q} = 0$, т. е. что для всѣхъ достаточно большихъ значеній n $\log n < \varepsilon . n^q$, при сколь угодно маломъ положительномъ ε и сколь угодно маломъ положительномъ q.

XV (къ § 183).

Можно, не отсылая читателя впередъ, весьма просто доказать это неравенство. Оно очевидно будетъ вытекать изъ неравенства

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} > e \tag{1}$$

при помощи логариѳмированія, а неравенство (1) будетъ доказано, если замѣтимъ, что $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ (§ 156) и покажемъ, что $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ постоянно убываетъ при возрастаніи n, т. е. что

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

или

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{2}$$

при взякомъ цѣломъ положительномъ n. Дѣйствительно, тогда число $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ стремится къ своему предѣлу e, постоянно убывая, слѣдовательно, остается всегда большимъ e, какъ и требуетъ формула (1). Поэтому, все сводится къ доказательству (2), а это достигается весьма просто при помощи извѣстнаго тождества (формулы Безу)

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)\,(a^n + a^{n-1} b + \cdots + a\, b^{n-1} + b^n).$$

Если $a > b > 0$, то отсюда получимъ

(3) $$a^{n+1} - b^{n+1} > (a - b)\,(n + 1)\,b^n.$$

Полагая $a = 1 - \frac{1}{n+1}$, $b = 1 - \frac{1}{n}$, $a - b = \frac{1}{n(n+1)}$, находимъ

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

или

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$

откуда

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 0,$$

что и доказываетъ неравенство (2).

XVI (къ § 186).

Основная формула этого § получается изъ формулы § 159 при $a_n = a = \frac{1}{1-x}$.

Выводъ разложенія $\log(1 + x)$ изъ разложенія (3), въ которомъ x предполагается числомъ положительнымъ и меньшимъ 1, можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ. Въ формулѣ

(3a) $$-\log(1 - x) = \lim_{n=\infty}\left[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right]$$

$n = 2m$ или $2m + 1$; въ обоихъ случаяхъ $\left[\frac{n}{2}\right] = m$. Замѣняя здѣсь x на x^2 и n на m, получимъ

$$-\log(1 - x^2) = \lim_{m=\infty}\left[\frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2m}}{m}\right].$$

Вычитая это равенство изъ $(3a)$ при $n = 2m$ и при $n = 2m + 1$, замѣчая, что при всякомъ k

$$\frac{x^{2k}}{2k} - \frac{x^{2k}}{k} = -\frac{x^{2k}}{2k},$$

мы и находимъ

$$\log(1 + x) = \lim_{m=\infty}\left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{2m}}{2m}\right]$$

или

$$= \lim_{n=\infty}\left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1}\right]$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{4}$$

Строгій выводъ этихъ разложеній, не основанный на недоказанномъ еще здѣсь обобщеніи формулы бинома Ньютона, будетъ данъ въ § 332.

XVII (къ § 188).

Если p равно числу цифръ въ n, то $n \geqq 10^{p-1}$, $0 < \frac{p}{n} < \frac{p}{10^{p-1}}$; при $n = \infty$ и $p = \infty$ и $\lim \frac{p}{n} = \lim \frac{p}{10^{p-1}} = 0$.

При $p = [\sqrt{n}] = \sqrt{n} - \varrho_n$, гдѣ $0 \leqq \varrho_n < 1$,

$$\lim \frac{p}{n} = \lim \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\varrho_n}{n}\right] = 0.$$

Замѣчаніе а) § 188 очень важно, показывая, что неравенство § 187 можетъ выполняться въ безчисленномъ множествѣ случаевъ для расходящагося ряда, но оно не опровергаетъ общаго признака сходимости, потому что, сколько бы случаевъ мы ни испытали, нельзя ручаться, что не найдется такой, когда условіе § 187 не будетъ удовлетворено.

Для гармоническаго ряда, напр., при $p = n$ получимъ

$$\lim\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] = \lim (H_{2n} - H_n) = \log 2 \neq 0,$$

и расходимость ряда обнаруживается.

XVIII (къ § 210).

При $a_n = n \log n$, имѣемъ

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n \log n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\log(n+1)$$

$$= n \log n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log n\right]$$

$$= \left[n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] - 1\right]\log n - (n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

и

$$\lim\left[(n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = 1.$$

XIX (къ § 211, a).

Обозначая разсматриваемыя здѣсь выраженія черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и полагая $\log_p n = \underbrace{\log \log \ldots \log}_{p \text{ разъ}} n, \ldots$ имѣемъ $a_1 = 1$, и $a_{p+1} = (a_p - 1)\log_{p-1} n$, при всякомъ $p > 1$.

Отсюда и видно, что если $\lim a_p = l \gtrless 1$, то $\lim a_{p+1} = \pm\infty$; а если $\lim a_{p+1} = l \gtrless 1$, то $a_p - 1 = \frac{a_{p+1}}{\log_{p-1} n}$ стремится къ 0, и $\lim a_p = 1$.

XX (къ § 211, c).

1) Прежде всего замѣтимъ, что сказанное здѣсь не опровергаетъ § 210, потому что изъ сказаннаго тамъ можно вывести лишь такое заключеніе: рядъ будетъ расходящимся, если отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ остается больше 1, для всѣхъ значеній n, начиная съ нѣкотораго мѣста; а здѣсь оно колеблется между 0 и ∞.

2) Сходимость ряда $\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \cdots$ при α и $\beta < 1$, сдѣлается очевидною, если замѣтимъ, что S_{2m} и S_{2m+1} равны суммамъ опредѣленнаго числа членовъ двухъ убывающихъ геометрическихъ прогрессій, и обѣ стремятся къ предѣлу $\frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{\beta}{1-\beta^2}$ при возрастаніи m до ∞.

3) Интересное замѣчаніе г.г. Lerch и Weyr, помѣщенное въ мало доступномъ испанскомъ журналѣ, требуетъ нѣкоторыхъ поясненій. Покажемъ, какъ именно надо группировать члены даннаго сходящагося ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{1}$$

съ положительными членами, чтобы получить рядъ

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \tag{2}$$

удовлетворяющій поставленному условію.

$$k v_n > v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots$$

при всякомъ значеніи n.

Замѣчаемъ прежде всего что $S > S_n$ при всякомъ n, потому что всѣ члены ряда (1) положительны.

Затѣмъ опредѣляемъ такое значеніе v_1, чтобы было

$$k S_{v_1} > R_{v_1},$$

что всегда возможно, какъ было уже объяснено, и положимъ $v_1 = S_{v_1} = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{v_1})$.

Затѣмъ, не мѣняя ν_1, опредѣлимъ такое значеніе ν_2, чтобы было

$$k(S_{\nu_1+\nu_2} - S_{\nu_1}) > R_{\nu_1+\nu_2},$$

что также возможно, потому что предѣлъ лѣвой части при $\nu_2 = \infty$ равенъ

$$k(S - S_{\nu_1}) > 0,$$

а предѣлъ правой нуль. Положимъ

$$v_2 = S_{\nu_1+\nu_2} - S_{\nu_1} = (u_{\nu_1+1} + u_{\nu_1+2} + \cdots + u_{\nu_1+\nu_2}).$$

Затѣмъ, не мѣняя ν_1 и ν_2, опредѣляемъ ν_3 такъ, чтобы было

$$k(S_{\nu_1+\nu_2+\nu_3} - S_{\nu_1+\nu_2}) > R_{\nu_1+\nu_2+\nu_3},$$

что, конечно, также возможно, и полагаемъ

$$v_3 = S_{\nu_1+\nu_2+\nu_3} - S_{\nu_1+\nu_2} = (u_{\nu_1+\nu_2+1} + \cdots + u_{\nu_1+\nu_2+\nu_3}).$$

Процессъ понятенъ; въ результатѣ получается рядъ $v_1, v_2, v_3, \cdots$, удовлетворяющій требуемому условію при всякомъ n, начиная съ $n = 1$.

4) Въ примѣрѣ

$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \cdots + \alpha^{2m-1} + \beta^{2m} + \cdots$$

достаточно сгруппировать члены попарно, чтобы получить рядъ

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m + v_{m+1} + \cdots,$$

въ которомъ отношеніе $\dfrac{v_{m+1}}{v_m}$ стремится къ предѣлу, меньшему 1.

Полагая $v_1 = \alpha + \beta^2$, $v_2 = \alpha^3 + \beta^4$, $\ldots$ $v_m = \alpha^{2m-1} + \beta^{2m}$, имѣемъ

$$\frac{v_{m+1}}{v_m} = \frac{\alpha^{2m+1} + \beta^{2m+2}}{\alpha^{2m-1} + \beta^{2m}} = \frac{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2m+1} + \beta}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2m-1} + \beta} \cdot \beta^2$$

и при $0 < \alpha < \beta < 1$, $\lim\limits_{m=\infty} \dfrac{v_{m+1}}{v_m} = \beta^2 < 1$.

XXI (къ § 218, f).

Правило Раабе даетъ

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = p + \lim \frac{n\left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - e\right]}{e},$$

при чемъ $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ приближается къ этому предѣлу, оставаясь меньше его. Далѣе,

$$\lim_{n=\infty} \frac{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]}{e} = \lim_{x=0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{ex}\right] = \lim_{x=0}\frac{v-e}{ex},$$

гдѣ $v=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\log v = \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{\theta x^2}{3}$, гдѣ $0<\theta<1$.

Отсюда $v = e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{\theta x^2}{3}} = e\left[1-\frac{x}{2}+\frac{\theta x^2}{3}\right]$ и

$$\frac{v-e}{ex} = -\frac{1}{2} + \varepsilon_x, \text{ гдѣ } \lim_{x=0}\varepsilon_x = 0.$$

Слѣдовательно, $\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = p - \frac{1}{2}$, и т. д.

XXII (къ § 222).

Суммированіе биноміальнаго ряда для случая x и m какихъ угодно, вещественныхъ или мнимыхъ, составляетъ предметъ классическаго мемуара Абеля „Recherches sur la série

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots"$$

въ первомъ томѣ собранія его сочиненій, къ которому мы и отсылаемъ читателя. Изслѣдованія Абеля для вещественнаго показателя m читатель найдетъ также у Вебера и Вельштейна, стр. 473—487.

XXIII (къ § 223).

Если a_1 — приближенное значеніе числа a, и

$$a = a_1 + \varepsilon = a_1\left(1+\frac{\varepsilon}{a_1}\right),$$

то ε — называютъ абсолютною, а $\frac{\varepsilon}{a_1}$ — относительною погрѣшностью при замѣнѣ a на a_1.

XXIV (къ § 226).

Въ самомъ дѣлѣ, тогда вправо отъ u_ν въ новомъ рядѣ не будетъ ни одного изъ членовъ $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ даннаго ряда, а будутъ только тѣ, о которыхъ уже извѣстно, что абсолютныя ихъ величины меньше ε.

XXV (къ § 230).

Свойство сходящагося ряда сохранять сходимость при замѣнѣ его членовъ ихъ абсолютными величинами часто принимаютъ за опредѣленіе абсолютно сходящагося ряда. (См., напр., Веберъ и Вельштейнъ, стр. 446). Здѣсь дано другое опредѣленіе (§ 224), а потому вышеуказанное свойство нужно доказать, что и дѣлается въ § 230.

XXVI (къ § 233, а).

Для даннаго ряда сумма S_{3n} равна

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n},$$

т. е.,

$$S_{3n}=H_{3n}-\tfrac{2}{3}H_n=\log 3n-\tfrac{2}{3}\log n+\tfrac{1}{3}C+\varrho,$$

гдѣ C Эйлерова постоянная, и $\lim\limits_{n=\infty}\varrho=0$ (см. (1) § 183), или

$$S_{3n}=\tfrac{1}{3}\log n+\tfrac{1}{3}C+\log 3+\varrho,$$

откуда

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{S_{3n}}{\frac{1}{3}\log n}\right]=1.$$

XXVII (къ § 242).

Напримѣръ:

$$a_{24}=S_{24}-[S_{23}+S_{14}]+S_{13}$$

$$=\left|\begin{matrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}\\+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}\end{matrix}\right|-\left|\begin{matrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\+a_{21}+a_{22}+a_{23}\end{matrix}\right|$$

$$-|\,a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}\,|+|\,a_{11}+a_{12}+a_{13}\,|.$$

$$a_{13}=S_{13}-[S_{12}+S_{03}]+S_{02}=$$

$$=|\,a_{11}+a_{12}+a_{13}\,|-|\,a_{11}+a_{12}\,|.$$

XXVIII (къ § 243).

Полагая $n=km$, гдѣ $0<k<1$, найдемъ, что для всѣхъ значеній m и n, сумма S_{mn}, а слѣдовательно, и $\lim S_{mn}=\frac{k(1-k)}{(1+k)^3}$. Распоряжаясь числомъ k, можемъ получить для этого предѣла безчисленное множество значеній, но всѣ эти значенія не превосходятъ наибольшаго значенія данной дроби, котораго она достигаетъ при $k=2-\sqrt{3}$, и которое равно $\frac{1}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{108}}$. Общій способъ разысканія наибольшихъ и наименьшихъ значеній функціи будетъ

изложенъ въ III-ей книгѣ, но читателю легко провѣрить указанный выше результатъ слѣдующимъ путемъ. Обозначая черезъ h произвольное положительное или отрицательное число, обусловленное только тѣмъ, чтобы $k+h$ заключалось между 0 и 1, такъ что $|h|<1$, положимъ $f(k)=\frac{k(1-k)}{(1+k)^3}$ и составимъ

$$f(k+h)-f(k)=\frac{Ah+Bh^2+Ch^3}{(1+k)^3(1+k+h)^3},\text{ гдѣ}$$

$$A=(1+k)^2[(1-2k)(1+k)-3(k-k^2)],$$

$$B=-(1+k)[(1+k)^2+3k(1-k)],\ C=-k(1-k).$$

При $k=2-\sqrt{3}$, $A=0$, $B<0$, $C<0$, $|B|>|C|$, и

$$f(k+h)-f(k)=\frac{h^2(B+Ch)}{(1+k)^3(1+k+h)^3}<0,$$

для всѣхъ значеній h, удовлетворяющихъ условію $|h|<1$. Отсюда и видно, что при $k=2-\sqrt{3}$, $f(k)>f(k+h)$ при $h\gtrless 0$ и $|h|<1$.

XXIX (къ § 247, d).

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{1-x}+\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}+\frac{x^{3n+3}}{1-x^3}+\cdots$$

$$=x^n\left[\frac{x}{1-x}+\frac{x^{n+2}}{1-x^2}+\frac{x^{2n+3}}{1-x^3}+\cdots\right],$$

а $S=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots$,

откуда и видно, что при $0<x<1$, $R_n<x^nS$.

XXX (къ § 247, e).

Если a есть дѣлитель числа n, то, очевидно, и $\frac{n}{a}$ есть дѣлитель числа n, и если $a<\sqrt{n}$, то $\frac{n}{a}>\sqrt{n}$. Если n не полный квадратъ, то каждому дѣлителю, меньшему $\sqrt{n}$, соотвѣтствуетъ одинъ дѣлитель, большій $\sqrt{n}$, и число тѣхъ и другихъ дѣлителей равно $\frac{1}{2}\theta(n)$. Если n полный квадратъ, то еще есть дѣлитель, равный $\sqrt{n}$, поэтому въ послѣднемъ случаѣ число дѣлителей, не большихъ $\sqrt{n}$, равно $\frac{\theta(n)+1}{2}$.

КНИГА ТРЕТЬЯ.

Теорія функцій.

ФУНКЦІИ ОТЪ ОДНОЙ ПЕРЕМѢННОЙ.

Основныя понятія.

253. Перемѣнная x называется независимою, если ей можно приписывать любое значеніе. При этомъ можетъ случиться, что ея измѣняемости поставлены нѣкоторыя границы, можно, напримѣръ, требовать, чтобы перемѣнная постоянно оставалась въ нѣкоторомъ интервалѣ (§ 169) или принадлежала нѣкоторому ансамблю лишь бы при этомъ не принимались во вниманіе значенія, принимаемыя другими перемѣнными. Въ противоположность этому функціею называется всякая такая перемѣнная y, которая связана съ независимою перемѣнною такимъ образомъ, что всякому значенію x соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе y. Эту зависимость выражаютъ тѣмъ, что пишутъ $y = f(x)$, гдѣ символъ f можетъ изображать совокупность различныхъ операцій, которыя надо выполнить надъ числомъ x, чтобы результатъ ихъ давалъ значеніе y. Вообще же этотъ символъ выражаетъ только то, что между перемѣнными установлена нѣкоторая зависимость, не предполагая возможности выполненія дѣйствій, посредствомъ которыхъ выводится значеніе y по данному значенію x. Если соотвѣтствіе между x и y взаимно-однозначно, т. е. если каждому значенію y соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе x, то можно разсматривать y, какъ независимую перемѣнную и тогда $x = g(y)$, т. е. x есть нѣкоторая функція отъ y. При этомъ функціи (или зависимости), изображаемыя символами f и g, называются взаимно-обратными. Представляя себѣ, чтобы яснѣе видѣть въ чемъ тутъ дѣло, обѣ функціи, отнесенными къ одной и той же независимой перемѣнной t, можемъ сказать, на основаніи опредѣленія функціи $f(t)$ и $g(t)$, что $f[g(t)]$ и $g[f(t)]$ приводятся тождественно къ t (I).

254. Примѣры. a) Простѣйшая изъ функцій отъ x есть та, которая опредѣляется требованіемъ сохранять одно и то же значеніе, каково бы ни было значеніе x, напримѣръ, $y=1$ *). Полагая $y=x$, $y=x^2$, или вообще—y равнымъ цѣлому полиному относительно x, мы этимъ опредѣляемъ различныя функціи x, которыми подробно займемся въ пятой книгѣ. Еще общнѣе символъ f можетъ обозначать совокупность извѣстнаго числа основныхъ алгебраическихъ операцій, т. е. сложеній, вычитаній, умноженій, дѣленій, возвышеній въ степень и извлеченій корней (съ цѣлымъ показателемъ); въ этихъ случаяхъ функція $f(x)$ называется алгебраическою. Въ частности, когда отсутствуетъ послѣдняя изъ названныхъ операцій, функція называется раціональною, и въ этомъ случаѣ, какъ легко убѣдиться, она будетъ либо цѣлымъ полиномомъ (или цѣлой функціей), либо частнымъ отъ дѣленія одного полинома на другой [1]). (II.)

b) Въ тѣхъ случаяхъ, когда функція задана въ видѣ частнаго отдѣленія одной функціи на другую: $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, можно желать, чтобы функція была опредѣлена во всемъ интервалѣ, въ которомъ заключается корень функціи $\psi(x)$, т. е. такое значеніе x, для котораго $\psi(x)=0$. Съ этою цѣлью нужно объяснить, какое значеніе желаютъ придать функціи для значеній x, равныхъ кориямъ функціи $\psi(x)$. Такъ, напримѣръ, функціи

$$y=\frac{1}{x},\quad y=\frac{x^2}{x},$$

нельзя считать опредѣленными въ такомъ интервалѣ, въ которомъ лежитъ значеніе $x=0$, если не добавить, что каждая изъ нихъ принимаетъ нѣкоторое данное значеніе при $x=0$. Это значеніе, впрочемъ, можно выбирать по произволу. Въ самомъ дѣлѣ надо замѣтить, что результаты $\frac{1}{0}$ и $\frac{0}{0}$, получаемые въ правыхъ частяхъ вышеприведенныхъ равенствъ при $x=0$, лишены всякаго смысла, потому что въ ариѳметикѣ или алгебрѣ никогда не опредѣляютъ (ср. §§ 107 и 120) частнаго, не оговоривъ, что дѣлитель не равенъ нулю. Конечно, можно было бы приписать этимъ символамъ нѣкоторый опредѣленный смыслъ, но въ этомъ нѣтъ надобности; это повело бы даже къ нѣкоторымъ неудобствамъ, нарушивъ общность правилъ алгебраическаго вычисленія. Во всякомъ случаѣ нужно остерегаться говорить, что $\frac{1}{0}$ безконечное, а $\frac{0}{0}$ неопредѣленное число, какъ это иногда дѣлаютъ. Это не имѣло бы никакого смысла. Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе безконечное число потому не имѣетъ смысла, что всякое число само по себѣ конечно. Понятіе о безконечности исчерпывается тѣмъ, что каково бы ни было данное число, всегда можно себѣ представить другое число, большее даннаго [2]). Иными словами безконечность не есть состояніе, въ которомъ находится въ данный моментъ величина (или число, ее измѣряющее), а относятся исключительно къ процессу, который претерпѣваетъ перемѣнная величина, не встрѣчающая никакихъ границъ при своемъ возрастаніи. Желать опредѣлить, т. е. фиксировать нѣкоторое число, и въ то же время, говорить, что оно измѣняется, принимая сколь угодно большія значенія, или (въ случаѣ $\frac{0}{0}$) прямо приписать ему всевозможныя значенія, очевидно, нелѣпо.

---

*) Такую функцію называютъ постоянною.

[1]) Для болѣе точныхъ указаній см. „Corso di analisi algebrica“ Capelli et Garbieri p. 418.

[2]) Относительно этого пункта см. Cauchy „Sept leçons de physique générale“. Тотъ же взглядъ на безконечность высказываетъ и Лейбницъ, одинъ изъ основателей исчисленія безконечно малыхъ. См. „Résumé du Cours d'Analyse“ par Mansion p. 220.

А между тѣмъ эти нелѣпости и лежатъ въ основѣ тѣхъ возраженій, которыя дѣлались нѣкоторыми критиками противъ исчисленія безконечно малыхъ.

c) Функція $y = x$ совпадаетъ съ обратною ей функціею; то же самое можно сказать о функціи, значеніе которой при $x = 0$ равно нулю, а при $x \neq 0$ равно $\frac{1}{x}$, такъ что обѣ функціи обладаютъ свойствомъ удовлетворять тождеству $f[f(x)] = x$. Если хотимъ найти обращеніе функціи $y = x^2$, то прежде всего замѣчаемъ, что можно разсматривать y, какъ независимую перемѣнную лишь при условіи ограниченія ея значеній интерваломъ $(0, \infty)$. Однако, каждому значенію y въ этомъ интервалѣ, за исключеніемъ нижней ея границы, соотвѣтствуютъ два значенія x, а именно $\sqrt{y}$ и $-\sqrt{y}$. Слѣдовательно, разысканіе функціи, обратной относительно t^2, приводитъ къ двумъ функціямъ $\sqrt{t}$ и $-\sqrt{t}$ или, пожалуй, къ безчисленному множеству функцій, если условимся для каждаго значенія t брать то тотъ, то другой изъ его квадратныхъ корней (III).

Для достиженія ясности и опредѣленности при изученіи основныхъ свойствъ функцій слѣдуетъ никогда не отступать отъ опредѣленія функціи, даннаго въ § 223 (т. е. не забывать условія однозначности функцій), и потому разсматривать $\sqrt{t}$ и $-\sqrt{t}$, какъ двѣ различныя функціи, не смотря на то, что въ дальнѣйшихъ математическихъ изслѣдованіяхъ окажется возможнымъ и даже полезнымъ разсматривать ихъ, какъ соединенныя въ одну. Тогда надо будетъ расширить понятіе о функціи въ томъ направленіи, чтобы функція отъ x могла при каждомъ данномъ значеніи отъ x получать не одно, а два или нѣсколько различныхъ значеній, и даже безчисленное множество ихъ, подчиненныхъ нѣкоторому опредѣленному закону (IV).

d) Уже изъ элементарной алгебры намъ извѣстна функція a^x (при $a > 0$), по крайней мѣрѣ, для раціональныхъ значеній x. Дальше, въ § 270, b, мы увидимъ какимъ образомъ можно распространить ея опредѣленіе и на ирраціональныя значенія x. Обратная ей функція есть $\operatorname{Log} x$, т. е. логариѳмъ числа x при основаніи a. При этомъ послѣдняя функція, очевидно, опредѣлена только при $x > 0$. Въ частности функція, обратная e^x, есть $\log x$. Далѣе, въ тригонометріи уже изучаются функціи $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ... такъ называемыя круговыя (или тригонометрическія) функціи. Послѣдняя $\operatorname{tg} x$ не опредѣлена для тѣхъ значеній x, для которыхъ $\cos x = 0$. Хотя часто и пишутъ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$, но это равенство имѣетъ лишь условный смыслъ, о которымъ ниже будетъ рѣчь. Весьма важное значеніе имѣютъ функціи, получаемыя отъ обращенія круговыхъ *). Функція $y = \cos x$ не допускаетъ обращенія, если не условимся подъ значеніемъ дуги x, косинусъ который равенъ y, понимать наименьшую положительную дугу (равную нулю при $y = 1$), изъ всѣхъ имѣющихъ данный косинусъ. а при этомъ условіи обратная данной функція обозначается знакомъ $\operatorname{arc}\cos y$. Подобнымъ же образомъ опредѣляютъ функціи $\operatorname{arc}\sin y$ и $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$, обратныя функціямъ $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} y$, условившись, что данному значенію синуса или тангенса, равнаго y, соотвѣтствуетъ наименьшая по абсолютной величинѣ дуга x, изъ всѣхъ дугъ, имѣющихъ данный синусъ или тангенсъ. Согласно этимъ опредѣленіямъ, всегда имѣемъ

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc}\sin y \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \operatorname{arc}\cos y \leq \pi,$$

---

*) Эти функціи называются обратными круговыми. Впрочемъ, на русскомъ языкѣ часто круговыя функціи ($\sin x$, $\cos x$, ...) называютъ тригонометрическими, а обратныя имъ просто круговыми.

Принимая во вниманіе еще, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} y\right) = \sin(\operatorname{arc\,sin} y) = y, \quad 0 \leqq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} y \leqq \pi,$$

всегда можемъ писать $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} y = \operatorname{arc\,cos} y$, т. е.

$$\operatorname{arc\,sin} y + \operatorname{arc\,cos} y = \frac{\pi}{2}.$$

Читателю легко будетъ самому найти другія соотношенія между символами ars sin, arc cos, arc tg, если онъ постоянно будетъ имѣть въ виду тѣ ограниченія, которыя содержатся въ самомъ опредѣленіи этихъ символовъ. Иначе легко впасть въ ошибки. Чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно, напримѣръ, замѣтить, что равносильная одной извѣстной формулѣ тригонометріи формула

$$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg}\frac{u+v}{1-uv}$$

справедлива только при $uv < 1$. Если же $uv > 1$, то въ правой части надо прибавить или отнять число π, смотря по тому, будутъ ли u и v больше 0 или u и v меньше 0. (V.)

е) Если условимся приписывать числу y значеніе 0, когда x число раціональное. и значеніе 1, когда x число ирраціональное, то y будетъ функція отъ x, очевидно, не допускающая обращенія (т. е. не имѣющая обратной). Тоже самое можно сказать о функціи, опредѣляемой требованіемъ принимать значеніе 1 для всѣхъ положительныхъ значеній x, значеніе -1, для всѣхъ отрицательныхъ x и значеніе 0 для $x = 0$. Эта замѣчательная функція встрѣчается часто въ ариѳметическихъ изслѣдованіяхъ Кронеккера (Kronecker), который обозначилъ ее знакомъ $\operatorname{sgn} x$, читается сигнумъ x. На первый взглядъ кажется невозможнымъ изобразить ее помощью знаковъ обыкновенныхъ операцій, а между тѣмъ легко найти различныя ея выраженія, и прежде всего съ помощью знака операціи lim, состоящей въ переходѣ къ предѣлу, въ предположеніи, что нѣкоторое цѣлое число n безпредѣльно возрастаетъ. Дѣйствительно, легко видѣть, что

$$\operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}, \quad \operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}, \quad \operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi} \lim_{n=\infty} \operatorname{arc\,tg} nx \text{ (см. VI)}$$

Впрочемъ, можно и не прибѣгать къ операціи lim. Если условимся приписать функціи $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, которая не опредѣлена этою формулою при $x = 0$, значеніе 0 при $x = 0$, то легко видѣть (см. V), что

$$\operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right).$$

Другая функція, тѣсно связанная съ предыдущею, опредѣляется требованіемъ принимать значеніе, равное абсолютному значенію x при всякомъ данномъ значеніи x. Мы ее обозначимъ символомъ $|x|$. Ясно, что $|x| = x \operatorname{sgn} x$. Наконецъ, функція

$$y = \lim_{n=\infty} \operatorname{sgn}\left[\sin^2 n!\, \pi x\right]$$

есть именно та функція, которую мы опредѣлили въ началѣ пункта e). Дѣйствительно, при x раціональномъ $\left(x = \frac{p}{q}\right)$, $n!x$ при безпредѣльномъ возрастаніи n непремѣнно сдѣлается и останется числомъ цѣлымъ, и $y = \operatorname{sgn} 0 = 0$, а при x ирраціональномъ этого никогда не случится, $\sin^2 n!\pi x$ остается большимъ 0 и $y = 1$.

f) Повторяемость (Häufigkeit) появленія цифры 0 между десятичными знаками числа x есть интересная функція отъ x, которую мы всегда будемъ обозначать символомъ $\omega(x)$, когда будемъ имѣть случай впослѣдствіи приводить ее въ качествѣ примѣра. Она опредѣляется слѣдующимъ образомъ: если въ числѣ первыхъ n десятичныхъ знаковъ числа x заключается m нулей, и отношеніе $\frac{m}{n}$ при безпредѣльномъ возрастаніи числа n стремится къ нѣкоторому предѣлу, то этотъ предѣлъ мы и примемъ за значеніе функціи y, соотвѣтствующее данному значенію x. Функція $y = \omega(x)$ не допускаетъ обращенія, не потому что y нельзя принять за независимую перемѣнную (какъ въ послѣднихъ разсмотрѣнныхъ выше примѣрахъ), а потому, что каждому данному значенію y (которое должно, однако, всегда оставаться въ интервалѣ (0, 1) *) соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній x, и изъ нихъ нельзя изолировать одно опредѣленное, какъ это было сдѣлано въ обратныхъ круговыхъ функціяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что дано по произволу число a и фиксировано положительное сколь угодно малое число h. Всегда можно найти такое цѣлое число ν, чтобы 10^ν было $> \frac{1}{h}$. Обозначимъ, далѣе, черезъ $x' - a$ то число, которое получимъ, когда въ числѣ $x - a$ откинемъ всѣ десятичные знаки, стоящіе правѣе ν-таго. Тогда, очевидно, $x - x' < h$ **), а съ другой стороны $\omega(x') = \omega(a)$, потому что добавленіе $x' - a$ къ a измѣняетъ только конечное число цифръ въ a и на предѣлъ отношенія $\frac{m}{n}$ никакого вліянія не оказываетъ. Такимъ образомъ, наша функція, принявъ нѣкоторое значеніе $\omega(a)$ при $x = a$, возвращается къ тому же значенію безчисленное множество разъ въ окрестности любого другого значенія x. Замѣтимъ, кромѣ того, что всегда можно измѣнять m при возрастаніи n до безконечности такъ, что отношеніе $\frac{m}{n}$ ни къ какому предѣлу не будетъ стремиться, и составить такое число a, для котораго $\omega(a)$ не существуетъ. Изъ предыдущихъ соображеній вытекаетъ, что это будетъ имѣть мѣсто въ окрестности всякаго другого значенія x, такъ что во всякомъ интервалѣ, какъ бы малъ онъ ни былъ, функція $\omega(x)$ не будетъ опредѣлена для безчисленнаго множества значеній перемѣнной (VII).

g) Безконечные ряды и произведенія (§ 252) даютъ новые примѣры функцій. Положивъ, напримѣръ,

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots$$

получимъ функцію y, опредѣленную въ интервалѣ $(-1, +1)$ за исключеніемъ нижней границы. Въ этомъ интервалѣ, какъ извѣстно (§ 186), функція y принимаетъ тѣ же значенія, какъ и другая функція $\log(1 + x)$, опредѣленная въ интервалѣ $(-1, \infty)$, также за исключеніемъ нижней границы. Уравненіе

$$F(x) = \sin 2\pi x + \tfrac{1}{2}\sin 4\pi x + \tfrac{1}{3}\sin 6\pi x + \cdots$$

*) Такъ какъ m всегда $\leq n$.

**) Потому что $x - x' < \frac{1}{10^\nu}$.

опредѣляетъ функцію $F(x)$ для всякаго значенія x (§ 218, i). Полезно замѣтить, что она можетъ быть выражена черезъ двѣ другія весьма простыя функціи $|x|$, т. е. наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x*) и $\operatorname{sgn} x$. Дѣйствительно, элементарнымъ путемъ можно показать [1]), что

$$\frac{2}{\pi} F(x) = \operatorname{sgn}(x - [x]) - 2(x - [x])$$

или, если угодно,

$$\frac{2}{\pi} F(x) = \varrho(-x) - \varrho(x),$$

гдѣ $\varrho(x) = x - [x]$. Въ частности отсюда выводятъ, что въ интервалѣ $(0, 2\pi)$ за исключеніемъ обѣихъ границъ, имѣетъ мѣсто слѣдующая полезная для насъ формула

$$\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots = \tfrac{1}{2}(\pi - x). \text{ (См. VIII.)}$$

h) Замѣтимъ еще, какъ уже было сказано, что нѣтъ надобности умѣть выразить y при помощи аналитическихъ символовъ, изображающихъ нѣкоторыя операціи, производимыя надъ независимой перемѣнной x, или даже только знать, что подобное выраженіе возможно, чтобы имѣть право утверждать, что y есть функція отъ x. Достаточно, чтобы заданіе каждаго значенія x такъ или иначе опредѣляло одно соотвѣтствующее значеніе y. Такъ, напримѣръ, растворимость какой нибудь соли, упругость и скрытая теплота водянаго пара — функціи температуры. Важнѣйшая функція отъ одной независимой перемѣнной (времени), говоритъ Томсонъ [2]), для жителей Ливерпуля, есть, можетъ быть, цѣна хлопчатой бумаги, хотя и не удается найти какую нибудь аналитическую зависимость между этою цѣною и временемъ, считаемымъ отъ нѣкотораго даннаго момента. Другія функціи времени будутъ: само время, показываемое очень плохими часами, температура въ данной точкѣ пространства, или температура, наблюдаемая съ помощью даннаго термометра и выражаемая въ среднемъ и приближенно при помощи круговыхъ тригонометрическихъ функцій [3]). Всѣ эти функціи не обратимы. Какимъ образомъ можно было бы, напримѣръ, разсматривать время, какъ функцію температуры? Но, самая любопытная функція времени, безъ сомнѣнія, есть давленіе воздушнаго столба на барабанную перепонку. Представимъ себѣ, напримѣръ, что эта функція построена при помощи слушанія музыкальной піесы, исполняемой большимъ оркестромъ. Какъ бы сложны, мягки или рѣзки, гармоничны или дисгармоничны ни были производимые звуки, какъ бы они ни наслоялись одинъ на другой, зная эту функцію, мы могли бы съ точностью воспроизвести слышанные звуки, и получили бы, кромѣ того, массу показаній, чуждыхъ дѣйствительному воспріятію музыкальныхъ тоновъ [4]) (IX).

255. Функція называется конечною въ данномъ интервалѣ, если всѣ ея значенія въ этомъ интервалѣ составляютъ конечный ансамбль. Границы этого ансамбля (§ 170) называются грани-

---

*) Читается антье (entier) отъ x.

[1]) Pringsheim. Mathematische Annalen, томъ 26, стр. 193. См. также § 363.

[2]) W. Thomson. „Conférences scientifiques et allocutions" trad. par P. Lugol. 1893, стр. 178.

[3]) Liagre. Calcul des probabilités, стр. 288.

[4]) W. Thomson. Тамъ же, стр. 178—180.

цами (нижнею и верхнею) функціи. Иными словами, нижняя граница функціи есть число, характеризуемое слѣдующимъ двойнымъ условіемъ: 1) оно не превосходитъ ни одного изъ значеній функціи, 2) всякое число, его превосходящее, превзойдетъ и нѣкоторое значеніе функціи. Аналогично, верхняя граница функціи есть число, обладающее слѣдующими свойствами: 1) его не превосходитъ ни одно изъ значеній функціи, 2) всякое число, меньшее его, будетъ меньше нѣкотораго значенія функціи. Эти границы только тогда можно называть наименьшимъ и наибольшимъ значеніемъ функціи, или иначе минимумомъ и максимумомъ ея, если функція, дѣйствительно, принимаетъ значенія, равныя этимъ границамъ въ данномъ интервалѣ. Такъ, напримѣръ, функція $\sin x$ конечна во всякомъ интервалѣ и имѣетъ въ немъ минимумъ -1 и максимумъ $+1$, если интервалъ не меньше 2π. Функція $\varrho(x) = x - [x]$ также конечна во всякомъ интервалѣ, и если интервалъ не меньше 1, то она имѣетъ въ немъ наименьшее значеніе 0, но не имѣетъ наибольшаго, потому что верхняя ея граница 1 не принадлежитъ къ числу значеній функціи при какомъ нибудь значеніи $x\,[0 \leqq \varrho(x) < 1]$. Напротивъ того, функція, равная $\frac{1}{n}$ при $x \gtrless 0$ и равная 0 при $x = 0$, не будетъ конечною въ интервалѣ, въ которомъ лежитъ 0, потому что, какъ бы велико ни было число l, всегда будетъ существовать въ интервалѣ такое значеніе x, при которомъ $\frac{1}{x}$ будетъ больше l или меньше l. Достаточно взять значеніе $|x| < \frac{1}{l}$. Функція можетъ быть конечною въ одномъ направленіи и не конечною въ другомъ (т. е. имѣть нижнюю границу и не имѣть верхней, и наоборотъ). Такъ, напримѣръ, функція, равная квадрату предыдущей (т. е. равная $\frac{1}{x^2}$ при $x \gtrless 0$ и равная 0 при $x = 0$) ни въ какомъ интервалѣ $(-a, +a)$ не имѣетъ верхней границы, но имѣетъ нижнюю границу $\frac{1}{a^2}$, которая въ то же время есть ея минимумъ. Такимъ же образомъ функціи $e^{\frac{1}{x}}$ не конечна въ интервалѣ, заключающемъ въ себѣ 0, но имѣетъ въ немъ минимумъ.

256. Теорема I. Всякая функція, конечная въ данномъ интервалѣ, имѣетъ въ немъ нижнюю и верхнюю границу.

Это есть простое слѣдствіе опредѣленія конечности функціи и извѣстной теоремы (§ 172) о существованіи нижней и верхней границы конечнаго ансамбля.

257. Теорема II. Если функція конечна въ окрестности всѣхъ чиселъ конечнаго интервала, то она конечна и въ интервалѣ.

Мы примѣнимъ для доказательства косвенный пріемъ, а именно докажемъ, что если функція не конечна въ интервалѣ, то найдется по крайней мѣрѣ одно число этого интервала, въ окрестности котораго функція не конечна. Отрицая конечность функціи въ интервалѣ, мы утверждаемъ возможность найти между значеніями, которыя она принимаетъ въ интервалѣ по крайней мѣрѣ, одно y_1, превосходящее любое заданное число l_1, а также и значеніе y_2, превосходящее любое число l_2, большее y_1. Такимъ путемъ можно идти безпредѣльно и построить послѣдовательность чиселъ $l_1, l_2, l_3, \ldots$ постоянно и безпредѣльно возрастающую. Значеніямъ $y_1, y_2 y_3, \ldots$ функціи соотвѣтствуютъ значенія $x_1, x_2, x_3, \ldots$ независимой перемѣнной, всѣ между собою различныя *), и образующія поэтому послѣдовательность, состоящую изъ безконечно большого числа чиселъ. Такъ какъ всѣ эти числа принадлежатъ конечному интервалу, то по извѣстной теоремѣ (§ 174), въ этомъ интервалѣ существуетъ одно или нѣсколько чиселъ, въ окрестности которыхъ будетъ безчисленное множество чиселъ этой послѣдовательности (точки сгущенія). Пусть ξ одно изъ такихъ чиселъ. Выбравъ по произволу положительное сколь угодно малое число h, покажемъ, что въ интервалѣ $(\xi - h, \xi + h)$ функція превзойдетъ любое число l, какъ бы оно велико ни было. Дѣйствительно, выбравъ ν настолько большимъ, чтобы при $n > \nu$ l_n было больше l, замѣтимъ, что въ послѣдовательности $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, x_{\nu+3}, \ldots$ непремѣнно въ концѣ концовъ найдется такое x_n, которое попадетъ въ интервалъ $(\xi - h, \xi + h)$ **). Соотвѣтствующее ему значеніе функціи y_n, по условію, больше $l_n > l$; слѣдовательно, въ окрестности точки ξ функція y приметъ значеніе, большее любого числа l, что и надо было доказать.

258. Можно доказать эту теорему и прямымъ путемъ, если не желаемъ ссылаться на теорему § 174. По условію, функція конечна въ окрестности со всѣми числами интервала (a, b). Въ частности, условіе, что она конечна вправо отъ a, обозначаетъ, что она конечна въ интервалѣ (a, x), верхняя граница котораго x достаточно близка къ a. Это будетъ справедливо и для всякаго числа $x' < x$ и $> a$. Ансамбль всѣхъ такихъ чиселъ $x \leqq b$, для которыхъ функція конечна въ интервалѣ (a, x) имѣетъ верхнюю границу $\xi \leqq b$. Это число ξ есть наибольшее число этого ансамбля (т. е. принадлежитъ этому ансамблю). Дѣйствительно, взявъ какое нибудь число $\xi' < \xi$, достаточно близкое къ ξ, и принимая во вниманіе, что функція конечна влѣво отъ ξ (по условію), заключаемъ, что она конечна въ интервалѣ (ξ', ξ). Съ другой стороны она конечна въ интервалѣ (a, ξ'), слѣдовательно, и во всемъ ин-

*) Иначе одному и тому же значенію x соотвѣтствовали бы различныя значенія y, что противорѣчитъ установленному здѣсь опредѣленію функціи (§ 253).

**) Иначе ξ не было бы точкою сгущенія.

тервалѣ (a, ξ), (т. е. ξ принадлежитъ разсматриваемому ансамблю и является наибольшимъ числомъ въ немъ). Остается показать, что $\xi = b$. Если бы ξ было меньше b, то взявъ число $\xi'' > \xi$, достаточно близкое къ ξ, мы получили бы интервалъ (ξ, ξ''), въ которомъ функція была бы конечна, а слѣдовательно, она была бы конечна и въ интервалѣ (a, ξ''), а это противорѣчитъ тому, что ξ есть наибольшее изъ чиселъ $x \leqq b$, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что функція конечна въ интервалѣ (a, x). Итакъ, $\xi = b$.

259. Теорема III. (Первая теорема Вейерштрасса). Если функція конечна въ конечномъ интервалѣ, то въ немъ найдется, по крайней мѣрѣ, одно число, въ окрестности котораго функція имѣетъ ту же нижнюю границу, какую она имѣетъ во всемъ интервалѣ. То же самое относится и къ верхней границѣ.

Мы можемъ ограничиться доказательствомъ теоремы для нижней границы. Обозначимъ ее черезъ λ. Если она въ то же время минимумъ функціи, то въ разсматриваемомъ интервалѣ найдется, по крайней мѣрѣ, одно число ξ, для котораго $f(\xi) = \lambda$, и ясно, что и въ окрестности ξ число λ будетъ минимумомъ функціи. Если λ не минимумъ, то это показываетъ, что $f(x) - \lambda$ въ данномъ интервалѣ всегда больше 0, но принимаетъ сколь угодно малыя значенія, откуда слѣдуетъ, что функція

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}$$

опредѣлена во всемъ интервалѣ (a, b), но не конечна въ немъ. Поэтому (§ 257 или 258) въ интервалѣ (a, b) существуетъ такое число ξ, въ окрестности котораго $\varphi(x)$ не конечна, т. е. какъ бы велико ни было число l, всегда въ сколь угодно маломъ интервалѣ $(\xi - h, \xi + h)$ найдется число x_0, для котораго $\varphi(x_0) > l$, откуда $f(x_0) < \lambda + \frac{1}{l}$. Слѣдовательно, $f(x_0)$ меньше числа, которое больше λ, но отличается отъ λ сколь угодно мало. Итакъ, и въ интервалѣ $(\xi - h, \xi + h)$ λ есть наибольшее изъ чиселъ, не превосходящихъ ни одного значенія функціи $f(x)$ въ этомъ интервалѣ, иными словами: λ нижняя граница функціи въ окрестности ξ.

Стремленіе къ предѣлу.

260. Когда говорятъ, что независимая перемѣнная x стремится къ предѣлу a, то это значитъ (§ 169), что x принимаетъ всѣ значенія въ окрестности a. Часто полезно бываетъ различать стремленіе къ a слѣва или справа, и можно себѣ представить, что въ первомъ случаѣ перемѣнная x проходитъ, постоянно возрастая, цѣлый интервалъ $(a - h, a)$, за исключеніемъ верхней границы, а во второмъ—постоянно убывая, интервалъ $(a, a + h)$, за

исключеніемъ нижней границы. Говорятъ, далѣе, что перемѣнная x стремится къ безконечности, если при своемъ измѣненіи она, въ концѣ концовъ, принимаетъ значенія, превосходящія любое данное число. Этого можно достигнуть, заставляя x проходить цѣлый интервалъ (ξ, ∞). Аналогичное опредѣленіе имѣется для x, стремящагося къ $-\infty$.

261. Говорятъ, что значенія $f(x)$ справа отъ a стремятся къ предѣлу l, если съ приближеніемъ x къ a справа, абсолютная величина разности $f(x)-l$, наконецъ, становится и остается меньше любого положительнаго числа. Подробнѣе это можно выразить такъ. Говорятъ, что $f(x)$ справа отъ a имѣетъ предѣлъ l, и пишутъ

$$\lim_{x=a+0} f(x) = l,$$

если каждому сколь угодно малому положительному числу ε соотвѣтствуетъ такое число $h>0$, что для всѣхъ значеній x въ интервалѣ $(a,\ a+h)$, за исключеніемъ нижней границы, имѣетъ мѣсто неравенство

$$|f(x)-l|<\varepsilon. \tag{1}$$

Также говорятъ, что $f(x)$ слѣва отъ a имѣетъ предѣлъ l и пишутъ

$$\lim_{x=a-0} f(x) = l,$$

если каждому числу $\varepsilon>0$ соотвѣтствуетъ такое число $h>0$, что неравенство (1) имѣетъ мѣсто для всякаго x въ интервалѣ $(a-h,\ a)$, за исключеніемъ верхней границы. Наконецъ, если, какъ это обыкновенно и бываетъ, существуютъ предѣлы справа и слѣва отъ a, и оба равны l, то пишутъ

$$\lim_{x=a} f(x) = l.$$

Только для сокращенія рѣчи говорятъ, что $f(x)$ имѣетъ предѣлъ l, при $x=a$. Подъ этимъ надо понимать, что перемѣнная x должна принимать всѣ значенія, безконечно близкія къ a, за исключеніемъ именно самого a. Вообще надо отличать числа $f(a+0)$ и $f(a-0)$, т. е. предѣлы функціи $f(x)$ при $x=a$, отъ значенія $f(a)$, дѣйствительно получаемаго функціей при $x=a$.

262. Говорятъ далѣе, что $f(x)$ стремится къ предѣлу l, при x безконечномъ, если каждому положительному числу ε соотвѣтствуетъ такое число ξ, что неравенство (1) будетъ справедливо при всякомъ значеніи $x>\xi$.

Говорятъ, что для x, стремящагося къ a справа или слѣва *)

*) Или съ приближеніемъ x къ a справа или слѣва.

$f(x)$ стремится къ ∞, и условились писать

$$\lim_{x=a+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x=a-0} f(x) = \infty,$$

если всякому сколь угодно большому числу l, соотвѣтствуетъ такое положительное число h, что въ интервалѣ $(a, a+h)$ или $(a-h, a)$, за исключеніемъ границы a, имѣетъ мѣсто неравенство $f(x) > l$. Аналогично этому опредѣляется стремленіе или приближеніе къ предѣлу $-\infty$. Наконецъ, говорятъ, что при x безконечномъ $f(x)$ стремится къ безконечности, и условимся писать

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty,$$

если каждому сколь угодно большому числу l соотвѣтствуетъ такое число ξ, что $f(x) > l$ при $x > \xi$. Небольшого размышленія достаточно, чтобы убѣдиться, что всѣ эти опредѣленія построены по одному и тому же принципу. Здѣсь кстати будетъ замѣтить, что часто вмѣсто того, чтобы говорить, что нѣкоторая функція стремится къ ∞, когда x стремится къ a, или, что она стремится къ предѣлу l, когда a стремится къ безконечности, говорятъ, что эта функція безконечна при $x = a$, или что она равна l при x безконечномъ. Это совершенно условный способъ выраженія, имѣющій свои выгоды и не вызывающій сомнѣній, если разъ навсегда ясно установленъ ихъ истинный смыслъ. Сообразно такому способу выраженія принято писать

$$f(a) = \infty \quad \text{или} \quad f(\infty) = l.$$

Вотъ этимъ то способомъ и можно опредѣлить, напримѣръ, функцію $\operatorname{arc\,tg} x$ (§ 254, d) подобно функціи $\operatorname{arc\,sin} x$, не исключая значеній $\pm\frac{\pi}{2}$. Безъ этого равенства въ родѣ $\operatorname{arc\,tg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, или $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$, не имѣли бы смысла. Въ послѣднемъ случаѣ, впрочемъ, молча подразумѣвается еще нѣчто: въ лѣвой части надо подъ $\frac{\pi}{2}$ подразумѣвать $\frac{\pi}{2} - 0$, потому что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \pm\infty.$$

263. Изъ тѣхъ же соображеній, которыми раньше пользовались, когда шла рѣчь о функціяхъ, зависящихъ отъ перемѣннаго числа n, принимающаго одни цѣлыя значенія (число a_n данной послѣдовательности, общій членъ безконечнаго ряда u_n), вытекаютъ нижеслѣдующіе результаты. Всякая функція, принимающая при возрастаніи перемѣннаго такія значенія, изъ которыхъ послѣдующее никогда не меньше предыдущаго, стремится при безконечномъ x къ

нѣкоторому конечному или безконечному предѣлу, потому что такой функціи достаточно сдѣлаться больше нѣкотораго даннаго числа, чтобы затѣмъ и оставаться больше этого числа при возрастаніи x. Если нѣкоторая функція всегда заключается между двумя другими, которыя съ приближеніемъ x къ a стремятся къ общему предѣлу l, то и данная функція стремится къ тому же предѣлу l. Если съ приближеніемъ x къ a функція стремится къ нѣкоторому предѣлу, отличному отъ нуля, то въ концѣ концовъ функція приметъ и будетъ сохранять знакъ (+ или —) этого предѣла. Поэтому функція, никогда не перестающая принимать какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія въ окрестности нѣкотораго даннаго значенія a, не можетъ стремиться къ предѣлу, отличному отъ нуля. Если u, v, w, ... функціи отъ x, и если съ приближеніемъ x къ a:

$$\lim u = \alpha, \quad \lim v = \beta, \quad \lim w = \gamma, \ldots,$$

то

$$\lim (u + v + w + \cdots) = \alpha + \beta + \gamma + \cdots, \quad \lim uvw \cdots = \alpha\beta\gamma \cdots,$$

при условіи, что число разсматриваемыхъ функцій конечное. Предѣлъ отношенія u къ v равенъ $\frac{\alpha}{\beta}$, при условіи, что β не равно нулю, но можно кое что сказать и въ тѣхъ случаяхъ, когда v ни къ какому конечному отличному отъ нуля предѣлу не стремится. А именно, если v безпредѣльно возрастаетъ, при чемъ u остается конечнымъ, то $\frac{u}{v}$ стремится къ 0, а когда v стремится къ 0, сохраняя при этомъ знакъ числителя u, и $\frac{1}{u}$ остается конечнымъ по абсолютной величинѣ, то $\frac{u}{v}$ возрастаетъ безпредѣльно. У насъ нѣтъ еще средствъ для вычисленія предѣла частнаго, когда числитель и знаменатель одновременно стремятся къ нулю, но этимъ вопросомъ мы ниже займемся.

264. Теорема IV. Для того, чтобы функція $f(x)$ стремилась къ конечному предѣлу съ приближеніемъ x къ a справа, необходимо и достаточно нижеслѣдующее условіе: когда задано положительное сколь угодное малое число ε, всегда можно найти такое положительное число h, чтобы для всякой пары значеній x' и x'', лежащихъ въ интервалѣ $(a, a+h)$, за исключеніемъ нижней границы, удовлетворялось неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Условіе необходимо. Именно, если $f(x)$ стремится къ предѣлу l, съ приближеніемъ x къ a справа, то это значитъ, что при данномъ сколь угодно маломъ $\varepsilon > 0$ существуетъ такое число $h > 0$, что

$$|f(x) - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

для всякаго x, удовлетворяющаго неравенствамъ

$$a < x \leqq a+h.$$

Поэтому, если x' и x'' лежатъ въ интервалѣ $(a,\ a+h)$, не совпадая съ a, то одновременно имѣемъ

$$|f(x') - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad |f(x'') - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$|f(x') - f(x'')| \leqq |f(x') - l| + |l - f(x'')| < \varepsilon.$$

Представимъ себѣ теперь обратно, что при данномъ $\varepsilon > 0$ опредѣленъ такой интервалъ $(a,\ a+h)$, въ которомъ, за исключеніемъ нижней границы, всегда

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{2}$$

Выберемъ въ этомъ интервалѣ произвольную убывающую послѣдовательность чиселъ, стремящихся къ предѣлу a, и разсмотримъ послѣдовательность соотвѣтствующихъ значеній функціи. Извѣстно (§ 137), что изъ второй послѣдовательности всегда можно выдѣлить такую $f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3), \ldots$, которая стремится къ нѣкоторому предѣлу. Предѣлъ этотъ не можетъ быть безконечнымъ, потому что изъ (2) вытекаетъ

$$f(a_1) - \tfrac{1}{2}\varepsilon < f(a_n) < f(a_1) + \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Поэтому положимъ, что

$$\lim_{n=\infty} f(a_n) = l,$$

и возьмемъ n достаточно большимъ, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(a_n) - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Для всякаго значенія x въ интервалѣ $(a,\ a+h)$, за исключеніемъ нижней границы, имѣемъ, въ силу условія (2),

$$|f(x) - f(a_n)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

а потому, складывая два послѣднія неравенства, получимъ

$$|f(x) - l| \leqq |f(x) - f(a_n)| + |f(a_n) - l| < \varepsilon.$$

Слѣдовательно, l есть предѣлъ $f(x)$ справа отъ a. Съ очевиднымъ измѣненіемъ разсужденія докажемъ также существованіе предѣла слѣва. Далѣе легко приноровить вышеизложенное доказательство къ случаю безпредѣльно возрастающаго x. Нужно только замѣнить число h числомъ ξ, нижнею границею безконечнаго интервала $(\xi,\ \infty)$, въ которомъ выбираются числа x' и x''.

265. При изученіи функцій оказывается также весьма полезнымъ ввести въ разсмотрѣніе числа, аналогичныя тѣмъ, которыя введены были раньше въ § 175, и разсматривать ихъ съ той точки зрѣнія, которая была указана въ § 178. Ансамбль значеній, принимаемыхъ нѣкоторою конечною функціею $f(x)$ въ интервалѣ $(x,\ x+h)$, за исключеніемъ границы x, имѣетъ нижнюю границу λ. Это λ есть функція отъ h, необходимо стремящаяся къ нѣкоторому предѣлу λ_0, когда h стремится къ 0, потому что, при убываніи h, λ не можетъ измѣняться иначе, какъ только возрастая *), но остается при этомъ меньше верхней границы μ. Это число λ_0 и будетъ то, что называется наименьшимъ изъ предѣловъ функціи $f(x)$. Аналогично этому опредѣляется наибольшій изъ предѣловъ μ_0. Очевидно, эти предѣлы, называемые также предѣлами неопредѣленности (Unbestimmtheitsgrenzen), зависятъ исключительно отъ x, и могутъ быть, однако, различны слѣва и справа отъ него. Функціи, $\lambda_0(x)$ и $\mu_0(x)$, относящіяся, напримѣръ, къ правой сторонѣ x, характеризуются слѣдующими свойствами. Всякому положительному ε соотвѣтствуетъ такое положительное число h, что для всякаго значенія x, лежащаго между a и $a+h$

$$\lambda_0(a) - \varepsilon < f(x) < \mu_0(a) + \varepsilon,$$

и въ каждомъ сколь угодно маломъ интервалѣ $(a,\ a+h)$ существуютъ числа x' и x'', для которыхъ

$$\lambda_0(a) + \varepsilon > f(x'),\quad f(x'') < \mu_0(a) - \varepsilon.$$

На этомъ основаніи легко доказать теорему IV, не прибѣгая къ леммѣ § 137. Достаточно замѣтить слѣдующее: если не существуетъ единственнаго предѣла значеній x справа отъ a, то $\lambda_0 < \mu_0$, и задавъ положительное число $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$, всегда можно найти числа x' и x'', какъ угодно близкія къ a, и при томъ такія, что

$$f(x') < \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon),\quad f(x'') > \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon)\ **),$$

откуда получается $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. Поэтому, если для каждой пары значеній x' и x'' и для всякаго ε удовлетворяется условіе $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ въ достаточно маломъ промежуткѣ $(a,\ a+h)$, то невозможно, чтобы λ_0 было меньше μ_0, такъ что $\lambda_0 = \mu_0$ и необходимо существуетъ число $f(a+0)$, равное общему значенію λ_0 и μ_0 ***).

---

*) Точно говоря, не убывая, потому что если бы въ интервалѣ $(x,\ x+h_1)$ гдѣ $h_1 < h$, нижняя граница функціи была бы $\lambda_1 < \lambda$, то это λ_1 было бы нижнею границею и въ $(x,\ x+h)$, поэтому $\lambda_1 \geqq \lambda$.

**) Ибо $\frac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon) > \lambda_0$, а $\frac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon) < \mu_0$, и существуетъ (см. выше) такое x', что $f(x')$ меньше любого числа, которое $> \lambda_0$ и т. д.

***) Все сказанное здѣсь есть простое примѣненіе соображеній, изложенныхъ въ §§ 176—178, къ ансамблю значеній данной функціи $f(x)$ въ данномъ интервалѣ.

Непрерывность.

266. Непрерывныя функціи. Функція называется непрерывною при $x = a$, если предѣлы, къ которымъ она стремится съ приближеніемъ x къ a, совпадаютъ съ частнымъ значеніемъ, которое функція имѣетъ для $x = a$. Итакъ, непрерывность функціи $f(x)$ при $x = a$ выражается равенствами

$$f(a + 0) = f(a), \quad f(a - 0) = f(a).$$

Функція называется непрерывною въ интервалѣ, если она непрерывна при всякомъ значеніи x, лежащемъ въ этомъ интервалѣ. Можетъ случиться, что функція непрерывна только справа или только слѣва отъ a. Это тотъ случай, когда имѣетъ мѣсто лишь одно изъ выше приведенныхъ равенствъ. (Либо $f(a + 0) = f(a)$, либо $f(a - 0) = f(a)$, но не оба вмѣстѣ.) Замѣтимъ, что, употребляя, напримѣръ, выраженіе: функція непрерывна справа отъ a, мы принуждены стать въ противорѣчіе съ однимъ общимъ опредѣленіемъ, установленнымъ въ § 169. Поэтому, если мы хотимъ утверждать, что функція непрерывна въ нѣкоторомъ интервалѣ, котораго нижняя граница есть a, то должны непремѣнно явно это и высказать (X). Важно замѣтить, что опредѣленіе непрерывности всецѣло заключается въ равенствѣ

$$\lim f(x) = f(\lim x),$$

такъ что возможность переставлять символы f и lim. является характеристичнымъ свойствомъ непрерывныхъ функцій.

267. Ясно, что для непрерывныхъ функцій имѣютъ мѣсто свойства, аналогичныя тѣмъ, которыя были доказаны въ теоріи предѣловъ. Въ частности суммы и произведенія конечнаго числа непрерывныхъ функцій будутъ также непрерывными функціями. Такъ, напримѣръ, если при нѣкоторомъ значеніи x, функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны, то для этого же значенія непрерывны и функціи

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad g(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$

потому что (§ 263)

$$\lim f(x) = \lim \varphi(x) + \lim \psi(x) = \varphi(\lim x) + \psi(\lim x) = f(\lim x)$$
$$\lim g(x) = \lim \varphi(x) \cdot \lim \psi(x) = \varphi(\lim x) \cdot \psi(\lim x) = g(\lim x).$$

Частное отъ дѣленія одной непрерывной функціи на другую также непрерывно, при условіи, что исключаются всѣ значенія x, для которыхъ дѣлитель обращается въ нуль. Наконецъ, замѣтимъ, что непрерывная функція отъ непрерывной функ-

ціи отъ x также непрерывна. Въ самомъ дѣлѣ, составляя изъ двухъ непрерывныхъ функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ новую $f(x) = \varphi[\psi(x)]$, имѣемъ

$$\lim f(x) = \lim \varphi[\psi(x)] = \varphi[\lim \psi(x)] = \varphi[\psi(\lim x)] = f(\lim x),$$

предполагая, конечно, что значенія функціи $\psi(x)$, принимаемыя ею въ интервалахъ, въ которыхъ она непрерывна, попадаютъ въ тѣ интервалы, въ которыхъ $\varphi(x)$ непрерывна. Эти значенія, какъ увидимъ дальше (§ 276), образуютъ одинъ или нѣсколько интерваловъ, въ которыхъ ψ и должна быть непрерывна.

268. Теорема V. Необходимое и достаточное условіе для того, чтобы $f(x)$ была непрерывна справа отъ a, состоитъ въ томъ, чтобы по произвольно заданному, сколь угодно малому положительному числу ε, можно было опредѣлить положительное число h такъ, чтобы неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

выполнялось для всякой пары значеній x' и x'' въ интервалѣ $(a,\ a+h)$ *).

Что условіе болѣе, чѣмъ достаточно, видно изъ того, что взявъ $x' = a$ и x'' равнымъ любому числу между a и $a+h$, изъ условія $|f(x'') - f(a)| < \varepsilon$, имѣемъ $f(a+0) = f(a)$. Обратно, если $f(a+0)$ существуетъ и равно $f(a)$, то при всякомъ данномъ числѣ ε можно найти такія положительныя числа h' и h'', чтобы неравенства

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

удовлетворялись; первое, на основаніи теоремы IV, для любой пары значеній x' и x'' въ интервалѣ $(a,\ a+h')$, за исключеніемъ нижней границы a, а второе, на основаніи опредѣленія предѣла, для всякаго x въ интервалѣ $(a,\ a+h'')$. Поэтому, обозначая черезъ h наименьшее изъ чиселъ h' и h'', и сопоставляя оба предыдущія неравенства, находимъ, что для всякой пары значеній x' и x'' въ интервалѣ $(a,\ a+h)$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Очевидно, что такую же теорему можно высказать и подобнымъ же образомъ доказать для лѣвой стороны отъ a. Разсматривая, далѣе, одновременно правую и лѣвую стороны отъ a, находимъ нижеслѣдующее необходимое и достаточное условіе для непрерывности $f(x)$ при $x = a$: для каждаго положительнаго числа ε должно найтись такое положительное число h, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, для всякой пары значеній x' и x'' въ промежуткѣ $(a-h,\ a+h)$.

269. Понятіе о непрерывности весьма полезно въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется дополнить (распространить) опредѣленіе нѣ-

*) Не исключая a.

которой функціи и въ частности тѣхъ, которыя для раціональныхъ значеній независимой перемѣнной намъ извѣстны уже изъ элементарной алгебры. Если функція $f(x)$ такова, что, при произвольно заданномъ сколь угодно маломъ положительномъ ε, около каждаго значенія x можно назначать такой интервалъ, въ которомъ абсолютная величина разности любыхъ двухъ значеній функціи будетъ меньше ε, то легко распространить опредѣленіе $f(x)$ на ирраціональныя значенія x и при томъ такъ, что получится функція, непрерывная для всѣхъ (раціональныхъ и ирраціональныхъ) значеній независимой перемѣнной. Съ этой цѣлью, беремъ какую угодно послѣдовательность раціональныхъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ стремящихся къ ирраціональному предѣлу a. Въ смежности съ a беремъ такой интервалъ, внутри котораго абсолютная величина разности любыхъ двухъ значеній функціи меньше ε. Въ этотъ интервалъ, въ концѣ концовъ, попадаютъ числа нашей послѣдовательности, такъ что, при достаточно большихъ значеніяхъ n' и n'', будемъ имѣть

$$|f(a_{n'}) - f(a_{n''})| < \varepsilon$$

Слѣдовательно (§ 139), существуетъ нѣкоторый предѣлъ для $f(a_n)$ и этотъ предѣлъ мы и условимся понимать подъ значеніемъ $f(a)$. Теперь докажемъ, что опредѣленная такимъ образомъ функція непрерывна для всякаго раціональнаго или ирраціональнаго значенія a независимой перемѣнной. Въ самомъ дѣлѣ, когда задано сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$, можно, по условію, найти такое $h > 0$, чтобы для любой пары раціональныхъ значеній x' и x'' въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$ имѣли

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Ясно, что это неравенство остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда одно изъ чиселъ x' или x'', напримѣръ x', ирраціонально, лишь бы другое, раціональное x'' было взято достаточно близко къ x'; это вытекаетъ изъ установленнаго выше опредѣленія $f(x')$ при ирраціональномъ x'. Отсюда слѣдуетъ, что будутъ ли x' и x'' раціональны или ирраціональны, лишь бы они лежали въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$, всегда можно найти раціональныя числа a' и a'', для которыхъ

$$|f(x') - f(a')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,\quad |f(x'') - f(a'')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Замѣчая, что $f(x') - f(x'')$ равно суммѣ трехъ разностей

$$f(x') - f(a'),\quad f(a') - f(a''),\quad f(a'') - f(x''),$$

изъ которыхъ каждая по абсолютной величинѣ меньше $\frac{1}{3}\varepsilon$, находимъ, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всякой пары значеній x' и x''

въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$. Отсюда, по теоремѣ V, и вытекаетъ, что $f(x)$ непрерывна при $x=a$.

270. Примѣры. a) Весьма легко убѣдиться, что функціи $y=1$, x, x^2, ... $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, ... непрерывны при всякомъ значеніи x (для $\sqrt{x}$, конечно, при $x>0$). Напримѣръ, замѣчая, что

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}},$$

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2},$$

находимъ, что съ приближеніемъ x къ a $\lim\sqrt{x}=\sqrt{a}$, $\lim\sin x=\sin a$, и для первой, въ случаѣ $a=0$, $\lim\sqrt{x}=0$ справа отъ нуля. Также функція, опредѣляемая для $x\gtrless 0$ формулою $\frac{\sin x}{x}$ и равная 1 при $x=0$, непрерывна при всякомъ x: при $x\gtrless 0$, какъ отношеніе двухъ непрерывныхъ функцій, а при $x=0$, потому что, приближаясь къ нулю, длина дуги x всегда заключается между $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$, слѣдовательно

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \lim_{x=0}\frac{\sin x}{x} = 1\ ^*).$$

b) Функція a^x при x раціональномъ (и $a>0$) извѣстна изъ Алгебры. Слѣдуя указаніямъ § 269, легко обобщить ея опредѣленіе для x ирраціональнаго. Прежде всего припоминаемъ, что при раціональныхъ x' и x'' разность $a^{x'}-a^{x''}$ можно сдѣлать сколь угодно малою по абсолютной величинѣ, взявъ разность $x'-x''$ достаточно малою по абсолютной величинѣ. Дѣйствительно, тогда $a^{x'-x''}$ будетъ какъ угодно близка къ 1, а потому $a^{x'}-a^{x''}=a^{x''}(a^{x'-x''}-1)$ будетъ какъ угодно мала по абсолютной величинѣ **). Поэтому, на основаніи § 269, всякой послѣдовательности чиселъ x_1, x_2, x_3, ..., стремящейся къ ирраціональному предѣлу x, соотвѣтствуетъ послѣдовательность чиселъ a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, ..., стремящихся къ нѣкоторому конечному предѣлу. Этотъ предѣлъ мы и обозначаемъ черезъ a^x. Легко показать, что опредѣленная такимъ образомъ функція сохраняетъ при всякомъ x извѣстныя свойства функціи a^x при x раціональномъ, а именно: измѣняется постоянно въ одномъ направленіи при возрастаніи x, постоянно и безпредѣльно возрастая при $a>1$, и наоборотъ, стремясь къ нулю, при $a<1$, и удовлетворяетъ условію $a^x\cdot a^{x'}=a^{x+x'}$. Изъ этихъ замѣчаній слѣдуетъ, что уравненіе $a^y=x$, опредѣляетъ y, какъ функцію отъ x, въ интервалѣ $(0,\infty)$, за исключеніемъ нижней границы, потому что всякому положительному значенію x соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе y.

---

*) При $x>0$, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, $\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$, т. е. $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$. $\lim\cos x=1$, откуда $\lim\frac{\sin x}{x}=1$. Результатъ останется вѣрнымъ и при $x<0$, потому что $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$.

**) См. Веберъ и Вельштейнъ. Стр. 120.

Непрерывность этой функціи $y = \operatorname{Log} x$ есть прямое слѣдствіе непрерывности обратной ея функціи a^x *).

c) Сдѣлаемъ еще приложеніе сказаннаго въ § 269, предложивъ себѣ изъ всѣхъ функцій, обладающихъ свойствомъ

$$f(x) + f(x') = f(x + x'),$$

найти тѣ, которыя будутъ непрерывны. Если x положительное раціональное число, и положимъ $x = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя положительныя числа, то, очевидно, будемъ имѣть

$$f(x) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot qf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1) = ax, \text{ **)}$$

обозначая черезъ a число $f(1)$. Далѣе, при $x' = 0$, имѣемъ $f(x) + f(0) = f(x)$, откуда $f(0) = 0$. При $x' = -x$, находимъ $f(x) = -f(-x)$; поэтому и при $x \leqq 0$ $f(x) = ax$. Если положимъ теперь, что x число ирраціональное и возьмемъ произвольную послѣдовательность чиселъ (раціональныхъ) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ имѣющихъ предѣломъ x, то по условію непрерывности должны имѣть

$$f(x) = f(\lim_{n=\infty} x_n) = \lim_{n=\infty} f(x_n) = \lim_{n=\infty} ax_n = ax.$$

Рекомендуемъ читателю для упражненія провести аналогичное изслѣдованіе для функцій, обладающихъ свойствомъ

$$f(x) \cdot f(x') = f(xx'),$$

и замѣтимъ, что кромѣ непрерывной функціи x^m, этому условію удовлетворяетъ безчисленное множество разрывныхъ функцій, въ томъ числѣ $\operatorname{sgn} x$.

d) Когда x стремится къ нулю, то $\frac{a^x - 1}{x}$ всегда остается между числами

$$n\left(\sqrt[n+1]{a} - 1\right), \quad (n+1)\left(\sqrt[n]{a} - 1\right),$$

гдѣ $n = \left[\frac{1}{x}\right]$, а такъ какъ (§ 159) $\lim_{n=\infty} \left(n\sqrt[n]{a} - 1\right) = \log a$, то

$$\lim_{n=\infty} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Итакъ, примѣромъ функціи, непрерывной для всѣхъ значеній x, можетъ,

---

*) Это заключеніе не очевидно, но легко можетъ быть доказано, послѣ того, какъ будетъ доказана теорема § 276.

**) Такъ какъ $f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}\right) + f\left(\frac{1}{q}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{q}\right)$ [p разъ], и т. д. какъ это слѣдуетъ изъ условія.

служить также функція, опредѣляемая при $x \gtrless 0$ формулою $\frac{a^x - 1}{x}$, и равная $\log a$ при $x = 0$. Аналогично этому доказываютъ, что

$$\lim_{x=0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

и, слѣдовательно, функція, равная $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x \gtrless 0$, и равная e при $x = 0$, непрерывна при всякомъ x.

271. Разрывныя функціи. Функція называется разрывною при данномъ значеніи x, если она при этомъ значеніи не непрерывна, а разрывною въ интервалѣ, если она разрывна, по крайней мѣрѣ, при одномъ значеніи x въ этомъ интервалѣ. Разрывъ можетъ являться съ обѣихъ сторонъ $x = a$ или только съ одной, и во всякомъ случаѣ разрывы съ разныхъ сторонъ отъ a другъ отъ друга независимы. Мы можемъ поэтому ограничиться разсмотрѣніемъ разрывовъ, могущихъ имѣть мѣсто справа отъ a, и замѣтимъ, что функція будетъ разрывна, 1) если предѣлъ, къ которому она стремится справа отъ a, не совпадаетъ съ частнымъ ея значеніемъ при $x = a$, и 2) если этотъ предѣлъ безконечный или вовсе не существуетъ. Въ первомъ случаѣ разрывъ называется разрывомъ 1-го рода или обыкновеннымъ, во второмъ—разрывомъ 2-го рода. Существенная разница между двумя родами разрывовъ состоитъ въ томъ, что разрывъ 2-го рода не зависитъ отъ значенія функціи при $x = a$, а исключительно отъ того, какимъ образомъ измѣняется функція въ окрестности a. Иными словами, чтобы указать, имѣетъ ли $f(x)$ разрывъ 2-го рода справа или слѣва отъ a, нѣтъ надобности знать число $f(a)$; наоборотъ, неизбѣжно его знать, если хотятъ узнать, имѣетъ ли $f(x)$ разрывъ 1-го рода (обыкновенный), который возможно устранить, по крайней мѣрѣ, съ одной стороны отъ a, измѣнивъ значеніе $f(a)$.

272. Примѣры. а) Изъ теоремъ, доказанныхъ въ концѣ § 267, слѣдуетъ, что $\frac{1}{x}$ и $\sin\frac{1}{x}$ непрерывны при $x \gtrless 0$. При $x = 0$, напротивъ, онѣ имѣютъ разрывъ 2-го рода. Чтобы это установить, не надо знать какія значенія даны будутъ этимъ функціямъ при $x = 0$. Достаточно замѣтить для первой, что $\frac{1}{x}$ по абсолютной величинѣ возрастаетъ безпредѣльно съ приближеніемъ x къ нулю, а для второй, что $\sin\frac{1}{x}$ ни къ какому предѣлу не стремится съ приближеніемъ x къ нулю. Дѣйствительно, въ сколь угодно маломъ интервалѣ $(-h, +h)$ эта функція принимаетъ значенія 0, 1, 0, -1 одно за другимъ, всякій разъ какъ число $\frac{2}{\pi x}$, безпредѣльно возрастая по абсолютной величинѣ, дѣлается равнымъ цѣлому числу, сравнимому (mod. 4) съ числами 0, 1, 2, 3. (XI). Иной характеръ имѣетъ функція, опредѣляемая формулою $x \sin\frac{1}{x}$ для $x \gtrless 0$: она будетъ непрерывна и при $x = 0$, если для

этого значенія x припишемъ ей значеніе 0, или будетъ имѣть разрывъ 1-го рода (обыкновенный) при $x = 0$, если припишемъ ей для этого значенія x значеніе, отличное отъ нуля. Чтобы показать, что разрывъ можетъ произойти съ одной лишь стороны отъ нѣкотораго значенія перемѣнной, разсмотримъ напримѣръ, функцію, равную нулю при $x = 0$, и равную $e^{\frac{1}{x}}$ при $x \gtrless 0$. Она непрерывна слѣва и разрывна справа отъ 0, потому что ея значенія стремятся къ предѣлу 0 или ∞, смотря по тому, приближается ли x къ нулю, оставаясь отрицательнымъ или положительнымъ. Функція $\log x$, непрерывная при $x > 0$, неимѣющая смысла при $x < 0$, имѣетъ разрывъ справа отъ $x = 0$ такого же рода, какъ функія $\frac{1}{x}$. То же самое можно сказать о функціи $\sin \log x$, имѣющей разрывъ при $x = 0$ того же рода, какъ $\sin \frac{1}{x}$, а для $x > 0$ непрерывной, на основаніи послѣдней теоремы § 267. На томъ же основаніи $\log \sin x$ непрерывна, пока $\sin x$ не равенъ 0, и разрывна, какъ $\frac{1}{x}$, справа отъ четныхъ и слѣва отъ нечетныхъ кратныхъ числа π, какимъ бы образомъ мы ни опредѣляли ея значеніе при x, равномъ кратному отъ π. Всѣ вышеупомянутыя функціи и всѣ другія, имѣющія въ конечномъ интервалѣ конечное число разрывовъ, называютъ вообще непрерывными, чтобы отличить ихъ отъ тѣхъ, которыя имѣютъ въ конечномъ интервалѣ безконечное число разрывовъ, т. е. отъ безконечно часто разрывныхъ функцій.

b) Функція $\operatorname{tg} x$ вообще непрерывна, а $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$ безконечно часто разрывна. Первая, $\operatorname{tg} x$, какъ частное отъ дѣленія непрерывныхъ функцій $\sin x$ на $\cos x$, непрерывна, пока $\cos x \gtrless 0$, и имѣетъ разрывы 2-го рода въ окрестности каждаго изъ безконечно большого числа корней функціи $\cos x$ т. е., чиселъ $a = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ (n — цѣлое число), потому что

$$\lim_{x=a-0} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x=a+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Того же рода разрывы имѣетъ функція $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ (при $x \gtrless 0$), для безчисленнаго множества значеній x, какъ угодно близкихъ къ 0 *). Наоборотъ, разсматриваемая функція будетъ непрерывна во всемъ интервалѣ $\left(\frac{2}{\pi}, \infty\right)$ за исключеніемъ нижней границы и въ интервалѣ $\left(-\infty, -\frac{2}{\pi}\right)$ за исключеніемъ верхней границы. При $x = 0$ и въ окрестности этого значенія всегда будутъ разрывы 2-го рода и, кромѣ того, замѣчается еще нѣчто болѣе сложное, а именно: разсматриваемая функція принимаетъ безчисленное множество разъ любое значеніе въ любомъ интервалѣ, заключающемъ въ себѣ нуль (XII). Замѣчая еще, что въ окрестности $x = 0$ наша функція дѣлается сколь угодно большою по абсолютной величинѣ, но не остается таковою, мы не можемъ сказать, что (§ 262) она возрастаетъ до безконечности, а можемъ лишь утверждать, что она не будетъ конечною въ окрестности $x = 0$.

c) Такое же замѣчаніе можно сдѣлать, ограничиваясь значеніями x справа отъ нуля, о функціи, равной нулю для всякого раціональнаго зна-

---

*) А именно для всѣхъ значеній вида $x = \frac{2}{(2m+1)\pi}$, гдѣ m цѣлое число, сколь угодно большое по абсолютной величинѣ.

ченія x и равной $\log x$ для всякаго ирраціональнаго значенія x. Эта функція имѣетъ, кромѣ того, разрывъ 2-го рода при всякомъ значеніи $x > 0$. Она принадлежитъ къ числу такъ называемыхъ вполнѣ (total) разрывныхъ функцій, тогда какъ $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ принадлежитъ къ числу пунктирно-разрывныхъ функцій, потому что, несмотря на безконечное число разрывовъ въ любомъ интервалѣ $(-h, +h)$, въ томъ же интервалѣ имѣется безконечное множество значеній x, при которыхъ $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ непрерывна *). Таковы двѣ большія категоріи безконечно часто разрывныхъ функцій [1]). Болѣе простые примѣры вполнѣ разрывныхъ функцій представляютъ: функція, равная 0 при x раціональномъ и 1 при x ирраціональномъ, функція, обозначенная черезъ $\bar{\omega}(x)$ въ § 254, f. Далѣе, если представимъ себѣ функцію, принимающую произвольно заданныя значенія, когда $\bar{\omega}(x) = 0$, а во всѣхъ другихъ случаяхъ равную $\log \bar{\omega}(x)$, то составимъ функцію, которая не только не непрерывна, но и не конечна въ любомъ интервалѣ, сколь угодно маломъ.

d) Функція $[x]$, непрерывная справа отъ любого значенія x, имѣетъ обыкновенный разрывъ слѣва отъ всякаго цѣлаго значенія x. Дѣйствительно, при x цѣломъ,

$$[x] = x, \quad [x + 0] = x, \quad [x - 0] = x - 1.$$

Функція $\left[\frac{1}{x}\right]$, непрерывная слѣва отъ всякого положительнаго и отрицательнаго значенія x, имѣетъ разрывъ 1-го рода справа отъ безчисленнаго множества значеній x, какъ угодно близкихъ къ нулю, и разрывъ 2-го рода при $x = 0$. Функція, опредѣляемая формулою $x\left[\frac{1}{x}\right]$ при $x \gtrless 0$, и равная 1 при $x = 0$, будетъ непрерывна при $x = 0$, несмотря на то, что въ окрестности $x = 0$ находится безчисленное множество значеній x, справа отъ которыхъ функція имѣетъ разрывъ 1-го рода; интервалы, въ которыхъ находятся такія значенія, измѣряются величиною x и становятся все меньше и меньше по мѣрѣ приближенія x къ нулю (XIII).

e) Съ помощью функціи $[x]$ можно показать, что непрерывная функція отъ разрывной не всегда разрывна. Пусть $\varphi(x)$ непрерывная функція, удовлетворяющая условію $\varphi(0) = \varphi(1)$, какъ напримѣръ, $\sin \pi x$, $x - \sqrt{x}$ и т. д. Обозначимъ для сокращенія $x - [x]$ черезъ $\psi(x)$ и разсмотримъ функцію $f(x) = \varphi(\psi(x))$—непрерывную отъ разрывной. Ясно, что $f(x)$ можетъ имѣть разрывъ лишь тамъ, гдѣ $\psi(x)$ его имѣетъ, т. е. слѣва отъ цѣлыхъ значеній x. Принимая это во вниманіе, замѣтимъ, что для этихъ значеній $\psi x) = 0$, $f(x) = \varphi(0)$, между тѣмъ какъ слѣва отъ нихъ имѣемъ

$$\psi(x - 0) = 1, \quad f(x - 0) = \varphi[\psi(x - 0)] = \varphi(1) = \varphi(0) = f(x).$$

Итакъ, $f(x)$ непрерывна. Еще болѣе простой примѣръ получимъ, взявъ $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$, при $x \gtrless 0$, $\psi(0) = 0$, а за $\varphi(x)$ такую непрерывную функцію,

---

*) А именно для тѣхъ значеній x, которыя не имѣютъ указанной въ предыдущей выноскѣ формы.

[1]) Для выясненія того, что подобныя различія не лишены содержанія, а соотвѣтствуютъ существенно различнымъ характерамъ измѣненія разрывныхъ функцій, отсылаемъ читателя къ соч. Dini, „Fondamenti della teorica delle funzioni" (нѣм. пер. Lüroth и Schepp) p. 62.

которая при x безконечномъ имѣетъ то же значеніе, какъ и при $x=0$, напримѣръ $\varphi(x)=e^{-x}\sin x$. Хотя $\psi(x)$ имѣетъ разрывъ при $x=0$, но $f(x)=\varphi(\psi(x))$ непрерывна, потому что

$$f(0)=\varphi[\psi(0)]=\varphi(0),\quad \lim_{x=0} f(x)=\varphi(\infty)=\varphi(0).$$

f) Функція

$$f(x)=\sin x+\tfrac{1}{2}\sin 2x+\tfrac{1}{3}\sin 3x+\cdots,$$

вообще непрерывна; она обращается въ 0, когда $\sin x=0$, а при всѣхъ другихъ значеніяхъ x принимаетъ значенія (§ 254, g. См. XIV).

$$f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)+\left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi$$

и, слѣдовательно, непрерывна, пока x не равно α, гдѣ α — кратное отъ 2π. Въ то же время мы имѣемъ

$$f(\alpha)=0,\quad f(\alpha+0)=\frac{\pi}{2},\ f(\alpha-0)=-\frac{\pi}{2},$$

такъ что съ обѣихъ сторонъ отъ α наша функція имѣетъ обыкновенный разрывъ. Этотъ примѣръ замѣчателенъ, потому что показываетъ, что сумма безконечно большого числа непрерывныхъ функцій можетъ и не быть непрерывною. Такъ какъ, кромѣ того,

$$\lim(\sin x+\tfrac{1}{2}\sin 2x+\cdots)\geqslant \lim\sin x+\tfrac{1}{2}\lim\sin 2x+\cdots,$$

когда x стремится къ 0, то (§ 263) мы видимъ, что предѣлъ суммы безконечно большого числа слагаемыхъ не всегда равенъ суммѣ предѣловъ слагаемыхъ.

273. Теорема VI. Если функція $f(x)$ непрерывна при $x=a$, и $f(a)$ не равно 0, то $f(x)$ въ окрестности a сохраняетъ постоянно знакъ числа $f(a)$.

Дѣйствительно, въ силу непрерывности, $\lim f(x)=f(a)$, т. е. какъ бы мало ни было число $\varepsilon>0$, всегда найдется такое $h>0$, что въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$ $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, или иначе

$$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon. \tag{3}$$

Достаточно взять $\varepsilon=|f(a)|$, чтобы видѣть, что $f(x)>0$ или $f(x)<0$, смотря по тому, будетъ ли $f(a)>0$ или $f(a)<0$.

274. Теорема VII. Функція, непрерывная въ нѣкоторомъ интервалѣ, будетъ и конечною въ этомъ интервалѣ.

Дѣйствительно, неравенства (3) показываютъ, что функція конечна въ окрестности всякаго числа въ данномъ интервалѣ, а потому (теорема II) она конечна въ интервалѣ.

275. Теорема VIII. Если непрерывная въ нѣкоторомъ интервалѣ функція на границахъ интервала имѣетъ значе-

нія разныхъ знаковъ, то она обращается въ нуль, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ въ этомъ интервалѣ.

Въ силу теоремы VI, вправо отъ нижней границы a существуетъ безчисленное множество такихъ значеній x, что въ интервалѣ (a, x) функція сохраняетъ знакъ числа $f(a)$, напримѣръ, знакъ $+$. Эти значенія x не могутъ быть сколь угодно большими, такъ какъ, по условію, на другой границѣ b функція имѣетъ уже отрицательное значеніе. Ансамбль этихъ значеній x, слѣдовательно, конечный и имѣетъ (§ 172) верхнюю границу ξ. Такъ какъ слѣва отъ ξ функція положительна, то въ силу той же теоремы VI невозможно, чтобы $f(\xi)$ было меньше 0. Отсюда прежде всего видно, что $\xi < b$, потому что $f(b) < 0$, и поэтому въ интервалѣ (a, b) можно разсматривать и правую сторону отъ ξ. Если бы $f(x)$ было больше 0, то вправо отъ ξ были бы такія числа x, для которыхъ $f(x) > 0$ въ интервалѣ (ξ, x), а слѣдовательно, и во всемъ интервалѣ (a, x), т. е. число ξ — верхняя граница разсматриваемаго ансамбля—оказалось бы меньше нѣкоторыхъ чиселъ этого же ансамбля, что невозможно. Слѣдовательно, $f(\xi) = 0$.

276. Слѣдствіе. Непрерывная функція не можетъ перейти отъ одного значенія къ другому, не переходя черезъ всѣ промежуточныя.

Пусть l какое угодно число между $f(a)$ и $f(b)$; разсмотримъ функцію $f(x) - l$, очевидно, непрерывную вмѣстѣ съ $f(x)$ въ интервалѣ (a, b). На границахъ его она принимаетъ значенія $f(a) - l$ и $f(b) - l$, по сдѣланному объ l предположенію, разныхъ знаковъ. Предыдущая теорема VIII и устанавливаетъ существованіе числа ξ между a и b, для котораго $f(\xi) - l = 0$, т. е. $f(\xi) = l$. (XV.)

277. Примѣчанія. a) Характеръ послѣднихъ свойствъ гораздо тоньше, чѣмъ можетъ показаться съ перваго взгляда. Дѣйствительно, нельзя считать интуитивно ясной невозможность для непрерывной функціи переходить отъ положительнаго значенія къ отрицательному или наоборотъ, не обращаясь въ нуль, потому что a priori понятію о непрерывности не противорѣчитъ, напримѣръ, предположеніе, что функція принимаетъ одни только ирраціональныя значенія, а тогда, какъ она можетъ принять значеніе нуль, которое раціонально. Лишь послѣ того, какъ доказана теорема VIII, можно утверждать, что такой непрерывной функціи не существуетъ.

b) Столь же мало основательно было бы считать, что возможность измѣнить одно значеніе на другое, не переходя черезъ промежуточныя, есть существенное свойство разрывныхъ функцій; потому что существуютъ разрывныя функціи, не могущія переходить отъ одного значенія къ другому, не переходя черезъ всѣ промежуточныя. Достаточно было бы привести въ примѣръ функцію $\sin\frac{1}{x}$, разрывную при $x = 0$ (§ 272, a). Когда

x, убывая, переходитъ отъ положительнаго значенія къ отрицательному, то $\sin\frac{1}{x}$ непрерывно колеблется между -1 и $+1$, не перескакивая ни черезъ одно изъ промежуточныхъ значеній [1]). Нельзя того же сказать о функціи $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$, которая перескакиваетъ, въ окрестности $x = 0$, отъ положительнаго значенія къ отрицательному, при чемъ оба могутъ быть сколь угодно велики по абсолютной величинѣ.

c) И вполнѣ разрывная функція можетъ обладать свойствомъ, о которомъ здѣсь говорится. Въ самомъ дѣлѣ, если возьмемъ любыя два числа a и b, сколь угодно близкія другъ къ другу, то можно доказать, что функція $\tilde{\omega}(x)$ принимаетъ въ интервалѣ (a, b) всѣ значенія между 0 и 1 (каждое безконечное число разъ), а слѣдовательно, и всѣ значенія между $\tilde{\omega}(a)$ и $\tilde{\omega}(b)$, предполагая, конечно, что эти числа существуютъ. Послѣ того, что было сказано объ этой функціи въ § 254, f, достаточно будетъ показать, что каково бы ни было данное между 0 и 1 число l, всегда можно найти такое x, для котораго $\tilde{\omega}(x)$ равно l. Построимъ въ интервалѣ (0, 1) послѣдовательность чиселъ $l_1, l_2, l_3, \ldots$ имѣющихъ предѣломъ l и напишемъ x по десятичной системѣ. При этомъ дадимъ ему произвольную цѣлую часть, разложимъ десятичные знаки на группы послѣдовательно въ 1, 2, 3, ... цифры и числа каждой группы выберемъ также по произволу, соблюдая лишь одно условіе, чтобы между ν цифрами ν-ой группы было $[\nu l_\nu]$ нулей. Послѣ этого, возмемъ въ построенномъ такимъ образомъ числѣ x n первыхъ десятичныхъ знаковъ и предположимъ, что n попадаетъ въ ν-ую группу, такъ что

$$n' - \nu < n \leqq n', \quad m' - [\nu l_\nu] \leqq m \leqq m',$$

если обозначимъ черезъ m число нулей въ этихъ n знакахъ и положимъ

$$n' = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu, \quad m' = [l_1] + [2l_2] + [3l_3] + \cdots + [\nu l_\nu].$$

Теперь замѣтимъ, что

$$\lim \frac{\nu}{n'} = 0, \lim \frac{[\nu l_\nu]}{n'} = 0$$

и, кромѣ того, по извѣстной теоремѣ (§ 141)

$$\lim \frac{m'}{n'} = \lim \frac{[\nu l_\nu]}{\nu} = \lim l_\nu = l.$$

---

[1]) Другіе примѣры можно найти въ мемуарѣ G. Darboux въ „Annales de l'École norm. sup." (2-e série, t. IV).

Такъ какъ еще имѣемъ

$$\frac{m' - [\nu l_\nu]}{n'} \leqq \frac{m}{n} < \frac{m'}{n' - \nu},$$

то

$$\omega(x) = \lim \frac{m}{n} = \lim \frac{m'}{n'} = l.$$

278. Теорема IX. (Вторая теорема Вейерштрасса.) Всякая функція, непрерывная въ конечномъ интервалѣ, имѣетъ въ немъ максимумъ и минимумъ.

Теорема VII показываетъ, что функція, непрерывная въ нѣкоторомъ интервалѣ (a, b), будетъ въ немъ и конечна. Поэтому, въ силу теоремы I, существуетъ и нижняя ея граница λ въ интервалѣ (a, b). Покажемъ, что λ есть минимумъ функціи, т. е. принадлежитъ къ числу значеній, принимаемыхъ функціею въ интервалѣ (a, b). Если бы мы допустили противное, т. е. что $f(x)$ не равно λ ни при какомъ значеніи x въ (a, b), то функція

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}$$

была бы опредѣлена во всемъ интервалѣ и, какъ отношеніе двухъ непрерывныхъ функцій, непрерывна. Но она не была бы конечна. Дѣйствительно, какъ бы велико ни было число l, всегда можно найти такое значеніе $f(x)$, которое будетъ меньше любого значенія, большого λ (по опредѣленію нижней границы) и въ частности меньше $\lambda + \frac{1}{l}$. Для такого значенія x, очевидно, $\varphi(x) > l$. Но по той же теоремѣ VII мы знаемъ, что нѣтъ такой непрерывной въ данномъ интервалѣ функціи, которая въ немъ не была бы конечна. Поэтому нельзя допустить, что λ не принадлежитъ къ числу значеній $f(x)$ въ интервалѣ (a, b), и $f(\lambda)$ есть минимумъ ея въ этомъ интервалѣ. Аналогично доказывается существованіе максимума. Отсюда заключаемъ, что если нѣкоторая функція въ данномъ интервалѣ не достигаетъ своей верхней или нижней границы, то это служитъ вѣрнымъ признакомъ того, что разсматриваемая функція разрывна.

279. Теорема X. (Теорема Кантора.) Если функція $f(x)$ непрерывна въ нѣкоторомъ интервалѣ (a, b), то, задавъ сколь угодное малое произвольное положительное число ε, всегда можно найти такое положительное число h, что колебаніе функціи въ любомъ интервалѣ, равномъ h по величинѣ и заключающемся въ (a, b), будетъ меньше ε.

Колебаніемъ функціи въ данномъ интервалѣ называютъ разность между верхнею и нижнею границами ея въ этомъ интервалѣ. Въ частности колебаніе непрерывной функціи въ данномъ интервалѣ равно избытку максимума ея надъ минимумомъ. Замѣтивъ это, при-

поминаемъ, что въ силу непрерывности функціи, на основаніи теоремы V, мы можемъ любое значеніе x въ интервалѣ (a, b) заключить въ такой интервалъ $(x-h, x+h)$, чтобы для всякой пары значеній x' и x'', лежащихъ въ $(x-h, x+h)$, имѣло мѣсто неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \tag{4}$$

гдѣ ε произвольно заданное положительное число. При данномъ ε, для каждаго значенія x въ (a, b) найдется безчисленное множество значеній числа h, потому что, если одно изъ нихъ найдено, то всякое положительное число, меньшее найденнаго, тѣмъ болѣе будетъ удовлетворять поставленному условію. Но, съ другой стороны, значенія h, соотвѣтствующія даннымъ ε и x, не могутъ быть сколь угодно велики, уже по одному тому, что данный интервалъ (a, b), изъ котораго не долженъ выходить интервалъ $(x-h, x+h)$, предполагается конечнымъ. Слѣдовательно, эти значенія h должны имѣть верхнюю границу, и ее то мы и будемъ въ дальнѣйшемъ обозначать черезъ h. Такимъ образомъ, при данномъ ε, каждому значенію x соотвѣтствуетъ одно опредѣленное значеніе h, при которомъ для всякой пары значеній x' и x'', лежащихъ между $x-h$ и $x+h$, неравенство (4) удовлетворяется. Этимъ опредѣляется нѣкоторая функція $h(x)$, принимающая одни лишь положительныя значенія во всемъ данномъ интервалѣ, и потому имѣющая въ немъ нижнюю границу λ, которая будетъ больше 0, или, можетъ быть, и равна 0. Мы покажемъ сейчасъ, что послѣднее предположеніе невозможно. На основаніи первой теоремы Вейерштрасса существуетъ въ интервалѣ (a, b), по крайней мѣрѣ, одно число ξ, въ окрестности котораго нижняя граница функціи $h(x)$ равна тому же λ. Положимъ $h(\xi) = h_0$ и разсмотримъ нѣкоторое значеніе x, лежащее въ интервалѣ $\left(\xi - \frac{h_0}{2}, \xi + \frac{h_0}{2}\right)$ *). Всякая пара значеній x' и x'', лежащихъ въ интервалѣ $\left(x - \frac{h_0}{2}, x + \frac{h_0}{2}\right)$, будетъ лежать и въ интервалѣ $(\xi - h_0, \xi + h_0)$, а потому для интервала $\left(x - \frac{h_0}{2}, x + \frac{h_0}{2}\right)$ неравенство (4) удовлетворяется. Слѣдовательно, значенія, принимаемыя функціею $h(x)$ въ интервалѣ $\left(\xi - \frac{h_0}{2}, \xi + \frac{h_0}{2}\right)$ не могутъ быть меньше $\frac{h_0}{2}$ [по самому опредѣленію $h(x)$, какъ верхней границы чиселъ h, для которыхъ неравенства (4) удовлетворяются при x' и x'', лежащихъ въ $(x-h, x+h)$]. Поэтому и $\lambda \geqq \frac{1}{2}h_0$. Слѣдовательно, и во всемъ данномъ

*) Интервалъ $\left(x - \frac{h_0}{2}, x + \frac{h_0}{2}\right)$, очевидно, будетъ заключаться цѣликомъ въ интервалѣ $(\xi - h_0, \xi + h_0)$.

интервалѣ (a, b) $h(x)$ никогда не меньше $\frac{1}{2}h_0$. Отсюда вытекаетъ, что при данномъ ε неравенство (4) навѣрно удовлетворится, какія бы два значенія x' и x'' въ данномъ интервалѣ (a, b) мы ни взяли, лишь бы было $|x'-x''|<h_0$*). Въ заключеніе замѣтимъ, что въ формулировкѣ теоремы X вмѣсто того, чтобы говорить о безчисленномъ множествѣ разностей $|f(x')-f(x'')|$, соотвѣтствующихъ различнымъ парамъ значеній x' и x'', говорится только о колебаніи функціи $f(x)$, т. е. о наибольшей изъ этихъ разностей, потому что если неравенство (4) удовлетворяется для этой наибольшей разности, то, очевидно, оно удовлетворится и для всѣхъ остальныхъ.

280. Теорему X можно доказать еще иначе, опираясь на вторую, а не на первую теорему Вейерштрасса. Доказательство можно начать съ того пункта предыдущаго §, гдѣ по данному ε мы опредѣлили для каждаго x функцію $h(x)$. Возьмемъ въ интервалѣ $[x-h(x),\ x+h(x)]$ любое число $x+l$ и замѣтимъ, что неравенство (4) удовлетворится, очевидно, въ любой части этого интервала, въ частности, въ такой, въ серединѣ которой лежитъ $x+l$, а одна изъ границъ есть ближайшая къ $x+l$ граница первоначальнаго интервала. Отсюда слѣдуетъ, что

$$h(x+l)\geqq h(x)-l, \text{ при } l>0,$$

и $h(x+l)\geqq h(x)+l$, при $l<0$. Этого нельзя было бы сказать, если бы выбрали наиболѣе удаленную отъ $x+l$ границу. Далѣе ясно, что если возьмемъ интервалъ, еще большій послѣдняго, съ серединою въ $(x+l)$, то неравенство (4) не будетъ удовлетворяться въ такомъ интервалѣ, именно на основаніи опредѣленія функціи $h(x)$. Слѣдовательно, $h(x+l)\leqq h(x)+l$, при $l>0$ и $h(x+l)\leqq h(x)-l$, при $l<0$. Во всѣхъ случаяхъ имѣемъ

$$|h(x+l)-h(x)|\leqq|l|,\quad \lim_{l=0} h(x+l)=h(x),$$

т. е. функція $h(x)$ непрерывна. По второй теоремѣ Вейерштрасса она имѣетъ минимумъ λ, и $\lambda>0$, потому что всѣ значенія $h(x)>0$. Теперь уже ясно, что тотъ интервалъ, о которомъ говоритъ теорема Кантора, какъ разъ равенъ 2λ **).

---

*) Потому что условіе $|x'-x''|<h_0$, очевидно, равносильно условію, что x' и x'' лежатъ въ интервалѣ $\left(x-\frac{h_0}{2},\ x+\frac{h_0}{2}\right)$, гдѣ x произвольно выбранное число въ (a, b).

**) Свойство функціи, непрерывной въ нѣкоторомъ интервалѣ, выражаемое теоремою Кантора, называется равномѣрною непрерывностью въ этомъ интервалѣ. Поэтому можно сказать, что функція, непрерывная въ интервалѣ (a, b), будетъ въ немъ равномѣрно непрерывна.

ТЕОРІЯ ПРОИЗВОДНЫХЪ.

Разысканіе производныхъ.

281. Опредѣленія. Когда перемѣнное число z переходитъ отъ одного значенія къ другому, то оно испытываетъ приращеніе (положительное, отрицательное или равное нулю), которое принято обозначать знакомъ δz. Всякому произвольному приращенію δx независимой перемѣнной x соотвѣтствуетъ опредѣленное приращеніе δy функціи $y = f(x)$, а именно для даннаго значенія x

$$\delta y = f(x + h) - f(x), \text{ если } \delta x = h.$$

Отношеніе

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

называютъ правымъ или лѣвымъ отношеніемъ приращеній, смотря по тому, будетъ ли $h > 0$ или $h < 0$. Если для данной функціи y это отношеніе стремится къ опредѣленному предѣлу съ приближеніемъ h къ нулю, то этотъ предѣлъ будетъ функціею отъ x, которую называютъ производною справа или производною слѣва. Производныя справа и слѣва могутъ совпадать, и въ такомъ случаѣ говорятъ, что функція y имѣетъ единственную производную, которую обозначаютъ $f'(x)$ или—еще короче—знакомъ y'. Обыкновенный случай представляютъ именно функціи, имѣющія единственную производную. (XVI).

282. Примѣры. a) Производная постоянной равна нулю, потому что, при y постоянномъ, всегда $\delta y = 0$, каково бы ни было значеніе x. Слѣдовательно, $y' = 0$. Производная независимой перемѣнной равна 1, потому что при $y = x$, $\delta y = \delta x$. Слѣдовательно, $y' = 1$.

b) Чтобы убѣдиться, что производныя справа и слѣва могутъ имѣть различныя значенія при одномъ и томъ же значеніи независимой перемѣнной, разсмотримъ функцію $y = f(x)$, равную нулю при $x = 0$, и равную $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ при $x \gtrless 0$. Такъ какъ

$$f(0) = 0, \quad f(h) = h \operatorname{arctg} \frac{1}{h}, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \operatorname{arctg} \frac{1}{h},$$

то будемъ имѣть

$$\lim_{h=+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{h} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{h=-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{h} = -\frac{\pi}{2},$$

откуда и видно, что при $x = 0$ производная справа равна $\frac{\pi}{2}$, а производная слѣва равна $-\frac{\pi}{2}$.

c) Точно также, для функціи, равной 0 при $x=0$, и $\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ при $x \gtrless 0$, имѣемъ

$$f(0)=0,\quad f(h)=\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}},\quad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}.$$

Смотря по тому, стремится ли h къ 0 справа или слѣва, $e^{\frac{1}{h}}$ либо возрастаетъ безпредѣльно, либо стремится къ 0. Поэтому

$$\lim_{h=+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=0,\qquad \lim_{h=-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=1,$$

т. е. при $x=0$, наша функція имѣетъ производную справа, равную нулю, и производную слѣва, равную единицѣ.

d) Другой примѣръ даетъ намъ (см. § 272, e) функція $\varphi(x-[x])$, въ томъ предположеніи, что функція $\varphi(x)$ имѣетъ при $x=0$ производную справа, равную α, а при $x=1$ производную слѣва, равную β, и кромѣ того, $\alpha \gtrless \beta$ и $\varphi(0)=\varphi(1)$. Мы видимъ тотчасъ, что для всякаго цѣлаго значенія x

$$\lim_{\delta x=+0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{h=+0}\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=\alpha,\qquad \lim_{\delta x=-0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{h=-0}\frac{\varphi(1+h)-\varphi(1)}{h}=\beta.$$

Слѣдовательно, функція наша имѣетъ для всякаго цѣлаго x производную справа и производную слѣва, не равныя между собою. Можно для примѣра взять $\varphi(x)=\sin \pi x$, $f(x)=\sin \pi\{x-[x]\}$, замѣтивъ, что (§ 270, a)

$$\alpha=\lim_{h=0}\frac{\sin \pi h-\sin 0}{h}=\pi,\ \beta=\lim_{h=0}\frac{\sin(\pi+\pi h)-\sin \pi}{h}=-\pi.$$

e) Но производная можетъ не существовать вовсе или существовать только съ одной стороны. Напримѣръ, функція $y=\bar{\omega}(x)$, опредѣленіе которой (§ 254, f) дополнено такимъ образомъ, что когда $\bar{\omega}(x)$ не существуетъ, y имѣетъ произвольно выбранное значеніе между 0 и 1, вовсе не имѣетъ производной ни при какомъ значеніи x. Дѣйствительно, когда (§ 277, c) δx стремится къ нулю, y постоянно колеблется между -1 и $+1$, такъ что отношеніе приращеній не только ни къ какому предѣлу не стремится, а безчисленное множество разъ принимаетъ произвольно заданное значеніе. Такой же характеръ обнаруживаетъ функція, принимающая значеніе 0 при x раціональномъ, и значеніе 1 при x ирраціональномъ, такъ какъ δy можетъ принимать только значенія 0, 1, -1. Функція $x-[x]$ имѣетъ производную, равную 1, для всѣхъ значеній x, не цѣлыхъ, и для цѣлыхъ значеній справа, а слѣва отъ цѣлыхъ значеній x производной не имѣетъ, потому что при $\delta x=h<0$, $\delta y=1+h$, и отношеніе приращеній стремится къ $-\infty$. Въ упомянутыхъ здѣсь случаяхъ не существованіе производной исключительно происходитъ отъ разрывности функцій, такъ какъ производная не можетъ существовать въ мѣстѣ разрыва. Дѣйствительно, чтобы отношеніе $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ могло стремиться къ конечному предѣлу необходимо, чтобы δy стремилось къ нулю, когда δx стремится къ нулю, т. е., чтобы функція y была непрерывна. Итакъ, непрерывность есть необходимое условіе существованія производной.

f) Однако, непрерывность не достаточна для существованія производныхъ Напримѣръ, функція $\sqrt{x}$ непрерывна при $x = 0$, а тѣмъ не менѣе

$$\lim_{h=+0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \infty.$$

Впослѣдствіи мы иногда будемъ говорить, что производная отъ $\sqrt{x}$ при $a = 0$ безконечна, но при этомъ, именно въ геометрическихъ приложеніяхъ подобное выраженіе понимаютъ не въ томъ смыслѣ, что отношеніе приращеній имѣетъ безконечный предѣлъ, а въ томъ, что производная, вычисленная при $x > 0$ безпредѣльно возрастаетъ, когда x стремится къ 0. Дѣйствительно, при $x > 0$ имѣемъ

$$\lim_{h=0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \lim_{x=+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Ясно, что совершенно другой смыслъ имѣетъ утвержденіе, что производная функціи $x - [x]$ слѣва отъ всякаго цѣлаго значенія x равна $-\infty$ (XVII). Впрочемъ, легко составить непрерывныя функціи, у которыхъ отношеніе приращеній ни къ какому конечному или безконечному предѣлу не стремится. Такъ, напримѣръ, для функціи $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$, непрерывной при $x = 0$ (§ 272, d), не существуетъ производной при $x = 0$, потому что

$$f(0) = 1,\ f(h) = h\left[\frac{1}{h}\right],\ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \left[\frac{1}{h}\right] - \frac{1}{h},$$

откуда видно, что съ приближеніемъ h къ 0, отношеніе приращеній постоянно колеблется между 0 и -1 (исключая -1).

g) Противъ послѣдняго примѣра можно было бы сдѣлать слѣдующее возраженіе: разсматриваемая въ немъ функція непрерывна при $x = 0$, но въ окрестности этого значенія безконечно часто разрывна. Чтобы показать, что нельзя вообще на такомъ обстоятельствѣ основать объясненіе отсутствія производной, стоитъ только разсмотрѣть функцію, равную нулю при $x = 0$, и $x \sin\frac{1}{x}$ при $x \gtrless 0$. Она всюду непрерывна, а при $x = 0$ производной не имѣетъ, потому что

$$f(0) = 0,\ f(h) = h \sin\frac{1}{h},\ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$$

и съ приближеніемъ h къ 0, $\sin\frac{1}{h}$ ни къ какому предѣлу не стремится.

h) Другой замѣчательный примѣръ дастъ разсмотрѣнная выше функція $\varphi(x - [x])$. Положивъ $\varphi(x) = x \sin\frac{\pi}{x}$ при $x \gtrless 0$, и $\varphi(0) = 0$, имѣемъ и $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(0)$ не существуетъ, и кромѣ того

$$\varphi'(1) = \lim_{h=0} \frac{1+h}{h} \sin\frac{\pi}{1+h} = \lim_{h=0} \frac{1+h}{h} \sin\frac{\pi h}{1+h} = \lim_{\alpha=0} \frac{\sin\pi\alpha}{\alpha} = \pi.$$

Слѣдовательно, непрерывная функція, вообще изображаемая формулою

$$(x - [x]) \sin\frac{\pi}{x - [x]},$$

не имѣетъ производной справа ни при какомъ цѣломъ значеніи x, а слѣва имѣетъ производную, равную x. Если же возьмемъ $\varphi(x) = x - \sqrt{x}$, то найдемъ, что непрерывная функція $[x] + \sqrt{x - [x]}$ для всѣхъ цѣлыхъ значеній имѣетъ безконечную производную справа, и производную, равную $\frac{1}{2}$ слѣва (XVIII). Пользуясь этою функціею Шварцу удалось составить функцію, для которой подобное обстоятельство встрѣчается безконечное число разъ въ любомъ интервалѣ. Наконецъ, Вейерштрассъ далъ примѣръ непрерывной функціи, не имѣющей производной ни при какомъ значеніи x, который мы сообщимъ впослѣдствіи (§ 801) *).

283. Производная обратной функціи. Разсмотримъ функцію $y = f(x)$, непрерывную при $x = a$ и въ окрестности a. Предположимъ, что, по крайней мѣрѣ, для этихъ значеній x существуетъ обратная функція $x = g(y)$, и докажемъ, что если производная функціи f существуетъ и не равна нулю, то существуетъ и производная функціи g. Изъ непрерывности функціи $f(x)$ при $x = a$ слѣдуетъ, что $\delta y = f(a + \delta x) - f(a)$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ δx. Изъ непрерывности y въ окрестности a слѣдуетъ, что δy непрерывная функція отъ δx. Отсюда вытекаетъ, что δy принимаетъ всѣ значенія въ нѣкоторомъ интервалѣ (§ 276), заключающемъ въ себѣ нуль, при чемъ, однако, значеніе $\delta y = 0$ исключается. Причина этого исключенія лежитъ въ томъ, что если бы δy было равно 0, при нѣкоторомъ значеніи $\delta x = h \neq 0$, то одному и тому же значенію $y = f(a)$ соотвѣтствовали бы два значенія x: $x = a$ и $x = a + h$, а тогда вопреки предположенію нельзя было бы разсматривать x, какъ функцію отъ y. Эти соображенія даютъ намъ теперь право разсматривать отношеніе $\frac{\delta x}{\delta y}$, какъ отношеніе соотвѣтствующихъ другъ другу приращеній функціи $x = g(y)$ и независимой перемѣнной y (см. примѣчаніе XVI). Предполагая теперь, что съ приближеніемъ δx къ 0, $\frac{\delta y}{\delta x}$ стремится къ предѣлу $y' \gtrless 0$, тотчасъ видимъ (§ 263), что предѣлъ отношенія

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{1}{\frac{\delta y}{\delta x}}$$

существуетъ и равенъ $\frac{1}{y'}$. Подробнѣе выражая полученный результатъ, можемъ сказать: Если извѣстна производная $f'(x) \gtrless 0$ функціи $f(x)$, то производная обратной функціи $g(x)$ будетъ

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}. \tag{1}$$

---

[1]) Болѣе общіе примѣры того же рода можно найти у Dini „Fondamenti" etc. p. 146, или p. 205 и слѣд. (въ нѣмецкомъ переводѣ Lüroth и Schepp).

Всѣ эти соображенія примѣнимы къ каждой сторонѣ отъ даннаго значенія a въ отдѣльности. Пусть извѣстно, напримѣръ, что существуетъ производная отъ y справа отъ a (т. е. при $\delta x > 0$). Тогда (§ 263) δy въ концѣ концовъ приметъ и сохранитъ знакъ этой производной, и можно будетъ утверждать существованіе производной обратной функціи справа или слѣва отъ $y = f(a)$, смотря по тому, будетъ ли этотъ знакъ $+$ или $-$. Если же предполагается существованіе производной отъ y слѣва отъ a (т. е. при $\delta x < 0$), то δy въ концѣ концовъ приметъ и сохранитъ знакъ, противоположный знаку этой производной *), а потому можно утверждать существованіе производной обратной функціи слѣва или справа отъ $y = f(a)$, смотря по тому, будетъ ли знакъ данной производной $+$ или $-$. Изъ предыдущаго также слѣдуетъ, что если y имѣетъ единственную производную по x, не равную нулю, то x имѣетъ единственную производную по y.

284. Производная функціи отъ функціи. Если перемѣнная y задана не какъ функція отъ x, а какъ функція отъ другой функціи u, такъ что

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x),$$

и если предположимъ, что существуютъ производныя $f'(u)$ и $\varphi'(x)$, то легко показать, что существуетъ и производная отъ y, взятая по x, и что она равна произведенію $f'(u) \cdot \varphi'(x)$ [или $f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$]. Дѣйствительно, мы имѣемъ тождество

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x},$$

въ которомъ $\frac{\delta u}{\delta x}$, по предположенію, стремится къ предѣлу u'. Это требуетъ, чтобы δu стремилась къ нулю вмѣстѣ съ δx, а такъ какъ функція u непрерывна, потому что имѣетъ производную, то и δu непрерывная функція отъ δx и принимаетъ всѣ значенія, принадлежащія нѣкоторому интервалу, заключающему въ себѣ и нуль. Положимъ сперва, что для всѣхъ значеній δx, для которыхъ $|\delta x| < \eta$, гдѣ η нѣкоторое достаточно малое положительное число, δu постоянно отлично отъ нуля (что навѣрно и будетъ, если u' не равно 0), тогда мы можемъ разсматривать $\frac{\delta y}{\delta u}$, какъ отношеніе соотвѣтствующихъ приращеній функціи y и независимой перемѣнной u (см. XVI) и сказать, что это отношеніе стремится къ предѣлу $f'(u)$, существованіе котораго предполагается. Изъ даннаго тождества тогда вытекаетъ, что $\frac{\delta y}{\delta x}$ стремится къ предѣлу y', равному произведенію

*) Одинаковый съ нею знакъ (по § 263) будетъ имѣть $\frac{\delta y}{\delta x}$, а $\delta x < 0$.

$f'(u)\cdot\varphi'(x)$. Остается показать, что высказанная теорема остается справедливою и въ томъ случаѣ, когда въ смежности съ нулемъ (въ окрестности нуля) существуетъ такая послѣдовательность чиселъ $h, h', h'', \ldots$, что $\delta u = 0$ всякій разъ, какъ δx дѣлается равнымъ одному изъ этихъ чиселъ *). Прежде всего ясно, что производная u', существованіе которой предполагается въ данномъ случаѣ, необходимо должна быть равна нулю (иначе отношеніе $\frac{\delta u}{\delta x}$ не могло бы быть равно нулю для значеній δx въ смежности съ нулемъ). Съ другой стороны, всѣ разсужденія, приведенныя въ первомъ случаѣ, будутъ примѣнимы и теперь, если δx стремится къ нулю, обходя всѣ числа $h, h', h'', \ldots$, при которыхъ $\delta u = 0$, а потому $\frac{\delta y}{\delta x}$ стремится къ предѣлу $f'(u)\cdot 0 = 0$. Если же δx принимаетъ именно значенія $h, h', h'', \ldots$, то $\delta u = 0$, откуда и $\delta y = f'(u+\delta u) - f(u) = 0$, и $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$. Слѣдовательно, существуетъ предѣлъ $\frac{\delta y}{\delta x}$, при δx стремящемся къ нулю непрерывно, т. е. существуетъ производная y', и она равна нулю такъ же, какъ и произведеніе $f'(u)\cdot u'$. Итакъ, всегда будемъ имѣть $y' = f'(u)\cdot u'$. Замѣтимъ здѣсь, что уравненіе (1) заключается въ послѣднемъ, какъ частный случай, потому что при $u = g(x)$ (§ 253) имѣемъ $y = x$ и $y' = 1$. Обобщая полученный результатъ на тотъ случай, когда

$$y = f(u),\quad u = \varphi(v),\quad v = \psi(w),\ \ldots,$$

находимъ $y' = f'(u)\varphi'(v)\psi'(w)\ldots$, предполагая, конечно, что число функцій $u, v, w, \ldots$ ограничено. Итакъ, мы имѣемъ теорему: производная функціи отъ функціи равна произведенію производныхъ этихъ функцій, при чемъ каждая производная берется по той перемѣнной, отъ которой каждая функція непосредственно зависитъ.

285. Производная суммы. Пусть $y = u + v + w + \ldots$, гдѣ $u, v, w, \ldots$ функціи отъ x, имѣющія производныя. Дадимъ перемѣнной x приращеніе δx, при чемъ $y, u, v, w, \ldots$ получатъ приращенія $\delta y, \delta u, \delta v, \delta w, \ldots$ Такъ какъ всегда

$$y + \delta y = u + \delta u + v + \delta v + w + \delta w + \cdots,$$

то

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta x} + \cdots,$$

откуда, переходя къ предѣламъ съ приближеніемъ δx къ нулю, по-

*) Тогда отношеніе $\frac{\delta y}{\delta u}$ теряетъ смыслъ, и предыдущее разсужденіе надо замѣнить другимъ.

лучимъ $y' = u' + v' + w' + \ldots$ Итакъ, производная суммы равна суммѣ производныхъ слагаемыхъ, предполагая число послѣднихъ конечнымъ.

286. Производная произведенія. Если $y = uv$, то

$$y + \delta y = (u + \delta u)\,(v + \delta v) = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u \cdot \delta v,$$

откуда

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}\delta v, \quad y' = uv' + vu'.$$

Отсюда слѣдуетъ, что производная произведенія равна суммѣ произведеній, получаемыхъ отъ умноженія производной каждаго сомножителя на произведеніе всѣхъ остальныхъ сомножителей. Дѣйствительно, допустимъ, что теорема, доказанная выше для двухъ сомножителей, справедлива для $n - 1$ сомножителей. Остается доказать, что она будетъ справедлива для n сомножителей; а для этого стоитъ только въ послѣднемъ случаѣ написать

$$y' = u'(vw \cdots) + u(vw \cdots)' = u'vw \cdots + uv'w \cdots + uvw' \cdots + \cdots,$$

и убѣдиться такимъ образомъ, что она справедлива вообще *).

287. Производная частнаго (или дроби). Допуская существованіе производныхъ отъ функцій u и v, можемъ утверждать и существованіе производной функціи $y = \frac{u}{v}$ (при v не равномъ нулю), потому что

$$\delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v + \delta v)}$$

откуда

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\dfrac{\delta u}{\delta x} - u\dfrac{\delta v}{\delta x}}{v^2\left(1 + \dfrac{\delta v}{v}\right)}, \quad y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда a постоянное число, для $y = \frac{a}{u}$ имѣемъ

$$y' = -\frac{au'}{u^2}.$$

288. Производная степени. Пусть $y = x^n$, гдѣ n цѣлое положительное число. Изъ правила для разысканія производной произведенія находимъ, написавъ $y = x \cdot x \cdot x \cdots x$, $y' = nx^{n-1}$. Докажемъ, что эта формула справедлива при всякомъ раціональномъ зна-

*) При конечномъ числѣ сомножителей.

ченіи n. Предположимъ сперва, что $n = \frac{1}{m}$, гдѣ m цѣлое положительное число. Такъ какъ производная отъ x^m существуетъ, то, по сказанному въ § 283, существуетъ и производная обратной функціи $y = x^{\frac{1}{m}}$. Доказавъ существованіе производной y', мы можемъ взять производную отъ $x = y^m$, примѣняя правила § 284. Получаемъ $1 = m \cdot y^{m-1} \cdot y'$, или

$$y' = \frac{1}{m} y^{1-m} = n y^{m(n-1)} = n x^{n-1}.$$

Далѣе, если n равно отношенію двухъ цѣлыхъ чиселъ p и q, то на основаніи того же правила и полученнаго выше результата, имѣемъ

$$y = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p, \quad y' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = n x^{n-1}.$$

Наконецъ, если n равно отрицательному числу $-m$, то, примѣняя послѣдній результатъ послѣдняго §, имѣемъ

$$y = \frac{1}{x^m}, \quad y' = -\frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1} = n x^{n-1}.$$

Если теперь $y = u^n$, гдѣ n любое раціональное положительное или отрицательное число, а u какая угодно функція отъ x, по правилу § 284, находимъ $y' = n u^{n-1} \cdot u'$. Въ частности для $y = \sqrt{u}$ найдемъ

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Во избѣжаніе лишнихъ выкладокъ полезно также замѣтить, что для $y = \frac{1}{u^n}$,

$$y' = -\frac{n u'}{u^{n+1}}.$$

289. Производныя отъ a^x и $\operatorname{Log} x$. Пусть $y = a^x$. Когда x получитъ приращеніе $\delta x = h$, то y получитъ приращеніе

$$\delta y = a^{x+h} - a^x, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = a^x \frac{a^h - 1}{h};$$

откуда, припоминая полученный уже раньше результатъ (§ 270, d), получаемъ

$$y' = a^x \lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a.$$

Въ частности, при $y = e^x$, $y' = e^x$. Подобно этому имѣемъ для $y = \operatorname{Log} x$

$$\delta y = \operatorname{Log}(x + h) - \operatorname{Log} x, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{h} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{h}{x}\right)$$

и затѣмъ (§ 270, d)

$$y' = \frac{1}{x} \operatorname{Log} \lim_{h=0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{M}{x}.$$

Въ частности для $y = \log x$, $y' = \frac{1}{x}$. Полученные два результата могутъ быть выведены одинъ изъ другого при помощи формулы (1), потому что, если $f(x) = a^x$, то $g(x) = \operatorname{Log} x$. Отсюда слѣдуетъ, что, зная одну изъ производныхъ, напримѣръ, $f'(x) = a^x \operatorname{Log} a$, можемъ найти другую по формулѣ (1):

$$g'(x) = \frac{1}{f'(\operatorname{Log} x)} = \frac{1}{a^{\operatorname{Log} x} \log a} = \frac{M}{x}.$$

Теперь, на основаніи сказаннаго въ § 284, мы можемъ утверждать, что, если существуетъ производная функціи u, то производныя функцій

$$y = e^u, \; y = \log u$$

соотвѣтственно будутъ

$$y' = e^u \cdot u', \; y' = \frac{u'}{u}.$$

Замѣтимъ, наконецъ, что, зная производныя отъ e^u и $\log u$, мы можемъ снова найти производную степени и притомъ обобщить выведенное выше правило на случай ирраціональнаго показателя. Дѣйствительно, изъ $y = u^n = e^{n \log u}$ выводимъ

$$y' = e^{n \log u} \frac{n u'}{u} = n u^{n-1} \cdot u'.$$

290. Производныя круговыхъ (тригонометрическихъ) функцій. Пусть $y = \sin x$; при $\delta x = h$ имѣемъ

$$\delta y = \sin(x + h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Поэтому (§ 270, a)

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Если $y = \cos x$, то можно найти производную путемъ подобнаго же вычисленія или, короче, пользуясь правиломъ § 284, можно написать

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Для $y = \operatorname{tg} x$, разсматривая $\operatorname{tg} x$, какъ отношеніе $\sin x$ къ $\cos x$, и примѣняя правило § 287, находимъ

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Можно найти производную $\operatorname{tg} x$ и путемъ непосредственнаго вычисленія, а именно:

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x+h)} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Наконецъ, когда

$$y = \sin u,\ y = \cos u,\ y = \operatorname{tg} u$$

(u функція отъ x), то соотвѣтственно

$$y' = u' \cos u,\ y' = -u' \sin u,\ y' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

291. Производныя обратныхъ круговыхъ функцій. Прежде всего надо замѣтить, что эти производныя вообще существуютъ, именно на основаніи доказанной въ § 283 теоремы. Послѣ этого только можно, написавъ

$$y = \operatorname{arc\,sin} x,\ y = \operatorname{arc\,cos} x,\ y = \operatorname{arc\,tg} x$$

и выведя отсюда соотношенія $x = \sin y$, $x = \cos y$, $x = \operatorname{tg} y$, примѣнить къ послѣднимъ правило § 284. Тогда получимъ

$$1 = y' \cos y,\ 1 = -y' \sin y,\ 1 = \frac{y'}{\cos^2 y},$$

откуда затѣмъ найдемъ слѣдующія значенія производныхъ y', соотвѣтственно написаннымъ выше тремъ функціямъ y:

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Можно и прямымъ вычисленіемъ (не прибѣгая къ обращенію функціи) найти эти производныя. Такой способъ имѣетъ то преимущество, что даетъ и доказательство существованія производныхъ и ихъ выраженія. Пусть, напримѣръ, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $\delta x = h$, тогда

$$y' = \lim_{h=0} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(x+h) - \operatorname{arc\,tg} x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{h}{1 + x(x+h)}}{h}.$$

Полагая $h = [1 + x(x+h)]\alpha$, гдѣ α стремится къ нулю вмѣстѣ съ h, находимъ

$$y' = \lim\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+x(x+h)}\right] = \frac{1}{1+x^2}.$$

Замѣтимъ, что въ вышеприведенныхъ выраженіяхъ $\sqrt{1-x^2}$ обозначаетъ положительное значеніе корня, потому что дуги, обозначенныя символами $\arcsin x$ и $\arccos x$, имѣютъ первая положительный косинусъ, вторая положительный синусъ *). Сумма этихъ дугъ постоянная (§ 254, d), чѣмъ и объясняется, что и производныя ихъ равны по абсолютной величинѣ и противоположны по знаку. Резюмируя вышесказанное и припоминая правило § 284, можемъ написать для

$$y = \arcsin u,\ y = \arccos u,\ y = \operatorname{arc\,tg} u$$

соотвѣтственно

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\ y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\ y' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Въ заключеніе замѣтимъ, что, пользуясь теоремою § 283, мы молча исключили тѣ случаи, когда разсматриваемыя нами функціи производныхъ не имѣютъ. Такъ, напримѣръ, для функціи $\arcsin x$ производная существуетъ только до тѣхъ поръ, пока $\cos y$ не равенъ 0, т. е. x не равенъ ± 1; для этихъ значеній $x = \pm 1$, это надо всегда имѣть въ виду, производной отъ $\arcsin x$ не существуетъ. Такъ, при $x = 1$ нѣтъ производной ни справа, ни слѣва (справа, потому что тогда самой функціи $\arcsin x$ не существуетъ), такъ какъ

$$\lim_{h=0}\frac{\arcsin(1-h) - \arcsin 1}{-h} = \lim_{h=0}\frac{\arccos(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{\alpha=0}\frac{\alpha}{1-\cos\alpha} = \lim_{\alpha=0}\frac{\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \infty.$$

Подобное же имѣетъ мѣсто для $\arccos x$. Наоборотъ, производная $\operatorname{arctg} x$ всегда существуетъ, потому что производная $\operatorname{tg} x$ никогда не обращается въ нуль.

292. Упражненія. а) Производная полинома

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

степени n есть полиномъ

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$$

степени $n-1$.

---

*) Первая лежитъ въ предѣлахъ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, вторая между 0 и π.

Производная отъ y', которую называютъ второю производною отъ y, есть

$$y'' = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}.$$

Послѣдовательныя производныя y''', y^{IV}, ... (3-я, 4-я, ...) будутъ также полиномы степеней $n-3$, $n-4$, ..., n-ая производная есть постоянное число, а всѣ слѣдующія нули: $y^{(n)} = n!\,a_0$, $y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \cdots = 0$.

b) Для

$$y = x(\log x - 1),\ \log\cos x,\ \log\log x,\ \log\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \log\frac{1-\cos kx}{1+\cos kx}$$

съ помощью доказанныхъ въ предыдущихъ §§ правилъ и полученныхъ результатовъ находимъ соотвѣтственно:

$$y' = \log x,\ -\operatorname{tg} x,\ \frac{1}{x\log x},\ \frac{1}{\sin x},\ \frac{2k}{\sin kx}.$$

Для

$$y = \arccos(1-x) - \sqrt{2x-x^2},\ \arccos\frac{a}{x} + \log\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$$

получимъ

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2-x}},\ \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}.$$

Точно также находимъ для функцій

$$y = \arcsin\frac{\sin a\sin x}{1-\cos a\cos x},\ \arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x},\ \operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

слѣдующія выраженія производныхъ

$$y' = \frac{\sin a}{1-\cos a\cos x},\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x},\ \frac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}.$$

c) Всѣ эти вычисленія производныхъ легко производятся, если примѣнимъ, гдѣ нужно, правила для нахожденія производныхъ суммы, произведенія, частнаго, и къ каждому члену результатовъ — правило для нахожденія производной функціи отъ функціи; послѣднее правило особенно важно, потому что оно позволяетъ устранить всѣ трудности, сопряженныя съ вычисленіемъ производной сложнаго выраженія, расчленяя это выраженіе и оперируя послѣдовательно надъ каждою частью въ отдѣльности. Такъ, напримѣръ, производная отъ

$$y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$$

берется такъ:

$$y' = \frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \cdots = \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Этотъ результатъ легко повѣрить, замѣтивъ, что

$$y = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{4}\pi.$$

Точно также для вычисленія производной отъ

$$y = x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

пишутъ

$$y' = \sqrt{1+x^2} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \cdots = 2\sqrt{1+x^2}.$$

d) Если даны соотношенія

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\quad \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

то, сравнивая производныя обѣихъ частей равенствъ, легко найдемъ

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad y' = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos x}\ \text{(XIX)}.$$

Далѣе, если даны функціи

$$y = x^x,\quad y = x^{x^x},\ \ldots,$$

то взявъ, сперва логариѳмы, а потомъ производныя обѣихъ частей полученныхъ равенствъ, найдемъ

$$y' = x^x(1+\log x),\quad y' = x^{x+x^x}\left(\frac{1}{x} + \log x + \log^2 x\right),\ \ldots$$

Однако, поступая такимъ образомъ, мы допускаемъ a priori существованіе производной y'. Чтобы устранить это возраженіе, надо впередъ доказать, что эта производная существуетъ. Въ предпослѣднихъ двухъ примѣрахъ это вытекаетъ изъ того замѣчанія, что y можетъ быть представленъ въ видѣ $\operatorname{arctg} u$. Для $y = x^x$ можно написать $y = e^{x\log x}$ и т. д.

e) Производная порядка n (n-ая) отъ $y = x^m\log x$ равна

$$y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}\left(\log x + \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{m-n+1}\right).$$

Въ частности,

$$y^{(m)} = m!\left(\log x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right),\quad y^{(m+1)} = \frac{m!}{x}.$$

Такимъ же образомъ, послѣдовательнымъ вычисленіемъ производныхъ найдемъ, что n-ыя производныя функцій

$$y = e^{x\cos a}\cos(x\sin a),\quad y = e^{x\cos a}\sin(x\sin a)$$

соотвѣтственно равны

$$y^{(n)} = e^{x\cos a}\cos(na + x\sin a),\quad y^{(n)} = e^{x\cos a}\sin(na + x\sin a).$$

Не столь просто вычисленіе n-ой производной отъ $y = \operatorname{arctg} x$, но ее легко выразить, какъ функцію отъ y, вычисляя $(n-1)$-ую производную отъ $y' = \dfrac{1}{1+x^2} = \cos^2 y$, а именно:

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Свойства производныхъ.

293. Прежде чѣмъ идти далѣе, сдѣлаемъ небольшое отступленіе въ область, чрезвычайно важную для приложеній Математики. Уже при доказательствѣ основныхъ теоремъ въ теоріи функцій удобно пользоваться геометрическимъ изображеніемъ независимой перемѣнной. Это изображеніе мы получимъ, установивъ соотвѣтствіе между значеніями перемѣнной и точками нѣкоторой прямой линіи, какъ это дѣлается въ Аналитической Геометріи. Благодаря этому всѣ доказательства, не измѣняясь по существу (потому что нужно остерегаться основывать ихъ на какихъ либо геометрическихъ понятіяхъ), выигрываютъ въ ясности и наглядности, и могутъ быть выражены немногими словами. Вмѣсто того, чтобы говорить о значеніи, которое даютъ перемѣнной, называютъ точку, служащую его изображеніемъ, и всякій интервалъ (a, b) изображается прямолинейнымъ отрѣзкомъ, ограниченнымъ точками a и b, т. е. точками, разстоянія которыхъ отъ нѣкоторой начальной точки, отложенныя въ извѣстномъ направленіи, измѣряются числами a и b. Чтобы изобразить нѣкоторую функцію y, стоитъ только разсматривать каждую пару соотвѣтствующихъ значеній x и y, какъ Декартовы (прямоугольныя) координаты точки на плоскости; уравненіе $y = f(x)$ изобразитъ тогда нѣкоторую линію, съ помощью которой легко отдать себѣ отчетъ въ главныхъ свойствахъ функціи и ея производной. Прежде всего надо указать геометрическое значеніе производной. Разсмотримъ касательную къ кривой въ точкѣ M, т. е. предѣльное положеніе, съ которымъ стремится совпасть сѣкущая MM', когда точка M', двигаясь по кривой, безпредѣльно приближается къ M. Пусть S и T будутъ точки встрѣчи сѣкущей и касательной съ осью абсциссъ, P и P' основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ M и M' на ту же ось. Обозначимъ черезъ H точку, имѣющую съ точкою M' общую абсциссу, а съ точкою M — одинаковую ординату. Пусть x и y — координаты данной точки M, $x + \delta x$ и $y + \delta y$ — координаты точки M', и замѣтимъ, что въ силу подобія треугольниковъ MHM' и SPM

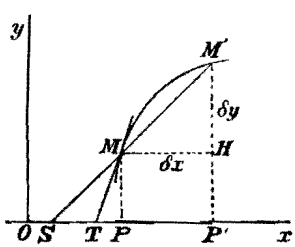


Рис. 4.

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{M'H}{MH} = \frac{MP}{SP}.$$

Когда δx и δy стремятся къ нулю, точка M' стремится къ M,

P и M остаются неподвижными, S стремится къ T, поэтому

$$y' = \lim \frac{\delta y}{\delta x} = \lim \frac{MP}{SP} = \frac{MP}{TP} = \operatorname{tg} \widehat{MTx},$$

т. е. производная ординаты нѣкоторой кривой, взятая по абсциссѣ, изображаетъ угловой коэффиціентъ касательной къ кривой. Если независимая перемѣнная обозначаетъ время, то этотъ коэффиціентъ, а слѣдовательно, и производная, изображаетъ скорость или мѣру быстроты, съ которою функція въ данный моментъ стремится возрастать или убывать. Именно съ этой послѣдней точки зрѣнія понятіе о производной, лежащее въ основѣ исчисленія безконечно малыхъ, и представилось уму Ньютона, незадолго до 1667 года [1]).

294. Примѣры. а) При вычерчиваніи кривой $y = f(x)$ весьма полезно знать производную $f'(x)$ ординаты, потому что это даетъ средство строить кривую по точкамъ и по касательнымъ. Мы ограничимся здѣсь немногими примѣрами, чтобы показать пользу графическаго изображенія, и притомъ не съ геометрической точки зрѣнія, о которой рѣчь будетъ впереди, а именно съ точки зрѣнія самой теоріи функцій. Мы предпошлемъ два совсѣмъ простыхъ упражненія, показавъ построеніе касательной къ пара-

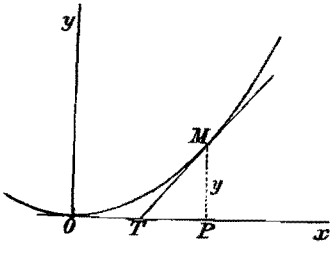


Рис. 5.

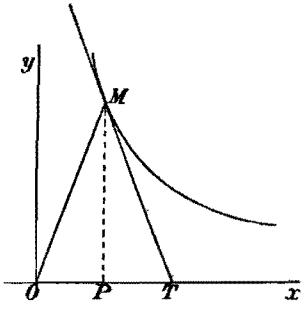


Рис. 6.

болѣ (рис. 5) и равносторонней гиперболѣ (рис. 6), изображаемыхъ уравненіями

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad y = \frac{a^2}{x}.$$

Изъ формулъ

$$y' = \frac{x}{a} = 2\frac{y}{x}, \quad y' = -\frac{a^2}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

находимъ $TP = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{1}{2}x$ для параболы и $PT = -\dfrac{y}{y'} = x$ для гиперболы.

[1]) См. Mansion, Résumé du Cours d'Analyse p. 194.

Отсюда заключаемъ, что, зная точку 0— вершину параболы или центръ гиперболы, и точку P—проекцію данной на кривой точки M на касательную къ параболѣ въ ея вершинѣ или на асимптоту гиперболы, построеніе касательной въ точкѣ M приводится къ слѣдующему: соединивъ точку M на параболѣ съ срединою T отрѣзка OP, получимъ касательную къ параболѣ, а соединивъ точку M на гиперболѣ съ точкою T, симметричною съ O относительно P, получимъ касательную къ гиперболѣ.

b) Линія, изображающая функцію $y = x - [x]$, состоитъ изъ безчисленнаго множества прямолинейныхъ отрѣзковъ; одинъ конецъ каждаго отрѣзка лежитъ на прямой $y = 0$, въ точкѣ $x = n$, а другой на прямой $y = 1$, въ точкѣ $x = n + 1$ *). Точки на второй прямой, собственно говоря, надо исключить, но полезно замѣтить, что съ геометрической точки зрѣнія подобныя исключенія не нужны. Напротивъ, надо пользоваться понятіемъ о непрерывности, чтобы исключать по возможности меньше точекъ и касательныхъ. Такимъ образомъ, когда точка, при движеніи по кривой, стремится совпасть съ нѣкоторою неподвижною точкою, координаты которой уравненію кривой не удовлетворяютъ, эту неподвижную точку тѣмъ не менѣе разсматриваютъ (въ Геометріи), какъ принадлежащую кривой: впрочемъ, и не возможно ее исключить или отдѣлить отъ другихъ графическими средствами. Подобнымъ же образомъ поступаютъ, когда въ нѣкоторой точкѣ M не существуетъ касательной, между тѣмъ, какъ существуетъ прямая, съ которою стремится совпасть касательная въ точкѣ M' при безпредѣльномъ приближеніи M' къ M; эту прямую и разсматриваютъ, какъ касательную въ точкѣ M. Такія соглашенія принимаются для устраненія нѣкоторыхъ сомнѣній, которыя не рѣдко встрѣчались бы въ геометрическихъ приложеніяхъ, если мы захотѣли бы держаться строгой интерпретаціи установленныхъ выше аналитическихъ принциповъ.

c) Другая интересная линія получится при изображеніи функціи $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$. Она состоитъ изъ отрѣзковъ, образуемыхъ на безчисленномъ множествѣ прямыхъ, выходящихъ изъ одной точки (рис. 7).

При $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, имѣемъ $y = nx$ (n—цѣлое число); на этой прямой прямыя $y = 1 - x$ и $y = 1$ образуютъ отрѣзокъ, принадлежащій данной линіи (за исключеніемъ конца его, лежащаго на первой линіи). Точка A на оси y-въ, ордината которой равна 1, можетъ быть причислена къ данной линіи **), но эту линію невозможно начертить въ окрестности точки A, несмотря на то, что въ этой точкѣ ордината непрерывна (§ 272, d) (XX).

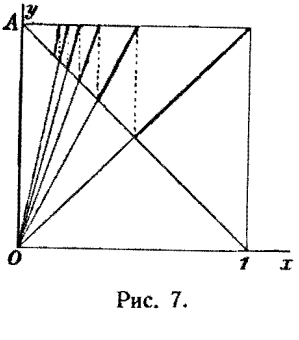


Рис. 7.

d) Въ предыдущемъ примѣрѣ разсматриваемая функція непрерывна въ точкѣ A, но разрывна въ ея окрестности. Иное дѣло представляетъ функція, опредѣляемая равенствами $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \geqslant 0$ и $f(0) = 0$. Она непрерывна при всякомъ x (§ 272, a). Тѣмъ не менѣе линію, которой

*) Потому что $y = x - [x]$ всегда $\geqslant 0$ и < 1, и при $n \leqq x < n + 1$ имѣетъ видъ $y = x - n$ (n-цѣлое число). Такъ какъ $x < n+1$, но не равно $n + 1$, то y подходитъ къ 1 какъ угодно близко, но не достигаетъ ея.

**) Полагая $y = 1$ при $x = 0$ (§ 272, d).

уравненіе есть $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, невозможно начертить въ окрестности точки $x = 0$, $y = 0$. То же самое можно сказать о непрерывной функціи

$$f[f(x)] = x \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$$

и притомъ въ окрестности безчисленнаго множества значеній x въ интервалѣ $\left(-\frac{1}{\pi}, +\frac{1}{\pi}\right)$, а именно $\pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi} \cdots$

Такія точки сгущаются все больше и больше въ функціяхъ $f(f(f(x)))$, $f(f(f(f(x))))\ldots$, потому что всякій разъ къ тѣмъ точкамъ, въ окрестности которыхъ функцію нельзя графически изобразить, присоединяются новыя и новыя, а именно тѣ, въ которыхъ функція обращается въ нуль (XXI). Не слѣдуетъ, однако, думать, что невозможность графическаго построенія проистекаетъ исключительно вслѣдствіе несуществованія производной, а слѣдовательно, и касательной въ разсматриваемыхъ точкахъ. Напримѣръ, кривая $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$ касается оси x ($y' = 0$) въ началѣ координатъ, между тѣмъ физически невозможно начертить кривую въ окрестности начала координатъ *).

e) Существуютъ и такія функціи, для которыхъ нельзя провести ни одного штриха изображающихъ линій, хотя можно поставить сколько угодно точекъ этихъ линій, и притомъ, какъ угодно близкихъ одна къ другой. Такова, напримѣръ, функція $\varpi(x)$, изслѣдованная въ § 277, c. На каждомъ прямолинейномъ отрѣзкѣ, параллельномъ оси x, заключенномъ въ полосѣ между прямыми $y = 0$ и $y = 1$, и сколь угодно маломъ, какъ видно изъ сказаннаго въ § 277, c, лежитъ безчисленное множество точекъ линіи, изображающей данную функцію; эти точки какъ бы заполняютъ всю упомянутую полосу. Если въ этомъ случаѣ невозможность графическаго изображенія можно объяснить полною разрывностью функціи, то этого объясненія нельзя примѣнить къ функціи Вейерштрасса (§ 801) она непрерывна вездѣ, но ни въ одной точкѣ не имѣетъ производной. Эти замѣчанія убѣждаютъ насъ въ необходимости чисто аналитическихъ доказательствъ даже и такихъ свойствъ функцій, которыя кажутся очевидными, если изобразимъ ихъ въ геометрической формѣ, потому что съ одной стороны эти свойства вовсе не зависятъ отъ возможности графическаго изображенія функцій; съ другой, эта возможность отсутствуетъ для обширныхъ классовъ функцій, несмотря на непрерывность и на существованіе производной.

f) Читатель можетъ упражняться въ графическомъ изображеніи различныхъ разрывныхъ функцій, разсмотрѣнныхъ нами раньше. Мы ограничимся здѣсь двумя лишь функціями, графическія построенія которыхъ намъ впослѣдствіи понадобятся.

1) Линія $y = \frac{[x]}{x}$ состоитъ изъ безчисленнаго множества гиперболическихъ дугъ, потому что, когда x заключается въ интервалѣ $(n, n+1)$, гдѣ n цѣлое число, за исключеніемъ верхней границы, то уравненіе обращается въ $xy = n$, и изображаетъ дугу гиперболы, соединяющую точку P

*) Вслѣдствіе безконечно частыхъ колебаній $\sin\frac{1}{x}$ въ окрестности $x=0$.

на прямой $y = 1$ (при $x = n$) съ точкою Q на гиперболѣ $x(1 - y) = 1$ (при $x = n + 1$) *) (рис. 8).

Припоминая сказанное о построеніи касательной къ гиперболѣ въ примѣрѣ а) видимъ, что касательная въ каждой точкѣ P проходитъ черезъ точку A, симметричную съ O относительно прямой $y = 1$. Слѣдовательно, касательныя въ точкахъ $P_1, P_2, P_3, \ldots$ всѣ сходятся въ точкѣ A. Далѣе, если

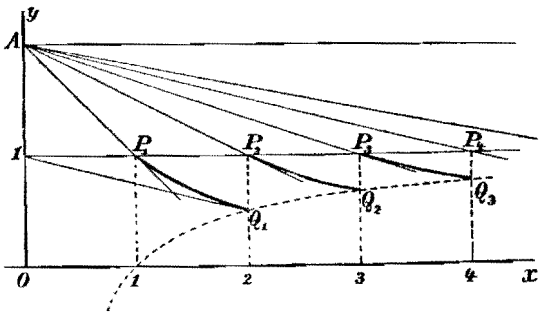


Рис. 8.

возьмемъ любую точку M на линіи и проведемъ черезъ нее прямую, параллельную оси x, то касательная въ этой точкѣ будетъ симметрична съ OM относительно этой прямой. Такъ какъ съ возрастаніемъ x до безконечности $\lim y = 1$, то проведенная черезъ M прямая, параллельная Ox, въ предѣлѣ совпадаетъ съ прямою $y = 1$, и касательная въ точкѣ M пройдетъ черезъ точку A. Итакъ, если точка M, двигаясь по линіи $y = \frac{[x]}{x}$, стремится къ предѣльному положенію на прямой $y = 1$, то касательная въ точкѣ M стремится къ предѣльному положенію $y = 2$.

2) Также легко построить линію, изображающую функцію

$$y = 2^{-[x]}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x - [x]}\right), \quad (x > 0).$$

Эта линія состоитъ изъ безчисленнаго множества параболическихъ дугъ и оказывается, что, когда точка движется по этой линіи въ безконечность, стремясь къ предѣльному положенію на оси x-въ, то острый уголъ, образуемый касательною въ этой точкѣ съ осью x-въ, постоянно колеблется въ интервалѣ $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, нижняя граница котораго стремится къ нулю (рис. 9) (XXII).

g) Всякій посвящающій себя техническимъ наукамъ, увидитъ, что паровая машина сама чертитъ свою собственную діаграмму т. е. линію, изображающую давленіе пара, какъ функцію объема, образующагося подъ поршнемъ. Поэтому, если извѣстны положенія поршня въ тѣ моменты, когда начинается и кончается впускъ пара изъ котла въ цилиндръ, или выпускъ

*) Точка Q лишь предѣльная точка на дугѣ PQ, потому что x какъ угодно близко къ $n + 1$, но не равно $n + 1$.

его въ конденсаторъ, то машина раскрываетъ передъ тѣмъ, кто ее допрашиваетъ, свои достоинства и недостатки. Различныя діаграммы встрѣчаются во всѣхъ отдѣлахъ инженерной науки и часто употребляются и при изученіи различныхъ явленій природы, не исключая и явленій соціологическаго характера [1]).

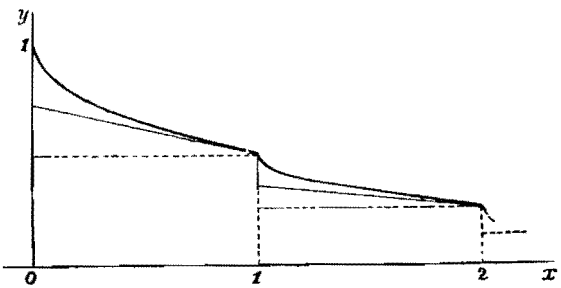


Рис. 9.

Въ такихъ эмпирическихъ кривыхъ нельзя теоретически говорить о касательной или производной, хотя эти кривыя постолько и важны, поскóлько онѣ могутъ служить для сужденія о скорости измѣненія изображаемой ими функціи. Дѣйствительно, эти кривыя не свободны отъ небольшихъ погрѣшностей и изображаютъ не истинную функцію u, а нѣкоторую другую v, нѣсколько отличную отъ u. И нетрудно убѣдиться, что, если производная функціи u существуетъ, то производная отъ v можетъ и не существовать, или, если и существуетъ, то v' можетъ значительно отличаться отъ u'. Напримѣръ [2]), если $u = v + a \sin \frac{x}{a^2}$, гдѣ a постоянное весьма малое число, то $u' - v' = \frac{1}{a} \cos \frac{x}{a^2}$ и, хотя $|u - v|$ никогда не превосходитъ a, $|u' - v'|$ можетъ быть весьма большою въ окрестности безчисленнаго множества значеній x.

295. Функція $f(x)$ называется возрастающею или убывающею или постоянною справа отъ a, если возможно найти такое положительное число h, чтобы въ интервалѣ $(a, a+h)$ всѣ значенія $f(x)$ были соотвѣтственно больше, меньше или равны $f(a)$. Функцію $f(x)$ называютъ возрастающею, убывающею или постоянною слѣва отъ a, если въ интервалѣ $(a, a-h)$ всѣ значенія функціи будутъ соотвѣтственно меньше, больше или равны $f(a)$. Можетъ случиться, что такое число h не существуетъ вовсе. Такъ, напримѣръ, ясно, что функція $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, при $x \gtrless 0$, и равная нулю при $x = 0$, въ окрестности нуля никогда не перестаетъ принимать значенія какъ положительныя, такъ и отрицательныя и равныя нулю. Какъ бы мало ни было h, въ интервалѣ $(-h, +h)$ $f(x)$ будетъ и больше и меньше и равно $f(0) = 0$. Поэтому эту функцію $f(x)$ въ окрестности $x = 0$, или, какъ говорятъ для краткости, при $x = 0$,

[1]) См., напримѣръ, „Cours d'Économie politique" par V. Pareto.

[2]) См. Laurent „Calcul des probabilités" p. 200 или Genocchi et Peano, „Calcolo differenziale", p. XIII.

нельзя назвать ни возрастающею, ни убывающею, ни постоянною. Именно это обстоятельство и объясняетъ невозможность графическаго изображенія этой функціи въ окрестности начала координатъ, потому что, намѣтивъ точку, въ окрестности которой ордината кривой не возрастаетъ, не убываетъ и не постоянна, невозможно себѣ представить какимъ образомъ примыкаютъ къ ней сосѣднія точки. Подобное же можно сказать о функціи $y = x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$, которую нельзя назвать возрастающею при $x = 0$, потому что въ окрестности нуля, она безконечное число разъ равна $f(0) = 0$ *). Функція $\tilde{\omega}(x)$ (§ 277, c) такова, что о ней нельзя ничего сказать (относительно возрастанія или убыванія) въ окрестности любого значенія x.

296. Функція $f(x)$ называется 1) возрастающею или 2) убывающею или 3) постоянною въ интервалѣ, если для любой пары значеній x' и x'' въ этомъ интервалѣ разность $f(x') - f(x'')$ 1) имѣетъ одинаковый знакъ съ $x' - x''$, 2) имѣетъ знакъ, противоположный знаку $x' - x''$ и 3) равна нулю. Чтобы выяснить различіе между возрастаніемъ (или убываніемъ, или постоянствомъ) „въ интервалѣ“ и „при данномъ значеніи x“ (т. е. „въ окрестности“ даннаго значенія x) достаточно взять для примѣра функцію $\frac{1}{x}$, значеніе которой при $x = 0$ выбрано по произволу. Ее надо назвать возрастающею въ окрестности или при $x = 0$, справа отъ 0, каково бы ни было значеніе ея при $x = 0$, и въ тоже время она будетъ убывающею въ любомъ интервалѣ $(0, h)$ за исключеніемъ нижней границы, какъ бы мало ни было h (XXIII). Ясно, что функція, возрастающая, убывающая или постоянная въ интервалѣ, будетъ обладать соотвѣтственными свойствами въ окрестности любого значенія перемѣнной въ этомъ интервалѣ. Но обратное заключеніе вовсе не очевидно, хотя оно и справедливо, какъ будетъ доказано въ слѣдующемъ параграфѣ. Замѣтимъ здѣсь же, что это заключеніе будетъ несправедливо, если функція будетъ, напримѣръ, возрастающею съ одной лишь стороны отъ всѣхъ чиселъ даннаго интервала. Такъ, напримѣръ, функція $x - [x]$ возрастающая справа отъ любого значенія x, но она не будетъ возрастающею въ интервалѣ (a, b), если $[a] < [b]$ (XXIV).

297. Теорема I. Функція, возрастающая въ окрестности каждаго числа, лежащаго въ данномъ интервалѣ, будетъ возрастающею въ интервалѣ. (Теорема остается справедливою, когда въ ея формулировкѣ слово „возрастающая“ замѣнимъ словами „убывающая“ или „постоянная“.)

Если допустимъ, что въ конечномъ или безконечномъ интервалѣ функція не будетъ возрастающею, то въ данномъ интервалѣ будетъ заключаться, по крайней мѣрѣ, одинъ интервалъ (a_1, b_1), для

*) При $x = \pm\frac{1}{n\pi}$, гдѣ n цѣлое число, сколь угодно большое.

границъ котораго $(a_1 < b_1)$ имѣетъ мѣсто неравенство $f(a_1) \geqq f(b_1)$. Обозначимъ теперь черезъ (a_2, b_2) правую (верхнюю) или лѣвую (нижнюю) половину интервала (a_1, b_1), смотря по тому, будетъ ли $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < f(a_1)$ или $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \geqq f(a_1)$, и замѣтимъ, что въ обоихъ случаяхъ $f(a_2) \geqq f(b_2)$. Съ интерваломъ (a_2, b_2) поступимъ, какъ съ интерваломъ (a_1, b_1), и, продолжая такимъ образомъ, подобно тому, какъ поступили въ § 171, найдемъ число ξ—общій предѣлъ нижнихъ границъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и верхнихъ границъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ послѣдовательно образуемыхъ этимъ путемъ интерваловъ. Это число ξ, очевидно, будетъ лежать въ данномъ интервалѣ (a, b). Выбравъ положительное сколь угодно малое число h по произволу, всегда можемъ опредѣлить достаточно большое число n, чтобы a_n и b_n попали въ интервалъ $(\xi - h, \xi + h)$, первое слѣва, второе справа отъ ξ. Такимъ образомъ, мы видимъ, что интервалъ $(\xi - h, \xi)$ содержитъ число $x' = a_n$, а интервалъ $(\xi, \xi + h)$ число $x'' = b_n$, о которыхъ извѣстно, что $f(x') \geqq f(x'')$, при $x' < x''$. А это противорѣчитъ предположенію, что $f(x)$ возрастающая въ окрестности числа ξ, потому что въ силу этого предположенія, при достаточно маломъ h, всегда имѣемъ $f(x'') > f(x')$. Совершенно аналогично доказывается теорема въ случаѣ функціи убывающей или постоянной.

298. Теорему I можно доказать иначе, не прибѣгая къ процессу § 171. Положимъ опять, что $f(x)$ функція, возрастающая въ окрестности каждаго числа x въ данномъ интервалѣ. Возьмемъ по произволу два числа x' и x'' въ этомъ интервалѣ и пусть $x' < x''$. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $f(x') < f(x'')$. Такъ какъ $f(x)$ является возрастающей справа отъ x', то существуютъ числа $x \leqq x''$, но большія x', для которыхъ $f(x') < f(x)$. Ансамбль этихъ чиселъ x конечный и имѣетъ верхнюю границу $\xi \leqq x''$. Далѣе, такъ какъ $f(x)$ возрастающая слѣва отъ ξ, то существуетъ такой интервалъ $(\xi - h, \xi)$, что $f(x) < f(\xi)$ для всѣхъ значеній x, лежащихъ въ немъ. Съ другой стороны, по самому опредѣленію верхней границы ансамбля, въ томъ же интервалѣ лежитъ, по крайней мѣрѣ, одно число ξ' разсматриваемаго ансамбля, т. е. такое, что $f(x') < f(\xi')$ и одновременно $f(\xi') < f(\xi)$. Отсюда вытекаетъ, что $f(x') < f(\xi)$, т. е. ξ принадлежитъ къ разсматриваемому ансамблю и будетъ поэтому наибольшимъ числомъ его. Если бы ξ оказалось меньше x'', то вправо отъ ξ нашлось бы число $\xi'' < x''$, для котораго $f(\xi) < f(\xi'')$, а потому и $f(x') < f(\xi'')$, т. е. и ξ'' принадлежало бы тому же ансамблю, а это невозможно, потому что наибольшее число этого ансамбля есть $\xi < \xi''$. Итакъ, $\xi = x''$ и $f(x') < f(x'')$. Можно замѣтить, что при этомъ доказательствѣ условія теоремы не были использованы полностью, а именно функція была предположена возрастающею слѣва отъ каждаго значенія x_1 въ интервалѣ, а справа предположено лишь существованіе нѣкоторыхъ чиселъ x_2, какъ

угодно близкихъ къ x_1, для которыхъ $f(x_1) < f(x_2)$ *). Однако, мы видимъ, послѣ того какъ теорема доказана, что изъ этого, повидимому, болѣе широкаго условія, необходимо слѣдуетъ, что функція будетъ возрастающею справа отъ каждаго значенія x въ данномъ интервалѣ.

299. Теорема II. Функція будетъ возрастающей или убывающей справа (слѣва) отъ a, смотря по тому, будетъ ли производная ея при $x = a$ справа (слѣва) больше или меньше нуля.

Изъ сущности установленныхъ опредѣленій вытекаетъ, что функція будетъ возрастающею при $x = a$, если возможно указать такое положительное число h, что, при $|\delta x| < h$, δy имѣетъ одинаковый знакъ съ δx, и убывающею, если, при $|\delta x| < h$, δy имѣетъ знакъ, противоположный знаку δx. Если при $x = a$ производная справа (слѣва) есть число положительное, то соотвѣтствующее отношеніе приращеній $\frac{\delta y}{\delta x}$, съ приближеніемъ δx къ 0, въ концѣ концовъ становится и остается числомъ положительнымъ, т. е. δy принимаетъ и сохраняетъ знакъ δx, а слѣдовательно, функція будетъ возрастающею. Такимъ же образомъ доказывается, что функція будетъ убывающею при $x = a$, если ея производная при $x = a$ отрицательна. Далѣе, если производная при $x = a$ равна нулю, то это не мѣшаетъ тому, чтобы δy при достаточно маломъ $|\delta x|$ сохраняло постоянный знакъ, и функція была возрастающею или убывающею при $x = a$. Но можетъ случиться, что δy въ концѣ концовъ дѣлается равнымъ нулю или не перестаетъ обращаться въ нуль или мѣнять знакъ, какъ бы мало ни было δx; тогда функція, если она не постоянна, не будетъ вообще ни возрастающею, ни убывающею.

300. Теорема III. Функція, имѣющая единственную производную, будетъ возрастающею или убывающею въ данномъ интервалѣ, смотря по тому, будетъ ли эта производная во всемъ интервалѣ больше или меньше нуля.

Дѣйствительно, если, напримѣръ, $f'(x) > 0$ для всѣхъ значеній x въ интервалѣ, то $f(x)$ будетъ возрастающею въ окрестности каждаго изъ этихъ значеній, а въ силу теоремы I будетъ возрастающею и въ интервалѣ.

301. Maxima и minima. Говорятъ, что $f(x)$ проходитъ черезъ minimum при $x = a$, или что $f(a)$ есть minimum функціи, если ни одно изъ значеній $f(x)$ въ окрестности числа a не меньше $f(a)$. Говорятъ, что $f(a)$ есть maximum функціи $f(x)$, если ни

*) А это неравносильно условію, чтобы $f(x)$ была возрастающею справа отъ x_1, требующему, чтобы $f(x_1) < f(x_2)$ для всѣхъ чиселъ $x_2 > x_1$ и достаточно близкихъ къ x_1.

одно изъ ея значеній въ окрестности a не превосходитъ $f(a)$. Опредѣляемые такимъ образомъ maxima и minima называются абсолютными, въ отличіе отъ maximum'а и minimum'а, которые функція имѣетъ въ данномъ интервалѣ, и которые называютъ относительными. Послѣдніе зависятъ отъ совокупности всѣхъ значеній функціи въ данномъ интервалѣ, первые только отъ значеній, принимаемыхъ функціею въ окрестности нѣкоторыхъ опредѣленныхъ значеній независимой перемѣнной. (XXV.) Въ интервалѣ можетъ быть нѣсколько абсолютныхъ maxima и minima, и лишь одинъ относительный maximum и minimum. Послѣдніе могутъ мѣняться при измѣненіи интервала, первые сохраняютъ свой характеръ въ каждомъ интервалѣ и всегда соотвѣтствуютъ опредѣленнымъ значеніямъ x. Эти замѣчанія становятся очевидными, если примѣнимъ геометрическое изображеніе функціи (рис. 10). На прилагаемой фигурѣ, напримѣръ, видно, что изображаемая ею функція имѣетъ въ интервалѣ (a, b) относительный minimum на нижней границѣ a, относительный и въ то же время абсолютный maximum въ нѣкоторой точкѣ γ. Другой абсолютный maximum виденъ въ α, два абсолютныхъ minima въ точкахъ β и δ, при чемъ второй больше, чѣмъ maximum въ точкѣ a. Если подвинемъ a влѣво, то относительный minimum уменьшится и появится на нижней границѣ новаго интервала. Если подвинемъ точку b вправо, то относительный maximum не измѣнится и останется въ γ до тѣхъ поръ, пока точка b не перейдетъ вправо за c. Тогда этотъ maximum увеличится и попадетъ на верхнюю границу новаго интервала. Въ заключеніе сдѣлаемъ слѣдующія важныя замѣчанія: абсолютный minimum при $x = a$ есть не что иное, какъ относительный minimum въ достаточно маломъ интервалѣ, выбранномъ въ окрестности a; относительный minimum въ данномъ интервалѣ, если онъ не попадаетъ ни на одну изъ границъ интервала, будетъ въ то же время и абсолютный minimum. Все сказанное относится и къ maximum'у. Въ дальнѣйшемъ, если не сдѣлано никакой оговорки, рѣчь будетъ идти объ абсолютныхъ maxima и minima.

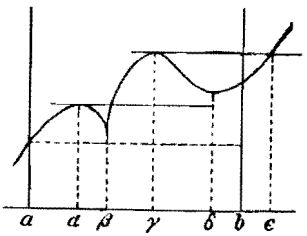


Рис. 10.

302. Теорема IV. Если функція имѣетъ единственную производную, и при $x = a$ проходитъ черезъ minimum или maximum, то производная обращается въ нуль при $x = a$. Положимъ, напримѣръ, что $f(a)$ есть minimum. По опредѣленію абсолютнаго minimum'а $f(x)$ не возрастающая функція слѣва отъ a и не убывающая справа отъ a. Слѣдовательно, разсматривая единственную производную при $x = a$, какъ производную слѣва, видимъ, что она не можетъ быть больше 0, а разсматривая ее, какъ

производную справа, также видимъ, что она не можетъ быть отрицательною (теорема II). Поэтому она должна быть равна нулю. Обратная теорема не справедлива. Производная можетъ обращаться въ нуль при данномъ значеніи x, а функція при этомъ значеніи не проходитъ ни черезъ maximum, ни черезъ minimum. Ничто не мѣшаетъ функціи быть, напримѣръ, возрастающею и справа и слѣва отъ этого значенія (какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, для $y = x^2$ при $x = 0$).

303. Теорема V. (Теорема Ролля (Rolle). Если функція, имѣющая единственную производную, принимаетъ равныя значенія на границахъ интервала, то производная, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ обратится въ нуль внутри интервала *), предполагая, что функція непрерывна и на границахъ интервала. Функція непрерывна во всемъ интервалѣ: на границахъ по условію, внутри границъ, потому что имѣетъ единственную производную для всѣхъ значеній x внутри интервала, за исключеніемъ или съ включеніемъ границъ—безразлично. Поэтому, по второй теоремѣ Вейерштрасса, въ этомъ интервалѣ существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно число ξ, при которомъ $f(x)$ достигаетъ наибольшаго или наименьшаго значенія, т. е. относительнаго maximum'а или minimum'а въ данномъ интервалѣ. Если бы всѣ значенія функціи въ интервалѣ (a, b) были равны $f(a)$, то производная была бы равна нулю для всѣхъ значеній x въ этомъ интервалѣ. Поэтому мы можемъ принять, что не всѣ значенія $f(x)$ равны $f(a)$. Тогда, по крайней мѣрѣ, одно изъ двухъ ея значеній—наибольшее или наименьшее не будетъ равно $f(a) = f(b)$, и соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, числу ξ, лежащему между a и b, не совпадающему ни съ a, ни съ b. Исключивъ, такимъ образомъ, границы, мы видимъ (§ 301), что $f(\xi)$ будетъ абсолютный maximum или minimum функціи $f(x)$, а потому (§ 302) необходимо будемъ имѣть $f'(\xi) = 0$.

304. Примѣчанія. а) Относительно ограниченій, наложенныхъ на разсматриваемую функцію, замѣтимъ, что функція $x - [x]$ обращается въ нуль на границахъ интервала (0, 1), непрерывна въ интервалѣ, если исключимъ границы, и имѣетъ единственную производную въ этомъ интервалѣ. Однако эта производная (равная 1) въ нуль внутри интервала не обращается. Теорема Ролля здѣсь не оправдывается потому, что функція разрывна слѣва отъ 1, что и препятствуетъ ей достигнуть верхней своей границы. Но отнюдь не невозможно, чтобы теорема имѣла мѣсто и въ такихъ случаяхъ, когда функція не непрерывна на границахъ интервала. Такова, напримѣръ, функція $\sin\frac{1}{x}$ въ интервалѣ $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$, разрывная на нижней

*) Т. е. между границами.

границѣ *). Если, напротивъ того, условіе непрерывности соблюдено во всемъ интервалѣ (не исключая границъ), то теорема Ролля будетъ справедлива независимо отъ того, существуютъ или нѣтъ производныя на границахъ. Достаточно привести въ примѣръ непрерывную функцію $x \sin \frac{1}{x}$, не имѣющую производной при $x = 0$. Во всякомъ интервалѣ $\left(0, \frac{1}{n\pi}\right)$ производная обращается въ нуль безчисленное множество разъ для значеній x, равныхъ обратнымъ величинамъ корней уравненія $\operatorname{tg} x = x$ (XXVI).

b) Теорема Ролля говоритъ между прочимъ, что между двумя корнями функціи $f(x)$ лежитъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень производной $f'(x)$. При этомъ, что особенно важно замѣтить, всегда предполагается, что выполнены условія непрерывности и существованія единственной производной, какъ они высказаны въ формулировкѣ самой теоремы. Случай, когда при $x = a$ обращаются въ нуль $f(x)$ и $f'(x)$, можно разсматривать, какъ частный случай теоремы Ролля, примѣненной къ нулевому интервалу (a, a). Надо себѣ представить, что въ a совпадаютъ два или болѣе корней функціи $f(x)$. На этомъ основаніи говорятъ, что a кратный корень $f(x)$ и называютъ тогда простымъ такой корень, который не обращаетъ въ нуль $f'(x)$; корень называютъ двойнымъ, если онъ будетъ простымъ корнемъ $f'(x)$, т. е. когда $f'(a) = 0$, а $f''(a) \gtrless 0$; тройнымъ, если онъ двойной для $f'(x)$, т. е. если $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) \gtrless 0$, и т. д. Вообще n-кратнымъ корнемъ функціи $f(x)$ называютъ такое число a, которое обращаетъ въ нуль $f(x)$ и всѣ ея послѣдовательныя производныя до $(n-1)$-ой включительно. Такой корень разсматриваютъ происходящимъ отъ совпаденія n корней, равныхъ a.

305. Теорема VI (Теорема Коши (Cauchy). Если въ нѣкоторомъ конечномъ интервалѣ (a, b) функціи φ и ψ непрерывны, имѣютъ въ этомъ интервалѣ (исключая или не исключая границы) единственныя производныя φ' и ψ', не имѣющія общихъ корней, то въ данномъ интервалѣ существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно число ξ, не совпадающее съ границами, для котораго

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Такъ какъ при формулировкѣ теоремы, конечно, нельзя вводить

*) Полагая $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, при $x > 0$, и $f(0) = 0$, имѣемъ и $f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ обращается въ 0 для всѣхъ $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, гдѣ k цѣлое число, большее 0.

величинъ, не имѣющихъ смысла, то въ написанной формулѣ заключается предположеніе, что, по крайней мѣрѣ, для одной изъ функцій, напримѣръ ψ, значенія ея на границахъ интервала не равны между собой. При этомъ предположеніи всегда можно подобрать постоянное число k такъ, чтобы функція $\varphi(x) - k\psi(x)$ имѣла равныя значенія на этихъ границахъ; для этого стоитъ только положить

$$\varphi(a) - k\psi(a) = \varphi(b) - k\psi(b)$$

и въ виду условія $\psi(a) \gtrless \psi(b)$ вывести отсюда

$$k = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}.$$

Теперь функція $\varphi(x) - k\psi(x)$ во всемъ интервалѣ непрерывна, и имѣетъ единственную производную $\varphi'(x) - k\psi'(x)$, которая по теоремѣ Ролля, по крайней мѣрѣ, для одного значенія ξ внутри интервала обратится въ нуль, такъ что будемъ имѣть

$$\varphi'(\xi) = k\psi'(\xi).$$

Такъ какъ $\psi'(\xi)$ не можетъ быть равно нулю, иначе и $\varphi'(\xi) = 0$ вопреки условію, сдѣланному относительно φ' и ψ', то изъ предыдущаго уравненія получимъ

$$k = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

(Случай $k = 0$ не исключается, а приводитъ опять къ теоремѣ Ролля). Сравнивая два выраженія для k, мы и находимъ теорему Коши. Замѣтимъ, что теорема остается справедливою и въ томъ случаѣ, когда φ' и ψ' обращаются въ нуль на границахъ интервала, или не существуютъ на этихъ границахъ; съ другой стороны теорема можетъ не имѣть мѣста въ случаѣ разрыва одной изъ функцій на одной изъ границъ.

306. Теорема VII. (Теорема Лагранжа). Для всякой функціи $f(x)$, непрерывной въ конечномъ интервалѣ (a, b) и имѣющей внутри его единственную производную, имѣемъ

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi),$$

гдѣ ξ нѣкоторое число въ интервалѣ (a, b), отличное отъ границъ.

Это непосредственное слѣдствіе теоремы Коши. Стоитъ только положить $\varphi(x) = f(x)$, $\psi(x) = x$, и замѣтить, что $\psi'(x) = 1$.

307. Слѣдствія. а) Функція, производная которой равна нулю, есть число постоянное. Дѣйствительно, если $f'(x) = 0$ для всякаго x въ (a, b), то теорему Лагранжа можно примѣнить

ко всякому интервалу (a, x), верхняя граница котораго не больше b, и получить, что $f(x) = f(a)$, т. е. равно постоянному числу. Эта теорема есть необходимое дополненіе къ теоремѣ III, дополненіе, котораго никакъ нельзя было бы сдѣлать къ аналогичной теоремѣ II. Надо особенно подчеркнуть, что $f'(x)$ есть единственная производная, и что теорема не имѣла бы мѣста, если бы, напримѣръ, производная справа всегда равнялась нулю, какъ это имѣетъ мѣсто при $y = [x]$.

b) Двѣ функціи, имѣющія одну и ту же производную, могутъ отличаться одна отъ другой только на постоянное число. Дѣйствительно, если $\varphi' = \psi'$, то производная отъ $\varphi - \psi$ есть нуль, и разность $\varphi - \psi$ есть постоянное число. Слѣдовательно, если извѣстна одна первообразная функція $F(x)$ отъ $f(x)$, т. е. функція, производная которой есть $f(x)$, то всѣ другія первообразныя функціи будутъ заключаться въ формулѣ $F(x) + C$, гдѣ C произвольная постоянная.

308. Примѣчанія. a) Чтобы показать, что теорема Лагранжа можетъ не имѣть мѣста въ случаѣ невыполненія какого нибудь изъ условій, перечисленныхъ въ ея формулировкѣ, достаточно привести функцію равную $\frac{1}{x}$ при $x \gtrless 0$ и равную 0 при $x = 0$. Примѣняя теорему Лагранжа къ интервалу (a, b), границы котораго отличны отъ нуля, получимъ $\xi^2 = ab$, что невозможно, если a и b разныхъ знаковъ, т. е. если въ интервалѣ (a, b) заключается значеніе $x = 0$, при которомъ $f'(x)$ не существуетъ. Да и въ томъ случаѣ, когда это значеніе лежитъ на границѣ интервала $(0, x)$ получаемъ невозможное равенство $\xi^2 = -x^2$, объясняемое исключительно разрывностью функціи на нижней границѣ.

b) Разсмотримъ общнѣе функцію $f(x)$, которая съ одной стороны, напримѣръ, справа отъ a не конечна, но можетъ имѣть единственную производную, понимая подъ этимъ, что эта производная существуетъ въ достаточно маломъ интервалѣ (a, x), но не при $x = a$; кромѣ того, мы допускаемъ, что съ приближеніемъ x къ a функція не перестаетъ принимать значенія, сколь угодно большія по абсолютной величинѣ. Теорему Лагранжа можно слѣдовательно примѣнить къ интервалу (a, x) за исключеніемъ нижней границы, т. е. къ интервалу (x', x), гдѣ $x' > a$ и какъ угодно близко къ a. Положимъ теперь, что задано по произволу сколь угодно большое число l; по условію можно указать такое число x', чтобы $|f(x')|$ была какъ угодно велика и потому можно удовлетворить неравенствамъ

$$|f(x') - f(x)| > (x - a)\,l \quad \text{или} \quad (x - x')\,|f'(\xi)| > (x - a)\,l > (x - x')\,l$$

и, наконецъ, $|f'(\xi)| > l$, гдѣ ξ лежитъ между x' и x и стремится къ a, когда x приближается къ a. Итакъ, если съ приближеніемъ

независимой перемѣнной къ конечному предѣлу функція, имѣющая единственную производную, принимаетъ сколь угодно большія по абсолютной величинѣ значенія, то такимъ же свойствомъ пользуется и производная.

c) Еще проще можно показать, что если функція, имѣющая единственную производную, стремится къ конечному предѣлу при безпредѣльномъ возрастаніи независимой перемѣнной, то производная либо стремится къ нулю, либо колеблется, не приближаясь ни къ какому предѣлу. Въ самомъ дѣлѣ, фиксируя нѣкоторое число a и взявъ $x > a$, изъ равенства $f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi)$ заключаемъ, что $(x-a)f'(\xi)$ при безпредѣльномъ возрастаніи x стремится къ конечному предѣлу, а потому $\lim\limits_{x=\infty} f'(\xi) = 0$. Нужно, однако, остерегаться считать послѣднее равенство равносильнымъ равенству $\lim\limits_{x=\infty} f'(x) = 0$, потому что хотя ξ и можетъ принимать сколь угодно большія значенія, если возьмемъ a достаточно большимъ ($x > \xi > a$), но изъ этого не слѣдуетъ, что ξ можетъ принимать всѣ значенія, бо́льшія любого даннаго числа. Можно только утверждать, что $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ либо равенъ нулю, либо не существуетъ. Во всякомъ случаѣ вѣрно будетъ утвержденіе, что $f'(x)$ при безпредѣльномъ возрастаніи x не перестаетъ принимать значенія, сколь угодно малыя по абсолютной величинѣ. Эти слѣдствія теоремы Лагранжа, равно какъ и сама теорема, могутъ быть весьма легко геометрически интерпретированы, но чтобы не впасть въ искушеніе приписать этой интерпретаціи силу доказательства, мы на ней не остановимся и рекомендуемъ читателю еще разъ прочесть замѣчанія въ § 294, e.

d) Теоремѣ Лагранжа можно дать форму равенства $\frac{\delta y}{\delta x} = f'(\xi)$, принимая во вниманіе, что δx относится къ нѣкоторому опредѣленному значенію $x = a$ (т. е. полагая $\delta x = x - a$). Замѣтимъ, что теорема будетъ справедлива и въ томъ случаѣ, когда $f'(a)$ не существуетъ, потому что во всѣхъ нашихъ разсужденіяхъ мы исключали границы интервала, чтобы не вводить лишнихъ ограниченій, предполагая функцію $f(x)$ лишь непрерывною на границахъ интервала и ничего не предполагая о производной на этихъ границахъ. Если $f'(a)$ существуетъ, то изъ теоремы Лагранжа вытекаетъ, что съ приближеніемъ δx къ нулю $\lim\limits_{x=a} f'(\xi) = f'(a)$. И здѣсь лѣвую часть не слѣдуетъ смѣшивать съ $\lim\limits_{x=a} f('x)$, хотя съ приближеніемъ x къ a и ξ стремится къ a. Въ самомъ дѣлѣ, число ξ, хотя и заключается всегда между x и a, можетъ и не принимать всѣхъ значеній въ окрестности a (срав. § 260), а потому можно только утверждать [1]),

[1]) См. Genocchi—Peano „Calcolo“ стр. 50.

что, съ приближеніемъ x къ a, $f'(x)$ проходитъ черезъ безчисленное множество значеній, какъ угодно близкихъ къ $f'(a)$. Этимъ, однако, не исключается возможность принимать ей и другія значенія, мѣшающія ей стремиться къ какому нибудь предѣлу. Примѣромъ такого случая можетъ служить функція $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $(f(0) = 0)$, для которой $f'(0) = 0$, между тѣмъ, какъ $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, ни къ какому предѣлу не стремится съ приближеніемъ x къ 0, вслѣдствіе постояннаго колебанія $\cos\frac{1}{x}$ между -1 и $+1$. Теорема Лагранжа даетъ

$$x \sin\frac{1}{x} = 2\xi \sin\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi},$$

отсюда слѣдуетъ, что $\lim_{x=0} \cos\frac{1}{\xi} = 0$, а это показываетъ, что ξ такая разрывная функція отъ x, которая стремится вмѣстѣ съ x къ 0, при чемъ значенія, которыхъ она не принимаетъ, безконечно многочисленнѣе тѣхъ, черезъ которыя она проходитъ (XXVII). Другой примѣръ даетъ функція

$$f(x) = x \sin\log x, \quad (f(0) = 0),$$

для которой имѣемъ, по теоремѣ Лагранжа,

$$\sin\log x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \log\xi\right).$$

Такъ какъ $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \log\xi\right)$ не можетъ быть больше $\frac{1}{2}$, то въ сколь угодно маломъ интервалѣ $(0, h)$ будетъ безчисленное множество интерваловъ, въ которые ξ не попадаетъ никогда. Эти интервалы принадлежатъ послѣдовательности (q, q^2), (q^3, q^4), (q^5, q^6), ..., гдѣ $q = e^{-\frac{\pi}{2}}$. (XXVIII.)

е) Изъ предыдущихъ замѣчаній слѣдуетъ, что всякая функція, которую можно разсматривать, какъ единственную производную другой функціи, можетъ имѣть лишь разрывы 2-го рода *). Иными словами, если подвижная точка M' на кривой стремится совпасть съ неподвижною точкою M, и касательныя въ точкахъ M и M' вполнѣ опредѣлены, то подвижная касательная въ M' либо стремится къ совпаденію съ касательною въ M, либо вообще никакого предѣльнаго положенія не имѣетъ. Конечно, производная можетъ

*) Потому что либо $\lim_{x=a} f'(x) = f'(a)$ и $f'(x)$ непрерывна, либо $\lim f'(x)$ не существуетъ, т. е. $f'(x)$ имѣетъ разрывъ 2-го рода.

имѣть и обыкновенные разрывы, но тамъ, гдѣ таковые встрѣтятся, можно быть увѣреннымъ, что производная справа не равна производной слѣва. Примѣромъ можетъ служить функція

$$f(x) = x[x] - \tfrac{1}{2}([x] + [x]^2),$$

производная которой равна $[x]$ для не цѣлыхъ значеній x. Обыкновенные разрывы послѣдней представляются при каждомъ цѣломъ значеніи x, въ видѣ скачковъ отъ производной слѣва, равной $x - 1$, къ производной справа, равной x.

Дополненія къ теоріи предѣловъ.

309. Благодаря послѣднимъ теоремамъ мы можемъ подготовить теперь переходъ отъ чистой теоріи въ неменѣе интересную область практическихъ приложеній теоріи предѣловъ. Прежде всего мы выведемъ изъ теоремы Коши другую важную теорему, съ помощью которой можно будетъ заполнить одинъ пробѣлъ (§ 263) въ теоріи предѣловъ. Эта теорема дастъ намъ возможность вычислять предѣлы многихъ функцій, которые при нѣкоторыхъ значеніяхъ независимой перемѣнной представлялись бы въ видѣ выраженій, не имѣющихъ смысла, какъ то

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

если бы мы примѣнили къ нимъ обыкновенныя правила перехода къ предѣламъ. Замѣтимъ теперь же, что всѣ вышеприведенныя формы приводятся къ двумъ первымъ, единственнымъ, о которыхъ будетъ идти рѣчь въ формулировкѣ нижеслѣдующей теоремы. Дѣйствительно, если произведеніе двухъ функцій φ, ψ, съ приближеніемъ x къ нѣкоторому предѣлу, стремится принять форму $0\cdot\infty$, то достаточно замѣнить его частнымъ отъ дѣленія φ на $\frac{1}{\psi}$, чтобы перейти къ первой или второй формѣ. Точно также, когда разность $\varphi - \psi$ стремится принять форму $\infty - \infty$, достаточно разсмотрѣть эту разность, какъ произведеніе φ на $\left(1 - \frac{\psi}{\varphi}\right)$, чтобы придти къ предыдущему случаю, при условіи, что $\frac{\psi}{\varphi}$ стремится къ 1, безъ котораго разсматриваемая разность не могла бы оставаться конечною. Къ тому же случаю приводится и разысканіе предѣла отъ φ^ψ, когда φ стремится къ нулю или безконечности, а ψ стремится къ нулю, или когда φ стремится къ 1, а ψ къ безконечности. Достаточно разсмотрѣть логариѳмъ этого выраженія, т. е. $\psi \log \varphi$, который принялъ бы форму $0\cdot\infty$, если бы ошибочно (и безполезно) примѣ-

нили къ нему правило разысканія предѣла произведенія конечнаго числа сомножителей, когда предѣлы этихъ сомножителей существуютъ.

310. Теорема VIII. (Теорема Лопиталя. (L'Hospital). Если двѣ непрерывныя функціи одновременно стремятся къ нулю или безконечности, когда независимая перемѣнная стремится къ конечному предѣлу или безпредѣльно возрастаетъ, и если при этомъ отношеніе производныхъ стремится къ нѣкоторому предѣлу, то къ тому же предѣлу стремится и отношеніе самыхъ функцій, предполагая, что производныя въ окрестности a не имѣютъ общихъ корней, или, въ случаѣ безпредѣльнаго возрастанія перемѣнной, не имѣетъ сколь угодно большихъ общихъ корней.

При этомъ еще предполагается, что, за исключеніемъ значенія $x = a$, производныя существуютъ и единственны.

а) Положимъ сперва, что, съ приближеніемъ x къ a, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ стремятся къ 0, такъ что, въ силу непрерывности ихъ, имѣемъ $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$. Взявъ x достаточно близкимъ къ a, чтобы въ интервалѣ (a, x), за исключеніемъ границъ, не было ни одного числа, обращающаго одновременно въ нуль φ' и ψ', по теоремѣ Коши, будемъ имѣть

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

гдѣ ξ, лежащее между a и x, стремится къ a вмѣстѣ съ x. Отсюда слѣдуетъ

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

если предѣлъ въ правой части существуетъ. Это заключеніе остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда x, вмѣсто того, чтобы стремиться къ a, возрастаетъ безпредѣльно. Дѣйствительно, положивъ $x = \frac{1}{z}$, можемъ написать

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=0} \frac{-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\psi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

При этомъ предполагается, что функціи $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ и $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$, непрерывныя при $z \gtrless 0$, непрерывны и при $z = 0$, что заставляетъ приписать имъ значеніе нуль при $z = 0$. Чтобы можно было примѣнить теорему Коши, безъ всякихъ сомнѣній, нужно, кромѣ того, допустить

существованіе такого числа l, что при $x > l$ никогда $\psi'(x)$ и $\varphi'(x)$ одновременно не обращаются въ нуль. Аналогичными соображеніями полученный результатъ распространяется на тотъ случай, когда x стремится къ $-\infty$, при чемъ z стремится къ нулю слѣва.

b) Положимъ теперь, что, при безпредѣльномъ возрастаніи x, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ также безпредѣльно возрастаютъ, и что отношеніе производныхъ стремится при этомъ къ предѣлу l. Это условіе требуетъ, чтобы при произвольно заданномъ сколь угодно маломъ положительномъ числѣ ε можно было указать такое число a, чтобы при $x > a$ всегда выполнялось неравенство

$$\left| \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - l \right| < \varepsilon.$$

Полагая, что a выбрано достаточно большимъ, чтобы въ интервалѣ (a, ∞) не заключалось ни одного общаго корня функцій $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$, можемъ приложить теорему Коши, которая дастъ

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \cdot \frac{1 - \frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}$$

при всякомъ $x > a$ и нѣкоторомъ ξ, лежащемъ между a и x. Теперь будемъ увеличивать x безпредѣльно, не измѣняя a. Первый множитель правой части остается всегда между $l - \varepsilon$ и $l + \varepsilon$; второй стремится къ предѣлу 1, и потому попадаетъ въ концѣ концовъ въ интервалъ $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$ и остается въ немъ. Отсюда слѣдуетъ, что, начиная съ нѣкотораго значенія x (отъ котораго зависитъ и ξ), всегда будемъ имѣть

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = l + \vartheta\varepsilon, \quad \frac{1 - \frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}} = 1 + \vartheta'\varepsilon,$$

гдѣ $|\vartheta|$ и $|\vartheta'|$ меньше 1. Отсюда

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l + (\vartheta + l\vartheta' + \vartheta\vartheta'\varepsilon)\varepsilon.$$

Назначивъ теперь сколь угодно малое положительное число η, достаточно, при $l \gtrless 0$, взять

$$\varepsilon < |l|, \quad \varepsilon < \frac{\eta}{1 + 2|l|}$$

или $\varepsilon = \frac{\eta}{1 + \eta}$ при $l = 0$, чтобы получить въ первомъ случаѣ

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - l \right| = |\vartheta + l\vartheta' + \vartheta\vartheta'\varepsilon| \cdot \varepsilon < (1 + 2|l|)\varepsilon < \eta$$

и

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| = |\,0 + 00'\varepsilon\,|\cdot\varepsilon < (1+\varepsilon)\,\varepsilon = \frac{(1+2\eta)\,\eta}{(1+\eta)^2} < \eta$$

во второмъ. Итакъ, въ обоихъ случаяхъ

$$\lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l,$$

что и доказываетъ теорему въ случаѣ b). Теорему можно считать справедливою и въ томъ случаѣ, когда числитель въ отношеніи $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ остается конечнымъ и, слѣдовательно, отношеніе имѣетъ предѣломъ нуль, потому что тогда отношеніе производныхъ не можетъ стремиться къ предѣлу, отличному отъ нуля. Чтобы это показать, достаточно написать

$$1 = \lim\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{\psi(x)} = \lim\frac{\varphi'(x)+\psi'(x)}{\psi'(x)} = 1 + \lim\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Если, наконецъ, x вмѣсто того, чтобы возрастать безпредѣльно, стремится къ конечному предѣлу a, то теорема остается справедливою. Полагая $x - a = \frac{1}{z}$, можемъ написать

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=\infty}\frac{\varphi\left(a+\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a+\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty}\frac{-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(a+\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\psi'\left(a+\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

что и требовалось показать.

311. Примѣчанія. a) При разысканіи предѣла $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ въ томъ случаѣ, когда x стремится къ a, можетъ случиться, что числа $\varphi'(a)$, $\psi'(a)$ не существуютъ или оба равны нулю, а теорема остается справедливою, потому что лишь въ окрестности $x = a$, а не при $x = a$, производныя должны существовать и не имѣть общихъ корней. Если обѣ производныя обращаются въ нуль при $x = a$, оставаясь непрерывными, то при разысканіи предѣла ихъ отношенія мы имѣемъ передъ собою ту же задачу, которую имѣли въ началѣ. Если, однако, всѣ другія условія теоремы выполнены и для отношенія производныхъ, то мы можемъ снова примѣнить теорему, переходя ко вторымъ производнымъ, затѣмъ, если нужно, къ третьимъ и т. д.

b) Нѣкоторыя изъ замѣчаній, сдѣланныхъ раньше, выдвигаютъ, повидимому, трудно устранимое возраженіе противъ теоремы Лопиталя. А именно, кажется, что вытекающій изъ нея процессъ разысканія предѣла отношенія всегда будетъ фиктивнымъ, не ведущимъ къ цѣли, когда обѣ функціи φ и ψ возрастаютъ безпредѣльно съ

приближеніемъ перемѣнной къ конечному предѣлу, или обѣ стремятся къ нулю, когда перемѣнная возрастаетъ безпредѣльно. Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ обѣ производныя, какъ было замѣчено въ § 308, b, тоже возрастаютъ безпредѣльно или постоянно колеблятся, а во второмъ обѣ стремятся къ нулю (§ 308, c). На это возраженіе можно отвѣтить слѣдующее: главное значеніе процесса, указываемаго теоремою Лопиталя состоитъ въ томъ, что онъ даетъ возможность преобразовать выраженіе, предѣлъ котораго ищутъ, въ другое, которое не можетъ стремиться къ предѣлу, отличному отъ искомаго, и представляется обыкновенно въ болѣе простомъ видѣ, чѣмъ данное, и допускаетъ такія упрощенія, послѣ которыхъ искомый предѣлъ прямо можетъ быть найденъ.

c) Теорему Лопиталя можно считать справедливою, когда отношеніе производныхъ, вмѣсто того, чтобы стремиться къ конечному предѣлу, возрастаетъ безпредѣльно. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что φ и ψ стремятся къ нулю съ приближеніемъ x къ a. Выберемъ въ окрестности a такой интервалъ, въ которомъ $\frac{\varphi'}{\psi'}$ остается постоянно больше даннаго сколь угодно большого числа l. Тогда и $\frac{\varphi}{\psi}$ для разсматриваемыхъ значеній x будетъ больше l, потому что это отношеніе для даннаго x равно отношенію $\frac{\varphi'}{\psi'}$ при нѣкоторомъ значеніи ξ въ интервалѣ (a, x)

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \quad a < \xi < x.$$

Слѣдовательно,

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty,$$

вмѣстѣ съ

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \infty.$$

Въ томъ случаѣ, когда φ и ψ возрастаютъ безпредѣльно, возьмемъ отношеніе $\frac{\psi}{\varphi}$, которое при нашемъ предположеніи будетъ стремиться къ нулю одновременно съ $\frac{\psi'}{\varphi'}$, а такъ какъ оно, въ концѣ концовъ дѣлается и остается положительнымъ *), то можно утверждать, что $\frac{\varphi}{\psi}$ стремится къ ∞, вмѣстѣ съ $\frac{\varphi'}{\psi'}$.

d) Если отношеніе производныхъ ни къ какому предѣлу не стремится, то изъ этого нельзя заключать, что не существуетъ и

*) Потому что φ и ψ стремятся къ ∞.

предѣлъ отношенія первообразныхъ функцій. Напримѣръ,

$$\lim_{x=\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x=\infty} \frac{1 - \dfrac{\sin x}{x}}{1 + \dfrac{\sin x}{x}} = 1,$$

между тѣмъ какъ отношеніе производныхъ, равное $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)$, предѣла не имѣетъ. Дѣйствительно, изъ доказательства теоремы слѣдуетъ только то, что если при безпредѣльномъ возрастаніи x или съ приближеніемъ его къ конечному предѣлу, существуетъ предѣлъ отношенія функцій φ и ψ, то существуетъ первый, а не второй изъ слѣдующихъ двухъ предѣловъ:

$$\lim_{x=\ldots} \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \quad \lim_{x=\ldots} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Число ξ, по самой сущности своей, есть нѣкоторая функція отъ x, которая вмѣстѣ съ x стремится къ ∞ или къ одному и тому же конечному предѣлу, однако не должна при этомъ принимать всѣ значенія, принимаемыя числомъ x, откуда и слѣдуетъ, что изъ существованія перваго предѣла нельзя заключать о существованіи второго. Наоборотъ, существованіе второго предѣла, какъ это и сказано въ условіяхъ теоремы, необходимо влечетъ за собою существованіе перваго, а вмѣстѣ съ тѣмъ и предѣла отношенія первообразныхъ функцій.

е) Въ обыкновенныхъ приложеніяхъ никогда не представляется случая считаться съ ограниченіями, относящимся къ общимъ корнямъ производныхъ. Но полезно указать на возможность такихъ случаевъ, когда отношеніе функцій колеблется въ то время, какъ отношеніе производныхъ стремится къ опредѣленному предѣлу. Такъ, напримѣръ, если

$$\varphi(x) = x + \sin x \cos x, \quad \psi(x) = (x + \sin x \cos x)\, e^{\sin x}$$

то ясно, что отношеніе этихъ функцій при безпредѣльномъ возрастаніи x постоянно колеблется между e и $\frac{1}{e}$; между тѣмъ отношеніе производныхъ

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{2e^{-\sin x} \cdot \cos x}{x + (2 + \sin x)\cos x},$$

очевидно, стремится къ нулю, потому что числитель остается конечнымъ, а знаменатель возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ x. Этотъ результатъ объясняется тѣмъ, что обѣ производныя $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ обращаются одновременно въ нуль, когда x проходитъ черезъ одинъ

изъ корней $\cos x$, между которыми всегда находятся числа, превосходящія любое данное число.

312. Упражненія. a) Къ какому предѣлу стремится $x^n e^{-x}$ при безпредѣльномъ возрастаніи x? При $n \leqq 0$ этотъ предѣлъ, очевидно, равенъ нулю. Если $n > 0$, то положимъ, что ν есть наибольшее неположительное число ($\nu \leqq 0$) въ ряду чиселъ $n-1$, $n-2, \ldots$ При безконечномъ x имѣемъ

$$\lim x^n e^{-x} = \lim \frac{x^n}{e^x} = n \lim \frac{x^{n-1}}{e^x} = n(n-1) \lim \frac{x^{n-2}}{e^x} = \cdots$$

$$= n(n-1)(n-2) \cdots (\nu+1) \lim \frac{x^\nu}{e^x} = 0,$$

Иными словами, e^x возрастаетъ до безконечности быстрѣе, чѣмъ какая угодно степень числа x. Замѣняя x черезъ $\log x$ (и слѣдовательно e^x черезъ x), найдемъ отсюда, что $\log x$ возрастаетъ до безконечности столь медленно, что любая его степень съ какимъ угодно показателемъ возрастаетъ медленнѣе, чѣмъ x. Этотъ результатъ можно получить и непосредственно съ помощью теоремы Лопиталя, написавъ

$$\lim \frac{\log^n x}{x} = n \lim \frac{\log^{n-1} x}{x} = \cdots = n(n-1) \cdots (\nu+1) \lim \frac{\log^\nu x}{x} = 0.$$

Предѣлъ $x^{\frac{1}{x}}$ при x безконечномъ можно найти слѣдующимъ образомъ (принимая во вниманіе непрерывность $\log x$)

$$\lim \log x^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\log x}{x} = 0, \quad \log \lim x^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Если въ полученныхъ результатахъ замѣнимъ x на $\frac{1}{x}$, то найдемъ

$$\lim_{x=0} x \log^n x = 0, \quad \lim_{x=0} x^x = 1.$$

b) Чтобы вычислить предѣлъ $\cos x \log \sin x - \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ съ приближеніемъ x къ 0, перепишемъ данное выраженіе въ видѣ

$$\log 2 \cdot \cos x + (1+\cos x) \log \cos \frac{x}{2} - (1-\cos x) \log \sin \frac{x}{2}.$$

Первый членъ имѣетъ предѣломъ $\log 2$, второй стремится къ 0, третій, очевидно, равный $-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \log \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ стремится также къ нулю, на основаніи послѣдняго результата предыдущаго упражненія. Итакъ,

$$\lim_{x=0} \left(\cos x \cdot \log \sin x - \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \log 2.$$

c) Для повѣрки полученнаго раньше (§ 270, a) результата, замѣтимъ, что съ приближеніемъ x къ 0

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1; \quad \lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

Теорема Лопиталя даетъ далѣе слѣдующіе результаты, предполагая вездѣ предѣлъ $x = 0$:

$$\lim \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{b - \sqrt{b^2 - x^2}} = \lim \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a},$$

$$\lim \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim \frac{a^x \log a - b^x \log b}{c^x \log c - d^x \log d} = \frac{\log \frac{a}{d}}{\log \frac{c}{d}};$$

$$\lim \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3},$$

$$\lim \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{6} \lim \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6},$$

$$\lim \frac{2x - 3 \sin x + x \cos x}{x^5} = \frac{1}{5} \lim \frac{2 - 2 \cos x - x \sin x}{x^4}$$

$$= \frac{1}{20} \lim \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{60},$$

$$\lim \frac{(9 + 6 \cos x) x - (14 + \cos x) \sin x}{x^7} = \frac{2}{7} \lim \frac{4 \sin \frac{x}{2} + \sin x \cos \frac{x}{2} - 3x \cos \frac{x}{2}}{x^5}$$

$$= \frac{3}{70} \lim \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{140}.$$

d) Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

или иначе

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Если для вычисленія предѣла $\frac{1}{x^2} - \operatorname{cot}^2 x$ мы напишемъ данное выраженіе въ видѣ

$$\frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{\sin x + x \cos x}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x},$$

то тотчасъ замѣтимъ (не прибѣгая къ теоремѣ Лопиталя), что первый множитель имѣетъ предѣломъ 2. а второй и третій предѣлы, какъ уже знаемъ, равны соотвѣтственно $\frac{1}{3}$ и 1. Слѣдовательно,

$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cot}^2 x\right) = \frac{2}{3}.$$

e) Мы знаемъ (§ 270, d), что

$$\lim_{x=0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Естественно является вопросъ, какъ быстро убываетъ разность $e - (1+x)^{\frac{1}{x}}$ съ приближеніемъ x къ 0, и приводитъ къ слѣдующему вычисленію

$$\lim \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = e \lim \frac{(1+x)\log(1+x)-x}{x^2}$$
$$= \frac{e}{2} \lim \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{e}{2} \lim \frac{1}{1+x} = \frac{e}{2}.$$

Такимъ же образомъ найдемъ

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}-e}{x^2} = \frac{e}{4} \lim \frac{2x+x^2-2(1+x)\log(1+x)}{x^3}$$
$$= \frac{e}{6} \lim \frac{x-\log(1+x)}{x^2} = \frac{e}{12} \lim \frac{1}{1+x} = \frac{e}{12}.$$

f) Если желаемъ найти предѣлъ

$$x - \sqrt{(x-a)(x-b)}$$

при безконечномъ x, то выгодно будетъ положить $x = \frac{1}{z}$ и приближать z къ 0. Тогда данное выраженіе приметъ видъ

$$\frac{1-\sqrt{(1-az)(1-bz)}}{z}$$

и предѣлъ его равенъ предѣлу

$$\frac{1}{2}\sqrt{(1-az)(1-bz)}\left(\frac{a}{1-az}+\frac{b}{1-bz}\right)$$

при $z=0$. Итакъ,

$$\lim_{x=\infty}\left(x-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right) = \frac{1}{2}(a+b).$$

Къ тому же результату можно придти, не прибѣгая къ теоремѣ Лопиталя, написавъ данное выраженіе въ видѣ

$$\frac{(a+b)x-ab}{x+\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \frac{a+b-\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}}$$

g) Болѣе общій результатъ состоитъ въ слѣдующемъ: если двѣ функціи отъ x, φ и ψ, возрастаютъ безпредѣльно вмѣстѣ съ x, и извѣстна такая функція f, для которой отношенія $\frac{\varphi}{f}$ и $\frac{\psi}{f}$ стремятся къ конечному, не равному нулю, предѣлу k и, кромѣ того, извѣстенъ предѣлъ l выраженія $\frac{(\varphi'-\psi')}{f'}\sqrt{f}$, то легко найти и предѣлъ $\sqrt{\varphi}-\sqrt{\psi}$. Дѣйствительно,

$$\lim\left(\sqrt{\varphi}-\sqrt{\psi}\right) = \lim \frac{\varphi-\psi}{\sqrt{\varphi}+\sqrt{\psi}} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \lim \frac{\varphi-\psi}{\sqrt{f}} = \frac{l}{\sqrt{k}}.$$

При $f=\varphi=x^2$, $\psi=(x-a)\ (x-b)$ получимъ снова предыдущій примѣръ. Аналогично этому трактуется случай корней n-ой степени, и получается

$$\lim(\sqrt[n]{\varphi}-\sqrt[n]{\psi})=\frac{1}{n}\lim\frac{\varphi'-\psi'}{x^{n-2}},$$

если предѣлъ второй части существуетъ и отношенія φ и ψ къ x^n стремятся къ 1 при безконечномъ x. Въ частности, имѣемъ

$$\lim_{x=\infty}(\sqrt[n]{x^n+ax^{n-1}+\cdots}-\sqrt[n]{x^n+bx^{n-1}+\cdots})=\frac{a-b}{n}.$$

Изслѣдованіе функцій.

313. Къ важнѣйшимъ приложеніямъ теоремы Лопиталя принадлежитъ разысканіе абсолютныхъ maxima и minima функцій (§ 301). Мы уже видѣли (§ 302), что если функція $f(x)$, имѣющая единственную производную $f'(x)$, при $x=a$ проходитъ черезъ maximum или minimum, то $f'(a)=0$. Положимъ теперь, что при $x=a$ обращаются въ нуль всѣ послѣдовательныя производныя до порядка n исключительно *), или какъ говорятъ (§ 304, b), что a есть корень $(n-1)$-ой кратности отъ $f'(x)$. Повторнымъ примѣненіемъ теоремы Лопиталя, полагая, что x стремится справа или слѣва къ a, получимъ

$$\lim\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{1}{n}\lim\frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}}=\cdots=\frac{1}{n!}\lim\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a};$$

а такъ какъ по опредѣленію $f^{(n)}(a)$

$$\lim\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}=\lim\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=f^{(n)}(a),$$

то окончательно найдемъ

$$\lim\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Замѣтимъ, что къ тому же результату мы могли бы придти, примѣняя еще одинъ разъ теорему Лопиталя, но тогда надо было бы допустить существованіе $f^{(n)}(x)$ въ смежности съ $x=a$, а для дальнѣйшихъ заключеній достаточно одного существованія $f^{(n)}(a)$. Возвращаясь къ полученному результату, замѣчаемъ, что съ приближеніемъ x къ a $f(x)-f(a)$ въ концѣ концовъ принимаетъ и сохра-

*) Т. е. $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\gtrless 0$.

няетъ знакъ числа $(x-a)^n f^{(n)}(a)$. Знакъ этого числа измѣняется вмѣстѣ со знакомъ числа $x-a$ при n нечетномъ, и не мѣняется, а совпадаетъ со знакомъ числа $f^{(n)}(a)$ при n четномъ. Изъ этого слѣдуетъ, что въ первомъ случаѣ $f(a)$ не будетъ ни maximum, ни minimum, а во второмъ навѣрно maximum или minimum. Иными словами: значенія перемѣнной x, при которыхъ $f(x)$ есть maximum или minimum, будутъ простыми корнями или корнями нечетной кратности производной $f'(x)$. Смотря по тому, будетъ ли $f^{(n)}(a)$ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, $f(a)$ будетъ minimum или maximum (при n четномъ), а въ случаѣ n нечетнаго можно сказать, что функція будетъ возрастающею или убывающею. При этомъ всегда надо помнить, что эта n-ая производная предполагается единственною. Въ противномъ случаѣ, какъ мы увидимъ, заключенія наши могутъ не оправдаться.

314. Упражненія. a) Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же данный периметръ, квадратъ имѣетъ наибольшую площадь. Дѣйствительно, если x длина одной изъ сторонъ, $2a$ данный периметръ, то площадь измѣряется числомъ $y = x(a-x)$. Производная $y' = a - 2x$ обращается въ нуль только при $x = \frac{a}{2}$, а такъ какъ вторая производная -2 число отрицательное, то при $x = \frac{a}{2}$ функція y получаетъ максимальное значеніе $\frac{a^2}{4}$. Точно такъ же, изъ всѣхъ прямоугольниковъ, имѣющихъ данную площадь a^2, квадратъ имѣетъ наименьшій периметръ. Дѣйствительно, если x длина одной изъ сторонъ и $2y$ периметръ, то $y = x + \frac{a^2}{x}$, $y' = 1 - \frac{a^2}{x^2}$, $y'' = \frac{2a^2}{x^3}$. Первая производная обращается въ нуль при $x = a$ и при $x = -a$. При первомъ значеніи $y'' > 0$, при второмъ $y'' < 0$, и функція y имѣетъ minimum $2a$ при $x = a$ и maximum $(-2a)$ при $x = -a$. Но лишь первое рѣшеніе даетъ отвѣтъ на вопросъ, такъ какъ онъ требуетъ, чтобы x было больше 0.

b) Предложимъ себѣ построить коробку наибольшаго объема изъ четырехугольнаго листа, вырѣзывая на углахъ его четыре равныхъ квадрата. Если a и b обозначаютъ длину и ширину листа, x высоту коробки, то ея объемъ выразится числомъ

$$y = x(a-2x)(b-2x) = abx - 2(a+b)x^2 + 4x^3.$$

Приравнивая нулю первую производную $y' = ab - 4(a+b)x + 12x^2$, получимъ

$$x = \tfrac{1}{6}(a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}).$$

Вторая производная $y'' = -4(a+b) + 24x$ принимаетъ тогда значеніе

$$\pm 4\sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Чтобы получить maximum надо здѣсь удержать знакъ $-$, т. е. взять $x = \frac{1}{6}(a+b) - \sqrt{a^2 - ab + b^2}$. Это число всегда заключается между $\frac{1}{6}a$ и $\frac{1}{6}b$. Второе значеніе для x не даетъ рѣшенія вопроса, потому что это значеніе больше половины наименьшаго изъ двухъ измѣреній листа.

c) Если хотимъ изслѣдовать функцію $y = x^{\frac{1}{x}}$ въ интервалѣ $(0, \infty)$, то можемъ начать съ того, что если положимъ $x = \frac{1}{z}$ и будемъ приближать x къ 0 справа, то z будетъ стремиться къ ∞, $y = \frac{1}{z^z}$ и $\lim y = 0$. При $x = 1$ $y = 1$, а при безпредѣльномъ возрастаніи x y стремится къ тому же значенію 1 (§ 312, a). Отсюда понятно, что при измѣненіи x отъ 1 до ∞, y проходитъ черезъ minimum или maximum, и не трудно предусмотрѣть, что y пройдетъ именно черезъ maximum, потому что при $x > 1$ и $y > 1$. Чтобы въ этомъ вполнѣ удостовѣриться, замѣтимъ, что производная

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)$$

положительна при $x < e$ и отрицательна при $x > e$, и что функція изъ возрастающей становится убывающею при переходѣ x черезъ e. Максимальное ея значеніе при $x = e$ равно $e^{\frac{1}{e}} = 1{,}444667\ldots$ Если бы мы хотѣли удостовѣриться при помощи изслѣдованія y'', что при $x = e$, $x^{\frac{1}{x}}$ будетъ maximum, а не minimum, то надо было бы замѣтить, что изъ

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - \log x}{x^2} \text{ слѣдуетъ } \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = -\frac{3 - 2\log x}{x^3}.$$

Полагая $x = e$, $y = e^{\frac{1}{e}}$, $y' = 0$, получимъ $y'' = -e^{\frac{1}{e}-3}$, чего и достаточно, чтобы утверждать, что $e^{\frac{1}{e}}$ есть maximum функціи $x^{\frac{1}{x}}$.

d) Предложимъ себѣ найти основанія тѣхъ логариѳмическихъ системъ, въ которыхъ логариѳмъ нѣкотораго числа можетъ равняться самому числу. Пусть a искомое основаніе и $\log x$ логариѳмъ x по этому основанію. Дѣло сводится къ изслѣдованію вопроса, можетъ ли функція $y = x - \log x$ обратиться въ нуль при нѣкоторомъ значеніи x. Ясно, что какъ при достаточно маломъ положительномъ x, такъ и при x достаточно большомъ y будетъ положительнымъ. Слѣдовательно, чтобы функція y могла обратиться въ нуль, необходимо и достаточно, чтобы наименьшее ея значеніе было меньше или равно 0. Этотъ minimum соотвѣтствуетъ тому значенію x, при которомъ $y' = 1 - \frac{\operatorname{Log} e}{x} = 0$, т. е. $x = \operatorname{Log} e$ и, чтобы удостовѣриться, что здѣсь будемъ имѣть именно minimum, а не maximum, достаточно замѣтить, что при $x < \operatorname{Log} e$ y убывающая, а при $x > \operatorname{Log} e$ y возрастающая функція. Итакъ, наименьшее значеніе y равно $\operatorname{Log} e - \operatorname{Log}(\operatorname{Log} e) = \operatorname{Log}\left(\frac{e}{\operatorname{Log} e}\right)$. Чтобы это число было меньше или равно 0, необходимо, чтобы было $e \leq \operatorname{Log} e$, т. е. $1 \leq \operatorname{Log} e^{\frac{1}{e}}$ и, слѣдовательно, $a \leq e^{\frac{1}{e}}$.

e) Какимъ условіямъ должны удовлетворять числа p и q, чтобы трехчленъ $x^3 + px + q$ обращался въ нуль при трехъ различныхъ вещественныхъ значеніяхъ x? Чтобы функція $y = x^3 + px + q$ могла обращаться въ 0 три раза, когда x измѣняется отъ $-\infty$ до ∞, прежде всего необходимо (§ 304, b), чтобы производная $y' = 3x^2 + p$ могла обращаться въ нуль при двухъ вещественныхъ различныхъ значеніяхъ x. Это

требуетъ, чтобы p было меньше 0. Предполагая это условіе выполненнымъ, замѣтимъ, что въ первомъ и третьемъ изъ трехъ интерваловъ

$$\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right), \left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \sqrt{-\frac{p}{3}}\right), \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}, \infty\right)$$

$y' > 0$, а въ среднемъ $y' < 0$ *). Поэтому въ каждомъ изъ этихъ интерваловъ функція y можетъ обращаться въ нуль только одинъ разъ, а для того, чтобы она дѣйствительно обращалась въ 0 въ такомъ интервалѣ, необходимо и достаточно, чтобы ея значенія на границахъ интервала были числами разныхъ знаковъ. Такъ какъ на границахъ средняго интервала y принимаетъ значенія

$$-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q, \quad \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q$$

(maximum и minimum въ абсолютномъ смыслѣ), то прежде всего необходимо, чтобы эти числа были разныхъ знаковъ, т. е. чтобы было

$$\left(-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right)\left(\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right) < 0, \text{ или } 4p^3+27q^2 < 0.$$

Это условіе и достаточно, потому что, когда оно выполнено, то непремѣнно $p < 0$, и функція y, убывающая въ среднемъ интервалѣ, имѣетъ на нижней его границѣ знакъ $+$, а на верхней $-$, а потому обращается въ нуль и въ другихъ двухъ интервалахъ (XXIX).

f) Докажемъ, что въ эллипсѣ разстояніе отъ центра до любой нормали не превосходитъ разности полуосей. Уравненію эллипса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ можно удовлетворить, положивъ $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, гдѣ φ измѣняется отъ 0 до 2π. Чтобы найти угловой коэффиціентъ касательной (§ 293), т. е. y', гдѣ y есть функція отъ x, опредѣляемая уравненіемъ эллипса **), замѣчаемъ, что изъ этого уравненія имѣемъ

$$b^2x+a^2yy'=0, \quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}.$$

Поэтому уравненіе нормали будетъ

$$y-b\sin\varphi=\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}(x-a\cos\varphi),$$

т. е. $ax\sin\varphi-by\cos\varphi=(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi$. Слѣдовательно, разстояніе отъ центра до нормали будетъ

$$h=\frac{(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}.$$

Теперь надо взять производную отъ h по φ, и приравнять ее нулю. Но удобнѣе будетъ сперва замѣтить, что

$$\left(\frac{a^2-b^2}{h}\right)^2=\frac{a^2}{\cos^2\varphi}+\frac{b^2}{\sin^2\varphi}=a^2+b^2+a^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2\operatorname{cot}^2\varphi,$$

---

*) $y'=3x^2+p=3\left[x+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right]\left[x-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$.

**) Т. е. такая, при которой функція $b^2x^2+a^2y^2$ равна постоянному a^2b^2, а слѣдовательно, производная ея $2[b^2x+a^2yy']$ равна нулю.

откуда видно, что разысканіе наибольшаго значенія h сводится къ разысканію наименьшаго значенія функціи $a^2\operatorname{tg}^2\varphi + b^2\operatorname{cotg}^2\varphi$, т. е. суммы двухъ перемѣнныхъ величинъ, произведеніе которыхъ равно постоянному числу. А этотъ вопросъ былъ (въ другой лишь формѣ) рѣшенъ въ первомъ упражненіи *), и мы можемъ утверждать, что maximum h будетъ тогда, когда $a^2\operatorname{tg}^2\varphi = b^2\operatorname{cotg}^2\varphi = a\,b$, т. е. при $\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, а тогда

$$\left(\frac{a^2-b^2}{h}\right)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b = (a+b)^2, \text{ слѣдовательно, } h = a - b.$$

g) Можно доказать, что свѣтъ употребляетъ наикратчайшее время для перехода отъ одной точки къ другой, когда эти точки лежатъ въ разнородныхъ средахъ, отдѣленныхъ одна отъ другой плоскостью. Въ самомъ дѣлѣ, пусть a и b будутъ разстоянія данныхъ точекъ, лежащихъ въ разнородныхъ средахъ, отъ раздѣляющей плоскости; φ — уголъ паденія, ψ — уголъ преломленія; nv и v' скорости свѣта въ первой и второй средѣ. Время, потребное для перехода отъ одной точки къ другой, будетъ равно

$$t = \frac{1}{v}\left[\frac{a}{n\cos\varphi} + \frac{b}{\cos\psi}\right].$$

Углы φ и ψ связаны соотношеніемъ

$$a\operatorname{tg}\varphi + b\operatorname{tg}\psi = \text{const.} \quad \text{(XXX)}.$$

откуда, взявъ производную по φ, получимъ

$$\frac{a}{\cos^2\varphi} + \frac{b\,\psi'}{\cos^2\psi} = 0.$$

Тогда будемъ имѣть

$$t' = \frac{1}{v}\left(\frac{a\sin\varphi}{n\cos^2\varphi} + \frac{b\sin\psi}{\cos^2\psi}\psi'\right) = \frac{a(\sin\varphi - n\sin\psi)}{nv\cos^2\varphi}$$

и, слѣдовательно, чтобы t' обратилось въ нуль, нужно, чтобы $\sin\varphi/\sin\psi = n$. А это и есть извѣстный законъ преломленія, открытый Декартомъ и установленный Ферма и Лейбницемъ, какъ частный случай общаго закона экономіи, управляющаго проявленіями всѣхъ законовъ природы, даже такихъ, которые кажутся недоступными метематическимъ изслѣдованіямъ [1]).

h) Въ геометрическихъ приложеніяхъ часто встрѣчается, что искомый maximum (или minimum) будетъ относительнымъ (§ 301) и соотвѣтствуетъ нѣкоторому опредѣленному интервалу, въ которомъ принуждена оставаться независимая перемѣнная въ силу условій задачи. Тогда вполнѣ возможно, что производная въ нуль не обращается, и изслѣдованія, подобныя предыдущимъ, дѣлаются безплодными. Поэтому, когда независимая перемѣнная не можетъ выйти изъ нѣкотораго интервала, надо или измѣнить выборъ независимой перемѣнной, или прямо испытать, не получится ли maximum или minimum на границахъ интервала, могущій дать отвѣтъ на поставленный вопросъ, не будучи maximum или minimum въ абсолютномъ смыслѣ. Весьма простой примѣръ даетъ разысканіе наибольшей или наи-

---

*) Гдѣ искали minimum функціи $x + \frac{a^2}{x}$.

[1]) См. объ этомъ интересную главу о направленіи движенія въ „Основныхъ началахъ". Г. Спенсера.

меньшей изъ всѣхъ хордъ круга, имѣющихъ одинъ неподвижный конецъ A и одинъ подвижный M. А priori ясно, что minimum хорды r будетъ $r=0$, когда M совпадетъ съ A, и maximum $r=2a$, гдѣ a радіусъ круга, когда M совпадетъ съ точкою B, діаметрально противоположною съ A. Если выберемъ AB за ось абсциссъ и A за начало координатъ, то будемъ имѣть $r^2=2ax$, откуда $rr'=2a$ и оказывается, что r' не обращается въ нуль ни въ A, ни въ B. Это происходитъ отъ того, что перемѣнная x должна оставаться въ интервалѣ $(0, 2a)$ и что искомые minimum и maximum получаются какъ разъ на границахъ *). Если выберемъ за независимую перемѣнную уголъ $\theta=\widehat{MAB}$, то $r=2a\cos\theta$, $r'=-2a\sin\theta$, и при $\theta=0$ получимъ только maximum $r=2a$. Это объясняется тѣмъ, что θ остается всегда въ интервалѣ $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, на границахъ котораго и будетъ minimum, а maximum соотвѣтствуетъ значенію $\theta=0$, лежащему внутри интервала. Этотъ maximum будетъ, слѣдовательно, и абсолютнымъ, и r' должна поэтому обращаться въ нуль. Всякое затрудненіе исчезаетъ, если точка A передвинется по направленію AB и придетъ въ разстояніе b отъ центра. Тогда $r^2-2br\cos\theta+b^2=a^2$, откуда, взявъ производную, и полагая $r'=0$, получимъ $\sin\theta=0$, т. е. $\theta=0$, $r=a+b$, или $\theta=\pi$ и $r=a-b$. Взявъ еще разъ производную, найдемъ

$$r''=\frac{br\cos\theta}{b\cos\theta-r}=\frac{\pm b(a\pm b)}{\pm b-(a\pm b)}=\mp\frac{b}{a}(a\pm b)\gtrless 0,$$

откуда видимъ, что $a+b$ есть maximum, а $a-b$ minimum r.

i) Положимъ, что $\varphi(x)$ функція, непрерывная въ смежности съ $x=0$, и разрывная 1-го рода при $x=0$, при чемъ $\varphi(-0)<0$, $\varphi(+0)>0$. Такова, напримѣръ, $\varphi(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$, для которой $\varphi(-0)=-1$, $\varphi(+0)=1$. Функція $f(x)=x^2\varphi(x)$ при $x=0$ не будетъ ни maximum, ни minimum, потому что въ смежности съ нулемъ функція $\varphi(x)$ непрерывна и имѣетъ одинаковый знакъ съ x; то же самое можно сказать и о функціи $f(x)$, которая, слѣдовательно, и слѣва и справа отъ нуля возрастающая. Между тѣмъ

$$f'(0)=\lim_{x=0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x=0}x\varphi(x)=0.$$

Что касается $f''(0)$, то она можетъ не существовать; если же она существуетъ, то

$$f''(0)=\lim_{x=\pm 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=2\lim_{x=\pm 0}\frac{f(x)}{x^2}=2\lim_{x=\pm 0}\varphi(x)=2\varphi(\pm 0)\gtrless 0,$$

потому что, по теоремѣ Лопиталя,

$$x\lim_{x=\pm 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x=\pm 0}\frac{f'(x)}{2x}.$$

---

*) Производная r' всегда больше 0, r постоянно возрастаетъ, когда x идетъ отъ 0 до $2a$, слѣдовательно, при $x=0$ получается minimum $r=0$, а при $x=2a$ получается maximum $r=2a$.

Во всякомъ случаѣ $f''(0)$ не равна нулю. Итакъ, при $x=0$ первая производная отъ $f(x)$ равна нулю, вторая не равна нулю, а между тѣмъ $f(0)$ ни maximum, ни minimum. Это объясняется тѣмъ, что $f'(x)$ не имѣетъ единственной производной $f''(x)$.

j) Въ заключеніе изслѣдуемъ характеръ измѣненія функціи $\Gamma(x)$, опредѣленной въ § 252. Положимъ сперва, что x измѣняется отъ 0 до ∞. Изъ формулы Вейерштрасса (§ 252, b) при помощи логариѳмированія получаемъ [полагая $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$]

$$(A)\qquad \log\Gamma(x) = -\log x - \mathbf{C}x + \sum_1^{\infty}{}'\left[\frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

Въ § 285 было дано правило для разысканія производной суммы конечнаго числа слагаемыхъ; впослѣдствіи будетъ доказано, что при извѣстныхъ условіяхъ его можно примѣнять и при безконечномъ числѣ слагаемыхъ. Въ данномъ случаѣ эти условія выполнены; примѣняя упомянутое правило, беремъ производную отъ $\log\Gamma(x)$ и находимъ

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \mathbf{C} + \sum_1^{\infty}{}'\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) = -\mathbf{C} + \sum_1^{\infty}{}'\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right),$$

откуда получаемъ

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \mathbf{C} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x+2} + \cdots.$$

Правая часть постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ x; при $x=1$ она принимаетъ значеніе $0<\mathbf{C}$, а при $x=2$ значеніе $1>\mathbf{C}$, слѣдовательно, она только одинъ разъ дѣлается равною $\mathbf{C}$ при нѣкоторомъ значеніи ξ между 1 и 2. Это число ξ и будетъ единственнымъ корнемъ функціи $\Gamma'(x)$. Такъ какъ при $x<\xi$ $\Gamma'(x)<0$, а при $x>\xi$ $\Gamma'(x)>0$, то $\Gamma(x)$ сперва убываетъ въ интервалѣ $(0,\xi)$, а затѣмъ возрастаетъ въ интервалѣ (ξ,∞), слѣдовательно, $\Gamma(\xi)$ есть minimum функціи $\Gamma(x)$ въ интервалѣ $(0,\infty)$. Къ тому же заключенію приводитъ равенство

$$\frac{\Gamma''(\xi)}{\Gamma(\xi)} = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi+1)^2} + \frac{1}{(\xi+2)^2} + \cdots > 0,$$

(получаемое изъ предыдущаго, если возьмемъ опять производныя и примемъ во вниманіе, что $\Gamma'(\xi)=0$). Значеніе корня ξ, лежащаго между 1 и 2, можно вычислить весьма точно, съ помощью пріемовъ, которые будутъ изложены въ книгѣ пятой, и нетрудное вычисленіе даетъ

$$\xi = 1{,}4616321\ldots,\quad \Gamma(\xi) = 0{,}8856032\ldots$$

Когда x возрастаетъ отъ ξ до ∞, то $\Gamma(x)$ возрастаетъ безпредѣльно, потому что $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$. Она также возрастаетъ, когда x убываетъ отъ ξ до 0, и притомъ безпредѣльно, потому что

$$\lim_{x=0} x\,\Gamma(x) = \lim_{x=0}\Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1.$$

k) Теперь предположимъ x отрицательнымъ и воспользуемся формулою

$$(B)\qquad \Gamma(x) = \frac{(-1)^n\,\Gamma(\varrho)}{(1-\varrho)(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(n-\varrho)},$$

гдѣ $\varrho = x - [x]$, и $[x] = -n$ (XXXI). Отсюда видно, что значенія $\Gamma'(x)$ при $x < 0$ зависятъ отъ ея значеній въ интервалѣ $(0, 1)$, изъ котораго исключены границы 0 и 1. Изъ той же формулы видно, что въ интервалахъ $(-1, 0)$, $(-2, -1)$, $(-3, -2)\ldots$ $\Gamma(x)$ попеременно положительна и отрицательна и въ смежности (окрестности) съ границами $0, -1, -2, -3, \ldots$ безконечно велика по абсолютной величинѣ. Отсюда уже можно предвидѣть, что въ каждомъ интервалѣ $(-n, -n+1)$ $\Gamma(x)$, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ проходитъ черезъ maximum или minimum, смотря по тому, будетъ ли n четное или нечетное число. Такой maximum или minimum получится при ϱ равномъ корню уравненія

$$\frac{\Gamma'(\varrho)}{\Gamma(\varrho)} + \frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{2-\varrho} + \cdots + \frac{1}{n-\varrho} = 0.$$

Когда ϱ возрастаетъ отъ 0 до 1, лѣвая часть уравненія постоянно возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, и потому только одинъ разъ обращается въ 0 при нѣкоторомъ опредѣленномъ значеніи $\varrho = \varrho_n$, которое и опредѣляется такимъ образомъ, какъ нѣкоторая функція отъ n. Итакъ, въ каждомъ интервалѣ $(-n, -n+1)$ существуетъ только одинъ maximum или одинъ minimum функціи $\Gamma(x)$, соотвѣтствующій значенію $x_n = -n + \varrho_n$. Далѣе, изъ неравенства

$$-\frac{\Gamma'(\varrho_n)}{\Gamma(\varrho_n)} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

видно, что правая, а слѣдовательно, и лѣвая часть при безпредѣльномъ возрастаніи n безпредѣльно возрастаетъ. Поэтому ϱ_n должно стремиться къ нулю. Такъ какъ, кромѣ того,

$$\lim_{x=0} x\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -1,$$

то будемъ имѣть

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\varrho_n}{1-\varrho_n} + \frac{\varrho_n}{2-\varrho_n} + \cdots + \frac{\varrho_n}{n-\varrho_n}\right) = 1,$$

а такъ какъ сумма въ скобкахъ заключается между

$$\varrho_n H_n \quad \text{и} \quad \frac{\varrho_n}{1-\varrho_n} + \varrho_n H_{n-1}$$

$\left(\text{гдѣ } H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$, то отсюда слѣдуетъ, что $\lim_{n=\infty} \varrho_n H_n = 1$ или $\lim_{n=\infty} \varrho_n \log n = 1$. Принявъ это во вниманіе и замѣчая, что

$$|\Gamma(x_n)| < \frac{\Gamma(\varrho_n + 1)}{(1-\varrho_n)\varrho_n \log n} \cdot \frac{\log n}{(n-1)!},$$

видимъ, что въ правой части первый множитель стремится къ 1, а второй къ 0. Слѣдовательно, $\lim_{n=\infty} \Gamma(x_n) = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что $\Gamma(x)$ принимаетъ всякое значеніе, отличное отъ нуля (безконечное число разъ) [1]. Иными словами, уравненіе $\Gamma(x) = k$, не имѣющее рѣшенія при $k = 0$, при всякомъ k, не равномъ нулю, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

---

[1]) Въ „Traité élementaire des series“ par M, Godefroy p. 250 можно видѣть графическое изображеніе функціи $\Gamma(x)$.

РАЗЛОЖЕНІЯ ВЪ РЯДЫ.

Ряды функцій.

315. Теперь мы спеціально займемся функціями, которыя опредѣляются безконечными рядами. Положимъ, что данъ рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, члены котораго суть функціи отъ перемѣннаго числа x. Значенія x, при которыхъ рядъ будетъ сходящійся, могутъ образовать одинъ или нѣсколько интерваловъ, въ которыхъ сумма ряда будетъ опредѣлена, какъ нѣкоторая функція отъ x. Когда разсматривается нѣкоторый интервалъ (a, b), въ которомъ рядъ сходящійся, то и остатокъ ряда $\varphi_n(x)$, т. е. сумма ряда, получаемаго изъ даннаго черезъ отбрасываніе первыхъ n его членовъ, будетъ также функція отъ x, опредѣленная въ томъ же интервалѣ. Мы знаемъ (§ 180), что при безпредѣльномъ возрастаніи n остатокъ стремится къ нулю. Слѣдовательно (§ 122, b), когда задано положительное и сколь угодно малое число ε, можно указать, при всякомъ данномъ значеніи x въ интервалѣ (a, b), такое число ν, что абсолютная величина $\varphi_n(x)$ будетъ оставаться меньше ε, когда n будетъ больше ν *). Если возможно опредѣлить число ν независимо отъ x, то рядъ называютъ равномѣрно сходящимся. Иными словами, положимъ, что соотвѣтственно каждому значенію x будемъ выбирать наименьшее значеніе ν (которое предполагается цѣлымъ числомъ), удовлетворяющее поставленному условію; тогда можно сказать, что ν есть нѣкоторая функція отъ x, опредѣленная въ интервалѣ (a, b). Если эта функція будетъ конечною въ данномъ интервалѣ, какъ бы ни было выбрано ε, то она имѣетъ въ немъ (§ 256) всрхнюю границу (въ данномъ случаѣ эта граница въ то же время будетъ и максимумъ ν); очевидно, для всякаго n, большаго этой верхней границы, всегда будемъ имѣть $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$, каково бы ни было данное значеніе x въ интервалѣ (a, b). Въ этомъ случаѣ сходимость будетъ равномѣрною. Но можетъ случиться, что при нѣкоторомъ прилично выбранномъ значеніи ε (и a fortiori для всѣхъ меньшихъ его значеній), функція ν въ данномъ интервалѣ не будетъ конечною. Тогда невозможно найти такое значеніе n, одно и то же для всѣхъ значеній x въ (a, b), начиная съ котораго $|\varphi_n(x)|$ оставалось бы всегда меньше ε. Въ этомъ случаѣ сходимость будетъ неравномѣрною.

316. Теорема I. Для равномѣрной сходимости ряда функцій отъ x въ данномъ интервалѣ необходимо и достаточно, чтобы остатокъ $\varphi_n(x)$ стремился къ нулю и тогда, когда будемъ произвольнымъ образомъ измѣнять x въ данномъ интервалѣ вмѣстѣ съ n.

---

*) Т. е. начиная отъ $n = \nu + 1$.

Изъ самого опредѣленія равномѣрной сходимости вытекаетъ, что если рядъ равномѣрно сходящійся, то всегда $\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = 0$, какова бы ни была послѣдовательность значеній $x_1, x_2, x_3, \ldots$ получаемыхъ числомъ x въ данномъ интервалѣ. Условіе необходимо; чтобы убѣдиться въ его достаточности, стоитъ только доказать, что если рядъ будетъ неравномѣрно сходящійся, то въ интервалѣ (a, b) найдется такая послѣдовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$, для которой $\lim \varphi_n(x)$ не равенъ 0. При сдѣланномъ предположеніи (неравномѣрной сходимости ряда) опредѣленная въ предыдущемъ § функція ν не будетъ конечна при нѣкоторомъ достаточно маломъ данномъ числѣ ε. Слѣдовательно, можно найти послѣдовательность $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ значеній функціи ν, возрастающихъ безпредѣльно, соотвѣтствующихъ значеніямъ x, которыя можно обозначить черезъ x_α, x_β, $x_\gamma, \ldots$ Какъ бы мы ни выбирали другія значенія x_n, остатокъ $\varphi_n(x)$ не можетъ стремиться къ нулю, потому что при $n = \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ всегда будетъ $|\varphi_n(x_n)| \geqq \varepsilon$ *).

317. Примѣры. a) Рядъ

$$(1) \qquad (1-x) + (x - \tfrac{1}{2}x^2) + (\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3) + (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4) \cdots$$

равномѣрно сходящійся въ интервалѣ $(-1, +1)$, потому что абсолютная величина остатка $\frac{x^n}{n}$ будетъ меньше ε, когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$, числа независящаго отъ x. Не то будетъ для ряда

$$(2) \qquad (1-x) + (x - x^2) + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \cdots,$$

сходящагося въ томъ же интервалѣ $(-1, +1)$, за исключеніемъ нижней границы. (При $x = 1$ сумма ряда, очевидно, равна 0). При $x < 1$ остатокъ ряда равенъ x^n, и нельзя найти такого числа ν, чтобы при $n > \nu$ $|x^n|$ было меньше ε для всѣхъ значеній x въ данномъ интервалѣ. Дѣйствительно, такъ какъ x можетъ подходить къ 1 какъ угодно близко, то можно положить $x = 1 - \frac{1}{n}$, и остатокъ $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ не будетъ стремиться къ 0 при n безконечномъ (а къ предѣлу $\frac{1}{e}$). Съ другой стороны, ясно, что рядъ будетъ равномѣрно сходящимся во всякомъ интервалѣ, заключающемся цѣликомъ внутри $(-1, +1)$. (XXXII.)

b) Рядъ $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, сходящійся въ интервалѣ $(-1, +1)$ за исключеніемъ границъ, будетъ равномѣрно сходя-

---

*) Когда мы говоримъ, что значеніе $\nu = \alpha$ соотвѣтствуетъ числу x_α, то это значитъ, что при $n \geqq \alpha + 1$, $|\varphi_n(x_\alpha)| < \varepsilon$, а при $n = \alpha$ неравенство еще не удовлетворяется, т. е. $|\varphi_\alpha(x_\alpha)| \geqq \varepsilon$. Это слѣдуетъ изъ опредѣленія числа ν.

щійся въ интервалѣ $(-a, +a)$, гдѣ $a<1$ и какъ угодно близко къ 1. Дѣйствительно, задавъ по произволу ε, опредѣлимъ ν такъ, чтобы было $a^\nu \leqq (1-a)\varepsilon$, тогда при $n>\nu$ $\left|\frac{x^n}{1-x}\right|<\varepsilon$ при всякомъ x, для котораго $|x|<a$. То же самое можно сказать о рядѣ $1+2x+3x^2+\ldots$, сходящемся въ томъ же интервалѣ (§ 247, a). Для того, чтобы остатокъ ряда былъ меньше ε по абсолютной величинѣ, достаточно опредѣлить ν такъ, чтобы $(\nu+1)a^\nu$ было не больше $(1-a)^2\varepsilon$, а опредѣленіе ν подъ этимъ условіемъ всегда возможно, потому что $\nu^p a^\nu$ при всякомъ p стремится къ нулю при ν безконечномъ *). (§ 312, a.)

c) Сумма n первыхъ членовъ ряда

$$(3)\qquad (x-xe^{-x^2})+(xe^{-x^2}-2xe^{-2x^2})+(2xe^{-2x^2}-3xe^{-3x^2})+\cdots$$

равна $x-nxe^{-nx^2}$ и стремится къ предѣлу x при n безконечномъ. Слѣдовательно, рядъ будетъ сходящимся при всякомъ x. Но онъ неравномѣрно сходящійся въ интервалѣ, содержащемъ въ себѣ значеніе $x=0$. Дѣйствительно, при $x=\frac{1}{n}$ остатокъ ряда nxe^{-nx^2} равенъ $e^{-\frac{1}{n}}$ и не стремится къ 0 при возрастаніи n до ∞. Рядъ

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(1+2x)}+\frac{x}{(1+x)(1+2x)(1+3x)}+\cdots$$

также сходящійся при $x\geqq 0$, потому что при $x>0$ сумма $S_n=1-\frac{1}{1+nx}$ имѣетъ предѣломъ 1, а при $x=0$ равна нулю. Но рядъ неравномѣрно сходящійся въ интервалѣ, нижняя граница котораго есть нуль, потому что при $x=\frac{1}{n}$ остатокъ ряда дѣлается равнымъ $\frac{1}{2}$ и къ нулю не стремится. Съ другой стороны, рядъ будетъ равномѣрно сходящимся во всякомъ интервалѣ, нижняя граница котораго $a>0$. Достаточно взять $n>\frac{1-\varepsilon}{a\varepsilon}$, т. е. больше числа, независящаго отъ x, чтобы остатокъ ряда былъ меньше ε.

318. Теорема II. Если рядъ абсолютныхъ величинъ членовъ даннаго ряда функцій будетъ равномѣрно сходящимся въ данномъ интервалѣ, то рядъ, полученный путемъ умноженія членовъ даннаго ряда на функціи, остающіяся конечными въ данномъ интервалѣ, будетъ также абсолютно и равномѣрно сходящимся въ томъ же интервалѣ.

---

*) Для даннаго ряда

$$S_\nu=\frac{1-(\nu+1)x^\nu+\nu x^{\nu+1}}{(1-x)^2},\quad r_\nu(x)=\frac{(\nu+1)x^\nu-\nu x^{\nu+1}}{(1-x)^2}<\frac{(\nu+1)x^\nu}{(1-x)^2}.$$

Пусть $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ данный рядъ въ интервалѣ (a, b); v_1, v_2, v_3, ... функціи, которыхъ абсолютныя величины въ интервалѣ (a, b) не превосходятъ даннаго числа l. Рядъ $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots$ будетъ абсолютно сходящійся, потому что абсолютныя величины его членовъ не превосходятъ соотвѣтствующихъ членовъ сходящагося ряда $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$, умноженныхъ на l. Когда задано какое угодно положительное число ε, то, по условію, можно найти такое число ν, независимое отъ x, чтобы при $n > \nu$ было

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{l}$$

и a fortiori

$$|u_{n+1}v_{n+1} + u_{n+2}v_{n+2} + u_{n+3}v_{n+3} + \cdots| < \varepsilon.$$

Слѣдовательно, рядъ $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots$ будетъ и равномѣрно сходящимся.

319. Слѣдствія. a) Рядъ, получаемый отъ умноженія постоянныхъ членовъ абсолютно сходящагося ряда на функціи, значенія которыхъ въ данномъ интервалѣ остаются конечными, будетъ абсолютно и равномѣрно сходящимся въ этомъ интервалѣ. Стоитъ только замѣнить функціи u_1 въ предыдущей теоремѣ постоянными числами и замѣтить, что рядъ постоянныхъ членовъ по необходимости равномѣрно сходящійся, чтобы убѣдиться въ справедливости вышесказаннаго.

b) Рядъ функцій будетъ абсолютно и равномѣрно сходящимся въ данномъ интервалѣ, если рядъ верхнихъ границъ абсолютныхъ величинъ членовъ даннаго ряда есть сходящійся рядъ. Положимъ, что данъ рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$; замѣнимъ каждый его членъ $u_n(x)$ верхнею границею μ_n функціи $|u_n(x)|$ въ данномъ интервалѣ. Если рядъ положительныхъ членовъ $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \ldots$ сходящійся, то сходимость его, конечно, абсолютная. Данный рядъ получается черезъ умноженіе членовъ послѣдняго ряда на функціи $v_n = \dfrac{u_n(x)}{\mu_n}$, а такъ какъ $|v_n| \leqq 1$, то теорема доказана.

320. Примѣры. a) Если a положительное число, меньшее 1, то, какъ извѣстно, рядъ $1 + a + a^2 + \cdots$ сходящійся, а этого достаточно, на основаніи второго слѣдствія, чтобы скорѣе (ср. § 317, b) придти къ заключенію что рядъ $1 + x + x^2 + \cdots$ абсолютно и равномѣрно сходящійся въ интервалѣ $(-a, a)$, или, такъ какъ a можно взять сколь угодно близкимъ къ 1, въ интервалѣ $(-1, +1)$ за исключеніемъ границъ. То же самое справедливо и относительно ряда $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$ Въ самомъ дѣлѣ, a^n и na^{n-1} при всякомъ n будутъ наибольшими значеніями абсолютныхъ величинъ функцій x_n и nx^{n-1} въ интервалѣ $(-a, +a)$ (т. е. верхними ихъ границами).

b) Въ силу перваго или второго слѣдствія, если рядъ $a_1+a_2+a_3+\cdots$ абсолютно сходящійся рядъ, то рядъ

$$a_1 \sin(b_1 x) + a_2 \sin(b_2 x) + a_3 \sin(b_3 x) + \cdots$$

абсолютно и равномѣрно сходящійся во всякомъ интервалѣ, каковы бы ни были числа b_1, b_2, b_3, ... Такъ, напримѣръ, при $p > 1$, ряды

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nx}{n^p}.$$

абсолютно и равномѣрно сходящіеся. При $p = 1$ теоремы, на которыхъ основано это заключеніе, уже не имѣютъ мѣста, и приходится непосредственно изслѣдовать сходимость данныхъ рядовъ.

c) Разсмотримъ нѣсколько болѣе общій рядъ

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots.$$

Мы уже знаемъ (§ 218, i), что этотъ рядъ при всякомъ x сходящійся, даже тогда, когда a_1, a_2, a_3, ... образуютъ расходящійся рядъ, лишь бы эти числа постоянно убывали и стремились къ нулю, что какъ разъ и имѣетъ мѣсто при $a_n = \frac{1}{n}$. Такъ какъ рядъ не измѣнится, если прибавимъ къ x или отнимемъ отъ него 2π, то можно ограничиться значеніями x въ интервалѣ $(0,\ 2\pi)$. Извѣстно, что

$$\sin(n+1)x + \sin(n+2)x + \cdots + \sin(n+p)x = \frac{\sin\frac{px}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \sin\left(n + \frac{p+1}{2}\right)x.$$

Отсюда слѣдуетъ, что, выбравъ сколь угодно малое положительное число α, и взявъ x въ интервалѣ $(\alpha,\ 2\pi - \alpha)$, будемъ имѣть

$$|\sin(n+1)x + \sin(n+2)x + \cdots + \sin(n+p)x| < \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Слѣдовательно (§ 192),

$$|\varphi_n(x)| < \frac{a_n}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому, если задано положительное число ε и число ν выбрано достаточно большимъ, чтобы было $a_\nu < \varepsilon \sin\frac{\alpha}{2}$, то при $n > \nu$ $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ и, слѣдовательно, данный рядъ будетъ равномѣрно сходящимся во всякомъ интервалѣ, не содержащемъ въ себѣ числа, кратнаго отъ 2π.

321. Теорема III. Если для $x = a$ члены нѣкотораго равномѣрно сходящагося ряда имѣютъ конечные предѣлы, то и сумма этого ряда имѣетъ конечный предѣлъ, равный суммѣ предѣловъ членовъ ряда.

а) Для опредѣленности разсмотримъ предѣлы справа отъ a, и выдѣлимъ сколь угодно малый интервалъ $(a,\ a+h)$ изъ того интервала, въ которомъ рядъ равномѣрно сходящійся. На основаніи этой сходимости всегда можно по данному положительному, сколь угодно малому числу ε опредѣлить число ν (не зависящее отъ h) такъ, чтобы при $n > \nu$ было

$$|\varphi_n(x')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,\ |\varphi_n(x'')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

а слѣдовательно,

$$|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < \tfrac{2}{3}\varepsilon$$

для двухъ произвольныхъ значеній x' и x'', лежащихъ въ интервалѣ $(a,\ a+h)$. Фиксируя число n (т. е. не мѣняя выбраннаго его значенія, опредѣленнаго согласно вышеуказанному условію), замѣтимъ, что, когда x стремится къ предѣлу a, то сумма n первыхъ членовъ даннаго ряда $f_n(x)$ стремится къ опредѣленному предѣлу, равному суммѣ предѣловъ $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n$. Поэтому можно выбрать h достаточно малымъ, чтобы $|f_n(x') - f_n(x'')| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Обозначая теперь черезъ $f(x)$ сумму даннаго ряда, будемъ имѣть, на основаніи предыдущихъ неравенствъ

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f_n(x') - f_n(x'')| + |\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < \varepsilon$$

для всякой пары значеній x' и x'', лежащихъ въ интервалѣ $(a,\ a+h)$. Слѣдовательно, $f(x)$ (§ 264) стремится къ конечному предѣлу $f(a+0)$, съ приближеніемъ x къ a справа.

b) Теперь докажемъ, что этотъ предѣлъ есть не что иное, какъ сумма безконечнаго ряда, составленнаго изъ предѣловъ членовъ даннаго ряда. Мы имѣемъ

$$(4)\qquad f(x) - \sum_1^n u_i(a+0) = \sum_1^n \{u_i(x) - u_i(a+0)\} + \varphi_n(x).$$

При данномъ положительномъ сколь угодно маломъ ε можно найти такое число ν (не зависящее отъ h), чтобы при $n > \nu$ было $|\varphi_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для всѣхъ значеній x въ интервалѣ $(a,\ a+h)$. Удерживая опредѣленное значеніе n, будемъ теперь приближать x къ a. Такъ какъ $u_i(x)$ стремится къ предѣлу $u_i(a+0)$, то при достаточно маломъ h, имѣемъ

$$\left|\sum_1^n \{u_i(x) - u_i(a+0)\}\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а потому, на основаніи равенства (4),

$$\left|f(x) - \sum_1^n u_i(a+0)\right| < \tfrac{2}{3}\varepsilon.$$

Замѣчая теперь, что и разность $f(x) - f(a+0)$ можетъ быть сдѣлана меньшей $\frac{\varepsilon}{3}$ по абсолютной величинѣ и при томъ такъ, что она будетъ и оставаться меньшей $\frac{\varepsilon}{3}$, когда x стремится къ a, будемъ имѣть

$$\left| f(a+0) - \sum_1^n u_i(a+0) \right|$$

$$\leqq |f(a+0) - f(x)| + \left| f(x) - \sum_1^n u_i(a+0) \right| < \varepsilon.$$

Итакъ, $f(a+0) = u_1(a+0) + u_2(a+0) + u_3(a+0) + \cdots$.

322. Теорема IV. Если рядъ непрерывныхъ функцій сходится равномѣрно, то его сумма есть непрерывная функція.

Дѣйствительно,

$$f(a) = \sum_1^\infty u_i(a), \quad f(a \pm 0) = \sum_1^\infty u_i(a \pm 0).$$

Второе равенство есть слѣдствіе равномѣрной сходимости ряда и предыдущей теоремы. Съ другой стороны, вслѣдствіе непрерывности членовъ ряда, имѣемъ

$$u_i(a = u_i(a \pm 0), \text{ поэтому } f(a) = f(a \pm 0).$$

Итакъ, $f(x)$ функція непрерывная.

323. Теорема V. Если производныя членовъ сходящагося ряда функцій образуютъ равномѣрно сходящійся рядъ, то сумма этого второго ряда равна производной отъ суммы даннаго ряда.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ производныхъ, напр., справа и замѣтимъ слѣдующее: если a лежитъ въ томъ интервалѣ, гдѣ имѣетъ мѣсто равномѣрная сходимость, и если h достаточно мало для того, чтобы $a+h$ заключалось въ томъ же интервалѣ, то всегда можно по данному положительному сколь угодно малому числу ε опредѣлить число ν (не зависящее отъ h) такъ, чтобы при $n > \nu$ было

$$\left| \sum_{n+1}^\infty u_i'(x) \right| < \tfrac{1}{8}\varepsilon$$

для всѣхъ значеній x въ интервалѣ $(a, a+h)$. Отсюда слѣдуетъ

$$\left| \sum_{\nu+1}^n u_i'(x) \right| \leqq \left| \sum_{\nu+1}^\infty u_i'(x) \right| + \left| \sum_{n+1}^\infty u_i'(x) \right| < \tfrac{1}{4}\varepsilon.$$

Положимъ для сокращенія

$$\sigma_n = \sum_1^n \left[\frac{u_i(a+h) - u_i(a)}{h} - u_i'(a) \right],$$

и замѣтимъ, что, примѣняя теорему Лагранжа (§ 306) къ послѣднимъ $n - \nu$ выраженіямъ $\frac{u_i(a+h) - u_i(a)}{h}$ подъ знакомъ суммы, получимъ

$$\sigma_n = \sigma_\nu + \sum_{\nu+1}^n \{ u_i'(\xi) - u_i'(a) \},$$

гдѣ $a < \xi < a + h$. Опредѣливъ ν согласно поставленнымъ выше условіямъ и фиксируя его значеніе, находимъ сперва

$$\left| \sum_{\nu+1}^n \{ u_i'(\xi) - u_i'(a) \} \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Замѣчая далѣе, что

$$\lim_{h=0} \frac{u_i(a+h) - u_i(a)}{h} = u_i'(a),$$

можно взять h достаточно малымъ для того, чтобы было $|\sigma_\nu| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Отсюда получится, что $|\sigma_n| < \varepsilon$ при достаточно большомъ n и достаточно маломъ h. Если теперь, оставляя ν и h постоянными, будемъ увеличивать n безпредѣльно, то на основаніи сходимости обоихъ рядовъ, найдемъ

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_1^\infty u_i'(a) \right| \leqq \varepsilon;$$

т. е.

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \sum_1^\infty u_i'(a),$$

или иначе

$$f'(a) = u_1'(a) + u_2'(a) + u_3'(a) + \cdots.$$

324. Примѣчанія. а) Послѣднія три теоремы отчасти заполняютъ пробѣлы, оставшіеся открытыми въ §§ 263, 267 и 285, указывая безконечное число случаевъ, въ которыхъ можно распространить способы разысканія предѣловъ, теоремы о непрерывности и правила разысканія производныхъ суммъ конечнаго числа функцій на суммы съ безконечнымъ числомъ слагаемыхъ. Однако, этимъ не исключается возможность того, что эти теоремы и правила будутъ имѣть мѣсто и въ другихъ случаяхъ, къ которымъ вышедоказанныя три теоремы не относятся.

b) Всякая непрерывная функція можетъ быть изображена равномѣрно сходящимся рядомъ. Въ самомъ дѣлѣ, составимъ какую нибудь послѣдовательность чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$, стремящихся къ нулю, и положимъ $u_1 = f(x + a_1)$, и (при $n > i$) $u_n = f(x + a_n) - f(x + a_{n-1})$. Сумма n первыхъ членовъ ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ есть $f_n(x) = f(x + a_n)$, и $\lim f_n(x) = f(x)$. Слѣдовательно, рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ сходящійся, и его остатокъ равенъ $\varphi_n(x) = f(x) - f(x + a_n)$. Замѣтивъ это, можемъ по данному положительному сколь угодно малому числу ε, на основаніи теоремы Кантора (§ 279), въ силу непрерывности функціи $f(x)$, опредѣлить число h такъ, чтобы было $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, при $|x - x'| < h$. Отсюда слѣдуетъ, что, выбравъ число ν достаточно большимъ для того, чтобы $|a_n|$ оставалось меньше h при $n > \nu$, будемъ имѣть $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ для всѣхъ значеній n, большихъ числа ν, независящаго отъ x. Такимъ образомъ, непрерывная функція $f(x)$ представится, какъ сумма равномѣрно сходящагося ряда

$$f(x + a_1) + \{f(x + a_2) - f(x + a_1)\} + \{f(x + a_3) - f(x + a_2)\} + \cdots \text{(XXXII bis.)}$$

c) Съ другой стороны, теорема IV показываетъ, что разрывная функція никогда не можетъ быть изображена равномѣрно сходящимся рядомъ непрерывныхъ функцій. Такъ, напримѣръ, сумма ряда (2) имѣетъ обыкновенный разрывъ слѣва отъ $x = 1$, и этого достаточно, чтобы обнаружить неравномѣрную сходимость ряда въ интервалѣ съ верхнею границею 1 *). Однако, не слѣдуетъ думать, что неравномѣрная сходимость ряда есть вѣрный указатель разрывности его суммы. Достаточно припомнить рядъ (3), сумма котораго непрерывная функція x, хотя рядъ неравномѣрно сходящійся.

d) Аналогично этому, теорема V показываетъ, что равномѣрная сходимость ряда производныхъ отъ членовъ даннаго ряда достаточна для того, чтобы утверждать, что производная сумма даннаго ряда существуетъ и равна суммѣ производныхъ его членовъ. Но это условіе не необходимо, потому что существуютъ такіе ряды, что рядъ производныхъ неравномѣрно сходящійся, а имѣетъ суммою производную суммы даннаго ряда [1]). Наконецъ, легко привести примѣръ ряда, для котораго сумма ряда производныхъ не равна производной отъ суммы даннаго ряда. Такъ, сумма ряда (1) равна 1 при всякомъ x, а рядъ производныхъ $-1 + (1 - x) + (x - x^2) + \ldots$ при $x = 1$ имѣетъ сумму -1, а не 0. Это объясняется тѣмъ, что послѣдній рядъ не равномѣрно сходящійся.

*) Сумма S ряда (2) равна 1 при $x < 1$ и $S = 0$ при $x = 1$.

[1]) См. подобный примѣръ въ „Résumé du Cours d'Analyse" par Mansion, p. 255.

Разложенія въ степенные ряды.

325. Особенно важное для насъ значеніе имѣетъ разложеніе функцій въ ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣнной,—ряды, называемые степенными (Potenzreihen) или цѣлыми (séries entières)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots. \tag{5}$$

Основною теоремою въ теоріи этихъ рядовъ служитъ слѣдующая: степенной рядъ будетъ абсолютно и равномѣрно сходящимся въ интервалѣ $(-a, +a)$, за исключеніемъ, можетъ быть, границъ, если при $x = a$ члены этого ряда образуютъ конечную послѣдовательность. Дѣйствительно, данный рядъ можно себѣ представить происшедшимъ изъ ряда $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \cdots$ черезъ умноженіе членовъ послѣдняго на числа $a_0, a_1 a, a_2 a^2, \ldots$ (абсолютныя величины которыхъ, по условію, всѣ меньше нѣкотораго постояннаго числа). Такъ какъ этотъ послѣдній рядъ есть рядъ, сходящійся абсолютно и равномѣрно (§ 320, а) въ интервалѣ $(-a, +a)$ за исключеніемъ границъ, то то же самое можно утверждать (§ 318) и относительно даннаго ряда. Условіе теоремы (конечность всѣхъ чиселъ $a_0, a_1 a, a_2 a^2, \ldots$), конечно, можетъ быть выполнено и въ томъ случаѣ, когда рядъ не будетъ сходящимся ни на одной изъ границъ, потому что можетъ случиться, напримѣръ, что съ возрастаніемъ n до безконечности $a_n a^n$, оставаясь конечнымъ, не стремится къ нулю. Но можно навѣрно утверждать, что установленное условіе выполняется, если рядъ будетъ сходящимся на одной изъ границъ. А именно, въ этомъ случаѣ $\lim_{n=\infty} a_n a^n = 0$, и поэтому можно, задавъ по произволу положительное число l', опредѣлить наименьшее значеніе числа ν подъ условіемъ, чтобы при $n > \nu$ всегда было $|a_n a^n| < l'$; затѣмъ можно найти достаточно большое число l, чтобы при $n \leqq \nu$ имѣть $|a_n a^n| < l$, а тогда ясно, что при любомъ значеніи n будемъ имѣть $|a_n a^n| < l$, потому что $l' \leqq |a_\nu a^\nu| < l$. Отсюда слѣдуетъ, что, если рядъ (5) будетъ сходящимся на одной изъ границъ интервала $(-a, +a)$, онъ будетъ сходящимся во всемъ интервалѣ, за исключеніемъ, можетъ быть, другой границы, и эта сходимость будетъ равномѣрная, за исключеніемъ границъ.

326. Радіусъ сходимости. Можетъ случиться, что не существуетъ такого положительнаго числа a, чтобы рядъ былъ сходящимся при $x = a$. Въ такомъ случаѣ изъ доказанной теоремы тотчасъ слѣдуетъ, что рядъ будетъ сходящимся только при $x = 0$ (таковъ, напримѣръ, рядъ, общій членъ котораго есть $n!\, x^n$). Съ другой стороны, мо-

жетъ случиться, что рядъ будетъ сходящимся для всевозможныхъ значеній x (достаточно указать на рядъ, общій членъ котораго $\frac{x^n}{n!}$). Если же рядъ не будетъ сходящимся для какого нибудь значенія x, то ансамбль чиселъ α будетъ конечнымъ и имѣетъ, слѣдовательно, (§ 172) верхнюю границу ϱ, которая можетъ и не принадлежать ансамблю. Въ разсматриваемомъ случаѣ, значенія перемѣннаго числа x, для которыхъ рядъ сходящійся, образуютъ интервалъ $(-\varrho, \varrho)$, на границахъ котораго сходимость можетъ и не имѣть мѣста, но внутри котораго сходимость будетъ абсолютная и равномѣрная. Вышеупомянутые два случая можно разсматривать, какъ частные случаи послѣдняго. Они соотвѣтствуютъ $\varrho = 0$ и $\varrho = \infty$. Во всѣхъ случаяхъ число ϱ называютъ радіусомъ сходимости ряда *). Для рядовъ

$$\sum_1^\infty x^n, \quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}, \quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2},$$

имѣемъ $\varrho = 1$, т. е. для всѣхъ трехъ рядовъ интервалъ сходимости будетъ $(-1, 1)$. При этомъ для перваго ряда надо исключить обѣ границы, для второго одну верхнюю, а третій будетъ сходящимся во всемъ интервалѣ. Иными словами, значенія x, для которыхъ три вышеприведенные ряда будутъ сходящимися, для перваго ряда не имѣютъ ни наибольшаго, ни наименьшаго, для второго имѣютъ только наименьше, а для третьяго и наибольшее и наименьшее.

327. Опредѣленіе ϱ. Если существуетъ число

$$\varrho = \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|,$$

то можно доказать, что оно и есть радіусъ сходимости ряда. Дѣйствительно, положимъ, что $u_n = |a_n x^n|$, и разсмотримъ рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$; для этого ряда имѣемъ

$$\lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim \left| \frac{a_n x}{a_{n-1}} \right| = \frac{|x|}{\varrho}.$$

Извѣстно (§ 210, а), что при $|x| < \varrho$ рядъ чиселъ u сходящійся и, слѣдовательно (§ 230), рядъ (5) абсолютно сходящійся. Поэтому радіусъ сходимости будетъ не меньше ϱ. Но онъ не можетъ быть и больше ϱ, потому что иначе въ интервалѣ сходимости были бы значенія $x > \varrho$, для которыхъ рядъ (5) абсолютно сходящійся, какъ

*) Происхожденіе этого названія объясняется въ теоріи рядовъ съ комплексными членами.

это необходимо имѣетъ мѣсто внутри интервала сходимости; а съ другой стороны, вслѣдствіе того, что $\lim \frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$, рядъ абсолютныхъ величинъ членовъ даннаго ряда былъ бы расходящимся, что противорѣчитъ теоремѣ Дирихле (§ 230). Подобнымъ же образомъ доказывается, что если существуетъ число

$$\varrho = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

оно и будетъ радіусомъ сходимости ряда. Стоитъ только замѣтить, что

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{\varrho}.$$

повторить предыдущія разсужденія и сопоставить съ теоремою § 213. Такимъ образомъ, можно, косвеннымъ путемъ, доказать тождественность (см. § 142, b) двухъ разсмотрѣнныхъ выше предѣловъ. Если эти предѣлы не существуютъ, то можно прибѣгнуть къ нижеслѣдующей теоремѣ.

328. Теорема Адамара (Hadamard). Если числа $\sqrt[n]{|a_n|}$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ образуютъ конечный ансамбль, то обратное значеніе наибольшаго изъ предѣловъ этого ансамбля равно радіусу сходимости ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.^{1})$$

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ $\frac{1}{\varrho}$ упомянутый въ теоремѣ наибольшій изъ предѣловъ даннаго ансамбля; это число всегда существуетъ (§ 175). Тогда (см. § 178) о неравенствахъ

$$\sqrt[n]{|a_n|} < l, \quad \sqrt[n]{|a_n|} > l' \qquad \left(l' < \frac{1}{\varrho} < l\right)$$

извѣстно, что первое выполняется при всѣхъ значеніяхъ n, бо́льшихъ нѣкотораго даннаго числа, а второе при нѣкоторыхъ значеніяхъ n, сколь угодно большихъ. Положимъ теперь въ рядѣ, котораго общій членъ есть $u_n = a_n x^n$, $|x| < \varrho$. Тогда, между $|x|$ и ϱ можно вставить число $q\varrho$, гдѣ $q < 1$. Выберемъ, далѣе, l такъ, чтобы было $q = |x| \cdot l$; въ такомъ случаѣ, начиная съ нѣкотораго значенія n, будемъ имѣть

$$\sqrt[n]{|u_n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1, \quad |u_n| < q^n,$$

---

[1]) „Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable" (Comptes rendus de l'Académie de Paris 1888 p. 259).

и данный рядъ будетъ абсолютно сходящимся, потому что абсолютныя величины его членовъ будутъ меньше соотвѣтствующихъ членовъ сходящейся геометрической прогрессіи $1+q+q^2+\dots$ Если же $|x|>\varrho$, то можно выбрать l' такъ, чтобы было $1=|x|\cdot l'$ и всегда найдутся сколь угодно большія значенія n, для которыхъ

$$\sqrt[n]{|u_n|}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}>1,\quad |u_n|>1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ не будетъ сходящимся, потому что необходимое для сходимости условіе $\lim u_n=0$ не выполняется. Слѣдовательно, ϱ есть верхняя граница значеній x, при которыхъ данный рядъ будетъ сходящимся. Замѣтимъ въ заключеніе, что $\varrho=\infty$ тогда и только тогда, когда наибольшій (а слѣдовательно, и наименьшій) предѣлъ чиселъ $\sqrt[n]{|a_n|}$ равенъ нулю. Итакъ, необходимое и достаточное условіе для того, чтобы рядъ

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

былъ сходящимся при всякомъ значеніи x, есть равенство

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0.$$

329. Производная степенного ряда. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію ряда

$$g(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots, \tag{6}$$

составленнаго изъ производныхъ отъ членовъ ряда (5). Радіусъ сходимости ϱ' ряда (6) не можетъ быть больше радіуса сходимости ϱ ряда (5), потому что общій членъ ряда (6) na_nx^{n-1}, при безпредѣльно возрастающемъ n, становится, въ концѣ концовъ, больше общаго члена a_nx^n ряда (5) по абсолютной величинѣ *). Съ другой стороны, выбравъ число ξ, меньшее ϱ и какъ угодно близкое къ ϱ, найдемъ, что при $x=\alpha$, гдѣ $\xi<\alpha<\varrho$, рядъ (5) сходящійся и, слѣдовательно, $\lim a_n\alpha^n=0$. Отсюда заключаемъ, что рядъ (6) будетъ абсолютно и равномѣрно сходящимся (§ 318) въ интервалѣ $(-\xi,\ \xi)$, потому что этотъ рядъ можно разсматривать происходящимъ изъ ряда $1+2\frac{x}{\alpha}+3\frac{x^2}{\alpha^2}+\dots$, абсолютно и равномѣрно сходящагося при $|x|<\alpha$ (§ 320, а), черезъ умноженіе его членовъ на числа $a_1,\ a_2\alpha,\ a_3\alpha^2\dots$, образующія конечный ансамбль. Итакъ, ϱ' не можетъ быть и меньше ϱ. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ (6) имѣетъ тотъ же интервалъ сходимости, какъ и рядъ (5), за исключеніемъ, можетъ быть, границъ, на которыхъ рядъ производныхъ можетъ быть расходящимся или неопредѣленнымъ, между тѣмъ какъ внутри этого интервала сходимость всегда остается

*) И получилось бы, что при $\varrho<x<\varrho'$, рядъ 6 сходящійся, а рядъ 5 расходящійся, что невозможно.

абсолютною и равномѣрною. На основаніи этой равномѣрности мы можемъ утверждать (§ 323), что $g(x)$ есть производная отъ $f(x)$, а такъ какъ это заключеніе справедливо для всякаго степеннаго ряда, то это же заключеніе можно распространить на ряды, члены котораго будутъ вторыя, третьи и т. д. производныя членовъ даннаго ряда, такъ что будемъ имѣть

$$f'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

$$f'''(x) = \sum_{3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}, \cdots$$

Изъ этихъ соотношеній и ряда (5) тотчасъ находимъ, при $x = 0$,

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = 6a_3, \cdots$$

и приходимъ, такимъ образомъ, къ слѣдующему важному заключенію. Если нѣкоторая функція $f(x)$ можетъ быть изображена степеннымъ рядомъ, то этотъ рядъ необходимо имѣетъ видъ

$$(7) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) \cdots.$$

Итакъ, мы теперь имѣемъ правило для разложенія данной функціи въ степенной рядъ. Но мы еще не вправѣ примѣнять это правило, потому что не имѣемъ еще критеріума, утверждающаго законность такого разложенія. Этотъ пробѣлъ мы сейчасъ и заполнимъ.

330. Формулы Тэйлора и Маклорена. Рядъ (7) можно написать въ болѣе общемъ видѣ, замѣнивъ $f(x)$ черезъ $f(x+a)$, а затѣмъ x черезъ $x-a$, что даетъ разложеніе $f(x)$ въ рядъ, расположенный по степенямъ $(x-a)$, а именно:

$$(8) \qquad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \cdots.$$

Чтобы рѣшить вопросъ о законности такого разложенія, мы всегда вправѣ написать

$$(9) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

и остатокъ R_n взять въ видѣ

$$R_n = \frac{(x-a)^\nu \varphi(x)}{(n-1)!\, \nu},$$

гдѣ ν цѣлое положительное число, а $\varphi(x)$ нѣкоторая функція отъ x, зависящая также отъ n и ν. Мы допустимъ существованіе n-ой

производной отъ $f(x)$ во всемъ интервалѣ, въ которомъ лежитъ число a, и выбравъ въ томъ же интервалѣ еще одно число b, разсмотримъ функцію

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1\cdot 2} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{\nu}}{(n-1)!\,\nu} \varphi(b).$$

По формулѣ (9) имѣемъ $F(a) = f(b)$ и, кромѣ того, очевидно, $F(b) = f(b)$. Функція $F(x)$ принимаетъ, слѣдовательно, одинаковыя значенія на границахъ интервала (a, b), а потому (§ 303) ея производная должна обращаться въ нуль при нѣкоторомъ значеніи $x = \xi$, лежащемъ внутри этого интервала. Весьма простое вычисленіе даетъ

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{\nu-1}}{(n-1)!} \varphi(b).$$

Выражая, что $F'(x)$ обращается въ нуль при $x = \xi$, мы найдемъ отсюда $\varphi(b)$, а замѣняя опять букву b буквою x, получимъ

$$\varphi(x) = (x-\xi)^{n-\nu} f^{(n)}(\xi), \quad R_n = \frac{(x-a)^{\nu}(x-\xi)^{n-\nu}}{(n-1)!\,\nu} f^{(n)}(\xi),$$

гдѣ ξ лежитъ между a и x. Положивъ еще $\xi = (1-\theta)a + \theta x$, гдѣ $0 < \theta < 1$, можемъ написать

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!\,\nu} (1-\theta)^{n-\nu} f^{(n)}(\xi).$$

Формула (9), дополненная этимъ выраженіемъ остатка R_n, называется формулою Тэйлора *). Въ частности, при $\nu = n$ и $\nu = 1$ получаемъ слѣдующія формы остатка, найденныя первая Лагранжемъ, вторая Коши:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad R_n = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\xi).$$

Форма Лагранжа, безъ сомнѣнія, самая простая, но она не всегда способна дать отчетъ о характерѣ измѣненія R_n при безпредѣльномъ возрастаніи n. Въ такихъ случаяхъ обращаются къ формѣ Коши. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ и эта недостаточна, и приходится прибѣгнуть къ самой общей (XXXIII). Во всякомъ случаѣ, когда дана функція $f(x)$, составлена та или другая форма остатка R_n и окажется, что при безпредѣльномъ возрастаніи числа n оста-

*) Остатокъ R_n называютъ также дополнительнымъ членомъ формулы Тэйлора.

токъ R_n стремится къ нулю, тогда мы вправѣ разложить функцію $f(x)$ въ безконечный рядъ (8). Полагая въ ней $a = 0$, приходимъ и къ разложенію (7). Мы можемъ, однако, теперь, положивъ въ формулѣ (9) $a=0$, съ бо́льшею точностью и общностью писать, даже не предполагая разложимости $f(x)$ въ безконечный степенной рядъ

$$(10)\quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

гдѣ

$$R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \text{ или } R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta x)$$

или общнѣе

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!\,\nu}(1-\theta)^{n-\nu}f^{(n)}(\theta x).$$

Формула (10), дополненная однимъ изъ выраженій остатка (или дополнительнаго члена), называется формулою Маклорена. Сопоставляя сказанное здѣсь съ концомъ предыдущаго §, мы видимъ, что изслѣдованіе измѣненія R_n, при безпредѣльномъ возрастаніи n, даетъ намъ средство узнать, законно ли разложеніе функціи $f(x)$ въ рядъ (7).

331. Примѣчанія. а) Не надо думать, что сходимость рядовъ Тэйлора и Маклорена достаточна для того, чтобы соотвѣтствующія разложенія были законны. Можетъ, напримѣръ, случиться, что рядъ (7) сходящійся, но сумма его не равна $f(x)$. Дѣйствительно, надо обратить вниманіе на то, что R_n не есть, строго говоря, остатокъ ряда, а просто разность между $f(x)$ и суммою n первыхъ членовъ ряда, и поэтому ничто ему не мѣшаетъ при безпредѣльномъ возрастаніи n стремиться къ предѣлу $g(x)$, не равному нулю при всякомъ x въ данномъ интервалѣ; а въ такомъ случаѣ рядъ (7) будетъ имѣть суммою не $f(x)$, а $f(x) - g(x)$. Конечно, $g(x)$ не произвольная функція, потому что разложеніе $f(x) - g(x)$ въ степенной рядъ возможно только тѣмъ способомъ, который указанъ формулою (7), и слѣдовательно, $g(x)$ должна обладать свойствомъ обращаться въ нуль, вмѣстѣ со всѣми своими послѣдовательными производными, при $x = 0$. Это безчисленное множество условій удовлетворяется, конечно, весьма рѣдко. Однако, можно привести простой примѣръ такой функціи, опредѣляемой равенствомъ $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, при $x \gtrless 0$, и $g(0) = 0$. Замѣчаемъ прежде всего, что въ силу извѣстнаго уже результата (§ 312, а) имѣемъ

$$g'(0) = \lim_{x=0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x=0} x^{-1}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{z=\infty} z^2 e^{-z} = 0.$$

Далѣе, легко доказать, что если $g^{(n)}(0) = 0$, то и $g^{(n+1)}(0) = 0$. Дѣйствительно, вычисляя послѣдовательныя производныя при $x \gtrless 0$, находимъ

$$g^{(n)}(x) = \sum' A x^{-a} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

а потому

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{x=0} \sum' A x^{-(a+1)} e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum' A \lim_{z=\infty} z^{\frac{a+1}{2}} e^{-z} = 0.$$

b) Другое замѣчаніе оказывается полезнымъ, потому что оно во многихъ случаяхъ избавляетъ отъ необходимости непосредственнаго изслѣдованія измѣненія R_n при безконечномъ возрастаніи n. Мы уже сказали, что для законности разложенія (7) необходимо доказать не сходимость ряда, а то, что R_n стремится къ нулю при безконечномъ n. И какъ только удастся установить, что n-ая производная, даже при возрастаніи n до безконечности, остается конечною въ интервалѣ $(0, x)$, такъ тотчасъ же увидимъ, что упомянутое условіе выполняется, и разложеніе законно. Чтобы это доказать, стоитъ только припомнить, что (§ 147) $\frac{x^n}{n!}$ стремится къ нулю при всякомъ x, а потому, если абсолютная величина $f^{(n)}(\theta x)$ при n безконечномъ не превосходитъ даннаго числа, то

$$\lim R_n = \lim \frac{f^{(n)}(\theta x)\, x^n}{n!} = 0.$$

332. Упражненія. a) Для функціи $f(x) = e^x$ имѣемъ $f^{(n)} = e^x$, число конечное во всякомъ интервалѣ и при всякомъ n (потому что оно отъ n не зависитъ). Поэтому изслѣдованіе R_n при n безконечномъ является излишнимъ и, на основаніи послѣдняго замѣчанія § 332, можно быть увѣреннымъ a priori, что $\lim_{n=\infty} R_n = 0$. Такъ какъ $f^{(n)}(0) = 1$, то (см. § 184)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

при всякомъ значеніи x. Подобнымъ же образомъ получаемъ слѣдующія разложенія:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

b) Для $f(x) = e^{x \cos a} \cos(x \sin a)$ или $f(x) = e^{x \cos a} \sin(x \sin a)$, какъ извѣстно (§ 292, e), имѣемъ соотвѣтственно

$$f^{(n)}(x) = e^{x \cos a} \cos(na + x \sin a), \quad f^{(n)}(x) = e^{x \cos a} \sin(na + x \sin a),$$

такъ что соотвѣтственно $f^{(n)}(0) = \cos na$, $f^{(n)}(0) = \sin na$, откуда

$$e^{x \cos a} \cos(x \sin a) = 1 + \frac{x}{1} \cos a + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cos 2a + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos 3a + \cdots,$$

$$e^{x \cos a} \sin(x \sin a) = \frac{x}{1} \sin a + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \sin 2a + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin 3a + \cdots.$$

Въ этихъ формулахъ заключаются предыдущія при $a = 0$ и $a = \frac{\pi}{2}$. Далѣе, отсюда же получимъ разложенія $e^x \cos x$ и $e^x \sin x$ при $a = \frac{\pi}{4}$ и замѣнѣ x на $x\sqrt{2}$ и т. д.

c) Для $f(x = \log(1 + x)$ имѣемъ

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!},$$

откуда

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

гдѣ

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \text{ или } R_n = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

и $0 < \theta < 1$. При $x > 1$ или $x \leqq -1$ мы можемъ себя избавить отъ труда изслѣдовать R_n, потому что прямо видно (§ 218, a), что въ этихъ случаяхъ рядъ не будетъ сходящимся. Полагая $x \leqq 1$, но положительнымъ, замѣчаемъ, что $\frac{x}{1+\theta x} < x \leqq 1$, поэтому $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ остается конечнымъ, въ то время какъ $\frac{1}{n}$ стремится къ нулю. Первая форма (Лагранжа) остатка даетъ тогда $\lim R_n = 0$. Если же $x > -1$, но отрицательно. то надо прибѣгнуть ко второй формѣ (Коши) остатка, потому что первая не даетъ возможности сказать что либо опредѣленное о R_n при n безконечномъ. Такъ какъ отношенія $\frac{1}{1+\theta x}$ и $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ соотвѣтственно меньше, чѣмъ $\frac{1}{1+x}$ и 1, тогда какъ x^n стремится къ нулю, то и въ этомъ случаѣ $\lim R_n = 0$. Итакъ (ср. § 186), въ интервалѣ $(-1, +1)$, за исключеніемъ нижней границы, имѣемъ

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

d) Чтобы разложить въ рядъ функцію $y = \operatorname{arctg} x$, припомнимъ, что (§ 292, e) ея n-ая производная равна

$$(n-1)! \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Остатокъ въ формулѣ Маклорена, взятый въ формѣ Лагранжа, равенъ произведенію $\frac{x^n}{n}$-на величину, остающуюся конечною, но не стремящуюся къ 0. Слѣдовательно, R_n стремится къ нулю только въ томъ случаѣ, когда x по абсолютной величинѣ не превосходитъ единицы. Въ этомъ предположеніи ($-1 \leqq x \leqq 1$), формула Маклорена даетъ

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots$$

Этою формулою пользовались для вычисленія π. На границахъ интервала $(-1, +1)$ она даетъ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

но этою формулою нельзя воспользоваться съ указанной цѣлью, вслѣдствіе крайне медленной сходимости ряда. Надо было бы взять 24000 членовъ (§ 196, c), чтобы получить четыре вѣрныхъ десятичныхъ знака. Весьма удобную формулу далъ Мехинъ (Machin). Положимъ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$, тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Замѣчаніе, что $\operatorname{tg} 4\alpha$ немного превосходитъ единицу, наводитъ на мысль положить $4\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$, гдѣ β будетъ весьма малое число. А именно, находимъ, что

$$\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - 1}{\operatorname{tg} 4\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{119}}{2 + \frac{1}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Такъ какъ $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, то

$$\pi = \frac{16}{5}\left(1 - \frac{4}{3 \cdot 100} + \frac{4^2}{5 \cdot 100^2} - \frac{4^3}{7 \cdot 100^3} + \cdots\right)$$
$$- \frac{4}{239}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 57121} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} - \frac{1}{7 \cdot 57121^3} + \cdots\right).$$

Съ помощью этой формулы B. Шанксъ (Shanks) вычислилъ π съ 707 десятичными знаками. Первые 30 можно замѣтить при помощи слѣдующихъ французскихъ стиховъ:

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Если каждое слово замѣнимъ числомъ содержащихся въ немъ буквъ, то получимъ

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9 \ldots$$

Еще два знака можно написать, если припомнить замѣчаніе Каталана [1]) что подобную поэтическую работу нельзя продолжить, потому что послѣ цифры 5 слѣдуетъ нуль. Гораздо полезнѣе, однако, имѣть приближенное значеніе π, которое имѣетъ практическое приложеніе. Такъ, если въ $\pi^2 = 9{,}8696044 \ldots$ ограничиться первыми четырьмя десятичными знаками, то для π получимъ значеніе $0{,}26 \,.\, \sqrt{146} = 3{,}141591953 \ldots$, геометрическое толкованіе котораго (принимая во вниманіе, что $146 = 5^2 + 11^2$) дастъ вполнѣ удовлетворительное спрямленіе окружности круга [2]) такъ какъ примѣненіе его даетъ погрѣшность около одного миллиметра для круга съ діаметромъ въ одинъ километръ.

---

[1]) Catalan. „Nouvelle correspondance mathématique", t. V, p. 44.

[2]) Этотъ способъ былъ предложенъ Шпехтомъ (Specht) въ Crelles Journal B. III. S. 83. Другое построеніе, дающее менѣе приближенное значеніе $\pi = 4 - 2\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{6} = 3{,}14277 \ldots$ было недавно предложено G. Peirce въ „Bulletin of the American Math. Society" (July, 1901, p. 427).

е) Въ заключеніе предложимъ себѣ разложить въ степенной рядъ функцію $f(x) = (1+x)^m$. Ея n-ая производная равна

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

поэтому формула (7) дастъ

$$(11)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots,$$

всякій разъ, когда рядъ въ правой части сходящійся и, кромѣ того, $\lim\limits_{n=\infty} R_n = 0$. Мы увидимъ, что послѣднее условіе всегда выполнено, когда рядъ сходящійся и лѣвая часть имѣетъ смыслъ, т. е. за исключеніемъ случая, когда одновременно $m = 0$ и $x = -1$. Мы оставимъ также въ сторонѣ разъ навсегда случай $m = 0$, потому что тогда прямо видно, что формула (11) имѣетъ мѣсто, какое бы значеніе ни имѣлъ $x \gtrless 1$. Послѣ этихъ замѣчаній беремъ R_{n+1} въ формѣ Коши:

$$R_{n+1} = mx(1+\theta x)^{m-1}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}x^n.$$

Замѣтимъ, что R_{n+1} разложенъ такимъ образомъ на три множителя (не считая mx). Третій множитель есть общій членъ биноміальнаго ряда съ показателемъ $m-1$; этотъ рядъ будетъ сходящимся (§ 222) при $|x|<1$, каково бы ни было m, при $x=-1$ и $m \geqq 1$, и при $x=1$, $m>0$. Во всѣхъ этихъ случаяхъ первые два множителя (mx совсѣмъ отъ n не зависитъ) остаются конечными, а третій, какъ общій членъ сходящагося ряда, стремится къ нулю, слѣдовательно, и $\lim R_{n+1} = 0$. Остается разсмотрѣть тѣ случаи, когда первый рядъ сходящійся, а второй (биноміальный съ показателемъ $m-1$) расходящійся. Эти случаи соотвѣтствуютъ предположеніямъ $x=-1$ при $0<m<1$, и $x=1$ при $-1<m<0$. Въ первомъ случаѣ въ выраженіи R_{n+1} относительно перваго множителя $(1-\theta)^{m-1}$ нельзя быть увѣреннымъ, что онъ остается конечнымъ, потому что $m-1<0$, а θ, хотя и меньше 1, но при безпредѣльномъ возрастаніи n можетъ быть подходитъ къ 1 какъ угодно близко. Во второмъ случаѣ третій множитель уже не стремится къ нулю, потому что его абсолютная величина

$$\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right) > 1 - m\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n. Въ послѣднемъ случаѣ вопросъ сейчасъ же рѣшается, если возьмемъ Лагранжеву форму для R_n:

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(1+\theta)^{m-n}.$$

Множитель $(1+\theta)^{m-n}$ остается всегда между 0 и 1, какъ бы ни измѣнялось θ при возрастаніи n, между тѣмъ какъ другой множитель стремится къ нулю, какъ общій членъ даннаго сходящагося ряда. Слѣдовательно, $\lim R_n = 0$. Въ другомъ же случаѣ ($x=-1$, $0<m<1$) ни одна изъ спеціальныхъ формъ остатка не даетъ возможности узнать стремится ли R_n къ нулю или нѣтъ. Дѣйствительно, изъ общаго выраженія

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1}(1-\theta)^{m-\nu}\cdot\frac{m}{\nu}\cdot\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots n}$$

тотчасъ видно, что нельзя быть увѣреннымъ въ конечности множителя $(1-\theta)^{m-\nu}$ не предполагая, что $\nu \leq m < 1$. Если же возьмемъ $\nu = m$, то θ исчезаетъ изъ выраженія R_{n+1}, и мы получаемъ точное выраженіе остатка

$$R_{n+1} = -\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right).$$

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ m положительное и меньше 1, то

$$-\frac{1}{R_{n+1}} > \left(1+\frac{m}{1}\right)\left(1+\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{m}{n}\right) > 1+m\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

а слѣдовательно, $\lim R_{n+1} = 0$. Итакъ, мы не только имѣемъ право писать, какъ частный случай (11) при $x = -1$

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots = 0,$$

каково бы ни было $m > 0$ *), но можемъ разсматривать предыдущее равенство, какъ предѣльный, такъ сказать, случай тождества

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{2}-\cdots\pm\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} = \left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

при n безконечномъ.

333. Другого рода полезныя приложенія Тэйлоровой формулы находимъ въ теоріи численныхъ рядовъ. Положимъ, что данъ рядъ положительныхъ убывающихъ чиселъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$. Представимъ себѣ функцію $f(x)$, имѣющую лишь положительныя значенія, постоянно убывающую при возрастаніи x и принимающую при $x = 1, 2, 3, \ldots$ значенія $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Допустимъ, далѣе, что намъ извѣстна одна изъ первообразныхъ функцій $f(x)$, которую обозначимъ черезъ $F(x)$. Эта функція постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ x, потому что ея производная $f(x)$, по условію, всегда положительна (§ 300), а потому непремѣнно стремится къ конечному или безконечному предѣлу (§ 263) при безпредѣльномъ возрастаніи x. Обозначая теперь черезъ α и β два опредѣленныя числа соотвѣтственно въ интервалахъ $(n-1, n)$ и $(n, n+1)$, будемъ имѣть **)

$$F(n) - F(n-1) = f(\alpha),\quad F(n+1) - F(n) = f(\beta),\quad f(\alpha) > u_n > f(\beta),$$

откуда

$$F(n+1) - F(1) < u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n < F(n) - F(0).$$

---

*) Случай $m \geq 1$ уже раньше былъ указанъ.

**) По теоремѣ Лагранжа, представляющей частный случай формулы Тэйлора при $n = 1$.

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, стремится ли $F(x)$ при x безконечномъ къ конечному или безконечному предѣлу. Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ сумма первыхъ n его членовъ, постоянно возрастая, остается всегда меньшей числа $F(n) - F(0)$, которое, по предположенію, имѣетъ конечный предѣлъ. Во второмъ, та же сумма, будучи больше числа $F(n+1) - F(1)$, возрастающаго безпредѣльно вмѣстѣ съ n, a fortiori возрастаетъ безпредѣльно. Этотъ замѣчательный признакъ сходимости принадлежитъ Коши *).

334. Формула Тэйлора даетъ намъ теперь средство еще глубже проникнуть въ изученіе даннаго ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, даже въ томъ случаѣ, когда его члены не слѣдуютъ одинъ за другимъ въ убывающемъ порядкѣ. Прежде всего мы докажемъ слѣдующую теорему Франеля [1]): Положимъ, что $f(x)$ имѣетъ единственную производную. Если эта производная, при безпредѣльномъ возрастаніи x, стремится къ нулю, постоянно убывая по абсолютной величинѣ и сохраняя постоянный знакъ, то выраженіе

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + \tfrac{1}{2}u_n - F(n) \quad **) \tag{12}$$

стремится при n безконечномъ къ конечному предѣлу l. Дѣйствительно, это выраженіе можно представить въ видѣ $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, положивъ

$$v_n = F(n-1) - F(n) + \tfrac{1}{2}\{f(n-1) + f(n)\}.$$

Съ другой стороны, пользуясь формулою Тэйлора (9) съ дополнительнымъ членомъ Лагранжа, получимъ ***)

$$F(n-\tfrac{1}{2}) = F(n-1) + \tfrac{1}{2}f(n-1) + \tfrac{1}{8}f'(\alpha),$$
$$F(n-\tfrac{1}{2}) = F(n) - \tfrac{1}{2}f(n) + \tfrac{1}{8}f'(\beta),$$

гдѣ α и β опредѣленныя числа, лежащія одно въ первой, другое во второй половинѣ интервала $(n-1, n)$. Отсюда, сравнивая два выраженія $F\left(n - \frac{1}{2}\right)$, находимъ

$$v_n = -\tfrac{1}{8}f'(\alpha) + \tfrac{1}{8}f'(\beta).$$

Такимъ образомъ, $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ представляется, начиная съ нѣкотораго мѣста, въ видѣ ряда съ попеременно положительными и

---

*) Маклоренъ въ своемъ „Traité des fluxions", появившемся въ свѣтъ вскорѣ послѣ Ньютонова открытія исчисленія безконечно малыхъ, далъ этотъ признакъ, облеченный въ геометрическую форму. Поэтому этотъ признакъ называютъ обыкновенно теоремою Коши-Маклорена.

[1]) „Intermédiaire des Mathématiciens", t. I, p. 234.

**) $F(x)$ — первообразная функція отъ $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

***) Примѣняя (9) къ $F(x)$, полагая $n = 2$ и одинъ разъ $x = n - \frac{1}{2}$, $a = n - 1$, другой разъ $x = n - \frac{1}{2}$, $a = n$.

отрицательными, и постоянно убывающими членами. Слѣдовательно, (§ 195), рядъ $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ сходящійся и его сумма равна именно предѣлу l выраженія (12). Замѣчая еще (§ 196, c), что величина остатка $v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots$ всегда заключается между 0 и $-\frac{1}{8}f'(n)$ (XXXIV), можемъ написать

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = F(n) + \tfrac{1}{2}f(n) + \frac{\theta}{8}f'(n) + l, \tag{13}$$

гдѣ $0 < \theta < 1$. Эта формула весьма полезна при приближенномъ вычисленіи нѣкоторыхъ суммъ. Но во всякомъ случаѣ, если желаемъ получить лучшее приближеніе, надо непосредственно изслѣдовать выраженіе $\varrho_n = -(v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots)$. Дѣйствительно, мы увидимъ, что, замѣняя въ выраженіи (13) число $\frac{\theta}{8}f'(n)$ черезъ ϱ_n, всякій разъ легко получить удовлетворительное приближеніе для ϱ_n изъ непосредственнаго разсмотрѣнія равнаго ему выраженія $-(v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots)$. Впрочемъ, изъ Тэйлоровой формулы, въ ея общемъ видѣ, можно вывести формулы, аналогичныя формулѣ (13), дающія все болѣе и болѣе удовлетворительныя приближенія. Дѣйствительно, стоитъ только въ формулѣ Тэйлора взять два лишнихъ члена, чтобы имѣть формулу, получаемую изъ (13) черезъ замѣну $\frac{\theta}{8}f'(n)$ черезъ $\frac{1}{12}f'(n) \pm \frac{\theta}{192}f'''(n)$, предполагая, что f''' удовлетворяетъ тѣмъ же условіямъ, что и f'.

335. Примѣры. а) Доказанный въ § 333 признакъ сходимости или расходимости рядовъ, данный Коши (Маклореномъ), даетъ возможность тотчасъ же установить расходимость рядовъ, опредѣляемыхъ общими членами

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n\log n}, \quad \frac{1}{n\log n\log\log n}, \cdots$$

Стоитъ только замѣтить, что всѣ эти функціи убываютъ и стремятся къ нулю при n безконечномъ, и имѣютъ первообразныя функціи

$$\log n, \quad \log\log n, \quad \log\log\log n, \ldots,$$

возрастающія безпредѣльно вмѣстѣ съ n. Теорема Франеля даетъ еще новые результаты относительно этихъ рядовъ. Такъ напримѣръ, она прямо доказываетъ существованіе числа

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

о которомъ мы уже раньше сказали (§ 183), что оно равно Эйлеровой постоянной $\mathbf{C} = 0{,}577215664901\ldots$ Точно также она доказываетъ существованіе числа

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n} - \log\log n\right),$$

которое вычисляется инымъ путемъ и равно $0{,}794678645453\ldots$ [1]).

[1]) „Intermédiaire des Mathématiciens“, t. V, p. 101.

b) Съ помощью формулы (13), которую мы теперь напишемъ въ болѣе общей формѣ:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = F(n) + \tfrac{1}{2} f(n) + \varrho_n + l, \tag{14}$$

можно идти и дальше въ приближенномъ вычисленіи лѣвой части. При $f(n) = \frac{1}{n}$, напримѣръ, имѣемъ $F(n) = \log n$, $l = \mathbf{C}$ и остается только вычислить $\varrho_n = -(v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots)$, о которомъ мы пока знаемъ только, что ϱ_n стремится къ нулю при безконечномъ n. Въ данномъ случаѣ имѣемъ

$$v_n = -\log \frac{n}{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right),$$

а такъ какъ (§ 219)

$$\log \frac{n}{n-1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \frac{1}{5(2n-1)^5} + \cdots\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = 2\left(\frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{(2n-1)^3} + \frac{1}{(2n-1)^5} + \cdots\Big),$$

то тотчасъ видимъ, что

$$v_n = 4\left(\frac{1}{3(2n-1)^3} + \frac{2}{5(2n-1)^5} + \frac{3}{7(2n-1)^7} + \cdots\right),$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ

$$0 < v_n < \frac{4}{3(2n-1)}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{2}{(2n-1)^4} + \frac{3}{(2n-1)^6} + \cdots\right)$$

и, наконецъ (§ 247, a),

$$0 < v_n < \frac{2n-1}{12n^2(n-1)^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Слѣдовательно, $0 < -\varrho_n < \frac{1}{12n^2}$. Поэтому, обозначая черезъ ϑ число, лежащее между 0 и 1, можемъ сказать, что сумма первыхъ n членовъ гармоническаго ряда равна

$$H_n = \log n + \frac{1}{2n} - \frac{\vartheta}{12n^2} + \mathbf{C}. \tag{15}$$

Такимъ образомъ, мы въ состояніи будемъ отвѣтить на вопросъ о величинѣ суммы первыхъ 100000 членовъ этого ряда, что она равна 12,090146 ... Для этого достаточно положить въ формулѣ (15) $n = 10^5$. Съ другой стороны, при $n = 10$, когда легко вычислить непосредственно лѣвую часть, формула (15) даетъ число $\mathbf{C}$ съ пятью вѣрными десятичными знаками.

c) Если $u_n = \log n$, то можно положить $F(n) = n \log n - n$, потому что производная отъ $x \log x - x$ равна $\log x$. Существованіе числа

$$\lim_{n=\infty}\left(\log(n!) - (n + \tfrac{1}{2}) \log n + n\right)$$

вытекаетъ изъ теоремы Франеля. Впослѣдствіи мы найдемъ его значеніе l

и получимъ $l = \log \sqrt{2\pi}$. Чтобы показать теперь же приложеніе формулы (14), замѣчаемъ, что

$$-v_n = -1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\log\frac{n}{n-1} = \frac{1}{3\,(2n-1)^2} + \frac{1}{5\,(2n-1)^4} + \frac{1}{7\,(2n-1)^6} + \cdots$$

откуда получается

$$0 < -v_n < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^4} + \cdots\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

и, слѣдовательно, $0 < \varrho_n < \frac{1}{12n}$. Формула (14) дастъ теперь

$$\log(n!) = (n + \tfrac{1}{2})\log n - n + \frac{\theta}{12n} + \log\sqrt{2\pi}, \tag{16}$$

а переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ найдемъ извѣстную формулу Стирлинга (§ 221).

Асимптотическія изображенія степенныхъ рядовъ.

336. Если отношеніе двухъ функцій стремится къ 1, когда независимая перемѣнная возрастаетъ безпредѣльно или когда обѣ функціи безпредѣльно возрастаютъ съ приближеніемъ независимой перемѣнной къ конечному предѣлу, то говорятъ, что функціи относятся асимптотически одна къ другой. Если нашли функцію φ_0, асимптотическую къ функціи f, затѣмъ другую f_1, асимптотическую къ $f - \varphi_0$, третью φ_2, асимптотическую къ $f - \varphi_0 - \varphi_1$ и т. д., то найдемъ такъ называемое асимптотическое изображеніе функціи f

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots .$$

Это равенство надо понимать условно, какъ замѣняющее рядъ равенствъ, смыслъ которыхъ намъ извѣстенъ:

$$\lim\frac{f(x)}{\varphi_0(x)} = 1, \quad \lim\frac{f(x) - \varphi_0(x)}{\varphi_1(x)} = 1, \quad \lim\frac{f(x) - \varphi_0(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = 1, \ldots .$$

Функціи $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ обладаютъ, очевидно, тѣмъ свойствомъ, что отношеніе каждой изъ нихъ къ предыдущей имѣетъ предѣломъ нуль *). Поэтому, если при послѣдовательномъ вычисленіи $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ получимъ, наконецъ, постоянную, то всѣ слѣдую-

*) Потому что изъ того, что

$$\lim\frac{f(x) - \varphi_0(x)}{\varphi_1(x)} = 1, \text{ слѣдуетъ } \lim\left(\frac{f(x)}{\varphi_0(x)} - 1\right) : \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = 1;$$

дѣлимое имѣетъ предѣломъ 0, сдѣдовательно, и предѣлъ дѣлителя есть 0.

щія за ней должны имѣть предѣломъ нуль. Все сказанное относится и къ тому случаю, когда перемѣнная, возрастая безпредѣльно, получаетъ только цѣлыя значенія, и этотъ случай, какъ сейчасъ увидимъ, является наиболѣе важнымъ.

337. Примѣры. a) Въ § 314, j) мы видѣли, что $x\Gamma(x)$ стремится къ предѣлу 1, когда x стремится къ нулю справа. Этотъ результатъ можно выразить такъ: $\frac{1}{x}$ есть асимптотическая функція къ $\Gamma(x)$ справа отъ нуля. Замѣчая далѣе, что

$$\lim\left(\Gamma(x)-\frac{1}{x}\right)=\lim\frac{\Gamma(x+1)-1}{x}=\Gamma'(1)=-\mathbf{C}^*),$$

можемъ написать асимптотическое уравненіе $\Gamma(x)=\frac{1}{x}-\mathbf{C}$. Оно, впрочемъ, еще проще получается изъ разложенія $\Gamma(x+1)$ въ степенной рядъ путемъ раздѣленія всѣхъ членовъ на x.

b) Чтобы получить примѣры асимптотическаго разложенія функцій отъ перемѣнной, принимающей лишь цѣлыя значенія, стоитъ только обратиться къ равенствамъ (15) и (16) и написать ихъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$H_n=\log n+\mathbf{C}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\cdots,$$

$$\log(n!)=n\log n-n+\frac{1}{2}\log n+\log\sqrt{2\pi}+\frac{1}{12n}+\cdots.$$

Какъ видимъ, отношеніе каждаго члена правой части къ предыдущему стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи перемѣнной. Разложенія можно продолжать до безконечности, вовсе не заботясь о ихъ сходимости, потому что они не являются, какъ обыкновенные безконечные ряды, результатомъ одного перехода къ предѣлу, а заключаютъ въ себѣ безконечное число такихъ переходовъ, слѣдующихъ одинъ за другимъ [1]).

c) Изъ формулы Стирлинга легко вывести одинъ результатъ, который полезно здѣсь же замѣтить, такъ какъ мы имъ часто будемъ пользоваться, а именно: Коэффиціентъ при x^n въ разложеніи $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ число $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots2n}{(2\cdot4\cdot6\cdots2n)^2}=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=\frac{e^{\frac{\vartheta-4\vartheta'}{24n}}}{\sqrt{\pi n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}+\cdots,$$

т. е.

$$\lim_{n=\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

---

*) См. въ § 314, j формулу

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\mathbf{C}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}+\cdots$$

[1]) И для этихъ разложеній Peano указалъ общій способъ изслѣдованія. См. въ Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino. 1891.

d) Къ другому интересному равенству, которымъ вскорѣ и воспользуемся, мы придемъ, поставивъ себѣ цѣлью найти асимптотическое изображеніе числа дѣлителей первыхъ n цѣлыхъ чиселъ, или, иначе говоря, изображеніе суммы $\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(n)$, гдѣ $\vartheta(n)$ обозначаетъ число дѣлителей числа n. Мы будемъ исходить изъ слѣдующаго замѣчанія:

$$\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n-1}{p}\right]=\begin{cases}0, \text{ вообще}\\ 1, \text{ если } n \text{ дѣлится на } p.\end{cases}$$

Если сложимъ всѣ подобныя выраженія, въ которыхъ число p проходитъ всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до $\nu=[\sqrt{n}]$, то получимъ число дѣлителей числа n, не превосходящихъ $\sqrt{n}$, т. е. вообще $\frac{\vartheta(n)}{2}$, а если n точный квадратъ, то $\frac{\vartheta(n)+1}{2}$ *). Отсюда слѣдуетъ, что

$$\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(u)=2\sum_{k=1}^{k=n}{}'\sum_{p=1}^{p=[\sqrt{k}]}{}'\left(\left[\frac{k}{p}\right]-\left[\frac{k-1}{p}\right]\right)-\nu.$$

Двойная сумма, стоящая въ правой части, легко приводится къ слѣдующей:

$$\sum_{p=1}^{p=\nu}{}'\left[\frac{n}{p}\right]-\sum_{p=1}^{p=\nu}{}'\left[\frac{p^2-1}{p}\right]=\sum_{p=1}^{p=\nu}{}'\left[\frac{n}{p}\right]-\tfrac{1}{2}\nu(\nu-1). \quad \text{(XXXV).}$$

Итакъ, будемъ имѣть

$$\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(n)=2\sum_{p=1}^{p=\nu}{}'\left[\frac{n}{p}\right]-\nu^2,$$

а слѣдовательно,

$$\frac{\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(n)}{n}-\log n$$

$$=2(H_\nu-\log\nu)-\frac{\nu^2}{n}+\log\frac{\nu^2}{n}-\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{p=\nu}{}'\left(\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]\right).$$

Такъ какъ, съ другой стороны,

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2<\frac{\nu^2}{n}\leqq 1,\quad 0\leqq\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]<1,$$

то ясно, что при безконечномъ n

$$\lim\frac{\nu^2}{n}=1,\quad \lim\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=\nu}{}'\left(\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]\right)=0.$$

Итакъ,

$$\lim\left(\frac{\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(n)}{n}-\log n\right)=2\mathbf{C}-1=0{,}15443132\ldots$$

---

*) См. примѣчаніе (XXX) къ книгѣ II.

Такимъ образомъ, мы пришли къ важной асимптотической формулѣ Дирихле [1])

$$\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(n)=n\log n+(2\mathbf{C}-1)n+\cdots.$$

338. Займемся теперь спеціально функціями, которыя въ данномъ интервалѣ $(-\varrho,\ \varrho)$ могутъ быть изображены степенными рядами. Мы уже знаемъ, что такая функція непрерывна и имѣетъ производную для всѣхъ значеній x, для которыхъ $|x|<\varrho$. Но мы не знаемъ, что будетъ, когда $x=\pm\varrho$, а между тѣмъ именно изъ того, что представляетъ изъ себя рядъ на границахъ интервала сходимости, можно часто выводить полезные результаты для асимптотическаго выраженія суммы ряда вблизи этихъ границъ. Съ другой стороны, мы увидимъ, что въ нѣкоторыхъ вопросахъ эти асимптотическія выраженія могутъ замѣнять точныя значенія суммъ, почти всегда недоступныя. Мы предпошлемъ сперва слѣдующую теорему: Если на одной изъ границъ интервала сходимости степенной рядъ расходящійся, то изображаемая имъ функція возрастаетъ безпредѣльно, когда независимая перемѣнная, оставаясь внутри интервала, безпредѣльно приближается къ этой границѣ. Для бо́льшей опредѣленности и упрощенія доказательства мы будемъ всегда разсматривать верхнюю границу ϱ, и положимъ $\varrho=1$. Послѣднее не нарушаетъ общности разсужденія, потому что стоитъ только замѣнить x на ϱx, чтобы сдѣлать радіусъ сходимости равнымъ 1. Положимъ, что

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,\quad a_0+a_1+a_2+\cdots=\infty,$$

при чемъ, если понадобится, мы измѣнимъ знаки всѣхъ коэффиціентовъ. Нужно показать, что, какъ бы велико ни было число l, $f(x)$ дѣлается и остается больше l, когда x будетъ больше нѣкотораго опредѣленнаго числа, меньшаго 1, и достаточно близкаго къ 1. Возьмемъ нѣкоторое число $l'>l$ и, пользуясь расходимостью ряда $a_0+a_1+a_2+\cdots$, опредѣлимъ число ν такъ, чтобы при $n>\nu$ сумма $a_0+a_1+a_1+\cdots+a_n$ была больше l'. Замѣтимъ теперь, что при $0<x<1$ имѣемъ

$$(a_0+a_1+\cdots+a_{\nu+1})+(a_0+a_1+\cdots+a_{\nu+2})x$$
$$+(a_0+a_1+\cdots+a_{\nu+3})x^2+\cdots>\frac{l'}{1-x}$$

или

$$(a_0+a_1+\cdots+a_\nu)+a_{\nu+1}+a_{\nu+2}x+a_{\nu+3}x^2+\cdots>l'.$$

Если умножимъ лѣвую часть на $x^{\nu+1}$, то получимъ выраженіе

$$(a_0+a_1+\cdots+a_\nu)x^{\nu+1}-(a_0+a_1x+\cdots+a_\nu x^\nu)+f(x).$$

---

[1]) „Journal de Liouville“ 1856. p. 359. См. также сообщеніе Stiltjes'a Парижской Академіи Наукъ. Comptes rendus, t. XCVI p. 764.

Слѣдовательно,

$$f(x) > a_0(1 - x^{\nu+1}) + a_1(x - x^{\nu+1}) + \cdots + a_\nu(x^\nu - x^{\nu+1}) + l' x^{\nu+1}.$$

Не мѣняя теперь ν, заставимъ x приближаться къ предѣлу 1, тогда правая часть будетъ стремиться къ предѣлу l', и потому остается въ концѣ концовъ больше числа $l < l'$. A fortiori, $f(x)$ будетъ также больше l. Слѣдовательно, $\lim_{x=1} f(x) = \infty$.

339. Теорема. Положимъ, что два степенныхъ ряда съ положительными коэффиціентами будутъ расходящимися при одномъ и томъ же значеніи $x = \varrho$ на границѣ общаго интервала сходимости данныхъ рядовъ, положимъ далѣе, что при безпредѣльномъ возрастаніи n отношеніе коэффиціентовъ при x^n въ этихъ рядахъ стремится къ нѣкоторому конечному предѣлу. Тогда и отношеніе функцій, изображаемыхъ этими рядами, стремится къ тому же предѣлу, когда x стремится къ ϱ.

Это и есть та теорема, на которой основывается асимптотическое изображеніе степеннаго ряда. Приведемъ радіусъ сходимости къ 1 и замѣтимъ, что на основаніи предыдущей теоремы функціи

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad \psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

безпредѣльно возрастаютъ съ приближеніемъ x къ 1. Отсюда видно, что высказанная здѣсь теорема есть, такъ сказать, теорема Лопиталя (§ 310, b) для степенныхъ рядовъ. Однако, надо замѣтить, что теорема Лопиталя здѣсь не привела бы ни къ какому результату, потому что производныя φ' и ψ' имѣютъ также форму степенныхъ рядовъ, расходящихся при $x = 1$. Допустимъ теперь, что коэффиціенты a_n и b_n, по крайней мѣрѣ, начиная съ нѣкотораго мѣста, положительны, и что существуетъ предѣлъ l отношенія $\frac{a_n}{b_n}$ при безконечномъ n. Тогда, задавъ по произволу положительное, сколь угодно малое число ε, всегда можемъ найти такое число ν, чтобы при $n > \nu$ выполнялось неравенство

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon,$$

т. е., чтобы a_n оставалось въ предѣлахъ $(l - \varepsilon) b_n$ и $(l + \varepsilon) b_n$. Тогда и

$$\left| \frac{a_{\nu+1} + a_{\nu+2} x + a_{\nu+3} x^2 + \cdots}{b_{\nu+1} + b_{\nu+2} x + b_{\nu+3} x^2 + \cdots} - l \right| < \varepsilon$$

при $x > 0$. Съ другой стороны, при постоянномъ ν, такъ какъ

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ возрастаютъ безпредѣльно съ приближеніемъ x къ 1, видимъ, что отношеніе

$$\frac{1-\frac{1}{\psi(x)}(b_0+b_1x+\cdots+b_\nu x^\nu)}{1-\frac{1}{\varphi(x)}(a_0+a_1x+\cdots+a_\nu x^\nu)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{b_{\nu+1}+b_{\nu+2}x+b_{\nu+3}x^2+\cdots}{a_{\nu+1}+a_{\nu+2}x+a_{\nu+3}x^2+\cdots}$$

стремится къ предѣлу 1. Поэтому, при всякомъ данномъ ε' можно будетъ найти достаточно малый интервалъ слѣва отъ $x=1$, чтобы неравенства

$$(l-\varepsilon)(1-\varepsilon')<\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}<(l+\varepsilon)(1+\varepsilon')$$

выполнялись для всѣхъ значеній x въ этомъ интервалѣ. Отсюда слѣдуетъ, что при произвольно заданномъ положительномъ числѣ η, если положимъ, напримѣръ, $\varepsilon=l\varepsilon'=\frac{1}{3}\eta<l$, то будемъ имѣть для указанныхъ значеній x

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-l\right|<\eta, \text{ такъ что } \lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=l.$$

340. Теперь мы въ состояніи дополнить сказанное раньше о непрерывности степенныхъ рядовъ въ интервалѣ сходимости и доказать, что они будутъ непрерывными функціями и на границахъ интервала, если только остаются на нихъ сходящимися. Иными словами: Если на границѣ интервала сходимости степенной рядъ имѣетъ сумму l, то функція, изображаемая этимъ рядомъ, стремится къ предѣлу l, когда независимая перемѣнная, оставаясь внутри интервала, стремится къ границѣ его. Эта важная теорема принадлежитъ Абелю *). Теорема § 338 ее дополняетъ. Пусть

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,\quad a_0+a_1+a_2+\cdots\doteq l,$$

и примемъ, что $l>0$, что всегда возможно, потому что въ противномъ случаѣ всегда можно увеличить значеніе a_0 и достигнуть сказаннаго. Разсмотримъ теперь рядъ

$$\varphi(x)=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\cdots$$

и замѣтимъ, что (§ 327) радіусъ сходимости его равенъ 1 (XXXVI). При $x=1$ онъ расходящійся, потому что его общій членъ стремится къ предѣлу $l>0$. Такъ какъ его коэффиціенты, начиная съ нѣкотораго мѣста, всѣ положительны (по той же причинѣ), то

*) Она доказана Абелемъ въ цитированномъ уже мемуарѣ о биноміальномъ рядѣ, на основаніи другихъ соображеній.

можно примѣнить предыдущую теорему къ функціямъ $\varphi(x)$ и $\psi(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Тогда получимъ

$$\lim_{x=1}(1-x)\,\varphi(x) = \lim_{n=\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \text{ т. е. } \lim_{x=1} f(x) = l.$$

341. Примѣчаніе. Не слѣдуетъ думать, что теорема Абеля очевидна сама по себѣ. Надо принять во вниманіе, что въ ней доказывается равенство значеній двухъ величинъ, имѣющихъ существенно различный смыслъ, а именно:

$$\lim_{x=1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \text{ и } \lim_{n=\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n).$$

Впрочемъ, теорема Абеля даетъ возможность утверждать существованіе перваго предѣла, когда второй существуетъ, но очень можетъ случиться, что второго предѣла нѣтъ, когда первый существуетъ. Простымъ примѣромъ является слѣдующій:

$$\lim_{x=1}(1 - x + x^2 - \cdots) = \tfrac{1}{2}$$

а $\lim_{n=\infty}[1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \pm 1]$ не существуетъ. Наконецъ, для рядовъ не степенныхъ теорема не вѣрна, потому что числа

$$\lim_{x=a}(u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots), \quad \lim_{n=\infty}(u_0(a) + u_1(a) + \cdots + u_n(a))$$

могутъ оба существовать, не будучи равными. Напримѣръ,

$$\lim_{x=1}((x - x^2) + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \cdots) = 1, \quad \lim_{n=\infty}(0 + 0 + \cdots + 0) = 0.$$

342. Упражненія. а) Теорема Абеля даетъ намъ то, чего намъ недоставало, чтобы со всею полнотою установить нѣкоторыя разложенія гораздо болѣе быстрымъ путемъ, чѣмъ примѣненіе формулы Маклорена, иногда весьма неудобное. Такъ напримѣръ, чтобы получить разложеніе функціи $\log(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$ по степенямъ x, достаточно замѣтить, что производныя этихъ функцій разлагаются слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots, \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

и что самыя функціи обращаются въ нуль при $x = 0$. Тогда, на основаніи сказаннаго въ § 329, можно написать

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots, \quad \operatorname{arctg} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots$$

во всякомъ интервалѣ $(-a, a)$, гдѣ $a < 1$ и какъ угодно близко къ 1. Теперь теорема Абеля дозволяетъ распространить эти разложенія на случай $a = 1$ при единственномъ условіи, чтобы ряды остались сходящимися. Для перваго ряда это будетъ при $x = 1$, для второго при $x = \pm 1$, поэтому

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots, \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots.$$

b) Аналогичнымъ образомъ можно найти сумму биноміальнаго ряда

$$f(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

для всѣхъ значеній x и m, для которыхъ рядъ будетъ сходящимся, исключая только тотъ случай, когда одновременно $x=-1$, $m=0$. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$f'(x) = m\left(1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots\right),$$

далѣе, умножая на $(1+x)$ и замѣчая, что

$$\frac{(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!} + \frac{(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n)}{n!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!},$$

находимъ

$$(1+x)\,f'(x) = mf(x),$$

т. е.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1+x}.$$

Лѣвая часть, очевидно, есть производная отъ $\log f(x)$, вторая—производная отъ $m\log(1+x)$ или $\log(1+x)^m$. Эти функціи, слѣдовательно, могутъ отличаться одна отъ другой только постояннымъ слагаемымъ (§ 307, b), которое, впрочемъ, оказывается нулемъ, потому что обѣ функціи при $x=0$ обращаются въ нуль. Слѣдовательно, $f(x) = (1+x)^m$.

c) Воспользуемся теперь теоремою § 339, чтобы найти асимптотическое изображеніе ряда $f(x) = x + x^4 + x^9 + \cdots$, очевидно, расходящагося при $x=1$, но сходящагося слѣва отъ 1. Сперва разсмотримъ функцію

$$\varphi(x) = [\sqrt{1}]\,x + [\sqrt{2}]\,x^2 + [\sqrt{3}]\,x^3 + \cdots + [\sqrt{n}]\,x^n + \cdots,$$

связанную съ $f(x)$ очевиднымъ состношеніемъ $(1-x)\,\varphi(x) = f(x)$, и сравнимъ ее съ нижеслѣдующею

$$(1-x)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots,$$

въ которой коэффиціентъ при x^n равенъ (§ 337, c).

$$\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}(2n+1) = \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} + \cdots = 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} + \cdots.$$

Предѣлъ отношенія коэффиціентовъ при x^n въ обоихъ рядахъ будетъ поэтому равенъ

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\lim_{n=\infty}\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Отсюда, на основаніи упомянутой теоремы, имѣемъ

$$\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\varphi(x)=\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{1}{2}}f(x)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

и потому можемъ написать равенство

$$x+x^4+x^9+\cdots=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}},$$

асимптотически справедливое слѣва отъ $x=1$. Продолживъ вычисленіе, безъ большихъ затрудненій найдемъ болѣе приближенное выраженіе (XXXVII):

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sqrt{\pi(1-x)}+\cdots.$$

Къ тому же выраженію можно прямо придти, если считать извѣстнымъ одно свойство $f(x)$ [1]), доказать которое мы предлагаемъ читателю въ видѣ упражненія, хотя для доказательства находящіяся въ нашемъ распоряженіи элементарныя средства пока недостаточны *). Свойство это выражается равенствомъ

$$\left(\frac{1}{2}+x+x^4+x^9+\cdots\right)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}+x'+x'^4+x'^9+\cdots\right)\left(\log\frac{1}{x'}\right)^{\frac{1}{4}},$$

гдѣ числа x и x', оба лежащія между 0 и 1, связаны соотношеніемъ $\log\frac{1}{x}\cdot\log\frac{1}{x'}=\pi^2$. Въ силу этого соотношенія x' стремится къ нулю, когда x стремится къ 1, и въ этомъ предположеніи тотчасъ находимъ

$$\lim(x+x^4+x^9+\cdots)\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}\lim\left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\lim\sqrt{\frac{1-x}{\log\frac{1}{x}}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

d) Рядъ $f(x)=x-x^4+x^9-x^{16}+\cdots$ не будетъ сходящимся при $x=1$, но это не мѣшаетъ его суммѣ стремиться къ опредѣленному предѣлу, когда x стремится къ 1. Чтобы найти этотъ предѣлъ, замѣтимъ, что въ рядѣ

$$\frac{f(x)}{1-x}=x+x^2+x^3+x^9+x^{10}+\cdots+x^{15}+x^{25}+x^{26}+\cdots$$

коэффиціентъ при x^n, $a_n=1$ или $a_n=0$, смотря по тому, будетъ ли число $\nu=[\sqrt{n}]$ нечетное или четное. Легко выполнимое вычисленіе даетъ

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{1-(-1)^\nu}{2}(n+1)+\frac{(-1)^\nu}{2}\nu(\nu+1).$$

---

[1]) Cauchy: „Mémoire sur la théorie des nombres“ (1830, p. 614) Mémoires de L'Institut de France. Tome XVII.

*) См. § 760, i въ книгѣ VII.

Далѣе, замѣчая, что $0 \leqq n - \nu^2 \leqq 2\nu$, находимъ

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n+1} = \tfrac{1}{2} \pm \lim \frac{n - \nu^2}{2n} = \tfrac{1}{2}.$$

Послѣ этихъ замѣчаній достаточно сравнить рядъ

$$\varphi(x) = a_1 x + (a_1 + a_2) x^2 + (a_1 + a_2 + a_3) x^3 + \cdots,$$

съ рядомъ

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots,$$

чтобы видѣть, что $\lim\limits_{x=1} (1-x)^2 \varphi(x) = \tfrac{1}{2}$. Но $(1-x)^2 \varphi(x) = f(x)$. Слѣдовательно,

$$\lim_{x=1} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \cdots) = \tfrac{1}{2}.$$

(См. примѣчаніе XXXVIII.)

е) Если желаемъ найти асимптотическое выраженіе функціи

$$f(x) = x + \tfrac{1}{2} x^4 + \tfrac{1}{3} x^9 + \cdots$$

(при $x = 1$ рядъ расходящійся), то цѣлесообразно будетъ разсмотрѣть ряды

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-x}, \quad \psi(x) = \frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x},$$

въ которыхъ коэффиціенты при x^n будутъ соотвѣтственно H_ν и H_n, гдѣ $\nu = [\sqrt{n}]$ *). Предѣлъ отношенія этихъ коэффиціентовъ есть

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \nu}{\log n} = \frac{1}{2}$$

и, слѣдовательно, $\frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x}$ есть асимптотическая къ $f(x)$ функція. Чтобы идти дальше въ разложеніи $f(x)$, разсмотримъ функцію

$$f(x) - \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

въ которой

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = H_\nu - \frac{1}{2} H_n = \frac{1}{2} \mathbf{C} + \log \frac{\nu}{\sqrt{n}} + \cdots,$$

и, слѣдовательно, $a_1 + a_2 + a_3 \cdots = \tfrac{1}{2} \mathbf{C}$. Поэтому, на основаніи теоремы Абеля,

$$\lim_{x=1} \left(f(x) - \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{C}.$$

---

*) Въ этомъ легко убѣдиться, представивъ $\frac{1}{1-x}$ въ видѣ ряда $1 + x + x^2 + \cdots$ и поступая аналогично тому, какъ показано въ примѣчаніи къ предыдущему примѣру.

Лѣвой части можно дать другой видъ, замѣчая, что съ приближеніемъ x къ 1

$$\lim \log \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x} = \log \lim \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x} = 0, \text{ т. е. } \lim \left(\log \log \frac{1}{x} + \log \frac{1}{1-x} \right) = 0$$

Такимъ образомъ, можно написать асимптотическое, слѣва отъ 1, равенство [1]) (XXXIX)

$$x + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^9 + \cdots = -\frac{1}{2} \log \log \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \mathbf{C}.$$

f) $f(x) = 1^{\mu-1}x + 2^{\mu-1}x^2 + 3^{\mu-1}x^3 + \cdots$ принимаетъ при $x = 1$ значеніе $1^{\mu-1} + 2^{\mu-1} + 3^{\mu-1} + \cdots$, конечное при $\mu < 0$ (§ 212, a). При $\mu \geq 0$ она, напротивъ, безпредѣльно возрастаетъ слѣва отъ 1. Такъ какъ, при $\mu = 0$, $f(x) = -\log(1-x)$ (какъ извѣстно), то остается изслѣдовать только случай $\mu > 0$, и съ этой цѣлью достаточно сравнить $f(x)$ съ

$$(1-x)^{-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$$

припоминая опредѣленіе функціи Гамма § 252, c:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\, n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Мы тотчасъ видимъ, что отношеніе коэффиціентовъ при x^n при безконечномъ n стремится именно къ предѣлу $\Gamma(\mu)$ и потому [2]):

$$\lim_{x=1} (1^{\mu-1}x + 2^{\mu-1}x^2 + 3^{\mu-1}x^3 + \cdots)(1-x)^{\mu} = \Gamma(\mu).$$

Эта формула приводитъ къ разсмотрѣнію функціи Γ съ новой точки зрѣнія. Выраженіе, стоящее въ лѣвой части, можно представить въ видѣ $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$, полагая

$$a_n = n^{\mu-1} - \frac{\mu}{1}(n-1)^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}(n-2)^{\mu-1} - \cdots.$$

Теорема Абеля позволяетъ тогда выразить $\Gamma(\mu)$, какъ сумму $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, а такъ какъ

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^{\mu-1} - \frac{\mu-1}{1}(n-1)^{\mu-1} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2}(n-2)^{\mu-1} - \cdots,$$

то, замѣняя еще μ на $x+1$, можно написать [3])

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} \left(n^x - \frac{x}{1}(n-1)^x + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}(n-2)^x - \cdots \right).$$

---

[1]) N. Sonin: „Sur les polynômes de Bernoulli“ (Crelles Journal, Bd. 116, S. 147).

[2]) Appell. „Sur certaines séries ordonnés par rapport aux puissances croissantes d'une variable“ (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1878).

[3]) „Intermédiaire des Mathématiciens“, t. VI, p. 148.

g) Въ заключеніе воспользуемся формулою Дирихле, доказанною въ § 337, для асимптотическаго выраженія ряда Ламберта (§ 247, c)

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots.$$

Мы уже знаемъ, что этотъ рядъ можно преобразовать въ слѣдующій:

$$x\,0(1) + x^2 0(2) + x^3 0(3) + \cdots;$$

упомянутая формула Дирихле наводитъ на мысль изслѣдовать функцію

$$f(x) - \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} = \sum_1^\infty (0(n) - H_n)x^n$$

въ предположеніи, что x стремится къ 1 слѣва. Сумма первыхъ n коэффиціентовъ равна

$$0(1) + 0(2) + \cdots + 0(n) - (n+1)H_n + n = \mathbf{C}n + \cdots,$$

слѣдовательно, сама функція, раздѣленная на $\mathbf{C}(1-x)$, есть асимптотическая функція относительно $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$, т. е. относительно $\frac{x}{(1-x)^2}$. Поэтому будемъ имѣть

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} + \frac{\mathbf{C}x}{1-x} + \cdots.$$

Это выраженіе легко преобразовать въ другое, пользуясь тѣмъ же замѣчаніемъ, которое мы сдѣлали по поводу ряда Сонина, и написать

$$f(x) = \frac{\mathbf{C} - \log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}} + \cdots.$$

Такимъ образомъ, находимъ безконечно большой членъ разложенія Шлемильха, упомянутаго въ § 247, d), и этого достаточно, чтобы судить о значеніи Ламбертова ряда слѣва отъ единицы. Но, чтобы вычислить его сумму съ извѣстнымъ приближеніемъ, надо знать все разложеніе *) (XL)

$$\frac{\mathbf{C} - \log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}} + \frac{1}{4} - \frac{\log\frac{1}{x}}{144} - \frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^3}{86400} - \cdots.$$

---

*) Это и есть разложеніе, найденное Schlömilch'омъ въ указанной статьѣ, при помощи формулы Эйлера-Маклорена, о которой говорится въ § 357.

Интерполяціонныя формулы.

343. Задача интерполированія *) состоитъ въ построеніи функціи $y = f(x)$, принимающей данныя значенія $y_1, y_2, y_3, \ldots$ при данныхъ значеніяхъ $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$, т. е. подъ условіями

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x_3) = y_3, \ldots$$

Задача эта по существу своему, вообще говоря, неопредѣленная. Но если желаютъ, чтобы y было цѣлою функціею, степень которой меньше n, то достаточно задать n паръ соотвѣтствующихъ значеній x и y, чтобы функція была вполнѣ опредѣлена. Дѣйствительно, изъ элементарной Алгебры уже извѣстно **), что два полинома тождественны, если они равны между собою для значеній перемѣнной независимой, число которыхъ больше степени полиномовъ. Впрочемъ, этотъ частный случай задачи интерполированія приводится къ рѣшенію системы уравненій

$$a_0 x_i^{n-1} + a_1 x_i^{n-2} + a_2 x_i^{n-3} + \cdots + a_{n-2} x_i + a_{n-1} = y_i$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

относительно коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$, и такъ какъ опредѣлитель этой системы не равенъ нулю (§ 27, d), то прямо видно, что рѣшеніе будетъ единственное (§ 50). Точно такъ же, если $\lim_{n=\infty} x_n = 0$, то задача будетъ опредѣленною, когда требуется, чтобы искомая функція разлагалась въ степенной рядъ, но въ этомъ случаѣ задача можетъ не имѣть вовсе рѣшенія въ этой формѣ. Дѣйствительно, допуская, что существуютъ двѣ такія функціи, получимъ, что разность ихъ, вида $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ обращается въ нуль для безчисленнаго множества значеній x стремящихся къ нулю, а потому, вслѣдствіе непрерывности, она будетъ нулемъ при $x = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что $a_0 = 0$, а замѣчая, что и $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$ равно нулю для тѣхъ же значеній x, найдемъ $a_1 = 0$, затѣмъ $a_2 = 0$ и т. д., т. е. что обѣ функціи совпадаютъ въ одну. Далѣе, очевидно, что если числа $y_1, y_2, y_3, \ldots$ заданы по произволу, то самый вопросъ о существованіи такой функціи, остается открытымъ, такъ какъ прежде всего необходимо, чтобы эти числа стремились къ конечному предѣлу при безпредѣльно возрастающемъ n.

---

*) Точнѣе говоря, одна изъ задачъ интерполированія См. А. Марковъ „Теорія конечныхъ разностей" стр. 1.

**) См. Веберъ и Вельштейнъ, стр. 225.

344. Интерполяціонныя функціи [1]). Выраженіе

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

называется первою интерполяціонною функціею отъ $f(x)$ и представляетъ собою не что иное, какъ соотвѣтствующее интервалу (x_1, x_2) отношеніе приращенія функціи къ приращенію независимой перемѣнной (ср. § 281). Вторая интерполяціонная функція отъ $f(x)$ есть

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3)}{x_2 - x_3},$$

т. е. представляетъ собою при данномъ x_1 первую интерполяціонную функцію отъ $f(x_1, x)$ для интервала (x_2, x_3). Продолжая такимъ же образомъ, дойдемъ до $(n-2)$-ой интерполяціонной функціи и опредѣляемъ $(n-1)$-ую, какъ первую интерполяціонную функцію отъ $f(x_1, x_2, \ldots x_{n-2}, x)$ для интервала (x_{n-1}, x_n), т. е. полагая

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n}.$$

Всѣ эти функціи могутъ быть непосредственно выражены въ данныхъ числахъ $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$f(x_1, x_2) = \frac{y_1}{x_1 - x_2} + \frac{y_2}{x_2 - x_1}, \quad f(x_1, x_3) = \frac{y_1}{x_1 - x_3} + \frac{y_3}{x_3 - x_1},$$

а вычитая и раздѣляя на $x_2 - x_3$, находимъ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Легко написать и общій результатъ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots + \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})},$$

и провѣрить его обычнымъ способомъ. Послѣдняя, найденная Амперомъ, формула показываетъ, что всякая интерполяціонная функція отъ $f(x)$ симметрична относительно значеній x, отъ которыхъ она зависитъ.

---

[1]) См. Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino (1881 — 82 — 83). Въ 1878 г. помѣщена первая статья Genocchi „Объ интерполяціонныхъ функціяхъ" съ многочисленными указаніями на предшествующія изслѣдованія.

345. Формула Ньютона. Изъ опредѣленія первой интерполяціонной функціи отъ $f(x)$ относительно любого интервала (x, x_1) слѣдуетъ, что

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f(x_1, x),$$

и такъ какъ аналогично

$$f(x_1, x) = f(x_1, x_2) + (x - x_2)f(x_1, x_2, x),$$

то отсюда видимъ, что

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)f(x_1, x_2, x).$$

Продолжая такъ же далѣе, очевидно, придемъ къ слѣдующему результату

$$(17)\quad f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)f(x_1, x_2, x_3) + \cdots + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x).$$

Если желаемъ, чтобы $f(x)$ была полиномомъ степени $n - 1$ (или, какъ это можетъ случиться, степени ниже $n - 1$), то замѣчаемъ, что при такомъ предположеніи $f(x) - f(x_1)$ дѣлится на $x - x_1$, такъ что $f(x_1, x)$ будетъ полиномъ $(n - 2)$-ой степени. Отсюда же слѣдуетъ, что $f(x_1, x_2, x)$, разсматриваемая, какъ первая интерполяціонная функція отъ $f(x_1, x)$, будетъ полиномъ $(n-3)$-й степени, и такъ далѣе до $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)$, которая уже будетъ постоянною. Слѣдовательно,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n),$$

а подставляя это въ (17), находимъ

$$(18)\quad f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)f(x_1, x_2, x_3) + \cdots + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Это и есть формула Ньютона, дающая возможность всегда составить единственный полиномъ, степени ниже n, принимающій данныя значенія $y_1, y_2, \cdots, y_n$ при данныхъ значеніяхъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ перемѣнной x. Степень полинома, вообще $(n - 1)$-ая, можетъ понизиться, и это навѣрно случиться, если числа $y_1, y_2, \cdots, y_n$ заданы такъ, что $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$.

346. Формула Лагранжа. Чтобы ввести въ правую часть формулы (18) явнымъ образомъ числа $y_1, y_2, \cdots, y_n$, стоитъ только примѣнить формулу Ампера, доказанную въ § 344. Замѣтимъ сперва, что всякая интерполяціонная функція выражается линейно и однородно черезъ числа y, а потому и $f(x)$ будетъ выражаться подобнымъ же образомъ, такъ что можно положить

$$(19)\qquad f(x) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + \cdots + y_n f_n(x).$$

Функція $f_n(x)$ тотчасъ опредѣлится по формулѣ Ампера, послѣ того какъ замѣтимъ, что въ формулѣ (18) только послѣдній членъ заключаетъ въ себѣ y_n. Далѣе, достаточно замѣнить x_n черезъ какой нибудь x_i, чтобы по симметріи найти

$$(20)\quad f_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Формула (19), въ которой f_i имѣетъ выраженіе (20), есть интерполяціонная формула Лагранжа. Ее можно, впрочемъ, прямо составить на основаніи слѣдующаго замѣчанія. Если хотимъ найти рѣшеніе задачи въ видѣ выраженія (19), то $f_i(x)$ необходимо долженъ быть полиномомъ степени ниже n, обращающимся въ 1 при $x=x_i$, и въ нуль при всякомъ другомъ $x=x_j$, не равномъ x_i. А этимъ условіямъ мы, очевидно, удовлетворимъ, взявъ для $f_i(x)$ выраженіе (20). Найдя, такимъ образомъ, одну функцію $f(x)$, удовлетворяющую поставленнымъ требованіямъ, мы знаемъ, что другой не существуетъ, если степень ея не достигаетъ или не превосходитъ n.

347. Правая часть равенства (18) представляетъ собою функцію, принимающую данныя значенія $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $\dots$, $y_n=f(x_n)$, когда числу x мы дадимъ значенія $x=x_1, x_2, \dots, x_n$. Разность между лѣвою и правою частью есть, слѣдовательно, функція $R_n(x)$, которая обращается тождественно въ нуль, когда f есть тотъ полиномъ степени ниже n, который опредѣляется упомянутыми условіями. Вообще же о функціи $R_n(x)$ можно только сказать, что она имѣетъ корни $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$. Положимъ, что эти числа расположены въ возрастающемъ порядкѣ и замѣтимъ, что производная $R_n'(x)$ должна (§ 303) обратиться въ нуль при $n-1$ значеніяхъ x, лежащихъ соотвѣтственно въ интервалахъ (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$. Такимъ же образомъ заключаемъ, что $R_n''(x)$ обратится въ нуль при $n-2$ значеніяхъ x, лежащихъ также между x_1 и x_n и т. д. Наконецъ $R_n^{(n-1)}(x)$ обратится въ нуль при нѣкоторомъ значеніи ξ въ интервалѣ (x_1, x_n). Такъ какъ

$$R_n^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(x)-(n-1)!f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

то будемъ имѣть

$$(21)\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}.$$

Эта теорема весьма полезна въ различныхъ геометрическихъ вопросахъ. Замѣтимъ, что если $x_1, x_2, \dots, x_n$ одновременно стремятся къ предѣлу a, то и ξ стремится къ a. Поэтому, предполагая $f^{(n)}(x)$ непрерывною при $x=a$, найдемъ

$$(22)\quad \lim f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

Возвращаясь къ R_n, замѣтимъ, что формула (17) при замѣнѣ n на $n+1$ дастъ

$$R_n = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)f(x_1, x_2, \dots, x_n, x),$$

и, обозначая черезъ ξ число, лежащее между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ $x_1, x_2, \dots, x_n$ и x

$$R_n = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \tag{23}$$

Такимъ образомъ, формула Ньютона, если къ правой ея части прибавимъ выраженіе R_n, является обобщеніемъ формулы Тэйлора съ дополнительнымъ членомъ Лагранжа и сводится дѣйствительно къ этой формулѣ, на основаніи (22), когда заставимъ всѣ числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ одновременно стремиться къ предѣлу a.

348. Приложенія. a) Свойство, выражаемое формулою (22), даетъ намъ возможность отвѣтить на вопросъ, поставленный въ концѣ § 343, а именно, найти функцію $f(x)$, разлагающуюся въ степенной рядъ и принимающую заданныя a priori значенія для значеній $x_1, x_2, x_3, \dots$, стремящихся къ нулю. Пусть $n', n'', n''', \dots$ произвольныя цѣлыя числа, не равныя между собою и большія n. Если существуютъ числа

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = a_0, \quad \lim_{n=\infty} f(x_n, x_{n'}) = a_1, \quad \lim_{n=\infty} f(x_n, x_{n'}, x_{n''}) = a_2, \dots,$$

то искомая функція $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots$.

b) Вычисленіе обыкновеннаго логариѳма (при основаніи 10) любого числа всегда можно свести къ вычисленію логариѳма сколь угодно большого числа, черезъ умноженіе даннаго числа, если понадобится, на нѣкоторую степень 10. Мы покажемъ, что если имѣются въ распоряженіи таблицы логариѳмовъ съ ν знаками, и число x, котораго логариѳмъ ищемъ, будетъ больше $10^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}$, то всегда можно примѣнить извѣстное правило

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} n + (x+n)\operatorname{Log}\frac{n+1}{n}$$

гдѣ $n = [x]$. Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя формулу Ньютона съ дополнительнымъ членомъ (23) къ функціи $\operatorname{Log} x$, и полагая при этомъ $x_1 = n$, $x_2 = n+1$, мы получимъ именно предыдущее равенство, съ тѣмъ лишь отличіемъ, что къ правой части прибавится число

$$R = (x-n)(n+1-x)\frac{M}{2\xi^2}.$$

Замѣчая, что произведеніе $(x-n)(n+1-x)$, какъ произведеніе двухъ чиселъ, которыхъ сумма 1, никогда не больше $\frac{1}{4}$ (§ 314, a), и припоминая (§ 220), что $M < \frac{1}{2}$, тотчасъ увидимъ, что въ предѣлахъ точности вычисленій можно отбросить R, потому что

$$R < \frac{1}{16\xi^2} < \frac{1}{16\cdot 10^{2\left[\frac{\nu}{2}\right]}} < \frac{1}{10^{\nu}}.$$

c) Если $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ будемъ разсматривать, какъ координаты точекъ $M_1, M_2, \ldots$ на кривой, то первая интерполяціонная функція, очевидно, изображаетъ угловой коэффиціентъ хорды M_1M_2. Возьмемъ M_1 и M_2 въ смежности съ точкою M, абсцисса которой равна a, и будемъ приближать M_1 и M_2 безпредѣльно къ M. Если производная y' непрерывна при $x=a$, то формула (22)[1]) дастъ

$$\lim \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = f'(a)$$

и покажетъ, что касательная въ точкѣ M есть предѣльное положеніе всѣхъ сѣкущихъ M_1M_2, между тѣмъ какъ установленное раньше опредѣленіе касательной позволяетъ сдѣлать такое заключеніе лишь въ томъ случаѣ, когда одинъ конецъ сѣкущей неподвижно помѣщенъ въ точкѣ M.

d) Вторая интерполяціонная функція имѣетъ также простое геометрическое значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, изъ Аналитической Геометріи извѣстно, что площадь треугольника $M_1M_2M_3$ (фиг. 11) равна

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) f(x_1, x_2, x_3)$$

въ томъ предположеніи, что точка, двигающаяся по периметру, оставляя площадь, имъ ограниченную, слѣва, проходитъ вершины треугольника въ написанномъ выше порядкѣ. Предположимъ теперь, если $y=f(x)$ есть уравненіе кривой, вторую производную $f''(x)$ непрерывною при $x=a$ и отличною отъ 0, и опредѣлимъ нѣкоторый интервалъ въ смежности съ a (§ 273), въ которомъ $f''(x)$ сохраняетъ знакъ числа $f''(a)$. Границамъ этого интервала соотвѣтствуютъ на кривой точки P и Q. На основаніи формулы (21), для трехъ точекъ M_1, M_2, M_3 на дугѣ PQ функція $f(x_1, x_2, x_3)$ будетъ имѣть тотъ же знакъ, какъ и число $f''(a)$. Замѣтивъ это, фиксируемъ точку M_1, выбираемъ M_2 вправо отъ M_1, т. е. такъ, чтобы x_2 было больше x_1, а точку M_3 такъ, чтобы подвижная точка, перемѣстившаяся изъ M_1 въ M_2, должна была повернуть налѣво, чтобы попасть въ M_3. При этихъ условіяхъ σ будетъ числомъ положительнымъ, а поэтому $(x_3-x_1)(x_3-x_2)$ будетъ имѣть знакъ числа $f''(a)$, откуда слѣдуетъ, что $f''(a)>0$, если x_3 внѣ интервала (x_1, x_2), и $f''(a)<0$, если x_3 внутри (x_1, x_2). Теперь легко видѣть, что точка M_3 будетъ лежать внутри дуги M_1M_2 или внѣ ея, смотря по тому, будетъ ли эта дуга вогнута или выпукла по направленію къ нижней части фигуры. Отсюда слѣдуетъ, что въ первомъ случаѣ $f''(a)>0$, а во второмъ $f''(a)<0$. Къ этому заключенію можно придти проще, взявъ на кривой произвольную точку M между M_1 и M_2, а на хордѣ M_1M_2 точку M' имѣющую съ M общую абсциссу x. Уравненіе прямой M_1M_2 есть

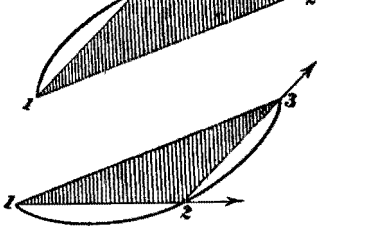


Рис. 11.

$$y = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2),$$

[1]) Это уравненіе можно было бы принять за опредѣленіе производной, что представило бы нѣкоторыя выгоды, на которыя указалъ Peano въ „Mathesis“ (1892 p. 12).

и разность между ординатою точки M и ординатою точки M' будетъ, на основаніи формулъ (17) и (21), равна

$$(x - x_1)(x - x_2)f(x_1, x_2, x) = \tfrac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)f''(\xi),$$

гдѣ ξ лежитъ x_1 и x_2. Эта разность имѣетъ, слѣдовательно, знакъ, противоположный знаку $f''(\xi)$ или $f''(a)$. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ точки M лежатъ ниже хорды M_1M_2, если $f''(a) > 0$, и выше, если $f''(a) < 0$. Это остается справедливымъ для всякой дуги, заключающейся въ M_1M_2, и для соотвѣтствующей хорды. Итакъ, знакъ $f''(x)$ можетъ служить къ тому, чтобы узнать какія дуги (достаточной малости) на данной кривой обращены вогнутостью вверхъ ($f''(x) > 0$) и какія внизъ ($f''(x) < 0$).

е) Если при данныхъ выше условіяхъ точки M_1, M_2, M_3 одновременно стремятся совпасть съ опредѣленною точкою M на кривой ($x = a$), то кругъ, описанный около треугольника $M_1M_2M_3$, также будетъ стремиться совпасть съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ кругомъ, который называется соприкасающимся кругомъ къ кривой въ точкѣ M. (Происхожденіе этого названія объяснится впослѣдствіи.) Чтобы доказать существованіе такого предѣльнаго круга, достаточно показать, что центръ круга $M_1M_2M_3$ стремится занять положеніе на нѣкоторой неподвижной прямой, и радіусъ его ϱ стремится къ опредѣленному предѣлу. Изъ элементарной Геометріи извѣстно, что радіусъ круга $M_1M_2M_3$ равенъ частному отъ дѣленія произведенія $l_1l_2l_3$ сторонъ треугольника $M_1M_2M_3$ на 4σ. Обозначая еще черезъ φ_1, φ_2, φ_3 углы наклоненія сторонъ треугольника къ оси x-овъ, будемъ имѣть

$$\pm (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) = l_1l_2l_3 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3.$$

Замѣчая, что всѣ три угла φ_1, φ_2, φ_3 стремятся къ предѣлу φ, гдѣ φ уголъ наклоненія касательной въ точкѣ M съ осью x-овъ, и припоминая свойство (22), найдемъ отсюда

$$\pm \frac{1}{\varrho} = 2 \lim f(x_1, x_2, x_3) \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 = f''(a)\cos^3\varphi,$$

гдѣ $\operatorname{tg}\varphi = f'(a)$. Слѣдовательно,

$$\varrho = \pm \frac{(1 + f'^2(a))^{\frac{3}{2}}}{f''(a)}.$$

Эта длина, весьма важная при изученіи кривыхъ, называется радіусомъ кривизны въ точкѣ $M(x = a)$. Что касается центра круга $M_1M_2M_3$, то онъ всегда находится на перпендикулярѣ къ M_1M_2, проходящемъ черезъ середину хорды M_1M_2. Когда точки M_1 и M_2 стремятся къ совпаденію съ M, прямая M_1M_2 стремится совпасть съ касательною въ точкѣ M, а перпендикуляръ къ ней, очевидно, съ нормалью къ кривой въ той же точкѣ. Отсюда слѣдуетъ, что соприкасающійся кругъ принадлежитъ къ числу тѣхъ круговъ, которые касаются данной кривой въ данной точкѣ M.

Бернулліевы и Эйлеровы числа.

349. Многія важныя функціи не разлагаются въ степенные ряды при помощи формулы Маклорена (10), потому что не удается найти общаго выраженія n-ой производной. Но, принимая во вниманіе, съ другой стороны, что въ эту формулу собственно входятъ не послѣдовательныя производныя функціи $f(x)$, а лишь частныя

ихъ значенія при $x = 0$, видимъ, что вычисляя производную n-го порядка отъ $f(x)$, мы дѣлаемъ въ дѣйствительности, строго говоря, больше того, что необходимо для разложенія функціи въ степенной рядъ. Понятно, что могутъ существовать другія средства для того, чтобы такъ или иначе получить искомое разложеніе. Въ этомъ отношеніи оказываются полезными нѣкоторыя спеціальныя послѣдовательности чиселъ, свойствами которыхъ мы прежде всего и займемся. Приложеніе ихъ, замѣтимъ это, часто приводитъ къ рядамъ не сходящимся, которыми, однако, несмотря на это можно пользоваться, потому что сумма n первыхъ членовъ весьма быстро приближается къ нѣкоторому предѣлу, отъ котораго потомъ при возрастаніи n она опять удаляется, такъ что наступаетъ расходимость или неопредѣленность ряда. Благодаря такому свойству, такіе ряды называютъ псевдо-сходящимися.

350. Теорія упомянутыхъ послѣдовательностей чиселъ основывается на слѣдующемъ замѣчаніи. Тождество

$$f(a + (h + x)) = f((a + h) + x), \tag{24}$$

въ которомъ обѣ части предполагаются разложенными въ рядъ Тэйлора, остается справедливымъ, когда замѣнимъ степени перемѣннаго x произвольными числами. Дѣйствительно, разложеніе $f(a + h + x)$ по формулѣ Тэйлора можно представить въ двухъ видахъ:

$$f((a + h) + x) = f(a + h) + \frac{x}{1} f'(a + h) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(a + h) + \cdots,$$

$$f(a + (h + x)) = f(a) + \frac{h + x}{1} f'(a) + \frac{(h + x)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots.$$

Если во второмъ рядѣ соберемъ всѣ члены, содержащіе x_n, то необходимо получимъ снова тотъ же коэффиціентъ (§ 329), какой имѣетъ x_n въ первомъ рядѣ. Отсюда ясно, что оба выраженія останутся тождественными, когда замѣнимъ числа 1, x, x^2, x^3, ... произвольными числами a_0, a_1, a_2, a_3, ... Такъ, напримѣръ, разлагая $(a + h + x)^2$, находимъ

$$a^2 + 2a(h + x) + (h^2 + 2hx + x^2) = (a + h)^2 + 2(a + h)x + x^2,$$

но можно также написать и

$$a^2 a_0 + 2a(h a_0 + a_1) + (h^2 a_0 + 2h a_1 + a_2) = (a + h)^2 a_0 + 2(a + h)a_1 + a_2,$$

каковы бы ни были числа a_0, a_1, a_2. Выраженіе

$$a_0 f(x) + \frac{a_1 h}{1} f'(x) + \frac{a_2 h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{a_3 h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \cdots$$

принято обозначать символически черезъ $f(x+ah)$ *). Особенно замѣчательна функція e^{ax}, т. е.

$$a_0 + \frac{a_1 x}{1} + \frac{a_2 x^2}{1\cdot 2} + \frac{a_3 x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

которую называютъ производящею функціею послѣдовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Полезно здѣсь же замѣтить, что правило умноженія рядовъ (§ 234) выражается слѣдующимъ символическимъ равенствомъ

$$e^{ax}\cdot e^{\beta x} = e^{(a+\beta)x}, \tag{25}$$

которымъ мы часто будемъ пользоваться впослѣдствіи.

351. Бернулліевы числа. Бернулліевыми числами называются числа, опредѣляемыя символическимъ равенствомъ

$$(B+1)^p - B^p = p, \tag{26}$$

гдѣ p послѣдовательно получаетъ значенія $1, 2, 3, \ldots$; кромѣ того, $B_0 = 1$. Такъ, при $p=2$ получимъ $2B_1 + 1 = 2$, откуда $B_1 = \frac{1}{2}$. При $p=3$, $3B_2 + 3B_1 + 1 = 3$, откуда $B_2 = \frac{1}{6}$, и продолжая такимъ же образомъ далѣе, найдемъ

$$B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30},$$
$$B_9 = 0,\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{11} = 0,\ B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{13} = 0,\ B_{14} = \frac{7}{6},$$
$$B_{15} = 0,\ B_{16} = -\frac{3617}{510},\ B_{17} = 0,\ B_{18} = \frac{43867}{798},\ B_{19} = 0, \ldots.$$

Теперь беремъ тождество

$$f(x+(B+1)h) - f(x+Bh) = \sum_{p=1}^{p=\infty} ((B+1)^p - B^p)\frac{h^p f^{(p)}(x)}{p!},$$

и замѣчаемъ, что въ силу формулы (26) правая часть приводится къ

$$hf'(x) + \frac{h^2}{1} f''(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2} f'''(x) + \cdots = hf'(x+h).$$

Слѣдовательно, принявъ еще во вниманіе тождество (24), будемъ имѣть:

$$f((x+h)+Bh) - f(x+Bh) = hf'(x+h). \tag{27}$$

Это основная формула въ теоріи Бернулліевыхъ чиселъ. Положивъ $x = -h$ и замѣнивъ потомъ h на x, получимъ

$$f(Bx) - f(Bx - x) = xf'(0). \tag{28}$$

---

*) Символизмъ состоитъ въ томъ, что въ разложеніи $f(x+ah)$ по степенямъ h показатели степеней $a^0, a^1, a^2, \ldots$ надо замѣнить указателями чиселъ $a_0, a_1, a_2, \ldots$

352. Всѣ Бернулліевы числа съ нечетнымъ указателемъ равны нулю, кромѣ $B_1 = \frac{1}{2}$. Дѣйствительно, при $f(x) = x^p$ формула (28) даетъ

$$B^p - (B-1)^p = 0, \tag{29}$$

предполагая p не равнымъ 1; при $p = 1$, въ правой части формулы (29) будетъ 1. При $p > 1$ будемъ, слѣдовательно, имѣть, въ силу (26), $(B+1)^p - (B-1)^p = p$, или замѣняя p на $2p$

$$B_{2p-1} + \tfrac{1}{6}(2p-1)(2p-2)B_{2p-3} + \cdots + \tfrac{1}{6}(2p-1)(2p-2)B_3 = 0.$$

Полагая $p = 2, 3, 4, \ldots$, находимъ, что B_3, B_5, $B_7, \ldots$ равны 0.

353. При $f(x) = e^x$ формула (28) дастъ производящую функцію Бернулліевыхъ чиселъ. Съ самомъ дѣлѣ, принявъ во вниманіе формулу (25), можемъ послѣдовательно писать

$$e^{Bx} - e^{Bx} \cdot e^{-x} = x, \quad e^{Bx} = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

или

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = 1 + B_1 x + \frac{B_2 x^2}{1\cdot 2} + \frac{B_3 x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots.$$

Та же формула (28) при другихъ формахъ функціи $f(x)$ даетъ другія интересныя разложенія. Напримѣръ, при $f(x) = \cos x$, имѣемъ

$$\cos Bx - \cos Bx \cdot \cos x - \sin Bx \cdot \sin x = 0.$$

Замѣчая теперь, что $B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$, находимъ

$$\sin Bx = B_1 x - \frac{B_3 x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{B_5 x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots = \frac{x}{2}$$

Итакъ, замѣняя x на $2x$, получимъ

$$\cos 2Bx = \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 2x} = x \cot x,$$

т. е.

$$x \cot x = 1 - \frac{4B_2 x^2}{1\cdot 2} + \frac{4^2 B_4 x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4^3 B_6 x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots.$$

Изъ этого разложенія, далѣе, тотчасъ получаются разложенія $\frac{x}{\sin x}$, $\operatorname{tg} x$ и т. д., если замѣтимъ, что

$$\cot\frac{x}{2} - \cot x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x - 2\cot 2x = \operatorname{tg} x$$

и т. д. Такимъ образомъ находимъ

$$x\cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \cdots,$$

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + \frac{127x^8}{604800} + \cdots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots.$$

354. Эйлеровы числа. Эйлеровыми числами называются числа, опредѣляемыя символическимъ равенствомъ

$$(E+1)^p + (E-1)^p = 0,$$

въ которомъ p послѣдовательно принимаетъ значенія 1, 2, 3, ... Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую послѣдовательность чиселъ

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 5,\ 0,\ -61,\ 0,\ 1365,\ 0,\ -50521,\ 0,\ 2702765, \ldots$$

Какъ очевидное слѣдствіе опредѣленія, вытекаетъ, что всѣ Эйлеровы числа съ нечетнымъ указателемъ равны 0. На основаніи того же опредѣленія имѣемъ тождество

$$f(x + (E+1)h) + f(x + (E-1)h) = 2f(x),$$

которое съ помощью тождества (24) обращается въ

$$f((x+h) + Eh) + f((x-h) + Eh) = 2f(x).$$

Это основная формула въ теоріи Эйлеровыхъ чиселъ. Если положимъ $x = 0$ и потомъ замѣнимъ h на x, то найдемъ

$$f(Ex + x) + f(Ex - x) = 2f(0).$$

Въ частности, при $f(x) = e^x$, съ помощью формулы (25), получимъ

$$e^{Ex}\cdot e^x + e^{Ex}\cdot e^{-x} = 2, \quad e^{Ex} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Иными словами, производящая функція Эйлеровыхъ чиселъ будетъ

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} - \cdots.$$

Другія интересныя разложенія получимъ при другихъ формахъ $f(x)$. Напримѣръ, при $f(x) = \cos x$, находимъ $\cos Ex = \sec x$, т. е.

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \cdots.$$

355. Эйлеровы числа обладаютъ многими интересными свойствами. Если разсмотримъ, напримѣръ, только не равныя нулю Эйлеровы числа, то легко замѣтить, что всѣ они, за исключеніемъ E_0, будутъ вида $6K-1$, что всѣ стоящія на четныхъ мѣстахъ кончаются цифрою 5, а на нечетныхъ цифрою 1 и т. д. Эти свойства заключаются въ теоремѣ Сильвестра [1]), которую мы здѣсь только выскажемъ: Если $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ дѣлители числа $p-p'$, то разность $E_{2p}-E_{2p'}$ дѣлится на тѣ изъ чиселъ $2\alpha+1$, $2\beta+1$, $2\gamma+1, \ldots$, которыя будутъ числами простыми. Въ дальнѣйшемъ будемъ заниматься исключительно Бернулліевыми числами. Но сперва замѣтимъ, что послѣднія весьма просто связаны съ Эйлеровыми. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$e^{(4B-1)x}-e^{(4B-3)x}=\frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1}(e^{-x}-e^{-3x})=\frac{4x}{e^{x}+e^{-x}}=2xe^{Ex},$$

и сравненіе коэффиціентовъ при x^p даетъ символическое равенство

$$E_{p-1}=\frac{(4B-1)^p-(4B-3)^p}{2p}.$$

Обратно, изъ тождества

$$e^{4Bx}-e^{2Bx}=\frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1}-\frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1}=\frac{2xe^{x}}{e^{x}+e^{-x}}=xe^{(E+1)x}$$

выводится

$$B_p=\frac{p(E+1)^{p-1}}{2^p(2^p-1)}.$$

356. Эйлерова формула суммированія. Чтобы оправдать полученныя разложенія, необходимо имѣть возможность оцѣнивать погрѣшность, которую мы дѣлаемъ, останавливаясь на извѣстномъ членѣ, и затѣмъ доказать, что эта погрѣшность стремится къ нулю, когда число принятыхъ во вниманіе членовъ безпредѣльно возрастаетъ. Если напишемъ основную формулу (27), удерживая только $n+1$ членовъ въ разложеніи каждаго слагаемаго лѣвой части, и обозначимъ остатокъ черезъ R_n, то получимъ формулу суммированія Эйлера [2])

$$hf'(x+h)=\delta f(x)+\frac{B_1h}{1}\delta f'(x)+\frac{B_2h^2}{1\cdot 2}\delta f''(x)+\cdots+\frac{B_nh^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\delta f^{(n)}(x)+R_n, \tag{30}$$

---

[1]) „Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris“ (t. 52, p. 212). Доказательство этой теоремы, данное Stern'омъ можно найти въ „Crelles Journal“ (Bd. 79, S. 67).

[2]) „Institutiones calculi differentialis“ (Cap. V).

при чемъ еще нужно отыскать границы, между которыми можетъ измѣняться R_n. Это опредѣленіе выполнено было Мальмстеномъ, [1]) давшимъ слѣдующія выраженія R_n для четнаго n (XLI)

$$R_n = \frac{B_{n+2}}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+3)}(x+0h), \quad R_n = \frac{0 B_{n+2}}{(n+2)!} \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}} h^{n+2} \delta f^{(n+2)}(x).$$

Доказательство этихъ формулъ требуетъ знанія интегральнаго исчисленія [2]), поэтому здѣсь мы ограничимся выводомъ выраженія, хотя менѣе удовлетворительнаго, но достаточнаго для обыкновенныхъ приложеній, и получающагося весьма просто. Разсмотримъ функцію

$$F(z) = f(z) + \frac{x-z+Bh}{1} f'(z) + \cdots + \frac{(x-z+Bh)^n}{n!} f^{(n)}(z)$$

и примѣнимъ къ ней формулу Лагранжа

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x+0h). \tag{31}$$

Далѣе, замѣтимъ, что

$$F(x) = f(x) + \frac{B_1 h}{1} f'(x) + \frac{B_2 h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{B_n h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

между тѣмъ какъ, на основаніи (29),

$$F(x+h) = f(x+h) + \frac{B_1 h}{1} f'(x+h) + \frac{B_2 h^2}{2!} f''(x+h) + \cdots + \frac{B_n h^n}{n!} f^{(n)}(x+h) - hf'(x+h).$$

Подставляя въ (31) и пользуясь формулою (30), находимъ

$$R_n = -hF'(x+0h).$$

Между тѣмъ, легко видѣть, что

$$F'(z) = \frac{(x-z+Bh)^n}{n!} f^{(n+1)}(z).$$

Поэтому будемъ имѣть

$$R_n = -\frac{(B-0)^n}{n!} h^{n+1} f^{(n+1)}(x+0h).$$

Чтобы имѣть возможность прилагать эту формулу, надо прежде

---

[1]) Malmstèn въ Crelle's Journal (1847, S. 55). Другую форму далъ Сонинъ (Sonin) въ Annales de l'École normale, 1889, p. 257.

[2]) См. Tannery: „Fonctions d'une variable" 2-e édition, 1910. t. II. p. 97, § 265, и Darboux: „Sur les développements en séries" (Journal de Liouville, 3-e serie, t. II).

всего знать границы, въ которыхъ мѣняется символическое выраженіе $(B-\theta)^n$, когда θ измѣняется отъ 0 до 1 и, кромѣ того, какъ увидимъ далѣе, надо будетъ знать, какъ измѣняется B_n при безпредѣльномъ возрастаніи n. Въ концѣ этой главы мы будемъ въ состояніи отвѣтить на эти вопросы и удостовѣриться въ законности разложеній $\frac{xe^x}{e^x-1}$, $\frac{x}{\sin x}$, $x\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д. Въ то же время мы будемъ имѣть средства узнать, съ какимъ приближеніемъ можно пользоваться другими не сходящимися разложеніями, съ которыми скоро встрѣтимся.

357. Формула суммированія Маклорена. Замѣняя въ формулѣ (27) x послѣдовательно на $x+h$, $x+2h$, ..., $x+nh$ и суммируя, получимъ

$$h\{f'(x+h)+f'(x+2h)+\cdots+f'(x+nh)\}=f(x+nh+Bh)-f(x+Bh).$$

Въ частности, при $x=0$ и $h=1$, находимъ

$$f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(n)=f(n+B)-f(B). \tag{32}$$

Это и есть формула суммированія Маклорена. Замѣтимъ, что правая часть есть не что иное, какъ символическое выраженіе ряда

$$l+f(n)+\frac{B_1}{1}f'(n)+\frac{B_2}{1\cdot 2}f''(n)+\frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(n)+\cdots,$$

гдѣ l постоянное, которое въ каждомъ частномъ случаѣ надо опредѣлить. Такимъ образомъ, формула (32) дополняетъ и разъясняетъ нѣкоторые изъ полученныхъ болѣе строгимъ путемъ въ § 334 результатовъ. Однако, понятно, что этою формулою надо пользоваться осторожно, если въ нее заранѣе не введено выраженіе остаточнаго члена R_n.

358. Приложенія. а) Сумма одинаковыхъ степеней первыхъ n цѣлыхъ чиселъ *). Для $f(x)=x^{p+1}$, формула (32) тотчасъ даетъ

$$1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p=\frac{(n+B)^{p+1}-B^{p+1}}{p+1},$$

т. е.

$$1^p+2^p+\cdots+n^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\frac{p}{12}n^{p-1}$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{720}n^{p-3}+\cdots+B_p n.$$

*) p предполагается цѣлымъ числомъ.

Напримѣръ,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n(n+1),$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2,$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$
$$= \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1),$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$
$$= \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1),$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$
$$= \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1),$$

$$1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$
$$= \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2),$$

. . . . . .

b) Гармоническій рядъ (§ 335, b). Для $f(x) = \log x$, формула (32) даетъ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log(n + B) - \log B = \mathbf{C} + \log n + \log\left(1 + \frac{B}{n}\right),$$

т. е. псевдо-сходящійся рядъ

$$H_n = \mathbf{C} + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} - \frac{1}{132n^{10}} + \cdots.$$

c) Формула Стирлинга (§ 335, c). Для $f(x) = x \log x - x$ такимъ же образомъ найдемъ

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \frac{1}{1188n^9} - \cdots},$$

но не надо забывать, что рядъ, стоящій въ показателѣ, не сходящійся. Для упражненія читателю предлагается преобразовать это выраженіе въ

$$n! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{e}\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{6} + \frac{1}{120n^2} + \cdots}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Если подъ знакомъ корня отбросимъ члены съ $\frac{1}{n}$, то получимъ приближенное выраженіе $n!$, найденное Forsyth'омъ [1]).

359. Бернулліевы полиномы. Подъ этимъ названіемъ разумѣютъ полиномы

$$\varphi_p(x) = \frac{(x-1+B)^{p+1} - B^{p+1}}{p+1}, \tag{33}$$

изображающіе при цѣломъ значеніи x, какъ мы видѣли, сумму $1^p + 2^p + \cdots + (x-1)^p$. Очевидно, $\varphi_p(1) = 0$, а принимая во вниманіе формулу (29), видимъ, что и $\varphi_p(0) = 0$. Найдемъ теперь значеніе $\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right)$. Мы имѣемъ

$$e^{\left(B-\frac{1}{2}\right)x} = e^{Bx} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1} = \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - 1} - \frac{x e^x}{e^x - 1};$$

отсюда получимъ, сравнивая коэффиціенты при $\frac{x^p}{p!}$ въ обѣихъ частяхъ равенства:

$$\left(B - \frac{1}{2}\right)^p = 2\frac{B_p}{2^p} - B_p = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) B_p.$$

Поэтому

$$\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{B_{p+1}}{p+1}. \tag{34}$$

Отсюда слѣдуетъ, что при p четномъ $\varphi^p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Впрочемъ, выраженіе $\varphi_p(x)$ легко представить въ такомъ видѣ, что корни его 0, 1 и $\frac{1}{2}$ сдѣлаются очевидными. Если въ правой части формулы (33) напишемъ $\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(B - \frac{1}{2}\right)$ вмѣсто $x - 1 + B$, и затѣмъ разложимъ ее по степенямъ $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, то получимъ выраженіе

$$\frac{(x-\frac{1}{2})^{p+1}}{p+1} - \frac{p}{24}(x-\tfrac{1}{2})^{p-1} + \frac{7p(p-1)(p-2)}{5760}(x-\tfrac{1}{2})^{p-3} - \cdots,$$

въ которомъ послѣдній членъ будетъ

$$\frac{B_{p+1}}{(p+1)2^p} \text{ или } -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) B_p\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

---

[1]) Въ „Reports of British Association" (Rep. of the 53-rd meeting, 1884, p. 407).

смотря по тому, будетъ ли p нечетное или четное. Замѣтимъ здѣсь, что $x-\frac{1}{2}$ мѣняетъ только знакъ при замѣнѣ x на $(1-x)$, откуда слѣдуетъ, что

$$\varphi_p(1-x)=(-1)^{p+1}\varphi_p(x) \quad (35)$$

*).

При p нечетномъ предыдущее разложеніе можно расположить по степенямъ $x(x-1)$, замѣчая, что $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x(x-1)+\frac{1}{4}$. Въ случаѣ четнаго p того же можно достигнуть, выведя за скобки $\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Такимъ путемъ, различая случай нечетнаго указателя отъ случая четнаго, получимъ слѣдующія замѣчательныя выраженія:

$$2p\varphi_{2p-1}(x)=x^2(x-1)^2\left[x^{p-2}(x-1)^{p-2}-\frac{p(p-2)}{6}x^{p-3}(x-1)^{p-3}\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-1)(p-3)(7p-8)}{360}x^{p-4}(x-1)^{p-4}-\cdots+p(2p-1)B_{2p-2}\right],$$
$$(4p+2)\varphi_{2p}(x)=x(x-1)(2x-1)\left[x^{p-1}(x-1)^{p-1}-\frac{p(p-1)}{6}x^{p-2}(x-1)^{p-2}\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-1)(p-2)(7p-1)}{360}x^{p-3}(x-1)^{p-3}-\cdots+(4p+2)B_{2p}\right].$$

360. Мы докажемъ теперь, что въ интервалѣ (0, 1) Бернулліевы полиномы съ четнымъ указателемъ обращаются въ нуль только на границахъ и въ его срединѣ, гдѣ и мѣняютъ знакъ, а Бернулліевы полиномы съ нечетнымъ указателемъ только на границахъ, принимая наибольшее по абсолютной величинѣ значеніе въ срединѣ интервала. Мы уже знаемъ, что $\varphi_{2p}(x)$ обращается въ нуль при $x=0$, 1 и $\frac{1}{2}$, а формула (35) показываетъ, что $\varphi_{2p}(x)$ мѣняетъ знакъ при переходѣ x съ одной стороны отъ $x=\frac{1}{2}$ на другую. Остается показать, что $\varphi_{2p}(x)$ не обращается въ нуль ни между 0 и $\frac{1}{2}$, ни между $\frac{1}{2}$ и 1. Допуская, что сказанное справедливо для $\varphi_{2p-2}(x)$, т. е. что эта функція сохраняетъ опредѣленный знакъ между 0 и $\frac{1}{2}$ и противоположный ему между $\frac{1}{2}$ и 1 **), примѣняемъ къ функціи $f(x)=\varphi_{2p}(x)$ извѣстную формулу интерполированія (§ 347)

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f(x_1, x_2)+\tfrac{1}{2}(x-x_1)(x-x_2)f''(\xi),$$

---

*) При p нечетномъ $\varphi_p(\frac{1}{2})=\dfrac{B_{p+1}}{(p+1)2^p}$.

**) Не обращаясь въ 0.

полагая $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ и принимая во вниманіе, что

$$\varphi''_{2p}(x) = 2p\,(x - 1 + B)^{2p-1} = 2p\,(2p-1)\,\varphi_{2p-2}(x).$$

Тогда получимъ

$$\varphi_{2p}(x) = p\,(2p-1)\,x\,(x - \tfrac{1}{2})\,\varphi_{2p-2}(\xi),$$

гдѣ ξ число, лежащее между 0 и 1. Изъ этой формулы, очевидно, вытекаетъ не только то, что $\varphi_{2p}(x)$ въ интервалѣ (0, 1) нигдѣ, кромѣ границъ и средины его, въ нуль не обращается, но и то, что знакъ ея противоположенъ знаку функціи $\varphi_{2p-2}(x)$. Такъ какъ прямо видно, что функція $\varphi_2(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$ слѣва отъ $\frac{1}{2}$ положительна, а справа отъ $\frac{1}{2}$ отрицательна, то мы и можемъ считать теорему доказанною для всѣхъ значеній p, и добавить, что $\varphi_{2p}(x)$ слѣва отъ $\frac{1}{2}$ имѣетъ знакъ $(-1)^{p+1}$, а справа противоположный. Далѣе, функція $\varphi_{2p-1}(x)$, производная которой есть

$$\varphi'_{2p-1}(x) = (x - 1 + B)^{2p-1} = (2p-1)\,\varphi_{2p-2}(x),$$

будетъ между 0 и $\frac{1}{2}$ возрастающей или убывающей, а между $\frac{1}{2}$ и 1, обратно, убывающей или возрастающей, смотря по тому, будетъ ли p четное или нечетное. Слѣдовательно, она сохраняетъ внутри интервала (0, 1) знакъ $(-1)^p$ и при $x = \frac{1}{2}$ получаетъ наибольшее по абсолютной величинѣ значеніе.

361. Доказанныя свойства влекутъ за собою важныя для Бернулліевыхъ чиселъ слѣдствія. Дѣйствительно, въ § 352 было показано, что всѣ Бернулліевы числа съ нечетнымъ указателемъ равны нулю. Но пока оставалось подъ сомнѣніемъ, не встрѣтятся ли и между числами B_2, B_4, B_6, ... нули. Формула (34) тотчасъ устраняетъ это сомнѣніе и, кромѣ того, показываетъ, что знакъ B_{2p} противоположенъ знаку $\varphi_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, т. е. одинаковъ съ $(-1)^{p+1}$. Итакъ, Бернулліевы числа съ четными указателями имѣютъ поочередно знаки + и —. То же самое можно утверждать и объ Эйлеровыхъ числахъ. Дѣйствительно, формула (33) даетъ

$$(2p+1)\,\varphi_{2p}(\tfrac{1}{4}) = (B - \tfrac{3}{4})^{2p+1}, \quad (2p+1)\,\varphi_{2p}(\tfrac{3}{4}) = (B - \tfrac{1}{4})^{2p+1},$$

откуда при помощи (35) слѣдуетъ (§ 355)

$$E_{2p} = 2^{4p+1}\,[\varphi_{2p}(\tfrac{3}{4}) - \varphi_{2p}(\tfrac{1}{4})] = -4^{2p+1}\,\varphi_{2p}(\tfrac{1}{4}).$$

По этому E_{2p} имѣетъ знакъ $(-1)^p$.

362. Изъ сказаннаго въ § 360 (и изъ той же формулы (34) слѣдуетъ, что при n четномъ въ интервалѣ (0, 1) будемъ имѣть

$$|\varphi_n(x)| \leq 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{|B_n|}{n}.$$

Иными словами,

$$|(B-\theta)^n - B^n| \leq 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)|B_n|$$

для всякаго значенія θ между 0 и 1. Такъ какъ, кромѣ того, въ этомъ интервалѣ φ_{n-1} сохраняетъ знакъ, противоположный знаку B_n, то

$$|(B-\theta)^n - B^n| = \left(1-\frac{(B-\theta)^n}{B^n}\right)|B_n|,$$

а слѣдовательно,

$$-1+\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{(B-\theta)^n}{B^n} \leq 1.$$

Мы видимъ отсюда, что абсолютная величина символическаго выраженія $(B-\theta)^n$ никогда не превосходитъ $|B_n|$, а поэтому абсолютная величина найденнаго въ § 356 выраженія R_{n+2} не больше абсолютной величины перваго изъ найденныхъ Мальмстеномъ выраженій R_n. Это показываетъ, что оба эти выраженія (R_n Мальмстена и R_{n+2} § 356) одинаково выгодны, когда дѣло идетъ о томъ, чтобы доказать, что R_n стремится къ нулю съ возрастаніемъ n до ∞. Того же самаго нельзя утверждать въ томъ случаѣ, когда надо найти границы, въ которыя хотятъ заключить $|R_n|$ въ псевдосходящихся разложеніяхъ, получаемыхъ при помощи символическаго вычисленія.

363. Доказанныя въ § 360 свойства Бернулліевыхъ полиномовъ находятъ легкое и интересное разъясненіе въ возможности представить эти полиномы тѣмъ или другимъ изъ рядовъ

$$\text{(36)} \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}{}' \frac{\sin nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty}{}' \frac{\cos nx}{n^p}$$

смотря по тому, будетъ ли указатель полинома нечетный или четный. Прежде намъ надо, однако, вычислить сумму ряда

$$\text{(37)} \qquad f(x) = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots,$$

доказавъ одну важную формулу, которою мы уже два раза раньше (§ 254, g и § 277, f) пользовались. Замѣчая, что

$$2\sin\frac{x}{2}\cos mx = \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(m-\frac{1}{2}\right)x,$$

легко найдемъ, что производная суммы n первыхъ членовъ ряда (37) равна

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція

$$F(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx + \frac{x}{2} + \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}},$$

опредѣленная во всякомъ интервалѣ, не содержащемъ въ себѣ кратнаго отъ 2π, имѣетъ производную

$$F'(x) = -\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{4(n+2)\sin^2\frac{x}{2}},$$

и прямо видно, что $\lim\limits_{n=\infty} F'(x) = 0$. Если $k = \left[\frac{x}{2\pi}\right]$, то можно къ функціи $F(x)$ примѣнить теорему Лагранжа (§ 306) для всякой пары значеній (напримѣръ, x и $\pi + 2k\pi$), выбранныхъ въ интервалѣ $(2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi)$ за исключеніемъ границъ. Такимъ образомъ, получимъ, обозначая черезъ ξ число, лежащее между x и $\pi + 2k\pi$, слѣдующій результатъ

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx$$
$$= \frac{\pi - x}{2} + k\pi - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}} + (x - \pi - 2k\pi)F'(\xi).$$

Отсюда, при безконечномъ n, находимъ

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} + \left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi. \tag{38}$$

364. Теперь мы можемъ вычислить сумму $\Phi_p(x)$ перваго или второго ряда (36), смотря по тому, будетъ ли p нечетное или четное число. Мы уже знаемъ, что при $p > 1$ (§ 320, b, c) ряды (36) равномѣрно сходящіеся во всякомъ интервалѣ. То же самое можно сказать и о рядѣ (37), гдѣ $p = 1$, если исключимъ значенія x, кратныя отъ 2π. Поэтому можемъ утверждать (§ 323), что

$$\Phi_p'(x) = (-1)^{p-1}\Phi_{p-1}(x). \tag{39}$$

Намъ извѣстна $\Phi_1(x) = f(x)$ по формулѣ (38). Эту формулу мы напишемъ въ видѣ $\Phi_1(x) = \pi(B - \varrho)$ *), гдѣ

$$\varrho = \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right].$$

Такъ какъ $\pi(B - \varrho)$ есть производная отъ $-\pi^2(B - \varrho)^2$, то (§ 307, b) будемъ имѣть

$$\Phi_2(x) = \pi^2(B - \varrho)^2 + a,$$

гдѣ a постоянное, по крайней мѣрѣ, во всякомъ интервалѣ $(2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, за исключеніемъ границъ. При этомъ a не зависитъ отъ k, потому что Φ_2 и $(B - \varrho)^2$ не измѣняются, когда x измѣнится на кратное отъ 2π. Чтобы найти a, замѣтимъ, что

$$\Phi_p(\pi) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^p} = -\sum_1^\infty \frac{1}{n^p} + 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^p} = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$$

или $\Phi_p(\pi) = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\Phi_p(0)$ для всякаго четнаго p и припомнимъ равенство $\left(B - \frac{1}{2}\right)^p = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)B_p$, доказанное въ § 359. При $p = 2$ имѣемъ

$$\Phi_2(\pi) = \pi^2\left(B - \frac{1}{2}\right)^2 + a = -\frac{\pi^2}{2}B_2 + a$$

и въ то же время

$$\Phi_2(\pi) = -\frac{1}{2}\Phi_2(0) = -\frac{\pi^2}{2}B_2 - \frac{1}{2}a.$$

Слѣдовательно, $a = 0$. Теперь, чтобы найти $\Phi_3(x)$, замѣчаемъ, что

$$\Phi_3'(x) = \Phi_2(x) = \pi^2(B - \varrho)^2,$$

а такъ какъ $\pi^2(B - \varrho)^2$ есть производная отъ $-\frac{2}{3}\pi^3(B - \varrho)^3$, то можемъ написать

$$\Phi_3(x) = -\tfrac{2}{3}\pi^3(B - \varrho)^3 + \beta,$$

гдѣ постоянное β тотчасъ опредѣлится изъ того, что въ силу непрерывности $\Phi_3(x)$ (§ 322) правая часть должна стремиться къ предѣлу $\Phi_3(2k\pi) = 0$, когда ϱ стремится къ 0. Поэтому $\beta = 0$. Для опредѣленія $\Phi_4(x)$ имѣемъ

$$\Phi_4'(x) = -\Phi_3(x) = \tfrac{2}{3}\pi^3(B - \varrho)^3,$$

откуда

$$\Phi_4(x) = -\frac{\pi^4}{3}(B - \varrho)^4 + \gamma,$$

---

*) Потому что $B_1 = \frac{1}{2}$.

а для опредѣленія γ стоитъ только замѣтить, что

$$\Phi_4(x) = -\frac{x^4}{3}\left(B-\frac{1}{2}\right)^4 + \gamma = \frac{x^4}{3}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)B_4 + \gamma$$

и въ то же время

$$\Phi_4(x) = -\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\Phi_4(0) = \frac{x^4}{3}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)B_4 - \left(1-\frac{1}{2^3}\right)\gamma,$$

такъ что $\gamma = 0$. Продолжая такъ далѣе, видимъ, что $\Phi_p(x) = \lambda_p(B-\varrho)^p$. Для опредѣленія λ_p служитъ формула (39), которая даетъ

$$\lambda_p = \frac{(-1)^p}{p}\cdot 2x\lambda_{p-1} = \frac{(-1)^{2+3+\cdots+p}}{2\cdot 3\cdots p}(2x)^{p-1}\cdot x.$$

Итакъ, окончательно,

$$\Phi_p(x) = (-1)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\cdot 2^{p-1}\frac{x^p}{p!}(B-\varrho)^p. \tag{40}$$

Эта формула и показываетъ, въ какой связи суммы $\Phi_p(x)$ находятся съ полиномами Бернулли. Въ самомъ дѣлѣ, пользуясь формулами (33) и (35), получаемъ, для всякаго x въ интервалѣ $(0, 1)$, изъ формулы (40) нижеслѣдующую

$$\varphi_{p-1}(x) = (-1)^{\left[\frac{p}{2}\right]}\frac{(p-1)!}{2^{p-1}x^p}\left(\Phi_p(0) - \Phi_p(2x)\right),$$

которая съ полною очевидностью обнаруживаетъ доказанныя въ § 360 свойства.

365. Приложенія. а) Однимъ изъ интереснѣйшихъ приложеній формулы (40) является вычисленіе суммъ

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

для четныхъ значеній p. Замѣняя въ (40) p на $2p$, получимъ

$$\frac{\cos x}{1^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2^{2p}} + \frac{\cos 3x}{3^{2p}} + \cdots = (-1)^{p-1}\cdot 2^{2p-1}\frac{x^{2p}}{(2p)!}(B-\varrho)^{2p}$$

и, въ частности, при $x = 0$

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \cdots = \frac{(-1)^{p-1}2^{2p-1}B_{2p}x^{2p}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2p}$$

напримѣръ:

$$s_2 = \frac{x^2}{6},\quad s_4 = \frac{x^4}{90},\quad s_6 = \frac{x^6}{945},\quad s_8 = \frac{x^8}{9450},\quad \cdots.$$

Когда p безпредѣльно возрастаетъ, лѣвая часть стремится къ 1, а поэтому, припоминая еще формулу Стирлинга (§ 221), получимъ формулу,

$$\lim_{p=\infty} |B_{2p}| \cdot \left(\frac{\pi e}{p}\right)^{2p+\frac{1}{2}} = 4\pi\sqrt{e}.$$

дающую отвѣтъ на вопросъ, поставленный въ концѣ § 356. (XLII). До сихъ поръ еще не удалось найти суммы s_p для нечетныхъ p. Извѣстны только преобразованія ихъ въ болѣе быстро сходящіеся ряды, дающіе возможность удобнаго численнаго приближеннаго ихъ вычисленія. Такъ, напримѣръ, нашли

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = 1{,}20205690315959428540\ldots$$

при помощи небольшого числа членовъ другого ряда [1])

b) Та же формула (40) при замѣнѣ p на $2p+1$ даетъ

$$\frac{\sin x}{1^{2p+1}} + \frac{\sin 2x}{2^{2p+1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2p+1}} + \cdots = (-1)^p \cdot 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}(B - \varrho)^{2p+1}.$$

При $x = \frac{\pi}{2}$, получаемъ $\varrho = \frac{1}{4}$, а въ § 361 мы нашли, что

$$\left(B - \frac{1}{4}\right)^{2p+1} = \frac{2p+1}{4^{2p+1}} E_{2p}.$$

Слѣдовательно,

$$1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} - \frac{1}{7^{2p+1}} + \cdots = \frac{(-1)^p E_{2p} \pi^{2p+1}}{4^{p+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2p}.$$

Напримѣръ,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32}, \cdots$$

Въ то время, какъ для всякаго нечетнаго p мы знаемъ значенія суммъ $1 - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{7^p} + \cdots$, для четнаго p мы не имѣемъ выраженія даже простѣйшей изъ нихъ

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

О ней имѣется обширное изслѣдованіе Каталана [2]).

---

[1]) Вотъ этотъ другой рядъ:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdots (n-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (3n-2)} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{5}{12n(3n-1)}\right).$$

См. сообщеніе А. Маркова (Markoff) въ Comptes rendus d'Ac. des sc. de Paris (16 Déc. 1889). До $p = 70$, суммы s_p съ 32 десятичными знаками вычислены Stieltjes (Acta mathematica 1887).

[2]) Catalan. Мемуары С.-Петерб. Академіи наукъ (7 серія т. XXXI). Въ Comptes rendus (t. 64, p. 1139) Bresse нашелъ

$$G = 0{,}915965594177219054603 57\ldots$$

ФУНКЦІИ ОТЪ НѢСКОЛЬКИХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ.

Основныя понятія и разысканіе производныхъ.

366. Нѣсколько перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ называются независимыми, если значеніе, приписанное одной изъ нихъ, никоимъ образомъ не стѣсняетъ свободы приписать какой-нибудь другой значеніе, зависящее до извѣстной степени отъ нашего произвола (XLIII). Совокупность всѣхъ системъ значеній, которыя можно приписать перемѣннымъ, образуютъ область n измѣреній; простѣйшій частный случай ($n = 1$) такой области представляетъ то, что мы раньше называли интерваломъ. Если каждой системѣ значеній n перемѣнныхъ, принадлежащихъ нѣкоторой области, соотвѣтствуетъ на основаніи нѣкотораго критеріума опредѣленное число, то совокупность этихъ чиселъ образуетъ нѣкоторую функцію отъ n перемѣнныхъ; эта функція будетъ опредѣлена въ данной области и обозначается символомъ $f(x, y, z, \ldots)$ или другими, ему подобными. Принято также говорить, что функція опредѣлена для каждой точки области, при чемъ подъ точкою разумѣютъ не что иное, какъ систему n значеній, приписанныхъ независимымъ перемѣннымъ. Свойства функцій, доказанныя для функцій отъ одной перемѣнной, легко распространяются и на функціи отъ многихъ перемѣнныхъ [1]).

367. Непрерывность. Когда независимыя перемѣнныя $x, y, z, \ldots$ получаютъ приращенія $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$, то функція получитъ приращеніе

$$\delta f = f(x + \delta x, y + \delta y, \ldots) - f(x, y, \ldots).$$

Функція называется непрерывною въ данной точкѣ, если δf всегда стремится къ нулю, когда $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ стремятся къ нулю, независимо отъ какого-либо соотношенія между послѣдними. Если $n-1$ изъ перемѣнныхъ разсматриваются, какъ постоянныя, т. е. сохраняютъ приписанныя имъ значенія, то данную функцію можно разсматривать, какъ функцію отъ оставшейся одной перемѣнной, и ясно, что если функція непрерывна относительно системы перемѣнныхъ, то она будетъ непрерывна и относительно каждой изъ нихъ въ отдѣльности. Но не слѣдуетъ думать, что и обратное заключеніе вѣрно, т. е. что непрерывность $f(x, y, z, \ldots)$ относительно системы перемѣнныхъ равносильна непрерывности ея относительно каждой перемѣнной въ отдѣльности. Чтобы убѣдиться въ томъ, что

---

[1]) См., напримѣръ, Genocchi et Peano „Calcolo“ (§ 129).

функція можетъ быть разрывна, будучи непрерывною относительно каждой изъ перемѣнныхъ, отъ которыхъ она зависитъ, достаточно разсмотрѣть слѣдующій примѣръ. Возьмемъ функцію отъ Декартовыхъ координатъ точки на плоскости, равную 1 для всякой точки на любой изъ координатныхъ осей и равную нулю для всякой другой точки. Эта функція, очевидно, разрывна въ началѣ координатъ, между тѣмъ какъ она, конечно, непрерывна въ той же точкѣ относительно каждой изъ перемѣнныхъ, когда другая остается равною нулю. Достаточно измѣнить значеніе функціи въ началѣ координатъ изъ 1 въ 0, чтобы функція потеряла непрерывность относительно каждой изъ перемѣнныхъ въ отдѣльности; тѣмъ не менѣе можно сказать, что теперь функція безконечно менѣе разрывна, чѣмъ была раньше.

368. Частныя производныя. Если функція f разсматривается, какъ функція одного x или одного y и т. д., то ея послѣдовательныя производныя называются частными производными по x, по y, и обозначаются символами f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx} и т. д. Напримѣръ, въ случаѣ функціи отъ двухъ перемѣнныхъ, будемъ имѣть, назначивъ по произволу значенія x и y,

$$f'_x(x, y) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad f'_y(x, y) = \lim_{h=0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

Далѣе изъ f'_x выводятся f''_{xx} и f''_{xy} такимъ же образомъ, какимъ f''_{yx} и f''_{yy} выводятся изъ f'_y, и т. д. Для того, чтобы существовали частныя производныя необходима непрерывность функціи относительно каждой изъ перемѣнныхъ въ отдѣльности, но не необходима непрерывность въ томъ болѣе широкомъ смыслѣ, о которомъ сказано въ предыдущемъ параграфѣ. Мы докажемъ теперь, что при разысканіи послѣдовательныхъ частныхъ производныхъ, порядокъ, въ которомъ производится вычисленіе производныхъ, не вліяетъ на результатъ, если всѣ функціи, послѣдовательно получаемыя, непрерывны *). Мы можемъ, очевидно, ограничиться случаемъ вторыхъ производныхъ, и показать, что производная отъ f'_x, взятая по y, не отличается отъ производной отъ f'_y, взятой по x, если получаемыя при этомъ функціи f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны. Дадимъ числамъ x и y приращенія $\delta x = h$, $\delta y = k$, и разсмотримъ выраженіе

$$\varrho = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

Если напишемъ его такъ

$$\varrho = [f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] - [f(x, y+k) - f(x, y)],$$

*) Въ широкомъ смыслѣ слова.

то оно представитъ приращеніе, получаемое функціею $f(x, y+k) - f(x, y)$, когда въ ней y и k остаются постоянными, а x переходитъ въ $x+h$. Поэтому, примѣняя теорему Лагранжа (§ 306) къ названной функціи отъ одного x, получимъ

$$\varrho = h\,[f'_x(x+\vartheta h, y+k) - f'_x(x+\vartheta h, y)],$$

гдѣ ϑ нѣкоторое опредѣленное число, лежащее между 0 и 1. Теперь мы имѣемъ передъ собою приращеніе, получаемое функціею $f'_x(x+\vartheta h, y)$, если при постоянномъ $x+\vartheta h$ дадимъ числу y приращеніе k. На основаніи той же теоремы, примѣненной теперь къ функціи одного y, получимъ

$$\varrho = hk f''_{xy}(x+\vartheta h, y+\vartheta' k),$$

гдѣ ϑ' тоже лежитъ между 0 и 1. Слѣдовательно, если функція f''_{xy} въ точкѣ (x, y) непрерывна, то ея значеніе въ этой точкѣ представляетъ собою предѣлъ, къ которому стремится отношеніе $\frac{\varrho}{hk}$ съ приближеніемъ h и k къ нулю. Если же напишемъ ϱ въ видѣ

$$\varrho = [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] - [f(x+h, y) - f(x, y)],$$

то совершенно аналогично докажемъ, что упомянутый выше предѣлъ равенъ значенію f''_{yx} въ той же точкѣ (x, y), предполагая, что и эта функція непрерывна въ этой точкѣ [1]). Слѣдовательно, $f''_{xy} = f''_{yx}$.

369. Сложныя (составныя) функціи. Если въ $y = f(u, v, w, \ldots)$ u, v, w, $\ldots$ не независимыя перемѣнныя, а функціи отъ одной независимой перемѣнной x, то и y функція одного x, хотя и представляется въ видѣ функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что y есть сложная или составная функціи, а u, v, w, $\ldots$ составляющія функціи. Если первыя частныя производныя отъ функціи f непрерывны и первыя производныя составляющихъ функцій существуютъ, то, какъ сейчасъ докажемъ, производная отъ сложной функціи равна суммѣ всѣхъ производныхъ, получаемыхъ по правилу разысканія производной функціи отъ функціи, когда f по очереди разсматривается, какъ функція одного u, одного v и т. д. Само собою разумѣется, что при составленіи частныхъ производныхъ отъ f по u, по v и т. д., эти перемѣнныя u, v и т. д., разсматриваются,

---

[1]) Въ дѣйствительности, мы предполагаемъ больше, чѣмъ нужно. Minimum условій, при которыхъ $f''_{xy} = f''_{yx}$ указанъ Peano. См. „Mathesis“ 1890, p. 153.

какъ независимыя. Мы можемъ ограничиться, для простоты, доказательствомъ теоремы для случая двухъ составляющихъ функцій. Положимъ, что приращенію δx соотвѣтствуютъ приращенія h и k функцій u и v. Приращеніе y будетъ $\delta y = f(u+h,\ v+k) - f(u,\ v)$. По теоремѣ Лагранжа имѣемъ

$$f(u+h,\ v) - f(u,\ v) = hf_u'(u+\vartheta h,\ v),$$
$$f(u+h,\ v+k) - f(u+h,\ v) = kf_v'(u+h,\ v+\vartheta' k).$$

Отсюда, сложивъ и раздѣливъ на δx, находимъ

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} f_u'(u+\vartheta h,\ v) + \frac{\delta v}{\delta x} f_v'(u+h,\ v+\vartheta' h),$$

а переходя къ предѣламъ и принимая во вниманіе сдѣланныя предположенія, получимъ

$$y' = u' f_u'(u,\ v) + v' f_v'(u,\ v). \tag{1}$$

370. Примѣчанія. a) Теорема остается, очевидно, справедливою, если только одна изъ частныхъ производныхъ непрерывна относительно системы перемѣнныхъ u, v, а другая только относительно одной соотвѣтствующей перемѣнной.

b) Въ правилѣ (1) заключаются, какъ частные случаи, всѣ доказанныя раньше (§ 285 и слѣд.) правила разысканія производныхъ. Такъ, напримѣръ, если $y = u+v$, uv, $\frac{u}{v}$ и т. д., то соотвѣтственно получимъ

$$f_u' = 1,\ v,\ \frac{1}{v},\ \cdots;\quad f_v' = 1,\ u,\ -\frac{u}{v^2},\ \cdots,$$

и (1) дастъ

$$y' = u' + v',\ vu' + uv',\ \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2},\ \cdots.$$

c) Далѣе, правило (1) даетъ возможность непосредственно найти производныя нѣкоторыхъ функцій, для разысканія которыхъ прежде приходилось прибѣгать къ особымъ пріемамъ. Такъ, напримѣръ, чтобы найти производную отъ $y = x^x$ можно разсматривать сперва основаніе x, а потомъ показатель x, какъ единственную перемѣнную, взять производную отъ степени перемѣннаго числа, а потомъ производную отъ показательной функціи, и сложить результаты; тогда и получимъ

$$y' = x \cdot x^{x-1} + x^x \log x = x^x(1 + \log x).$$

Въ болѣе общемъ случаѣ $y = u^v$, гдѣ u и v функціи отъ x, найдемъ

$$y' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v v' \log u = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \log u \right).$$

371. Однородность. Функція $f(x, y, z, \ldots)$ называется однородною степени m, если тождественно имѣемъ

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots). \tag{2}$$

Таковы, напримѣръ, разсмотрѣнныя въ первой книгѣ алгебраическія формы, а въ частности квадратныя—однородныя функціи второй степени. Такимъ же образомъ однородными функціями соотвѣтственно степеней 0, $\frac{1}{2}$, -1 будутъ функціи

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}, \quad \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}, \quad \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{x+y+z}\right)^2$$

и т. д. Замѣтимъ, что первыя частныя производныя однородной функціи m-ой степени будутъ однородными функціями $(m-1)$-ой степени. Дѣйствительно, сравнивая производныя по x отъ обѣихъ частей тождества (2) и раздѣляя на t, получимъ какъ разъ

$$f'_x(tx, ty, tz, \ldots) = t^{m-1} f'_x(x, y, z, \ldots),$$

тождество, отличающееся отъ (2) лишь тѣмъ, что f замѣнено на f'_x, а m на $m-1$.

372. Однородныя функціи характеризуются слѣдующимъ свойствомъ: Сумма произведеній частныхъ производныхъ однородной функціи степени m, умноженныхъ каждая на соотвѣтствующую перемѣнную, равна самой функціи, умноженной на m. Дѣйствительно, написавъ (2) въ видѣ

$$\frac{1}{t^m} f(tx, ty, tz, \ldots) = f(x, y, z, \ldots), \tag{3}$$

выводимъ отсюда, взявъ производныя по t, при постоянныхъ x, y, z,

$$\frac{1}{t^m}\left[x f'_x(tx, ty, \ldots) + y f'_y(tx, ty, \ldots) + \cdots\right] - \frac{m}{t^{m+1}} f(tx, ty, \ldots) = 0, \tag{4}$$

откуда при $t = 1$

$$x f'_x(x, y, \ldots) + y f'_y(x, y, \ldots) + \cdots = m f(x, y, \ldots).$$

Это теорема Эйлера. Замѣтимъ теперь слѣдующее. Если въ послѣднемъ тождествѣ замѣнимъ $x, y, z, \ldots$ черезъ $tx, ty, tz, \ldots$ и раздѣлимъ обѣ части на t^{m+1}, то придемъ снова къ тождеству (4), которое показываетъ, что производная лѣвой части въ (3) равна нулю, а слѣдовательно, эта лѣвая часть сама отъ t не зависитъ, и

потому всегда равна тому значенію, которое получимъ, положивъ $t = 1$. Такимъ образомъ, снова приходимъ къ тождеству (2), т. е. именно къ опредѣленію однородности.

373. Производная опредѣлителя. Какъ приложеніе правила (1) разсмотримъ первый изъ опредѣлителей

$$y = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

предполагая, что второй есть взаимный перваго (§ 34). Производная отъ y по одному изъ его элементовъ равна алгебраическому дополненію этого элемента. Дѣйствительно, мы имѣемъ, напримѣръ, $y = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$. Единственный членъ, содержащій u_i, есть a_iu_i, и a_i отъ u_i не зависитъ. Слѣдовательно, $y'_{u_i} = a_i$. Если, далѣе, всѣ элементы суть функціи одной и той же перемѣнной x, то y есть функція отъ x, производная которой, по правилу (1), будетъ

$$y' = a_1u_1' + a_2u_2' + a_3u_3' + b_1v_1' + b_2v_2' + b_3v_3' + c_1w_1' + c_2w_2' + c_3w_3'.$$

Кромѣ предположенія, что элементы опредѣлителя имѣютъ производныя, никакихъ другихъ не требуется, потому что частныя производныя отъ y, какъ суммы произведеній непрерывныхъ функцій, сами непрерывны. Полученное выраженіе для y' можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$(5) \qquad y' = \begin{vmatrix} u_1' & v_1 & w_1 \\ u_2' & v_2 & w_2 \\ u_3' & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1' & w_1 \\ u_2 & v_2' & w_2 \\ u_3 & v_3' & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1' \\ u_2 & v_2 & w_2' \\ u_3 & v_3 & w_3' \end{vmatrix}.$$

Въ этомъ состоитъ правило разысканія производной отъ функціи отъ x, представленной въ видѣ опредѣлителя. Оно справедливо, очевидно, для опредѣлителя любого порядка.

374. Опредѣлители Вронскаго. Въ нѣкоторыхъ приложеніяхъ особенно важное значеніе имѣютъ опредѣлители Вронскаго. Въ этихъ опредѣлителяхъ первый столбецъ состоитъ изъ производныхъ функцій отъ одной перемѣнной x, а слѣдующіе изъ послѣдовательныхъ производныхъ отъ этихъ функцій. Вычисленіе произвольной такого опредѣлителя дѣлается особенно просто по правилу (5). Такъ, напримѣръ, если

$$y = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}, \qquad y' = \begin{vmatrix} u & u' & u''' \\ v & v' & v''' \\ w & w' & w''' \end{vmatrix},$$

(см. § 16), такъ что, для полученія производной отъ опредѣлителя Вронскаго n-го порядка, стоитъ только замѣнить въ немъ $(n-1)$-ыя производныя n-ыми. Далѣе, если обозначимъ опредѣлитель Вронскаго n-го порядка просто черезъ $(u, v, w, \ldots)$, то, какъ легко видѣть, будемъ имѣть

$$(tu, tv, tw, \ldots) = t^n (u, v, w, \ldots). \tag{6}$$

Это свойство, представляющее по формѣ столь большую аналогію съ опредѣленіемъ однородныхъ функцій, легко доказать. Составивъ опредѣлитель Вронскаго функціи tu, tv, tw, ..., замѣчаемъ, что во второмъ столбцѣ можно отбросить элементы съ множителемъ t', потому что они пропорціональны соотвѣтствующимъ элементамъ перваго столбца; въ третьемъ столбцѣ послѣ этого можно откинуть элементы съ множителями t' и t'', какъ соотвѣтственно пропорціональные элементамъ перваго и второго столбца. Въ концѣ концовъ придемъ къ опредѣлителю $(u, v, w, \ldots)$, въ которомъ всѣ элементы будутъ умножены на t, т. е. именно къ равенству (6) (§ 15).

375. Докажемъ теперь весьма важное свойство опредѣлителей Вронскаго, выражающееся въ слѣдующей теоремѣ: Чтобы двѣ или нѣсколько функцій были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ихъ опредѣлитель Вронскаго не былъ равенъ нулю. Прежде всего замѣтимъ, что функціи называются линейно независимыми, если между ними не существуетъ линейнаго и однороднаго соотношенія съ постоянными коэффиціентами. Иными словами, функціи u, v, w, ... не независимы линейно, если существуютъ n постоянныхъ a, b, c, ..., не равныхъ нулю одновременно, для которыхъ тождественно имѣетъ мѣсто равенство

$$au + bv + cw + \cdots = 0. \tag{7}$$

Если такое соотношеніе существуетъ, то будемъ также имѣть $au' + bv' + cw' + \cdots = 0$, $au'' + bv'' + cw'' + \cdots = 0$ и т. д., и условіе совмѣстности этихъ уравненій, линейныхъ и однородныхъ относительно неизвѣстныхъ a, b, c, ..., будетъ $(u, v, w, \ldots) = 0$. Остается, слѣдовательно, показать, что, обратно, если этотъ опредѣлитель равенъ нулю тождественно, то между функціями u, v, w, ... будетъ существовать соотношеніе вида (7). Замѣтимъ прежде всего, что при $n = 1$ уравненіе (7) выражаетъ именно то, что $(u) = u$ обращается въ нуль. Отсюда слѣдуетъ, что для доказательства теоремы достаточно доказать, что она будетъ справедлива для n функцій, если допустимъ, что она вѣрна для меньшаго числа функцій [1]). Если бы u было равно 0, то соотношеніе (7), очевидно, удовле-

[1]) Demoulin. „Mathesis“ (1897, p. 62).

творялось бы при $a = 1$, $b = c = \cdots = 0$. Поэтому можно предположить, что u не равно нулю тождественно, и, припоминая теорему (6), написать

$$0 = (u, v, w, \ldots) = u^n\left(1, \frac{v}{u}, \ldots\right) = u^n\left(\left(\frac{v}{u}\right)', \left(\frac{w}{u}\right)', \ldots\right)$$

Но послѣдній опредѣлитель Вронскаго будетъ порядка $(n-1)$-го, и такъ какъ онъ равенъ нулю, по нашему допущенію, то отсюда вытекаетъ соотношеніе $b\left(\frac{v}{u}\right)' + c\left(\frac{w}{u}\right)' + \cdots = 0$, гдѣ $b, c, \ldots$ постоянныя, не равныя нулю одновременно. Поэтому первообразная функція $b\left(\frac{v}{u}\right) + c\left(\frac{w}{u}\right) + \cdots$ равна нѣкоторому постоянному, которое можно обозначить черезъ $-a$, и получимъ окончательно, что n функцій $u, v, w, \ldots$ связаны соотношеніемъ вида (7). (XLIV).

Разложенія въ ряды. Maxima и minima.

376. Формулы Тэйлора и Маклорена весьма легко распространяются на функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Фиксируемъ нѣкоторую точку $(a, b, c, \ldots)$ и въ смежности съ нею другую $(x, y, z, \ldots)$; обѣ въ той области, въ которой $f(x, y, z, \ldots)$ опредѣлена. Положимъ затѣмъ $u = a + t(x-a)$, $v = b + t(x-b)$, $w = c + t(x-c), \ldots$ и разсмотримъ $f(u, v, w, \ldots)$, какъ функцію одного t. Производная этой функціи $F(t)$ легко опредѣляется по правилу (1), если замѣтимъ, что производныя, взятыя по t, отъ функцій $u, v, w, \ldots$ будутъ $u' = x-a$, $v' = x-b$, $w' = x-c, \ldots$ Такимъ образомъ, получимъ

$$F'(t) = (x-a)f'_x(u, v, \ldots) + (y-b)f'_y(u, v, \ldots) + (z-c)f'_z(u, v, \ldots) + \cdots$$

Взявъ снова производную, найдемъ

$$F''(t) = (x-a)^2 f''_{xx}(u, v, \ldots) + (y-b)^2 f''_{yy}(u, v, \ldots) + (z-c)^2 f''_{zz}(u, v, \ldots) + \cdots$$
$$+ 2(x-a)(y-b)f''_{xy}(u, v, \ldots) + 2(x-a)(z-c)f''_{xz}(u, v, \ldots)$$
$$+ 2(y-b)(z-c)f''_{yz}(u, v, \ldots) + \cdots.$$

Продолжая такимъ же образомъ, замѣтимъ, что можно положить символически

$$F^{(n)}(t) = |(x-a)f'_x(u, v, \ldots) + (y-b)f'_y(u, v, \ldots) + \cdots|^n,$$

если условиться въ разложеніи n-ой степени полинома замѣнять произведеніе $f'_x f'_y f'_z \ldots$ производною $f^{(n)}_{xyz} \ldots$ вычисленною для точки $(u, v, w, \ldots)$, которая совпадетъ съ $(a, b, c, \ldots)$ при $t = 0$, и съ

$(x, y, z, \ldots)$ при $t = 1$. Послѣ этого, стоитъ только подставить выраженія F, F', F'', ... въ формулу Маклорена:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0),$$

чтобы получить

$$f(x, y, \ldots) = f(a, b, \ldots) + (x-a)f'_x(a, b, \ldots) + (y-b)f'_y(a, b, \ldots) + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}[(x-a)^2 f''_{xx}(a, b, \ldots) + \cdots + 2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a, b, \ldots) + \cdots]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}[(x-a)^n f^{(n)}_{xx\ldots x}(\xi, \eta, \ldots) + n(x-a)^{n-1}(y-b)f^{(n)}_{xx\ldots y}(\xi, \eta, \ldots) + \cdots],$$

гдѣ ξ, η, ζ, ... числа, лежащія соотвѣтственно между x и a, y и b, z и c, ... Это Тэйлорова формула для функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Если положимъ въ ней $a = b = c = \ldots = 0$, то получимъ формулу Маклорена:

$$f(x, y, \ldots) = f(0, 0, \ldots) + xf'_x(0, 0, \ldots) + yf'_y(0, 0, \ldots) + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}[x^2 f''_{xx}(0, 0, \ldots) + y^2 f''_{yy}(0, 0, \ldots) + \cdots + 2xyf''_{xy}(0, 0, \ldots) + \cdots]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}[x^n f^{(n)}_{xx\ldots x}(\theta x, \theta y, \ldots) + nyx^{n-1}f^{(n)}_{xx\ldots y}(\theta x, \theta y, \ldots) + \cdots].$$

Она даетъ намъ, въ предположеніи, что послѣдній (дополнительный) членъ стремится къ нулю съ возрастаніемъ n до безконечности, разложеніе функціи $f(x, y, z, \ldots)$ въ рядъ алгебраическихъ формъ степеней 1, 2, 3, ...

377. Перейдемъ теперь къ изслѣдованію вопроса о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ (maxima и minima) функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Когда говорятъ, что нѣкоторое свойство имѣетъ мѣсто въ смежности съ точкою $(a, b, c, \ldots)$ или въ окрестности точки $(a, b, c, \ldots)$, то этимъ утверждаютъ существованіе такого положительнаго числа h, что означенное свойство имѣетъ мѣсто для всѣхъ точекъ $(x, y, z, \ldots)$ удовлетворяющихъ условіямъ

$$(8) \qquad |x-a| \leqq h, \quad |y-b| \leqq h, \quad |z-c| \leqq h, \ldots$$

за исключеніемъ, въ крайнемъ случаѣ, самой точки $(a, b, c, \ldots)$. Принявъ это во вниманіе, говорятъ, что $f(x, y, z, \ldots)$ будетъ minimum (или maximum) въ точкѣ $(a, b, c, \ldots)$, если въ смежности съ этою точкою ни одно изъ значеній функціи не меньше (или не больше), чѣмъ $f(a, b, c, \ldots)$. Иными словами, нужно имѣть возможность указать такое достаточно малое положительное число

h, чтобы для всѣхъ значеній $x, y, z, \ldots$, удовлетворяющихъ условіямъ (8), имѣло мѣсто первое (или второе) изъ условій

(9) $\quad f(a, b, c, \ldots) \leq f(x, y, z, \ldots), \quad f(a, b, c, \ldots) \geq f(x, y, z, \ldots).$

Если эти условія дѣйствительно выполняются, то, очевидно, обозначенная выше черезъ $F(t)$ функція будетъ minimum или maximum при $t = 0$. Дѣйствительно, при выполненіи условій (9) будемъ имѣть

$$F(0) \leq F(t), \quad \text{или} \quad F(0) \geq F(t)$$

для всѣхъ значеній t не большихъ 1 по абсолютной величинѣ, такъ какъ для этихъ значеній t числа $u, v, w, \ldots$ какъ и числа $x, y, z, \ldots$ удовлетворяютъ условіямъ (8). Такимъ образомъ, разысканіе maxima и minima функціи $f(x, y, z, \ldots)$ приводится къ разысканію maxima и minima всѣхъ функцій $F(t)$ соотвѣтствующихъ безчисленному множеству точекъ $(x, y, z, \ldots)$, которыя можно взять по произволу въ смежности съ $(a, b, c, \ldots)$.

378. Если перемѣнныя независимы, то извѣстное условіе $F'(0) = 0$, т. е.

$$(x-a)f'_x(a, b, c, \ldots)+(y-b)f'_y(a, b, c, \ldots)+(z-c)f'_z(a, b, c, \ldots)+ \ldots = 0$$

распадается на слѣдующія отдѣльныя условія:

$$f'_x(a, b, c, \ldots) = 0, \quad f'_y(a, b, c, \ldots) = 0, \quad f'_z(a, b, c, \ldots) = 0, \ldots$$

Итакъ, тѣ системы значеній перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$, при которыхъ функція f отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ можетъ быть minimum или maximum, будутъ рѣшеніями системы уравненій

(10) $\quad f'_x(x, y, z, \ldots) = 0, \quad f'_y(x, y, z, \ldots) = 0, \quad f'_z(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots$

Чтобы узнать, даетъ ли то или другое рѣшеніе этой системы minimum или maximum, надо разсмотрѣть квадратичную форму

$$F''(0) = (x-a)^2 f''_{xx}(a, b, \ldots)+(y-b)^2 f''_{yy}(a, b, \ldots)+(z-c)^2 f''_{zz}(a, b, \ldots)+ \cdots$$
$$+ 2(x-a)(y-b)f''_{xy}(a, b, \ldots) + 2(x-a)(z-c)f''_{xz}(a, b, \ldots)$$
$$+ 2(y-b)(z-c)f''_{yz}(a, b, \ldots) + \ldots$$

отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x-a, y-b, z-c, \ldots$ Дискриминантъ (§ 76) этой формулы есть значеніе опредѣлителя

$$H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \cdots \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \cdots \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

вычисленное для $x=a,\ y=b,\ z=c,\ldots$ Эта важная функція $H(x, y, z, \ldots)$ называется Гессіаномъ функціи f *). Въ дальнѣйшемъ мы оставимъ въ сторонѣ случай $H(a, b, c, \ldots)=0$, и припомнимъ (§ 100), что необходимыя и достаточныя условія (при $H(a, b, c, \ldots)\gtrless 0$) для того, чтобы квадратичная форма $F''(0)$ была существенно положительна, будутъ слѣдующія

$$f''_{xx}>0,\ \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}>0,\ \ldots,\ H>0 \tag{11}$$

при $x=a,\ y=b,\ z=c,\ldots$ Наоборотъ, чтобы $F''(0)$ была существенно отрицательна, для всѣхъ системъ значеній перемѣнныхъ $x-a,\ y-b,\ z-c,\ldots$ (не равныхъ нулю одновременно), необходимо и достаточно, чтобы было

$$f''_{xx}<0,\ \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}>0,\ \ldots,\ (-1)^n H>0. \tag{12}$$

Слѣдовательно, если нѣкоторая система $a, b, c, \ldots$ значеній перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$, удовлетворяющая системѣ уравненій (10), удовлетворяетъ и условіямъ (11), то функція $f(x, y, z, \ldots)$ при $x=a,\ y=b,\ z=c,\ldots$ будетъ minimum. Наоборотъ, она будетъ maximum, если выполняются условія (12). Она не будетъ ни maximum, ни minimum, если при $H\gtrless 0$, не выполняются ни условія (11), ни условія (12) Сомнительнымъ остается случай $H=0$, требующій особаго изслѣдованія.

379. Чтобы найти, напримѣръ, maxima и minima функціи отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, надо начать съ разысканія тѣхъ значеній перемѣнныхъ, которыя обращаютъ въ нуль первыя производныя, и найденныя значенія подставить во вторыя производныя. Тогда могутъ представиться слѣдующіе случаи:

$f''_{xx}f''_{yy}-f''^2_{xy}>0$ (minimum при $f''_{xx}>0$, maximum при $f''_{xx}<0$),

" " <0 (ни minimum, ни maximum),

" " $=0$ (сомнительный случай).

Въ случаѣ функціи отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ, при условіи $f''_{xx}f''_{yy}-f''^2_{xy}<0$, не будемъ имѣть ни minimum, ни maximum. Но то же самое будетъ и при $f''_{xx}f''_{yy}-f''^2_{xy}>0$, если Гессіанъ

$$H=f''_{xx}f''_{yy}f''_{zz}+2f''_{yz}f''_{zx}f''_{xy}-f''_{xx}f''^2_{yz}-f''_{yy}f''^2_{zx}-f''_{zz}f''^2_{xy}$$

будетъ имѣть знакъ, отличный отъ знака f''_{xx}. Въ противномъ случаѣ будемъ

*) По имени математика Гессе (Hesse).

имѣть minimum или maximum, смотря по тому, будетъ ли общій знакъ чиселъ H и $f''_{xx}+$ или $-$. Замѣтимъ, что maxima и minima имѣютъ наклонность встрѣчаться все рѣже и рѣже по мѣрѣ увеличенія числа перемѣнныхъ.

380. Чтобы скорѣе подвигаться впередъ, мы оставили въ § 378 большой пробѣлъ, который теперь необходимо заполнить. Найдя, что при выполненіи условій (11) или (12) будемъ имѣть всегда $F''(0)>0$ или всегда $F''(0)<0$, мы изъ этого можемъ заключить только то, что все безконечное множество функцій $F(t)$ при $t=0$ будутъ имѣть minimum или maximum, Но изъ этого еще нельзя заключить, что $f(x, y, z, \ldots)$ въ точкѣ $(a, b, c, \ldots)$ будетъ minimum или maximum. Для возможности такого заключенія надо было бы пользоваться теоремою, обратною той, которая установлена въ концѣ § 377, а эта обратная теорема далеко не всегда справедлива. Поэтому приступимъ къ непосредственному изслѣдованію приращенія

$$f(x, y, z, \ldots)-f(a, b, c, \ldots)=\tfrac{1}{2}F''(\theta),$$

и замѣтимъ, что $F''(\theta)$ можно разсматривать, какъ квадратичную форму, съ перемѣнными коэффиціентами. Эти коэффиціенты, измѣняясь вмѣстѣ съ измѣненіемъ $x, y, z, \ldots$, стремятся (вслѣдствіе предполагаемой непрерывности вторыхъ производныхъ) къ соотвѣтствующимъ коэффиціентамъ, формы $F''(0)$, когда точка $(x, y, z, \ldots)$, какимъ угодно образомъ, приближается къ точкѣ $(a, b, c, \ldots)$, при чемъ и промежуточная точка $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, для которой вычислены коэффиціенты въ $F''(\theta)$, приближается къ той же точкѣ $(a, b, c, \ldots)$. Отсюда мы еще не въ правѣ заключить, что если $F''(0)$ въ смежности съ точкою $(a, b, c, \ldots)$ сохраняетъ постоянный знакъ, то и $F''(\theta)$ стремится принять этотъ знакъ. Въ самомъ дѣлѣ, и та и другая форма имѣютъ въ смежности съ этою точкою значенія, безконечно близкія къ нулю, и потому, хотя онѣ отличаются одна отъ другой безконечно мало, не исключается возможность того, что знаки ихъ будутъ различны. Дѣло и состоитъ именно въ томъ, чтобы показать, что это невозможно. Съ этой цѣлью цѣлесообразно будетъ раздѣлить обѣ формы на

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+\cdots$$

и затѣмъ разсматривать полученныя отношенія, какъ квадратичныя формы отъ перемѣнныхъ

$$\alpha=\frac{x-a}{r},\ \beta=\frac{y-b}{r},\ \gamma=\frac{z-c}{r},\ \ldots,$$

связанныхъ соотношеніемъ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots=1$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть k есть наименьшій по абсолютной величинѣ коэффиціентъ въ каноническомъ видѣ (§ 92) формы $\frac{F''(0)}{r^2}$. Замѣтимъ теперь, что всѣ коэффиціенты будутъ положительны, либо всѣ отрицательны,

смотря по тому, будетъ ли форма существенно положительная или существенно отрицательная. Поэтому $|F''(0)| > kr^2$, и отношеніе $F''(0)$ къ r^2 не стремится къ 0. Наоборотъ, отношеніе $\frac{F''(0)-F''(0)}{r^2}$ непремѣнно стремится къ нулю, потому что это отношеніе есть квадратичная форма отъ перемѣнныхъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, лежащихъ между -1 и 1, и съ коэффиціентами, имѣющими предѣломъ нуль. Поэтому

$$\lim \frac{F''(\theta)}{F''(0)} = 1 + \lim \left(\frac{F''(\theta) - F''(0)}{r^2} : \frac{F''(0)}{r^2} \right) = 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что всегда можно найти такое положительное число h, чтобы для всѣхъ значеній $x, y, z, \ldots$, удовлетворяющихъ условіямъ (8), выше написанное отношеніе было, напримѣръ, больше $\frac{1}{2}$ и, слѣдовательно,

$$F''(\theta) > \tfrac{1}{2} kr^2 \quad \text{или} \quad F''(\theta) < \tfrac{1}{2} kr^2,$$

смотря по тому, будетъ ли $k > 0$ или < 0, т. е. $f(x, y, z, \ldots) > f(a, b, c, \ldots)$ въ первомъ, и $f(x, y, z, \ldots) < f(a, b, c, \ldots)$ во второмъ случаѣ [1]).

381. Предыдущія соображенія тѣмъ болѣе необходимы, что случаи, когда всѣ функціи $F(t)$ при $t = 0$ будутъ имѣть maximum или minimum, а $f(a, b, c, \ldots)$ не будетъ ни тѣмъ, ни другимъ для $f(x, y, z, \ldots)$, вполнѣ возможны. Чтобы яснѣе понять причину такого обстоятельства, лучше всего будетъ ограничиться случаемъ функціи отъ двухъ перемѣнныхъ $x = a + r\cos\theta$, $y = b + r\sin\theta$, значенія которыхъ въ смежности съ (a, b) зависятъ отъ r и θ. Если для какого нибудь значенія θ функція будетъ minimum въ (a, b), то это значитъ, что $f(x, y) \geqq f(a, b)$ для разсматриваемаго значенія θ и для всѣхъ значеній r въ нѣкоторомъ интервалѣ $(-\varrho, +\varrho)$. Это число ϱ будетъ вполнѣ опредѣленная функція отъ θ, если условимся брать всегда наибольшее возможное значеніе для ϱ. При измѣненіи θ отъ 0 до π (за исключеніемъ одной изъ границъ) ϱ будетъ, вообще говоря, измѣняться, и соотвѣтствующая пара значеній $x = a \pm \varrho\cos\theta$, $y = b \pm \varrho\sin\theta$ описывать сомкнутую кривую, внутри которой постоянно будетъ $f(x, y) \geqq f(a, b)$, между тѣмъ какъ внѣ ея, какъ угодно близко къ границѣ, $f(x, y) < f(a, b)$. Если функція ϱ, какъ это обыкновенно и бываетъ, достигаетъ нѣкотораго наименьшаго значенія $h\sqrt{2}$, то можно быть увѣреннымъ, что $f(x, y) \geqq f(a, b)$, если $|x - a| \leqq h$ и $|y - b| \leqq h$. Тогда $f(x, y)$ дѣйствительно будетъ minimum въ точкѣ (a, b). Но если

---

[1]) Для большихъ подробностей см. Genocchi et Peano „Calcolo“ (p. 186, 197).

случится, что ϱ имѣетъ только нижнюю границу, равную нулю, то $f(a, b)$ не будетъ minimum функціи $f(x, y)$. Дѣйствительно, тогда существуетъ такое значеніе θ, въ смежности съ которымъ нижняя граница ϱ всегда будетъ нуль (§ 259) и достаточно взять θ въ смежности съ этимъ значеніемъ, чтобы можно было сдѣлать $\varrho < h\sqrt{2}$, какъ бы мало ни было h. А тогда, взявъ $r > \varrho$, найдемъ и такія значенія x и y, для которыхъ, несмотря на то, что $|x-a| \leqq h$, $|y-b| \leqq h$, будемъ имѣть $f(x, y) < f(a, b)$.

382. Положимъ теперь, что между n перемѣнными существуютъ $m\,(<n)$ соотношеній

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0, \quad \psi(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots \tag{13}$$

такого рода, что m перемѣнныхъ u, v, w, ... могутъ быть разсматриваемы, какъ функціи отъ $n-m$ остальныхъ [1]). Эти послѣднія мы обозначимъ буквами x, y, z, ... и будемъ ихъ считать независимыми. Значенія перемѣнныхъ, при которыхъ функція

$$f(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots)$$

можетъ быть minimum или maximum, должны обращать въ нуль (§ 378) первыя ея частныя производныя, взятыя по независимымъ перемѣннымъ. Въ частности, принимая во вниманіе правило для разысканія производной сложной функціи (§ 369), мы должны имѣть

$$f'_x + u'_x f'_u + v'_x f'_v + \cdots = 0, \tag{14}$$

гдѣ производныя u'_x, v'_x, w'_x, ... должны быть найдены при помощи уравненій (13), т. е. изъ системы уравненій

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi'_x + u'_x \varphi'_u + v'_x \varphi'_v + \cdots = 0, \\ \psi'_x + u'_x \psi'_u + v'_x \psi'_v + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{15}$$

примѣняя правило Крамера (§ 50) и предполагая, что

$$\left|\begin{array}{lll} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \cdots \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \cdots \\ \ldots & \ldots & \end{array}\right| \gtrless 0. \tag{16}$$

Вмѣсто того, чтобы подставлять значенія u'_x, v'_x, w'_x, ..., найден-

[1]) Объ условіяхъ, при которыхъ это возможно (къ числу нихъ принадлежитъ между прочимъ условіе (16), ниже приводимое), мы будемъ говорить въ началѣ шестой книги.

ныя изъ уравненій (15), въ уравненіе (14), мы можемъ присоединить это послѣднее къ системѣ (15) и прямо написать условіе совмѣстности:

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_u & f'_v \cdots \\ \varphi'_x & \varphi'_u & \varphi'_v \cdots \\ \psi'_x & \psi'_u & \psi'_v \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Замѣняя элементы перваго столбца по очереди частными производными функцій f, φ, ψ, ... по тѣмъ $n-m$ перемѣннымъ, которыя выбраны были за независимыя, получимъ $n-m$ уравненій, которыя вмѣстѣ съ m уравненіями (13) и послужатъ для опредѣленія значеній $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$ Итакъ, тѣ системы значеній $x, y, z, \ldots$, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (13) и дѣлаютъ функцію $f(x, y, z, \ldots)$ minimum или maximum, принадлежатъ къ числу тѣхъ, которыя обращаютъ въ нуль всѣ старшіе опредѣлители матриссы

$$(17) \qquad \begin{matrix} f'_x & f'_y & f'_z \cdots \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \cdots \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

383. Чтобы придать вычисленіямъ болѣе симметріи, обыкновенно поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Изъ того, что всѣ старшіе опредѣлители матриссы (17) обращаются въ нуль, заключаютъ (§ 58), что одно и тоже линейное соотношеніе связываетъ элементы каждаго столбца. Въ это соотношеніе непремѣнно должны входить элементы первой строки. Дѣйствительно, если бы существовало линейное соотношеніе между одними φ', ψ', ..., то обратились бы въ нуль всѣ старшіе опредѣлители той матриссы, которая получается изъ (17) зачеркиваніемъ первой строки. А это противорѣчитъ условію (16). Поэтому, для прилично выбранныхъ λ, μ, ν, ..., можемъ писать

$$f'_x = \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x + \cdots,\quad f'_y = \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y + \cdots,\quad f'_z = \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z + \cdots,\quad \cdots$$

Иными словами, для того, чтобы разыскать maxima и minima функціи f, когда перемѣнныя связаны уравненіями (13), надо приравнять нулю первыя производныя не функціи f, а функціи

$$f(x, y, z, \ldots) - \lambda\varphi(x, y, z, \ldots) - \mu\psi(x, y, z, \ldots) - \cdots.$$

При этомъ получаются n уравненій, которыя, по исключеніи λ, μ, ν, ..., приводятся къ $n-m$ уравненіямъ. Присоединивъ къ нимъ уравненія (13), получимъ n уравненій для опредѣленія n перемѣнныхъ.

384. Упражненія. a) Возьмемъ прямоугольную пластинку $OABC$ (рис. 12), отъ которой, какъ указано на рисункѣ, отломленъ кусокъ OPQ. Требуется изъ оставшейся части образовать другую прямоугольную пластинку, имѣющую по возможности наибольшую площадь. Естественно будетъ удержать обѣ нетронутыя стороны AC и BC, и выбрать новую вершинну O', противолежащую вершинѣ C, на новой сторонѣ PQ. Если p и q обозначаютъ отрѣзки OP и OQ, то координаты искомой точки O' относительно осей OA и OB удовлетворяютъ уравненію $qx + py = pq$, а функція, maximum которой ищется, будетъ площадь новаго прямоугольника, равная $(a - x)(b - y)$ *). Производныя этой функціи по x и по y, т. е. $y - b$ и $x - a$ должны быть пропорціональны числамъ q и p. Поэтому, если изъ C проведемъ прямую, параллельную прямой, соединяющей O съ серединою PQ, то эта прямая и встрѣтитъ PQ въ искомой точкѣ O'. Если бы точка O' попала внѣ отрѣзка PQ, то, какъ легко видѣть, ее надо было бы замѣнить ближайшимъ концомъ этого отрѣзка. Можно общнѣе доказать, что, какова бы ни была форма излома PQ, діагональ новаго прямоугольника должна быть параллельна прямой, касающейся PQ въ точкѣ O'.

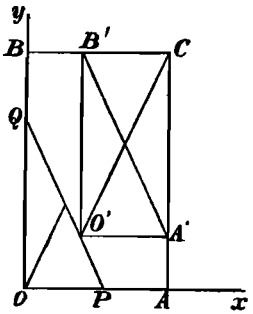


Рис. 12.

b) Покажемъ, что общее уравненіе коническаго сѣченія

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0 \tag{18}$$

можетъ быть представлено въ болѣе удобной формѣ, если въ него введемъ координаты центра (x_0, y_0), опредѣляемыя, какъ извѣстно, уравненіями

$$ax_0 + hy_0 + g = 0, \quad hx_0 + by_0 + f = 0 \tag{19}$$

или $\Phi'_x(x_0, y_0) = 0$, $\Phi'_y(x_0, y_0) = 0$, гдѣ $\Phi(x, y)$ обозначаетъ лѣвую часть уравненія (18). Прежде всего замѣтимъ, что Тэйлорова формула позволяетъ представить эту функцію въ видѣ

$$\Phi(x_0, y_0) + a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + 2h(x - x_0)(y - y_0).$$

Чтобы вычислить $\Phi(x_0, y_0)$, стоитъ только замѣтить тождество

$$\Phi(x, y) = (ax + hy + g)x + (hx + by + f)y + (gx + fy + c).$$

Это равносильно примѣненію теоремы Эйлера (§ 372) къ лѣвой части уравненія (18), послѣ того, какъ сдѣлаемъ ее однородною **). Въ частности имѣемъ $\Phi(x_0, y_0) = gx_0 + fy_0 + c$, а исключая x_0 и y_0 изъ уравненій (19) и послѣдняго, находимъ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \Phi(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

---

*) $a = OA$, $b = OB$.

**) Замѣнивъ x и y на $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ и умноживъ на z^2.

откуда получимъ $\Phi(x_0, y_0) = \dfrac{D}{ab - h^2}$, гдѣ D обозначаетъ дискриминантъ

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

c) Чтобы вычислить длины полуосей коническаго сѣченія (18), выгодно сперва представить его уравненіе въ той формѣ, которая указана въ предыдущемъ упражненіи

$$a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + 2h(x - x_0)(y - y_0) + \frac{D}{ab - h^2} = 0.$$

Дѣло сводится къ опредѣленію наибольшаго и наименьшаго значенія функціи $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, при чемъ перемѣнныя x и y связаны предыдущимъ уравненіемъ. Поступая по указаніямъ § 383, положимъ

$$x - x_0 = \lambda\{a(x - x_0) + h(y - y_0)\}, \quad y - y_0 = \lambda\{h(x - x_0) + b(y - y_0)\}.$$

Умножая первое уравненіе на $x - x_0$, второе на $y - y_0$, и складывая, получимъ $(ab - h^2)r^2 = -\lambda D$. Съ другой стороны, λ можно опредѣлить, исключая изъ тѣхъ же уравненій $x - x_0$ и $y - y_0$, что даетъ

$$0 = \begin{vmatrix} a\lambda - 1 & h\lambda \\ h\lambda & b\lambda - 1 \end{vmatrix} = (ab - h^2)\lambda^2 - (a + b)\lambda + 1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что квадраты полуосей будутъ корнями слѣдующаго уравненія съ неизвѣстною r^2:

$$r^4 + \frac{(a + b)D}{(ab - h^2)^2}r^2 + \frac{D^2}{(ab - h^2)^3} = 0.$$

d) Предложимъ себѣ теперь вычислить полуоси плоскаго сѣченія поверхности эллипсоида данною его діаметральною плоскостью. Пусть a, b, c будутъ длины полуосей эллипсоида, α, β, γ косинусы угловъ, образуемыхъ главными сѣченіями съ данною плоскостью. Если оси эллипсоида примемъ за координатныя оси, то уравненія эллипсоида и данной плоскости будутъ соотвѣтственно

(a) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

Вопросъ состоитъ въ опредѣленіи наименьшаго и наибольшаго значенія функціи $x^2 + y^2 + z^2$ (при условныхъ уравненіяхъ (a)). Согласно сказанному въ § 383, полагаемъ

$$x = \frac{\lambda x}{a^2} + \mu\alpha, \quad y = \frac{\lambda y}{b^2} + \mu\beta, \quad z = \frac{\lambda z}{c^2} + \mu\gamma.$$

Складывая эти уравненія, умноживъ ихъ предварительно, первое на x, второе на y, третье на z, получимъ $r^2 = \lambda$. Подставляя въ уравненіе плоскости значенія

$$x = \frac{\mu\alpha a^2}{a^2 - r^2}, \quad y = \frac{\mu\beta b^2}{b^2 - r^2}, \quad z = \frac{\mu\gamma c^2}{c^2 - r^2},$$

получаемыя изъ предыдущихъ уравненій, и замѣчая, что μ не можетъ быть равно нулю, приходимъ къ уравненію второй степени относительно r^2:

$$\frac{a^2\alpha^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2\beta^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2\gamma^2}{r^2-c^2}=0,$$

корни котораго и будутъ квадраты искомыхъ полуосей. Если изъ центра эллипсоида возставимъ перпендикуляры къ плоскости каждаго сѣченія и на нихъ отложимъ длины одной изъ полуосей сѣченія (той или другой—безразлично), то концы этихъ перпендикуляровъ будутъ лежать на нѣкоторой поверхности 4-го порядка, играющей весьма важную роль въ Оптикѣ [1]). Такъ какъ координаты этихъ концовъ будутъ $x=\pm\alpha r$, $y=\pm\beta r$, $z=\pm\gamma r$, то стоитъ только подставить взятыя отсюда величины α, β, γ въ предыдущее уравненіе, чтобы получить уравненіе искомой поверхности:

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0,$$

которое, по уничтоженіи знаменателей, приметъ видъ

$$(x^2+y^2+z^2)\,(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-(b^2+c^2)\,a^2x^2-(c^2+a^2)\,b^2y^2 \\ -(a^2+b^2)\,c^2z^2+a^2b^2c^2=0.$$

Это такъ называемая поверхность волны. Изученіе нѣкоторыхъ ея свойствъ привело Гамильтона къ предвидѣнію такъ называемой конической рефракціи, подтвержденной впослѣдствіи на опытѣ. Такими теоретическими открытіями явленій природы [2]), которыя цѣлыя столѣтія не поддавались наблюденію, лучше всего доказывается огромное значеніе Математики.

е) Вычисленіе кратчайшаго разстоянія между двумя прямыми приводитъ къ болѣе общей задачѣ — найти наименьшее значеніе функціи

$$r^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2$$

если извѣстно, что $2n$ перемѣнныхъ удовлетворяютъ $2n-2$ уравненіямъ

$$\frac{x_1-a_1}{a_1}=\frac{x_2-a_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_n-a_n}{a_n},\quad \frac{y_1-b_1}{\beta_1}=\frac{y_2-b_2}{\beta_2}=\cdots=\frac{y_n-b_n}{\beta_n},$$

такъ что r^2 въ дѣйствительности есть функція отъ двухъ только независимыхъ перемѣнныхъ. Принявъ за эти независимыя перемѣнныя значенія u и v написанныхъ выше двухъ рядовъ равныхъ отношеній, замѣчаемъ, что выраженіе r^2 послѣ подстановки въ него

$$x_i=\alpha_iu+a_i,\quad y_i=\beta_iv+b_i\quad (i=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n)$$

переходитъ въ

$$r^2=au^2+bv^2+c+2fv+2gu+2huv, \tag{20}$$

---

[1]) См., напр., Poincaré, Théorie mathématique de la lumière (p. 296).

[2]) Другіе интересные примѣры изъ Физики и Астрономіи приведены въ сообщеніи G. Cesàro Бельгійской Академіи (Bulletins, 1891, p. 503).

гдѣ положено

$$a = \sum_1^n \alpha_i^2, \quad b = \sum_1^n \beta_i^2, \quad h = -\sum_1^n \alpha_i \beta_i,$$

$$-f = \sum_1^n (a_i - b_i)\beta_i \quad g = \sum_1^n (a_i - b_i)\alpha_i, \quad c = \sum_1^n (a_i - b_i)^2.$$

Обратимъ вниманіе на то, что опредѣлители

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

представляютъ собою квадраты матриссъ (§ 30)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \dots a_n - b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_n \end{vmatrix}$$

Чтобы r^2 былъ minimum или maximum, необходимы условія

(21 $$au + hv + g = 0, \quad hu + bv + f = 0.$$

Когда они выполнены, то выраженіе (20) въ силу теоремы Эйлера приведется къ

(22) $$r^2 = gu + fv + c.$$

Гессіанъ отъ r^2 равенъ $ab - h^2$, а такъ какъ a и $ab - h^2$ равны суммамъ квадратовъ, то можно утверждать (§ 379), что дѣйствительно получается minimum. Вмѣстѣ съ тѣмъ, исключая u и v изъ уравненій (21) и 22), получимъ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - r^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} r^2$$

Искомый minimum будетъ, слѣдовательно,

$$r^2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \dots a_n - b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_n \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 \dots \beta_n \end{vmatrix}^2}.$$

f) Вычисленія другихъ кратчайшихъ разстояній, какъ то разстоянія отъ точки до плоскости или отъ точки до прямой на плоскости и въ пространствѣ, приводятъ къ задачѣ найти наименьшее значеніе суммы

квадратовъ n перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ $m < n$ линейнымъ уравненіямъ.

Пусть данныя уравненія будутъ

$$(23)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = k_m \end{cases}$$

и положимъ, что ни одно изъ нихъ не есть слѣдствіе другихъ. Для этого требуется (§ 54, а), чтобы не всѣ старшіе опредѣлители матриссы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{vmatrix}$$

были равны нулю, и слѣдовательно (§ 30), чтобы квадратъ этой матриссы

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \cdots c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \cdots c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} \cdots c_{mm} \end{vmatrix}$$

не былъ нулемъ. Чтобы найти maxima и minima функціи $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ надо написать уравненія

$$(24)\quad \begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1}, \\ x_2 = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn}. \end{cases}$$

Умножая эти уравненія соотвѣтственно на $x_1, x_2, \cdots, x_n$ и складывая, получимъ

$$(25)\quad r^2 = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_m k_m,$$

и все дѣло сводится къ опредѣленію коэффиціентовъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Умножая уравненія (24) на $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, получимъ

$$k_i = \lambda_1 c_{i1} + \lambda_2 c_{i2} + \cdots + \lambda_m c_{im}.$$

Слѣдовательно, коэффиціенты λ_i опредѣляются системою

$$\begin{cases} k_1 = \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{12} + \cdots + \lambda_m c_{1m}, \\ k_2 = \lambda_1 c_{21} + \lambda_2 c_{22} + \cdots + \lambda_m c_{2m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_m = \lambda_1 c_{m1} + \lambda_2 c_{m2} + \cdots + \lambda_m c_{mm}, \end{cases}$$

имѣющею единственное рѣшеніе. Впрочемъ, нѣтъ надобности рѣшать эту систему; достаточно выразить условіе ея совмѣстности съ уравненіемъ (25), чтобы тотчасъ получить

$$0 = \begin{vmatrix} r^2 & k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ k_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ k_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_m & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix},$$

откуда и получается искомое наименьшее значеніе

$$r^2 = -\frac{1}{C}\begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ k_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ k_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_m & c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

g) Въ приложеніяхъ часто случается, что для опредѣленія нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ устанавливаютъ линейныя уравненія, въ которыхъ коэффиціенты и извѣстные члены даются непосредственными наблюденіями. Достаточно было бы имѣть n уравненій для опредѣленія n неизвѣстныхъ, но, вслѣдствіе неизбѣжныхъ неточностей измѣреній, изъ этихъ уравненій получались бы неточныя значенія неизвѣстныхъ. Произведя многія новыя измѣренія приходятъ къ системѣ (23) изъ m уравненій, гдѣ m значительно больше n и возникаетъ вопросъ: какимъ образомъ всего выгоднѣе распорядиться этими уравненіями, чтобы изъ нихъ съ наибольшею вѣроятностью получить точныя значенія неизвѣстныхъ? На этотъ вопросъ отвѣчаетъ Теорія вѣроятностей, одна изъ интереснѣйшихъ частей Математики. Она учитъ, что при невозможности обратить въ нуль всѣ погрѣшности, т. е. найти такія величины неизвѣстныхъ, при которыхъ разности между лѣвыми и правыми частями всѣхъ $m > n$ уравненій были равны нулю, надо опредѣлить неизвѣстныя такъ, чтобы сумма квадратовъ этихъ погрѣшностей была minimum. Это требованіе приводитъ для опредѣленія неизвѣстныхъ къ извѣстнымъ процессамъ вычисленій, которые составляютъ то, что называется Методою наименьшихъ квадратовъ. Въ главныхъ чертахъ все сводится къ тому, чтобы сдѣлать минимумомъ функцію

$$\sum_1^m (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - k_i)^2.$$

Слѣдовательно, взявъ послѣдовательно производныя по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, должны имѣть

$$c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \cdots + c_{n1}x_n = k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_na_{n1},$$

$$c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{n2}x_n = k_1a_{12} + k_2a_{22} + \cdots + k_na_{n2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n = k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_na_{nn}.$$

Это та система, которая дастъ для всѣхъ x наиболѣе пріемлемыя значенія. Чтобы лучше уяснить себѣ дѣло, полезно разсмотѣть случай одной неизвѣстной, для опредѣленія которой измѣренія дали n значеній $a_1, a_2, \ldots, a_n$, весьма мало отличающихся между собою. Здѣсь надо найти minimum функціи

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2;$$

съ этой цѣлью нужно положить

$$x - a_1 + x - a_2 + \cdots + x - a_n = 0, \text{ т. е. } x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Это и есть то, что обыкновенно дѣлаютъ [1]).

Примѣчанія къ третьей книгѣ.

I (къ § 253).

Для поясненія приведемъ слѣдующій примѣръ. Положимъ $y = x^2$, каждому значенію x соотвѣтствуетъ опредѣленное положительное значеніе y. Условимся подъ $\sqrt{y}$ понимать положительное значеніе квадратнаго корня; тогда $x = \sqrt{y}$ будетъ функція отъ независимой перемѣнной y, въ интервалѣ $(0, \infty)$. Въ нашемъ примѣрѣ $f(t) = t^2$ и $g(t) = \sqrt{t}$ будутъ взаимно обратныя функціи отъ независимой перемѣнной t въ томъ же интервалѣ, при чемъ

$$f[g(t)] = (\sqrt{t})^2 = t, \quad g[f(t)] = \sqrt{t^2} = t.$$

II (къ § 254, a).

Общнѣе, алгебраическою функціею y отъ независимой перемѣнной x называютъ такую, которая удовлетворяетъ уравненію вида:

$$X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \cdots + X_{n-1} y + X_n = 0, \tag{1}$$

гдѣ X_0, X_1, X_2, ... X_n цѣлые полиномы относительно x, а n цѣлое положительное число. При $n = 1$, уравненіе (1) дастъ $y = -\frac{X_1}{X_0}$, раціональную функцію отъ x, приводящуюся къ цѣлой раціональной при X_0, равномъ постоянному числу.

Не мѣшаетъ замѣтить, что коэффиціенты полиномовъ X_0, X_1, X_2, ... могутъ быть какими угодно числами, раціональными или ирраціональными.

III (къ § 254, c).

Послѣднее замѣчаніе надо понимать такъ: давая числу t значенія t_0, t_1, t_2, ..., мы можемъ безчисленнымъ множествомъ спосо-

бовъ комбинировать знаки + и — у чиселъ $\pm\sqrt{t_0}$, $\pm\sqrt{t_1}$, $\pm\sqrt{t_2}$, ..., взявъ, напримѣръ, всѣ корни съ +, или всѣ съ —, или знакъ + для всѣхъ раціональныхъ значеній $\sqrt{t}$ и знакъ — для всѣхъ ирраціональныхъ значеній $\sqrt{t}$ и т. д.

IV (къ § 254, c).

Такъ поступаютъ, напримѣръ, при изученіи алгебраическихъ функцій въ томъ общемъ смыслѣ слова, о которомъ сказано въ примѣчаніи (II). Функція y, опредѣляемая уравненіемъ (1), и ничѣмъ другимъ, имѣетъ для каждаго значенія x, вообще говоря, n различныхъ значеній, подчиненныхъ тому закону, что всѣ эти значенія будутъ корнями даннаго уравненія (1) при данномъ значеніи x. Подобнаго рода функціи называются многозначными; во всей третьей книгѣ о такихъ функціяхъ нѣтъ рѣчи; подъ словомъ функція здѣсь всегда подразумѣвается функція однозначная.

V (къ § 254, d).

Функціи $\arcsin t$ и $\arccos t$ опредѣлены только въ интервалѣ $(-1, +1)$, потому что синусъ или косинусъ дуги не можетъ быть больше единицы по абсолютной величинѣ. Функція $\operatorname{arc\,tg} t$, напротивъ, опредѣлена въ интервалѣ $(-\infty, +\infty)$. При всякомъ t значенія $\operatorname{arc\,tg} t$ и $\arcsin t$ лежатъ въ интервалѣ $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, и знакъ $\operatorname{arc\,tg} t$ и $\arcsin t$ одинаковъ со знакомъ t. Вмѣстѣ съ $\operatorname{arc\,tg} t$ можно разсматривать и функцію $\operatorname{arc\,cotg} t$, опредѣляя ее, какъ дугу, котангенсъ которой равенъ t, лежащую въ интервалѣ $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Ясно, что

$$\operatorname{arc\,cotg} t = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{t}.$$

Весьма важное замѣчаніе, сдѣланное въ § 254, d относительно формулы

$$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg} \frac{u+v}{1-uv}, \tag{1}$$

можно разъяснить слѣдующимъ образомъ. Этой формулѣ соотвѣтствуетъ тригонометрическая формула

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

принимающая, при

$$\operatorname{tg} x = u, \quad \operatorname{tg} y = v \tag{2}$$

форму

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{u+v}{1-uv}.$$

Обращая функціи (2), можемъ взять $x = \operatorname{arc\,tg} u$, $y = \operatorname{arc\,tg} v$; тогда x и y будутъ лежать въ интервалѣ $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, а $x+y$ можетъ и не заключаться въ немъ, но навѣрно заключается въ интервалѣ $(-\pi, +\pi)$. Формула (3), показывающая, что $x+y$ есть одна изъ дугъ, тангенсъ которыхъ равенъ $\frac{u+v}{1-uv}$, даетъ, слѣдовательно,

$$\text{(4)} \qquad x+y = \operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg}\frac{u+v}{1-uv} + k\pi,$$

гдѣ первый членъ правой части лежитъ между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, а k цѣлое число или нуль. Такъ какъ $|x+y| \leqq \pi$, то k можетъ имѣть только одно изъ трехъ значній $0, +1, -1$, а именно: 1) если $x+y$ лежитъ между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, то надо положить $k=0$; 2) если $x+y > \frac{\pi}{2}$, то $k=1$, 3) если $x+y < -\frac{\pi}{2}$, то $k=-1$. Эти условія легко теперь выразить въ числахъ u и v. Если 1) $x+y$ лежитъ между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, то $\cos(x+y) > 0$, т. е.

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y > 0,$$

а замѣчая, что $\cos x > 0$, $\cos y > 0$, отсюда находимъ

$$1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1 - uv > 0, \quad uv < 1.$$

2) При $\frac{\pi}{2} < x+y < \pi$, $\cos(x+y) < 0$, $1-uv < 0$, $uv > 1$, $u > 0$ и $v > 0$. 3) При $-\pi < x+y < -\frac{\pi}{2}$, $\cos(x+y) < 0$, $uv > 1$, $u < 0$, $v < 0$. Резюмируя, находимъ: при $uv < 1$, $k=0$, при $uv > 1$, $k=1$, когда $u > 0$ и $v > 0$, и $k=-1$, при $u < 0$ и $v < 0$. Замѣтимъ еще формулу

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2},$$

гдѣ знакъ $+$ надо взять при $x > 0$, знакъ $-$ при $x < 0$. Эта формула намъ скоро понадобится (§ 254, e); она выражаетъ извѣстное свойство дугъ, для которыхъ тангенсъ одной равенъ котангенсу другой, а именно: сумма такихъ дугъ равна $+\frac{\pi}{2}$, когда дуги лежатъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$, и равна $-\frac{\pi}{2}$, когда онѣ лежатъ между 0 и $-\frac{\pi}{2}$.

VI (къ § 254, e).

Въ формулѣ

$$\operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} = \lim_{n=\infty} \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}}$$

всегда подразумѣвается положительное значеніе квадратнаго корня. Поэтому

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2} \Bigg| \begin{array}{l} = x, \text{ при } x > 0 \\ = -x, \text{ при } x < 0. \end{array}$$

Отсюда

$$\operatorname{sgn} x \Bigg| \begin{array}{l} = \dfrac{x}{x} = 1, \text{ при } x > 0 \\ = \dfrac{x}{-x} = -1, \text{ при } x < 0, \end{array}$$

и, конечно, при $x = 0$, $\dfrac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} = 0$ при всякомъ n, такъ что $\operatorname{sgn} x = 0$ при $x = 0$.

VII (къ § 254, f).

При вычисленіи значенія $\tilde{\omega}(x)$ при данномъ x надо представить x въ видѣ десятичнаго числа съ безконечнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, приписывая, если нужно, безконечное число нулей съ правой стороны. Такъ, напримѣръ, при $x = 1$, $\tilde{\omega}(x) = 1$, потому что для $x = 1{,}00000\ldots$ $m = n$ при всякомъ n. То же самое значеніе получимъ для всякаго цѣлаго значенія x и для значенія, равнаго конечной десятичной дроби. Напримѣръ, при $x = 0{,}13500000\ldots$ $m = n - 3$ при всякомъ $n \geqq 3$, $\dfrac{m}{n} = 1 - \dfrac{3}{n}$ и $\tilde{\omega}(x) = \lim \dfrac{m}{n} = 1$. Для $x = \dfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, $m = 0$ и $\tilde{\omega}(x) = 0$; для $x = \dfrac{1}{99} = 0{,}0101\ldots$, $m = \dfrac{n}{2}$ или $\dfrac{n+1}{2}$, и $\tilde{\omega}(x) = \dfrac{1}{2}$ и т. д.

VIII (къ § 254, g).

Формулы, выведенныя въ этомъ пунктѣ, вытекаютъ изъ слѣдующей весьма важной формулы

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{r \sin \vartheta}{1 + r \cos \vartheta} = r \sin \vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\vartheta - \cdots,$$

справедливой при всякомъ ϑ и при $|r| \leqq 1$. Строгій выводъ этой формулы читатель найдетъ въ упомянутомъ уже мемуарѣ

Абеля о биноміальномъ рядѣ (V. A. форм. 33), а также у Вебера и Вельштейна, стр. 496. При $x = 1$, въ лѣвой части находимъ

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Понимая подъ $\operatorname{arc\,tg} t$ всегда дугу, лежащую между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, получимъ $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\vartheta}{2}$ при $-\pi < \vartheta < \pi$ (за исключеніемъ границъ $\vartheta = \pm\pi$). Отсюда вытекаетъ, слѣдовательно, формула

$$\frac{\vartheta}{2} = \sin\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} + \frac{\sin 3\vartheta}{3} - \cdots \quad (-\pi < \vartheta < \pi). \tag{2}$$

Положивъ въ этой формулѣ $\vartheta = \pi - \theta$, гдѣ $0 < \theta < 2\pi$ (въ силу неравенства $-\pi < \vartheta < \pi$), и замѣнивъ затѣмъ, для однообразія, букву θ буквою ϑ, находимъ формулу

$$\frac{\pi-\vartheta}{2} = \sin\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} + \frac{\sin 3\vartheta}{3} + \cdots \quad (0 < \vartheta < 2\pi). \tag{3}$$

Положимъ здѣсь $\vartheta = 2\pi x$, $0 < x < 1$, и обозначимъ черезъ $F(x)$ сумму ряда

$$F(x) = \sin 2\pi x + \tfrac{1}{2}\sin 4\pi x + \tfrac{1}{3}\sin 6\pi x + \cdots,$$

тогда формула (3) дастъ

$$\frac{2}{\pi}F(x) = 1 - 2x, \quad (0 < x < 1). \tag{4}$$

Введемъ теперь въ разсмотрѣніе функцію

$$\varrho(x) = x - [x],$$

гдѣ $[x]$ обозначаетъ наибольшее цѣлое число, не превосходящее x. Ясно, что $\varrho(x) = 0$ при всякомъ цѣломъ значеніи x, и $\varrho(x) = x$ при $0 < x < 1$. Поэтому формулу (4) можно написать такъ:

$$\frac{2}{\pi}F(x) = 1 - 2\varrho(x), \quad (0 < x < 1). \tag{5}$$

Съ другой стороны, $F(x)$ и $\varrho(x)$, очевидно, періодическія функціи съ періодомъ 1, т. е. $F(x \pm 1) = F(x)$ и, вообще, $F(x \pm m) = F(x)$, если m цѣлое положительное число, и $\varrho(x \pm m) = \varrho(x)$, потому что при увеличеніи или уменьшеніи x на 1 $[x]$ увеличивается или уменьшается на 1, а $\varrho(x)$ не измѣняется. Отсюда слѣдуетъ, что равенство (5) справедливо при всѣхъ значеніяхъ x, не равныхъ цѣлому числу. Замѣчая еще, что $\varrho(x)$ всегда лежитъ между 0 и 1, обращаясь въ нуль при x цѣломъ, мы видимъ, что $\operatorname{sgn} x = 0$ при x цѣломъ, когда и $F(x)$ и $\varrho(x)$ равны нулю, и $\operatorname{sgn}[\varrho(x)] = 1$ при

x, неравномъ цѣлому числу. Поэтому формулу (5) можно написать въ видѣ

$$\frac{2}{\pi} F(x) = \operatorname{sgn}(x - [x]) - 2(x - [x]) \tag{6}$$

для всѣхъ значеній x безъ исключенія, какъ и сказано въ § 254, g. Наконецъ, приведенное тамъ же выраженіе

$$\frac{2}{\pi} F(x) = \varrho(-x) - \varrho(x)$$

вытекаетъ изъ равенства

$$\varrho(x) + \varrho(-x) = 1 \tag{7}$$

при x, неравномъ цѣлому числу, откуда и получаемъ

$$1 - 2\varrho(x) = \varrho(-x) - \varrho(x).$$

Что касается равенства (7), то оно вытекаетъ изъ того, что равенство

$$x - [x] = \varrho(x), \quad \text{гдѣ} \quad 0 < \varrho(x) < 1$$

можно написать такъ:

$$-x + [x] + 1 = 1 - \varrho(x),$$

или

$$-x - \{-[x] - 1\} = 1 - \varrho(x),$$

гдѣ

$$0 < 1 - \varrho(x) < 1,$$

откуда

$$[-x] = -[x] - 1 \quad \text{и} \quad \varrho(-x) = 1 - \varrho(x).$$

IX (къ § 254, h).

Сочиненіе В. Томсона (лорда Кельвина), на которое ссылается авторъ, имѣется и въ переводѣ на русскій языкъ, подъ заглавіемъ: „Строеніе матеріи", популярныя лекціи В. Томсона, переводъ Б. Вейнберга, подъ редакціей профессора И. Боргмана (СПБ. 1895). Читатель съ интересомъ прочтетъ на стр. 179 и слѣд. ту лекцію, изъ которой авторъ заимствовалъ свою цитату. Но для того, чтобы составить ясное понятіе о томъ явленіи, о которомъ здѣсь говорится, и о той роли, которую при изученіи этого явленія играетъ Математика, чтенія этой лекціи недостаточно. Для выясненія физической стороны явленія надо быть знакомымъ съ ученіемъ о звукѣ (Акустикой), а для уясненія роли Математики надо познакомиться съ изображеніемъ функцій, заданныхъ графически, при помощи тригонометрическихъ рядовъ. Для изученія этого вопроса мы можемъ рекомендовать читателю, знакомому съ началами интегральнаго исчи-

сленія, «Лекціи о приближенныхъ вычисленіяхъ“ профессора А. Н. Крылова. СПБ., 1911. Гл. V.

X (къ § 266).

Въ § 169 было сказано, что если нѣкоторое свойство имѣетъ мѣсто въ сколь угодно маломъ интервалѣ, нижняя граница котораго есть a, то говорятъ, что это свойство имѣетъ мѣсто справа отъ a, при чемъ само a всегда исключается. Здѣсь, наоборотъ, выраженіе: функція непрерывна справа отъ a, т. е. $f(a+0)=f(a)$, выражаетъ свойство функціи именно при $x=a$, и вовсе не влечетъ за собой существованія какого нибудь интервала съ нижнею границею a, въ которомъ то же самое свойство имѣетъ мѣсто. Въ этомъ и состоитъ противорѣчіе съ опредѣленіемъ § 169, и этимъ и объясняется необходимость явнаго указанія того интервала, если онъ существуетъ, гдѣ функція непрерывна.

XI (къ § 272, a).

Говорятъ, что a сравнимо съ b по модулю p, и пишутъ $a \equiv b \pmod p$, когда $a-b$ дѣлится нацѣло на p; иными словами, $a \equiv b \pmod p$, если $a=kp+b$, гдѣ k цѣлое число. Если $\frac{2}{\pi x}$ сравнимо съ числами 0, 1, 2, 3 по модулю 4, то $\frac{2}{\pi x}=4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3$, т. е. $\frac{1}{x}=2k\pi,\ 2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi,\ 2k\pi+\frac{3}{2}\pi$ и $\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,\ 1,\ 0,\ -1$.

XII (къ § 272, b).

Положивъ $\frac{1}{x}=k\pi+a$, гдѣ k цѣлое число $\gtrless 0$, a такое число, для котораго $\operatorname{tg} a=a$, гдѣ a произвольно заданное число, имѣемъ

$$\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\operatorname{tg} a=a, \quad \text{и} \quad x=\frac{1}{k\pi+a},$$

гдѣ k всегда можно выбрать такъ, чтобы $\frac{1}{k\pi+a}$ попало въ интервалъ $(-h,\ +h)$ и оставалось въ немъ при увеличеніи абсолютнаго значенія цѣлаго числа k.

XIII (къ § 272, d).

1) Полагая $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$, возьмемъ $x=\frac{1}{N}$, гдѣ N цѣлое число,

тогда

$$f\left(\frac{1}{N}\right) = [N] = N, \text{ а } \lim_{h=+0} f\left(\frac{1}{N}+h\right) = \lim_{h=+0}\left[\frac{N}{1+Nh}\right] = N-1,$$

потому что при $h>0$, $\frac{N}{1+Nh} < N$.

2) Полагая $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$, при $x \geqslant 0$, и $f(0)=1$, имѣемъ $f(h) = h\left[\frac{1}{h}\right] = h\left\{\frac{1}{h} - \varrho\right\} = 1 - h\varrho$, гдѣ $0<\varrho<1$. Отсюда $\lim_{h=+0} f(h) = 1 = f(0)$, т. е. $f(x)$ непрерывна при $x=0$. Полагая $x = \frac{1}{N}$, гдѣ N цѣлое число, находимъ $f\left(\frac{1}{N}\right) = 1$, а при $h>0$ $f\left(\frac{1}{N}+h\right) = \frac{1+Nh}{N}\left[\frac{N}{1+Nh}\right] = \frac{1+Nh}{N}(N-1)$, такъ что $\lim_{h=+0} f\left(\frac{1}{N}+h\right) = 1 - \frac{1}{N}$, т. е. не равенъ $f\left(\frac{1}{N}\right)$ и функція разрывна для безчисленнаго множества значеній, какъ угодно близкихъ къ 0.

XIV (къ § 272, f).

Въ § 254, g дано значеніе

$$(1) \qquad f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots = \tfrac{1}{2}(\pi - x)$$

при $0<x<2\pi$. Чтобы получить значеніе $f(x)$ при всякомъ x, положимъ въ лѣвой части равенства $x = 2m\pi + \xi$, гдѣ m цѣлое положительное или отрицательное число, а ξ между 0 и 2π. Тогда

$$f(x) = f(2m\pi + \xi) = f(\xi) = \tfrac{1}{2}(\pi - \xi),$$

по формулѣ (1), потому что $0<\xi<2\pi$. Замѣняя ξ его выраженіемъ $\xi = x - 2m\pi$, получимъ

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\pi - x) + m\pi = \tfrac{1}{2}(\pi - x) + \left[\frac{x}{2\pi}\right]\cdot\pi.$$

XV (къ § 276).

Теорема § 276 одна изъ важнѣйшихъ въ теоріи непрерывныхъ функцій. Мы считаемъ необходимымъ указать на нѣкоторыя важнѣйшія, вытекающія изъ нея заключенія, безъ которыхъ многіе пункты въ дальнѣйшемъ изложеніи этой теоріи не будутъ вполнѣ ясны.

1. Прежде всего замѣтимъ, что она отождествляетъ два понятія, которыя мы соединяемъ подъ названіемъ свойства непрерыв-

ности. Когда мы говоримъ, что независимая перемѣнная x обладаетъ свойствомъ непрерывности въ интервалѣ (a, b) или, короче, что она непрерывна въ этомъ интервалѣ, то подъ этимъ понимается, что x принимаетъ всѣ значенія, какъ раціональныя, такъ и ирраціональныя, лежащія въ этомъ интервалѣ. Когда мы говоримъ, что нѣкоторая функція отъ x непрерывна въ нѣкоторомъ интервалѣ, то это значитъ (§ 266), что для всякаго значенія x, лежащаго въ интервалѣ

$$\lim f(x) = f(\lim x). \tag{1}$$

Теорема § 276 показываетъ, что функція, непрерывная въ смыслѣ опредѣленія (1), будетъ непрерывна и въ смыслѣ вышеупомянутаго выше опредѣленія непрерывности. Теорема § 276 даетъ возможность весьма легко установить условіе обратимости функціи, непрерывной въ данномъ интервалѣ, и доказать непрерывность обратной функціи. Замѣтимъ сперва нѣкоторыя опредѣленія. Функція $f(x)$ называется возрастающею въ интервалѣ (a, b) (см. также § 296), если каковы бы ни были числа x_1 и x_2 въ интервалѣ (a, b) разности $x_1 - x_2$ и $f(x_1) - f(x_2)$ будутъ имѣть одинаковые знаки, и убывающею, если эти числа имѣютъ разные знаки. Иными словами, для возрастающей функціи одновременно имѣютъ мѣсто неравенства

$$x_1 < x_2, \quad f(x_1) < f(x_2),$$

т. е. бо́льшему значенію x соотвѣтствуетъ и бо́льшее значеніе $f(x)$; для убывающей функціи, наоборотъ, при $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. бо́льшему значенію x соотвѣтствуетъ мѣньшее значеніе функціи. Какъ возрастающая, такъ и убывающая въ данномъ интервалѣ функція называются монотонными въ этомъ интервалѣ.

Теорема. Если $y = f(x)$ непрерывная и монотонная функція отъ x въ интервалѣ (a, b), то существуетъ и обратная функція $x = g(y)$, монотонная и непрерывная въ интервалѣ $[f(a), f(b)]$ или $[f(b), f(a)]$. Для опредѣленности положимъ, что $f(x)$ возрастающая функція; тогда при $a < b$, $f(a) < f(b)$. Возьмемъ какое нибудь значеніе y_0 между $f(a)$ и $f(b)$. По теоремѣ § 276 въ интервалѣ (a, b) найдется, по крайней мѣрѣ, одно значеніе $x = x_0$, для котораго $f(x_0) = y_0$. Вслѣдствіе возрастанія функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) мы можемъ утверждать, что другого значенія x_1 въ интервалѣ (a, b), для котораго $f(x_1) = y_0$, быть не можетъ. Дѣйствительно, при $x_1 < x_0$, $f(x_1) < f(x_0)$, а при $x_1 > x_0$, $f(x_1) > f(x_0)$. Слѣдовательно, каждому значенію $y = y_0$ въ интервалѣ $[f(a), f(b)]$ соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе $x = x_0$ въ интервалѣ (a, b), для котораго $f(x_0) = y_0$. Поэтому x есть функція отъ y, опредѣленная во всемъ интервалѣ $[f(a), f(b)]$. Кромѣ того, эта функція, обратная данной $f(x)$, будетъ какъ и данная, возрастающею, потому что при

$$f(x_1) < f(x_2)$$

необходимо будетъ и $x_1 < x_2$. Легко, далѣе, показать, что эта функція $x = g(y)$ будетъ непрерывною въ интервалѣ $[f(a), f(b)]$. Дѣйствительно, взявъ опять произвольное значеніе $y = y_0$ въ этомъ интервалѣ и называя черезъ x_0 соотвѣтствующее ему значеніе x, будемъ измѣнять x отъ $x_0 - \varepsilon$ до $x_0 + \varepsilon$, гдѣ ε произвольно заданное сколь угодно малое положительное число. Функція y будетъ тогда измѣняться отъ

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{до} \quad y_2 = f(x_0 + \varepsilon),$$

при чемъ $y_1 < y_0 < y_2$, такъ какъ $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$. Положимъ $y_0 - y_1 = \delta_1$, $y_2 - y_0 = \delta_2$ и обозначимъ черезъ δ наименьшее изъ этихъ двухъ положительныхъ чиселъ. Каждому значенію y въ интервалѣ (y_1, y_2) или $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$ соотвѣтствуетъ значеніе x, лежащее въ интервалѣ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$; но интервалъ $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, очевидно, весь заключается въ интервалѣ $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, и мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: всякому произвольно заданному положительному числу ε соотвѣтствуетъ другое число $\delta > 0$, такое, что для всѣхъ значеній y, лежащихъ въ интервалѣ $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, соотвѣтствующія значенія x лежатъ въ интервалѣ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, откуда слѣдуетъ, что

$$\lim_{y=y_0} g(y) = x_0 = g(y_0),$$

т. е. $g(y)$ непрерывна при всякомъ значеніи $y = y_0$ въ интервалѣ $[f(a), f(b)]$. Легко также показать, что условіе монотонности функціи $f(x)$ не только достаточно, но и необходимо для ея обратимости (см. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, 2-e éd. p. 247). Дѣйствительно, положимъ, что взяты какія угодно три числа x_1, x_2, x_3 въ интервалѣ (a, b), удовлетворяющія условію $x_1 < x_2 < x_3$. Если функція $f(x)$ обратима, то числа $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ необходимо различны между собою; иначе одному и тому же значенію y соотвѣтствовали бы два различныя значенія x, вопреки предположенію. Покажемъ, что $f(x_2)$ всегда будетъ заключаться между $f(x_1)$ и $f(x_3)$. Допустить противоположное значитъ допустить, что либо $f(x_3)$ лежитъ между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, либо $f(x_1)$ между $f(x_2)$ и $f(x_3)$. Въ первомъ случаѣ разности $f(x_3) - f(x_1)$ и $f(x_3) - f(x_2)$ будутъ разныхъ знаковъ и, по теоремѣ § 275, уравненіе $f(x) - f(x_3) = 0$ будетъ имѣть корень x' между x_1 и x_2, такъ что $f(x_3) = f(x')$, при чемъ x' не равно x_3, что невозможно. Такимъ же образомъ доказывается невозможность второго случая. Слѣдовательно, при $x_1 < x_2 < x_3$, имѣемъ либо $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, либо $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$, т. е. $f(x)$ либо возрастающая, либо убывающая въ интервалѣ (a, b).

XVI (къ § 281).

Важно замѣтить, что, опредѣляя $f'(x)$, какъ

$$\lim_{\delta x=\pm 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x},$$

предполагается, что δx стремится къ 0 непрерывно, т. е. принимаетъ всевозможныя значенія, принадлежащія нѣкоторому интервалу, заключающему въ себѣ нуль, за исключеніемъ значенія $\delta x = 0$, при которомъ разсматриваемое отношеніе теряетъ смыслъ.

XVII (къ § 282, t).

При x цѣломъ, $f(x) = x - [x] = 0$; при $h > 0$, $f(x-h) = x - h - (x-1) = 1 - h$,

$$\lim_{h=0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = \lim_{h=0} \frac{1-h}{-h} = -\infty.$$

XVIII (къ § 282, h).

Полагая $\varphi(x) = x - \sqrt{x}$, имѣемъ $\varphi(0) = \varphi(1)$, а потому (§ 272, e) функція $\varphi(x-[x]) = x - [x] - \sqrt{x-[x]}$ непрерывна, а слѣдовательно, и функція $f(x) = [x] + \sqrt{x-[x]}$ непрерывна. При x цѣломъ и $h > 0$ (достаточно маломъ),

$$f(x) = x, \quad f(x+h) = x + \sqrt{h}, \quad \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,$$

$$f(x-h) = x - 1 + \sqrt{1-h}, \quad \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = \frac{1-\sqrt{1-h}}{h} = \frac{1}{1+\sqrt{1-h}}$$

и

$$\lim_{h=0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = \tfrac{1}{2}.$$

XIX (къ § 292, d).

Въ этомъ примѣрѣ и во многихъ другихъ функція y задана неявно, т. е. задано не выраженіе y черезъ x, а уравненіе, которому удовлетворяетъ y при всякомъ x. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ нѣтъ надобности сперва рѣшать уравненіе относительно y, и затѣмъ искать производную y', да это во многихъ случаяхъ было бы даже не выполнимо. Можно взять производныя отъ каждой части даннаго уравненія, не забывая, что y есть функція x, т. е. примѣняя правило § 284, и написать, что эти производныя между собою равны:

получится уравненіе первой степени относительно y', откуда эта величина и опредѣлится. Приравнивать же производныя обѣихъ частей уравненія $A = B$ можно, потому что $A - B = 0$ при всякомъ x, слѣдовательно, производная отъ $A - B$ равна нулю, иначе $A' = B'$.

XX (къ § 294, c).

Укажемъ здѣсь построеніе линіи, изображающей функцію $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$, не ограничиваясь одними положительными значеніями x, какъ это сдѣлано въ книгѣ, а разсматривая какъ значенія $x > 0$, такъ и $x < 0$.

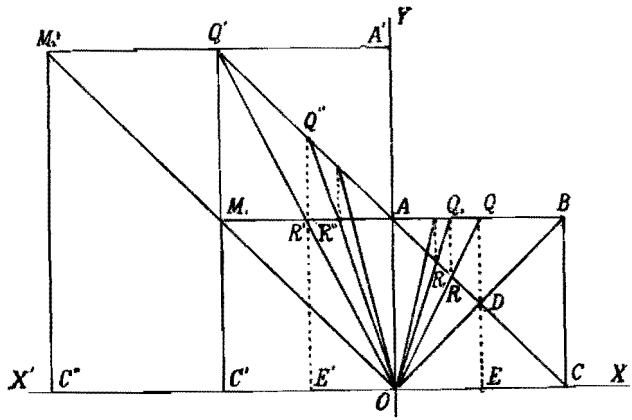


Рис. II.

1) $x > 0$. При $x > 1$, $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$, $y = 0$, т. е. всѣмъ значеніямъ $x > 1$ соотвѣтствуетъ ось x-въ отъ точки C $(x = 1)$ до ∞, при чемъ точка C исключается, такъ какъ при $x = 1$, $\left[\frac{1}{x}\right] = 1$, $y = 1$, т. е. получается точка B $(x = 1,\ y = 1)$. Построивъ квадратъ $OABC$, стороны котораго равны 1, проведемъ діагональ AC, уравненіе которой есть $x + y = 1$ или $y = 1 - x$. Положимъ теперь $\frac{1}{n+1} < x \leqq \frac{1}{n}$, гдѣ n можетъ имѣть значенія 1, 2, 3, 4, ... Тогда $n \leqq \frac{1}{x} < n + 1$, $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, $y = nx$; это уравненіе выражаетъ прямую, проходящую черезъ точку 0. На этой прямой искомой линіи принадлежитъ лишь отрѣзокъ между точкою $x = \frac{1}{n}$, $y = 1$ на сторонѣ AB и предѣльною точкою $x = \frac{1}{n+1}$, $y = \frac{n}{n+1}$ на линіи $y + x = 1$, т. е. на діагонали AC. При $n = 1$, получаемъ

прямую OB, $y = x$, и на ней отрѣзокъ BD искомой линіи (D— предѣльная точка, не принадлежащая линіи). Проведя прямую $EDQ \perp Ox$, находимъ $OE = \frac{1}{2}$, $QE = 1$, $QE = 2 \cdot OE$ и, соединивъ Q съ O, получаемъ прямую OQ, $y = 2x$, и на ней отрѣзокъ QR искомой линіи. Построивъ $RQ_1 \perp Ox$ и соединивъ Q_1 съ O, получимъ прямую OQ_1, $y = 3x$, и на ней отрѣзокъ Q_1R_1 искомой линіи и т. д. до безконечности, приближаясь безпредѣльно къ точкѣ A.

2) $x < 0$. Замѣтимъ сперва, что, по опредѣленію $[z]$, всегда имѣемъ $[z] = z - \varrho$, гдѣ $0 \leqq \varrho < 1$, будетъ ли $z > 0$ или < 0. Такъ что, если z лежитъ между $-n$ и $-n-1$, гдѣ n цѣлое положительное число, то $[z] = -n-1$. Замѣтивъ это, положимъ теперь, что $x \leqq -1$, тогда $\frac{1}{x} \geqq -1$, $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$, $y = -x$. Это уравненіе прямой OM_1M_2, дѣлящей уголъ yOx' пополамъ. Всѣ точки этой прямой, начиная отъ точки M_1, абсцисса которой равна -1, принадлежатъ искомой линіи, при чемъ сама точка M_1 не исключается. Пусть теперь $-1 < x < 0$, и обозначая опять черезъ n цѣлое положительное число, положимъ $-\frac{1}{n} < x \leqq \frac{1}{n+1}$; тогда $-n > \frac{1}{x} \geqq -n-1$, $\left[\frac{1}{x}\right] = -n-1$, $y = -(n+1)x$, что выражаетъ прямую, проходящую черезъ O въ углѣ yOx'; на ней искомой линіи принадлежитъ отрѣзокъ между предѣльною точкою $x = -\frac{1}{n}$, $y = \frac{n+1}{n}$ на линіи $y + x = 1$, т. е. на продолженіи линіи CA, и точкою $x = \frac{1}{n+1}$, $y = 1$, на продолженіи линіи BA. При $n = 1$, получимъ линію $y = -2x$ и на ней отрѣзокъ $Q'R'$ искомой линіи. Дальнѣйшее построеніе аналогично указанному для $x > 0$, и даетъ отрѣзки $Q'R''\ldots$, безпредѣльно убывающіе и приближающіеся къ A сверху и слѣва.

XXI (къ § 294, d).

Повтореніе операціи f, гдѣ $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, равносильно послѣдовательному прибавленію множителей $\sin\frac{1}{x \sin\frac{1}{x}}$, $\sin\frac{1}{x \sin\frac{1}{x \sin\frac{1}{x}}}$, и т. д. Обозначая черезъ $f_n(x)$ результатъ n кратнаго повторенія операціи f и присоединяя условіе $f_n(0) = 0$, мы видимъ, что $f_1(x)$ нельзя графически изобразить въ окрестности точки $x = 0$, $f_2(x)$ въ окрестности точекъ $x = 0$ и всѣхъ другихъ корней уравненія $f_1(x) = 0$ или $\sin\frac{1}{x} = 0$, т. е. точекъ $x = \pm\frac{1}{n\pi}$, гдѣ n цѣлое положитель-

ное число, функцію $f_3(x)$ въ окрестности всѣхъ предыдущихъ точекъ и всѣхъ другихъ корней уравненія $f_2(x) = 0$, т. е. корней уравненія $\sin\dfrac{1}{x\sin\dfrac{1}{x}} = 0$, или $x\sin\dfrac{1}{x} = \pm\dfrac{1}{n\pi}$, и т. д. Послѣднее уравненіе подстановкой $x = \dfrac{1}{z}$, приводится къ виду

$$\sin z = \pm\frac{z}{n\pi}, \tag{1}$$

и корни его равны обратнымъ величинамъ корней уравненія (1). Предлагаемъ читателю опредѣлить границы, между которыми лежатъ корни уравненія (1), при данномъ n, пользуясь теоремою § 275, а также и графическимъ построеніемъ синусоиды $y = \sin z$ и прямой $y = \dfrac{z}{\pm n\pi}$, точки пересѣченія которыхъ и опредѣляютъ корни уравненія (1).

XXII (къ § 294, f)

Чтобы построить линію, изображающую функцію

$$y = 2^{-[x]}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x-[x]}\right),\ (x > 0)$$

положимъ $x = n + \xi$, гдѣ $n = [x]$, $0 \leqq \xi < 1$. Тогда $y = 2^{-n}\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{\xi}\right]$—парабола, положеніе которой зависитъ отъ n. При измѣненіи ξ отъ 0 до 1, получимъ параболическій отрѣзокъ между точками $\left(x = n,\ y = \dfrac{1}{2^n}\right)$ и $\left(x = n+1,\ y = \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$, при чемъ вторая—предѣльная и искомой линіи не принадлежитъ. При $n = 0$ получается первый отрѣзокъ между точками (0, 1) и $(1, \frac{1}{2})$ (см, чертежъ 7-й § 294). Съ увеличеніемъ n отрѣзки опускаются все ниже и ниже. Чтобы доказать свойство касательной, указанное въ § 294, f, замѣчаемъ, что при достаточно маломъ $h > 0$ (такъ что $\xi + h < 1$)

$$f(x+h) = 2^{-n}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\xi+h}\right),$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi+h}}{2^{n+1}\cdot h} = -\frac{1}{2^{n+1}(\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi+h})}$$

и

$$f'(x) = -\frac{1}{2^{n+2}\xi^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда видимъ, что угловой коэффиціентъ касательной меньше 0, и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2^{n+2}\sqrt{\xi}}$, если α острый уголъ между касательной и Ox.

Съ приближеніемъ ξ къ 0, т. е. x къ n справа, $\operatorname{tg}\alpha$ стремится къ ∞, α къ $\frac{\pi}{2}$. Съ приближеніемъ ξ къ 1, т. е. x къ $n+1$ слѣва, $\operatorname{tg}\alpha$ стремится къ $\frac{1}{2^{n+2}}$, числу убывающему безпредѣльно при возрастаніи n.

XXIII (къ § 296).

Дѣйствительно, положимъ $f(0)=l$ и возьмемъ $h>0$ и $<\frac{1}{l}$, тогда при $0<x\leqq h<\frac{1}{l}$, $\frac{1}{x}>l$, т. е. $f(x)>f(0)$. Съ другой стороны, взявъ въ интервалѣ $(0, h)$ два числа x' и x'' $(x'>x'',$ т. е. $x'-x''>0)$, будемъ имѣть

$$f(x')-f(x'')=\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}<0.$$

XXIV (къ § 296).

Дѣйствительно, полагая

$$f(x)=x-[x], \quad \text{и} \quad 0<h<1,$$

имѣемъ

$$f(x+h)=x+h-[x]>f(x).$$

Съ другой стороны, при $a<x'<x''<b$, имѣемъ $x'-x''<0$, $f(x')-f(x'')=x'-x''+[x'']-[x']$, и при $[x'']-[x']>x''-x'$, получимъ $f(x')>f(x'')$.

XXV (къ § 301).

Въ математической литературѣ употребляется иногда и другая терминологія. Относительные maxima и minima, по принятой у Чезáро (и у другихъ итальянскихъ математиковъ) терминологіи, называютъ просто наибольшимъ и наименьшимъ изъ значеній функціи въ данномъ интервалѣ. Въ вопросахъ о наибольшихъ и наименьшихъ значеніяхъ функцій отъ искомыхъ перемѣнныхъ различаютъ два случая: 1) когда эти перемѣнныя независимы, 2) когда онѣ связаны нѣкоторыми условными уравненіями. Въ первомъ случаѣ maxima и minima функціи (по отношенію къ смежнымъ) называютъ абсолютными, во второмъ — относительными (relatifs). Послѣдняя терминологія принята какъ въ русской, такъ и въ иностранной литературѣ (см., напримѣръ, Mansion, Résumé du cours d'analyse infinitésimale, стр. 188; Stolz, Grundzüge der Diff. u. Integral-Rechnung 1893. B. I. стр. 240. C. Relative Extrema).

XXVI (къ § 304, a).

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = 0$; полагая $x = \frac{1}{z}$, находимъ $\operatorname{tg} z = z$. О рѣшеніи этого уравненія см. Бертранъ „Алгебра“ перев. Пирожкова, 2-я часть, стр. 262.

XXVII (къ § 308, d).

Для поясненія сказаннаго въ этомъ пунктѣ можемъ замѣтить слѣдующее:

1) Для вычисленія $f'(0)$ нельзя пользоваться выраженіемъ $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x \gtrless 0$, потому что при $x = 0$ это выраженіе теряетъ смыслъ, и надо пользоваться опредѣленіемъ

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

и условіемъ $f(0) = 0$. Тогда и получимъ

$$f'(0) = \lim_{h=0} \left[h \sin \frac{1}{h} \right] = 0.$$

2) Примѣняя формулу Лагранжа

$$f(x) - f(0) = x f'(\xi),$$

гдѣ ξ лежитъ между 0 и x, къ данной функціи, получаемъ

$$x \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi},$$

откуда и вытекаетъ, что съ приближеніемъ x и ξ къ нулю $\cos \frac{1}{\xi}$ также стремится къ нулю, а такъ какъ при непрерывномъ приближеніи ξ къ нулю $\cos \frac{1}{\xi}$ не можетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу, а постоянно колеблется между -1 и $+1$, то необходимо заключить, что ξ разрывная функція отъ x, стремящаяся къ нулю вмѣстѣ съ x.

3) Положимъ, что ξ стремится къ нулю, принимая послѣдовательно значенія

$$\frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad \frac{2}{(2n+3)\pi}, \quad \frac{2}{(2n+5)\pi}, \quad \cdots, \tag{1}$$

гдѣ n цѣлое число, лежащее при достаточно большомъ $|n|$ въ сколь угодно маломъ интервалѣ $(-h, +h)$. Для всѣхъ этихъ значеній ξ получимъ

$$\cos \frac{1}{\xi} = 0.$$

Поэтому $\lim_{\xi=0} \cos\frac{1}{\xi} = 0$, если ξ принимаетъ значенія (1) и безконечно близкія къ нимъ. Съ другой стороны, если обозначимъ черезъ a любое число, для котораго $\cos a$ не равно нулю, т. е. не имѣющее вида $\frac{2k+1}{2}\pi$ при k цѣломъ, и положимъ, что ξ принимаетъ послѣдовательно значенія

$$\frac{1}{n\pi + a}, \quad \frac{1}{(n+1)\pi + a}, \quad \frac{1}{(n+2)\pi + a}, \cdots \tag{2}$$

(гдѣ n цѣлое число), лежащія въ томъ же интервалѣ $(-h, +h)$, то для такихъ значеній ξ получимъ

$$\cos\frac{1}{\xi} = \cos(n\pi + a) = \pm\cos a = \pm a,$$

гдѣ $\pm a$ обозначаетъ любое число въ интервалѣ $(-1, +1)$, не равное нулю. Отсюда заключаемъ, что $\lim_{\xi=0} \cos\frac{1}{\xi}$ не равенъ нулю, когда ξ принимаетъ значенія (2) или безконечно близкія къ нимъ. Послѣдовательность (1) есть частный случай послѣдовательности (2) при $a = \frac{2k+1}{2}\pi$, гдѣ k цѣлое число. Итакъ, при условіи $\lim_{\xi=0} \cos\frac{1}{\xi} = 0$, перемѣнное число ξ можетъ принимать значенія, равныя числамъ послѣдовательности (1) и безконечно близкія къ нимъ, и не можетъ принимать значеній, равныхъ и безконечно близкихъ числамъ безконечнаго множества послѣдовательностей (2), соотвѣтствующихъ безконечному множеству значеній a, не равныхъ $\frac{2k+1}{2}\pi$. Вѣроятно, это обстоятельство и имѣлъ въ виду авторъ, высказывая, что значенія, которыхъ не можетъ принимать ξ, безконечно многочисленнѣе тѣхъ, которыя это число можетъ принимать.

XXVIII (къ § 308, d).

Для $f(x) = x \sin\log x$ и $f(0) = 0$ формула Лагранжа даетъ

$$\sin\log x = \sin\log\xi + \cos\log\xi = 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \log\xi\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \log\xi\right),$$

откуда

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + \log\xi\right)\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Для значеній ξ, лежащихъ внутри интервала (q^{2k-1}, q^{2k}), гдѣ

$q = e^{-\frac{\pi}{2}}$, и k цѣлое положительное число, $\log\xi + \frac{\pi}{4}$ будетъ заключаться между $\frac{\pi}{4} - k\pi$ и $\frac{3\pi}{4} - k\pi$, а $\left|\log\xi + \frac{\pi}{4}\right|$ между $k\pi - \frac{3\pi}{4}$ и $k\pi - \frac{\pi}{4}$, т. е. будетъ заключаться въ интервалѣ

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}\right), \cdots$$

Во всѣхъ этихъ интервалахъ

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} + \log\xi\right)\right| > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

вопреки доказанному.

XXIX (къ § 314, e).

Когда говорятъ, что полиномъ нечетной степени

$$f(x) = x^{2n+1} + p_1 x^{2n} + p_2 x^{2n-1} + \cdots + p_{2n+1}$$

при $x = -\infty$ имѣетъ знакъ —, а при $x = +\infty$ знакъ +, то подъ этимъ понимаютъ слѣдующее: числу x всегда можно дать достаточно большое по абсолютной величинѣ значеніе, чтобы знакъ $f(x)$ совпалъ со знакомъ его перваго члена x^{2n+1}. Это сдѣлается очевиднымъ, если представимъ $f(x)$ въ видѣ

$$f(x) = x^{2n+1}\left[1 + \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \cdots + \frac{p_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right]$$

и замѣтимъ, что при достаточно большомъ значеніи $|x|$ сумма въ скобкахъ какъ угодно близка къ 1. Въ нашемъ примѣрѣ

$$f(x) = x^3 + px + q,\ f(-\infty) < 0,\ f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) > 0,\ f\left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) < 0,\ f(+\infty) > 0,$$

откуда и слѣдуетъ сказанное о корняхъ $f(x)$.

XXX (къ § 314, g).

Если A и B данныя точки, K точка пересѣченія луча свѣта съ раздѣляющею плоскостью, t_1 время, потребное для прохожденія пути AK со скоростью nv, t_2 время, потребное для прохожденія пути KB, со скоростью v, то

$$AK = \frac{a}{\cos\varphi} = nvt_1,\ KB = \frac{b}{\cos\psi} = vt_2,\ t = t_1 + t_2 = \left(\frac{a}{n\cos\varphi} + \frac{b}{\cos\psi}\right)\frac{1}{v},$$

а сумма $a \operatorname{tg} \varphi + b \operatorname{tg} \psi$, очевидно, равна разстоянію между проэкціями точекъ A и B на раздѣляющую плоскость, т. е. величинѣ постоянной.

XXXI (къ § 314, k).

Считаемъ не лишнимъ нѣсколько подробнѣе развить важные выводы этого пункта. Чтобы вывести формулу (B), замѣчаемъ, что повторное примѣненіе основной формулы $\Gamma(\varrho) = (\varrho - 1)\,\Gamma(\varrho - 1)$ даетъ, при $\varrho = x + n$,

$$\Gamma(x + n) = \Gamma(\varrho) = (\varrho - 1)\,(\varrho - 2) \ldots (\varrho - n)\,\Gamma(x),$$

откуда

$$(B) \qquad \Gamma(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\varrho)}{(1 - \varrho)\,(2 - \varrho) \ldots (n - \varrho)}.$$

Далѣе, перенося множитель $(-1)^n$ въ лѣвую часть, логарифмируя и взявъ затѣмъ производныя, находимъ

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma'(\varrho)}{\Gamma(\varrho)} + \frac{1}{1 - \varrho} + \frac{1}{2 - \varrho} + \cdots + \frac{1}{n - \varrho},$$

Для опредѣленія максимума или минимума $\Gamma(x)$ надо приравнять $\Gamma'(x)$ нулю, откуда и получаемъ уравненіе

$$(C) \qquad \frac{\Gamma'(\varrho)}{\Gamma(\varrho)} + \frac{1}{1 - \varrho} + \frac{1}{2 - \varrho} + \cdots + \frac{1}{n - \varrho} = 0$$

Если ϱ_n корень этого уравненія, то

$$-\frac{\Gamma'(\varrho_n)}{\Gamma(\varrho_n)} = \frac{1}{1 - \varrho_n} + \frac{1}{2 - \varrho_n} + \cdots + \frac{1}{n - \varrho_n} > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n,$$

потому что $0 < \varrho_n < 1$.

Изъ формулы $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$ слѣдуетъ,

$$\Gamma'(x + 1) = \Gamma(x) + x\,\Gamma'(x),$$

отсюда

$$\lim_{x=0} \frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -1,$$

потому что

$$\lim_{x=0} \Gamma(x) = \infty.$$

Наконецъ, послѣднее неравенство § 314, k получается слѣдующимъ образомъ:

Изъ формулы (B) при $x = x_n$, $\varrho = \varrho_n$, имѣемъ

$$\Gamma(x_n) = \frac{(-1)^n \Gamma(\varrho_n)}{(1-\varrho_n)(2-\varrho_n)\cdots(n-\varrho_n)}$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(\varrho^n+1)}{\varrho_n(1-\varrho_n)\log n} \cdot \frac{\log n}{(2-\varrho_n)(3-\varrho_n)\cdots(n-\varrho_n)},$$

откуда получаемъ

$$|\Gamma(x_n)| < \frac{\Gamma(\varrho_n+1)}{\varrho_n(1-\varrho_n)\log n} \cdot \frac{\log n}{1\cdot 2\cdots(n-1)},$$

потому что $0 < \varrho_n < 1$.

Окончательное заключеніе о безчисленномъ множествѣ корней уравненія $\Gamma(x) = k$ при $k \gtrless 0$, ясно слѣдуетъ изъ того, что 1) во всякомъ интервалѣ $(-n, -n+1)$ $|\Gamma(x)|$ можетъ принимать сколь угодно большое значеніе и 2) при достаточно большомъ n и сколь угодно малое, потому что $\lim_{n=\infty} |\Gamma(x_n)| = 0$.

XXXII (къ § 317, a).

Дѣйствительно, если $|x| < a < 1$, то достаточно удовлетворить неравенству $a^n < \varepsilon$, независимо отъ значенія x, чтобы $|x^n| < \varepsilon$. Первому неравенству удовлетворить легко. Полагая $a = \frac{1}{1+\gamma}$, гдѣ $\gamma > 0$, должны имѣть $(1+\gamma)^n > \frac{1}{\varepsilon}$; но $(1+\gamma)^n > 1 + n\gamma$, слѣдовательно, достаточно взять $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\gamma}$.

XXXII bis (къ § 324, b).

Указываемый авторомъ процессъ разложенія непрерывной функціи въ равномѣрно сходящійся рядъ непрерывныхъ функцій можетъ оказаться непримѣнимымъ, если функція $f(x)$ опредѣлена только въ интервалѣ (a, b) и не имѣетъ смысла внѣ его. Въ этомъ случаѣ для значеній x, достаточно близкихъ къ a [при $\alpha_n < 0$] или къ b [при $\alpha_n > 0$], аргументъ $x + \alpha_n$ будетъ лежать внѣ этого интервала, такъ что не для всѣхъ значеній x въ (a, b) всѣ члены ряда

$$(x+\alpha_1) + [f(x+\alpha_2) - f(x+\alpha_1)] + \cdots + [f(x+\alpha_n) - f(x+\alpha_{n-1})] + \cdots$$

имѣютъ смыслъ. Напримѣръ, функція $f(x) = \arcsin x$ опредѣлена только въ интервалѣ $(-1, +1)$; полагая $\alpha_n = \frac{1}{n}$, получимъ рядъ

$$\arcsin x = \arcsin(x+1) + \left[\arcsin\left(x+\frac{1}{2}\right) - \arcsin(x+1)\right] + \cdots$$

$$\cdots + \left[\arcsin\left(x+\frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(x+\frac{1}{n-1}\right)\right] + \cdots,$$

въ которомъ при любомъ n первые $n+1$ членовъ не имѣютъ смысла въ интервалѣ $\left(1-\frac{1}{n},\ 1\right)$, за исключеніемъ нижней границы.

Тѣмъ не менѣе утвержденіе автора, что всякая опредѣленная въ интервалѣ $(a,\ b)$ и непрерывная въ немъ функція $f(x)$ для всѣхъ значеній x въ $(a,\ b)$ можетъ быть разложена въ равномѣрно сходящійся рядъ непрерывныхъ функцій — вполнѣ правильно. Пользуясь, въ сущности, идеей автора, можно, напримѣръ, дать такое разложеніе:

$$f(x)=f\left(x+\frac{b-x}{2}\right)+\left[f\left(x+\frac{b-x}{2^2}\right)-f\left(x+\frac{b-x}{2}\right)\right]+\cdots$$
$$\cdots+\left[f\left(x+\frac{b-x}{2^n}\right)-f\left(x+\frac{b-x}{2^{n-1}}\right)\right]+\cdots$$

Для каждаго x въ интервалѣ $(a,\ b)$ аргументъ $x+\frac{b-x}{2^n}$ $[n=1,\ 2,\ 3,\ldots]$ содержится между x и b, т. е. въ $(a,\ b)$.

[Это замѣчаніе принадлежитъ Г. М. Фихтенгольцу.]

XXXIII (къ § 330).

Общая формула остатка въ формулахъ Тэйлора (Taylor) и Маклорена (Mac-Laurin) дана была Шлемильхомъ (Schlömilch) и независимо отъ него Рошемъ (Roche).

Различныя другія формы остатка, совершенно иного характера, полезныя въ приближенныхъ вычисленіяхъ функцій, даны Н. Сонинымъ въ статьѣ „Объ остаткѣ формулы Тэлёри“ Универс. Извѣстія. Варшава, 1891.

XXXIV (къ § 334).

Положимъ для опредѣленности, что $f'(x)$ сохраняетъ знакъ $+$, начиная съ $x=n$. Остатокъ ряда $v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$ (§196, c) численно меньше $v_{n+1}=-\frac{1}{8}f'(\alpha_1)+\frac{1}{8}f'(\beta_1)$, гдѣ α_1 лежитъ въ интервалѣ $(n,\ n+\frac{1}{2})$, β_1 въ интервалѣ $(n+\frac{1}{2},\ n)$. По условію $f'(x)$ постоянно убываетъ, слѣдовательно,

$$f'(\alpha_1)>f'(\beta_1)\quad\text{и}\quad v_{n+1}<0,\quad\text{но}>-\tfrac{1}{8}f'(\alpha_1)>-\tfrac{1}{8}f'(n).$$

XXXV (къ § 337, d).

Прежде всего замѣтимъ, что $\nu=[\sqrt{n}]$, очевидно, равно числу полныхъ квадратовъ, не превышающихъ n. Далѣе, если k обозна-

чаетъ любое цѣлое число отъ 1 до n, то, по замѣченному въ § 337, d,

$$\sum_{p=1}^{p=[\sqrt{k}]}{}'\left(\left[\frac{k}{p}\right]-\left[\frac{k-1}{p}\right]\right)$$

равно числу дѣлителей числа k, не превышающихъ $\sqrt{k}$, т. е., какъ мы раньше видѣли (§ 247, e), равно $\frac{\vartheta(k)}{2}$ или $\frac{\vartheta(k)+1}{2}$, гдѣ 1 въ числителѣ появляется всякій разъ, когда k есть полный квадратъ. Поэтому, если въ разсматриваемой суммѣ дадимъ числу k всѣ значенія $k=1, 2, 3, \ldots, n$ и всѣ результаты сложимъ, то получимъ, съ одной стороны, двойную сумму

$$\sum_{k=1}^{k=n}{}'\sum_{p=1}^{p=[\sqrt{k}]}{}'\left(\left[\frac{k}{p}\right]-\left[\frac{k-1}{p}\right]\right),$$

а съ другой,

$$\sum_{k=1}^{k=n}{}'\frac{\vartheta(k)}{2}+\frac{\nu}{2},$$

гдѣ $\nu=[\sqrt{n}]$, какъ уже сказано, равно числу полныхъ квадратовъ, не превышающихъ n. Отсюда и находимъ

$$2\sum_{k=1}^{k=n}{}'\sum_{p=1}^{p=[\sqrt{k}]}{}'\left(\left[\frac{k}{p}\right]-\left[\frac{k-1}{p}\right]\right)-\nu=\vartheta(1)+\vartheta(2)+\cdots+\vartheta(n).$$

Чтобы преобразовать двойную сумму въ простую, замѣчаемъ, что суммировать можно слѣдующимъ образомъ: сперва положить $p=1$ и взять сумму

$$\sum_{k=1}^{k=n}{}'\left(\left[\frac{k}{1}\right]-\left[\frac{k-1}{1}\right]\right)=\left[\frac{n}{1}\right],$$

затѣмъ положить $p=2$ и взять сумму тѣхъ же разностей отъ

$$k=2^2\ ([\sqrt{k}]=2)\ \text{до}\ k=n,$$

тогда получимъ

$$\sum_{k=2^2}^{k=n}{}'\left(\left[\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{2^2-1}{2}\right]$$

и т. д., наконецъ, взять $p=\nu$ и вычислить

$$\sum_{k=\nu^2}^{k=n}{}'\left(\left[\frac{k}{\nu}\right]-\left[\frac{k-1}{\nu}\right]\right)=\left[\frac{n}{\nu}\right]-\left[\frac{\nu^2-1}{\nu}\right].$$

Слѣдовательно, двойная сумма будетъ равна

$$\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{p^2-1}{p}\right]=\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-\sum_{p=1}^{p=\nu}(p-1)=\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-\frac{1}{2}\nu(\nu-1).$$

XXXVI (къ § 340).

По § 327 радіусъ сходимости этого ряда равенъ

$$\lim\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n}=1,\ \text{потому что}\ \lim a_n=0,$$

иначе рядъ $a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots$ былъ бы расходящимся, вопреки предположенію, что

$$\lim(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})=l.$$

XXXVII (къ § 342, c).

Метода Чезаро для разысканія асимптотическихъ выраженій степенныхъ рядовъ, основанная на теоремѣ § 339, ему же принадлежащей, даетъ весьма просто во многихъ случаяхъ первый, безконечный, членъ искомаго разложенія, какъ это и показано имъ въ различныхъ примѣрахъ § 342. Относительно самой основной теоремы § 339 замѣтимъ слѣдующее. Если

$$(1)\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}a_n x^n\ \text{и}\ \varphi(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}b_n x^n$$

будутъ ряды съ коэффиціентами одного и того же знака, сходящіеся при $x<1$ и расходящіеся при $x=1$, то по теоремѣ § 339

$$\lim_{x=1}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{b_n},$$

если предѣлъ въ правой части существуетъ. Но предѣлъ лѣвой части можетъ существовать и въ томъ случаѣ, когда предѣлъ правой не существуетъ, а теорема Чезаро, повидимому, ничего не даетъ. Это затрудненіе однако, какъ показано на приведенныхъ примѣрахъ, можетъ быть часто обойдено слѣдующимъ пріемомъ. Замѣняя $f(x)$ и $\varphi(x)$ функціями $\frac{f(x)}{1-x}$ и $\frac{\varphi(x)}{1-x}$, у которыхъ коэффиціенты при x^n въ разложеніяхъ по степенямъ x будутъ $a_1+a_2+\cdots+a_n$ и $b_1+b_2+\cdots+b_n$ (что прямо получится при умноженіи рядовъ (1) на рядъ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$), получимъ, по той же теоремѣ § 339,

$$\lim_{n=\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n},$$

и предѣлъ въ правой части можетъ существовать, когда $\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{b_n}$ не существуетъ. Мы покажемъ здѣсь, какъ можно воспользоваться этимъ замѣчаніемъ для вычисленія второго (постояннаго) члена въ асимптотическомъ выраженіи функціи

$$f(x)=x+x^4+x^9+\cdots,$$

а именно

$$f(x)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}-\tfrac{1}{2}+\cdots,$$

о которомъ въ § 342 сказано, что его можно получить „безъ особыхъ затрудненій", продолжая вычисленіе. Вопросъ состоитъ въ разысканіи

$$\lim_{x=1}\left(f(x)-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\right).$$

Разсмотримъ, вмѣстѣ съ Чезаро, функцію

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}[\sqrt{n}]\,x^n,$$

связанную съ $f(x)$ соотношеніемъ $(1-x)\,\varphi(x)=f(x)$, вытекающимъ изъ того, что

$$[\sqrt{n}]-[\sqrt{n-1}]\begin{cases}=1, & \text{когда } n \text{ квадратъ цѣлаго числа,}\\ =0, & \text{когда } n \text{ не квадратъ,}\end{cases}$$

и приводимъ вопросъ, къ разысканію

$$\lim_{x=1}\left((1-x)\varphi(x)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\right).$$

Чтобы воспользоваться теоремою § 339, перепишемъ это выраженіе такъ:

$$\lim_{x=1}\left(\frac{\varphi(x)}{1-x}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right)\Big/(1-x)^{-2}. \tag{2}$$

Мы могли бы, конечно, написать это выраженіе и въ видѣ

$$\lim_{x=1}\left(\varphi(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right)\Big/(1-x)^{-1},$$

но тогда теорема § 339 ни къ чему не привела бы, потому что отношеніе коэффиціентовъ при x^n въ числителѣ и знаменателѣ ни къ какому предѣлу не стремится, между тѣмъ какъ въ формулѣ (2), напротивъ, предѣлъ этого отношенія вполнѣ опредѣленъ, какъ сейчасъ и покажемъ. Въ знаменателѣ коэффиціентъ при x^n, очевидно, равенъ $n+1$. Постараемся вычислить коэффиціентъ при x^n въ числителѣ, при чемъ, конечно, можемъ ограничиться членами порядка не ниже перваго относительно n, т. е. отбрасывать степени n ниже первой, такъ какъ предѣлъ отношенія такихъ леновъ къ n (или $n+1$) равенъ нулю. Коэффиціентъ при x^n въ $(1-x)^{-\frac{5}{2}}$ равенъ (по формулѣ бинома Ньютона)

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot(2n+1)(2n+3)$$
$$=\frac{1}{3}\frac{(2n+1)(2n+3)}{\sqrt{\pi n}}+\cdots\text{ (см. § 337, c)},$$

а слѣдовательно, въ $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-x)^{-\frac{2}{5}}$ коэффиціентъ при x^n будетъ равенъ

$$-\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}-\cdots,$$

гдѣ не выписанные члены будутъ степени ниже n. Коэффиціентъ при x^n въ $\frac{\varphi(x)}{1-x}$ равенъ $\sigma_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, гдѣ $a_n=[\sqrt{n}]$.

Остается вычислить эту сумму

$$\sigma_n=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{n}].$$

Полагая $n=\nu^2+\mu$, гдѣ $0\leqq\mu\leqq2\nu$, $[\sqrt{n}]=\nu$, замѣчая, что

$$a_1=a_2=a_3=1,\ a_4=a_5=\cdots=a_8=2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{(\nu-1)^2}=a_{(\nu-1)^2+1}=\cdots=a_{\nu^2-1}=\nu-1$$
$$a_{\nu^2}\quad=a_{\nu^2+1}\quad=\cdots=a_{\nu^2+\mu}=\nu,$$

и что число членовъ, равныхъ $k-1$, равно $k^2-(k-1)^2=2k-1$, при $k=2,\ 3,\ \ldots,\ \nu$, а число членовъ, равныхъ ν, равно $\mu+1=n-\nu^2+1$, находимъ

$$\sigma_n=1\cdot3+2\cdot5+\cdots+(\nu-1)(2\nu-1)+\nu(n-\nu^2+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{k=\nu-1}k(2k+1)+\nu(n-\nu^2+1)=2\sum_{k=1}^{k=\nu-1}k^2+\sum_{k=1}^{k=\nu-1}k+\nu(n-\nu^2+1)$$

Но извѣстно, что

$$2\sum_{k=1}^{k=\nu-1} k^2 = \frac{\nu(\nu-1)(2\nu-1)}{3}, \quad \sum_{k=1}^{k=\nu-1} k = \frac{\nu(\nu-1)}{2},$$

слѣдовательно,

$$\sigma_n = \tfrac{1}{3}\nu(\nu-1)(2\nu-1) + \tfrac{1}{2}\nu(\nu-1) + \nu(n-\nu^2+1).$$

По сдѣланному выше замѣчанію въ этомъ выраженіи достаточно удержать члены степени не ниже n и ν^2, такъ что можемъ написать

$$\sigma_n = -\tfrac{1}{3}\nu^3 - \tfrac{1}{2}\nu^2 + \nu n + \cdots,$$

гдѣ не выписанные члены роли не играютъ. Остается найти

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\sigma_n - \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}}{n}\right] = \lim_{n=\infty}\left[-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\nu^3}{n} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\nu^2}{n} + \nu - \tfrac{2}{3}n^{\frac{1}{2}}\right].$$

Пользуясь соотношеніемъ $n = \nu^2 + \mu$, $0 \leqq \mu \leqq 2\nu$, находимъ

$$\lim_{n=\infty}\frac{\nu^2}{n} = 1,$$

и окончательно,

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_n - \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}}{n} = -\tfrac{1}{2},$$

откуда по § 339,

$$\lim_{x=1}\left[f(x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\right] = -\tfrac{1}{2}.$$

Вычисленіе третьяго члена въ асимптотическомъ разложеніи $f(x)$ будетъ еще сложнѣе, и нужны другія средства, менѣе элементарныя, но быстрѣе ведущія къ цѣли. Такія средства и даетъ формула Коши, которую Чезаро приводитъ безъ доказательства въ § 342 и доказываетъ въ книгѣ VII, § 760. Эта формула съ необыкновенной легкостью даетъ всѣ три члена асимтотическаго выраженія $f(x)$ и можетъ дать и сколько угодно членовъ въ разложеніи $f(x)$ по степенямъ $\sqrt{1-x}$. Дѣйствительно, формулу Коши

$$\left(\frac{1}{2} + x + x^4 + x^9 + \cdots\right)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2} + x' + x'^4 + x'^9 + \cdots\right)\left(\log\frac{1}{x'}\right)^{\frac{1}{4}},$$

гдѣ $\log\dfrac{1}{x'} = \dfrac{\pi^2}{\log\frac{1}{x}}$,

можно написать такъ

$$\tfrac{1}{2}+f(x)=\{\tfrac{1}{2}+f(x')\}\frac{\sqrt{\pi}}{\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

и полагая $x=1-\xi$, гдѣ ξ стремится къ 0, когда x стремится къ 1, разложить $\log\frac{1}{x}=-\log(1-\xi)$ въ рядъ

$$-\log(1-\xi)=\xi+\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3}+\cdots,$$

тогда

$$\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\xi^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^2}{3}+\cdots\right)^{-\frac{1}{2}}=\xi^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4}\xi+\cdots\right).$$

Поэтому

$$\{f(x)+\tfrac{1}{2}\}\,\xi^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}\,\{\tfrac{1}{2}+f(x')\}\,(1-\tfrac{1}{4}\xi+\cdots)$$

или

$$f(x)\sqrt{1-x}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-x}+\frac{\sqrt{\pi}}{8}(1-x)=$$
$$\sqrt{\pi}\,(x'+x'^4+x'^9+\cdots)\,(1-\tfrac{1}{4}\sqrt{1-x}+\cdots).$$

Замѣтивъ теперь, что съ приближеніемъ x къ 1 не только x' стремится къ 0, но и $\frac{x'}{\xi^p}$, гдѣ p любое положительное число, также стремится къ 0 (какъ сейчасъ будетъ показано), изъ предыдущей формулы тотчасъ получаемъ

$$\lim_{x=1}\left(f(x)\sqrt{1-x}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\lim_{x=1}\left(f(x)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\right)=-\frac{1}{2},$$

$$f(x)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{\pi(1-x)}}{8}+\cdots,$$

а если бы продолжали разложеніе $\{-\log(1-\xi)\}^{-\frac{1}{2}}$ по степенямъ ξ дальше, то получили бы и дальнѣйшіе члены. Чтобы показать, что

$$\lim_{x=1}\frac{x'}{(1-x)^p}=0,\ \text{при}\ p>0,$$

положимъ $x'=e^{-b^2}$, $x=e^{-a^2}$, тогда соотношеніе $\log\frac{1}{x'}\cdot\log\frac{1}{x}=\pi^2$, дастъ $b=\frac{\pi}{a}$ и

$$\frac{x'}{(1-x)^p}=\frac{e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}}{(1-e^{-a^2})^p}=\frac{e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}e^{pa^2}}{(e^{a^2}-1)^p}.$$

Съ приближеніемъ x къ 1, a стремится къ 0 и

$$\lim \frac{x'}{(1-x)^p} = \lim_{a=0} \left(\frac{e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}}{(e^{a^2}-1)^p} \right).$$

Такъ какъ $e^{a^2} - 1 < a^2$, то

$$0 < \frac{e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}}{(e^{a^2}-1)^p} < \frac{1}{p\, a^2\, e^{\frac{\pi^2}{a^2}}}.$$

Наконецъ, полагая $a^2 = \frac{1}{a}$ и припоминая, что $\lim_{a=\infty} \left(\frac{a^2}{e^{\pi a^2}} \right) = \infty$, получаемъ $\lim_{x=1} \frac{x'}{(1-x)^p} = 0$, что и требовалось доказать.

XXXVIII (къ § 342, d).

Для поясненія замѣтимъ слѣдующія преобразованія:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} (x^{(2m-1)^2} - x^{4m^2}), \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{p=0}^{p=\infty} x^p$$

отсюда

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{p=1}^{p=\infty} (x^{p+(2m-1)^2} - x^{p+4m^2})$$

Далѣе,

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} x^{p+(2m-1)^2} = \sum_{p=1}^{p=\infty} x^{p+4m^2-4m}$$

(1)
$$= \sum_{p=1}^{p=4m-1} x^{p+4m^2-4m} + \sum_{p=4m}^{p=\infty} x^{p+4m^2-4m}$$

(2)
$$\sum_{p=0}^{p=\infty} x^{p+4m^2} = \sum_{p=4m}^{p=\infty} x^{p+4m^2-4m}.$$

Вычитая (2) изъ (1) и подставляя въ разложеніе $\frac{f(x)}{1-x}$, найдемъ

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{p=1}^{p=4m-1} x^{p+4m^2-4m} = \sum_{m=1}^{m=\infty} (x^{(2m-1)^2} + x^{(2m-1)^2+1} + \cdots + x^{4m^2-1}).$$

Отсюда и видно, что въ разложеніи

$$\frac{f(x)}{1-x} = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

коэффиціентъ $a_n = 1$ при $n = \nu^2 + \mu$, гдѣ $0 \leqq \mu \leqq 2\nu$, и ν нечетномъ, а $a_n = 0$ при ν четномъ.

Число слагаемыхъ въ группѣ членовъ съ коэффиціентомъ 1, въ которой первый членъ имѣетъ указателя $(2m-1)^2$, равно $4m^2 - -(2m-1)^2 = 4m-1$. Для вычисленія суммы $\sigma_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, гдѣ $n = \nu^2 + \mu$, и $0 \leqq \mu \leqq 2\nu$, разсмотримъ отдѣльно случаи 1) ν четнаго и 2) ν нечетнаго. Въ 1) случаѣ

$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{(\nu-1)^2} + \cdots + a_{\nu^2-1}.$$

Каждая группа членовъ, въ которой указатель перваго члена равенъ $(2m-1)^2$ даетъ $4m-1$ единицъ, при чемъ $m = 1, 2, 3, \ldots, \frac{\nu}{2}$. Поэтому

$$\sigma_n = \sum_{m=1}^{m=\frac{\nu}{2}} (4m-1) = \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)\nu - \frac{\nu}{2} = \frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Во 2) случаѣ

$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu^2} + \cdots + a_{\nu^2+\mu}.$$

Послѣдніе $\mu + 1$ членовъ даютъ $\mu + 1 = n + 1 - \nu^2$ единицъ. Между предшествующими членами число единицъ равно

$$\sum_{m=1}^{m=\frac{\nu-1}{2}} (4m-1) = \left(1 + \frac{\nu-1}{2}\right)(\nu-1) - \frac{\nu-1}{2} = \frac{(\nu-1)\nu}{2},$$

и

$$\sigma_n = n + 1 - \nu^2 + \frac{(\nu-1)\nu}{2} = n + 1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Оба случая можно соединить въ одинъ, написавъ

$$\sigma_n = \frac{1-(-1)^\nu}{2}(n+1) + \frac{(-1)^\nu}{2}\nu(\nu+1).$$

Равенство $(1-x)^2\varphi(x) = f(x)$ получается прямо изъ того, что

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2} = \frac{f(x)}{1-x} \cdot (1 + x + x^2 + \cdots)$$
$$= (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)$$
$$= a_1 x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots.$$

XXXIX (къ § 342, e).

Формула Н. Я. Сонина, о которой здѣсь говорится, дана имъ въ мемуарѣ „О Бернулліевыхъ полиномахъ“, Универс. Изв., Варшава, 1888, стр. 64, подъ видомъ

$$e^{-h^2} + \tfrac{1}{2}e^{-4h^2} + \tfrac{1}{3}e^{-9h^2} + \cdots = \frac{C}{2h} - \frac{\log h}{h} + \cdots,$$

отъ котораго переходъ къ виду, данному въ книгѣ, очевидно, получается подстановкою

$$x = e^{-h^2}.$$

XL (къ § 342, g).

Не безполезно нѣсколько подробнѣе развить слишкомъ краткія указанія въ этомъ интересномъ примѣрѣ.

Разсматривается функція

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x}, \text{ гдѣ}$$

$$f(x) = x\,\vartheta(1) + x^2\vartheta(2) + \cdots + x^n\vartheta(n) + \cdots,$$

$$\frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} H_n x^n, \text{ такъ что}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n x^n, \text{ гдѣ } a_n = \vartheta(n) - H_n,$$

$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{k=n}\vartheta(k) - \sum_{k=1}^{k=n} H_k.$$

Замѣчая равенства

$$\begin{aligned}
0 &= H_n - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \cdots - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\\
H_1 &= H_n - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \cdots - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\\
H_2 &= H_n - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \cdots - \frac{1}{3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
H_{n-1} &= H_n - \frac{1}{n}\\
H_n &= H_n,
\end{aligned}$$

и складывая ихъ, найдемъ

$$\sum_{k=1}^{k=n} H_k = (n+1)\,H_n - n.$$

По формулѣ Дирихле (§ 337) имѣемъ

$$\sum_{k=1}^{k=n} 0(k) = n\log n + (2\mathbf{C}-1)\,n + P_n, \quad \text{гдѣ } \lim_{n=\infty}\frac{P_n}{n} = 0,$$

а $H_n = \log n + \mathbf{C}$, если отбросимъ члены, исчезающіе при $n=\infty$. Подставляя эти выраженія въ σ_n, найдемъ

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_n}{n} = \mathbf{C}.$$

Далѣе,

$$\frac{\varphi(x)}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots)(a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty}\sigma_n x^n,$$

а $\psi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ (§ 247, а).

По теоремѣ § 339

$$\lim_{x=1}\frac{\varphi(x)}{(1-x)\psi(x)} = \lim_{n=\infty}\frac{\sigma_n}{n} = \mathbf{C},$$

откуда и получается асимптотическое равенство

$$\varphi(x) = \frac{\mathbf{C}x}{1-x}.$$

XLI (къ § 356).

Здѣсь $\delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ и т. д.

Различныя формы остаточнаго члена формулы Эйлера можно найти въ соч. А. А. Маркова „Исчисленіе конечныхъ разностей“ отд. 2-й, глава V. Тамъ же дано изслѣдованіе предѣловъ, въ которые можно заключить R_n, и различныя приложенія формулы Эйлера. Форма, въ которой эта формула приведена въ соч. А. А. Маркова, нѣсколько отличается отъ данной здѣсь, а именно она тамъ дана въ томъ видѣ, въ которомъ ее обыкновенно пишутъ, когда хотятъ ею пользоваться для вычисленія суммъ съ помощью интеграловъ и обратно.

XLII (къ § 365).

Формула эта даетъ также отвѣтъ на вопросъ о сходимости рядовъ, въ которые разлагаются различныя функціи, разсмотрѣнныя въ § 253.

Мы покажемъ это для функціи

$$\frac{xe^x}{e^x-1}.$$

Полагая въ формулѣ Эйлера (30) $f(x)=e^x$, имѣемъ $\delta f(x)=e^x(e^h-1)$, $\delta f(0)=e^h-1$ и то же самое значеніе для $\delta f'(0)$, $\delta f''(0)\ldots$ Раздѣлимъ всѣ члены на e^h-1; положивъ $n=2p$ и замѣнивъ букву h черезъ x, получимъ

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=1+B_1x+\frac{B_2}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{B_{2p}}{1\cdot 2\cdots 2p}x^{2p}+R_{2p},$$

$$\text{гдѣ } R_{2p}=-\frac{(B-\theta)^{2p}x^{2p+1}}{2p!}\frac{e^{\theta x}}{e^x-1},\quad 0<\theta<1.$$

На основаніи § 363, имѣемъ

$$|R_{2p}|\leq\left|\frac{B_{2p}x^{2p+1}e^{\theta x}}{2p!\,(e^x-1)}\right|.$$

Замѣняя B_{2p} его асимптотическимъ выраженіемъ и $1\cdot 2\ldots 2p$ также, по формулѣ Стирлинга, находимъ

$$B_{2p}=\frac{4\pi\sqrt{e}\cdot p^{2p+\frac{1}{2}}}{(\pi e)^{2p+\frac{1}{2}}},\quad 1\cdot 2\cdots 2p=2\sqrt{\pi p}\cdot(2p)^{2p}e^{-2p}$$

и получимъ

$$\frac{B_{2p}x^{2p+1}}{2p!}=2x\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2p},$$

откуда и находимъ при $|x|<2\pi$,

$$\lim_{p=\infty}R_{2p}=0;$$

разложеніе

$$\frac{xe^x}{e^x-1}$$

доказано, и интервалъ сходимости будетъ $(-2\pi,\ 2\pi)$.

XLIII (къ § 366).

Слова „до извѣстной степени“ добавлены для того, чтобы устранить возраженіе противъ высказаннаго опредѣленія для случая перемѣнныхъ, связанныхъ неравенствами. Напримѣръ, перемѣнныя x и y, удовлетворяющія условію $x^2 + y^2 \leqq 1$ независимы и могутъ принимать всѣ значенія между -1 и $+1$; но если зададимъ $x = a$, то y уже не можетъ принимать всѣ значенія между -1 и $+1$, а должно остаться въ предѣлахъ $-\sqrt{1-a^2}$ и $+\sqrt{1-a^2}$.

XLIV (къ § 375).

Точное опредѣленіе линейной независимости и зависимости n функцій можетъ быть дано въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Функціи u, v, w, ... отъ x, опредѣленныя въ интервалѣ (α, β), называются линейно зависимыми въ этомъ интервалѣ, если существуетъ n постоянныхъ a, b, c, ..., не равныхъ сплошь нулю, такого рода, что для всѣхъ значеній x въ интервалѣ (α, β) имѣетъ мѣсто равенство (7). Въ противномъ случаѣ функціи называются линейно независимыми въ интервалѣ (α, β).

Тождественное обращеніе въ нуль опредѣлителя Вронскаго необходимо, для того чтобы функціи были линейно зависимыми, но отнюдь не достаточно, въ чемъ можно убѣдиться на примѣрѣ [Kowalewski, „Einführung in die Determinantentheorie“, 1909; S. 327.]

Опредѣлимъ функціи $u(x)$, $v(x)$ въ интервалѣ $(-1, 1)$ равенствами

$$u(x) = x^2 \text{ при } -1 \leqq x \leqq 0,\ u(x) = 0 \text{ при } 0 \leqq x \leqq 1;$$
$$v(x) = 0 \text{ при } -1 \leqq x \leqq 0,\ v(x) = x^2 \text{ при } 0 \leqq x \leqq 1.$$

Функціи u, v непрерывны и имѣютъ производныя во всемъ интервалѣ $(-1, 1)$. Опредѣлитель Вронскаго этихъ функцій имѣетъ видъ

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ при } -1 \leqq x \leqq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} \text{ при } 0 \leqq x \leqq 1$$

и, слѣдовательно, тождественно равенъ нулю въ интервалѣ $(-1, 1)$. Тѣмъ не менѣе, функціи u, v линейно независимы въ интервалѣ $(-1, 1)$, ибо положивъ въ равенствѣ типа (7)

$$a u(x) + b v(x) = 0$$

$x = -1$ и $x = 1$, найдемъ, что $a = b = 0$.

Доказательство автора содержитъ погрѣшность въ томъ отношеніи, что, разсмотрѣвъ случай, когда $u = 0$ въ интервалѣ (α, β),

и случай, когда $u \neq 0$ въ этомъ интервалѣ, онъ оставилъ безъ разсмотрѣнія случай, когда для однихъ значеній x $u = 0$, а для другихъ $u \neq 0$.

Для того, чтобы получить условіе, достаточное для линейной зависимости данныхъ n функцій, можно къ требованію, чтобы опредѣлитель Вронскаго обращался тождественно въ нуль, присоединить еще требованіе, чтобы опредѣлитель Вронскаго $n-1$ функцій вовсе не обращался въ нуль въ интервалѣ (α, β) [Kowalewski, loc. cit., S. 328], или же, чтобы функціи разлагались въ степенные ряды.

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ.

Комплексныя числа и кватерніоны.

КОМПЛЕКСНЫЯ ЧИСЛА.

Основныя понятія.

385. Когда задана единица линейной мѣры OA, то всѣ положительныя числа могутъ быть изображены точками на прямой, на которой по произволу назначена начальная точка O. При этомъ

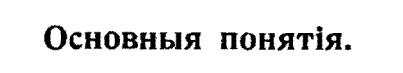


Рис. 13.

каждая точка на прямой опредѣляется принадлежащею ей абсциссою, и обратно, число a, измѣряющее эту абсциссу, изображается соотвѣтствующею точкою, которую и называютъ кратко точкою a. Далѣе, чтобы ввести изображеніе отрицательныхъ чиселъ, условились разсматривать новую единицу OA', равную первой, но противоположно направленную. Такимъ образомъ, всѣ вещественныя числа могутъ быть изображены точками оси абсциссъ. Каково же будетъ аналитическое выраженіе, способное изобразить всякую другую точку на плоскости? Разсмотримъ сперва точки на оси y-въ, и введемъ еще новую единицу OB, равную OA, но направленную въ положительную сторону по оси ординатъ. Обозначимъ эту новую единицу черезъ i, такъ что ia

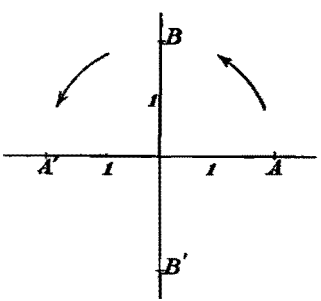


Рис. 14.

будетъ обозначать длину a, отложенную по оси y-въ въ положительномъ направленіи, подобно тому какъ $-a$ обозначаетъ длину a, отложенную по оси x-овъ въ отрицательномъ направленіи. Иными словами: знакъ i такъ же, какъ и знакъ $-$, служитъ лишь для того, чтобы обозначить новое направленіе, по которому надо двигаться изъ точки O, чтобы встрѣтить точку, изображающую разсматриваемое число. Для простоты, однако, условились употреблять знакъ i и для изображенія числа i. 1 или точки B.

386. Чтобы распространить правила алгебраическаго вычисленія на вновь введенныя числа, прежде всего необходимо опредѣлить основныя операціи независимымъ отъ природы этихъ чиселъ способомъ. Мы установимъ слѣдующее опредѣленіе сложенія: сложить одно число съ другимъ, или точнѣе прибавить одно число къ другому, значитъ найти то число, въ которое обратится первое, когда второе примемъ за начальную точку. Слѣдовательно, $a + ib$ изобразитъ точку ib, въ томъ предположеніи, что начальная точка передвинута въ точку a. Число $a+ib$, которое называютъ комплекснымъ или мнимымъ, изображаетъ, слѣдовательно, ту точку на плоскости, координаты которой будутъ a и b; обратно, эта точка изображаетъ число $a + ib$, называемое аффиксомъ разсматриваемой точки. Ясно, что мы получимъ одну и ту же точку, когда прибавимъ ib къ a или a къ ib, такъ что a и ib въ выраженіи $a + ib$ можно переставлять. Равенство двухъ комплексныхъ чиселъ обозначаетъ совпаденіе тѣхъ точекъ, аффиксами которыхъ служатъ данныя числа, и распадается необходимо на два равенства: одно между вещественными частями этихъ чиселъ, другое между частями со знакомъ i, которыя называютъ также чисто мнимыми частями числа. Въ частности, чтобы $a + ib = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $a = 0$, $b = 0$.

387. Умноженіе двухъ чиселъ можно опредѣлить, какъ разысканіе того числа, въ которое обратится одно изъ нихъ, когда другое примемъ за единицу мѣры положительныхъ чиселъ. Замѣтимъ, что для полученія i нужно повернуть единицу мѣры OA на уголъ $\frac{\pi}{2}$ въ сторону, противоположную движенію часовой стрѣлки. Поэтому i^2 или $i \cdot i$ будетъ то число, въ которое обратится i, когда примемъ OB за единицу мѣры положительныхъ чиселъ. Слѣдовательно, чтобы получить i^2, надо повернуть OB около O на уголъ $\frac{\pi}{2}$ въ указанномъ выше направленіи; тогда получимъ OA', такъ что $i^2 = -1$. Поэтому комплексное число можно писать въ видѣ $a + b\sqrt{-1}$.

388. Тригонометрическое изображеніе. Въ полярныхъ координатахъ $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, такъ что комплексное число $a + ib$ можно писать въ видѣ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, гдѣ

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} + 2k\pi$$

при произвольномъ цѣломъ значеніи k. Уголъ θ называютъ аргументомъ даннаго числа, а r (всегда положительное или равное нулю) модулемъ этого числа и часто обозначаютъ знакомъ $|a+ib|$. Обратимъ вниманіе на то, что комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда модуль его равенъ нулю.

389. Сложеніе и вычитаніе. Изъ опредѣленія сложенія прямо слѣдуетъ, что сумма двухъ чиселъ $c=a+ib$ и $c'=a'+ib'$ есть аффиксъ лежащей противъ O вершины параллелограмма, построеннаго на Oc и Oc' (рис. 15). Координаты этой точки будутъ, очевидно, $a+a'$ и $b+b'$, такъ что $c'+c=c+c'$. Мы имѣемъ, слѣдовательно,

$$(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b').$$

Подобнымъ же образомъ доказывается, что

$$(a+ib)-(a'+ib')=(a-a')+i(b-b').$$

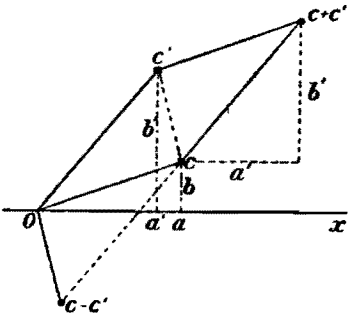


Рис. 15.

Точка $c-c'$ симметрична съ $c+c'$ относительно точки c. Она есть конецъ прямой, равной и параллельной $c'c$ и проведенной изъ O. Полезно замѣтить, что разстояніе между точками c и c' измѣряется модулемъ разности $c-c'$. Чертежъ показываетъ еще, что модуль суммы двухъ комплексныхъ чиселъ всегда заключается между суммою и разностью модулей слагаемыхъ.

390. Умноженіе (рис. 16). Если OA есть единица длины, то число c' получится, если повернемъ ось абсциссъ на уголъ θ' и затѣмъ отложимъ на ней отъ точки O длину, отношеніе которой къ OA равно r' $[c'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')]$. Если теперь будемъ разсматривать Oc $[c=r(\cos\theta+i\sin\theta)]$, какъ единицу при изображеніи положительныхъ чиселъ, то, по опредѣленію умноженія, для полученія числа $c\cdot c'$ надо продѣлать надъ Oc ту же операцію, которую дѣлали съ OA для полученія c', т. е. повернуть Oc на уголъ θ', и отложить затѣмъ на ней отъ точки O длину rr', отношеніе которой къ $Oc\,(=r)$ равно r'. Тогда получимъ прямую, составляющую съ Ox уголъ $\theta+\theta'$, и на ней точку cc' въ разстояніи rr' отъ O. Замѣтимъ, что мы получили бы ту же точку, если бы хотѣли изо-

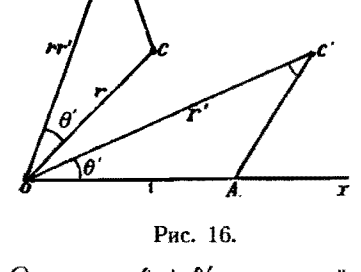


Рис. 16.

бразить число $c'c$, такъ что $c'c = cc'$. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что, каково бы ни было число сомножителей, всегда

a) аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ сомножителей,

b) модуль произведенія равенъ произведенію модулей сомножителей,

Инымп словами,

$$(a + ib)(a' + ib') = rr' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')],$$

или, раскрывая правую часть

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Обратимъ теперь вниманіе на то, что полученный результатъ получается перемноженіемъ $a + ib$ на $a' + ib'$ по обыкновеннымъ правиламъ Алгебры, принимая во вниманіе соотношеніе $i^2 = -1$. Замѣтимъ еще частный случай: произведеніе двухъ такъ называемыхъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ $a + ib$ и $a - ib$ равно квадрату общаго ихъ модуля, т. е. $a^2 + b^2$.

391. Для того, чтобы произведеніе нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ обратилось въ нуль, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей обратился въ нуль. Пусть $r, r', r'', \ldots$ будутъ модули чиселъ $c, c', c'', \ldots$ Если $cc'c'' \ldots = 0$, то и $rr'r'' \ldots = 0$. Поэтому одно изъ вещественныхъ чиселъ $r, r', r'', \ldots$ должно быть нулемъ, а тогда и одно изъ комплексныхъ чиселъ $c, c', c'', \ldots$ будетъ нулемъ. Обратно, если, напримѣръ, $c = 0$, то одно за другимъ будутъ имѣть мѣсто равенства $r = 0$, $rr'r'' \ldots = 0$, $cc'c'' \ldots = 0$.

392. Дѣленіе. Изъ сказаннаго въ § 390 тотчасъ слѣдуетъ, что $\frac{r}{r'}$ будетъ модуль, а $\theta - \theta'$ аргументъ частнаго отъ дѣленія $a + ib$ на $a' + ib'$ Поэтому,

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

или, раскрывая правую часть,

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2},$$

предполагая, что r' не равно 0. Обратимъ вниманіе на то, что къ тому же результату придемъ, если умножимъ числителя и знаменателя въ лѣвой части на $a' - ib'$. Резюмируя все вышесказанное, приходимъ къ тому заключенію, что можно производить всѣ алгебраическія вычисленія такъ, какъ будто эти числа вещественны, а i — число, удовлетворяющее уравненію $i^2 = -1$.

393. Возвышеніе въ степень. Примѣняя правило умноженія къ случаю n множителей, равныхъ $\cos\theta + i\sin\theta$, получимъ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Это формула Муавра. Ее легко распространить на случай не цѣлаго n и не положительнаго n. Пусть сперва $n = -m$, гдѣ m цѣлое и положительное число. Тогда имѣемъ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}$$

$$= \cos m\theta - i\sin m\theta = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Если $n = \frac{p}{q}$, гдѣ p и q цѣлыя взаимно простыя числа, то положимъ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos t + i\sin t.$$

Возвышая обѣ части равенства въ степень q (при чемъ q всегда можно считать положительнымъ), найдемъ

$$\cos p\theta + i\sin p\theta = \cos qt + i\sin qt.$$

Слѣдовательно,

$$qt = p\theta + 2k\pi, \quad t = n\theta + \frac{2k\pi}{q},$$

гдѣ k — цѣлое число или нуль.

Отсюда видимъ, что $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$, кромѣ значенія $\cos n\theta + i\sin n\theta$, соотвѣтствующаго значенію $k = 0$, имѣетъ еще $q - 1$ значеній, соотвѣтствующихъ значеніямъ $k = 1, 2, 3, \cdots, q-1$; при $k = q, q+1, \cdots$ повторяются полученныя раньше числа. Далѣе, легко видѣть, что, каково бы ни было n, всегда $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ есть n-ая степень отъ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Наконецъ замѣтимъ, что при n — цѣломъ, формула Муавра дастъ выраженіе тригонометрическихъ функцій дугъ, кратныхъ отъ θ, черезъ $\cos\theta$ и $\sin\theta$. Дѣйствительно, разлагая лѣвую часть формулы по строкѣ бинома Ньютона, тотчасъ найдемъ

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta + \cdots,$$

$$\sin n\theta = \frac{n}{1}\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta + \cdots.$$

394. Корни изъ единицы. Корнями n-ой степени изъ единицы называютъ всѣ числа, которыя по возвышеніи въ степень n даютъ 1. Обозначая такое число черезъ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, мы должны имѣть

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1,$$

откуда $r = 1$, $\cos n\theta = 1$, $\sin n\theta = 0$, такъ что $n\theta = 2k\pi$ (k цѣлое или 0). Слѣдовательно, корни n-ой степени изъ 1 будутъ

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},\ \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n},\ \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n},\ \ldots.$$

обозначая первое черезъ ω, для другихъ (въ силу формулы Муавра) будемъ имѣть выраженія ω^2, ω^3, ω^4, ... Всѣхъ корней n-ой степени изъ 1 будетъ ровно n, а именно

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \ldots,\ \omega^{n-1},$$

потому что $\omega^n = 1$, $\omega^{n+1} = \omega$, ..., $\omega^{-1} = \omega^{n-1}$ .... Эти числа будутъ аффиксами вершинъ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса 1, съ центромъ въ точкѣ 0. Далѣе, очевидно, что получимъ всѣ корни n-ой степени какого угодно числа $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, умноживъ одинъ изъ нихъ на всѣ n корней изъ 1. Дѣйствительно,

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\cdot\omega^k.$$

Замѣтимъ, что вершины какого нибудь правильнаго n—угольника съ центромъ въ O изображаютъ корни n-ой степени одного и того же числа [1]) *).

Предѣлы, ряды и функціи.

395. Опредѣленія и основныя теоремы теоріи предѣловъ (§ 122 и слѣд.) остаются въ силѣ для комплексной перемѣнной $x + iy$. Нужно только вездѣ вмѣсто абсолютной величины разсматривать модуль числа. Мы будемъ говорить, что послѣдовательность комплексныхъ чиселъ z_1, z_2, z_3, ... стремится къ предѣлу z, если каждому сколь угодно малому положительному числу ε соотвѣтствуетъ другое число ν такъ, что, при $n > \nu$, модуль $z_n - z$ будетъ всегда меньше ε. Иными словами, точки, имѣющія аффиксами z_1, z_2, z_3, ..., должны въ концѣ концовъ попасть внутрь сколь угодно малаго круга, центръ котораго находится въ точкѣ z. Исходя изъ этого опредѣленія, тотчасъ видимъ, что теорема Коши (§ 139) остается въ полной силѣ и имѣетъ

---

[1]) О корняхъ изъ единицы и ихъ приложеніяхъ къ вопросамъ высшей Ариѳметики см. H. Weber. Lehrbuch der Algebra. T. I. гл. XII.

*) Нѣкоторыя приложенія читатель найдетъ и у Вебера и Вельштейна. T. I. стр. 367, а приложенія къ теоріи чиселъ—въ Высшей Алгебрѣ Ю. Сохоцкаго. T. II.

слѣдующій смыслъ: если каждому положительному сколь угодно малому числу ε соотвѣтствуетъ такое число n, что взаимныя разстоянія точекъ съ аффиксами z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3} ... всѣ меньше ε, то этого достаточно, чтобы утверждать, что послѣдовательность z_1, z_2, z_3, ... имѣетъ конечный предѣлъ.

396. Для того, чтобы комплексное перемѣнное число имѣло предѣлъ, необходимо и достаточно, чтобы вещественная его часть и коэффиціентъ при i имѣли предѣлы. Дѣйствительно, если ε задано и $|z_n - z| < \varepsilon$, при $n > \nu$, то абсолютныя величины $x_n - x$ и $y_n - y$ a fortiori будутъ меньше ε, и обратно, если эти послѣднія при $n > \nu$ будетъ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, то a fortiori (§ 389)

$$|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon,$$

а слѣдовательно, $\lim\limits_{n=\infty} z_n = z$. Это замѣчаніе даетъ возможность весьма просто удостовѣриться въ томъ, что теоремы теоріи предѣловъ остаются въ силѣ для комплексныхъ перемѣнныхъ. Кромѣ того, надо имѣть въ виду, что

$$\lim (x_n + iy_n) = \lim x_n + i \lim y_n,$$

если существуетъ та или другая часть равенства, и что, если модуль и аргументъ числа z_n стремятся къ предѣламъ r и θ при безконечномъ n, то z_n стремится къ числу z, котораго модуль равенъ r, а аргументъ равенъ θ.

397. Опредѣленія, относящіяся къ вещественнымъ рядамъ, примѣнимы и къ рядамъ комплексныхъ чиселъ. Пусть будетъ $u_n = a_n + ib_n$ общій членъ ряда и $S_n = A_n + iB_n$ сумма n первыхъ его членовъ. Чтобы S_n стремилась къ нѣкоторому предѣлу, необходимо и достаточно, чтобы A_n и B_n стремились къ нѣкоторымъ предѣламъ, и если A и B будутъ предѣлы A_n и B_n, то $S = A + iB$ будетъ сумма даннаго ряда. Слѣдовательно, чтобы рядъ комплексныхъ чиселъ былъ сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы рядъ вещественныхъ частей его членовъ и рядъ коэффиціентовъ при i были оба сходящіеся. Такъ какъ a_n и b_n получаются отъ умноженія $|u_n|$ на числа, лежащія между -1 и $+1$, то (§ 189) оба ряда, о которыхъ идетъ рѣчь, будутъ навѣрно сходящимися, если рядъ $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ сходящійся. Итакъ, данный рядъ будетъ сходящимся, если рядъ модулей его членовъ сходящійся. Съ другой стороны, надо замѣтить, что рядъ комплексныхъ чиселъ можетъ быть сходящимся и тогда, когда рядъ модулей его членовъ расходящійся. Напримѣръ, въ рядѣ, общій членъ котораго $u_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$, рядъ модулей представляетъ

расходящійся (§ 183) гармоническій рядъ. Между тѣмъ данный рядъ сходящійся, и сумма его равна

$$-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}+\cdots+i\left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\cdots\right)=-\log\sqrt{2}+\tfrac{1}{4}i\pi.$$

Общія теоремы теоріи рядовъ также распространяются на ряды комплексныхъ чиселъ, только нужно вездѣ, какъ и въ этомъ §, терминъ абсолютная величина замѣнять словомъ модуль. Мы ограничимся въ послѣдующемъ, въ качествѣ примѣровъ, изложеніемъ доказательствъ двухъ теоремъ: теоремы Дирихле (§ 230) и теоремы Абеля (§ 193).

398. Для того, чтобы рядъ комплексныхъ чиселъ былъ абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы рядъ модулей его членовъ былъ сходящимся. Если рядъ абсолютно сходящійся (§ 225), то, обозначая его общій членъ черезъ $u_n = a_n + ib_n$, найдемъ, что ряды чиселъ a_n и b_n также абсолютно сходящіеся, потому что всякое измѣненіе порядка членовъ въ рядѣ чиселъ u_n произведетъ такое же измѣненіе порядка въ послѣднихъ двухъ рядахъ. Поэтому будутъ сходящимися ряды чиселъ $|a_n|$ и $|b_n|$, а слѣдовательно, и рядъ, общій членъ котораго есть $|a_n|+|b_n|$. А поэтому сходящимся будетъ и рядъ модулей $|b_n|$, потому что $|u_n|$ не больше $|a_n|+|b_n|$. Обратно, если рядъ модулей $|u_n|$ сходящійся, то a fortiori будутъ сходящимися ряды чиселъ $|a_n|$ и $|b_n|$, потому что эти числа не больше $|u_n|$, а слѣдовательно, ряды чиселъ a_n и b_n, а потому и чиселъ u_n — абсолютно сходящіеся.

399. Сходящійся рядъ останется сходящимся, если умножимъ его члены на числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, обладающія тѣмъ свойствомъ, что рядъ

$$\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_3-\alpha_2)+\cdots$$

будетъ абсолютно сходящійся. Дѣйствительно, пусть α обозначаетъ сумму ряда (положительныхъ членовъ)

$$|\alpha_1|+|\alpha_2-\alpha_1|+|\alpha_3-\alpha_2|+\cdots,$$

сходящагося въ силу предыдущей теоремы Дирихле. Когда задано произвольное положительное (сколь угодно малое) число ε, то всегда можно найти такое число ν, чтобы при $n>\nu$ и любомъ p было

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

Далѣе, легко видѣть, что (ср. § 192) сумма

$$\alpha_{n+1}u_{n+1}+\alpha_{n+2}u_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+p}u_{n+p}$$

можетъ быть тождественно преобразована въ слѣдующую сумму

$$(a_{n+1}-a_{n+2})\,u_{n+1}+(a_{n+2}-a_{n+3})\,(u_{n+1}+u_{n+2})+\cdots \\ +a_{n+p}\,(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}).$$

Поэтому ея модуль меньше, чѣмъ $\frac{\varepsilon}{2a}$, умноженное на

$$|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p}|.$$

Между тѣмъ ясно, что

$$|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|<a$$

и вслѣдствіе того, что

$$a_{n+p}=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+p}-a_{n+p-1}),$$

также

$$|a_{n+p}|\leq|a_1|+|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|<a,$$

такъ что будемъ имѣть

$$|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}|<2a.$$

Слѣдовательно,

$$|a_{n+1}u_{n+1}+a_{n+2}u_{n+2}+\cdots+a_{n+p}u_{n+p}|<2a\cdot\frac{\varepsilon}{2a}=\varepsilon$$

при $n>\nu$ и любомъ значеніи p. Поэтому рядъ $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\cdots$ сходящійся (§ 187).

400. Функціи. Функціею комплексной перемѣнной $z=x+iy$ называютъ и обозначаютъ черезъ $f(z)$ всякое аналитическое выраженіе, способное опредѣлить функцію $f(x)$ вещественной перемѣнной x и не теряющее смысла при замѣнѣ перемѣнной x на z. Такъ, напримѣръ, на основаніи сказаннаго въ § 393, всякая степень z съ раціональнымъ (цѣлымъ или дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ) показателемъ есть функція отъ z. Примѣры:

$$z^2=x^2-y^2+2ixy,\quad z^3=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3),\ldots$$

На основаніи того же и предыдущихъ §§ опредѣлены и всѣ алгебраическія (§ 254, а) функціи комплексной перемѣнной z. Умѣстно будетъ здѣсь же замѣтить, что тогда какъ раціональныя функціи, очевидно, однозначны (uniforme), ирраціональныя способны принимать нѣсколько значеній при одномъ и томъ же z (ср. § 254, с). Такъ напримѣръ, $\sqrt[n]{z}$ имѣетъ n значеній (§ 394), и замѣчательно то, что когда точка z, двигаясь непрерывно по плоскости, возвра-

тится на прежнее мѣсто, $\sqrt[n]{z}$ можетъ принять значеніе, не совпадающее съ первоначальнымъ. Опишемъ, напримѣръ, кругъ съ центромъ въ точкѣ O, выйдемъ изъ точки $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ съ начальнымъ значеніемъ $\sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$, и обойдя всю окружность, вернемся O въ прежнюю точку: мы найдемъ въ ней значеніе $\sqrt{z}$ равное

$$r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right) = -r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Подобно этому $\sqrt[3]{z}$ имѣетъ три значенія, которыя переходятъ одно въ другое, когда z одинъ или нѣсколько разъ опишетъ окружность круга около O, какъ центра.

401. Всякая функція $f(z)$ имѣетъ вообще комплексныя значенія и должна представляться въ видѣ $u + iv$, гдѣ u и v вещественныя функціи вещественныхъ перемѣнныхъ x и y. Но функціи u и v далеко не произвольны, а принадлежатъ къ особому и важному классу гармоническихъ функцій, т. е. такихъ функцій $\varphi(x, y)$, для которыхъ тождественно

$$\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ $f(z)$, какъ функцію отъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, а z какъ функцію $x + iy$ отъ этихъ же перемѣнныхъ, трактуя i, какъ нѣкоторую постоянную. Допуская существованіе производной $f'(x)$ для вещественнаго x, найдемъ, что первыя частныя производныя отъ $f(z) = u + iv$, будутъ

$$f'(z) = u'_x + iv'_x, \quad if'(z) = u'_y + iv'_y,$$

потому что $z'_x = 1$, $z'_y = i$. Приписывая теперь числу i опять его значеніе, находимъ

$$u'_y + iv'_y = i(u'_x + iv'_x) = iu'_x - v'_x,$$

а слѣдовательно,

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x, \tag{1}$$

откуда

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \quad v''_{xx} + v''_{yy} = 0.$$

Если бы u и v были произвольныя функціи, то $u + iv$, хотя и была бы комплексною функціею отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, но не функціею отъ одной перемѣнной z; поэтому ее нельзя

было бы обозначать черезъ $f(z)$ и тѣмъ болѣе нельзя было бы придать какой либо опредѣленный смыслъ символу $f'(z)$. Если же условія (1) выполняются, то легко видѣть слѣдующее:

а) Въ выраженіи

$$u(x, y) + iv(x, y)$$

перемѣнныя x и y входятъ только въ комбинаціи $z = x + iy$. Дѣйствительно, замѣняя x черезъ $z - iy$, разсматривая z, какъ вещественную перемѣнную, а i — какъ нѣкоторую постоянную, для частной производной, взятой по y отъ полученнаго выраженія

$$u(z - iy, y) + iv(z - iy, y)$$

найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$-i(u'_x - v'_y) + u'_y - i^2 v'_x = (1 + i^2)\, u'_y,$$

которое приводится къ нулю, если $i^2 = -1$. Отсюда слѣдуетъ, что разсматриваемое выраженіе, когда въ немъ подставимъ $z - iy$ вмѣсто x, приводится къ функціи одного z, и потому его и можно обозначить черезъ $f(x)$.

b) $f'(z)$ допускаетъ такое же опредѣленіе, какое $f'(x)$ имѣетъ при вещественномъ x. Дѣйствительно, когда точка z переходитъ въ $z + \delta z$, то u и v получатъ, какъ извѣстно (§ 376), приращенія

$$\delta u = u'_x \delta x + u'_y \delta y + \cdots, \quad \delta v = v'_x \delta x + v'_y \delta y + \cdots,$$

гдѣ мы пренебрегаемъ членами, которые и по раздѣленіи ихъ на δx или δy стремятся къ нулю вмѣстѣ съ δz. Отсюда, принимая во вниманіе (1), получимъ

$$\delta f = (u'_x + iv'_x)\, \delta x + (u'_y + iv'_y)\, \delta y + \cdots = (u'_x + iv'_x)\, (\delta x + i\delta y) + \cdots,$$

и слѣдовательно,

$$\lim \frac{\delta f}{\delta z} = f'(z).$$

Надо обратить вниманіе на то, что если условія (1) не выполняются, то лѣвая часть послѣдняго равенства, если и существуетъ, то зависитъ отъ того, какимъ образомъ δz стремится къ нулю. (I.)

402. Говорятъ (ср. § 261), что функція $f(z)$ стремится къ нѣкоторому вещественному или комплексному предѣлу l съ приближеніемъ z къ z_0, если всякому сколь угодно малому положительному числу ε соотвѣтствуетъ такое положительное число h, что въ кругѣ радіуса h съ центромъ въ z_0 всегда $|f(z) - l| < \varepsilon$. Для существованія такого предѣла необходимо и достаточно (ср. § 264), чтобы $|f(z') - f(z'')|$ была меньше ε для всякой пары значеній

z' и z'' внутри круга достаточно малаго радіуса съ центромъ въ z_0. Ясно, что стремленіе $f(z)$ къ предѣлу $l = a + bi$ равносильно одновременному стремленію u къ a и v къ b. Очевидно, что въ этомъ случаѣ u и v непрерывны, такъ какъ

$$\lim u(x, y) = u(x_0, y_0), \ \lim v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

какимъ бы образомъ $z = x + iy$ ни стремилось къ предѣлу $z_0 = x_0 + iy_0$, и обратно, непрерывность u и v влечетъ за собою и непрерывность $f(z)$.

403. Степенной рядъ

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots, \tag{2}$$

если онъ сходящійся, опредѣляетъ нѣкоторую функцію $f(z)$. Рядъ, составленный изъ модулей членовъ даннаго ряда, съ своей стороны, есть степенной рядъ, расположенный по степенямъ вещественной перемѣнной $r = |z|$, и имѣетъ (§ 326) нѣкоторый интервалъ сходимости $(-\varrho, \varrho)$, который въ частномъ случаѣ можетъ быть безконечнымъ или сводится къ нулю. При $r < \varrho$, рядъ модулей

$$|c_0| + |c_1| r + |c_2| r^2 + |c_3| r^3 + \cdots$$

будетъ сходящійся, и поэтому рядъ (2) будетъ абсолютно сходящійся (§ 398). При $r > \varrho$, напротивъ, рядъ не будетъ сходящимся, потому что его общій членъ, не только не стремится къ нулю, но даже не остается конечнымъ. Дѣйствительно, если бы модуль $|c_n| r^n$ этого общаго члена могъ оставаться меньше нѣкотораго даннаго числа k, при $r > \varrho$, то имѣли бы, взявъ число r' между ϱ и r, также

$$|c_n| r'^n < k \left(\frac{r'}{r}\right)^n,$$

и рядъ модулей былъ бы сходящимся и внѣ интервала $(-\varrho, \varrho)$, что противорѣчитъ опредѣленію послѣдняго (§ 190, b). Слѣдовательно, рядъ (2) будетъ сходящимся въ кругѣ радіуса ϱ и съ центромъ въ началѣ координатъ и не будетъ сходящимся внѣ этого круга, который на этомъ основаніи и называется кругомъ сходимости даннаго ряда. Сомнительной всегда является сходимость, когда аффиксъ точки принадлежитъ самой окружности круга. Понятіе о равномѣрной сходимости (§ 315) и относящіяся къ нему теоремы (§ 321 и слѣдующіе) также легко распространяются на ряды функцій комплексной перемѣнной. Въ частности, доказательства равномѣрной сходимости и правила для разысканія производной степеннаго ряда отъ вещественной перемѣнной (§§ 325, 329) справедливы и для ряда (2), и позволяютъ утверждать,

что сумма этого ряда есть непрерывная функція $f(z)$, имѣющая производную

$$f'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + 4c_4z^3 + \cdots,$$

всегда предполагая, что точки окружности круга сходимости исключаются.

404. Если не зависящій отъ z членъ ряда (2) неравенъ нулю, то около начала координатъ можно описать такой кругъ, внутри котораго не будетъ ни одного корня функціи $f(z)$. Дѣйствительно, непрерывность функціи $f(z)$ дозволяетъ найти такое положительное число h, что при $|z| < h$ всегда $|f(z) - c_0| < |c_0|$. Но, на основаніи послѣдняго замѣчанія § 389, имѣемъ

$$|f(z)| \geqq |c_0| - |c_0 - f(z)| > 0.$$

Слѣдовательно, $f(z)$ не обращается въ нуль внутри круга радіуса h съ центромъ въ началѣ координатъ. Установивъ это положеніе, докажемъ теперь слѣдующую теорему: Два степенныхъ ряда, имѣющіе, равныя суммы при безчисленномъ множествѣ значеній перемѣнной, стремящихся къ нулю, тождественны. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$c_0 - c_0' + (c_1 - c_1')z + (c_2 - c_2')z^2 + \cdots$$

будетъ рядъ, полученный вычитаніемъ одного ряда изъ другого. Сумма этого ряда обращается въ нуль для безчисленнаго множества значеній перемѣнной, стремящихся къ нулю, и поэтому обращается въ нуль внутри сколь угодно малаго круга, съ центромъ въ началѣ координатъ. Поэтому, $c_0 - c_0'$ должно быть равно нулю. При $c_0 = c_0'$ рядъ

$$c_1 - c_1' + (c_2 - c_2')z + \cdots$$

будетъ обращаться въ нуль для безчисленнаго множества значеній z, стремящихся къ нулю, слѣдовательно, $c_1 = c_1'$ и т. д. Поэтому данные ряды необходимо совпадаютъ. Отсюда слѣдуетъ, что возможно только одно разложеніе функціи въ степенной рядъ. И не трудно было бы убѣдиться (ср. § 329), что это разложеніе является именно формулою Маклорена. На вопросъ о томъ, какимъ образомъ можно убѣдиться a priori въ законности этого разложенія для данной функціи, мы здѣсь остановиться не можемъ и отсылаемъ читателя къ другимъ сочиненіямъ [1]).

---

[1]) Для первоначальнаго изученія полезно ознакомиться съ „Résumé du Cours d'Analyse" par Mansion. Смотри также его же „Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire" (Annales de la Société scient. de Bruxelles 1885—86).

405. По какому бы пути точка z ни приближалась безпредѣльно къ точкѣ z_0 внутри круга сходимости ряда (2), функція $f(z)$ сумма этого ряда, вслѣдствіе своей непрерывности всегда будетъ стремиться къ предѣлу $f(z_0)$. Но, если точка z_0 лежитъ на окружности круга сходимости, этого уже нельзя утверждать, предполагая, конечно, что $f(z_0)$ существуетъ. Для этого случая Абель доказалъ, что (ср. § 340) $\lim f(z) = f(z_0)$, если z приближается къ z_0 по направленію, нормальному къ окружности круга, т. е. по радіусу его. Понятно, что z должно приближаться къ z_0 съ внутренней стороны отъ окружности. Это выражаютъ тѣмъ, что полагаютъ $|z| = q\varrho$, при $q < 1$, такъ что и z должно быть равно qz_0, въ силу сдѣланнаго предположенія. Нужно показать, что разность

$$f(z_0) - f(z) = c_1 z_0(1 - q) + c_2 z_0^2(1 - q^2) + c_3 z_0^3(1 - q^3) + \cdots$$

стремится къ нулю, когда q стремится къ 1. Полагая $u_n = c_n z_0^n$, $a_n = 1 - q^n$, знаемъ (§ 399), что рядъ $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots$ будетъ сходящійся, такъ какъ, по условію, рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots [= f(z_0)]$ сходящійся. Изъ упомянутаго § надо еще взять то, что всякому сколь угодно малому положительному числу ε соотвѣтствуетъ такое число ν, что, при $n > \nu$, для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній q

$$|a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Разъ число n назначено, всегда можно найти достаточно близкое къ 1 значеніе q, чтобы было

$$|a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $|z|$, достаточно близкаго къ ϱ, будемъ имѣть $|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$, т. е. $\lim f(z) = f(z_0)$. Изъ этой именно теоремы Абель и вывелъ свою теорему объ умноженіи рядовъ (§ 236).

Важныя трансцендентныя функціи.

406. Показательная функція. Рядъ

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

сходящійся на всей плоскости, потому что рядъ модулей его членовъ всегда сходящійся (§ 184). Ничто не мѣшаетъ обозначить его сумму черезъ e^z, такъ какъ этотъ символъ до сихъ поръ былъ опредѣленъ только для вещественныхъ значеній z. Если

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, то данный рядъ разложится слѣдующимъ образомъ на два

$$1 + \frac{r}{1}\cos\theta + \frac{r^2}{1\cdot 2}\cos 2\theta + \cdots + i\left(\frac{r}{1}\sin\theta + \frac{r^2}{1\cdot 2}\sin 2\theta + \cdots\right).$$

Уже раннѣе (§ 332, b), было доказано, что первый рядъ есть разложеніе функціи $e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)$, а второй — функціи $e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)$. Отсюда слѣдуетъ

$$e^z = e^{r\cos\theta}(\cos(r\sin\theta) + i\sin(r\sin\theta)),$$

т. е.

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Въ частности, при $x = 0$ получимъ важную формулу Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,$$

на основаніи которой предыдущая формула принимаетъ видъ $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Общнѣе, замѣтимъ, что

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{x+x'}(\cos(y + y' + i\sin(y + y')) = e^{z+z'}$$

Слѣдовательно, функція e^z обладаетъ извѣстнымъ свойствомъ

$$e^z \cdot e^{z'} \cdot e^{z''} \cdots = e^{z+z'+z''+\cdots},$$

и для комплексныхъ показателей. Наконецъ, на основаніи сказаннаго въ концѣ § 403, функція e^z на всей плоскости непрерывна и имѣетъ производную e^z.

407 Круговыя (тригонометрическія функціи). Точно такъ же мы вправѣ, для опредѣленія круговыхъ функцій отъ комплексной перемѣнной, положить

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots,$$

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots,$$

установивъ сходимость написанныхъ рядовъ, сходимость абсолютную и равномѣрную на всей плоскости, такъ какъ ряды модулей будутъ сходящіеся при всякомъ r. Составляя функціи $\cos z + i\sin z$ и $\cos z - i\sin z$, находимъ

$$1 + \frac{iz}{1} + \frac{(iz)^2}{1\cdot 2} + \cdots = e^{iz}, \quad 1 - \frac{iz}{1} + \frac{(iz)^2}{1\cdot 2} - \cdots = e^{-iz},$$

такъ что можно писать

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Формула Эйлера, слѣдовательно, справедлива и для не вещественныхъ дугъ. Изъ послѣднихъ уравненій еще получаемъ

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Съ помощью этихъ соотношеній легко доказываются основныя формулы Тригонометріи, которыя, такимъ образомъ, распространяются на область комплексныхъ чиселъ. Такъ, напримѣръ, имѣемъ

$$\cos z \cos z' = \tfrac{1}{4}(e^{i(z-z')} + e^{-i(z-z')} + e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}),$$
$$\sin z \sin z' = \tfrac{1}{4}(e^{i(z-z')} + e^{-i(z-z')} - e^{i(z+z')} - e^{-i(z+z')}),$$

откуда

$$\cos z \cos z' - \sin z \sin z' = \tfrac{1}{2}(e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}) = \cos(z + z')$$

и т. д. Замѣняя въ формулахъ, опредѣляющихъ $\cos z$ и $\sin z$, z на $-z$, найдемъ

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

а предыдущее соотношеніе, при $z' = -z$, дастъ

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Наконецъ, замѣтимъ, что производная отъ $\cos z$ есть $-\sin z$, а производная отъ $\sin z$ есть $\cos z$, какъ и для вещественной перемѣнной. Другія тригонометрическія функціи опредѣляютъ такимъ же образомъ, какъ въ Тригонометріи вещественной перемѣнной, полагая

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Чтобы показать, какое значительное упрощеніе приноситъ теорія комплексныхъ чиселъ въ нѣкоторыхъ вопросахъ, припомнимъ производящую функцію Эйлеровыхъ чиселъ (§ 354), и замѣтимъ, что

$$\sec z = e^{Eiz} = \cos Ez + i \sin Ez = \cos Ez.$$

Такимъ же образомъ имѣемъ

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{2i}(e^{(E+1)iz} - e^{(E-1)iz}),$$

такъ что коэффиціентъ при z^p въ разложеніи этой функціи будетъ (§ 355)

$$\frac{i^{p-1}}{2} \cdot \frac{(E+1)^p - (E-1)^p}{p!} = \frac{i^{p-1}}{p!}(E+1)^p = \frac{i^{p-1}}{(p+1)!} 2^{p+1}(2^{p+1} - 1) B_{p+1}.$$

Иными словами, какъ для вещественныхъ, такъ и для комплексныхъ z, имѣемъ

$$\sec z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + \cdots, \quad \operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \cdots.$$

408. Гиперболическія функціи. Такъ какъ основныя формулы Тригонометріи позволяютъ выразить тригонометрическія функціи комплекснаго числа $z = x + iy$ черезъ функціи вещественнаго числа x и чисто мнимаго iy, то достаточно найти тригонометрическую интерпретацію этихъ послѣднихъ, чтобы получить въ то же время интерпретацію всей комплексной Тригонометріи. Разсматривая формулы

$$\cos ix = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sin ix = \frac{i}{2}(e^x - e^{-x}),$$

приходимъ къ изученію функцій

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

называемыхъ соотвѣтственно гиперболическимъ косинусомъ и гиперболическимъ синусомъ вещественной перемѣнной x. Такъ же опредѣляютъ гиперболическій тангенсъ, полагая

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

и т. д. Происхожденіе этихъ названій объясняется существованіемъ очевиднаго соотношенія

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

которое показываетъ, что $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ — координаты точки Q на равносторонней гиперболѣ (рис. 17), заданной уравненіемъ

$$X^2 - Y^2 = 1,$$

точно такъ же, какъ $\cos x$ и $\sin x$ — координаты точки P на окружности круга радіуса 1 съ центромъ въ началѣ координатъ. Если P' и Q' — точки, симметричныя съ P и Q относительно оси абсциссъ, то площадь кругового сектора OPP' измѣряется числомъ x; аналогично этому легко показать, что площадь гиперболическаго сектора OQQ' измѣряется соотвѣтствующимъ числомъ x. Въ самомъ дѣлѣ, проектируемъ точки A и Q въ точки B и R на асимптоту. Такъ какъ площади OAB и OQR эквива-

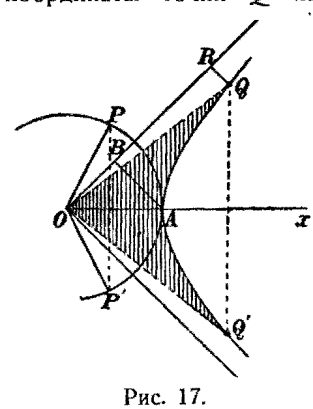


Рис. 17.

лентны*), то искомая площадь равна удвоенной площади криволинейнаго четырехугольника $ABRQ$. Впослѣдствіи мы увидимъ, что эта послѣдняя площадь измѣряется числомъ $\log \frac{OR}{OB}$. Но, очевидно,

$$OB = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad OR = \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\sqrt{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{2}}.$$

Слѣдовательно, пл. $OQQ' = \lg e^x = x$. Наконецъ, радіусы векторы OP и OQ отсѣкаютъ на общей касательной къ кругу и гиперболѣ въ точкѣ A отрѣзки, равные соотвѣтственно $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{th} x$. Лишь въ характерѣ измѣненія гиперболическія функціи существенно отличаются отъ круговыхъ. Въ то время какъ x измѣняется отъ 0 до ∞, $\operatorname{ch} x$ измѣняется отъ 1 до ∞, $\operatorname{sh} x$ отъ 0 до ∞, $\operatorname{th} x$ отъ 0 до 1. Для отрицательныхъ значеній x значенія гиперболическихъ функцій опредѣляются равенствами:

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

409. Теперь мы докажемъ, что каждому значенію x соотвѣтствуетъ нѣкоторое число ξ, лежащее между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ (гиперболическая амплитуда x), тригонометрическія функціи котораго воспроизводятъ, лишь въ другомъ порядкѣ, гиперболическія функціи отъ x. Пусть P (рис. 18) нѣкоторая точка на окружности круга, описаннаго радіусомъ $OA = 1$ изъ точки O, какъ центра. Пусть, далѣе, Q будетъ точка встрѣчи касательной къ кругу въ точкѣ P съ прямой OA, Q'' — точка встрѣчи касательной къ кругу въ точкѣ A съ OP. Прямая, перпендикулярная къ Ox въ точкѣ Q', и прямая, параллельная къ Ox, проведенная черезъ Q'', встрѣчаются въ нѣкоторой точкѣ Q, которая лежитъ на кривой, служащей для изображенія гиперболическихъ функцій; въ самомъ дѣлѣ, если обозначимъ уголъ POx черезъ ξ, то будемъ имѣть

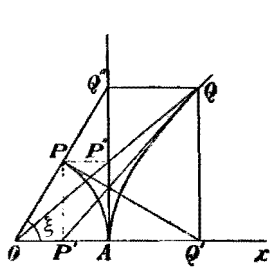


Рис. 18.

$$OQ' = OQ'' = \sec \xi, \quad QQ' = AQ'' = \operatorname{tg} \xi,$$

откуда $OQ^2 - QQ^2 = 1$. Теперь и видно, что предыдущія уравненія равносильны слѣдующимъ

$$\operatorname{ch} x = \sec \xi, \quad \operatorname{sh} x = \operatorname{tg} \xi.$$

Изъ нихъ тотчасъ выводимъ слѣдующія:

$$\operatorname{th} x = \sin \xi, \quad \operatorname{coth} x = \operatorname{cosec} \xi, \quad \operatorname{sech} x = \cos \xi, \quad \operatorname{cosech} x = \cot \xi.$$

*) Потому что изъ уравненія гиперболы, отнесенной къ асимптотамъ, выходитъ, что $OB.\ AB = OQ.\ QR$.

Итакъ, гиперболическіе синусъ и тангенсъ отъ x соотвѣтственно равны тригонометрическимъ тангенсу и синусу отъ ξ, т. е. отъ гиперболической амплитуды x. Подобное же можно сказать о косекансѣ и котангенсѣ и о косинусѣ и секансѣ. Далѣе, чтобы видѣть какое соотношеніе связываетъ перемѣнную x съ ея гиперболическою амплитудою ξ, замѣтимъ, что

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \sec\xi + \operatorname{tg}\xi = \frac{1+\sin\xi}{\cos\xi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

откуда получается $x = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, соотношеніе, которое можно написать въ видѣ, подмѣченномъ Лезаномъ

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}.$$

Въ заключеніе, обратимъ вниманіе на соотношеніе между кривыми, служащими для изображенія тѣхъ и другихъ (круговыхъ и гиперболическихъ) функцій. Если P' и P'' будутъ проекціи точки P на Ox и на AQ'', то прежде всего можно замѣтить, что касательная къ гиперболѣ въ точкѣ Q проходитъ черезъ P', такъ же, какъ касательная къ кругу въ точкѣ P проходитъ черезъ точку Q'. Дѣйствительно, какъ извѣстно, угловой коэффиціентъ первой касательной равенъ $\frac{OQ'}{QQ'} = \frac{QQ'}{P'Q'}$. Обѣ касательныя пересѣкаются на прямой $AP''Q''$ и подобно тому, какъ по построенію Q'' лежитъ на OP, такъ P'' лежитъ на OQ и т. д.

410. Гиперболическія функціи можно также опредѣлить и для комплексныхъ значеній перемѣнной, положивъ

$$\operatorname{ch} z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

и ихъ соотношенія съ круговыми прямо слѣдуютъ изъ опредѣленія, потому что изъ него вытекаетъ

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = \frac{\sin iz}{i}.$$

Изъ этихъ уравненій видно, что соотношеніе

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

остается справедливымъ. Далѣе, легко доказать формулы

$$\operatorname{ch}(z+z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z', \quad \operatorname{sh}(z+z') = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z',$$

$$\operatorname{th}(z+z') = \frac{\operatorname{th} z + \operatorname{th} z'}{1 + \operatorname{th} z \operatorname{th} z'}$$

и многія другія аналогичныя формуламъ обыкновенной Тригонометріи. Такимъ путемъ создается особый родъ вычисленій, пред-

ставляющій извѣстныя выгоды въ нѣкоторыхъ вопросахъ [1]). Замѣтимъ, наконецъ, что всякая круговая или гиперболическая функція отъ комплексной перемѣнной всегда выражается черезъ круговыя и гиперболическія функціи отъ вещественной перемѣнной. Напримѣръ,

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch} z = \cos y \operatorname{ch} x + i \sin y \operatorname{sh} x,$$
$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh} z = \cos y \operatorname{sh} x + i \sin y \operatorname{ch} x.$$

411. Логариѳмическая функція. Формула Эйлера даетъ возможность представить всякое число z въ видѣ $re^{i\theta}$. Такъ какъ число θ можно замѣнить черезъ $\theta + 2k\pi$, гдѣ k цѣлое число *), то можно также писать

$$z = e^{\log r + i(\theta + 2k\pi)}.$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ, распространяя опредѣленіе натуральнаго логариѳма,

$$\log(z) = \log r + i\theta + 2ik\pi.$$

Символъ $\log(z)$ употребляется для обозначенія общаго логариѳма числа z. Если z равно положительному числу r, то послѣдняя формула даетъ

$$\log(r) = \log r + 2ik\pi$$

(потому что при $z = r$, $\theta = 0$), и показываетъ, что всякое положительное число, кромѣ вещественнаго логариѳма, имѣетъ еще безконечное множество мнимыхъ. Далѣе, имѣемъ $\log(z) = \log(r) + i\theta$. Слѣдовательно, прибавляя $i\theta$ къ каждому логариѳму r, получимъ все безчисленное множество логариѳмовъ числа $re^{i\theta}$. Всѣ эти числа будутъ аффиксами точекъ на прямой, перпендикулярной оси вещественныхъ чиселъ, отстоящихъ одна отъ другой на одно и то же разстояніе 2π. Когда точка движется по окружности круга съ центромъ въ началѣ координатъ, то эта прямая передвигается вдоль самой себя, потому что она всегда встрѣчаетъ ось абсциссъ въ одной и той же точкѣ, изображающей вещественный логариѳмъ модуля z, т. е. число $\log|z| = \log r$. Общнѣе, когда z описываетъ какую-нибудь сомкнутую кривую около начала координатъ **), то прямая логариѳмовъ колеблется, передвигаясь вдоль самой себя постоянно въ одномъ направленіи, между двумя крайними положеніями, такъ что различные логариѳмы z переходятъ одинъ въ другой, описывая волнообразную кривую. Если же, наоборотъ, z описываетъ

---

[1]) Для большихъ подробностей можно указать: „Die Lehre von den Hyperbelfunktionen“ von Cünther и его же „Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie“.

*) Потому что

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

**) При чемъ, слѣдовательно, r измѣняется въ нѣкоторыхъ границахъ и снова принимаетъ первоначальное значеніе, но не остается постояннымъ, а θ постоянно возрастаетъ.

сомкнутую кривую, внутри которой не лежитъ начало координатъ, тогда не только прямая логариѳмовъ, колеблясь и поперечно и продольно, возвращается въ прежнее положеніе, но то же самое сдѣлаетъ и каждая ея точка, такъ что различныя опредѣленія $\log(z)$ останутся различными между собою и опишутъ каждый кольцевую кривую, лежащую между крайними положеніями прямой (I bis).

412. Значеніе z^c при $c = a + ib$ опредѣляютъ, условившись писать

$$z^c = e^{c \log z} = e^{(a+ib)(\log r + i\theta + 2ik\pi)}.$$

Модуль ϱ и аргументъ t числа z^c имѣютъ, слѣдовательно, значенія

$$\varrho = e^{a \log r - b(\theta + 2k\pi)}, \quad t = b \log r + a(\theta + 2k\pi) + 2k'\pi$$

при произвольныхъ цѣлыхъ значеніяхъ k и k'. Условимся на минуту разсматривать безконечное множество чиселъ (равныхъ z), имѣющихъ модуль r и аргументы $\theta \pm 2\pi$, $\theta \pm 4\pi$, ..., какъ различныя числа, хотя и изображаемыя одною и тою же точкою. Если мы примѣнили бы обыкновенныя правила возвышенія въ степень c *) къ числу z или къ какому угодно другому изъ чиселъ, изображаемыхъ тою же точкою, то получили бы

$$z^c = [re^{i(\theta+2k\pi)}]^{a+ib} = r^{a+ib} \cdot e^{(ia-b)(\theta+2k\pi)},$$

т. е.

$$z^c = r^a e^{-b(\theta+2k\pi)} \cdot e^{i[b \log r + a(\theta+2k\pi)]} = \varrho e^{i(t-2k'\pi)} = \varrho e^{it},$$

согласно съ опредѣленіемъ. Итакъ, чтобы возвысить z въ степень c, надо примѣнить обыкновенныя правила ко всему безконечному множеству чиселъ, изображаемыхъ одною и тою же точкою z. Слѣдовательно, существуетъ безчисленное множество значеній z^c. Они составляютъ геометрическую прогрессію съ знаменателемъ $e^{2i\pi c}$ и изображаются точками, лежащими на логариѳмической спирали съ полюсомъ въ началѣ координатъ. Эта кривая встрѣчаетъ ось y-въ параллельно къ Oc и потому обращается въ окружность круга, какъ мы уже видѣли (§ 394), когда c вещественное число. Если же c чисто мнимое число, то она обращается въ прямую линію. Предыдущія замѣчанія полезно имѣть въ виду при возвышеніи въ одну и ту же степень двухъ частей равенства. Иначе можно было бы, напримѣръ, изъ вѣрнаго равенства $e^{-2i\pi} = e^{2i\pi}$, возвышая обѣ части въ степень i, получить нелѣпый результатъ $e^{2\pi} = e^{-2\pi}$, между тѣмъ какъ мы въ правѣ утверждать лишь то, что числа $e^{2\pi(1-k)}$ и $e^{-2\pi(1+k')}$ равны между собою при прилично выбранныхъ цѣлыхъ числахъ k и k', что на самомъ дѣлѣ и будетъ при $k - k' = 2$. (II).

---

*) Т. е. возвышеніе модуля въ степень c и умноженіе аргумента на c.

Геометрическія упражненія.

413. Криволинейныя координаты. Если двѣ вещественныя функціи u и v отъ двухъ независимыхъ (вещественныхъ) перемѣнныхъ x и y приравняемъ нѣкоторымъ вещественнымъ постояннымъ a и b, то уравненія $u = a$, $v = b$, представятъ двѣ опредѣленныя линіи на плоскости. Если существуетъ лишь одна пара значеній a и b, при которыхъ эти линіи проходятъ черезъ данную точку M, и другихъ общихъ точекъ, по крайней мѣрѣ, въ ограниченной части плоскости, эти линіи не имѣютъ, то числа a и b могутъ служить для опредѣленія положенія точки M въ этой части плоскости, и называются поэтому криволинейными координатами точки M. Если функціи u и v получаются черезъ отдѣленіе вещественной части отъ чисто мнимой въ выраженіи нѣкоторой функціи $f(z)$ отъ комплексной перемѣнной $z = x + iy$, то всѣ линіи, опредѣляемыя уравненіемъ $u = a$, при безчисленномъ множествѣ значеній постоянной a, встрѣчаютъ всегда подъ прямымъ угломъ линіи, изображаемыя уравненіями $v = b$. Это обстоятельство выражаютъ тѣмъ, что получаемыя такимъ образомъ системы криволинейныхъ координатъ называютъ ортогональными *). Чтобы убѣдиться въ сказанномъ, замѣтимъ, что найденныя въ § 404 условія (1) выражаютъ именно условія перпендикулярности касательныхъ въ общей точкѣ къ кривымъ $u = a$ и $v = b$, такъ какъ произведеніе угловыхъ коэффиціентовъ этихъ касательныхъ

$$-\frac{u'_x}{u'_y} \quad \text{и} \quad -\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{u'_y}{u'_x} \qquad \text{(III)},$$

равно -1. Обыкновенная система прямолинейныхъ Декартовыхъ координатъ доставляется функціею z, или общнѣе функціею $az + \beta$, гдѣ a и β какія угодно вещественныя или комплексныя постоянныя. Если же возьмемъ функцію z^2, то одна система линій будутъ равностороннія гиперболы, для которыхъ оси Ox и Oy — асимптоты, а другая — тѣ же гиперболы, но повернутыя около общаго центра O на уголъ, равный $\frac{\pi}{4}$. Функція $\sqrt{z}$ дастъ параболы съ фокусомъ въ O и осью симметріи Ox. Функціи

$$\log z, \quad \log\log z, \quad \log\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

даютъ также интересныя координатныя системы. Первая даетъ обыкновенныя полярныя координаты, для второй — одна изъ системъ координатныхъ линій будетъ система логариѳмическихъ спиралей съ полюсомъ въ началѣ координатъ. Третья даетъ систему такъ называемыхъ диполярныхъ координатъ, весьма полезныхъ въ Электростатикѣ [1]). Пусть r_1 и r_2 разстоянія отъ точки z до точекъ z_1 и z_2, а φ уголъ, подъ которымъ отрѣзокъ $z_1 z_2$ виденъ изъ точки z; тогда имѣемъ

$$\log\frac{z - z_1}{z - z_2} = \log\left(\frac{r_1}{r_2}\, e^{i\varphi}\right),$$

---

*) Выраженіе: двѣ кривыя пересѣкаются подъ прямымъ угломъ или ортогонально, означаетъ, что касательныя къ этимъ кривымъ въ общей точкѣ взаимно перпендикулярны.

[1]) См. Betti. Teorica delle forze newtoniane (p. 189). Есть нѣмецкій переводъ Fr. Meyer.

такъ что можно положить $u = \log \frac{r_1}{r_2}$, $v = \varphi$. Линіи одной системы, $\varphi = \text{const.}$, будутъ круги, проходящіе черезъ точки z_1 и z_2 (полюсы). Линіи другой, опредѣляемыя уравненіемъ $\frac{r_1}{r_2} = \text{const.}$, будутъ также круги, ортогональные къ первой системѣ круговъ. Къ числу круговъ этой первой системы (какъ предѣльный случай) принадлежитъ и прямая, проходящая черезъ точки z_1 и z_2; на этой прямой лежатъ, слѣдовательно, центры круговъ второй системы. Можно было бы возразить, что два круга, пересѣкающіеся въ точкѣ z, пересѣкутся еще въ другой точкѣ. Но эта другая, хотя и имѣетъ съ z общую координату u, но различныя v, потому что полюсы (z_1 и z_2) раздѣляютъ первый кругъ на двѣ части: въ одной $v = \varphi$, а въ другой $v = \pi - \varphi$ (IV).

414. Функція

$$\log\left(\sqrt{z - z_1} + \sqrt{z - z_2}\right)$$

доставляетъ совокупность всѣхъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ общіе фокусы въ точкахъ z_1 и z_2. Въ самомъ дѣлѣ, вычитая изъ данной функціи постоянное число $\log(z_2 - z_1)$, мы можемъ затѣмъ положить

$$\sqrt{z - z_1} + \sqrt{z - z_2} = \sqrt{z_2 - z_1} \cdot e^{u+iv}$$

и слѣдовательно,

$$\sqrt{z - z_1} - \sqrt{z - z_2} = \sqrt{z_2 - z_1} \cdot e^{-u-iv},$$

откуда получаемъ

$$\sqrt{z - z_1} = \sqrt{z_2 - z_1}\,(\operatorname{ch} u \cos v + i \operatorname{sh} u \sin v),$$
$$\sqrt{z - z_2} = \sqrt{z_2 - z_1}\,(\operatorname{sh} u \cos v + i \operatorname{ch} u \sin v).$$

Взявъ теперь квадраты модулей (§ 389), найдемъ

$$r_1 = r(\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v), \quad r_2 = r(\operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v),$$

гдѣ r обозначаетъ разстояніе между точками z_1 и z_2, а r_1 и r_2 имѣютъ тѣ же значенія, какъ въ предыдущемъ упражненіи. Поэтому

$$r_1 + r_2 = r \operatorname{ch} 2u, \quad r_1 - r_2 = r \cos 2v.$$

Отсюда слѣдуетъ, что линіи $u = \text{const.}$ будутъ эллипсы съ фокусами въ z_1 и z_2, а линіи $v = \text{const.}$ гиперболы съ тѣми же фокусами. Замѣтимъ еще, что re^{2u} и re^{-2u} будутъ модули чиселъ

$$\left(\sqrt{z - z_1} \pm \sqrt{z - z_2}\right)^2 = 2z - (z_1 + z_2) \pm 2\sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}$$

и потому можно утверждать, что сумма разстояній точки z отъ какихъ угодно двухъ другихъ z_1 и z_2 равна

$$\left|z - \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) + \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}\right| + \left|z - \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) - \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}\right|. \tag{3}$$

Этотъ результатъ можно, впрочемъ, доказать непосредственно, припоминая (§ 389), что модули суммы и разности двухъ чиселъ c и c' измѣряются

діагоналями параллелограмма, построеннаго на Oc и Oc'. Такъ какъ сумма квадратовъ діагоналей равна суммѣ квадратовъ четырехъ сторонъ, то имѣемъ

$$|c|^2+|c'|^2=\tfrac{1}{2}(|c+c'|^2+|c-c'|^2).$$

Положимъ теперь $c=\sqrt{z-z_1}$, $c'=\sqrt{z-z_2}$ и замѣтимъ, что всегда $|c|^2=|c^2|$; тогда тотчасъ увидимъ, что выраженіе (3) совпадаетъ съ $|z-z_1|+|z-z_2|$, т. е. равно суммѣ разстояній точки z отъ z_1 и z_2.

415. Интересное приложеніе послѣдняго полученнаго результата мы найдемъ, разсматривая функцію $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$, обращающуюся въ нуль въ точкахъ z_1, z_2, z_3. Впослѣдствіи мы увидимъ, что къ такому виду можно привести любой полиномъ 3-ей степени отъ z (съ коэффиціентомъ 1 при z^3). Производная этой функціи

$$f'(z)=3z^2-2(z_1+z_2+z_3)z+(z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2) \tag{4}$$

обращается въ нуль въ точкахъ ζ и ζ', симметрично расположенныхъ относительно точки

$$\tfrac{1}{2}(\zeta+\zeta')=\tfrac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)=\zeta_0,$$

т. е., такъ называемаго, центра тяжести треугольника $z_1z_2z_3$, и это уже составляетъ одно изъ замѣчательныхъ свойствъ даннаго полинома. Въ серединѣ одной изъ сторонъ, напримѣръ, въ $\tau_1=\frac{1}{2}(z_2+z_3)$ функція

$$f'(z)=(z-z_2)(z-z_3)+(z-z_3)(z-z_1)+(z-z_1)(z-z_2)$$

принимаетъ значеніе $-\frac{1}{4}(z_2-z_3)^2$, а такъ какъ

$$f'(z)=3(z-\zeta)(z-\zeta'),$$

то

$$(\tau_1-\zeta)(\tau_1-\zeta')=-\tfrac{1}{12}(z_2-z_3)^2. \tag{5}$$

Составляя теперь по формулѣ (3) выраженія для разстояній точки τ_1 отъ ζ и ζ', видимъ, что эти разстоянія будутъ модули слѣдующихъ чиселъ

$$\tau_1-\frac{1}{2}(\zeta+\zeta')\pm\frac{i}{2\sqrt{3}}(z_2-z_3)=-\frac{1}{3}z_1+\frac{1}{6}(z_2+z_3)\pm\frac{i\sqrt{3}}{6}(z_2-z_3).$$

Вводя сюда мнимые корни третьей степени изъ 1 (§ 394)

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3},\quad \omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3},$$

можно вышенаписанныя числа, измѣнивъ знакъ, представить такъ

$$\tfrac{1}{3}z_1+\tfrac{1}{6}[(\omega+\omega^2)(z_2+z_3)\mp(\omega-\omega^2)(z_2-z_3)].$$

Полагая еще

$$z_1+\omega^2z_2+\omega z_3=3\zeta_1,\quad z_1+\omega z_2+\omega^2z_3=3\zeta_2. \tag{6}$$

найдемъ, что эти числа будутъ ζ_1 и ζ_2. Слѣдовательно, сумма разстояній τ_1 отъ ζ и ζ' будетъ равна $|\zeta_1|+|\zeta_2|$. Если вмѣсто τ_1 возьмемъ τ_2 или τ_3 —

середины сторонъ z_3z_1 и z_1z_2, то надо будетъ замѣнить выраженія (6) соотвѣтственно слѣдующими:

$$z_2+\omega^2z_3+\omega z_1=3\omega\zeta_1,\quad z_2+\omega z_3+\omega^2z_1=3\omega^2\zeta_2,$$
$$z_3+\omega^2z_1+\omega z_2=3\omega^2\zeta_1,\quad z_3+\omega z_1+\omega^2z_2=3\omega\zeta_2.$$

Выраженіе (3) приметъ въ этихъ случаяхъ значенія

$$|\omega\zeta_1|+|\omega^2\zeta_2|,\quad |\omega^2\zeta_1|+|\omega\zeta_2|,$$

т. е. опять то же самое значеніе $|\zeta_1|+|\zeta_2|$, такъ какъ модули ω и ω^2 равны 1. Отсюда слѣдуетъ, что точки τ_1, τ_2, τ_3 принадлежатъ эллипсу, фокусы котораго въ точкахъ ζ_1 и ζ_2, а центръ, слѣдовательно, въ ζ_0. Далѣе (см. § 390), изъ формулы (5) слѣдуетъ, если $\arg z$ обозначаетъ вообще аргументъ числа z, что

$$\arg\frac{\tau_1-\zeta}{z_2-z_3}+\arg\frac{\tau_1-\zeta'}{z_2-z_3}=\pi.$$

Это обозначаетъ, что лучи $\tau_1\zeta$ и $\tau_1\zeta'$ одинаково наклонены къ прямой z_2z_3. Эта прямая будетъ, слѣдовательно, касательная къ эллипсу въ точкѣ τ_1. Итакъ, если извѣстны корни z_1, z_2, z_3 полинома третьей степени, то корни производной этого полинома будутъ лежать въ фокусахъ эллипса, касающагося сторонъ треугольника $z_1z_2z_3$ въ серединахъ этихъ сторонъ [1]). Замѣтимъ въ заключеніе, что корни производной ζ и ζ' весьма легко выражаются въ числахъ ζ_0, ζ_1 и ζ_2. А именно, перемножая равенства (6) и замѣчая, что $1+\omega+\omega^2=0$, получаемъ

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_2z_3-z_3z_1-z_1z_2=9\zeta_1\zeta_2.$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+2z_2z_3+2z_3z_1+2z_1z_2=9\zeta_0^2.$$

Слѣдовательно, $z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2=3(\zeta_0^2-\zeta_1\zeta_2)$. Вслѣдствіе этого выраженіе (4) для производной принимаетъ видъ

$$f'(z)=3((z-\zeta_0)^2-\zeta_1\zeta_2),$$

откуда

$$\zeta=\zeta_0+\sqrt{\zeta_1\zeta_2},\quad \zeta'=\zeta_0-\sqrt{\zeta_1\zeta_2}. \tag{7}$$

416. Линейныя подстановки. Полагая $z'=f(z)$, мы опредѣляемъ нѣкоторое геометрическое преобразованіе, переводящее каждую точку z въ другую опредѣленную точку z'. Изучая, напримѣръ, преобразованія

$$z'=z+c,\quad z'=cz,\quad z'=\frac{1}{z}, \tag{8}$$

тотчасъ видимъ, что прибавленіе постоянной c къ аффиксу каждой точки z равносильно поступательному перемѣщенію фигуры. Величина и направленіе этого перемѣщенія опредѣляется отрѣзкомъ Oc. Умноженіе аффикса

---

[1]) Эта интересная теорема въ общей формѣ для полинома любой степени дана Van der Berg'омъ въ Nieuw Archief voor Wiskunde XV, p. 140.

на постоянное c производитъ вращеніе около точки O на уголъ, равный аргументу числа c, и расширеніе (или сжатіе) изъ точки O, измѣряемое модулемъ c. Наконецъ, преобразованіе, переводящее точки z въ точки $\frac{1}{z}$, равносильно сочетанію обращенія (замѣны r на $\frac{1}{r}$), или преобразованія взаимныхъ радіусовъ векторовъ по отношенію къ кругу радіуса 1 съ центромъ въ 0, и зеркальнаго изображенія фигуры (замѣны θ на $-\theta$) въ ея плоскости на оси вещественныхъ чиселъ. Всѣ эти преобразованія частные случаи слѣдующаго

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

которое называется линейною подстановкою. При этомъ, однако, всегда надо предполагать, что опредѣлитель подстановки $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ не равенъ 0, иначе получалось бы, что $z' = \text{const.}$, т. е. всѣмъ точкамъ на плоскости соотвѣтствовала бы одна и та же точка z'. Замѣчая, далѣе, что z' можно написать такъ:

$$z' = \frac{1}{\gamma}\left(\alpha - \frac{\Delta}{\gamma z + \delta}\right),$$

видимъ, что всякая линейная подстановка разлагается на нѣсколько простыхъ, вида (8).

417. Ангармоническія отношенія (Doppelverhältnisse). Когда даны 4 числа z, z_1, z_2, z_3, то вообще говоря возможно найти три числа k_1, k_2, k_3, не равныя нулю одновременно, сумма которыхъ равна нулю и которыя въ то же время удовлетворяютъ соотношенію

$$k_1(zz_1 + z_2z_3) + k_2(zz_2 + z_3z_1) + k_3(zz_3 + z_1z_2) = 0. \tag{9}$$

Нужно только положить

$$k_1 = (zz_2 + z_3z_1) - (zz_3 + z_1z_2) = (z - z_1)(z_2 - z_3),$$
$$k_2 = (zz_3 + z_1z_2) - (zz_1 + z_2z_3) = (z - z_2)(z_3 - z_1),$$
$$k_3 = (zz_1 + z_2z_3) - (zz_2 + z_3z_1) = (z - z_3)(z_1 - z_2),$$

Значенія взаимныхъ отношеній чиселъ k, одного къ другому, взятыя съ обратными знаками, называются ангармоническими отношеніями четырехъ чиселъ, при чемъ отношеніе $-\frac{k_2}{k_3}$ есть ангармоническое отношеніе чиселъ z, z_1, z_2, z_3, взятыхъ въ написанномъ порядкѣ; его обозначаютъ черезъ $(zz_1z_2z_3)$, такъ что

$$(zz_1z_2z_3) = -\frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

Если не обращать вниманія на порядокъ чиселъ, то получится шесть значеній ангармоническаго отношенія, а именно:

$$-\frac{k_2}{k_3} = \lambda, \quad -\frac{k_3}{k_1} = \frac{k_3}{k_2 + k_3} = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad -\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_2 + k_3}{k_2} = 1 - \frac{1}{\lambda},$$
$$-\frac{k_3}{k_2} = \frac{1}{\lambda}, \quad -\frac{k_1}{k_3} = \frac{k_2 + k_3}{k_3} = 1 - \lambda, \quad -\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_2}{k_2 + k_3} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Если изъ трехъ коэффиціентовъ k два между собою равны, то шесть ангармоническихъ отношеній приводятся къ тремъ -1, $\frac{1}{2}$, 2, и положеніе четырехъ точекъ z, z_1, z_2, z_3 въ этомъ случаѣ называется гармоническимъ. Если же коэффиціенты k въ равенствѣ (9) будутъ равны 1, ω, ω^2 т. е. тремъ кубическимъ корнямъ изъ 1, то 6 ангармоническихъ отношеній приведутся къ двумъ, а именно къ мнимымъ кубическимъ корнямъ изъ -1, и положеніе четырехъ точекъ z, z_1, z_2, z_3 называется тогда эквигармоническимъ. Если r_{pq} обозначаетъ модуль разности $z_p - z_q$, т. е. разстояніе между точками z_p и z_q, то модуль $(zz_1z_2z_3)$ равенъ

$$\frac{r_{02}}{r_{03}} : \frac{r_{12}}{r_{13}} = \frac{r_{02}r_{13}}{r_{03}r_{12}},$$

а аргументъ равенъ разности или суммѣ угловъ, подъ которыми отрѣзокъ z_2z_3 виденъ изъ точекъ z и z_1. Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что если ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ число вещественное, то эти четыре точки лежать на окружности одного и того же круга *), и наоборотъ. Ангармоническое отношеніе, какъ видимъ, имѣетъ чисто геометрическій характеръ, и поэтому не измѣняется ни при какомъ перемѣщеній координатныхъ осей. Если замѣтимъ, что всякое такое перемѣщеніе равносильно подстановкѣ $z' = \alpha z + \beta$, при чемъ $|\alpha| = 1$ **), то самъ собою является вопросъ о вліяніи какой угодно линейной подстановки на ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ. Выполняя по очереди элементарныя подстановки (8), на которыя разлагается самая общая, т. е. преобразуя всякое число z_p въ $z_p + c$, или cz_p, или $\frac{1}{z_p}$, увидимъ, что соотношеніе (9) остается всегда справедливымъ ***). Слѣдовательно, линейныя подстановки ангармоническаго отношенія не мѣняютъ. Отсюда въ частности вытекаетъ, что линейная подстановка преобразуетъ круги на плоскости въ круги же, потому что мы видѣли, что четыре точки на окружности круга имѣютъ вещественныя ангармоническія отношенія, и наоборотъ. Такъ какъ эти отношенія остаются вещественными и послѣ линейнаго преобразованія, то четыре точки остаются на окружности круга и послѣ преобразованія.

418. Остановимся еще на минуту [1]) на разсмотрѣніи линейныхъ подстановокъ и докажемъ, что розысканіе точки z', соотвѣтствующей данной точкѣ z, вообще говоря, приводится къ опредѣленію четвертой точки, которая съ тремя данными имѣетъ данное ангармоническое отношеніе. Сперва замѣтимъ, что линейная подстановка оставляетъ въ покоѣ двѣ точки (такъ называемыя двойныя точки). Онѣ будутъ корнями z_1 и z_2 того уравненія, которое выражетъ требованіе $z' = z$, т. е.

$$\gamma z^2 - (\alpha - \delta)z - \beta = 0.$$

---

*) Потому что тогда аргументъ отношенія равенъ нулю, а слѣдовательно, упомянутые углы или равны между собою или дополняютъ другъ друга до 2π.

**) См. общія формулы преобразованія ортогональныхъ координатъ:

$$x = x' \cos\omega - y' \sin\omega + a$$
$$y = x' \sin\omega + y' \cos\omega + b.$$

***) Надо помнить, что $k_1 + k_2 + k_3 = 0$.

[1]) Дальнѣйшія свѣдѣнія о линейныхъ подстановкахъ читатель можетъ почерпнуть изъ „Theory of functions of a complex variable“ Forsyth (p. 512.)

Изъ этого уравненія выводимъ

$$2\gamma z_1 = \alpha - \delta + \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4\Delta}, \quad 2\gamma z_2 = \alpha - \delta - \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4\Delta}.$$

Принимая еще во вниманіе, что $\alpha - \delta = \gamma(z_1 + z_2)$, $\beta = -\gamma z_1 z_2$, легко получимъ

$$z' - z_1 = \frac{\alpha - \gamma z_1}{\gamma z + \delta}(z - z_1), \quad z' - z_2 = \frac{\alpha - \gamma z_2}{\gamma z + \delta}(z - z_2),$$

откуда, предполагая z_1 не равнымъ z_2, найдемъ

$$(z' z z_1 z_2) = \frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4\Delta}}{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4\Delta}}.$$

Представляя себѣ, что величина этого ангармоническаго отношенія λ измѣняется, при чемъ двойныя точки z_1 и z_2 и данная точка z остаются неподвижными, видимъ, что точка z' передвигается по плоскости такъ, что каждому значенію λ соотвѣтствуетъ опредѣленное положеніе точки z'. Мы имѣемъ, кромѣ того,

$$\log\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = \log\lambda + \log\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

а потому, на основаніи сказаннаго въ концѣ § 413, мы въ правѣ утверждать что если измѣняется только модуль λ, то точка z' описываетъ окружность круга, проходящую черезъ z_1 и z_2, а когда измѣняется только аргументъ λ, то z' описываетъ ортогональную къ первой окружность круга съ центромъ на прямой $z_1 z_2$.

419. Теперь мы можемъ построить тѣ точки z, которыя съ тремя данными точками расположены гармонически или эквигармонически (рис. 19). Положимъ сперва, что требуется найти точку z для которой $(z z_1 z_2 z_3) = -1$. Мы знаемъ уже что она должна лежать на окружности круга, описаннаго около треугольника $z_1 z_2 z_3$ (§ 417). Далѣе, пусть точки O_1, O_2, O_3 будутъ точки пересѣченія сторонъ треугольника съ касательными къ описанному кругу въ противоположныхъ каждой сторонѣ вершинахъ. Кругъ, описанный изъ точки O_1 радіусомъ $O_1 z_1$, есть извѣстный въ элементарной Геометріи Аполлоніевъ кругъ треугольника $z_1 z_2 z_3$, соотвѣтствующій вершинѣ z_1. Онъ, очевидно, пересѣкаетъ кругъ $z_1 z_2 z_3$ ортогонально, а слѣдовательно, будетъ общимъ мѣстомъ точекъ z, для которыхъ модуль $(z z_1 z_2 z_3)$ число постоянное, равное модулю этого отношенія въ точкѣ z_1, т. е. 1. Слѣдовательно, искомая точка есть другая точка пересѣченія z_1' Аполлоніева круга съ кругомъ $z_1 z_2 z_3$. Эта точка называется гармонически сопряженною съ z_1 относительно $z_2 z_3$. Подобнымъ же образомъ, другіе два Аполлоніевы круга пересѣкаютъ кругъ $z_1 z_2 z_3$, кромѣ точекъ z_2 и z_3, въ точкахъ z_2' и z_3', гармонически сопряженныхъ съ z_2 и z_3 относительно $z_1 z_3$ и $z_1 z_2$. Такъ какъ, по

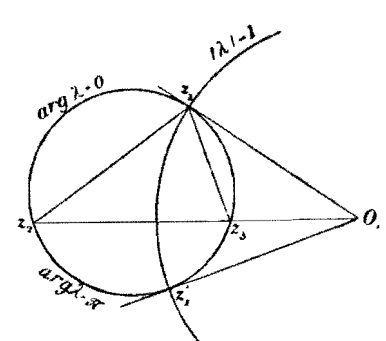


Рис. 19.

извѣстной теоремѣ, точки O_1, O_2, O_3 лежатъ на одной прямой, то прямыя z_1z_1', z_2z_2' и z_3z_3' проходятъ черезъ одну точку. Дѣйствительно, эти прямыя поляры точекъ O_1, O_2 и O_3 относительно круга $z_1z_2z_3$, и пересѣкаются поэтому въ полюсѣ прямой $O_1O_2O_3$, т. е. въ такъ называемой точкѣ Лемуана треугольника $z_1z_2z_3$.

420. Найдемъ, во вторыхъ, точки z, для которыхъ $(zz_1z_2z_3)$ равно одному изъ чиселъ $-\omega$, $-\omega^2$ (при $\omega^3=1$). Точка $z=\tau$, для которой

$$\lambda=(\tau z_1z_2z_3)=-\omega,$$

должна находиться на окружности перваго Аполлоніева круга треугольника $z_1z_2z_3$ (какъ всякая другая точка, для которой модуль $\lambda=1$). Но такъ какъ, по извѣстнымъ свойствамъ кубическихъ корней изъ 1

$$(\tau z_1z_2z_3)=(\tau z_2z_3z_1)=(\tau z_3z_1z_2)=-\omega,$$

то та же точка τ должна находиться и на двухъ другихъ Аполлоніевыхъ кругахъ. Точно также точка τ', для которой

$$(\tau' z_1z_2z_3)=(\tau' z_2z_3z_1)=(\tau' z_3z_1z_2)=-\omega^2,$$

будетъ второю точкою пересѣченія трехъ Аполлоніевыхъ круговъ, которые, такимъ образомъ, пересѣкаются въ двухъ только точкахъ, что, впрочемъ, извѣстно изъ элементарной Геометріи. Эти точки, отличающіяся многими интересными свойствами [1]), называются изодинамическими центрами треугольника $z_1z_2z_3$. Надо замѣтить, что треугольники $z_1z_2z_3$ и $z_1'z_2'z_3'$ имѣютъ общіе круги Аполлонія, а слѣдовательно, и общіе изодинамическіе центры. Кромѣ того, каждый изъ этихъ центровъ образуетъ съ вершинами того и другого треугольника такую группу четырехъ точекъ, въ которой каждая точка есть изодинамическій центръ треугольника, образуемаго тремя другими. Замѣтимъ въ заключеніе, что соотношеніе (9), примѣненное къ настоящему случаю, непосредственно даетъ выраженіе для τ и τ', а именно:

$$\tau=-\frac{z_2z_3+\omega^2z_3z_1+\omega z_1z_2}{z_1+\omega^2z_2+\omega z_3},\quad \tau'=-\frac{z_2z_3+\omega z_3z_1+\omega^2z_1z_2}{z_1+\omega z_2+\omega^2z_3}.$$

Въ то же время изъ формулы (6), припоминая, что $z_1+z_2+z_3=3\zeta_0$, легко находимъ

$$z_1=\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2,\quad z_2=\zeta_0+\omega\zeta_1+\omega^2\zeta_2,\quad z_3=\zeta_0+\omega^2\zeta_1+\omega\zeta_2,$$

а потому

$$\tau=\zeta_0-\frac{\zeta_2^2}{\zeta_1},\quad \tau'=\zeta_0-\frac{\zeta_1^2}{\zeta_2}.$$

Эти формулы вмѣстѣ съ (7) могутъ давать различные и интересные результаты, изъ которыхъ мы приведемъ только одинъ: $(\zeta\zeta'\tau\tau')=-1$. Слѣдовательно, точки ζ, ζ', τ, τ' лежатъ на окружности круга, на которой первыя двѣ гармонически отдѣляютъ послѣднія двѣ.

---

[1]) Neuberg: „Mémoire sur le tétraèdre" (Mémoires de l'Acad. de Belgique, 1884).

КВАТЕРНІОНЫ.

421. Изложенная выше въ геометрической формѣ, по Арганду (Argand), теорія комплексныхъ чиселъ, хотя и не вполнѣ строга съ точки зрѣнія чистой Математики, весьма однако приспособлена къ цѣлямъ преподаванія, и даетъ въ то же время цѣнныя средства какъ въ вопросахъ Анализа, такъ и въ изученіи геометрическихъ соотношеній на плоскости. Тѣмъ не менѣе желательно имѣть возможность чисто алгебраическую теорію развить исключительно алгебраическимъ путемъ. Этой цѣли легко можно достигнуть, разсматривая комплексное число $a+ib$, какъ аггрегатъ (сочетаніе) двухъ вещественныхъ чиселъ a и b разнаго рода. При этомъ естественно является мысль разсматривать общнѣе разнородный комплексъ нѣсколькихъ чиселъ $a_0, a_1, a_2, \ldots$, который можно обозначить символомъ $a_0+i_1a_1+i_2a_2+\cdots$, въ которомъ знаки $i_1, i_2, \ldots$ служатъ только для характеристики различной природы чиселъ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Тѣ же знаки служатъ впрочемъ и для краткаго обозначенія единицъ мѣры для каждаго рода величинъ, такъ что вмѣсто $i_r.1$ пишутъ просто i_r. Но всегда нужно имѣть въ виду, что только въ этомъ смыслѣ знаки i_r входятъ въ вычисленіе, какъ настоящія числа. Равенство двухъ комплексныхъ чиселъ заключаетъ въ себѣ равенства всѣхъ соотвѣтствующихъ составныхъ частей обоихъ чиселъ, потому что различныя единицы предполагаются неприводимыми путемъ сложенія. На томъ же основаніи равенство

$$a_0+i_1a_1+i_2a_2+\cdots=0$$

заключаетъ въ себѣ всѣ равенства $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=0$, и т. д., и наоборотъ. Для подобнаго рода чиселъ легко построить алгебраическое вычисленіе, руководясь принципомъ, который Ганкель (Hankel) назвалъ принципомъ незыблемости правилъ вычисленія. Что касается сложенія, то, понимаемое въ обыкновенномъ смыслѣ слова, оно, конечно, производится путемъ сложенія соотвѣтствующихъ составныхъ частей данныхъ чиселъ, такъ что

$$a+b+\cdots=a_0+b_0+\cdots+i_1(a_1+b_1+\cdots)+i_2(a_2+b_2+\cdots)+\cdots$$

Умноженіе, напротивъ, не имѣетъ никакого смысла, пока мы сами ему такового не придадимъ, слѣдуя, насколько возможно, принципу незыблемости. Если хотимъ, чтобы умноженіе a на b производилось, какъ въ обыкновенной Алгебрѣ, то прежде всего должны стараться сохранить такъ называемое сочетательное свойство, потому что нарушеніе его въ корнѣ запутало бы вычисленія; для достиженія этой цѣли достаточно принять, что различныя единицы пользуются этимъ свойствомъ, т. е., напримѣръ, $(i_ri_s)i_t=i_r(i_si_t)$. Но перемѣститель-

наго закона нельзя уже сохранить, какъ въ теоріи обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ вида $a + ib$, и потому приходится отличать $i_r i_s$ отъ $i_s i_r$. Но надо замѣтить, что обыкновенное значеніе умноженія, а слѣдовательно, и обыкновенныя правила умноженія двухъ чиселъ остаются въ силѣ, когда одинъ изъ множителей число вещественное. Въ этомъ случаѣ, напр., имѣемъ

$$ab = a_0 b + i_1 a_1 b + i_2 a_2 b + \cdots = ba.$$

422. Мы будемъ здѣсь изучать кватерніоны, т. е. комплексныя числа, составленныя изъ величинъ четырехъ различныхъ родовъ:

$$a = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3.$$

Для того, чтобы вычисленіе съ такими числами заключало въ себѣ, какъ частный случай, вычисленіе съ обыкновенными комплексными числами, необходимо, чтобы квадратъ одной изъ единицъ былъ бы равенъ -1, а затѣмъ то же условіе, по симметріи, налагается и на другія единицы. Всѣ они неприводимы одна къ другой путемъ сложенія. Но если желаемъ, чтобы умноженіе нѣсколькихъ кватерніоновъ давало опять кватерніонъ, нужно принять, что произведеніе нѣсколькихъ единицъ линейно выражается въ самыхъ единицахъ. Съ этою цѣлью, слѣдуя изобрѣтателю кватерніоновъ [1]), мы установимъ слѣдующія равенства:

$$(1) \qquad \begin{cases} i_1^2 = -1, & i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1, \\ i_2^2 = -1, & i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2, \\ i_3^2 = -1, & i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3. \end{cases}$$

Они, очевидно, нарушаютъ перемѣстительный законъ умноженія, но сохраняютъ, какъ легко видѣть, сочетательный. Это простѣйшія изъ возможныхъ предположеній, но не единственныя. Ничто не мѣшаетъ, напримѣръ, положить квадраты единицъ равными нулю, и тогда получается особый родъ алгебраическаго вычисленія, въ которомъ, между прочимъ, произведеніе можетъ обращаться въ нуль безъ того, чтобы одинъ изъ множителей былъ равенъ нулю. Это вычисленіе—такъ называемое исчисленіе знакоперемѣнныхъ чиселъ (alternirende Zahlen) позволяетъ, между, прочимъ весьма просто изложить теорію опредѣлителей, такъ какъ всякій опредѣлитель n-го порядка представляется въ видѣ произведенія n комплексныхъ чиселъ. Эти числа изобрѣтены Грассманомъ, которому принадлежитъ также введеніе многихъ смѣлыхъ и широкихъ понятій, положенныхъ имъ въ основу его „Ученія о протяженіяхъ“ („Ausdehnungslehre“) [2]).

---

[1]) Hamilton: „Elements of Quaternions“ (London 1866). См. также учебники Hoüel, Laisant, Сомова („Векторіальный Анализъ“) и др.

[2]) „Ausdehnungslehre“ 1862 (Stettin). См. также Peano „Calcolo geometrico“ (Torino 1888).

423. Опредѣленія. Если $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то кватерніонъ обращается въ вещественное число a_0 и называется тогда скаляромъ (Skalar). Если, наоборотъ, $a_0 = 0$, то кватерніонъ называется векторомъ (Vektor). Всякій кватерніонъ a состоитъ, слѣдовательно, изъ скалярной части, обозначаемой черезъ $\mathfrak{S}a$, и изъ векторіальной, обозначаемой черезъ $\mathfrak{V}a$:

$$a = \mathfrak{S}a + \mathfrak{V}a.$$

Модулемъ или тензоромъ называютъ, и обозначаютъ черезъ $|a|$, число $\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ всегда вещественное и положительное. Когда модуль равенъ 1, то кватерніонъ называется единичнымъ кватерніономъ (Einheitsquaternion). Всякій кватерніонъ равенъ произведенію его модуля на нѣкоторый единичный кватерніонъ, называемый версоромъ a и равный

$$\frac{a_0}{|a|} + i_1\frac{a_1}{|a|} + i_2\frac{a_2}{|a|} + i_3\frac{a_3}{|a|}.$$

Версоръ векторіальной части есть единичный векторъ и называется осью кватерніона. Если A есть модуль кватерніона a, то, очевидно, можно положить

$$a_0 = A\cos\theta,\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = A\sin\theta,$$

и опредѣляемый такимъ образомъ уголъ θ называется аргументомъ кватерніона. Если для краткости обозначимъ версоръ $\mathfrak{V}a$ (ось) черезъ λ, то будемъ имѣть

$$\mathfrak{S}a = A\cos\theta,\quad \mathfrak{V}a = \lambda A\sin\theta.$$

Отсюда слѣдуетъ, что кватерніонъ всегда можно представить въ видѣ

$$a = A(\cos\theta + \lambda\sin\theta),$$

гдѣ, A, θ, λ — модуль, аргументъ и ось кватерніона. Кватерніонъ $A(\cos\theta - \lambda\sin\theta)$ называется сопряженнымъ съ a и обозначается знакомъ $\bar{a}$. Сопряженные кватерніоны отличаются одинъ отъ другого только знакомъ при векторіальной части.

424. Геометрическое изображеніе (рис. 20). Векторъ $i_1a_1 + i_2a_2 + i_3a_3$ геометрически изображается прямолинейнымъ отрѣзкомъ, имѣющимъ проекціи a_1, a_2, a_3 на трехъ взаимно перпендикулярныхъ координатныхъ осяхъ. Въ частности, всякій радіусъ шара съ центромъ въ началѣ координатъ и радіусомъ 1 изображаетъ единичный векторъ. На поверхности шара можно также изобразить всякій единичный кватерніонъ (версоръ). Дѣйствительно, всякій единичный векторъ λ опредѣляется точкою P, концомъ изображающаго радіуса, и двѣ діаметрально противоположныя точки на поверхности шара изображаютъ два сопряженныхъ вектора. Если

теперь данъ будетъ нѣкоторый версоръ съ осью λ и аргументомъ θ, то можно будетъ его изобразить на окружности большого круга, полюсъ котораго находится въ P, слѣдующимъ образомъ: отложимъ

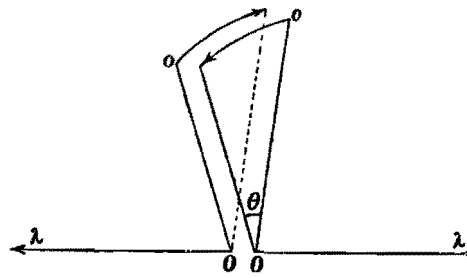


Рис. 20.

на окружности этого большого круга отъ произвольной начальной точки дугу θ въ томъ или другомъ направленіи, смотря по тому, будетъ ли $\theta > 0$ или < 0. Условились считать положительнымъ направленіемъ дугъ θ направленіе, противоположное движенію часовой стрѣлки для наблюдателя, находящагося въ P. Каждая опредѣленная дуга, отложенная сперва въ одномъ, а потомъ въ противоположномъ направленіи, изображаетъ всегда два сопряженныхъ версора, потому что измѣненіе λ въ $-\lambda$ равносильно измѣненію θ въ $-\theta$.

425. Сложеніе векторовъ. Сложеніе векторовъ

$$a = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3, \quad b = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3, \ldots \tag{2}$$

производится, какъ выше было сказано, по формулѣ

$$a + b + \cdots = i_1(a_1 + b_1 + \cdots) + \\ + i_2(a_2 + b_2 + \cdots) + i_3(a_3 + b_3 + \cdots),$$

такъ что сумма нѣсколькихъ векторовъ равна вектору, получаемому построеніемъ многоугольника, стороны котораго равны и параллельны *) даннымъ векторамъ; сторона, замыкающая этотъ многоугольникъ, и будетъ искомая сумма (рис. 21).

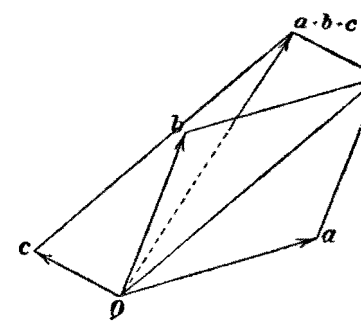


Рис. 21.

*) Точнѣе говоря, геометрически равны.

426. Умноженіе векторовъ. Перемножаемъ по обыкновеннымъ правиламъ векторы (2), соблюдая при этомъ условія (1), и не мѣняя порядка сомножителей. Тогда получимъ

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathbb{S}ab = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \\ \mathbb{V}ab = i_1(a_2b_3 - a_3b_2) + i_2(a_3b_1 - a_1b_3) + i_3(a_1b_2 - a_2b_1) \end{cases}$$

и видимъ, что

$$\mathbb{S}ba = \mathbb{S}ab, \quad \mathbb{V}ba = -\mathbb{V}ab.$$

Въ частности, $\mathbb{V}(a^2) = -\mathbb{V}(a^2) = 0$, а слѣдовательно,

$$a^2 = \mathbb{S}(a^2) = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = -|a|^2.$$

Въ еще болѣе частномъ случаѣ находимъ, что квадратъ единичнаго вектора равенъ -1. Въ заключеніе замѣтимъ еще формулы

$$\mathbb{S}ab = \tfrac{1}{2}(ab + ba), \quad \mathbb{V}ab = \tfrac{1}{2}(ab - ba),$$

полезныя при вычисленіяхъ съ кватерніонами.

427. Геометрическую интерпретацію произведенія двухъ векторовъ легко получить. Пусть A и B модули данныхъ векторовъ, θ уголъ между ними и

$$i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + i_3\alpha_3, \quad i_1\beta_1 + i_2\beta_2 + i_3\beta_3$$

единичные векторы. Изъ Аналитической Геометріи извѣстно, что

$$\cos\theta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Слѣдовательно,

$$\mathbb{S}ab = -AB\cos\theta.$$

Итакъ, скалярная часть произведенія двухъ векторовъ получится, если проекцію одного изъ нихъ на продолженіе другого умножимъ на модуль послѣдняго. Далѣе, положимъ, что $i_1\gamma_1 + i_2\gamma_2 + i_3\gamma_3$ есть тотъ единичный векторъ, который изображается на поверхности шара полюсомъ большого круга, идущаго отъ точки a къ точкѣ b. Тогда, какъ тоже извѣстно изъ Аналитической Геометріи, будемъ имѣть

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2} = \frac{\gamma_2}{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3} = \frac{\gamma_3}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} = -\frac{1}{\sin\theta}.$$

Слѣдовательно,

$$\mathbb{V}ab = -AB(i_1\gamma_1 + i_2\gamma_2 + i_3\gamma_3)\sin\theta = -AB\lambda\sin\theta.$$

Итакъ, векторіальную часть произведенія вектора a на векторъ b получимъ слѣдующимъ образомъ: на сопряженномъ съ λ векторѣ

откладываемъ длину, измѣряемую тѣмъ же числомъ, которымъ измѣряется площадь параллелограмма, построеннаго на a и b. Окончательно, слѣдовательно, имѣемъ

$$ab = -AB(\cos\theta + \lambda \sin\theta),$$

при чемъ $\lambda^2 = -1$, и это соотношеніе непосредственно интерпретируется на поверхности шара. Замѣтимъ, что параллельность сомножителей необходима и достаточна для того, чтобы произведеніе было скалярнымъ, а перпендикулярность ихъ для того, чтобы оно было векторомъ.

428. Умноженіе кватерніоновъ. Положимъ, что требуется умножить

$$a = \mathbb{S}a + \mathbb{V}a \text{ на } b = \mathbb{S}b + \mathbb{V}b.$$

Мы имѣемъ

$$ab = \mathbb{S}a \cdot \mathbb{S}b + \mathbb{S}a \cdot \mathbb{V}b + \mathbb{V}a \cdot \mathbb{S}b + \mathbb{V}a \cdot \mathbb{V}b,$$

а замѣчая, что $\mathbb{S}\mathbb{V}x = \mathbb{V}\mathbb{S}x = 0$, получаемъ

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbb{S}ab = \mathbb{S}a \cdot \mathbb{S}b + \mathbb{S}(\mathbb{V}a \cdot \mathbb{V}b), \\ \mathbb{V}ab = \mathbb{V}(a \cdot \mathbb{S}b + b \cdot \mathbb{S}a) + \mathbb{V}(\mathbb{V}a \cdot \mathbb{V}b). \end{cases}$$

Съ другой стороны, примѣняя формулы (3) къ умноженію векторовъ $\mathbb{V}a$ и $\mathbb{V}b$, находимъ

$$\mathbb{S}(\mathbb{V}a \cdot \mathbb{V}b) = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3),$$
$$\mathbb{V}(\mathbb{V}a \cdot \mathbb{V}b) = i_1(a_2b_3 - a_3b_2) + i_2(a_3b_1 - a_1b_3) + i_3(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}ab &= a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \\ \mathbb{V}ab &= i_1[(a_0b_1 + a_1b_0) + (a_2b_3 - a_3b_2)] \\ &\quad + i_2[(a_0b_2 + a_2b_0) + (a_3b_1 - a_1b_3)] \\ &\quad + i_3[(a_0b_3 + a_3b_0) + (a_1b_2 - a_2b_1)]. \end{aligned}$$

Тотчасъ видимъ, что

$$\mathbb{S}ab = \mathbb{S}ba, \quad \mathbb{V}ab \neq \mathbb{V}ba.$$

Итакъ, вообще говоря, произведеніе зависитъ отъ порядка сомножителей. Для того, чтобы ab было равно ba, необходимо и достаточно, чтобы произведеніе $\mathbb{V}a \cdot \mathbb{V}b$ было скалярно, т. е., чтобы векторіальныя части a и b имѣли одинаковыя или прямо противоположныя направленія. Ниже мы дадимъ геометрическую интерпретацію умноженія кватерніоновъ на сферѣ.

429. Замѣчанія. a) Произведеніе двухъ сопряженныхъ кватерніоновъ равно квадрату общаго ихъ модуля. Дѣйствительно,

$$a \cdot \bar{a} = (\mathfrak{S}a + \mathfrak{V}a)(\mathfrak{S}a - \mathfrak{V}a) = (\mathfrak{S}a)^2 - (\mathfrak{V}a)^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |a|^2.$$

b) Кватерніонъ, сопряженный съ произведеніемъ двухъ кватерніоновъ, равенъ произведенію кватерніоновъ, сопряженныхъ съ данными кватерніонами, но написанныхъ въ обратномъ порядкѣ, т. е. $\overline{ba} = \bar{a} \cdot \bar{b}$. Дѣйствительно, по самому опредѣленію

$$\mathfrak{S}\bar{a} = \mathfrak{S}a, \quad \mathfrak{V}\bar{a} = -\mathfrak{V}a,$$

поэтому формулы (5) дадутъ

$$\mathfrak{S}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \mathfrak{S}a \cdot \mathfrak{S}b + \mathfrak{S}(\mathfrak{V}a \cdot \mathfrak{V}b) = \mathfrak{S}ab = \mathfrak{S}ba,$$
$$\mathfrak{V}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \mathfrak{V}(\bar{a}\mathfrak{S}b + \bar{b}\mathfrak{S}a) + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}a \cdot \mathfrak{V}b) = -\mathfrak{V}(a\mathfrak{S}b + b\mathfrak{S}a) - \mathfrak{V}(\mathfrak{V}b \cdot \mathfrak{V}a) = -\mathfrak{V}ba,$$

а слѣдовательно,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \mathfrak{S}ba - \mathfrak{V}ba = \overline{ba}.$$

c) Модуль произведенія равенъ произведенію модулей сомножителей. Дѣйствительно, изъ послѣдняго замѣчанія вытекаетъ, что

$$|ab|^2 = ab \cdot \overline{ab} = a \cdot b\bar{b} \cdot \bar{a} = a\bar{a} \cdot |b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2,$$

откуда $|ab| = |a| \cdot |b|$. Такъ какъ, для того, чтобы какой нибудь кватерніонъ обратился въ нуль, необходимо и достаточно, чтобы модуль его былъ равенъ нулю, то изъ послѣдней теоремы вытекаетъ такое слѣдствіе (ср. § 391): чтобы произведеніе двухъ кватерніоновъ было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ нихъ былъ равенъ нулю.

430. Дѣленіе кватерніоновъ. Обратнымъ данному кватерніону a называется и обозначается черезъ $\frac{1}{a}$ такой кватерніонъ, который по умноженіи на a даетъ 1. Такой кватерніонъ существуетъ, а именно

$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}.$$

Дѣйствительно, на основаніи § 429, a) имѣемъ

$$\frac{1}{a} \cdot a = \frac{a\bar{a}}{|a|^2} = 1.$$

Частнымъ отъ дѣленія b на a называется и обозначается черезъ $\frac{b}{a}$ такой кватерніонъ, который по умноженіи на a даетъ b. Это число будетъ

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot b, \text{ потому что } a \cdot \frac{1}{a} b = \left(a \cdot \frac{1}{a}\right) b = b.$$

Если a и b, въ частности, будутъ векторами съ модулями A и B, то

$$\frac{1}{a} b = \frac{\bar{a}}{A^2} b = -\frac{ab}{A^2},$$

откуда (§ 427)

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A}(\cos\theta + \lambda \sin\theta).$$

431. Послѣдняя формула тотчасъ даетъ геометрическую интерпретацію умноженія версоровъ (рис. 22). Если a и b два единичныхъ вектора, то версоръ $\cos\theta + \lambda\sin\theta$, какъ показываетъ предыдущая формула, будетъ равенъ частному отъ дѣленія b на a, если принять, что изображающая его дуга на сферѣ направлена отъ a къ b. Теперь, чтобы умножить какіе нибудь два версора, передвинемъ изображающія ихъ дуги, каждую по тому большому кругу, на которомъ она лежитъ, пока онѣ не встрѣтятся въ одной точкѣ — начальной для одной и конечной для другой дуги. Дуга, идущая отъ начала второй дуги къ концу первой, и изобразитъ версоръ произведеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы построили такимъ образомъ сферическій треугольникъ, въ которомъ углы изображаютъ единичные векторы a, b, c, а двѣ стороны — данные версоры, соотвѣтственно равные $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{b}$. Третья сторона изображаетъ частное $\frac{c}{a}$ и равна версору произведенію двухъ данныхъ, потому что

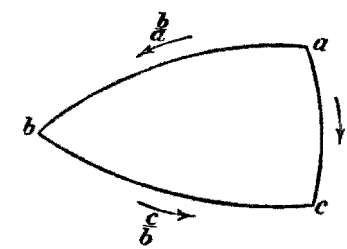


Рис. 22.

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{1}{a}\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) c = \frac{1}{a} c = \frac{c}{a}.$$

Слѣдовательно, умноженіе версоровъ производится такъ, какъ сложеніе векторовъ на плоскости (§ 389). Къ этому результату можно, впрочемъ, придти чисто тригонометрическимъ путемъ, и обратно, изъ него можно вывести основныя формулы Сферической Тригонометріи [1]).

[1]) См. Hoüel: „Théorie élementaire des quantités complexes“ p. 482.

432. Произведеніе трехъ векторовъ. Приложимъ результаты § 428 къ разысканію произведенія трехъ векторовъ a, b, c. Сперва имѣемъ

$$abc = a\S bc + a\mathcal{V}bc,$$

слѣдовательно,

$$\S abc = \S(a\mathcal{V}bc), \quad \mathcal{V}abc = a\S bc + \mathcal{V}(a\mathcal{V}bc).$$

Изъ § 426 получается, что скалярная часть произведенія векторовъ a и $\mathcal{V}bc$ равна

$$-a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_3c_1 - b_1c_3) - a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Поэтому

$$\S abc = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что, независимо отъ знака, скалярная часть произведенія трехъ векторовъ равна объему параллелепипеда, построеннаго на трехъ данныхъ векторахъ. Отсюда слѣдуетъ, что произведеніе трехъ векторовъ будетъ векторомъ лишь въ томъ случаѣ, когда эти три вектора лежатъ въ одной плоскости. Что касается векторіальной части, то примѣняя формулы (4), получимъ

$$2\mathcal{V}abc = 2a\S bc + a\mathcal{V}bc - \mathcal{V}(bc)\cdot a$$
$$= a(\S bc + \mathcal{V}bc) + (\S bc - \mathcal{V}bc)a = abc + cba$$

и далѣе

$$2\mathcal{V}abc = a(bc + cb) - (ac + ca)b + c(ba + ab)$$

или, обращаясь снова къ формуламъ (4),

(6) $$\mathcal{V}abc = a\S bc - b\S ca + c\S ab.$$

433. Изъ послѣдней формулы легко вывести другую, часто примѣняемую въ исчисленіи кватерніоновъ. Предложимъ себѣ найти векторіальную часть произведенія $\mathcal{V}ab$ на $\mathcal{V}cd$, въ предположеніи, что a, b, c, d—векторы. Очевидно,

$$\mathcal{V}(abc) = \mathcal{V}[\S(ab)\cdot c + \mathcal{V}(ab)\cdot c] = c\S ab + \mathcal{V}[\mathcal{V}(ab)\cdot c].$$

а потому формула (6) приметъ видъ

(7) $$\mathcal{V}[\mathcal{V}(ab)\cdot c] = a\S bc - b\S ca.$$

Замѣтимъ теперь, что

$$\S bcd = \S(b\S cd + b\mathcal{V}cd) = \S(b\mathcal{V}cd).$$

Поэтому, замѣняя въ соотношеніи (7) c на $\mathcal{V}cd$, получимъ

$$\mathcal{V}(\mathcal{V}ab\cdot\mathcal{V}cd) = a\S bcd - b\S acd.$$

434. Формула Муавра. Частичная аналогія кватерніоновъ съ обыкновенными комплексными числами ясно выступаетъ, если, фиксируя единичный векторъ λ, ограничимся разсмотрѣніемъ только тѣхъ кватерніоновъ, которые имѣютъ осью данное λ. Тогда имѣютъ мѣсто обыкновенныя правила вычисленія, и напримѣръ, будемъ имѣть

$$(\cos\theta + \lambda\sin\theta)\,(\cos\theta' + \lambda\sin\theta')\,(\cos\theta'' + \lambda\sin\theta'')\ldots$$
$$= \cos(\theta + \theta' + \theta'' + \cdots) + \lambda\sin(\theta + \theta' + \theta'' + \cdots).$$

Въ частности, при цѣломъ положительномъ n

$$(\cos\theta + \lambda\sin\theta)^n = \cos n\theta + \lambda\sin n\theta.$$

Эту формулу легко распространить затѣмъ на всякое раціональное значеніе n обыкновеннымъ путемъ (§ 393).

435. Теорема Гамильтона. Если векторъ u повернемъ на уголъ θ около его оси λ, то онъ обратится въ $\tau^{-\frac{1}{2}}u\tau^{\frac{1}{2}}$, гдѣ τ есть версоръ $\cos\theta + \lambda\sin\theta$.

Пусть a и b будутъ векторы, получаемые при проектированіи вектора u на ось λ и на плоскость, перпендикулярную къ λ, такъ что $u = a + b$. Когда плоскость, проходящая черезъ u и λ, повернется на уголъ θ около оси λ, то векторъ a останется безъ измѣненія, а векторъ b перейдетъ въ $b\tau$ (§ 430). Слѣдовательно, указанное вращеніе приводитъ u къ совмѣщенію съ $v = a + b\tau$. Дѣло сводится къ выраженію a и b въ функціяхъ отъ u, λ и θ. Такъ какъ $\lambda^2 = -1$, то имѣемъ тождественно

$$u = -\lambda^2 u = -\lambda\mathrm{S}\lambda u - \lambda\mathrm{V}\lambda u.$$

Въ § 427 мы видѣли, что проекція u на λ равна $-\mathrm{S}\lambda u$, и это число изображаетъ, слѣдовательно, модуль вектора a. Далѣе, такъ какъ λ есть версоръ a, то можно написать $a = -\lambda\mathrm{S}\lambda u$, и, слѣдовательно,

$$b = u - a = -\lambda^2 u + \lambda\mathrm{S}\lambda u = -\lambda\mathrm{V}\lambda u.$$

Наконецъ,

$$v = -\lambda\mathrm{S}\lambda u - \lambda\mathrm{V}(\lambda u)\cdot\tau.$$

Чтобы привести этотъ результатъ къ той изящной формѣ, въ которой онъ данъ Гамильтономъ, напишемъ

$$v = -\lambda\left[\mathrm{S}(\lambda u)\,\tau^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{V}(\lambda u)\,\tau^{\frac{1}{2}}\right]\tau^{\frac{1}{2}}$$

и замѣтимъ, что по формулѣ Муавра

$$\tau^{-\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} - \lambda\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \tau^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + \lambda\sin\frac{\theta}{2}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\mathrm{S}(\lambda u)\tau^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{V}(\lambda u)\tau^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{S}\lambda u + \mathrm{V}\lambda u)\cos\frac{\theta}{2} - (\mathrm{S}\lambda u - \mathrm{V}\lambda u)\lambda\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \lambda u\cos\frac{\theta}{2} - u\lambda^2\sin\frac{\theta}{2} = \lambda u\cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2} = \left(\lambda\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)u$$

$$= \lambda\left(\cos\frac{\theta}{2} - \lambda\sin\frac{\theta}{2}\right)u = \lambda\tau^{-\frac{1}{2}}u.$$

Итакъ,

$$v = -\lambda^2\tau^{-\frac{1}{2}}u\tau^{\frac{1}{2}} = \tau^{-\frac{1}{2}}u\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Это чрезвычайно простое соотношеніе заключаетъ въ себѣ доказанныя въ § 75 формулы Эйлера. Оно даетъ замѣчательный примѣръ необыкновенныхъ сокращеній, которыхъ можно достигнуть въ нѣкоторыхъ вычисленіяхъ при помощи методы Гамильтона.

Примѣчанія къ четвертой книгѣ.

I (къ §§ 400—401).

Число $w = u + iv$, гдѣ u и v функціи отъ вещественныхъ перемѣнныхъ x и y, называется функціей отъ комплекснаго числа $z = x + iy$, если каждому значенію z соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе w, аналогично опредѣленію функціи отъ вещественной перемѣнной, данному въ § 253. При такомъ опредѣленіи функціи u и v могутъ быть заданы произвольно, потому что каждому значенію z соотвѣтствуетъ опредѣленная пара значеній x и y, а потому и опредѣленная пара значеній u и v, и одно опредѣленное значеніе $w = f(z)$. Условія, которымъ авторъ подчиняетъ функціи u и v въ § 401, необходимы только тогда, когда устанавливается понятіе о производной $f'(z)$.

I bis (къ § 411).

Когда точка $z = re^{i\theta}$ описываетъ сомкнутую кривую, внутри которой лежитъ начало координатъ, то модуль r измѣняется въ предѣлахъ r_1 и r_2, гдѣ r_1 — наименьшее, а r_2 — наибольшее значеніе r для точекъ описываемой кривой. Аргументъ θ постоянно возрастаетъ отъ нѣкотораго значенія θ_1 до $\theta_1 + 2\pi$, когда точка z одинъ разъ опишетъ всю кривую. Поэтому прямая, на которой находятся точки, изображающія всѣ логариѳмы отъ z при данномъ z, будетъ колебаться между двумя прямыми, перпендикулярными къ Ox, проведенными въ разстояніяхъ $\log r_1$ и $\log r_2$ отъ начала координатъ. При этомъ точка, изображающая $\log(z) = \log r + \theta i + 2k\pi i$ при данномъ k, будетъ описывать кривую, остающуюся между упомянутыми прямыми, переходя отъ одной къ другой, постоянно поднимаясь, вслѣдствіе возрастанія θ, и когда z придетъ въ первоначальное положеніе, а θ изъ θ_1 перейдетъ въ $\theta_1 + 2k\pi$, то точка $\log(z)$ придетъ въ точку $\log r + \theta_1 i + 2(k+1)\pi i$, т. е. въ точку, изображающую другое значеніе логариѳма того же числа z. Если же кривая, которую описываетъ z, не заключаетъ внутри своего об-

вода точки O, то модуль z по прежнему измѣняется въ предѣлахъ r_1 и r_2, гдѣ r_1 минимумъ, а r_2 максимумъ r, а θ сперва возрастаетъ отъ нѣкотораго значенія θ_1 до другого θ_2, а затѣмъ убываетъ отъ θ_2 опять до θ_1. Поэтому точка, изображающая одинъ изъ логариѳмовъ z опишетъ сомкнутую кривую, лежащую между двумя опредѣленными прямыми, проведенными въ разстояніяхъ $\log r_1$ и $\log r_2$ отъ O перпендикулярно къ Ox, сперва поднимаясь, когда θ возрастаетъ отъ θ_1 до θ_2, а потомъ понижаясь, когда θ убываетъ отъ θ_2 до θ_1, и возвратится на прежнее мѣсто. Все сказанное здѣсь можетъ быть весьма наглядно показано на чертежахъ, которые мы и рекомендуемъ выполнить читателю.

II (къ § 412).

Логариѳмическою спиралью называется кривая, уравненіе которой въ полярныхъ координатахъ, ϱ и t, имѣетъ видъ $\varrho = Re^{at}$, гдѣ R и a — постоянныя; при этомъ предполагается, что полюсъ находится въ точкѣ O, въ началѣ Декартовыхъ координатъ. Различныя точки, изображающія всѣ значенія функціи $z^c = \varrho e^{it}$, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ цѣлаго числа k въ формулахъ

$$\varrho = e^{a\log r - b(\theta + 2k\pi)}, \quad t = b\log r + a(\theta + 2k\pi),$$

будутъ лежать на кривой, уравненіе которой получимъ, исключая k изъ этихъ выраженій. Мы получимъ

$$\varrho = Re^{-\frac{b}{a}t},$$

гдѣ

$$R = e^{\frac{(a^2+b^2)}{a}\log r}.$$

Это уравненіе изображаетъ логариѳмическую спираль. Если c — число вещественное, то $b = 0$, и $\varrho = R = \text{const.}$, т. е., кривая вырождается въ окружность круга. Если c есть чисто мнимое число, то $a = 0$, и вышеприведенное выраженіе для t даетъ

$$t = b\log r = \text{const.}$$

(отъ k не зависитъ). Это уравненіе изображаетъ прямую линію.

Логариѳмическая спираль обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что она пересѣкаетъ всѣ радіусы векторы подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, иными словами, уголъ касательной съ радіусомъ векторомъ величина постоянная. Въ § 588 будетъ показано, что тангенсъ угла $\tilde{\omega}$ касательной къ кривой $\varrho = f(t)$ съ радіусомъ векторомъ точки касанія равенъ $\frac{\varrho}{\varrho'}$, гдѣ ϱ' есть производная отъ ϱ по t. Примѣняя это къ логариѳмической спирали

$$\varrho = Re^{-\frac{b}{a}t},$$

находимъ, $tg\,\omega = -\frac{a}{b}$, или, измѣнивъ направленіе касательной, $\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{a}{b}$. Съ другой стороны, очевидно, что тангенсъ угла, образуемаго прямою Oc, гдѣ $c = a + bi$, съ осью y-овъ, также равенъ $\frac{a}{b}$, откуда и слѣдуетъ, что касательная къ логариѳмической спирали въ точкѣ ея пересѣченія съ Oy, параллельна прямой Oc. Наконецъ, послѣднее замѣчаніе § 412 объясняется слѣдующимъ образомъ: возвышеніе $e^{-2i\pi}$ въ степень i даетъ въ результатѣ различныя числа, заключающіяся въ формулѣ

$$\left(e^{-2i\pi + 2ki\pi}\right)^i = e^{2\pi(1-k)},$$

а возвышеніе въ ту же степень числа $e^{2i\pi}$ — всѣ выраженія вида

$$\left(e^{2i\pi + 2ki\pi}\right)^i = e^{-2\pi(1+k)}$$

и т. д.

III (къ § 413).

Чтобы найти угловой коэффиціентъ касательной къ линіи $u(x, y) = a$, гдѣ a постоянное число, надо найти производную y' отъ y по x. Не рѣшая уравненія относительно y, можно разсматривать $u(x, y)$, какъ сложную функцію отъ x (§ 369), и взявъ ея производную, по правилу § 369, приравнять ее нулю на томъ основаніи, что въ силу даннаго уравненія функція $u(x, y)$ равна постоянному числу. Обозначая черезъ u'_x и u'_y частныя производныя отъ u по x и по y, находимъ $u'_x \cdot 1 + u'_y \cdot y' = 0$, откуда $y' = -\frac{u'_x}{u'_y}$.

IV (къ § 413).

1) Полагая $f(z) = \alpha z + \beta$, $z = x + iy$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 i$, $f(z) = u + iv$, находимъ $u = \alpha_1 x - \alpha_2 y + \beta_1$, $v = \alpha_2 x + \alpha_1 y + \beta_2$; уравненія $u = a$, $v = b$ даютъ, слѣдовательно, двѣ системы прямыхъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ.

2) Если $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$, уравненія $x^2 - y^2 = a$, и $xy = b$, даютъ двѣ системы гиперболъ, положеніе которыхъ относительно осей очевидно.

3) $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$; полагая $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$, находимъ $z^{\frac{1}{2}} = \varrho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$; уравненія линій первой системы: $\varrho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2} = a$, а второй: $\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta}{2} = b$, или $\varrho = \frac{2a^2}{1+\cos\theta}$, и $\varrho = \frac{2b^2}{1-\cos\theta}$ — параболы.

4) $f(z) = \log z = u + iv$, $z = e^u \cdot e^{iv} = \varrho e^{i\theta}$, $\varrho = e^u$, $\theta = v$. Линіи $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ будутъ тождественны съ линіями $\varrho = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ — система полярныхъ координатъ.

5) $f(z) = \log\log z$; $z = \varrho e^{i\theta}$, $\log z = \log\varrho + i\theta$. Полагая $\log\varrho + i\theta = Re^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, находимъ $R = \sqrt{(\log\varrho)^2 + \theta^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\theta}{\log\varrho}$, $\log\log z = \log R + i\varphi = u + iv$. Линіи $v = \text{const.}$ даютъ $\frac{\theta}{\log\varrho} = c = \text{const.}$, $\log\varrho = \frac{\theta}{c}$, $\varrho = e^{c\theta}$ — логариѳмическія спирали, линіи $u = \text{const.}$ будутъ изображаться уравненіемъ $(\log\varrho)^2 + \theta^2 = \text{const.}$

6) $f(z) = \log\frac{z - z_1}{z - z_2}$. Надо показать, что модуль этой функціи равенъ $\frac{r_1}{r_2}$, гдѣ r_1 и r_2 обозначаютъ разстоянія отъ точки z до z_1 и до z_2, а аргументъ равенъ φ, гдѣ φ есть уголъ между прямыми, соединяющими точку z съ z_1 и z_2. Въ § 389 уже было замѣчено, что $|z - z_1| = r_1$, и $|z - z_2| = r_2$, слѣдовательно, $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}$. Чтобы вычислить аргументъ, полагаемъ $z - z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z - z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$, тогда, обозначая черезъ φ_1 аргументъ отношенія $\frac{z - z_1}{z - z_2}$, знаемъ, что $\varphi_1 = \alpha - \beta$.

Съ другой стороны, если для данныхъ точекъ z_1 и z_2 положимъ $z_1 = \varrho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \varrho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ и $z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$, и напишемъ выраженія $z - z_1$ и $z - z_2$ по этимъ формуламъ, то изъ сравненія съ написанными выше выраженіями, найдемъ

$$\cos\alpha = \frac{\varrho\cos\theta - \varrho_1\cos\theta_1}{r_1}, \qquad \sin\alpha = \frac{\varrho\sin\theta - \varrho_1\sin\theta_1}{r_1},$$

$$\cos\beta = \frac{\varrho\cos\theta - \varrho_2\cos\theta_2}{r_2}, \qquad \sin\beta = \frac{\varrho\sin\theta - \varrho_2\sin\theta_2}{r_2}.$$

Составляя по этимъ формуламъ выраженіе $\cos\varphi_1 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, и обозначая черезъ r разстояніе между точками z_1 и z_2, опредѣляемое формулою

$$r^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\theta_1 - \theta_2),$$

получимъ

$$\cos\varphi_1 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2},$$

т. е.

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi \text{ и } \varphi_1 = \varphi,$$

гдѣ φ есть уголъ при вершинѣ z въ треугольникѣ zz_1z_2. Итакъ, дѣйствительно,

$$\log\frac{z - z_1}{z - z_2} = \log\left(\frac{r_1}{r_2}e^{i\varphi}\right).$$

V (къ §§ 424 — 435).

Хотя дальнѣйшее изложеніе, мѣстами очень сжатое, также даетъ поводъ къ нѣкоторымъ разъясненіямъ, имѣющимъ цѣлью

сдѣлать это изложеніе болѣе доступнымъ, но мы на нихъ не остановимся 1) потому что въ дальнѣйшемъ не встрѣтимъ приложеній излагаемой теоріи, 2) потому что въ настоящее время эта теорія излагается проще и удобнѣе для приложеній въ Геометріи, Механикѣ и Физикѣ. См. Предисловіе къ „Векторіальному Анализу“ П. Сомова. СПБ. 1907.

КНИГА ПЯТАЯ.

Алгебраическія уравненія.

СУЩЕСТВОВАНІЕ И СЧЕТЪ КОРНЕЙ.

Исключеніе (Elimination).

436. Для того, чтобы подготовиться къ изученію корней алгебраическихъ функцій, умѣстно будетъ предпослать нѣкоторыя краткія свѣдѣнія объ исключеніи (неизвѣстныхъ изъ уравненій). Можетъ случиться, что между безчисленнымъ множествомъ уравненій, являющихся необходимыми слѣдствіями данной системы уравненій, удается найти такое, которое не заключаетъ въ себѣ нѣкоторой опредѣленной неизвѣстной. Тогда говорятъ, что эта неизвѣстная исключена. Напримѣръ, если даны уравненія $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, и удалось изъ нихъ вывести, какъ необходимое слѣдствіе, уравненіе $R = 0$, независящее отъ x, то исключеніе неизвѣстной x выполнено. Само собою понятно, что полученное такимъ образомъ уравненіе есть необходимое условіе существованія такого значенія x, которое обращаетъ одновременно въ нуль функціи $f(x)$ и $g(x)$. Если вмѣстѣ съ тѣмъ окажется, что полученное условіе будетъ въ то же время и достаточнымъ, то R называется результантомъ этихъ функцій f и g. Итакъ, результантомъ двухъ функцій f и g отъ x называютъ такое выраженіе, независящее отъ x, обращеніе котораго въ нуль необходимо и достаточно для того, чтобы разсматриваемыя функціи имѣли, по крайней мѣрѣ, одинъ общій корень.

437. Примѣры. Положимъ, что даны уравненія

$$a_0x + a_1 = 0, \quad b_0x + b_1 = 0.$$

Умножая первое на b_0, второе на a_0, и вычитая одно изъ другого, получимъ $c_{01} = 0$, полагая вообще для сокращенія $c_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$. Точно также, если даны уравненія

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0,$$

то, умножая сперва первое на b_0, второе на a_0, потомъ первое на b_2, второе на a_2, получимъ путемъ вычитанія

$$c_{01}x + c_{02} = 0, \quad c_{02}x + c_{12} = 0,$$

а отсюда, пользуясь полученнымъ выше результатомъ, $c_{01}c_{12} - c_{02}^2 = 0$, т. е.

$$(a_0b_1 - a_1b_0)\,(a_1b_2 - a_2b_1) - (a_0b_2 - a_2b_0)^2 = 0.$$

Поступая подобнымъ же образомъ съ уравненіями

$$(1) \qquad a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \qquad b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0,$$

сперва получимъ уравненія

$$c_{01}x^2 + c_{02}x + c_{03} = 0, \quad c_{03}x^2 + c_{13}x + c_{23} = 0,$$

а пользуясь предыдущимъ результатомъ, выводимъ отсюда условіе

$$(c_{01}c_{31} + c_{02}c_{03})\,(c_{02}c_{23} + c_{03}c_{31}) + (c_{01}c_{23} - c_{03}^2)^2 = 0.$$

Раскрывая лѣвую часть и принимая во вниманіе тождество

$$c_{01}c_{23} + c_{02}c_{31} + c_{03}c_{12} = 0,$$

которое само непосредственно вытекаетъ изъ слѣдующаго

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

получимъ

$$(2) \qquad c_{03}\,(c_{03}^3 - 2\,c_{01}c_{03}c_{23} + c_{02}c_{03}c_{31} + c_{01}c_{31}^2 + c_{23}c_{02}^2 - c_{01}c_{12}c_{23}) = 0.$$

Каждое изъ трехъ найденныхъ условій навѣрно необходимо для совмѣстности соотвѣтствующей пары уравненій. Но между тѣмъ, какъ легко прямо убѣдиться, что первыя два въ то же время и достаточны, объ условіи (2) этого сказать нельзя. Дѣйствительно оно выполняется, если $\frac{a_0}{a_3} = \frac{b_0}{b_3}$, а между тѣмъ ясно, что этого условія недостаточно, чтобы уравненія (1) имѣли общій корень. Произведенныя выкладки, вмѣсто того, чтобы дать истинный результантъ, ввели посторонняго множителя. Мы увидимъ, дѣйствительно, что результантъ уравненій (1) равенъ лѣвой части уравненія (2), раздѣленной на множителя c_{03}.

438. Послѣдній примѣръ показываетъ необходимость ознакомиться съ такими методами, которыя давали бы возможность производить исключеніе такъ, чтобы навѣрно получался въ окончательномъ выводѣ результантъ. Такъ какъ, кромѣ того, такими методами мы будемъ пользоваться для доказательства существованія корней алгебраическихъ функцій, то необходимо имѣть хотя бы одну такую методу, которая не зависѣла бы отъ предположенія

этого существованія. Принимая это во вниманіе и ограничиваясь разсмотрѣніемъ цѣлыхъ функцій

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m,$$

мы назовемъ результантомъ двухъ полиномовъ f и g такую функцію отъ коэффиціентовъ, обращеніе которой въ нуль необходимо и достаточно для того, чтобы данные полиномы имѣли общаго дѣлителя [1]).*), или, какъ говорятъ, не были взаимно-простыми. Намъ останется тогда только показать (§ 450, a), что это предварительное опредѣленіе, которымъ мы будемъ пользоваться въ ближайшихъ параграфахъ, совпадаетъ съ прежнимъ, даннымъ въ § 436.

439. Метода Эйлера. a) Если полиномы f и g имѣютъ общаго дѣлителя δ, то существуетъ два такихъ полинома f_1 и g_1, степени которыхъ соотвѣтственно ниже степеней f и g, что $f = f_1\delta$, $g = g_1\delta$, и будемъ имѣть

$$fg_1 - gf_1 = 0. \tag{3}$$

Обратно, положимъ, что условіе (3) выполняется тождественно. Обозначимъ черезъ $\mathfrak{D}$ общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ f_1 и g_1 (при чемъ $\mathfrak{D}$ можетъ быть и единицей, если f_1 и g_1 взаимно простые полиномы), тогда $f_1 = f_2\mathfrak{D}$, $g_1 = g_2\mathfrak{D}$, гдѣ f_2 и g_2 взаимно простые полиномы. Соотношеніе (3) принимаетъ видъ $fg_2 = gf_2$. Здѣсь f_2 дѣлитъ, какъ видно, произведеніе fg_2, но, будучи взаимно простымъ съ g_2, долженъ дѣлить f, такъ что $f = f_2\delta$, гдѣ δ полиномъ не ниже первой степени, потому что степень f_2 не превосходитъ степени f_1, которая ниже степени f. Подставляя $f = f_2\delta$ въ тождество $fg_2 = gf_2$, получимъ $g = g_2\delta$. Слѣдовательно, f и g имѣютъ общаго дѣлителя δ.

b) Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что необходимое и достаточное условіе для того, чтобы f и g не были взаимно простыми, совпадаетъ съ необходимымъ и достаточнымъ условіемъ существованія такихъ полиномовъ

$$f_1 = \alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}, \quad g_1 = \beta_0x^{m-1} + \beta_1x^{m-2} + \cdots + \beta_{m-1},$$

чтобы имѣло мѣсто тождество (3), т. е. чтобы было

$$\begin{aligned}&(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)(\beta_0x^{m-1} + \beta_1x^{m-2} + \cdots + \beta_{m-1})\\ &= (b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m)(\alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}).\end{aligned}$$

---

[1]) Мы предполагаемъ, что теорія алгебраической дѣлимости извѣстна изъ элементовъ. См. Cours d'Algèbre supérieure par Mansion (1889 lit p. 15).

*) На русскомъ языкѣ см. Веберъ и Вельштейнъ стр. 221 и слѣд.

Сравнивая коэффиціенты*) при одинаковыхъ степеняхъ x, получаемъ систему

$$\begin{cases} a_0\beta_0 & - b_0\alpha_0 & = 0, \\ a_1\beta_0 + a_0\beta_1 & - b_1\alpha_0 - b_0\alpha_1 & = 0, \\ a_2\beta_0 + a_1\beta_1 + a_0\beta_2 - b_2\alpha_0 - b_1\alpha_1 - b_0\alpha_2 & & = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \end{cases}$$

$n + m$ линейныхъ однородныхъ уравненій съ $n + m$ неизвѣстными $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Для того, чтобы можно было найти для нихъ значенія, не равныя нулю одновременно, необходимо и достаточно (§ 56), чтобы опредѣлитель этой системы былъ равенъ нулю. Этотъ опредѣлитель $(n + m)$-го порядка можетъ быть написанъ, если замѣнимъ столбцы строками и не будемъ обращать вниманія на знакъ его, въ слѣдующемъ видѣ [1])

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_m \end{vmatrix}.$$

Это и есть, слѣдовательно, искомый результантъ.

440. Къ той же формѣ результанта Сильвестръ пришелъ другимъ путемъ. Разсмотримъ, напримѣръ, два уравненія, одно третьей, другое второй степени:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

Умножая первое на x, а второе на x и на x^2, получаемъ систему

$$\begin{cases} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x & = 0, \\ a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 & = 0, \\ b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 & = 0, \\ b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x & = 0, \\ b_0x^2 + b_1x + b_2 & = 0, \end{cases}$$

которую можно разсматривать, какъ состоящую изъ пяти линейныхъ однородныхъ уравненій съ пятью неизвѣстными, значенія которыхъ

*) На основаніи теоремы о тождествѣ полиномовъ. См. Веберъ и Вельштейнъ. Стр. 225.

[1]) Объ опредѣлителяхъ этого вида см. у Trudi § XI „Teoria dei determinanti“.

должны оказаться пропорціональными числамъ x^4, x^3, x^2, x, 1 при прилично выбранномъ значеніи x. Слѣдовательно, результантъ, въ смыслѣ § 436, будетъ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

такъ какъ его обращеніе въ нуль необходимо и, какъ увидимъ далѣе, и достаточно для совмѣстности данныхъ уравненій.

441. Метода Безу. а) Положимъ сперва $n = m$, и чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, возьмемъ два уравненія 4-ой степени:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$
$$b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0.$$

Умножая первое на b_0, второе на a_0, и вычитая, получимъ

$$c_{01}x^3 + c_{02}x^2 + c_{03}x + c_{04} = 0,$$

умножая первое на $b_0x + b_1$, второе на $a_0x + a_1$, и вычитая, получимъ

$$c_{02}x^3 + (c_{03} + c_{12})x^2 + (c_{04} + c_{13})x + c_{14} = 0.$$

Точно также, умножая сперва первое на $b_0x^2 + b_1x + b_2$, второе на $a_0x^2 + a_1x + a_2$, а потомъ первое на $b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$, а второе на $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, и вычитая, найдемъ

$$c_{03}x^3 + (c_{04} + c_{13})x^2 + (c_{14} + c_{23})x + c_{24} = 0,$$
$$c_{04}x^3 + c_{14}x^2 + c_{24}x + c_{34} = 0.$$

Такимъ образомъ получается система изъ четырехъ уравненій, которыя можно разсматривать, какъ линейныя и однородныя, и удовлетворяющіяся значеніями неизвѣстныхъ, пропорціональными числамъ x^3, x^2, x, 1. Опредѣлитель этой системы, на основаніи сказаннаго въ концѣ предыдущаго параграфа, и будетъ искомымъ результантомъ:

$$\begin{vmatrix} c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} \\ c_{02} & c_{03} + c_{12} & c_{04} + c_{13} & c_{14} \\ c_{03} & c_{04} + c_{13} & c_{14} + c_{23} & c_{24} \\ c_{04} & c_{14} & c_{24} & c_{34} \end{vmatrix}.$$

Не трудно найти законъ его составленія для случая двухъ уравненій n-ой степени [1]). Выраженіе общаго элемента будетъ

4 $$c_{0,i+j-1} + c_{1,i+j-2} + c_{2,i+j-3} + \cdots + c_{i-1,j},$$

принимая, что коэффиціенты съ указателями, большими n, равны нулю. Къ тому же результату Cayley (Кейли) пришелъ, исходя изъ иныхъ соображеній [2]).

b) Если $n > m$, то второе уравненіе умножаютъ на x^{n-m} и примѣняютъ предыдущую методу, при чемъ получается всего m уравненій. Чтобы получить остальныя $n - m$, умножаютъ второе уравненіе послѣдовательно на 1, x, x^2, ..., x^{n-m-1}. Положимъ, напримѣръ, что имѣемъ одно уравненіе 4-ой, а другое 2-ой степени:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

Умножая второе на x^2, и выполняя вычисленія по вышеизложенной методѣ, найдемъ два уравненія:

$$c_{01}x^3 + c_{02}x^2 + c_{03}x + c_{04} = 0,$$
$$c_{02}x^3 + (c_{03} + c_{12})x^2 + (c_{04} + c_{13})x + c_{14} = 0.$$

Два другихъ будутъ, если угодно,

$$b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x = 0, \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

Такимъ путемъ получится результантъ:

$$\begin{vmatrix} a_0b_1 - a_1b_0 & a_0b_2 - a_2b_0 & -a_3b_0 & -a_4b_0 \\ a_0b_2 - a_2b_0 & a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_0 & -a_3b_1 - a_4b_0 & -a_4b_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Обратимъ вниманіе на то, что метода Безу даетъ результантъ въ болѣе сжатомъ видѣ, чѣмъ метода Эйлера [3]). Дѣйствительно, Эйлеровъ результантъ есть опредѣлитель порядка $n + m$, а результантъ Безу опредѣлитель порядка n, если $n \geq m$. Въ этомъ и состоитъ преимущество методы Безу передъ Эйлеровой.

442. Вѣсъ. Если нѣкоторый одночленъ составленъ изъ буквъ, снабженныхъ указателями, то сумма указателей всѣхъ множителей, какъ равныхъ, такъ и не равныхъ между собою, называется вѣсомъ

---

[1]) См. Jacobi, Crelles Journal, Bd. XV, S. 102.

[2]) Philosophical Transactions, 1857.

[3]) Перейти отъ одной формы къ другой не трудно съ помощью извѣстныхъ свойствъ опредѣлителей. См. Trudi, l. c., p. 101.

одночлена. Всякая сумма одночленовъ, имѣющихъ одинаковый вѣсъ, называется изобарною. Такъ, напримѣръ, выраженіе (4) изобарно, вѣсъ его равенъ $i+j-1$ *). Результанты Эйлера и Безу изобарны. Въ самомъ дѣлѣ, тотъ членъ, который получится, когда изъ n строкъ возьмемъ элементы, стоящіе на мѣстахъ $i_1, i_2, \ldots, i_n$, будетъ имѣть въ произведеніи первыхъ m множителей вѣсъ, равный

$$i_1+(i_2+1)+(i_3+2)+\cdots+(i_m+m-1)=\sum_{r=1}^{r=m} i_r+\tfrac{1}{2}m(m-1),$$

а въ произведеніи остальныхъ множителей вѣсъ, равный

$$(i_{m+1}-1)+\cdots+(i_n-n+m)=\sum_{r=m+1}^{r=n} i_r-\tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+1).$$

Отсюда слѣдуетъ, что вѣсъ каждаго члена равенъ

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)+\tfrac{1}{2}m(m-1)-\tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+1)=nm,$$

и прямо видно, что вѣсъ не мѣняется при переходѣ отъ одного члена опредѣлителя къ другому (I). Слѣдовательно, опредѣлитель изобаренъ, и вѣсъ его равенъ произведенію степеней данныхъ полиномовъ. Точно такъ же, въ результантѣ Эйлера каждый не исчезающій членъ заключаетъ въ себѣ произведеніе первыхъ m множителей, вѣсъ котораго будетъ

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_m-m)=\sum_{r=1}^{r=m} i_r-\tfrac{1}{2}m(m+1),$$

и произведеніе остальныхъ множителей, вѣсъ котораго равенъ

$$(i_{m+1}-1)+(i_{m+2}-2)+\cdots+(i_{n+m}-n)=\sum_{r=m+1}^{r=n+m} i_r-\tfrac{1}{2}n(n+1),$$

такъ что весь вѣсъ каждаго члена равенъ

$$\tfrac{1}{2}(n+m)(n+m+1)-\tfrac{1}{2}n(n+1)-\tfrac{1}{2}m(m+1)=nm.$$

Итакъ, результанты, даваемые методами Эйлера и Безу имѣютъ одинаковый вѣсъ, а этого достаточно, чтобы быть увѣреннымъ, что метода Безу лишнихъ множителей не вводитъ.

443. Если имѣемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными x и y, и первое будетъ степени m, а второе степени n относительно обѣихъ неизвѣстныхъ, то можно расположить лѣвыя

*) Вѣсъ одночлена $a_1^2 b_2^3 c_3^4$ равенъ $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4=20$.

части по степенямъ x, и тогда a_i и b_i будутъ полиномы степени не выше i относительно y. Пусть α_i и β_i будутъ коэффиціенты при y^i въ a_i и b_i. Когда исключимъ x, то результантъ, очевидно, будетъ цѣлая функція отъ y, старшій членъ которой получимъ, когда въ каждомъ элементѣ результанта поставимъ $\alpha_i y^i$ и $\beta_i y^i$ соотвѣтственно на мѣсто a_i и b_i [1]). Изъ сказаннаго въ предыдущемъ § тотчасъ вытекаетъ, что этотъ старшій членъ равенъ произведенію y^{mn} на постоянную, равную результанту полиномовъ

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad \beta_0x^m + \beta_1x^{m-1} + \cdots + \beta_m.$$

Слѣдовательно, если эти полиномы, какъ это обыкновенно и бываетъ, взаимно простые, то въ результантѣ данныхъ функцій навѣрно будетъ членъ степени mn. Итакъ, степень результанта равна произведенію степеней данныхъ уравненій и можетъ понизиться лишь въ частныхъ случаяхъ, а именно, если тѣ полиномы, которые получимъ, когда, удержавъ лишь члены наивысшей степени относительно x и y, положимъ въ нихъ $y = 1$, будутъ имѣть общаго дѣлителя. Въ этомъ состоитъ теорема Безу. Въ Аналитической Геометріи она находитъ слѣдующую замѣчательную интерпретацію. „Двѣ алгебраическія кривыя порядковъ m и n, вообще, пересѣкаются въ mn точкахъ“. Тамъ же далѣе доказываютъ, что пониженіе числа mn до $mn - r$ происходитъ не отъ внезапнаго исчезновенія r точекъ пересѣченія, а отъ передвиженія ихъ въ безконечность. Поэтому можно сказать, что двѣ данныя кривыя порядковъ m и n всегда пересѣкаются въ mn точкахъ (вещественныхъ, мнимыхъ, лежащихъ въ области конечнаго или безконечнаго). Теорема Безу легко распространяется на случай какого угодно числа уравненій [2]).

Существованіе корней.

444. Пусть $f(x)$ есть явная алгебраическая функція. Уравненіе $f(x) = 0$ всегда можетъ быть приведено къ болѣе простому виду посредствомъ удаленія изъ него радикаловъ. Этой цѣли достигаютъ слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ каждый радикалъ осо-

---

[1]) Все это справедливо лишь въ предположеніи, что a_0 и b_0 оба не обращаются въ нуль, такъ какъ вышеизложенныя методы разысканія результанта существенно предполагаютъ, что степени данныхъ уравненій не могутъ быть понижены.

[2]) Относительно этого обобщенія и другихъ важныхъ теоремъ теоріи исключенія см. Salmon Fiedler: „Algebra der linearen Transformationen“ (2-ое изд. стр. 91) или упомянутое въ примѣчаніе I французское изданіе того же сочиненія); Laurent: „Traité d'Algèbre 4^e éd. 3^{me} partie, стр. 134); Serret: „Cours d'Algèbre supérieure“ (4-е изд. 1877, томъ I стр. 599 и слѣд.; Petersen: „Theorie der algebraischen Gleichungen“ Bd. I, S. 60.

бою буквою, и пусть u, v, w, ... будутъ ν новыхъ перемѣнныхъ, которыя такимъ образомъ появляются. Уравненія ихъ опредѣляющія, послѣ надлежащихъ возвышеній въ степень, дадутъ ν раціональныхъ соотношеній между ν новыми перемѣнными и прежнею x. Присоединяя эти уравненія къ данному, получимъ систему $\nu+1$ раціональныхъ уравненій съ $\nu+1$ неизвѣстными x, u, v, w, ... Понятно, что изъ нихъ можно исключить ν неизвѣстныхъ u, v, w, ... и притомъ такъ, что никакіе радикалы не будутъ введены. Получится нѣкоторое раціональное уравненіе съ одною неизвѣстною x, которое, очевидно, можно привести къ виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \tag{5}$$

при условіи $a_0 > 0$. Въ дальнѣйшемъ всегда будетъ подразумѣваться, что разсматриваемое уравненіе приведено къ виду (5). Вопросъ, который здѣсь передъ нами возникаетъ, состоитъ въ слѣдующемъ: Имѣетъ ли уравненіе (5) корень?

445. Для значеній x, модуль которыхъ возрастаетъ безпредѣльно, значенія функціи

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

будутъ въ концѣ концовъ опредѣляться значеніями старшаго члена. Это дѣлается очевиднымъ, если напишемъ

$$f(x) = x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

и замѣтимъ, что выраженіе въ скобкахъ стремится къ предѣлу a_0 при возрастаніи $|x|$ до безконечности. Отсюда въ частности слѣдуетъ, что полиномъ четной степени съ вещественными коэффиціентами въ концѣ концовъ принимаетъ и сохраняетъ знакъ старшаго члена, когда дадимъ перемѣнной x достаточно большое по абсолютной величинѣ значеніе. А полиномъ нечетной степени съ вещественными коэффиціентами принимаетъ и сохраняетъ знакъ старшаго члена или противоположный этому знакъ, смотря по тому, дадимъ ли перемѣнной x положительное или отрицательное значеніе, достаточно большое по абсолютной величинѣ.

446. Когда коэффиціенты уравненія (5) вещественны, то въ нѣкоторыхъ случаяхъ существованіе корня очень легко обнаружить. Такъ, напримѣръ, если степень полинома нечетная, то на основаніи только что сказаннаго всегда можно найти такой интервалъ $(-a, +a)$, на границахъ котораго полиномъ будетъ имѣть различные знаки, а именно знакъ $-$ на нижней, и знакъ $+$ на верхней границѣ, предполагая всегда $a_0 > 0$. Отсюда слѣдуетъ, что $f(x)$, вслѣдствіе

своей непрерывности (§ 275), по крайней мѣрѣ, одинъ разъ обратится въ нуль въ этомъ интервалѣ. Поэтому имѣемъ слѣдующую теорему: всякое уравненіе нечетной степени съ вещественными коэффиціентами имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень. Къ этому можно добавить, что знакъ этого корня противоположенъ знаку независящаго отъ x члена уравненія. Дѣйствительно, если этотъ членъ, очевидно равный $f(0)$, положительный, то $f(x)$ должна обратиться въ нуль въ интервалѣ $(-a, 0)$, т. е. для отрицательнаго значенія x; если же $f(0)$ отрицательно, то $f(x)$ обратится въ нуль въ интервалѣ $(0, a)$. — Если степень полинома четная, то можно взять a достаточно большимъ, чтобы на обѣихъ границахъ интервала $(-a, a)$ значенія $f(x)$ были положительными. Слѣдовательно, если $f(0) < 0$, то $f(x)$ обратится въ нуль какъ въ интервалѣ $(-a, 0)$ такъ и въ интервалѣ $(0, a)$. Поэтому, имѣемъ еще теорему: всякое уравненіе четной степени съ вещественными коэффиціентами и съ отрицательнымъ независимымъ членомъ имѣетъ одинъ положительный и одинъ отрицательный корень (по крайней мѣрѣ).

447. Два полинома $f(z)$ и $g(z)$ (z-комплексное число, равно какъ и коэффиціенты полиномовъ) называются сопряженными, если соотвѣтствующіе коэффиціенты ихъ числа сопряженныя, такъ что, отдѣляя вещественныя части коэффиціентовъ отъ чисто мнимыхъ, можемъ написать

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad g(z) = u(z) - iv(z),$$

гдѣ полиномы $u(z)$ и $v(z)$ имѣютъ уже вещественные коэффиціенты. Каждый изъ этихъ полиномовъ, въ свою очередь, можетъ быть представленъ въ комплексной формѣ, если отдѣлимъ въ z вещественную часть x отъ чисто мнимой iy. Тэйлорова формула даетъ

$$\varphi(x+iy) = \varphi(x) - \tfrac{1}{2}y^2\varphi''(x) + \cdots + iy\{\varphi'(x) - \tfrac{1}{6}y^2\varphi'''(x) + \cdots\}$$

такъ что, если φ есть полиномъ съ вещественными коэффиціентами, то замѣна y на $-y$ измѣняетъ только знакъ чисто мнимой его части. Поэтому можемъ написать

$$u(x+iy) = u_1 + iu_2, \quad u(x-iy) = u_1 - iu_2,$$
$$v(x+iy) = v_1 + iv_2, \quad v(x-iy) = v_1 - iv_2,$$

откуда

$$f(x+iy) = u_1 + iu_2 + i(v_1 + iv_2) = u_1 - v_2 + i(u_2 + v_1)$$
$$g(x-iy) = u_1 - iu_2 - i(v_1 - iv_2) = u_1 - v_2 - i(u_2 + v_1).$$

Отсюда теорема: при сопряженныхъ значеніяхъ перемѣнной сопряженные полиномы принимаютъ сопряженныя значенія. Изъ этого прямо слѣдуетъ, что если какое нибудь число обращаетъ въ нуль нѣкоторый полиномъ, то сопряженное съ

первымъ число обратитъ въ нуль сопряженный съ даннымъ полиномъ. Полиномъ съ вещественными коэффиціентами сопряженъ самъ съ собою. Поэтому имѣемъ теорему: всякое уравненіе съ вещественными коэффиціентами, имѣющее комплексный корень, имѣетъ и другой, сопряженный съ первымъ. Отсюда слѣдуетъ, что число мнимыхъ корней уравненія съ вещественными коэффиціентами всегда четное.

448. Теорема Даламбера[1]) (D'Alembert). Всякое алгебраическое уравненіе съ вещественными или комплексными коэффиціентами имѣетъ вещественный или комплексный корень.

а) Разсмотримъ опять уравненіе (5), т. е. $f(x) = 0$, и для простоты положимъ $a_0 = 1$. Условимся говорить, что n будетъ числа четности r, если 2^r есть наивысшая степень 2, на которую дѣлится n*). Положивъ $x = y + h$ и располагая $f(x)$ по степенямъ y, найдемъ

$$f(x) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n,$$

гдѣ

$$(6)\quad \left|\begin{array}{l} b_1 = \dfrac{n}{1} h + a_1, \\ b_2 = \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2} h^2 + \dfrac{n-1}{1} a_1 h + a_2, \\ b_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} h^3 + \dfrac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} a_1 h^2 + \dfrac{n-2}{1} a_2 h + a_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b = h^n + a_1 h^{n-1} + a_2 h^{n-2} + \cdots + a_n. \end{array}\right.$$

Группируя члены $f(x)$ слѣдующимъ образомъ

$$f(x) = (y^n + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n) + y(b_1 y^{n-2} + b_3 y^{n-4} + \cdots + b_{n-1}),$$

полагая $n = 2\nu$, и

$$\Phi(x) = x^\nu + b_2 x^{\nu-1} + b_4 x^{\nu-2} + \cdots + b_{2\nu},$$
$$\Psi(x) = b_1 x^{\nu-1} + b_3 x^{\nu-2} + \cdots + b_{2\nu-1},$$

---

[1]) Нижеслѣдующее доказательство имѣетъ преимущество передъ различными другими по своему чисто алгебраическому характеру. Оно принадлежитъ Клиффорду, а потомъ снова было найдено Валецкимъ (Walecki) (Nouvelles Annales des Mathematiques, 1883, стр. 241). См. также въ Rivista di Matematica интересное изслѣдованіе Loria подъ заглавіемъ: Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche". Въ послѣднее время Вейерштрассъ далъ новое доказательство въ „Sitzungsberichten der Berliner Academie" за 1891 г.

*) Такъ что нечетное число будетъ четности нуль.

можемъ написать

$$f(x) = \Phi(y^2) + y\,\Psi(y^2). \tag{7}$$

Разсмотримъ теперь результантъ функцій Φ и Ψ:

$$\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} 1 & b_2 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2\nu} \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2\nu-1} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $\mathfrak{R}$ будетъ цѣлою функціею отъ h, и степень ея равна вѣсу $\mathfrak{R}$ относительно чиселъ b_i *). Вѣсъ этотъ (§ 442) былъ бы равенъ $\nu(\nu-1)$, но указатели коэффиціентовъ Φ удвоены, а указатели коэффиціентовъ Ψ послѣ удвоенія еще увеличены на единицу. Благодаря этому вѣсъ $\mathfrak{R}$ сдѣлался равнымъ

$$2\nu(\nu-1) + \nu = \nu(2\nu-1). \quad \text{(II)}.$$

Итакъ, $\mathfrak{R}$ будетъ степени $\nu(2\nu-1)$ относительно h. Однако, чтобы быть увѣреннымъ въ этомъ, надо еще показать, что коэффиціентъ при старшемъ членѣ никогда не равенъ нулю. Ясно, что этотъ старшій членъ получится (§ 443), если замѣнимъ каждый элементъ опредѣлителя $\mathfrak{R}$ старшимъ членомъ этого элемента. Принимая во вниманіе формулы (6), мы видимъ поэтому, что искомый коэффиціентъ будетъ то число, въ которое обратится $\mathfrak{R}$, когда всѣ числа $a_1, a_2, a_3, \dots$ положимъ равными нулю, а $h = 1$. Слѣдовательно, искомый коэффиціентъ есть не что иное, какъ результантъ Φ и Ψ въ частномъ случаѣ $f(x) = x^n$, и $h = 1$. При этихъ предположеніяхъ, равенство (7) даетъ

$$(y+1)^n = \Phi(y^2) + y\,\Psi(y^2), \qquad (y-1)^n = \Phi(y^2) - y\,\Psi(y^2)\ **).$$

Если бы результантъ Φ и Ψ обратился къ 0, то Φ и Ψ имѣли бы общаго дѣлителя, который долженъ былъ бы дѣлить $(y+1)^n$ и $(y-1)^n$, а эти полиномы, очевидно, взаимно простые. Поэтому членъ степени $\nu(2\nu-1)$ въ $\mathfrak{R}$ не исчезаетъ, и степень $\mathfrak{R}$ навѣрно будетъ четности $r-1$, если степень даннаго уравненія была четности r.

---

*) Потому что b_i степени i относительно h.

**) При замѣнѣ y на $-y$, и при $n = 2\nu$.

b) Предположили теперь, что $f(x)$ имѣетъ вещественные коэффиціенты и степень $n = 2\nu$, при ν нечетномъ. Уравненіе $\mathfrak{R} = 0$ будетъ тогда также имѣть вещественные коэффиціенты, а его степень равна $\nu(2\nu - 1)$, т. е. нечетному числу. Слѣдовательно (§ 446), существуетъ такое вещественное число h, при которомъ $\mathfrak{R} = 0$. Извѣстно далѣе, что при этомъ значеніи h полиномы Φ и Ψ, также съ вещественными коэффиціентами (какъ это видно изъ формулъ (6)), будутъ имѣть общаго дѣлителя χ. Поэтому будемъ имѣть

$$\Phi(x) = \varphi(x)\chi(x), \quad \Psi(x) = \psi(x)\chi(x).$$

Уравненіе (7) дастъ тогда

$$f(x) = [\varphi(y^2) + y\psi(y^2)]\chi(y^2)$$

или замѣняя y черезъ $x - h$, $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, гдѣ f_1 и f_2 полиномы съ вещественными коэффиціентами; сумма степеней этихъ полиномовъ равна n. Если степени обоихъ полиномовъ f_1 и f_2 числа четныя, то одна изъ нихъ была бы, какъ и n, равна удвоенному нечетному числу *), т. е. одинъ изъ полиномовъ f_1, f_2 находился бы въ тѣхъ же условіяхъ, какъ и f. Поступая съ нимъ такъ, какъ мы поступали съ f и продолжая такъ же, далѣе, мы получимъ рядъ полиномовъ съ вещественными коэффиціентами степени которыхъ будутъ постоянно убывать, и одинъ изъ этихъ полиномовъ наконецъ будетъ либо нечетной, либо второй степени и, слѣдовательно, будетъ имѣть корень, который будетъ въ то же время корнемъ даннаго полинома (потому что всѣ полиномы упомянутаго ряда будутъ дѣлителями даннаго). Во всѣхъ этихъ разсужденіяхъ подразумѣвалось, что полиномъ Ψ существуетъ. Если бы этотъ полиномъ, для разсматриваемаго вещественнаго значенія h оказался бы равнымъ нулю, т. е. если бы всѣ числа b_1, b_3, b_5, ... были равны нулю, то предложенное уравненіе привелось бы къ $\Phi(y^2) = 0$. Оно имѣло бы вещественные коэффиціенты и было бы нечетной степени относительно y^2, а потому имѣло бы корень. Итакъ, теорема справедлива для уравненій съ вещественными коэффиціентами, если степень уравненія равна удвоенному нечетному числу.

c) Она справедлива и для всякаго уравненія нечетной степени съ вещественными или комплексными коэффиціентами. Дѣйствительно, положимъ, что $f(z)$ есть полиномъ нечетной степени, а $g(z)$ сопряженный съ нимъ. Функція

$$f(z)g(z) = (u + iv)(u - iv) = u^2 + v^2,$$

имѣетъ вещественные коэффиціенты и степень, равную удвоенному нечетному числу. По доказанному она имѣетъ корень $\alpha + i\beta$. Если это число не обращаетъ въ нуль $f(z)$, то оно необходимо должно быть корнемъ $g(z)$, а тогда $\alpha - i\beta$ будетъ корнемъ $f(z)$.

---

*) Если $2\mu + 2\mu_1 = n = 2\nu$, то $\mu + \mu_1 = \nu =$ нечетному числу и потому μ или μ_1 — нечетное.

d) Остается, наконецъ, доказать, что теорема будетъ справедлива для того случая, когда степень n четности r, если допустимъ, что она справедлива для степени n четности, меньшей r. А для этого достаточно себѣ представить, что всѣ предыдущія разсужденія повторены для случая уравненія съ вещественными или комплексными коэффиціентами. Тогда уравненія $\mathfrak{R}=0$ и $\Phi=0$, степеней $\nu(2\nu-1)$ и ν, четности $r-1$, если $n=2\nu$ четности r, по предположенію, будутъ удовлетворяться нѣкоторыми значеніями h и y^2. Слѣдовательно, всегда возможно будетъ разложить f на два полинома f_1 и f_2, степеней n_1 и n_2. Если одно изъ этихъ чиселъ будетъ четности, меньшей r, то соотвѣтствующій полиномъ будетъ имѣть корень, который будетъ также и корнемъ полинома f. Въ противномъ случаѣ, одно изъ чиселъ n_1 и n_2, напримѣръ n_1 будетъ той же четности r, какъ и n, потому что если бы оба числа n_1 и n_2 были четности, большей r, то и $n=n_1+n_2$ было бы четности, большей r, противно предположенію. Тогда примѣняемъ къ полиному f_1 предыдущія соображенія и, продолжая такимъ образомъ, составимъ рядъ полиномовъ, число которыхъ, конечно, ограничено, потому что степени ихъ убываютъ. Если бы четность r постоянно сохранялась, то въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ дошли бы до полинома степени 2^r, за которымъ необходимо послѣдовалъ бы полиномъ степени ниже 2^r, а потому и четности, меньшей r. Такой полиномъ, по предположенію, имѣлъ бы корень, принадлежащій, конечно, и данному полиному. Теорема доказана вполнѣ.

449. Слѣдствіе. Всякое уравненіе n-ой степени съ вещественными или комплексными коэффиціентами имѣетъ равно n вещественныхъ или комплексныхъ корней. Мы видѣли, что $f(x)$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень a_1. Замѣчая, что (см. § 500) $f(x)-f(a)$ всегда дѣлится на $x-a$, можемъ написать, полагая $a=a_1$,

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x),$$

гдѣ $f_1(x)$ полиномъ $(n-1)$-ой степени, имѣющій корень a_2, и потому представляющійся въ формѣ $(x-a_2)f_2(x)$ и т. д. Продолжая такимъ образомъ, получимъ окончательно

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n) \tag{8}$$

($a_0=1$). Для того, чтобы этотъ полиномъ обратился въ нуль, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей обратился въ нуль; поэтому можно утверждать, что $a_2, a_3, \dots, a_n$, какъ и a_1, будутъ корнями $f(x)$, и что въ области вещественныхъ и комплексныхъ чиселъ [1]) другихъ корней не существуетъ.

---

[1]) Оговорка относительно природы корней необходима. Дѣйствительно, Гамильтонъ доказалъ, что общее уравненіе 2-ой степени, напримѣръ, имѣетъ 16 корней, если въ область разсматриваемыхъ чиселъ включить кватерніоны.

450. Примѣчанія. a) Два полинома, имѣющіе одинъ общій корень a, не будутъ взаимно простыми, потому что будутъ имѣть общаго дѣлителя $x - a$, на основаніи формулы (8). Обратно, если два полинома имѣютъ общаго дѣлителя, то каждый корень этого дѣлителя обращаетъ въ нуль оба полинома. Итакъ, одновременная дѣлимость двухъ полиномовъ на третій и одновременное обращеніе ихъ въ нуль для нѣкотораго значенія перемѣнной суть вполнѣ равносильныя свойства полиномовъ.

b) Ничто не мѣшаетъ тому, чтобы нѣкоторые изъ корней a были равны между собою. Поэтому цѣлесообразнѣе, вмѣсто (8), писать общнѣе

$$f(x) = (x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2}(x - a_3)^{r_3} \dots (x - a_\nu)^{r_\nu},$$

гдѣ теперь уже всѣ a различны и сумма $r_1 + r_2 + \dots + r_\nu$ всегда равна степени полинома n. Хотя, въ дѣйствительности, будемъ имѣть всего ν различныхъ значеній x, обращающихъ данный полиномъ $f(x)$ въ нуль, но и теперь удобнѣе говорить, что $f(x)$ имѣетъ n корней, изъ которыхъ r_1 равны a_1, r_2 равны a_2 и т. д.

c) Если $f(x)$ имѣетъ r корней, равныхъ a, при чемъ всѣ другіе отличны отъ a, то легко показать, что a будетъ кратнымъ корнемъ порядка r или r — кратнымъ корнемъ, въ томъ смыслѣ, который былъ опредѣленъ раньше (§ 304, b). Дѣйствительно, изъ того, что $f(x) = (x - a)^r \varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ цѣлая функція, не дѣлящаяся на $x - a$, слѣдуетъ, что производная

$$f'(x) = (x - a)^{r-1}[r\varphi(x) + (x - a)\varphi'(x)].$$

Выраженіе въ скобкахъ не дѣлится на $x - a$, потому что при $x = a$ оно обращается въ $r\varphi(a) \neq 0$. Слѣдовательно, $f'(x)$ имѣетъ только $r - 1$ корней, равныхъ a, а отсюда слѣдуетъ, что $f''(x)$, $f'''(x)$ ... будетъ имѣть соотвѣтственно $r - 2$, $r - 3$, ... корней, равныхъ a, такъ что окончательно $f^{(r)}(a)$ уже не равно нулю. Итакъ, если a r-кратный корень функціи $f(x)$, то оно будетъ $(r - 1)$ — кратнымъ корнемъ функціи $f'(x)$, $(r - 2)$ — кратнымъ корнемъ $f''(x)$ и т. д., простымъ корнемъ $f^{(r-1)}(x)$ и не будетъ корнемъ функціи $f^{(r)}(x)$. Для того, чтобы какой нибудь корень $f(x)$ былъ вообще кратнымъ, необходимо и достаточно, чтобы онъ былъ корнемъ $f'(x)$.

d) Если коэффиціенты $f(x)$ вещественны, то по сказанному въ концѣ § 447, каждому мнимому корню a соотвѣтствуетъ другой $\bar{a}$, съ нимъ сопряженный. Къ этому можемъ теперь добавить, что если a корень кратности r, то и $\bar{a}$ — корень той же кратности. Дѣйствительно, x будетъ корнемъ полиномовъ $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(r-1)}(x)$ съ вещественными коэффиціентами, но не будетъ корнемъ

полинома $f^{(r)}(x)$. Слѣдовательно, значеніе $x=\bar{a}$ обратитъ въ нуль первые r полиномовъ, не обращая въ нуль послѣдняго. (Это и значитъ, что $\bar{a}$ есть r-кратный корень $f(x)$). Отсюда слѣдуетъ, что представивъ $f(x)$ въ видѣ (8), мы можемъ соединить линейные множители, соотвѣтствующіе сопряженнымъ корнямъ a и $\bar{a}$, въ произведеніе вида $(x^2+px+q)^r$, гдѣ p и q вещественны, потому что $p=-(a+\bar{a})$, $q=a\bar{a}$. Итакъ, всякій полиномъ съ вещественными коэффиціентами можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія линейныхъ и квадратныхъ множителей съ вещественными коэффиціентами.

Общіе корни двухъ уравненій и кратные корни.

451. Общіе корни. Если обозначимъ черезъ $\mathfrak{D}(x)$ общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $f(x)$ и $g(x)$ и положимъ

$$f(x)=f_1(x)\mathfrak{D}(x),\quad g(x)=g_1(x)\mathfrak{D}(x),$$

то увидимъ ясно, что всякій корень $\mathfrak{D}(x)$ будетъ общимъ корнемъ $f(x)$ и $g(x)$, и обратно, всякій общій корень $f(x)$ и $g(x)$ будетъ корнемъ $\mathfrak{D}(x)$, такъ какъ взаимно простые полиномы f_1 и g_1 одновременно обращаться въ нуль не могутъ. Итакъ, общими корнями двухъ цѣлыхъ функцій будутъ тѣ и только тѣ, которые обращаютъ въ нуль общаго наибольшаго дѣлителя этихъ функцій. Изъ этой теоремы тотчасъ получается разложеніе общаго наибольшаго дѣлителя на линейные множители. Если f и g имѣютъ общими ровно r корней равныхъ α, s корней равныхъ β, t — равныхъ γ и т. д., то общій наибольшій ихъ дѣлитель есть

$$\mathfrak{D}(x)=(x-\alpha)^r(x-\beta)^s(x-\gamma)^t\dots$$

Мы сейчасъ увидимъ, что разысканіе общихъ корней находится въ прямой связи съ методами исключенія.

452. Теорему, служащую основаніемъ методы Эйлера (§ 439, а) можно легко обобщить, замѣчая, что возможность опредѣлить полиномы

$$f_i=a_0x^{n-i}+a_1x^{n-i-1}+\dots+a_{n-i},$$
$$g_i=\beta_0x^{m-i}+\beta_1x^{m-i-1}+\dots+\beta_{m-i}$$

такъ, чтобы имѣло мѣсто тождество

$$fg_i-gf_i=0, \tag{9}$$

есть необходимое и достаточное условіе для того, чтобы полиномы

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad g = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

имѣли общаго дѣлителя степени не ниже i. Тождество (9) разбивается (аналогично тому, что сказано въ § 439, b) на систему линейныхъ и однородныхъ уравненій относительно чиселъ α и β, и возможность опредѣленія требуемыхъ полиномовъ f_i и g_i равносильна (§ 56) обращенію въ нуль старшихъ опредѣлителей нѣкоторой матриссы. Эта матрисса получится изъ

$$\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_m \end{vmatrix},$$

если выкинемъ изъ $\mathfrak{R}$ послѣднія $n-i$ изъ первыхъ n строкъ, и послѣднія $n-i$ изъ всѣхъ строкъ. Если выкинемъ еще $2i-2$ послѣднихъ столбцовъ, въ числѣ которыхъ послѣдніе $i-1$ состоятъ исключительно изъ нулей, то получимъ одинъ изъ старшихъ опредѣлителей $\mathfrak{R}_{i-1}$ матриссы. Остальные, которые мы обозначимъ черезъ $\mathfrak{R}_{i-1}^{(1)}$, $\mathfrak{R}_{i-1}^{(2)}$, ..., $\mathfrak{R}_{i-1}^{(i-1)}$, получатся изъ $\mathfrak{R}_{i-1}$ при послѣдовательной замѣнѣ его послѣдняго столбца каждымъ изъ слѣдующихъ за нимъ $i-1$ столбцовъ матриссы (не сплошь состоящихъ изъ нулей). Поэтому необходимыя и достаточныя условія для существованія тождества (9) будутъ

$$(10) \qquad \mathfrak{R}_{i-1} = 0, \quad \mathfrak{R}_{i-1}^{(1)} = 0, \quad \mathfrak{R}_{i-1}^{(2)} = 0, \ldots, \quad \mathfrak{R}_{i-1}^{(i-1)} = 0.$$

Для облегченія составленія опредѣлителей $\mathfrak{R}_{i-1}$ полезно писать первыя n строкъ въ опредѣлителѣ $\mathfrak{R}$ въ обратномъ порядкѣ. Тогда для полученія матриссы, содержащей всѣ опредѣлители (10), нужно будетъ вычеркнуть первыя $n-i$ и послѣднія $n-i$ строкъ (III.)

453. Такъ, напримѣръ, въ случаѣ двухъ уравненій 4-ой степени, схема

0	0	0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	0
0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	0	0
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	0	0	0
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	0	0	0
0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	0	0
0	0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	0
0	0	0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4

тотчасъ обнаруживаетъ опредѣлители

$$\mathfrak{R},\ \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{R}_2 \text{ и } \mathfrak{R}_3 = a_0 b_1 - a_1 b_0.$$

Далѣе, легко видѣть, что элементамъ схемы можно дать нижеслѣдующее расположеніе

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	0	0	0
0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	0	0
0	0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	0
0	0	0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
0	0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	0
0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	0	0
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	0	0	0

454. Предпославъ изложенное въ послѣднихъ двухъ §§, перейдемъ теперь къ той интерпретаціи методы Эйлера, которая дана Сильвестромъ (§ 440). При этомъ всѣ уравненія, получаемыя по способу Сильвестра, будемъ писать въ такомъ порядкѣ (см. § 455), чтобы коэффиціенты получили именно то расположеніе, которое указано въ послѣдней схемѣ § 453. Откинемъ i первыхъ и i послѣднихъ уравненій, и разсмотримъ остальныя $n+m-2i$ уравненій

какъ линейныя уравненія относительно степеней x до $(n+m-i)$-ой включительно. Исключая изъ этихъ уравненій всѣ степени x выше i-ой, получимъ уравненіе вида

$$\mathfrak{R}_i x^i + \mathfrak{R}_i^{(1)} x^{i-1} + \mathfrak{R}_i^{(2)} x^{i-2} + \cdots + \mathfrak{R}_i^{(i)} = 0. \tag{11}$$

Если p есть показатель степени $\mathfrak{D}$ (общаго наибольшаго дѣлители f и g), то, очевидно, f и g, одновременно дѣлящіеся на всѣхъ линейныхъ множителей $\mathfrak{D}$, будутъ имѣть общихъ дѣлителей всѣхъ степеней не выше p, но ни одного дѣлителя степени больше p, т. е. тождество (9) будетъ удовлетворяться для $i = 1, 2, \ldots p$, но не будетъ удовлетворяться при $i > p$. Слѣдовательно, на основаніи (10), всѣ опредѣлители $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\ldots$, $\mathfrak{R}_{p-1}$ равны нулю, и уравненіе (11) обращается въ тождество $0 = 0$, пока $i < p$, а при $i = p$, навѣрно будетъ существовать уравненіе

$$\mathfrak{R}\, x^p + \mathfrak{R}_p^{(1)} x^{p-1} + \cdots + \mathfrak{R}_p^{(p)} = 0. \tag{12}$$

Кромѣ того, такъ какъ оно удовлетворяется каждымъ изъ p общихъ корней f и g, то $\mathfrak{R}_p \neq 0$, и уравненіе (12) не можетъ быть степени ниже p. Итакъ, число общихъ (неравныхъ или равныхъ) корней f и g равно указателю перваго изъ чиселъ ряда $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\ldots$, не равнаго нулю, и значенія этихъ корней получаются, какъ рѣшенія уравненія (12).

455. Возьмемъ для примѣра опять уравненія § 453 и составимъ схему

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr}
a_0x^7 & + a_1x^6 & + a_2x^5 & + a_3x^4 & + a_4x^3 & & & = 0 \\
 & a_0x^6 & + a_1x^5 & + a_2x^4 & + a_3x^3 & + a_4x^2 & & = 0 \\
 & & a_0x^5 & + a_1x^4 & + a_2x^3 & + a_3x^2 & + a_4x & = 0 \\
 & & & a_0x^4 & + a_1x^3 & + a_2x^2 & + a_3x + a_4 & = 0 \\
 & & & b_0x^4 & + b_1x^3 & + b_2x^2 & + b_3x + b_4 & = 0 \\
 & & b_0x^5 & + b_1x^4 & + b_2x^3 & + b_3x^2 & + b_4x & = 0 \\
 & b_0x^6 & + b_1x^5 & + b_2x^4 & + b_3x^3 & + b_4x^2 & & = 0 \\
b_0x^7 & + b_1x^6 & + b_2x^5 & + b_3x^4 & + b_4x_3 & & & = 0
\end{array}\right.$$

Если выполнены условія $\mathfrak{R} = 0$, $\mathfrak{R}_1 = 0$, а $\mathfrak{R}_2 \neq 0$, то можно утверждать, что данныя уравненія имѣютъ два и только два общихъ корня. Для опредѣленія ихъ достаточно исключить x^3, x^4, x^5 изъ четырехъ среднихъ уравненій схемы. Тогда получимъ уравненіе

$$\left|\begin{array}{cccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3x^2 + a_4x \\
0 & a_0 & a_1 & a_2x^2 + a_3x + a_4 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2x^2 + b_3x + b_4 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3x^2 + b_4x
\end{array}\right| = 0$$

или

$$\mathfrak{R}_2 x^2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

456. Кратные корни. Для нахожденія кратныхъ корней различныхъ порядковъ на практикѣ поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Пусть $f_1(x)$ есть произведеніе множителей вида $x - a$, соотвѣтствующихъ простымъ корнямъ функціи $f(x)$, $f_2(x)$ — произведеніе такихъ же множителей, соотвѣтствующихъ двойнымъ корнямъ и т. д., такъ что

$$f(x) = f_1(x) f_2^{\,2}(x) f_3^{\,3}(x) f_4^{\,4}(x) \dots$$

Изъ сказаннаго выше (§ 450, c; § 451) слѣдуетъ, что общій наибольшій дѣлитель f и производной f' будетъ

$$\mathfrak{D}_1(x) = f_2(x) f_3^{\,2}(x) f_4^{\,3}(x) \dots$$

Точно такъ же, общій наибольшій дѣлитель $\mathfrak{D}_2$ полинома $\mathfrak{D}_1$ и его производной равенъ $f_3 f_4^{\,2} \dots$, общій наибольшій дѣлитель $\mathfrak{D}_3$ полинома $\mathfrak{D}_2$ и его производной равенъ $f_4 \dots$ и т. д. Раздѣлимъ f на $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_1$ на $\mathfrak{D}_2$, и т. д. и пусть частныя отъ этихъ дѣленій будутъ φ_1, φ_2, φ_3, ...; тогда

$$\varphi_1(x) = f_1(x) f_2(x) f_3(x) \dots, \quad \varphi_2(x) = f_2(x) f_3(x) \dots, \quad \varphi_3(x) = f_3(x) \dots, \dots$$

и, наконецъ,

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = f_1(x), \quad \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = f_2(x), \quad \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_4(x)} = f_3(x), \dots$$

Остается теперь только рѣшить каждое изъ уравненій

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; f_3 = 0, \; \dots$$

въ отдѣльности. Слѣдовательно, разысканіе кратныхъ корней слагается изъ четырехъ рядовъ операцій, а именно, одного ряда разысканій общихъ наибольшихъ дѣлителей, двухъ рядовъ дѣленій, и наконецъ, одного ряда рѣшеній уравненій съ одними простыми корнями [1]).

457. Дискриминантъ. Чтобы нѣкоторая цѣлая функція имѣла кратные корни, необходимо (§ 450, c), чтобы существовали общіе корни этой функціи и ея производной, а потому результантъ этихъ двухъ функцій долженъ быть равенъ нулю. Этотъ результантъ

[1]) О кратныхъ корняхъ см. Trudi „Teoria dei determinanti“ p. 179.

называется дискриминантомъ даннаго уравненія $f = 0$ и обозначается обыкновенно черезъ Δ. Для его вычисленія полезно сдѣлать данное уравненіе однороднымъ, т. е. замѣнить x на $\frac{x}{y}$ и затѣмъ умножить всѣ члены на y^n. Уравненіе приметъ тогда видъ

$$f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = 0.$$

Такъ какъ, по теоремѣ Эйлера (§ 372), $xf_x' + yf_y' = nf$, то всякій кратный корень функціи f обращаетъ въ нуль и f_y', и обратно, всякое число, обращающее одновременно въ нуль f_x' и f_y', обратитъ въ нуль f и f_x', т. е. будетъ кратнымъ корнемъ f. Поэтому дискриминантъ даннаго уравненія можетъ только постояннымъ множителемъ отличаться отъ результанта частныхъ производныхъ его лѣвой части.

458. Разсмотримъ, напримѣръ, уравненіе третьей степени

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0.$$

Полагая

$$f(x, y) = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$

имѣемъ

$$\tfrac{1}{3}f_x' = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2, \qquad \tfrac{1}{3}f_y' = a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2.$$

Поэтому дискриминантъ даннаго уравненія будетъ (§ 437, ср. § 102)

$$\Delta = 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2,$$

т. е.

$$\Delta = 3a_1^2a_2^2 + 6a_0a_1a_2a_3 - a_0^2a_3^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_3a_1^3.$$

Точно такъ же найдемъ дискриминантъ уравненія четвертой степени

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0,$$

равный, какъ замѣтилъ Буль (Boole),

$$\Delta = I^3 - 27J^2,$$

гдѣ I и J обозначаютъ инваріанты (§ 87)

$$I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \quad J = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2$$

биквадратичной формы $a_0x^4 + 4a_1x^3y + \cdots$. Дискриминантъ общаго уравненія n-ой степени есть функція коэффиціентовъ степени $2(n-1)$ и вѣса $n(n-1)$. Сильвестръ[1]) называетъ дискриминантомъ алгебраической формы съ ν перемѣнными результантъ ея первыхъ частныхъ производныхъ. Онъ будетъ однородною и изобарною функціею коэффиціентовъ степени $\nu(n-1)^{\nu-1}$ и вѣса $n(n-1)^{\nu-1}$ *)

---

[1]) Philosophical Magazine, 1851.

*) См. Salmon: Algèbre supérieure, стр. 144—145.

Упражненія и приложенія.

459. Одно то обстоятельство, что (§ 449) всякій полиномъ n-ой степени разлагается на n линейныхъ множителей, имѣетъ многочисленныя слѣдствія, а также важныя и разнообразныя приложенія. Мы начнемъ съ маленькаго упражненія, которое дастъ намъ полезный для будущаго результатъ. Намъ извѣстны корни полинома $x^n - 1$ (§ 394), а именно:

$$\omega^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

и теперь мы можемъ утверждать, что

$$x^n - 1 = (x-1)\,(x-\omega)\,(x-\omega^2)\,\ldots\,(x-\omega^{n-1}),$$

или, если раздѣлимъ на $x - 1$,

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = (x-\omega)\,(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1}),$$

потому, при $x = 1$,

$$n = (1-\omega)\,(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}).$$

Но

$$|1-\omega^k| = \sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n}} = 2\sin\frac{k\pi}{n};$$

слѣдовательно, сравнивая модули обѣихъ частей предыдущаго уравненія, получимъ

$$n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Если мы теперь раздѣлимъ четверть окружности круга на n частей, равныхъ $h\left(h = \frac{\pi}{2n}\right)$, то сейчасъ найдемъ и произведеніе синусовъ угловъ $h,\ 2h,\ \ldots\ (n-1)h$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ сумма угловъ rh и $(n-r)h$ равна $\frac{\pi}{2}$, разсматриваемое произведеніе можно написать въ двухъ видахъ

$$\sin h\sin 2h\sin 3h\ldots\sin(n-1)h, \quad \cos h\cos 2h\cos 3h\ldots\cos(n-1)h.$$

Отсюда слѣдуетъ, что его квадратъ, умноженный по 2^{n-1}, равенъ

$$\sin 2h\sin 4h\ldots\sin(2n-2)h = \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Поэтому [1])

$$\sin h\sin 2h\sin 3h\ldots\sin(n-1)h = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

---

[1]) Въ „Lehrbuch der Algebra“ von H. Weber (Band I, S. 424 и слѣд.) можно найти другія интересныя формулы, аналогичныя выведеннымъ.

460. Всякую раціональную функцію отъ x можно представить въ видѣ частнаго отъ дѣленія одной цѣлой функціи $f(x)$ на другую цѣлую $g(x)$, при чемъ f и g можно считать взаимно простыми. Если представимъ себѣ еще, что цѣлая часть этого частнаго заранѣе выдѣлена, то можно считать, что степень f ниже степени g. Если извѣстны корни функціи $g(x)$, то весьма важно умѣть разложить раціональную дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ на слагаемыя простыя дроби, т. е. такія, чтобы каждаяизъ нихъ обращалась въ безконечность только при одномъ изъ корней функціи $g(x)$. Предполагая сначала, что всѣ n корней $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ функціи $g(x)$ простые, положимъ, что $g(x)$ представлено въ формѣ (8). Такъ какъ, по предположенію, ни $f(x)$, ни $g'(x)$ съ $g(x)$ общихъ корней не имѣютъ, то существуютъ числа

$$a=\frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)},\quad b=\frac{f(\beta)}{g'(\beta)},\ldots,\quad l=\frac{f(\lambda)}{g'(\lambda)}$$

и ни одно изъ нихъ не равно нулю. Замѣтимъ теперь, что функція

$$a(x-\beta)(x-\gamma)\ldots+b(x-\alpha)(x-\gamma)\ldots+\ldots+l(x-\alpha)(x-\beta)\ldots$$

при $x=\alpha$ обращается въ

$$a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots=ag'(\alpha)=f(\alpha),$$

при $x=\beta$ — въ $f(\beta)$ и т. д., такъ что при n различныхъ значеніяхъ x она принимаетъ значенія, одинаковыя съ $f(x)$. Но такъ какъ ея степень, какъ и степень $f(x)$, меньше n, то она не можетъ отличаться отъ $f(x)$, иначе разность между нею и $f(x)$ имѣли бы больше корней, чѣмъ единицъ въ показателѣ ея степени. Слѣдовательно,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}+\cdots+\frac{l}{x-\lambda}. \tag{13}$$

Переходимъ къ общему случаю, когда $g(x)=(x-\alpha)^r(x-\beta)^s(x-\gamma)^t\ldots$, такъ что $g(x)=(x-\alpha)^r\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(\alpha)\neq 0$. Каково бы ни было a_r, имѣемъ тождество

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}+\frac{f(x)-a_r\varphi(x)}{(x-\alpha)^r\varphi(x)}.$$

Число a_r можно опредѣлить такъ, чтобы $f(x)-a_r\varphi(x)$ дѣлилось на $x-\alpha$, для чего необходимо $f(\alpha)-a_r\varphi(\alpha)=0$, т. е

$$a_r=\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=r!\,\frac{f(\alpha)}{g^{(r)}(\alpha)}\neq 0.$$

Обозначая теперь черезъ f_1 и g_1 частныя отъ дѣленія $f-a_r\varphi$ и g на $x-\alpha$, получаемъ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

и сводимъ дѣло къ разложенію $\frac{f_1}{g_1}$. Эта дробь проще данной въ томъ отношеніи, что α будетъ корнемъ знаменателя кратности $r-1$. Представляя

себѣ повторенными предыдущія соображенія, можемъ прямо написать

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{a_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

гдѣ

$$a_{r-1} = \frac{f_1(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{f'(\alpha) - a_r\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{r!}{g^{(r)}(\alpha)}\left(f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{r+1}\cdot\frac{g^{(r+1)}(\alpha)}{g^{(r)}(\alpha)}\right).$$

Продолжая такимъ же образомъ, дойдемъ до

$$\frac{f_{r-1}(x)}{g_{r-1}(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{f_r(x)}{g_r(x)},$$

гдѣ $g_r(x)$ или $\varphi(x)$ уже не имѣетъ корня α. Переходя къ разсмотрѣнію корня β, а потомъ по очереди и всѣхъ другихъ, видимъ, что окончательно придемъ къ формулѣ

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_1}{x-\alpha} + \dfrac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \dfrac{a_r}{(x-\alpha)^r} \\ \quad + \dfrac{b_1}{x-\beta} + \dfrac{b_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \dfrac{b_s}{(x-\beta)^s} + \cdots, \end{array}\right.$$

которая, при $r = s = t = \cdots = 1$ приводится къ (13). Коэффиціенты здѣсь имѣютъ болѣе сложныя выраженія, которыя мы вскорѣ найдемъ. На практикѣ этими выраженіями, впрочемъ, рѣдко пользуются, предпочитая прибѣгнуть къ методѣ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, послѣ того какъ возможность представить данную дробь въ видѣ (14) установлена.

461. Обыкновенно коэффиціенты данной дроби числа вещественныя, и по соображеніямъ, которыхъ значеніе мы впослѣдствіи увидимъ, желательно разложить ее на простыя дроби съ коэффиціентами также вещественными. Съ этой цѣлью линейные множители функціи $g(x)$, соотвѣтствующіе сопряженнымъ мнимымъ корнямъ α и $\overline{\alpha}$, соединяютъ въ произведеніе вида x^2+px+q (§ 450, d), гдѣ p и q—числа вещественныя. Такъ какъ числа, получаемыя при подстановкѣ въ $\frac{f}{g'}$ сперва α, а затѣмъ $\overline{\alpha}$, будутъ сопряженными (§ 447), то корни α и $\overline{\alpha}$ дадутъ въ формулѣ (13) членъ

$$\frac{m}{x-\alpha} + \frac{\overline{m}}{x-\overline{\alpha}} = \frac{ax+b}{x^2+px+q},$$

гдѣ a и b числа вещественныя, потому что $a = m + \overline{m}$, $b = -(m\overline{\alpha} + \overline{m}\alpha)$. Переходя къ случаю кратныхъ корней, полагаемъ $g(x) = (x^2+px+q)^r\varphi(x)$ и замѣчаемъ, что въ тождествѣ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^r} + \frac{f(x) - (ax+b)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^r\varphi(x)}$$

числа a и b можно опредѣлить такъ, чтобы $f-(ax+b)\varphi$ дѣлилось на x^2+px+q. Для этого достаточно вычислить число $m = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}$ и положить $a\alpha + b = m$, $a\overline{\alpha} + b = \overline{m}$, откуда для a и b получатся вещественныя зна-

ченія. Продолжая идти тѣмъ же путемъ, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, увидимъ, что каждая пара мнимыхъ сопряженныхъ корней кратности r дастъ въ разложеніи $\frac{f}{g}$ на простыя дроби сумму членовъ слѣдующаго вида:

$$\frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q}+\frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{a_rx+b_r}{(x^2+px+q)^r}.$$

462. Возвратимся къ вопросу § 460 и разберемъ его иначе съ цѣлью получить общія выраженія коэффиціентовъ разложенія. Положимъ, что g имѣетъ ν различныхъ корней $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ кратностей $r, s, t, \ldots, k$ соотвѣтственно, такъ что

$$g(x)=(x-\alpha)^r(x-\beta)^s(x-\gamma)^t\ldots(x-\lambda)^k.$$

Положимъ для сокращенія

$$g_1(x)=(x-\beta)^s(x-\gamma)^t\ldots(x-\lambda)^k,\quad g_2(x)=(x-\gamma)^t\ldots(x-\lambda)^k,\ldots,$$
$$g_{\nu-1}(x)=(x-\lambda)^k.$$

Такъ какъ g_1 не обращается въ нуль при $x=\alpha$, то можно, при дѣленіи f на g_1, расположить частное по восходящимъ степенямъ $x-\alpha$. Такъ какъ f степени ниже n, а g_1 степени $n-r$, то получимъ r членовъ упомянутаго разложенія, т. е., имѣя

$$(15)\qquad \begin{cases}\dfrac{f(x)}{g_1(x)}=a_r+a_{r-1}(x-\alpha)+a_{r-2}(x-\alpha)^2+\cdots\\ \qquad\qquad +a_1(x-\alpha)^{r-1}+(x-\alpha)^r\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)},\end{cases}$$

замѣчаемъ, что f_1 будетъ степени ниже $n-r$. Точно такъ же, раздѣляя f_1 на g_2, степень котораго равна $n-r-s$, и выписавъ s членовъ, получимъ

$$(16)\qquad \begin{cases}\dfrac{f_1(x)}{g_2(x)}=b_s+b_{s-1}(x-\beta)+b_{s-2}(x-\beta)^2+\cdots\\ \qquad\qquad +b_1(x-\beta)^{s-1}+(x-\beta)^s\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)},\end{cases}$$

гдѣ f_2 будетъ степени ниже $n-r-s$. Продолжая такимъ образомъ, дойдемъ до функціи $f_{\nu-1}$ степени не выше $k-1$, и можно будетъ написать

$$f_{\nu-1}(x)=l_k+l_{k-1}(x-\lambda)+l_{k-2}(x-\lambda)^2+\cdots+l_1(x-\lambda)^{k-1}.$$

Теперь дѣлимъ (15) на $(x-\alpha)^r$, затѣмъ (16) на $(x-\beta)^s$ и т. д., наконецъ, послѣднее уравненіе на $(x-\lambda)^k$. Суммируя, мы снова получимъ формулу (14). Кромѣ того, изъ самаго процесса, посредствомъ котораго мы установили равенство (15), вытекаетъ, что $a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots$ будутъ первые r коэффиціентовъ въ разложеніи функціи

$$\frac{f(x)}{g_1(x)}=(x-\alpha)^r\frac{f(x)}{g(x)}$$

по восходящимъ степенямъ $(x-\alpha)$. Но мы имѣемъ

$$g(x)=(x-\alpha)^r\frac{g^{(r)}(\alpha)}{r!}+(x-\alpha)^{r+1}\frac{g^{(r+1)}(\alpha)}{(r+1)!}+(x-\alpha)^{r+2}\frac{g^{(r+2)}(\alpha)}{(r+2)!}+\cdots,$$

и умноженіе рядовъ

$$a_r + a_{r-1}(x-a) + a_{r-2}(x-a)^2 + \cdots, \quad \frac{g^{(r)}(a)}{r!} + (x-a)\frac{g^{(r+1)}(a}{(r+1)!} + \cdots$$

должно дать рядъ

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{1\cdot 2} + \cdots.$$

Отождествляя произведеніе первыхъ двухъ съ послѣднимъ, найдемъ

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&f(a) = a_r\frac{g^{(r)}(a)}{r!}\\
&\frac{f'(a)}{1} = a_{r-1}\frac{g^{(r)}(a)}{r!} + a_r\frac{g^{(r+1)}(a)}{(r+1)!}\\
&\frac{f''(a)}{1\cdot 2} = a_{r-2}\frac{g^{(r)}(a)}{r!} + a_{r-1}\frac{g^{(r+1)}(a)}{(r+1)!} + a_r\frac{g^{(r+2)}(a)}{(r+2)!}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!} = a_1\frac{g^{(r)}(a)}{r!} + a_2\frac{g^{(r+1)}(a)}{(r+1)!} + \cdots + a_r\frac{g^{(2r-1)}(a)}{(2r-1)!}.
\end{aligned}\right.$$

Изъ этой системы линейныхъ уравненій мы и найдемъ послѣдовательно коэффиціенты a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, ..., изъ аналогичной системы, относящейся къ корню β. найдемъ коэффиціенты b_s, b_{s-1}, ... Дѣйствительно, эти числа будутъ первыми s коэффиціентами въ разложеніи функціи

$$\frac{f_1(x)}{g_2(x)} = (x-\beta)^s\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = (x-\beta)^s\frac{f(x)}{g(x)} = (x-\beta)^s h(x)$$

по восходящимъ степенямъ $x-\beta$ При этомъ $h(x)$ обозначаетъ раціональную функцію, остающуюся конечною при $x=\beta$ и, слѣдовательно, разлагающуюся по восходящимъ степенямъ $x-\beta$. Но такъ какъ въ разложеніи $(x-\beta)^s h(x)$ являются лишь степени $x-a$ съ показателями, не меньшими s, то b_s, b_{s-1}, ... будутъ также первыми s коэффиціентами въ разложеніи $(x-\beta)^s\frac{f(x)}{g(x)}$, и потому будутъ удовлетворять системѣ уравненій, которая отличается отъ (17) только тѣмъ, что на мѣсто a поставлено β, а на мѣсто r поставлено s. Все сказанное относится и къ остальнымъ коэффиціентамъ c_t, c_{t-1} ... и т. д. Къ формулѣ, болѣе общей, чѣмъ (14), придемъ, исходя изъ какого нибудь разложенія $g(x)$ на множители, взаимно простые одинъ относительно другого попарно,

$$g(x) = \varphi^r(x)\chi^s(x)\psi^t(x)\ldots$$

Тогда найдемъ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum\left[\frac{a_1(x)}{\varphi(x)} + \frac{a_2(x)}{\varphi_2(x)} + \cdots + \frac{a_r(x)}{\varphi^r(x)}\right],$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ множители $\varphi, \chi, \psi, \ldots$, и a_i, b_i, c_i, ... будутъ прилично выбранныя цѣлыя функціи, степеней соотвѣтственно низшихъ, чѣмъ φ, χ, ψ, ... (См. прим. IV.) Изъ этой формулы въ частности

слѣдуетъ, если припомнимъ заключительное замѣчаніе § 450, то разложеніе на дроби съ линейными и квадратными знаменателями, и съ вещественными коэффиціентами, которое мы дали въ предыдущемъ параграфѣ.

463. Другое полезное приложеніе формулы (8) состоитъ въ разложеніи $\sin x$ и $\cos x$ въ безконечныя произведенія. Мы будемъ исходить изъ доказанной въ § 393 формулы:

$$\sin m\theta = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \cdots.$$

Пусть m равно нечетному числу $2n+1$; положимъ $m\theta = x$, $\sin^2\theta = z$. Тогда предыдущую формулу можно написать такъ:

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\dfrac{x}{2n+1}} = (1-z)^n - \frac{2n(2n-1)}{6}z(1-z)^{n-1} + \cdots.$$

Правая часть есть цѣлая функція отъ z степени n; независимый членъ, какъ легко видѣть, равенъ 1. Поэтому, разлагая эту функцію на линейные множители, можемъ написать:

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\dfrac{x}{2n+1}} = \left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ получимъ, опредѣливъ тѣ значенія x, которые обращаютъ въ нуль числителя $\sin x$, отбрасывая значеніе $x=0$, которое обращаетъ въ нуль и знаменателя лѣвой части. При $x = \pi, 2\pi, \ldots, n\pi$, получимъ корни

$$\alpha_1 = \sin^2\frac{\pi}{2n+1},\quad \alpha_2 = \sin^2\frac{2\pi}{2n+1},\quad \ldots,\quad \alpha_n = \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

Поэтому будемъ имѣть

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\dfrac{x}{2n+1}} = \left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}\right). \tag{18}$$

Выбравъ опредѣленное значеніе x, обозначимъ черезъ ν наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\left|\dfrac{x}{\pi}\right|$, и пусть $n > \nu$. Множители, слѣдующіе за ν-тымъ въ произведеніи (18), всѣ заключаются между 0 и 1, произведеніе ихъ меньше 1, но больше (§ 155), чѣмъ

$$1-\left(\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{(\nu+1)\pi}{2n+1}} + \frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{(\nu+2)\pi}{2n+1}} + \cdots + \frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}\right). \tag{19}$$

Теперь замѣтимъ слѣдующее: когда ϑ измѣняется по абсолютной величинѣ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, какъ это и имѣетъ мѣсто для всѣхъ дугъ, входящихъ въ разсматриваемое нами выраженіе, то $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ убываетъ отъ 1 до $\frac{2}{\pi}$, такъ что

$$\frac{4\vartheta^2}{\pi^2} < \sin^2\vartheta < \vartheta^2.$$

Поэтому число, стоящее въ скобкахъ формулы (19), навѣрно меньше, чѣмъ

$$\frac{x^2}{4}\sum_{\nu+1}^{n}\frac{1}{r^2} < \frac{x^2}{4}\sum_{\nu+1}^{\infty}\frac{1}{r(r-1)} = \frac{x^2}{4\nu},$$

а слѣдовательно, выраженіе (19) заключается между 1 и $1-\frac{x^2}{4\nu}$ и можетъ быть представлено въ видѣ $1-\frac{tx^2}{4\nu}$, гдѣ t—число, измѣняющееся вмѣстѣ съ x, n и ν, но всегда лежащее между 0 и 1. Теперь мы можемъ написать правую часть формулы (18) въ видѣ

$$\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\nu\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{tx^2}{4\nu}\right).$$

Установивъ это, фиксируемъ ν и увеличиваемъ n до безконечности. Очевидно, будемъ имѣть

$$\lim(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} = x, \quad \lim\frac{\sin\frac{x}{2n+1}}{\sin\frac{r\pi}{2n+1}} = \frac{x}{r\pi}$$

при всякомъ значеніи r. Что касается послѣдняго множителя $1-\frac{tx^2}{4\nu}$, въ которомъ измѣняется одно t, то онъ долженъ стремиться къ опредѣленному предѣлу, потому что $1-\frac{tx^2}{4\nu}$ равно отношенію нѣкотораго числа, стремящагося къ предѣлу $\frac{\sin x}{x}$, къ другому числу (произведенію всѣхъ другихъ множителей правой части формулы (18)), стремящемуся къ предѣлу, не равному нулю. Поэтому и t стремится къ нѣкоторому предѣлу, очевидно, лежащему между 0 и 1. Итакъ,

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\vartheta x^2}{4\nu}\right).$$

Если, наконецъ, будемъ и ν увеличивать безпредѣльно, то получимъ

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots. \tag{20}$$

Аналогичныя соображенія могли бы дать и разложеніе $\cos x$; но его можно

получить проще, замѣчая, что

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x},$$

и пользуясь полученнымъ результатомъ (20). Такимъ образомъ найдемъ

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots. \tag{21}$$

Обѣ формулы принадлежатъ Эйлеру.

464. Въ заключеніе укажемъ нѣкоторыя изъ важнѣйшихъ приложеній послѣднихъ формулъ.

a) При $x = \frac{\pi}{2}$, формула (20) даетъ

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{64}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right)\cdots.$$

Общій членъ этого произведенія можно написать такъ:

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdots.$$

Это формула Валлиса (Wallis).

b) Раньше (§ 221) мы нашли

$$n! = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}. \tag{22}$$

Формула Валлиса позволяетъ теперь найти постоянную a. Дѣйствительно, мы можемъ написать

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right)^2.$$

Съ другой стороны, съ помощью формулы (22) выводимъ

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = a \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta - \theta'}{24n}}$$

гдѣ θ и θ' лежатъ между 0 и 1. Слѣдовательно,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n=\infty} \frac{a}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta - \theta'}{24n}} = \frac{a}{2}$$

и наконецъ, $a = \sqrt{2\pi}$.

c) Взявъ сперва логариѳмы отъ обѣхъ частей равенства (20), а потомъ производныя, получимъ

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{2x}{\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} + \cdots\right). \tag{23}$$

Это разложеніе законно, потому что рядъ въ скобкахъ равномѣрно сходящійся (§ 323, § 319, a). Замѣтимъ, что, вслѣдствіе равенства

$$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{n\pi - x} - \frac{1}{n\pi + x},$$

можно писать

$$\cot x = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{x - n\pi}.$$

Такимъ образомъ, обнаружены тѣ значенія x, которыя обращаютъ $\operatorname{cotg} x$ въ безконечность, подобно тому какъ формулы (20) и (21) обнаруживаютъ тѣ значенія x, при которыхъ $\sin x$ и $\cos x$ обращаются въ нуль.

d) Формула (23) имѣетъ важное приложеніе. Она даетъ возможность вычислить суммы

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

для всякаго четнаго p. Дѣйствительно, изъ (23) выводимъ

$$x\cot x = 1 - \sum_{1}^{\infty}{}' \frac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2} = 1 - \sum_{1}^{\infty}{}' \left(\frac{2x^2}{n^2\pi^2} + \frac{2x^4}{n^4\pi^4} + \frac{2x^6}{n^6\pi^6} + \cdots\right),$$

или

$$x\cot x = 1 - \left(\frac{s_2 x^2}{\pi^2} + \frac{s_4 x^4}{\pi^4} + \frac{s_6 x^6}{\pi^6} + \cdots\right). \quad \text{(V.)}$$

Съ другой стороны, извѣстно, что (§ 353)

$$x\cot x = 1 - \left(\frac{4B_2 x^2}{2!} - \frac{4^2 B_4 x^4}{4!} + \frac{4^3 B_6 x^6}{6!} - \cdots\right).$$

А изъ сравненія двухъ разложеній *) получаемъ

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \cdots = \frac{(-1)^{p-1} 2^{2p-1} B_{2p} \pi^{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2p},$$

что раньше (§ 365, a) было найдено инымъ путемъ.

e) Къ свойствомъ функціи $\Gamma(x)$, доказаннымъ въ § 252, мы можемъ теперь присоединить еще одно новое, въ высшей степени важное. Формула Вейерштрасса даетъ непосредственно

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x)} = \prod_{1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

*) На основаніи теоремы о тождествѣ степенныхъ рядовъ, доказанной на стр. 351.

откуда

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Въ частности, $\Gamma^2(\frac{1}{2})=\pi$, отсюда

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}.$$

Симметрическія функціи и функціи, имѣющія нѣсколько значеній.

465. Симметрическія функціи. Функція отъ n перемѣнныхъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется симметрическою, если она не мѣняетъ своей формы ни при какомъ перемѣщеніи перемѣнныхъ. Такъ, напримѣръ, симметрическими функціями будутъ суммы c_p всевозможныхъ произведеній по p множителей въ каждомъ, т. е.

$$c_1=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad c_2=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+\cdots,\quad \cdots,\quad c_n=a_1a_2\cdots a_n.$$

Эти суммы называются элементарными симметрическими функціями. Если положимъ, что всегда возможно,

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

то, раскрывая правую часть и отождествляя съ лѣвою, получимъ соотношенія

$$c_1=-\frac{a_1}{a_0},\quad c_2=\frac{a_2}{a_0},\quad c_3=-\frac{a_3}{a_0},\quad \cdots,\quad c_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0},$$

которыя надо запомнить. Въ частности, надо помнить, что въ каждомъ алгебраическомъ уравненіи сумма корней равна коэффиціенту при второмъ членѣ, раздѣленному на коэффиціентъ при первомъ, взятому съ обратнымъ знакомъ. (Предполагая, конечно, что члены расположены по порядку убыванія степеней.) Затѣмъ, важно замѣтить симметрическія функціи

$$s_p=a_1^p+a_2^p+a_3^p+\cdots+a_n^p,$$

частные случаи функціи

$$\sum a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3}\ldots a_\nu^{p_\nu}, \tag{24}$$

которую получимъ, если подъ знакомъ суммы переставимъ перемѣнныя всѣми возможными способами. Ясно, что комбинируя линейно различныя функціи вида (24), получимъ всѣ цѣлыя симметрическія функціи, какія вообще могутъ существовать.

466. Формулы Жирара (Girard). Взявъ производную отъ цѣлой функціи $f(x)$, разложенной предварительно на линейные множители, получимъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a}.$$

При $|x| > |a|$ имѣемъ

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \cdots.$$

Поэтому, при модулѣ x, большемъ модулей всѣхъ корней уравненія $f(x) = 0$, найдемъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots,$$

а отсюда получается тождество

$$\left(1 - \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \cdots\right)\left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \cdots\right)$$
$$= n - (n-1)\frac{c_1}{x} + (n-2)\frac{c_2}{x^2} - \cdots. \quad \text{(VI.)}$$

Ряды здѣсь можно продолжить до безконечности, условившись считать $c_p = 0$ при $p > n$. Сравнивая коэффиціенты при x^{-p}, получимъ

$$(n-p)\,c_p = s_0 c_p - s_1 c_{p-1} + s_2 c_{p-2} - \cdots \pm s_p$$

или

$$p\,c_p = s_1 c_{p-1} - s_2 c_{p-2} + s_3 c_{p-3} - \cdots \mp s_p.$$

Это есть формула Жирара [1]), позволяющая послѣдовательно выразить числа s и числа c, одни черезъ другія, въ видѣ раціональныхъ функцій. При этомъ найдемъ соотношенія (VI bis):

$$s_2 = c_1^2 - 2c_2, \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}(s_1^2 - s_2)$$
$$s_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3, \qquad c_3 = \tfrac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3),$$
$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4, \quad c_4 = \tfrac{1}{24}(s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4)$$
. . . . . .

467. Формулы Варинга. Къ тѣмъ же соотношеніямъ можно прямо придти, исходя изъ тождества:

$$\left(1 - \frac{a_1}{x}\right)\left(1 - \frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_n}{x}\right) = 1 - \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \cdots \pm \frac{c_n}{x^n}.$$

Полагая для кратности

$$u = \frac{c_1}{x} - \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} - \cdots, \quad v = \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{2x^2} + \frac{s_3}{3x^3} + \cdots,$$

---

[1]) Остроумное и наглядное доказательство ея можно найти у Lucas „Théorie des nombres“ p. 268.

получимъ изъ упомянутаго тождества, логариѳмируя и пользуясь извѣстными разложеніями въ рядъ (предполагая $|x|>|a_\nu|$, $\nu=1,\ldots,n$; § 332, a, c), слѣдующее равенство

$$v=-\log(1-u)=u+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^3+\cdots \tag{25}$$

При этомъ, конечно, предполагается, что $|x|$ достаточно велика, чтобы $|u|$ была <1, что всегда возможно, потому что u стремится къ нулю, когда $|x|$ возрастаетъ безпредѣльно. Обратно, имѣемъ

$$u=1-e^{-v}=\frac{v}{1}-\frac{v^2}{1\cdot 2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots. \tag{26}$$

Обозначимъ теперь черезъ

$$\sum_p^r \varepsilon_i$$

сумму всѣхъ произведеній $\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\ldots\varepsilon_{i_r}$, въ которыхъ положительныя цѣлыя числа $i_1, i_2, \ldots, i_r$, равныя или неравныя между собою, имѣютъ сумму, равную p. Иными словами, положимъ

$$\sum_p^1 \varepsilon_i=\varepsilon_p,\quad \sum_p^2 \varepsilon_i=\varepsilon_1\varepsilon_{p-1}+\varepsilon_2\varepsilon_{p-2}+\cdots+\varepsilon_{p-1}\varepsilon_1,\ \ldots,\quad \sum_p^p \varepsilon_i=\varepsilon_1{}^p.$$

Теперь стоитъ только сравнить коэффиціенты при x^{-p} въ обѣихъ частяхъ равенства (25) и (26), чтобы получить формулы Варинга:

$$s_p=p\sum_{r=1}^{r=p}\left(\frac{(-1)^{p-r}}{r}\sum_p^r c_i\right),\quad c_p=\sum_{r=1}^{r=p}\left(\frac{(-1)^{p-r}}{r!}\sum_p^r\frac{s_i}{i}\right) \tag{VII.}$$

468. Теорема. Всякая цѣлая симметрическая функція есть цѣлая раціональная функція отъ элементарныхъ симметрическихъ функцій.

Эта важная теорема уже доказана для функцій $s_1, s_2, s_3, \ldots$, т. е. для функцій типа (24) при $\nu=1$. Остается показать, что она будетъ справедлива для даннаго ν, если допустимъ ея справедливость для всѣхъ меньшихъ значеній ν. Если въ выраженіи (24) выполнимъ одно суммированіе, то выраженіе это можно будетъ написать такъ:

$$\begin{aligned}&\sum a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_{\nu-1}^{p_{\nu-1}}\left(s_{p_\nu}-a_1^{p_\nu}-a_2^{p_\nu}-\cdots-a_{\nu-1}^{p_\nu}\right)\\&=\sum a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_{\nu-1}^{p_{\nu-1}}\cdot\sum a_1^{p_\nu}-\sum a_1^{p_1+p_\nu}a_2^{p_2}\ldots a_{\nu-1}^{p_{\nu-1}}\\&-\sum a_1^{p_1}a_2^{p_2+p_\nu}\ldots a_{\nu-1}^{p_{\nu-1}}-\cdots-\sum a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_{\nu-1}^{p_{\nu-1}+p_\nu}.\end{aligned}$$

Функціи, стоящія въ правой части, будутъ также типа (24) съ тою лишь разницею, что въ нихъ ν замѣнено черезъ $\nu-1$ или 1. По

условію всѣ онѣ выражаются цѣлыми раціональными функціями отъ элементарныхъ симметрическихъ функцій. Слѣдовательно, то же самое можно утверждать и о лѣвой части. Сдѣланное преобразованіе предполагаетъ, собственно говоря, что всѣ числа p различны, но если два или нѣсколько показателей будутъ между собою равны, то получаемыя при этомъ приведенія, теоремы не нарушаютъ.

469. Приведемъ нѣкоторые примѣры. Функція (24) при $\nu = 2$ равна

$$\sum' a_1^{p_1}(a_2^{p_2} + a_3^{p_2} + \cdots + a_n^{p_2}) = \sum' a_1^{p_1}(s_{p_2} - a_1^{p_2}).$$

Слѣдовательно,

$$\sum' a_1^{p_1} a_2^{p_2} = s_{p_1} s_{p_2} - s_{p_1+p_2}; \tag{27}$$

если, однако, $p_1 = p_2 = p$, то каждый членъ былъ два раза сосчитанъ въ сдѣланномъ преобразованіи, а потому, то, во что обратится выраженіе (27) въ данномъ случаѣ, равно половинѣ предыдущаго результата:

$$\sum' a_1^{p} a_2^{p} = \tfrac{1}{2}(s_2^{p} - s_{2p}).$$

Точно такъ же имѣемъ

$$\sum' a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} = \sum' a_1^{p_1} a_2^{p_2}(s_{p_3} - a_1^{p_3} - a_2^{p_3}).$$

Пользуясь формулою (27), можно послѣднее выраженіе написать такъ:

$$s_{p_3}(s_{p_1} s_{p_2} - s_{p_1+p_2}) - (s_{p_1+p_3} s_{p_2} - s_{p_1+p_2+p_3}) - (s_{p_1} s_{p_2+p_3} - s_{p_1+p_2+p_3}).$$

Слѣдовательно, получимъ

$$\sum' a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} = s_{p_1} s_{p_2} s_{p_3} - (s_{p_1} s_{p_2+p_3} + s_{p_2} s_{p_3+p_1} + s_{p_3} s_{p_1+p_2}) + 2 s_{p_1+p_2+p_3}. \tag{28}$$

При $p_1 = p_2 = p_3 = p$ будемъ имѣть

$$\sum' a_1^{p} a_2^{p} a_3^{p} = \tfrac{1}{6}(s_p^{3} - 3 s_p s_{2p} + 2 s_{3p}).$$

470. Въ практическихъ вычисленіяхъ удобнѣе не дѣлать обхода черезъ функціи s, и этого можно достигнуть, руководясь разсмотрѣніемъ вѣса и степени вычисляемой функціи. Въ выраженіе функціи (24) черезъ числа c не могутъ входить члены, въ которыхъ число множителей больше p, если p наибольшій показатель чиселъ a въ (24), потому что всякое c первой степени относительно каждаго a. Съ другой стороны, степень каждаго c относительно всѣхъ перемѣнныхъ a какъ разъ равна указателю этого c. Поэтому вѣсъ искомаго выраженія равенъ числу всѣхъ равныхъ или

неравныхъ множителей a, входящихъ въ выраженіе (24), т. е. числу $p_1 + p_2 + \cdots + p_\nu$. Положимъ, напримѣръ, что требуется выразить

$$\sum a_1 a_2^2 a_3^3$$

черезъ элементарныя симметрическія функціи. Формула (28) даетъ тотчасъ

$$\sum a_1 a_2^2 a_3^3 = s_1 s_2 s_3 - (s_1 s_5 + s_2 s_4 + s_3^2) + 2 s_6.$$

Теперь надо было бы выразить всѣ s черезъ c, но выкладка была бы очень длинна, и результатъ трудно было бы провѣрить. Между тѣмъ послѣднія замѣчанія позволяютъ прямо написать

$$\sum a_1 a_2^2 a_3^3 = k_0 c_6 + k_1 c_1 c_5 + k_2 c_2 c_4 + k_3 c_3^2 + k_4 c_1^2 c_4 + k_5 c_2^3 + k_6 c_1 c_2 c_3.$$

Численные коэффиціенты $k_0, k_1, \ldots, k_6$ опредѣляютъ, написавъ предыдущее равенство семь разъ для произвольно выбранныхъ частныхъ случаевъ. Такимъ образомъ, получается вообще система линейныхъ уравненій, которая и даетъ значенія k. Въ данномъ примѣрѣ найдемъ [1])

$$\sum a_1 a_2^2 a_3^3 = -12 c_6 + 7 c_1 c_5 + 4 c_2 c_4 - 3 c_3^2 - 3 c_1^2 c_4 + c_1 c_2 c_3. \quad \text{(VIII.)}$$

471. Вычисленіе дискриминанта. Большой интересъ представляетъ симметрическая функція

$$\Delta = (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2 \ldots (a_{n-1} - a_n)^2,$$

которую называютъ дискриминантомъ (§ 33, b) чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обращеніе дискриминанта въ нуль есть, очевидно, необходимое и достаточное условіе равенства двухъ или нѣсколькихъ чиселъ a. Отсюда ясно (§ 457), что дискриминантъ алгебраическаго уравненія можетъ отличаться отъ дискриминанта его корней только постояннымъ множителемъ. Такимъ образомъ, мы получаемъ новую методу для вычисленія дискриминанта даннаго уравненія. Дискриминантъ уравненія третьей степени

$$x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0,$$

напримѣръ, равенъ

$$\Delta = (a_2 - a_3)^2 (a_3 - a_1)^2 (a_1 - a_2)^2,$$

---

[1]) Существуютъ таблицы симметрическихъ функцій до 13-й степени (относительно a) включительно, въ которыхъ эти функціи выражены въ элементарныхъ c. См. Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transform., 2-ое изд. стр. 444. Въ нѣмецкомъ изданіи Fiedler'а таблицы приведены только до 6-ой степени. До 10-й степени эти таблицы имѣются и во французскомъ переводѣ O. Chemin'a (стр. 504), цитированномъ выше.

гдѣ a_1, a_2, a_3 — корни этого уравненія. Чтобы выразить его черезъ числа c, примѣнимъ методу, указанную въ предыдущемъ параграфѣ. Примемъ во вниманіе, что каждое изъ a входитъ въ разложеніе Δ въ четвертой степени, что каждый членъ этого разложенія заключаетъ въ себѣ шесть множителей (равныхъ или неравныхъ), и наконецъ, что $c_p = 0$ при $p > 3$. Поэтому намъ надо прежде всего найти всѣ разложенія числа 6 на четыре цѣлыхъ слагаемыхъ, заключающихся между 0 и 3, включая границы. Эти разложенія будутъ:

$$0+0+3+3, \quad 1+1+2+2, \quad 0+2+2+2, \quad 1+1+1+3,$$
$$0+1+2+3.$$

Теперь мы уже можемъ положить

$$\Delta = k_0 c_3^2 + k_1 c_1^2 c_2^2 + k_2 c_2^3 + k_3 c_1^3 c_3 + k_4 c_1 c_2 c_3,$$

Для опредѣленія коэффиціентовъ k будемъ давать числамъ a различныя частныя значенія. Прежде всего замѣтимъ, что при $a_3 = 0$ вышеприведенное уравненіе переходитъ въ слѣдующее (§ 465)

$$(a_1 - a_2)^2 = k_1 (a_1 + a_2)^2 + k_2 a_1 a_2,$$

откуда видно, что $k_1 = 1$, $k_2 = -4$. Примемъ теперь за a кубическіе корни изъ 1 и замѣтимъ, что $\omega^2 - 1 = \omega(\omega - \omega^2)$, $1 - \omega = \omega^2(\omega - \omega^2)$; тогда найдемъ $\Delta = (\omega - \omega^2)^6 = (\sqrt{-3})^6 = -27$. Съ другой стороны, $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$; слѣдовательно, $\Delta = k_0$. Итакъ, $k_0 = -27$. Положимъ, далѣе, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$, при чемъ находимъ $c_1 = 3$, $c_2 = 0$, $c_3 = -4$; тогда получимъ $4k_0 = 27k_3$, откуда $k_3 = -4$. Положимъ, наконецъ, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, при чемъ получимъ $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = -1$, тогда найдемъ $k_0 + k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 0$, и $k_4 = 18$. Слѣдовательно, (ср. § 458)

$$\Delta = -27c_3^2 + c_1^2 c_2^2 - 4c_2^3 - 4c_1^3 c_3 + 18 c_1 c_2 c_3. \tag{29}$$

Можно замѣтить, что дискриминантъ уравненія n-ой степени всегда содержитъ въ себѣ членъ $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n c_n^{n-1}$ (IX). Наконецъ, не мѣшаетъ напомнить (§ 33, b), что Δ выражается въ суммахъ s въ видѣ квадрата опредѣлителя Вандермонда. Для уравненія 3-ей степени

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = -3s_3^2 - s_2^3 + 2s_1 s_2 s_3 - s_1^2 s_4 + 3 s_2 s_4,$$

выраженіе, приводящееся къ виду (29) съ помощью формулъ, данныхъ въ концѣ § 466.

472. Теорія симметрическихъ функцій даетъ новую методу исключенія, которую теоретически можно считать наиболѣе удовлетворительною. Если f и g цѣлыя функціи отъ x; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ корни первой, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ корни второй, то необходимое и достаточное условіе для того, чтобы f обращалось въ нуль при x равномъ одному изъ корней g, состоитъ въ томъ, чтобы $f(\beta_1)\, f(\beta_2) \ldots f(\beta_m)$ было равно нулю. Но $f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_m)$ цѣлая симметрическая функція корней функціи g, и потому можетъ быть выражена цѣлою раціональною функціею отъ коэффиціентовъ данныхъ полиномовъ, откуда и получается новая метода для вычисленія результанта. Итакъ, результантъ f и g можетъ отличаться только постояннымъ множителемъ отъ каждаго изъ произведеній

$$f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_m), \quad g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n).$$

Такимъ образомъ, теорема Безу (§ 443) становится очевидною. Замѣчая, далѣе, что полиномы f и g можно написать въ видѣ

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \quad g(x) = (x - \beta_1)\,(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_m),$$

изъ предыдущаго видимъ, что результантъ равенъ

$$\prod_{i=1}^{i=n} (\alpha_i - \beta_1)\,(\alpha_i - \beta_2) \ldots (\alpha_i - \beta_m) = \prod_{i,\,j}^{n,\,m} (\alpha_i - \beta_j),$$

т. е. произведенію разностей между всѣми корнями одного полинома и корнями другого.

473. Послѣдняя метода исключенія можетъ служить для вычисленія нѣкоторыхъ опредѣлителей. Такъ напримѣръ, составленный по методѣ Эйлера результантъ функцій

$$x^n - 1, \quad f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

равенъ

$$\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_n \\ -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Складывая первые $(n-1)$ столбцовъ послѣдовательно съ каждымъ изъ $n-1$ послѣднихъ, получимъ

$$(30)\qquad \mathfrak{R} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Метода Безу дала бы послѣдній результатъ непосредственно. Съ другой стороны, тотъ же результатъ, какъ мы видѣли, равенъ $f(1)f(\omega)f(\omega^2)\dots f(\omega^{n-1})$, гдѣ $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ корни n-ой степени изъ 1. Сравненіе двухъ выраженій и дастъ значеніе циркулянта (30) (ср. § 33, c). Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\,(a+\omega b+\omega^2 c)\,(a+\omega^2 b+\omega c).$$

Выполняя умноженія и замѣчая, что $\omega+\omega^2=-1$, $\omega^3=1$, получимъ въ правой части

$$(a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

474. Функціи, имѣющія два или нѣсколько значеній. Функція отъ n перемѣнныхъ, для всякой системы значеній этихъ перемѣнныхъ, можетъ вообще принять $n!$ различныхъ значеній, т. е. столько, сколько перестановокъ можно сдѣлать изъ этихъ n перемѣнныхъ. Но понятно, что для нѣкоторыхъ спеціальныхъ функцій число этихъ значеній можетъ быть и меньше. Такъ напримѣръ, симметрическія функціи имѣютъ только одно значеніе для каждой системы значеній этихъ перемѣнныхъ, и этимъ свойствомъ, какъ легко можно показать [1]), онѣ вполнѣ характеризуются. Опредѣлитель Вандермонда (§ 27, d; § 471) или $\sqrt{\Delta}$ можетъ принимать только два значенія, потому что всякая транспозиція двухъ перемѣнныхъ мѣняетъ только его знакъ, такъ что всякая четная подстановка оставляетъ его безъ измѣненія, а всякая нечетная переводитъ его въ $-\sqrt{\Delta}$. Функціи, имѣющія, какъ $\sqrt{\Delta}$, лишь два значенія, отличающихся только знакомъ, называются знакоперемѣнными.

475. Общій видъ всѣхъ знакоперемѣнныхъ функцій есть $\varsigma\sqrt{\Delta}$, гдѣ ς симметрическая функція *). Существуетъ, по крайней мѣрѣ, одна транспозиція, которая измѣняетъ данную функцію φ въ $-\varphi$; иначе φ была бы симметрическою функціею,

---

[1]) См. Netto „Substitutionentheorie", S. 1.

*) Подразумѣвается, что функція цѣлая раціональная относительно всѣхъ перемѣнныхъ.

потому что оставалась бы неизмѣнною при всякой подстановкѣ (§ 5). Пусть эта транспозиція будетъ $(a_i a_j)$. Она ничего не измѣнитъ въ функціи φ, если $a_i = a_j$, слѣдовательно, въ этомъ предположеніи $\varphi = -\varphi$, т. е. φ равна нулю при $a_i = a_j$. Отсюда слѣдуетъ (см. выноску), что φ дѣлится на $a_i - a_j$, а φ^2 на $(a_i - a_j)^2$. Но функція φ^2, очевидно, симметрическая, а потому не можетъ заключать въ себѣ множителя $(a_j - a_j)^2$, не заключая въ то же время и всѣхъ другихъ ему аналогичныхъ. Она дѣлится, слѣдовательно, на Δ, а функція φ на $\sqrt{\Delta}$. Пусть теперь ν наивысшій показатель степени $\sqrt{\Delta}$, входящій множителемъ въ φ. Если бы ν было числомъ четнымъ, то частное отъ дѣленія φ на симметрическую функцію $(\sqrt{\Delta})^\nu$, было бы знакоперемѣнною функціею и потому содержало бы еще другіе множители, равные $\sqrt{\Delta}$, что противорѣчитъ предположенію. Слѣдовательно, ν равно нечетному числу $2k+1$ и $\dfrac{\varphi}{(\sqrt{\Delta})^\nu}$ необходимо будетъ симметрическою функцію ς' Итакъ, можно положить

$$\varphi = \varsigma' (\sqrt{\Delta})^{2k+1} = \varsigma \sqrt{\Delta},$$

гдѣ $\varsigma = \varsigma' . \Delta^k$ симметрическая функція. Замѣтимъ, наконецъ, что подстановки, не мѣняющія φ, очевидно, совпадаютъ съ тѣми, которыя не мѣняютъ $\sqrt{\Delta}$, т. е. съ четными. A priori этого мы не могли бы утверждать.

476. Общій видъ функцій, имѣющихъ два значенія, есть $\varsigma_1 \pm \varsigma_2 \sqrt{\Delta}$, гдѣ ς_1 и ς_2—симметрическія функціи. Пусть φ_1 и φ_2 будутъ два значенія разсматриваемой функціи. Всякая подстановка, произведенная надъ перемѣнными, оставляетъ φ_1 отличнымъ отъ φ_2, потому что подстановка измѣняетъ лишь обозначеніе перемѣнныхъ. Отсюда слѣдуетъ, что любая подстановка либо не мѣняетъ ни φ_1 ни φ_2, либо переводитъ одну въ другую. Слѣдовательно, $\varphi_1 + \varphi_2$ симметрическая, а $\varphi_1 - \varphi_2$ знакоперемѣнная функція. Отсюда слѣдуетъ, что можно положить

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varsigma_1, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2\varsigma_2 \sqrt{\Delta},$$

откуда

$$\varphi_1 = \varsigma_1 + \varsigma_2 \sqrt{\Delta}, \quad \varphi_2 = \varsigma_1 - \varsigma_2 \sqrt{\Delta}.$$

477. Функціи, не измѣняющіяся при любой четной подстановкѣ, или при любой круговой подстановкѣ трехъ перемѣнныхъ, не могутъ имѣть болѣе двухъ значеній. Сперва замѣчаемъ, что функція, не мѣняющаяся при любой круговой подстановкѣ трехъ перемѣнныхъ, не измѣнится и при любой четной подстановкѣ (§ 10). Если бы функція, кромѣ значеній φ_1 и φ_2, имѣла еще третье φ_3, то подстановки, измѣняющія φ_1 въ φ_2 и φ_2 въ φ_3,

были бы необходимо нечетныя, и взятыя вмѣстѣ были бы равносильны четной, а потому φ_3 не могло бы отличаться отъ φ_1. Эта теорема легко распространяется на функціи, не измѣняющія своего значенія при всякой круговой подстановкѣ опредѣленнаго нечетнаго числа перемѣнныхъ.

478. Кромѣ симметрическихъ и знакоперемѣнныхъ функцій, не существуетъ другихъ, степени которыхъ могутъ быть симметрическими функціями. Пусть φ несимметрическая функція, но такая, что нѣкоторая ея степень φ^p — симметрическая функція. Легко убѣдиться, разлагая показателя, на простые множители, что при разысканіи функцій φ можно ограничиться случаемъ p простого *). Если φ не симметрическая функція, то существуетъ, по крайней мѣрѣ, одна транспозиція, которая измѣняетъ одно изъ значеній функціи, напримѣръ, φ_1, въ нѣкоторое другое, положимъ, φ_2. Но по предположенію при любой подстановкѣ $\varphi_1^p = \varphi_2^p$, откуда $\varphi_2 = \omega\varphi_1$, гдѣ, какъ обыкновенно, ω есть корень степени p изъ 1, не равный единицѣ. Если примѣнимъ упомянутую транспозицію вторично, то предыдущее соотношеніе перейдетъ въ $\varphi_1 = \omega\varphi_2$, откуда путемъ умноженія получается $\omega^2 = 1$. Такъ какъ p по предположенію, число простое, то необходимо $p = 2$, а слѣдовательно, $\varphi_2 = -\varphi_1$, и функція будетъ знакоперемѣнною, если она не симметрическая.

479. Если число перемѣнныхъ больше 4, то единственныя функціи, нѣкоторыя степени которыхъ имѣютъ только два различныхъ значенія **), сами имѣютъ только два значенія. И здѣсь можно ограничиться разсмотрѣніемъ простого показателя степени. Если бы функція φ имѣла болѣе двухъ различныхъ значеній, то существовала бы, по крайней мѣрѣ, одна круговая подстановка трехъ перемѣнныхъ, переводящая одно изъ ея значеній φ_1 въ другое φ_2. Съ другой стороны, та же подстановка не мѣняетъ степени φ^p, такъ какъ послѣдняя по предположенію имѣетъ только два различныхъ значенія *). Слѣдовательно, $\varphi_1^p = \varphi_2^p$, и $\varphi_2 = \omega\varphi_1$. Примѣняя ту же круговую подстановку еще два раза, получаемъ $\varphi_3 = \omega\varphi_2$ и затѣмъ $\varphi_1 = \omega\varphi_3$, слѣдовательно, $\omega^3 = 1$. Поэтому $p = 3$. Все сказанное выше можно повторить для круговой подстановки пяти буквъ. Тогда найдемъ $p = 5$. Этотъ результатъ противорѣчитъ предыдущему, а потому, при $n > 4$, невозможно предположить, что φ имѣетъ больше двухъ различныхъ значеній. Въ случаѣ же $n \leqq 4$ о подстановкѣ изъ пяти перемѣнныхъ не можетъ быть рѣчи, и противорѣчіе изчезаетъ (X).

---

*) См. примѣчаніе X.

**) При всевозможныхъ подстановкахъ.

480. Легко указать при $n \leqq 4$ функціи, имѣющія больше двухъ значеній, степени которыхъ имѣютъ только два значенія. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію

$$\varphi_1 = a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3,$$

гдѣ

$$\omega = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \omega^2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Примѣняя одинъ разъ за другимъ подстановку (a_1, a_2, a_3), переводимъ функцію φ_1 послѣдовательно въ

$$\varphi_2 = a_2 + \omega a_3 + \omega^2 a_1 = \omega^2(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) = \omega^2 \varphi_1,$$
$$\varphi_3 = a_3 + \omega a_1 + \omega^2 a_2 = \omega\,(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) = \omega \varphi_1.$$

Для каждаго изъ этихъ значеній имѣемъ

$$\varphi^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 6a_1a_2a_3$$
$$+ 3\omega(a_3a_2^2 + a_1a_3^2 + a_2a_1^2) + 3\omega^2(a_2a_3^2 + a_3a_1^2 + a_1a_2^2).$$

Функція φ^3, имѣющая два различныхъ значенія, должна (§§ 468, 476) выразиться въ элементарныхъ симметрическихъ функціяхъ

$$c_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad c_2 = a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2, \quad c_3 = a_1a_2a_3$$

и въ дискриминантѣ (29). Дѣйствительно, пользуясь тождествомъ, найденнымъ въ концѣ § 473, найдемъ

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 6a_1a_2a_3$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_2a_3 - a_3a_1 - a_1a_2) + 9a_1a_2a_3$$
$$= c_1(c_1^2 - 3c_2) + 9c_3.$$

Далѣе,

$$(a_2a_3^2 + a_3a_1^2 + a_1a_2^2) + (a_3a_2^2 + a_1a_3^2 + a_2a_1^2)$$
$$= a_2a_3(c_1 - a_1) + a_3a_1(c_1 - a_2) + a_1a_2(c_1 - a_3) = c_1c_2 - 3c_3.$$

Съ другой стороны,

$$(a_2a_3^2 + a_3a_1^2 + a_1a_2^2) - (a_3a_2^2 + a_1a_3^2 + a_2a_1^2)$$
$$= (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2) = \pm\sqrt{\Delta}.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi^3 = \tfrac{1}{2}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3) \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-3\Delta}. \tag{31}$$

481. Точно такъ же, функція четырехъ перемѣнныхъ *)

$$\varphi = (a_1a_4 + a_2a_3) + \omega(a_2a_4 + a_3a_1) + \omega^2(a_3a_4 + a_1a_2)$$

---

*) Имѣющая шесть различныхъ значеній.

обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что кубъ ея имѣетъ только два различныхъ значенія. Дѣйствительно, полагая

$$\beta_1 = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_1, \quad \beta_3 = \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2,$$

замѣчаемъ, что подстановка $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ влечетъ за собою другую $(\beta_1\beta_2\beta_3)$. Поэтому мы получимъ выраженіе φ^3, если въ правой части формулы (31) замѣнимъ c_1 суммою всѣхъ β, т. е. числомъ c_2, c_2 — суммою

$$\beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2 = c_1c_3 - 4c_4,$$

c_3 — произведеніемъ

$$\beta_1\beta_2\beta_3 = c_1^2c_4 - 4c_2c_4 + c_3^2$$

и, наконецъ, $\pm\sqrt{\Delta}$ выраженіемъ

$$(\beta_2 - \beta_3)(\beta_3 - \beta_1)(\beta_1 - \beta_2)$$
$$= (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3) = \pm\sqrt{\Delta}.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi^3 = \tfrac{1}{2}(2c_2^3 - 9c_1c_2c_3 + 27c_1^2c_4 - 72c_2c_4 + 27c_3^2) \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-3\Delta}.$$

Впослѣдствіи мы увидимъ, что благодаря именно существованію этихъ исключительныхъ функцій и возможно рѣшеніе уравненій первыхъ четырехъ степеней въ радикалахъ (XI).

Вычисленіе инваріантовъ и другія приложенія.

482. Соображенія, изложенныя въ § 470, могутъ быть съ пользою приложены къ вычисленію инваріантовъ бинарныхъ формъ (XII). Стоитъ только замѣтить, что инваріантъ есть функція коэффиціентовъ формы $f(x, y)$, получаемой (какъ въ § 457) изъ цѣлой функціи $f(x)$ приведеніемъ послѣдней къ однородному виду. Поэтому инваріантъ будетъ симметрическою функціею корней уравненія $f(x) = 0$, обладающею слѣдующимъ свойствомъ: она не измѣняется *), если въ функціи $f(x, y)$ произведемъ какое угодно линейное преобразованіе перемѣнныхъ, что очевидно, равносильно замѣнѣ x на $\frac{ax+b}{cx+d}$ въ функціи $f(x)$. При этомъ разность $\alpha_i - \alpha_j$ двухъ корней уравненія преобразуется въ

$$\frac{a\alpha_i + b}{c\alpha_i + d} - \frac{a\alpha_j + b}{c\alpha_j + d} = \frac{(ad - bc)(\alpha_i - \alpha_j)}{(c\alpha_i + d)(c\alpha_j + d)}.$$

Для того, чтобы преобразованное выраженіе нѣкоторой функціи отъ разностей $\alpha_i - \alpha_j$ отличалось отъ нея самой лишь нѣкоторымъ множителемъ, очевидно, необходимо, чтобы всѣ корни входили одинаковое число разъ въ

*) Точнѣе говоря, пріобрѣтаетъ лишь нѣкоторый множитель.

каждый членъ этой функціи *), какъ это и имѣетъ мѣсто въ дискриминантѣ. Такъ, напримѣръ, функція

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)^2$$

будетъ инваріантомъ лишь при $n = 2$. Ея значеніе (при произвольномъ n) равно (§ 30)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = (n-1)\,c_1^2 - 2nc_2.$$

Точно такъ же, для биквадратичной биинарной формы инваріантомъ будетъ слѣдующая функція

$$(a_2 - a_3)^2 (a_1 - a_4)^2 + (a_3 - a_1)^2 (a_2 - a_4)^2 + (a_1 - a_2)^2 (a_3 - a_4)^2,$$

которую легко выразить въ коэффиціентахъ съ помощью изложенной раньше методы. Полагая, какъ подобаетъ (§ 470),

$$\tfrac{1}{2}\sum (a_2 - a_3)^2 (a_1 - a_4)^2 = k_0 c_2^2 + k_1 c_1 c_3 + k_2 c_4,$$

находимъ, при $a_1 = a_3$, $a_2 = a_4$,

$$(a_1 - a_2)^4 = k_0(c_1^2 + a_2^2 + 4a_1a_2)^2 + 4k_1 a_1 a_2 (a_1 + a_2)^2 + k_2 a_1^2 a_2^2,$$

откуда $k_0 = 1$, $k_1 = -3$, $k_2 = 12$. Такимъ образомъ находимъ снова квадратичный инваріантъ биквадратичной бинарной формы

$$I = c_2^2 - 3c_1c_3 + 12c_4. \tag{32}$$

Замѣчательно, что первоначальное выраженіе I черезъ α разлагается на два множителя, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно α. Дѣйствительно, введемъ въ разсмотрѣніе тѣ функціи β отъ корней α, которыя были опредѣлены въ предыдущемъ параграфѣ, и замѣтимъ, что

$$\beta_2 - \beta_3 = (a_2 - a_3)(a_4 - a_1), \quad \beta_3 - \beta_1 = (a_3 - a_1)(a_4 - a_2),$$
$$\beta_1 - \beta_2 = (a_1 - a_2)(a_4 - a_3).$$

Тогда получимъ

$$I = \tfrac{1}{2}[(\beta_2 - \beta_3)^2 + (\beta_3 - \beta_1)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2]$$
$$= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - \beta_2\beta_3 - \beta_3\beta_1 - \beta_1\beta_2,$$

а слѣдовательно (§ 473),

$$\begin{cases} I = [a_1a_4 + a_2a_3 + \omega\,(a_2a_4 + a_3a_1) + \omega^2(a_3a_4 + a_1a_2)] \\ \quad \times [a_1a_4 + a_2a_3 + \omega^2(a_2a_4 + a_3a_1) + \omega\,(a_3a_4 + a_1a_2)]. \end{cases} \tag{33}$$

Общнѣе для всякой бинарной формы четной степени [1])

$$f(x, y) = a_0x^n + \frac{n}{1}a_1x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n$$

инваріантомъ будетъ симметрическая функція

$$\sum (a_1 - a_2)^2\,(a_3 - a_4)^2 \dots (a_{n-1} - a_n)^2$$

---

*) Для того, чтобы всѣ дроби имѣли одинаковаго знаменателя.

[1]) См. Salmon l. c. стр. 184.

корней уравненія $f(x, 1) = 0$. Она выражается, независимо отъ численнаго множителя, слѣдующимъ образомъ:

$$I = \frac{1}{2}(a - a)^n = \frac{1}{2}\left(a_0 a_n - \frac{n}{1} a_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 a_{n-1} - \cdots + a_n a_0\right) *).$$

483. Кубическій инваріантъ

$$J = \tfrac{1}{2}(2c_2^3 - 9c_1c_2c_3 + 27c_1^2c_4 - 72c_2c_4 + 27c_3^2) \tag{34}$$

биквадратичной формы $f(x, y)$ получимъ, разсматривая симметрическую функцію

$$\begin{aligned} J = {} & (a_3 - a_1)(a_2 - a_4)(a_1 - a_2)^2(a_3 - a_4)^2 \\ & + (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_2 - a_3)^2(a_1 - a_4)^2 \\ & + (a_2 - a_3)(a_1 - a_4)(a_3 - a_1)^2(a_2 - a_4)^2 \end{aligned} \tag{35}$$

корней уравненія $f(x, 1) = 0$ (XIII). Вычисленія § 481 даютъ возможность получить другое выраженіе для J, которое легко разлагается на три множителя, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно a. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ выраженіе (34) для $2J$ въ слѣдующемъ видѣ

$$2c_2^3 - 9c_2(c_1c_3 - 4c_4) + 27(c_1^2c_4 - 4c_2c_4 + c_3^2).$$

Тогда оно тотчасъ преобразуется въ слѣдующее:

$$\begin{aligned} & -c_2^3 + 3c_2^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - 9c_2(\beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2) + 27\beta_1\beta_2\beta_3 \\ & = (3\beta_1 - c_2)(3\beta_2 - c_2)(3\beta_3 - c_2) \\ & = (2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3)(2\beta_2 - \beta_3 - \beta_1)(2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2). \end{aligned}$$

Легко теперь узнать, что къ тому же виду приводится и выраженіе (35) или

$$(\beta_1 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)^2 + (\beta_3 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)^2.$$

Поэтому имѣемъ

$$\begin{aligned} J = {} & \tfrac{1}{2}[2(a_1a_4 + a_2a_3) - (a_1 + a_4)(a_2 + a_3)] \\ & \times [2(a_2a_4 + a_3a_1) - (a_2 + a_4)(a_3 + a_1)] \\ & \times [2(a_3a_4 + a_1a_2) - (a_3 + a_4)(a_1 + a_2)]. \end{aligned} \tag{36}$$

Выраженія (32) и (34) для I и J отличаются только численными множителями отъ данныхъ раньше въ § 87. Но указанное въ § 458 соотношеніе Буля измѣнится въ нижеслѣдующее:

$$\Delta = \tfrac{4}{27}(I^3 - J^2). \tag{37}$$

484. Упражненія. а) Составить кубическую форму, опредѣляемую корнями

$$\gamma_1 = \beta_2 + \beta_3 - 2\beta_1, \quad \gamma_2 = \beta_3 + \beta_1 - 2\beta_2, \quad \gamma_3 = \beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3.$$

Сумма этихъ чиселъ равна нулю. Произведеніе, какъ сейчасъ было найдено, равно $-2J$, а сумма произведеній по два

$$-\tfrac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = -3(\beta_1^2 + \cdots - \beta_2\beta_3 - \cdots) = -3I.$$

*) Коэффиціенты равны биноміальнымъ, только средній раздѣленъ на 2.

Слѣдовательно, искомая кубическая форма равна (§ 465)

$$\Omega(x) = x^3 - 3Ix + 2J\ *).$$

Она тѣмъ замѣчательна, что имѣетъ тотъ же дискриминантъ, что и биквадратичная форма, опредѣляемая корнями α_1, α_2, α_3, α_4. Дѣйствительно,

$$\gamma_2 - \gamma_3 = -3(\beta_2 - \beta_3) = -3(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_1) \text{ и т. д.},$$

а потому дискриминантъ равенъ

$$\Pi(\gamma_2 - \gamma_3)^2 = 9^3\Delta.$$

Если хотимъ найти его выраженіе въ коэффиціентахъ кубической формы, то на основаніи формулы (29) имѣемъ послѣдовательно

$$9^3\Delta = -27 \cdot 4J^2 + 4 \cdot 27I^3, \quad \Delta = \tfrac{4}{27}(I^3 - J^2).$$

Такимъ образомъ, снова подтверждается формула (37).

b) Составить уравненіе, котораго корни равны ангармоническимъ отношеніямъ четырехъ чиселъ, зная уравненіе, которому удовлетворяютъ эти числа. Корни искомаго уравненія будутъ равны (§ 417)

$$(\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4) = \lambda_1 = \frac{\beta_1 - \beta_3}{\beta_1 - \beta_2}, \quad (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = 1 - \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_3},$$

$$(\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4) = \lambda_2 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_3}, \quad (\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4) = 1 - \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1},$$

$$(\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4) = \lambda_3 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1}, \quad (\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4) = 1 - \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Слѣдовательно, искомое уравненіе будетъ 6-ой степени, и не должно мѣняться отъ замѣны неизвѣстной λ на $\frac{1}{\lambda}$ или на $1 - \lambda$. Чтобы удовлетворить первому условію, очевидно, необходимо, чтобы коэффиціенты крайнихъ членовъ и членовъ, равно отстоящихъ отъ концовъ, были равны между собою. Замѣчая еще, что сумма шести корней равна 3, а произведеніе ихъ равно 1, находимъ, что искомое уравненіе будетъ вида

$$\lambda^6 - 3\lambda^5 + a\lambda^4 - b\lambda^3 + a\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0. \tag{38}$$

Чтобы оно не мѣнялось при замѣнѣ λ на $1 - \lambda$ необходимо, чтобы сумма всѣхъ коэффиціентовъ была равна 1 **), поэтому $2a - b = 5$. Остается вычислить a. Припоминая, что a есть сумма всѣхъ произведеній корней по два, а сумма корней равна 3, находимъ

$$9 - 2a = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}. \text{ ***)}$$

---

*) Точнѣе говоря,

$$\Omega(x, y) = x^3 - 3Ixy^2 + 2Jy^3.$$

**) Сумма коэффиціентовъ $f(\lambda)$ равна $f(1)$, но $f(\lambda) = f(1 - \lambda)$, т. е. $f(1) = f(0) = 1$.

***) Квадратъ суммы безъ удвоенной суммы произведеній по два равенъ суммѣ квадратовъ.

Замѣчая, что, съ другой стороны, инваріантъ $I = \beta_1^2 + \cdots - \beta_2\beta_3 - \cdots$ (§ 482) можетъ быть приведенъ къ виду

$$I = (\beta_2 - \beta_3)^2 + (\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3),$$

увидимъ, что

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} = \frac{2I - (\beta_2 - \beta_3)^2}{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)} = 1 \pm (\beta_2 - \beta_3)\frac{I}{\sqrt{\Delta}}$$

и аналогично

$$\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} = 1 \pm (\beta_3 - \beta_1)\frac{I}{\sqrt{\Delta}}, \quad \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3} = 1 \pm (\beta_1 - \beta_2)\frac{I}{\sqrt{\Delta}}.$$

Отсюда путемъ возвышенія въ квадратъ и сложенія найдемъ

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} = -3 + 2\frac{I^3}{\Delta},$$

а затѣмъ

$$a = 6 - \frac{I^3}{\Delta}, \quad b = 7 - 2\frac{I^3}{\Delta}.$$

Подставляя эти значенія въ равенство (38), получаемъ

$$\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} = \frac{I^3}{\Delta}.$$

Принимая во вниманіе еще формулу (37), можемъ написать

$$\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^2(\lambda - \frac{1}{2})^2} = \frac{I^3}{J^2}.$$

Правая часть есть абсолютный инваріантъ (§ 87). Отсюда слѣдуетъ, что если два уравненія 4-ой степени имѣютъ равные абсолютные инваріанты, то группы 4 корней того и другого уравненія имѣютъ одинаковыя ангармоническія отношенія. Кромѣ того, видимъ, что обращеніе въ нуль квадратичнаго инваріанта I характеризуетъ эквиангармоническое, а обращеніе въ нуль кубическаго инваріанта J—гармоническое расположеніе корней (§ 417). Эти два свойства, которыя, такъ сказать, написаны въ формулахъ (33) и (36), имѣютъ замѣчательную геометрическую интерпретацію [1]).

485. Функція Гессе. Съ изученіемъ функціи $f(x)$ связано изученіе функціи Гессе $H(x)$, т. е. другой цѣлой функціи, которая по приведеніи къ однородной формѣ пропорціональна опредѣлителю Гессе (Гессіану) (§ 378)

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}.$$

---

[1]) См. „Vorlesungen über Geometrie“ v. Clebsch Band. I, S. 239; Bd. II, S. 615.

При $y=1$ имѣемъ $f'_x=f'$, $f''_{xx}=f''$ *), а другія частныя производныя вычисляются примѣненіемъ теоремы Эйлера (§ 372) къ функціямъ f, f', f'_y:

$$xf'+f'_y=nf,\quad xf''+f''_{xy}=(n-1)f',\quad xf''_{xy}+f''_{yy}=(n-1)f'_y.$$

Пользуясь этими формулами для исключенія производныхъ, взятыхъ по y, преобразуемъ опредѣлитель Гессе послѣдовательно въ

$$\begin{vmatrix} f'' & (n-1)f' \\ f''_{xy} & (n-1)f'_y \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} f'' & f' \\ (n-1)f' & nf \end{vmatrix},$$

Мы условимся полагать

$$H=\begin{vmatrix} f' & f'' \\ nf & (n-1)f' \end{vmatrix}=(n-1)f'^2-nff'',$$

т. е.

$$H(x)=(n-1)f'^2(x)-nf(x)f''(x).$$

Такимъ образомъ, каждой цѣлой функціи $f(x)$ степени n соотвѣтствуетъ функція Гессе $H(x)$, степень которой вообще равна $2n-4$, что сейчасъ же видно изъ первоначальной формы H (въ видѣ опредѣлителя изъ вторыхъ производныхъ), изъ которой, полагая

$$f(x)=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\tfrac{1}{2}n(n-1)a_2x^{n-2}+\cdots,$$

находимъ

$$\frac{H(x)}{n^2(n-1)}=(a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)a_3x^{n-4}+\cdots)^2$$
$$-(a_0x^{n-2}+(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots)(a_2x^{n-2}+(n-2)a_3x^{n-3}+\cdots).$$

486. Послѣ сказаннаго выше поставимъ себѣ теперь задачу: выразить $H(x)$ въ корняхъ функціи $f(x)$. Мы будемъ исходить изъ равенства

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n},$$

откуда, взявъ производныя, получимъ

$$\frac{f'^2(x)}{f^2(x)}-\frac{f''(x)}{f(x)}=\frac{1}{(x-a_1)^2}+\frac{1}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{1}{(x-a_n)^2}.$$

Полагая для сокращенія

$$\sigma_p=\frac{1}{(x-a_1)^p}+\frac{1}{(x-a_2)^p}+\cdots+\frac{1}{(x-a_n)^p},$$

имѣемъ, слѣдовательно,

$$\frac{f'}{f}=\sigma_1,\quad \frac{f''}{f}=\sigma_1^2-\sigma_2,$$

---

*) f' и f'' для кратности обозначаютъ производныя $f'(x)$ и $f''(x)$.

а поэтому

$$\frac{H}{f^2} = (n-1)\frac{f'^2}{f^2} - n\frac{f''}{f} = n\sigma_2 - \sigma_1^2 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Замѣчая, что правая часть есть квадратъ матриссы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{x-a_1} & \frac{1}{x-a_2} & \dots & \frac{1}{x-a_n} \end{vmatrix},$$

можемъ написать (§ 30)

$$\frac{H}{f^2} = \sum\left(\frac{1}{x-a_i} - \frac{1}{x-a_j}\right)^2 = \sum\frac{(a_i-a_j)^2}{(x-a_i)^2(x-a_j)^2}$$

и, наконецъ,

$$H(x) = \sum(a_1-a_2)^2(x-a_3)^2(x-a_4)^2\dots(x-a_n)^2,$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ пары корней $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Какъ видимъ, $H(x)$ есть сумма квадратовъ, которые всѣ будутъ положительными при x и a вещественныхъ. При этихъ условіяхъ $H(x)$ можетъ обратиться въ нуль только тогда, когда каждый изъ квадратовъ равенъ нулю, а это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда всѣ a равны между собою. Изъ сказаннаго вытекаетъ слѣдующая теорема [1]): **если цѣлая функція имѣетъ всѣ корни вещественные и неравные, то ея функція Гессе имѣетъ всѣ корни мнимые.**

487. Полезно замѣтить, что **кратные корни функціи f будутъ также кратными корнями функціи H.** Дѣйствительно, если f имѣетъ дѣлителя $(x-a)^2$, то и f'^2, а слѣдовательно и H, имѣютъ того же дѣлителя. Отсюда слѣдуетъ, что дискриминантъ D функціи H непремѣнно обращается въ нуль, когда дискриминантъ функціи f равенъ нулю. Чтобы это имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы D дѣлилось на Δ. Припомнимъ теперь, что (§ 458) дискриминантъ Δ, относительно коэффиціентовъ функціи f, будетъ степени $2(n-1)$ а вѣсъ его равенъ $n(n-1)$. Чтобы опредѣлить вѣсъ D, надо замѣтить, что вѣсъ каждаго коэффиціента въ H, разсчитанный относительно коэффиціентовъ въ f, оказывается увеличеннымъ на 2 единицы, такъ что искомый вѣсъ, относительно коэффиціентовъ функціи f, равенъ

$$(2n-4)(2n-5) + 2\cdot 2(2n-5) = 2n(2n-5),$$

а слѣдовательно, вѣсъ $\frac{D}{\Delta}$ равенъ

$$2n(2n-5) - n(n-1) = 3n(n-3).$$

Такъ какъ при $n=3$ это число равно нулю, то можно утверждать, что **кубическая функція и ея функція Гессе имѣютъ одинъ и тотъ же дискриминантъ.** Для биквадратичной функціи, напротивъ, дискриминантъ

---

[1]) См. замѣтки Gerbaldi и Schoute въ „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo" (1889).

ея функціи Гессе разлагается на два множителя одинаковаго вѣса изъ которыхъ одинъ есть дискриминантъ данной функціи. Это обстоятельство можно было бы и непосредственно установить, если бы сначала, помощью довольно сложной выкладки, составили инваріанты (квадратичный и кубичный) функціи Гессе, которые должны получиться равными $16I^2$ и $64J^2$. Формула Буля дала бы тогда

$$D = 2^{12}(I^3 + J^2)\Delta.$$

Но замѣчательная Теорія алгебраическихъ формъ даетъ болѣе легкіе и скорые способы вычисленія

488. Функція Якоби. Также замѣчательна функція Якоби $Q(x)$, пропорціональная опредѣлителю, составленному изъ первыхъ частныхъ производныхъ отъ функцій f и H *). Это также цѣлая функція степени, вообще говоря, $n - 1 + 2n - 5 = 3(n-2)$. По теоремѣ Эйлера

$$xH' + H'_y = (2n-4)H$$

поэтому имѣемъ (§ 485)

$$\begin{vmatrix} f'_x & H'_x \\ f'_y & H'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & H' \\ nf & (2n-4)H \end{vmatrix} = (2n-4)Hf' - nfH'.$$

Мы положимъ

$$Q = (n-2)Hf' - \tfrac{1}{2}nfH'.$$

Постараемся теперь выразить Q въ корняхъ функціи f. Изъ формулы (39), взявъ производныя и замѣчая, что $\sigma'_p = -p\sigma_{p+1}$, получимъ

$$\frac{H'}{2f^2} = \frac{Hf'}{f^3} + \sigma_1\sigma_2 - n\sigma_3.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{Q}{f^3} = n(n\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2) - 2\sigma_1(n\sigma^2 - \sigma_1^2) = n^2\sigma_3 - 3n\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1^3.$$

Обозначимъ на минуту черезъ $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ дроби $\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{x-a_2}, \cdots$, и напишемъ правую часть такъ:

$$n^2(\alpha^3 + \beta^3 + \cdots) - 3n(\alpha+\beta+\cdots)(\alpha^2+\beta^2+\cdots) + 2(\alpha+\beta+\cdots)^3$$
$$= (n-1)(n-2)\Sigma\alpha^3 - 3(n-2)\Sigma\alpha\beta(\alpha+\beta) + 12\Sigma\alpha\beta\gamma.$$

Тогда тотчасъ увидимъ, что это выраженіе получится отъ сложенія слѣдующаго

$$2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) - 3\beta\gamma(\beta+\gamma) - 3\gamma\alpha(\gamma+\alpha) - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + 12\alpha\beta\gamma$$

со всѣми ему аналогичными. Но послѣднее выраженіе есть разложеніе произведенія

$$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta);$$

---

*) Подразумѣвается, приведенныхъ къ однородному виду подстановкою $\frac{x}{y}$ вмѣсто x и умноженіемъ на соотвѣтственныя степени y.

поэтому можемъ написать

$$\frac{Q}{f^3} = \sum\left(\frac{2}{x-a_i} - \frac{1}{x-a_j} - \frac{1}{x-a_k}\right) \times \left(\frac{2}{x-a_j} - \frac{1}{x-a_k} - \frac{1}{x-a_i}\right) \times \left(\frac{2}{x-a_k} - \frac{1}{x-a_i} - \frac{1}{x-a_j}\right)$$

и, наконецъ,

$$Q(x) = \Sigma[2(a_1x + a_2a_3) - (a_2 + a_3)(x + a_1)] \times [2(a_2x + a_3a_1) - (a_3 + a_1)(x + a_2)] \times [2(a_3x + a_1a_2) - (a_1 + a_2)(x + a_3)] \times (x - a_4)^2 (x - a_5)^2 \cdots (x - a_n)^2,$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ тройки корней.

489. Возвратимся къ формуламъ опредѣленія:

$$H = (n-1)f'^2 - nff'', \quad Q = (n-2)Hf' - \tfrac{1}{2}nfH'.$$

Возвышая вторую въ квадратъ и исключая f'^2 съ помощью первой, получимъ

$$(n-1)Q^2 = (n-2)^2H^2(H + nff'') - n(n-1)(n-2)HH'ff' + \tfrac{1}{4}n^2(n-1)f^2H'^2$$

или

$$\Phi = n(n-2)Hf[(n-1)H'f' - (n-2)Hf''] - \tfrac{1}{4}n^2(n-1)f^2H'^2,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$\Phi = (n-2)^2H^3 - (n-1)Q^2.$$

Далѣе, имѣемъ

$$H' = (n-2)f'f'' - nfff'''$$

и, слѣдовательно,

$$(n-1)H'f' - (n-2)Hf'' = nf[(n-2)f''^2 - (n-1)f'f'''].$$

Отсюда

$$\frac{\Phi}{n^2f^2} = (n-2)H[(n-2)f''^2 - (n-1)f'f'''] - \tfrac{1}{4}(n-1)H'^2.$$

Правая часть есть цѣлая функція. Итакъ, существуетъ линейная комбинація изъ H^3 и Q^2, дѣлящаяся на f^2. Это замѣчаніе даетъ возможность для каждаго значенія n находить важныя соотношенія между H и Q. Еще надо замѣтить, что Φ степени $6(n-2)$, а потому $\frac{\Phi}{f^2}$ степени $6(n-2) - 2n = 4(n-3)$. Наконецъ, полезно знать старшіе члены въ H, Q и Φ. Написавъ f въ видѣ

$$f = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - c_3x^{n-3} + \cdots,$$

найдемъ

$$H = [(n-1)\,c_1^2 - 2nc_2]\,x^{2n-4} + \cdots$$
$$Q = [(n-1)\,(n-2)\,c_1^3 - 3n\,(n-2)\,c_1c_2 + 3n^2c_3]\,x^{3n-6} + \cdots$$
$$\Phi = [-9n^2\,(n-1)\,c_3^2 + 3\,(n-1)\,(n-2)^2c_1^2c_2^2 - 8n\,(n-2)^2c_2^3$$
$$- 6\,(n-1)^2\,(n-2)\,c_1^3c_3 + 18n\,(n-1)\,(n-2)\,c_1c_2c_3]\,n^2x^{6n-12} + \cdots$$

490. Приложеніе къ кубической функціи. a) Для кубической функціи

$$f = x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3$$

функція Гессе будетъ квадратною, а функція Якоби также кубическою функціею; черезъ корни a_1, a_2, a_3 функціи f онѣ выражаются формулами

$$H = (a_2-a_3)^2\,(x-a_1)^2 + (a_3-a_1)^2\,(x-a_2)^2 + (a_1-a_2)^2\,(x-a_3)^2, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} Q = {} & [2\,(a_1x + a_2a_3) - (a_2+a_3)\,(x+a_1)] \\ & \times [2\,(a_2x + a_3a_1) - (a_3+a_1)\,(x+a_2)] \\ & \times [2\,(a_3x + a_1a_2) - (a_1+a_2)\,(x+a_3)]. \end{aligned} \tag{41}$$

Эти выраженія обнаруживаютъ замѣчательныя геометрическія зависимости между разсматриваемыми тремя функціями [1]). Корни a_1', a_2', a_3' функціи Q выражаются раціонально въ корняхъ функціи f. Они опредѣляются уравненіями

$$2_1\,(a_1a_1' + a_2a_3) = (a_1 + a_1')\,(a_2 + a_3) \quad \text{и т. д.},$$

которыя выражаютъ, что

$$(a_1'a_1a_2a_3) = -1, \quad (a_2'a_2a_3a_1) = -1, \quad (a_3'a_3a_1a_2) = -1,$$

т. е. каждый корень функціи Q гармонически сопряженъ съ корнемъ функціи f, относительно двухъ другихъ корней той же функціи f. Отсюда слѣдуетъ, что когда корни a_1, a_2, a_3 функціи f даны, то корни функціи Q будутъ находиться (§ 417) на окружности круга $a_1a_2a_3$. Каждый изъ корней функціи Q, напримѣръ a_1', можно построить, замѣчая, что касательныя къ кругу въ точкахъ a_1' и a_1 встрѣчаются на прямой a_2a_3, или что касательныя въ a_2 и a_3 встрѣчаются на a_1a_1'. Эти построенія обнаруживаютъ взаимность, существующую между двумя кубическими функціями, потому что касательныя въ a_1 и a_1' встрѣчаются также на $a_2'a_3'$, и касательныя въ a_2' и a'_3 на a_1a_1'. Оба треугольника имѣютъ общую точку Лемуана (§ 419), въ которой встрѣчаются прямыя a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3', т. е. прямыя, соединяющія вершины каждаго треугольника съ полюсами противолежащихъ сторонъ.

b) Если будемъ разсматривать кубическіе корни изъ 1

$$\omega = -\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}), \quad \omega^2 = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}),$$

какъ величины извѣстныя, то выраженіе (40) функціи Гессе тотчасъ разлагается такъ, что корни функціи H можно выразить раціонально черезъ корни функціи f. Замѣтимъ сперва, что если три числа α, β, γ удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

---

[1]) Clebsch. „Vorlesungen über Geometrie“ (B. I. S. 218 и 227).

то кубы этихъ чиселъ между собою равны. Дѣйствительно, $\alpha^2 = (\beta + \gamma)^2 = -\alpha^2 + 2\beta\gamma$, откуда $\alpha^2 = \beta\gamma$, и $\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3$. Отсюда слѣдуетъ, что α, β, γ пропорціональны кубическимъ корнямъ изъ единицы. Теперь замѣтимъ, что выраженіе (40) есть сумма квадратовъ трехъ чиселъ, сумма которыхъ

$$(a_2 - a_3)(x - a_1) + (a_3 - a_1)(x - a_2) + (a_1 - a_2)(x - a_3)$$

тождественно равна нулю. Слѣдовательно, если подставимъ вмѣсто x корень функціи H, то отношеніе двухъ этихъ чиселъ можетъ имѣть лишь одно изъ двухъ значеній ω или ω^2. Отсюда слѣдуетъ, что, обозначая черезъ τ и τ' корни функціи H, будемъ имѣть

$$(\tau a_1 a_2 a_3) = -\omega, \quad (\tau' a_1 a_2 a_3) = -\omega^2.$$

Итакъ (§ 420), корни функціи Гессе отъ данной кубической функціи совпадаютъ съ изодинамическими центрами треугольника, образуемаго корнями данной кубической функціи [1]). Здѣсь умѣстно будетъ припомнить, что числа τ и τ' изображаютъ общія точки трехъ Аполлоніевыхъ круговъ треугольника $a_1a_2a_3$ (рис. 23). Такъ какъ эти круги ортогональны съ кругомъ $a_1a_2a_3$, то, какъ извѣстно, центръ O послѣдняго долженъ находиться на прямой $\tau\tau'$. Далѣе, такъ какъ касательныя въ a_i и a_i' къ соотвѣтствующему Аполлоніеву кругу встрѣчаются въ O, т. е. на $\tau\tau'$, то $(\tau\tau' a_i a_i') = -1$, для $i = 1, 2, 3$, т. е. корни кубическихъ функцій f и Q соотвѣтствуютъ другъ другу такъ, что всякая пара соотвѣтствующихъ корней гармонически сопряжена относительно корней функціи H. Далѣе, такъ какъ длина Oa_i есть геометрическое среднее между $O\tau$ и $O\tau'$, то видимъ, что корни функціи Гессе отъ данной кубической функціи падаютъ въ точки, взаимныя относительно круга, опредѣляемаго корнями данной функціи, такъ что одна изъ нихъ всегда внутри, а другая внѣ этого круга. Замѣчая, наконецъ, что O есть полюсъ прямыхъ a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3' относительно трехъ Аполлоніевыхъ круговъ, заключаемъ, что эти три хорды должны встрѣтиться на прямой $\tau\tau'$ въ точкѣ, гармонически сопряженной съ O относительно τ и τ'. Поэтому точки τ и τ' лежатъ на томъ діаметрѣ описаннаго круга, который проходитъ черезъ точку Лемуана. Они дѣлятся гармонически этою точкою и центромъ круга.

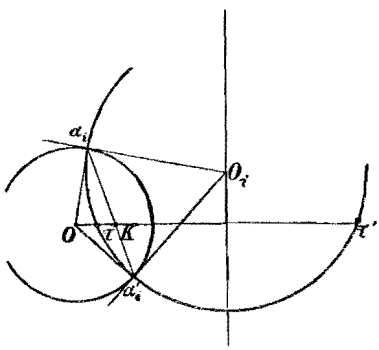


Рис. 23.

с) Выраженіе функціи Гессе въ коэффиціентахъ функціи f есть

$$H = 2[(c_1^2 - 3c_2)x^2 - (c_1c_2 - 9c_3)x + (c_2^2 - 3c_1c_3)].$$

Ея дискриминантъ (срав. § 487) пропорціоналенъ

$$4[(c_1c_2 - 9c_3)^2 - 4(c_1^2 - 3c_2)(c_2^2 - 3c_1c_3)] = -12\Delta.$$

---

[1]) Относительно этой интересной теоремы и другихъ, см. „Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche“ Beltrami (Memorie dell'Accad. di Bologna, 1870), а также „Involutions cubiques dans le plan complexe“ Jan de Vries (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1901).

Тому же числу равно H'^2 при $H = 0$. Чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно замѣтить, что если

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то

$$(2ax + b)^2 = 4a(ax^2 + bx) + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Замѣтимъ еще, что при $n = 3$, старшій членъ въ выраженіи Φ (§ 489) равенъ $54\Delta x^6$ (см. формулу (29)). Слѣдовательно,

$$H^3 - 2Q^2 = 54f^2\Delta.$$

Это тождество, найденное Кейли (Cayley) [1]), заключаетъ въ себѣ соотношеніе Буля между инваріантами биквадратичныхъ формъ, какъ частный случай. А именно, если въ формулахъ (40) и (41) дадимъ перемѣнной x опредѣленное значеніе, то биквадратичная функція, опредѣляемая корнями a_1, a_2, a_3, x имѣетъ квадратичный инваріантъ, какъ разъ равный $\frac{1}{2}H$ (§ 482), и кубическій инваріантъ, равный $\frac{1}{2}Q$ (§ 483). Полагая теперь $x = a_4$, а поэтому $H = 2I$, $Q = 2J$, и подставляя вмѣсто $f^2\Delta$ произведеніе квадратовъ разностей чиселъ a_1, a_2, a_3, a_4, т. е. дискриминантъ Δ биквадратичной функціи, мы и получимъ формулу (37).

d) Соотношеніе Кейли можно получить различными другими путями, замѣчая, что для опредѣленія постояннаго *) отношенія $H^3 - 2Q^2$ къ f^2 можно выбирать значеніе x по произволу. Если возьмемъ, напримѣръ, x равнымъ корню функціи H, то H'^2 приведется, какъ уже было сказано, къ -12Δ, и будемъ имѣть (§ 489)

$$\frac{H^3 - 2Q^2}{9f^2} = H(f''^2 - 2f'f''') - \frac{1}{2}H'^2 = -\frac{1}{2}H'^2 = 6\Delta.$$

Если положимъ x равнымъ корню функціи f, то будемъ имѣть

$$f = 0, \quad f''' = 6, \quad f'^2(f''^2 - 16f') = 4\Delta, \quad H = 2f'^2, \quad H' = f'f'',$$

и правая часть предыдущаго равенства будетъ равна

$$2f'^2(f''^2 - 2f'f''') - \tfrac{1}{2}f'^2f''^2 = \tfrac{3}{2}f'^2(f''^2 - 16f') = 6\Delta.$$

Полагая, наконецъ, x равнымъ корню a_1' функціи Q, и замѣчая, что

$$\tfrac{1}{2}(a_2 - a_3)(a_1' - a_1) = -(a_3 - a_1)(a_1' - a_2)$$
$$= -(a_1 - a_2)(a_1' - a_3) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a_1 - a_2 - a_3},$$

послѣдовательно найдемъ

$$f = \frac{2\Delta}{(2a_1 - a_2 - a_3)^3}, \quad H = \frac{6\Delta}{(2a_1 - a_2 - a_3)^2}, \quad \frac{H^3 - 2Q^2}{f^2} = \frac{H^3}{f^2} = 54\Delta.$$

491. Приложеніе къ биквадратичной функціи. a) Функціи Гессе и Якоби для биквадратичной функціи будутъ соотвѣтственно функціи 4-ой и 6-ой степени, выражающіяся — первая въ видѣ суммы квадратовъ, вторая

---

[1]) Salmon, l. c. стр. 263.

*) Потому что (§ 489) степень функціи $\frac{\Phi}{f^2}\,[= 4(n-3)]$ равна 0 при $n = 3$.

въ видѣ произведенія нѣкоторыхъ трехъ квадратичныхъ функцій. Сперва удобнѣе будетъ представить Q въ нѣсколько иной формѣ, чѣмъ та, которую мы нашли въ концѣ § 488. Для этого полезно сперва замѣтить слѣдующее тождество:

$$(2\beta-\gamma-\delta)(2\gamma-\delta-\beta)(2\delta-\beta-\gamma)+(2\gamma-\delta-\alpha)(2\delta-\alpha-\gamma)(2\alpha-\gamma-\delta)$$
$$+(2\delta-\alpha-\beta)(2\alpha-\beta-\delta)(2\beta-\delta-\alpha)+(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$$
$$=-6(\beta+\gamma-\alpha-\delta)(\gamma+\alpha-\beta-\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta) \quad \text{(XIV)}.$$

Если въ немъ замѣнимъ α, β, γ, δ соотвѣтственно числами $\frac{1}{x-a_1}$, $\frac{1}{x-a_2}$, $\frac{1}{x-a_3}$, $\frac{1}{x-a_4}$, то лѣвая часть обратится въ $\frac{Q}{f^3}$ (§ 488), а въ правой множитель $\beta+\gamma-\alpha-\delta$, напримѣръ, обратится въ

$$\frac{1}{x-a_2}+\frac{1}{x-a_3}-\frac{1}{x-a_1}-\frac{1}{x-a_4}=\frac{f_1}{f},$$

гдѣ f_1 первая изъ слѣдующихъ квадратичныхъ функцій:

$$f_1=(a_2+a_3-a_1-a_4)x^2-2(a_2a_3-a_1a_4)x+a_2a_3(a_1+a_4)-a_1a_4(a_2+a_3),$$
$$f_2=(a_3+a_1-a_2-a_4)x^2-2(a_3a_1-a_2a_4)x+a_3a_1(a_2+a_4)-a_2a_4(a_3+a_1),$$
$$f_3=(a_1+a_2-a_3-a_4)x^2-2(a_1a_2-a_3a_4)x+a_1a_2(a_3+a_4)-a_3a_4(a_1+a_2).$$

Такимъ образомъ, мы и получимъ Якобіеву функцію $Q(x)$, разложенную на три квадратичныхъ множителя:

$$Q(x)=6f_1(x)f_2(x)f_3(x).$$

Разсматривая, съ другой стороны, всѣ пары чиселъ, раздѣляющихъ два данныя числа z_0 и z_0' гармонически, говорятъ, что эти числа образуютъ инволюцію, которая будетъ вполнѣ опредѣлена, когда извѣстны двѣ такія пары (z_1, z_1') и (z_2, z_2'). Дѣйствительно, всякая другая пара (z, z') связана съ первыми двумя условіемъ

$$\begin{vmatrix} 1 & z+z' & zz' \\ 1 & z_1+z_1' & z_1z_1' \\ 1 & z_2+z_2' & z_2z_2' \end{vmatrix}=0,$$

которое получается, когда исключимъ z_0+z_0' и z_0z_0' изъ соотношеній

$$2(z_0z_0'+zz')=(z_0+z_0')(z+z'),$$
$$2(z_0z_0'+z_1z_1')=(z_0+z_0')(z_1+z_1'),\quad 2(z_0z_0'+z_2z_2')=(z_0+z_0')(z_2+z_2')$$

(выражающихъ гармоническое расположеніе 4-хъ точекъ).

Принимая теперь во вниманіе, что квадратичные множители Q могутъ быть представлены въ видѣ

$$f_1=\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 1 & a_2+a_3 & a_2a_3 \\ 1 & a_1+a_4 & a_1a_4 \end{vmatrix},\quad f_2=\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 1 & a_3+a_1 & a_3a_1 \\ 1 & a_2+a_4 & a_2a_4 \end{vmatrix},\quad f_3=\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 1 & a_1+a_2 & a_1a_2 \\ 1 & a_3+a_4 & a_3a_4 \end{vmatrix},$$

видимъ, что корни Якобіевой функціи отъ данной биквадратичной функціи распадаются на три пары, изъ которыхъ каждая гармонически раздѣляетъ двѣ опредѣленныя пары корней данной функціи. Они изображаютъ, выражаясь геометрически, двойныя точки трехъ инволюцій, опредѣляемыхъ корнями биквадратичной функціи. Легко также показать, что каждый квадратичный множитель функціи $Q(x)$ обладаетъ тѣмъ же свойствомъ относительно двухъ другихъ множителей.

b) Изъ первоначальныхъ выраженій f_1, f_2, f_3 вытекаютъ равенства

$$f_2 - f_3 = -2(a_2 - a_3)(x - a_1)(x - a_4),\ f_2 + f_3 = 2(a_1 - a_4)(x - a_2)(x - a_3),$$
$$f_3 - f_1 = -2(a_3 - a_1)(x - a_2)(x - a_4),\ f_3 + f_1 = 2(a_2 - a_4)(x - a_3)(x - a_1),$$
$$f_1 - f_2 = -2(a_1 - a_2)(x - a_3)(x - a_4),\ f_1 + f_2 = 2(a_3 - a_4)(x - a_1)(x - a_2).$$

Они ведутъ къ различнымъ интереснымъ слѣдствіямъ. Если, напримѣръ, мы возвысимъ ихъ въ квадратъ и сложимъ, то получимъ выраженіе функціи Гессе H черезъ квадратичные множители функціи Q:

$$H = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.\ ^{1})$$

Если же перемножимъ ихъ между собою, то получимъ соотношенія:

$$f_2^2 - f_3^2 = 4(\beta_2 - \beta_3)f,\ \ f_3^2 - f_1^2 = 4(\beta_3 - \beta_1)f,\ \ f_1^2 - f_2^2 = 4(\beta_1 - \beta_2)f.$$

Такимъ образомъ, данная биквадратичная функція f тремя различными способами разлагается на квадратичные множители, которые линейно выражаются черезъ тѣ, изъ которыхъ состоитъ ея Якобіева функція. Замѣтимъ еще тождество

$$(\beta_2 - \beta_3)f_1^2 + (\beta_3 - \beta_1)f_2^2 + (\beta_1 - \beta_2)f_3^2 = 0,$$

которое показываетъ, что f_1, f_2, f_3 не независимы между собою, и потому не всякая функція 6-ой степени можетъ быть разсматриваема, какъ Якобіева функція нѣкоторой функціи 4-ой степени [2]). Въ то же время изъ тождества $(f_3^2 - f_1^2) - (f_1^2 - f_2^2) = 4\gamma_1 f$ (§ 484, a) легко вывести первое изъ слѣдующихъ трехъ тождествъ (а другія два по аналогіи)

$$3f_1^2 = H - 4\gamma_1 f,\ \ 3f_2^2 = H - 4\gamma_2 f,\ \ 3f_3^2 = H - 4\gamma_3 f.$$

Слѣдовательно, квадраты квадратичныхъ множителей Якобіевой функціи выражаются линейно черезъ данную биквадратичную функцію f и ея функцію Гессе H. Далѣе, перемножая послѣднія три тождества, получимъ (§ 484, a)

$$27 f_1^2 f_2^2 f_3^2 = 4^3 f^3 Q\left(\frac{H}{4f}\right)$$
$$= H^3 - 3IH \cdot 4^2 f^2 + 2J \cdot 4^3 f^3 = H^3 - 16(3IH - 8Jf)f^2$$

и наконецъ, замѣчая, что лѣвая часть равна $\frac{3}{4}Q^2$, находимъ

$$4H^3 - 3Q^2 = 64(3IH - 8Jf)f^2.$$

---

[1]) О распредѣленіи корней функціи H относительно корней функціи f см. замѣтку R. Russell въ „Proceedings of the London Math. Soc." (vol. XIX, p. 56).

[2]) См. Clebsch: „Theorie der binären algebraischen Formen", S. 447.

c) Къ послѣднему результату можно придти и другимъ путемъ, примѣняя соображенія § 489. При $n = 4$, функціи

$$H = 3f'^2 - 4ff'', \quad Q = 2(Hf' - fH'), \quad \Phi = 4H^3 - 3Q^2$$

будутъ соотвѣтственно 4-ой, 6-ой и 12-ой степени. Мы знаемъ, далѣе, что отношеніе функціи Φ къ $16f^2$ есть цѣлая функція четвертой степени, которая выражается слѣдующимъ образомъ

$$\varphi = 2H(2f'^2 - 3f'f''') - \tfrac{3}{4}H'^2.$$

Есть основаніе испытать, не выражается ли эта функція линейно черезъ тѣ двѣ функціи 4-ой степени, которыя являются здѣсь въ числѣ разсматриваемыхъ функцій, а именно, черезъ f и H. Полагая $\varphi = \lambda f + \mu H$, находимъ, что прежде всего необходимо, чтобы функція φ приводилась къ μH, когда x есть одинъ изъ корней функціи f. Но при этомъ предположеніи имѣемъ

$$H = 3f'^2, \quad H' = 2f'f'', \quad \tfrac{3}{4}H'^2 = Hf''^2,$$

и далѣе

$$\varphi = 2H(2f''^2 - 3f'f''') - Hf''^2 = 3H(f''^2 - 2f'f''').$$

Обозначая, для упрощенія вычисленій, черезъ ε_1, ε_2, ε_3 избытки числъ a_1, a_2, a_3 надъ a_4, очевидно, найдемъ при $x = a_4$

$$f' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \tfrac{1}{2}f'' = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \tfrac{1}{6}f''' = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

и отсюда

$$\begin{aligned}\mu = 3(f''^2 - 2f'f''') &= 12[(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2 - 3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)] \\ &= 6\Sigma\varepsilon_1^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 = 6\Sigma(a_1 - a_4)^2(a_2 - a_3)^2 = 12I.\end{aligned}$$

Слѣдовательно, функція $\varphi(x) - 12I \cdot H(x)$ обращается въ нуль, когда x равно любому корню функціи f, а такъ какъ она одной съ нею степени, то можно положить $\varphi - 12I \cdot H = \lambda f$. Для опредѣленія λ достаточно сравнить коэффиціенты при x^1 въ обѣихъ частяхъ равенства. Припоминая, что въ φ этотъ коэффиціентъ (§ 489) равенъ учетверенному числу

$$-4 \cdot 27c_3^2 + 9c_1^2c_2^2 - 32c_2^3 - 27c_1^3c_3 + 108c_1c_2c_3,$$

находимъ, что для полученія $\frac{1}{4}\lambda$ надо изъ предыдущаго числа вычесть

$$\begin{aligned}&3(3c_1^2 - 8c_2)(c_2^2 - 3c_1c_3 + 12c_4) \\ &= 9c_1^2c_2^2 - 24c_2^3 - 27c_1^3c_3 + 72c_1c_2c_3 + 36(3c_1^2c_4 - 8c_2c_4).\end{aligned}$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\tfrac{1}{4}\lambda = -4 \cdot 27c_3^2 - 8c_2^3 + 36(c_1c_2c_3 - 3c_1^2c_4 + 8c_2c_4) = -8J$$

а, наконецъ, $\varphi = 12IH - 32Jf$, откуда $4H^3 - 3Q^2 = 64(3IH - 8Jf)f^2$.

492. Метода Альфена (Halphén). Для того, чтобы выполнить всѣ эти вычисленія, нѣтъ надобности, какъ мы то считали удобнымъ въ предыдущихъ упражненіяхъ, выражать различныя функціи въ корняхъ функціи f. Альфенъ далъ остроумную методу [1]), въ которой исключительно пользуются

---

[1]) „Nouvelles Annales des Mathématiques" 1885, p. 17.

функціями $f, f', f'', \ldots$ Эта метода основана на слѣдующемъ замѣчаніи. Если f и g цѣлыя функціи степени n, то выраженіе

$$fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - \cdots \pm f^{(n)}g$$

приводится къ числу постоянному. Въ самомъ дѣлѣ, производная этого выраженія

$$fg^{(n+1)} \pm gf^{(n+1)} = 0.$$

Вычисленіе этой постоянной, которую Альфенъ обозначаетъ символомъ (fg), весьма просто. Стоитъ только дать перемѣнной x въ равенствѣ, опредѣляющемъ искомую постоянную, какое нибудь частное значеніе. Напримѣръ, положимъ $x = 0$, тотчасъ увидимъ, что (ff) есть не что иное, какъ квадратичный инваріантъ бинарныхъ формъ, который мы указали въ концѣ § 482. Мы дадимъ здѣсь нѣсколько легкихъ приложеній разсматриваемой методы.

a) Для вычисленія дискриминанта кубической функціи

$$f = x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3$$

воспользуемся постоянными $(f'f')$ и $(H'f'')$. Значенія ихъ найдемъ тотчасъ, положивъ $x = 0$. Тогда

$$(f'f') = 2f'f''' - f''^2 = -4(c_1^2 - 3c_2).$$

Точно такъ же, замѣчая, что

$$H = 2f'^2 - 3ff'', \quad H' = f'f'' - 3ff''', \quad H'' = f''^2 - 2f'f'''$$

найдемъ, что

$$(H'f'') = H'f''' - H''f'' = -f''^3 + 3f'f''f''' - 3ff'''^2,$$

далѣе, полагая $x = 0$,

$$(H'f'') = 4(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3).$$

Возвращаясь къ первоначальнымъ выраженіямъ обѣихъ постоянныхъ въ функціональныхъ символахъ, замѣчаемъ, что если f имѣетъ кратный корень, и положимъ x равнымъ именно такому корню, то

$$(f'f') = -f''^2, \quad (H'f'') = -f''^3.$$

Слѣдовательно, $(f'f')^3 + (H'f'')^2$ будетъ такая функція отъ коэффиціентовъ f, которая обращается въ нуль, также какъ и дискриминантъ, когда f имѣетъ кратный корень. Кромѣ того, легко видѣть, что вѣсъ этой функціи равенъ 6, т. е. (§ 487) равенъ вѣсу дискриминанта. Слѣдовательно, она можетъ отличаться отъ дискриминанта лишь численнымъ множителемъ. Распоряжаясь этимъ множителемъ надлежащимъ образомъ, найдемъ (срав. § 471).

$$\begin{aligned} \Delta &= \tfrac{1}{2^7}\,[4(c_1^2 - 3c_2)^3 - (2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3)^2] \\ &= -27c_3^2 + c_1^2c_2^2 - 4c_2^3 - 4c_1^3c_3 + 18c_1c_2c_3. \end{aligned}$$

b) Для биквадратичной функціи

$$f = x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4$$

легко провѣрить, что постоянныя (ff) и (Hf) какъ разъ равны инваріантамъ I и J. Умножая ихъ на численные множители, выбранные такъ, чтобы

сохранились выраженія I и J, данныя въ §§ 482 и 483, найдемъ

$$I = \tfrac{1}{4}(ff), \quad J = \tfrac{1}{16}(Hf).$$

Теперь замѣтимъ, что если f имѣетъ кратные корни, и x равенъ одному изъ нихъ, то послѣдовательно найдемъ

$$(ff) = f''^2, \quad (Hf) = 2f''^3, \quad 4(ff)^3 - (Hf)^2 = 0.$$

Разсуждая, какъ въ предыдущемъ случаѣ, и подбирая приличнымъ образомъ коэффиціентъ пропорціональности, находимъ

$$\Delta = \frac{4(ff)^3 - (Hf)^2}{64 \cdot 27} = \frac{4}{27}(I^3 - J^2).$$

c) И въ вычисленіи послѣдняго примѣра предыдущаго § 491, с можно достигнуть значительныхъ упрощеній при помощи символа (fg). Этимъ путемъ удается прямо доказать, что функція φ выражается линейно черезъ f и H, вмѣсто того, чтобы идти ощупью: нужно только представить функцію φ въ видѣ

$$\varphi = 3H(ff) - 2f(Hf).$$

Счетъ корней.

493. Разысканіе корней алгебраическаго уравненія всегда можетъ быть сведено къ опредѣленію вещественныхъ корней уравненій съ вещественными коэффиціентами. Дѣйствительно, цѣлая функція $f(z)$, по отдѣленіи вещественныхъ частей коэффиціентовъ и вещественной части перемѣнной z отъ мнимой, можетъ быть представлена въ видѣ

$$f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Чтобы $f(z)$ было равно 0, необходимо и достаточно, чтобы одновременно

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0,$$

Исключеніе y изъ послѣднихъ двухъ уравненій дастъ уравненіе съ вещественными коэффиціентами, вещественные корни котораго дадутъ значенія x. Исключеніемъ x найдемъ значеніе y. Въ этой главѣ и слѣдующей, опираясь на сдѣланное замѣчаніе, мы и займемся исключительно разыскиваніемъ вещественныхъ корней цѣлыхъ функцій съ вещественными коэффиціентами. Методы, которыя мы изложимъ для разысканія такихъ корней, требуютъ, чтобы мы заранѣе могли сказать, сколько корней заключается въ данномъ интервалѣ. Поэтому мы сперва и ограничимся разсмотрѣніемъ различныхъ средствъ, придуманныхъ для полученія отвѣта на послѣдній вопросъ.

494. Леммы. а) Въ смежности съ корнемъ цѣлой функціи производная будетъ имѣть справа отъ корня знакъ,

одинаковый со знакомъ самой функціи, а слѣва отъ корня знакъ противоположный. Выберемъ положительное число h достаточно малымъ для того, чтобы въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$, кромѣ a, не заключалось ни одного корня функцій f и f'. Тогда каждая изъ этихъ функцій въ интервалахъ $(a-h,\ a)$ и $(a,\ a+h)$, за исключеніемъ границы a, будетъ сохранять опредѣленный знакъ. Извѣстно, что $f(x)=(x-a)\,f(\xi)$ (§ 306), гдѣ ξ лежитъ между a и x. Если x лежитъ въ одномъ изъ указанныхъ интерваловъ, то и ξ находится въ томъ же интервалѣ, и потому знаки чиселъ $f'(\xi)$ и $f'(x)$ одинаковы. Слѣдовательно, при $|x-a|<h$, $f(x)$ и $f'(x)$ будутъ имѣть одинаковые знаки при $x>a$ и различные при $x<a$.

b) Если a корень кратности r функціи f, то справа отъ a функція f имѣетъ знакъ, одинаковый съ $f^{(r)}(a)$. Слѣва отъ a знакъ f будетъ одинаковъ со знакомъ $f^{(r)}(a)$ при r четномъ, и противоположенъ ему при r нечетномъ. Въ самомъ дѣлѣ, образуемъ около a интервалъ, въ которомъ непрерывная и необращающаяся въ нуль при $x=a$ функція $f^{(r)}(x)$ (§ 450, c) сохраняетъ опредѣленный знакъ. Тогда ясно, на основаніи предыдущей леммы, что справа отъ a функціи $f^{(r-1)}, f^{(r-2)}, \ldots f', f$ будутъ имѣть одинаковый знакъ съ $f^{(r)}(a)$, а слѣва $f^{(r-1)}$ противоположный, $f^{(r-2)}$ одинаковый и т. д., и, наконецъ, f одинаковый или противоположный съ $f^{(r)}(a)$, смотря по тому, будетъ ли r четное или нечетное число *).

c) Въ любомъ интервалѣ будетъ нечетное число корней функціи f, если значенія f на границахъ интервала имѣютъ разные знаки, если же эти значенія имѣютъ одинаковые знаки, то въ интервалѣ либо четное число корней, либо ни одного. Дѣйствительно, если $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ обозначаютъ всѣ, равные или неравные, корни функціи f, лежащіе въ интервалѣ $(a,\ b)$, то можно написать

$$f(x)=(x-a_1)\,(x-a_2)\cdots(x-a_\nu)\,\varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ цѣлая функція, необращающаяся въ нуль въ $(a,\ b)$, и потому (§ 275) принимающая на границахъ значенія одинаковаго знака, такъ что $\varphi(a)\varphi(b)>0$. Теперь имѣемъ

$$f(a)=(a-a_1)\,(a-a_2)\cdots(a-a_\nu)\,\varphi(a),$$
$$f(b)=(b-a_1)\,(b-a_2)\cdots(b-a_\nu)\,\varphi(b),$$

откуда слѣдуетъ, что $f(a)f(b)$ имѣетъ знакъ числа

$$(a-a_1)\,(a-a_2)\cdots(a-a_\nu)\cdot(b-a_1)\,(b-a_2)\cdots(b-a_\nu),$$

*) То же самое еще проще вытекаетъ изъ формулы Тэйлора.

т. е. знакъ $(-1)^{\nu}$, потому что послѣдніе ν множителей всѣ положительные, а первые ν отрицательные. Слѣдовательно, ν будетъ нечетное, когда $f(a)$ и $f(b)$ числа разныхъ знаковъ, и четное или нуль, когда $f(a)$ и $f(b)$ числа одинаковыхъ знаковъ.

495. Теорема Ролля. Между двумя послѣдовательными корнями цѣлой функціи заключается нечетное число корней производной.

Если α и β два послѣдовательныхъ корня функціи f, то это значитъ, что въ интервалѣ (α, β) f не обращается въ нуль и, слѣдовательно, сохраняетъ опредѣленный знакъ. На основаніи первой леммы существуетъ справа отъ α интервалъ (α, a), въ которомъ f' имѣетъ знакъ, одинаковый съ f, и слѣва отъ β интервалъ (b, β), въ которомъ f' имѣетъ знакъ, противоположный знаку f. Поэтому, на основаніи третьей леммы, функція f', имѣющая противоположные знаки на границахъ интервала (a, b), имѣетъ въ этомъ интервалѣ, а слѣдовательно, и въ интервалѣ (α, β), за исключеніемъ границъ, нечетное число корней.

496. Слѣдствія. a) Между двумя послѣдовательными корнями функціи f' не можетъ заключаться болѣе одного корня функціи f. Дѣйствительно, если бы ихъ было два, то между ними не оказалось бы ни одного корня f', что противорѣчитъ теоремѣ Ролля. Принято говорить, что вещественные корни функціи f' отдѣляютъ корни функціи f.

b) Если всѣ корни функціи f вещественные и простые, то такими же будутъ и всѣ корни f', f'', f''' и т. д. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначаютъ всѣ корни функціи f, расположенные въ порядкѣ возрастанія. Въ каждомъ изъ $n-1$ интерваловъ (a_1, a_2), $(a_2, a_3), \ldots (a_{n-1}, a_n)$ лежитъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень функціи f'. Слѣдовательно, f' имѣетъ, по крайней мѣрѣ, $n-1$ вещественныхъ неравныхъ корней, а съ другой стороны, извѣстно, что и больше $n-1$ корней она имѣть не можетъ. Все сказанное о функціи f, можно примѣнить къ f', затѣмъ къ f'' и т. д.

497. Теорема Декарта. Число положительныхъ корней алгебраическаго уравненія $f(x)=0$, не превышаетъ числа перемѣнъ знака въ полиномѣ $f(x)$.

Замѣтимъ прежде всего, что если въ ряду чиселъ, не равныхъ нулю, два рядомъ стоящихъ числа имѣютъ противоположные знаки, то говорятъ, что имѣемъ перемѣну знака, а если два рядомъ стоящія числа имѣютъ одинаковые знаки, то говорятъ, что имѣемъ постоянство знака. Далѣе, подъ перемѣнами и постоянствами знака въ уравненіи

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \tag{42}$$

понимаютъ перемѣны и постоянства знака въ ряду его коэффиціентовъ, взятыхъ въ томъ именно порядкѣ, въ которомъ они написаны въ выраженіи (42). Теорема, которую надо доказать, очевидна въ томъ случаѣ, когда число перемѣнъ знака равно нулю. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ $f(x)$, лѣвая часть уравненія (42), при всякомъ положительномъ значеніи x будетъ имѣть знакъ, общій всѣмъ коэффиціентамъ, а потому положительныхъ корней имѣть не можетъ. Остается, слѣдовательно, показать, что теорема будетъ справедлива при u перемѣнахъ знака, если предположить, что она вѣрна при меньшемъ числѣ перемѣнъ. Замѣтимъ для того, чтобы это показать, что функція $x^{-k}f$ имѣетъ, очевидно, тѣ же положительные корни, какъ и f. Пусть число ихъ равно p. Къ функціи $x^{-k}f$, во всякомъ интервалѣ, не заключающемъ въ себѣ нуля, можно примѣнить теорему Ролля (см. § 303). На основаніи этой теоремы можемъ утверждать, что производная отъ этой функціи

$$x^{-k}f' - kx^{-k-1}f = x^{-k-1}(xf' - kf),$$

а слѣдовательно, и $xf' - kf$, т. е.

$$(43) \qquad (n-k)a_0x^n + (n-k-1)a_1x^{n-1} + \cdots + (1-k)a_{n-1}x - ka_n,$$

будетъ имѣть, по крайней мѣрѣ, одинъ корень въ каждомъ изъ $(p-1)$ интерваловъ между p корнями функціи $x^{-k}f$, т. е. будетъ имѣть, по крайней мѣрѣ, $p-1$ положительныхъ корней. Если теперь положимъ, что въ уравненіи (42) есть перемѣна знака при переходѣ отъ коэффиціента при x^ν, напримѣръ, къ коэффиціенту при $x^{\nu-1}$, то стоитъ только дать числу k значеніе, лежащее между ν и $\nu-1$, чтобы въ уравненіи (43) эта перемѣна знака обратилась въ постоянство *). Всѣ же остальныя перемѣны и постоянства въ (42) останутся безъ измѣненія и въ (43), потому что всѣ коэффиціенты слѣва отъ разсматриваемаго мѣста свои знаки сохранятъ, а всѣ коэффиціенты справа измѣнятъ ихъ на противоположные. Итакъ, число k всегда можно такъ выбрать, что въ уравненіи (43) будетъ $u-1$ перемѣна знака, если въ (42) ихъ было u. Но тогда, по предположенію, уравненіе (43) не можетъ имѣть болѣе $u-1$ положительныхъ корней, а такъ какъ ихъ имѣется, по меньшей мѣрѣ, $p-1$, то должно быть $p \leqq u$, что мы и хотѣли доказать [1]).

498. Дополнительныя теоремы. а) Разность между числомъ перемѣнъ знака и числомъ положительныхъ корней всегда число четное. Выбравъ a достаточно большимъ для того,

---

*) Если послѣ члена съ x^ν тотчасъ слѣдуетъ членъ съ $x^{\nu-l}$, то достаточно взять k между ν и $\nu-l$.

[1]) Это остроумное доказательство принадлежитъ Лагерру (Laguerre) „Nouvelles Annales de Mathématiques“ (1879, p. 5).

чтобы $f(x)$ имѣло знакъ, одинаковый съ a_0, при $x \geqq a$ (§ 445), будемъ имѣть интервалъ $(0, a)$, внутри котораго будутъ лежать всѣ положительные корни функціи f. Число ихъ будетъ четное или нечетное (§ 494, c) смотря по тому, будутъ ли $f(0)$ и $f(a)$, т. е. a_n и a_0, имѣть одинаковые или противоположные знаки, иными словами, смотря по тому, будетъ ли число перемѣнъ знака u четнымъ или нечетнымъ. Слѣдовательно, $u - p$ всегда число четное *).

b) Число отрицательныхъ корней не превышаетъ числа перемѣнъ знака въ $f(-x)$. Дѣйствительно, отрицательные корни функціи $f(x)$ получаются, если перемѣнимъ знаки у положительныхъ корней функціи $f(-x)$.

499. Примѣчанія. a) Если въ уравненіи только одна перемѣна знака, то уравненіе имѣетъ только одинъ положительный корень. Дѣйствительно, по теоремѣ Декарта p (число положительныхъ корней) можетъ имѣть только значенія 0 или 1; но $u - p$, какъ мы видѣли, не можетъ быть нечетнымъ, поэтому $p = 1$.

b) Если уравненіе не имѣетъ мнимыхъ корней, то число его положительныхъ корней равно числу перемѣнъ знака въ данномъ уравненіи, а число отрицательныхъ корней равно числу перемѣнъ знака въ уравненіи, получаемомъ изъ даннаго замѣною x на $-x$. Если полиномъ $f(x)$ полный, т. е. ни одинъ изъ его коэффиціентовъ не нуль, то ясно, что при замѣнѣ x на $-x$ всякая перемѣна знака переходитъ въ постоянство, и наоборотъ, потому что изъ двухъ смежныхъ членовъ лишь одинъ измѣнитъ знакъ. Слѣдовательно, число v перемѣнъ знака въ $f(-x)$ равно числу постоянствъ знака въ $f(x)$, и если u число перемѣнъ знака въ $f(x)$, то $u + v = n$. Если теперь полиномъ $f(x)$ сдѣлается неполнымъ (оттого, что пропадутъ нѣкоторые члены), то, очевидно, числа u и v возрасти не могутъ, такъ что вообще $u + v \leqq n$. Съ другой стороны, если всѣ корни вещественные, и изъ нихъ p положительныхъ и q отрицательныхъ, то $p + q = n$. Отсюда

$$u + v \leqq p + q \quad \text{или} \quad (u - p) + (v - q) \leqq 0.$$

Но, по теоремѣ Декарта, $u - p$ и $v - q$ не могутъ быть меньше нуля, слѣдовательно, $u = p$, $v = q$, что мы и хотѣли доказать.

c) Если въ уравненіи не хватаетъ члена между двумя другими одинаковыхъ знаковъ, то уравненіе навѣрно

---

*) Въ случаѣ $f(0) = a_n = 0$, $a_{n-1} \neq 0$, надо разсматривать уравненіе $\frac{f(x)}{x} = 0$ и теорема остается вѣрною, и т. д.

имѣетъ мнимые корни. Положимъ, что $a_{n-\nu+1}=0$. Если $a_{n-\nu}$ и $a_{n-\nu+2}$ одинаковыхъ знаковъ, то пара членовъ $a_{n-\nu}x^{\nu}+a_{n-\nu+2}x^{\nu-2}$ представляетъ постоянство знака также и послѣ замѣны x на $-x$. Разсматривая теперь общее число перемѣнъ знака въ $f(x)$ и $f(-x)$, очевидно, будемъ имѣть

$$u+v\leqq n-\nu+\nu-2=n-2.$$

А тогда тѣмъ болѣе $p+q\leqq n-2$. Слѣдовательно, уравненіе имѣетъ, по крайней мѣрѣ, 2 мнимыхъ корня. Подобнымъ же образомъ доказывается, что уравненіе имѣетъ, по крайней мѣрѣ, $2k$ мнимыхъ корней, если въ уравненіи не хватаетъ $2k$ слѣдующихъ одинъ за другимъ членовъ, или когда не хватаетъ $2k-1$ членовъ между двумя членами одинаковыхъ знаковъ.

d) Важно замѣтить, что приведенное въ § 497 доказательство теоремы Декарта не требуетъ непремѣнно, чтобы f было цѣлою функціею. Достаточно, чтобы въ f или, точнѣе говоря, въ разложеніи (42), которое можетъ заключать въ себѣ и безконечное число членовъ, степени x, по которымъ оно расположено, имѣли показатели (цѣлые или дробные), слѣдующіе одинъ за другимъ либо постоянно возрастая, либо постоянно убывая.

500. Прежде чѣмъ идти далѣе, полезно будетъ дать опредѣленіе такъ называемыхъ функцій Руффини (Ruffini). Изъ лѣвой части f уравненія (42) можно вывести полиномы

$$f_1=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1},\ \cdots,$$
$$f_{n-2}=a_0x^2+a_1x+a_2,\ f_{n-1}=a_0x+a_1,\ f_n=a_0.$$

Полиномы $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ и будутъ функціи Руффини, соотвѣтствующія данному уравненію; расположенныя въ указанномъ порядкѣ, онѣ образуютъ рядъ Руффини. Значенія, принимаемыя ими при данномъ значеніи $x=a$, весьма легко вычисляются, если исходить изъ $f_n=a_0$ и замѣтить, что

$$f_{n-1}(a)=af_n(a)+a_1,\ f_{n-2}(a)=af_{n-1}(a)+a_2,\ \cdots$$

и, наконецъ, $f(a)=af_1(a)+a_n$. Въ этомъ и состоитъ самый простой изъ всѣхъ извѣстныхъ способовъ вычисленія $f(a)$. Принимая во вниманіе сказанное здѣсь, замѣтимъ, что изъ

$$f(x)-f(a)=a_0(x^n-a^n)+a_1(x^{n-1}-a^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(x-a)$$

тотчасъ получается

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=a_0(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})+\cdots+a_{n-2}(x+a)+a_{n-1},$$

т. е.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = x^{n-1}f_n(a) + x^{n-2}f_{n-1}(a) + \cdots + f_1(a). \tag{44}$$

501. Теорема Лагерра. Число вещественныхъ корней функціи $f(x)$, превышающихъ данное положительное число a, не превышаетъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ Руффини при $x=a$, и разность между этими двумя числами всегда число четное [1]).

Изъ (44), при $x>a$, выводимъ

$$\frac{f(x)}{x-a} = x^{n-1}f_n(a) + \cdots + f_1(a) + x^{-1}f(a) + ax^{-2}f(a) + a^2x^{-3}f(a) + \cdots$$

Если $a>0$, то правая часть представляетъ u перемѣнъ знака, гдѣ u равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ

$$f(a), f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a). \tag{45}$$

Слѣдовательно, не можетъ существовать болѣе u положительныхъ чиселъ, обращающихъ эту правую часть въ нуль. Эти числа, будучи по необходимости больше a, и будутъ корнями функціи $f(x)$, превосходящими a. Для доказательства второй части теоремы, опредѣлимъ сперва число b, достаточно большое для того, чтобы $f(x)$ при $x \geqq b$ имѣло знакъ числа a_0. Тогда всѣ разсматриваемые корни попадутъ въ интервалъ (a, b) и число ихъ будетъ четное или нечетное, смотря по тому, будетъ ли $f(a)$ имѣть знакъ числа $f(b)$, т. е. числа $f_n(a)$, или противоположный, иными словами, смотря по тому, будетъ ли число u четное или нечетное. Эта теорема, приложенная къ $f\left(\frac{1}{x}\right)$ или къ $f(-x)$, даетъ также возможность опредѣлить верхній предѣлъ числа положительныхъ корней функціи $f(x)$, меньшихъ даннаго положительнаго числа, или число корней, меньшихъ даннаго отрицательнаго числа.

502. Теорема Бюдана (Budan). Число корней цѣлой функціи $f(x)$, лежащихъ въ данномъ интервалѣ, не превосходитъ числа перемѣнъ знака, теряемыхъ рядомъ

$$f, f', f'', f''', \cdots \tag{46}$$

при переходѣ перемѣнной отъ нижней границы интервала, черезъ промежуточныя значенія, къ верхней его границѣ, и разность между этими двумя числами всегда число четное.

---

[1]) „Nouv. Ann. de Math." (1880, p. 52).

Число перемѣнъ знака въ рядѣ (46) остается безъ измѣненія, при непрерывномъ возрастаніи перемѣнной, пока ни одинъ изъ членовъ ряда не обращается въ нуль. Дѣйствительно, всѣ члены ряда непрерывныя функціи, которыя не могутъ измѣнить знакъ, не обращаясь въ нуль. Постараемся теперь разсмотрѣть, что произойдетъ, когда x переходитъ черезъ нѣкоторое значеніе a, равное корню функціи f. Если r есть показатель кратности корня a, то, какъ извѣстно (§ 494, b), первые $r+1$ членовъ ряда (46) справа отъ a не представляютъ ни одной перемѣны знака, а слѣва отъ a ровно r перемѣнъ знака. Слѣдовательно, при переходѣ x черезъ a происходитъ потеря r перемѣнъ знака, т. е. теряется ровно столько перемѣнъ знака, сколько корней, совпадающихъ съ значеніемъ a (§ 450, b). Остается теперь разсмотрѣть, не происходитъ ли въ рядѣ (46) потери или выигрыша перемѣнъ знака, когда x переходитъ черезъ нѣкоторое значеніе a, не равное корню функціи f, но обращающее въ нуль одну изъ производныхъ, напримѣръ $f^{(i)}$. Всегда можно принять, что $f^{(i-1)}(a) \neq 0$, и если r есть показатель кратности корня a, то нужно еще предположить, что $f^{(i+r)}(a) \neq 0$. Установивъ сказанное, образуемъ около a интервалъ, въ которомъ $f^{(i-1)}(x)$ и $f^{(i+r)}(x)$ сохраняютъ постоянный знакъ. Если этотъ знакъ одинаковъ для обѣихъ функцій, то рядъ

$$f^{(i-1)},\ f^{(i)},\ f^{(i+1)},\ \ldots,\ f^{(i+r)}, \tag{47}$$

составляющій часть ряда (46), справа отъ a не представляетъ ни одной перемѣны знака, а слѣва отъ a r или $r+1$ перемѣнъ, смотря по тому, будетъ ли r четное или нечетное число. Число потерянныхъ перемѣнъ знака, слѣдовательно, четное. Если же знаки $f^{(i-1)}(a)$ и $f^{(i+r)}(a)$ различны, то рядъ (47) представитъ одну перемѣну знака справа отъ a, а слѣва $r+1$ или r смотря по тому, будетъ ли r четное или нечетное число, такъ что число потерянныхъ перемѣнъ будетъ r или $r-1$, т. е. опять четное число. Изъ всего этого слѣдуетъ, что при переходѣ x отъ нижней границы нѣкотораго интервала къ верхней его границѣ рядъ (46) можетъ только терять перемѣны знака. При этомъ число потерянныхъ перемѣнъ знака будетъ равно числу корней функціи f въ данномъ интервалѣ (равныхъ или неравныхъ), увеличенному на нѣкоторое четное число, которое въ частныхъ случаяхъ можетъ и обращаться въ нуль [1]).

503. Примѣчанія. a) Теорема Декарта есть непосредственное слѣдствіе какъ теоремы Бюдана, такъ и теоремы Лагерра. Чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ только замѣтить, что при $a=0$ и при

[1]) Нѣсколько болѣе простое доказательство далъ Fouret (Nouv. Ann. de Math. 1892).

$x = 0$ ряды (45) и (46), если отбросить нѣкоторые положительные множители, приводятся къ ряду коэффиціентовъ, потому что

$$f(0) = a_n, \quad f_1(0) = f'(0) = a_{n-1}, \quad f_2(0) = \tfrac{1}{2} f''(0) = a_{n-2}, \quad \cdots$$

между тѣмъ какъ при достаточно большомъ значеніи x функціи (46) принимаютъ и затѣмъ сохраняютъ знакъ числа a_0. Перемѣны знаковъ, теряемыя при переходѣ x отъ 0 до безконечности, будутъ, слѣдовательно, тѣ, которыя окажутся въ рядѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, когда изъ него выкинемъ члены, обращающіеся въ нуль. Чтобы оправдать это выкидываніе, нужно только принять за нижнюю границу интервала, къ которому примѣняемъ теорему Бюдана, вмѣсто нуля произвольно малое положительное число. Затѣмъ надо замѣтить, что, если при $x=0$ только промежуточные члены ряда (47) обращаются въ нуль, рядъ этотъ справа отъ нуля представляетъ ровно столько перемѣнъ знака, сколько ихъ даютъ два крайнихъ члена, т. е. одну или ни одной.

b) Теорема Бюдана не даетъ возможности точно указать число корней въ данномъ промежуткѣ; на этотъ вопросъ дастъ отвѣтъ другая теорема (см. § 505 и слѣд.), которую мы вскорѣ докажемъ. Тѣмъ не менѣе въ приложеніяхъ теорема Бюдана очень полезна. Еще полезнѣе одна теорема Лагерра [1]), аналогичная теоремѣ § 501. Сильвестру принадлежитъ замѣчательное усовершенствованіе теоремы Бюдана, заключающее въ себѣ естественно и усовершенствованіе теоремы Декарта, принадлежащее Кемпбеллю (Campbell) [2]).

504. Упражненія. a) Дана цѣлая функція n-ой степени $f(x)$, всѣ корни которой вещественны. Требуется доказать, что если мы раздѣлимъ интервалъ между двумя смежными корнями α и β на n равныхъ частей, то въ крайнихъ частяхъ интервала производная f' не обращается въ нуль. Приравняемъ нулю выраженіе

$$\frac{f'}{f} = \cdots + \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \cdots,$$

оставляя слѣва отъ $\frac{1}{x-\alpha}$ всѣ члены, соотвѣтствующіе корнямъ, не превышающимъ α, а справа отъ $\frac{1}{x-\beta}$ всѣ члены, соотвѣтствующіе корнямъ, не меньшимъ β, и подразумѣвая подъ x число, лежащее между α и β и обращающее въ нуль функцію f'. Тогда получимъ

$$\cdots + \frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{\beta-x} + \cdots,$$

---

[1]) „Nouv. Ann. de Math.“ (1880, p. 55).

[2]) Todhunter, „Algebra“ (3. ed., p. 217). Petersen, „Algebraische Gleichungen“ (S. 212). См. также замѣтку Poulain въ C. R. de l'Ac. de Paris. (1888, p. 470).

равенство между двумя суммами членовъ, изъ которыхъ, какъ видимъ, выписаны съ каждой стороны только наибольшіе. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{1}{x-\alpha} \leqq \frac{n-1}{\beta-x}, \quad \frac{n-1}{x-\alpha} \geqq \frac{1}{\beta-x}, \tag{48}$$

а потому

$$\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n} \leqq x \leqq \beta - \frac{\beta-\alpha}{n}$$

(что и доказываетъ теорему).

Въ частномъ случаѣ, при $n = 2$, находимъ, что единственный корень функціи f' дѣлитъ промежутокъ (α, β) пополамъ.

b) Доказать, что, если всѣ n корней функціи f вещественные, то всѣ корни функціи $f^2 + kf'^2$, гдѣ k положительное число, будутъ мнимые, и притомъ въ каждомъ изъ нихъ коэффиціентъ при i по абсолютной величинѣ меньше $n\sqrt{k}$. Написавъ уравненіе $f^2 + kf'^2 = 0$ въ видѣ

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n} = \pm\frac{i}{\sqrt{k}}$$

и полагая $x = \alpha + i\beta$, должны имѣть

$$\frac{\alpha-\alpha_1-i\beta}{(\alpha-\alpha_1)^2+\beta^2} + \frac{\alpha-\alpha_2-i\beta}{(\alpha-\alpha_2)^2+\beta^2} + \cdots + \frac{\alpha-\alpha_n-i\beta}{(\alpha-\alpha_n)^2+\beta^2} = \pm\frac{i}{\sqrt{k}}.$$

Замѣтивъ, что β, очевидно, нулемъ быть не можетъ, сравнимъ коэффиціенты при i въ обѣихъ частяхъ равенства и получимъ

$$\frac{1}{(\alpha-\alpha_1)^2+\beta^2} + \frac{1}{(\alpha-\alpha_2)^2+\beta^2} + \cdots + \frac{1}{(\alpha-\alpha_n)^2+\beta^2} = \frac{1}{|\beta|\sqrt{k}}.$$

Знаменатели лѣвой части не меньше β^2. Поэтому

$$\frac{n}{\beta^2} > \frac{1}{|\beta|\sqrt{k}}, \quad |\beta| < n\sqrt{k}.$$

Иными словами, если въ разстояніи $n\sqrt{k}$ отъ оси вещественныхъ чиселъ проведемъ параллельныя ей прямыя, то внутри полученной такимъ образомъ полосы будутъ лежать всѣ корни функціи $f^2 + kf'^2$, и ни одинъ не будетъ лежать на оси [1]).

c) Если, напротивъ, k число отрицательное, то всѣ корни функціи $f^2 + kf'^2$ будутъ вещественными, какъ сейчасъ увидимъ изъ одного интереснаго обобщенія теоремы Ролля, принадлежащаго Варингу. Обозначая черезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ корни функціи f, черезъ $r, s, t, \ldots$ соотвѣтственные показатели ихъ кратности, черезъ k любое вещественное число, и приравнивая $f + kf'$ нулю, получимъ уравненіе

$$\frac{r}{x-\alpha} + \frac{s}{x-\beta} + \frac{t}{x-\gamma} + \cdots + \frac{1}{k} = 0. \quad \text{(XV.)}$$

---

[1]) Другія полезныя упражненія можно найти въ „Nouv. Annales de Mathem.“, за 1885 г., стр. 321, и за 1887 г., стр. 36.

Лѣвая часть есть функція $\varphi(x)$, непрерывная въ любомъ интервалѣ, изъ котораго исключены числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Ясно, что въ смежности съ корнемъ α соотвѣтствующій ему въ функціи φ членъ $\dfrac{r}{x-a}$ по абсолютной величинѣ превзойдетъ сумму всѣхъ прочихъ, такъ что слѣва отъ a функція φ отрицательна, а справа отъ a положительна. Слѣдовательно, когда x измѣняется въ интервалѣ между двумя послѣдовательными корнями функціи f, функція φ мѣняетъ знакъ и имѣетъ въ этомъ интервалѣ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень. Замѣчая еще, что при достаточно большихъ значеніяхъ $|x|$ функція φ принимаетъ и сохраняетъ знакъ числа k, видимъ, что φ имѣетъ еще корень, меньшій или большій, чѣмъ всѣ корни функціи f, смотря по тому, будетъ ли $k > 0$ или < 0. Итакъ, если ν есть число различныхъ корней функціи f, то φ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, ν корней, отличныхъ отъ корней функціи f. Кромѣ того (§ 450, c), она обращается въ нуль при значеніяхъ x, равныхъ кратнымъ корнямъ функціи f, и имѣетъ поэтому еще

$$(r-1)+(s-1)+(t-1)+\cdots = n-\nu$$

корней, общихъ съ f. Слѣдовательно, если всѣ корни f вещественные, то тоже самое можно сказать и о функціи $f+kf'$.

d) Давая числу k различныя вещественныя значенія, легко обобщить послѣднюю теорему. Предполагая, что всѣ корни f вещественные, можемъ то же самое сказать о функціи $f+kf'$, далѣе и о функціи

$$f+k_1f'+k_2(f'+k_1f'') = f+(k_1+k_2)f'+k_1k_2f'' \text{ и. т. д.}$$

Такимъ образомъ, приходимъ къ теоремѣ: Если всѣ n корней функціи f вещественные, то и всѣ корни функціи $af+bf'+cf''+\cdots$ будутъ вещественными, при условіи, что функція $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots$ имѣетъ также всѣ корни вещественные (XV bis). Этимъ путемъ можно доказать, напримѣръ, вещественность корней уравненія:

$$x^n+\frac{n^2}{1}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{1\cdot 2}x^{n-2}+\cdots = 0,$$

$$x^n+\frac{n}{1\cdot 2}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-2}+\cdots = 0 \text{ и т. д. [1]).}$$

e) Доказать, что если всѣ корни функціи f вещественные, то квадратъ каждаго коэффиціента больше произведенія двухъ сосѣднихъ коэффиціентовъ. Выпишемъ четыре смежныхъ члена функціи f:

$$\cdots + a_{\nu-1}x^{n-\nu+1}+a_\nu x^{n-\nu}+a_{\nu+1}x^{n-\nu-1}+a_{\nu+2}x^{n-\nu-2}+\cdots$$

Умножая на $(x-h)$ получаемъ

$$\cdots+(a_\nu-ha_{\nu-1})x^{n-\nu+1}+\cdots+(a_{\nu+2}-ha_{\nu+1})x^{n-\nu-1}+\cdots.$$

Если бы a_ν было равно 0, то теорема, очевидно, была бы справедлива, на основаніи сдѣланнаго раньше замѣчанія въ § 499, c. Предположимъ поэтому $a_\nu \neq 0$. По тому же замѣчанію, коэффиціенты $a_\nu - ha_{\nu-1}$ и $a_{\nu+2}-ha_{\nu+1}$

---

[1]) Другія аналогичныя упражненія можно найти у Laurent: „Traité d'Algèbre" III ч. 4-е изд. стр. 70.

при $h = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$, должны имѣть разные знаки, потому что всѣ корни функціи $(x - h)f$ вещественные. Имѣя

$$a_\nu - h a_{\nu-1} = \frac{a_\nu^2 - a_{\nu-1}a_{\nu+1}}{a_\nu}, \quad a_{\nu+2} - h a_{\nu+1} = \frac{a_\nu a_{\nu+2} - a_{\nu+1}^2}{a_\nu},$$

находимъ, что знакъ числа $a_\nu^2 - a_{\nu-1}a_{\nu+1}$ одинаковъ со знакомъ числа $a_{\nu+1}^2 - a_\nu a_{\nu+2}$, т. е. не зависитъ отъ ν. Но первые три члена функціи f по умноженіи на $x - h$ даютъ

$$a_0 x^{n+1} + (a_1 - h a_0) x^n + (a_2 - h a_1) x^{n-1} + \cdots.$$

Такъ какъ $a_0 \neq 0$, то можно положить $h = \frac{a_1}{a_0}$, и необходимо будетъ, чтобы знакъ a_0 былъ противоположенъ знаку числа

$$a_2 - h a_1 = \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0}.$$

Слѣдовательно, $a_1^2 > a_0 a_2$, и вмѣстѣ съ тѣмъ $a_\nu^2 > a_{\nu-1}a_{\nu+1}$ при всякомъ ν. Эта теорема, данная Де Гюа (De Gua), позволяетъ часто обнаружить существованіе мнимыхъ корней, когда это не удается съ помощью теоремы Декарта. Изъ различныхъ слѣдствій теоремы Де Гюа укажемъ на доказательство существованія мнимыхъ корней нѣкоторыхъ уравненій, напримѣръ, такихъ, въ которыхъ три послѣдовательные члена составляютъ геометрическую прогрессію или четыре ариѳметическую.

f) Рекомендуемъ читателю снова приняться за различные разсмотрѣнные въ этой главѣ вопросы и изслѣдовать ихъ непосредственно на плоскости комплексной перемѣнной. Можно начать со слѣдующаго замѣчанія: если черезъ нѣкоторый корень x функціи f' проведемъ прямую подъ угломъ θ къ оси вещественныхъ чиселъ, и обозначимъ черезъ $r_1, r_2, r_3, \ldots$ разстоянія отъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ до x, а черезъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ углы наклоненія къ той же оси прямыхъ, соединяющихъ $a_1, a_2, a_3 \ldots$ съ x, то будемъ имѣть

$$\frac{x - a_1}{r_1 e^{i\theta_1}} = \frac{x - a_2}{r_2 e^{i\theta_2}} = \cdots = \frac{x - a_n}{r_n e^{i\theta_n}} = -e^{i\theta}. \quad \text{(XVI)}$$

Уравненіе

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n} = 0 \quad (49)$$

приметъ форму, независящую отъ θ. Оно распадается на два, изъ которыхъ одно есть

$$\frac{\sin\theta_1}{r_1} + \frac{\sin\theta_2}{r_2} + \cdots + \frac{\sin\theta_n}{r_n} = 0.$$

Оно показываетъ, что разстоянія $r_1 \sin\theta_1, r_2 \sin\theta_2, r_3 \sin\theta_3, \ldots$ точекъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ отъ разсматриваемой прямой не могутъ быть ни всѣ больше 0, ни всѣ меньше 0. Слѣдовательно, корни функціи f лежатъ по обѣ стороны отъ прямой, проходящей черезъ какой нибудь корень функціи f', если только они не лежатъ всѣ на этой прямой, въ какомъ случаѣ на ней же будутъ и всѣ корни f'. Такимъ образомъ, мы выясняемъ одну, уже ранѣе доказанную, теорему (§ 496, b) и, кромѣ того, получаемъ

слѣдующій результатъ: если всѣ корни функціи f лежатъ въ нѣкоторой области, ограниченной сомкнутымъ контуромъ, то въ той же области лежатъ и всѣ корни функціи f' [1]). Другія ограниченія для положеній корней функціи f' получимъ, повторяя на плоскости первое упражненіе. Нужно только принять за α и β корни функціи f, наиближе лежащіе къ опредѣленному корню x функціи f'. Такъ какъ модуль каждой дроби въ лѣвой части уравненія (49) не можетъ быть больше суммы модулей всѣхъ прочихъ членовъ, то вмѣсто неравенствъ (48) получимъ теперь

$$|x-\beta| \leqq (n-1)|x-\alpha|, \quad |x-\alpha| \leqq (n-1)|x-\beta|.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее: если изъ всѣхъ круговъ, отдѣляющихъ гармонически α отъ β, начертимъ тѣ два, которые дѣлятъ отрѣзокъ въ отношеніи 1 къ $n-1$, и $n-1$ къ 1, то такимъ образомъ мы отдѣлимъ корни α и β отъ корня x функціи f'. Далѣе, если черезъ середину каждаго изъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, соединяющихъ α и β съ другими корнями f, возставимъ къ этимъ отрѣзкамъ перпендикуляры, то въ той части плоскости, которая лежитъ внѣ обоихъ круговъ, получимъ границы для положенія корня x функціи f', такъ какъ, по предположенію, точка x не можетъ отстоять отъ α и β дальше, чѣмъ отъ любого изъ другихъ корней. Такимъ образомъ кругами и прямыми линіями, опредѣленно построенными по даннымъ корнямъ функціи f, всегда можно ограничить тѣ части плоскости, въ которыхъ будутъ лежать различные корни функціи f'.

g) Изученіе взаимнаго расположенія корней функціи f и f' обнаруживаетъ замѣчательный законъ, относящійся къ неизмѣняемости нѣкоторыхъ выраженій или элементовъ. Такъ, между прочимъ, при переходѣ отъ f къ f' и къ слѣдующимъ производнымъ остается безъ измѣненія центръ тяжести корней

$$\xi_0 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Дѣйствительно (§ 465), сумма корней функціи

$$f = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n$$

равна $c_1 = n\xi_0$, а сумма корней функціи $f' = nx^{n-1} - (n-1)c_1 x^{n-2} + \cdots$ равна $\frac{n-1}{n} c_1 = (n-1)\xi_0$, такъ что среднее ариѳметическое корней и здѣсь равно ξ_0. Это число будетъ и единственнымъ корнемъ функціи $f^{(n-1)}$. Корни ξ и ξ' функціи $f^{(n-2)}$, сумма которыхъ равна $2\xi_0$, имѣютъ произведеніе, равное среднему ариѳметическому всѣхъ произведеній корней функціи f, взятыхъ по два, и т. д. Мы ограничимся здѣсь разсмотрѣніемъ чиселъ ξ_0 и $\xi\xi'$. Замѣтимъ, что изъ равенствъ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = n\xi_0,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \cdots = \tfrac{1}{2}n(n-1)\xi\xi'$$

получается

$$(a_1 - \xi_0)^2 + (a_2 - \xi_0)^2 + \cdots + (a_n - \xi_0)^2$$
$$= n(n-1)(\xi_0^2 - \xi\xi') = \tfrac{1}{2}n(n-1)(\xi - \xi')^2.$$

---

[1]) Объ этомъ вопросѣ и другихъ аналогичныхъ можно найти ссылки на многочисленныя сюда относящіяся изслѣдованія въ „Mélanges mathématiques" par Mansion, стр. 26.

Обозначимъ теперь черезъ ξ_ν и η_ν Декартовы координаты a_ν относительно начала ξ_0 и прямой $\xi\xi'$, какъ оси абсциссъ, тогда

$$\frac{a_1-\xi_0}{\xi_1+i\eta_1}=\frac{a_2-\xi_0}{\xi_2+i\eta_2}=\cdots=\frac{a_n-\xi_0}{\xi_n+i\eta_n}=\frac{\xi-\xi'}{2c}, \quad \text{(XVI bis)}$$

гдѣ c обозначаетъ разстояніе точекъ ξ и ξ' отъ ξ_0. Поэтому

$$(\xi_1+i\eta_1)^2+(\xi_2+i\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n+i\eta_n)^2=n(n-1)c^2,$$

а слѣдовательно,

$$\sum(\xi_\nu^2-\eta_\nu^2)=n(n-1)c^2, \quad \sum\xi_\nu\eta_\nu=0,$$

гдѣ суммированіе распространяется на значенія 1, 2, 3, ..., n числа ν. Теперь замѣтимъ еще, что

$$\sum\xi_\nu=0, \quad \sum\eta_\nu=0,$$

такъ что будемъ имѣть

$$\sum(\xi_\nu\sin\vartheta-\eta_\nu\cos\vartheta+h)^2=\tfrac{1}{2}\sum(\xi_\nu^2+\eta_\nu^2)-\tfrac{1}{2}n(n-1)c^2\cos 2\vartheta+nh^2.$$

Отсюда прямо видно, что эта сумма будетъ minimum при $\vartheta=0$ и $h=0$. Итакъ, изъ всѣхъ прямыхъ на плоскости прямая $\xi\xi'$ есть та, для которой сумма квадратовъ разстояній отъ всѣхъ корней функціи f будетъ наименьшею. Изъ сказаннаго выше вытекаетъ, что та же прямая обладаетъ тѣмъ же характеристическимъ свойствомъ по отношенію къ функціямъ f', f'', ... Въ частномъ случаѣ кубическаго уравненія обозначимъ

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=6a^2, \quad \eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2=6b^2,$$

такъ что $a^2-b^2=c^2$; тогда изъ соотношеній

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3=0, \quad \xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3=0$$

и изъ предшествующихъ вытекаетъ

$$\frac{\eta_1}{\xi_2-\xi_3}=\frac{\eta_2}{\xi_3-\xi_1}=\frac{\eta_3}{\xi_1-\xi_2}=\pm\frac{b}{a\sqrt{3}},$$

откуда

$$\frac{\xi_1^2}{a^2}+\frac{\eta_1^2}{b^2}=\frac{3\xi_1^2+(\xi_2-\xi_3)^2}{3a^2}=\frac{2\xi_1^2+(\xi_2+\xi_3)^2+(\xi_2-\xi_3)^2}{3a^2}=4.$$

То же самое относится къ другимъ двумъ точкамъ (корнямъ). Слѣдовательно, эллипсъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, фокусы котораго находятся въ точкахъ ξ и ξ' (ξ и ξ' суть корни производной отъ правой части кубическаго уравненія $f=0$), проходитъ черезъ точки $(-\frac{1}{2}\xi_1, -\frac{1}{2}\eta_1)$ и т. д., т. е. черезъ середины сторонъ треугольника $a_1a_2a_3$. Такимъ образомъ, мы снова находимъ извѣстную уже теорему (§ 415).

Теорема Штурма.

505. Пусть f есть цѣлая функція (съ вещественными коэффиціентами). Мы можемъ всегда предположить, что f не имѣетъ кратныхъ корней (§ 456). Пусть f_1 ея производная. Раздѣлимъ f на f_1 и обозначимъ черезъ f_2 остатокъ отъ дѣленія, взятый съ обратнымъ знакомъ. Затѣмъ дѣлимъ f_1 на f_2 и обозначаемъ черезъ f_3 остатокъ, взятый съ обратнымъ знакомъ. Продолжая этотъ процессъ, получимъ рядъ функцій,

$$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots,$$

степени которыхъ, очевидно, убываютъ. Послѣдняя изъ этихъ функцій есть постоянная, не равная нулю. Дѣйствительно, полиномы f и f_1 взаимно простые, потому что f кратныхъ корней не имѣетъ. Производимая нами операція, если не обращать вниманія на перемѣны знаковъ у остатковъ отъ дѣленій, есть не что иное, какъ разысканіе общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ f и f_1, и не можетъ привести къ остатку, равному нулю. Полученныя функціи называются функціями Штурма (Sturm), а образуемый ими рядъ—рядомъ Штурма.

506. Теорема Штурма [1]. *При возрастаніи x отъ a до b $(a<b)$ соотвѣтствующій функціи f рядъ Штурма теряетъ ровно столько перемѣнъ знака, сколько корней функціи f заключается въ интервалѣ (a, b).*

Прежде всего ясно, что при непрерывномъ измѣненіи x отъ a до b число перемѣнъ знака въ рядѣ Штурма остается безъ измѣненія, пока ни одна изъ функцій этого ряда не измѣнитъ своего знака. Поэтому, вслѣдствіе непрерывности этихъ функцій, намъ нужно только разсмотрѣть, что произойдетъ, когда значеніе x обратитъ которую нибудь изъ нихъ въ нуль. Прежде всего замѣтимъ, что двѣ рядомъ стоящія функціи одновременно въ нуль обратиться не могутъ. Это очевидно для f и f_1, потому что f не имѣетъ кратныхъ корней. Кромѣ того, такъ какъ между тремя рядомъ стоящими функціями существуетъ соотношеніе вида $f_{i-1}=f_i\varphi_i-f_{i+1}$, гдѣ φ_i цѣлая функція, то одновременное обращеніе въ нуль функцій f_{i+1} и f_i повлекло бы за собою таковое же для f_i и f_{i-1}, затѣмъ для f_{i-1} и f_{i-2} и т. д. и наконецъ, для f_1 и f, что невозможно. Слѣдовательно, если f_i обращается въ нуль, то f_{i-1} и f_{i+1} не обращаются въ нуль. Онѣ принимаютъ значенія разныхъ знаковъ, потому что, если, при $x=a$, $f_i=0$, то $f_{i-1}=-f_{i+1}$. Мы можемъ

---

[1]) Этой теоремѣ посвящена цѣлая глава въ учебникѣ Вебера (Weber, Algebra) томъ I, стр. 316—358.

всегда образовать около a достаточно малый интервалъ, въ которомъ функціи f_{i-1} и f_{i+1}, непрерывныя и неравныя нулю при $x = a$, сохраняютъ во всемъ интервалѣ тотъ знакъ, который онѣ имѣютъ при $x = a$. Для опредѣленности положимъ, что f_{i-1} сохраняетъ знакъ $+$, тогда f_{i+1} будетъ сохранять знакъ $-$. Въ такомъ случаѣ, слѣва и справа отъ a, функціи f_{i-1}, f_i, f_{i+1} будутъ имѣть знаки $+$, $\pm$, $-$. Каковъ бы ни былъ знакъ функціи f_i до и послѣ ея обращенія въ нуль, всегда рядъ f_{i-1}, f_i, f_{i+1} дастъ одну перемѣну знака слѣва отъ a и одну перемѣну знака справа отъ a. Отсюда заключаемъ, что переходъ числа x черезъ корень какой-нибудь изъ промежуточныхъ функцій, если онъ не будетъ въ то же время корнемъ функціи f, никакого измѣненія въ числѣ перемѣнъ знака въ рядѣ Штурма не производитъ. Такое измѣненіе можетъ произойти только при переходѣ x черезъ корень функціи f. Въ этомъ случаѣ дѣйствительно произойдетъ потеря одной перемѣны знака, потому что, какъ мы видѣли (§ 494, a), f_1 справа отъ a имѣетъ знакъ, одинаковый съ f, а слѣва отъ a противоположный. Итакъ, въ то время какъ при переходѣ x черезъ какой-нибудь корень a функціи f пропадаетъ одна перемѣна знака, при переходѣ черезъ любое другое значеніе ни одна не пропадаетъ и ни одна не появляется вновь. Ясно, слѣдовательно, что при переходѣ x отъ a къ b пропадаетъ столько перемѣнъ знака, сколько корней функціи f заключается между a и b.

507. Примѣчанія. a) При составленіи ряда Штурма можно, не измѣняя заключеній, умножать встрѣчаемыя функціи на любыя положительныя числа. Такія умноженія полезно производить въ численныхъ приложеніяхъ, во избѣжаніе дробныхъ коэффиціентовъ, вводимыхъ послѣдовательными дѣленіями.

b) При доказательствѣ теоремы, послѣдній постоянный членъ ряда не входитъ въ разсмотрѣніе, благодаря тому лишь обстоятельству, что, не будучи равнымъ нулю, онъ всегда сохраняетъ опредѣленный знакъ. Отсюда слѣдуетъ, что если при составленіи функцій Штурма дойдемъ до такой, которая сохраняетъ постоянный знакъ въ разсматриваемомъ интервалѣ, то на ней и можно остановить рядъ Штурма.

c) Это замѣчаніе можно еще иначе оправдать, разсмотрѣвъ ближе измѣненіе знаковъ въ Штурмовомъ рядѣ. Разсмотримъ, напримѣръ, перемѣну знака, представляемую нѣкоторыми двумя функціями, положимъ f_i и f_{i+1}, при $x = a$. При непрерывномъ возрастаніи x эта перемѣна знака будетъ подвигаться влѣво отъ f_i или вправо отъ f_{i+1}, когда одна изъ этихъ функцій будетъ мѣнять знакъ. А именно, если первая изъ функцій, которая должна измѣнить знакъ, будетъ f_i, то перемѣна знака передвинется влѣво (XVII), и такимъ образомъ, она будетъ передвигаться влѣво всякій разъ, какъ функція, стоящая лѣвѣе другой, раньше этой другой

измѣнитъ знакъ, пока не займетъ перваго мѣста въ рядѣ перемѣнъ и послѣдовательностей знака. Затѣмъ, она непремѣнно перейдетъ въ постоянство, когда x перейдетъ черезъ корень функціи f. Понятно теперь, что функція Штурма, не мѣняющая знака въ разсматриваемомъ интервалѣ, представляетъ собою преграду, препятствующую такому передвиженію перемѣны знака справа налѣво или наоборотъ. Этимъ именно и объясняется, что лежащая вправо отъ этой функціи часть Штурмова ряда не играетъ роли при счетѣ потерянныхъ перемѣнъ знака, такъ какъ ни одна изъ перемѣнъ знака, встрѣчающаяся въ этой части, до начала ряда достигнуть не можетъ, чтобы обратиться здѣсь въ постоянство знака.

d) До сихъ поръ молча подразумѣвалось, что на границахъ интервала (a, b) ни одна изъ функцій $f, f_1, f_2, \ldots$ не обращается въ нуль. Иначе непонятно было бы, какъ считать перемѣны знака на этихъ границахъ, между тѣмъ какъ къ этому счету и сводится все дѣло. Мы условимся теперь при этомъ счетѣ опускать тѣ члены, которые обращаются въ нуль. Но тогда надо разсмотрѣть не требуетъ ли это условіе какого-либо измѣненія въ формулировкѣ самой теоремы Штурма. Прежде всего замѣтимъ, что, какъ уже было сказано, три функціи f_{i-1}, f_i, f_{i+1} представляютъ одну перемѣну знака какъ слѣва, такъ и справа отъ корня функціи f_i, и одну же перемѣну знака мы сосчитаемъ въ парѣ функцій f_{i-1} и f_{i+1}, когда выкинемъ средній членъ $f_i = 0$. Поэтому выкидываніе среднихъ членовъ ряда, обращающихся въ 0 при $x = a$ или $x = b$, никакого измѣненія въ счетѣ перемѣнъ знака не произведетъ. Остается разсмотрѣть тѣ случаи, когда сама функція f исчезаетъ на одной изъ границъ или на обѣихъ. Съ этой цѣлью, вмѣсто интервала (a, b), разсмотримъ сперва интервалъ $(a + h, b - h)$, гдѣ h достаточно малое положительное число для того, чтобы для значеній x, лежащихъ между a и $a + h$, и между $b - h$ и b ни одна изъ функцій $f, f_1, f_2, \ldots$ не мѣняли знака. Если $f(a) = 0$, а $f(b) \neq 0$, то при $x = a + h$, функціи f и f_1, какъ извѣстно, представляютъ постоянство знака, а потому число перемѣнъ знака въ рядахъ $f, f_1, f_2, \ldots$ при $x = a + h$, равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ $f_1, f_2, \ldots$ при $x = a$, полученномъ послѣ опусканія члена $f(a) = 0$. Обозначимъ это число черезъ μ. Число перемѣнъ знака въ рядѣ $f, f_1, f_2, \ldots$ при $x = b - h$, очевидно, равно числу перемѣнъ знака въ томъ же рядѣ при $x = b$. Обозначая его черезъ ν, находимъ, что число потерянныхъ перемѣнъ знака при переходѣ x отъ a до b равно $v = \mu - \nu$ и равно числу корней функціи f въ промежуткѣ $(a + h, b)$, т. е. въ интервалѣ (a, b), за исключеніемъ нижней границы. Если $f(b) = 0$, то, какъ извѣстно, функціи f и f_1 при $x = b - h$ представляютъ перемѣну знака, которая исчезаетъ при переходѣ x отъ $b - h$ къ b. Поэтому, выкидывая членъ $f(b) = 0$ и обозначая черезъ ν число перемѣнъ знака въ рядѣ $f_1, f_2 \ldots$ при $x = b$, мы включимъ въ

число потерянныхъ перемѣнъ знака $v = \mu - \nu$ и ту, которая обусловлена существованіемъ корня b. Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что при нашемъ условіи относительно счета перемѣнъ знака теорему Штурма надо формулировать слѣдующимъ образомъ: Число перемѣнъ знака, теряемыхъ рядомъ Штурма, соотвѣтствующимъ функціи f, при переходѣ перемѣнной отъ нижней границы интервала къ верхней, равно числу корней функціи f, лежащихъ въ данномъ интервалѣ, за исключеніемъ нижней границы. Поэтому, если при $x = a$ или $x = b$ найдемъ $f = 0$, и, выкинувъ какъ этотъ, такъ и всякій другой членъ ряда, обращающійся въ нуль, насчитаемъ v потерянныхъ перемѣнъ знака при переходѣ x отъ a къ b, то можемъ утверждать слѣдующее: кромѣ корня a, существуетъ еще v корней въ промежуткѣ (a, b); напротивъ того, кромѣ корня b существуетъ еще лишь $v - 1$ корней въ промежуткѣ (a, b), не считая a, который также можетъ быть корнемъ.

е) Теорема Штурма остается справедливою и въ томъ случаѣ, когда f имѣетъ кратные корни, если предположимъ, что каждый кратный корень считается одинъ разъ, какъ простой. Дѣйствительно, въ данномъ случаѣ послѣдній членъ ряда Штурма будетъ, очевидно, пропорціоналенъ общему наибольшему дѣлителю функцій f и f_1. Если обозначимъ черезъ φ_i частное отъ дѣленія f_i на этого наибольшаго дѣлителя (который, очевидно, будетъ дѣлителемъ всѣхъ функцій ряда), то ясно, что перемѣны знака въ рядѣ $f, f_1, f_2, \ldots$ будутъ совпадать съ перемѣнами знака въ рядѣ $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Послѣдній рядъ обладаетъ тѣми же свойствами, какъ и рядъ Штурма, соотвѣтствующій функціи φ, т. е. функціи, простыми корнями которой будутъ всѣ различные корни функціи f (и только эти корни) *).

508. Приложенія. а) Теорема Штурма даетъ возможность указать точно число вещественныхъ корней уравненія и узнать сколько между ними положительныхъ и сколько отрицательныхъ **). Напримѣръ, для функціи $f = x^4 - 2x^2 + x - 1$ рядъ функцій Штурма состоитъ изъ f и слѣдующихъ:

$$f_1 = 4x^3 - 4x + 1, \quad f_2 = 4x^2 - 3x + 4, \quad f_3 = 23x + 8, \quad f_4 = -2924.$$

Для значенія x отрицательнаго и достаточно большого по абсолютной величинѣ рядъ знаковъ будетъ:

$$+ \; - \; + \; - \; - \quad \text{(три перемѣны знака);}$$

при $x = 0$ знаки совпадаютъ со знакамн независимыхъ членовъ, т. е.

$$- \; + \; + \; + \; - \quad \text{(двѣ перемѣны знака).}$$

Мы имѣемъ одну потерянную перемѣну, слѣдовательно, одинъ отрица-

*) Подробнѣе объ этомъ см. Laurent H. „Traité d'Algèbre“, стр. 62.

**) Стоитъ только примѣнить ее къ интерваламъ $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

тельный корень. При x достаточно большомъ имѣемъ знаки старшихъ членовъ

$$+ + + + -\quad \text{(одна перемѣна знака)}.$$

Слѣдовательно, уравненіе $x^4 - 2x^2 + x - 1 = 0$ имѣетъ одинъ положительный, одинъ отрицательный корень и два сопряженныхъ мнимыхъ. Можно еще добавить, что положительный корень лежитъ между 1 и 2, а отрицательный между -2 и -1. Теорема Декарта даетъ только существованіе одного положительнаго и одного отрицательнаго корня, но оставляетъ въ неизвѣстности будутъ ли остальные два корня вещественные или мнимые:

b) Теорема Штурма прилагается также къ разысканію необходимыхъ и достаточныхъ условій вещественности всѣхъ корней алгебраическаго уравненія

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

Во первыхъ, рядъ Штурма долженъ быть полнымъ, т. е. состоять изъ $n+1$ функцій степеней n, $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, 0 чтобы возможна была потеря n перемѣнъ знака. Во вторыхъ при x достаточно большомъ рядъ Штурма долженъ представлять одни постоянства знака, слѣдовательно, при $a_0 > 0$ старшіе члены всѣхъ Штурмовыхъ функцій должны быть положительны. Эти условія и достаточны. Дѣйствительно, положимъ, что они выполнены. Давая перемѣнной x отрицательное и достаточно большое по абсолютной величинѣ значеніе, найдемъ для функцій Штурма поперемѣнно знаки $+$ и $-$, такъ что рядъ ихъ дастъ n перемѣнъ знака. Выдѣляя, слѣдовательно, интервалъ $(-l, +l)$, внѣ котораго нѣтъ корней функціи f, найдемъ, что при переходѣ x отъ $-l$ къ $+l$ рядъ Штурма потеряетъ n перемѣнъ знака и, слѣдовательно, f будетъ имѣть n вещественныхъ корней. Такъ напримѣръ, для уравненія $x^3 + px + q = 0$ рядъ Штурма будетъ

$$f = x^3 + px + q,\quad f_1 = 3x^2 + p,\quad f_2 = -2px - 3q,\quad f_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Слѣдовательно, должно быть $p < 0$, $4p^3 + 27q^2 < 0$. Но первое условіе уже заключается во второмъ, потому что, при $p \geqq 0$, $4p^3 + 27q^2$ не можетъ быть меньше 0. Слѣдовательно (срав. § 314, e), необходимое и достаточное условіе вещественности и неравенства всѣхъ корней функціи $x^3 + px + q$ есть $4p^3 + 27q^2 < 0$.

509. Отвѣтъ на вопросы предыдущаго параграфа можно будетъ дать въ общемъ видѣ, если удастся найти общія выраженія функцій Штурма. Цѣлое частное отъ дѣленія

$$f = x^n - cx^{n-1} + \cdots \quad \text{на} \quad f_1 = nx^{n-1} - (n-1)cx^{n-2} + \cdots$$

равно $\frac{1}{n}\left(x - \frac{c}{n}\right)$, и потому мы имѣемъ

$$f = \frac{1}{n}\left(x - \frac{c}{n}\right)f_1 - f_2,$$

откуда слѣдуетъ

$$\frac{f_2}{f} = \frac{1}{n}\left(x - \frac{c}{n}\right)\sum_i \frac{1}{x - a_i} - 1 = \frac{1}{n^2}\sum_i \frac{na_i - c}{x - a_i}.$$

Замѣчая, далѣе, что

$$na_i - c = (a_i - a_1) + (a_i - a_2) + \cdots + (a_i - a_n),$$

можемъ написать

$$\frac{f_2}{f} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}'\left(\frac{a_i - a_j}{x - a_i} + \frac{a_j - a_i}{x - a_j}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}'\frac{(a_i - a_j)^2}{(x - a_i)(x - a_j)}.$$

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ $\frac{f_1}{f}$, можно угадать общій результатъ, найденный Сильвестромъ [1]). Независимо отъ нѣкоторыхъ множителей, которые въ случаѣ уравненій съ вещественными коэффиціентами всегда положительны (а потому могутъ быть отброшены), будемъ имѣть

$$\frac{f_i}{f} = \sum'\frac{(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2 \cdots (a_{i-1} - a_i)^2}{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_i)},$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ системы изъ i указателей, которыя (какъ 1, 2, 3, ..., i) выбраны между числами 1, 2, 3, ... n. Въ частности, что можно было предвидѣть, f_n есть не что иное, какъ дискриминантъ Δ функціи f. Послѣдняя формула показываетъ, что f_i полиномъ степени $n - i$, коэффиціенты котораго суть симметрическія функціи корней функціи f, и слѣдовательно, выражаются цѣлыми раціональными функціями коэффиціентовъ полинома f. На основаніи сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ важно вычислить первый коэффиціентъ въ f_i, который мы обозначимъ черезъ σ_i. Мы имѣемъ

$$\sigma_i = \sum(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2 \cdots (a_{i-1} - a_i)^2$$
$$= \sum\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_i \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_i^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \cdots & a_i^{i-1} \end{vmatrix}^2$$

и видимъ (§ 30), что σ_i есть квадратъ матриссы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & a_3^{i-1} & \cdots a_n^{i-1} \end{vmatrix},$$

---

[1]) Philosophical Magazine (1839), Journal de Liouville (1862, p. 368). Доказательство см. у I. Serret, „Algèbre supérieure“ 4-е изд. т. I стр. 570, или у Salmon, „Algèbre supérieure“ стр 73 и слѣд. См. также замѣтку Gilbert о Штурмовыхъ функціяхъ въ Nouvelles Annales de Math. 1866 г. стр. 263 и Trudi „Determinanti“ (Applicazioni, § V).

такъ что можно написать

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_i \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{i+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \cdots & s_{2i-2} \end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно (§ 466),

$$\sigma_1 = s_0 = n, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = ns_2 - s_1^2 = (n-1)c_1^2 - 2nc_2 \quad \text{и т. д.}$$

и, наконецъ, $\sigma_n = \Delta$.

510. Теорема. Число паръ мнимыхъ корней цѣлой функціи, неимѣющей кратныхъ корней, равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$.

Эту теорему легко вывести изъ теоремы Штурма, если принять во вниманіе замѣчанія § 508. Въ самомъ дѣлѣ, если v есть число перемѣнъ знака въ рядѣ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, то таково же будетъ и число перемѣнъ знака въ рядѣ $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ при достаточно большомъ значеніи x, потому что первыя двѣ функціи послѣдняго ряда даютъ постоянство знака. Если же дадимъ x значеніе отрицательное и достаточно большое по абсолютной величинѣ, то каждая перемѣна знака обратится въ постоянство и обратно. Слѣдовательно, въ послѣднемъ случаѣ число перемѣнъ знака въ рядѣ Штурма будетъ $n - v$. Поэтому число потерянныхъ перемѣнъ знака при возрастаніи x въ интервалѣ $(-l, l)$, внѣ котораго нѣтъ корней f, будетъ равно $n - 2v$. При теоремѣ Штурма имѣемъ $n - 2v$ вещественныхъ корней и, слѣдовательно, v паръ мнимыхъ.

511. Послѣдняя теорема можетъ быть установлена при помощи другого интереснаго доказательства [1]), не требующаго знанія Штурмовыхъ функцій. Разсмотримъ квадратную форму, дискриминантъ которой равенъ

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

[1]) См. мемуаръ Боркгардта (Borchardt) въ „Journal de Liouville“, 1847, стр. 58.

т. е. дискриминанту даннаго уравненія. Δ не равно нулю, потому что всѣ корни даннаго уравненія простые. Разсматриваемая квадратная форма, которую можно представить въ видѣ

$$\begin{aligned}\varphi = (&s_0x_1 + s_1x_2 + s_2x_3 + \cdots + s_{n-1}x_n)x_1\\ &+ (s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + \cdots + s_nx_n)x_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ (s_{n-1}x_1 + s_nx_2 + s_{n+1}x_3 + \cdots s_{2n-2}x_n)x_n,\end{aligned}$$

можетъ быть поэтому приведена къ суммѣ n квадратовъ, не равныхъ нулю. Здѣсь надо припомнить, что число отрицательныхъ квадратовъ равно (§ 98) именно тому числу перемѣнъ знака, о которомъ говорится въ формулировкѣ теоремы. Поэтому достаточно привести φ къ каноническому виду и показать, что число отрицательныхъ квадратовъ равно числу паръ мнимыхъ корней уравненія. Это приведеніе въ данномъ случаѣ непосредственно получаютъ, если въ выраженіи φ отдѣлимъ все то, что относится къ опредѣленному корню α. Такимъ образомъ получимъ

$$\begin{aligned}&(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2x_3 + \cdots + \alpha^{n-1}x_n)x_1\\ &+ (\alpha x_1 + \alpha^2x_2 + \alpha^3x_3 + \cdots + \alpha^nx_n)x_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ (\alpha^{n-1}x_1 + \alpha^nx_2 + \alpha^{n+1}x_3 + \cdots + \alpha^{2n-2}x_n)x_n\\ &= (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2x_3 + \cdots + \alpha^{n-1}x_n)^2.\end{aligned}$$

Слѣдовательно, полагая

$$y_i = x_1 + \alpha_i x_2 + \alpha_i^2 x_3 + \cdots + \alpha_i^{n-1}x_n,$$

будемъ имѣть

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2.$$

Если α_i вещественное число, то $y_i^2 > 0$. Если α_i мнимый корень, то пусть α_j будетъ ему сопряженный. Тогда y_i и y_j будутъ также мнимыми сопряженными, и представятся въ видѣ $p \pm q\sqrt{-1}$, съ вещественными коэффиціентами p и q. Отсюда слѣдуетъ:

$$y_i^2 + y_j^2 = (p + q\sqrt{-1})^2 + (p - q\sqrt{-1})^2 = 2(p^2 - q^2).$$

Итакъ, каждая пара мнимыхъ корней дастъ въ каноническомъ видѣ формы φ два вещественныхъ квадрата, одинъ положительный, другой отрицательный, между тѣмъ какъ всякій вещественный корень

даетъ одинъ положительный квадратъ. Слѣдовательно, всякій отрицательный квадратъ обнаруживаетъ одну пару мнимыхъ корней [1]).

512. Примѣчанія. a) Необходимыя и достаточныя условія вещественности всѣхъ корней алгебраическаго уравненія съ вещественными коэффиціентами состоятъ въ томъ, что

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix} > 0.$$

Эти неравенства всегда можно выразить неравенствами въ буквахъ c, при помощи теоріи симметрическихъ функцій.

b) Условіе $\Delta > 0$ необходимо для вещественности всѣхъ корней. Но когда оно выполнено, можно утверждать лишь только то, что число паръ мнимыхъ корней будетъ четное или нуль. Если $\Delta < 0$, то уравненіе имѣетъ нечетное число паръ мнимыхъ корней. Это заключеніе можно прямо вывести изъ выраженія

$$\Delta = (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2 \ldots (a_{n-1} - a_n)^2,$$

которое показываетъ, что Δ навѣрно больше 0, если всѣ a вещественныя числа. Далѣе, всякая пара сопряженныхъ мнимыхъ корней a_i и a_j вводитъ отрицательный множитель $(a_i - a_j)^2$, между тѣмъ какъ всѣ другіе множители $(a_i - a_s)$ и $(a_j - a_t)$, гдѣ a_s и a_t сопряженные корни, соединяются попарно въ положительныя произведенія.

513. Примѣры. a) Для полнаго кубическаго уравненія

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$$

необходимыя и достаточныя условія вещественности и неравенства всѣхъ трехъ корней будутъ

$$a_1^2 - a_0 a_2 > 0, \quad \Delta > 0,$$

гдѣ Δ извѣстный (§ 87) дискриминантъ

$$\Delta = 4 (a_1^2 - a_0 a_2)(a_2^2 - a_1 a_3) - (a_1 a_2 - a_0 a_3)^2$$

Здѣсь условіе $\Delta > 0$ должно быть само по себѣ достаточнымъ, потому что уравненіе 3-й степени не можетъ имѣть четырехъ мнимыхъ корней. По-

---

[1]) Подобными же соображеніями можно доказать болѣе общую теорему, данную Brioschi (см. „Determinanti“ Trudi, стр. 250). См. также статью Sylvester въ „Philosophical Transactions“ за 1853 г. объ обобщеніи теоремы Штурма, и статью Brioschi въ „Nouvelles Annales de Math.“, 1856, стр. 275.

этому условіе $a_1^2 - a_0 a_2 > 0$ должно заключаться въ условіи $\Delta > 0$ (срав. § 508, b), и въ этомъ тотчасъ убѣждаемся, замѣтивъ тождество

$$a_0^2 \Delta = 4(a_1^2 - a_0 a_2)^3 - (2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3)^2.$$

b) Для уравненія 4-ой степени

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0,$$

наоборотъ, условіе $\Delta > 0$ не достаточно, чтобы можно было утверждать вещественность всѣхъ корней. По знаку Δ можно лишь навѣрно сказать, что при $\Delta < 0$ два корня вещественные и два мнимые. При $\Delta > 0$ надо прибѣгнуть еще къ другимъ функціямъ Штурма, въ которыхъ коэффиціенты при старшихъ членахъ, независимо отъ нѣкоторыхъ положительныхъ множителей, будутъ [1])

$$a_1^2 - a_0 a_2, \quad (a_1^2 - a_0 a_2) I + \tfrac{3}{2} a_0 J,$$

гдѣ (§ 87)

$$I = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2, \quad J = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Чтобы всѣ корни были вещественными при $\Delta > 0$, необходимо, чтобы оба числа I и J были больше 0. Въ противномъ случаѣ (при $\Delta > 0$, всѣ 4 корня мнимые.

c) И для уравненія 5-й степени можно утверждать, что если дискриминантъ меньше 0, то уравненіе имѣетъ 2 мнимыхъ и 3 вещественныхъ корня. Если дискриминантъ больше 0, то, если не всѣ корни вещественные, уравненіе имѣетъ только одинъ вещественный корень. Одинъ изъ возможныхъ случаевъ отличается отъ другого при помощи изслѣдованія нѣкоторыхъ трехъ функцій отъ коэффиціентовъ [2]).

РѢШЕНІЕ УРАВНЕНІЙ.

Численное рѣшеніе.

514. Переходимъ теперь къ численному рѣшенію уравненій, т. е. къ разысканію тѣхъ чиселъ, которыя, будучи подставлены на мѣсто перемѣнной, обращаютъ въ нуль данный полиномъ съ численными коэффиціентами. При этомъ мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ уравненій вида

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

---

[1]) Cayley „Quarterly Journal", t. IV, p. 10. См. также замѣтку Halphen въ „Nouv. Ann. de Math.", 1885, p. 34—35.

[2]) Roberts „Quarterly Journal", t. IV. p. 175.

съ цѣлыми коэффиціентами и $a_0 > 0$, замѣчая, что къ этому виду можно привести всякое алгебраическое уравненіе съ алгебраическими (т. е. не трансцендентными) коэффиціентами, которые (по опредѣленію) удовлетворяютъ алгебраическому уравненію съ раціональными коэффиціентами. Дѣйствительно, если одинъ или нѣсколько коэффиціентовъ a удовлетворяютъ одному или нѣсколькимъ алгебраическимъ уравненіямъ, то можно эти коэффиціенты исключить (срав. § 444) изъ этихъ уравненій и даннаго, и исключеніе выполнить такъ, чтобы получилось уравненіе (высшей степени) съ раціональными коэффиціентами. Эти коэффиціенты можно привести къ цѣлымъ числамъ, умножая все уравненіе на надлежаще выбранное цѣлое число. Когда это сдѣлано, обыкновенно начинаютъ съ разысканія цѣлыхъ корней, затѣмъ дробныхъ раціональныхъ и потомъ, для упрощенія, кратныхъ корней. Затѣмъ приступаютъ къ приближенному вычисленію ирраціональныхъ корней. Что касается мнимыхъ корней, то напомнимъ (§ 493), что ихъ вычисленіе сводится къ вычисленію вещественныхъ корней уравненій съ вещественными коэффиціентами.

515. Границы корней. Прежде всего надо ограничить корни, т. е. опредѣлить интервалъ, внѣ котораго не можетъ находиться ни одинъ вещественный корень уравненія. Границы этого интервала называются нижнею и верхнею границами корней. Вопросъ сейчасъ же сводится къ опредѣленію одной верхней границы, потому что, если $f(x)$ обозначаетъ первую часть уравненія (1), то нижняя граница его корней, очевидно, получится, если возьмемъ верхнюю границу корней уравненія $f(-x) = 0$, съ обратнымъ знакомъ. Точно такъ же можно получить нижнюю границу положительныхъ корней $f(x)$, взявъ обратную величину верхней границы корней $f\left(\frac{1}{x}\right)$ и т. д. Для опредѣленія верхней границы l имѣется много правилъ:

а) **Правило Ньютона.** Если при $x = l$ всѣ функціи f, f', f'', ... положительны, то l верхняя граница корней функціи f. Дѣйствительно, при всякомъ $x > l$, имѣемъ

$$f(x) = f(l) + (x - l)f'(l) + \tfrac{1}{2}(x - l)^2 f''(l) + \cdots > 0.$$

Впрочемъ, это правило можно считать непосредственнымъ слѣдствіемъ теоремы Бюдана (§ 502). Для практическаго его примѣненія, начинаютъ съ опредѣленія наименьшаго цѣлаго числа, котораго не превосходитъ корень функціи $f^{(n-1)}$. Это число подставляютъ въ $f^{(n-2)}$ и, если получится число отрицательное, то увеличиваютъ упомянутое число столькими единицами, сколько нужно, чтобы соотвѣтствующее значеніе $f^{(n-2)}$ было больше 0. Новое полученное число подставляютъ въ $f^{(n-3)}$ и т. д., и продолжаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока не получатъ числа, для котораго само f будетъ больше 0. Такое число l и будетъ искомою верхнею границею.

b) **Правило Лагерра.** Тотъ же процессъ можно примѣнить, замѣняя рядъ функцій f, f', f'', ... рядомъ функцій Руффини $f, f_1, f_2, \ldots$ Справедливость этого правила прямо слѣдуетъ изъ теоремы Лагерра (§ 501).

c) Извѣстны и другія правила, менѣе удовлетворительныя въ смыслѣ получаемаго результата*), но легче и быстрѣе примѣнимыя. Обозначимъ черезъ a_r, наибольшій изъ коэффиціентовъ, предшествующихъ первому отрицательному коэффиціенту a_s, и черезъ a_t наибольшій по абсолютной величинѣ изъ отрицательныхъ коэффиціентовъ. Правила Маклорена, Лагранжа и Тилло выражаются слѣдующими равенствами

$$l = 1 - \frac{a_t}{a_0}, \quad l = 1 + \sqrt[s]{-\frac{a_t}{a_0}}, \quad l = 1 + \sqrt[s-r]{-\frac{a_t}{a_r}}.$$

Лагранжъ далъ еще другое правило для опредѣленія высшаго предѣла положительныхъ корней. а именно: составивъ выраженія:

$$\sqrt[s]{-\frac{a_s}{a_0}}, \quad \sqrt[t]{-\frac{a_t}{a_0}}$$

и всѣ подобныя имъ, относящіяся ко всѣмъ отрицательнымъ коэффиціентамъ уравненія, надо взять сумму двухъ наибольшихъ изъ этихъ чиселъ; оно и дастъ число l.

d) Вмѣсто того, чтобы прилагать эти правила, часто разлагаютъ полиномъ f на прилично выбранныя части и стараются непосредственными испытаніями найти верхнія границы l', l'', ... корней каждой части, послѣ чего берутъ за l наибольшее изъ этихъ чиселъ. Но изъ всѣхъ этихъ правилъ наиболѣе удовлетворительнымъ остается правило Ньютона 1) потому, что оно никогда не даетъ результата большаго, чѣмъ другіе, и 2) потому, что оно даетъ ближайшее цѣлое число, большее самаго большого корня [1]), если всѣ корни вещественные. Если въ послѣднемъ случаѣ наибольшій корень есть цѣлое число, то правило Ньютона его и дастъ. Это преимущество правила Ньютона есть прямое слѣдствіе неизмѣняемости центра тяжести корней (§ 504, g). (XVIII.)

516. Цѣлые корни. Если a корень функціи f, то (§ 500, формула 44)

$$f(x) = (x-a)(x^{n-1}f_n + x^{n-2}f_{n-1} + \cdots + f_1). \tag{2}$$

гдѣ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ обозначаютъ значенія функцій Руффини при $x = a$. Замѣтимъ теперь, что при a цѣломъ всѣ эти значенія также цѣлыя

*) А именно, дающія вообще слишкомъ большое число l.

1) „Nouvelle Correspondance Mathématique", 1880, стр. 174.

числа, и что они получаются одно изъ другого помощью соотношеній

(3) $f_n = a_0,\ f_{n-1} = af_n + a_1,\ \ldots,\ f_1 = af_2 + a_{n-1},\ 0 = af_1 + a_n.$

Послѣднее равенство показываетъ, что a дѣлитель числа a_n; частное отъ дѣленія равно $-f_1$. Предпослѣднее показываетъ, что a дѣлитъ $a_{n-1} - f_1$, т. е. сумму a_{n-1} и предыдущаго частнаго. Новое частное будетъ $-f_2$. Продолжая такимъ образомъ, найдемъ, что послѣднее частное есть $-f_n = a_0$. Если всѣ эти условія выполнены, то a навѣрно будетъ корнемъ, потому что равенства (3), умноженныя соотвѣтственно на a^n, a^{n-1}, ..., a, 1 и сложенныя даютъ $f(a) = 0$. Итакъ, имѣемъ теорему:

Для того, чтобы цѣлое число было корнемъ алгебраическаго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами, необходимо и достаточно, чтобы это число дѣлило независимый членъ, далѣе, коэффиціентъ при x, сложенный съ частнымъ отъ перваго дѣленія, коэффиціентъ при x^2, сложенный съ частнымъ отъ второго дѣленія, ..., коэффиціентъ при x^{n-1}, сложенный съ частнымъ отъ $(n-1)$-го дѣленія, и наконецъ, чтобы частное отъ n-го дѣленія было равно коэффиціенту старшаго члена, взятому съ обратнымъ знакомъ.

517. Разысканіе цѣлыхъ корней алгебраическаго уравненія всецѣло основано на предыдущей теоремѣ. Надо найти различныхъ дѣлителей независимаго члена и испытать для каждаго изъ нихъ, удовлетворяются ли указанныя условія. Но, чтобы не производить лишнихъ дѣйствій, важно знать нѣкоторые признаки, по которымъ a priori можно исключить изъ испытанія того или другого дѣлителя, не могущаго быть корнемъ уравненія. Прежде всего ясно, что надо исключить тѣхъ дѣлителей числа a_n, которые лежатъ внѣ границъ корней уравненія. Далѣе, тождество (2) показываетъ, если въ немъ положимъ $x = 1$ и $x = -1$, что $a + 1$ дѣлитъ $f(-1)$, а $a - 1$ дѣлитъ $f(+1)$. Все это ведетъ къ слѣдующему процессу при разысканіи цѣлыхъ корней: 1. Опредѣляемъ границы корней. 2. Испытываемъ, не будутъ ли 1 или -1 корнями уравненія, при помощи вычисленія $f(1)$ и $f(-1)$, и если ± 1 будетъ корнемъ, то освобождаемъ уравненіе отъ найденнаго корня ± 1 дѣленіемъ $f(x)$ на $x \mp 1$. 3. Исключаемъ всѣхъ дѣлителей числа a_n, отличныхъ отъ ± 1, лежащихъ внѣ границъ корней. 4. Прибавляемъ единицу къ каждому изъ остальныхъ дѣлителей и исключаемъ тѣхъ изъ нихъ, которые послѣ этого не дадутъ дѣлителя числа $f(-1)$; затѣмъ, вычитаемъ единицу изъ оставшихся дѣлителей и отбрасываемъ тѣхъ, которые послѣ этого не дадутъ дѣлителя числа $f(1)$. 5. Примѣняемъ основную теорему къ остальнымъ дѣлителямъ. 6. Дѣлимъ послѣ того, какъ найдемъ корень a, функцію $f(x)$ на $x - a$, полученное частное снова дѣлимъ на $x - a$ и т. д., чтобы узнать, будетъ ли a простымъ, двойнымъ и т. д. корнемъ.

518. Примѣръ для упражненія. Найти цѣлые корни уравненія

$$2x^4 + 4x^3 - 59x^2 - 61x + 30 = 0.$$

Правило Ньютона даетъ границы корней -7 и 6. Дѣлители 30, лежащіе въ этихъ границахъ, исключая ± 1, будутъ

$$-6, \quad -5, \quad -3, \quad -2, \quad 2, \quad 3, \quad 5.$$

Прямо видно, что $+1$ и -1 не корни уравненія, потому что

$$f(1) = -84, \quad f(-1) = 30.$$

Прибавляя единицу къ найденнымъ дѣлителямъ получаемъ числа

$$-5, \quad -4, \quad -2, \quad -1, \quad 3, \quad 4, \quad 6,$$

изъ которыхъ -4 и $+4$ не дѣлятъ $f(-1) = 30$. Слѣдовательно, дѣлителей -5 и 3 надо отбросить. Остаются дѣлители

$$-6, \quad -3, \quad -2, \quad 2, \quad 5.$$

Вычитая единицу изъ каждаго изъ нихъ, получаемъ числа

$$-7, \quad -4, \quad -3, \quad 1, \quad 4,$$

которыя всѣ дѣлятъ $f(1) = 84$.

Мы видимъ, слѣдовательно, что единственныя числа, которыя надо испытать съ помощью основной теоремы, будутъ -6, -3, -2, 2 и 5. Вычисленіе можно расположить слѣдующимъ образомъ, обрывая выкладку для каждаго числа, какъ только дѣленіе нацѣло оказывается невозможнымъ:

	(−61)		(−59)		(+4)		(+2)
−6	−5	−66	11	−48	8	12	−2
−3	−10	−71					
−2	−15	−76	38	−21			
2	15	−46	−23	−82	−41	−37	
5	6	−55	−11	−70	−14	−10	−2.

Слѣдовательно, данное уравненіе имѣетъ только два цѣлыхъ корня -6 и 5. При помощи дѣленія, сейчасъ видимъ, что оба они простые:

$$f(x) = (x+6)\,(x-5)\,(2x^2 + 2x - 1).$$

519. Дробные корни. Допустимъ, что неприводимая дробь $\frac{p}{q}$ удовлетворяетъ уравненію (1), въ которомъ $a_0 = 1$. Полагая $x = \frac{p}{q}$ и умножая на q^{n-1}, получимъ

$$\frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \cdots + a_n q^{n-1} = 0,$$

т. е. неприводимая дробь $\frac{p^n}{q}$ должна быть равна цѣлому числу, что невозможно. Итакъ, имѣемъ теорему: алгебраическое уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами и съ коэффиціентомъ, равнымъ единицѣ, въ старшемъ членѣ не можетъ имѣть дробныхъ раціональныхъ корней. Эта теорема даетъ возможность тотчасъ свести вопросъ о разысканіи дробныхъ корней къ вопросу о разысканіи цѣлыхъ корней. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что данное уравненіе не имѣетъ той формы, которая указана въ теоремѣ (т. е. $a_0 \neq 1$). Мы можемъ преобразовать его такъ, чтобы преобразованное уравненіе приняло эту форму, умножая всѣ корни на прилично выбранное цѣлое число k *). Преобразованное уравненіе будетъ

$$a_0 x^n + k a_1 x^{n-1} + k^2 a_2 x^{n-2} + \cdots + k^n a_n = 0.$$

Распоряжаясь числомъ k такъ, чтобы всѣ коэффиціенты ka_1, $k^2 a_2$, ... дѣлились на a_0 (для чего можно положить, напримѣръ, $k = a_0$), и раздѣляя всѣ члены на a_0, приведемъ его къ желаемой формѣ. Тогда оно не будетъ имѣть раціональныхъ дробныхъ корней. Если α, β, γ, ... будутъ его цѣлые корни, то $\frac{\alpha}{k}$, $\frac{\beta}{k}$, $\frac{\gamma}{k}$, ... будутъ дробными корнями даннаго уравненія. Между ними заключаются и цѣлые его корни (когда α или β и т. д. дѣлятся на k). На практикѣ, однако, предпочтительно сперва найти цѣлые корни, а затѣмъ уже, понизивъ степень уравненія, приступить къ разысканію дробныхъ корней.

520. Примѣръ для упражненія. Найти раціональные корни уравненія

$$21x^4 - 41x^3 + 45x^2 - 24x + 4 = 0.$$

Правило Ньютона даетъ 1 для верхней границы корней. Уравненіе, получаемое замѣною x на $-x$ имѣетъ всѣ коэффиціенты положительные. Слѣдовательно, всѣ вещественные корни уравненія заключаются между 0 и 1. Полагая $y = 21x$, получимъ

$$y^4 - 41y^3 + 945y^2 - 10584y + 37044 = 0,$$

и мы знаемъ, что всѣ корни этого уравненія лежатъ между 0 и 21. Въ этихъ границахъ изъ дѣлителей 37044 лежатъ слѣдующіе

2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18.

Числа

1, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 13, 17

должны были бы дѣлить $f(1) = 27365$. Вычеркивая тѣ, которыя этому условію не удовлетворяютъ, увидимъ, что остаются только дѣлители 2, 6, 14.

---

*) Иными словами, замѣняя въ данномъ уравненіи x на $\frac{x}{k}$.

Эти удовлетворяютъ и другому условію, потому что 3, 7 и 15 дѣлятъ $f(-1) = 48615$. Затѣмъ производимъ вычисленія по слѣдующей схемѣ:

	(− 10584)		(+ 945)		(− 41)		(+ 1)
2	18522	7938	3969	4914			
6	6174	− 4410	− 735	210	35	− 6	− 1
14	2646	− 7938	− 567	378	27	− 14	− 1

Раціональными корнями даннаго уравненія будутъ, слѣдовательно, числа $\frac{6}{2}_1$ и $\frac{14}{14}$, т. е. $\frac{3}{7}$ и $\frac{2}{3}$. Лѣвая часть даннаго уравненія представится теперь въ такомъ видѣ

$$(7x - 2)\,(3x - 2)\,(x^2 - x + 1).$$

521. Кратные корни. Метода для вычисленія ирраціональныхъ корней, которую мы изложимъ въ слѣдующей главѣ, требуетъ, чтобы искомые корни были простыми. Съ этой цѣлью, освободивъ уравненіе отъ всѣхъ раціональныхъ корней, поступаемъ съ нимъ какъ указано выше, въ § 456, и разбиваемъ данное уравненіе на нѣсколько другихъ. Одно изъ нихъ будетъ имѣть простые корни, равные простымъ корнямъ даннаго, другое — также простые корни, равные двойнымъ даннаго, и т. д. Къ этому добавимъ еще слѣдующее:

a) Если уравненіе съ раціональными коэффиціентами имѣетъ только одинъ корень опредѣленной кратности, то этотъ корень непремѣнно будетъ раціональнымъ. Дѣйствительно, операціи, которыя надо произвести (дѣленія полинома на полиномъ), чтобы получить уравненіе $x - a = 0$, относящееся къ этому корню, не могутъ ввести ирраціональностей. Но если коэффиціенты въ $x - a$ раціональны, то это и означаетъ, что корень a число раціональное.

b) Въ уравненіяхъ первыхъ пяти степеней нѣтъ случая для примѣненія методы отдѣленія кратныхъ корней. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ мы предполагаемъ, что уравненіе освобождено отъ раціональныхъ корней, то необходимо, чтобы оно имѣло, по крайней мѣрѣ, два двойныхъ корня и поэтому было не ниже 4-ой степени. И въ случаѣ уравненія 5-ой степени, остальной пятый простой корень (единственный) былъ бы непремѣнно раціональный, и мы опять приходимъ къ уравненію 4-ой степени съ двумя двойными корнями. Иными словами, если уравненіе 4-ой степени съ раціональными коэффиціентами не имѣетъ раціональныхъ корней, то оно можетъ имѣть кратные корни лишь въ томъ случаѣ, когда лѣвая его часть можетъ быть представлена въ видѣ квадрата трехчлена второй степени. Приведеніе къ этому виду (или доказательство невозможности его) дѣлается въ каждомъ случаѣ легко, безъ того, чтобы пришлось прибѣгнуть къ методѣ отдѣленія кратныхъ корней. Впрочемъ, разсматривая функцію Гессе $H = 3f'^2 - 4ff''$,

тотчасъ видимъ, что условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы f было полнымъ квадратомъ, состоитъ въ томъ, что f отличается отъ H только постояннымъ множителемъ [1]). (XIX.) Точно такъ же нѣтъ надобности прибѣгать къ отдѣленію кратныхъ корней въ уравненіи 5-ой степени съ раціональными коэффиціентами, не имѣющемъ раціональныхъ корней, потому что можно a priori сказать, что корни будутъ простые.

Приближенное вычисленіе корней.

522. Въ предыдущей главѣ мы видѣли, что при разысканіи корней алгебраическаго уравненія его всегда можно привести къ другому, имѣющему лишь простые и ирраціональные корни. Къ разысканію послѣднихъ мы теперь и приступимъ. Весьма важная метода, изобрѣтенная Ньютономъ и усовершенствованная Фурье, даетъ возможность быстро вычислять ирраціональные корни алгебраическихъ функцій и всѣхъ такихъ трансцендентныхъ, которыя имѣютъ вторую производную. Эта метода предполагаетъ только, что корни отдѣлены, т. е. что неизвѣстный корень a, напримѣръ, изолированъ въ нѣкоторомъ интервалѣ (a, b) (въ которомъ, слѣдовательно, кромѣ a, другихъ корней нѣтъ). Когда такой интервалъ найденъ, то, теоретически, по крайней мѣрѣ, весьма легко приблизиться къ этому корню какъ угодно близко. Припомнимъ въ самомъ дѣлѣ (§ 494, c), что $f(a)$ и $f(b)$ имѣютъ разные знаки, выберемъ какое нибудь число c въ интервалѣ (a, b), напримѣръ, $c = \frac{1}{2}(a + b)$ и вычислимъ $f(c)$. Если случится, что $f(c) = 0$, то это значитъ, что $a = c$ *). Въ противномъ случаѣ, $f(c)$ будетъ имѣть знакъ числа $f(a)$ или $f(b)$. Въ первомъ случаѣ интервалъ (a, b) можно будетъ замѣнить интерваломъ (c, b), во второмъ интерваломъ (a, c). Искомый корень будетъ, слѣдовательно, заключенъ въ интервалѣ, вдвое меньшемъ первоначальнаго. Продолжая такимъ же образомъ, можемъ вычислить корень съ желаемой степенью точности. Но этотъ процессъ, теоретически столь простой, въ приложеніи на практикѣ утомителенъ, главнымъ образомъ потому, что даетъ результаты не достаточно быстро приближающіеся къ искомому корню. Тѣмъ не менѣе, имъ пользуются, чтобы съузить первоначальный интервалъ, прежде чѣмъ примѣнять какую-нибудь другую методу приближенія, и для удобства вычисленія дѣлятъ первоначальный интервалъ не на двѣ, а на десять равныхъ частей.

---

[1]) См. Halphen, l. c., стр. 26, и Clebsch, Vorlesungen über Geometrie (изданіе 1876 г., I томъ, стр. 241).

*) Впрочемъ, если уравненіе освобождено отъ раціональныхъ корней, и числа a и b, какъ это обыкновенно бываетъ, раціональны, то случай $f(c) = 0$ не можетъ встрѣтиться.

523. Метода Ньютона—Фурье. Положимъ, что корень a изолированъ въ интервалѣ (a, b), и что этотъ интервалъ достаточно съуженъ, чтобы функція f'' въ немъ сохраняла постоянный знакъ. Знакъ этотъ будетъ одинаковъ со знакомъ либо $f(a)$, либо $f(b)$. Въ дальнѣйшемъ подъ буквою a мы будемъ подразумѣвать не нижнюю границу интервала, а ту, на которой f и f'' имѣютъ одинаковые знаки. Условившись въ этомъ, имѣемъ

$$f(\alpha) = f(a) + (\alpha - a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(\alpha - a)^2 f''(\xi),$$

гдѣ ξ нѣкоторое опредѣленное число между a и α. Такъ какъ $f(\alpha) = 0$, то послѣднее равенство даетъ

$$\alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(\alpha - a)^2}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(a)}.$$

Слѣдовательно, принявъ за первое приближеніе число

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

будемъ имѣть

$$a_1 - \alpha = \frac{(\alpha - a)^2}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(a)},$$

откуда

$$\frac{a_1 - \alpha}{a - a_1} = \frac{(\alpha - a)^2}{2}\frac{f''(\xi)}{f(a)}.$$

Такъ какъ, по условію, $f''(\xi)$ и $f(a)$ одинаковыхъ знаковъ, то видимъ, что $a_1 - \alpha$ одинаковаго знака съ $a - a_1$, т. е. что a_1 всегда лежитъ между a и α. Вмѣстѣ съ тѣмъ замѣтимъ, что $f(a_1)$, какъ и $f(a)$, имѣетъ тотъ же знакъ, который f'' сохраняетъ во всемъ интервалѣ, такъ какъ между α и a_1 нѣтъ корней функціи f. Поэтому, получивъ число a_1, лежащее ближе къ α, чѣмъ a, можемъ тѣмъ же способомъ найти число a_2, затѣмъ число a_3 и т. д. Каждое изъ этихъ чиселъ будетъ ближе къ α, чѣмъ предыдущее. Всѣ эти числа послѣдовательно вычисляются по формулѣ

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Надо еще показать, что они приближаются къ предѣлу α. Для этого сперва замѣтимъ, что разсматриваемыя числа навѣрно приближаются къ нѣкоторому предѣлу α', потому что они слѣдуютъ одно за другимъ, постоянно убывая или постоянно возрастая. Если теперь въ равенствѣ

$$f(a_n) = (a_n - a_{n+1})f'(a_n)$$

будемъ увеличивать n безпредѣльно, то получимъ $f(\alpha') = 0$, такъ

какъ по сдѣланнымъ предположеніямъ f непрерывна, а f' конечна въ данномъ интервалѣ. Отсюда и слѣдуетъ, что $\alpha' = \alpha$, потому что α единственный корень функціи f въ данномъ интервалѣ. Наконецъ, чтобы представить въ надлежащемъ освѣщеніи практическую пригодность методы Ньютона, надо еще показать быстроту приближенія a_n къ α. Съ этой цѣлью покажемъ, что числа

$$f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ \ldots$$

не только стремятся къ нулю, но такъ составлены, что и отношеніе каждаго изъ нихъ къ предыдущему стремится къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, при прилично выбранномъ между a_n и a_{n+1}, и потому стремящемся къ α, числѣ ξ_n, имѣемъ

$$f(a_n) - f(a_{n+1}) = (a_n - a_{n+1}) f'(\xi_n),$$

откуда

$$1 - \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{f'(a_n)},$$

и наконецъ,

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = 0.$$

потому что $f'(\xi_n)$ и $f'(a_n)$ стремятся къ общему предѣлу $f'(\alpha) \neq 0$. Иными словами—можно сказать, что метода Ньютона даетъ значеніе искомаго корня, какъ сумму ряда:

$$a = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots.$$

Этотъ рядъ сходится весьма быстро (§ 200, b). Дѣйствительно, отношеніе общаго члена къ предыдущему равно

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} \cdot \frac{f'(a_n)}{f'(a_{n+1})},$$

и имѣетъ предѣломъ нуль, потому что первый множитель стремится къ нулю, а второй къ 1 [1]).

524. Другой рядъ чиселъ $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots$, быстро приближающихся къ искомому корню, и притомъ со стороны, противоположной той, съ которой къ нему приближаются числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$,

---

[1]) О методѣ Ньютона — Фурье см. замѣтку Darboux въ „Nouv. Ann. de Math." (1869) и Fouret (1890). О другихъ методахъ можно прочесть у Petersen: „Theorie der algebraischen Gleichungen" (3. Abschnitt); Serret: „Cours d'Algèbre supérieure" и въ интересной статьѣ Laguerre въ „Nouv. Annales de Math." 1880, стр. 161. Существуетъ также прекрасная метода графическаго рѣшенія уравненій (см. Nomographie par Maurice d'Ocagne).

можно составить съ помощью слѣдующаго соотношенія

$$b_{n+1} = \frac{b_n f(a_n) - a_n f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}.$$

Начиная съ числа b, получаемъ сперва число b_1, которое можно представить въ одномъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ

$$b_1 = a - \frac{f(a)}{f'(c)}, \qquad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(c)},$$

положивъ

$$f(a) - f(b) = (a - b)f'(c).$$

Замѣчая, что

$$\frac{b_1 - a}{b_1 - b} = \frac{f(a)}{f(b)} < 0,$$

видимъ, что b_1 лежитъ внутри интервала (a, b). Замѣтивъ сказанное выше, разсмотримъ теперь функцію

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)f'(c).$$

Эта функція обращается въ нуль при $x = a$ и при $x = b$; кромѣ того, $\varphi(b_1) = f(b_1)$. Ея производная

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(c) = (x - a)f''(\xi)$$

имѣетъ знакъ, одинаковый съ $x - c$, если $f'' > 0$ въ (a, b), и противоположный знаку $x - c$, если $f'' < 0$. Отсюда слѣдуетъ, что функція $\varphi(x)$ убываетъ въ части интервала (a, b) слѣва отъ c, и возрастаетъ въ части (a, b), лежащей справа отъ c, а слѣдовательно, $\varphi(x)$ во всемъ интервалѣ отрицательна. Обратное будетъ во второмъ случаѣ. Слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ $\varphi(x)$ и f'' сохраняютъ противоположные знаки во всемъ интервалѣ (a, b). Въ частности, при $x = b_1$, $f(b_1)$, какъ и $f(b)$, имѣетъ знакъ, противоположный знаку f'', а потому b_1 будетъ заключаться между b и a. Такъ какъ, далѣе, $f(a_1)$ и $f(b_1)$ имѣютъ противоположные знаки, то всѣ предыдущія заключенія можно примѣнить къ b_2, которое окажется лежащимъ между b_1 и a, и т. д. Продолжая такимъ образомъ, видимъ, что числа b_1, b_2, b_3, ... все ближе и ближе подходятъ къ искомому корню. Пусть β есть предѣлъ этихъ чиселъ. Изъ равенства

$$\{f(a_n) - f(b_n)\}\, b_{n+1} = b_n f(a_n) - a_n f(b_n),$$

при безпредѣльно возрастающемъ n, получимъ $(a - \beta)f(\beta) = 0$. Отсюда, либо $\beta = a$, либо $f(\beta) = 0$, т. е. опять $\beta = a$. Наконецъ, чтобы удостовѣриться въ быстротѣ приближенія, напишемъ

$$f(b_n) - f(b_{n+1}) = (b_n - b_{n+1})f'(\eta_n) = \frac{f(b_n)}{f'(c)} f'(\eta_n),$$

гдѣ η_n и c_n обозначаютъ числа, лежащія соотвѣтственно въ интервалахъ (b_n, b_{n+1}) и (a_n, b_n). Эти числа стремятся къ предѣлу α при возрастаніи n до ∞, а потому

$$\lim \frac{f(b_{n+1})}{f(b_n)} = \lim \left(1 - \frac{f'(\eta_n)}{f'(c_n)}\right) = 0.$$

525. Примѣчанія. a) Если, примѣняя методу Ньютона, мы дадимъ себѣ трудъ вычислять и послѣдовательность чиселъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$, то получимъ ту выгоду, что въ каждый моментъ будемъ знать высшій предѣлъ погрѣшности [1]), которую дѣлаемъ, остановившись на a_n или b_n. Этотъ предѣлъ равенъ абсолютной величинѣ разности $a_n - b_n$.

b) Метода Ньютона позволяетъ также отдѣлять корни. Главное затрудненіе, на которое можно натолкнуться, когда съ цѣлью отдѣленія корней подставляютъ вмѣсто x послѣдовательныя частныя значенія, какъ это обыкновенно и дѣлается (§ 522), состоитъ въ слѣдующемъ: если на границахъ нѣкотораго интервала значенія функціи имѣютъ одинаковые знаки, то остается неизвѣстнымъ (если не примѣнена была теорема Штурма) *), существуютъ ли корни въ этомъ интервалѣ, или нѣтъ. Это затрудненіе встрѣтится тогда, когда функція обращается въ нуль для двухъ весьма близко лежащихъ значеній α и β, или когда она не обращается въ нуль, но принимаетъ весьма малыя по абсолютной величинѣ значенія. Въ первомъ случаѣ метода Ньютона, примѣненная къ обѣимъ границамъ, должна дать двѣ послѣдовательности чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$, стремящихся соотвѣтственно къ α и β. Если случится, что при нѣкоторомъ значеніи n получается измѣненіе знака разности $a_n - b_n$, или если a_n или b_n перестаютъ измѣняться въ одномъ направленіи, то можно утверждать, что въ разсматриваемомъ интервалѣ нѣтъ корня функціи f.

526. Геометрическая интерпретація. При помощи геометрическихъ соображеній легко отдать себѣ отчетъ во всемъ сказанномъ выше (рис. 24). Представимъ себѣ кривую линію $y = f(x)$ и разсмотримъ дугу AB, концы которой имѣютъ абсциссы a и b. Вслѣдствіе сдѣланныхъ въ началѣ предположеній дуга эта на всемъ своемъ протяженіи вогнута въ одну и ту же сторону, какъ, напримѣръ, на рис. 24. Другіе возможные случаи получаютъ свою геометрическую интерпретацію посредствомъ зеркальнаго изображенія данной фигуры по отношенію одной или обѣихъ осей. Крайнія ординаты, ось Ox и дуга AB образуютъ два криволинейныхъ тре-

---

[1]) Объ оцѣнкѣ этой погрѣшности см. Serret „Cours d'Algèbre sup.“, и „Calcolo“ Genocchi e Peano (стр. 97).

*) Практически неудобная, какъ ведущая къ длиннымъ выкладкамъ.

угольника. Изъ двухъ крайнихъ касательныхъ только одна попадаетъ въ одинъ изъ этихъ треугольниковъ, а именно касательная въ томъ концѣ дуги, ордината котораго имѣетъ знакъ одинаковый съ f''. Примѣняя методу Ньютона къ этому концу, получаемъ въ качествѣ значенія a_1 именно абсциссу точки пересѣченія касательной съ осью Ox; дѣйствительно, уравненіе этой касательной есть $y = (x - a)f'(a) + f(a)$, и при $y = 0$ находимъ $x = a_1$ [1]). Число b_1 (какъ легко видѣть) есть абсцисса точки пересѣченія хорды AB съ Ox. Между этими точками дуга AB пересѣкаетъ Ox въ точкѣ,

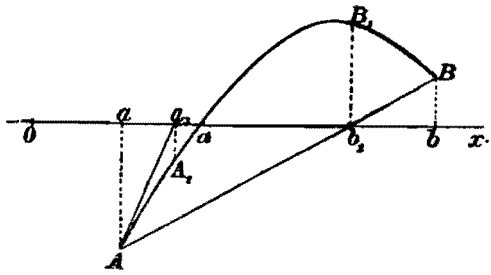


Рис. 24.

абсцисса которой равна искомому корню α. Получивъ точки a_1 и b_1 мы приходимъ къ тому, чтобы искать этотъ корень на меньшей дугѣ A_1B_1. Чтобы получить далѣе a_2 и b_2, надо только построить точки пересѣченія Ox съ касательною въ A_1 и хордою A_1B_1 и т. д. Если крайнія ординаты были бы одинаковаго знака, и мы хотѣли бы опредѣлить корни примѣненіемъ методы Ньютона къ обоимъ концамъ интервала, какъ было указано въ концѣ предыдущаго параграфа, то замѣтили бы слѣдующее: перемѣна знака разности $a_n - b_n$ равносильна переходу точки пересѣченія крайнихъ касательныхъ съ одной стороны оси Ox на другую, въ чемъ легко убѣдиться. Въ концѣ концовъ касательныя такъ пересѣкутся, что помѣшаютъ кривой пересѣчь ось x-овъ и корня въ данномъ интервалѣ не будетъ.

527. Упражненія. а) Уравненіе $x^3 - 2x - 5 = 0$ имѣетъ только одинъ вещественный корень. Онъ находится между 2 и 3. Дѣйствительно, $f(2) = -1$, $f(3) = 16$. Раздѣляя интервалъ (2, 3) на десять равныхъ частей, находимъ $f(2,\ 1) = 0{,}061$, поэтому верхнюю границу 3 можно замѣнить числомъ 2, 1. Въ этихъ границахъ $f'' = 6x$ сохраняетъ знакъ $+$, поэтому, примѣняя методу Ньютона, надо начинать съ верхней границы 2, 1. Мы имѣемъ

$$a - a_1 = -\frac{f(a)}{f(a_1)} = -\frac{0{,}061}{11{,}23} = 0{,}00543\ldots,$$

---

[1]) Обратно, эта геометрическая интерпретація даетъ снова формулу Ньютона, и аналогичныя соображенія даютъ еще лучшія методы приближенія. См., напримѣръ, „Mélanges Mathématiques" par Catalan, (т. I, стр. 79).

откуда $a_1 = 2{,}095$. Продолжая такимъ образомъ, найдемъ послѣдовательно $a_2 = 2{,}094552$, $a_3 = 2{,}094551481542$, $a_4 = 2{,}094551481542326591482386$. Если бы дошли до a_5, то получили бы корень съ сорока восемью вѣрными десятичными знаками.

b) Если дано уравненіе $x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$, то теорема Декарта показываетъ, что отрицательныхъ корней оно не имѣетъ, а положительныхъ можетъ имѣть только два. Такъ какъ $\frac{1}{6}f'' = 2x^2 + 1 > 0$ всегда, то методу Ньютона можно приложить къ любому интервалу. Можно взять $a = 0$, потому что $f(0) = 1$ имѣетъ знакъ f''. Если бы положительные корни дѣйствительно существовали, то мы должны были бы получить возрастающую послѣдовательность чиселъ, приближающихся къ меньшему корню. А между тѣмъ мы найдемъ $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{24}$. Здѣсь можемъ остановиться и утверждать, что данное уравненіе вещественныхъ корней не имѣетъ. Впрочемъ, мы могли бы придти къ этому заключенію прямо, если бы замѣтили, что трехчленъ $3x^2 - 2x + 1$, такъ же какъ и x^4, при всякомъ вещественномъ x, числа положительныя.

c) Уравненіе $x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0$, по теоремѣ Декарта, имѣетъ навѣрно одинъ отрицательный корень, и можетъ имѣть два положительныхъ. Что эти два корня дѣйствительно существуютъ и одинъ изъ нихъ лежитъ между 0 и 1, показываетъ то обстоятельство, что $f(0) = 4$, $f(1) = -5$ — числа разныхъ знаковъ. Вторая производная въ этомъ интервалѣ отрицательна, такъ какъ $\frac{1}{6}f'' = x - 1$, поэтому надо взять $a = 1$. Исходя изъ этого значенія, по методѣ Ньютона быстро найдемъ искомый корень 0,486456474...[1]). Другіе два корня лежатъ въ интервалахъ $(-2, -1)$ и $(4, 5)$. Ихъ приближенныя значенія будутъ: $-1{,}875\ldots$ и $4{,}387\ldots$

d) Вычислить вещественные корни уравненія $x^3 - 8x - 1 = 0$. И здѣсь теорема Декарта указываетъ на безспорное существованіе единственнаго положительнаго корня. Отрицательныхъ корней оно можетъ имѣть не болѣе двухъ, и они, дѣйствительно, существуютъ, потому что при $x = 0$ и $x = -1$ лѣвая часть получаетъ значенія разныхъ знаковъ. Метода Ньютона даетъ значенія:

$$a_1 = -2{,}7639\ldots, \quad a_2 = -0{,}1250\ldots, \quad a_3 = 2{,}8887\ldots$$

e) Чтобы рѣшить уравненіе $\cos x = x$, замѣчаемъ прежде всего, что число x, ему удовлетворяющее, необходимо должно заключаться въ интервалѣ $(-1, 1)$, въ которомъ всегда заключается $\cos x$. Въ этомъ интервалѣ функція $f = x - \cos x$ постоянно возрастаетъ, потому что производная, $f' = 1 + \sin x$, остается положительною. Такъ какъ, при $x = 0$, $f < 0$, а при $x = 1$, $f > 0$, то данное уравненіе имѣетъ одинъ и только одинъ корень между 0 и 1. Для вычисленія его по методѣ Ньютона надо взять $a = 1$, потому что при $x = 1$ функція f имѣетъ знакъ $+$, который $f'' = \cos x$ сохраняетъ во всемъ интервалѣ. Мы получимъ для значенія корня число

$$a = 0{,}73908512, \quad \text{т. е.} \quad a = 42^0 20' 47'',25,$$

если примемъ во вниманіе, что дуга, равная единицѣ (радіусу), выраженная въ градусахъ, равна $\frac{180^0}{\pi}$, т. е. $57^0 17' 44'',806247\ldots$

f) Провести касательную къ цѣпной линіи $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ черезъ начало координатъ. Пусть $y = kx$ будетъ уравненіе искомой касательной. Вопросъ сводится къ опредѣленію k такимъ образомъ, чтобы уравненіе $e^x + e^{-x} = 2kx$ имѣло двойной корень. Этотъ корень долженъ обращать въ

---

[1]) Bourget. „Nouv. Ann. de Math.“. 1869, стр. 21.

нуль производную отъ функціи $e^x + e^{-x} - 2kx$, т. е. удовлетворять уравненію $e^x - e^{-x} = 2k$. Исключая k, находимъ, что этотъ корень долженъ удовлетворять и уравненію

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = x, \quad \text{т. е. } x = \tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

По самой природѣ задачи можно сказать, что возможны только два корня, равные по абсолютной величинѣ. Впрочемъ, легко видѣть, что функція $f = x - \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$, отрицательная справа отъ 1, съ возрастаніемъ x становится и остается потомъ положительною. Дѣйствительно, ея производная $f' = \frac{x^2}{x^2-1} > 0$, при $|x| > 1$, слѣдовательно, f постоянно возрастаетъ. Подстановка $x = 1$, 1 и $x = 1$, 2 даетъ результаты разныхъ знаковъ, и методу Ньютона надо примѣнить къ верхней границѣ $a = 1$, 2, гдѣ f и f'' одинаковыхъ знаковъ. Мы найдемъ $a = 1.199678\ldots$ Далѣе, перемножая уравненія

$$e^a = k(a+1), \quad e^{-a} k(a-1),$$

найдемъ $k = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} = 1{,}50888\ldots$ Теперь мы можемъ утверждать, что уравненіе $e^x + e^{-x} = 2kx$ или вовсе не имѣетъ вещественныхъ корней либо имѣетъ ихъ два, смотря по тому, будетъ ли $|k| <$ или $> 1{,}50888\ldots$

g) Весьма интересно уравненіе $\operatorname{tg} x = x$ [1]), встрѣчающееся въ математической теоріи упругости свѣта и тепла. Здѣсь оказывается весьма полезнымъ графическое изображеніе, съ помощью котораго тотчасъ можно уви-

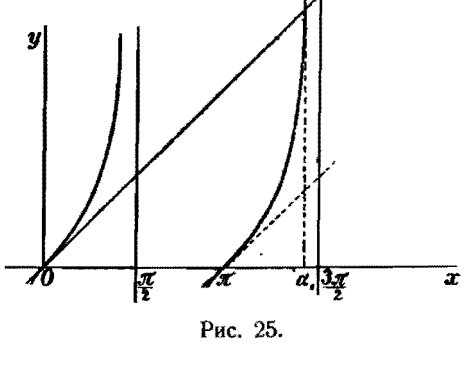


Рис. 25.

дѣть безчисленное множество корней этого уравненія и опредѣлить ихъ (рис. 25). Корни даннаго уравненія, очевидно, равны абсциссамъ точекъ пересѣченія линій $y = x$ и $y = \operatorname{tg} x$. Послѣдняя (называется тангентоидою) состоитъ изъ безчисленнаго множества одинаковыхъ вѣтвей; каждая изъ

[1]) См. „Алгебру“ Бертрана (пер. Пирожкова), „Cours d'Analyse“ Catalan (стр. 297), „Leçons d'Optique physique“ Verdet (стр. 272).

нихъ пересѣкается съ прямою $y = x$ въ одной точкѣ. Мы видимъ, что можно ограничиться разсмотрѣніемъ однихъ положительныхъ корней, что эти корни образуютъ рядъ, n-ый членъ котораго лежитъ между числами $n\pi$ и $(n + \frac{1}{2})\pi$, и тѣмъ ближе ко второму, чѣмъ больше n. Чтобы вычислить корень a, лежащій въ интервалѣ $(a - \frac{1}{2}\pi, a)$, гдѣ $a = (n + \frac{1}{2})\pi$, естественно положить $a = a - \theta$, гдѣ θ лежитъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Тогда уравненіе $\operatorname{tg} a = a$ переходитъ въ $\operatorname{cotg} \theta = a$ или $\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$ и потому будетъ

$$a = a - \operatorname{arctg} \frac{1}{a}.$$

Если въ правой части вмѣсто a возьмемъ $a > a$, и положимъ

$$a_1 = a - \operatorname{arctg} \frac{1}{a},$$

то получимъ число, большее корня, но меньшее a, и потому лежащее ближе къ a, чѣмъ a. Точно такъ же

$$a_2 = a - \operatorname{arctg} \frac{1}{a_1}$$

будетъ больше a, но меньше a_1 и т. д. Итакъ, числа a_1, a_2, a_3, ..., составляемыя по формулѣ

$$a_{n+1} = a - \operatorname{arctg} \frac{1}{a_n},$$

постоянно приближаются къ корню a, оставаясь больше a. Слѣдовательно, они приближаются къ нѣкоторому предѣлу a'. Увеличивая въ предыдущемъ равенствѣ n до ∞, получимъ

$$a' = a - \operatorname{arctg} \frac{1}{a'}$$

и потому $a' = a$, такъ какъ въ интервалѣ $(a - \frac{\pi}{2}, a)$ заключается только одинъ корень разсматриваемаго уравненія. Такимъ образомъ, не прибѣгая къ методѣ Ньютона, мы можемъ воспользоваться составленною послѣдовательностью чиселъ a_1, a_2, a_3, ... чтобы безпредѣльно приближаться къ искомому корню. Но приближеніе будетъ слишкомъ медленно. Дѣйствительно,

$$a_{n+1} - a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{a_{n-1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{a_n} = \operatorname{arctg} \frac{a_n - a_{n-1}}{1 + a_n a_{n-1}},$$

откуда, при безконечномъ n, имѣемъ

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \lim \frac{1}{1 + a_n a_{n-1}} = \frac{1}{1 + a^2}.$$

Для ускоренія вычисленія придется обратиться къ методѣ Ньютона, начиная съ одного изъ значеній, полученныхъ при выше приведенномъ вычисленіи. При этомъ, однако, нельзя исходить изъ значенія $a = (n + \frac{1}{2})\pi$, потому что при этомъ значеніи функція $\operatorname{tg} x - x$ обращается въ безконечность. Такъ

напримѣръ, если хотимъ вычислить наименьшій положительный корень, то надо начать не съ $a = \frac{3}{2}\pi$, а, по крайней мѣрѣ, съ

$$a = \tfrac{3}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3\pi}.$$

Тогда съ помощью методы Ньютона получимъ

$$a_1 = a - \frac{\operatorname{tg} a - a}{\operatorname{tg}^2 a} = \frac{a}{\sin^2 a} - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{3}{2}\pi - \left(1 + \frac{4}{9\pi^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{3}{2\pi}$$

и т. д. Въ концѣ концовъ найдемъ

$$a = 4{,}493409457909\ldots,\ \text{т. е. } a = 257^\circ 27' 12'',231224\ldots$$

h) Уравненіе $\operatorname{tg} x = x$ замѣчательно еще тѣмъ, что возможно общее его рѣшеніе, т. е. опредѣленіе формулы, выражающей всѣ его корни. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе $a = a - \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$ можно написать такъ (§ 332, d):

$$a = a - \frac{1}{a} + \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{5a^5} + \frac{1}{7a^7} - \cdots.$$

Если въ правой части подставимъ a вмѣсто a и отбросимъ члены съ $\frac{1}{a}$ не ниже 3-ей степени, то получимъ $a = a - \frac{1}{a}$. Если теперь въ правой части подставимъ $a - \frac{1}{a}$ вмѣсто a и отбросимъ члены, начиная съ 5-ой степени относительно $\frac{1}{a}$, то найдемъ

$$a = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3}$$

или

$$a = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{3a^3} = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ далѣе

$$a = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^3} - \frac{1}{5\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^5}$$

или

$$a = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{5}{3a^5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{3}{a^5}\right) - \frac{1}{5a^5},\ \text{и т. д.}$$

Продолжая этотъ процессъ найдемъ, что корень a_n разлагается въ слѣдующій сходящійся рядъ

$$a_n = (n + \tfrac{1}{2})\pi - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} - \frac{2}{3(n+\frac{1}{2})^3\pi^3} - \frac{13}{15(n+\frac{1}{2})^5\pi^5} - \frac{146}{105(n+\frac{1}{2})^7\pi^7} - \frac{781}{315(n+\frac{1}{2})^9\pi^9} - \cdots.$$

Если n очень велико, (какъ это имѣемъ основаніе считать по теоріи дифракціи свѣта) то можно съ достаточною точностью положить

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{n\pi}.$$

i) При рѣшеніи уравненія $\sin x = kx$ также полезно примѣнить графическое изображеніе (рис. 26) и разсматривать корни уравненія, какъ абсциссы общихъ точекъ синусоиды $y = \sin x$ съ прямою $y = kx$. Если откинемъ

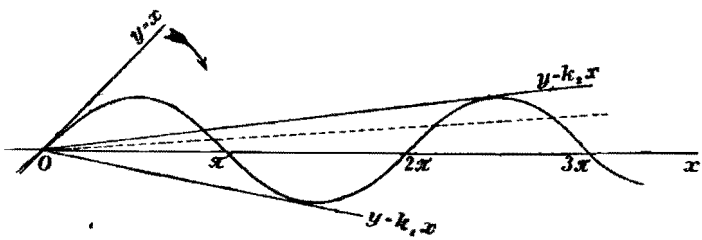


Рис. 26.

значеніе $x = 0$, то при $k \geqq 1$, очевидно, уравненіе корней больше не имѣетъ. Поэтому предположимъ $k < 1$ и представимъ себѣ даже, что k непрерывно убываетъ, начиная отъ $k = 1$. Тогда прямая $y = kx$ будетъ вращаться около начала координатъ по направленію движенія часовой стрѣлки. При этомъ эта прямая безконечное число разъ дѣлается касательною къ синусоидѣ. Это случится каждый разъ, когда число k получаетъ такое значеніе, при которомъ уравненія $\sin x - kx = 0$ и $\cos x - k = 0$ (лѣвая часть котораго есть производная лѣвой части перваго) имѣютъ общій корень. Исключеніе k изъ этихъ уравненій тотчасъ даетъ $\operatorname{tg} x = x$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ будутъ положительные корни этого уравненія, и $k_n = \cos \alpha_n$. Угловые коэффиціенты касательныхъ къ синусоидѣ, проведенныхъ черезъ начало координатъ, расположенные въ убывающемъ порядкѣ, будутъ $1, k_2, k_4, k_6, \ldots, k_5, k_3, k_1$. Когда k меньше k_1, то прямая $y = kx$ уже не пересѣчетъ синусоиды въ точкѣ, не совпадающей съ началомъ координатъ. Слѣдовательно, уравненіе $\sin x = kx$ имѣетъ вещественные корни только при такихъ значеніяхъ k, которыя меньше 1, но не меньше $-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, гдѣ $\alpha = 4{,}49\ldots$ есть наименьшій положительный корень уравненія $\operatorname{tg} x = x$. Если, напримѣръ, $k > 0$ и лежитъ между двумя опредѣленными числами k_{2n-2} и k_{2n}, то уравненіе имѣетъ $2n - 1$ положительныхъ корней, т. е. уравненіе имѣетъ тогда всего $4n - 1$ вещественныхъ корней. При k весьма маломъ число вещественныхъ корней весьма близко къ $\frac{2}{k\pi}$. Наконецъ, замѣтимъ, что наименьшій положительный корень будетъ въ интервалѣ $(0, \pi)$, если $k > 0$, и въ интервалѣ (π, α_1), если $k < 0$ Такъ какъ функція $f = \sin x - kx$ при $x = \pi$ равна $-k\pi$, т. е. имѣетъ тотъ же знакъ, какой $f'' = -\sin x$ сохраняетъ въ томъ или другомъ интервалѣ, то примѣняя методу Ньютона надо начинать всегда съ $a = \pi$. Тогда найдемъ $a_1 = \frac{\pi}{1+k}$ и т. д. (XX.)

Алгебраическое рѣшеніе.

528. Кубическое уравненіе. Перейдемъ теперь къ алгебраическому рѣшенію уравненій, т. е. попробуемъ найти явныя алгебраическія выраженія корней уравненія въ коэффиціентахъ его, предполагая послѣдніе произвольными. Для уравненій первой и второй степени вопросъ уже рѣшенъ въ элементарной Алгебрѣ. Разсмотримъ теперь уравненіе третьей степени вида:

$$x^3 + px + q = 0. \tag{4}$$

Полагая $x = u + v$, преобразуемъ его въ слѣдующее:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

которое удовлетворяется, если одновременно положимъ

$$u^3 + v^3 + q = 0,\ 3uv + p = 0,$$

т. е. $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Мы видимъ, что u^3 и v^3 будутъ корнями квадратнаго уравненія

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0,$$

которое называется резольвентою даннаго. Поэтому будемъ имѣть

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},\quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

Каждое изъ неизвѣстныхъ u и v имѣетъ, слѣдовательно, три значенія, такъ что для $u + v$ получилось бы всего девять значеній, если бы не приняли во вниманіе, что надо взять лишь тѣ значенія u и v, которыхъ произведеніе $uv = -\frac{p}{3}$. Пусть будетъ a, b такая пара значеній. Искомые корни кубическаго уравненія будутъ тогда

$$\alpha_1 = a + b,\quad \alpha_2 = \omega a + \omega^2 b,\quad \alpha_3 = \omega^2 a + \omega b,$$

гдѣ ω есть мнимый корень кубическій изъ 1 (§ 394). Полученный результатъ обыкновенно выражаютъ слѣдующею формулою

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{5}$$

извѣстною подъ именемъ формулы Тарталіа (Tartaglia) *). Въ сущности эта формула даетъ девять значеній x, удовлетворяющихъ уравненію (4), если въ немъ p обозначаетъ любой кубическій корень изъ p^3. Слѣдовательно, въ дѣйствительности формула Тарталіа даетъ девять корней функціи

$$(x^3+px+q)(x^3+\omega px+q)(x^3+\omega^2 px+q)=(x^3+q)^3+p^3x^3.$$

529. Формула Тарталіа имѣетъ тотъ недостатокъ, что представляетъ корни уравненій въ мнимомъ видѣ (алгебраически неустранимомъ), именно въ томъ случаѣ, когда всѣ корни вещественны, т. е. когда $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$ (§ 508, b) (XXI). Другой недостатокъ состоитъ въ томъ, что она представляетъ раціональные корни въ ирраціональномъ видѣ. Такъ напр., уравненіе $x^3-x-6=0$ имѣетъ единственный вещественный корень 2; между тѣмъ формула (5) дастъ для этого корня сложное выраженіе, которое приходится вычислять при помощи логариѳмовъ, и потому на практикѣ получается число, весьма близкое къ 2, но не 2. Замѣчено [1]), что подобное обстоятельство всегда встрѣчается, если оперируемъ съ одними раціональными числами, за исключеніемъ того случая, когда уравненіе 3-ей степени имѣетъ видъ

$$(x^3-(\alpha+2\beta)x^2+(2\alpha\beta+\beta^2+3\gamma^2)x-\alpha(\beta^2+3\gamma^2)=0$$

при раціональныхъ α, β, γ. Только въ этомъ случаѣ можно (приведя уравненіе къ виду (4) способомъ, который будетъ указанъ ниже) точно вычислить раціональный корень по формулѣ (5). Другіе два корня, мнимые, обращаютъ въ нуль $(x-\beta)^2+3\gamma^2$.

530. Послѣдній изъ упомянутыхъ недостатковъ не играетъ роли на практикѣ, если уравненіе предварительно освобождено отъ раціональныхъ корней. Что касается перваго, то его можно устранить, приведя формулу (5) къ тригонометрическому виду. Полагая

$$-\frac{q}{2}=\varrho\cos\vartheta,\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\varrho^2\sin^2\vartheta$$

получаемъ по формулѣ Тарталіа

$$x=\sqrt[3]{\varrho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)}+\sqrt[3]{\varrho(\cos\vartheta-i\sin\vartheta)}.$$

Извѣстно (§ 393), что значенія двухъ радикаловъ будутъ соотвѣтственно

$$\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\vartheta+2k\pi}{3}\right),\quad \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\vartheta+2k\pi}{3}\right),$$

*) Эту формулу чаще называютъ формулою Кардана.

[1]) E. Kummer: „Mathesis“ 1881, стр. 96, 184.

гдѣ k принимаетъ значенія 1, 2, 3. При этомъ надо оба выраженія комбинировать попарно такъ, чтобы произведеніе ихъ было вещественно, а для этого надо давать числу k одинаковыя значенія въ томъ и другомъ. Отсюда слѣдуетъ

$$x = 2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3},$$

такъ что три корня уравненія будутъ

$$a_1 = 2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\quad a_2 = 2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 120^0\right),\quad a_3 = 2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^0\right).$$

Эти числа будутъ извѣстны, когда будутъ опредѣлены положительное число ϱ и уголъ θ. Такъ какъ, согласно положенному,

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}},\quad \cos\theta = -\frac{q}{2\varrho},$$

то ϱ и θ легко вычисляются съ помощью логариѳмовъ.

531. Общее кубическое уравненіе

$$x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3 = 0 \tag{6}$$

всегда приводится къ виду (4). Стоитъ только принять за новую неизвѣстную

$$\xi = x - \tfrac{1}{3}c_1.$$

Тогда данное уравненіе обращается въ

$$\xi^3 - \tfrac{1}{3}(c_1^2 - 3c_2)\xi - \tfrac{1}{27}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3) = 0,$$

имѣющее требуемый видъ (4). Въ данномъ случаѣ

$$p = -\tfrac{1}{3}(c_1^2 - 3c_2),\quad q = -\tfrac{1}{27}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3),$$

слѣдовательно (§ 492, а),

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{\Delta}{4\cdot 27},$$

гдѣ, какъ всегда,

$$\Delta = -27c_3^2 + 18c_1c_2c_3 - 4c_1^3c_3 - 4c_2^3 + c_1^2c_2^2.$$

Радикалы въ формулѣ Тарталіа будутъ равны

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 \pm 3\sqrt{-3\Delta})}.$$

и корни уравненія (6) выражаются формулою

$$x = \tfrac{1}{3}\Big(c_1 + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 + 3\sqrt{-3\Delta})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 - 3\sqrt{-3\Delta})}\Big).$$

532. Уравненія четвертой степени. Положимъ теперь, что дано уравненіе

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{7}$$

и попробуемъ ему удовлетворить, полагая $x = u + v + w$. Возвышая это равенство въ квадратъ, получимъ

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(vw + wu + uv),$$

далѣе, снова возвышая въ квадратъ, получимъ

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2) + 8uvwx.$$

Отождествляя это уравненіе съ даннымъ, получаемъ

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2},\quad v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 = \frac{p^2 - 4r}{16},\quad u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64}.$$

Отсюда слѣдуетъ (§ 465), что u^2, v^2, w^2 будутъ корнями кубическаго уравненія

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}y - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Это есть **резольвента** даннаго уравненія. Когда найдены корни резольвенты, тогда для каждой изъ неизвѣстныхъ u, v, w, получимъ два значенія. Но только тѣ значенія u, v, w нужно комбинировать въ суммѣ $u + v + w$, которыхъ произведеніе равно $-\frac{1}{8}q$ *). Пусть a, b, c будутъ такія три значенія. Тогда искомые 4 корня будутъ

$$\alpha_1 = a + b + c,\quad \alpha_2 = a - b - c,\quad \alpha_3 = -a + b - c,\quad \alpha_4 = -a - b + c.$$

Замѣтимъ, что общее уравненіе 4-й степени всегда приводится къ формѣ (7). Напишемъ общее уравненіе въ видѣ

$$x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4 = 0$$

и введемъ новую неизвѣстную

$$\xi = x - \tfrac{1}{4}c_1.$$

*) Какъ видно изъ предыдущаго, гдѣ $8uvw = -q$.

Этимъ путемъ данное уравненіе приведется къ уравненію

$$\xi^3 - \tfrac{1}{8}(3c_1^2 - 8c_2)\xi^2 + \tfrac{1}{2}(c_1c_2 - 2c_3)\xi + \tfrac{1}{16}(c_1^2c_2 - 4c_1c_3 + 16c_4) = 0$$

типа (7). Рѣшивъ его и прибавивъ ко всѣмъ корнямъ число $\frac{1}{4}c_1$ получимъ корни даннаго уравненія.

533. Изложенныя въ §§ 528 и 532 методы для рѣшенія уравненій 3-ей и 4-ой степени даны были, первая Гюдде (Hudde), вторая Эйлеромъ. Различными авторами даны были другія методы [1]). Здѣсь мы ограничимся изложеніемъ еще только двухъ методъ, имѣющихъ то преимущество, что онѣ построены на общихъ принципахъ и даютъ возможность усмотрѣть путь, по которому надо идти, чтобы попытаться найти способы для рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Одна изъ нихъ, метода Кейли (Cayley) основана на теоріи формъ и пользуется соотношеніями между функціею f и ея функціями Гессе и Якоби, H, Q и т. д. для приведенія f къ каноническому виду и разложенія ея затѣмъ на линейные множители [2]). Другая—метода Лагранжа основана на теоріи симметрическихъ функцій и имѣетъ то преимущество, что ясно обнаруживаетъ истинную причину невозможности общаго рѣшенія уравненій выше 4-ой степени въ радикалахъ.

534. Метода Кейли. а) **Въ квадратномъ уравненіи**

$$x^2 - c_1x + c_2 = 0$$

разложеніе на линейные множители получается легко, если примемъ за основаніе выраженіе функціи Гессе (§ 485)

$$H = f'^2 - 2ff'',$$

приводящейся въ данномъ случаѣ къ постоянной $c_1^2 - 4c_2$, вслѣдствіе того, что $f' = 2x - c_1$, $f'' = 2$. Мы получаемъ тотчасъ

$$2ff'' = f'^2 - H = (f' - \sqrt{H})(f' + \sqrt{H})$$

или

$$f = (x - \tfrac{1}{2}c_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{H})(x - \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{H}).$$

Слѣдовательно, корни уравненія, выражаются формулою

$$x = \tfrac{1}{2}(c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2}).$$

---

[1]) См. въ „Theorie der algebraischen Gleichungen“ Petersen (стр. 87 и слѣд.). Можно рекомендовать также, для ознакомленія съ этимъ предметомъ „Этюды“, опубликованные Tortolini въ „Annali di Matematica“ (1858, стр. 310).

[2]) См. Halphen, „Nouv. Ann. de Math.“ 1885, стр. 17; Clebsch: „Vorlesungen über Geometrie“ (т. 1, стр. 278, 307).

b) Для **кубическаго уравненія**

$$x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3 = 0$$

разсмотримъ функцію Гессе $H = 2f'^2 - 3ff''$ и функцію Якоби $Q = Hf' - \frac{3}{2}H'f$. Раньше было доказано (§ 490, c), что

$$H^3 - 2Q^2 = 54f^2\Delta. \tag{8}$$

Это тождество можно написать въ видѣ

$$Q^2 + 27f^2\Delta = \tfrac{1}{2}H^3$$

или

$$(\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{3}{2}f\sqrt{-3\Delta})(\tfrac{1}{2}Q - \tfrac{3}{2}f\sqrt{-3\Delta}) = (\tfrac{1}{2}H)^3.$$

Мы утверждаемъ теперь, что задача приведенія f къ каноническому виду существенно не отличается отъ задачи разложенія H на линейные множители. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что это разложеніе выполнено, и пусть $ax + a'$ и $bx + b'$ линейные множители функціи $\frac{1}{2}H$. Предыдущее тождество приводитъ къ тому, чтобы положить

$$\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{3}{2}f\sqrt{-3\Delta} = (ax + a')^3, \quad \tfrac{1}{2}Q - \tfrac{3}{2}f\sqrt{-3\Delta} = (bx + b')^3 \tag{9}$$

и вслѣдствіе этого

$$3f\sqrt{-3\Delta} = (ax + a')^3 - (bx + b')^3, \tag{10}$$

что мы и хотѣли доказать. Поэтому, чтобы приложить методу Кейли къ рѣшенію кубическаго уравненія, требуется только умѣть составить лѣвыя части равенствъ (9), которыя должны сдѣлаться полными кубами. Или короче, когда найдены корни α и β функціи H, то будемъ знать, что $f = \lambda(x-\alpha)^3 - \mu(x-\beta)^3$, гдѣ λ и μ постоянныя. Послѣ этого, отождествляя это выраженіе f съ первоначальнымъ, легко найдемъ коэффиціенты λ и μ и разложимъ f на линейные множители $(x-\alpha)\sqrt[3]{\lambda} - (x-\beta)\sqrt[3]{\mu}$.

c) Если желаемъ снова найти съ помощью методы Кейли общую формулу для корней, данную въ § 531, то поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Составляя функцію Гессе, находимъ (§ 490, c)

$$\tfrac{1}{2}H = (c_1^2 - 3c_2)(x - \tfrac{1}{3}c_1)^2 + \tfrac{1}{4}\sigma(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{9}(c_1^2 - 3c_2)^2, \tag{11}$$

гдѣ для сокращенія положено $\sigma = 2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3$. Замѣтимъ, что (§ 489) σx^3 есть старшій членъ функціи Q. Поэтому изъ (9) слѣдуетъ

$$\tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{3}{2}\sqrt{-3\Delta} = a^3, \quad \tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{3}{2}\sqrt{-3\Delta} = b^3. \tag{12}$$

Съ другой стороны, положимъ

$$\tfrac{1}{2}H = [a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + a''][b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + b''],$$

такъ что, отождествляя съ (11), будемъ имѣть

$$ab = c_1^2 - 3c_2, \quad a''b'' = \left(\frac{ab}{3}\right)^2, \quad ab'' + ba'' = \tfrac{1}{3}\sigma.$$

Этимъ соотношеніямъ удовлетворимъ, полагая $a'' = \frac{1}{3}b^2$, $b'' = \frac{1}{3}a^2$. Теперь формулѣ (10) можемъ дать видъ

$$(a^3 - b^3)f = [a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}b^2]^3 - [b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}a^2]^3.$$

Отсюда видно тотчасъ, если раздѣлимъ на $a^3 - b^3$, что f разлагается на три линейныхъ множителя, изъ которыхъ одинъ есть частное отъ дѣленія

$$[a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}b^2] - [b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}a^2] = (a - b)(x - \tfrac{1}{3}c_1) - \tfrac{1}{3}(a^2 - b^2)$$

на $a - b$, т. е. $x - \frac{1}{3}(c_1 + a + b)$. Второй есть частное отъ дѣленія

$$\begin{aligned}[a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}b^2] - \omega[b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}a^2] \\ = (a - \omega b)(x - \tfrac{1}{3}c_1) - \tfrac{1}{3}\omega(a^2 - \omega^2 b^2)\end{aligned}$$

на $a - \omega b$, т. е. $x - \frac{1}{3}(c_1 + \omega a + \omega^2 b)$. Наконецъ, третій получимъ, раздѣливъ

$$\begin{aligned}[a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}b^2] - \omega^2[b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}a^2] \\ = (a - \omega^2 b)(x - \tfrac{1}{3}c_1) - \tfrac{1}{3}\omega^2(a^2 - \omega^4 b^2)\end{aligned}$$

на $a - \omega^2 b$. Онъ равенъ $x - \frac{1}{3}(c_1 + \omega^2 a + \omega b)$. Слѣдовательно,

$$f = [x - \tfrac{1}{3}(c_1 + a + b)][x - \tfrac{1}{3}(c_1 + \omega a + \omega^2 b)][x - \tfrac{1}{3}(c_1 + \omega^2 a + \omega b)].$$

На основаніи (12) это значитъ, что корни f заключаются въ формулѣ

$$x = \tfrac{1}{3}\left(c_1 + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(\sigma + 3\sqrt{-3\Delta})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(\sigma - 3\sqrt{-3\Delta})}\right).$$

d) Для **уравненія четвертой степени**, вмѣсто (8) надо взять соотношеніе

$$4H^3 - 3Q^2 = 64(3IH - 8Jf)f^2,$$

или

$$\tfrac{3}{4}Q^2 = H^3 - 3IH(4f)^2 + 2J(4f)^3.$$

Но мы видѣли уже (§ 491, b), что это соотношеніе разбивается на болѣе простыя, если введемъ квадратные множители f_1, f_2, f_3 Якобіевой функціи $Q = 6f_1f_2f_3$. Тогда будемъ имѣть

$$H - 4\gamma_1 f = 3f_1^2, \quad H - 4\gamma_2 f = 3f_2^2, \quad H - 4\gamma_3 f = 3f_3^2,$$

гдѣ γ_1, γ_2, γ_3 корни функціи $\Omega(x) = x^3 - 3Ix + 2J$. Если послѣ рѣшенія уравненія $\Omega = 0$ составимъ биквадратичныя функціи

$H - 4\gamma f$, то онѣ должны оказаться полными квадратами и, если извлечемъ изъ нихъ корни, то и получимъ квадратичные множители функціи Q. Затѣмъ можно найти и линейные множители функціи f, которая пропорціональна $f_2^2 - f_3^2 = (f_2 \cdot f_3) \cdot (f_2 - f_3)$. Достаточно даже знать одинъ только корень γ_1 функціи Ω, и ограничиться составленіемъ $H - 4\gamma_1 f$, которая сдѣлается равною $3f_1^2$. Извлеченіе корня квадратнаго дастъ результатъ, который независимо отъ произвольнаго численнаго множителя приводится къ виду $(ax + a')(bx + b')$. Тогда другія двѣ функціи f_2 и f_3 необходимо должны быть вида $(ax + a')^2 \pm (bx + b')^2$, потому что (§ 491, a) корни ихъ гармонически отдѣляютъ корни функціи f_1, и сами между собою образуютъ гармоническую систему четырехъ элементовъ. Такимъ путемъ мы получимъ приведеніе $f_2^2 - f_3^2$, а слѣдовательно, и f къ каноническому виду

$$f = \lambda(ax + a')^4 + \mu(ax + a')^2 \cdot (bx + b')^2 + \nu(bx + b')^4,$$

послѣ чего уравненіе $f = 0$ рѣшается, какъ квадратное *).

535. Метода Лагранжа. a) Въ **квадратномъ уравненіи** извѣстны двѣ симметрическія функціи отъ корней, а именно

$$\alpha_1 + \alpha_2 = c_1, \quad \alpha_1 \alpha_2 = c_2.$$

Ясно, что если хотимъ отличить одинъ корень отъ другого, то надо знать какую нибудь несимметрическую функцію этихъ корней. Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ (§ 474) знакоперемѣнную функцію $\alpha_1 - \alpha_2$, квадратъ которой есть дискриминантъ $c_1^2 - 4c_2$ даннаго уравненія. Слѣдовательно, корни уравненія получаются черезъ сложеніе и вычитаніе изъ соотношеній

$$\alpha_1 + \alpha_2 = c_1, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{\Delta}$$

и потому имѣютъ значенія

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(c_1 + \sqrt{\Delta}), \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(c_2 - \sqrt{\Delta}).$$

b) Точно такъ же для **кубическаго уравненія** недостаточно знать только три симметрическія функціи

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = c_1, \quad \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = c_2, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = c_3,$$

чтобы различить между собою корни уравненія. Но мы уже замѣтили (§ 480), что функція $(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3)^3$ имѣетъ только два различныхъ значенія

$$\beta_1 = (\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3)^3, \quad \beta_2 = (\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3)^3,$$

*) Относительно $\left(\frac{ax + a'}{bx + b'}\right)^2$.

которыя мы можемъ разсматривать, какъ корни квадратнаго уравненія съ коэффиціентами, выражающимися раціонально въ коэффиціентахъ даннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) + (a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3) = 2a_1 - a_2 - a_3,$$
$$(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) + \omega(a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3) = \omega^2(2a_3 - a_1 - a_2),$$
$$(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) + \omega^2(a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3) = \omega(2a_2 - a_3 - a_1).$$

Отсюда, черезъ умноженіе, получимъ $\beta_1 + \beta_2 = \sigma$, если, какъ прежде, σ обозначаетъ коэффиціентъ старшаго члена функціи Q. Точно такъ же можно было бы составить β_1 и β_2 и затѣмъ резольвенту даннаго уравненія. Но для вычисленія β_1 и β_2 полезнѣе вычислить $\beta_1 - \beta_2$. Съ этой цѣлью напишемъ

$$(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) - (a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3) = (\omega - \omega^2)(a_2 - a_3),$$
$$(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) - \omega(a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3) = (1 - \omega)(a_1 - a_2),$$
$$(a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3) - \omega^2(a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3) = (\omega^2 - 1)(a_3 - a_1).$$

Отсюда, замѣчая еще, что $(\omega - \omega^2)^2 (1 - \omega)^2 (\omega^2 - 1)^2$, т. е. дискриминантъ функціи $x^3 - 1$, равенъ -27, черезъ умноженіе найдемъ

$$\beta_1 - \beta_2 = 3\sqrt{-3\Delta}.$$

Слѣдовательно,

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma + 3\sqrt{-3\Delta}), \quad \beta_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma - 3\sqrt{-3\Delta}).$$

Теперь, чтобы найти корни a_1, a_2, a_3 остается рѣшить систему линейныхъ уравненій

$$a_1 + a_2 + a_3 = c_1, \quad a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3 = \sqrt[3]{\beta_1}, \quad a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3 = \sqrt[3]{\beta_2}.$$

Окончательно, получимъ

$$a_1 = \tfrac{1}{3}(c_1 + \sqrt[3]{\beta_1} + \sqrt[3]{\beta_2}),$$
$$a_2 = \tfrac{1}{3}(c_1 + \omega^2\sqrt[3]{\beta_1} + \omega\sqrt[3]{\beta_2}), \quad a_3 = \tfrac{1}{3}(c_1 + \omega\sqrt[3]{\beta_1} + \omega^2\sqrt[3]{\beta_2}).$$

c) Въ случаѣ **уравненія четвертой степени** мы можемъ разсмотрѣть функцію $a_2a_3 + a_1a_4$, имѣющую только три значенія

$$\beta_1 = a_2a_3 + a_1a_4, \quad \beta_2 = a_3a_1 + a_2a_4, \quad \beta_3 = a_1a_2 + a_3a_4.$$

Поищемъ то уравненіе третьей степени, которое опредѣляется значеніями этихъ трехъ корней. Легкое вычисленіе даетъ

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = c_2, \quad \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2 = c_1c_3 - 4c_4,$$
$$\beta_1\beta_2\beta_3 = c_3^2 + c_1^2c_4 - 4c_2c_4.$$

Слѣдовательно, резольвента будетъ

$$y^3 - c_2 y^2 + (c_1 c_3 - 4c_4)y - (c_3^2 + c_1^2 c_4 - 4c_2 c_4) = 0. \tag{13}$$

Если знаемъ одинъ его корень, напр., β_1, то будемъ имѣть

$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 = \beta_1, \quad \alpha_2\alpha_3 \cdot \alpha_2\alpha_4 = c_4,$$

такъ что $\alpha_2\alpha_3$ и $\alpha_1\alpha_4$ будутъ корнями уравненія $x^2 - \beta_1 x + c_4 = 0$. Обозначая корни этого уравненія черезъ a и b, находимъ, слѣдовательно, $\alpha_2\alpha_3 = a$, $\alpha_1\alpha_4 = b$. Замѣчая, что

$$(\alpha_2 + \alpha_3)\alpha_1\alpha_4 + (\alpha_1 + \alpha_4)\alpha_2\alpha_3 = c_3,$$

имѣемъ два сотношенія, которымъ удовлетворяютъ $\alpha_2 + \alpha_3$ и $\alpha_1 + \alpha_4$, а именно

$$(\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_4) = c_1, \quad b(\alpha_2 + \alpha_3) + a(\alpha_1 + \alpha_4) = c_3.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{ac_1 - c_3}{a - b}, \quad \alpha_1 + \alpha_4 = \frac{c_3 - bc_1}{a - b}.$$

Слѣдовательно, квадратныя уравненія

$$x^2 - \frac{ac_1 - c_3}{a - b}x + a = 0, \quad x^2 - \frac{c_3 - bc_1}{a - b}x + b = 0$$

и дадутъ всѣ четыре корня даннаго уравненія. Иными словами, имѣемъ тождество, которое легко провѣрить:

$$x^4 - c_1 x^3 + c_2 x^2 - c_3 x + c_4 = \left(x^2 - \frac{ac_1 - c_3}{a - b}x + a\right)\left(x^2 - \frac{c_3 - bc_1}{a - b}x + b\right). \tag{14}$$

d) Вмѣсто $\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4$ можно было бы выбрать функцію $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$. Хотя эта функція имѣетъ 6 различныхъ значеній, такъ что для ея опредѣленія надо будетъ рѣшить уравненіе шестой степени, но эти шесть значеній дѣлятся на три пары равныхъ по величинѣ и противоположныхъ по знаку чиселъ; поэтому резольвента будетъ содержать только четныя степени неизвѣстной и приводится къ уравненію третьей степени. Шесть значеній разсматриваемой функціи будутъ

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_4) - (\alpha_2 + \alpha_3),$$
$$\gamma_2 = (\alpha_2 + \alpha_4) - (\alpha_3 + \alpha_1), \quad \gamma_3 = (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

и $-\gamma_1$, $-\gamma_2$, $-\gamma_3$. Новую резольвенту легко получить изъ той, которая дана была формулою (13), если воспользоваться зависи-

мостями между числами β и γ. Дѣйствительно, замѣчая, что

$$\gamma_1^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 - 4(\beta_2 + \beta_3) = c_1^2 - 4c_2 + 4\beta_1 \text{ и т. д.},$$

мы видимъ, что неизвѣстная z въ новой резольвентѣ связана съ неизвѣстною y резольвенты (13) равенствомъ $z^2 = c_1^2 - 4c_2 + 4y$. Подставляя выраженіе y черезъ z въ уравненіе (13), получаемъ

$$(15) \quad z^6 - (3c_1^2 - 8c_2)z^4 + (3c_1^4 - 16c_1^2c_2 + 16c_2^2 + 16c_1c_3 - 64c_4)z^2 - (c_1^3 - 4c_1c_2 + 8c_3)^2 = 0.$$

Найдя корни γ_1, γ_2, γ_3 этого уравненія и присоединяя равенство $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = c_1$ къ тремъ равенствамъ, выражающимъ корни γ черезъ α, получимъ систему четырехъ линейныхъ уравненій, изъ которыхъ и найдемъ значенія корней уравненія четвертой степени

$$\alpha_2 = \tfrac{1}{4}(c_1 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3), \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{4}(c_1 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3),$$
$$\alpha_3 = \tfrac{1}{4}(c_1 - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3), \quad \alpha_4 = \tfrac{1}{4}(c_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3).$$

536. Примѣчанія. а) Метода Лангранжа, при надлежащемъ выборѣ функціи корней, которая должна удовлетворять резольвентѣ, приводитъ раціональнымъ путемъ къ тѣмъ искусственнымъ пріемамъ, съ помощью которыхъ Гюдде, Феррари, Декартъ, Эйлеръ и другіе рѣшили уравненія третьей и четвертой степени. Метода Кейли такъ же находится въ тѣсной связи съ методою Лагранжа. Въ этомъ нетрудно убѣдиться, замѣтивъ, что резольвенты въ y и z, соотвѣтствующія уравненію четвертой степени не отличаются существенно отъ резольвенты $\Omega = 0$. Дѣйствительно, лѣвыя части уравненій (13) и (15) получаются изъ $\Omega(x)$, если положимъ соотвѣтственно

$$x = c_2 - 3y, \quad x = \tfrac{1}{4}(3c_1^2 - 8c_2) - \tfrac{3}{4}z^2.$$

Далѣе, легко показать, что разложеніе $f(x)$ на множители по формулѣ (14) равносильно тому, которое даетъ метода Кейли. Если положимъ, какъ на то наводитъ эта метода

$$f(x) = (\lambda x^2 + \mu x + \nu)^2 - (\lambda' x^2 + \mu' x + \nu')^2,$$

то найдемъ, что должно быть

$$\lambda^2 - \lambda'^2 = 1, \quad \nu + \nu' = (\lambda + \lambda')a, \quad \nu - \nu' = (\lambda - \lambda')b,$$
$$\mu + \mu' = \frac{c_3 - ac_1}{a - b}(\lambda + \lambda'), \quad \mu - \mu' = \frac{bc_1 - c_3}{a - b}(\lambda - \lambda')$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ

$$a = \tfrac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4c_4}), \quad b = \tfrac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 - 4c_4}),$$

гдѣ y корень резольвенты (13). Каждому изъ трехъ корней соот-

вѣтствуетъ одинъ изъ трехъ видовъ разложенія f на два квадратныхъ множителя. Метода Феррари сводитъ въ сущности къ тому, что берутъ $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$.

b) Лагранжъ примѣнилъ свою методу ко всякому алгебраическому уравненію [1]) и научилъ составлять резольвенту для уравнія какой угодно степени. Общія уравненія первыхъ четырехъ степеней могутъ быть рѣшены въ радикалахъ потому, что для нихъ это вспомогательное уравненіе (резольвента) будетъ степени низшей, чѣмъ данное уравненіе. Это благопріятное обстоятельство уже не встрѣчается въ уравненіяхъ выше четвертой степени. Такъ, напр., рѣшеніе уравненія 5-ой степени всегда можетъ быть сведено къ рѣшенію уравненія 4-ой степени [2]), но коэффиціенты этого уравненія зависятъ отъ рѣшенія уравненія 6-ой степени, и метода теряетъ реальное значеніе. Мы вскорѣ увидимъ, что этотъ фактъ зависитъ не отъ несовершенства методы (которая съ пользою можетъ быть приложена при рѣшеніи уравненій нѣкоторыхъ особыхъ классовъ), а отъ недостаточности алгебраическихъ символовъ для яснаго изображенія корней алгебраическихъ уравненій въ функціяхъ отъ коэффиціентовъ. Для такого изображенія въ конечномъ видѣ необходимы новые символы. Эрмиту (Hermite) и Бріоски (Brioschi) удалось, напримѣръ, дать общее рѣшеніе уравненій пятой и шестой степени, при помощи нѣкоторыхъ трансцендентныхъ функцій. Это не исключаетъ, однако, возможности, какъ показалъ Клейнъ (Klein), въ томъ случаѣ, когда рѣшеніе въ радикалахъ невозможно, найти рѣшеніе при помощи чисто алгебраическихъ средствъ, но принадлежащихъ уже къ области высшей Алгебры.

c) Всматриваясь внимательно въ рѣшеніе уравненій первыхъ четырехъ степеней, можно видѣть, что успѣхъ методы Лагранжа основанъ [именно на возможности (срав. §§ 480, 481) построить такія функціи отъ корней уравненія, которыя сами имѣютъ нѣсколько различныхъ значеній, а степени ихъ только одно или два. Такъ, при рѣшеніи квадратнаго уравненія мы были приведены къ разсмотрѣнію функціи $a_1 - a_2$, имѣющей два значенія, а квадратъ которой есть симметрическая функція Δ. При рѣшеніи кубическаго уравненія мы разсматривали функцію $a_1 + \omega a_2 + \omega^2 a_3$, кубъ которой есть функція, имѣющая два различныхъ значенія $\frac{1}{2}(\sigma \pm 3\sqrt{-3\Delta})$. Наконецъ, при рѣшеніи уравненія 4-ой степени, вмѣсто того, чтобы рѣшать уравненіе (13), могли бы прямо составлять функцію $\beta_1 + \omega\beta_2 + \omega^2\beta_3$, т. е.

$$a_2a_3 + a_1a_4 + \omega(a_3a_1 + a_2a_4) + \omega^2(a_1a_2 + a_3a_4),$$

---

[1]) Мемуары Берлинской Академій, 1771. См. также работу Вандермонда въ мемуарахъ Парижской Академіи за тотъ же годъ.

[2]) Объ этомъ см. работу Brioschi въ „Annali di Matematica“ (2-я серія, т. I стр. 222).

кубъ которой имѣетъ два значенія $J \pm \sqrt{J^2 - I^3}$. Это прямо слѣдуетъ изъ того, что дискриминанты чиселъ β и чиселъ α равны между собою, а функція σ для нихъ равна $2J$.

537. Упражненія. a) Рѣшить уравненіе $x^3 + 6x - 7 = 0$. Здѣсь имѣемъ (§ 528)

$$p = 6, \quad q = -7, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{81}{4}.$$

Корни резольвенты будутъ слѣдовательно,

$$u^3 = \tfrac{7}{2} + \tfrac{9}{2} = 8, \quad v^3 = \tfrac{7}{2} - \tfrac{9}{2} = -1.$$

Поэтому можно положить $u = 2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$, $v = -1,\ -\omega,\ -\omega^2$. Эти значенія надо комбинировать попарно такъ, чтобы всегда было $uv = -2$. Слѣдовательно, корни даннаго уравненія будутъ $2 - 1,\ 2\omega - \omega^2,\ 2\omega^2 - \omega$, или

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\tfrac{1}{2}(1 + 3\sqrt{-3}), \quad \alpha_3 = -\tfrac{1}{2}(1 - 3\sqrt{-3}).$$

b) Половину шара раздѣлить на двѣ равновеликія части плоскостью, параллельною основанію. Принимая радіусъ за единицу и обозначая черезъ x разстояніе между основаніемъ и искомою плоскостью, находимъ, что должно быть

$$\frac{\pi x}{2}[1 + (1 - x^2)] + \frac{\pi}{6}x^3 = \frac{\pi}{3}, \text{ т. е. } x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Здѣсь (§ 530) $p = -3$, $q = 1$, слѣдовательно, $\varrho = 1$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = 120^0$. Корни, слѣдовательно, будутъ

$$\alpha_1 = 2\cos 40^0, \quad \alpha_2 = 2\cos 160^0, \quad \alpha_3 = 2\cos 280^0.$$

Условіямъ задачи отвѣчаетъ только тотъ корень, который лежитъ между 0 и 1. Это есть

$$2\cos 280^0 = 2\cos 80^0 = 0{,}3472964 \ldots$$

c) Рѣшить уравненіе $4x^3 + 9x^2 + 18x + 17 = 0$ по методѣ Кейли[1]) Вводя прилично выбранные численные коэффиціенты во избѣжаніе дробей, найдемъ $\Delta = -27 \cdot 1600$,

$$H = -90(3x^2 + 10x + 3), \quad Q = -270(11x^3 - 9x^2 - 63x - 67).$$

Затѣмъ легко видѣть, что выраженіе

$$-(11x^3 - 9x^2 - 63x - 67) \pm 4(4x^3 + 9x^2 + 18x + 17)$$

имѣетъ значенія $5(x+3)^3$ и $-(3x+1)^3$. Слѣдовательно, данное уравненіе можетъ быть написано въ видѣ

$$5(x + 3)^3 + (3x + 1)^3 = 0,$$

въ которомъ оно непосредственно и рѣшается. Впрочемъ, достаточно, не

---

[1]) Salmon „Algèbre sup“. стр. 264.

составляя функціи Q, замѣтить, что функція H имѣетъ корни -3 и $-\frac{1}{3}$, чтобы лѣвую часть уравненія можно было написать въ видѣ

$$\lambda(x+3)^3+\mu(3x+1)^3.$$

Отождествляя съ даннымъ, находимъ

$$\lambda+27\mu=4,\quad 27\lambda+\mu=17,$$

откуда $\lambda=5\mu$.

d) Рѣшить уравненіе [1]) $x^4+8x^3-12x^2+104x-20=0$. Вычисляемъ инваріанты $I=-4\cdot12\cdot54$, $J=27\cdot32\cdot189$, и находимъ затѣмъ (§ 534, d) резольвенту $x^3+6^5x+7\cdot6^6=0$. Тотчасъ видимъ, что это уравненіе имѣетъ корень -6^2. Съ другой стороны, имѣемъ

$$H=6\cdot48\,(x^4-10x^3-12x^2-4x+106)$$

и знаемъ, что биквадратичная функція

$$2\,(x^4-10x^3-12x^2-4x+106)+(x^4+8x^3-12x^2+104x-20)$$

должна быть полнымъ квадратомъ. Дѣйствительно, она равна утроенному квадрату функціи x^2-2x-8, которая имѣетъ корни -2 и 4. Слѣдовательно, лѣвая часть даннаго уравненія должна приводиться къ виду

$$\lambda(x+2)^4+\mu(x+2)^2(x-4)^2+\nu(x-4)^4.$$

Отождествляя, находимъ $\lambda=-3\nu$, $\mu=-2\nu$, и такъ какъ

$$3z^2+2z-1=(z+1)\,(3z-1),$$

то уравненіе принимаетъ видъ

$$[(x+2)^2+(x-4)^2]\,[3(x+2)^2-(x-4)^2]=0,$$

и корни его получатся изъ системы линейныхъ уравненій

$$\pm(x+2)\sqrt{-1}=x-4,\quad \pm(x+2)\sqrt{3}=x-4;$$

значенія корней будутъ

$$a_1=1+3\sqrt{-1},\quad a_3=-5-3\sqrt{3},$$
$$a_2=1-3\sqrt{-1},\quad a_4=-5+3\sqrt{3}.$$

Метода Лагранжа (§ 535, c) привела бы къ резольвентѣ

$$y^3+3\cdot4y^2+57\cdot4^2y-124\cdot4^3=0,$$

имѣющей корень 8. Затѣмъ нужно будетъ рѣшить уравненіе

$$x^2-8x-20=0,$$

котораго корни будутъ $a=10$, $b=-2$. Данное уравненіе разобьется, слѣдовательно, на слѣдующія два

$$x^2-2x+10=0,\quad x^2+10x-2=0.$$

---

[1]) Salmon „Algèbre sup.“ стр. 278.

e) Иногда встрѣчаются уравненія выше четвертой степени, приводящіяся къ уравненіямъ первыхъ четырехъ степеней, благодаря той или другой особенности. Мы разсмотримъ здѣсь, въ частности, такъ называемыя, возвратныя уравненія, степень которыхъ можетъ быть понижена по крайней мѣрѣ вдвое. Эти уравненія имѣютъ корни попарно взаимнообратные $\left(a \text{ и } \frac{1}{a}\right)$ и потому не мѣняются отъ замѣны x на $\frac{1}{x}$. Слѣдовательно, коэффиціенты ихъ таковы, что

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_n}{a_0},$$

откуда $a_i = a_{n-i}$ или $a_i = -a_{n-i}$, для $i = 1, 2, 3, \ldots n$. Предполагая, что уравненіе освобождено отъ корней $+1$ или -1, если оно таковые имѣетъ, видимъ, что оно непремѣнно будетъ вида

$$a_0 x^{2\nu} + a_1 x^{2\nu-1} + \cdots + a_{\nu-1} x^{\nu+1} + a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + a_0 = 0$$

и степень его можетъ быть понижена до ν. Дѣйствительно, полагая $x^p + x^{-p} = \xi_p$, можемъ его написать такъ

$$a_0 \xi_\nu + a_1 \xi_{\nu-1} + a_2 \xi_{\nu-2} + \cdots + a_\nu = 0.$$

Но выраженія ξ_p, функціи отъ $x + x^{-1} = y$, весьма легко вычисляются, такъ какъ имѣемъ тождественно

$$\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}},$$

т. е. $\xi_{p+1} = y\xi_p - \xi_{p-1}$. Имѣя $\xi_0 = 2$, $\xi_1 = y$, послѣдовательно найдемъ

$$\xi_2 = y^2 - 2, \quad \xi_3 = y^3 - 3y, \quad \xi_4 = y^4 - 4y^2 + 2, \quad \xi_5 = y^5 - 5y^3 + 5y, \ldots$$

Такимъ образомъ данное уравненіе приводится къ виду

$$b_0 y^\nu + b_1 y^{\nu-1} + b_2 y^{\nu-2} + \cdots + b_\nu = 0.$$

Когда его рѣшимъ, то каждое значеніе y даетъ два значенія для x, вычисляемыя по формулѣ $x = \frac{1}{2}(y \pm \sqrt{y^2 - 4})$. Замѣтимъ, наконецъ, что вычисленіе функцій ξ можно еще ускорить, пользуясь тождествомъ $\xi_p \xi_q = \xi_{p+q} + \xi_{p-q}$. Разность $p - q$ цѣлесообразно брать по возможности малою и пользоваться формулами $\xi_{2p} = \xi_p^2 - 2$, $\xi_{2p+1} = \xi_p \xi_{p+1} - y$.

f) Какъ примѣръ возвратнаго уравненія, разсмотримъ извѣстное уравненіе (§ 484, b)

$$(16) \qquad \lambda^6 - 3\lambda^5 + \left(6 - \frac{I^3}{\Delta}\right)\lambda^4 - \left(7 - 2\frac{I^3}{\Delta}\right)\lambda^3 + \left(6 - \frac{I^3}{\Delta}\right)\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0,$$

давшее значенія ангармоническаго отношенія корней биквадратнаго уравненія, когда извѣстны инваріанты I и J, а слѣдовательно, и $\Delta = \frac{4}{27}(I^3 - J^2)$. Полагая $\lambda + \frac{1}{\lambda} = x + 1$, такъ что

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = x^2 + 2x - 1, \quad \lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} = x^3 + 3x^2 - 2,$$

приведемъ предложенное уравненіе къ слѣдующему

$$x^3 - \frac{I^3}{\Delta}x + \frac{I^3}{\Delta} = 0.$$

Формулы тригонометрическаго рѣшенія (§ 530) даютъ

$$\varrho = \left(\frac{I^3}{3\Delta}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad \cos\theta = -\frac{3}{2}\varrho^{-\frac{1}{3}},$$

такъ что

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{4}\varrho^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{27\Delta}{4I^3} = \frac{J^2}{I^3}.$$

Слѣдовательно,

$$x_1 = -3\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta}, \quad x_2 = -3\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta}, \quad x_3 = -3\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta},$$

если для сокращенія обозначимъ черезъ θ_1, θ_2, θ_3 углы $\frac{1}{3}\theta$, $\frac{1}{3}\theta + 120^0$, $\frac{1}{3}\theta + 240^0$. Для каждаго изъ этихъ угловъ имѣемъ

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{3\cos\theta}{\cos 3\theta} = 2\frac{3 + \cot^2\theta}{3 - \cot^2\theta},$$

откуда получается

$$\lambda = \frac{\sqrt{3} \pm \cot\theta}{\sqrt{3} \mp \cot\theta} = -\frac{\cos(\theta \pm 120^0)}{\cos(\theta \mp 120^0)}.$$

Слѣдовательно, корни уравненія (16) зависятъ единственно отъ трехъ значеній θ, которыя опредѣляются тѣмъ, что абсолютный инваріантъ $\frac{I^3}{J^2}$ приводится къ виду $\frac{1}{\sin^2 3\theta}$. Шесть корней уравненія (16) равны, слѣдовательно,

$$-\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}, \quad -\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_2}, \quad -\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_1}, \quad -\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}, \quad -\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}, \quad -\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}.$$

Иными словами (срав. § 417), имѣемъ

$$(a_2a_3 + a_1a_4)\cos\theta_1 + (a_3a_1 + a_2a_4)\cos\theta_2 + (a_1a_2 + a_3a_4)\cos\theta_3 = 0.$$

Полученныя значенія всѣ вещественны, если предположимъ θ вещественнымъ. Это дѣлается яснымъ изъ того, что въ этомъ предположеніи будемъ имѣть $\Delta > 0$. Поэтому (§ 513, b), если коэффиціенты вещественны, то либо всѣ корни биквадратнаго уравненія вещественны, либо всѣ мнимые, и въ послѣднемъ случаѣ, такъ какъ они сопряженные, лежатъ на одной окружности круга, а потому (§ 417) ангармоническое ихъ отношеніе въ обоихъ случаяхъ вещественно.

Теорема Руффини.

538. Переходя къ вопросу объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій какой угодно степени, изслѣдуемъ сперва, не должно ли общее выраженіе корня, какъ функціи коэффиціентовъ, имѣть какую нибудь спеціальную форму. Съ этою цѣлью нужно прежде всего

сообщить нѣкоторыя свѣдѣнія о способѣ классифицировать извѣстнымъ образомъ явныя алгебраическія функціи. Всѣ данныя въ извѣстномъ вопросѣ величины и всѣ другія, получаемыя изъ данныхъ путемъ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и возвышенія въ степень съ цѣлымъ показателемъ образуютъ нѣкоторую, такъ называемую область раціональности (Rationalitätsbereich). Она обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всякая раціональная функція отъ содержащихся въ ней величинъ даетъ результатъ, принадлежащій той же области. Чтобы выйти изъ этой области, оставаясь, однако, въ области алгебраическихъ функцій, нужно выполнить возвышеніе въ степень съ раціональнымъ дробнымъ показателемъ. Тогда получимъ результатъ, вообще говоря, уже не принадлежащій данной области раціональности. Впрочемъ, возвышеніе въ степень съ показателемъ $\frac{q}{p}$, гдѣ p цѣлое положительное, и q цѣлое число, равносильно раціональному дѣйствію, возвышенію въ степень q, сопровождаемому извлеченіемъ корня степени p, являющимся единственнымъ ирраціональнымъ дѣйствіемъ, способнымъ ввести ирраціональности. Кромѣ того, если разложимъ p на простые множители $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ равные или неравные, то операція $\sqrt[p]{\ }$ разобьется на операціи $\sqrt[\alpha]{\ }$, $\sqrt[\beta]{\ }$, $\sqrt[\gamma]{\ }$, ..., которыя уже не разлагаются дальше на подобныя же операціи. Слѣдовательно, $\sqrt[p]{\ }$ съ простымъ показателемъ p есть простая или элементарная операція изъ числа тѣхъ, которыя могутъ ввести ирраціональности.

539. Предпославъ сказанное выше, присоединимъ теперь къ данной области раціональности тѣ результаты, которые получатся, когда надъ величинами, въ ней содержащимися, будетъ произведено простое извлеченіе корня. Затѣмъ надъ всѣми величинами расширенной такимъ образомъ области произведемъ раціональныя операціи и результаты ихъ причислимъ къ той же области. Такимъ образомъ построена будетъ новая область раціональности, обладающая, какъ и первая, тѣмъ свойствомъ, что всякая раціональная функція отъ величинъ, въ ней содержащихся, будетъ заключаться въ той же области и только новое извлеченіе корня можетъ дать результатъ, лежащій внѣ ея. Тѣ функціи, которыя можно разсматривать, какъ раціональныя, только послѣ сдѣланнаго расширенія первоначальной области, называются ирраціональными перваго порядка. Въ ней простая ирраціональная операція является примѣненною только къ раціональнымъ функціямъ. Подобнымъ же образомъ переходятъ къ расширенію второй области раціональности и образуютъ третью, въ которой новыя ирраціональныя функціи являются, какъ раціональныя, и называются ирраціональными второго порядка. Въ нихъ простая ирраціональная операція примѣнена къ раціональнымъ функціямъ и къ ирраціональнымъ перваго порядка, и къ послѣднимъ

обязательно. Продолжая такимъ образомъ, доходимъ до явныхъ алгебраическихъ функцій μ-аго порядка, въ которыхъ встрѣчается, по крайней мѣрѣ, одна простая ирраціональная операція, произведенная надъ функціею порядка $\mu-1$. Число ν такихъ радикаловъ въ функціи u порядка μ называется степенью этой функціи. Понятно, что при этомъ число ν считается приведеннымъ къ наименьшему значенію въ томъ смыслѣ, что если какой нибудь изъ радикаловъ порядка μ выражается раціонально черезъ другіе, то это его выраженіе и считается подставленнымъ въ выраженіе функціи u. Окончательно въ u остаются только такіе радикалы порядка μ, которые помощью раціональныхъ операцій не сводятся одинъ къ другому. Поэтому, если мы выдѣлимъ въ выраженіи u одинъ изъ такихъ радикаловъ, то можно написать

$$u = f(\sqrt[p]{v},\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots), \tag{17}$$

гдѣ p простое число, f символъ раціональной функціи, v функція порядка $\mu-1$, между тѣмъ, какъ v_1, v_2, v_3, ... функціи порядка не выше μ и степени не больше $\nu-1$.

540. Лемма I. Всякая алгебраическая функція порядка μ и степени ν можетъ быть представлена въ видѣ

$$u = u_0 + u_1\sqrt[p]{v} + u_2(\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1}(\sqrt[p]{v})^{p-1}, \tag{18}$$

гдѣ p простое число, u_0, u_1, u_2, ... алгебраическія функціи порядка не выше μ и степени не выше $\nu-1$, между тѣмъ какъ v функція $(\mu-1)$-го порядка, и $\sqrt[p]{v}$ не выражается раціонально въ u_0, u_1, u_2, ... Кромѣ того, всегда можно принять $u_1 = 1$.

Такъ какъ всякая раціональная функція отъ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ можетъ быть выражена, какъ частное отъ дѣленія одной цѣлой функціи на другую, то выраженіе (17) можно написать въ видѣ

$$u = \frac{\varphi_0 + \varphi_1\sqrt[p]{v} + \varphi_2(\sqrt[p]{v})^2 + \cdots}{\psi_0 + \psi_1\sqrt[p]{v} + \psi_2(\sqrt[p]{v})^2 + \cdots},$$

гдѣ φ и ψ цѣлыя функціи отъ v_1, v_2, v_3, ... Если обозначимъ для сокращенія

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \cdots,\quad \psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \cdots,$$

то можемъ еще написать

(19) $$u=\frac{\varphi(\sqrt[p]{v})\psi(\omega\sqrt[p]{v})\psi(\omega^2\sqrt[p]{v})\cdots\psi(\omega^{p-1}\sqrt[p]{v})}{\psi(\sqrt[p]{v})\psi(\omega\sqrt[p]{v})\psi(\omega^2\sqrt[p]{v})\cdots\psi(\omega^{p-1}\sqrt[p]{v})},$$

гдѣ ω есть мнимый корень степени p изъ 1. Извѣстно, что

$$\sqrt[p]{v},\quad \omega\sqrt[p]{v},\quad \omega^2\sqrt[p]{v},\ \ldots,\ \omega^{p-1}\sqrt[p]{v}$$

будутъ всѣ p корней уравненія $x^p=v$. Отсюда слѣдуетъ, что функція

$$w=\psi(\sqrt[p]{v})\psi(\omega\sqrt[p]{v})\psi(\omega^2\sqrt[p]{v})\cdots\psi(\omega^{p-1}\sqrt[p]{v}),$$

цѣлая и симметрическая отъ корней уравненія $x^p-v=0$, выразится цѣлою ирраціональною функціею отъ коэффиціентовъ этого уравненія, т. е. отъ v. Такимъ образомъ, въ функцію w уже не войдетъ $\sqrt[p]{v}$. Эта функція w будетъ, слѣдовательно, цѣлая функція отъ v_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ и отъ v. Что касается числителя въ выраженіи (19), то онъ не будетъ симметрическою функціею отъ корней уравненія $x^p-v=0$. Но если представимъ себѣ, что выполнены умноженія тѣхъ p полиномовъ, изъ которыхъ онъ составленъ, то ясно, что его можно изобразить въ видѣ цѣлой функціи, которая, будучи расположена по степенямъ $\sqrt[p]{v}$, представится такъ

$$w_0+w_1\sqrt[p]{v}+w_2(\sqrt[p]{v})^2+w_3(\sqrt[p]{v})^3+\cdots.$$

Здѣсь w_0, w_1, w_2, ... будутъ цѣлыя функціи отъ v_i, т. е. алгебраическія функціи, удовлетворяющія тѣмъ же условіямъ, какъ и w. Поэтому и частныя отъ дѣленія ихъ на w будутъ такія же функціи, только не цѣлыя функціи относительно $v_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, а лишь раціональныя. Обозначая эти частныя черезъ u_0, u_1, u_2, ..., получимъ формулу

$$u=u_0+u_1\sqrt[p]{v}+u_2(\sqrt[p]{v})^2+u_3(\sqrt[p]{v})^3+\cdots.$$

Въ этой формулѣ всегда можно ограничиться первыми p членами. Дѣйствительно, такъ какъ

$$(\sqrt[p]{v})^p=v,\quad (\sqrt[p]{v})^{p+1}=v\sqrt[p]{v},\quad (\sqrt[p]{v})^{p+2}=v(\sqrt[p]{v})^2,\ \ldots,$$

то члены $u_p\left(\sqrt[p]{v}\right)^p$, $u_{p+1}\left(\sqrt[p]{v}\right)^{p+1}$, ... можно соединить соотвѣтственно съ членами u_0, $u_1\sqrt[p]{v}$, ... При всемъ этомъ $\sqrt[p]{v}$ остается не выражающимся раціонально черезъ v_i, а слѣдовательно, и черезъ

u_i. Остается показать, что всегда можно считать $u_1 = 1$, при чемъ, конечно, функцію v надо будетъ замѣнить другою функціею w, удовлетворяющею тѣмъ же условіямъ, какъ и v. Въ самомъ дѣлѣ, замѣтимъ, что всѣ функціи $u_1, u_2, u_3, \ldots$ не могутъ быть равны нулю, иначе u привелось бы къ u_0 и не было бы степени ν, какъ мы предположили. Пусть u_r одна изъ этихъ функцій, не равная нулю. Положимъ $w = u_r^p v^r$; тогда функціи

$$\sqrt[p]{w},\quad (\sqrt[p]{w})^2,\quad (\sqrt[p]{w})^3,\ \ldots,\ (\sqrt[p]{w})^{p-1}$$

будутъ отличаться только множителями, аналогичными функціямъ u_i, отъ функцій

$$(\sqrt[p]{v})^r,\quad (\sqrt[p]{v})^{2r},\quad (\sqrt[p]{v})^{3r},\ \ldots,\ (\sqrt[p]{v})^{(p-1)r}$$

а слѣдовательно, и отъ функцій

$$\sqrt[p]{v},\quad (\sqrt[p]{v})^2,\quad (\sqrt[p]{v})^3,\ \ldots,\ (\sqrt[p]{v})^{p-1},$$

если не обращать вниманія на порядокъ, въ которомъ онѣ написаны. Въ частности, для прилично выбраннаго k, для котораго $kr = pq + 1$, будемъ имѣть

$$(\sqrt[p]{w})^k = u_r^k v^q \sqrt[p]{v}.$$

Слѣдовательно, $\sqrt[p]{w}$ не выражается черезъ прежнія или новыя функціи u_i, такъ какъ въ противномъ случаѣ и $\sqrt[p]{v}$ выразился бы въ нихъ раціонально. Если теперь представимъ себѣ, что въ выраженіе (18) введена функція w вмѣсто v, то ясно, что получится выраженіе того же вида, но вмѣсто члена $u_r \sqrt[p]{v^r}$ войдетъ $\sqrt[p]{w}$ съ коэффиціентомъ 1.

541. Лемма II [1]). Положимъ, что p простое число, а $v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ функціи, принадлежащія нѣкоторой опредѣленной области раціональности; положимъ, далѣе, что функція v принадлежитъ той же области, но корни степени p изъ v ей не принадлежатъ. Тогда, если одновременно удовлетворяются уравненія

$$\text{(A)}\qquad v - x^p = 0,\quad v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots + v_{p-1} x^{p-1} = 0,$$

то необходимо будемъ имѣть

$$v_0 = 0,\quad v_1 = 0,\ \ldots,\ v_{p-1} = 0.$$

[1]) Она принадлежитъ Абелю (Abel), „Oeuvres complètes“, t. II, стр. 196.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ обратное, т. е. что не всѣ $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ равны нулю. Тогда можно искать общаго наибольшаго дѣлителя двухъ вышеприведенныхъ полиномовъ. Пусть этотъ дѣлитель будетъ степени r, гдѣ r, очевидно, лежитъ между 1 и $p-1$, включая и границы *). Приравнивая нулю этого общаго наибольшаго дѣлителя, получимъ уравненіе

$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + x^r = 0,$$

корни котораго будутъ въ то же время корнями уравненія $x^p - v = 0$. Поэтому, если одинъ изъ этихъ корней есть x_0, то другіе будутъ $\omega^\alpha x_0$, $\omega^\beta x_0$, $\omega^\gamma x_0, \ldots$, гдѣ ω мнимый корень степени p изъ 1. Если положимъ $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$, то, какъ извѣстно, произведеніе корней будетъ равно

$$\pm w_0 = \omega^\sigma x_0^r.$$

Замѣтимъ теперь, что p по условію простое число, а потому и взаимно-простое съ r; на основаніи извѣстной теоремы ариѳметики, остатки отъ дѣленія $p, 2p, 3p, \ldots, (r-1)p$ на r будутъ, независимо отъ порядка, равны $1, 2, 3, \ldots, r-1$. Слѣдовательно, всегда существуетъ такое кратное отъ p, которое при дѣленіи на r дастъ остатокъ 1. Пусть оно будетъ kp, такъ что $kp = qr + 1$. Изъ того, что $(\pm w_0)^q = \omega^{q\sigma} x_0^{kp-1}$, слѣдуетъ

$$\omega^{-q\sigma} x_0 = (\pm w_0)^{-q} v^k.$$

Лѣвая часть есть корень степени p изъ v. Правая принадлежитъ къ данной области раціональности, потому что къ ней принадлежитъ и v^k и w_0, такъ какъ при разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя производятся только раціональныя операціи. Поэтому одинъ изъ корней степени p изъ v принадлежалъ бы данной области раціональности, противно предположенію. Итакъ, допущеніе, что не всѣ $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ равны нулю, невозможно.

542. Лемма III. Алгебраическія функціи коэффиціентовъ, дающія общее выраженіе корней алгебраическаго уравненія, разрѣшимаго въ радикалахъ, раціонально выражаются въ корняхъ уравненія.

На основаніи первой леммы, явная алгебраическая функція, удовлетворяющая уравненію

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

всегда можетъ быть представлена въ видѣ

$$x = u_0 + u_1 \sqrt[p]{v} + u_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1}, \tag{20}$$

*) Такъ какъ уравненія (A) имѣютъ, по крайней мѣрѣ, одинъ общій корень, по предположенію.

гдѣ p, v и всѣ u_i удовлетворяютъ много разъ уже упомянутымъ условіямъ. Подставимъ это выраженіе x въ данное уравненіе и замѣтимъ, что x^2, x^3, ... имѣютъ тотъ же видъ, какъ и x. Тогда получимъ

$$(21) \qquad v_0 + v_1 \sqrt[p]{v} + v_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + v_{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1} = 0,$$

гдѣ v_0, v_1, v_2, ... изображаютъ раціональныя функціи отъ v и u_i. Такъ какъ $\sqrt[p]{v}$ не выражается раціонально черезъ u_i, а слѣдовательно, и черезъ v_i, то по второй леммѣ должны имѣть $v_0 = 0$, $v_1 = 0, \ldots, v_{p-1} = 0$. Отсюда вытекаетъ, что равенство (21) будетъ имѣть мѣсто и при замѣнѣ $\sqrt[p]{v}$ его различными значеніями, а слѣдовательно, функція (20) будетъ удовлетворять данному уравненію и тогда, когда мы въ ней подставимъ по очереди вмѣсто $\sqrt[p]{v}$ значенія $\omega \sqrt[p]{v}$, $\omega^2 \sqrt[p]{v}$, ... Такимъ образомъ получаются p корней даннаго уравненія

$$(22) \quad \begin{cases} a_1 = u_0 + u_1 \sqrt[p]{v} + u_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1}, \\ a_2 = u_0 + u_1 \omega \sqrt[p]{v} + u_2 \omega^2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} \omega^{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_p = u_0 + u_1 \omega^{p-1} \sqrt[p]{v} + u_2 \omega^{2p-2} (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} \omega^{(p-1)^2} (\sqrt[p]{v})^{p-1}. \end{cases}$$

Всѣ эти корни различны между собою. Дѣйствительно, равенство двухъ изъ нихъ дало бы соотношеніе вида (21), съ коэффиціентами, не равными нулю, что невозможно. Затѣмъ, замѣчая, что u_1 всегда можно считать равнымъ единицѣ, изъ уравненій (22) найдемъ выраженіе $\sqrt[p]{v}$, какъ функціи отъ p корней:

$$\sqrt[p]{v} = \frac{1}{p} (a_1 + \omega^{p-1} a_2 + \omega^{p-2} a_3 + \cdots + \omega a_p).$$

Итакъ, если будемъ считать извѣстными корни изъ единицы, то $\sqrt[p]{v}$ выразится раціонально въ корняхъ a_1, a_2, ..., a_p. То же самое можно сказать объ u_0, u_1, u_2, ..., потому что система (22) дастъ

$$u_r = p^{r-1} \frac{a_1 + \omega^{p-r} a_2 + \omega^{2p-2r} a_3 + \cdots}{(a_1 + \omega^{p-1} a_2 + \omega^{p-2} a_3 + \cdots)^r}.$$

Поэтому, если обозначимъ черезъ y какую угодно изъ функцій, входящихъ въ выраженіе (20), то можно написать

$$y = f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

гдѣ f есть символъ раціональной операціи, производимой надъ всѣми корнями даннаго уравненія или надъ нѣкоторыми изъ нихъ. Эта функція отъ n перемѣнныхъ можетъ имѣть нѣсколько, положимъ m значеній (при подстановкахъ, производимыхъ надъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$). Пусть эти m значеній будутъ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Они будутъ корнями уравненія степени m, которое должно удовлетворяться выраженіемъ вида

$$y = v_0 + v_1 \sqrt[q]{w} + v_2 (\sqrt[q]{w})^2 + \cdots + v_{q-1} (\sqrt[q]{w})^{q-1},$$

гдѣ всѣ v_i будутъ функціи того же порядка, какъ функція y, или низшаго, и навѣрно низшей степени, чѣмъ y. Въ то же время коэффиціенты уравненія, которому удовлетворяетъ y, будутъ цѣлыя симметрическія функціи отъ значеній β_i и потому будутъ раціональныя функціи отъ коэффиціентовъ даннаго уравненія. Отсюда, повторяя вышеприведенныя заключенія, выведемъ, что $\sqrt[q]{w}$ и всѣ v_i будутъ раціональныя функціи отъ β_i, а слѣдовательно, и отъ a_i. Теперь $\sqrt[q]{w}$ и всѣ v_i, съ своей стороны, выразятся при помощи формулы (18) алгебраическими функціями низшей степени, о которыхъ опять докажемъ, что онѣ будутъ раціонально выражаться въ a_i. Продолжая такимъ образомъ, мы дойдемъ, наконецъ, (исключая радикалы одинъ за другимъ) до раціональныхъ функцій отъ коэффиціентовъ даннаго уравненія, которыя навѣрно будутъ раціональными и даже симметрическими функціями отъ корней даннаго уравненія.

543. Чтобы отдать себѣ полный отчетъ въ значеніи только что доказанной, чрезвычайно важной леммы, полезно разсмотрѣть, что происходитъ въ тѣхъ уравненіяхъ, которыя мы умѣемъ рѣшать въ радикалахъ. Замѣтимъ, напр., что въ формулѣ, дающей рѣшенія квадратнаго уравненія, радикалъ выражаетъ разность корней. Точно также радикалы въ формулѣ Тарталіа для кубическаго уравненія выражаются раціонально въ корняхъ уравненія, а именно:

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \frac{\sqrt{-3}}{18}(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2),$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{6}(a_2 - a_3).$$

Въ общемъ случаѣ фактъ, установленный леммою III, обнаруживается вполнѣ ясно методою Лагранжа.

544. Теорема Руффини [1]). Рѣшеніе въ радикалахъ алгебраическаго уравненія выше четвертой степени невозможно.

Пусть $\sqrt[p]{u}$ есть радикалъ перваго порядка, входящій въ общее выраженіе корня даннаго уравненія. Этотъ радикалъ долженъ выражаться раціонально въ корняхъ уравненія, и по возвышеніи въ степень p долженъ дать функцію u, раціональную относительно коэффиціентовъ, а потому симметрическую относительно корней. На основаніи § 478, можемъ утверждать, что $\sqrt[p]{u}$, не будучи симметрическимъ относительно корней, долженъ быть знакоперемѣнною функціею, и поэтому $p = 2$. Произведя раціональныя операціи надъ $\sqrt[p]{u}$ и раціональными функціями отъ коэффиціентовъ, получимъ функцію v, имѣющую два значенія, изъ которой, если выраженіе корня уравненія еще не составилось, надо извлечь корень степени q, гдѣ q простое число. Функція $\sqrt[q]{v}$, ирраціональная второго порядка относительно коэффиціентовъ, будетъ тѣмъ не менѣе раціональна относительно корней даннаго уравненія. По возвышеніи въ степень q она должна дать функцію, имѣющую только два значенія, хотя сама имѣетъ больше двухъ. А это невозможно (§ 479), если число перемѣнныхъ (т. е. корней уравненія) больше четырехъ. Слѣдовательно, общему уравненію степени выше четвертой нельзя удовлетворить явною алгебраическою функціею отъ коэффиціентовъ. (XXII).

545. Примѣчаніе. Теорема Руффини и предшествующія ей соображенія, независимо отъ того, что избавляютъ насъ отъ безплодныхъ попытокъ разысканія рѣшенія въ радикалахъ общихъ уравненій 5-ой, 6-ой, ... степеней, даютъ намъ указанія на изысканіе формулъ для рѣшенія уравненій первыхъ четырехъ степеней. Прежде всего мы видѣли, что первый радикалъ, являющійся при разысканіи корня, если вычисленія производятся по порядку, будетъ квадратный корень, извлекаемый изъ дискриминанта уравненія. Второй будетъ кубическимъ корнемъ. Дѣйствительно, мы знаемъ, что при $n \leqq 4$ существуютъ раціональныя функціи, имѣющія два значенія и дающія по возвышеніи въ степень q опять функціи, имѣющія два значенія. Но извѣстно также (§ 479), что q должно быть равно 3. Поэтому, если хотимъ, напр., рѣшить кубическое уравненіе, то должны положить

$$x = \tfrac{1}{3}c_1 + \sqrt[3]{v} + u\sqrt[3]{v^2},$$

[1]) „Reflessioni intorno della soluzione delle equazioni algebraiche generali“ (Modena, 1813).

гдѣ v необходимо должно быть вида $\varphi + \psi\sqrt{\Delta}$, а φ и ψ раціональныя функціи коэффиціентовъ. Подставляя въ уравненіе и припоминая вторую лемму, получаемъ соотношенія

$$v + u^3v^2 = \tfrac{1}{27}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3), \quad uv = \tfrac{1}{9}(c_1^2 - 3c_2),$$

откуда, если положимъ

$$27\Delta = 4(c_1^2 - 3c_2)^3 - (2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3)^2,$$

получаются значенія v и u^3v^2:

$$\tfrac{1}{54}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3) \pm \tfrac{1}{18}\sqrt{-3\Delta}.$$

Такимъ образомъ, снова приходимъ къ общей формулѣ для корня, найденной раньше другимъ путемъ.

Примѣчанія къ пятой книгѣ.

I (къ § 442).

Разсматривая опредѣлитель § 441, изображающій результантъ уравненія 4-ой степени ($n = 4$) и уравненія 2-ой степени ($m = 2$), и мысленно обобщая его на случай какихъ угодно m и n, при $n \geqq m$, безъ труда убѣждаемся, что элементъ, стоящій въ 1-ой строкѣ на i_1-омъ мѣстѣ, имѣетъ сумму указателей, т. е. вѣсъ i_1, элементъ, стоящій на i_2-омъ мѣстѣ во 2-ой строкѣ, имѣетъ вѣсъ $i_2 + 1$, и т. д., наконецъ элементъ, стоящій на i_m-омъ мѣстѣ въ m-ой строкѣ имѣетъ вѣсъ $i_m + m - 1$. Наоборотъ, элементъ, стоящій на i_{m+1}-омъ мѣстѣ въ $m + 1$-ой строкѣ, имѣетъ вѣсъ $i_{m+1} - 1$, и т. д. Такимъ путемъ сосчитанъ вѣсъ какого угодно члена результанта Безу, и аналогично этому и результанта Эйлера, при чемъ еще приняты во вниманіе формулы

$$\sum_{r=1}^{r=m} i_r + \sum_{r=m+1}^{r=n} i_r = \sum_{r=1}^{r=n} i_r = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Надо, впрочемъ, замѣтить, что теорема о вѣсѣ результанта, доказанная въ § 442, проще можетъ быть доказана послѣ того, какъ будетъ извѣстна метода составленія результанта при помощи симметрическихъ функцій (см. § 472). Это доказательство можно прочесть въ сочиненіи G. Salmon „Leçons d'Algèbre supérieure“ traduits par O. Chemen, 2-oe изд. 1890. стр. 100.

II (къ § 448 а).

Если бы функціи Φ и Ψ были написаны въ видѣ

$$\Phi(x) = a_0 x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + \cdots + a_{\nu-1} x + a_\nu$$
$$\Psi(x) = \beta_0 x^{\nu-1} + \beta_1 x^{\nu-2} + \cdots + \beta_{\nu-2} x + \beta_{\nu-1},$$

то вѣсъ результанта былъ бы $= \nu(\nu-1)$, по теоремѣ § 442. А теперь коэффиціенты

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ замѣнены коэффиціентами
$1, b_2, b_4, \ldots, b_{2\nu}$, и коэффиціенты
$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}$ коэффиціентами
$b_1, b_3, b_5, \ldots, b_{2\nu-1}$,

т. е. у всѣхъ коэффиціентовъ указатели удвоены, а у послѣднихъ ν еще, кромѣ того, увеличены на одну единицу. Поэтому сумма указателей каждаго члена результанта, т. е. его вѣсъ сдѣлается равнымъ $2\nu(\nu-1)+\nu$.

III (къ § 452).

Для поясненія разсмотримъ случай двухъ уравненій 4-ой степени ($n=m=4$), который разсматривается и въ § 453, и найдемъ условія, необходимыя и достаточныя, чтобы f и g имѣли общаго дѣлителя не ниже 3-ей степени ($i=3$).

$$f = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \quad g = b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4.$$

Результантомъ Эйлера будетъ опредѣлитель 8-го порядка

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Напишемъ тождество $fg_3 - gf_3 = 0$, гдѣ $f_3 = a_0x + a_1$, $g_3 = \beta_0x + \beta_1$, и приравнивая нулю коэффиціенты при x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1 въ этомъ тождествѣ, получимъ слѣдующую систему уравненій съ неизвѣстными $a_0, a_1, \beta_0, \beta_1$:

$$\begin{aligned} a_0\beta_0 + 0\ \beta_1 - b_0a_0 - 0\ a_1 &= 0 \\ a_1\beta_0 + a_0\beta_1 - b_1a_0 - b_0a_1 &= 0 \\ a_2\beta_0 + a_1\beta_1 - b_2a_0 - b_1a_1 &= 0 \\ a_3\beta_0 + a_2\beta_1 - b_3a_0 - b_2a_1 &= 0 \\ a_4\beta_0 + a_3\beta_1 - b_4a_0 - b_3a_1 &= 0 \\ 0\ \beta_0 + a_4\beta_1 - 0\ a_0 - b_4a_1 &= 0, \end{aligned}$$

Матрисса этой системы, независимо отъ знака, и по замѣнѣ строкъ столбцами (которая была сдѣлана и при составленіи R), будетъ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

и получается, какъ видимъ, выкидываніемъ изъ R послѣднихъ двухъ $(i-1)$ строкъ изъ первыхъ 4-хъ, и послѣднихъ двухъ изъ всѣхъ строкъ, при чемъ еще выкидываются два столбца нулей. Старшіе опредѣлители R_2, $R_2^{(1)}$, $R_2^{(2)}$, этой матриссы, согласно сказанному въ § 452, будутъ

$$R_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad R_2^{(1)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad R_2^{(2)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Если $R_2 = 0$, $R_2^{(1)} = 0$, $R_2^{(2)} = 0$, то f и g будутъ имѣть общаго дѣлителя, не ниже 3-ей степени.

IV (къ § 462).

Упомянутое въ концѣ параграфа разложеніе дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ на простѣйшія имѣетъ важныя приложенія въ различныхъ частяхъ Математики, поэтому считаемъ полезнымъ нѣсколько подробнѣе на немъ остановиться. Все дѣло основано на одной важной теоремѣ, извѣстной изъ элементарной Алгебры и вытекающей изъ алгоріѳма Эвклида для разысканія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій. Теорема эта состоитъ въ слѣдующемъ:

Если X и Y двѣ взаимно простыя цѣлыя функціи, то всегда можно найти другія двѣ цѣлыя функціи A и B такимъ образомъ, чтобы тождественно удовлетворялось равенство

$$AX + BY = 1. \tag{1}$$

(См., напримѣръ, Веберъ и Вельштейнъ, стр. 227, тамъ же указанъ и способъ нахожденія функцій A и B).

Замѣтимъ, между прочимъ, что опредѣленія функцій A и B приводится къ разложенію $\frac{X}{Y}$ въ непрерывную дробь и нахожде-

нію послѣдней подходящей дроби. Положимъ теперь, что дана дробь

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{гдѣ} \quad g(x) = \varphi^r \chi^s \psi^t \dots$$

при чемъ предполагается, что полиномъ $f(x)$ взаимно простой съ $g(x)$, т. е. дробь несократима, степень $f(x)$ ниже степени $g(x)$, и полиномы φ, χ, ψ ... простые одинъ относительно другого. Положимъ, для сокращенія, $\varphi^r = P$, $\chi^s \psi^t \dots = Q$. Такъ какъ P и Q взаимно простые полиномы, то можно найти функціи A и B такимъ образомъ, чтобы

$$AP + BQ = 1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{PQ} = \frac{B}{P} + \frac{A}{Q},$$

и

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{PQ} = \frac{Bf(x)}{P} + \frac{Af(x)}{Q},$$

или, выдѣляя въ правой части цѣлыя части $E(x)$ и $E_1(x)$, находимъ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = E(x) + E_1(x) + \frac{f_1(x)}{\varphi^r} + \frac{f_2(x)}{\chi^s \psi^t},$$

а такъ какъ, по условію, степень $f(x)$ ниже степени $g(x)$, то $E(x) + E_1(x) = 0$, и получится

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{\varphi^r} + \frac{f_2(x)}{\chi^s \psi^t},$$

гдѣ въ дробяхъ правой части степени числителей ниже степеней знаменателей, а, какъ легко видѣть, дроби эти несократимы. Со второю дробью въ правой части можно поступить такъ же, какъ съ данною, и т. д. Такимъ путемъ придемъ къ разложенію

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{\varphi^r(x)} + \frac{f_1^{(1}(x)}{\chi^s(x)} + \frac{f_1^{(2)}(x)}{\psi^t(x)} + \dots,$$

гдѣ всѣ числители въ правой части будутъ степеней, низшихъ, чѣмъ знаменатели. Разсматривая любую изъ этихъ дробей, напримѣръ, первую, положимъ, что степень $f_1(x)$ выше степени $\varphi(x)$, хотя и ниже степени $\varphi^r(x)$. Раздѣливъ $f_1(x)$ на $\varphi(x)$, получимъ $f_1(x) = \varphi(x) \cdot Q + R$, гдѣ R степени ниже φ. Отсюда

$$\frac{f_1(x)}{\varphi^r(x)} = \frac{R}{\varphi^r(x)} + \frac{Q}{\varphi^{r-1}(x)}.$$

Если Q будетъ еще высшей степени, чѣмъ $\varphi(x)$, то раздѣливъ Q на $\varphi(x)$, получимъ $Q = Q_1 \varphi(x) + R_1$, гдѣ R_1 степени ниже φ, и

$$\frac{f_1(x)}{\varphi^r(x)} = \frac{R}{\varphi^r(x)} + \frac{R_1}{\varphi^{r-1}(x)} + \frac{Q_1}{\varphi^{r-2}(x)}.$$

Продолжая такимъ путемъ, непремѣнно дойдемъ до такого Q_i, которое будетъ степени ниже φ, и получимъ разложеніе того вида, которое дано въ § 462.

V (къ § 464, d).

Здѣсь авторъ прибѣгаетъ къ измѣненію порядка суммированія въ случаѣ безконечныхъ рядовъ. Этотъ пріемъ—при опредѣленныхъ условіяхъ — оправдывается слѣдующей теоремой, принадлежащей Коши (Cauchy).

Теорема. Если ряды $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{m,n}|$ (при $n = 1, 2, 3, \ldots$) и $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_{m,n}|$ сходящіеся, то будутъ сходящимися и ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \ (n = 1, 2 \ldots), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \ (m = 1, 2 \ldots), \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$$

при чемъ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

Изъ условія теоремы, согласно § 245, вытекаетъ сходимость рядовъ $\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$, а также существованіе соотношенія

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = A = \lim_{\substack{\mu=\infty \\ \nu=\infty}} \sum_{m=1}^{m=\mu}\sum_{n=1}^{n=\nu} a_{m,n}.$$

Такъ какъ каждое изъ ряда неотрицательныхъ слагаемыхъ не превосходитъ ихъ суммы, то

$$\sum_{n=1}^{n=\nu} |a_{\mu,n}| \leqq \sum_{m=1}^{m=\mu}\sum_{n=1}^{n=\nu} |a_{m,n}| = \sum_{n=1}^{n=\nu}\sum_{m=1}^{m=\mu} |a_{m,n}|;$$

съ другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{n=\nu}\sum_{m=1}^{m=\mu} |a_{m,n}| \leqq \sum_{n=1}^{n=\nu}\sum_{m=1}^{\infty} |a_{m,n}| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_{m,n}| = B,$$

такъ что при $\mu = 1, 2, \ldots, \nu = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{n=\nu} |a_{\mu, n}| \leqq B,$$

откуда заключаемъ (§§ 136, 181) о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\mu, n}|$, а слѣдовательно (§ 190, a), и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu, n}$, для $\mu = 1, 2, \ldots$

Взявъ произвольное число $\varepsilon > 0$, найдемъ такія числа M и N, что при $\mu \geqq M$, $\nu \geqq N$

$$\left| A - \sum_{m=1}^{m=\mu} \sum_{n=1}^{n=\nu} a_{m, n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Фиксируемъ значенія $\mu \geqq M$ и беремъ настолько большое $\nu (\geqq N)$, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{m=1}^{m=\mu} \sum_{n=1}^{n=\nu} a_{m, n} - \sum_{m=1}^{m=\mu} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m, n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}; \tag{3}$$

это сдѣлать возможно, такъ какъ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m, n} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{n=\nu} a_{m, n} \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{m=\mu} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m, n} = \lim_{\nu=\infty} \sum_{m=1}^{m=\mu} \sum_{n=1}^{n=\nu} a_{m, n}.$$

Изъ соотношеній (2) и (3) заключаемъ, что при $\mu \geqq M$

$$\left| A - \sum_{m=1}^{m=\mu} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m, n} \right| < \varepsilon,$$

откуда

$$A = \lim_{\mu=\infty} \sum_{m=1}^{m=\mu} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m, n},$$

т. е. рядъ $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m, n}$ сходящійся и сумма его равна A (ср. (1)).

Въ § 464, d) имѣемъ

$$x \operatorname{cotg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2x^{2m}}{n^{2m} \pi^{2m}} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2m}}{n^{2m} \pi^{2m}}$$

$$= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2x^{2m}}{\pi^{2m}} s_{2m}.$$

Здѣсь $a_{m,n} = \frac{2x^{2m}}{n^{2m}\pi^{2m}} > 0$, такъ что $a_{m,n} = |a_{m,n}|$ и теорема непосредственно примѣняется. Въ другихъ случаяхъ убѣдиться въ выполненіи условій теоремы часто бываетъ затруднительно.

VI (къ § 466).

Тождество это получается слѣдующимъ образомъ. По формуламъ

$$(1) \qquad c_1 = -\frac{a_1}{a_0},\ c_2 = \frac{a_2}{a_0},\ c_3 = -\frac{a_3}{a_0},\ \ldots\ c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

(§ 465) можемъ написать $f(x)$ въ видѣ

$$f(x) = a_0(x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n c_n)$$

и

$$f'(x) = a_0(nx^{n-1} - c_1(n-1)x^{n-2} + c_2(n-2)x^{n-3} + \cdots).$$

Затѣмъ формулу

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots$$

можно переписать въ видѣ

$$\frac{f'(x)}{x^{n-1}} = \frac{f'(x)}{x^n}\left[s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \cdots\right];$$

подставивъ написанныя выше выраженія $f(x)$ и $f'(x)$, мы и найдемъ требуемое тождество.

VI bis (къ § 466).

Если положимъ $a_0 = 1$ и замѣнимъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ихъ выраженіями $-a_1, a_2, -a_3, \ldots$, то формулы Жирара обратятся въ формулы

$$s_1 + a_1 = 0,\quad s_2 + s_1 a_1 + 2a_2 = 0,\quad s_3 + s_2 a_1 + s_1 a_2 + 3a_3 = 0$$

и т. д., извѣстныя подъ названіемъ формулъ Ньютона (см. Веберъ и Вельштейнъ, стр. 244).

VII (къ § 467).

Приведемъ тотъ выводъ формулъ Варинга, на который авторъ указываетъ въ текстѣ. Имѣемъ одновременно:

$$v = \sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{s_p}{p\,x^p}, \quad v = \sum_{r=1}^{\infty}{}' \frac{1}{r} u^r,$$

но

$$u = \sum_{p=1}^{\infty}{}' (-1)^{p-1} \frac{c_p}{x^p}, \quad u^r = \sum_{p=r}^{\infty}{}' [(-1)^{p-r} \sum_{p}^{r} c_i] \frac{1}{x^p}.$$

Подставляя этотъ рядъ вмѣсто u^r во второе выраженіе для v, получимъ:

$$v = \sum_{r=1}^{\infty}{}' \frac{1}{r} \sum_{p=r}^{\infty}{}' [(-1)^{p-r} \sum_{p}^{r} c_i] \frac{1}{x^p}$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{1}{x^p} \sum_{r=1}^{r=p}{}' \left[\frac{(-1)^{p-r}}{r} \sum_{p}^{r} c_i\right].$$

Отождествляя коэффиціенты при $\frac{1}{x^p}$ въ этомъ и въ первомъ разложеніи для v, найдемъ

$$s_p = p \sum_{r=1}^{r=p}{}' \left[\frac{(-1)^{p-r}}{r} \sum_{p}^{r} c_i\right].$$

Аналогично этому:

$$u = \sum_{p=1}^{\infty}{}' (-1)^{p-1} c_p \frac{1}{x^p}, \quad u = \sum_{r=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{r-1}}{r!} v^r;$$

$$v = \sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{s_p}{p} \cdot \frac{1}{x^p}, \quad v^r = \sum_{p=r}^{\infty}{}' \left[\sum_{p}^{r} \frac{s_i}{i}\right] \frac{1}{x^p};$$

$$u = \sum_{r=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{r-1}}{r!} \sum_{p=r}^{\infty}{}' \left[\sum_{p}^{r} \frac{s_i}{i}\right] \frac{1}{x^p}$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{1}{x^p} \sum_{r=1}^{r=p}{}' \left[\frac{(-1)^{r-1}}{r!} \sum_{p}^{r} \frac{s_i}{i}\right];$$

$$c_p = \sum_{r=1}^{r=p}{}' \left[\frac{(-1)^{p-r}}{r!} \sum_{p}^{r} \frac{s_i}{i}\right].$$

VIII (къ § 470).

Разовьемъ нѣсколько подробнѣе намѣченный въ этомъ параграфѣ способъ вычисленія симметрическихъ функцій отъ n пере-

мѣнныхъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, вида

$$\sum' a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_\nu^{p_\nu},$$

гдѣ $\nu \leqq n$.

1°. Въ приложеніяхъ этого способа полезно умѣть сосчитать число членовъ такой суммы, не выписывая ихъ на самомъ дѣлѣ. Условившись, въ случаѣ $\nu < n$, считать $p_{\nu+1} = p_{\nu+2} = \cdots = p_n = 0$, мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ случая $\nu = n$ и писать разсматриваемую сумму всегда въ видѣ

$$S = \sum a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}. \tag{1}$$

По самому опредѣленію этого символа, мы получимъ сумму S, если переставимъ указатели $1, 2, \ldots, n$ всѣми возможными способами, не мѣняя порядка показателей $p_1, p_2, \ldots, p_n$, и сложимъ всѣ различныя между собою получаемыя такимъ образомъ произведенія. Различными мы называемъ такія произведенія, въ которыхъ, по крайней мѣрѣ, одна изъ перемѣнныхъ a_i входитъ съ различными показателями степени, и одинаковыми такія, которыя отличаются одно отъ другого только порядкомъ сомножителей и, слѣдовательно, имѣютъ равныя величины при произвольныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Разсмотримъ теперь два возможныхъ случая: 1) всѣ показатели $p_1, p_2, \ldots p_n$ между собою различны и 2) среди чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ есть равныя между собою. Въ первомъ случаѣ, очевидно, всѣ составленныя вышеуказаннымъ способомъ произведенія между собою различны, а потому число членовъ въ суммѣ S, которое обозначимъ черезъ N, равно числу перестановокъ изъ n чиселъ $1, 2, \ldots, n$, т. е. число $N = 1 \cdot 2 \ldots n = n!$ Напримѣръ, при $n = 3$ и различныхъ между собою p_1, p_2, p_3, имѣемъ $N = 3! = 6$, а

$$\left| \begin{aligned} S = \sum a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} = {} & a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} + a_2^{p_1} a_3^{p_2} a_1^{p_3} + a_3^{p_1} a_1^{p_2} a_2^{p_3} \\ & + a_1^{p_1} a_3^{p_2} a_2^{p_3} + a_2^{p_1} a_1^{p_2} a_3^{p_3} + a_3^{p_1} a_2^{p_2} a_1^{p_3} \end{aligned} \right. \tag{2}$$

и, въ частности, ($p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 0$)

$$S = \sum a_1 a_2^2 = a_1 a_2^2 + a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_3^2 + a_2 a_1^2 + a_3 a_2^2.$$

Переходя ко второму случаю, положимъ, что изъ n чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ μ чиселъ между собою равны и отличны отъ всѣхъ прочихъ, различныхъ между собою. Если и теперь составимъ вышеуказаннымъ способомъ всѣ $n!$ произведеній, то между ними будутъ одинаковыя, а именно, одно и то же произведеніе, независимо отъ порядка сомножителей, встрѣтится въ числѣ всѣхъ $n!$ произведеній ровно $\mu!$ разъ, т. е. столько разъ, сколько имѣемъ пере-

становокъ изъ μ буквъ; поэтому, число различныхъ произведеній, т. е. число членовъ въ суммѣ S, будетъ равно $\frac{n!}{\mu!}$. Дѣйствительно, если $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_\mu$, и возьмемъ какой нибудь членъ суммы

$$a_{i_1}^{p_1} a_{i_2}^{p_2} \ldots a_{i_\mu}^{p_\mu} a_{i_{\mu+1}}^{p_{\mu+1}} \ldots a_{i_n}^{p_n},$$

гдѣ $i_1, i_2, \ldots, i_\mu, i_{\mu+1}, \ldots, i_n$ какія нибудь изъ чиселъ $1, 2, \ldots, n$ то ясно, что всѣ произведенія, получаемыя при $\mu!$ перемѣщеніяхъ первыхъ μ указателей будутъ одинаковыми. Напримѣръ, въ приведенномъ выше примѣрѣ, при $p_1 = p_2$, въ правой части формулы (2) каждое произведеніе встрѣтится два раза, $N = \frac{6}{2!} = 3$ и

$$S = \sum a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} = a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} + a_2^{p_2} a_3^{p_3} a_1^{p_3} + a_3^{p_3} a_1^{p_3} a_2^{p_3}.$$

Если теперь еще ν показателей сдѣлаются равными между собой и отличными отъ всѣхъ прочихъ, то среди $\frac{n!}{\mu!}$ произведеній различныхъ останется $\frac{n!}{\mu!\,\nu!}$ и т. д. Такимъ образомъ, приходимъ къ слѣдующему общему заключенію. Если въ выраженіи

(1) $$S = \sum a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}$$

между числами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ имѣемъ μ чиселъ, равныхъ a, ν равныхъ $b, \ldots,$ ϱ равныхъ c, при чемъ $a, b, \ldots, c$ между собой различны, то число членовъ въ суммѣ S выражается формулою

$$N = \frac{n!}{\mu!\,\nu! \ldots \varrho!}.$$

Напримѣръ, при $n = 7$, въ суммѣ

$$S = \sum a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 = \sum a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 a_5^0 a_6^0 a_7^0$$

будетъ

$$N = \frac{7!}{2!\ 2!\ 3!} = 5.6.7 = 210 \text{ членовъ}.$$

2°. Обозначая черезъ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ элементарныя симметрическія функціи перемѣнныхъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и полагая

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) = \\ = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n c_n,$$

можемъ сказать, что въ формулѣ (1) суммированіе распростра-

няется на всѣ корни полинома $f(x)$. Если, въ частности, положимъ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, $f(x) = (x-1)^n$, то $c_1, c_2, \ldots, c_n$ будутъ соотвѣтственно равны биноміальнымъ коэффиціентамъ $n, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \ldots, 1$, а сумма S, каковы бы ни были показатели $p_1, p_2, \ldots, p_n$, будетъ равна числу ея членовъ N, потому что всѣ члены ея равны единицѣ. Этимъ замѣчаніемъ можно съ выгодою пользоваться въ приложеніи способа вычисленія симметрическихъ функцій вида (1), указаннаго въ § 470.

3°. При составленіи буквеннаго выраженія S черезъ элементарныя функціи $c_1, c_2, \ldots, c_n$, по данному вѣсу g и степени m (относительно $c_1, c_2, \ldots$), можно поступать слѣдующимъ образомъ: разложить число g всѣми возможными способами на слагаемыя, число которыхъ не превышаетъ m; эти слагаемыя и дадутъ значенія указателей функцій $c_1, c_2, \ldots, c_g$ въ различныхъ членахъ буквеннаго выраженія S. Напримѣръ, если $g = 6$, $m = 3$, какъ въ примѣрѣ § 470, то замѣчаемъ слѣдующія разложенія числа 6 на слагаемыя, числомъ не больше $3:6$, $5+1$, $4+2$, $3+3$, $2+2+2$, $1+1+4$, $1+2+3$, и находимъ, что буквенное выраженіе $\Sigma a_1 a_2^2 a_3^3$ будетъ

$$(3)\quad \sum a_1 a_2^2 a_3^3 = k_0 c_6 + k_1 c_5 c_1 + k_2 c_4 c_2 + k_3 c_3^2 + k_4 c_1^2 c_4 + k_5 c_2^3 + k_6 c_1 c_2 c_3,$$

какъ и написано въ текстѣ.

4°. Для составленія линейныхъ уравненій, служащихъ для опредѣленія численныхъ коэффиціентовъ $k_0, k_1, \ldots$, выбираемъ числа $a_1, a_2, \ldots$ или полиномъ $f(x)$ такъ, чтобы вычисленіе значенія S и функцій $c_1, c_2, \ldots$ было по возможности просто (при чемъ полезнымъ оказывается пунктъ 2° настоящаго примѣчанія) и, полагая всѣ c_i, указатель i которыхъ будетъ больше n (степени $f(x)$ или числа перемѣнныхъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$), равными нулю.

Примѣнимъ сказанное къ примѣру § 470 и провѣримъ такимъ образомъ приведенный тамъ результатъ.

1) Полагая $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $f(x) = x(x-1)^2$, имѣемъ $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, остальныя $c_i = 0$, и $S = \Sigma a_1 a_2^2 a_3^3 = 0$, потому что въ каждый ея членъ a_3 входитъ множителемъ. Уравненіе (3) дастъ

$$k_5 = 0.$$

2) Выбирая a_i такъ, чтобы всѣ c_i, кромѣ c_3, были равны нулю, найдемъ коэффиціентъ k_3. Для этого положимъ $a_1 = 1$, $a_2 = \omega$, $a_3 = \omega^2$, гдѣ ω мнимый кубическій корень изъ 1, тогда $f(x) = x^3 - 1$, $c_3 = 1$, всѣ другія $c_i = 0$, а

$$S = a_1 a_2^2 a_3^3 + a_2 a_3^2 a_1^3 + a_3 a_1^2 a_2^3 + a_1 a_3^2 a_2^3 + a_2 a_1^2 a_3^3 + a_3 a_2^2 a_1^3 =$$
$$= 3(\omega^2 + \omega) = -3$$

и формула (3) дастъ

$$k_3 = -3.$$

3) Полагая $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $f(x) = (x-1)^3$, имѣемъ $c_1 = c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $S = N = 3! = 6$, и въ силу (3) $k_3 + 9k_6 = 6$, откуда

$$k_6 = 1.$$

4) $f(x) = (x-1)^4$, $c_1 = 4$, $c_2 = 6$, $c_3 = 4$, $c_4 = 1$, $S = N = 4! = 24$,

$$3k_2 + 8k_4 = -12.$$

5) $f(x) = (x-1)^5$, $c_1 = c_4 = 5$, $c_2 = c_3 = 10$, $c_4 = 1$, $S = N = \frac{5!}{2!} = 60$,

$$k_1 + 10k_2 + 25k_4 = -28.$$

6) $f(x) = (x-1)^6$, $c_1 = c_5 = 6$, $c_2 = c_4 = 15$, $c_5 = 20$, $c_6 = 1$, $S = N = \frac{6!}{3!} = 120$;

$$k_0 + 36k_1 + 225k_2 + 540k_4 = -480.$$

7) Остается найти еще одно уравненіе, независимое отъ предыдущихъ, чтобы вычислить всѣ семь коэффиціентовъ k_i. Положимъ $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = -1$, т. е. $f(x) = (x-1)^3(x+1) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2$, $c_4 = -1$.

Для вычисленія суммы $S = \Sigma a_1 a_2^2 a_3^3 a_4^0$ (при $n = 4$), замѣчаемъ, что число членовъ этой суммы равно 24, изъ которыхъ 12 равны $+1$ и 12 равны -1, такъ что $S = 0$. Для этого не нужно выписывать всѣ 24 члена суммы; достаточно замѣтить, что $+1$ получимъ для тѣхъ членовъ, гдѣ $a_4 (= -1)$ стоитъ на 2-мъ или 4-мъ мѣстѣ (съ четными показателями степени), а -1, въ тѣхъ, гдѣ a_4 стоитъ на 1-мъ и 3-мъ мѣстѣ, и что число первыхъ и вторыхъ членовъ, очевидно, одинаково. Такимъ образомъ, формула (3) дастъ теперь

$$0 = -12 - 4k_4, \quad k_4 = -3.$$

Подставляя это значеніе въ предыдущія три уравненія и рѣшая ихъ, найдемъ

$$k_2 = 4, \quad k_1 = 7, \quad k_0 = -12$$

и окончательно получимъ

$$\sum a_1 a_2^2 a_3^3 = -12c_6 + 7c_1c_5 + 4c_2c_4 - 3c_3^2 - 3c_1^2c_4 + c_1c_2c_3,$$

какъ и дано въ § 470.

IX (къ § 471).

Чтобы убѣдиться въ справедливости этого замѣчанія, примемъ во вниманіе, что вѣсъ дискриминанта

$$\Delta = (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 \dots (a_1 - a_n)^2 (a_2 - a_3)^2 \dots (a_{n-1} - a_n)^2,$$

очевидно, равенъ

$$2[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] = n(n-1),$$

а степень равна $2(n-1)$. Поэтому выраженіе Δ въ функціяхъ c_i будетъ вида $\Delta = k_0 c_n^{n-1} + \dots$, гдѣ въ остальные члены непремѣнно входитъ, по крайней мѣрѣ, одна изъ функцій $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Если возьмемъ $f(x) = x^n - 1$, то всѣ c_i при $i < n$ будутъ равны нулю, $c_n = (-1)^{n-1}$ и $\Delta = k_0(-1)^{(n-1)^2}$. Съ другой стороны, если $a_1, a_2, \dots, a_n$ корни $f(x)$, то, какъ извѣстно,

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - a_1} + \frac{f(x)}{x - a_2} + \dots + \frac{f(x)}{x - a_n},$$

откуда

$$f'(a_k) = (a_k - a_1) \dots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \dots (a_k - a_n).$$

Давая k значенія $1, 2, \dots n$, и перемножая результаты, получимъ

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(a_1) f'(a_2) \dots f'(a_n). \tag{1}$$

Примѣняя формулу (1) къ $f(x) = x^n - 1$, получимъ

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n (-1)^{(n-2)^2},$$

а изъ сравненія съ предыдущимъ выраженіемъ Δ, получимъ

$$k_0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n$$

что и требовалось доказать.

X (къ §§ 478 и 479).

Приведенныя здѣсь доказательства теоремъ, высказанныхъ въ этихъ параграфахъ, существенно предполагаютъ, что p число простое. Этимъ случаемъ можно и ограничиться, если имѣть въ виду лишь тѣ приложенія этихъ теоремъ, съ которыми мы встрѣтимся въ вопросѣ о рѣшеніи уравненій въ радикалахъ (§ 544). Но теоремы остаются справедливыми и при p не простомъ. Доказательство тео-

ремы § 478 въ общемъ случаѣ дано, между прочимъ, у Netto „Substitutionstheorie" стр. 63, но это доказательство основано на другихъ, довольно сложныхъ, соображеніяхъ. Между тѣмъ, элементарный способъ доказательства, примѣнимый для p простого, можетъ быть, съ помощью нѣкоторыхъ простыхъ дополненій, примѣненъ и къ случаю p составного, что мы и покажемъ. Сперва не безполезно будетъ указать одну теорему, извѣстную изъ теоріи корней изъ единицы, на которой основаны доказательства обѣихъ теоремъ въ случаѣ p простого, а именно: если ω есть корень нѣкоторой степени изъ единицы, не равный единицѣ, p_1 и p_2 простыя числа, и $\omega^{p_1} = \omega^{p_2} = 1$, то $p_1 = p_2$. Въ самомъ дѣлѣ, если p_1 и p_2 простыя, а слѣдовательно и взаимно простыя, неравныя числа, то всегда можно найти два такихъ цѣлыхъ числа a и b, что $ap_1 - bp_2 = 1$, а тогда изъ условій $\omega^{p_1} = 1$, $\omega^{p_2} = 1$ найдемъ $\omega^{ap_1 - bp_2} = \omega = 1$, вопреки предположенію. Поэтому нельзя предположить, что p_1 не равно p_2.

Заключеніе, что круговая подстановка трехъ, пяти или вообще нечетнаго числа перемѣнныхъ не измѣняетъ значенія φ^p, если эта степень можетъ имѣть всего два различныхъ значенія, вытекаетъ изъ того, что φ^p должно быть вида $s_1 + s_2\sqrt{\Delta}$, гдѣ s_1 и s_2 симметрическія функціи (§ 476). Круговая подстановка нечетнаго числа перемѣнныхъ равносильна четному числу транспозицій (§ 5). Каждая транспозиція переводитъ $s_1 + s_2\sqrt{\Delta}$ въ $s_1 - s_2\sqrt{\Delta}$; слѣдовательно, четное число транспозицій приводитъ опять къ первоначальному значенію.

Теперь докажемъ теорему § 478 для случая p составного. Положимъ, что φ^p симметрическая функція, и пусть a нѣкоторый простой нечетный дѣлитель числа p; тогда, полагая $p = aq$, получимъ, что $(\varphi^q)^a$ симметрическая функція, откуда, какъ доказано въ § 478, и φ^q будетъ симметрическая, потому что, если бы она была знакоперемѣнная, то число a должно было бы равняться 2. Продолжая разсуждать такимъ образомъ, очевидно, дойдемъ до функціи φ^t, гдѣ t равно 2 или степени 2 и φ^t симметрическая функція. Теперь, разсуждая совершенно такъ, какъ въ § 479, придемъ къ заключенію, что φ не можетъ имѣть болѣе двухъ различныхъ значеній (потому что иначе одновременно имѣли бы $\omega^t = 1$ и $\omega^3 = 1$, что невозможно, при $t = 2^k$). Поэтому φ должна быть вида

$$\varphi = s_1 + s_2\sqrt{\Delta}.$$

Если ни s_1, ни s_2 не равна 0, то φ^2, очевидно, будетъ того же вида и т. д., и φ^t не могла бы быть симметрическою. Поэтому либо s_1, либо s_2 равна 0, т. е. φ симметрическая или знакоперемѣнная, что и требовалось доказать.

Въ заключеніе замѣтимъ, что теоремы §§ 478 и 479 справедливы при условіи, что перемѣнныя, отъ которыхъ зависитъ φ,

независимы, т. е. что между ними не установлено никакихъ соотношеній.

XI (къ § 481).

Функція φ, какъ легко видѣть, имѣетъ 6 различныхъ значеній, и удовлетворяетъ уравненію 6-ой степени съ коэффиціентами, раціональными относительно c_1, c_2, ..., какъ это видно изъ найденнаго выраженія для φ^3. Вычисленіе функціи $\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3$ легко произвести по способу § 470. Изъ выраженій β черезъ α тотчасъ видно, что $\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2$, при $n=4$. Число членовъ подъ знакомъ Σ равно 12. Вѣсъ этой функціи равенъ 4, степень равна 2, поэтому

$$\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2=k_0c_4+k_1c_1c_3+k_2c_2^2.$$

Примѣняя эту формулу къ функціямъ $f(x)=x^2(x-1)^2$, $x(x-1)^3$, $(x-1)^4$, тотчасъ находимъ $k_2=0$, $k_1=1$, $k_0=-4$, и $\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3=c_1c_3-4c_4$.

Аналогично этому вычисляется и $\beta_1\beta_2\beta_3$ — симметрическая функція относительно α_i, съ вѣсомъ 6 и степенью 3.

XII (къ § 482).

Прежде всего надо замѣтить, что всякую цѣлую функцію

$$(1)\quad f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=x^n-c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+(-1)^nc_n$$

можно привести къ однородному виду, замѣнивъ x на $\frac{x}{y}$ и умноживъ затѣмъ всѣ члены на y^n. Тогда получаемъ бинарную форму

$$(2)\quad f(x,y)=(x-\alpha_1y)(x-\alpha_2y)\ldots(x-\alpha_ny)=x^n-c_1x^{n-1}y+c_2x^{n-2}y^2-\cdots+(-1)^nc_ny^n.$$

Ясно, что

$$f(x)=f(x,1),\text{ и }f(x,y)=y^nf\left(\frac{x}{y}\right).$$

Инваріантъ I формы (2), какъ извѣстно, есть такая функція коэффиціентовъ формы (2) или функціи $f(x)$, которая пріобрѣтаетъ только множитель K^p при любомъ линейномъ преобразованіи перемѣнныхъ x и y съ модулемъ, равнымъ K. Самое общее линейное преобразованіе состоитъ въ замѣнѣ перемѣнныхъ x и y линейными функціями $ax+by$ и $cx+dy$. Ясно, что результатъ такой замѣны x и y въ формѣ $f(x,y)$ [при $y=1$] можно получить также замѣнивъ въ функціи $f(x)$ перемѣнную x выраженіемъ $\frac{ax+b}{cx+d}$ и умно-

живъ затѣмъ всѣ члены на $(cx+d)^n$. Простѣйшее линейное преобразованіе состоитъ въ замѣнѣ x на $x-\lambda$, гдѣ λ произвольное число; оно соотвѣтствуетъ значеніямъ $a=1$, $b=-\lambda$, $c=0$, $d=1$, и модуль его, очевидно, равенъ 1. При такомъ преобразованіи, слѣдовательно, инваріантъ I совсѣмъ не измѣнится. Замѣтимъ теперь, что инваріантъ I можно всегда представить, какъ симметрическую функцію отъ корней $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функціи $f(x)$, замѣнивъ коэффиціенты $c_1, c_2, \ldots$ ихъ выраженіями Σa_1, $\Sigma a_1 a_2, \ldots$ Изъ вышесказаннаго вытекаетъ, что если $I=\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то функція Φ должна обладать свойствомъ

$$\Phi(a_1+\lambda, a_2+\lambda, \ldots, a_n+\lambda) = \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{3}$$

при произвольномъ λ. Въ самомъ дѣлѣ, I не мѣняется при замѣнѣ x на $x-\lambda$, а тогда, очевидно, корни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ замѣняются числами $a_1+\lambda$, $a_2+\lambda, \ldots a_n+\lambda$. Ясно, что свойство (3) принадлежитъ функціямъ, зависящимъ только отъ разностей a_1-a_2, $a_1-a_3, \ldots, a_{n-1}-a_n$ корней, и, какъ легко убѣдиться, только такимъ функціямъ. Отсюда вытекаетъ такое заключеніе: инваріантомъ формы $f(x, y)$ можетъ быть только функція отъ разностей корней функціи $f(x, 1)$ или $f(x)$. Къ этому можно добавить, что если въ каждый членъ выраженія $\varphi(a_1-a_2, a_1-a_3, \ldots, a_{n-1}-a_n)$ всѣ корни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ входятъ одинаковое число разъ, то такая функція, дѣйствительно, будетъ инваріантомъ формы $f(x, y)$, потому что при самомъ общемъ линейномъ преобразованіи пріобрѣтетъ только множитель, какъ то и показано въ началѣ § 482.

То же самое еще проще можно показать, если напишемъ, какъ функцію $f(x)$, такъ и функцію разностей корней въ однородномъ видѣ (см. Salmon, Algèbre supérieure, 2-ое изд., 1890, стр. 179).

XIII (къ § 483).

Выраженіе инваріанта J въ коэффиціентахъ, т. е. выраженіе (34) можно получить, вычисляя симметрическую функцію (35) по правилу § 470. Но гораздо проще ее можно вычислить съ помощью пріема, изложеннаго въ неоднократно цитированномъ сочиненіи Salmon, Leçons d'Alg. sup., стр. 88. Мы считаемъ полезнымъ привести здѣсь этотъ пріемъ, такъ какъ онъ примѣнимъ ко всякой симметрической функціи разностей корней уравненія $f(x)=0$ и даетъ матерьялъ для многихъ упражненій. Пріемъ этотъ основанъ на слѣдующей теоремѣ:

Теорема. Всякая симметрическая функція φ отъ разностей корней уравненія

$$f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - c_3 x^{n-3} + \cdots + (-1)^n c_n = 0,$$

выраженная въ коэффиціентахъ $c_1, c_2, \ldots, c_n$, удовлетворяетъ уравненію

$$n\varphi_{c_1} + (n-1)c_1\varphi_{c_2} + (n-2)c_2\varphi_{c_3} + \cdots = 0, \tag{1}$$

гдѣ φ_{c_i} обозначаетъ производную φ, взятую по c_i.

Доказательство. Обозначая черезъ λ произвольное число, преобразуемъ функцію $f(x)$, замѣнивъ въ ней x черезъ $x-\lambda$. При такомъ преобразованіи корни ея $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обратятся въ $a_1+\lambda, a_2+\lambda, \ldots a_n+\lambda$ и функція φ, какъ функція разностей корней, не измѣнитъ своего значенія. Иными словами, если положимъ

$$f(x-\lambda) = x^n - c_1' x^{n-1} + c_2' x^{n-2} - c_3' x^{n-3} - \cdots, \tag{2}$$

то

$$\varphi(c_1', c_2', c_3', \ldots) = \varphi(c_1, c_2, c_3, \ldots). \tag{3}$$

Но

$$f(x-\lambda) = (x-\lambda)^n - c_1(x-\lambda)^{n-1} + c_2(x-\lambda)^{n-2} - c_3(x-\lambda)^{n-3} + \cdots$$

Располагая по степенямъ x и выписывая только члены, независящіе отъ λ, и первой степени относительно λ, получимъ

$$f(x-\lambda) = x^n - (c_1 + n\lambda)x^{n-1} + (c_2 + (n-1)c_1\lambda + \cdots)x^{n-2} - (c_3 + (n-2)c_2\lambda + \cdots)x^{n-3} + \cdots,$$

а сравнивая съ (2), находимъ

$$c_1' = c_1 + n\lambda,\ c_2' = c_2 + (n-1)c_1\lambda + \cdots,\ c_3' = c_3 + (n-2)c_2\lambda + \cdots \tag{4}$$

и т. д. Съ другой стороны, полагая

$$c_1' = c_1 + \delta c_1,\ \ c_2' = c_2 + \delta c_2,\ \ c_3' = c_3 + \delta c_3, \cdots,$$

по формулѣ Тэйлора находимъ

$$\varphi(c_1', c_2', c_3', \cdots) = \varphi(c_1, c_2, c_3, \cdots) + \varphi_{c_1}\delta c_1 + \varphi_{c_2}\delta c_2 + \varphi_{c_3}\delta c_3 + \cdots,$$

а замѣняя $\delta c_1, \delta c_2, \delta c_3, \ldots$ ихъ значеніями, взятыми изъ формулъ (4), и принимая во вниманіе условіе (3), получимъ

$$\lambda\{n\varphi_{c_1} + (n-1)c_1\varphi_{c_2} + (n-2)c_2\varphi_{c_3} + \cdots\} + \lambda^2\{\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\} + \cdot\ \cdot\ \cdot = 0.$$

Такъ какъ λ число произвольное, то коэффиціенты при различныхъ степеняхъ λ въ уравненіи (5) должны обращаться въ нуль, такъ что

$$n\varphi_{c_1} + (n-1)c_1\varphi_{c_2} + (n-2)c_2\varphi_{c_3} + \cdots = 0,$$

что и требовалось доказать.

Для вычисленія функціи φ доказанная теорема служитъ слѣдующимъ образомъ: зная вѣсъ и степень функціи φ относительно коэффиціентовъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ пишемъ выраженіе φ съ неопредѣленными численными коэффиціентами, какъ въ § 470. Уравненіе (1), которое должно удовлетворяться тождественно, т. е. независимо отъ значеній перемѣнныхъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$, дастъ затѣмъ систему линейныхъ уравненій, съ помощью которыхъ всѣ неизвѣстные численные коэффиціенты $k_0, k_1, k_2, \ldots$ въ выраженіи φ выразятся въ одномъ изъ нихъ, который затѣмъ опредѣляется по частнымъ значеніямъ корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Приложимъ сказанное къ вычисленію функціи J, опредѣляемой формулою (35) § 483. Вѣсъ ея равенъ 6, степень равна 3, поэтому полагаемъ

$$J = k_0 c_1 c_2 c_3 + k_1 c_1^2 c_4 + k_2 c_2^3 + k_3 c_2 c_4 + k_4 c_3^2.$$

Формула (1) при $n = 4$, даетъ

$$4J_{c_1} + 3c_1 J_{c_2} + 2c_2 J_{c_3} + c_3 J_{c_4} = 0,$$

т. е.

$$4(k_0 c_2 c_3 + 2k_1 c_1 c_4) + 3c_1(k_0 c_1 c_3 + 3k_2 c_2^2 + k_3 c_4)$$
$$+ 2c_2(k_0 c_1 c_2 + 2k_4 c_3) + c_3(k_1 c_1^2 + k_3 c_2) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при

$$c_2 c_3, \quad c_1 c_4 \quad c_1^2 c_3, \quad c_1 c_2^2,$$

находимъ

$$4k_0 + 4k_4 + k_3 = 0, \quad 3k_3 + 8k_1 = 0, \quad 3k_0 + k_1 = 0, \quad 2k_0 + 9k_2 = 0,$$

откуда

$$k_1 = -3k_0, \quad k_2 = -\tfrac{2}{9}k_0, \quad k_3 = 8k_0, \quad k_4 = -3k_0,$$

и

$$J = k_0\{c_1 c_2 c_3 - 3c_1^2 c_4 - \tfrac{2}{9}c_2^3 + 8c_2 c_4 - 3c_1^2\}.$$

Наконецъ, полагая

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \alpha_1 = 1,$$

находимъ

$$J = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = c_4 = 0, \quad \text{и} \quad k_0 = -\tfrac{1}{2},$$

такъ что окончательно

$$J = \tfrac{1}{2}\{c_2^3 - 9c_1 c_2 c_3 + 27c_1^2 c_4 - 72c_2 c_4 + 27c_3^2\},$$

согласно съ формулою (34).

Для упражненія предлагаемъ примѣнить указанный способъ къ вычисленію дискриминантовъ кубическаго и биквадратнаго уравненія, полученныхъ раньше другимъ путемъ.

XIV (къ § 491).

Тождество это легко провѣрить, замѣтивъ, что 1) обѣ его части обращаются въ нуль при $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, при $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ и при $\alpha+\delta=\beta+\gamma$, 2) что обѣ его части цѣлыя функціи 3-ей степени относительно α и 3) что коэффиціентъ при α^3 въ лѣвой части равенъ 6.

XV (къ § 504, c).

Если $f=(x-\alpha)^r(x-\beta)^s(x-\gamma)^s\ldots$, то взявъ логариѳмы и затѣмъ производную, найдемъ

$$\frac{f'}{f}=\frac{r}{x-\alpha}+\frac{s}{x-\beta}+\frac{t}{x-\gamma}+\cdots,$$

а написавъ уравненіе $f+kf'=0$ въ видѣ

$$kf\left[\frac{f'}{f}+\frac{1}{k}\right]=0,$$

получаемъ требуемую формулу.

XV bis (къ § 504, d).

Если уравненіе

(1) $$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots=0$$

имѣетъ всѣ корни вещественные, то, очевидно, и уравненіе

(2) $$ax^n-bx^{n-1}+cx^{n-2}-\cdots=0$$

обладаетъ тѣмъ же свойствомъ.

Обозначая корни уравненія (2) черезъ $k_1, k_2, \ldots, k_n$, будемъ имѣть

$$\frac{b}{a}=\sum k_1,\quad \frac{c}{a}=\sum k_1k_2,\ \ldots \text{ и т. д.};$$

а по доказанному выше, въ случаѣ вещественности чиселъ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и вещественности всѣхъ корней $f(x)$, уравненіе

$$f(x)+\sum k_1\cdot f'(x)+\sum k_1k_2\cdot f''(x)+\cdots=0.$$

т. е.

$$af(x)+bf'(x)+cf''(x)+\cdots=0$$

будетъ также имѣть всѣ корни вещественные.

Полагая $f(x) = x^n$ и замѣчая, что уравненіе $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} + \ldots = 0$ имѣетъ всѣ корни вещественные, тотчасъ убѣждаемся, что и уравненіе $x^n + \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} x^{n-2} + \ldots = 0$, имѣетъ всѣ корни вещественные.

Доказательство же вещественности всѣхъ корней уравненія

$$x^n - \frac{n}{1 \cdot 2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-2} - \ldots = 0$$

не вытекаетъ непосредственно изъ теоремы § 504, d, а требуетъ дополнительныхъ изслѣдованій, на которыхъ мы здѣсь останавливаться не будемъ.

XVI (къ § 504, f)

Припоминая сказанное въ § 389 о модулѣ разности двухъ комплексныхъ чиселъ, и указанное тамъ же построеніе этой разности, тотчасъ находимъ, что модуль $x - a_\nu$ равенъ r_ν, а аргументъ числу $\pi + (\theta + \theta_\nu)$ откуда

$$x - a_\nu = r_\nu e^{i(\pi + \theta + \theta_\nu)}$$

или

$$\frac{x - a_\nu}{r_\nu e^{i\theta_\nu}} = -e^{i\theta}.$$

XVI bis (къ § 504, g).

Эта формула есть прямое слѣдствіе только что указанной въ предыдущемъ примѣчаніи. Равенства

$$\sum \xi_\nu = 0 \quad \text{и} \quad \sum \eta_\nu = 0$$

получатся, очевидно, если принять во вниманіе, что сумма числителей дробей

$$\frac{a_\nu - \xi_0}{\xi_\nu + i\eta_\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

равна нулю, въ силу равенства

$$\sum a_\nu = n\xi_0.$$

XVII (къ § 507, c).

Для поясненія сказаннаго здѣсь, разсмотримъ четыре единственно возможныя комбинаціи знаковъ, представляемыя тремя послѣдовательными функціями f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, до и послѣ измѣненія знака f_i при переходѣ перемѣнной x черезъ корень функціи f_i, а именно

	f_{i-1},	f_i,	f_{i+1}
I.	+	+	−
	+	−	−
II.	−	−	+
	−	+	+
III.	+	−	−
	+	+	−
IV.	−	+	+
	−	−	+

Въ I и II случаѣ, когда функція f_i, стоящая лѣвѣе f_{i+1}, раньше перемѣнила знакъ, перемѣна знака между f_i и f_{i+1} перешла въ перемѣну знака между f_{i-1} и f_i, т. е. передвинулась влѣво. Въ III и IV случаѣ, когда функція f_i, стоящая правѣе f_{i-1}, раньше перемѣнила знакъ, перемѣна знака между f_{i-1} и f_i перешла въ перемѣну знака между f_i и f_{i+1}, т. е. передвинулась вправо.

XVIII (къ § 515, d).

Упоминаемый здѣсь способъ опредѣленія верхней границы l положительныхъ корней основанъ на слѣдующемъ простомъ замѣчаніи. Если имѣемъ группу положительныхъ членовъ, за которыми слѣдуетъ группа отрицательныхъ, то сумма членовъ группы

$$f_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-m}x^m - a_{n-m+1}x^{m-1} - \cdots - a_{n-p}x^p,$$

можетъ быть написана такъ

$$f_1(x) = x^m\left[a_0x^{n-m} + a_1x^{n-m-1} + \cdots + a_{n-m} - \frac{a_{n-m+1}}{x} - \cdots - \frac{a_{n-p}}{x^{m-p}}\right]$$

и тогда сдѣлается яснымъ, что при возрастаніи x $f_1(x)$ непремѣнно возрастаетъ, потому что въ скобкахъ уменьшаемое возрастаетъ, и

вычитаемое убываетъ. Поэтому, если при $x = l'$ $f_1(x) \geqq 0$, то при $x > l'$, навѣрно $f_1(x) > 0$. На такія группы, какъ $f_1(x)$, обыкновенно и разбиваютъ лѣвую часть даннаго уравненія $f(x) = 0$, и опредѣливъ для каждой группы соотвѣтствующее число l', получаютъ для l наибольшее изъ l'. Напримѣръ, для $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 7 = 0$, беремъ $f_1(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$, и находимъ $l' = 4$, $f_2(x) = 3x^2 - 5x - 7$, при $x = 4$ будетъ > 0. Слѣдовательно, можно взять $l = 4$. Метода Ньютона дала бы $l = 3$.

XIX (къ § 521, b).

Дѣйствительно, если f дѣлится на $(x-a)^2$, то f' дѣлится на $x-a$, $H = 3f'^2 - 4ff''$ раздѣлится на $(x-a)^2$. Поэтому, если $f = (x-a)^2(x-\beta)^2$, то $H = k \cdot f$, гдѣ K постоянное число. Обратно, если $H = k \cdot f$, то всякій дѣлитель f дѣлитъ и H, а потому и f'. Слѣдовательно, тогда всякій линейный дѣлитель полинома f войдетъ въ него въ квадратѣ, т. е. $f = (x-a)^2(x-\beta)^2$.

XX (къ § 527).

Кромѣ методы Ньютона—Фурье, на практикѣ очень удобною, и даже часто болѣе удобною, при вычисленіи корней численныхъ уравненій высокихъ степеней, оказывается метода Грэффе (Gräffe), подробно разработанная и поясненная примѣрами въ „Лекціяхъ о приближенныхъ вычисленіяхъ“ А. Н. Крылова, СПБ., 1911. Эта метода замѣчательна еще тѣмъ, что она примѣнима и къ вычисленію мнимыхъ корней уравненія.

XXI (къ § 529).

Неприводимый случай (casus irreductibilis) уравненія 3-ей степени получилъ свое названіе отъ того, что вещественные корни кубическаго уравненія не могутъ быть представлены вещественными радикалами. Легко показать, что если бы мы пожелали изобразить кубическіе корни, входящіе въ формулу Тарталіа, при $\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$, въ видѣ $A + Bi$, т. е. отдѣлить вещественную часть отъ мнимой, то для опредѣленія чиселъ A и B пришли бы опять къ уравненію 3-ей степени съ 3-мя вещественными корнями, т. е. къ уравненію того же вида, какъ и данное. Дѣйствительно, полагая

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = A + Bi, \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = A - Bi$$

и припоминая, что произведеніе этихъ кубическихъ корней должно быть равно $-\frac{p}{3}$, находимъ

$$(A+Bi)(A-Bi) = A^2+B^2 = -\frac{p}{3},$$

$$-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta} = A^3 - 3AB^2 + i(3A^2B - B^3),$$

т. е.

$$-\frac{q}{2} = A^3 - 3AB^2,$$

а замѣняя B^2 его выраженіемъ $-\left(A^2+\frac{p}{3}\right)$, получаемъ для опредѣленія A уравненіе

$$A^3 + \frac{p}{4}A + \frac{q}{8} = 0,$$

дискриминантъ котораго равенъ

$$\frac{1}{4^3}\cdot\left[\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\right] = \frac{\Delta}{4^3} < 0.$$

Доказательство невозможности изобразить вещественными радикалами корни неприводимаго уравненія 3-ей степени съ тремя вещественными корнями и раціональными коэффиціентами можно найти у Вебера и Вельштейна, т. I, § 100.

XXII (къ § 544).

Доказательство невозможности алгебраическаго рѣшенія общаго уравненія выше 4-ой степени, впервые данное Руффини въ мало распространенномъ мемуарѣ, цитируемомъ Чезаро, было затѣмъ дано Абелемъ въ мемуарѣ, вошедшемъ теперь въ I томъ полнаго собранія сочиненій, независимо отъ Руффини, работа котораго Абелю не была извѣстна. Относительно теоремы Руффини-Абеля не безполезно замѣтить слѣдующее. Доказательство основано на существенномъ предположеніи, что корни уравненія, а слѣдовательно и коэффиціенты его *независимы*, иными словами, что между ними не установлено никакихъ соотношеній, что и выражается терминомъ „общее алгебраическое уравненіе“. Истинный смыслъ этой теоремы состоитъ въ томъ, что не существуетъ такой явной алгебраической функціи, которая выражала бы корень любого алгебраическаго уравненія степени выше 4-ой, какъ функцію его коэффиціентовъ. Но изъ нея вовсе не слѣдуетъ, что не существуетъ уравненій выше 4-ой степени, разрѣшимыхъ въ радикалахъ. Напротивъ, извѣстны цѣлые классы уравненій высшихъ степеней, разрѣшимыхъ въ радикалахъ; простѣйшій классъ такихъ уравненій, со-

ставляютъ, такъ называемыя, „уравненія дѣленія круга“, т. е. уравненія вида

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0,$$

гдѣ p простое число.

Къ числу уравненій, разрѣшимыхъ въ радикалахъ, принадлежатъ, такъ называемыя, Абелевы уравненія, которымъ посвященъ мемуаръ Абеля въ I томѣ собранія его сочиненій, № XI, и многія другія. Во всѣхъ такихъ случаяхъ возможность алгебраическаго рѣшенія обусловлена нѣкоторыми зависимостями, a priori устанавливаемыми, между корнями уравненія. Такъ напримѣръ, въ уравненіяхъ дѣленія круга, всѣ корни могутъ быть выражены степенями одного изъ нихъ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка*	*Напечатано*	*Нужно читать*
12		Ссылка на Вебера и Вельштейна въ выноскѣ *) относится къ приведенному въ строкѣ 10 сн. выраженію.	
42	3 св.	(см. примѣч. XVII)	(см. примѣч. XVIII)
132	9 сн.	σ^n	σ_n
195	20 сн.	$n+\infty$	$n=\infty$
231	13 св.	$\frac{\log n}{n\,q}$	$\frac{\log n}{n^q}$
379	6-7 сн.	производныхъ функцій	произвольныхъ функцій
406	8 св.	XVII (къ 282, t)	XVII (къ § 282, f)
465	11 св.	Пропущена ссылка на примѣч. V.	
497	16 сн.	$n-i$	$i-1$
„	„	n	m
„	15 сн.	$n-i$	$i-1$
„	4 сн.	n	m
„	2 сн.	$n-i$ (дважды)	$i-1$
514	14 св.	s_2^p	s_p^2
519	2 св.	$(a_i\,a_i)$	$(a_i\,a_j)$
519	7 св.	$(a_j-a_j)^2$	$(a_i-a_j)^2$
534	18 св.	Въ формулѣ послѣ Q пропущенъ знакъ $=$	

Предметный указатель.

(Числа обозначаютъ страницы книги).

Ангармоническое отношеніе. 458. Неизмѣняемость его при линейной подстановкѣ. 459. Уравненіе, которому удовлетворяютъ 6 ангарм. отнош. 4 чиселъ. 525.

Аргументъ комплекснаго числа. 435. Аргументъ кватерніона. 464.

Асимптотическое изображеніе функцій. 339.

Бернулліевы полиномы. 366. Изображеніе ихъ тригонометрическими рядами. 369.

Бернулліевы числа. 359. Производящая функція. 360. Изображеніе б. ч. безконечнымъ рядомъ. 510.

Биноміальный рядъ. 194. 334.

Вандермондъ. Опредѣлитель Вандермонда. 15.

Векторы. 464. Сложеніе и умноженіе. 465. Геометрическая интерпретація. 466. Произведеніе трехъ векторовъ. 470. Теорема Гамильтона о вращеніи вектора около оси. 471.

Версоръ кватерніона. 464. Геометрическая интерпретація умноженія версоровъ. 469.

Взаимные опредѣлители. 29. Теорема о его минорахъ. 31. и объ ихъ алгебр. дополненіяхъ. 35.

Взаимная форма данной квадратичной формы. 64.

Гамма. Функція Γ. 221. (см. также 349). Формула (Вейерштрасса) для $1/\Gamma(x+1)$. 222; для $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ 510; (Лежандра). для $\Gamma(x+\frac{1}{2})$. 223. Изслѣдованіе функціи Γ. 313.

Гармоническое расположеніе 4 точекъ числовой плоскости. 459. Построеніе 4-й гармонической точки. 460.

Гармоническій рядъ. 154.

Гармоническія функціи. 442.

Гессе. Функція Гессе отъ данной цѣлой ф. 526. Корни ея мнимые, когда корни цѣлой функціи вещественные и неравные, 528. Геометрич. значеніе функціи Гессе для кубической. 532. для биквадратичной функціи. 535.

Гиперболическія функціи (гиперболическій синусъ, косинусъ и т. д.). 449.

Гиперболическая амплитуда. 450.

Главные элементы опредѣлителя. 7.

Границы, верхняя и нижняя числового ансамбля. 146. Гр. функціи въ данномъ интервалѣ. 247.

Двойные ряды. 208. Преобразованіе Клаузена. 211. Примѣры. 215—218.

Двузначныя функціи корней алгебраическаго уравненія n ой степени. 519. Въ случаѣ $n>4$ никакая другая функція не имѣетъ двузначной степени, между тѣмъ, какъ при $n \leqq 4$ существуютъ и другія функціи, обладающія этимъ свойствомъ, на чемъ и основана возможность рѣшенія этихъ уравненій въ радикалахъ. 521, 522.

Диполярныя координаты. 454.

Дискриминантъ n чиселъ. 27. Его выраженіе въ элем. симм. функціяхъ. 515, 516.

Дискриминантъ алгебраич. уравненія. 500.

Дискриминантъ квадратич. формы. 64. Д. какъ инваріантъ. 70.

Дополненіе, обыкновенное и алгебраическое, минора опредѣлителя. 10.

Знакоперемѣнныя функціи корней алгебр. уравненія. 518.

Знакоперемѣнныя числа (Грассманна). 463.

Изодинамическіе центры треугольника. 461. Ихъ соотношеніе съ функціею Гессе. 532.

Инваріанты алгебр. формы. 68. Квадратичная и бинарная кубическая форма не имѣетъ абсолютн. инварианта (а слѣдоват. только одинъ обыкновенный инваріантъ). 70. (см. тоже геометрич. соображенія 523). Квадратичный инвар. бинарной формы четной степени. 524. Ортогональные инваріанты. 72. Вычисленіе инваріантовъ 522, способъ Альфена. 536.

Интерполированіе. 351. Интерполяціонныя функціи. 352. Формула Лагранжа. 353. форм. Ньютона. 353.

Ирраціональныя числа. Ихъ опредѣленіе раздѣленіемъ всѣхъ рац. чиселъ на два класса. 109. Равенство и неравенство ир. ч. 110. Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. 114—118.

Исключеніе. 481.

Каноническія выраженія алгебр. формъ. 73. бинарныхъ формъ. 83—84. Законъ инерціи. 78.

Квадратные корни. Ихъ вычисленіе. 195.

Квадратичныя формы. 64. Неприводимость. 66. Свойство дискриминанта при линейн. преобразов. Значеніе его ранга. 67. Форма, взаимная данной. 64; она равна квадрату линейн. ф., если данная приводима. 68. Положительныя квадр. формы. 82. Необходимое и достат. условіе чтобы квадр. ф. была положительною. 82.

Кватерніоны. 462. Скалярная и векторіальная часть. 464. Кват. единица. 464. Модуль, версоръ, ось, аргументъ кватерніона. Сопряженные кватерн. 464. Умноженіе. 467. Дѣленіе кватерніоновъ. 468.

Комплексныя числа. 433. Геометрическое значеніе, тригонометрическое представленіе. 434. Геометрическая интерпретація сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія. 435. Возвышеніе въ степень. Формула Муавра. 437.

Континуантъ. 20. Связь съ непрерывными дробями. 20. Число членовъ континуанта n-го порядка. 22.

Координаты криволинейныя. 454.

Корни алгебраич. уравненія съ веществ. коэффиц. Теорема Ролля. 540. Правила Декарта для опредѣл. числа положит. корней урав. 540. Теорема Лагерра о числѣ корней, превышающихъ данное число. 544. Теорема Бюдана о числѣ корней въ данномъ интервалѣ. 544. Теорема Штурма. 552. Необход. и дост. условіе вещественности всѣхъ корней. 560. Корни, общіе двумъ уравненіямъ. 496. Число ихъ. 499. Кратные корни уравненія. 500.

Корни изъ единицы. 437.

Косой симметрическій опредѣлитель. 37. Онъ равенъ нулю, если его порядокъ число нечетное. 38. и квадрату раціон. выраженія въ его элементахъ, если порядокъ его четное число. 40.

Крамеръ. Правило Кр—а для рѣшенія системъ линейн. уравн. 43.

Круговыя подстановки. 3.

Круговыя (тригонометр.) функціи, опредѣляемыя степенными рядами. 447.

Куммеръ. Теорема К. о сходимости рядовъ. 173.

Ламбертъ. Рядъ Л—а. 215—16. Примѣненіе преобраз. Клаузена. 216—17. Асимптотическое вычисленіе. 350.

Линейныя подстановки въ комплексной перемѣн. Геометрич. значеніе. 457. Двойныя точки. 459.

Линейныя преобразованія (однородныя). 56. Опредѣлитель системы лин. формъ при лин. преобр. умножается на модуль преобраз. 58. Послѣдоват. примѣненіе нѣсколькихъ линейныхъ преобраз. 58. Ортогональныя преобр. 58. Построеніе ортог. преобр. 60. Формулы Эйлера. 62—63.

Линейныя уравненія и системы такихъ ур. 42. Правило Крамера. 43. Теорема Руше. 45.

Линейныя формы. 50. Независимость. 54.

Логариѳмы. Вычисленіе натуральныхъ лог. 190. и обыкновенныхъ логар. 191.

Логариѳмическій рядъ. 157.

Логариѳмъ, какъ функція комплексной перем. 452.

Маклоренъ. Рядъ М. 328. Формула суммированія. 364.

Матрисса. 5. Умноженіе матриссъ. 22. Теорема Бине о произведеніи 2-хъ матр. 23. Главные миноры въ квадратѣ м. 25.

Maxima и minima (абсолют. и относит.) 290, функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ. 382.

Миноры опредѣлителя. 10. Сопряженные, главные, дополнительные миноры, алгебр. доп. минора. 10 Разложеніе опредѣлителя по минорамъ. 12.

Модуль комплекснаго числа. 435. м. кватерніона. 464.

Многозначныя функціи корней алгебр уравненія. 518.

Непрерывность ф. одной перем. 255. Равномѣрная непрерывность (теорема Кантора). 266. Непрерывность функ. нѣсколькихъ перемѣн. 374.

Неприводимость квадр. фор. 66.

Обратная функція относительно данной 241. Теорема объ ея производной. 272.

Обращеніе (преобразованіе взаимными рад. вект.). 458.

Обращеніе въ перестановкѣ. 1.

Однородныя функціи. 378. Теорема Эйлера. 378.

Ортогональный опредѣлитель. 59. Теорема объ алгебр. дополн. его элементовъ. 59.

Ортогональныя преобразованія. 58. Формулы Эйлера. Ихъ геометрич. значеніе. 63.

Ось кватерніона. 464.

Перестановки четныя и нечетныя. 1. Число тѣхъ и другихъ одинаково. 4.

Пересѣченіе, точки пересѣченія двухъ алгеб. кривыхъ. 488.

Подстановки. 2. четныя и нечетныя. 4. Разложеніе подст. на циклы, круговыя подстан. 3. Разложеніе четной подст. на циклы изъ 3 элементовъ. 4.

Показательная функція, опредѣляемая степеннымъ рядомъ. 446.

Порядокъ опредѣлителя. 5.

Предѣлъ. 118. Основныя теоремы о предѣлахъ. 123 — 135. Примѣры 135—145. Предѣльныя значенія функцій. 298. Теорема Лопиталя. 299. Пред. комплексной перемѣнной. 438. Предѣлы числового ансамбля. 145. Всякій конечный ансамбль безконечнаго множества чиселъ имѣетъ предѣлъ. 149. Наименьшій и наибольшій изъ предѣловъ ансамбля. 150. Предѣлы неопредѣленности функ. справа и слѣва. 254.

Принципъ неизмѣнности правилъ счисленія. 462.

Приращеніе, отношеніе приращеній и его связь съ производною. Теоремы Коши и Лагранжа. 293—294.

Произведенія, безконечныя. 219. Теоремы о сходимости. 219—220.

Производная (справа и слѣва) отъ $f(x)$. 269. Геометрическое значеніе. 282. Частныя производныя. Перемѣна порядка дифференцированій. 375—376. Производная сложной функціи. 376.

Псевдо-симметрическій опредѣлитель. 37—40. Если главные его элементы равны 1, то опред. равенъ суммѣ квадратовъ. 41.

Разрывы непрерывности (1-го и 2-го рода) функціи $f(x)$. 260. Раздѣленіе функцій съ безконеч. числомъ разрывовъ на пунктирно и вполнѣ разрывныя ф. 262. Непрерывная ф. отъ разрывной можетъ быть непрерывною. 262. Сумма безкон. числа непрерыв. ф. можетъ не быть непрерывною. 263.

Рангъ матриссы. 9—10 и 55.

Раціональныя функціи. Разложеніе ихъ на простѣйшія дроби. 503.

Результантъ двухъ цѣл. функцій. 481. Способъ Эйлера для его вычисл. 483. Метода Сильвестра. 484. Метода Безу. 485. Результантъ изобаренъ. 487. Приложеніе къ опредѣл. точекъ пересѣч. двухъ алгеб. кривыхъ. 488.

Рѣшеніе численныхъ алгеб. урав-

неній съ цѣлыми коэффиц. 561. Предѣлы корней. 562. Вычисленіе цѣлыхъ. 563. и раціональн. корней. 565. Вычисленіе несоизм. корней по способу Ньютона-Фурье. 569. Геометрич. интерпретація. 572.

Руффини. Функція Р—и для данной цѣлой ф—и. 543.

Ряды (вещественные), сходящіеся, расходящіеся, неопредѣленные. 152. Общій признакъ сходимости. 159. Теорема о сходящихся рядахъ. 161—165. Сравненіе рядовъ съ положительными членами, сильнѣйшая или слабѣйшая сходимость и расходимость. 166. Для всякаго ряда можно найти другой слабѣе сходящ. или расход. рядъ. 167. Спеціальные признаки сходимости. 170—181. Перемѣна порядка членовъ ряда. 196. Абсолют. и простая сходимость и расходимость. 197. Сумма абс. сход. ряда не зависитъ отъ порядка членовъ. 201. Сложеніе и умноженіе сход. рядовъ. 204.

Ряды съ комплексными членами. 438. Абсолютная сходимость. 440.

Ряды функцій. 315. Равномѣрная сходимость; примѣры неравномѣрной сходимости. 316. Сумма равномѣрно-сходящагося ряда непрерывн. ф. сама непрерывна. 321. Теорема о почленномъ дифференцированіи ряда ф. 321.

Симметрическій опредѣлит. 37.

Симметрическая функція. 511, элементарная. 511. Формулы Жирара и Варинга. 512. Всякая цѣлая сим. ф. есть цѣлая рац. ф. отъ элементарныхъ симм. ф-й. 513.

Скаляръ. 464.

Сопряженные миноры опредѣлителя. 10.

Степенные ряды, вещественные. 324. Радіусъ сходимости. 324. Теорема Коши-Адамара. 326. Производная степен. ряда. 327. Непрерывность. 342—345. Степенные ряды съ комплексною перемѣнною и компл. коэффиціентами. 444. Круги сходимости. 444. Единственность разложенія въ степен. рядъ 445. Теорема Абеля о суммѣ ряда на окружности круга сходимости. 446.

Стирлингъ, формула С—а. 193 365.

Суммированіе, формула суммир. Эйлера. 362. Маклорена. 364.

Тензоръ (Модуль) кватерніона. 464.

Транспозиція (перестановка 2-хъ элементовъ). 3.

Трансцендентныя функціи. 446.

Тэйлоръ, рядъ Т—а. 328. Недостаточность его сходимости для законности разложенія ф—и. 330. Остаточный членъ по Лагранжу и Коши. 329. Приложеніе къ численнымъ рядамъ. 335.

Уравненія, алгебраическія. 481. Теорема Даламбера о существованіи корня. 491. Уравненіе n-ой степени имѣетъ n корней. 494. Кубическое уравн. 579. Уравненіе 4-ой степени 582. Методы Кейли и Лагранжа для рѣшенія уравн. 2, 3 и 4 степени. 583, 586. Теорема Руффини объ уравненіи 5-ой степени. 602.

Фибоначчи, рядъ Ф—и. 21.

Функціи отъ одной перемѣнной. 241. Верхняя и нижняя границы. 246. Теорема Вейерштрасса. 249. Предѣлы неопредѣленности. 254. Непрерывность. 255. Разрывы 1-го и 2-го рода. 260. Теоремы о непрерывныхъ функціяхъ. 263—268. Функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Непрерывность. 374. Функціи отъ комплекс. перемѣнной. 441.

Циклъ. 2.

Циркулянтъ. 27.

Эйлерова постоянная. 155.

Эйлеровы числа. 361. Производящая функція. 361. Теорема Сильвестра. 362.

Эквигармоническое положеніе 4-хъ точекъ на числовой плоскости. 459. Построеніе 4-ой точки. 460.

Якобіева функція данной цѣлой функціи. 529. Ея выраженія для кубической. 531. и для биквадратичной функцій. 534.

Эрнесто Чезаро
профессоръ университета въ Неаполѣ

Элементарный учебникъ
алгебраическаго анализа
и исчисленія безконечно малыхъ

съ многочисленными примѣрами для упражненія

часть вторая

Переводъ съ нѣмецкаго съ примѣчаніями и дополненіями профессора
К. А. Поссе

съ 71 чертежемъ

Одесса 1914

Отъ редактора русскаго перевода.

При обработкѣ второй части учебника Чезáро мы измѣнили систему, которой придерживались въ первой части, а именно вмѣсто того, чтобы выдѣлять наши примѣчанія и дополненія въ особые отдѣлы въ концѣ каждой книги, мы помѣщаемъ здѣсь эти примѣчанія и дополненія непосредственно за тѣми мѣстами текста, къ которымъ они относятся, отмѣчая ихъ прямыми скобками [ ].

Кромѣ того, нѣкоторые §§ оригинала, въ которыхъ слишкомъ сжатое изложеніе могло бы повести къ недоразумѣніямъ, изложены нами въ измѣненной и болѣе подробной редакціи. Наиболѣе существенному измѣненію въ этомъ отношеніи подвергся § 714, трактующій объ условіяхъ интегрируемости функцій, а §§ 708^a и 736^a вставлены цѣликомъ для поясненія слѣдующихъ за ними статей.

Глава о дифференціальныхъ уравненіяхъ представляетъ собою не болѣе, какъ конспектъ, который можно разсматривать лишь какъ введеніе къ этому важному и обширному отдѣлу анализа; для подробнаго его изученія необходимо обратиться къ одному изъ указанныхъ самимъ авторомъ, въ предисловіи къ первой части его учебника, сочиненій.

Изъ авторскаго дополненія къ его учебнику (Anhang) мы исключили §§ 815 — 825, въ которыхъ сообщаются нѣкоторыя свѣдѣнія о варіаціонномъ исчисленіи, потому что краткое изложеніе началъ этого исчисленія, данное авторомъ, мы считаемъ малодоступнымъ, а развивать эти начала подробнѣе, что увеличивало бы размѣры и безъ того очень большой книги, мы не считали необходимымъ, въ виду отдаленной связи этого отдѣла съ остальнымъ содержаніемъ книги.

Въ подстрочномъ примѣчаніи къ § 815, авторъ рекомендуетъ для подробнаго ознакомленія съ варіаціоннымъ исчисленіемъ III-й томъ „*Cours d'Analyse*“, C. Jordan'a и статью Hadamard'a въ „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques“, 1901, стр. 5, содержащую въ себѣ критику началъ варіаціоннаго исчисленія. Современное изложеніе этого исчисленія читатель найдетъ въ книгѣ O. Bolza „*Vorlesungen über die Variationsrechnung*“, 1909.

К. Поссе.

ОГЛАВЛЕНІЕ

Стр.

Отъ редактора . . . . . V—VI

Книга шестая: Дифференціальное исчисленіе.

1. Дифференцированіе . . . . . 3—51
Функціи отъ одной независимой перемѣнной . . . . . 3—21
Функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ . . . . . 21—37
Неявныя функціи . . . . . 37—51

2. Приложенія къ плоскимъ кривымъ . . . . . 52—138
Дифференціалъ дуги . . . . . 52—56
Касательная и нормаль . . . . . 56—71
Кривизна . . . . . 71—92
Асимптоты . . . . . 92—103
Особенности плоскихъ кривыхъ . . . . . 103—119
О касаніи плоскихъ кривыхъ . . . . . 119—125
Огибающія кривыя . . . . . 125—138

3. Приложеніе къ кривымъ двоякой кривизны . . . . . 138—177
Основныя формулы . . . . . 138—148
О первой и второй кривизнѣ . . . . . 148—151
Изслѣдованіе кривыхъ двоякой кривизны . . . . . 151—160
Касаніе кривыхъ съ поверхностями . . . . . 160—177

4. Приложенія къ теоріи поверхностей . . . . . 178—233
Основныя понятія . . . . . 178—185
Линейчатыя поверхности . . . . . 185—192
Огибающія поверхности . . . . . 192—202
Кривизна . . . . . 202—216
Опредѣленія и свойства замѣчательныхъ кривыхъ на поверхности 217—233

Книга седьмая: Интегральное исчисленіе.

1. Интегрированіе . . . . . 237—323
Основныя понятія . . . . . 237—258
Правила интегрированія . . . . . 258—292
Кратные интегралы . . . . . 292—323

2. Приложеніе изложенныхъ пріемовъ къ нахожденію нѣкоторыхъ замѣчательныхъ классовъ интегралов 323—368
Интегрированіе раціональныхъ дифференціаловъ . . . . . 323—329
Интегрированіе ирраціональныхъ дифференціаловъ . . . . . 330—342
Интегрированіе трансцендентныхъ дифференціаловъ . . . . 343—346
Замѣчательные опредѣленные интегралы . . . . . 346—368

3. Приложенія къ геометрическимъ измѣреніямъ . . . 368—410
Длины дугъ . . . . . 368—373
Площади плоскихъ кривыхъ . . . . . 374—386
Поверхности и объемы тѣлъ вращенія . . . . . 386—392
Центры тяжести . . . . . 392—396
Поверхности и объемы какихъ угодно тѣлъ . . . . . 397—410

4. Дифференціальныя уравненія. . . . . 410—455
Уравненія съ двумя перемѣнными . . . . . 410—424
Геометрическія приложенія . . . . . 424—435
Линейныя дифференціальныя уравненія . . . . . 435—446
Уравненія со многими перемѣнными . . . . . 447—455

Прибавленіе . . . . . 459—480

Функція Вейерштрасса . . . . . 459—462
Нѣкоторыя свѣдѣнія объ исчисленіи конечныхъ разностей . . . . . 462—469
Свойства Бернулліевыхъ чиселъ . . . . . 469—472
Послѣдовательныя производныя функціи отъ функціи 473—475
Предметный указатель . . . . . 477—480

КНИГА ШЕСТАЯ.

Дифференціальное исчисленіе.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ.

Функціи отъ одной независимой перемѣнной.

546. Безконечно малыя и безконечно большія. Безконечно большимъ или просто безконечнымъ, какъ мы уже знаемъ, называютъ перемѣнное число, стремящееся превзойти по абсолютной величинѣ всякую границу, какъ бы велика она ни была, а безконечно малымъ называютъ всякое перемѣнное число, имѣющее предѣломъ нуль [1]). Итакъ, понятіе о безконечно маломъ, равно какъ и понятіе о безконечномъ (см. § 254, b), заключаетъ само въ себѣ понятіе объ **измѣняемости**. Такъ, напримѣръ, объемъ твердаго тѣла, подвергающагося таянью, можно назвать безконечно малымъ, а объемъ неизмѣннаго атома во вселенной таковымъ назвать нельзя. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы попытались сравнивать объемъ атома съ объемомъ вселенной, предполагая послѣдній безконечнымъ, то принуждены были бы принять, что единица мѣры безпредѣльно возрастаетъ, и каждому значенію этой единицы соотвѣтствовало бы нѣкоторое число, служащее мѣрою объема атома и убывающее безпредѣльно. Слѣдовательно, не самый объемъ атома, а число, служащее для его измѣренія, было бы перемѣннымъ и безконечно малымъ. Однако, стать на такую точку зрѣнія мы не

---

[1]) А. Коши (Cauchy), „Алгебраическій анализъ“ (1821). Въ „Bulletin de la classe des Sciences de l'Académie de Belgique“ (1901, p. 549) цѣлыхъ 40 страницъ посвящены опроверженію этого, будто бы „совсѣмъ плохого опредѣленія“. На самомъ же дѣлѣ аргументы автора этой статьи могутъ служить, и то только отчасти, указаніемъ на недостаточность нѣкоторыхъ общепринятыхъ опредѣленій (вѣроятностей и т. д.), восполненіе которыхъ именно и требуетъ устраненія всякого иного толкованія термина „безконечно малое“.

можемъ, потому что во всякомъ вычисленіи всѣ входящія въ него числа должны быть отнесены къ одной и той же единицѣ мѣры. Какъ бы велика ни была эта единица, объемъ атома всегда выразится опредѣленнымъ числомъ, можетъ быть, весьма малымъ, но постояннымъ. Для яснаго пониманія исчисленія безконечно малыхъ никогда не слѣдуетъ упускать изъ вида, что безконечно малыя и безконечно большія числа — величины по самому существу своему перемѣнныя, и что ихъ надо, говоря словами Ньютона, разсматривать, какъ „quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite", т. е. какъ безпредѣльно убывающія, разумѣется по абсолютной величинѣ.

547. Двѣ безконечно малыя величины называются величинами одного и того же порядка, если отношеніе ихъ стремится къ конечному предѣлу, отличному отъ нуля. Если же отношеніе одной безконечно малой β къ другой α стремится къ нулю (такъ что β есть произведеніе α на величину также безконечно малую), то говорятъ, что β безконечно малая порядка высшаго, чѣмъ α. Въ противоположномъ случаѣ, когда отношеніе β къ α безпредѣльно возрастаетъ по абсолютной величинѣ, β будетъ порядка низшаго, чѣмъ α. Не всегда, однако, возможно, на основаніи этихъ опредѣленій, рѣшить, будутъ ли данныя двѣ безконечно малыя одного и того же порядка, или нѣтъ, потому что отношеніе ихъ не всегда стремится къ опредѣленному предѣлу. Такъ, напримѣръ, число $\beta = \alpha \sin \frac{1}{\alpha}$, очевидно, безконечно мало одновременно съ α, но нельзя сказать, стремится ли β къ нулю столь же быстро, какъ α, или быстрѣе *). Тѣмъ не менѣе, если отношеніе β къ α постоянно колеблется, по абсолютной величинѣ, между двумя положительными границами, то принято считать β и α безконечно малыми одного и того же порядка. Когда разсматриваютъ одновременно нѣсколько безконечно малыхъ, то обыкновенно одну изъ нихъ, скажемъ α, выбранную по произволу, называютъ главною безконечно малою, и разсматриваютъ отношенія другихъ къ α и различнымъ ея степенямъ. При этомъ называютъ безконечно малыми порядка n $(n > 0)$ тѣ изъ нихъ, порядокъ которыхъ равенъ порядку α^n **). Такъ, напримѣръ, $\log(1+\alpha)$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ — безконечно малыя перваго порядка, если α главная безконечно малая. Далѣе, $1-\cos\alpha$ — второго, $\alpha - \sin\alpha$ — третьяго, $\alpha \sin(\sin\alpha) - \sin^2\alpha$ — шестого, $\operatorname{tg}(\sin\alpha) - \sin(\operatorname{tg}\alpha)$ — седьмого порядка и т. д. [1]). Впрочемъ, надо замѣтить, что не всегда воз-

*) Иными словами, будетъ ли β одного порядка съ α, или высшаго, такъ какъ отношеніе β/α ни къ какому предѣлу не стремится.

**) Иными словами, β будетъ порядка n, если $\lim \frac{\beta}{\alpha_n}$ существуетъ и не равенъ 0.

[1]) См. упражненія въ „Mathesis" 1898, стр. 31 и 1902, стр. 145.

можно опредѣлить порядокъ данной безконечно малой. Такъ, напримѣръ, при α безконечно маломъ, $e^{-\frac{1}{\alpha^2}}$ и $\frac{1}{\log \alpha}$ также безконечно малыя, но въ то время, какъ отношеніе первой къ α^n (§ 312, а) стремится къ нулю, каково бы ни было число n, отношеніе второй къ α^n возрастаетъ безпредѣльно по абсолютной величинѣ, и нельзя сказать, какъ великъ порядокъ первой и какъ малъ порядокъ второй. Безконечно малыя величины

$$\ldots \frac{1}{\log\log\frac{1}{\alpha^2}}, \quad \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha^2}}, \quad \ldots, \quad \sqrt{\alpha}, \quad \sin\alpha,$$

$$1-\cos\alpha, \quad \alpha-\sin\alpha, \quad \ldots, \quad e^{-\frac{1}{\alpha^2}}, \quad e^{-e^{\frac{1}{\alpha^2}}}, \quad \ldots$$

расположены въ такомъ порядкѣ, что каждая изъ нихъ безконечно мала относительно всѣхъ предыдущихъ. Поэтому, считая справа налѣво, находимъ, что порядокъ безконечно малыхъ, начиная съ произвольно большого значенія, убываетъ и стремится къ нулю. Аналогично этому можно классифицировать безконечно большія величины *).

548. Замѣтимъ здѣсь же, что несправедливо было бы считать, что всякая безконечно малая или безконечно большая величина получаетъ опредѣленное мѣсто въ подобной скалѣ сравненія. Такъ, напримѣръ, нельзя сказать, чему равно число n, опредѣляющее порядокъ величины $\beta=\frac{\alpha}{\log\alpha}$. Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны, ясно, что n должно было бы быть больше 1 (потому что $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\log\alpha}$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ α), а съ другой стороны, невозможно, чтобы n было больше 1, такъ какъ при любомъ $n>1$ отношеніе $\frac{\beta}{\alpha^n}=\frac{1}{\alpha^{n-1}\log\alpha}$ возрастаетъ безпредѣльно съ приближеніемъ α къ 0 **). Въ извѣстномъ смыслѣ (§ 169) можно, пожалуй, сказать, что въ скалѣ сравненія, состоящей изъ послѣдовательныхъ степеней α, число $\frac{\alpha}{\log\alpha}$ лежитъ справа отъ α, и что порядокъ его равенъ $1+0$. Точно такъ же тщетно было бы искать мѣсто, которое занимаетъ безконечно малая β, связанная съ α, соотношеніемъ $\beta=\alpha^2\log\frac{\alpha}{\beta}$. Дѣйствительно, положивъ $\alpha=\beta t$, найдемъ $\beta=\frac{1}{t^2\log t}$, $\alpha=\frac{1}{t\log t}$, откуда видно, что t должно возрастать безпредѣльно, чтобы α и β

*) Разсмотрѣніе ихъ, однако, всегда можно замѣнить разсмотрѣніемъ безконечно малыхъ, замѣтивъ, что при α безконечно большомъ, $\frac{1}{\alpha}$ безконечно малое.

**) Потому что при $\mu>0$ $\lim\limits_{\alpha=0}\alpha^\mu\log\alpha=0$,

стремились къ нулю. Замѣчая теперь, что $\frac{\beta}{\alpha^n} = t^{n-2}(\log t)^{n-1}$, видимъ, что при $n \geqq 2$ это отношеніе безпредѣльно возрастаетъ, а при $n < 2$ стремится къ нулю. Поэтому β лежитъ, такъ сказать, слѣва отъ α^2, т. е. стремится къ нулю не столь быстро, какъ α^2, но быстрѣе, чѣмъ всякое α^n при $n < 2$; если угодно, можно сказать, что порядокъ β равенъ $2-0$. Обобщая эти замѣчанія, положимъ, что существуютъ вообще два числа n' и n'', для которыхъ

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^{n'}} = 0, \quad \lim \frac{\beta}{\alpha^{n''}} = \pm\infty.$$

Въ такомъ случаѣ, очевидно, можно замѣнить въ этихъ равенствахъ всякое число n' меньшимъ, а всякое n'' — большимъ числомъ. Ясно поэтому, что числа n' образуютъ ансамбль, имѣющій верхнюю границу μ (§ 172), а числа n'' — ансамбль, имѣющій нижнюю границу λ, при чемъ, очевидно, $\lambda \geqq \mu$. Если случится, что значенія λ и μ совпадаютъ, и общая ихъ величина равна n, то можно сказать, что порядокъ β равенъ n, когда n не принадлежитъ ни тому, ни другому ансамблю, хотя и не существуетъ предѣла для $\frac{\beta}{\alpha^n}$. Но можетъ случиться, что n наибольшее изъ чиселъ n' (т. е. принадлежитъ къ первому ансамблю) или наименьшее изъ чиселъ n'' (т. е. принадлежитъ ко второму ансамблю); тогда навѣрно порядокъ числа β не равенъ n. Его можно было бы изобразить въ первомъ случаѣ черезъ $n+0$, во второмъ черезъ $n-0$. Наконецъ, можетъ случиться, что λ не $= \mu$, и тогда исчезаетъ всякое средство измѣрить порядокъ числа β какимъ нибудь числомъ. Достаточно привести примѣръ безконечно малой

$$\beta = \alpha^{1+\frac{1}{\alpha}-\left[\frac{1}{\alpha}\right]},$$

для которой

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = \begin{cases} 0 & \text{въ случаѣ } n < 1, \\ \pm\infty & \text{въ случаѣ } n > 2. \end{cases}$$

Замѣчаемъ, что $\frac{\beta}{\alpha}$ не стремится къ нулю, потому что принимаетъ безчисленное множество разъ значеніе 1, когда α проходитъ рядъ значеній $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Отсюда слѣдуетъ, что $\mu = 1$. Точно также $\frac{\beta}{\alpha^2}$ не стремится къ $\pm\infty$, потому что это отношеніе остается $< e$, когда α проходитъ рядъ значеній

$$\frac{1}{2-\frac{1}{\log 2}}, \quad \frac{1}{3-\frac{1}{\log 3}}, \quad \frac{1}{4-\frac{1}{\log 4}}, \quad \frac{1}{5-\frac{1}{\log 5}}; \ldots.$$

Слѣдовательно, $\lambda = 2$. Для всякаго значенія n между 1 и 2, отно-

шеніе $\frac{\beta}{\alpha^n}$ можетъ принимать сколь угодно малыя и сколь угодно большія значенія, и невозможно указать числа, служащаго мѣрою порядка β.

549. Основная теорема. Когда говорятъ, что двѣ безконечно малыя отличаются одна отъ другой на безконечно малую высшаго порядка, или, что отношеніе ихъ стремится къ предѣлу, равному единицѣ, то этимъ утверждаютъ два положенія, въ сущности равносильныя, потому что каждое изъ равенствъ

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0, \quad \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

есть слѣдствіе другого*). Замѣтивъ сказанное выше, легко доказать слѣдующую, основную для дифференціальнаго исчисленія, теорему: **Предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ не измѣнится, если эти безконечно малыя замѣнить другими, имъ эквивалентными.** Дѣйствительно, если нужно вычислить предѣлъ $\frac{\beta}{\alpha}$, и извѣстно, что β' отъ β, α' отъ α отличаются на безконечно малыя высшаго порядка, то достаточно вычислить предѣлъ $\frac{\beta'}{\alpha'}$, и замѣтить, что

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

550. Положимъ теперь, что дано нѣкоторое уравненіе между двумя безконечно малыми $\alpha = \beta$, которымъ нужно воспользоваться съ слѣдующей цѣлью: раздѣливъ обѣ части равенства на приличновыбранную безконечно малую γ и переходя къ предѣламъ, вывести равенство $a = b$ между двумя постоянными величинами. Обыкновенно уравненіе $\alpha = \beta$ имѣетъ сложный видъ, неудобный или даже недоступный для примѣненія обыкновенныхъ правилъ вычисленія предѣловъ; въ такомъ случаѣ доказанная теорема и оказывается полезною потому, что позволяетъ въ обѣихъ частяхъ равенства отбросить слагаемыя, безконечно малыя высшаго порядка относительно тѣхъ, которыя останутся. Такимъ образомъ получается новое уравненіе $\alpha' = \beta'$, это уравненіе будетъ, вообще говоря, не точное, а, какъ говорятъ, вѣрное до безконечно малыхъ высшаго порядка. Это обстоятельство, однако, никакого вліянія не оказываетъ на тотъ результатъ, который желаютъ вывести изъ даннаго уравненія. Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части новаго уравненія $\alpha' = \beta'$ на γ (или даже на другую безконечно малую γ', эквивалентную γ) и переходя къ предѣ-

*) Безконечно малыя α и β, удовлетворяющія такимъ равенствамъ, называютъ эквивалентными.

ламъ, мы все таки получимъ искомое равенство $a = b$, потому что

$$\lim \frac{\alpha'}{\gamma'} = \lim \frac{\alpha}{\gamma}, \text{ и } \lim \frac{\beta'}{\gamma'} = \lim \frac{\beta}{\gamma}.$$

Замѣтимъ, однако, что не въ этомъ состоитъ сущность дифференціальнаго исчисленія. Дифференціальное исчисленіе пользуется систематическимъ примѣненіемъ нѣкотораго символа, съ помощью котораго достигается то, что можно a priori быть увѣреннымъ, что полученное указаннымъ путемъ равенство $\alpha' = \beta'$ будетъ также точнымъ, а не только вѣрнымъ до безконечно малыхъ высшаго порядка. Такимъ образомъ оказывается, что при замѣнѣ чиселъ α и β числами α' и β' мы отбрасываемъ въ обѣихъ частяхъ равенства дѣйствительно равныя между собою безконечномалыя высшаго порядка, сами того не замѣчая, и прямо получаемъ безконечно малыя $\alpha' = a\gamma'$, $\beta' = b\gamma'$. А тогда переходъ къ предѣламъ становится уже не нужнымъ, потому что равенство $\alpha' = \beta'$ непосредственно даетъ и $a = b$. Вычисленіе предѣловъ отходитъ, слѣдовательно, на задній планъ, чтобы уступить мѣсто **дифференціальному исчисленію**, которое, конечно, тѣмъ не менѣе, основывается на понятіи о предѣлѣ *).

551. Разсматривая дифференціальное исчисленіе съ намѣченной точки зрѣнія, можемъ сказать, что оно обязано своимъ происхожденіемъ генію Лейбница. До настоящаго времени эта наука сохранила ту самую форму, въ которой она была изобрѣтена Лейбницемъ; сохранились тѣ же названія и тѣ же символы, изобрѣтеніе которыхъ надо приписать не столько удачно сдѣланному выбору, сколько остроумію изобрѣтателя. Тщательность, съ которою Лейбницъ дѣлалъ выборъ тѣхъ или иныхъ обозначеній, видна изъ того факта [1]), что, сравнивая свою методу съ методою Ньютона (одновременно съ Лейбницемъ открывшаго дифференціальное исчисленіе) и защищая ея преимущества передъ послѣднею, онъ говоритъ, что „способъ обозначеній есть важная, бросающаяся въ глаза, часть искусства изобрѣтать, и намъ кажется, что наши обозначенія лучше освѣщаютъ сущность дѣла“ (donnent plus d'ouverture). (Oeuvres math. t. V, p. 307). Въ недавнее время, важное значеніе номенклатуры и обозначеній снова было выставлено на видъ Эрнестомъ Махомъ (Mach), въ его „Популярно-научныхъ лекціяхъ“, гдѣ онъ говоритъ, что „способъ выраженія и цѣлесообразная система символовъ и техническихъ терминовъ представляютъ собою не только необходимое пособіе для совмѣстной работы ученыхъ и для передачи добытыхъ результатовъ изъ поколѣнія въ поколѣніе, но въ то же время они представляютъ собою прежде всего единственное средство избавить человѣческую память и человѣческій умъ отъ всякаго излишняго

*) Намѣченная здѣсь въ общихъ чертахъ мысль подробнѣе развивается далѣе въ § 556.

[1]) См. P. Mansion „Résumé du Cours d'Analyse“ (стр. 209).

бремени и труда и такимъ образомъ сберечь ихъ для болѣе важныхъ и болѣе существенныхъ актовъ ихъ дѣятельности. Всякій, кто занимался математическими работами, испытывалъ такое чувство, какъ будто формулы и символы берутъ отчасти на себя трудъ работать за него, или, употребляя слова знаменитаго Эйлера, что „его карандашъ иногда бываетъ остроумнѣе его головы". „Какъ бы страннымъ это ни казалось", говоритъ Махъ, „но сила математическихъ наукъ основана главнымъ образомъ на томъ, что имъ посчастливилось устранить всякую лишнюю работу ума и довести экономію умственныхъ силъ до крайнихъ предѣловъ. Къ этому идеалу стремятся и естественныя науки, особенно наиболѣе развитыя вѣтви ихъ" [1]).

552. Первый дифференціалъ. Изъ опредѣленія (§ 281) производной нѣкоторой функціи y отъ x слѣдуетъ, что $\delta y = y'\delta x + \varrho\delta x$ для всякаго даннаго значенія x, при чемъ ϱ стремится къ нулю, когда, при фиксированномъ значеніи x, будемъ приближать δx къ нулю. Такъ какъ разность между δy и $y'\delta x$ безконечно малая порядка высшаго, чѣмъ δx, то при разысканіи предѣловъ можно замѣнить δy черезъ $y'\delta x$. Мы вскорѣ убѣдимся въ большой пользѣ такой замѣны. Величину $y'\delta x$, въ томъ предположеніи, что x независимая перемѣнная, мы будетъ обозначать черезъ dy и называть **дифференціаломъ** функціи y. Итакъ, дифференціаломъ функціи называется произведеніе производной функціи на безконечно малое приращеніе, произвольно приписанное независимой перемѣнной *). Изъ этого опредѣленія тотчасъ вытекаютъ нижеслѣдующія слѣдствія:

a) Дифференціалъ независимаго перемѣннаго x есть не что иное, какъ произвольное приращеніе, которое приписываютъ каждому значенію x и разсматриваютъ, какъ перемѣнное число, стремящееся къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, при $y = x$ имѣемъ $y' = 1$, и, по опредѣленію дифференціала ($dy = y'\delta x$), получимъ $dx = \delta x$.

b) Равенство, опредѣляющее дифференціалъ, обращается теперь въ $dy = y'\,dx$, откуда получается

$$y' = \frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Это новое обозначеніе производной и употребляется въ дифференціальномъ исчисленіи. Производныя представляются теперь уже какъ отношенія, а не какъ предѣлы отношеній двухъ безконечно малыхъ.

c) Общнѣе, отношеніе дифференціаловъ двухъ функцій изображаетъ производную одной функціи, взятую по

[1]) Изъ рецензіи G. Vailati (Rivista sperimentale di Freniatria, 1896).

*) Собственно говоря, приращеніе δx независимой перемѣнной есть совершенно произвольное число, и лишь въ виду приложеній его обыкновенно разсматриваютъ, какъ безконечно малое.

другой. Въ самомъ дѣлѣ (§ 284), если $y=f(u)$, гдѣ u функція отъ независимой перемѣнной x, то

$$dy=y'dx=f'(u)\,u'dx=f'(u)\,du,\quad f'(u)=\frac{dy}{du}.$$

553. Геометрическая интерпретація. На кривой линіи, изображаемой уравненіемъ $y=f(x)$, въ смежности съ данною неподвижною точкою M, имѣющею абсциссу x, разсмотримъ другую точку M', абсцисса которой пусть будетъ $x+\delta x$. Предположить δx безконечно малымъ значитъ (§ 546) представить себѣ, что точка M' движется по кривой и стремится совпасть съ M. Пусть H и Q будутъ точки пересѣченія ординаты точки M' съ двумя прямыми, проходящими черезъ M, при чемъ первая изъ этихъ прямыхъ параллельна оси x-овъ, а вторая — касательная къ кривой. Если x—независимая перемѣнная, то, очевидно, будемъ имѣть (§ 293).

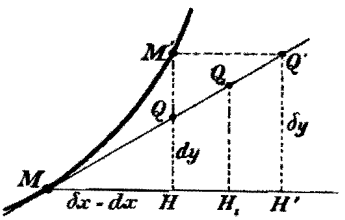


Рис. 27.

$$MH=dx=\delta x,\quad HQ=dy,\quad HM'=\delta y.$$

Слѣдовательно, подставить dy вмѣсто δy, значитъ пренебречь отрѣзкомъ QM' или замѣнить точку M' точкою Q для всѣхъ положеній точки M' въ смежности съ точкою M, иначе говоря, замѣнить кривую ея касательною въ смежности съ каждою данною ея точкою. Впрочемъ, какова бы ни была независимая перемѣнная, точка $(x+dx,\ y+dy)$ всегда принадлежитъ касательной, тогда какъ точка $(x+\delta x,\ y+\delta y)$ всегда принадлежитъ кривой. Но при данномъ положеніи второй точки M' первая $(x+dx,\ y+dy)$ можетъ быть въ Q, въ Q', или въ иномъ положеніи на касательной, смотря по тому, будетъ ли независимая перемѣнная x, y или какая нибудь другая *).

554. Правила дифференцированія. Чтобы дифференцировать данную функцію, т. е. вычислить дифференціалъ какой-нибудь функціи отъ x, достаточно, на основаніи опредѣленія дифференціала, вычислить производную и умножить ее на dx. Такимъ образомъ получаемъ

$$d(x^n)=nx^{n-1}dx,\quad de^x=e^x\,dx,\quad d\sin x=\cos x\,dx,\quad d\cos x=-\sin x\,dx,$$

$$d\log x=\frac{dx}{x},\quad d\operatorname{tg}x=\frac{dx}{\cos^2 x},\quad d\operatorname{arc\,tg}x=\frac{dx}{1+x^2},$$

*) Т. е., смотря по тому, будетъ ли $\delta x=dx$, или $\delta y=dy$, или ни то, ни другое.

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и т. д.,}$$

хотя бы x и не было независимою перемѣнною (§ 552, c). Извѣстныя правила разысканія производныхъ также легко переводятся въ соотвѣтствующія правила дифференцированія. Такъ, напримѣръ, чтобы дифференцировать сумму двухъ или нѣсколькихъ функцій, надо сложить дифференціалы всѣхъ слагаемыхъ. Дифференціалъ произведенія двухъ функцій получится, когда умножимъ каждую функцію на дифференціалъ другой и сложимъ полученныя произведенія, и т. д. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$d(u+v) = (u+v)'\,dx = (u'+v')\,dx = u'dx + v'dx = du + dv,$$

$$d\,uv = (uv)'dx = uv'dx + vu'dx = u\,dv + v\,du,$$

$$d\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{vu' - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

и т. д.*).

555. Послѣдовательные дифференціалы. Прежде, чѣмъ идти далѣе, намъ надо нѣсколько ближе заняться разсмотрѣніемъ смысла, который имѣетъ дифференціалъ независимой перемѣнной. При данномъ x дифференціалъ dx есть безконечно малая величина, которую мы предварительно предположимъ зависящею отъ нѣкоторой другой безконечно малой a, выбранной за главную. Когда мы переходимъ отъ одного значенія x къ другому, то нѣтъ никакого основанія считать, что произвольный законъ, выражающій зависимость dx отъ a, остается безъ измѣненія. Поэтому dx можно разсматривать какъ функцію не только отъ a, но и отъ x:

$$dx = \varphi(x, a) \tag{2}$$

Если представимъ себѣ, что ось x-овъ можетъ деформироваться, при чемъ всякая точка x переходитъ въ $x+dx$, то уравненія (2) можно разсматривать, какъ выраженіе закона, по которому точки деформированной оси возвращаются въ первоначальныя положенія съ приближеніемъ a къ нулю**). Произвольная функція φ подчинена лишь тому условію, чтобы она стремилась къ нулю вмѣстѣ съ a и имѣла послѣдовательныя частныя производныя (§ 368) по перемѣнной x. При этихъ условіяхъ dx, какъ функція отъ x, также

*) Однимъ словомъ, правила дифференцированія получаются изъ правилъ разысканія производныхъ, если въ формулировкѣ послѣднихъ замѣнимъ слово „производная“, словомъ „дифференціалъ“. На этомъ основаніи на русскомъ языкѣ терминъ „дифференцированіе“ употребляется какъ въ смыслѣ разысканія производной, такъ и въ смыслѣ разысканія дифференціала.

**) Деформацію оси x-овъ надо себѣ представить состоящей въ томъ, что сама ось остается неподвижною, а отдѣльныя ея точки по ней перемѣщаются (in sich deformierbar).

имѣетъ дифференціалъ, который называется вторымъ дифференціаломъ отъ x и обозначается знакомъ d^2x:

$$d^2x = d\,dx = \varphi_x'(x, a)\,dx = \varphi(x, a)\cdot\varphi_x'(x, a). \tag{3}$$

Теперь мы установимъ одно соглашеніе, имѣющее первостепенное значеніе для всего послѣдующаго. Первымъ дѣломъ мы примемъ, что оба свойства, которыми пользуется dx, а именно стремленіе къ нулю вмѣстѣ съ a и зависимость отъ x, являются отдѣленными одно отъ другого въ выраженіи (2). Для этого достаточно положить:

$$dx = a\chi(x), \tag{4}$$

при чемъ на минуту мы еще будемъ считать $\chi(x)$ за произвольную функцію отъ x. Такимъ образомъ, dx является въ видѣ произведенія одной безконечно малой, независящей отъ x, на функцію отъ x; слѣдовательно, dx будетъ безконечно малою перваго порядка, и ее отнынѣ мы и примемъ за главную. Дифференцируя далѣе, мы найдемъ одинъ за другомъ третій, четвертый и т. д. дифференціалы:

$$d^3x = a^3(\chi\chi'^2 + \chi\chi''),\quad d^4x = a^4(\chi\chi'^3 + 4\chi^2\chi'\chi'' + \chi^3\chi'''),\ \cdots.$$

Дифференціалъ порядка n, т. е. результатъ n послѣдовательныхъ дифференцированій, обозначается знакомъ d^nx и будетъ безконечно малою n-го порядка. Какъ видимъ, результаты послѣдовательныхъ дифференцированій быстро усложняются, и многія преимущества дифференціальнаго исчисленія были бы потеряны, если бы мы рѣшили оставить функцію $\chi(x)$ произвольною. Гораздо цѣлесообразнѣе будетъ положить $\chi(x) = 1$, такъ какъ тогда будемъ имѣть:

$$d^2x = 0,\quad d^3x = 0,\quad d^4x = 0,\ \cdots \tag{5}$$

и всѣ вычисленія, какъ скоро окажется, значительно упростятся. Въ этомъ и состоитъ основное соглашеніе. Его можно формулировать такъ: **Первый дифференціалъ независимой перемѣнной предполагается независящимъ отъ этой перемѣнной.** Теперь легко вычислить послѣдовательные дифференціалы любой функціи и показать, что n-тый дифференціалъ есть безконечно малая n-го порядка:

$$d^2y = d\,dy = d(y'dx) = dy'\cdot dx = y''dx\cdot dx = y''dx^2,$$

$$d^3y = d\,d^2y = d(y''dx^2) = dy''\cdot dx^2 = y'''dx\cdot dx^2 = y'''dx^3$$

и т. д. Вообще $d^ny = y^{(n)}dx^n$, если условимся писать dx^n вмѣсто $(dx)^n$ *). Такимъ образомъ, приходимъ къ соотношенію

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}, \tag{6}$$

*) Чего не надо смѣшивать съ $d(x^n) = nx^{n-1}dx$.

включающему въ себѣ и равенство (1) (при $n=1$). Итакъ: производная порядка n нѣкоторой функціи, взятая по **независимой** перемѣнной, равна отношенію n-аго дифференціала функціи къ n-ой степени дифференціала независимой перемѣнной. При этомъ (§ 552, c), при $n=1$, можно опустить оговорку, что перемѣнная независима, а при $n>1$ этого сдѣлать нельзя, потому что при послѣдовательныхъ дифференцированіяхъ dy мы пользовались формулами (5), а онѣ не будутъ имѣть мѣста, если x не независимая перемѣнная.

556. Теперь мы въ состояніи понять то, на что въ § 550 былъ данъ только намекъ. Равенство между безконечно малыми $\alpha'=\beta'$ (полученное черезъ устраненіе безконечно малыхъ высшаго порядка изъ равенства $\alpha=\beta$) — будетъ навѣрно точнымъ, если въ него не входятъ никакія другія безконечно малыя, кромѣ такихъ, которыя получены при помощи дифференцированій, предполагая, что это уравненіе (приведенное къ цѣлому виду) сдѣлано однороднымъ, такъ что въ немъ остались только члены наинизшаго порядка n. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы получить точное уравненіе надо было бы раздѣлить обѣ части на dx^n и перейти къ предѣлу. Но этотъ переходъ къ предѣлу сдѣлался уже излишнимъ, потому что отношенія между степенями дифференціаловъ, когда эти степени будутъ безконечно малыми одного и того же порядка, равны своимъ предѣламъ, такъ что искомое точное равенство какъ разъ и будетъ $\alpha'/dx^n=\beta'/dx^n$ или $\alpha'=\beta'$. Въ этомъ и заключается весь секретъ дифференціальнаго исчисленія. Кромѣ того, однородность окончательныхъ соотношеній между дифференціалами служитъ средствомъ контроля въ практикѣ вычисленій. Теперь понятно, насколько важно разысканіе дифференціальныхъ безконечно малыхъ, получаемыхъ отъ пренебреженія безконечно малыми частями высшаго порядка въ тѣхъ безконечно малыхъ, которыя являются при вычисленіяхъ. Для каждаго α существуетъ безчисленное множество безконечно малыхъ, отличающихся отъ α на безконечно малыя высшаго порядка, но между ними находится только **одна**, равная дифференціалу нѣкоторой функціи u. Въ самомъ дѣлѣ, если для другой функціи v, разность $\alpha-dv$, какъ и $\alpha-du$, была бы безконечно малою высшаго порядка, то было бы достаточно отбросить эти безконечно малыя въ равенствѣ

$$du=dv+(\alpha-dv)-(\alpha-du),$$

чтобы придти къ равенству $du=dv$, навѣрное точному. Слѣдовательно, дифференціальныя безконечно малыя, т. е. du и dv, совпадаютъ по величинѣ, функція v существенно не отличается отъ u, потому что $d(u-v)=0$, откуда $u-v=$ постоянной. Въ практическомъ вычисленіи всегда стараются представить α въ формѣ приращенія нѣкоторой функціи u (§ 552) и тогда единственная дифференціальная безконечно малая, которую можно подставить вмѣсто α

и будетъ именно du. Такимъ образомъ, съ помощью символа операціи d, дифференціальное исчисленіе достигаетъ полной точности, такъ какъ оно единственнымъ образомъ замѣняетъ встрѣчаемыя при вычисленіи безконечно малыя другими, получаемыми при помощи дифференцированія опредѣленныхъ функцій. Эти новыя безконечно малыя связаны тѣми же соотношеніями, какія существуютъ между тѣми безконечно малыми, которыя ими замѣняются.

[**Примѣчаніе**. Разсужденія § 556 могутъ показаться не вполнѣ ясными для лицъ, впервые знакомящихся съ дифференціальнымъ исчисленіемъ, но съ примѣненіемъ этихъ разсужденій мы встрѣтимся лишь въ геометрическихъ приложеніяхъ дифференціальнаго исчисленія, гдѣ они и представятся въ болѣе ясномъ свѣтѣ. Здѣсь же мы ограничимся нижеслѣдующими замѣчаніями. Всякое однородное, въ указанномъ выше смыслѣ, соотношеніе между дифференціалами нѣкоторыхъ функцій $y, z, \ldots$ отъ одной независимой перемѣнной x, въ которое можетъ входить и dx, въ сущности представляетъ соотношеніе между производными этихъ функцій, взятыми по x, только переписанное съ помощью новыхъ, дифференціальныхъ обозначеній этихъ производныхъ, указанныхъ формулою (6). Чтобы перейти отъ соотношенія между дифференціалами къ соотношенію между производными, стоитъ только раздѣлить всѣ члены перваго соотношенія на одну и ту же надлежащую степень dx. Обратно, чтобы отъ соотношенія между производными перейти къ соотношенію между дифференціалами, стоитъ только написать выраженія производныхъ по формулѣ (6) и затѣмъ помножить всѣ члены на одну и ту же степень dx. Напримѣръ, соотношеніе

$$dz^2 = dx^2 + dy^2$$

равносильно равенству

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

или

$$z'^2 = 1 + y'^2;$$

соотношеніе

$$dy\, d^2z - dz\, d^2y = dx^3$$

равносильно равенству

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 1$$

или

$$y' z'' - z' y'' = 1.$$

При такомъ разсмотрѣніи соотношеній между дифференціалами, вопросъ о томъ, будутъ ли эти соотношенія точными, или только вѣрными до безконечно малыхъ высшаго порядка, отпадаетъ самъ собою. Соотношенія эти, будучи равносильными соотношеніямъ между производными, т. е. соотношеніямъ по самому существу

своему точнымъ, какъ не заключающимъ въ себѣ никакихъ безконечно малыхъ, будутъ, конечно, и сами точными. Вмѣстѣ съ тѣмъ легко видѣть, что неоднородныя соотношенія между дифференціалами не имѣютъ смысла. Въ самомъ дѣлѣ, если бы такое соотношеніе имѣло мѣсто, то перенеся въ одну часть равенства члены наинизшаго порядка n, а въ другую всѣ остальные, и раздѣливъ обѣ части на dx^n, получили бы невозможное равенство между нѣкоторымъ опредѣленнымъ числомъ, не равнымъ нулю, съ одной стороны, и перемѣннымъ безконечно малымъ числомъ — съ другой].

557. Измѣненіе независимой перемѣнной. Формула (6), при $n>1$, выведена въ томъ предположеніи, что перемѣнная x независима. Поэтому, если желаютъ ввести новую независимую перемѣнную (что часто бываетъ нужно), то прежде всего необходимо вернуть этой формулѣ ея общность и потомъ только приступить къ замѣнѣ прежней перемѣнной новой. Съ этой цѣлью достаточно повторить послѣдовательныя дифференцированія выраженія dy, выполненныя въ § 555, но не пользоваться при этомъ формулами (5). Такимъ путемъ найдемъ

$$d^2y = d(y'dx) = dy'dx + y'ddx = y''dx^2 + y'd^2x,$$

далѣе

$$d^3y = y'''dx^3 + 3y''dxd^2x + y'd^3x,$$

$$d^4y = y^{IV}dx^4 + 6y'''dx^2d^2x + 3y''d^2x^2 + 4y''dxd^3x + y'd^4x$$

и т. д. Изъ перваго равенства находимъ

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} - y'\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}. \tag{7}$$

Точно также

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} - 3y''\frac{d^2x}{dx^2} - y'\frac{d^3x}{dx^3} \tag{8}$$

$$= \frac{dx^2d^3y - 3dxd^2xd^2y + 3dyd^2x^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$$

и т. д. Къ тѣмъ же результатамъ можно скорѣе придти, дифференцируя нѣсколько разъ подъ рядъ формулу (1), справедливую безъ всякихъ ограниченій. Дѣйствительно, тогда получимъ

$$y''dx = d\frac{dy}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2},$$

откуда вытекаетъ формула (7). Дифференцируя (7), найдемъ

$$y'''dx = \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^4},$$

откуда получится (8) и т. д. Впослѣдствіи намъ иногда случится разсматривать $\frac{d}{dx}$ какъ символъ операціи, состоящей въ разысканіи производной, взятой по x. Сообразно вышесказан-

ному, если мы эту операцію еще разъ хотимъ повторить, не назначая независимой перемѣнной, то должны примѣнить символъ $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}$, между тѣмъ, какъ символъ $\frac{d^2}{dx^2}$ будетъ обозначать ту же операцію, когда за независимую перемѣнную взято x. Въ самомъ дѣлѣ, изъ (7) мы имѣемъ

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2x}{dx^2}\frac{d}{dx}.$$

Точно такъ же изъ (8) получимъ

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = \frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d^2}{dx^2} + \left(3\frac{d^2x^2}{dx^4} - \frac{d^3x}{dx^3}\right)\frac{d}{dx} \quad \text{и т. д.} \tag{9}$$

558. Упражненія. а) Если въ нѣкоторое выраженіе, содержащее въ себѣ производныя отъ y по x, желаемъ ввести производныя отъ y, взятыя по другой перемѣнной t, то можно воспользоваться выведенными въ предыдущемъ § выраженіями y', y'', y''', . . ., если x задана, какъ функція отъ t, и, слѣдовательно, извѣстны производныя $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... Дѣйствительно, такимъ путемъ найдемъ

$$\frac{dx}{dt}y' = \frac{dy}{dt}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 y'' = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^5 y''' = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}$$

и т. д. Если же, наоборотъ, новая перемѣнная t задана, какъ функція отъ x, и мы хотимъ принять t за независимую, то будемъ имѣть всегда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}t'. \tag{10}$$

Далѣе, чтобы выразить y'', можно воспользоваться формулою (7), замѣтивъ предварительно, что вслѣдствіе равенства $d^2t = 0$ должно быть $t''dx^2 + t'd^2x = 0$ *), и слѣдовательно,

$$dx = \frac{dt}{t'}, \quad d^2x = -\frac{t''dt^2}{t'^3}. \tag{11}$$

Отсюда, по формулѣ (7), найдемъ

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}t'^2 + \frac{dy}{dt}t''. \tag{12}$$

Это соотношеніе можно легче получить, взявъ производныя по x отъ обѣихъ частей равенства (10). Поступая аналогично этому съ формулой (12), найдемъ

$$y''' = \frac{d^3y}{dt^3}t'^3 + 3\frac{d^2y}{dt^2}t't'' + \frac{dy}{dt}t'''.$$

---

*) $dt = t'dx$, $d^2t = t''dx^2 + t'd^2x = 0$, такъ какъ t принято за независимую перемѣнную.

Къ этому же результату можно придти и съ помощью формулы (8), но не столь просто, присоединивъ къ (11) еще формулу

$$d^3x = \frac{3t''^2 - t't'''}{t'^5}\,dt^3, \tag{13}$$

которую получимъ, написавъ, что $d^3t = 0$ или, дифференцируя вторую формулу (11), и т. д.

b) Положимъ, что желаютъ принять за независимую перемѣнную самую функцію y и вычислить производныя x', x'', x''', ... отъ x, взятыя по y. Формулы (11), (13) и т. д. дадутъ

$$x' = \frac{1}{y'}, \quad x'' = -\frac{y''}{y'^3}, \quad x''' = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5}, \ldots.$$

Ихъ можно получить проще, взявъ послѣдовательныя производныя отъ обѣихъ частей перваго равенства $x' = \frac{1}{y'}$. Можно также воспользоваться формулами (7), (8) и т. д., выразивъ равенствами $d^2y = 0$, $d^3y = 0$, ..., что y взято за независимую перемѣнную. Такимъ путемъ приходимъ къ формуламъ

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}, \quad y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ldots,$$

которыя отличаются отъ предыдущихъ только замѣною буквы x на y и обратно. Впрочемъ, заранѣе было очевидно, что эти соотношенія должны быть симметричны относительно x и y, и дѣйствительно имъ можно дать видъ:

$$x'y' = 1, \quad x''x'^{-\frac{3}{2}} + y''y'^{-\frac{3}{2}} = 0,$$

$$\frac{3x''^2 - 2x'x'''}{x'^3} + \frac{3y''^2 - 2y'y'''}{y'^3} = 0, \ldots,$$

или другіе аналогичные, прямо получаемые дифференцированіемъ перваго равенства $x'y' = 1$. Смотря по тому, примемъ ли x или y за независимую перемѣнную при этой операціи, получимъ первое или второе изъ нижеслѣдующихъ уравненій:

$$x'y'' + x''y'^2 = 0, \quad y'x'' + y''x'^2 = 0.$$

Умножая первое на $x'^{\frac{1}{2}}$ или второе на $y'^{\frac{1}{2}}$, получаемъ

$$x''y'^{\frac{3}{2}} + y''x'^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Дифференцируя же первое по y, а второе по x, найдемъ

$$x'''y'^2 + 3x''y'' + y'''x'^2 = 0,$$

и т. д.

c) Легко показать, что $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ выражается черезъ первыя и вторыя производныя отъ x и y относительно какой угодно перемѣнной t и черезъ первый дифференціалъ t. Поэтому, при вычисленіи этого выраженія въ различныхъ частныхъ случаяхъ, можно, для упрощенія выкладки, принять t за независимую перемѣнную, и заранѣе быть увѣренными, что результатъ будетъ справедливъ и тогда, когда t не будетъ независимою перемѣнною. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt}dt & \frac{d^2x}{dt^2}dt^2+\frac{dx}{dt}d^2t \\ \frac{dy}{dt}dt & \frac{d^2y}{dt^2}dt^2+\frac{dy}{dt}d^2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} dt^3$$

или

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right) dt^3.$$

Это замѣчаніе примѣнимо вообще ко всякому опредѣлителю n-го порядка, въ которомъ ν-ый столбецъ состоитъ изъ ν-ыхъ дифференціаловъ n функцій. Напримѣръ *),

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^3x}{dt^3} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^3y}{dt^3} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix} dt^6.$$

Возвращаясь къ выраженію $dx\,d^2y - dy\,d^2x$, положимъ, что x и y обозначаютъ Декартовы координаты точки на плоскости и предложимъ себѣ преобразовать его къ полярнымъ координатамъ r и θ. Пользуясь предыдущимъ замѣчаніемъ, можно, для упрощенія выкладки, принять θ за независимую перемѣнную, и въ такомъ случаѣ изъ равенства $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, находимъ

$$dx = \cos\theta\cdot dr - r\sin\theta\cdot d\theta, \quad dy = \sin\theta\cdot dr + r\cos\theta\cdot d\theta,$$
$$d^2x = \cos\theta\cdot d^2r - 2\sin\theta\cdot dr\,d\theta - r\cos\theta\cdot d\theta^2,$$
$$d^2y = \sin\theta\cdot d^2r + 2\cos\theta\cdot dr\,d\theta - r\sin\theta\cdot d\theta^2.$$

Откуда видно, что

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dr & d^2r - r\,d\theta^2 \\ r\,d\theta & 2\,dr\,d\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

и окончательно

(14) $$dx\,d^2y - dy\,d^2x = r^2 d\theta^3 + 2\,d\theta\,dr^2 - r\,d\theta\,d^2r = (r^2 + 2r'^2 - rr'')\,d\theta^3.$$

Хотя этотъ результатъ полученъ въ предположеніи $d^2\theta = 0$, но онъ остается справедливымъ независимо отъ этого, конечно, предполагая, что подъ r'' понимается не $\frac{d^2r}{d\theta^2}$, а $\frac{d}{d\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{d^2r}{d\theta^2} - r'\frac{d^2\theta}{d\theta^2}$.

d) Предложимъ себѣ преобразовать выраженіе радіуса кривизны (§ 348, e)

$$\varrho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Это выраженіе не требуетъ, чтобы непремѣнно x было независимою перемѣнною, если только подъ y'' будемъ подразумѣвать ея общее выраженіе (7). Такимъ образомъ, примѣняя еще формулу (1), получимъ

(15) $$\varrho = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

*) Это вытекаетъ изъ основныхъ свойствъ опредѣлителей (§ 17).

Въ полярныхъ координатахъ имѣемъ

$$dx^2 + dy^2 = (\cos\theta \cdot dr - r\sin\theta \cdot d\theta)^2 + (\sin\theta \cdot dr + r\cos\theta \cdot d\theta)^2$$
$$= dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

а потому, припоминая (14) и раздѣляя числителя и знаменателя на $d\theta^3$,

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Этому выраженію можно дать болѣе простую форму, полезную въ приложеніяхъ. Мы къ ней придемъ, принимая, что уравненіе кривой дано въ видѣ $r = 1/f(\theta)$ и выражая ϱ въ функціи отъ f, f', f''; мы тотчасъ находимъ

$$\frac{r'}{r} = -\frac{f'}{f}, \quad r^2 + r'^2 = \frac{f^2 + f'^2}{f^4}, \quad r'^2 - rr'' = \frac{ff'' - f'^2}{f^4},$$

откуда

$$\varrho = \frac{(f^2 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{(f + f'')f^3}.$$

е) Къ другимъ замѣчательнымъ формамъ для ϱ придемъ, если введемъ новую перемѣнную s, удовлетворяющую уравненію $ds^2 = dx^2 + dy^2$ и обозначающую, какъ увидимъ впослѣдствіи, длину дуги кривой, отсчитываемую отъ нѣкоторой данной точки. Исключая d^2x или d^2y изъ формулы (15), съ помощью соотношенія

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y,$$

получимъ формулы

$$\varrho = -\frac{dy\,ds^2}{ds\,d^2x - dx\,d^2s}, \quad \varrho = \frac{dx\,ds^2}{ds\,d^2y - dy\,d^2s},$$

которыя, на основаніи (9), можно написать такъ

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dy}{ds}, \quad \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\varrho}\frac{dx}{ds}.$$

Эти формулы, которыя впослѣдствіи (§ 591) окажутся очевидными, особенно полезны въ вопросахъ Механики. Возвышая ихъ въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

или, на основаніи соотношенія (9),

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2.$$

559. Примѣчанія. а) Обыкновенное дифференціальное исчисленіе всецѣло основано, какъ мы видѣли въ § 555, на условіи (4), съ присоединеніемъ къ нему дальнѣйшаго: $\chi(x) = 1$. Безконечно различныя формы, которыя можетъ принять дифференціальное исчисленіе соотвѣтственно различнымъ формамъ функціи $\chi(x)$, всѣ сводятся къ одной, потому что переходъ отъ одной функціи $\chi(x)$ къ другой равносиленъ измѣненію независимой перемѣнной въ

обыкновенномъ дифференціальномъ исчисленіи. Чтобы въ этомъ убѣдиться, надо предпослать, что (какъ будетъ показано въ началѣ седьмой книги), въ силу необходимой непрерывности функціи $\chi(x)$, всегда существуетъ нѣкоторая функція t отъ x, производная которой равна $\chi(x)$. Въ томъ дифференціальномъ исчисленіи, въ основѣ котораго лежитъ функція $\chi(x)$, дифференціалы функціи t будутъ

$$dt = t'dx = \frac{1}{\chi(x)} \cdot \alpha\chi(x) = \alpha, \quad d^2t = d^3t = \cdots = 0,$$

т. е. свойства (5) переносятся съ x на t, и разсматриваемое дифференціальное исчисленіе не отличается отъ обыкновеннаго, въ которомъ за независимую перемѣнную взята t. Поэтому естественно съ самаго начала приписать независимой перемѣнной свойство, состоящее въ томъ, что ея дифференціалъ число постоянное. Противъ этого соглашенія, издавна возстаетъ сонмъ метафизиковъ, не отдавая себѣ разумѣется яснаго отчета въ смыслѣ оспариваемаго условія. Иные понимаютъ его такъ, что полагая dx постояннымъ, надо считать, что dx имѣетъ одно весьма малое фиксированное значеніе; другіе, что x скачками переходитъ въ $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$, ...; третьи, что dx остается безъ измѣненія лишь отъ одного дифференцированія до другого; наконецъ, есть и такіе, которые дѣлаютъ видъ [1]), что принимаютъ всѣ эти нелѣпыя и вздорныя интерпретаціи вмѣстѣ. Противъ всего этого нужно подчеркнуть слѣдующее: смыслъ условія, что dx — постоянное, состоитъ въ томъ, и только въ томъ, что dx **отъ x не зависитъ**. Когда говорятъ, что dx стремится къ нулю, то это можно себѣ представить происходящимъ слѣдующимъ образомъ: ось x-овъ, будучи передвинута, какъ твердый стержень вдоль самой себя, стремится принять прежнее положеніе.

b) Однако возможность существованія такого дифференціальнаго исчисленія, въ которомъ не существуетъ никакой перемѣнной, имѣющей постоянный дифференціалъ, не исключается. Для того, чтобы дифференціалъ нѣкоторой функціи t отъ x былъ постояннымъ, необходимо, чтобы $t''dx^2 + t'd^2x = 0$; слѣдовательно, раздѣляя (3) на (2), находимъ, что $\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d}{dx} \log \varphi(x, \alpha)$ должно зависѣть отъ x и только отъ x (потому что $\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{t''}{t'^2}$, гдѣ t функція одного x). Отсюда вытекаетъ, что $\varphi(x, \alpha) = \chi(x)\psi(\alpha)$, гдѣ $\psi(\alpha)$ — безконечно малое при α безконечно маломъ. Ничто не мѣшаетъ обозначить эту безконечно малую просто черезъ α, и мы приходимъ опять къ формулѣ (4). Если отбросимъ это условіе (характеристичное для дифференціальнаго исчисленія Лейбница), то

[1]) „Nuove considerazioni sulla metafisica del Calcolo infinitesimale“ (Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 1895, p. 309).

вычисленія § 557 по формѣ останутся не тронутыми, но произойдутъ измѣненія, глубоко затрагивающія свойства послѣдовательныхъ дифференціаловъ. Такъ, напримѣръ, если положимъ $dx = ae^{ax}$, то $d^2x = a^2e^{ax}dx = a^3e^{2ax}$, $d^3x = 2a^4e^{2ax}dx = 2a^5e^{3ax}$ и т. д., такъ что d^nx будетъ безконечно малою порядка $2n-1$, а не n, относительно a, и вмѣсто (6) будемъ имѣть, при $n>1$,

$$y^{(n)} = \lim_{a=0} \frac{d^n y}{dx^n},$$

при чемъ символъ lim нельзя отбросить. Точно такъ же, если бы мы положили $dx = ae^{-\frac{x}{a}}$ и условились, что безконечно малое число a всегда сохраняетъ знакъ числа x, т. е. что $\frac{x}{a}>0$, мы нашли бы, что n-ый дифференціалъ будетъ quasi n-го порядка (въ смыслѣ § 548) относительно dx, но равенство (6) уже не имѣло бы мѣста. Дѣйствительно, отношеніе $\frac{d^n y}{dx^n}$ будетъ безконечно большимъ, по абсолютной величинѣ, и вмѣсто (6) при всякомъ n будемъ имѣть

$$y' = \lim_{a=0} \frac{d^n y}{d^n x},$$

такъ какъ при $dx = ae^{-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a}>0\right)$ имѣемъ $d^2x = -ae^{-2\frac{x}{a}}$, $d^2y = y''dx^2 + y'd^2x$; $\frac{d^2y}{d^2x} = -y'' \cdot a + y'$, $\lim_{a=0}\frac{d^2y}{d^2x} = y'$ и т. д. Подобное дифференціальное исчисленіе, можетъ быть, и представляло бы нѣкоторыя выгоды, но оно навѣрно потеряло бы тѣ, которыми обладаетъ обыкновенное, благодаря простотѣ и однородности его формулъ и точной оцѣнкѣ порядка безконечно малыхъ. Исчезло бы главнымъ образомъ то обстоятельство, въ которомъ можно усмотрѣть (согласно сказанному въ § 556) настоящую причину существованія дифференціальнаго исчисленія. А именно, отношенія между такими степенями дифференціаловъ, которыя будутъ безконечно малыми одного и того же порядка, не были бы уже равны предѣламъ этихъ отношеній, и исчисленіе предѣловъ не оказалось бы поглощеннымъ въ этомъ новомъ исчисленіи.

Функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

560. Частные дифференціалы. Положимъ, что въ функціи $f(x, y, z, \ldots)$ перемѣннымъ $x, y, z, \ldots$, которыя считаемъ независимыми, даны произвольныя приращенія $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$. Разсматривая данную функцію, какъ функцію одного x, одного y и т. д. (срав. § 367), можемъ искать ея дифференціалы

$$d_x f = f'_x \cdot \delta x, \quad d_y f = f'_y \cdot \delta y, \quad d_z f = f'_z \cdot \delta z, \ldots,$$

называемые частными дифференціалами. Сумма ихъ называется полнымъ дифференціаломъ и обозначается символомъ df. Замѣтимъ прежде всего, что полные дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ будутъ не что иное, какъ произвольныя ихъ приращенія δx, δy, δz, ... Въ самомъ дѣлѣ, полагая $f = x$, имѣемъ $f'_x = 1$, $f'_y = f'_z = \cdots = 0$, слѣдовательно, $dx = \delta x$, и т. д. Поэтому формулы, опредѣляющія частные дифференціалы, дадутъ:

$$f'_x = \frac{d_x f}{dx},\quad f'_y = \frac{d_y f}{dy},\quad f'_z = \frac{d_z f}{dz},\quad \ldots.$$

Такимъ образомъ, каждая частная производная представляется въ видѣ отношенія двухъ безконечно малыхъ. Для упрощенія письма можно отбросить указатели x, y, z, ... въ числителяхъ. При этомъ нечего опасаться какого-либо недоразумѣнія, потому что каждый df въ числителѣ будетъ изображать частный дифференціалъ, взятый по той перемѣнной, которая написана въ знаменателѣ. Впрочемъ, такъ какъ иногда (см. § 561) все-таки возможно смѣшеніе частныхъ дифференціаловъ съ ихъ суммою df, то принято *) при частныхъ дифференцированіяхъ употреблять символъ ∂ вмѣсто d и писать

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x},\quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y},\quad f'_z = \frac{\partial f}{\partial z},\quad \ldots.$$

Въ этомъ видѣ частныя производныя и будутъ изображаемы въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

561. Полные дифференціалы. По опредѣленію полнаго дифференціала имѣемъ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \cdots, \tag{16}$$

когда x, y, z, ... независимыя перемѣнныя. Но важно замѣтить, что соотношеніе (16) остается справедливымъ и тогда, когда перемѣнныя, въ которыхъ выражена функція f, не независимыя перемѣнныя. Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, функцію $f(u, v, w, \ldots)$, въ которой u, v, w, ... функціи отъ какого угодно числа другихъ перемѣнныхъ x, y, z, ..., уже независимыхъ одна отъ другой. Ясно, что частныя производныя функціи f по u, v, w, ... всегда можно обозначать такъ:

$$f'_u = \frac{\partial f}{\partial u},\quad f'_v = \frac{\partial f}{\partial v},\quad f'_w = \frac{\partial f}{\partial w},\quad \ldots,$$

потому что, при вычисленіи этихъ производныхъ, u, v, w, ... разсматриваются, какъ перемѣнныя независимыя. Но пока мы еще

*) По примѣру Якоби, но не всѣми авторами.

не въ правѣ утверждать, что опредѣляемый формулою (16) полный дифференціалъ можетъ быть выраженъ и формулою

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw + \cdots; \tag{17}$$

чтобы доказать справедливость этой формулы, замѣтимъ слѣдующее. Если мы возьмемъ производныя отъ функціи f въ томъ предположеніи, что измѣняется только x, или только y, и т. д., то по правилу разысканія производной сложной функціи (§ 369), найдемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \cdots,$$

. . . . . .

Подставляя эти выраженія въ (16) и замѣчая, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \cdots,$$

. . . . . .

мы и получимъ формулу (17). Ее надо разсматривать, какъ основную для всего дифференціальнаго исчисленія. Важное ея значеніе зависитъ именно отъ того обстоятельства, что для составленія полнаго дифференціала не нужно знать ни того, какія перемѣнныя приняты за независимыя, ни того, какъ велико число этихъ перемѣнныхъ. Если въ частномъ случаѣ y, z, ... будутъ функціи отъ x, то и $f(x, y, z, \ldots)$ будетъ функція отъ x, производную которой получимъ, раздѣливъ обѣ части формулы (16) на dx:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \cdots.$$

Это замѣчаніе объясняетъ пользу введеніе символа ∂ вмѣсто d; потому что $\frac{df}{dx}$ вообще не равна $\frac{\partial f}{\partial x}$ *).

---

*) Иногда $\frac{df}{dx}$ называютъ полною производною отъ $f(x, y, z, \ldots)$, а $\frac{\partial f}{\partial x}$ — частною производной; при вычисленіи первой принимается во вниманіе, что y, z, ... функціи отъ x; при вычисленіи второй, y, z, ... разсматриваются, какъ постоянныя. Напримѣръ, для $f = x^2 + xy + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{df}{dx} = 2x + y + (2y + x)\frac{dy}{dx}$.

562. Геометрическая интерпретація. Чтобы указать геометрическое значеніе полнаго дифференціала, по крайней мѣрѣ, для случая двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, разсмотримъ функцію, опредѣляемую уравненіемъ $z = f(x, y)$. Это уравненіе изображаетъ въ Декартовыхъ координатахъ нѣкоторую поверхность въ пространствѣ. Положимъ, что нѣкоторая дуга MM' кривой, лежащей на поверхности, между точками $M(x, y, z)$ и $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$, проектирована параллельно оси z-овъ на касательную плоскость (см. § 659, уравненіе (3)) къ поверхности въ точкѣ M, и пусть проекція точки M' будетъ точка Q. На параллелограммѣ $PA'P'B'$, лежащемъ въ плоскости (xy), у котораго точка P имѣетъ координаты $(x, y, 0)$ и стороны $PA' = dx$, $PB' = dy$ (dx и dy произвольныя приращенія x и y), построимъ параллелопипедъ съ ребрами, параллельными OZ, и положимъ, что эти ребра пересѣкутъ касательную плоскость (кромѣ точекъ M и Q, въ которыхъ эта плоскость пересѣкается съ ребрами PM и $P'Q$) въ точкахъ A и B. На касательной плоскости получится параллелограммъ $MAQB$, діагонали котораго MQ и AB пересѣкутся въ точкѣ, лежащей на срединѣ той и другой. Поэтому будемъ имѣть $MP + QP' = AA' + BB'$. Съ другой стороны, припоминая сказанное въ § 553, будемъ имѣть

$$MP = z, \quad AA' = z + \frac{\partial z}{\partial x}dx, \quad BB' = z + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Слѣдовательно, $QP' = z + \frac{\partial z}{\partial x}dz + \frac{\partial z}{\partial y}dy = z + dz$. Иными словами, dz есть приращеніе HQ *) ординаты касательной плоскости, въ то время, какъ δz есть приращеніе HM' ординаты самой поверхности. Замѣна δz на dz равносильна, слѣдовательно, замѣнѣ поверхности въ окрестности точки M касательною плоскостью въ этой точкѣ.

563. Послѣдовательное дифференцированіе. Если въ функціи $f(x, y, z, \ldots)$ будемъ разсматривать одну изъ перемѣнныхъ, x — напримѣръ, какъ единственную перемѣнную, то всѣ соображенія, которыми мы пользовались, когда говорили о послѣдовательныхъ производныхъ функцій отъ одной перемѣнной, остаются въ силѣ; поэтому мы можемъ изображать послѣдовательныя частныя производныя отъ f по x въ видѣ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \quad \ldots,$$

условившись считать произвольныя приращенія dx, dy, dz, ... независящими отъ x, y, z, ... Далѣе, мы видѣли (§ 368), что

---

*) H — точка пересѣченія ординаты $M'P'$ съ плоскостью, параллельною плоскости (xy), проходящею черезъ M.

при выполненіи извѣстныхъ условій, въ обыкновенныхъ вычисленіяхъ вообще всегда имѣющихъ мѣсто, результатъ n послѣдовательныхъ частныхъ дифференцированій, въ которыхъ берутъ i—разъ производную по x, j—разъ по y, и т. д. $(i+j+\cdots=n)$ не зависитъ отъ порядка дѣйствій. Поэтому можно считать, что сперва взяты i—разъ производныя по x, затѣмъ j—разъ по y и т. д. Результатъ n послѣдовательныхъ дифференцированій условились обозначать такъ:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \ldots}.$$

Напримѣръ, частныя производныя отъ z — функціи отъ x и y — будутъ

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},\ \ldots$$

Первыя пять, часто встрѣчающіяся въ теоріи поверхностей, обыкновенно обозначаютъ для краткости просто буквами p, q, r, s, t. Переходя отъ разысканія производныхъ къ разысканію дифференціаловъ, беремъ равенство (16) и дифференцируемъ его, разсматривая при этомъ dx, dy, dz, ..., какъ величины, независящія отъ x, y, z, ... Тогда получаемъ

$$d^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots\right)\cdot dy + \cdots$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \cdots$$

Такъ какъ операцію d можно изобразить независимо отъ той функціи, надъ которою эта операція производится, написавъ

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz + \cdots,$$

то видимъ, что

$$d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot dx^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot dy^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\cdot dx\,dy + \cdots$$

или символически

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz + \cdots\right)^2.$$

Дифференцируя еще разъ и продолжая такъ же далѣе, очевидно, придемъ къ символической формулѣ:

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz + \cdots\right)^n,$$

которая предполагаетъ (при $n>1$), что x, y, z, ... независимыя

перемѣнныя. Если же, напротивъ того, имѣемъ, напримѣръ, $z=f(x, y)$, гдѣ x и y функціи отъ другихъ независимыхъ перемѣнныхъ, то послѣдовательное дифференцированіе дастъ:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,\quad d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^2 f+\frac{\partial f}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y,$$

$$d^3z=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^3 f+3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx\,d^2x+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy\,d^2x$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}d^3x+\frac{\partial f}{\partial y}d^3y+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\,d^2y+3\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}dx\,d^2y,$$

. . . . . .

564. Формула Тэйлора. Дифференціальное обозначеніе даетъ возможность написать формулу Тэйлора (§ 330) въ замѣчательно простомъ видѣ, примѣнимомъ одинаково какъ въ случаѣ одной, такъ и въ случаѣ нѣсколькихъ перемѣнныхъ, а именно

$$\delta f=df+\tfrac{1}{2}d^2f+\tfrac{1}{6}d^3f+\tfrac{1}{24}d^4f+\cdots \tag{18}$$

Ограничиваясь для бо́льшей ясности случаемъ одной перемѣнной, замѣтимъ, что формула (8) § 330 можетъ быть написана въ слѣдующемъ видѣ:

$$\delta f(x)=f'(x)\,\delta x+\tfrac{1}{2}f''(x)\,\delta x^2+\tfrac{1}{6}f'''(x)\,\delta x^3+\cdots \tag{19}$$

(полагая $x-a=\delta a$, $f(x)-f(a)=\delta f(a)$ и замѣняя затѣмъ букву a буквою x). Если примемъ x за перемѣнную независимую, то $\delta x=dx$, $f^{(n)}(x)\,\delta x^n=d^nf$, и формула (19) принимаетъ видъ (18). Эта послѣдняя, очевидно, справедлива вообще (т. е. когда x не независимая перемѣнная), потому что каждый членъ формулы (18) имѣетъ опредѣленное значеніе, не связанное съ тѣмъ или инымъ выборомъ независимой перемѣнной. Это замѣчаніе необходимо, потому что ошибочно было бы сказать, что и въ общемъ случаѣ n-ый членъ формулы (19) равенъ $\frac{d^nf}{n!}$. Чтобы и въ общемъ случаѣ получить изъ формулы (19) формулу (18) надо было бы взять выраженіе

$$\delta x=dx+\tfrac{1}{2}d^2x+\tfrac{1}{6}d^3x+\tfrac{1}{24}d^4x+\cdots$$

возвысивъ его во 2-ую, 3-ью и т. д. степени, написать

$$\delta f=(dx+\tfrac{1}{2}d^2x+\tfrac{1}{6}d^3x+\cdots)f'+\tfrac{1}{2}(dx^2+dx\,d^2x+\cdots)f''+\cdots$$

и собрать затѣмъ безконечно малые члены одного и того же порядка:

$$f'dx=df,\quad \tfrac{1}{2}(f'd^2x+f''dx^2)=\tfrac{1}{2}d^2f,$$
$$\tfrac{1}{6}(f'd^3x+3f''\,dx\,d^2x+f'''dx^3)=\tfrac{1}{6}d^3f,\quad \ldots$$

565. Измѣненіе перемѣнныхъ независимыхъ. Если хотимъ выразить частныя производныя функціи $f(x, y, z, \ldots)$ по $x, y, z, \ldots$ въ новыхъ перемѣнныхъ $u, v, w, \ldots$, число которыхъ равно числу

прежнихъ, то, разсматривая $x, y, z, \ldots$ какъ функціи отъ $u, v, w, \ldots$ и измѣняя сперва одно u, затѣмъ одно v и т. д., найдемъ

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u} + \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v} + \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial w} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial w} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial w} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Эта система линейныхъ относительно $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial}, \cdots$ уравненій опредѣлитъ эти функціи, если опредѣлитель

$$\mathfrak{I} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} & \cdots \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \cdots \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю [1]). Этотъ опредѣлитель называется функціональнымъ опредѣлителемъ или Якобіаномъ системы функцій $x, y, z, \ldots$ относительно перемѣнныхъ $u, v, w, \ldots$ и обозначается обыкновенно слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{I} = \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}.$$

Рѣшая разсматриваемую систему, найдемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{I}} \cdot \frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} \tag{20}$$

и точно также

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(x, f, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(x, y, f, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}, \ldots.$$

Для полученія слѣдующихъ частныхъ производныхъ (2-хъ, 3-хъ и т. д.), надо поступить съ найденными первыми такъ, какъ было поступлено съ функціею f.

566. Къ разсматриваемой задачѣ приводитъ вопросъ о преобразованіи даннаго уравненія или выраженія, содержащаго производ-

---

[1]) Мы вскорѣ увидимъ, что условіе это будетъ выполнено, если $x, y, z, \ldots$ независимы одно отъ другого.

ныя отъ f по $x, y, z, \ldots$ такимъ образомъ, чтобы въ него вошли производныя по нѣкоторымъ другимъ перемѣннымъ. Тогда надо выразить $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots$ черезъ $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \cdots$, и если $x, y, z, \ldots$, заданы въ видѣ функцій отъ $u, v, w, \ldots$, то вышеизложенный процессъ предпочтительнѣе всякаго другого. Иногда случается, что, наоборотъ, $u, v, w, \ldots$ заданы, какъ функціи отъ $x, y, z, \ldots$. Тогда можно непосредственно написать:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \tag{21}$$

Аналогично этому найдутся и $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \cdots$ и т. д. Чтобы показать, какимъ образомъ эти формулы сводятся къ формуламъ предыдущаго параграфа, дѣлаемъ послѣдовательно $f=x$, $f=y$, $f=z, \ldots$, предполагая, что провѣрена (пріемомъ, который будетъ изложенъ въ слѣдующей главѣ) возможность разсматривать и $x, y, z, \ldots$ какъ функціи отъ $u, v, w, \ldots$, имѣющія производныя. Тогда найдемъ

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \\ 0 = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \\ 0 = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(v, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(u, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(y, z, \ldots)}{\partial(u, v, \ldots)}, \quad \ldots,$$

а подставляя эти выраженія въ (21) мы и получимъ формулу (20), въ которой, впрочемъ, заключаются и послѣднія формулы, если по очереди положимъ $f = u$, $f = v$, $f = w$, ...

567. Можно и другимъ путемъ придти къ формулѣ (20). Мы его здѣсь укажемъ, чтобы съ очевидностью обнаружить, что и частная производная есть не что иное, какъ нѣкоторое отношеніе, а именно отношеніе двухъ частныхъ дифференціаловъ. Такъ, напримѣръ, чтобы получить $\frac{\partial f}{\partial x}$, можно раздѣлить дифференціалы

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \cdots, \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \cdots$$

первый на второй, обративъ ихъ предварительно въ частные, принимая $dy = 0$, $dz = 0$, ... Такимъ путемъ получимъ

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) dv + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\right) dw + \cdots = 0,$$

при условіи, что du, dv, ... связаны соотношеніями

$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} du + \frac{\partial z}{\partial w} dw + \cdots = 0,$$

(выражающими, очевидно, равенства $dy = 0$, $dz = 0$, ...). Исключая du, dv, dw, ..., находимъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

откуда и получается выраженіе (20) для $\frac{\partial f}{\partial x}$.

568. Производная по данному направленію. Чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, допустимъ, что дана функція $f(x, y, z)$ отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ, т. е. величина, значеніе которой дано для всякой точки (x, y, z) пространства. Самый естественный способъ обобщенія понятія производной, когда отъ функцій отъ одной перемѣнной переходятъ къ функціямъ отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ, состоитъ въ нижеслѣдующемъ. Разсматриваютъ приращеніе, получаемое функціею при переходѣ отъ одной точки M къ другой M', и ищутъ предѣлъ отношенія этого приращенія къ длинѣ h отрѣзка MM', въ предположеніи, что точка M остается неподвижною, а M' стремится къ совпаденію съ M. При этомъ направленіе MM' считается извѣстнымъ и опредѣляется косинусами α, β, γ угловъ, образуемыхъ имъ съ положительными направленіями осей координатъ. Этотъ предѣлъ и называется *производной данной функціи по данному направленію*. Въ каждой точкѣ, слѣдовательно, существуетъ *безчисленное множество* производныхъ, соотвѣтствующихъ различнымъ направленіямъ, но всѣ онѣ связаны между собою простымъ и замѣчательнымъ соотношеніемъ. А именно, производная по направленію (α, β, γ) равна

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+\alpha h, y+\beta h, z+\gamma h) - f(x, y, z)}{h}$$

$$= \lim_{h=0} [\alpha f'_x(x + \vartheta\alpha h, \ldots) + \beta f'_y(x + \vartheta\alpha h, \ldots) + \cdots] = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}.$$

При этомъ частныя производныя, предполагаемыя непрерывными, вычислены для точки M. Представимъ себѣ теперь безконечно малую длину $d\sigma$, отложенную отъ точки M по прямой, проведенной черезъ M въ направленіи (α, β, γ). Производную по разсматриваемому направленію принято обозначать черезъ $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$, такъ что

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Теперь фиксируемъ опредѣленное направленіе, направляющіе косинусы котораго α_0, β_0, γ_0 пропорціональны первымъ частнымъ производнымъ функціи f, такъ что

$$\frac{\alpha_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\beta_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\gamma_0}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}, \text{ гдѣ } \Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

Обозначая черезъ θ уголъ между направленіями (α, β, γ) и $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, будемъ имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = (\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)\sqrt{\Delta f} = \cos\theta \cdot \sqrt{\Delta f}.$$

Если по направленію $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ отложимъ отрѣзокъ, равный $\sqrt{\Delta f}$, то проекція этого отрѣзка на любое направленіе измѣряетъ величину производной, взятой по этому направленію. Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ есть то направленіе, по которому функція измѣняется всего быстрѣе. Напротивъ того, по безчисленному множеству направленій, перпендикулярныхъ къ $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, функція имѣетъ стремленіе оставаться постоянною.

569. Дифференціальные параметры. Такъ называются тѣ выраженія, составленныя изъ частныхъ производныхъ функціи, которыя пользуются свойствомъ инваріантности, т. е. независимости отъ выбора координатныхъ осей. Понятно, что подобныя выраженія имѣютъ весьма важное значеніе въ Геометріи, Механикѣ, Физикѣ и вообще вездѣ, гдѣ дѣло идетъ о соотношеніяхъ и свойствахъ, не имѣющихъ никакого отношенія къ тѣмъ осямъ, которыя выбираются за координатныя [1]). Такъ, первыя частныя производныя отъ f, очевидно, связаны съ координатными осями и измѣняются вмѣстѣ съ ними; а сумма ихъ квадратовъ Δf остается безъ измѣненія, и на этомъ основаніи называется дифференціальнымъ параметромъ перваго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли въ преды-

[1]) Въ этомъ направленіи разработано, такъ называемое, „абсолютное дифференціальное исчисленіе“ (Calcolo diff. assoluto), изобрѣтенное G. Ricci (Риччи), проф. Падуанскаго Университета (Bulletin des sciences math. et astr., 1892, p. 186).

дущемъ параграфѣ, что Δf равно квадрату отъ $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$, взятой въ направленіи наибыстрѣйшаго измѣненія f. Это направленіе, очевидно, зависитъ только отъ значеній функцій f, а не отъ системы осей, выбранной за основу вычисленій *). Точно также инваріантно выраженіе

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

называемое дифференціальнымъ параметромъ 2-го порядка. Дѣйствительно, взявъ еще разъ производную по направленію (α, β, γ), получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right) + \beta \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right) + \cdots$$

Общее мѣсто точекъ, для которыхъ эта вторая производная $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$ равна нулю, будетъ конусъ второго порядка:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \cdots + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots = 0 \tag{22}$$

(α, β, γ разсматриваются, какъ координаты точекъ на конусѣ, а x, y, z, какъ постоянныя). Ясно, что этотъ конусъ не зависитъ отъ выбора осей. Поэтому дискриминантъ квадратичной формы (22) (относительно α, β, γ), равный опредѣлителю Гессе функціи f, будетъ инваріантомъ, и тѣмъ же свойствомъ инваріантности (§ 89) пользуются суммы его главныхъ миноровъ перваго и второго порядка, а въ частности и $\Delta^2 f$. Функціи, для которыхъ всегда $\Delta^2 f = 0$, (уравненіе Лапласа) называются гармоническими функціями (см. § 401) и играютъ весьма важную роль въ приложеніяхъ. Гармоническою функціею будетъ, напримѣръ, температура тѣла, находящагося въ термическомъ равновѣсіи, потенціалы внѣ пространства, занимаемаго дѣйствующими массами и т. д. **).

570. Предыдущія соображенія бросаютъ новый свѣтъ на вопросы изслѣдованія о maxima и minima функцій отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Если проведемъ черезъ точку M прямую и будемъ разсматривать только тѣ значенія функціи f, которыя она прини-

*) Легко непосредственно провѣрить, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)^2,$$

если x, y, z связяны съ x', y', z' извѣстными формулами преобразованія прямоугольныхъ координатъ.

**) Теорія гармоническихъ функцій и ихъ приложенія подробно развиты въ сочиненіи Weber-Riemann, Partielle Differentialgleichungen der mathem. Physik, 5-oe изд. 1911.

маетъ въ точкахъ на этой прямой, то ясно, что функція f въ точкѣ M — навѣрное будетъ maximum или minimum, если въ этой точкѣ $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$, а $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$ не равно 0. Такъ какъ уравненіе $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$ удовлетворяется для безчисленнаго множества направленій, перпендикулярныхъ къ $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, то мы видимъ, что черезъ каждую точку M въ пространствѣ можно провести безчисленное множество прямыхъ, лежащихъ въ одной плоскости, вдоль которыхъ функція f въ точкѣ M будетъ maximum или minimum; исключеніе могутъ представлять только нѣкоторыя прямыя, а именно образующія конуса (22), на которыхъ и $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = 0$. Все это относится къ тому предположенію, что въ точкѣ M не равны нулю одновременно всѣ три первыя частныя производныя отъ f по x, y, z; въ противномъ случаѣ $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ была бы равна нулю по всякому направленію (α, β, γ), и функція f въ такой точкѣ M была бы maximum или minimum вдоль всевозможныхъ прямыхъ, черезъ нее проходящихъ, за исключеніемъ, можетъ быть, тѣхъ, которыя лежатъ на поверхности конуса (22). Если этотъ конусъ мнимый, то такихъ исключеній не будетъ, и $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$ сохраняетъ постоянный знакъ для всѣхъ направленій, такъ какъ эта производная функція непрерывная, не обращающаяся въ нуль для вещественныхъ значеній α, β, γ. Отсюда ясно, почему функція f, имѣющая въ точкѣ M либо всегда maximum, либо всегда minimum по всякому направленію, дѣйствительно будетъ и въ пространствѣ maximum или minimum въ точкѣ M. Если, наоборотъ, конусъ (22) вещественный, то въ M не будетъ ни maximum, ни minimum функціи f, такъ какъ вдоль нѣкоторыхъ прямыхъ f будетъ maximum $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} < 0\right)$, а вдоль другихъ minimum $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} > 0\right)$; конусъ (22) служитъ границею, отдѣляющею область однѣхъ прямыхъ отъ области другихъ. Въ частномъ случаѣ гармоническихъ функцій, для которыхъ сумма вторыхъ частныхъ производныхъ $\Delta^2 f$ равна нулю, эти производныя не могутъ имѣть всѣ три одинъ и тотъ же знакъ, а потому конусъ (22) будетъ вещественный. Отсюда слѣдуетъ, что гармоническія функціи нигдѣ не имѣютъ ни maximum'а, ни minimum'а.

571. Упражненія. а) Предложимъ себѣ выразить дифференціальные параметры функціи $f(x, y)$ отъ Декартовыхъ координатъ точки на плоскости въ полярныхъ координатахъ. Мы имѣемъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, и

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta. \tag{23}$$

Впрочемъ, послѣднія формулы можно получить прямо (см. § 566), какъ и первыя, замѣтивъ, что изъ равенства $r^2=x^2+y^2$ и $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, получается

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

Возвышая въ квадратъ и складывая выраженія (23), находимъ

$$\Delta f=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2.$$

Примѣняя теперь формулы (23) къ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, вмѣсто f, получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right)\cdot\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right)\cdot\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\cos\theta\right)\cdot\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\cos\theta\right)\cdot\cos\theta,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta+2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta}\right)\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)\sin^2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\sin^2\theta-2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta}\right)\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)\cos^2\theta.$$

Слѣдовательно,

$$\Delta^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}.$$

Въ случаѣ n перемѣнныхъ, если f функція одного $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2+\cdots}$, будемъ имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{df}{dr},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{df}{dr},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{r}\frac{df}{dr},\quad \ldots,$$

далѣе

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{x^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)\text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно,

$$\Delta f=\left(\frac{df}{dr}\right)^2,\quad \Delta^2 f=\frac{n}{r}\frac{df}{dr}+r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{df}{dr}\right).$$

Послѣдняя формула показываетъ, что если хотимъ имѣть гармоническую функцію отъ одного r, то должны положить $r^{n-1}\frac{df}{dr}=$ постоянному числу. Поэтому, при $n=2$, f должно быть вида $C\log r+C_1$, а при $n\geqslant 2$, $f=C_2 r^{2-n}+C_3$, гдѣ C, C_1, C_2, C_3 — постоянныя.

b) Чтобы вычислить опредѣлитель Гессе $H=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$, надо еще знать

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\vartheta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right)\cdot\sin\vartheta$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\vartheta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right)\cdot\cos\vartheta.$$

Если положимъ для сокращенія

$$\varphi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\right),\quad \psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\vartheta},$$

то найдемъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\varphi\sin 2\vartheta-\psi\cos 2\vartheta.$$

Найденныя въ предыдущемъ упражненіи выраженія можно также написать въ видѣ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\Delta^2 f+\varphi\cos 2\vartheta+\psi\sin 2\vartheta,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\Delta^2 f-\varphi\cos 2\vartheta-\psi\sin 2\vartheta.$$

Слѣдовательно, $H=\frac{1}{4}(\Delta^2 f)^2-(\varphi^2+\psi^2)$, или

$$H=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} & \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right)\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2}\end{vmatrix}.$$

c) Перейдемъ теперь къ разысканію выраженій вторыхъ частныхъ производныхъ функціи $f(x,y)$, взятыхъ по x и y въ какихъ угодно новыхъ перемѣнныхъ u и v. Поступая, какъ въ § 565, получимъ

$$(24)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

Затѣмъ изъ соотношеній

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\end{cases}$$

надо будетъ найти $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Опредѣлитель этой системы будетъ (§ 27, a)

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\end{vmatrix}=\mathfrak{J}^3,$$

Алгебраическія дополненія его элементовъ будутъ равны гомологичнымъ элементамъ опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \\ -2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & -2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \end{vmatrix},$$

умноженнымъ на $\mathfrak{J}$ *). Отсюда слѣдуетъ (на основаніи правила Крамера)

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)\right] \\ &\quad+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right)\right] \\ &\quad-2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right)\right] \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

куда вмѣсто $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ надо подставить выраженія (24). Но мы быстрѣе и прямѣе придемъ къ цѣли, если (какъ въ первомъ упражненіи) примѣнимъ формулы (24) къ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, вмѣсто f. Такимъ путемъ получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ &\quad-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] \\ &\quad+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial u}{\partial v}\right)-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u} \\ &\quad+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v}, \end{aligned}$$

и аналогично этому

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] \\ &\quad+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u} \\ &\quad+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

---

*) Т. е. имѣющимъ тѣ же указатели строкъ и столбцовъ, такъ что алгебраическое дополненіе элемента $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$ равно $\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\mathfrak{J}$ и т. д.

d) Теперь мы имѣемъ возможность выразить первый и второй дифференціальные параметры f въ новыхъ перемѣнныхъ u и v. Въ эти выраженія войдутъ, какъ мы увидимъ, функціи

$$a=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,\quad b=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,\quad c=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$

которыя являются въ преобразованіи $ds^2=dx^2+dy^2$ къ виду

$$ds^2=a\,du^2+2\,c\,du\,dv+b\,dv^2. \tag{25}$$

Сперва, путемъ возвышенія въ квадратъ и сложенія, изъ формулъ (24) получимъ

$$\Delta f=\frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[b\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-2\,c\,\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}+a\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

Далѣе изъ послѣднихъ формулъ предыдущаго упражненія получается путемъ сложенія

$$\Delta^2 f=\frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left(b\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\,c\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}+a\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{\mathfrak{J}}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a}{\mathfrak{J}}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)\frac{\partial f}{\partial v}\right]$$

или

$$\Delta^2 f=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{c}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{c}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right];$$

это весьма важная формула Лямэ (Lamé). Къ этой формулѣ можно придти также, слѣдуя пути, указанному въ § 566. Тотчасъ найдемъ

$$\Delta^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\Delta u+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\Delta v+\frac{\partial f}{\partial u}\Delta^2 u+\frac{\partial f}{\partial v}\Delta^2 v.$$

Съ другой стороны, вслѣдствіе соотношеній

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, & 0=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, & 1=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u},$$

откуда

$$\Delta u=\frac{b}{\mathfrak{J}^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{c}{\mathfrak{J}^2},\quad \Delta v=\frac{a}{\mathfrak{J}^2},$$

$$\Delta^2 u=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{\mathfrak{J}}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right),\quad \Delta^2 v=\frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a}{\mathfrak{J}}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)$$

и т. д. Если построимъ кривыя u и v (§ 413), то значенія a, b, c въ каждой точкѣ получатся прямо изъ геометрическихъ соображеній. Дѣйствительно, изъ (25) видно, что $\sqrt{a}\cdot du$ и $\sqrt{b}\cdot dv$ изображаютъ ds соотвѣтственно для

кривыхъ $v = \text{const.}$ и $u = \text{const.}$ *). Если α и β обозначаютъ углы этихъ кривыхъ въ точкѣ M съ осью x-овъ, то

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial y}{\partial v},$$

а уголъ ω между кривыми опредѣляется формулою

$$\cos\omega = \cos(\beta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{ab}},$$

а такъ какъ очевидно, $\mathfrak{J}^2 = ab - c^2$, то можно также написать $\sin\omega = \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{ab}}$.

Напримѣръ, полагая въ случаѣ полярныхъ координатъ $u = r$, $v = \vartheta$, прямо изъ чертежа видно, что $a = 1$, $b = r^2$, $c = 0$ и формула Лямэ сейчасъ же сводится къ выраженію, данному въ первомъ упражненіи. Вообще для всякой ортогональной системы кривыхъ (т. е., когда $c = 0$) формула Лямэ принимаетъ слѣдующій, чрезвычайно простой видъ

$$\Delta^2 f = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right].$$

Неявныя функціи.

572. Если въ уравненіи $f(x, y) = 0$ мы будемъ разсматривать y, какъ функцію отъ x, то правило разысканія производной сложной функціи тотчасъ дастъ уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{26}$$

изъ котораго при $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$ и находимъ значеніе y'. Но, поступая такимъ образомъ, мы молча предполагаемъ, что производная y' существуетъ, между тѣмъ какъ мы еще не имѣемъ основанія a priori утверждать ни того, что y' существуетъ, ни даже того, что вообще можно разсматривать y, какъ функцію отъ x. Однако (при извѣстныхъ условіяхъ), эти утвержденія допустимы. Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что (x_0, y_0) есть нѣкоторая пара значеній x и y, удовлетворяющихъ уравненію $f(x, y) = 0$, и примемъ, что f'_x и f'_y будутъ непрерывны, когда x измѣняется въ интервалѣ $(x_0 - h, x_0 + h)$, а y въ интервалѣ $(y_0 - k, y_0 + k)$. Кромѣ того, предположимъ, что h и k достаточно малы для того, чтобы f'_y сохраняла знакъ числа $f'_y(x_0, y_0) \gtrless 0$, въ указанныхъ интервалахъ. Такое предположеніе возможно вслѣдствіе непрерывности f'_y. Далѣе ясно, что въ силу нашихъ предположеній отношеніе f'_y къ f'_x не можетъ быть какъ угодно мало по абсолютной величинѣ и потому существуетъ такое положительное число α, для котораго $|f'_y| > \alpha|f'_x|$,

*) ds есть дифференціалъ дуги кривой (см. § 582).

когда x и y остаются въ разсматриваемыхъ интервалахъ. Если h, которое можно взять сколь угодно малымъ, будетъ меньше $k\,a$, то будемъ имѣть

$$h\,|f'_x| < k\,a\,|f'_x| < k\,|f'_y|.$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ равенствѣ

$$f(x_0+\xi,\ y_0 \pm k) = \xi f'_x(x_0+\vartheta\xi,\ y_0 \pm \vartheta k) \pm k f'_y(x_0+\vartheta\xi,\ y_0 \pm \vartheta k),$$

$(0<\vartheta<1)$ которое даетъ формула Тэйлора въ силу равенства $f(x_0,\ y_0)=0$, для всякаго значенія ξ, лежащаго между $-h$ и $+h$, первый членъ правой части будетъ меньше второго по абсолютной величинѣ. Поэтому знакъ числа $f(x_0+\xi,\ y_0 \pm k)$ будетъ совпадать со знакомъ числа $\pm k f'_y(x_0+\vartheta\xi,\ y_0 \pm \vartheta k)$, а такъ какъ f'_y сохраняетъ постоянный знакъ, то приходимъ къ слѣдующему заключенію:

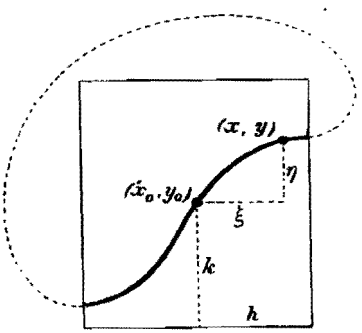


Рис. 28.

при фиксированномъ ξ, $f(x_0+\xi, y)$ есть функція одного y, имѣющая разные знаки при $y=y_0-k$ и $y=y_0+k$. Но эта функція непрерывна, потому что имѣетъ производную f'_y. Слѣдовательно (§ 275), она обращается въ нуль для нѣкотораго значенія $y=\eta$, лежащаго въ интервалѣ $(y_0-k,\ y_0+k)$; при томъ она не можетъ обратиться въ нуль болѣе одного раза въ этомъ интервалѣ, потому что производная f'_y сохраняетъ въ немъ знакъ и, слѣдовательно, $f(x_0+\xi,\ y)$ либо постоянно убываетъ, либо постоянно возрастаетъ. Итакъ, справедливо, что, выбравъ по произволу значеніе $x=x_0+\xi\,(-h\leqq\xi\leqq h)$, мы найдемъ одно и только одно такое значеніе $y=y_0+\eta\,(-k<\eta<k)$, что для этой пары значеній будемъ имѣть $f(x,\ y)=0$. Слѣдовательно, въ указанныхъ границахъ данное уравненіе, дѣйствительно, опредѣляетъ y, какъ функцію отъ x. Функція эта притомъ непрерывна, потому что, если въ уравненіи $f(x_0+\xi,\ y_0+\eta)=0$, т. е. въ уравненіи

$$\xi f'_x(x_0+\vartheta\xi,\ y_0+\vartheta\eta)+\eta f'_y(x_0+\vartheta\xi,\ y_0+\vartheta\eta)=0$$

ξ будетъ стремиться къ нулю, то и η будетъ стремиться къ нулю, потому что $f'_y \gtrless 0$. Наконецъ, эта функція имѣетъ производную, потому что съ приближеніемъ къ нулю, имѣемъ

$$\lim\frac{\eta}{\xi} = -\lim\frac{f'_x(x_0+\vartheta\xi,\ y_0+\vartheta\eta)}{f'_y(x_0+\vartheta\xi,\ y_0+\vartheta\eta)} = -\frac{f'_x(x_0,\ y_0)}{f'_y(x_0,\ y_0)}.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ точки $(x_0,\ y_0)$, мы нашли безчисленное множество точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію

$f(x, y)=0$, лежащихъ въ прямоугольникѣ, опредѣляемомъ вершинами $(x_0 \pm h,\ y_0 \pm k)$, и всѣ эти точки находятся въ тѣхъ же условіяхъ, какъ и точка $(x_0,\ y_0)$. Послѣднее вышеприведенное заключеніе поэтому приложимо ко всѣмъ этимъ точкамъ, и формула (26) доказана. Замѣтимъ наконецъ, что въ силу непрерывности f'_x и f'_y и условія $f'_y \gtrless 0$, функція y' также непрерывна.

573. Можно высказать и болѣе общій результатъ. Если соотношеніе

(27) $$f(x, y, z, \ldots, u)=0$$

удовлетворяется значеніями $x_0,\ y_0,\ z_0,\ \ldots,\ u_0$ перемѣнныхъ, и въ окрестности этихъ значеній первыя частныя производныя функціи f существуютъ и непрерывны и, кромѣ того, для этихъ значеній $f'_u \gtrless 0$, то можно утверждать, что u есть функція отъ перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$, имѣющая непрерывныя первыя частныя производныя. Онѣ получаются, если возьмемъ частныя производныя отъ функціи $f(x, y, z, \ldots, u)$, разсматривая u, какъ функцію отъ $x, y, z, \ldots$, и приравняемъ ихъ нулю *).

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \ldots$$

Доказательство ведется точно такъ же, какъ въ разсмотрѣнномъ выше частномъ случаѣ.

574. Дальнѣйшія дифференцированія дадутъ послѣдовательныя производныя функціи y. Напримѣръ, въ случаѣ уравненія $f(x, y)=0$, надо продифференцировать $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$, чтобы получить y''. А именно—мы получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0,$$

откуда, послѣ подстановки значенія y', взятаго изъ (26), тотчасъ найдемъ

$$-y''\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

или

$$y''=\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}\ \text{и т. д.}$$

*) Говоря короче, дифференцируя уравненіе (27).

Рѣшимъ еще вопросъ о вычисленіи частныхъ производныхъ p, q, r, s, t функціи z, неявно опредѣляемой уравненіемъ $f(x, y, z) = 0$. Первыя двѣ найдутся изъ уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0, \tag{28}$$

получаемыхъ изъ уравненія $f = 0$, если возьмемъ частныя производныя отъ обѣихъ частей равенства по x и по y. Дифференцируя по x первое и по y второе уравненіе, получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} p + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} p^2 + \frac{\partial f}{\partial z} r = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} q^2 + \frac{\partial f}{\partial z} t = 0,$$

откуда для r и t получаются (послѣ подстановки вмѣсто p и q ихъ значеній) слѣдующія выраженія

$$r = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}, \qquad t = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Если продифференцируемъ по y первое или по x второе изъ уравненій (28), то получимъ

$$s = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Замѣтимъ, что вышенаписанные три опредѣлителя получаются изъ опредѣлителя

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix},$$

если возьмемъ алгебраическія дополненія элементовъ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$ послѣдняго. Отсюда, по извѣстному свойству опредѣлителей (§ 38), слѣдуетъ

$$rt - s^2 = -\frac{D}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^4}.$$

575. Можно доказать еще болѣе общій результатъ, а именно: если даны m уравненій

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \varphi(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \psi(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{29}$$

которымъ удовлетворяютъ значенія $x = x_0$, $y = y_0$, $\ldots$, $u = u_0$, $v = v_0$, $\ldots$, то можно разсматривать m перемѣнныхъ u, v, w, $\ldots$, какъ функціи отъ n перемѣнныхъ x, y, z, $\ldots$ и эти функціи имѣютъ первыя частныя производныя по всѣмъ перемѣннымъ. При этомъ, однако, предполагается, что первыя частныя производныя функцій f, φ, ψ, $\ldots$ непрерывны и, кромѣ того, что для разсматриваемыхъ значеній перемѣнныхъ Якобіанъ

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}$$

не равенъ нулю. При $m = 1$, мы имѣемъ уже извѣстную намъ теорему § 573. Чтобы доказать общую теорему, достаточно показать, что она будетъ справедлива для m уравненій, если допустимъ ея справедливость для $m - 1$ уравненій. Такъ какъ предполагается, что въ точкѣ $(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots)$ $\mathfrak{J} \gtrless 0$, то можно быть увѣреннымъ, что, по крайней мѣрѣ, одна изъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$, $\ldots$ въ этой точкѣ не равна 0. Положимъ, что $\frac{\partial f}{\partial u} \gtrless 0$. Тогда, принимая во вниманіе наши предположенія и теорему § 573 *), мы можемъ утверждать, что u есть функція отъ перемѣнныхъ x, y, z, $\ldots$, v, w, $\ldots$, имѣющая непрерывныя первыя частныя производныя. Если представимъ себѣ, что это выраженіе u подставлено въ остальныя уравненія системы (29), то получимъ новую систему

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots) = 0, \\ \psi_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{30}$$

*) Примѣняя ее, мы разсматриваемъ первое изъ уравненій (29).

Система (30) состоитъ изъ $m-1$ уравненій, связывающихъ $m-1$ перемѣнныхъ $v, w, \ldots$ съ n остальными. Первыя частныя производныя функціи $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ существуютъ и непрерывны, потому что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \text{ и т. д.}$$

(что вытекаетъ изъ самаго происхожденія функцій $\varphi_1, \psi_1, \ldots$). Мы сейчасъ покажемъ, что Якобіанъ системы $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ относительно $v, w, \ldots$

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\partial(\varphi_1, \psi_1, \ldots)}{\partial(v, w, \ldots)}$$

не равенъ нулю. А тогда система (30), по предположенію, опредѣляетъ $v, w, \ldots$ какъ функціи отъ $x, y, z, \ldots$, и эти функціи имѣютъ первыя частныя производныя. Но то же самое можно сказать и объ u, если представимъ себѣ, что въ его выраженіе, полученное изъ перваго уравненія системы (29), подставлены выраженія $v, w, \ldots$ изъ системы (30). Такимъ образомъ и получается система функцій $u, v, w, \ldots$, принимающихъ значенія $u_0, v_0, w_0, \ldots$ при $x=x_0, y=y_0, \ldots$ и имѣющихъ въ окрестности послѣднихъ значеній первыя частныя производныя. Все дѣло сводится, слѣдовательно, къ тому, чтобы доказать, что $\mathfrak{J}_1 \gtrless 0$. Для этого представимъ себѣ, что въ опредѣлителѣ $\mathfrak{J}$ элементы перваго столбца по умноженіи ихъ на $\frac{\partial u}{\partial v}$ прибавлены къ элементамъ второго столбца, затѣмъ тѣ же элементы, по умноженіи на $\frac{\partial u}{\partial w}$, прибавлены къ элементамъ третьяго столбца и т. д. Тогда элементы новаго опредѣлителя будутъ

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} = 0, & \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} = 0, & \ldots \\
\frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}, & \ldots \\
\frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial \psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial \psi_1}{\partial w}, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

и мы находимъ $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \frac{\partial f}{\partial u}$. Такъ какъ $\frac{\partial f}{\partial u}$ величина конечная, а $\mathfrak{J}$ не равно нулю, то и $\mathfrak{J}_1$ не равно нулю.

576. Доказавъ существованіе первыхъ частныхъ производныхъ отъ функцій, опредѣляемыхъ системою (29), мы можемъ теперь весьма легко вычислить эти производныя. Для этого нужно только дифференцировать по каждой изъ независимыхъ перемѣнныхъ каждое изъ уравненій системы (29). Такъ, напримѣръ, взявъ производ-

ныя по x, получимъ слѣдующую систему линейныхъ уравненій относительно $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

опредѣлитель которой $\mathfrak{I}$ не равенъ нулю. Отсюда, по правилу Крамера, получимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(f,\ \varphi,\ \ldots)}{\partial(x,\ v,\ \ldots)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(f,\ \varphi,\ \ldots)}{\partial(u,\ x,\ \ldots)},\quad \ldots$$

577. Упражненія. a) Вычислить уголъ между двумя плоскими кривыми $\varphi=0$, $\psi=0$, пересѣкающимися въ точкѣ (x, y). По формулѣ (26) угловые коэффиціенты касательныхъ къ этимъ кривымъ опредѣляются формулами

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}},\quad \operatorname{tg}\beta=-\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}},$$

откуда

$$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

слѣдовательно (см. § 571, d),

$$\sin\omega=\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi\cdot\Delta\psi}}\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(x,\ y)}.$$

Замѣтимъ, что касаніе этихъ кривыхъ ($\omega=0$) характеризуется тѣмъ, что Якобіанъ системы функцій φ и ψ обращается въ нуль.

b) Если плоская кривая задана уравненіемъ

$$f(x,\ y,\ u,\ v,\ \ldots)=0,$$

гдѣ $u, v, \ldots$ опредѣляются, какъ неявныя функціи отъ координатъ x и y, n уравненіями

$$\varphi(x,\ y,\ u,\ v,\ \ldots)=0,\quad \psi(x,\ y,\ u,\ v,\ \ldots)=0,\quad \ldots$$

и требуется построить къ этой кривой касательную въ данной точкѣ, то нѣтъ надобности исключать $u, v, w, \ldots$ изъ $n+1$ данныхъ уравненій, съ тѣмъ, чтобы получить уравненіе между одними x и y. Можно разсматривать $y, u, v, w, \ldots$ какъ неявныя функціи отъ x, опредѣляемыя данными урав-

неніями, взять производныя по x, и изъ полученной системы линейныхъ уравненій (относительно $\frac{dy}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\cdots$) исключить производныя функцій $u, v, w, \ldots$. Одно изъ важнѣйшихъ преимуществъ дифференціальнаго исчисленія и состоитъ въ томъ, что оно позволяетъ избѣгать практически невыполнимыхъ исключеній (неизвѣстныхъ изъ системы не линейныхъ и сложныхъ уравненій). Оно всегда при помощи дифференцированія приводитъ къ системѣ линейныхъ уравненій, которыя всегда можно рѣшить. Такъ, въ разсматриваемомъ случаѣ получается формула

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(x, u, v, \ldots)}}{\frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(y, u, v, \ldots)}},$$

представляющая, очевидно, обобщеніе формулы (26).

c) Подобнымъ же образомъ, положимъ, что нѣкоторая поверхность задана двумя уравненіями съ четырьмя перемѣнными. Тогда можно представить себѣ, что соотношеніе между тремя координатами x, y, z получается, какъ результатъ исключенія u изъ уравненій

$$\varphi(x, y, z, u) = 0, \quad \psi(x, y, z, u) = 0.$$

Положимъ, что требуется вычислить p, q, r, s, t, т. е. первыя и вторыя частныя производныя отъ z, разсматриваемой, какъ функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Взявъ производныя отъ данныхъ уравненій одинъ разъ по x, другой разъ по y, получаемъ системы

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array}\right.,$$

изъ которыхъ черезъ исключеніе производныхъ отъ u, находимъ

$$p = -\frac{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, u)}}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, u)}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, u)}}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, u)}}.$$

Другія три производныя можно найти или непосредственно вычисляя производныя отъ p и q помощью полученныхъ ихъ выраженій, или съ помощью рѣшеній линейныхъ уравненій, получаемыхъ черезъ дифференцированіе уравненій вышеприведенныхъ двухъ системъ. Въ частности, если поверхность задана уравненіемъ $z = f(x, y, u)$ гдѣ u опредѣляется, какъ неявная функція отъ x и y уравненіемъ $\varphi(x, y, u) = 0$. то тотчасъ находимъ

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

слѣдовательно,

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, u)}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$r=\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

гдѣ вмѣсто $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ надо подставить ихъ выраженія, получаемыя изъ уравненій

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \text{ и т. д.}$$

578. Когда даны m функцій $y_1, y_2, \ldots, y_m$ отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то весьма важно бываетъ установить, что эти функціи независимы, т. е., что ни одна изъ нихъ не будетъ функціей другихъ. Для этого достаточно изслѣдовать Якобіеву матриссу системы, т. е. матриссу

$$\left|\begin{array}{cccc}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdots \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdots \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \frac{\partial y_m}{\partial x_3} & \cdots \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{array}\right|,$$

элементы которой предполагаются непрерывными функціями. Если μ есть рангъ этой матриссы, то данная система заключаетъ въ себѣ μ независимыхъ функцій, а остальныя $m-\mu$ будутъ функціями отъ этихъ μ. Эту важную теорему мы теперь и докажемъ

а) Можно предположить, что Якобіанъ

$$\mathfrak{J}=\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_\mu)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)}$$

не равенъ нулю, потому что, по условію, Якобіева матрисса содержитъ въ себѣ, по крайней мѣрѣ, одинъ опредѣлитель порядка μ, не равный нулю. Представивъ себѣ, что тѣ именно μ функцій y и независимыхъ перемѣнныхъ x, которыя входятъ въ этотъ опредѣлитель, нумерованы указателями $1, 2, \ldots, \mu$, мы и придемъ къ тому, что $\mathfrak{J}$ есть одинъ изъ опредѣлителей, не равныхъ нулю. Пусть выраженія данныхъ функцій будетъ

$$y_1=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y_2=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots.$$

Положимъ

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)-y_i$$

и разсмотримъ систему

$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=0, \ldots, \varphi_m=0. \tag{31}$$

На основаніи сказаннаго въ § 575, эта система способна опредѣлить перемѣнныя

(32) $$x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \quad y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m,$$

какъ неявныя функціи остальныхъ

(33) $$y_1, y_2, \ldots, y_\mu, \quad x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n,$$

такъ какъ для этого нужно только, чтобы функціональный опредѣлитель

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, \varphi_{\mu+1}, \varphi_{\mu+2}, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m)}$$

не былъ равенъ нулю, а это такъ и будетъ, потому что

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} = -1, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = 0$$

и разсматриваемый опредѣлитель приводится къ $(-1)^{m-\mu}\mathfrak{J}$. Поэтому, если $b_1, b_2, \ldots, b_m$ будутъ значенія функцій $y_1, y_2, \ldots, y_m$ въ точкѣ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, въ окрестности которой мы допускаемъ существованіе и непрерывность первыхъ частныхъ производныхъ функцій $f_1, f_2, \ldots, f_m$, то система (31) опредѣляетъ величины (32), какъ неявныя функціи отъ остальныхъ перемѣнныхъ въ окрестности точки $(b_1, b_2, \ldots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n)$. Другими словами, каждой системѣ значеній, по произволу выбранныхъ для чиселъ (33), лишь бы эти значенія находились въ извѣстной близости къ точкѣ $(b_1, b_2, \ldots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n)$, мы получимъ вполнѣ опредѣленныя значенія для чиселъ (32). Слѣдовательно, если представимъ себѣ, что первымъ μ изъ перемѣнныхъ x даны именно эти только что упомянутыя значенія, а остальнымъ $n-\mu$ данныя имъ первоначально значенія, то $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ примутъ назначенныя имъ значенія, которыя можно выбрать по произволу въ извѣстныхъ границахъ. Итакъ, первыя μ функцій y дѣйствительно независимы одна отъ другой.

b) Остается еще показать, что остальныя $m-\mu$ будутъ функціями первыхъ μ. Изъ предыдущаго видно только, что каждая изъ нихъ есть функція отъ $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ и $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$. Слѣдовательно, достаточно показать, что если i и j больше μ, то функціи y_j не зависятъ отъ x_i. Но, взявъ производныя по x_i отъ уравненій (31), продолжая при этомъ разсматривать величины (32), какъ функціи отъ величины (33), получимъ

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0,$$

откуда, исключая производныя отъ $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ по x_i, находимъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \frac{\partial f_j}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $\Im \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0$, и наконецъ, $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = 0$ (что и показываетъ, что y_j не зависитъ отъ x_i, при i и $j > \mu$) *).

579. Слѣдствіе. Необходимое и достаточное условіе для того, чтобы n функцій $u, v, w, \ldots$ отъ n перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ были независимы между собою, состоитъ въ томъ, чтобы

$$\frac{\partial (u, v, w, \ldots)}{\partial (x, y, z, \ldots)} \gtrless 0.$$

Здѣсь также предполагается, что разсматриваемыя функціи имѣютъ непрерывныя первыя частныя производныя.

[**Примѣчаніе.** Относительно теоремъ §§ 578—579 надо замѣтить слѣдующее (ср. G. Kowalewsky, „Einführung in die Determinantentheorie“, § 127). Рангъ матриссы Якоби (§ 578) можетъ имѣть различныя значенія въ различныхъ точкахъ разсматриваемой области. Напримѣръ, Якобіева матрисса функцій $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ имѣетъ рангъ n, когда всѣ x_i отличны отъ нуля, и рангъ $n-p$, когда p изъ нихъ равны нулю. Точку, въ окрестности которой рангъ матриссы Якоби не постояненъ (сколь бы малой ни сдѣлать эту окрестность), назовемъ особенной. Теорема §§ 578—579 не имѣетъ мѣста въ окрестности особенныхъ точекъ. Такъ, напримѣръ, функція x_1^2 и x_2, очевидно, независимы въ окрестности точки $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, а функціональный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

равенъ нулю въ этой точкѣ и во всѣхъ точкахъ, для которыхъ $x_1 = 0$. Точки эти особенныя, потому что въ нихъ рангъ матриссы Якоби равенъ 1, а въ окрестности ихъ, гдѣ x_1 отлично отъ нуля, рангъ равенъ 2.]

*) Другой опредѣлитель изъ тѣхъ двухъ, на которые разлагается предыдущій, будетъ равенъ нулю, потому что его порядокъ $\mu+1$ больше ранга матриссы.

580. Укажемъ въ заключеніе еще одно замѣчательное свойство функціональныхъ опредѣлителей, которое можно разсматривать, какъ обобщеніе правила разысканія производной функціи отъ функціи. Положимъ, что перемѣнныя y_j выражаются функціями отъ перемѣнныхъ x_i черезъ посредство другихъ функцій $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Такъ какъ по правилу дифференцированія функціи отъ функцій

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\partial y_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_j}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial y_j}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i},$$

то теорема объ умноженіи опредѣлителей тотчасъ показываетъ, что произведеніе опредѣлителей

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}, \quad \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

будетъ равно функціональному опредѣлителю функцій y_j по отношенію къ перемѣннымъ x_i, т. е.

$$(34) \qquad \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Въ частности, имѣемъ

$$(35) \qquad \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1 \text{ *).}$$

581. Упражненія. а) Формула (34) заключаетъ въ себѣ, другую, выведенную нами раньше. Если хотимъ, напримѣръ, ввести новыя перемѣнныя въ функцію f, то можемъ написать

$$\frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} = \frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} \cdot \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)},$$

а такъ какъ первый множитель въ правой части, очевидно, приводится къ $\frac{\partial f}{\partial x}$, то будемъ имѣть снова формулу (20)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}.$$

Аналогично этому получимъ

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(f, \varphi, z, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} = \frac{\dfrac{\partial(f, \varphi, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}$$

---

*) Послѣдняя формула есть обобщеніе правила разысканія производной обратной функціи.

и, въ частности,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\dfrac{\partial(z, \ldots)}{\partial(w, \ldots)}}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}} \text{ и т. д.} \tag{36}$$

b) Чтобы показать пользу этихъ формулъ, ограничимся случаемъ трехъ перемѣнныхъ x, y, z, заданныхъ въ видѣ явныхъ функцій отъ u, v, w, и вычислимъ производныя отъ u, v, w по x, y, z, не выводя предварительно явныхъ выраженій u, v, w черезъ x, y, z. Мы предположимъ, что какъ x, y, z, такъ и u, v, w независимыя перемѣнныя, т. е.

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \gtrless 0.$$

Формула (20) тотчасъ дастъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, w)}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(w, u)}, \quad \ldots, \tag{37}$$

и задача рѣшена. Замѣтимъ, что нѣтъ надобности знать эти производныя, чтобы вычислить функціональный опредѣлитель системы u, v, w относительно x, y, z, такъ же какъ и его миноры второго порядка, потому что въ силу формулъ (35) и (36) или формулы (37) будемъ имѣть

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{\mathfrak{J}}, \quad \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial(v, w)}{\partial(z, x)} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \ldots$$

Если требуется вычислить дифференціалы функцій u, v, w, то можно сперва написать полные дифференціалы отъ x, y, z. Затѣмъ формулы

$$\left| \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \end{aligned} \right. \tag{38}$$

дадутъ значенія

$$du = \frac{1}{\mathfrak{J}} \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} dx + \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, w)} dy + \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)} dz \right] \text{ и т. д.}$$

Изъ нихъ снова получаются формулы (37).

c) Въ нѣкоторыхъ приложеніяхъ примѣняютъ формулу (38) для вычисленія суммы $dx^2 + dy^2 + dz^2$, которая тотчасъ и преобразуется въ выраженіе

$$a\,du^2 + b\,dv^2 + c\,dw^2 + 2f\,dv\,dw + 2g\,dw\,du + 2h\,du\,dv,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$a=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad b=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\quad \ldots,\quad f=\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w},\quad \ldots\text{*)},$$

Важно замѣтить, что когда извѣстны шесть функцій a, b, c, f, g, h, то и функціональный опредѣлитель $\mathfrak{J}$ будетъ извѣстенъ, а именно:

$$\mathfrak{J}^2=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ и суммы

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,\quad \sum\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,\quad \ldots,\quad \sum\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \ldots$$

значенія которыхъ равны соотвѣтственно минорамъ $bc-f^2$, $ca-g^2$, $\ldots$, $gh-af$, $\ldots$, раздѣленнымъ на $\mathfrak{J}^2$ **). Особенно замѣчателенъ тотъ случай, когда f, g, h тождественно равны нулю. Тогда на основаніи послѣднихъ замѣчаній получимъ $\Delta u=\frac{1}{a}$ и т. д., и, кромѣ того, можно доказать, что

$$\Delta^2 u=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{J}}{a},\quad \Delta^2 v=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathfrak{J}}{b},\quad \Delta^2 w=\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial}{\partial w}\frac{\mathfrak{J}}{c}.$$

Отсюда слѣдуетъ (см. § 571, d), что, примѣняя операцію Δ^2 къ любой функціи, можно написать

$$\Delta^2=\sum\left(\Delta u\cdot\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\Delta^2 u\cdot\frac{\partial}{\partial u}\right)=\frac{1}{\mathfrak{J}}\sum\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{J}}{a}\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

или

$$\Delta^2=\frac{1}{\sqrt{abc}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]. \tag{40}$$

Это формула Лямэ для пространства.

d) Если x, y, z зависятъ еще отъ одной перемѣнной t, независящей отъ u, v, w, то опредѣлитель $\mathfrak{J}$ будетъ вообще зависѣть отъ t, и можетъ встрѣтиться надобность вычислить производную $\mathfrak{J}'$, взятую по t. Обозначая

---

*) Какъ здѣсь, такъ и во всемъ дальнѣйшемъ, постоянно встрѣчаются суммы, состоящія изъ трехъ слагаемыхъ, получаемыхъ одно изъ другого черезъ круговую подстановку осей x-въ, y-овъ и z-въ, и всѣхъ другихъ буквъ, соотвѣтствующихъ этимъ осямъ. Въ такихъ случаяхъ, для сокращенія письма, вводится символъ Σ, подъ которымъ выписывается лишь одно изъ трехъ слагаемыхъ. Напримѣръ, если разсматриваются три группы буквъ (x, y, z), (u, v, w), (λ, μ, ν), то

$$\sum\lambda\left(\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial w}\right)=\lambda\left(\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial w}\right)+\mu\left(\frac{\partial z}{\partial w}-\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\nu\left(\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial v}\right);$$

$$\sum\lambda\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}=\lambda\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\mu\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}+\nu\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

**) См. §§ 29 и 30.

знакомъ $'$ производныя, взятыя по t, и примѣняя правило дифференцированія опредѣлителей (§ 373). получимъ

$$\mathfrak{J}' = \frac{\partial(x', y, z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(x, y', z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(x, y, z')}{\partial(u, v, w)}.$$

Раздѣляя на $\mathfrak{J}$, получимъ формулу

$$(\log \mathfrak{J})' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z}, \tag{41}$$

встрѣчающуюся въ Гидродинамикѣ. Мы воспользуемся ею, чтобы инымъ путемъ вывести формулу Лямэ [1]). Представимъ себѣ x, y, z, какъ функціи отъ независимыхъ перемѣнныхъ ξ, η, ζ, t, и производныя x', y', z', взятыя по t, какъ извѣстныя функціи отъ x, y, z. Ясно, что u, v, w, какъ функціи отъ x, y, z, также зависятъ отъ ξ, η, ζ и t. Производныя ихъ по t связаны съ x', y', z' соотношеніями

$$x' = u'\frac{\partial x}{\partial u} + v'\frac{\partial x}{\partial v} + w'\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \ldots.$$

Если возьмемъ за x', y', z' частныя производныя нѣкоторой функціи $\varphi(x, y, z)$, то получимъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = x'\frac{\partial x}{\partial u} + y'\frac{\partial y}{\partial u} + z'\frac{\partial z}{\partial u} = au' + hv' + gw', \quad \ldots.$$

Отсюда, обозначая черезъ $a_0, b_0, \ldots, h_0$ алгебраическія дополненія элементовъ $a, b, \ldots, h$ въ опредѣлителѣ (39), раздѣленныя на $\mathfrak{J}$, выводимъ, что

$$\mathfrak{J}u' = a_0\frac{\partial \varphi}{\partial u} + h_0\frac{\partial \varphi}{\partial v} + g_0\frac{\partial \varphi}{\partial w}, \quad \ldots.$$

Установивъ это, примѣнимъ формулу (41) къ первому и третьему опредѣлителю въ равенствѣ

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \cdot \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)},$$

замѣтивъ предварительно, что формула (41) уже не примѣнима къ опредѣлителю $\mathfrak{J}$, такъ какъ u, v, w зависятъ отъ t. Тогда получимъ

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = (\log \mathfrak{J})' + \frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial w'}{\partial w}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{J}u') + \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{J}v') + \frac{\partial}{\partial w}(\mathfrak{J}w')\right],$$

т. е.

$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(a_0\frac{\partial \varphi}{\partial u} + h_0\frac{\partial \varphi}{\partial v} + g_0\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) + \cdots\right].$$

Въ частности, когда $f = g = h = 0$, имѣемъ

$$\mathfrak{J} = \sqrt{abc}, \quad a_0 = \sqrt{bc/a}, \quad b_0 = \sqrt{ca/b}, \quad c_0 = \sqrt{ab/c}, \quad f_0 = g_0 = h_0 = 0$$

и находимъ снова формулу (40).

---

[1]) Beltrami. Memorie dell' Accad. di Bologna, serie 3a, t. I, стр. 467.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ПЛОСКИМЪ КРИВЫМЪ.

Дифференціалъ дуги.

582. Строгое опредѣленіе длины дуги кривой линіи требуетъ рѣшенія нѣкоторыхъ весьма трудныхъ вопросовъ [1]), которые здѣсь мы постараемся обойти. Мы допустимъ, что имѣемъ уже интуитивное представленіе о длинѣ дуги, по крайней мѣрѣ, для тѣхъ немногихъ плоскихъ кривыхъ, которыя встрѣчаются въ приложеніяхъ. Для этихъ кривыхъ, которыя всѣ могутъ быть изображены геометрически, можно сдѣлать еще слѣдующее допущеніе: Всякая дуга можетъ быть раздѣлена на такія части MM', что въ то время, когда одинъ ея конецъ M' стремится къ совпаденію съ другимъ неподвижнымъ M, разсматриваемая дуга MM' все время обращена вогнутостью въ одну и ту же сторону. Длина такой дуги будетъ тогда заключаться между длиною ея хорды MM' и суммою отрѣзковъ на касательныхъ въ точкахъ M и M', между точками касанія и точкою Q пересѣченія касательныхъ. Предполагая производную y' отъ ординаты по абсциссѣ непрерывною, мы можемъ сказать, что съ приближеніемъ точки M' къ M, прямыя QM' и MM' будутъ стремиться къ совпаденію съ QM, а поэтому, при безконечно маломъ MM', углы QMM' и $QM'M$ будутъ также безконечно малы. Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе отрѣзковъ QM и QM' къ ихъ проекціямъ на MM' стремится къ 1, и поэтому (§ 549) эти отрѣзки отличаются отъ своихъ проэкцій на безконечно малыя высшаго порядка. Поэтому и сумма $QM+QM'$, а тѣмъ болѣе и длина дуги MM', отличается отъ хорды MM' на безконечно малую высшаго порядка и, слѣдовательно,

$$\lim \frac{\text{дуга } MM'}{\text{хорда } MM'} = 1 .$$

583. Обозначимъ теперь черезъ s длину дуги, у которой одинъ конецъ помѣщается въ произвольно выбранной неподвижной точкѣ A на кривой, а другой въ точкѣ M. Ясно, что s будетъ измѣняться вмѣстѣ съ координатами x и y точки M. Когда точка M придетъ въ точку M', координаты которой равны $x+\delta x$ и $y+\delta y$, то длина дуги s переходитъ въ $s+\delta s$, такъ что δs будетъ равно длинѣ дуги MM'. Обозначая черезъ l длину хорды MM', которая отличается отъ δs, а слѣдовательно, и отъ ds (§ 552) на безконечно малыя высшаго порядка, будемъ имѣть $l^2 = \delta x^2 + \delta y^2$. Замѣняя здѣсь l, δx и δy соотвѣтственно величинами ds, dx и dy, мы пренебрегаемъ въ обѣихъ частяхъ равенства безконечно малыми высшаго порядка. Но такъ какъ въ полученномъ такимъ образомъ соотношеніи

(1) $$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

[1]) См., напр., „Cours d'Analyse" par. C. Jordan (2-е изд., 1-й томъ стр. 90—107).

не входятъ никакія безконечно малыя, кромѣ дифференціаловъ, то (§ 556) можно быть увѣреннымъ, что это соотношеніе точное.

[**Примѣчаніе.** Если желаемъ получить формулу (1), не ссылаясь на соображенія § 556, то можно поступить слѣдующимъ образомъ: Изъ формулы $l^2 = \delta x^2 + \delta y^2$ находимъ

$$\left(\frac{l}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 \text{ или } \left(\frac{l}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2.$$

Переходя къ предѣламъ и припоминая, что $\lim \left(\frac{l}{\delta s}\right) = 1$, получаемъ

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

а умножая обѣ части равенства на dx^2, находимъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2].$$

Эта важная формула и служитъ для вычисленія s. Она показываетъ, что, разсматривая s, какъ функцію отъ x, получимъ для производной отъ s по x выраженіе $\sqrt{1+y'^2}$, а въ седьмой книгѣ будетъ показано, какъ опредѣляется функція по данной ея производной. Если x независимая перемѣнная, то (§ 553) ds изображаетъ длину отрѣзка на касательной въ точкѣ M, между M и точкою пересѣченія касательной съ ординатою точки M'. Величина ds лишь тогда равна длинѣ дуги MM', когда s взята за независимую перемѣнную. Вообще же ds есть отрѣзокъ касательной между точками (x, y) и $(x + dx, y + dy)$.

[**Примѣчаніе.** Координаты произвольной точки $M(x, y)$ на всякой плоской кривой можно разсматривать, какъ функціи одного независимаго параметра t и задавать кривую двумя уравненіями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Функціи φ и ψ мы всегда будемъ предполагать непрерывными и имѣющими непрерывныя первыя производныя $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Въ частномъ случаѣ, когда за параметръ t взята абсцисса x, получаемъ изображеніе кривой однимъ уравненіемъ $y = \psi(x)$. Вообще каждому значенію t соотвѣтствуетъ опредѣленная точка на кривой. Выбравъ точку A, соотвѣтствующую нѣкоторому значенію $t = t_0$, за начало счета дугъ, мы выбираемъ также по произволу направленіе возрастающихъ или положительныхъ дугъ; обыкновенно это направленіе выбирается такъ, чтобы дуга AM возрастала, когда точка M движется по кривой въ ту сторону, въ которую надо подвинуться, чтобы параметръ t также возросталъ. Подъ буквою s мы всегда подразумѣваемъ алгебраическую длину дуги AM, т. е. $s = +AM$, когда направленіе отъ A къ M совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ на кривой, и $s = -AM$ въ противоположномъ случаѣ. При такомъ условіи s будетъ функція отъ t, равная нулю при $t = t_0$ (когда M совпадаетъ съ A), и принимающая какъ положительныя,

такъ и отрицательныя значенія. Формула $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (1) остается справедливою, какъ бы мы ни выбирали направленіе возрастающихъ дугъ, но переходя отъ нея къ формулѣ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

и, въ частности (при $t = x$) къ формулѣ

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2},$$

мы должны взять положительное или отрицательное значеніе корня, смотря по тому, возрастаетъ ли s или убываетъ при возрастаніи t (или x). То же замѣчаніе относится и къ формулѣ

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2},$$

выведенной въ концѣ § 584, когда $r = f(\theta)$ есть уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ.]

584. Преобразовывая формулу (1) къ полярнымъ координатамъ, получимъ (§ 558, d)

(2) $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Къ этой формулѣ можно, впрочемъ, придти, какъ и къ (1), непосредственно изъ геометрическихъ соображеній. Отложимъ на радіусѣ-векторѣ OM' длину $OM'' = OM = r$, и пусть P будетъ проекція точки M на прямую OM'. Тогда будемъ имѣть $l^2 = PM'^2 + MP^2$. Въ этомъ равенствѣ можно замѣнить l черезъ ds, $MP = r\sin\delta\theta$ сперва черезъ $r\delta\theta$, затѣмъ черезъ $rd\theta$, а PM', черезъ $M''M' = \delta r$, пренебрегая безконечно малою 2-го порядка $PM'' = r(1 - \cos\delta\theta)$, и окончательно черезъ dr. Тогда и получимъ соотношеніе (2), которое навѣрно будетъ точнымъ, потому что заключаетъ въ себѣ одни дифференціалы. Можно также исходить изъ равенства

$$l^2 = r^2 + (r + \delta r)^2 - 2r(r + \delta r)\cos\delta\theta,$$

и можно a priori быть увѣреннымъ, что въ правой части сократятся, какъ конечные (т. е. не безконечно малые) члены, такъ и безконечно малые перваго порядка, и что ds^2 будетъ въ точности равно суммѣ без-

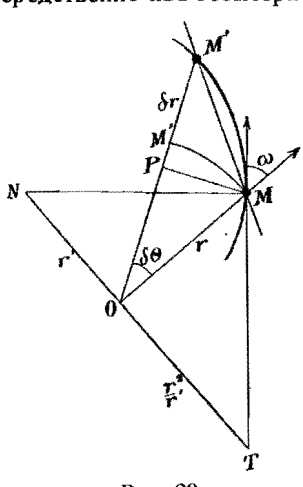


Рис. 29.

конечно малыхъ членовъ 2-го порядка, когда въ ней останутся одни лишь дифференціалы. И дѣйствительно, предыдущее выраженіе сведется къ слѣдующему

$$l^2 = \delta r^2 + 4r(r+\delta r)\sin^2\frac{\delta\theta}{2}.$$

Замѣняя здѣсь l черезъ ds, δr черезъ dr, $\sin\frac{\delta\theta}{2}$ черезъ $\frac{1}{2}d\theta$ и отбрасывая $r\,dr\,d\theta^2$, вновь получаемъ формулу (2). Этою формулою также пользуются для вычисленія s, замѣтивъ, что она даетъ для производной отъ s по θ выраженіе $\sqrt{r^2+r'^2}$.

585. Мы покажемъ теперь, что разность между безконечно малою дугою и соотвѣтствующею хордою, вообще говоря, будетъ безконечно малою третьяго порядка относительно самой дуги *). Дѣйствительно, (§ 564) формула Тэйлора даетъ

(3) $$\delta x = dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x + \cdots, \quad \delta y = dy + \tfrac{1}{2}d^2y + \tfrac{1}{6}d^3y + \cdots,$$

какова бы ни была независимая перемѣнная. Если s взята за независимую перемѣнную (§ 558, e), то

$$dx^2 + dy^2 = ds^2, \quad d^2x^2 + d^2y^2 = \frac{ds^4}{\varrho^2},$$

а двукратное дифференцированіе перваго изъ этихъ уравненій дастъ

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0, \quad dx\,d^3x + dy\,d^3y = -\frac{ds^4}{\varrho^2}.$$

Слѣдовательно,

$$l^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = ds^2 - \frac{ds^4}{12\varrho^2} + \cdots.$$

Пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка и замѣняя въ частности въ равенствѣ

$$\delta s^2 - l^2 = \frac{ds^4}{12\varrho^2} + \cdots$$

$\delta s + l$ черезъ $2ds$, находимъ

$$\delta s - l = \frac{ds^3}{24\varrho^2} + \cdots$$

или въ точномъ видѣ

$$\lim \frac{\smile MM' - \text{хорда } MM'}{(\smile MM')^3} = \frac{1}{24\varrho^2}.$$

Для повѣрки этого результата въ частномъ случаѣ разсмотримъ на окружности круга радіуса ϱ дугу $MM' = 2\varrho\alpha$. Длина хорды

*) Въ нѣкоторыхъ особенныхъ точкахъ, какъ увидимъ дальше, порядокъ можетъ повыситься или понизиться.

$MM' = 2\varrho \sin\alpha$, и лѣвая часть предыдущаго равенства приводится къ

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha - \sin\alpha}{4\varrho^2 \alpha^3} = \frac{1}{24\varrho^2}.$$

Относительно разсматриваемаго здѣсь вопроса можно, слѣдовательно, сказать, что въ окрестности съ точкою M кривая линія уподобляется своему соприкасающемуся кругу (§ 348, e).

Касательная и нормаль.

586. На кривой линіи, изображаемой уравненіемъ $Y = f(X)$ въ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатахъ, возьмемъ нѣкоторую точку M, координаты которой обозначимъ черезъ x и y. Уравненіе всякой прямой, проходящей черезъ M, будетъ $Y - y = m(X - x)$, и, какъ извѣстно (§ 293), для касательной $m = y'$ и, слѣдовательно, $m = -\frac{1}{y'}$ для нормали. Поэтому уравненіе касательной и нормали будутъ соотвѣтственно

$$(4) \qquad Y - y = y'(X - x), \qquad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

гдѣ y' или $f'(x)$ есть значеніе $f'(X)$ въ точкѣ M. Въ Дифференціальномъ Исчисленіи касательную разсматриваютъ съ болѣе простой точки зрѣнія, а именно (§ 553), какъ прямую, соединяющую точки (x, y) и $(x + dx, y + dy)$. На основаніи этого замѣчанія можно прямо написать уравненія касательной и нормали въ видѣ

$$(5) \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}, \qquad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0,$$

отъ котораго тотчасъ можно перейти къ (4), написавъ $y'dx$ вмѣсто dy и сокративъ на общій множитель dx. Формулы (5) оказываются особенно удобными въ томъ случаѣ, когда кривая задана уравненіемъ $X = \varphi(t)$, $Y = \psi(t)$. Если далѣе кривая задана уравненіемъ $f(X, Y) = 0$, то для всякой ея точки имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

и уравненія (5) принимаютъ видъ

$$(6) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

И къ этимъ уравненіямъ можно придти непосредственно. Дѣйствительно, направленіе, по которому функція $f(X, Y)$ стремится сохранить то значеніе, которое оно имѣетъ въ точкѣ (x, y), т. е.

значеніе, равное 0, есть направленіе касательной, а потому (§ 568) косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью съ осями координатъ, пропорціональны частнымъ производнымъ функціи f, вычисленнымъ для точки (x, y), при чемъ предполагается, что эти производныя не равны нулю одновременно. Впрочемъ, первое изъ уравненій (6) можно разсматривать, какъ уравненіе, къ которому приводится уравненіе самой кривой, если мы отбросимъ безконечно малыя высшаго порядка въ выраженіяхъ координатъ точекъ, смежныхъ съ (x, y), и примемъ во вниманіе, что въ уравненіи

$$f(X, Y) = f(x, y) + (X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots$$

$f(x, y)$ равно нулю. Дѣйствительно, мы уже замѣтили раньше (§ 553), что при упомянутомъ условіи, кривая, въ окрестности точки касанія, замѣняется касательною прямою. Въ приложеніяхъ полезно запомнить уравненіе касательной и нормали во всѣхъ трехъ формахъ (4), (5) и (6), и примѣнять ту или другую, смотря по тому, которая будетъ удобнѣе.

587. Полезно также умѣть написать уравненіе касательной къ алгебраической кривой въ однородномъ видѣ. Положимъ, что дано уравненіе кривой $f(X, Y) = 0$ въ цѣломъ раціональномъ видѣ. Извѣстно, что для приведенія его къ однородному виду надо оставить безъ измѣненія члены наивысшей степени n, и умножить члены $(n-1)$-ой, $(n-2)$-ой и т. д. степени соотвѣтственно на Z, Z^2 и т. д. Такимъ путемъ уравненіе приведется къ однородному виду $f(X, Y, Z) = 0$, и стоитъ только положить $Z = 1$, чтобы снова получить первоначальное уравненіе. Для точки (x, y, z), лежащей на кривой, имѣемъ $f(x, y, z) = 0$, и по теоремѣ Эйлера (§ 372)

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z) = 0.$$

Припомнимъ теперь, что въ неоднородныхъ Декартовыхъ координатахъ уравненіе касательной было

$$(X-x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + (Y-y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = 0,$$

гдѣ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1$ обозначаютъ результатъ подстановки $z = 1$ въ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Поэтому будемъ имѣть

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0,$$

и послѣднее уравненіе обращается въ

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + Y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0,$$

или, дѣлая его однороднымъ, въ

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

588. Уравненіями касательной и нормали пользуются тогда, когда эти прямыя встрѣчаются въ вопросахъ Аналитической Геометріи. Если же требуется только построить касательную и нормаль въ данной точкѣ $M(x, y)$ на кривой, то достаточно указать еще только одну точку, которую надо соединить съ M, чтобы получить касательную или нормаль. Съ этой цѣлью часто вычисляютъ длины нѣкоторыхъ отрѣзковъ, называемыхъ подкасательною и поднормалью. Если P есть проекція точки M на ось x-овъ, а T и N точки пересѣченія касательной и нормали съ тою же осью, то отрѣзокъ TP называютъ подкасательною, PN поднормалью. Изъ чертежа (который читатель легко сдѣлаетъ самъ) тотчасъ находимъ

$$TP=y\cot\varphi=\frac{y}{y'},\qquad PN=y\operatorname{tg}\varphi=yy'.$$

[**Примѣчаніе**. Для опредѣленія положенія на оси x-овъ точекъ N и T, которыя надо соединить съ точкою M на кривой, чтобы построить нормаль и касательную, недостаточно знать абсолютныя значенія отрѣзковъ PN и PT; необходимо еще знать направленіе, въ которомъ надо отложить длины этихъ отрѣзковъ отъ точки P, для полученія точекъ N и T. Условимся считать PN и PT положительными или отрицательными, смотря по тому, будутъ ли направленія отъ P къ N и отъ P къ T совпадать съ положительнымъ или съ отрицательнымъ направленіемъ оси x-овъ. Тогда, какъ извѣстно изъ Аналитической Геометріи, всегда будемъ имѣть $PN=\xi_N-x$, $PT=\xi_T-x$, гдѣ ξ_N и ξ_T будутъ абсциссы точекъ N и P, т. е. значенія X, получаемыя изъ уравненія нормали и изъ уравненія касательной при $Y=0$. Уравненіе нормали

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

даетъ при $Y=0$, $\xi_N-x=yy'$, а уравненіе касательной

$$Y-y=y'(X-x)$$

при томъ же предположеніи $\xi_T-x=-\frac{y}{y'}$. Слѣдовательно, будемъ имѣть по величинѣ и по знаку $PN=yy'$, $PT=-\frac{y}{y'}$. Отсюда видимъ, что, если въ точкѣ M y и y' одинаковыхъ знаковъ, то точка N лежитъ съ положительной, а точка T съ отрицательной стороны отъ P; противоположное расположеніе получимъ, когда y и y' — разныхъ знаковъ.]

При употребленіи полярныхъ координатъ, для построенія касательной, полезно знать уголъ ω, образуемый касательною съ радіусомъ векторомъ точки касанія. Въ треугольникѣ MPM', который мы разсматривали въ § 584, имѣемъ

$$\operatorname{tg}\omega = \lim \operatorname{tg} OM'M = \lim \frac{MP}{PM'} = \lim \frac{MM''}{M''M'} = \lim \frac{r\delta\theta}{\delta r} = \frac{r}{r'}.$$

Если изъ полюса O проведемъ перпендикуляръ къ радіусу вектору и замѣтимъ точки T и N, въ которыхъ онъ пересѣкаетъ касательную и нормаль, то отрѣзокъ OT называется полярною подкасательною, а отрѣзокъ ON полярною поднормалью. Длины ихъ, очевидно, выражаются формулами

$$OT = r\operatorname{tg}\omega = \frac{r^2}{r'}, \quad ON = r\cot\omega = r'.$$

Подъ длиною нормали подразумѣваютъ абсолютную длину отрѣзка нормали между точкою M на кривой и точкою пересѣченія нормали съ осью абсциссъ, въ случаѣ Декартовыхъ координатъ, и съ перпендикуляромъ изъ полюса къ радіусу вектору, въ случаѣ полярныхъ координатъ. Очевидно, длина нормали равна соотвѣтственно

$$y\sqrt{1+y'^2} \text{ или } \sqrt{r^2+r'^2}.$$

[**Примѣчаніе.** Въ формулѣ $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'}$ подъ ω подразумѣваемъ острый или тупой уголъ, смотря по тому, будутъ ли r и r' одинаковыхъ или разныхъ знаковъ. Нетрудно убѣдиться, что формулы $OT = \frac{r^2}{r'}$ и $ON = r'$ будутъ всегда справедливы, если будемъ считать OT положительнымъ, когда направленіе отъ O къ T соотвѣтствуетъ углу $\theta - \frac{\pi}{2}$, а ON положительнымъ, когда направленіе отъ O къ N соотвѣтствуетъ углу $\theta + \frac{\pi}{2}$, и, конечно, отрицательными въ противномъ случаѣ. Для дальнѣйшаго важно замѣтить еще слѣдующее: при изслѣдованіи кривыхъ, заданныхъ уравненіями въ полярныхъ координатахъ, мы будемъ считать, что какъ уголъ θ, такъ и радіусъ векторъ r могутъ принимать всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. При этомъ, если какому-нибудь значенію $\theta = \theta_1$ соотвѣтствуетъ положительное значеніе $\varrho = \varrho_1$, то для построенія точки (ϱ_1, θ_1) мы отложимъ длину ϱ_1 отъ точки O въ томъ направленіи, которое опредѣляется угломъ θ_1, а если при $\theta = \theta_1$, значеніе $\varrho = \varrho_1$ будетъ отрицательно, то мы отложимъ длину $(-\varrho_1)$ по направленію противоположному. Это соглашеніе даетъ возможность весьма часто однимъ и тѣмъ же уравненіемъ изобразить различныя вѣтви кривой, которыя иначе потребовали бы различныхъ уравненій для своего изображенія. Для бо́льшихъ подробностей мы можемъ

рекомендовать читателю Briot et Bouquet „Leçons de Géométrie analytique“ 16-е изданіе (1897 г.), стр. 452, гдѣ приведены многіе примѣры построенія кривыхъ, заданныхъ въ полярныхъ координатахъ.]

589. Упражненія. a) Для параболы второго порядка построеніе нормали особенно просто (см. § 294, a). А именно, если примемъ ось параболы за ось абсциссъ, то найдемъ, что поднормаль — величина постоянная. Это свойство, кромѣ того, характерно для этой кривой, потому что изъ уравненія $yy' = a$ слѣдуетъ $\frac{1}{2}y^2 = ax + \text{const.}$, а помѣстивъ начало координатъ на кривой, получимъ $y^2 = 2ax$.

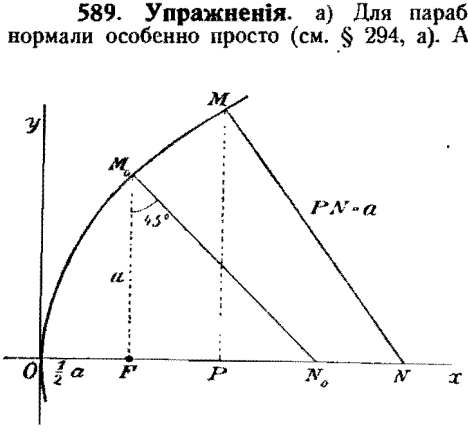


Рис. 30.

b) Для какой кривой подкасательная — величина постоянная?

По условію $\frac{y}{y'} = a$, т. е производная $\log y$ должна быть равна постоянной $\frac{1}{a}$. Припоминая, что двѣ функціи, имѣющія равныя производныя, отличаются одна отъ другой лишь постояннымъ слагаемымъ, находимъ

$$\log y = \frac{x}{a} + \text{const.}$$

Постоянную можно взять равною $\log a$, выбравъ подлежащимъ образомъ начало координатъ на оси x-овъ, и получаемъ *логарифмическую кривую*

$$y = a e^{\frac{x}{a}}.$$

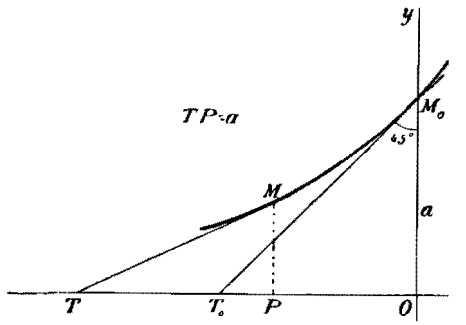


Рис. 31.

c) Одна изъ весьма интересныхъ кривыхъ (уже разсмотрѣнная въ § 527, f) изображается уравненіемъ $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ или (§ 408)

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Она называется *цѣпною линіею*, потому что гибкая, нерастяжимая нить, тяжелая и однородная, какъ доказывается въ Механикѣ, принимаетъ форму этой линіи, будучи привѣшена за оба конца. Кромѣ того, та же линія, по-

вернутая вершиною A къ верху, даетъ профиль свода безъ тренія. Мы имѣемъ здѣсь

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\varphi,$$

гдѣ φ — гиперболическая амплитуда (§ 409) отъ $\frac{x}{a}$. Отсюда слѣдуетъ

$$\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \sec\varphi \text{ и } y\cos\varphi = a,$$

т. е. проекція ординаты на нормаль есть величина постоянная. Кромѣ того, изъ

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{y}{a} = ay''$$

имѣетъ $ds = a\,dy'$, откуда $s = a\operatorname{tg}\varphi$, если дуга отсчитывается отъ вершины A. Слѣдовательно, для спрямленія дуги AM, надо проектировать ординату точки M на касательную въ этой точкѣ.

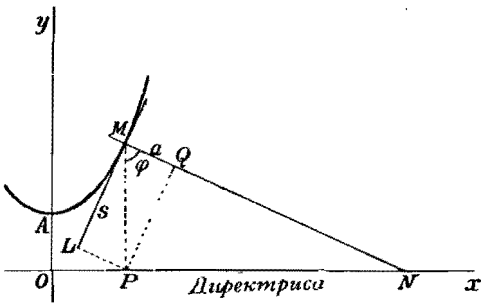


Рис. 32.

d) Въ Механикѣ также доказывается, что существуетъ такое распредѣленіе плотности нити, при которомъ она въ каждой точкѣ представляетъ одинаковое сопротивленіе разрыву. Но тогда нить принимаетъ иную форму, форму кривой, носящей названіе, соотвѣтственно вышеуказанному свойству, *цѣпной линіи равнаго сопротивленія*. Она изображается уравненіемъ $y = -a\log\cos\frac{x}{a}$. Она состоитъ изъ безчисленнаго множества вѣтвей, одна изъ нихъ лежитъ между асимптотами[1]) $x = \pm\frac{\pi}{2}a$ и касается оси абсциссъ въ началѣ координатъ; другія получатся, если будемъ передвигать эту первую вѣтвь параллельно оси абсциссъ въ обѣ стороны на величину $2\pi a$ сколько угодно разъ. Центральная вѣтвь, обращенная вершиною къ верху даетъ профиль свода безъ перегрузки.

e) Весьма замѣчательна *логариѳмическая спираль*, т. е. кривая, пересѣкающая подъ однимъ и тѣмъ же угломъ пучокъ прямыхъ, выходящихъ изъ одной точки*). Если уголъ ω величина постоянная, и положимъ $m = \operatorname{cotg}\omega$, то изъ уравненія $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'}$ получимъ $\frac{r'}{r} = m$, откуда $\log r = m\theta + \log a$ и, наконецъ, $r = ae^{m\theta}$, гдѣ a также постоянная величина. Это и есть (знакомое уже на основаніи сказаннаго въ § 412) уравненіе логариѳмической спирали.

---

[1]) Объ асимптотахъ, о которыхъ читатель уже знаетъ изъ Аналитической Геометріи, подробнѣе будетъ сказано въ § 596.

*) Если этотъ уголъ равенъ $\frac{\pi}{2}$, логариѳмическая спираль, очевидно, обращается въ окружность круга.

Полярная поднормаль $r' = mr$, полярная подкасательная $\frac{r^2}{r'} = \frac{r}{m}$, слѣдовательно, и та и другая пропорціональны радіусу вектору. Далѣе, имѣемъ

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r', \quad s = \frac{r}{\cos\omega} = MT.$$

Слѣдовательно, когда точка M описываетъ кривую, то длина дуги спирали, отсчитываемая отъ полюса, въ каждый моментъ равна длинѣ отрѣзка MT. Изъ этого свойства непосредственно вытекаетъ другое, благодаря которому логариѳмическою спиралью и пользуются на практикѣ, а именно: когда спираль катится безъ скольженія по нѣкоторой прямой, то полюсъ ея описываетъ также прямую. Наконецъ, эта кривая даетъ случай замѣтить, что при нѣкоторыхъ условіяхъ отношеніе безконечно малой дуги къ ея хордѣ (см. § 582) можетъ и не стремиться къ 1. Дѣйствительно, когда точка M двигаясь по спирали, стремится къ совпаденію съ полюсомъ O, то отношеніе хорды OM къ дугѣ OM остается постоянно равнымъ $\cos\omega$. Надо, однако, замѣтить, что въ точкѣ O не существуетъ касательной *).

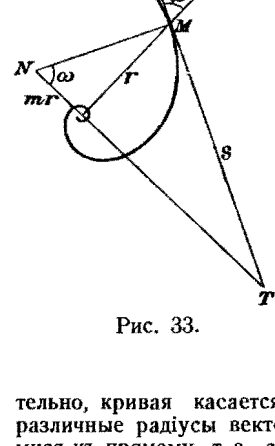


Рис. 33.

f) Чтобы получить кривую, имѣющую постоянную полярную поднормаль, надо положить $r' = a$. Отсюда, прилично выбирая положеніе полярной оси, будемъ имѣть $r = a\theta$. Кривая, изображаемая этимъ уравненіемъ, называется *Архимедовой спиралью*. При возрастаніи θ отъ 0 до ∞, ω возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, такъ какъ $\operatorname{tg}\omega = \theta$. Слѣдовательно, кривая касается полярной оси въ полюсѣ, а затѣмъ пересѣкаетъ различные радіусы векторы подъ углами, все болѣе и болѣе приближающимися къ прямому, т. е. стремится сдѣлаться нормальною къ радіусу вектору. Концы N полярныхъ поднормалей, очевидно, лежатъ на окружности круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Изъ каждой точки окружности этого круга можно провести безчисленное множество нормалей къ кривой, точки встрѣчи которыхъ съ кривою лежатъ на прямой, проходящей черезъ полюсъ. Это свойство, однако, далеко не характеризуетъ Архимедову спираль. Тѣмъ же свойствомъ обладаютъ, напримѣръ, кривыя, изображаемыя уравненіемъ

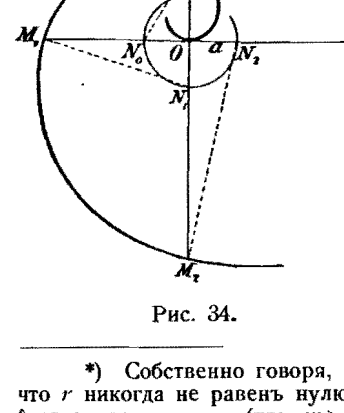


Рис. 34.

$$\theta = \frac{r}{a} + k \log \frac{r}{a},$$

къ которымъ, при $k = 0$, принадлежитъ и Архимедова спираль. Другое свойство можетъ быть прямо выведено изъ уравненія $r = a\theta$. Построимъ кругъ, концентрическій съ кру-

*) Собственно говоря, полюсъ O не принадлежитъ кривой, потому что r никогда не равенъ нулю, а приближается къ нулю безпредѣльно, когда θ стремится къ $-\infty$ (при $m > 0$). Слѣдовательно, полюсъ есть асимптотическая точка, къ которой кривая безпредѣльно приближается, дѣлая около нея безконечное число оборотовъ.

гомъ радіуса a, при чемъ радіусъ второго круга можно выбрать по произволу, лишь бы онъ былъ больше a (фиг. 35). Продолживъ радіусы векторы OM и OM' до встрѣчи съ окружностью этого круга въ точкахъ Q и Q', проведемъ изъ этихъ точекъ касательныя QP и $Q'P'$ къ первому кругу. Треугольники OPQ и $OP'Q'$, очевидно, между собою равны, а потому, уголъ POP' равенъ углу $QOQ' = \delta\theta$. Поэтому длина дуги $PP' = a\delta\theta = \delta r$. Принявъ неподвижную точку A на окружности внутренняго круга за начало дугъ, будетъ имѣть

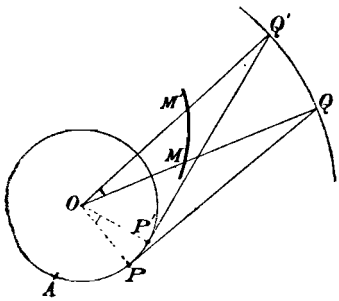


Рис. 35.

$$\smile PP' = \smile AP' - \smile AP,$$

$$\delta r = OM' - OM = QM - Q'M',$$

а отсюда, складывая съ равенствомъ $PQ = P'Q'$, получимъ

$$\smile AP + PQ + QM = \smile AP' + P'Q' + Q'M',$$

т. е. сумма $\smile AP + PQ + QM$ остается постоянной при движеніи M по спирали. Поэтому эту точку M можно связять съ неподвижною точкою A гибкою нерастяжимою нитью, которая, оставаясь всегда натянутою, должна навертываться на окружность внутренняго круга и проходить черезъ точку Q, двигающуюся по окружности внѣшняго круга. На этомъ основано устройство простого прибора, служащаго для черченія Архимедовой спирали [1]). На томъ же свойствѣ ($\delta r = a\delta\theta$) основано приложеніе Архимедовой спирали, какъ профиля эксцентрика, предназначеннаго для производства равномѣрнаго движенія.

[**Примѣчаніе.** Упомянутое выше свойство Архимедовой спирали, вытекающее прямо изъ постоянства полярной поднормали, можно формулировать слѣдующимъ образомъ: нормали во всѣхъ точкахъ спирали, лежащихъ на одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ на окружности круга радіуса a, съ центромъ въ полюсѣ O. Аналогичное свойство кривой

(1) $$\theta = \frac{r}{a} + k \log \frac{r}{a}$$

состоитъ въ томъ, что нормали во всѣхъ точкахъ кривой, лежащихъ на одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ на окружности круга радіуса $a\sqrt{1+k^2}$ съ центромъ въ полюсѣ O. Доказать это свойство можно слѣдующимъ образомъ. Замѣтимъ сперва, что всѣ точки, лежащія на одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ соотвѣтствуютъ значеніямъ θ, отличающимся одно отъ другого на $2l\pi$, гдѣ l цѣлое число. Вопросъ, очевидно, сведется къ тому, чтобы показать, что нормали въ точкахъ (r_1, θ_1) и (r_2, θ_2), гдѣ $\theta_2 = \theta_1 + 2l\pi$, пересѣкутся въ точкѣ (X, Y), гдѣ X и Y не зависятъ отъ l и удовлетворяютъ уравненію $X^2 + Y^2 = a^2(1+k^2)$. Обозначая черезъ x и y Декартовы координаты любой точки (r, θ) по кривой (1), и полагая $\frac{r}{a} = t$, получимъ $x = at\cos(t + k\log t)$, $y = at\sin(t + k\log t)$. Обозначая черезъ t_1 и t_2 значенія параметра t, соотвѣтствующія значеніямъ θ_1 и θ_2 угла θ, и составляя уравненія нормалей въ этихъ точкахъ по формулѣ

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0,$$

---

[1]) См. Клиффордъ „Здравый смыслъ въ точныхъ наукахъ", перев. Кулишера (Москва 1910), стр. 196.

найдемъ для нормали въ точкѣ (t_1) уравненіе

$$M_1 Y + N_1 X = a t_1, \tag{2}$$

гдѣ

$$M_1 = (t_1 + k)\cos\theta_1 + \sin\theta_1,$$
$$N_1 = \cos\theta_1 - (t_1 + k)\sin\theta_1,$$

а для нормали въ точкѣ (t_2) уравненіе

$$M_2 Y + N_2 X = a t_2, \tag{3}$$

гдѣ

$$M_2 = (t_2 + k)\cos\theta_1 + \sin\theta_1,$$
$$N_2 = \cos\theta_1 - (t_2 + k)\sin\theta_1,$$

такъ какъ

$$\cos\theta_2 = \cos\theta_1, \quad \sin\theta_2 = \sin\theta_1;$$

замѣчаемъ, что

$$M_1 \sin\theta_1 + N_1 \cos\theta_1 = 1, \quad M_2 \sin\theta_1 + N_2 \cos\theta_1 = 1,$$

и

$$M_1 N_2 - M_2 N_1 = t_1 - t_2.$$

Въ силу этихъ равенствъ, для ординатъ точки (X, Y) пересѣченія нормалей (2) и (3) получимъ выраженія

$$X = a(\sin\theta_1 - k\cos\theta_1), \quad Y = a(\cos\theta_1 - k\sin\theta_1)$$

и

$$X^2 + Y^2 = a^2(1 + k^2),$$

что и требовалось показать].

g) Разсмотримъ теперь кривую, характеризуемую свойствомъ имѣть постоянную полярную подкасательную. Она называется *гиперболическою спиралью* и изображается уравненіемъ $r\theta = a$. Съ приближеніемъ θ къ 0, r возрастаетъ безпредѣльно; слѣдовательно, кривая имѣетъ безконечную вѣтвь, постоянно приближающуюся къ прямой, отстоящей отъ полярной оси въ разстояніи a, потому что

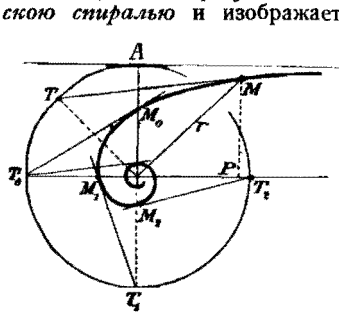


Рис. 36.

$$\lim_{\theta=0} r\sin\theta = a.$$

Наоборотъ, при безпредѣльномъ возрастаніи θ, r стремится къ нулю, постоянно убывая, т. е. кривая оборачивается вокругъ полюса безконечно большое число разъ, никогда его не достигая. Точки T, концы полярныхъ подкасательныхъ, очевидно, лежатъ на окружности круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Изъ каждой точки этой окружности можно провести безчисленное множество касательныхъ къ кривой, точки касанія которыхъ лежатъ на прямой, проходящей черезъ полюсъ. Полная неопредѣленность касательной въ полюсѣ (условно причисляемой къ точкамъ на кривой), становится такимъ образомъ, очевидною.

h) Послѣднее свойство гиперболической спирали принадлежитъ и другимъ кривымъ, и между прочимъ, такъ называемой, *кохлеоидѣ* (Kochleoide), изображаемой уравненіемъ $r = a\dfrac{\sin\theta}{\theta}$. Дѣйствительно,

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{r'}{r} = \operatorname{cotg}\theta - \frac{1}{\theta}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega} = \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{r}{a}.$$

Съ другой стороны (рис. 37), если проведемъ прямую OS, симметричную съ полярною осью OA относительно радіуса вектора OM, и отмѣтимъ точку S пересѣченія этой прямой съ касательною въ точкѣ M, то въ треугольникѣ OMS будемъ имѣть

$$OS = \frac{r \sin \omega}{\sin (\omega - \theta)} = a,$$

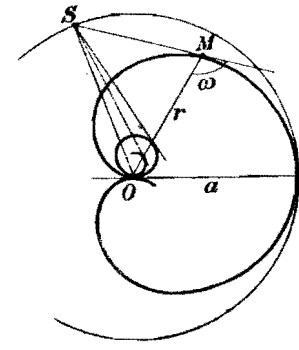


Рис. 37.

т. е. S лежитъ на окружности круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Слѣдовательно, касательныя въ безчисленномъ множествѣ точекъ, лежащихъ на одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ, встрѣчаются въ одной точкѣ S упомянутаго круга, подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто въ гиперболической спирали. Но въ кохлеоидѣ точка S симметрична съ вершиною $A(\theta = 0)$ относительно радіуса вектора, а въ гиперболической спирали точка S лежитъ на перпендикулярѣ къ радіусу вектору, проведенномъ черезъ полюсъ.

[**Примѣчаніе.** Изслѣдованіе уравненія $r = a\frac{\sin\theta}{\theta}$ показываетъ, что кохлеоида проходитъ черезъ точку A на полярной оси въ разстояніи a отъ полюса, затѣмъ проходитъ безчисленное множество разъ черезъ полюсъ, касаясь въ немъ полярной оси, и въ то же время постоянно и безпредѣльно къ нему приближается. Кромѣ того, она симметрична относительно полярной оси.]

i) Кривая, изображаемая уравненіемъ $r = \frac{a\theta}{\sin\theta}$, называется *квадратрисою* (Динострата) (рис. 38). Она состоитъ изъ безчисленнаго множества вѣтвей, изъ которыхъ одна, лежащая между асимптотами $x = \pm \pi a$, имѣетъ нѣкоторое сходство съ одною изъ вѣтвей цѣпной линіи равнаго сопротивленія. Эта кривая замѣчательна по тому употребленію, которое изъ нея дѣлали древніе въ вопросѣ о квадратурѣ круга[1]). Построеніе нормали въ данной точкѣ основано на томъ замѣчаніи, что проекція полярной нормали на полярную ось есть величина постоянная. Дѣйствительно, изъ уравненія $r\sin\theta = a\theta$ получается путемъ дифференцированія

$$r\cos\theta + r'\sin\theta = a.$$

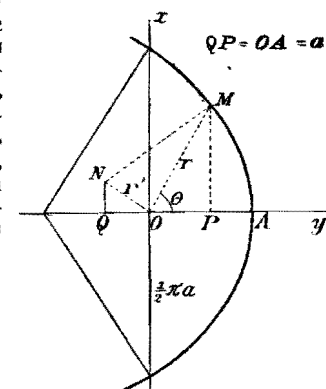


Рис. 38.

Изъ уравненія въ Декартовыхъ координатахъ $\left(y = x\operatorname{cotg}\frac{x}{a}\right)$ увидимъ, пользуясь разложеніемъ въ рядъ: $x\operatorname{cotg}\frac{x}{a} = a - \frac{x^2}{3a} + \cdots$, что въ окрестности вершины кривая эта уподобляется параболѣ $x^2 = 3ay$.

---

[1]) См. „Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи". Казань 1898.

j) Если увеличимъ или уменьшимъ каждый радіусъ векторъ нѣкоторой кривой на постоянную длину, то получимъ новую кривую, которая называется конхоидою данной кривой. Такъ какъ r' не мѣняется отъ увеличенія или уменьшенія r на постоянную, то тотчасъ видимъ, что нормали всѣхъ конхоидъ данной кривой въ точкахъ, лежащихъ на одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ, лежащей на перпендикулярѣ къ радіусу вектору, проведенномъ черезъ полюсъ. Это свойство даетъ средство для построенія нормали къ данной кривой, если извѣстно построеніе нормали къ одной изъ ея конхоидъ.

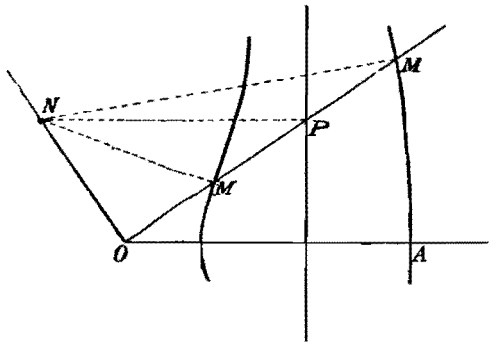


Рис. 39.

Интересно замѣтить, что всѣ конхоиды Архимедовой спирали относительно полюса будутъ равныя между собою спирали, изображающія безчисленное множество положеній, которыя можетъ принять данная спираль при вращеніи ея около полюса Замѣчательна кривая — называемая просто *конхоидою*, т. е. конхоидою прямой линіи. Она имѣетъ различный видъ въ зависимости отъ того, будетъ ли постоянная длина, откладываемая по радіусамъ векторамъ больше или меньше разстоянія отъ полюса до прямой. Эта кривая была изобрѣтена древними для рѣшенія задачи о трисекціи угла [1]).

k) Еще важнѣе конхоида окружности круга относительно точки, лежащей на самой окружности: $r = a\cos\theta + b$ (рис. 40) (a — діаметръ круга). Она называется *улиткою* (Schnecke) и принимаетъ три различныя формы, въ зависимости отъ того, будетъ ли длина b (считаемая всегда положительною) меньше a, или больше a, но меньше $2a$, или, наконецъ, больше $2a$. При $b = a$ получается частный случай улитки, такъ называемая *кардіоида*, составляющая какъ бы границу, отдѣляющую типъ улитокъ, на которыхъ лежитъ полюсъ и которыя образуютъ внутреннюю петлю ($b < a$), и другой типъ ($b > a$), въ которомъ полюсъ не лежитъ на кривой. Впрочемъ, чтобы узнать лежитъ ли полюсъ на кривой и опредѣлить прямую, которой она въ этомъ случаѣ касается въ полюсѣ, нужно только положить $r = 0$. Тогда находимъ $\cos\theta = -\frac{b}{a}$, уравненіе, дающее для θ вещественное значеніе при $b \leqq a$. Чтобы узнать, пересѣкаетъ ли кривая полярную ось въ другихъ точкахъ, надо положить $\theta = \pi n$, и отложить отъ полюса длины

$$r = (-1)^n a + b$$

---

[1]) См. Клейнъ „Лекціи и т. д.“. Большое число кривыхъ описаны и проанализированы въ сочиненіи G. Loria „Spezielle algebraische und transcendente Kurven“ (Leipzig, Teubner).

въ положительномъ или отрицательномъ направленіи по полярной оси, смотря по тому, будетъ ли n четное или нечетное. Такимъ образомъ получаются двѣ точки, въ разстояніяхъ $a+b$ и $b-a$ отъ полюса, и дѣлается очевиднымъ, что при $b>a$ кривая окружаетъ полюсъ со всѣхъ сторонъ. Ниже мы увидимъ, что лишь при $b \geqq 2a$ кривая вездѣ вогнута въ сторону

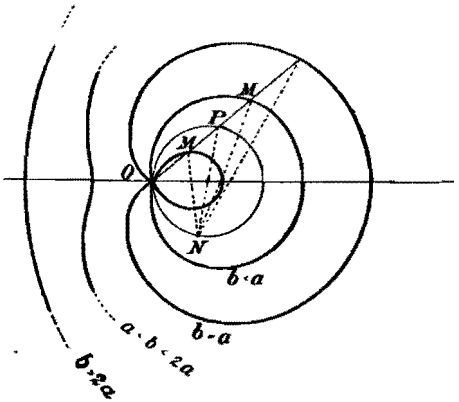


Рис. 40.

даннаго круга. Для построенія нормали въ данной точкѣ M достаточно соединить точку M съ точкой на окружности даннаго круга, діаметрально противоположною точкѣ пересѣченія окружности съ радіусомъ векторомъ точки M.

1) Если одновременно съ кривою линіею $r=f(\theta)$ будемъ разсматривать другую кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$r=\frac{af(\theta)}{a+f(\theta)},$$

то достаточно замѣтить, что $\frac{r^2}{r'}=\frac{f^2}{f'}$, чтобы убѣдиться, что касательныя къ обѣимъ кривымъ, въ точкахъ, соотвѣтствующихъ одному и тому же значенію θ, пересѣкаются на перпендикулярѣ, проведенномъ изъ полюса къ радіусу вектору. Между кривыми, соотвѣтствующими прямой линіи $r=\frac{p}{k\cos\theta}$, находится, между прочимъ, коническое сѣченіе $r=\frac{p}{1+k\cos\theta}$, и мы получаемъ такимъ образомъ способъ построенія касательной къ коническому сѣченію, равносильный въ сущности слѣдующему извѣстному свойству: если двѣ прямыя пересѣкаются подъ прямымъ угломъ въ одномъ изъ фокусовъ коническаго сѣченія, то каждая изъ нихъ пересѣкаетъ директрису, соотвѣтствующую этому фокусу, въ полюсѣ другой прямой.

[**Примѣчаніе.** Уравненіе $r=\frac{p}{k\cos\theta}$, очевидно, изображаетъ директрису коническаго сѣченія $r=\frac{p}{1+k\cos\theta}$, т. е. поляру фокуса F. Проведемъ радіусъ векторъ FM данной точки на коническомъ сѣченіи и продолжимъ его до встрѣчи съ директрисою въ точкѣ K; затѣмъ проведемъ ра-

діусъ векторъ $FL \perp FM$ и продолжимъ его до встрѣчи съ директрисою въ точкѣ T. Соединивъ M съ T, получимъ касательную MT въ точкѣ M, потому что FT будетъ общая полярная подкасательная для прямой KL въ точкѣ K и коническаго сѣченія въ точкѣ M. Вмѣстѣ съ тѣмъ, очевидно, T будетъ полюсъ прямой FM, а K полюсъ прямой FL.

m) *Синусъ-спиралями* (Sinusspiralen) [1]) называютъ кривыя, изображаемыя уравненіемъ $r^m = a^m \sin m\vartheta$. Такъ какъ

$$r^{m-1} r' = a^m \cos m\vartheta, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'} = \operatorname{tg} m\vartheta,$$

то ω, какъ видимъ, измѣняется пропорціонально ϑ. Поэтому имѣемъ такую теорему: когда радіусъ векторъ равномѣрно вращается около полюса, тогда и касательная равномѣрно вращается около точки касанія. На этомъ основаніи синусъ спирали называются также кривыми пропорціональнаго изгиба. Къ числу ихъ принадлежатъ нѣкоторыя извѣстныя кривыя, какъ напримѣръ, парабола (съ фокусомъ въ полюсѣ) при $m = -\frac{1}{2}$, равносторонняя гипербола (съ центромъ въ полюсѣ) при $m = -2$. При $m = \frac{1}{2}$ получаемъ опять кардіоиду, при $m = 2$ другую замѣчательную кривую *лемнискату* (рис. 41). Она проходитъ, какъ и всякая синусъ-спираль, при $m > 0$, черезъ полюсъ и вся помѣщается въ конечной части плоскости. Наоборотъ, синусъ-спирали, соотвѣтствующія отрицательнымъ m, имѣютъ безконечныя вѣтви и не проходятъ черезъ полюсъ.

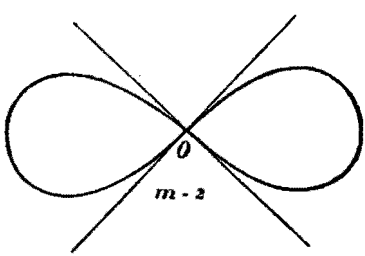


Рис. 41.

590. Основная теорема дифференціальнаго исчисленія (§ 549) и въ геометрической формѣ имѣетъ полезныя приложенія. Положимъ, напримѣръ, что дѣло идетъ о построеніи касательной къ кривой линіи въ нѣкоторой точкѣ M. Въ такомъ случаѣ можно замѣнить точку M', безконечно близкую къ M, точкою M'', безконечно близкою къ M', если только разстояніе $M'M''$ будетъ безконечно мало относительно MM', т. е., если $\lim \frac{M'M''}{MM'} = 0$. Дѣйствительно, если существуетъ касательная въ точкѣ M, съ которой стремится совпасть прямая MM', то и прямая MM'' стремится къ тому же предѣльному положенію, потому что въ треугольникѣ $M'MM''$, каковъ бы ни былъ уголъ при M'', всегда имѣемъ

$$\lim \sin M'MM'' = \lim \frac{M'M''}{MM'} \sin MM''M' = 0.$$

Приведемъ теперь же нѣсколько примѣровъ на приложеніе этого пріема [2]).

---

[1]) О свойствахъ этихъ и аналогичныхъ имъ кривыхъ см. G. Loria (l. c.) или E. Cesàro „Vorlesungen über natürliche Geometrie", стр. 54.

[2]) Читатель найдетъ многочисленныя приложенія этого принципа въ старомъ, но до сихъ поръ интересномъ сочиненіи Duhamel „Éléments du Calcul infinitésimal" (t. I. livre I.) (имѣется и въ русскомъ переводѣ), а также въ „Дифференціальномъ исчисленіи" Ж. Бертрана (русскій переводъ Пирожкова, СПБ. 1910, глава I).

а) Когда кругъ катится безъ скольженія по прямой, то каждая точка его окружности описываетъ кривую, называемую *циклоидою*. Пусть N и N' будутъ тѣ точки, въ которыхъ кругъ, разсматриваемый въ двухъ различныхъ положеніяхъ, касается прямой, а M и M' соотвѣтствующія положенія точки, описывающей циклоиду. Чтобы осуществить переходъ изъ M въ M', очевидно, можно себѣ представить, что кругъ сперва вращается около своего центра такимъ образомъ, что точка M переходитъ въ L, при чемъ она отдалится отъ точки N (на прямой) на длину дуги ML, равную отрѣзку NN'. Затѣмъ, кругъ передвигается параллельно прямой и этимъ переносится въ новое положеніе, при чемъ точка M, уже находящаяся въ L, перейдетъ въ M', описавъ отрѣзокъ $LM' = NN'$. На этомъ отрѣзкѣ и можно замѣнить точку M' точкою M'', для которой $LM'' = LM$, потому что при этомъ мы пренебрегаемъ разностью

$$LM' - LM'' = \smile LM - \text{хорда } LM.$$

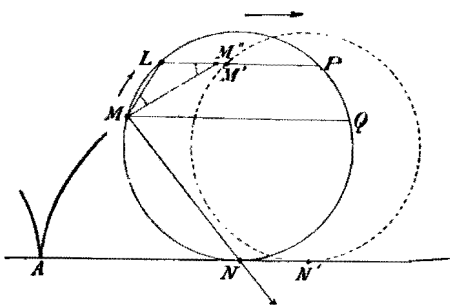


Рис. 42.

т. е. безконечно малою 3-го порядка. Теперь, слѣдовательно, можно разсматривать нормаль къ циклоидѣ въ точкѣ M, какъ предѣльное положеніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки L на прямую MM''. Если проведемъ прямыя, параллельныя неподвижной прямой, черезъ точки L и M, и замѣтимъ точки P и Q ихъ пересѣченія съ окружностью круга, то увидимъ, что перпендикуляръ изъ L на MM' раздѣлитъ дугу MNP пополамъ, потому что треугольникъ LMM'' равнобедренный. Слѣдовательно, нормаль въ точкѣ M — предѣльное положеніе этого перпендикуляра — раздѣлитъ дугу MNQ пополамъ, т. е. пройдетъ черезъ точку N. Впослѣдствіи этотъ результатъ мы провѣримъ вычисленіемъ (§ 595, п).

b) Разсмотримъ еще кривую линію, которую описываетъ вершина M угла постоянной величины (рис. 42), стороны котораго двигаются, оставаясь всегда касательными къ двумъ даннымъ кривымъ. Пусть P и Q будутъ точки касанія сторонъ даннаго угла въ данномъ положеніи, P' и Q' — аналогичныя точки для другого положенія, когда вершина угла находится въ точкѣ M', безконечно близкой къ M. Проведемъ черезъ P и Q прямыя, параллельныя сторонамъ угла въ новомъ его положеніи, и пусть M'' будетъ точка пересѣченія этихъ прямыхъ. Замѣтимъ теперь, что разстоянія точки M'' отъ сторонъ угла въ новомъ его положеніи будутъ безконечно малыя не ниже 2-го порядка, потому что они соотвѣтственно равны разстояніямъ точекъ на кривой, безконечно близкихъ къ точкѣ касанія, отъ касательной въ этой точкѣ *). Отсюда легко заключить, что разстояніе $M'M''$ будетъ

*) А именно, точки P отъ касательной въ P', и точки Q отъ касательной въ Q'.

также безконечно малая высшаго порядка относительно MM'. Поэтому искомая касательная будетъ предѣльное положеніе для прямой MM''. Но углы при M и M'' равны между собою (по условію), слѣдовательно, M'' лежитъ на окружности круга, проходящаго черезъ три точки M, P и Q, и предѣльное положеніе прямой MM'' есть касательная въ точкѣ M къ окружности этого круга. Поэтому, для построенія нормали къ общему мѣсту точки M надо соединить эту точку съ точкою пересѣченія нормалей въ данныхъ кривыхъ въ точкахъ P и Q.

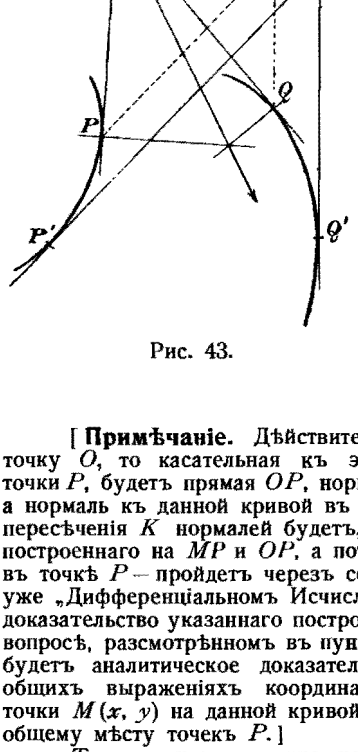


Рис. 43.

c) Подэрою (Podaire, Fusspunktkurve) данной кривой относительно точки O называютъ общее мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки O на касательныя къ данной кривой. Если M есть точка на данной кривой, а P проекція точки O на касательную въ M, то нормаль къ подэрѣ въ точкѣ P получимъ, соединивъ P съ серединою OM. Это построеніе тотчасъ выводится изъ предыдущаго, если замѣтимъ, что разсматриваемый случай есть частный случай предыдущаго, а именно, соотвѣтствующій предположенію, что данный уголъ здѣсь прямой, и одна изъ данныхъ кривыхъ обращается въ точку O.

[**Примѣчаніе.** Дѣйствительно, если вторая кривая обращается въ точку O, то касательная къ этой кривой въ точкѣ O, проведенная изъ точки P, будетъ прямая OP, нормаль—перпендикуляръ къ OP въ точкѣ O, а нормаль къ данной кривой въ точкѣ M—прямая, параллельная OP. Точка пересѣченія K нормалей будетъ, слѣдовательно, вершина прямоугольника, построеннаго на MP и OP, а потому діагональ его PK—нормаль къ подэрѣ въ точкѣ P—пройдетъ черезъ середину діагонали OM. Въ цитированномъ уже „Дифференціальномъ Исчисленіи“ Бертрана читатель найдетъ простое доказательство указаннаго построенія, независимое отъ построенія въ общемъ вопросѣ, разсмотрѣнномъ въ пунктѣ b). Наконецъ, полезнымъ упражненіемъ будетъ аналитическое доказательство того же построенія, основанное на общихъ выраженіяхъ координатъ точки $P(X, Y)$ черезъ координаты точки $M(x, y)$ на данной кривой, и на разсмотрѣніи уравненія нормали къ общему мѣсту точекъ P.]

Такимъ путемъ можно, напримѣръ, найти извѣстное уже (§ 589, k) построеніе нормали къ улиткѣ. А именно, легко убѣдиться, что кривая линія $r = a\cos\theta + b$ есть подэра окружности круга радіуса b относительно точки, отстоящей отъ центра на разстояніи, равномъ a. Если, въ частности, имѣемъ двѣ касающіяся взаимно окружности круговъ, изъ которыхъ одинъ окружаетъ другой и имѣетъ вдвое большій радіусъ, то подэра внѣшняго круга относительно точки касанія есть конхоида внутренняго круга, и именно кардіоида.

d) Въ заключеніе разсмотримъ эллипсъ. Пусть M и M' двѣ безконечно близкія точки на кривой, F и F'—ея фокусы, P проекція M на $M'F$ и P' проекція M' на MF'. Съ точностью до безконечно малыхъ 2-го порядка можемъ написать:

$$M'P = M'F - MF, \quad MP' = MF' - M'F',$$
$$M'P - MP' = (M'F + M'F') - (MF + MF') = 0.$$

Слѣдовательно, $M'P = MP'$. Раздѣливъ на MM', находимъ

$$\cos MM'F = \cos M'MF',$$

а переходя къ предѣлу $\angle TMF = \angle TMF'$, т. е. касательная одинаково наклонена къ радіусамъ векторамъ точки касанія, выходящимъ изъ фокусовъ. Это свойство характеризуетъ эллипсъ, потому что изъ послѣдняго равенства, идя обратнымъ путемъ, получимъ точное равенство $dMF + dMF' = 0$, т. е. $MF + MF' = \text{Const}$. Такимъ же образомъ ведется доказательство аналогичнаго свойства касательной къ гиперболѣ, и еще проще для параболы.

Кривизна.

591. Опредѣленія. Угломъ смежности называется дифференціалъ, эквивалентный (§ 556) углу между касательными въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ на кривой. Отношеніе угла смежности къ дифференціалу дуги называется кривизною кривой въ разсматриваемой точкѣ. Ясно, что если φ есть уголъ наклоненія касательной къ нѣкоторой неподвижной прямой, то $d\varphi$ есть уголъ смежности, а кривизна, слѣдовательно, равна производной отъ φ, взятой по дугѣ s. Чтобы оправдать установленное здѣсь опредѣленіе кривизны, замѣтимъ слѣдующее. Если, кромѣ данной точки M на кривой, возьмемъ еще точку M', достаточно близкую къ M, чтобы дуга MM' на всемъ своемъ протяженіи была вогнута въ одну и ту же сторону (§ 552), то естественно будетъ принять, что при данной длинѣ этой дуги δs, кривизна ея будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше уголъ между касательными въ крайнихъ ея точкахъ M и M'. Поэтому, естественно принять за мѣру кривизны этой дуги отношеніе $\frac{\delta\varphi}{\delta s}$, а это отношеніе и стремится къ предѣлу $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, когда, при фиксированной точкѣ M, точка M', двигаясь по кривой, стремится совпасть съ M. Возьмемъ теперь за неподвижную прямую ось абсциссъ. Направляющіе косинусы касательной изобразятся тогда формулами:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

откуда, взявъ производныя, находимъ

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds},$$

а, слѣдовательно (§ 558; d),

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{7}$$

Въ частномъ случаѣ, когда разсматриваемая кривая есть окружность круга радіуса ϱ, формула эта выражаетъ, что кривизна во всѣхъ точкахъ одинакова и равна $\frac{1}{\varrho}$. Поэтому, мы можемъ высказать слѣдующее положеніе: кривизна какой угодно кривой въ данной на ней точкѣ измѣряется кривизной соприкасающагося въ этой точкѣ круга данной кривой (§ 348, e). На этомъ основаніи радіусъ и центръ соприкасающагося круга называютъ радіусомъ и центромъ кривизны данной кривой въ данной точкѣ.

[**Примѣчаніе.** Направляющими косинусами касательной, какъ для плоскихъ, такъ и для неплоскихъ кривыхъ, мы будемъ называть косинусы угловъ, образуемыхъ положительнымъ направленіемъ касательной съ положительными направленіями координатныхъ осей. За положительное направленіе на касательной всегда будемъ выбирать то, которое идетъ въ сторону возрастающихъ дугъ, при чемъ послѣднее можемъ выбирать по произволу. Обозначая, въ случаѣ плоской кривой, черезъ α и β направляющіе косинусы касательной, мы — при установленномъ выше условіи — будемъ имѣть по величинѣ и по знаку

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}.$$

Для доказательства, проведемъ сѣкущую черезъ разсматриваемую точку (s) на кривой и черезъ точку $(s+\delta s)$, расположенную на кривой съ той стороны отъ первой точки, въ которую возрастаютъ дуги (такъ что $\delta s > 0$). Если мы направимъ эту сѣкущую въ сторону возрастанія дугъ, т. е. отъ точки (s) къ точкѣ $(s+\delta s)$, то ея направляющіе косинусы выразятся такъ:

$$\frac{\delta x}{+\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}, \quad \frac{\delta y}{+\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}$$

или

$$\frac{\delta x}{\delta s}\cdot\frac{\delta s}{+\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}, \quad \frac{\delta y}{\delta s}\cdot\frac{\delta s}{+\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}.$$

Такъ какъ $\delta s > 0$, а отношеніе длины дуги къ длинѣ хорды стремится къ единицѣ (§ 582), то въ предѣлѣ для направляющихъ косинусовъ касательной, направленной въ сторону возрастанія дугъ, мы и получимъ указанныя выше выраженія. Замѣтимъ еще, что въ большинствѣ курсовъ дифференціальной Геометріи радіусъ кривизны ϱ считается числомъ положительнымъ, и опредѣляется формулою $\frac{1}{\varrho} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$; въ настоящемъ же сочиненіи ϱ опредѣляется формулою $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}$ и можетъ быть, какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ числомъ.]

592. Опредѣленіе кривизны можно еще инымъ образомъ оправдать, если предварительно согласиться принять за мѣру кривизны круга обратную величину его радіуса. Такое соглашеніе совмѣстимо съ обыденнымъ понятіемъ о кривизнѣ, по которому круги малаго радіуса искривлены больше, чѣмъ круги большого радіуса. Основываясь на этомъ и переходя къ измѣренію кривизны любой кривой въ данной на ней точкѣ M, разсмотримъ всѣ круги, касающіеся этой кривой въ точкѣ M, и обращенные выпуклостью въ ту же сторону, какъ и данная кривая въ этой точкѣ. На основаніи того же интуитивнаго представленія, которое мы имѣемъ о кривизнѣ, можемъ, очевидно, сказать, что кривая въ точкѣ M имѣетъ кривизну бо́льшую, чѣмъ кривизна внѣшнихъ круговъ и ме́ньшую, чѣмъ кривизна внутреннихъ круговъ. Подъ внѣшними кругами понимаются тѣ, окружности которыхъ проходятъ между касательною и данною кривою, а подъ внутренними тѣ, относительно которыхъ кривая и касательная лежатъ съ одной стороны. Если покажемъ, что соприкасающійся кругъ составляетъ границу, отдѣляющую внѣшніе круги отъ внутреннихъ, то и придемъ къ утвержденію, что кривизна данной кривой равна кривизнѣ соприкасающагося круга. Чтобы доказать упомянутое свойство соприкасающагося круга, обозначимъ черезъ r радіусъ какого нибудь изъ круговъ, касающихся данной кривой въ точкѣ $M(x, y)$, а черезъ h алгебраическую величину разстоянія точки $M'(x+\delta x, y+\delta y)$ на данной кривой отъ окружности выбраннаго круга. Тогда имѣемъ

$$(2r+h)h = (\delta x + r\sin\varphi)^2 + (\delta y - r\cos\varphi)^2 - r^2.$$

[**Примѣчаніе.** Разстояніе точки M' отъ окружности откладывается по нормали къ окружности и берется со знакомъ $+$, если точка M' лежитъ внѣ этой окружности, и со знакомъ $-$, если M' внутри ея. Если C есть центръ выбраннаго круга, то при сдѣланномъ соглашеніи о знакѣ h, на основаніи извѣстныхъ теоремъ элементарной Геометріи, будемъ имѣть въ обоихъ случаяхъ

$$(2r+h)h = CM'^2 - r^2.$$

Замѣчая еще, что координаты (ξ, η) центра разсматриваемаго круга опредѣляются формулами

$$\xi = x - r\sin\varphi, \quad \eta = y + r\cos\varphi,$$

гдѣ φ уголъ касательной къ данной кривой въ точкѣ M съ осью x-въ, находимъ $CM'^2 = (\delta x + r\sin\varphi)^2 + (\delta y - r\cos\varphi)^2$ и, слѣдовательно,

$$(2r+h)h = (\delta x + r\sin\varphi)^2 + (\delta y - r\cos\varphi)^2 - r^2.$$

Обозначая черезъ l длину хорды MM' и припоминая, что

$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, найдемъ

$$(2r+h)h = l^2 + 2r\frac{\delta x\,dy - \delta y\,dx}{ds},$$

т. е.,

$$2rh + h^2 = l^2 + r\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{ds} + \tfrac{1}{3}r\frac{dy\,d^3x - dx\,d^3y}{ds} + \cdots].$$

Отбрасывая безконечно малыя выше 3-го порядка (относительно ds), и припоминая сказанное въ § 585, мы можемъ замѣнить l^2 черезъ ds^2, и получимъ

$$h = \frac{ds^2}{2r} - \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{2\,ds} - \frac{dx\,d^3y - dy\,d^3x}{6\,ds} - \cdots.$$

Принимая теперь s за независимую перемѣнную, находимъ

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{ds^3}{\varrho}, \qquad dx\,d^3y - dy\,d^3x = ds^3 d\frac{1}{\varrho},$$

и окончательно

$$h = \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) + \frac{ds^2\,d\varrho}{6\varrho^2} + \cdots.$$

Мы видимъ, что h будетъ вообще безконечно малою 2-го порядка; при этомъ въ смежности съ точкою M, $h>0$ при $r<\varrho$, и $h<0$ при $r>\varrho$, т. е. точки M', достаточно близкія къ M, лежатъ всѣ внѣ или всѣ внутри касательнаго круга, смотря по тому, будетъ ли этотъ кругъ внутри или внѣ соприкасающагося круга. Если же $r=\varrho$ (т. е. касательный кругъ совпадаетъ съ соприкасающимся кругомъ), то h будетъ порядка выше второго и имѣетъ знакъ, одинаковый съ $d\varrho$. Отсюда вытекаетъ слѣдующее: Положимъ, что въ точкѣ M $\frac{d\varrho}{ds}$ непрерывна и неравна нулю; представимъ себѣ, что мы передвигаемся по кривой въ направленіи возрастающихъ дугъ, т. е. что $ds<0$ для точекъ, предшествующихъ M, и $ds>0$ для точекъ, слѣдующихъ за M. Если въ точкѣ M $\frac{d\varrho}{ds}>0$, т. е. ϱ возрастаетъ, а кривизна убываетъ (рис. 44), то знакъ $d\varrho$, а, слѣдовательно, и h, переходитъ изъ — въ +, и точки, предшествующія M, будутъ внутри, а слѣдующія за нею внѣ соприкасающагося круга. Какъ разъ противоположное будетъ имѣть мѣсто въ случаѣ $\frac{d\varrho}{ds}<0$ въ точкѣ M. Итакъ, вообще соприкасающійся кругъ пересѣкаетъ кривую въ той точкѣ,

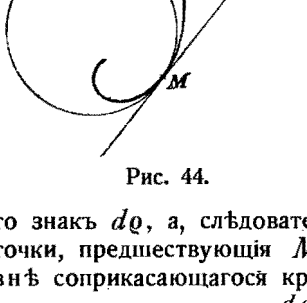


Рис. 44.

въ которой онъ съ нею касается. Исключеніе могутъ представить лишь такія точки, въ которыхъ $\frac{d\varrho}{ds}=0$, и для которыхъ h безконечно малая не ниже 4-го порядка. Во всѣхъ случаяхъ безъ исключенія соприкасающійся кругъ характеризуется тѣмъ, что точки M', безконечно близкія къ M, на данной кривой, отстоятъ отъ него на безконечно малыхъ разстояніяхъ не ниже второго порядка.

593. Пусть H есть точка пересѣченія нормалей въ точкахъ M и M', легко показать, что центръ кривизны въ точкѣ M есть предѣльное положеніе точки H, съ которымъ она стремится совпасть, когда точка M' стремится совпасть съ точкою M, остающеюся на мѣстѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если n обозначаетъ длину MH, то разстояніе точки M отъ нормали $M'H$, очевидно, равно $n\sin(\delta\varphi)$; съ другой стороны, то же разстояніе равно проекціи MM', т. е. суммѣ проекцій δx и δy на касательную въ точкѣ M'. Слѣдовательно,

$$n\sin\delta\varphi=\cos(\varphi+\delta\varphi)\cdot\delta x+\sin(\varphi+\delta\varphi)\cdot\delta y.$$

Обозначая предѣльное значеніе n черезъ ϱ, получаемъ отсюда

$$\varrho\,d\varphi=\cos\varphi\cdot dx+\sin\varphi\cdot dy=ds,$$

т. е. ϱ равно радіусу кривизны, а такъ какъ центръ кривизны лежитъ на нормали MH, то теорема и доказана. На этомъ основаніи можемъ утверждать, что нормали въ точкахъ, безконечно близкихъ къ M, проходятъ въ безконечно малыхъ разстояніяхъ отъ центра кривизны въ точкѣ M. Легко и вычислить эти разстоянія; стоитъ только замѣтить, что, пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка, имѣемъ:

$$n=(\cos\varphi\cdot\delta x+\sin\varphi\cdot\delta y)\cot\delta\varphi=\frac{dx\cdot\delta x+dy\cdot\delta y}{ds\,d\varphi}=\frac{ds}{d\varphi}+\frac{d^2s}{2\,d\varphi}\;^{*})$$

и, наконецъ, $n=\varrho+\frac{1}{2}d\varrho$, если выберемъ ϱ за независимую перемѣнную.

594. Формула (7) заключаетъ въ себѣ всѣ другія, служащія для вычисленія кривизны, и зачастую превосходитъ ихъ въ смыслѣ простоты и удобства вычисленій. Если положимъ

$$\varphi=\operatorname{arctg}y'\quad\text{или}\quad\varphi=0+\operatorname{arctg}\frac{r}{r'},$$

смотря по тому, Декартовы ли или полярныя координаты желаемъ примѣнить, то, дифференцируя, найдемъ

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2},\quad\frac{d\varphi}{d0}=1+\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2},$$

*) Потому что $\cos\varphi\,\delta y-\sin\varphi\,\delta x$ — безконечно малая высшаго порядка.

а такъ какъ $ds = \sqrt{1+y'^2}\cdot dx = \sqrt{r^2+r'^2}\cdot d\theta$, то снова и получимъ выраженія

$$\varrho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \quad \varrho = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}. \tag{8}$$

Если кривая задана уравненіемъ $f(x, y) = 0$, то достаточно обратиться къ выведенному уже раньше (§ 574) результату, чтобы изъ первой формулы (8) получить

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Но и этотъ результатъ можно получить непосредственно изъ (7). Разсматривая φ, какъ функцію отъ x и y, которыя сами суть функціи отъ s, имѣемъ

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial y}\cos\varphi.$$

Съ другой стороны, извѣстно (§ 586), что косинусы угловъ нормали съ осями Ox и Oy выражаются формулами

$$-\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{10}$$

Поэтому

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

или

$$-\frac{1}{\varrho} = \frac{\Delta^2 f}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}. \tag{11}$$

Это есть весьма важная формула Бонне (Bonnet). Простое вычисленіе дастъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}$$

$$= -\frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],$$

а такъ какъ

$$\frac{\Delta^2 f}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],$$

то мы и приходимъ къ формулѣ

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{(\Delta f)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right],$$

совпадающей съ (9). Что касается формулы (11), то она важна потому, что ею обнаруживается инваріантный характеръ кривизны. Дѣйствительно, инваріантный характеръ перваго члена уже извѣстенъ (§ 569); поэтому достаточно будетъ показать, что сумма двухъ другихъ имѣетъ геометрическое значеніе, независимое отъ положенія координатныхъ осей. Обозначая для краткости функцію $\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}$ черезъ g, и проведя черезъ произвольную точку M кривую, для всѣхъ точекъ которой g равно постоянной, легко будетъ вычислить уголъ, образуемый этою кривою съ данною. А именно, примѣняя формулы (10) ко второй кривой, тотчасъ найдемъ (см. § 577, а) выраженіе

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{\Delta f \cdot \Delta g}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

и формула (11) принимаетъ видъ $-\frac{1}{\varrho} = \frac{\Delta^2 f}{\sqrt{\Delta f}} + \sqrt{\Delta f \cdot \Delta g}\cdot\cos\omega$.

595. Упражненія. а) Мы поставимъ себѣ задачей построить центры кривизны тѣхъ плоскихъ кривыхъ, которыя чаще всего встрѣчаются на практикѣ. Начнемъ съ простѣйшей изъ нихъ послѣ окружности круга, а именно съ логариѳмической спирали ($r = ae^{m\theta}$), приводящейся къ окружности круга при $m = 0$. Такъ какъ $r' = mr$, $r'' = mr' = m^2 r$, то $r'^2 = rr''$, и вторая изъ формулъ (8) тотчасъ дастъ $\varrho = \sqrt{r^2 + r'^2} = n$. Еще скорѣе придемъ къ этому результату съ помощью формулы (7), если замѣтимъ, что изъ $\varphi = \theta + \omega$ слѣдуетъ $d\varphi = d\theta$ ($\omega = \text{const.}$), а такъ какъ $ds = nd\theta$, то и получимъ $\varrho = n$, т. е. въ логариѳмической спирали радіусъ кривизны равенъ длинѣ полярной нормали. Слѣдовательно (см. § 589, е, рис. 33), центръ кривизны находится въ точкѣ N. Это свойство является очевиднымъ, если припомнимъ сказанное въ § 593, изъ котораго слѣдуетъ, что точка пересѣченія H нормалей въ M и M' лежитъ на окружности круга OMM', потому что $\angle OMH = \angle OM'H$ (по опредѣленію спирали: $\omega = \text{const.}$). Когда M' приближается къ M, кругъ OMM' стремится сдѣлаться касательнымъ къ кривой въ точкѣ M, а точка H стремится къ точкѣ N, діаметрально противоположной M на предѣльномъ положеніи окружности круга. Раньше мы замѣтили, что длина полярной касательной MT равна длинѣ дуги OM, а теперь обратимъ вниманіе на соотношеніе $\varrho = ms$, которое, такъ сказать, можно прочитать въ треугольникѣ NMT. Для всякой плоской кривой можно аналогичнымъ образомъ разсматривать соотношеніе между ϱ и s. Оно называется „натуральнымъ уравненіемъ кривой“ и вполнѣ достаточно, чтобы опредѣлить фигуру кривой [1]).

[1]) См. „Naturliche Geometrie“, стр. 2.

[**Примѣчаніе.** Допустимъ, что двѣ кривыя C_1 и C_2 имѣютъ одно и то же натуральное уравненіе

$$\frac{1}{\varrho} = f(s),$$

и покажемъ, что онѣ конгруентны. Отличая указателями аналогичные элементы обѣихъ кривыхъ, мы будемъ имѣть—при равныхъ значеніяхъ дугъ—

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2},$$

откуда, въ силу (7),

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\varphi_1}{ds} = \frac{d\varphi_2}{ds}.$$

Перенесемъ одну изъ кривыхъ такъ, чтобы совпали точки, отъ которыхъ на C_1 и C_2 отсчитываются дуги, а затѣмъ повернемъ эту кривую такъ, чтобы совпали и положительныя направленія касательныхъ въ этихъ точкахъ. Тогда, при $s = 0$

$$\text{(II)} \qquad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2,$$

$$\text{(III)} \qquad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Изъ равенства (I), въ силу § 307, b, вытекаетъ, что φ_1 и φ_2 могутъ отличаться лишь на постоянную; но, въ виду равенства (III), эта постоянная равна нулю, такъ что равенство (III) имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній s. Въ такомъ случаѣ, для всѣхъ же значеній s,

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \frac{dx_2}{ds}$$

$$\frac{dy_1}{ds} = \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \frac{dy_2}{ds},$$

откуда аналогичнымъ образомъ заключаемъ, что и равенства (II) имѣютъ мѣсто всегда, т. е. кривыя совпадаютъ: Итакъ, кривыя, имѣющія одно и то же натуральное уравненіе, могутъ отличаться только по положенію, видъ же ихъ этимъ уравненіемъ опредѣляется вполнѣ. На этомъ и основана важная роль натуральныхъ уравненій].

b) Для логариѳмической кривой ($y = ae^{\frac{x}{a}}$; рис. 31) имѣемъ

$$y' = \frac{y}{a} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad y'' = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}.$$

Первая изъ формулъ (8) дастъ

$$\varrho = \frac{1}{y''\cos^3\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi} + \frac{y}{\cos\varphi}.$$

Пусть T и N будутъ точки, въ которыхъ касательная и нормаль встрѣчаютъ асимптоту. Если перпендикуляръ къ асимптотѣ, возставленный въ точкѣ T, встрѣтитъ нормаль въ точкѣ H, то, на основаніи предыдущей формулы, $\varrho = NH$. Поэтому мы найдемъ центръ кривизны C, если отложимъ по нормали длину $HC = MN$.

c) Въ разносторонней гиперболѣ, отнесенной къ асимптотамъ, имѣемъ

$$y = \frac{a^2}{x}, \qquad y' = -\frac{a^2}{x^2} = -\frac{y}{x}.$$

Слѣдовательно, $\angle MTO = \theta$ (рис. 45), т. е. углу между радіусомъ векторомъ и полярной осью (осью x-овъ). Далѣе,

$$y'' = \frac{2a^2}{x^3} = \frac{2y}{x^2}, \qquad 1 + y'^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}, \qquad \varrho = \frac{r^3}{2a^2};$$

слѣдовательно, радіусъ кривизны въ точкѣ M пропорціоналенъ кубу діаметра, проходящаго черезъ M. Чтобы построить центръ кривизны, замѣтимъ, что

$$\varrho = \frac{r^3}{2a^2} = \frac{r^3}{2xy} = \frac{r}{\sin 2\theta} = MQ.$$

Слѣдовательно, $MC = MQ$, т. е. центръ кривизны лежитъ симметрично съ Q относительно M. Къ тому же результату придемъ съ помощью формулы (7), замѣтивъ, что $\varphi = \pi - \theta$, откуда $d\varphi = -d\theta$, и $\varrho = -n$ (гдѣ n — длина полярной нормали). Замѣтимъ здѣсь еще слѣдующее: если

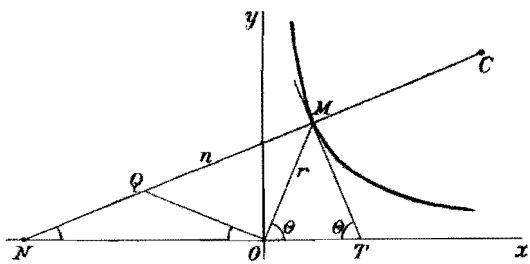


Рис. 45.

возьмемъ еще двѣ точки M' и M'' на гиперболѣ и соединимъ центръ круга $MM'M''$ съ ортоцентромъ треугольника $MM'M''$, то центръ тяжести этого треугольника раздѣлитъ эту прямую на два отрѣзка, относящихся одинъ къ другому, какъ 1 къ 2, а съ другой стороны, по извѣстному свойству равносторонней гиперболы, ортоцентръ лежитъ на кривой (см. примѣчаніе). Когда M' и M'' приближаются къ M, то центръ тяжести треугольника стремится къ M, а центръ описаннаго около него круга къ C (центръ соприкасающагося круга), откуда ясно, что ортоцентръ стремится къ совпаденію съ точкою пересѣченія H нормали съ другою вѣтвью гиперболы, и что $MH = 2\varrho$. Иными словами: діаметръ соприкасающагося круга въ любой точкѣ равносторонней гиперболы равенъ отрѣзку, отсѣкаемому самою кривою на нормали въ точкѣ M.

[**Примѣчаніе.** Ортоцентромъ треугольника называется точка пересѣченія его высотъ, центръ тяжести G — точка пересѣченія медіанъ, центръ описаннаго круга C_1 — точка пересѣченія перпендикуляровъ къ сторонамъ, возставленныхъ изъ ихъ серединъ. Эти три точки лежатъ на одной прямой, и если K есть ортоцентръ, то $GK = 2GC_1$ (см. „Сборникъ геометрическихъ задачъ" Пржевальскаго. Москва, 1894. Отд. III. Теорема 52 на стр. 66; доказательство на стр. 263). Свойство равносторонней гиперболы, упомянутое въ 595, с, читатель легко докажетъ самъ, или найдетъ въ „Anal. Geometrie der Kegelschnitte" Salmon-Fiedler (4-е изд. 1874 г., стр. 289, § 236). Предѣльное положеніе ортоцентра K находится на нормали въ точкѣ M, потому что K на перпендикулярѣ къ $M'M''$, а предѣльное положеніе $M'M''$ есть касательная въ M.]

d) Кардіоида прежде всего замѣчательна тѣмъ, что она особенно просто спрямляется. Изъ уравненія $r = a(1+\cos\theta)$ послѣдовательно находимъ

$$r' = -a\sin\theta, \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+r'^2} = 2a\cos\frac{\theta}{2}, \quad s = 4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

если за начало дугъ примемъ вершину A ($s=0$ при $\theta=0$). Если радіусъ векторъ OM встрѣчаетъ въ точкѣ L окружность круга радіуса $OA = 2a$ съ центромъ въ полюсѣ O, то изъ предыдущей формулы получаемъ, что длина дуги AM равна длинѣ прямолинейнаго отрѣзка AL. Въ частности, оттуда же слѣдуютъ, что длина всей кардіоиды равна $8a$. Кромѣ того, имѣемъ

$$r'' = -a\cos\theta, \quad r'^2 - rr'' = a^2(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}n^2, \quad \varrho = \frac{n^3}{n^2+\frac{1}{2}n^2} = \frac{2}{3}n.$$

Слѣдовательно, центръ кривизны въ точкѣ M дѣлитъ длину полярной нормали въ отношеніи 1 къ 2. Это свойство еще скорѣе выводится изъ формулы (7), если построеніе нормали уже извѣстно. Дѣйствительно, опишемъ кругъ діаметра, равнаго a, конхоида котораго (§ 589, k) относительно точки O на его окружности и будетъ данная кардіоида. Пусть H будетъ центръ этого круга, P та точка на его окружности, которая лежитъ на радіусѣ векторѣ OM, а Q — точка, діаметрально противоположная точкѣ P. Тогда MQ, какъ извѣстно, будетъ нормаль къ кардіоидѣ (§ 589, k). Изъ того что, какъ треугольникъ MPQ, такъ и треугольникъ OHP равнобедренны, слѣдуетъ, что $\angle PMQ = \frac{1}{2}\theta$, а потому нормаль наклонена къ полярной оси подъ угломъ $\frac{3}{2}\theta$; слѣдовательно, $d\varphi = \frac{3}{2}d\theta$ и $\varrho = \frac{3}{2}n$. Пусть N будетъ другая точка окружности нашего круга, лежащая на MQ. Такъ какъ треугольникъ MPQ равнобедренный, то точка N — проекція точки P

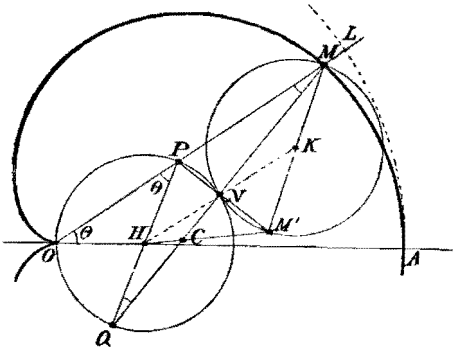


Рис. 46.

на MQ — очевидно дѣлитъ отрѣзокъ MQ пополамъ. Пусть M' будетъ точка, симметричная съ P относительно N. Прямая HM' пересѣчетъ нормаль MQ въ центрѣ кривизны C. Дѣйствительно, построенная такимъ образомъ точка C есть центръ тяжести треугольника PQM', слѣдовательно,

$$MC = MN + \tfrac{1}{3}NQ = \tfrac{1}{3}MN = \tfrac{2}{3}MQ.$$

Наконецъ, замѣтимъ, что натуральное уравненіе кардіоиды есть $s^2+9\varrho^2 = \text{const}$. Если будемъ отсчитывать дуги отъ полюса, то найдемъ, что длина дуги OM равна

$$s = 4a\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Съ другой стороны, хорда OM равна

$$r = a(1+\cos\theta) = s - \frac{s^2}{8a}.$$

Къ этому соотношенію легко придти и геометрическимъ путемъ съ помощью слѣдующаго замѣчанія: изъ уравненія кардіоиды видно, что перпендикуляръ, опущенный изъ A на OM, проходитъ черезъ точку, симметричную съ L относительно M. Слѣдовательно, $AL^2 = 4a \cdot 2ML$, т. е. $(4a-s)^2 = 8a(2a-r)$ и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что съ приближеніемъ M къ O, разность между дугою OM и хордою OM будетъ безконечно малою не 3-го порядка (см. § 585), а только 2-го. Это объясняется тѣмъ, что въ точкѣ O кривизна безконечна.

е) Изъ уравненія синусъ-спиралей $r^m = a^m \sin m\theta$ выводимъ $r^{m-1}r' = a^m \cos m\theta$; далѣе, $(m-1)r^{m-2}r'^2 + r^{m-1}r'' = -mr^m$, т. е. $(m-1)r'^2 + rr'' = -mr^2$, и наконецъ, $r'^2 - rr'' = m(r^2 + r'^2)$. Поэтому

$$\varrho = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+m)(r^2+r'^2)} = \frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{1+m} = \frac{n}{1+m},$$

результатъ, очевидный по формулѣ (7), потому что $\varphi = \theta + \omega = (1+m)\theta$. Отсюда слѣдуетъ, что радіусъ кривизны пропорціоналенъ длинѣ полярной нормали. При $m = -2$ и $m = \frac{1}{2}$ снова находимъ извѣстное уже построеніе центра кривизны въ равносторонней гиперболѣ и кардіоидѣ. При $m = 2$ получается аналогичное построеніе для лемнискаты. При $m = -\frac{1}{2}$ находимъ, что въ параболѣ радіусъ кривизны дѣлится пополамъ перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ фокуса къ радіусу вектору, и т. д. Если, наконецъ, положимъ $m = 0$, то снова получаемъ извѣстное построеніе для логариѳмической спирали. На этомъ основаніи, несмотря на то, что при $m=0$ уравненіе $r^m = a^m \sin m\theta$ теряетъ смыслъ, логариѳмическую спираль разсматриваютъ, какъ частный случай синусъ-спиралей, соотвѣтствующій значенію указателя $m = 0$. Она представляетъ нѣкоторымъ образомъ границу, отдѣляющую одинъ классъ синусъ-спиралей, не выходящихъ изъ конечной части плоскости, отъ другого, въ которомъ спирали распространяются въ безконечность.

f) Одинъ классъ синусъ-спиралей получается изъ другого посредствомъ такъ называемаго преобразованія при помощи взаимныхъ радіусовъ векторовъ или обращенія (Inversion). Подъ этимъ названіемъ понимаютъ такое геометрическое преобразованіе, въ которомъ каждой точкѣ на плоскости соотвѣтствуетъ взаимная съ нею относительно нѣкотораго постояннаго круга. Если $r = f(\theta)$ есть уравненіе нѣкоторой кривой, то $r = \frac{a^2}{f(\theta)}$ есть уравненіе кривой, полученной ея обращеніемъ относительно круга радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Такимъ образомъ, Архимедова спираль и гиперболическая спираль, кохлеоида и квадратриса, равносторонняя гипербола и лемниската, парабола и кардіоида, и вообще двѣ синусъ-спирали съ указателями, равными по величинѣ и противоположными по знаку, представляютъ собою пару взаимнообратныхъ кривыхъ. Поэтому полезно знать, какимъ образомъ можно построить центръ кривизны для одной изъ взаимнообратныхъ кривыхъ, когда извѣстно построеніе для другой. Мы предоставляемъ читателю доказать, что въ двухъ соотвѣтствующихъ точкахъ взаимнообратныхъ кривыхъ касательныя антипараллельны относительно радіуса вектора, и центры кривизны лежатъ на одной прямой съ центромъ обращенія (т. е. центромъ постояннаго круга).

g) *Астроидою* называется кривая, уравненіе которой въ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатахъ есть $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Она симметрична

относительно координатныхъ осей и состоитъ изъ четырехъ равныхъ между собою дугъ, касающихся координатныхъ осей въ крайнихъ своихъ точкахъ (рис. 47). Пусть AB будетъ одна изъ этихъ четырехъ дугъ; примемъ за начало счета дугъ середину ея, т. е. точку $x = y = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Мы найдемъ изъ уравненія кривой

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad s = \frac{3}{2}(ax^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}a.$$

Отсюда, въ частности, вытекаетъ, что длина всей астроиды равна $6a$. Далѣе, имѣемъ

$$y'' = \frac{1}{3x}\left(\frac{a^2}{xy}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \varrho = 3(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

Простое вычисленіе покажетъ, что натуральное уравненіе кривой есть $4s^2 + \varrho^2 = \frac{9}{4}a^2$. Различныя свойства кривой, однако, легче обнаруживаются, если будемъ ее разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, получаемыхъ слѣдующимъ построеніемъ. Опишемъ около начала координатъ радіусомъ $OA = a$ окружность круга и каждую ея точку N спроектируемъ сперва на координатныя оси въ P и Q, а затѣмъ на PQ въ точку M. Общее мѣсто точекъ M и будетъ астроида. Дѣйствительно, если обозначимъ черезъ θ уголъ NOA, то $MP = a\sin^2\theta$, $MQ = a\cos^2\theta$, а координаты точки M будутъ

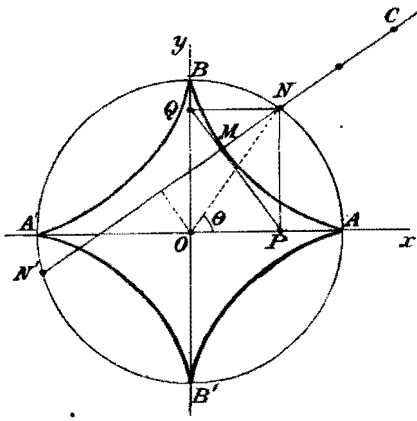


Рис. 47.

$$x = MQ \cdot \cos\theta = a\cos^3\theta,$$
$$y = MP \cdot \sin\theta = a\sin^3\theta,$$

и удовлетворяютъ, какъ видимъ, уравненію $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Теперь замѣтимъ, что

$$dx = -3a\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta, \quad dy = 3a\cos\theta\sin^2\theta\, d\theta, \quad ds = 3a\sin\theta\cos\theta\, d\theta.$$

Слѣдовательно, угловой коэффиціентъ касательной въ M равенъ $-\operatorname{tg}\theta$, т. е. прямая PQ и есть касательная. Отсюда тотчасъ слѣдуетъ, что отрѣзокъ, отсѣкаемый координатными осями на касательной, постоянно равенъ a. Далѣе, если за начало счета дугъ примемъ середину дуги AB, то найдемъ, что $s = -\frac{3}{4}a\cos 2\theta$, а поэтому

$$\text{дуга } MA = \tfrac{3}{4}a(1 - \cos 2\theta) = \tfrac{3}{2}a\sin^2\theta = \tfrac{3}{2}MP.$$

Слѣдовательно, чтобы спрямить дуги MA и MB, стоитъ только продолжить каждый изъ отрѣзковъ MP и MQ по касательной на половину его длины. Наконецъ, радіусъ кривизны, независимо отъ знака, будетъ

$$\varrho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{3}{2}a\sin 2\theta,$$

и мы тотчасъ видимъ, что $4s^2 + \varrho^2 = \frac{1}{4}a^2$, какъ было сказано выше. Замѣчая еще, что $MN = a \sin\theta\cos\theta$, получаемъ $\varrho = 3MN$. Слѣдовательно, радіусъ кривизны равенъ утроенной длинѣ MN. Если обозначимъ черезъ N' другую точку пересѣченія нормали съ окружностью круга, то можно также сказать, что центръ кривизны C симметрично расположенъ съ N' относительно M.

h) На *коническомъ сѣченіи* (съ центромъ) кривизна измѣняется пропорціонально кубу разстоянія отъ центра до касательной. Разсмотримъ для опредѣленности эллипсъ, отнесенный къ его осямъ; изъ уравненія $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ послѣдовательно получимъ

$$b^2x + a^2yy' = 0, \quad b^2 + a^2y'^2 + a^2yy'' = 0, \quad a^2y^3y'' = -b^4.$$

Введя разстояніе отъ центра до касательной

$$h = \frac{y - xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{b^2}{y\sqrt{1+y'^2}}$$

и, выбравъ надлежащимъ образомъ знакъ ϱ, получимъ

$$\varrho = \frac{a^2b^2}{h^3}.$$

Другія формы для ϱ получимъ, вводя въ разсмотрѣніе, вмѣсто h, длину l сопряженнаго съ OM полудіаметра, или длину n отрѣзка нормали MN между точкою на кривой и осью, проходящею черезъ фокусы. Стоитъ только замѣтить, что $lh = ab$ и $nh = b^2$, чтобы получить

$$\varrho = \frac{l^3}{ab}, \qquad \varrho = \frac{n^3}{p^2},$$

гдѣ, какъ обыкновенно, $p = b^2/a$. Послѣднее выраженіе для ϱ весьма удобно получается при помощи полярныхъ координатъ. Полярное уравненіе коническаго сѣченія, если полюсъ помѣщенъ въ одномъ изъ фокусовъ, а полярная ось по оси кривой, проходящей черезъ фокусы, имѣетъ видъ $r = \frac{p}{1 - k\cos\theta}$, и извѣстная формула (§ 558, d), въ которой надо положить

$$f = \frac{1 - k\cos\theta}{p}, \quad f' = \frac{k}{p}\sin\theta, \quad f'' = \frac{k}{p}\cos\theta, \quad f + f'' = \frac{1}{p},$$

тотчасъ дастъ

$$\varrho = \frac{(r^2 - 2kr^2\cos\theta + k^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Замѣтимъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что въ треугольникѣ FMF', въ которомъ нормаль MN дѣлитъ уголъ M пополамъ, имѣемъ

$$\frac{FN}{2ka} = \frac{FM}{2a}, \quad FN = kr, \quad n^2 = r^2 - 2kr^2\cos\theta + k^2r^2,$$

припоминая, что $MF + MF' = 2a$, $NF + NF' = 2ka$. Такимъ образомъ снова получаемъ упомянутое выраженіе ϱ.

i) Теперь мы интерпретируемъ геометрически это выраженіе и постараемся построить центръ кривизны въ данной точкѣ коническаго сѣченія

(рис. 48). Прежде всего замѣчаемъ, что, проектируя FNM на FM, находимъ

$$n\cos\psi = r - kr\cos\theta = p,$$

т. е. проекція нормали на радіусъ векторъ величина постоянная, равная p. Замѣтивъ это, получаемъ далѣе

$$\varrho = \frac{n^3}{p^2} = \frac{n}{\cos^2\psi}.$$

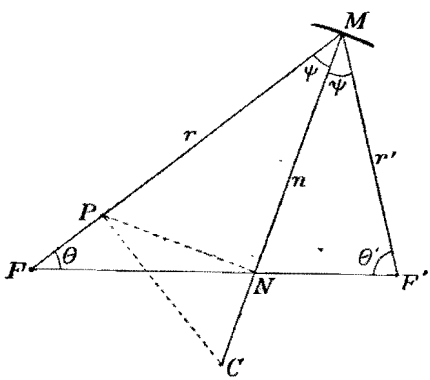


Рис. 48.

Итакъ, возставимъ перпендикуляръ къ нормали въ точкѣ N и продолжимъ его до точки встрѣчи P съ однимъ изъ радіусовъ векторовъ точки M: затѣмъ, возставимъ въ точкѣ P перпендикуляръ къ радіусу вектору; этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ нормаль въ центрѣ кривизны точки M. Къ тому же результату можно придти съ помощью нѣкоторыхъ замѣчаній, относящихся къ приложенію безконечно малыхъ въ Геометріи (§ 590, d), а именно, положивъ $MF = r$, $MF' = r'$ и обозначая черезъ θ и θ' углы при вершинахъ F и F' въ треугольникѣ MFF', можемъ написать

$$r\,d\theta = -r'\,d\theta' = \cos\psi \cdot ds.$$

Такъ какъ уголъ наклоненія нормали къ оси FF' измѣряется числомъ $\theta + \psi$ или дополненіемъ до π числа $\theta' + \psi$, то для угла смежности $d\varphi$, очевидно, получимъ

$$d\varphi = d\theta + d\psi, \qquad -d\varphi = d\theta' + d\psi.$$

Отсюда, вычитая одно равенство изъ другого и раздѣляя на ds, находимъ

$$\frac{2}{\varrho} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta'}{ds} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\cos\psi.$$

Съ другой стороны, фокусы раздѣляются гармонически касательною и нормалью, а потому ихъ проекціи на нормаль дѣлятъ гармонически отрѣзокъ n, такъ что

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{r\cos\psi} + \frac{1}{r'\cos\psi} = \frac{2}{\varrho\cos^2\psi},$$

или $\varrho\cos^2\psi = n$ и т. д. При помощи самыхъ простыхъ геометрическихъ соображеній указанное построеніе можно превратить въ другое, не менѣе полезное, данное Маннгеймомъ (Mannheim) [1]) (рис. 49). Положимъ, что перпендикуляръ, опущенный изъ C на FF' встрѣчаетъ PP' (перпендикуляръ къ нормали MN) въ точкѣ Q, а прямая, проведенная черезъ Q параллельно FF', пересѣкаетъ MF и MF' въ точкахъ G и G'. Такъ какъ углы

[1]) „Cours de Géométrie descriptive“, p. 175.

CPG и CQG прямые, то точки C, P, Q, G лежатъ на окружности круга; а потому $\angle CGQ = \angle CPQ$. Такимъ же образомъ доказывается, что $\angle CG'Q = \angle CP'Q$, а такъ какъ, очевидно, $\angle CPQ = \angle CP'Q$, то и $\angle CGQ = \angle CG'Q$, т. е. треугольникъ CGG' равнобедренный и Q, слѣдовательно, дѣлитъ GG' пополамъ. Отсюда слѣдуетъ, что прямая MQ проходитъ черезъ середину FF', т. е. черезъ центръ коническаго сѣченія. Такимъ образомъ и получается слѣдующее построеніе

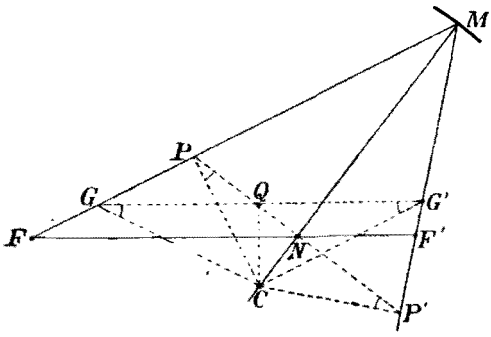


Рис. 49.

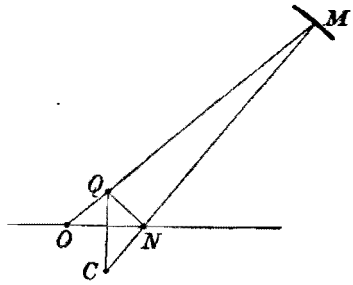


Рис. 50.

(рис. 50): изъ точки N возставимъ перпендикуляръ къ нормали до пересѣченія его въ точкѣ Q съ діаметромъ, проходящимъ черезъ M; затѣмъ изъ точки Q опускаемъ перпендикуляръ на прямую FF'; этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ нормаль въ центрѣ кривизны C.

j) Первое построеніе центра кривизны коническаго сѣченія даетъ намъ средство рѣшить слѣдующую задачу: Извѣстно построеніе центра кривизны нѣкоторой данной кривой. Требуется построить центръ кривизны въ соотвѣтствующей точкѣ подэры данной кривой относительно данной точки (рис. 51). Положимъ, что точкѣ M на данной кривой соотвѣтствуетъ точка P на подэрѣ, т. е. P есть проекція неподвижной данной точки O на касательную къ данной кривой въ точкѣ M. Пусть Q будетъ проекція центра кривизны C данной кривой на OM. Проектируемъ Q на нормаль MC, и полученную точку N соединимъ съ O. Центръ кривизны подэры въ точкѣ P находится въ точкѣ пересѣченія K прямой ON съ нормалью къ подэрѣ въ точкѣ P. Въ самомъ дѣлѣ, пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка, можно замѣнить данную кривую въ смежности съ точкою M соприкасающимся ея кругомъ (§ 592) или какою нибудь другою кривою, имѣющею тотъ же центръ кривизны C. На мѣсто подэры данной кривой относительно точки O, въ смежности съ точкою P, явится тогда подэра новой кривой, но положеніе центра кривизны K не измѣнится. Въ Аналитической Геометріи доказывается,

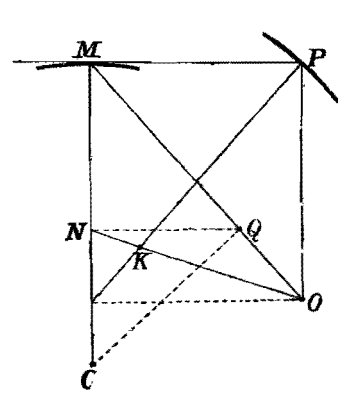


Рис. 51.

что подэра коническаго сѣченія относительно ея фокуса есть окружность круга, построеннаго на большой оси коническаго сѣченія, какъ на діаметрѣ *). Поэтому мы можемъ утверждать, что K есть центръ коническаго сѣченія, одинъ изъ фокусовъ котораго лежитъ въ O, которое проходитъ черезъ M и имѣетъ соотвѣтствующій центръ кривизны въ точкѣ C. Но изъ построенія совершенно ясно, что для этого коническаго сѣченія прямая ON есть ось, проходящая черезъ его фокусы. Слѣдовательно, K лежитъ на ON, что и требовалось доказать. Полезнымъ упражненіемъ для читателя будетъ приложеніе доказаннаго построенія къ лемнискатѣ, разсматриваемой, какъ подэра равносторонней гиперболы относительно ея центра и къ кардіоидѣ, какъ подэрѣ окружности круга относительно нѣкоторой ея точки. Съ помощью простыхъ геометрическихъ соображеній онъ найдетъ уже раньше указанныя спеціальныя построенія.

k) Примѣняя къ параболѣ первое построеніе центра кривизны коническаго сѣченія, легко замѣтить на основаніи равенства отмѣченныхъ угловъ, что треугольники MFN и PFN равнобедренны (рис. 52), откуда слѣдуетъ, что F дѣлитъ NP пополамъ. Такимъ образомъ мы приходимъ къ найденному уже построенію, на основаніи котораго можно сказать, что парабола есть синусъ-спираль съ полюсомъ въ фокусѣ. Если вмѣсто фокуса дана директриса, то указанное построеніе надо замѣнить другимъ, которое мы выведемъ весьма просто изъ предыдущаго. Проектируемъ M въ G на директрису, и пусть S — точка пересѣченія нормали съ директрисою. Прямоугольные треугольники MFL и MGS равны между собою, потому что углы при M между собою равны, и $MF = MG$, по извѣстному свойству параболы. Слѣдовательно, гипотенузы ML и MS также между собою равны. Отсюда слѣдуетъ, что радіусъ кривизны равенъ удвоенному отрѣзку нормали между точкою на кривой и директрисою. Кривыя линіи, въ которыхъ радіусъ кривизны пропорціоналенъ длинѣ нормали въ Декартовыхъ координатахъ, называются *кривыми Рибокура* (Ribaucour) Поэтому можно сказать, что парабола есть кривая Рибокура.

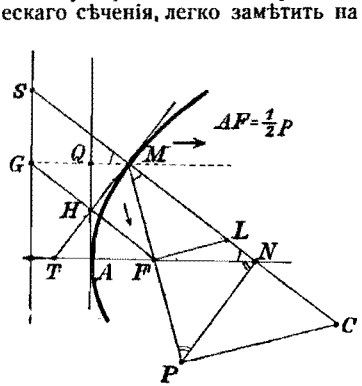


Рис. 52.

l) Къ числу ихъ принадлежитъ, между прочимъ, цѣпная линія. Въ самомъ дѣлѣ, мы доказали раньше (§ 589, c), что (рис. 32) въ прямоугольномъ треугольникѣ MPN проекція MQ длины $MP\,(=y)$ на гипотенузу $MN\,(=n)$ равна a, такъ что $y^2 = an$, а изъ уравненія кривой получимъ

$$y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}, \qquad \varrho = \frac{n^3}{y^3 y''} = \frac{a^2 n^3}{y^4} = n.$$

Слѣдовательно, центръ кривизны расположенъ симметрично съ N относительно M. Мы видѣли раньше также, что дуга s, считаемая отъ вершины A, равна PQ. Отсюда слѣдуетъ, что въ треугольникѣ MPN имѣемъ $s^2 = MQ \cdot QN$. А такъ какъ $n = MQ + QN$, то оказывается, что натуральное уравненіе цѣпной линіи будетъ $\varrho = a + \frac{s^2}{a}$.

*) См. Salmon-Fiedler „Kegelschnitte“ (1878), стр. 252.

m) Для цѣпной линіи равнаго сопротивленія

$$y = -\,a \log \cos \frac{x}{a}$$

имѣемъ

$$y' = \operatorname{tg} \frac{x}{a}, \qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\cos \frac{x}{a}}, \qquad y'' = \frac{1}{a \cos^2 \frac{x}{a}}, \qquad \varrho = \frac{a}{\cos \frac{x}{a}},$$

т. е. $\varrho \cos \varphi = a$. Слѣдовательно, проекція радіуса кривизны на ось симметріи кривой равна постоянной величинѣ a. Вычисленіе длины дуги s не такъ легко, мы его выполнимъ въ слѣдующей книгѣ. Тогда мы увидимъ также, что натуральное уравненіе нашей кривой есть

$$\varrho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

n) Еще одна весьма важная изъ кривыхъ Рибокура есть циклоида (§ 590, a). Обращаясь къ рис. 53, замѣчаемъ, что (по опредѣленію) $ON = \smile MN = a\,\theta$, а потому координаты точки M будутъ

$$x = ON - PN = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = PH + HM = a(1 - \cos\theta).$$

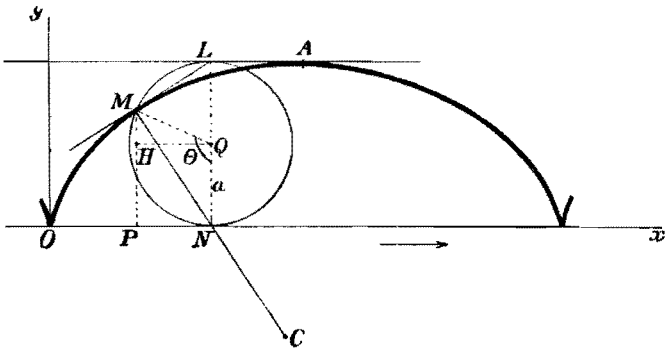


Рис. 53.

Отсюда слѣдуетъ

$$dx = a(1 - \cos\theta)\,d\theta, \qquad dy = a \sin\theta\, d\theta,$$

а потому $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$. Съ другой стороны, $\angle MLN = \frac{1}{2}\angle MQN = \frac{1}{2}\theta$. Слѣдовательно, ML — касательная, а поэтому MN — нормаль къ кривой въ точкѣ M. Возвышая въ квадратъ и складывая выраженія dx и dy, получаемъ ds^2, и изъ него послѣдовательно

$$ds = 2a \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta, \qquad s = 4a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8a \sin^2\frac{\theta}{4},$$

если условимся отсчитывать дуги отъ точки O. Длину цѣлой вѣтви циклоиды, т. е. такой ея дуги, которую опишетъ точка катящагося круга

по совершеніи имъ полнаго оборота, получимъ, положивъ $\theta = 2\pi$. Эта длина оказывается равною $8a$, т. е. учетверенному діаметру катящагося круга. Далѣе, такъ какъ уголъ смежности, независимо отъ знака, равенъ $\frac{1}{2}d\theta$, то тотчасъ находимъ $\varrho = 4a\sin\frac{\theta}{2}$, т. е. $\varrho = 2n$ ($n = MN$). Итакъ, центръ кривизны расположенъ симметрично съ M относительно N. Это свойство почти очевидно послѣ сказаннаго въ § 593 и § 590, а [1]). Наконецъ, если перенесемъ начало счета дугъ въ вершину A, середину полной дуги циклоиды, то найдемъ $s = 4a\cos\frac{\theta}{2}$, и тотчасъ получаемъ натуральное уравненіе циклоиды: $s^2 + \varrho^2 = \text{const}$.

о) Всѣ кривыя линіи, описываемыя какою нибудь точкою кривой, катящейся безъ скольженія по другой неподвижной плоской кривой, называются рулеттами (Rollkurven). Всѣ рулетты обладаютъ тѣмъ свойствомъ, которое мы замѣтили въ циклоидѣ, а именно, что нормаль къ рулеттѣ всегда проходитъ черезъ мгновенную точку касанія подвижной и неподвижной кривой *). Когда неподвижная кривая обращается въ прямую линію, а подвижная въ окружность круга, то рулетта и будетъ циклоидою. Въ обратномъ случаѣ, когда подвижная прямая катится безъ скольженія по неподвижной окружности круга, каждая точка прямой описываетъ кривую, которая называется *эвольвентою круга* (или разверткою круга). Если θ есть уголъ, на который подвижная прямая повернулась въ сторону, противоположную движенію часовой стрѣлки, начиная съ того момента, когда точка этой прямой, описывающая эвольвенту круга, находилась въ A, то координаты точки M, когда OA примемъ за ось асбциссъ, будутъ **)

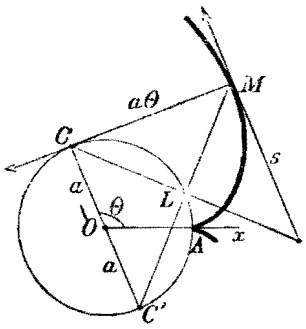


Рис. 54.

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \quad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta).$$

Поэтому

$$dx = a\theta\cos\theta\, d\theta, \quad dy = a\theta\sin\theta\, d\theta, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta,$$

$$ds = a\theta\, d\theta, \quad \varrho = \frac{ds}{d\theta} = a\theta.$$

Слѣдовательно, кривая остается постоянно нормальною къ подвижной прямой, и центръ кривизны всегда находится въ точкѣ касанія подвижной прямой съ неподвижнымъ кругомъ. Длина дуги AM есть $s = \frac{1}{2}a\theta^2$, а потому натуральное уравненіе эвольвенты круга есть $\varrho^2 = 2as$. Изъ него мы можемъ получить слѣдующее: Если прямая MC, соединяющая M съ точкою C, діаметрально противоположною точкѣ C, пересѣкаетъ окружность круга въ точкѣ L, то прямая CL отсѣчетъ на касательной отъ точки M отрѣзокъ, равный s.

---

[1]) Duhamel: „Éléments du Calcul“, т. I, стр. 177.

*) См. Cesàro „Naturliche Geometrie“, § 57.

**) X = проекціи OM = пр. OC + пр. CM на Ox и т. д.

р) Когда и неподвижная и подвижная кривыя будутъ окружности круговъ, то рулеттами будутъ *гипоциклоида* или *эпициклоида*, смотря по тому, будетъ ли касаніе круговъ внутреннее или внѣшнее. Мы ограничимся здѣсь изслѣдованіемъ этихъ спеціальныхъ рулеттъ, имѣющихъ важное приложеніе въ теоріи механизмовъ. Чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, допустимъ, что кругъ радіуса ma катится безъ скольженія по другому кругу радіуса a, при чемъ касаніе круговъ будетъ внѣшнее (рис. 55). Результаты, которые получимъ, будутъ относиться къ эпициклоидамъ, если предположимъ $m > 0$, но тѣ же формулы будутъ относиться къ гипоциклоидамъ, если предположимъ $m < 0$. Мы предположимъ, что подвижная точка M находится сперва въ точкѣ A на окружности неподвижнаго круга, имѣющаго центръ въ O, и направимъ ось абсциссъ по прямой OA. Подвижный кругъ радіуса ma, съ центромъ въ Q, катится безъ скольженія въ сторону, противоположную движенію часовой стрѣлки. Разсмотримъ его въ томъ новомъ положеніи, въ которое онъ придетъ, когда линія центровъ обоихъ круговъ повернется на уголъ $m\theta$ около точки O.

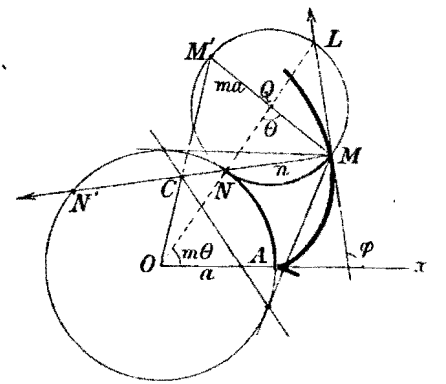


Рис. 55.

Пусть N будетъ тогда точка касанія круговъ. Теперь примемъ во вниманіе, что по условію движенія дуга $AN =$ дугѣ MN, а слѣдовательно, уголъ NQM необходимо равенъ θ. Отсюда получается, что координаты точки M будутъ

$$x = a\{(1+m)\cos m\theta - m\cos(\theta + m\theta)\},$$
$$y = a\{(1+m)\sin m\theta - m\sin(\theta + m\theta)\}.$$

Слѣдовательно,

$$dx = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right)d\theta,$$
$$dy = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right)d\theta$$

и, наконецъ,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right), \qquad \frac{ds}{d\theta} = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}.$$

Итакъ, уголъ наклоненія касательной къ оси x-овъ есть $\varphi = \frac{\theta}{2} + m\theta$. Если соединимъ точку M съ точкою L, діаметрально противоположною точкѣ N на подвижномъ кругѣ, то уголъ наклоненія ML къ оси x-овъ будетъ равенъ суммѣ угловъ $QLM = \frac{1}{2}\theta$ и $AON = m\theta$. Слѣдовательно, ML—касательная, а потому MN—нормаль. Далѣе, если будемъ считать дуги отъ A, то, очевидно, будемъ имѣть

$$s = 4m(1+m)a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8m(1+m)a\sin^2\frac{\theta}{4},$$

и поэтому длина полной дуги эпициклоиды равна $8m(1+m)a$.

Если, напротивъ, будемъ считать дуги отъ середины полной дуги ($s = 0$ при $\vartheta = \pi$), то будемъ имѣть

$$s = -4m(1+m)a\cos\frac{\vartheta}{2},$$

а такъ какъ, съ другой стороны,

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{2}{1+2m}\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{4m(1+m)}{1+2m}a\sin\frac{\vartheta}{2},$$

то натуральное уравненіе эпициклоидъ и гипоциклоидъ будетъ

$$s^2 + (1+2m)^2\varrho^2 = \text{const.}$$

Чтобы построить центръ кривизны, замѣтимъ, что отрѣзокъ нормали MN имѣетъ длину $n = 2ma\sin\frac{\vartheta}{2}$. Другой отрѣзокъ нормали MN', отсѣкаемый неподвижнымъ кругомъ, имѣетъ длину n', которую можно вычислить съ помощью пропорціи $\frac{n'-n}{n} = \frac{a}{ma}$, откуда и получаемъ $mn' = (1+m)n$. Замѣтивъ это, имѣемъ

$$\varrho = \frac{2(1+m)n}{1+2m} \text{ или } \frac{2}{\varrho} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}.$$

Слѣдовательно, точка C гармонически сопряжена съ M относительно NN', т. е. центръ кривизны въ каждой точкѣ M лежитъ на полярѣ этой точки относительно неподвижнаго круга. Это свойство тотчасъ преобразуется въ другое, если примемъ во вниманіе слѣдующее замѣчаніе. Радіусъ ON', очевидно, параллеленъ QM. Если проектируемъ четыре гармонически сопряженныя точки M, N, C, N' изъ O на QM, то проекція N' будетъ въ безконечности, а потому проекція N, т. е. точка Q, должна дѣлить пополамъ проекцію MC, т. е. C проектируется въ точку, симметрично расположенную съ M относительно Q. Иными словами: центръ кривизны въ точкѣ M лежитъ на томъ изъ діаметровъ неподвижнаго круга, который проходитъ черезъ точку M', діаметрально противоположную точкѣ M на окружности подвижнаго круга.

ч) Въ предѣльномъ случаѣ $m = 0$, при чемъ предполагается, что съ приближеніемъ m къ нулю, ma остается постояннымъ, а слѣдовательно, a безпредѣльно возрастаетъ, получимъ циклоиду ($\varrho = 2n$). Наоборотъ, при $m = \infty$, при чемъ предполагается, что $m\vartheta$ сохраняетъ постоянное значеніе ϑ, снова находимъ свойства эвольвенты круга ($\varrho = n$).

$$\varrho = 2a\lim m\sin\frac{\vartheta}{2} = a\vartheta, \quad s = 8a\lim m(1+m)\sin^2\frac{\vartheta}{4} = \frac{1}{2}a\vartheta^2.$$

Впрочемъ, ясно, что въ этомъ случаѣ, вслѣдствіе совпаденія точекъ N и N', и точка C должна съ ними совпасть. При $m = -\frac{1}{2}$, получимъ $\varrho = \infty$, т. е. гипоциклоида обращается въ прямую линію, что можно также видѣть, выполняя построеніе нормали или центра кривизны. Иными словами: если нѣкоторый кругъ, внутренне касаясь другого, вдвое большаго круга, катится по этому неподвижному кругу безъ скольженія, то каждая его точка движется по діаметру неподвижнаго круга (рис. 56). Это свойство, которое можно прямо прочесть на чертежѣ, примѣняется въ нѣкоторыхъ зубчатыхъ колесахъ. Кардіоиды также принадлежатъ къ роду эпициклоидъ, что видно изъ общихъ формулъ, если въ нихъ положимъ $m = 1$. Впрочемъ, то же самое можно видѣть и на рис. 46.

Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что $\angle PHN$ вдвое больше угла PQN и, слѣдовательно, равенъ θ, мы видимъ, что прямая $HN \parallel OM$ и проходитъ поэтому черезъ точку K — середину MM', такъ какъ HN дѣлитъ PM' пополамъ. Отсюда слѣдуетъ, что окружность круга, построеннаго по MM', какъ на діаметрѣ, касается въ точкѣ N окружности неподвижнаго круга. Съ другой стороны, очевидное равенство угловъ OHN и MKN показываетъ, что и дуги ON и MN обоихъ круговъ равны между собою. Итакъ, кардіоиду можно разсматривать, какъ рулетту, описываемую точкою подвижнаго круга, катящагося безъ скольженія по другому равному ему кругу. Общій пріемъ построенія центра кривизны приведется въ нашемъ случаѣ къ указанному уже раньше спеціальному построенію. Наконецъ, въ случаѣ $m = -\frac{1}{3}$ получаемъ астроиду (рис. 57). Чертежъ тотчасъ показываетъ, что кругъ построенный на половинѣ LN радіуса ON, какъ на діаметрѣ, проходитъ черезъ точку M на астроидѣ. Такъ какъ уголъ MKN, очевидно, вчетверо больше угла AON, то дуга MN внутренняго круга всегда равна дугѣ AN внѣшняго круга.

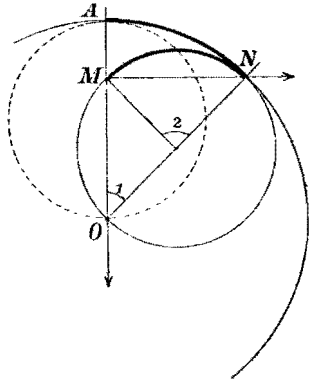


Рис. 56.

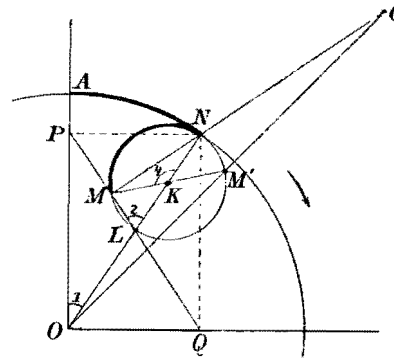


Рис. 57.

Поэтому астроиду можно разсматривать, какъ гипоциклоиду, описываемую точкою круга, катящагося (внутренне) безъ скольженія по другому неподвижному вчетверо большему кругу. Общій способъ построенія центра кривизны приводится здѣсь къ извѣстному уже изъ предыдущаго спеціальному, потому что на основаніи извѣстнаго соотношенія между отрѣзками, отсѣкаемыми трансверсалью OC на сторонахъ треугольника MKN, имѣемъ

$$NC = \frac{KM'}{MM'} \cdot \frac{ON}{OK} \cdot MC = \frac{2}{3} MC, \quad \varrho = \frac{3}{2} NC = 3\,MN.$$

г) Первый способъ построенія центра кривизны въ эпи- и гипоциклоидахъ, указанный въ упражненіи р), наводитъ на мысль изслѣдовать кривыя, опредѣляемыя слѣдующимъ свойствомъ: въ каждой точкѣ M на кривой радіусъ кривизны пропорціоналенъ отрѣзку нормали между точкою M и полярою точки M относительно неподвижнаго круга. Мы предложили бы это изслѣдованіе читателю для упражненія. Кромѣ названныхъ выше, этимъ свойствомъ пользуется безчисленное множество другихъ кривыхъ и, между прочимъ, коническія сѣченія. Для нихъ неподвижный кругъ есть кругъ Монжа (Monge), т. е. кругъ, концентрическій съ коническимъ сѣченіемъ, и радіуса, равнаго $\sqrt{a^2 + b^2}$. Если

въ общемъ случаѣ неподвижный кругъ сведется къ точкѣ, то получимъ снова синусъ-спирали. Если, наоборотъ, этотъ кругъ сведется къ прямой линіи, то получимъ кривыя Рибокура. Слѣдовательно, въ числѣ коническихъ сѣченій содержится одна синусъ-спираль и одна кривая Рибокура. Первая получится, если положимъ $a^2+b^2=0$; это будетъ, слѣдовательно, равносторонняя гипербола. Вторая получится, если будемъ увеличивать a^2+b^2 до ∞, или если представимъ себѣ, что центръ кривой удаляется въ безконечность: это будетъ парабола.

Асимптоты.

596. Представимъ себѣ двѣ точки, двигающіяся по двумъ кривымъ и стремящіяся къ совпаденію, въ то время, какъ прямая, ихъ соединяющая, уходитъ въ безконечность или безостановочно вращается около неподвижной точки. Когда подобное обстоятельство имѣетъ мѣсто (при чемъ не исключается возможность, что при нѣкоторомъ опредѣленномъ соотвѣтствіи между разсматриваемыми точками оно можетъ и не имѣть мѣста), то говорятъ, что кривыя линіи будутъ асимптотами одна относительно другой, или что онѣ расположены асимптотически одна къ другой. Представимъ себѣ, напримѣръ, что нѣкоторая точка M удаляется въ безконечность, двигаясь по кривой $y=f(x)$, такъ что разстояніе ея отъ начала координатъ возрастаетъ безпредѣльно. Тогда, по крайней мѣрѣ, одна изъ ея Декартовыхъ координатъ будетъ также безпредѣльно возрастать. Если только одна изъ координатъ возрастаетъ безпредѣльно, то всегда можно предположить, что этою координатою будетъ именно абсцисса, потому что другой случай всегда сведется къ этому путемъ замѣны y на x и обратно. Предпославъ сказанное, разсмотримъ на другой кривой, $y=g(x)$, точку, имѣющую для каждаго положенія M общую съ точкою M абсциссу x. Предположимъ далѣе, что съ приближеніемъ x къ $\pm\infty$, т. е. при безпредѣльномъ возрастаніи $|x|$, разность $f(x)-g(x)$ стремится къ нулю. Тогда можно утверждать, что разсматриваемыя кривыя расположены асимптотически одна къ другой, и то же самое можно сказать о кривыхъ, полярныя уравненія которыхъ будутъ $r=f(\theta)$ и $r=g(\theta)$. Такъ какъ при этомъ (§ 308, c) и разность $f'(x)-g'(x)$ стремится къ нулю, если она вообще къ какому-нибудь предѣлу стремится, а не колеблется постоянно, то оказывается, что обѣ кривыя не только стремятся пройти черезъ общую точку, но, вообще говоря, стремятся также пріобрѣсти общую касательную, однако, послѣднее обстоятельство необходимо всегда тщательно изслѣдовать.

597. Обозначимъ въ дальнѣйшемъ черезъ x и y координаты точки M, стремящейся въ безконечность при движеніи по данной кривой. Если удастся опредѣлить постоянныя m и h такъ, чтобы $y-mx-h$ стремилось къ нулю съ приближеніемъ x къ $\pm\infty$,

то можно будетъ сказать, что прямая $Y = mX + h$ будетъ асимптотою данной кривой. Разысканіемъ этихъ прямолинейныхъ асимптотъ мы и займемся подробнѣе. Изъ уравненія

$$\lim_{x=\pm\infty}(y - mx - h) = 0$$

тотчасъ слѣдуетъ $y - mx$ или $x\left(\frac{y}{x} - m\right)$ стремится къ конечному предѣлу h. Такъ какъ первый множитель x безпредѣльно возрастаетъ по абсолютной величинѣ, то второй $\frac{y}{x} - m$ необходимо долженъ стремиться къ нулю. Слѣдовательно,

$$\lim_{x=\pm\infty}\frac{y}{x} = m, \qquad \lim_{x=\pm\infty}(y - mx) = h.$$

Въ послѣдовательномъ примѣненіи этихъ равенствъ (геометрически очевидныхъ) и состоитъ правило разысканія асимптотъ кривыхъ, заданныхъ уравненіями въ Декартовыхъ координатахъ. Въ полярныхъ координатахъ асимптоту можно опредѣлить угломъ α ея наклоненія къ полярной оси и разстояніемъ ея q отъ полюса. Сперва замѣтимъ, что если $\frac{1}{r} = f(\theta)$ есть уравненіе данной кривой, то $f(\theta)$ стремится къ нулю, когда M удаляется въ безконечность. Слѣдовательно, если эта функція непрерывна, то углы, образуемые полярною осью съ асимптотами будутъ корнями уравненія $f(\theta) = 0$. Для полнаго опредѣленія асимптоты, соотвѣтствующей нѣкоторому данному корню α этого уравненія, достаточно замѣтить, что разстояніе точки M отъ асимптоты должно стремиться къ нулю, а потому на основаніи опредѣленія $f'(\alpha)$ должны имѣть

$$q = \lim_{r=\infty} r\sin(\theta - \alpha) = \lim_{\theta=\alpha}\frac{\theta - \alpha}{f(\theta)} = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

[**Примѣчаніе.** Опредѣляя q формулою $q = \lim_{r=\infty} r\sin(\theta - \alpha)$, нужно подъ q подразумѣвать разстояніе, взятое съ $+$ или $-$, смотря по тому, слѣва или справа отъ полюса O асимптота пересѣкаетъ полярную ось, при общепринятомъ въ Аналитической Геометріи счетѣ угла θ. Въ этомъ легко убѣдиться, построивъ изъ O перпендикуляръ OQ къ асимптотѣ, и прямую OK, параллельную асимптотѣ, а черезъ точку M прямую, параллельную OQ, пересѣкающую OK въ точкѣ K, а асимптоту въ точкѣ N. Тогда $OQ = \lim MK$ равно $\lim r\cdot\sin(\theta - \alpha)$ въ первомъ случаѣ и равно $\lim r\cdot\sin(\alpha - \theta)$ во второмъ.]

598. Теперь мы докажемъ слѣдующую теорему: Если съ удаленіемъ точки M въ безконечность касательная въ этой точкѣ стремится къ нѣкоторому предѣльному поло-

женію, то это предѣльное положеніе есть асимптота кривой. На этомъ основаніи въ Аналитической Геометріи асимптоты и разсматриваютъ, какъ касательныя въ точкахъ пересѣченія кривой съ безконечно удаленною прямой. Чтобы доказать эту теорему, сравнимъ уравненіе касательной $Y = y' X + (y - xy')$ съ уравненіемъ ея предѣльнаго положенія $Y = m_1 X + h_1$. Допустить существованіе этого предѣльнаго положенія значитъ предположить, что при безпредѣльномъ возрастаніи $|x|$ существуютъ предѣлы чиселъ y' и $y - xy'$, такъ что

$$\lim y' = m_1, \qquad \lim (y - xy') = h_1.$$

Въ то же время теорема Лопиталя даетъ

$$m = \lim \frac{y}{x} = \lim y' = m_1,$$

и далѣе,

$$h = \lim (y - mx) = \lim \frac{\frac{y}{x} - m}{\frac{1}{x}} = \lim (y - xy') = h_1,$$

что и доказываетъ теорему. То же самое можно столь же просто вывести, пользуясь полярными координатами. Въ самомъ дѣлѣ, разстояніе отъ полюса до касательной, если его считать, какъ сказано въ примѣчаніи къ предыдущему §, равно $-r \sin \omega$ [$\omega = \beta - \theta$, при чемъ β есть уголъ между касательной и полярною осью] и можетъ стремиться къ конечному предѣлу q_1 лишь въ томъ случаѣ, когда ω стремится къ предѣлу $n\pi$, гдѣ n цѣлое число. Отсюда вытекаетъ слѣдующее: если предѣльное положеніе касательной наклонено къ полярной оси подъ угломъ β_1, т. е. если $\beta = \theta + \omega$ имѣетъ предѣлъ β_1, то существуетъ и $\alpha = \lim \theta = \beta_1 - n\pi$ и, кромѣ того,

$$q = \lim \frac{1}{f'(\theta)} = -\lim \frac{r^2}{r'} = -\lim r \operatorname{tg} \omega = -\lim r \sin \omega = q_1.$$

599. Упражненія. а) Кривая $y = \frac{\cos x}{x}$, очевидно, асимптотична относительно каждой изъ осей координатъ. Но въ то время, какъ одна изъ асимптотъ, ось y-овъ, можетъ быть разсматриваема, какъ предѣльное положеніе, съ которымъ стремится совпасть касательная въ точкѣ M при безпредѣльномъ возрастаніи y, о другой, оси x-овъ, этого сказать нельзя, потому что $y - xy'$ ни къ какому предѣлу не стремится при безпредѣльномъ возрастаніи $|x|$. Иными словами, касательная постоянно колеблется, что, впрочемъ, видно и изъ того, что касательныя къ кривой въ безчисленномъ множествѣ точекъ пересѣченія кривой съ осью x-овъ проходятъ по очереди черезъ точки $y = 1$ и $y = -1$ на оси y-овъ. Итакъ, при извѣстныхъ условіяхъ асимптота можетъ и не быть предѣльнымъ положеніемъ касательной и теорема, обратная доказанной въ предыдущемъ §, не справедлива.

b) Въ предыдущемъ примѣрѣ касательная, хотя и не имѣетъ предѣльнаго положенія, стремится, однако, сдѣлаться параллельною асимптотѣ. Иное дѣло будетъ y кривой

$$y = 2^{-[x]}(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x - [x]}),$$

которую мы разсматривали раньше (§ 294, f). Здѣсь направленіе касательной колеблется такъ, что она безчисленное множество разъ дѣлается перпендикулярною къ асимптотѣ. Для кривой $xy = [x]$ получается опять новое обстоятельство: при безконечномъ x имѣемъ 1) $\lim y = 1$, 2) $\lim y' = 0$ и 3) $\lim (y - xy') = 2\lim \dfrac{[x]}{x} = 2$, т. е. касательная стремится къ предѣльному положенію ($y = 2$), но это положеніе не совпадаетъ съ асимптотою ($y = 1$). Этотъ результатъ не противорѣчитъ теоремѣ, доказанной въ предыдущемъ §; дѣйствительно, при доказательствѣ ея мы примѣняли теорему Лопиталя, слѣдовательно, молча предполагали, что производная y' — единственна; между тѣмъ какъ въ данномъ примѣрѣ производная слѣва совсѣмъ не существуетъ для всѣхъ точекъ, абсцисса которыхъ цѣлое число. Этотъ примѣръ показываетъ только, что надо быть всегда осторожнымъ въ примѣненіи теоремы, и не забывать провѣрить, выполнены ли всѣ ограниченія, при которыхъ она справедлива.

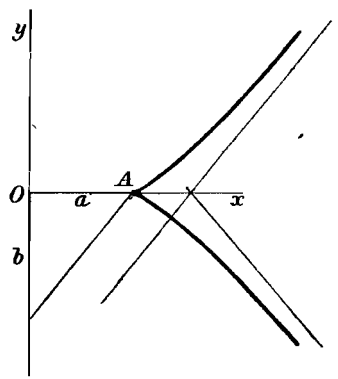


Рис. 58.

c) Чтобы разыскать асимптоты кривой, заданной уравненіями $x\cos\theta = a$, $y = b(\operatorname{tg}\theta - \theta)$ (рис. 58) (профиль развертывающагося геликоида), или точнѣе говоря, той вѣтви кривой, которая соотвѣтствуетъ значеніямъ θ въ интервалѣ $\left(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right)$, надо прежде всего замѣтить, что для безпредѣльнаго возрастанія той или другой изъ координатъ x и y необходимо приближать θ къ $\pm\dfrac{\pi}{2}$. При этихъ условіяхъ имѣемъ

$$m = \lim\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\lim(\sin\theta - \theta\cos\theta) = \pm\frac{b}{a},$$

$$\lim\left(y \mp \frac{b}{a}x\right) = b\lim\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta \mp 1}{\cos\theta} = -b\lim\theta = \mp\frac{1}{2}\pi b.$$

Слѣдовательно, искомыя асимптоты будутъ прямыя, изображаемыя уравненіями $\dfrac{x}{a} \mp \dfrac{y}{b} = \dfrac{\pi}{2}$.

d) При разысканіи асимптотъ не надо забывать измѣнять x не только до $+\infty$, но и до $-\infty$, потому что въ обоихъ случаяхъ могутъ получиться различныя асимптоты. Напримѣръ, для кривой $y = x\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, когда x стремится къ $\pm\infty$, получаемъ

$$m = \lim\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \pm 1,$$

$$h = \lim(y \mp x) = \mp\lim\frac{2x}{e^{2x} + 1} = 0,$$

и кривая асимптотична къ прямымъ, дѣлящимъ пополамъ углы между осями координатъ (рис. 59). Болѣе простой примѣръ даетъ кривая $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

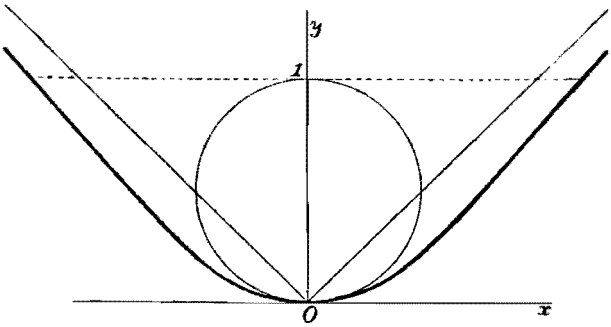


Рис. 59.

Разсмотрѣніе обоихъ случаевъ необходимо и для того, чтобы знать, по одному или по обоимъ направленіямъ кривая приближается къ асимптотѣ.

е) Кривая $y = \left(\dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}\right)$ имѣетъ въ началѣ координатъ двѣ касательныя (рис. 60), потому что (§ 282, с) слѣва отъ начала $y' = 1$, а справа $y' = 0$.

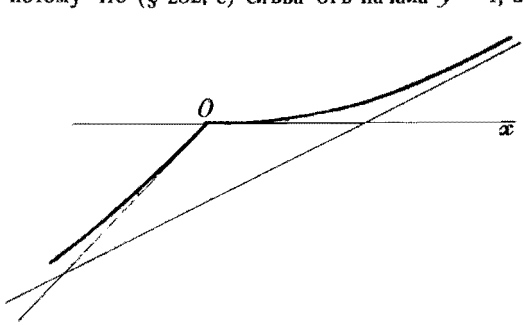


Рис. 60.

Съ приближеніемъ x къ $\pm\infty$, $|y|$ возрастаетъ безпредѣльно. Но обѣ вѣтви кривой, получаемыя такимъ образомъ, имѣютъ одну и ту же асимптоту, потому что $\lim e^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1$, и слѣдовательно,

$$m = \lim \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2},\quad h = \lim\left(y - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\lim x\,\frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{4},$$

при $x = \pm\infty$. Поэтому уравненіе асимптоты будетъ $x - 2y = \frac{1}{2}$. Къ тому же результату еще проще придемъ съ помощью разложенія y въ безконечный рядъ

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + \cdots$$

f) Разложенія въ ряды весьма полезны при изслѣдованіи безконечныхъ вѣтвей кривыхъ. Такъ, напримѣръ, для кривой $y = x e^{\frac{1}{x}}$ достаточно замѣтить, что $y = x + 1 + \frac{1}{2x} + \cdots$, чтобы тотчасъ обнаружить асимптоту: $y = x + 1$. Такъ какъ при этомъ y безпредѣльно возрастаетъ и тогда, когда x стремится къ нулю убывая и, наоборотъ, стремится къ нулю, когда x приближается къ нулю возрастая, то мы видимъ, что обѣ вѣтви кривой имѣютъ найденную выше асимптоту, а кромѣ того, одна вѣтвь имѣетъ еще асимптотою ось y-овъ, а другая вѣтвь исходитъ изъ начала координатъ. Подобнымъ же образомъ легко убѣдиться, что кривая $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ имѣетъ единственную прямолинейную асимптоту — ось y-овъ (для одной правой вѣтви), но зато имѣетъ еще параболическую асимптоту $y = x^2 + x + \frac{1}{2}$, распространяющуюся внутри лѣвой и внѣ правой вѣтви. Замѣчательна, далѣе, кривая $y = \frac{x^2}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, весьма похожая на параболу и стремящаяся по мѣрѣ удаленія въ безконечность совпасть съ параболою $y = \frac{1}{4}(2x^2 - x)$. Если мы эту параболу передвинемъ по плоскости такъ, чтобы вершина ея попала въ начало координатъ, то въ этой точкѣ обѣ кривыя — данная и парабола, будутъ касаться одна другой и въ то же время пересѣкаться, потому что справа отъ начала $y < \frac{1}{2}x^2$, а слѣва $y > \frac{1}{2}x^2$.

g) Примѣняя къ гиперболической спирали ($r\theta = a$) формулы, выведенныя въ концѣ § 597, получаемъ

$$f(\theta) = \frac{\theta}{a}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{a}, \quad \alpha = 0, \quad q = a,$$

и находимъ такимъ образомъ снова асимптоту, параллельную полярной оси, на которую уже указывали раньше (§ 589, g). Такимъ же образомъ для квадратрисы (§ 589, i) получимъ

$$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{a\theta}, \quad f'(\theta) = \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{a\theta^2}, \quad \alpha = n\pi, \quad q = (-1)^n n\pi a.$$

Аналогично этому показываютъ, что синусъ-спирали (§ 589, m) лишь при $m < -1$ имѣютъ асимптоты въ конечной части плоскости и въ этомъ случаѣ всѣ эти асимптоты проходятъ черезъ полюсъ и образуютъ съ полярной осью углы

$$0, \quad \frac{\pi}{m}, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \ldots.$$

h) Для коническаго сѣченія, заданнаго уравненіемъ $r = \frac{p}{1 - k\cos\theta}$, имѣемъ

$$f(\theta) = \frac{1 - k\cos\theta}{p}, \quad f'(\theta) = \frac{k}{p}\sin\theta, \quad \cos\alpha = \frac{1}{k}, \quad q = \frac{\pm p}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Лишь для гиперболы, т. е. при $k > 1$, α — вещественное; безчисленное множество угловъ, которыхъ косинусъ равенъ $\frac{1}{k}$, опредѣляютъ всего два различныхъ направленія, антипараллельныхъ относительно фокальной оси гиперболы. Въ этомъ случаѣ $p = -\frac{b^2}{a}$, $k^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$, поэтому $q = \pm b$ или $q = \pm ka\sin\alpha$. Слѣдовательно, обѣ асимптоты проходятъ черезъ центръ и отстоятъ отъ полюса, т. е. отъ фокусовъ, въ разстояніи b.

i) Если при изслѣдованіи кривыхъ въ полярныхъ координатахъ оказывается, что r стремится къ предѣлу a, когда θ измѣняется до $\pm\infty$, то можно утверждать, что кривая имѣетъ асимптотическій кругъ радіуса a съ центромъ въ полюсѣ. Полезно замѣтить, что обыкновенно (§ 308, c) съ приближеніемъ r къ a, производная r' въ то же время стремится къ нулю, такъ что ω стремится къ $\frac{\pi}{2}$, а слѣдовательно, кривая стремится сдѣлаться касательною къ кругу. Въ частности, когда $a=0$ получается асимптотическая точка. Этотъ случай имѣетъ мѣсто для различныхъ разсмотрѣнныхъ раньше кривыхъ (§ 589, e, g, h), а именно для логариѳмической и гиперболической спиралей и для кохлеоиды. Достаточно построить конхоиды (§ 589, j) этихъ кривыхъ относительно полюса, чтобы получить другія кривыя, имѣющія асимптотическіе круги. Особенно замѣчательны конхоиды логариѳмической спирали, которыя для одной и той же данной спирали всѣ другъ другу подобны. Въ самомъ дѣлѣ, если направимъ полярную ось отъ полюса данной спирали къ точкѣ ея пересѣченія съ асимптотическимъ кругомъ одной изъ ея конхоидъ, то уравненіе конхоиды необходимо будетъ вида $r=a(e^{m\theta}\pm 1)$, гдѣ только a — радіусъ асимптотическаго круга — произвольно. Вѣтвь, соотвѣтствующая знаку $+$, лежитъ внѣ этого круга и обвиваетъ его безконечное число разъ. Другая вѣтвь проникаетъ внутрь круга, проходитъ черезъ полюсъ, въ смежности съ которымъ она имѣетъ видъ, подобный Архимедовой спирали ($r=m\,a\,\theta$), а затѣмъ удаляется отъ него безконечнымъ числомъ оборотовъ, безпредѣльно приближаясь къ окружности круга.

600. Займемся теперь подробнѣе асимптотами алгебраическихъ кривыхъ, и начнемъ съ тѣхъ, которыя параллельны оси y-овъ. Съ этой цѣлью расположимъ уравненіе кривой, которое предположимъ приведеннымъ къ цѣлой раціональной формѣ, по убывающимъ степенямъ y:

$$y^n\psi(x)+y^{n-1}\psi_1(x)+y^{n-2}\psi_2(x)+\cdots+\psi_n(x)=0.$$

При безконечномъ y величина x должна стремиться къ конечному предѣлу l, къ вычисленію котораго и сводится вопросъ. При этомъ непрерывныя функціи $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, ... будутъ стремиться къ конечнымъ предѣламъ $\psi(l)$, $\psi_1(l)$, ... Если раздѣлимъ всѣ члены уравненія на y^n и будемъ увеличивать $|y|$ до ∞, то найдемъ, что $\psi(l)=0$. Это и есть уравненіе, каждому корню l котораго соотвѣтствуетъ асимптота $X=l$. Оставляя теперь въ сторонѣ асимптоты, параллельныя оси y-овъ, расположимъ уравненіе данной кривой по однороднымъ группамъ членовъ одинаковой степени. Положивъ $y=tx$, можемъ написать

$$x^n\varphi(t)+x^{n-1}\varphi_1(t)+x^{n-2}\varphi_2(t)+\cdots+\varphi_n(t)=0. \tag{12}$$

Но $m=\lim t$ и m число конечное; слѣдовательно, если раздѣлимъ уравненіе (12) на x^n, то при безконечномъ x найдемъ $\varphi(m)=0$. Это уравненіе надо рѣшить, чтобы найти угловые коэффиціенты асимптотъ. Предположимъ сперва, что m простой корень уравненія $\varphi(m)=0$, такъ что $\varphi'(m)\gtrless 0$, и постараемся найти соотвѣтству-

ющее значеніе h. Раздѣливъ уравненіе (12) на x^{n-1}, получаемъ

$$x\varphi(t)+\varphi_1(t)+\frac{\varphi_2(t)}{x}+\cdots=0; \tag{13}$$

далѣе, замѣчая, что

$$\lim x(t-m)=\lim(y-mx)=h,$$

и принимая во вниманіе, что $\varphi(m)=0$, находимъ

$$\lim x\varphi(t)=\lim x(t-m)\cdot\lim\frac{\varphi(t)}{t-m}=h\varphi'(m),$$

на основаніи опредѣленія $\varphi'(m)$. Итакъ, уравненіе (13) приводится къ

$$h\varphi'(m)+\varphi_1(m)=0 \text{ и даетъ } h=-\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}.$$

Если m кратный корень φ, то $\varphi'(m)=0$, и если при этомъ $\varphi_1(m)$ не равно 0, то можно сказать, что асимптота удалена въ безконечность. Если при $\varphi'(m)=0$ и $\varphi_1(m)=0$, то предыдущее уравненіе не опредѣляетъ h, и надо возвратиться къ уравненію (12). Раздѣливъ его на x^{n-2}, получимъ

$$x^2\varphi(t)+x\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\frac{\varphi_3(t)}{x}+\cdots=0. \tag{14}$$

Теперь

$$\lim x^2\varphi(t)=\lim x^2(t-m)^2\cdot\lim\frac{\varphi(t)}{(t-m)^2}=\frac{1}{2}h^2\varphi''(m);$$

и уравненіе (14) при безконечномъ x приводится къ

$$\tfrac{1}{2}h^2\varphi''(m)+h\varphi_1'(m)+\varphi_2(m)=0 \tag{15}$$

и даетъ два значенія для h, соотвѣтствующія двумъ (вещественнымъ или мнимымъ) асимптотамъ (предполагая, конечно, что $\varphi''(m)$ не равно 0). Если m тройной корень функціи φ, то, вообще говоря, одна изъ соотвѣтствующихъ асимптотъ находится въ безконечности; обѣ будутъ въ безконечности, если и $\varphi_1'(m)=0$; наконецъ, если всѣ коэффиціенты уравненія (15) равны нулю, то надо снова разсмотрѣть уравненіе (12), раздѣлить его на x^{n-3} и затѣмъ перейти къ предѣлу при безконечномъ x, что даетъ

$$\tfrac{1}{6}h^3\varphi'''(m)+\tfrac{1}{2}h^2\varphi_1''(m)+h\varphi_2'(m)+\varphi_3(m)=0$$

и т. д.

601. Съ помощью однородныхъ координатъ разысканіе асимптотъ алгебраическихъ кривыхъ можно провести проще, пользуясь теоремою, доказанной въ § 598. Прежде всего замѣтимъ, что результатъ, выражаемый уравненіемъ $\varphi(m)=0$, можно формули-

ровать слѣдующимъ образомъ: если въ уравненіи кривой n-го порядка откинемъ всѣ члены степеней ниже n, то полученное уравненіе будетъ изображать систему прямыхъ, проведенныхъ черезъ начало координатъ параллельно n асимптотамъ кривой; эти прямыя могутъ быть вещественными или мнимыми, различными или совпадающими одна съ другой. Это сдѣлается, такъ сказать, очевиднымъ, если положимъ

$$\Phi(x, y, z) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + z x^{n-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + z^2 x^{n-2} \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots,$$

чтобы привести уравненіе кривой къ однородному виду, и замѣтимъ потомъ, что написать уравненіе $\varphi = 0$ все равно, что положить $z = 0$ въ уравненіи $\Phi = 0$, т. е. разсмотрѣть n точекъ пересѣченія кривой съ безконечно удаленною прямою. Теперь напишемъ уравненіе касательной (§ 587)

$$X\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + Z\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

и, чтобы выразить, что точка касанія уходитъ въ безконечность, положимъ въ коэффиціентахъ этого уравненія $z = 0$. Получится уравненіе, однородное относительно x и y. Изъ этого уравненія и того, которое получится изъ $\Phi = 0$ при $z = 0$, исключаемъ отношеніе $\frac{y}{x}$. Въ результатѣ и получится уравненіе, изображающее совокупность асимптотъ. Въ сущности, эта метода не отличается отъ изложенной выше. Въ самомъ дѣлѣ, при $z = 0$, имѣемъ $\Phi = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т. е. $\Phi = 0$, когда $\frac{y}{x}$ принимаетъ значеніе, равное m, удовлетворяющее уравненію $\varphi(m) = 0$. Кромѣ того, имѣемъ (при $z = 0$)

$$x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^{n-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x^{n-1}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

слѣдовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -m x^{n-1}\varphi'(m), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^{n-1}\varphi'(m), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x^{n-1}\varphi_1(m)$$

и уравненіе (16) въ неоднородныхъ координатахъ принимаетъ видъ

$$Y = mX - \frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}.$$

602. Упражненія. а) Дана кривая $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, носящая названіе *Декартова листа* (Folium Cartesii). Для разысканія углового коэффиціента асимптоты имѣемъ уравненіе $1 + m^3 = 0$, имѣющее одинъ вещественный корень $m = -1$; далѣе,

$$h = -\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)} = \frac{3ma}{3m^2} = -a.$$

Слѣдовательно, кривая имѣетъ только одну вещественную асимптоту, изображаемую уравненіемъ $x+y+a=0$. Въ приложеніяхъ нѣтъ надобности помнить формулы, выведенныя въ § 600; достаточно помнить только пріемъ, съ помощью котораго эти формулы были выведены. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, замѣтивъ, что $x+y$ единственный вещественный множитель совокупности членовъ наивысшей степени x^3+y^3, можно прямо написать уравненіе асимптоты

$$x+y=\left(\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}\right)_{y=-x}=-a.$$

Къ тому же результату придемъ, пользуясь разложеніемъ y въ рядъ:

$$y=-x-a+\frac{a^3}{3x^2}-\frac{a^4}{3x^3}+\cdots.$$

b) Разсмотримъ болѣе общее уравненіе

$$(x+y)(x^2-2kxy+y^2)=2(1+k)axy,$$

дающее при $k=\frac{1}{2}$ опять Декартовъ листъ, а при $k=0$ другую важную кривую — *логоциклику*. При $k^2<1$ существуетъ только одна вещественная асимптота, изображаемая уравненіемъ

$$x+y=\left(\frac{2(1+k)axy}{x^2-2kxy+y^2}\right)_{y=-x}=-a,$$

такъ что всѣ кривыя, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ k, имѣютъ общую асимптоту $x+y+a=0$. Напротивъ того, всѣ кривыя, для которыхъ $k^2>1$, имѣютъ еще двѣ другія вещественныя асимптоты, параллельныя прямымъ

$$x^2-2kxy+y^2=(y-mx)(y-m'x)=0,$$

гдѣ $m=k\pm\sqrt{k^2-1}$. Уравненіе одной изъ асимптотъ есть

$$y-mx=\left(\frac{2(1+k)axy}{(x+y)(y-m'x)}\right)_{y=mx}=\frac{2(1+k)ma}{(1+m)(m-m')}=\frac{ma}{m-1},$$

такъ что для изображенія обѣихъ асимптотъ получается уравненіе

$$y=kx+\frac{1}{2}a\pm\left(x+\frac{\frac{1}{2}a}{k-1}\right)\sqrt{k^2-1}.$$

Эти асимптоты пересѣкаются въ точкѣ $x=y=-\frac{a}{2(k-1)}$ и образуютъ уголъ, косинусъ котораго равенъ $\frac{1}{k}$. Только при $k=2$ всѣ три асимптоты проходятъ черезъ одну точку и соотвѣтственно параллельны сторонамъ равносторонняго треугольника.

c) Чтобы показать примѣненіе однородныхъ координатъ, разсмотримъ снова Декартовъ листъ и положимъ

$$\Phi(x,y,z)=x^3+y^3-3axyz,$$

чтобы затѣмъ приложить сказанное въ предыдущемъ §. При $z = 0$ имѣемъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -3axy$$

и уравненіе всѣхъ асимптотъ получится черезъ исключеніе $\frac{y}{x}$ изъ уравненій

$$x^3 + y^3 = 0, \quad Xx^2 + Yy^2 - axy = 0,$$

или, черезъ исключеніе m изъ уравненій $1 + m^3 = 0$ и $x + m^2 y = ma$ (если обозначимъ текущія координаты X и Y буквами x и y). Выполняя это исключеніе, получимъ уравненіе

$$x^3 + y^3 + a^3 = 3axy,$$

которое разлагается на слѣдующія три

$$x + y + a = 0, \quad x + \omega y + \omega^2 a = 0, \quad x + \omega^2 y + \omega a = 0,$$

гдѣ ω — мнимый кубическій корень изъ 1. Слѣдовательно, Декартовъ листъ, кромѣ вещественной асимптоты $x + y + a = 0$, имѣетъ еще двѣ мнимыя, пересѣкающіяся въ точкѣ (a, a). Полученное уравненіе можно было бы прямо написать, исходя изъ того замѣчанія, что общее уравненіе всѣхъ асимптотъ алгебраической кривой n-го порядка должно получиться изъ уравненія самой кривой, если въ немъ измѣнимъ коэффиціенты при членахъ ниже $(n-1)$-го порядка такимъ образомъ, чтобы уравненіе разложилось на n линейныхъ уравненій. Въ случаѣ Декартова листа это замѣчаніе прямо приводитъ къ цѣли, потому что, какъ мы уже знаемъ (§ 473), достаточно прибавить a^3 къ $x^3 + y^3 - 3axy$, чтобы получить значеніе циркулянта (x, y, a), который разлагается на три линейныхъ множителя.

d) Положимъ еще

$$\Phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

Уравненіе касательной будетъ

$$(ax + hy + gz)X + (hx + by + fz)Y + (gx + fy + cz)Z = 0.$$

Положивъ $z = 0$ и $Z = 1$, получаемъ

$$(aX + hY + g)x + (hX + bY + f)y = 0$$

и надо будетъ исключить $\frac{y}{x}$ изъ этого уравненія и уравненія

$$ax^2 + by^2 + 2hxy = 0.$$

Тогда, замѣнивъ опять X и Y черезъ x и y, получимъ

$$a(hx + by + f)^2 + b(ax + hy + g)^2 - 2h(ax + hy + g)(hx + by + f) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} a & h & ax + hy + g \\ h & b & hx + by + f \\ ax + hy + g & hx + by + f & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая изъ послѣдняго столбца первый, умноженный на x, и второй, умноженный на y, и поступая также со строками, находимъ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c-\Phi \end{vmatrix} = 0.$$

Итакъ, уравненіе совокупности всѣхъ асимптотъ коническаго сѣченія

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0$$

получимъ, поставивъ въ правой части вмѣсто нуля $\frac{D}{ab-h^2}$, гдѣ D дискриминантъ формы Φ. Къ этому результату можно придти быстрѣе, пользуясь тѣмъ же замѣчаніемъ, которое мы примѣнили въ предыдущемъ примѣрѣ; оно приводитъ къ замѣнѣ числа c, такимъ числомъ c', чтобы уравненіе разложилось на два линейныхъ. Для этого необходимо, чтобы новый дискриминантъ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & 0 \\ g & f & c'-c \end{vmatrix} = D + (ab - h^2)(c' - c)$$

обратился въ нуль, откуда и получаемъ $c' = c - \frac{D}{ab - h^2}$.

Особенности плоскихъ кривыхъ.

603. Точки изгиба (Wendepunkte). Нѣкоторыя особенности, проявляющіяся въ извѣстныхъ точкахъ кривой, и вліяющія на ея форму, даютъ основаніе называть эти точки особенными (singuläre Punkte). Такъ, напримѣръ, въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ $y' = 0$, является та особенность, что ордината кривой, вообще говоря, будетъ максимумъ или минимумъ, однако, такія точки не причисляются къ особеннымъ, потому что достаточно измѣнить направленіе осей, чтобы эта особенность передвинулась въ другое мѣсто. Но это уже не относится къ такимъ точкамъ, въ которыхъ $y'' = 0$; эти точки называются точками изгиба и будутъ особенными, потому что въ нихъ кривизна равна нулю, т. е. онѣ обладаютъ свойствомъ, которое нельзя уничтожить перемѣною координатныхъ осей. Впрочемъ, легко показать и непосредственно, что въ смежности съ точкою M кривая не такъ расположена относительно касательной, какъ въ смежности съ обыкновенными точками. Если перенесемъ начало координатъ въ M и направимъ координатныя оси по касательной и по нормали, то по опредѣленію y'', какъ производной

отъ y', будемъ имѣть $\lim\limits_{x=0} \frac{y'}{x} = 0$*), и по теоремѣ Лопиталя $\lim\limits_{x=0} \frac{y}{x^2} = 0$. Слѣдовательно, разстояніе отъ касательной въ точкѣ M до безконечно близкихъ къ M точекъ на кривой будетъ безконечно малымъ выше 2-го порядка, такъ что можно сказать, что въ смежности съ точкою изгиба кривая тѣснѣе примыкаетъ къ касательной, чѣмъ въ обыкновенныхъ точкахъ. Далѣе, чтобы оправдать названіе точки изгиба, замѣтимъ, что y'', обращаясь въ нуль, вообще говоря, измѣняетъ свой знакъ, а поэтому (§ 348, d), при переходѣ черезъ такую точку выпуклость кривой переходитъ въ вогнутость и наоборотъ. Слѣдовательно, здѣсь дѣйствительно происходитъ изгибъ кривой въ обыкновенномъ смыслѣ слова, и касательная пересѣкаетъ кривую. Это обстоятельство, однако, не будетъ имѣть мѣста, если y'' сохраняетъ постоянный знакъ въ смежности съ M, и когда нуль есть максимумъ или минимумъ функціи y''. Отсюда слѣдуетъ, что абсциссы точекъ, въ которыхъ касательная пересѣкаетъ кривую, будутъ простыми корнями, или корнями нечетной кратности функціи y'' (§ 313). Это объясняется также весьма просто тѣмъ, что эти значенія x дѣлаютъ y' максимумомъ или минимумомъ, т. е. будутъ абсциссами тѣхъ точекъ на кривой, въ которыхъ касательная перестаетъ вращаться въ одномъ направленіи и начинаетъ вращаться въ другомъ. Это ясно видно и изъ формулы (7).

604. Чтобы разыскать точки изгиба кривой $y = f(x)$, надо рѣшить уравненіе $f''(x) = 0$ или другое (§ 594), ему равносильное, выражающее, что кривизна равна нулю. Если, напримѣръ, кривая задана уравненіями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то вмѣсто $y'' = 0$ удобнѣе взять уравненіе $dx\, d^2y - dy\, d^2x = 0$, иными словами, точки изгиба соотвѣтствуютъ тѣмъ значеніямъ t, которыя обращаютъ въ нуль функцію $\varphi'(t)\,\psi''(t) - \varphi''(t)\,\psi'(t)$. Если же кривая задана въ полярныхъ координатахъ, то надо пользоваться уравненіемъ $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$, исключая корни уравненія $r = 0$ (очевидно, кратные), а если уравненіе кривой задано въ видѣ $\frac{1}{r} = f(\theta)$, то надо рѣшить уравненіе $f + f'' = 0$.

[**Примѣчаніе.** По формулѣ (8) $\frac{1}{\varrho} = 0$, когда

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0, \tag{1}$$

а $r^2 + r'^2$ не равно 0; поэтому и надо исключить корни уравненія $r = 0$, для которыхъ при условіи (1) и $r' = 0$. Если $r = \frac{1}{f}$, то уравненіе (1) обратится въ $f + f'' = 0$, при f не равномъ 0.]

---

*) Потому что при нашемъ выборѣ осей y и y' равны 0 при $x = 0$.

Если, наконецъ, кривая задана уравненіемъ $f(x, y) = 0$ въ Декартовыхъ координатахъ, то уравненіе, дающее точки изгиба, будетъ

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[по формулѣ (9)], при чемъ исключаются тѣ точки, для которыхъ и $\Delta f = 0$. Въ случаѣ алгебраическихъ кривыхъ уравненіе (17) можно представить въ замѣчательной формѣ, предполагая, что уравненіе кривой приведено къ однородному виду. Пусть n будетъ степень уравненія; умножимъ въ написанномъ выше опредѣлителѣ послѣдній столбецъ на $n-1$, затѣмъ вычтемъ изъ него первый столбецъ, умноженный на x, и второй, умноженный на y; потомъ повторимъ тѣ же операціи со строками. Первые два элемента послѣдняго столбца или послѣдней строки обратятся тогда (§ 371) въ

$$(n-1)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z},$$

$$(n-1)\frac{\partial f}{\partial y} - \left(x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = z\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},$$

а послѣдній элементъ въ

$$-(n-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) - z\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)$$
$$= (n-1)\,z\frac{\partial f}{\partial z} - z\left((n-1)\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right),$$

что приведется къ $z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Разсматриваемое уравненіе приметъ, слѣдовательно, видъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Итакъ, чтобы опредѣлить точки изгиба алгебраической кривой $f=0$, надо приравнять нулю Гессіанъ H функціи f, приведенной къ однородному виду (см. §§ 378 и 569). Кривая $H=0$ называется кривою Гессе отъ данной кривой $f=0$. Точками изгиба данной кривой будутъ, слѣдовательно, точки пересѣченія данной

кривой съ ея кривою Гессе; а такъ какъ послѣдняя порядка $3(n-2)$, то число точекъ изгиба, вообще говоря, равно $3n(n-2)$. Такъ напримѣръ, коническія сѣченія совсѣмъ не имѣютъ точекъ изгиба; кривыя 3-го порядка имѣютъ ихъ девять (изъ коихъ 6 всегда мнимыя) и т. д. Надо замѣтить, припоминая формулу (9), что всякая общая точка кривыхъ $f=0$ и $H=0$ только тогда будетъ точкою изгиба, когда ея координаты не обращаютъ въ нуль Δf, т. е. когда первыя производныя отъ f не равны нулю одновременно. Условіе $\Delta f=0$, одновременно съ $f=0$, даетъ другія особенныя точки, которыя также удовлетворяютъ уравненію (17) и потому лежатъ на кривой Гессе. Объ этихъ точкахъ мы вскорѣ будемъ говорить (§ 606); здѣсь замѣтимъ только, что ихъ существованіе уменьшаетъ число $3n(n-2)$ точекъ изгиба.

605. Упражненія. a) Для квадратрисы $y=x\operatorname{ctg}\frac{x}{a}$ имѣемъ $y''=\frac{2(y-a)}{a^2\sin^2\frac{x}{a}}$, и уравненіе, опредѣляющее точки изгиба будетъ $y=a$, предполагая, что $x\gtrless 0$. Слѣдовательно, центральная вѣтвь не имѣетъ точекъ изгиба, но касательная въ вершинѣ пересѣкаетъ всѣ другія вѣтви въ соотвѣтствующихъ точкахъ изгиба. Нормали къ кривой во всѣхъ этихъ точкахъ проходятъ черезъ начало координатъ.

b) Фигура кривой, изображаемой уравненіемъ $y=x\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (§ 599, d) обнаруживаетъ двѣ точки изгиба, симметричныя относительно оси y-овъ; и дѣйствительно, уравненіе $y''=0$ приводится къ $y=1$ — уравненію прямой, пересѣкающей данную кривую въ двухъ точкахъ изгиба.

c) Для кривой $y=x^2\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ уравненіе точекъ изгиба слишкомъ сложно, чтобы можно было съ пользою ихъ примѣнить. Но о формѣ кривой можно составить заключеніе, замѣтивъ, что эта кривая (рис. 61) проходитъ черезъ начало координатъ, касаясь въ немъ оси x-овъ (см. § 294, b), и уходитъ въ безконечность, имѣя асимптотою прямую $y=\frac{1}{2}x$. Кромѣ того, разложеніе

$$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{8x}+\cdots$$

показываетъ еще, что кривая асимптотична къ гиперболѣ $x^2-2xy=\frac{1}{4}$. Это облегчаетъ ея приближенное вычерчиваніе и даетъ основаніе предположить, что кривая въ трехъ точкахъ, въ томъ числѣ въ началѣ координатъ, образуетъ изгибы. Однако, должно замѣтить, что точка O не будетъ точкою изгиба, и такимъ образомъ получается примѣръ кривой, которая пересѣкаетъ свою касательную къ точкѣ, не принадлежащей къ точкамъ изгиба. Дѣйствительно, мы знаемъ (§ 314, i), разсматривая y'', какъ производную отъ y' справа и и слѣва, что при $x=0$, $y''=+2$ или $y''=-2$. Достаточно, впрочемъ, замѣтить, что $\lim\left(\frac{y}{x^2}\right)=\pm 1$, чтобы увидѣть, что

точкѣ O не достаетъ существеннаго признака точекъ изгиба, а именно разстояніе между касательной въ точкѣ O и точками, безко-

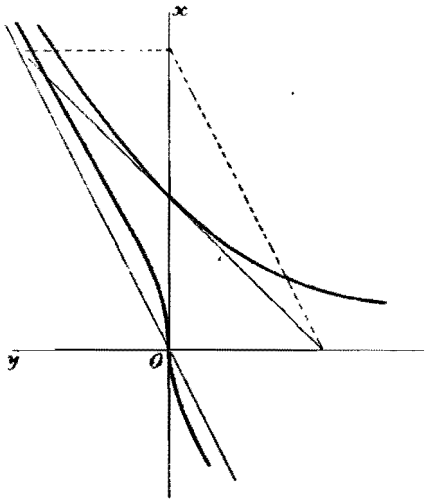


Рис. 61.

нечно близкими къ O на кривой, есть безконечно малая не выше 2-го порядка, а именно 2-го, какъ для обыкновенныхъ точекъ.

d) Чтобы убѣдиться, насколько полезно имѣть вѣрный аналитическій признакъ точки изгиба ($y''=0$) достаточно построить кривую $y=e^x+\sin x$, прибавляя къ каждой ординатѣ логариѳмической кривой величину $\sin x$. Грубый чертежъ привелъ бы къ заключенію, что кривая при $x>0$ изгибается безконечное число разъ, между тѣмъ это несправедливо, потому что функція $y''=e^x-\sin x$ положительныхъ корней не имѣетъ, такъ какъ при $x>0$ $e^x>1\geqq\sin x$. Наоборотъ, при $x<0$ кривая имѣетъ безчисленное множество точекъ изгиба, а именно въ точкахъ пересѣченія кривыхъ $y=e^x$ и $y=\sin x$.

e) Для улитки ($r=a\cos\vartheta+b$) легко найдемъ

$$r^2+2r'^2-rr''=2a^2+b^2+3ab\cos\vartheta.$$

Чтобы эта функція отъ ϑ могла имѣть вещественные корни, необходимо, чтобы $2a^2+b^2$ были не больше $3ab$; слѣдовательно, b должно заключаться въ интервалѣ $(a; 2a)$, но нижнюю границу a надо исключить, потому что при $b=a$ получаемъ $\vartheta=\pi$, а это двойной корень функціи r. Слѣдовательно, (см. § 589, k) единственныя улитки, имѣющія точки изгиба, будутъ тѣ, для которыхъ $b>a$ и $\leqq 2a$.

f) Изъ всѣхъ конхоидъ прямой линіи (§ 589, j) разсмотримъ тѣ, которыя проходятъ черезъ полюсъ. Изъ ихъ уравненія $(r-a)\cos\vartheta=a$ находимъ для опредѣленія точекъ изгиба уравненіе $\cos^3\vartheta+3\cos^2\vartheta-2=0$, дающее для $\cos\vartheta$ значенія -1, $-1+\sqrt{3}$, $-1-\sqrt{3}$. Первое значеніе надо отбросить, потому что оно обращаетъ въ нуль r и r', послѣднее не даетъ веществен-

наго значенія для θ; остается второе, дающее $r = \frac{a}{2}(3+\sqrt{3})$. Это число есть радіусъ того круга, съ центромъ въ полюсѣ, который пересѣкаетъ кривую въ двухъ ея точкахъ изгиба. Легко показать, что точки изгиба всѣхъ конхоидъ одной и той же прямой относительно одного и того же полюса лежатъ на полукубической параболѣ $x^3 = 4ay^2$.

g) Въ заключеніе предложимъ себѣ вопросъ: могутъ ли конхоиды логариѳмической спирали (§ 599, i) имѣть точки изгиба, хотя a priori кажется, что такихъ точекъ не должно быть? Изъ уравненія $r = a(e^{m\theta} \pm 1)$ выводимъ

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = (1+m^2)r^2 \mp 2m^2 ar + 2m^2 a^2$$

и видимъ, что при $m^2 < 8$ этотъ трехчленъ для вещественныхъ r въ нуль не обращается. Отсюда слѣдуетъ, что искомыя спирали будутъ въ числѣ тѣхъ, которыя пересѣкаютъ радіусы векторы подъ достаточно малымъ угломъ, а именно такимъ, синусъ котораго меньше 1/3. Каждая изъ этихъ конхоидъ имѣетъ двѣ точки изгиба, соотвѣтствующія значеніямъ r, лежащимъ между a и $2a$. Дуги безчисленнаго множества конхоидъ одной и той же спирали, концы которыхъ лежатъ въ точкахъ изгиба, видны изъ полюса подъ постояннымъ угломъ, который при $m = 2\sqrt{2}$ равенъ нулю, и при очень большомъ m весьма малъ.

606. Кратныя точки. Для опредѣленія касательной въ точкѣ, лежащей на кривой $f(x, y)$, какъ извѣстно (§ 572), имѣемъ уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{18}$$

которое даетъ значеніе y' въ предположеніи, что $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны и, кромѣ того, $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$. Если же въ точкѣ M $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, то нельзя уже утверждать, что въ смежности съ M y есть функція отъ x, т. е., что каждому значенію x соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе y; но вслѣдствіе предположенной непрерывности, для точекъ въ смежности съ M это будетъ справедливо, т. е. для точекъ M', безконечно близкихъ къ M, производная y' существуетъ и опредѣляется уравненіемъ (18). Когда M' стремится къ M, $\frac{\partial f}{\partial y}$ стремится къ нулю, между тѣмъ, какъ $\frac{\partial f}{\partial x}$ стремится къ предѣлу, вообще говоря, не равному нулю, такъ что y' стремится къ безконечности. Отсюда слѣдуетъ, что въ точкѣ M касательная параллельна оси y-овъ, и въ этомъ никакой особенности не заключается. Но если и $\frac{\partial f}{\partial x}$ стремится къ нулю, то безъ особаго изслѣдованія о значеніи y' въ точкѣ M ничего сказать нельзя. Уравненіе (18) обращается въ тождество, и надо прибѣгнуть къ новому дифференцированію, которое дастъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y'' \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{19}$$

Допустимъ, что съ приближеніемъ M' къ M y' стремится къ конечному предѣлу и постараемся его найти. Замѣтимъ при этомъ, что если бы y' стремилось къ безконечности, то достаточно было бы вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ разсмотрѣть отношеніе $\frac{dx}{dy}$ (стремящееся къ нулю), чтобы убѣдиться, что нижеслѣдующіе результаты остаются справедливыми. Теперь докажемъ прежде всего, что $y''\frac{\partial f}{\partial y}$ не можетъ стремиться къ предѣлу, отличному отъ нуля. Для этого воспользуемся теоремою Лопиталя и напишемъ

$$\lim y' = \lim \frac{y'\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \lim \left(y' + \frac{y''\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}} \right).$$

Такъ какъ функція

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

по предположенію, конечна, то $\lim y''\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Поэтому, при переходѣ къ предѣлу, уравненіе (19) обращается въ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{20}$$

гдѣ вторыя производныя функціи f относятся къ точкѣ M, а y' обозначаетъ предѣлъ, къ которому стремится y', когда точка M' стремится къ M. Слѣдовательно, для y' въ точкѣ M имѣемъ два значенія, т. е. кривая въ точкѣ M имѣетъ двѣ касательныя, которыя могутъ быть вещественными и различными или совпадающими въ одну, или мнимыми, что зависитъ отъ знака опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \tag{21}$$

Въ первомъ случаѣ точка M называется **двойною**, во второмъ **точкою возврата** (Rückkehrpunkt или Spitze), и въ третьемъ **уединенною или изолированной точкою**, такъ какъ въ смежности съ нею нѣтъ вещественныхъ точекъ кривой (рис. 62). Дѣйствительно, если опредѣлитель (21) положительное число, то, какъ извѣстно (§ 379), функція f въ точкѣ M имѣетъ максимумъ или минимумъ, а такъ какъ ея значеніе въ M равно нулю, то въ смежности съ M функція f постоянно меньше 0 или постоянно больше 0 (изолированная точка). Если, напротивъ того, опредѣлитель (21) меньше 0, то угловое пространство около M раздѣляется (см. § 570) на двѣ

области: въ одной изъ нихъ вблизи M $f>0$, въ другой $f<0$, и эти области вполнѣ разграничиваются тѣми прямыми, по направленію которыхъ f стремится сохранить значеніе нуль. Эти прямыя и будутъ какъ разъ двѣ касательныя къ кривой $f=0$ въ точкѣ M *). Пре-

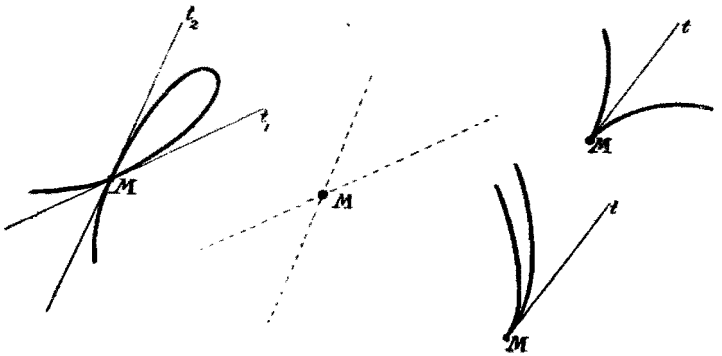


Рис. 62.

дыдущее изслѣдованіе, однако, не достаточно строго. Чтобы его провести съ полною строгостью надо было бы руководиться соображеніями, аналогичными тѣмъ, которыми мы пользовались въ § 572 [1]).

607. Резюмируя изложенное выше, можемъ сказать, что при разысканіи разсматриваемыхъ особенныхъ точекъ на кривой $f=0$, надо приравнять нулю первыя производныя отъ f по x и по y, найти всѣ рѣшенія $x=a$, $y=b$ этихъ уравненій и удержать тѣ рѣшенія, которыя удовлетворяютъ и уравненію кривой. Подставляя эти рѣшенія во вторыя частныя производныя функціи f, надо разсмотрѣть случай $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\gtrless 0$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Если $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\gtrless 0$, то получается двойная точка, точка возврата или изолированная точка, смотря по тому, будетъ ли функція (21) т. е. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2<0$, $=0$ или >0. Если, далѣе, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, но $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\gtrless 0$, то уравненіе (20) имѣетъ одинъ безконечный корень, и получается двойная точка, въ которой одна изъ касательныхъ параллельна оси y-овъ. Если въ точкѣ (a, b), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, и $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, но $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\gtrless 0$, то уравненіе (20) имѣетъ оба безконечныхъ корня, и получается точка возврата съ касательною, параллельною оси y-овъ. Наконецъ, можетъ случиться, что всѣ три производныя 2-го порядка обратятся въ нуль въ точкѣ $x=a$, $y=b$.

---

*) Точка возврата соотвѣтствуетъ тому случаю, когда опредѣлитель (21) равенъ 0, и уравненіе (20) имѣетъ равные корни.

[1]) См. D'Arcais. „Corso di Calcolo infinitesimale" vol. I, pp. 509—515.

Тогда уравненіе (20) обращается въ тождество и надо прибѣгнуть къ слѣдующему

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^3} + 3y'\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3y'^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y'^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0.$$

Это уравненіе даетъ вообще три значенія для y', такъ что получается тройная точка. Продолжая идти тѣмъ же путемъ приходимъ къ понятію о m — кратной точкѣ или кратной точкѣ порядка m. Она характеризуется геометрически тѣмъ, что принадлежитъ m вѣтвямъ кривой, вещественнымъ или мнимымъ, а аналитически тѣмъ, что въ ней обращаются въ нуль всѣ частныя производныя порядка ниже m и, по крайней мѣрѣ, одна изъ производныхъ порядка m не равна нулю. Если приведемъ уравненіе кривой къ однородному виду, то проще еще можно сказать, что m — кратная точка характеризуется тѣмъ, что въ ней обращаются въ нуль всѣ частныя производныя порядка $(m-1)$-го. Въ заключеніе замѣтимъ еще, что всѣ кратныя точки, какъ и точки изгиба, лежатъ на кривой Гессе, и можно сказать, что онѣ и для этой кривой будутъ кратными точками.

608. Точки возврата. Изъ двойныхъ точекъ наиболѣе замѣчательны точки возврата, потому что въ смежности съ ними, какъ и съ точками изгиба, расположеніе кривой относительно касательной является исключительнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, если примемъ разсматриваемую точку за начало координатъ и направимъ координатныя оси по касательной и по нормали, то ясно, что вмѣстѣ съ x и y функція f и ея первыя и вторыя частныя производныя, за исключеніемъ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, должны обратиться въ нуль, потому что уравненіе (20) должно имѣть двойной корень $y'=0$. Далѣе, такъ какъ вообще $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ не равно 0 въ началѣ координатъ, то уравненіе кривой должно принять видъ $y^2 = kx^3$, если отбросимъ безконечно малыя выше 3-го порядка. Это значитъ, что въ смежности съ точкою возврата кривая имѣетъ форму, весьма близкую къ полукубической параболѣ $(y^2 = kx^3)$, и потому лежитъ по одну лишь сторону отъ нормали, развѣтвляясь на двѣ вѣтви, отдѣленныя одна отъ другой касательною. Это общій случай и, когда онъ имѣетъ мѣсто, говорятъ, что имѣемъ точку возврата перваго рода, сохраняя названіе точки возврата второго рода для исключительнаго случая, когда вѣтви кривой не отдѣляются касательною. Этотъ случай можетъ наступить лишь тогда, когда и $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$ въ разсматриваемой точкѣ. Въ общемъ случаѣ $\lim_{x=0}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \infty$, такъ что кривая сильнѣе удаляется отъ касательной, чѣмъ въ обыкновенной точкѣ. Отсюда заключаютъ, что въ точкѣ возврата кривизна вообще безконечна; иными

словами, радіусъ кривизны равенъ нулю, а такъ какъ, обращаясь въ нуль, онъ вообще мѣняетъ знакъ, то и инымъ путемъ становится ясно, почему точки возврата 2-го рода являются, какъ исключеніе.

609. Теперь умѣстно будетъ вернуться на минуту къ вопросу о разысканіи точекъ изгиба кривыхъ, заданныхъ уравненіями въ полярныхъ координатахъ. Въ § 604 мы исключили тѣ значенія θ, которыя, обращая въ нуль функцію $r^2+2r'^2-rr''$, одновременно обращаютъ въ нуль r, потому что они обращаютъ въ нуль и r', а слѣдовательно, и $r^2+r'^2$, такъ что ничего нельзя сказать о томъ, что тогда дѣлается съ кривизною. Не трудно даже показать, что кривизна, вообще говоря, не только не стремится къ нулю, а напротивъ, возрастаетъ безпредѣльно, такъ что вмѣсто точки изгиба получается точка возврата. Итакъ, чтобы узнать, будетъ ли полюсъ точкою изгиба, надо приравнять нулю полное выраженіе кривизны, а не одного числителя этого выраженія, или непосредственно изслѣдовать ходъ кривой около полюса. Положимъ, что $r=0$ при $\theta=\alpha$, и разсмотримъ въ смежности съ полюсомъ точку на кривой, имѣющую координаты $x=r\cos(\theta-\alpha)$, $y=r\sin(\theta-\alpha)$, если координатныя оси направлены по касательной и по нормали въ полюсѣ. Очевидно, что съ приближеніемъ θ къ α,

$$\varrho=\lim\frac{x^2}{2y}=\lim\frac{r\cos^2(\theta-\alpha)}{2\sin(\theta-\alpha)}=\frac{1}{2}\lim\frac{r}{\theta-\alpha}=\frac{1}{2}r',$$

на основаніи опредѣленія производной r', которую надо вычислить для $\theta=\alpha$. Впрочемъ, и вторая изъ формулъ (8) приводится при $r=0$, $r'\gtrless 0$, къ равенству $\varrho=\frac{1}{2}r'$. Слѣдовательно, если r' обращается въ нуль вмѣстѣ съ r при $\theta=\alpha$, то $\varrho=0$. Чтобы получить точку изгиба, надо было бы имѣть $r'=\infty$.

610. Упражненія. а) Для Декартова листа, изображаемаго уравненіемъ $x^3+y^3=3axy$, начало координатъ двойная точка, потому что $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x}=x^2-ay$, $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y}=y^2-ax$ обращаются въ нуль при $x=y=0$ (какъ при $x=y=a$, но послѣднія значенія не удовлетворяютъ уравненію кривой). Далѣе, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2x$, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-a$, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2y$. Слѣдовательно, уравненіе (20), приводящееся здѣсь къ $0+y'+0\cdot y'^2=0$ имѣетъ одинъ корень, равный 0, а другой — безконечный. Кривая, слѣдовательно, касается обѣихъ координатныхъ осей въ началѣ координатъ (рис. 63). Впрочемъ, чтобы придти къ этому результату, вовсе нѣтъ надобности прибѣгать къ общей методѣ. А именно, если допустимъ, что съ приближеніемъ x къ нулю y' стремится къ нѣкоторому конечному предѣлу, и напишемъ уравненіе кривой въ видѣ $x+y\left(\frac{y}{x}\right)^2=3a\frac{y}{x}$, то тотчасъ же увидимъ, что этотъ предѣлъ $\left(\text{равный }\lim_{x=0}\frac{y}{x}\right)$ равенъ нулю. Слѣдовательно, кривая касается оси x-овъ въ началѣ координатъ, а по причинѣ симметріи, она касается и оси y-овъ. Если желаемъ составить себѣ понятіе о фигурѣ кривой въ смежности съ началомъ координатъ, то достаточно приближать x къ нулю такъ, чтобы и $\frac{y}{x}$ стремилось къ

нулю и отбросить въ уравненіи кривой безконечно малыя выше 3-го порядка. Тогда увидимъ, что вѣтвь, касающаяся оси x-овъ уподобляется параболѣ $x^2=3ay$, а слѣдовательно, вѣтвь, касающаяся оси y-овъ—параболѣ $y^2=3ax$.

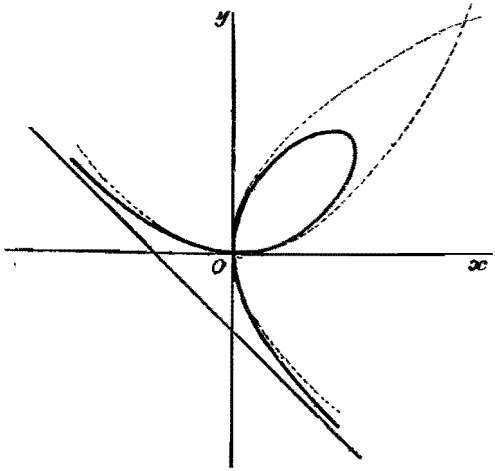


Рис. 63.

Къ подобнымъ же заключеніямъ приводитъ изслѣдованіе логоциклики и общихъ кривыхъ, разсмотрѣнныхъ въ § 602.

b) Кривая $x^4=(x^2-y^2)y$ (рис. 64) имѣетъ въ началѣ координатъ тройную точку, что можно показать съ помощью изложенной въ § 607 методы, или проще и скорѣе, написавъ уравненіе кривой въ видѣ $x=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^3$. Приближая x къ 0, получимъ уравненіе $y'-y'^3=0$, откуда для y' въ началѣ координатъ получаются три значенія 0, 1 и -1. Для построенія кривой полезно взять за независимую перемѣнную $t=\frac{y}{x}$ и замѣнить уравненіе кривой двумя уравненіями $x=t-t^3$ и $y=t^2-t^4$. На чертежѣ указаны границы интерваловъ, въ которыхъ измѣняется t, когда движущаяся точка, выйдя изъ безконечности, описываетъ данную кривую, чтобы снова удалиться въ безконечность, три раза пройдя черезъ начало координатъ ($t=-1$, 0, 1).



Рис. 64.

c) У кривой $x^5+y^5=5ax^2y^2$ находимъ въ началѣ координатъ четырехкратную точку, происходящую отъ соединенія двухъ точекъ возврата. Болѣе общее уравненіе

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(2n+1)ax^ny^n$$

изображаетъ кривую, принадлежащую къ типу предыдущей кривой или къ типу Декартова листа, смотря по тому, будетъ ли n число четное или нечетное. Это находится въ связи съ положеніемъ единственной вещественной асимптоты $x + y = (-1)^n a$.

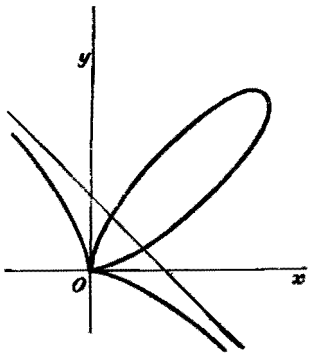


Рис. 65.

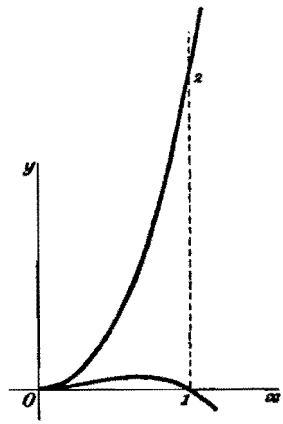


Рис. 66.

d) Примѣры точекъ возврата встрѣчались уже въ разсмотрѣнныхъ раньше кривыхъ (кардіоидѣ, эвольвентѣ круга, астроидѣ, циклоидѣ и т. д.). Читатель можетъ для упражненія провѣрить, что упомянутыя кривыя въ смежности съ такими точками уподобляются полукубической параболѣ въ смежности съ ея точкою возврата и показать, что во всѣхъ этихъ точкахъ радіусъ кривизны равенъ нулю. Такъ, напримѣръ, для вертикальнаго профиля развертывающагося геликоида (§ 599, c), помѣстивъ начало координатъ въ точку возврата, найдемъ

$$\lim_{\theta=0}\left(\frac{x}{\theta^2}\right) = \frac{1}{2}a, \qquad \lim_{\theta=0}\left(\frac{y}{\theta^3}\right) = \frac{1}{3}b,$$

такъ что при безконечно маломъ θ, уравненіе кривой стремится совпасть съ уравненіемъ $9a^3y^2 = 8b^2x^3$. На кривой $(y - x^2)^2 = x^5$ находимъ точку возврата второго рода (рис. 66). Чтобы y былъ вещественнымъ, очевидно, необходимо, чтобы x былъ больше 0. Если напишемъ уравненіе такъ: $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$, то увидимъ, что кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, касающихся оси x-овъ въ началѣ координатъ. Но по отношенію къ касательной въ этой точкѣ кривая имѣетъ тотъ же характеръ, какъ и въ обыкновенной точкѣ, потому что $\lim \frac{y}{x^2} = 1$, откуда слѣдуетъ, что кривизна въ этой точкѣ измѣряется числомъ 2. Добавимъ къ этому еще, что одна вѣтвь кривой параболически распространяется въ безконечность, а другая послѣ изгиба въ точкѣ $x = \left(\frac{8}{15}\right)^2$, имѣетъ наибольшую ординату въ точкѣ $x = \left(\frac{4}{5}\right)^2$, пересѣкаетъ ось x-овъ при $x = 1$, и затѣмъ также параболически уходитъ въ безконечность.

e) Замѣчательный примѣръ кривой съ точками изгиба и точками возврата представляетъ такъ называемый двурогъ (Zweihorn, cocked hat); ея уравненіе

$$y = \frac{a^2 - x^2}{2x \pm \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Чтобы примѣнить методу § 607, надо было бы привести уравненіе къ цѣлому раціональному виду. Но здѣсь удобнѣе будетъ оставить его въ томъ видѣ, въ какомъ оно написано, и замѣтить, что кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, соотвѣтствующихъ двумъ различнымъ знакамъ въ знаменателѣ. Кратными точками, очевидно, будутъ тѣ, для которыхъ два различныя опредѣленія y совпадаютъ. Это будетъ при $x^2 = a^2$, гдѣ $y = 0$. Чтобы вычислить значенія y' въ этихъ точкахъ ($\pm a$, 0), можно и не прибѣгать къ дифференцированію, а замѣтить, что по опредѣленію производной получается

$$y' = \lim_{x=\pm a} \frac{y}{x \mp a} = \pm 2a \lim_{x=\pm a} \frac{y}{x^2 - a^2} = \mp 1,$$

т. е. $y' = -1$, при $x = a$, и $y' = 1$, при $x = -a$. Такъ какъ въ обѣихъ точкахъ касательная оказывается единственною, то точки эти будутъ точками возврата. Касательныя въ этихъ точкахъ пересѣкаются въ одной изъ вершинъ

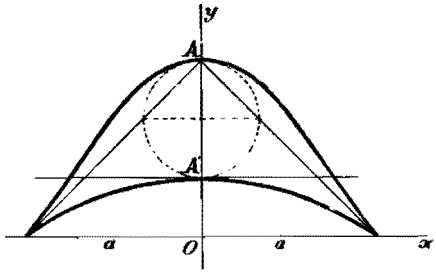


Рис. 67.

кривой (0, a) (рис. 67). Кривизна въ этой вершинѣ также вычисляется съ помощью примѣненнаго выше пріема, а именно:

$$\frac{1}{2\varrho} = \lim_{x=0} \frac{a - y}{x^2} = \frac{1}{a} + \lim_{x=0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{3}{2a}.$$

Слѣдовательно, $\varrho = \frac{1}{3}a$; поэтому, если $A'(0, \frac{1}{3}a)$ есть другая вершина кривой, то соприкасающійся кругъ въ точкѣ A будетъ кругъ, построенный на AA' какъ на діаметрѣ. Что касается точекъ изгиба, то, положивъ $y'' = 0$, находимъ $3\sqrt{a^2 - x^2} \pm 2a = 0$,— уравненіе, которое удовлетворяется (если удержимъ знакъ $-$) значеніемъ $x = \pm \frac{1}{3}a\sqrt{5}$, откуда $y = \frac{1}{3}a$. Слѣдовательно, точки изгиба находятся въ пересѣченіи касательной въ вершинѣ A' съ кривою.

f) Примѣняя методу § 607 къ уравненію, изображающему совокупность двухъ кривыхъ ($\varphi = 0$ и $\psi = 0$), мы получимъ, кромѣ кратныхъ точекъ, также и точки ихъ пересѣченія. Въ самомъ дѣлѣ, если $f = \varphi . \psi$, то $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$,

очевидно, обратятся въ нуль вмѣстѣ съ f всякій разъ, какъ φ и ψ одновременно обратятся въ нуль; а такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ, кромѣ того

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}^2,$$

то, какъ видимъ, точки, общія двумъ кривымъ, представляются, какъ настоящія кратныя точки. Въ частности, когда правая часть обращается въ нуль, что имѣетъ мѣсто (§ 577, а) когда кривыя $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ взаимно касаются одна другой, исчезаетъ и лѣвая часть, и точки пересѣченія кривыхъ представляются въ видѣ точекъ возврата, хотя кривыя и располагаются по обѣ стороны отъ нормали.

611. Алгебраическія кривыя никакихъ другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ разсмотрѣнныхъ выше, не имѣютъ, если за элементъ, образующій кривую, принимается точка. Если введемъ въ разсмотрѣніе тангенціальныя координаты и, вмѣсто точекъ на кривой, будемъ разсматривать касательныя къ кривой, то, по принципу двойственности, можно вполнѣ дуалистически повторить все вышеизложенное изслѣдованіе. Вмѣсто двойныхъ, тройныхъ и д. т. точекъ получаются двойныя, тройныя и т. д. касательныя. Но никакихъ существенно новыхъ особенностей при этомъ не получается. Получаются касательныя возврата и касательныя изгиба, но первыя будутъ не что иное, какъ касательныя въ точкахъ изгиба, а вторыя — касательныя въ точкахъ возврата. На этомъ основаніи число ν точекъ возврата и число μ точекъ изгиба соотвѣтствуютъ другъ другу совершенно такъ же, какъ соотствѣтствуютъ другъ другу число ν' двойныхъ точекъ и число μ' двойныхъ касательныхъ, порядокъ n кривой и ея классъ m. Другое весьма важное, само себѣ соотвѣтствующее число, есть такъ называемый родъ (Geschlecht, genre) кривой; оно обыкновенно обозначается буквою p. Доказывается, что для кривой n-го порядка, не имѣющей кратныхъ точекъ, это число равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ [1]). Извѣстно также, что при томъ же условіи классъ m кривой равенъ $n(n-1)$, а число μ точекъ изгиба (§ 604) равно $3n(n-2)$. Но можно показать, что существованіе ν' двойныхъ точекъ и ν точекъ возврата уменьшаютъ упомянутыя три числа на $\nu + \nu'$, $3\nu + 2\nu'$ и $8\nu + 6\nu'$. На основаніи принципа двойственности находятъ поэтому, что если изъ чиселъ $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, $m(m-1)$ и $3m(m-2)$ вычтемъ соотвѣтственно $\mu + \mu'$, $3\mu + 2\mu'$ и $8\mu + 6\mu'$, то получимъ число p, n и ν. Формулы, къ которымъ такимъ образомъ приходимъ, называются формулами Плюккера (Plücker). Изъ нихъ легко выводится,

---

[1]) Для подробнаго изученія теорін плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ читателю рекомендуется первый томъ „Cours d'Analyse" par. C. Jordan.

что для кривой порядка n, класса m и рода p, числа особенныхъ точекъ и касательныхъ будутъ

$$\nu = 2(n+p-1) - m, \quad \nu' = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-6) + m - 3p,$$
$$\mu = 2(m+p-1) - n, \quad \mu' = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-6) + n - 3p,$$

если не существуетъ другихъ болѣе сложныхъ особенностей. Особенно замѣчательны кривыя нулеваго рода ($p = 0$), имѣющія характеризующее ихъ свойство быть уникурсальными (unicursale); это значитъ, что координаты ихъ точекъ x и y, выражаются раціональными функціями отъ третьей перемѣнной. Къ числу ихъ принадлежатъ, напримѣръ, коническія сѣченія и первыя три изъ разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ § кривыхъ.

612. Трансцендентныя кривыя могутъ имѣть и другія особенности, кромѣ перечисленныхъ выше.

a) Прежде всего легко убѣдиться, что такія кривыя могутъ имѣть безчисленное множество особенныхъ точекъ. Это мы уже видѣли на примѣрѣ квадратрисы (безчисленное множество изгибовъ), циклоиды (безчисленное число точекъ возврата) и т. д. Теперь добавимъ, что кривая $y^2 = x \sin^2 x$

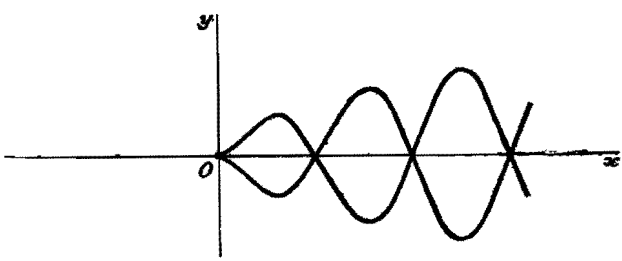


Рис. 68.

(рис. 68) имѣетъ точку возврата въ началѣ координатъ, безконечное число уединенныхъ и безконечное число двойныхъ точекъ на оси x-овъ. Внѣ этой оси кривая имѣетъ безконечное множество точекъ изгиба, абсцисы которыхъ удовлетворяютъ уравненію $1 + 4x^2 = 4x \operatorname{cotg} x$. Эти точки безпредѣльно приближаются къ оси x-овъ по мѣрѣ удаленія отъ начала координатъ по направленію положительныхъ x-овъ, располагаясь все ближе и ближе къ точкамъ кривой $xy^2 = 1$. Кромѣ того, данная кривая безконечное число разъ касается параболы $y^2 = x$ *).

b) Безконечное множество точекъ изгиба, и притомъ въ конечномъ интервалѣ, имѣетъ кривая $y = x \sin \frac{1}{x}$, съ асимптотою, параллельною оси x-въ ($y = 1$). Такъ какъ здѣсь $x^4 y'' = -y$, то всѣ изгибы лежатъ на оси x-овъ. Кромѣ безчисленнаго множества касательныхъ возврата **), схо-

*) Эти замѣчанія принадлежатъ бывшему ученику Чезаро, д-ру В. Д'Ескамаръ (V. d'Escamard) и помѣщены во 2-мъ изд. (1905 г.) Elementi di Calcolo infinitesimale (E. Cesàro) въ видѣ поправки.

**) Т. е. касательныхъ въ точкахъ изгиба.

дящихся въ двухъ точкахъ на оси y-овъ), кривая имѣетъ еще двѣ особенныя касательныя, а именно прямыя, дѣлящія пополамъ углы между координатными осями, которыхъ она касается въ безконечномъ числѣ точекъ. Эта же кривая замѣчательна еще слѣдующимъ свойствомъ: изъ каждой точки на оси y-овъ, лежащей въ интервалѣ $(-1, 1)$, можно провести безчисленное множество касательныхъ, точки касанія которыхъ лежатъ на прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Аналогичными свойствами обладаетъ кривая $y = x \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$, имѣющая асимптотою ось x-овъ.

c) **Точкою прекращенія** называютъ такую точку, въ которой внезапно прекращается нѣкоторая вѣтвь кривой. Такою точкою будетъ, напримѣръ, начало координатъ для одной изъ вѣтвей кривой $y = e^{-\frac{1}{x}}$, имѣющей еще точку изгиба при $x = \frac{1}{2}$ (рис. 69) и асимптоту $y = 1$. Кривая

$$y = \left(\frac{1}{e^x} - 1\right) \Big/ \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)$$

состоитъ также изъ двухъ вѣтвей, прекращающихся на оси y-овъ въ точкахъ $y = \pm 1$, имѣющихъ точки изгиба на прямой $y = 2x$, и асимптоту — ось x-овъ. Кривая $y = x \log x$ также даетъ очень простой примѣръ точки

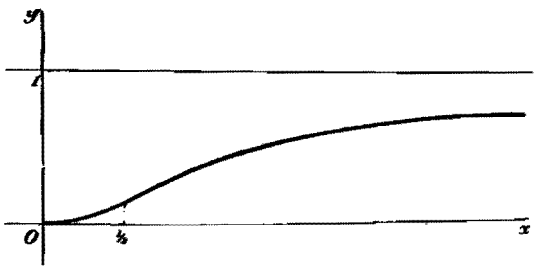


Рис. 69.

прекращенія, а именно въ началѣ координатъ, гдѣ она касается оси y-овъ. Другіе примѣры даютъ кривыя

$$y = \frac{x^2}{\log x}, \qquad y = x^2 \log \frac{x}{y};$$

каждая изъ нихъ имѣетъ вѣтвь, прекращающуюся въ началѣ координатъ. Это происходитъ отъ того, что первая кривая не имѣетъ вещественныхъ точекъ при $x < 0$, а вторая при $x < y$. Для первой кривой начало координатъ по отношенію къ касательной въ этой точкѣ играетъ роль какъ будто точки изгиба, потому что (см. § 548)

$$\lim \frac{y}{x^2} = 0, \quad \text{но при } n > 2, \quad \lim \frac{y}{x^n} = \infty,$$

а для второй—какъ будто точки возврата, потому что

$$\lim \frac{y}{x^2} = \infty, \quad \text{но при } n < 2, \quad \lim \frac{y}{x^n} = 0.$$

Обѣ кривыя имѣютъ еще другую вѣтвь, для первой кривой съ асимптотою $x=1$, а для второй съ асимптотою $x-y=1$. Эти вѣтви затѣмъ опять распространяются до безконечности, причемъ обращены выпуклостью постоянно къ оси x-овъ, отъ которой минимальное ихъ разстояніе равно $2e$.

d) Когда двѣ различныя вѣтви встрѣчаются (подъ угломъ, не равнымъ нулю), въ одной точкѣ M и въ ней прекращаются, то получается такъ называемая угловая или выдающаяся точка (springender Punkt, point anguleux ou saillant). Въ точкѣ M кривыя касаются двухъ прямыхъ, какъ и въ двойной, но каждая вѣтвь лежитъ, какъ въ точкѣ возврата, лишь по одну сторону отъ соотвѣтствующей нормали. Угловую точку мы уже встрѣтили (§ 599, e) у кривой $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, а другой очень простой примѣръ мы имѣемъ (§ 282, b) при $x=0$ у кривой $y=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

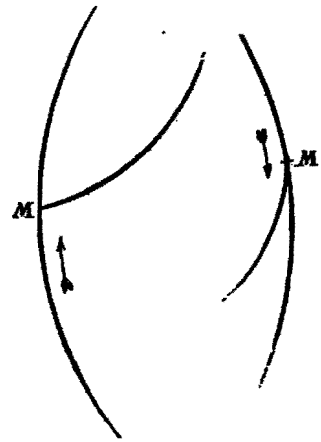


Рис. 70.

e) Далѣе, если изъ двухъ вѣтвей лишь одна прекращается въ общей точкѣ, то получается такъ называемая точка соединенія (Vereinigungspunkt)[1]). Здѣсь кривая представляетъ какъ бы развѣтвленіе дорогъ для точки, пробѣгающей кривую въ извѣстномъ направленіи. Чтобы составить примѣры такихъ точекъ, достаточно въ уравненіи кривой, имѣющей двойную точку, напримѣръ, $x^3+y^3-3axy=0$ прибавить къ y функцію $e^{-\frac{1}{x}}$ или $x\log x$ или $[x]$. Такимъ образомъ удается уничтожить или перемѣстить одну изъ четырехъ вѣтвей, выходящихъ изъ двойной точки. Очевидно, такой пріемъ позволяетъ уничтожить двѣ, три или всѣ четыре вѣтви и построить, слѣдовательно, кривыя съ угловыми точками или точками прекращенія или изолированными точками.

О касаніи плоскихъ кривыхъ.

613. Порядокъ касанія. Въ смежности съ обыкновенною точкою M, общею двумъ кривымъ, возьмемъ двѣ точки P и Q, одну на одной, другую на другой кривой. Представимъ себѣ, что P и Q одновременно приближаются къ M (оставаясь, конечно, каждая на своей кривой), и для опредѣленности допустимъ еще (хотя это и не необходимо), что при этомъ прямая PQ стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію, которое образуетъ съ кривыми линіями, т. е. съ касательными къ нимъ въ точкѣ M, углы

[1]) Объ этихъ особенностяхъ, указанныхъ лѣтъ 30 тому назадъ бельгійскимъ физикомъ Плато (Plateau), см. статью Mansion'a въ „Mathesis" 1883 г., стр. 193.

α и β, отличные отъ нуля (и отъ π). Прежде всего, легко видѣть, что дуги MP и MQ будутъ безконечно малыми одного и того же порядка. Въ самомъ дѣлѣ, предѣлъ ихъ отношенія будетъ

$$\lim \frac{MP}{MQ} = \lim \frac{\sin MQP}{\sin MPQ} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} *),$$

т. е. число конечное и не равное нулю, на основаніи нашего предположенія. Если примемъ за главную безконечно малую MP или MQ и обозначимъ черезъ ω уголъ, подъ которымъ кривыя пересѣкаются въ M (т. е. уголъ между касательными къ кривымъ въ этой точкѣ), то

$$\lim \frac{PQ}{MQ} = \lim \frac{\sin PMQ}{\sin MPQ} = \frac{\sin \omega}{\sin \alpha},$$

и отсюда видно, что разстояніе PQ будетъ безконечно малымъ перваго или высшаго порядка, смотря по тому, будетъ ли $\sin \omega$ отлично отъ нуля или равно нулю, т. е. смотря по тому, пересѣкаются ли или касаются данныя кривыя въ точкѣ M. Итакъ, то обстоятельство, что PQ будетъ порядка выше перваго характеризуетъ касаніе кривыхъ. Естественно теперь принять за мѣрило болѣе или менѣе тѣснаго касанія, которое могутъ имѣть кривыя въ точкѣ M, именно порядокъ безконечно малой PQ. Сообразно этому мы будемъ говорить, что касаніе будетъ порядка n, если PQ будетъ безконечно малой порядка $n+1$ **). Однако, прежде чѣмъ принять такое опредѣленіе надо показать, что число n будетъ одно и то же для безчисленнаго множества различныхъ способовъ, которыми можно выбирать точки P и Q, стремящіяся къ совпаденію съ M. Положимъ, что точку Q, стремящуюся къ M, мы соединимъ не съ P, а съ другою точкою P', которая тоже стремится къ M такъ, что предѣльное положеніе $P'Q$ не совпадаетъ съ касательною въ точкѣ M къ даннымъ кривымъ. Когда P и P', двигаясь по данной кривой, стремятся къ совпаденію съ одною и тою же точкою M, то, какъ извѣстно (§ 348, c), прямая PP' стремится совпасть съ касательною въ точкѣ M къ данной кривой. Поэтому

$$\lim \frac{PQ}{P'Q} = \lim \frac{\sin PP'Q}{\sin P'PQ} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$$

и $P'Q$ будетъ безконечно малою того же порядка, что и PQ.

---

*) Напоминаемъ читателю, что при вычисленіи предѣла отношенія дугъ всегда можно замѣнить отношеніе дугъ отношеніемъ соотвѣтственныхъ хордъ, такъ какъ отношеніе дуги къ стягивающей ее хордѣ стремится къ единицѣ (§§ 582, 549).

**) Такъ что касаніе нулевого порядка есть простое пересѣченіе.

614. Весьма легко найти аналитическія условія касанія n-го порядка двухъ кривыхъ, заданныхъ уравненіями $Y=\varphi(X)$ и $Y=\psi(X)$ въ Декартовыхъ координатахъ. Мы предположимъ, что кривыя имѣютъ въ точкѣ M общую касательную, не параллельную оси y-овъ, и пересѣчемъ эти кривыя въ смежности съ M прямою, параллельною этой оси; пусть P и Q будутъ точки пересѣченія этой прямой съ данными кривыми. Замѣтимъ, что если бы общая касательная была параллельна оси y-овъ, то достаточно перемѣнить оси, а, слѣдовательно, и координаты, одна на другую, чтобы имѣть возможность остаться при сдѣланномъ предположеніи. Если теперь x есть абсцисса точки M, а $x+h$ абсцисса (общая) точекъ P и Q, то ясно, что h будетъ безконечно малою того же порядка, какъ MP или MQ, т. е. перваго, потому что отношеніе h къ MP или MQ стремится къ величинѣ косинуса угла, образуемаго касательною въ точкѣ M съ осью x-овъ, а косинусъ этотъ, при нашемъ предположеніи, не равенъ нулю. По тому же предположенію и прямая PQ не стремится къ совпаденію съ касательною въ точкѣ M. Слѣдовательно, условія касанія n-го порядка заключаются всѣ въ одномъ: чтобы PQ было безконечно малою порядка $n+1$, а такъ какъ, полагая $\chi(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, имѣемъ

$$PQ=\chi(x+h)=\chi(x)+h\chi'(x)+\frac{1}{2}h^2\chi''(x)+\cdots+\frac{1}{n!}h^n\chi^{(n)}(x)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}\chi^{(n+1)}(x+\theta h)^*),$$

гдѣ $0<\theta<1$, то и видно, что для выполненія вышеупомянутаго условія необходимо и достаточно, чтобы

$$(22)\qquad \chi(x)=0,\quad \chi'(x)=0,\quad \ldots,\quad \chi^{(n)}(x)=0,\quad \chi^{(n+1)}(x)\gtrless 0.$$

Итакъ, чтобы данныя кривыя имѣли въ точкѣ M касаніе порядка n, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(x)=\psi(x),\quad \varphi'(x)=\psi'(x),\quad \ldots,\quad \varphi^{(n)}(x)=\psi^{(n)}(x),$$
$$\varphi^{(n+1)}(x)\gtrless\psi^{(n+1)}(x),$$

т. е., чтобы первыя n производныхъ ординаты, взятыя по абсциссѣ, имѣли въ точкѣ M одинаковыя, а $(n+1)$-ыя производныя — различныя значенія. Замѣтимъ, что первое изъ вышеприведенныхъ равенствъ выражаетъ, что кривыя въ точкѣ M встрѣчаются, а второе, что онѣ въ ней касаются.

---

*) Мы предполагаемъ здѣсь существованіе $n+1$ производныхъ отъ функцій φ и ψ въ окрестности точки x и непрерывность въ этой точкѣ $(n+1)$-ыхъ производныхъ. Остаточный членъ въ формулѣ Тэйлора мы беремъ въ формѣ Лагранжа.

615. Замѣтимъ, что въ случаѣ n нечетнаго найденныя условія совпадаютъ съ тѣми, которыя выражаютъ (§ 313), что функція $\chi(X)$ при $X=x$ имѣетъ maximum или minimum; а такъ какъ эта функція при $X=x$ равна нулю, то въ смежности съ M она будетъ сохранять постоянно одинъ и тотъ же знакъ $+$ или $-$, и, слѣдовательно, кривыя въ точкѣ M не пересѣкаются. Наоборотъ, если n число четное, то $\chi(X)$ при $X=x$ не будетъ ни максимумъ ни минимумъ, а потому $\varphi(X)>\psi(X)$ по одну сторону отъ M, и $\varphi(X)<\psi(X)$ — по другою, т. е. кривыя въ точкѣ M касаются и пересѣкаются. Уже одинъ тотъ фактъ, что кривыя, касаясь другъ друга, въ то же время пересѣкаются, заставляетъ заключить, что касаніе будетъ высшаго, по крайней мѣрѣ, второго порядка. Однако, это заключеніе подчинено необходимому предположенію, а именно, что функціи φ и ψ имѣютъ вполнѣ опредѣленныя, единственныя, послѣдовательныя производныя въ точкѣ M. Такъ напримѣръ, въ § 605 мы встрѣтили кривую, которая въ началѣ координатъ пересѣкаетъ свою касательную, хотя касаніе обѣихъ линій здѣсь простое, т. е. 1-го порядка. Аналогичный случай представляетъ кривая $y=\dfrac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, которая касается и пересѣкается съ параболою $y=\frac{1}{2}x^2$ въ началѣ координатъ (§ 599, f), хотя и здѣсь будетъ простое касаніе обѣихъ кривыхъ. Далѣе, надо еще замѣтить, что влѣво отъ начала координатъ эта кривая имѣетъ простое касаніе съ своею касательною, а справа — нельзя сказать, какъ высокъ будетъ порядокъ касанія.

616. Условія (22), разсматриваемыя съ алгебраической точки зрѣнія, выражаютъ, что уравненіе $\chi(X)=0$ имѣетъ $(n+1)$-кратный корень $X=x$, а такъ какъ это же уравненіе опредѣляетъ абсциссы точекъ пересѣченія данныхъ кривыхъ, то можно сказать, что въ точкѣ M соединены $n+1$ общихъ точекъ обѣихъ кривыхъ. Такое представленіе геометрически оправдывается слѣдующимъ соображеніемъ. Если черезъ точку M на кривой $y=f(X)$ проведемъ перемѣнную кривую $y=\varphi(X)$, уравненіе которой содержитъ болѣе n произвольныхъ параметровъ; если затѣмъ распорядимся этими параметрами такъ, чтобы вторая кривая прошла черезъ n другихъ точекъ M', M'', ... первой кривой, и наконецъ, заставимъ эти n точекъ стремиться къ совпаденію съ M такъ, чтобы при этомъ перемѣнная кривая стремилась къ опредѣленному предѣльному положенію, то въ этомъ предѣльномъ положеніи вторая кривая будетъ имѣть съ первою касаніе вообще порядка n. Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что $n+1$ параметровъ перемѣнной кривой опредѣлены такъ, что выполнены условія

$$\varphi(x)=f(x),\quad \varphi(x_1)=f(x_1),\quad \ldots,\quad \varphi(x_n)=f(x_n),$$

гдѣ x, x_1, x_2, ... абсциссы точекъ M, M', M'', ... Тогда, какъ извѣстно (§ 347), можно написать

$$\varphi(X)=f(x)+(X-x)f(x, x_1)+(X-x)(X-x_1)f(x, x_1, x_2)+\cdots$$
$$+(X-x)(X-x_1)\ldots(X-x_{n-1})f(x, x_1, \ldots, x_n)$$
$$+(X-x)(X-x_1)\ldots(X-x_n)\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

при чемъ ξ обозначаетъ число, лежащее между наименьшимъ и наибольшимъ изъ чиселъ X, x, x_1, ..., x_n. Намъ извѣстно также, что, когда x_1, x_2, ..., x_n одновременно стремятся къ x, то

$$\lim f(x, x_1, x_2, \ldots, x_\nu)=\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}.$$

Слѣдовательно, обозначая черезъ ξ число, среднее между X и x, будемъ имѣть

$$\varphi(X)=f(x)+(X-x)\frac{f'(x)}{1}+(X-x)^2\frac{f''(x)}{1\cdot 2}+\cdots$$
$$+(X-x)^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+(X-x)^{n+1}\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Съ другой стороны, если ξ_0 также нѣкоторое число между X и x, то

$$f(X)=f(x)+(X-x)\frac{f'(x)}{1}+(X-x)^2\frac{f''(x)}{1\cdot 2}+\cdots$$
$$+(X-x)^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+(X-x)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}.$$

Поэтому

$$\lim_{X=x}\frac{f(X)-\varphi(X)}{(X-x)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(x)-\varphi^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}.$$

Итакъ, разность $f(X)-\varphi(X)$ будетъ безконечно малая порядка выше n, и обѣ кривыя имѣютъ въ точкѣ M касаніе порядка не ниже n. Порядокъ можно сдѣлать выше n, если еще другія точки пересѣченія кривыхъ, кромѣ разсмотрѣнныхъ выше, также совпадутъ съ M. Разумѣется здѣсь n всегда разсматривается, какъ цѣлое число, между тѣмъ какъ при опредѣленіи порядка касанія не исключается возможность дробнаго порядка касанія. Такой случай встрѣчается, между прочимъ, при касаніи кривой и ея касательной изгиба (въ точкѣ возврата), гдѣ порядокъ касанія вообще (§ 608) равенъ $\frac{1}{2}$.

617. Соприкасаніе (Oskulation). Положимъ, что требуется черезъ нѣкоторую точку (x, y) на данной кривой $f(X, Y)=0$ провести другую кривую, имѣющую съ данною въ точкѣ (x, y) касаніе порядка n и принадлежащую къ семейству кривыхъ, опре-

дѣляемому уравненіемъ вида $\varphi(X, Y) = 0$, содержащимъ болѣе n произвольныхъ параметровъ. Для этого нужно будетъ дифференцировать оба уравненія n разъ подъ рядъ такъ, какъ это дѣлаютъ съ цѣлью опредѣленія послѣдовательныхъ производныхъ отъ Y по X до порядка n включительно. Затѣмъ надо будетъ выразить, что въ обоихъ рядахъ полученныхъ уравненій эти производныя при $X = x$ и $Y = y$ имѣютъ одинаковыя значенія. Такимъ образомъ получимъ $n + 1$ уравненій, причисляя къ нимъ и то, которое получается, когда въ уравненіи искомой кривой, положимъ $X = x$, $Y = y$ (выражая этимъ, что она проходитъ черезъ точку (x, y)). Эти уравненія послужатъ для опредѣленія $n + 1$ параметровъ, и, вообще говоря, только при числѣ параметровъ, превосходящемъ n, можно получить касаніе n-го порядка. Если распорядимся всѣми параметрами такъ, чтобы получился наивысшій возможный порядокъ касанія, тогда говорятъ, что нашли соприкасающуюся къ данной кривой $f(X, Y) = 0$ въ данной точкѣ кривую даннаго вида $\varphi(X, Y) = 0$. При этомъ не исключается возможность того, что вслѣдствіе какой либо особенности, представляемой данною кривою, ожидаемый максимальный порядокъ касанія повысится. Тогда говорятъ, что въ данной точкѣ кривыя имѣютъ пересоприкасаніе (superoskulation). Чтобы опредѣлить, въ какихъ точкахъ оно возможно, надо еще разъ дифференцировать данныя уравненія и изъ нихъ исключить всѣ параметры. Получится уравненіе между x и y, которое и опредѣляетъ искомыя точки.

618. Примѣры. a) Къ данной кривой въ данной точкѣ требуется провести соприкасающуюся прямую. Такъ какъ въ уравненіи прямой $Y = mX + h$ два произвольныхъ параметра, то вообще можно достигнуть только простого касанія (перваго порядка). Примѣняя изложенную въ предыдущемъ § методу, получаемъ условія: $y = mx + h$, $y' = m$, при чемъ надо помнить, что x, y и y' относятся къ данной кривой. Отсюда для параметровъ получаются значенія $m = y'$, $h = y - xy'$, и мы находимъ уравненіе искомой прямой (см. § 586): $Y = Xy' + y - xy'$ или $Y - y = y'(X - x)$ (соприкасающаяся прямая есть касательная). Для повышенія порядка касанія необходимо условіе $y'' = 0$, и отъ данной кривой зависитъ можетъ ли такое повышеніе произойти. Мы видимъ, что только въ точкахъ изгиба можетъ произойти касаніе выше 1-го порядка. Оно будетъ вообще второго порядка, и касательная будетъ пересѣкать кривую; но, чтобы это дѣйствительно случилось, необходимо и достаточно, кромѣ условія $y'' = 0$, еще чтобы первая изъ послѣдовательныхъ производныхъ y''', y^{IV}, ... не обращающаяся въ нуль, была нечетнаго порядка. Геометрически можно сказать, что въ точкѣ изгиба соединены, по крайней мѣрѣ, три общія точки кривой и касательной, и что во всякомъ случаѣ число скопившихся въ M точекъ будетъ нечетнымъ или четнымъ, смотря по тому, пересѣкаетъ ли или не пересѣкаетъ касательная кривую.

b) Кругъ съ центромъ (ξ, η) и радіусомъ ϱ изображается уравненіемъ $(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 = \varrho^2$. Дифференцируя и подставляя $X = x$, $Y = y$ и т. д., получаемъ

$$(23) \qquad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2, \quad x - \xi + (y - \eta)y' = 0,$$
$$1 + y'^2 + (y - \eta)y'' = 0,$$

откуда послѣдовательно находимъ

$$y-\eta=-\frac{1+y'^2}{y''},\quad x-\xi=y'\frac{1+y'^2}{y''},\quad \varrho=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Такимъ образомъ мы снова находимъ тотъ кругъ, который мы уже раньше назвали соприкасающимся, и видимъ, что порядокъ его касанія съ кривою будетъ, вообще, равенъ 2. Отсюда слѣдуетъ (см. § 592), что соприкасающійся кругъ въ той точкѣ, въ которой онъ касается кривой, ее и пересѣкаетъ. Основываясь на сказанномъ въ § 616, можно также сказать, что соприкасающійся кругъ проходитъ черезъ три смежныя точки кривой, и полезно припомнить, что именно такимъ образомъ соприкасающій кругъ и встрѣтился намъ въ первый разъ (§ 348, e).

c) Если желаютъ, чтобы кругъ съ данною кривою имѣлъ касаніе выше 2-го порядка, то нужно, чтобы еще удовлетворилось уравненіе, получаемое черезъ дифференцированіе послѣдняго изъ уравненій (23), т. е.

$$3y'y''+(y-\eta)y'''=0\quad\text{или}\quad 3y'y''^2=(1+y'^2)y'''.$$

Будетъ ли это уравненіе удовлетворяться или нѣтъ, зависитъ отъ природы данной кривой въ той точкѣ (x, y), которую разсматриваемъ. Замѣтимъ, что производная отъ ϱ именно равна

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''^2}(3y'y''^2-(1+y'^2)y''').$$

Представляя себѣ, слѣдовательно, что точка $M(x, y)$ описываетъ данную кривую (см. § 592), мы видимъ, что соприкасающійся кругъ тамъ будетъ имѣть касаніе выше 2-го порядка съ данною кривою, гдѣ радіусъ кривизны будетъ maximum или minimum. Этимъ, однако, не исключается возможность того, что пересоприкасаніе будетъ и тамъ, гдѣ ϱ не будетъ ни maximum, ни minimum.

Огибающія кривыя

(Enveloppen).

619. Опредѣленіе. Положимъ, что дано уравненіе семейства кривыхъ $f(x, y, a)=0$, при чемъ каждому значенію параметра a соотвѣтствуетъ опредѣленная кривая этого семейства. Мы предположимъ, что $f(x, y, a)$ непрерывна относительно a и имѣетъ непрерывныя первыя производныя по всѣмъ перемѣннымъ. Пусть M есть точка пересѣченія кривыхъ (a) и $(a+h)$, т. е. кривыхъ, соотвѣтствующихъ значеніямъ параметра a и $a+h$. Если, фиксируя a, станемъ приближать h къ нулю, то кривая $(a+h)$ будетъ постепенно приближаться къ кривой (a) и можетъ случиться, что точка M, передвигаясь по кривой (a), будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣльному положенію A. Если кривыя (a) и $(a+h)$ не пересѣкаются, то, несмотря на это, можетъ случиться, что на кривой (a) существуютъ точки A, обладающія слѣдующимъ свойствомъ: если вторая кривая $(a+h)$ отсѣкаетъ на нормали къ первой (a) въ точкѣ M нѣкоторый отрѣзокъ, безконечно малый при h безконечно

маломъ, то въ точкѣ A этотъ отрѣзокъ будетъ безконечно малымъ выше перваго порядка относительно h. Такія точки наисильнѣйшаго безконечнаго сближенія кривыхъ (a) и $(a+h)$ можно разсматривать также какъ точки, общія двумъ кривымъ, если пренебречь безконечно малыми высшаго порядка. Общее мѣсто точекъ A называютъ огибающею кривыхъ $f(x, y, a)=0$.

620. Уравненіе огибающей. Предположимъ, что A не кратная точка кривой (a); вслѣдствіе предположенной непрерывности первыхъ производныхъ функціи f, и въ смежности съ A — кратныхъ точекъ не будетъ. Поэтому, если возьмемъ на кривой (a) точку M достаточно близко къ A, то въ точкѣ M нормаль къ кривой (a) будетъ имѣть вполнѣ опредѣленное направленіе, и косинусы угловъ, образуемыхъ этимъ направленіемъ съ координатными осями, будутъ безконечно мало отличаться отъ соотвѣтствующихъ косинусовъ угловъ нормали въ точкѣ A. Обозначая черезъ α и β косинусы угловъ нормали въ точкѣ M съ осями, будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}+\cdots,\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots,$$

(x и y — координаты точки A). Обозначимъ, далѣе, черезъ ξ и η координаты точки M, стремящіяся къ x и y — координатамъ точки A, при безконечно маломъ h. Пусть также l обозначаетъ отрѣзокъ MM', отсѣкаемый кривою $(a+h)$ на нормали въ точкѣ M къ кривой (a). Если M есть точка пересѣченія кривыхъ, то l надо положить равнымъ нулю. Во всѣхъ случахъ координаты точки M' будутъ $\xi+l\alpha$, $\eta+l\beta$. Эти числа должны удовлетворять уравненію $f(x, y, a+h)=0$. Слѣдовательно,

$$f(\xi+l\alpha,\quad \eta+l\beta,\quad a+h)=0.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что $f(\xi, \eta, a)=0$, и отбрасывая безконечно малыя высшаго порядка относительно h, находимъ

$$l\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}\right)+h\frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

а потому $l=-\dfrac{h}{\sqrt{\Delta f}}\dfrac{\partial f}{\partial a}$. Такъ какъ кратныя точки исключены (т. е. Δf не равна 0), то, для того чтобы l было высшаго порядка, чѣмъ h, необходимо и достаточно, чтобы было $\dfrac{\partial f}{\partial a}=0$. Итакъ, уравненіе огибающей получается черезъ исключеніе a изъ уравненій

(24) $$f(x, y, a)=0,\quad f'_a(x, y, a)=0\ *).$$

---

*) Вообще, получаемое указаннымъ путемъ уравненіе будетъ изображать либо огибающую, либо общее мѣсто особенныхъ точекъ кривой. См. Гурса „Курсъ Математическаго Анализа". Москва 1911, стр. 460.

621. Характеристическое свойство огибающей. Можно сказать, что уравненіе даннаго семейства кривыхъ, т. е. первое изъ уравненій (24) и есть уравненіе огибающей, если въ этомъ уравненіи $f(x, y, a) = 0$ будемъ разсматривать a, какъ функцію отъ x и y, опредѣляемую уравненіемъ $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. Дифференцируя первое изъ уравненій (24) при сдѣланномъ условіи, находимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dx} = 0, \tag{25}$$

которое, въ силу второго изъ уравненій (24), приводится къ $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$, т. е. къ уравненію, опредѣляющему значеніе y' для кривой (a). Слѣдовательно, *огибающая касается каждой изъ кривыхъ даннаго семейства*. Въ этомъ состоитъ характеристическое свойство огибающей. Дѣйствительно, какова бы ни была кривая, которая должна касаться всѣхъ кривыхъ даннаго семейства, всегда можно считать, что ея уравненіе есть уравненіе $f(x, y, a) = 0$, гдѣ a неизвѣстная функція, которую надо опредѣлить надлежащимъ образомъ, чтобы удовлетворить поставленному требованію. Это опредѣленіе должно быть сдѣлано такъ, чтобы уравненіе (25) давало то же самое значеніе y', которое получается для всякой кривой (a), каково бы a ни было. Поэтому необходимо должно быть $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, и искомое уравненіе совпадаетъ съ тѣмъ, которое получается исключеніемъ a изъ уравненій (24).

622. Уравненіе $f(x, y, a) = 0$ распредѣляетъ точки плоскости по кривымъ, лежащимъ обыкновенно по одну сторону отъ огибающей, которая такимъ образомъ является границей области, заполненной кривыми даннаго семейства. Разсмотримъ теперь два уравненія

$$f(x, y, a, b) = 0, \quad g(x, y, a, b) = 0. \tag{26}$$

Эти уравненія, вообще говоря, устанавливаютъ нѣкоторое соотвѣтствіе между каждою парою значеній независимыхъ параметровъ и точками (x, y) на плоскости. Вопросъ объ опредѣленіи границъ той области, которая занята этими точками, приводитъ къ разысканію огибающей семейства кривыхъ, изображаемаго, напримѣръ, первымъ изъ уравненій (26), если въ немъ будемъ разсматривать a, какъ единственный произвольный параметръ, а b, какъ функцію отъ x, y и a, опредѣляемую вторымъ изъ уравненій (26). Поэтому будемъ имѣть $\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{db}{da} = 0$, гдѣ $\frac{db}{da}$ опредѣляется изъ уравненія

$$\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial b} \frac{db}{da} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(a, b)} = 0. \tag{27}$$

Исключая a и b изъ уравненій (26) и (27) мы и получимъ уравненіе искомой кривой. Одно изъ уравненій (26) можетъ и не содержать въ себѣ x и y, и тогда снова приходимъ къ случаю одного независимаго параметра, потому что другой надо разсматривать какъ функцію перваго. Но уравненіе (27) остается справедливымъ. Общнѣе, если имѣемъ m уравненій

$$f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0, \quad g(x, y, a, b, c, \ldots) = 0, \ \ldots$$

съ n параметрами, связанными $n - m$ соотношеніями

$$\varphi(a, b, c, \ldots) = 0, \quad \psi(a, b, c, \ldots) = 0, \ \ldots,$$

то, дифференцируя всѣ данныя уравненія (т. е. первыя n и условныя $n - m$) относительно параметровъ, и исключая da, db, dc, ..., найдемъ, что функціональный опредѣлитель $f, g, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$ относительно a, b, c, ... долженъ быть равенъ нулю. Исключая n параметровъ изъ $n+1$ уравненій, мы и получимъ уравненіе огибающей.

623. Эволюты и эвольвенты. Эволютою плоской кривой называютъ огибающую ея нормалей. Всякая кривая называется эвольвентою своей эволюты. На основаніи сказаннаго въ § 593, можемъ тотчасъ сказать, что эволюта плоской кривой есть общее мѣсто ея центровъ кривизны. Эту теорему можно также доказать путемъ, указаннымъ въ концѣ § 620. Примѣняя указанный пріемъ къ уравненію нормали $X - x + y'(Y - y) = 0$, получаемъ

$$-(1 + y'^2) + (Y - y)y'' = 0.$$

Координаты точекъ касанія нормалей съ ихъ огибающей опредѣляются, слѣдовательно, формулами

$$X = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Съ другой стороны, какъ мы видѣли въ § 618, если ξ и η — координаты центра кривизны, то

$$x - \xi = y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y - \eta = -\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Итакъ, $X = \xi$, $Y = \eta$.

624. Если напишемъ координаты центра кривизны въ видѣ

$$\xi = x - \varrho \sin\varphi, \quad \eta = y + \varrho \cos\varphi,$$

то отсюда выведемъ

$$d\xi = dx - \varrho\cos\varphi \cdot d\varphi - \sin\varphi \cdot d\varrho, \quad d\eta = dy - \varrho\sin\varphi \cdot d\varphi + \cos\varphi \cdot d\varrho.$$

Припоминая теперь, что $dx = \cos\varphi \cdot ds$, $dy = \sin\varphi \cdot ds$ и $ds = \varrho\, d\varphi$, находимъ $d\xi = -\sin\varphi \cdot d\varrho$, $d\eta = \cos\varphi \cdot d\varrho$. Эти формулы показываютъ, что элементъ CC' дуги эволюты (рис. 71) можно разсматривать, какъ лежащій на нормали къ эвольвентѣ и имѣющій длину $d\sigma = d\varrho$. Отсюда опять слѣдуетъ, что касательныя къ эволютѣ — нормали къ эвольвентѣ. Кромѣ того, равенство $d(\sigma - \varrho) = 0$

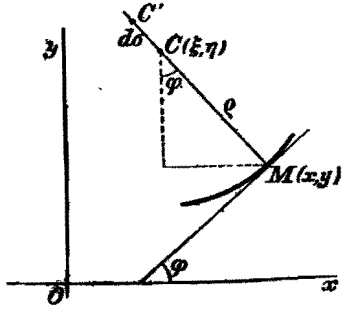


Рис. 71.

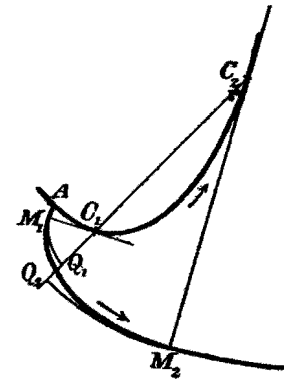


Рис. 72.

показываетъ, что $\sigma - \varrho = \text{const}$. Поэтому, если возьмемъ нѣкоторую дугу $C_1C_2 = \sigma_2 - \sigma_1$ на эволютѣ и положимъ, что радіусы кривизны данной эвольвенты въ концахъ дуги C_1C_2 имѣютъ значенія ϱ_1 и ϱ_2, то $\sigma_1 - \varrho_1 = \sigma_2 - \varrho_2$, т. е. $\sigma_2 - \sigma_1 = \varrho_2 - \varrho_1$. Иными словами

(28) Дуга $C_1C_2 = M_2C_2 - M_1C_1$ (рис. 72).

[**Примѣчаніе.** Изъ формулъ $d\xi = -\sin\varphi \cdot d\varrho$, $d\eta = \cos\varphi \cdot d\varrho$ получаемъ $d\xi^2 + d\eta^2 = d\sigma^2 = d\varrho^2$, откуда $d\sigma = \pm d\varrho$. Если при движеніи точки M отъ M_1 къ M_2 σ и ϱ одновременно возрастаютъ или убываютъ, то $d\sigma = d\varrho$; если же, при возрастаніи σ, ϱ убываетъ, то $d(\sigma + \varrho) = 0$, т. е. $\sigma + \varrho = \text{const}$. Заключеніе, что $\smile C_1C_2$ равна разности радіусовъ кривизны $\pm(M_2C_2 - M_1C_1)$, справедливо въ обоихъ случаяхъ. Если же, при движеніи M отъ M_1 къ M_2, $\frac{d\varrho}{d\sigma}$ мѣняетъ знакъ, то предыдущее равенство не справедливо. Въ этомъ случаѣ дугу M_1M_2 надо раздѣлить на части, въ которыхъ $\frac{d\varrho}{d\sigma}$ сохраняетъ знакъ, и примѣнить доказанное равенство, съ соотвѣтствующимъ знакомъ, къ каждой части отдѣльно. Напримѣръ, если

на параболѣ точки M_1 и M_2 лежатъ по разныя стороны отъ вершины O, центръ кривизны въ которой есть точка C на оси, то

$$\smile CC_2 = M_2C_2 - CO, \quad \smile C_1C = M_1C_1 - CO, \quad \smile C_1CC_2 = M_1C_1 + M_2C_2 - 2CO.]$$

Укажемъ нѣкоторыя замѣчательныя слѣдствія этого свойства:

a) Если дуга M_1M_2 достаточно мала для того, чтобы ея кривизна измѣнялась отъ одного конца къ другому въ одномъ и томъ же направленіи (т. е. или постоянно возрастала или постоянно убывала), то окружности соприкасающихся круговъ въ точкахъ M_1 и M_2 не могутъ пересѣкаться, потому что онѣ отдѣляются одна отъ другой именно дугою M_1M_2 (см. § 592). Легко, впрочемъ, вычислить разстояніе между этими окружностями, равное разстоянію между точками Q_1 и Q_2, лежащими на линіи центровъ C_1C_2 между M_1 и M_2 (рис. 72). Мы имѣемъ

$$Q_1Q_2 = Q_2C_2 - (Q_1C_1 + C_1C_2) = M_2C_2 - M_1C_1 - C_1C_2$$

или $Q_1Q_2 =$ дуга $C_1C_2 -$ хорда $C_1C_2 > 0$. Слѣдовательно, ясно, что окружности двухъ достаточно близкихъ соприкасающихся круговъ пересѣкаться не могутъ. Но мы можемъ сказать еще болѣе, а именно, что эти окружности не могутъ имѣть (§ 585) и общей точки, и разстояніе между ними есть безконечно малая третьяго порядка относительно разстоянія между ихъ центрами.

b) Изъ формулы (28) вытекаетъ еще слѣдующее: представимъ себѣ, что на нѣкоторую плоскую кривую навита нерастяжимая нить; закрѣпивъ одинъ ея конецъ и удерживая нить всегда натянутою, будемъ свивать нить съ кривой въ ея плоскости, тогда всякая точка нити будетъ описывать эвольвенту данной кривой. Итакъ, всякая кривая имѣетъ безконечное множество эвольвентъ, представляющихъ систему параллельныхъ равноотстоящихъ одна отъ другой кривыхъ. Эвольвенты данной кривой можно также разсматривать, какъ рулетты, описываемыя точками прямой, катящейся безъ скольженія по данной кривой.

625. Для полнаго изученія эволюты данной кривой остается еще опредѣлить ея кривизну. Съ этою цѣлью замѣтимъ, что уголъ смежности для обѣихъ кривыхъ, очевидно, одинъ и тотъ же. Отсюда тотчасъ слѣдуетъ, что радіусъ кривизны эволюты равенъ $\varrho \frac{d\varrho}{ds}$ *). Поэтому, вообще каждой точкѣ эвольвенты, въ которой кривизна

*) Потому что радіусъ кривизны эволюты равенъ $\frac{d\sigma}{d\varphi}$, гдѣ $d\sigma = d\varrho$, $d\varphi = \frac{ds}{\varrho}$.

максимумъ или минимумъ, на эволютѣ соотвѣтствуетъ точка возврата, а точки возврата эвольвенты (по крайней мѣрѣ, перваго рода) сами принадлежатъ эволютѣ, потому что при $\varrho = 0$ точка M эвольвенты и точка C эволюты совпадаютъ съ одною и тою же точкою A. Кромѣ того, если a есть радіусъ кривизны эволюты въ точкѣ A, то изъ уравненія $\lim \varrho \frac{d\varrho}{ds} = a$, перенеся начало счета дугъ на эвольвентѣ въ точку A и примѣняя теорему Лопиталя, тотчасъ получимъ

$$\lim \frac{\varrho^2}{s} = 2a.$$

Слѣдовательно, въ смежности съ точкою A, эвольвента имѣетъ приблизительно форму кривой, натуральное уравненіе которой есть $\varrho^2 = 2as$, т. е. (см. § 595, o) форму эвольвенты круга радіуса a въ смежности съ ея точкою возврата.

626. Упражненія. a) Уравненіе $y = (x-a)^3$ изображаетъ семейство равныхъ между собою кубическихъ параболъ, огибаемыхъ осью x-овъ. Эта прямая касается всѣхъ параболъ въ точкахъ изгиба ихъ, а потому и не дѣлитъ плоскость на двѣ области — одну, въ которой находятся всѣ огибаемыя, и другую, въ которой ихъ вовсе нѣтъ, какъ это бываетъ въ большинствѣ случаевъ (см. § 622). Точно такъ же огибающая параболъ $y = a^2(x-a)^2$ состоитъ изъ оси x-овъ и кривой $16y = x^4$. Но эта кривая касается каждой изъ параболъ въ точкѣ $x = 2a$, и пересѣкаетъ каждую изъ нихъ въ двухъ другихъ $x = -2a \pm 2a\sqrt{2}$. Слѣдовательно, область, заполняемая данными параболами, ограничена только осью x-овъ.

b) Найдемъ огибающую подвижной прямой, которая движется по плоскости такъ, что двѣ ея точки постоянно находятся на сторонахъ даннаго прямого угла. Если обозначимъ черезъ l разстояніе между этими точками, то уравненіе прямой будетъ $\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = l$, и θ можно разсматривать, какъ параметръ, каждому значенію котораго соотвѣтствуетъ опредѣленное положеніе прямой. Дифференцируя по θ, получимъ

$$\frac{x}{\cos^3\theta} = \frac{y}{\sin^3\theta} \text{ или } \frac{x/\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{y/\sin\theta}{\sin^2\theta} = l,$$

слѣдовательно, $x = l\cos^3\theta$, $y = l\sin^3\theta$ и $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. Итакъ, огибающая подвижной прямой есть астроида (§ 595, g).

c) Астроида будетъ также огибающая всѣхъ эллипсовъ, описываемыхъ каждою другою точкою той же прямой (рис. 73). Дѣйствительно, если раздѣлимъ l на двѣ части a и b, такъ что $a+b=l$, то точка дѣленія опишетъ эллипсъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Дифференцируя по параметрамъ a и b, и принимая во вниманіе, что $da + db = 0$, получимъ

$$\frac{x^2}{a^3} = \frac{y^2}{b^3} \text{ или } \frac{\frac{x^2}{a^2}}{a} = \frac{\frac{y^2}{b^2}}{b} = \frac{1}{l},$$

откуда послѣдовательно

$$x^2 = a^3/l, \quad y^2 = b^3/l, \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Если же, вмѣсто этого, полуоси будутъ связаны условіемъ $a^2 + b^2 = l^2$, то подобнымъ же образомъ найдемъ, что огибающая будетъ состоять изъ че-

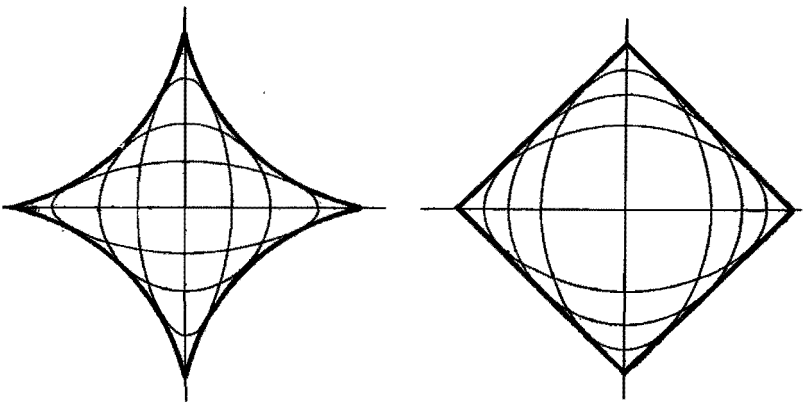


Рис. 73.

тырехъ прямыхъ $\pm x \pm y = l$, т. е. всѣ эллипсы, имѣющіе общія оси (по направленію) и общій кругъ Монжа, вписаны въ одинъ и тотъ же квадратъ (рис. 73).

d) Между эвольвентами цѣпной линіи особенно замѣчательна та, которая беретъ начало въ вершинѣ кривой и носитъ названіе *трактрисы* (рис. 74). Извѣстныя свойства цѣпной линіи (§ 595, 1) приводятъ тотчасъ къ установленію нижеслѣдующихъ свойствъ трактрисы: отрѣзокъ, отсѣкаемый асимптотою на касательной, считаемый отъ соотвѣтствующей точки касанія — величина постоянная; центръ кривизны лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ къ асимптотѣ изъ точки пересѣченія ея съ касательною.

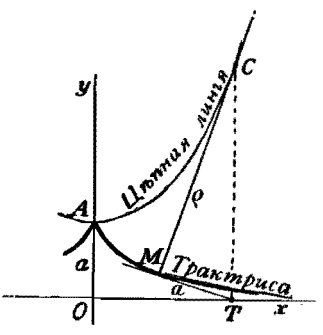


Рис. 74.

e) Какъ аналитически, такъ и геометрически легко доказать, что эволюта циклоиды равна своей эвольвентѣ (только сдвинутой съ мѣста), эволюта кардіоиды есть втрое меньшая кардіоида, эволюта астроиды вдвое бо́льшая астроида и т. д. Общнѣе можно доказать, что за исключеніемъ эвольвенты круга, всѣ эпи- и гипоциклоиды подобны своимъ эволютамъ, и если m есть отношеніе радіуса подвижного круга къ радіусу неподвижнаго, то отношеніе подобія (постоянное отношеніе между пропорціональными длинами) эвольвенты и эволюты равно $1 + 2m$, т. е. равно соотвѣтственно 1, 3, $\frac{1}{2}$ и т. д. для циклоиды ($m = 0$), кардіоиды ($m = 1$), астроиды ($m = -\frac{1}{4}$) и т. д.

f) Будемъ искать огибающую семейства круговъ, зная кривую, на которой находятся центры всѣхъ круговъ, и законъ измѣненія радіуса вдоль этой кривой. Положимъ, что ξ, η и ϱ — координаты центра и радіусъ, заданные, какъ функціи дуги σ кривой — общаго мѣста центровъ, тогда надо будетъ дифференцировать уравненіе $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$ по σ, разсматривая при этомъ x и y, какъ постоянныя. Мы получаемъ

$$(x-\xi)\frac{d\xi}{d\sigma}+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\sigma}+\varrho\frac{d\varrho}{d\sigma}=0, \tag{I}$$

и видимъ, что круги касаются огибающей въ точкахъ, лежащихъ на прямой, параллельной нормали къ линіи центровъ, проведенной на разстояніи $-\varrho\frac{d\varrho}{d\sigma}$ отъ центра. Чтобы огибающая была вещественною, необходимо и достаточно, чтобы $|d\varrho|$ была не больше $|d\sigma|$. Иными словами, огибающая только тогда вещественна, когда скорость, съ которою движется центръ, не меньше скорости, съ которою кругъ растягивается или сжимается. При $|d\varrho|<|d\sigma|$ огибающая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, совпадающихъ въ одну, когда $d\varrho=\pm d\sigma$. Въ этомъ случаѣ касательная къ общему мѣсту центровъ будетъ нормальна къ огибающей, и кривая (ξ,η) есть не что иное, какъ эволюта кривой (x,y). Иными словами, условіе $d\varrho=\pm d\sigma$, необходимость котораго была установлена въ § 624, будетъ и достаточнымъ для того, чтобы круги нѣкотораго семейства были соприкасающимися кругами плоской прямой.

[**Примѣчаніе.** При $\left|\frac{d\varrho}{d\sigma}\right|>1$, $\left|\varrho\frac{d\varrho}{d\sigma}\right|>\varrho$ и прямая (I) не имѣетъ общихъ точекъ съ окружностью круга радіуса ϱ, слѣдовательно, нѣтъ и вещественной огибающей. При $\left|\frac{d\varrho}{d\sigma}\right|<1$, прямая (I) пересѣкаетъ окружность круга въ двухъ точкахъ: одна опишетъ при измѣненіи σ одну, другая другую вѣтвь огибающей. При $\left|\frac{d\varrho}{d\sigma}\right|=1$, прямая (I) касается окружности огибаемаго круга и точка касанія опишетъ единственную вѣтвь огибающей. Кромѣ того, касательная къ линіи центровъ будетъ перпендикулярна къ линіи (I), т. е будетъ нормалью къ огибаемой.]

627. Подэры и антиподэры. Мы уже сказали въ § 590, с, что подэрою данной кривой относительно точки Q называютъ общее мѣсто проекцій точки Q на касательной къ данной кривой. Если кривая (M) есть подэра кривой (M_1) (рис. 75), то кривая (M_1) называется антиподэрою кривой (M) относительно точки Q. Ясно, что антиподэру нѣкоторой кривой относительно точки Q можно разсматривать, какъ огибающую перпендикуляровъ MM_1, возставленныхъ къ различнымъ прямымъ, проходящимъ черезъ Q, въ точкахъ пересѣченія этихъ прямыхъ съ данною кривою (M). Это замѣчаніе и указываетъ путь для опредѣленія антиподэры данной кривой. Пусть M — нѣкоторая точка на данной кривой, а M_1 — соотвѣтствующая ей точка на искомой антиподэрѣ. Напишемъ уравненіе огибаемой прямой въ видѣ

$$x\cos\theta+y\sin\theta=r.$$

Дифференцируя его по θ, находимъ

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = r'.$$

Это есть уравненіе прямой, перпендикулярной къ MM_1, проходящей черезъ конецъ N полярной поднормали данной кривой (§ 588). Координаты точки M_1 удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ, слѣдовательно, точка M_1 антиподэры данной кривой, соотвѣтствующая точкѣ M, есть проекція точки N на прямую MM_1. Изъ полученныхъ двухъ уравненій находимъ для координатъ точки M_1 выраженія

$$x = r\cos\theta - r'\sin\theta, \quad y = r\sin\theta + r'\cos\theta.$$

Исключая θ изъ этихъ двухъ уравненій, при чемъ r и r' будутъ извѣстныя функціи отъ θ, опредѣляемыя полярнымъ уравненіемъ данной кривой, мы и получимъ уравненіе антиподэры въ Декартовыхъ координатахъ. Если, обратно, дана будетъ кривая (M_1), то изъ опредѣленія ея подэры (M) извѣстно будетъ положеніе точки M, соотвѣтствующей точкѣ M_1, и вышеизложенныя соображенія даютъ возможность другимъ путемъ придти къ построенію касательной въ точкѣ M на подэрѣ (M). Въ самомъ дѣлѣ, эта касательная перпендикулярна къ нормали MN, а прямая MN получится, какъ прямая, проходящая черезъ M и середину QM_1. Далѣе, если желаемъ знать радіусъ кривизны кривой (M_1) въ точкѣ M_1 (на антиподэрѣ данной кривой (M), предполагая извѣстнымъ радіусъ кривизны послѣдней), то замѣчаемъ, что

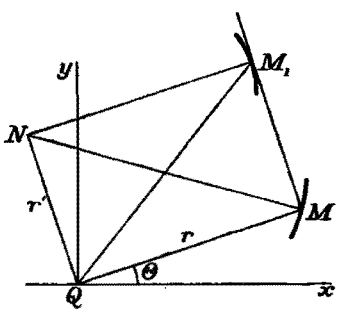


Рис. 75.

$$\frac{dx}{d\theta} = -(r + r'')\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = (r + r'')\cos\theta.$$

Такъ какъ $d\theta$ есть уголъ смежности для кривой (M_1), то ея радіусъ кривизны $\varrho_1 = r + r''$ *). Итакъ, достаточно продолжить прямую M_1N на длину $NC_1 = r''$, чтобы получить въ точкѣ C_1 искомый центръ кривизны. Этотъ результатъ обыкновенно представляютъ въ другомъ видѣ, выражая ϱ_1 черезъ радіусъ векторъ $r_1 = QM_1$ и радіусъ

*) Въ самомъ дѣлѣ, $d\theta$ эквивалентенъ углу между двумя перпендикулярами къ двумъ безконечно близкимъ касательнымъ къ кривой (M_1), поэтому $d\theta = d\varphi$, $\varrho_1 = \dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\theta} = r + r''$.

кривизны ϱ данной кривой (M). Выраженіе ϱ получимъ по второй изъ формулъ (8), а именно

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = \frac{r_1^3}{2r_1^2 - r\varrho_1}.$$

Отсюда получается соотношеніе

$$\frac{r\varrho_1}{r_1^3} = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{\varrho}, \tag{29}$$

которое и даетъ возможность построить C_1, когда извѣстно положеніе центра кривизны C данной кривой (M). (См. § 595, j).

628. Каустики (Kausticae). Представимъ себѣ, что изъ нѣкоторой точки Q выходятъ свѣтовые лучи, падаютъ на зеркало (M) и отъ него отражаются *) (рис. 76). Предѣльныя положенія точекъ пересѣченія каждыхъ двухъ безконечно близкихъ отраженныхъ лучей образуютъ свѣтящуюся линію, называемую каустикою по отраженію (катакаустикою). Каустика кривой (M) относительно полюса Q будетъ, слѣдовательно, огибающей лучей, выходящихъ изъ Q и отражающихся отъ (M) по извѣстному закону равенства угловъ паденія и отраженія. Лучъ, отраженный въ точкѣ M, пройдетъ черезъ точку L_1, симметрично расположенную съ Q относительно касательной въ точкѣ M $(ML_1 = QM$, $QM_1 = M_1L_1)$. Разсматривая еще кривую (L)—общее мѣсто точекъ L, симметричныхъ съ Q относительно точки M $(ML = MQ)$,—легко видѣть, что кривая (L_1) есть подэра кривой (L) относительно полюса Q. $[QL_1 \perp LL_1$, касательная къ (L) $LL_1 \parallel MM_1]$. Поэтому (§ 627) нормаль къ кривой (L_1) въ точкѣ L_1 пройдетъ черезъ середину QL, т. е. черезъ точку M. Слѣдовательно, всѣ отраженные лучи нормальны къ кривой (L_1), и огибающая ихъ есть эволюта этой кривой. Итакъ, каустика данной кривой есть эволюта подэры кривой, подобной данной, относительно свѣтящейся точки. Отсюда слѣдуетъ, что построеніе точекъ каустики приводится къ построенію центровъ кривизны (см. § 595, j) подэры кривой (L) относительно точки Q. При этомъ построеніи, какъ легко видѣть,

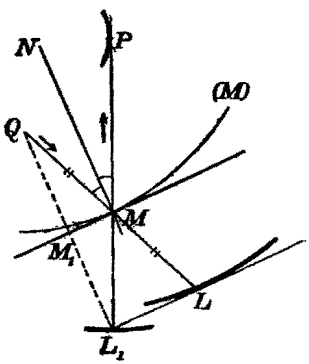


Рис. 76.

*) Точка Q, зеркало (M) и пучекъ падающихъ лучей предполагаются лежащими въ одной плоскости.

можно замѣнить кривую (L) данною кривою (M) *). Въ томъ случаѣ, когда свѣтовые лучи параллельны (свѣтящаяся точка въ безконечности) построеніе каустики особенно упрощается, потому что тогда имѣетъ мѣсто теорема: нормали къ каустикѣ, происходящей отъ пучка параллельныхъ лучей, дѣлятъ пополамъ радіусы кривизны зеркала въ соотвѣтствующихъ точкахъ.

[**Примѣчаніе.** Теорему эту нетрудно доказать аналитически. Направимъ ось y-овъ параллельно лучамъ, падающимъ на зеркало (M), и пусть $y = f(x)$ данное его уравненіе. Уголъ α, образуемый нормалью къ зеркалу въ точкѣ M съ падающимъ лучемъ, равенъ углу, образуемому касательною съ осью x-овъ, такъ что $\operatorname{tg}\alpha = y' = f'(x)$. Уголъ между падающимъ и отраженнымъ лучемъ будетъ равенъ 2α, а потому уголъ β, образуемый отраженнымъ лучемъ, будетъ равенъ $2\alpha + \frac{\pi}{2}$ (что прямо видно изъ чертежа); слѣдовательно,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right)$$

и уравненіе отраженнаго луча будетъ

$$Y - y = \frac{1}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right)(X - x). \tag{1}$$

Если присоединимъ сюда уравненіе, полученное изъ (1) дифференцированіемъ по параметру x, и изъ полученныхъ двухъ уравненій исключимъ x, то получимъ уравненіе каустики. Это второе уравненіе будетъ $X - x = -\frac{y'}{y''}$, въ силу чего (1) даетъ $Y - y = -\frac{y'^2 - 1}{y''}$. Поэтому, обозначая черезъ (ξ, η) координаты точки P на каустикѣ, соотвѣтствующей точкѣ $M(x, y)$ на зеркалѣ, будемъ имѣть

$$\xi = x - \frac{y'}{y''},\quad \eta = y - \frac{y'^2 - 1}{y''}. \tag{2}$$

Нормаль къ каустикѣ въ точкѣ (ξ, η) перпендикулярна къ огибаемой (1), слѣдовательно, уравненіе этой нормали будетъ

$$2y'\left(X - x + \frac{y'}{y''}\right) = (1 - y'^2)\left(Y - y + \frac{y'^2 - 1}{y''}\right). \tag{3}$$

Самое простое вычисленіе покажетъ, что этому уравненію удовлетво-

---

*) Это утвержденіе не совсѣмъ точно. Точная формулировка полученнаго результата состоитъ въ слѣдующемъ: эволюта подэры данной кривой и ея каустики относительно одной и той же данной точки суть двѣ подобныя и подобнымъ образомъ расположенныя кривыя, при чемъ центръ подобія лежитъ въ данной точкѣ, а отношеніе подобія равно 1 : 2. (См. E. Weyr, „Ueber die Identität der Brennlinien mit den (Evolüten der) Fusspunktskurven". Zeitschrift für Math. und Physik, 1869, pag. 376).

ряютъ значенія $X=\frac{1}{2}(x_1+x)$, $Y=\frac{1}{2}(y_1+y)$, гдѣ $x_1=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''}$. $y_1=y+\frac{1+y'^2}{y''}$, координаты центра кривизны C зеркала въ точкѣ (x, y), что и доказываетъ теорему. Построеніе точки P сводится къ построенію перпендикуляра изъ середины CM къ отраженному отъ точки M лучу.]

Возвращаясь къ общему случаю точки Q на конечномъ разстояніи отъ зеркала и припоминая теорему о длинѣ дуги эволюты (§ 624), приходимъ къ слѣдующему заключенію: Если P и P'— точки каустики, соотвѣтствующія точкамъ M и M' зеркала, то $\smile PP'=\pm\{(QM+MP)-(QM'+M'P')\}$. Дѣйствительно, $QM+MP=L_1P$, т. е. радіусу кривизны кривой (L_1) въ точкѣ L_1, и аналогичное значеніе имѣетъ сумма $QM'+M'P'$, откуда и слѣдуетъ вышесказанное на основаніи § 624. Полученный результатъ можно формулировать такъ: длина дуги каустики равна разности между длинами путей, которые свѣтъ проходитъ отъ свѣтящейся точки до одного и другого конца дуги. Если, каковы бы ни были точки M и M' на зеркалѣ, $\smile PP'=0$, тогда

$$QM+MP=QM'+M'P,$$

и получается такое слѣдствіе: если хотимъ, чтобы лучи, выходящіе изъ точки Q, по отраженіи отъ зеркала M, сошлись въ одной точкѣ P, то необходимо, чтобы зеркало имѣло форму эллипса съ фокусами въ P и Q.

629. Упражненія. a) Возвращаясь къ вопросу объ антиподэрахъ, положимъ, что данная кривая есть улитка: $r=a\cos\theta+b$. Изъ этого уравненія вытекаетъ: $r+r''=b$, а этого достаточно, чтобы утверждать, что антиподэра есть кругъ радіуса b. Точно такъ же, если данная кривая — спираль Архимеда: $r=a\theta$, то $r'=a$, $r''=0$; точка N (рис. 75) есть центръ кривизны антиподэры (M_1), потому что $r''=0$, и всегда остается на окружности круга радіуса a, потому что $r'=a$. Итакъ, Архимедова спираль есть подэра эвольвенты круга. Это свойство, которое можно считать очевиднымъ (см. рис. 54), даетъ простой способъ построенія центра кривизны въ данной точкѣ M на Архимедовой спирали.

[**Примѣчаніе.** Отложивъ на перпендикулярѣ къ радіусу вектору MQ (рис. 75) длину $QN=a$, строимъ прямоугольникъ $MQNM_1$ и проводимъ его діагонали MN и M_1Q, проектируемъ N на QM_1 въ точку H и точку H на NM_1 въ точку L. Центръ кривизны C будетъ точка пересѣченія прямыхъ LQ и MN. Это прямо вытекаетъ изъ построенія центра кривизны подэры, указаннаго въ § 595, j. Полезно провѣрить это построеніе съ помощью второй формулы (8) для ϱ, которая въ данномъ случаѣ даетъ

$$MC=\frac{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2a^2}.]$$

b) Найдемъ антиподэру прямой линіи относительно данной точки Q (рис. 77). Примемъ данную прямую за ось y-овъ, а перпендикуляръ къ ней изъ точки Q за ось x-овъ. Тогда уравненіе прямой MM_1 будетъ $my=m^2x+\frac{1}{2}p$,

гдѣ m обозначаетъ угловой коэффиціентъ (перемѣнный), а $\frac{1}{2}p$ — длину отрѣзка OQ (постоянную). Дифференцированіе по m даетъ $y=mx$, а исключеніе m даетъ далѣе $y^2=2px$. Слѣдовательно, антиподэра прямой относительно данной точки есть парабола съ фокусомъ въ данной точкѣ, касающаяся данной прямой въ вершинѣ. Этотъ результатъ, впрочемъ, можетъ быть выведенъ изъ построенія касательной, даннаго въ § 627. Въ самомъ дѣлѣ, это построеніе даетъ $\angle QM_1N=\angle NM_1H$, такъ что нормаль дѣлитъ уголъ QM_1H пополамъ; а съ другой стороны, на основаніи сказаннаго въ § 590, d вытекаетъ, что это свойство принадлежитъ исключительно параболѣ. Замѣтимъ еще, что въ настоящемъ случаѣ формула (29) обращается въ $r\varrho_1=2r_1^2$ ($\varrho=\infty$), такъ какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ $LQM_1-r_1^2=r\cdot LM_1$, то точка L дѣлитъ радіусъ кривизны пополамъ. Такимъ образомъ снова получаемъ извѣстное уже построеніе (§ 595, k).

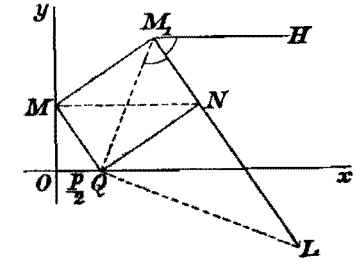


Рис. 77.

c) Когда свѣтовые лучи, выходящіе изъ Q, отражаются отъ кругового зеркала, то кривая (L) будетъ также кругъ, а слѣдовательно, кривая (L_1) — улитка (§ 590, c). Въ частности, если точка Q лежитъ на окружности даннаго круга, то она лежитъ и на окружности круга (L), и улитка будетъ кардіоидою, эволюта которой будетъ другою кардіоидою, втрое меньшею первой и обратно расположенною. Итакъ, каустика кругового зеркала, для пучка лучей, выходящихъ изъ нѣкоторой точки самого зеркала, есть кардіоида, касающаяся зеркала въ свѣтящей точкѣ Q; точка возврата этой кардіоиды дѣлитъ діаметръ, выходящій изъ Q, въ отношеніи 2:1. Если же лучи выходятъ изъ безконечности, то, какъ мы видѣли раньше, нормаль къ каустикѣ въ точкѣ P, соотвѣтствующей даниой точкѣ M, на которую падаетъ лучъ, проходитъ черезъ середину N радіуса OM. Поэтому, когда построены окружности круга, проходящаго черезъ N съ центромъ въ O, и круга съ діаметромъ MN, то, какъ видимъ, кривую (P) можно разсматривать какъ рулетту, описываемую точкою P, когда второй кругъ безъ скольженія катится по первому. Итакъ, каустика кругового зеркала для пучка параллельныхъ лучей есть эпициклоида съ двумя точками возврата.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ КРИВЫМЪ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ*).

Основныя формулы.

630. Касательная прямая и нормальная плоскость. Касательною въ данной точкѣ M какой угодно плоской или не плоской кривой называется прямая, съ которою стремится совпасть сѣкущая MM', когда, фиксируя точку M, заставимъ точку M'

*) Неплоская кривая называется кривою двоякой кривизны по причинѣ, которая выяснится впослѣдствіи (§ 638). На нѣмецкомъ языкѣ неплоскія кривыя называются витыми кривыми (gewundene Kurven), на французскомъ — косыми (courbes gauches). На русскомъ ни то, ни другое названіе не вошло въ употребленіе.

безпредѣльно приближаться къ M, оставаясь на данной кривой. Мы ограничимся здѣсь изученіемъ такихъ кривыхъ, для которыхъ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\lim \frac{\overset{\smile}{MM'}}{\text{хорда } MM'} = 1,$$

подобно тому, какъ это имѣло мѣсто для плоскихъ кривыхъ въ предыдущей главѣ. Такъ какъ направляющіе косинусы сѣкущей равны разностямъ δx, δy, δz между координатами точки M' и координатами (x, y, z) точки M, дѣленнымъ на длину отрѣзка MM', то, переходя къ предѣлу и замѣняя хорду MM' дугою $MM' = \delta s$, найдемъ, что направляющіе косинусы касательной въ точкѣ (x, y, z) опредѣляются формулами

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds} \text{*}). \tag{1}$$

Формулы эти относятся къ положительному направленію касательной, которое всегда выбираемъ идущимъ въ сторону возрастающихъ дугъ s. Возвышая равенство (1) въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2}$$

Если координаты x, y, z заданы, какъ функціи нѣкотораго параметра t, то сперва вычисляемъ ds по формулѣ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

а затѣмъ по формуламъ (1) находимъ и направляющіе косинусы касательной. При этомъ беремъ положительное или отрицательное значенія корня квадратнаго, смотря по тому, будетъ ли s возрастать или убывать при возрастаніи t. Уравненія касательной будутъ

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Ихъ можно прямо писать, какъ уравненія прямой, проходящей черезъ точки (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Полезно замѣтить еще другую форму уравненій касательной, примѣняемую съ удобствомъ въ томъ случаѣ, когда кривая задана двумя уравненіями вида:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

---

*) Для вывода этихъ формулъ можно воспользоваться разсужденіями, совершенно аналогичными тѣмъ, которыя приведены въ примѣчаніи къ § 591.

Такъ какъ $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ пропорціональны дифференціаламъ dx, dy, dz, которыя связаны соотношеніями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz=0,$$

то будемъ имѣть

$$(X-x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

$$(X-x)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial\psi}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial\psi}{\partial z}=0.$$

Это и будетъ уравненіе касательной. Нормальною плоскостью въ точкѣ M называютъ общее мѣсто нормалей къ кривой въ этой точкѣ, т. е. перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ M къ касательной. Уравненіе нормальной плоскости есть

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0,$$

или, если кривая задана уравненіями $\varphi=0$, $\psi=0$, то

$$\begin{vmatrix} X-x & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ Y-y & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ Z-z & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

631. Бинормаль и соприкасающаяся плоскость. Главная нормаль и спрямляющая плоскость. Когда точка M' стремится къ совпаденію съ M, то плоскость, проходящая черезъ касательную въ M и параллельная касательной въ M', можетъ и, вообще говоря, будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣльному положенію. Это предѣльное положеніе опредѣляемой указаннымъ образомъ плоскости называютъ соприкасающеюся плоскостью (oskulierende Ebene) въ точкѣ M. Одна изъ безчисленнаго множества нормалей въ точкѣ M лежитъ въ этой плоскости и называется главною нормалью, другая перпендикулярна къ этой плоскости и называется бинормалью, потому что ее можно разсматривать, какъ перпендикуляръ къ двумъ безконечно близкимъ касательнымъ, т. е. какъ предѣльное положеніе общаго перпендикуляра къ касательнымъ въ точкахъ M и M'. Плоскость, проходящую черезъ касательную и бинормаль, называютъ спрямляющею плоскостью (rektifizierende Ebene).

[**Примѣчаніе.** На главной нормали и на бинормали, такъ же какъ на касательной, и вообще на всякой прямой, выбираютъ по произволу опредѣленное направленіе, которое называютъ положительнымъ, и когда говорятъ объ этихъ прямыхъ, то всегда подразумѣваютъ это направленіе, если не сказано противоположнаго. Вмѣстѣ съ тѣмъ различаютъ на нормальной, соприкасающейся, спрямляющей плоскости положительную и отрицательную сторону, при чемъ положительною называютъ ту, которая обращена въ ту же сторону, куда идетъ положительное направленіе перпендикуляра къ той или другой плоскости. То же самое относится и къ координатнымъ плоскостямъ.]

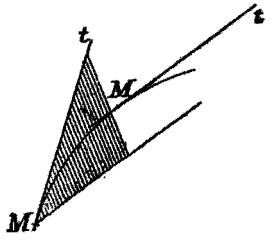


Рис. 78.



Рис. 79.

Три прямыя (касательная, бинормаль и главная нормаль) и три плоскости (нормальная, соприкасающаяся и спрямляющая) представляютъ собою соотвѣтственно ребра и грани трехграннаго угла, съ вершиною въ точкѣ M, который называется фундаментальнымъ или основнымъ тріэдромъ. Мы увидимъ впослѣдствіи, что для опредѣленія относительнаго положенія основныхъ тріэдровъ въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ M и M' достаточно будетъ знать двѣ безконечно малыя величины ε и η, опредѣляемыя слѣдующимъ образомъ: ε есть дифференціалъ, эквивалентный углу между касательными въ точкахъ M и M', а η — дифференціалъ, эквивалентный углу между бинормалями въ этихъ точкахъ. Первый, ε называется угломъ смежности, второй η — угломъ кручения.

632. Теперь намъ нужно сдѣлать небольшое отступленіе. Положимъ, что дана нѣкоторая прямая, направляющіе косинусы (A, B, C) которой непрерывныя функціи независимой перемѣнной. Всегда можно найти дифференціалъ, эквивалентный безконечно малому углу между направленіями (A, B, C) и $(A+\delta A, B+\delta B,$

$C+\delta C$), т. е. направленіями, соотвѣтствующими значеніямъ t и $t+dt$ независимой перемѣнной. Для этого представимъ себѣ шаръ радіуса, равнаго 1, съ центромъ въ началѣ координатъ O, и проведемъ радіусы OP и OP', въ данныхъ направленіяхъ (A, B, C) и $(A+\delta A, B+\delta B, C+\delta C)$. При измѣненіи t точка P опишетъ на поверхности шара нѣкоторую кривую. Уголъ между данными направленіями измѣряется дугою большого круга PP'. Ясно, что эта дуга эквивалентна хордѣ PP', которая въ свою очередь эквивалентна дугѣ PP' кривой линіи, описываемой точкой P; наконецъ, дуга PP' этой кривой эквивалентна дифференціалу дуги σ той же кривой, отсчитываемой отъ произвольно выбраннаго на кривой начала. Замѣчая теперь, что A, B, C будутъ, очевидно, равны координатамъ точки P (потому что $OP=1$), по формулѣ (2) найдемъ

(3) $$d\sigma^2 = dA^2 + dB^2 + dC^2.$$

Къ другому замѣчательному выраженію $d\sigma$ придемъ, замѣтивъ, что $A^2+B^2+C^2=1$, $AdA+BdB+CdC=0$, вслѣдствіе чего (§ 30)

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma A^2 & \Sigma A\,dA \\ \Sigma A\,dA & \Sigma dA^2 \end{vmatrix} = d\sigma^2,$$

а потому

(4) $$d\sigma^2 = (B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2.$$

633. Обратимся теперь къ опредѣленію направленія главной нормали. Съ этой цѣлью замѣчаемъ слѣдующее: если направленіе (A, B, C) совпадаетъ съ направленіемъ касательной (a, b, c) къ данной кривой въ точкѣ M, то плоскость OPP' будетъ параллельна касательнымъ въ точкахъ M и M', и съ приближеніемъ M' къ M (при чемъ и P' стремится совпасть съ P, если a, b, c непрерывныя функціи отъ t), будетъ стремиться къ совпаденію съ соприкасающеюся плоскостью. Предѣльное положеніе прямой PP' будетъ касательная къ кривой (P) въ точкѣ P и потому перпендикулярно къ OP. Слѣдовательно, предѣльное положеніе прямой PP' будетъ параллельно не только соприкасающейся, но и нормальной плоскости, т. е. параллельно главной нормали. Примѣняя теперь формулы (1) къ кривой (P) (при чемъ $d\sigma=\varepsilon$, а x, y, z надо замѣнить черезъ a, b, c), находимъ для направляющихъ косинусовъ главной нормали формулы

(5) $$\lambda = \frac{da}{\varepsilon}, \qquad \mu = \frac{db}{\varepsilon}, \qquad \nu = \frac{dc}{\varepsilon}.$$

634. Послѣ этого можно опредѣлить и направленіе бинормали. Оставляя пока положительное направленіе бинормали неопредѣленнымъ, обозначимъ направляющіе косинусы бинормали черезъ α, β, γ. Эти величины удовлетворяютъ условіямъ ортогональности относительно касательной и главной нормали

$$\Sigma a\alpha = a\alpha + \beta b + \gamma c = 0, \quad \Sigma a\lambda = a\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Присоединимъ къ этимъ двумъ уравненіямъ еще третье — условіе перпендикулярности касательной и главной нормали

$$\Sigma a\lambda = a\lambda + b\mu + c\nu = 0.$$

Эти три уравненія выражаютъ ортогональность опредѣлителя девяти основныхъ косинусовъ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Значеніе этого опредѣлителя будетъ, слѣдовательно, равно ± 1. (§ 69). Но всегда можно*) выбрать положительное направленіе бинормали такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = +1. \tag{6}$$

Геометрически такой выборъ положительнаго направленія бинормали сводится къ слѣдующему предположенію: Если мы совмѣстимъ основной тріэдръ съ тріэдромъ координатныхъ осей такимъ образомъ, что положительныя направленія касательной и главной нормали (выбираемыя по произволу) совпадутъ соотвѣтственно съ положительными направленіями осей x-овъ и z-овъ, то положительное направленіе бинормали совпадетъ съ положительнымъ направленіемъ оси y-овъ. Намъ извѣстно, что при вышеуказанномъ условіи (§ 70) каждый элементъ опредѣлителя (6) равенъ своему алгебраическому дополненію. Поэтому, пользуясь формулами (5), найдемъ, что направляющіе косинусы бинормали опредѣляются формулами

$$\frac{\alpha}{bdc - cdb} = \frac{\beta}{cda - adc} = \frac{\gamma}{adb - bda} = -\frac{1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Теперь мы можемъ написать и уравненіе сокрикасающейся плоскости, а именно: $\Sigma(bdc - cdb)(X - x) = 0$, или подробнѣе

$$(bdc - cdb)(X - x) + (cda - adc)(Y - y) + (adb - bda)(Z - z) = 0.$$

На основаніи формулъ (1) мы можемъ написать это уравненіе еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} X - x & dx & d^2x \\ Y - y & dy & d^2y \\ Z - z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

*) Измѣняя, если понадобится, знаки чиселъ α, β, γ.

Отсюда видимъ, что соприкасающуюся плоскость въ точкѣ (x, y, z) можно разсматривать, какъ плоскость, проходящую черезъ касательную въ этой точкѣ и черезъ точку

$$(x + dx + \tfrac{1}{2} d^2x,\ \ y + dy + \tfrac{1}{2} d^2y;\ \ z + dz + \tfrac{1}{2} d^2z).$$

[**Примѣчаніе.** Для того, чтобы уравненіе соприкасающейся плоскости могло быть представлено въ указанномъ видѣ, необходимо, во всякомъ случаѣ, предположить, что не всѣ коэффиціенты при $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, т. е. не всѣ три минора, составленные изъ двухъ послѣднихъ столбцовъ, равны нулю. При этомъ предположеніи легко доказать существованіе соприкасающейся плоскости, которое мы выше допустили. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе плоскости, проходящей черезъ касательную въ точкѣ (x, y, z)

$$\text{(I)} \qquad \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$$

и параллельной касательной въ точкѣ $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$

$$\text{(II)} \qquad \frac{X-(x+\delta x)}{dx+\delta dx} = \frac{Y-(y+\delta y)}{dy+\delta dy} = \frac{Z-(z+\delta z)}{dz+\delta dz},$$

можетъ быть написана въ слѣдующемъ видѣ:

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} X-x & dx & dx+\delta dx \\ Y-y & dy & dy+\delta dy \\ Z-z & dz & dz+\delta dz \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} X-x & dx & \delta dx \\ Y-y & dy & \delta dy \\ Z-z & dz & \delta dz \end{vmatrix} = 0.$$

Раздѣливъ послѣдній столбецъ на δs, переходя въ лѣвой части къ предѣлу при $\delta s = 0$ и вновь умноживъ послѣдній столбецъ на $\delta s = ds$, мы и придемъ къ уравненію

$$\begin{vmatrix} X-x & dx & d^2x \\ Y-y & dy & d^2y \\ Z-z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Такъ какъ, по сдѣланному предположенію, это равенство, дѣйствительно, является уравненіемъ, то существованіе соприкасающейся плоскости доказано.]

635. Формулы (7) и (5) даютъ возможность вычислить направляющіе косинусы бинормали и главной нормали по даннымъ косинусамъ a, b, c, опредѣляющимъ направленіе касательной, такъ какъ уголъ смежности ε можетъ быть вычисленъ по одной изъ слѣдующихъ формулъ:

$$\varepsilon^2 = da^2 + db^2 + dc^2, \quad \varepsilon^2 = (b\,dc - c\,db)^2 + (c\,da - a\,dc)^2 + (a\,db - b\,da)^2.$$

При этомъ знакъ, съ которымъ беремъ отсюда ε, остается произвольнымъ, потому что измѣненіе этого знака въ формулѣ (7) и (5) влечетъ за собою измѣненіе знаковъ чиселъ α, β, γ и λ, μ, ν, такъ что значеніе опредѣлителя (6) не измѣняется. Если вмѣсто a, b, c были бы даны α, β, γ, то можно было бы вычислить уголъ кручения η по формуламъ

$$\eta^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2, \quad \eta^2 = (\beta d\gamma - \gamma d\beta)^2 + (\gamma d\alpha - \alpha d\gamma)^2 + (\alpha d\beta - \beta d\alpha)^2,$$

а затѣмъ, зная η, съ помощью формулъ, аналогичныхъ (7) и (5), опредѣлить направленіе двухъ другихъ реберъ основного тріэдра. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя равенства $\Sigma a\alpha = 0$, $\Sigma a^2 = 1$, при помощи (5) найдемъ

$$\Sigma a d\alpha = -\Sigma \alpha da = -\varepsilon \Sigma \alpha\lambda = 0, \quad \Sigma \alpha da = 0,$$

Слѣдовательно, $\frac{da}{\lambda} = \frac{d\beta}{\mu} = \frac{d\gamma}{\nu} = \pm\eta$, или, выбирая надлежащимъ образомъ знакъ у η,

$$\lambda = \frac{da}{\eta}, \quad \mu = \frac{d\beta}{\eta}, \quad \nu = \frac{d\gamma}{\eta}. \tag{8}$$

Далѣе, $\beta d\gamma - \gamma d\beta = (\beta\nu - \gamma\mu)\eta = a\eta$ и т. д., т. е.

$$\frac{a}{\beta d\gamma - \gamma d\beta} = \frac{b}{\gamma da - \alpha d\gamma} = \frac{c}{\alpha d\beta - \beta da} = \frac{1}{\eta}. \tag{9}$$

Замѣтимъ и здѣсь, что измѣненіе знака η или знаковъ α, β, γ въ (8) и (9) не нарушаетъ равенства (6).

[**Примѣчаніе**. Обращаемъ вниманіе читателя на одну особенность въ изложеніи Чезáро, отличающую его отъ принятаго въ большинствѣ руководствъ по Дифференціальной Геометріи. Разсматривая вмѣстѣ съ данною кривою (M) сферическую кривую (P), о которой здѣсь говорится въ §§ 632—633, или такъ называемую сферическую указательницу, ставятъ условіемъ, что дифференціалъ ея дуги $d\sigma$ берется съ тѣмъ же знакомъ, съ какимъ берется дифференціалъ ds дуги данной кривой, т. е. что σ и s одновременно возрастаютъ и убываютъ (см., напримѣръ, Гурса „Курсъ математическаго Анализа", переводъ подъ ред. проф. Б. К. Млодзѣевскаго, т. I, стр. 506). Въ силу этого условія отношеніе $\frac{ds}{d\sigma}$ или $\frac{ds}{\varepsilon}$, такъ называемый радіусъ первой кривизны ϱ, оказывается всегда числомъ положительнымъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ за положительное направленіе главной нормали берется положительное направленіе касательной къ сферической указательницѣ, которое не зависитъ отъ выбора положительнаго направленія на данной кривой (см. Гурса стр. 509). Чезáро этого условія не ставитъ и разсма-

триваетъ ϱ, какъ алгебраическое количество, которое можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ, и оставляетъ выборъ положительнаго направленія главной нормали, равно какъ и положительнаго направленія касательной произвольнымъ, опредѣляя лишь положительное направленіе бинормали, при сдѣланномъ выборѣ первыхъ двухъ, условіемъ (6), которое можно назвать условіемъ конгруэнтности основного тріэдра Mt, Mb, Mn (рис. 79) съ тріэдромъ координатныхъ осей Ox, Oy, Oz. Подобная точка зрѣнія, конечно, допустима и ни къ какимъ противорѣчіямъ не ведетъ, но врядъ ли оправдывается какими нибудь особыми выгодами; нѣкоторыя изслѣдованія (какъ напримѣръ, изслѣдованія § 643) даже усложняются. Относительно условія (6) замѣтимъ еще слѣдующее. Когда положительныя направленія Mt, Mb, Mn совпадутъ съ положительными направленіями Ox, Oy, Oz (и точка M съ O), то $a=1$, $b=c=0$; $\beta=1$, $\alpha=\gamma=0$, $\nu=1$, $\lambda=\mu=0$ и опредѣлитель $(6)=+1$. Это значеніе онъ сохранитъ и при всякомъ другомъ положеніи основного тріэдра, потому что, будучи ортогональнымъ, онъ можетъ имѣть только значенія $+1$ или -1, а не обращаясь въ нуль и будучи непрерывною функціею отъ своихъ элементовъ, не можетъ мѣнять знака.]

636. Формулы Френе. Дифференцируя равенства $\Sigma a\lambda=0$, $\Sigma a\lambda=0$ и $\Sigma\lambda^2=1$, принимая во вниманіе формулы (5) и (8), найдемъ

$$\Sigma a\,d\lambda=-\Sigma\lambda\,da=-\varepsilon\Sigma\lambda^2=-\varepsilon,$$

$$\Sigma a\,d\lambda=-\Sigma\lambda\,da=-\eta\Sigma\lambda^2=-\eta$$

и $\Sigma\lambda\,d\lambda=0$. Слѣдовательно, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ удовлетворяютъ системѣ уравненій

$$\begin{cases} a\,d\lambda+b\,d\mu+c\,d\nu=-\varepsilon \\ a\,d\lambda+\beta\,d\mu+\gamma\,d\nu=-\eta \\ \lambda\,d\lambda+\mu\,d\mu+\nu\,d\nu=0. \end{cases}$$

Опредѣлитель этой системы равенъ опредѣлителю (6); значеніе его равно 1 и каждый элементъ равенъ своему алгебраическому дополненію. Отсюда тотчасъ получаемъ формулы

$$(10)\qquad d\lambda=-a\varepsilon-\alpha\eta,\quad d\mu=-b\varepsilon-\beta\eta,\quad d\nu=-c\varepsilon-\gamma\eta,$$

извѣстныя подъ названіемъ формулъ Френе. Въ совокупности съ формулами (5) и (8) онѣ показываютъ, что дифференціалы девяти фундаментальныхъ косинусовъ выражаются линейными функціями самыхъ косинусовъ; коэффиціенты въ этихъ выраженіяхъ зависятъ только отъ ε и η. Если обозначимъ еще черезъ ω дифференціалъ, эквивалентный углу между двумя безконечно близкими главными нормалями, то изъ формулъ (10) черезъ возвы-

шеніе ихъ въ квадратъ и сложеніе получимъ $\omega^2 = \varepsilon^2 + \eta^2$. Свойство, выражаемое этимъ равенствомъ, легко получаемое также геометрически, извѣстно подъ именемъ теоремы Ланкрé (Lancret).

637. Полезно замѣтить, что формулы, аналогичныя предыдущимъ, имѣютъ мѣсто для всякой системы трехъ ортогональныхъ направленій. Разсмотримъ сперва два произвольныя перемѣнныя направленія и назовемъ вращеніемъ перваго направленія относительно второго дифференціалъ ω, эквивалентный безконечно малому измѣненію направленія проэкціи перваго направленія на плоскость, параллельную обоимъ *) Предложимъ себѣ вычислить ω по даннымъ косинусамъ (A, B, C) и (A', B', C'), опредѣляющимъ первое и второе направленія. Проведемъ черезъ начало координатъ четыре прямыя, параллельныя и одинаково направленныя съ (A, B, C), (A', B', C'), $(A+\delta A, B+\delta B, C+\delta C)$ и проекціею послѣдняго направленія на плоскость, параллельную первымъ двумъ **). Пусть P, P', P'' будутъ точки пересѣченія первой, третьей и четвертой прямой съ поверхностью шара радіуса, равнаго единицѣ, съ центромъ въ началѣ координатъ. Тогда (A, B, C) будутъ координатами точки P, $(A+\delta A, B+\delta B, C+C\delta)$ координатами точки P', а потому δA, δB, δC будутъ, очевидно, проекціи элемента PP' на координатныхъ осяхъ. Элементъ PP'' эквивалентенъ дифференціалу ω, согласно опредѣленію послѣдняго. Этотъ элементъ можно разсматривать какъ проекцію элемента PP' на направленіе (l, m, n) элемента PP'', очевидно, перпендикулярное къ (A, B, C) ***). Поэтому, удерживая однѣ лишь дифференціальныя безконечно малыя, найдемъ

$$\omega = l\,dA + m\,dB + n\,dC.$$

Далѣе, если назовемъ черезъ φ уголъ между направленіями (A, B, C) и (A', B', C'), то, очевидно, будемъ имѣть

$$A' = A\cos\varphi + l\sin\varphi, \quad B' = B\cos\varphi + m\sin\varphi, \quad C' = C\cos\varphi + n\sin\varphi \text{ ****}).$$

Умножая послѣднія равенства соотвѣтственно на dA, dB, dC и складывая, тотчасъ найдемъ

$$\omega\sin\varphi = A'\,dA + B'\,dB + C'\,dC.$$

Это и есть та формула, которая оказывается весьма полезною въ геометрическихъ и механическихъ приложеніяхъ. Если теперь напра-

---

*) Точнѣе говоря, безконечно малому углу между начальнымъ и измѣненнымъ направленіемъ этой проекціи.

**) Величины δA, δB, δC имѣютъ здѣсь то же значеніе, что и въ § 632.

***) PP'' есть проекція элемента PP' на направленіи элемента PP'', потому что $P'P'' \perp$ плоскости OPP'', а слѣдовательно, и къ PP''.

****) Проектируемъ на оси Ox, Oy, Oz стороны прямоугольнаго треугольника, въ которомъ гипотенуза имѣетъ направленіе (A', B', C') и катеты направленія (A, B, C) и (l, m, n) и уголъ φ противолежитъ катету (l, m, n).

вленія (A', B', C') и (A'', B'', C'') образуютъ съ направленіемъ (A, B, C) ортогональную систему съ опредѣлителемъ, равнымъ единицѣ, то, обозначая черезъ ω' и ω'' соотвѣтственно вращенія направленія (A, B, C) относительно (A', B', C') и (A'', B'', C'') на основаніи вышеприведенной формулы будемъ имѣть

$$\Sigma A dA = 0, \quad \Sigma A' dA = \omega', \quad \Sigma A'' dA = \omega'',$$

откуда выводимъ

$$dA = A'\omega' + A''\omega'', \quad dB = B'\omega' + B''\omega'', \quad dC = C'\omega' + C''\omega''.$$

Далѣе, если обозначимъ черезъ ω дифференціалъ, эквивалентный абсолютному измѣненію направленія (A, B, C) въ пространствѣ, то съ помощью формулы (3) § 632 и предыдущихъ получимъ $\omega^2 = \omega'^2 + \omega''^2$. Въ частности, формулы (5) и (8) показываютъ, что абсолютное измѣненіе направленія касательной приводится къ вращенію ε относительно главной нормали, абсолютное измѣненіе направленія бинормали къ вращенію η около той же главной нормали. Формулы (10) показываютъ, напротивъ того, что абсолютное измѣненіе направленія главной нормали ω составляется изъ двухъ вращеній $-\varepsilon$ и $-\eta$ этой прямой относительно первыхъ двухъ.

О первой и второй кривизнѣ.

638. Какъ для плоскихъ, такъ и для неплоскихъ кривыхъ мѣрою первой кривизны или просто кривизны (Flexion) служитъ отношеніе $\frac{\varepsilon}{ds}$ или $\frac{d\sigma}{ds}$; аналогично этому отношеніе $\frac{\eta}{ds}$ принимается за мѣру второй кривизны или крученія (Torsion) данной кривой въ данной точкѣ. Она не встрѣчается при изученіи плоскихъ кривыхъ, потому что для нихъ она всегда равна нулю. Удерживая далѣе названіе радіуса кривизны для отношенія $\frac{ds}{\varepsilon}$, условились называть радіусомъ второй кривизны или крученія отношеніе $\tau = \frac{ds}{\eta}$. Введеніе опредѣленныхъ ϱ и τ во всѣ предыдущія формулы, вмѣсто безконечно малыхъ ε и η, дѣлается съ цѣлью придать этимъ формуламъ болѣе точную форму. Формулы (5), (8) и (10) принимаютъ видъ

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{da}{ds} = \frac{\lambda}{\varrho}, & \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{\tau}, & \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{a}{\varrho} - \frac{\alpha}{\tau}, \\ \frac{db}{ds} = \frac{\mu}{\varrho}, & \frac{d\beta}{ds} = \frac{\mu}{\tau}, & \frac{d\mu}{ds} = -\frac{b}{\varrho} - \frac{\beta}{\tau}, \\ \frac{dc}{ds} = \frac{\nu}{\varrho}, & \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\tau}, & \frac{d\nu}{ds} = -\frac{c}{\varrho} - \frac{\gamma}{\tau}. \end{cases}$$

Принимая во вниманіе формулы (1), можно написать три формулы перваго столбца иначе, а именно:

$$\lambda = \varrho \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}, \quad \mu = \varrho \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}, \quad \nu = \varrho \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}, \tag{12}$$

или, если угодно, такъ:

$$\lambda = \varrho\left(\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right), \quad \mu = \varrho\left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right), \quad \nu = \varrho\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right). \tag{13}$$

Точно такъ же, на основаніи формулъ (1), можно написать формулы (7) слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \varrho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right), \quad \beta = \varrho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right), \tag{14}$$

$$\gamma = \varrho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

639. Вычисленіе первой кривизны. Формулы (1), (12) и (14) даютъ выраженія девяти фундаментальныхъ косинусовъ въ первыхъ и вторыхъ производныхъ отъ координатъ точки (x, y, z), считая извѣстнымъ значеніе ϱ. Это значеніе получится изъ тѣхъ же формулъ, потому что, возвышая въ квадратъ и складывая равенства (12), получаемъ

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2, \tag{15}$$

или, если угодно, на основаніи (13),

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2.$$

Если примемъ s за независимую перемѣнную, то послѣдній членъ обратится въ нуль, и мы увидимъ, что и здѣсь, какъ и въ плоскихъ кривыхъ (§ 558, e), квадратъ кривизны равенъ суммѣ квадратовъ вторыхъ производныхъ отъ координатъ, взятыхъ по дугѣ. Если возвысимъ въ квадратъ равенства (14) и сложимъ, то получимъ другое выраженіе для ϱ:

$$\varrho = \frac{\pm\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}. \tag{16}$$

При постоянномъ z оно заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, извѣстное выраженіе для ϱ, чаще всего прилагаемое въ изслѣдованіи плоскихъ кривыхъ. Изъ формулъ (15) тотчасъ слѣдуетъ, что прямая есть единственная линія, имѣющая кривизну, равную нулю (во всѣхъ точкахъ). Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{\varrho}$ лишь тогда постоянно

равно нулю, когда всѣ три вторыя производныя координатъ по s одновременно равны нулю. Тогда первыя производныя равны постояннымъ a, b, c, а отсюда, обозначая черезъ x_0, y_0, z_0 координаты точки, отъ которой считаютъ дуги s (т. е. такой, что при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и $s = 0$), найдемъ $x = as + x_0$, $y = bs + b_0$, $z = cs + c_0$. Исключая s, получаемъ

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

уравненія прямой, проходящей черезъ (x_0, y_0, z_0) въ направленіи (a, b, c).

640. Вычисленіе кручения. Изъ второго столбца формулъ (11), путемъ умноженія на λ, μ, ν и сложенія, получаемъ

$$\frac{1}{\tau} = \lambda \frac{d\alpha}{ds} + \mu \frac{d\beta}{ds} + \nu \frac{d\gamma}{ds}.$$

Съ другой стороны, дифференцируя формулу (14), имѣемъ

$$\frac{d\alpha}{ds} = \varrho \left(\frac{dz}{ds} \frac{d^3y}{ds^3} - \frac{dy}{ds} \frac{d^3z}{ds^3} \right) + \frac{\alpha}{\varrho} \frac{d\varrho}{ds} \text{ и т. д.}$$

Отсюда, принимая во вниманіе формулы (13), получаемъ

$$\frac{1}{\tau} = \varrho^2 \sum \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{dz}{ds} \frac{d^3y}{ds^3} - \frac{dy}{ds} \frac{d^3z}{ds^3} \right)$$

или

$$\frac{1}{\tau \varrho^2} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^3y}{ds^3} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Эта важная формула даетъ величину кручения, когда извѣстна кривизна. Подставляя сюда выраженіе ϱ по формулѣ (16), можемъ также написать

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)\, d^3x + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)\, d^3y + (dx\, d^2y - dy\, d^2x)\, d^3z}{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2 + (dz\, d^2x - dx\, d^2z)^2 + (dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2}.$$

Это и есть искомое выраженіе величины кручения. Изящнѣе можно представить его въ видѣ

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}^2}.$$

Для плоскихъ кривыхъ, очевидно, кручение постоянно равно нулю, если исключимъ прямую линію, для которой кручение величина неопредѣленная, такъ какъ всякую плоскость, проходящую черезъ данную прямую, можно разсматривать какъ соприкасающуюся плоскость. Полезно замѣтить, что плоскія кривыя суть единственныя, для которыхъ кручение постоянно равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, если кручение постоянно равно нулю, то опредѣлитель въ правой части формулы (17) постоянно равенъ нулю, а отсюда (§ 375) слѣдуетъ, что при надлежащемъ выборѣ трехъ постоянныхъ α, β, γ, сумма $\Sigma \alpha dx = 0$, а потому $\Sigma \alpha x$, т. е. $\alpha x + \beta y + \gamma z = \text{const.}$, и кривая лежитъ въ плоскости. Это заключение, равно какъ и заключение, приведенное въ концѣ предыдущаго §, можно вывести также непосредственно изъ первыхъ двухъ столбцовъ формулъ (11) *).

641. Вычисленіе кручения можно вести также тѣмъ путемъ, какимъ было выведено выраженіе (15) для кривизны. Дѣйствительно, изъ формулъ (12) съ помощью дифференцированія получимъ

$$\lambda \frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} - \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\alpha}{\varkappa}\right)\frac{1}{\varrho} = \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \text{ и т. д.,}$$

а затѣмъ, возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varkappa^2}\right)\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Къ этой формулѣ, которая также дастъ $\varkappa$, когда ϱ извѣстно, можно также придти, возвышая въ квадратъ равенство (17), представивъ сперва правую часть въ болѣе общемъ видѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} \end{vmatrix},$$

что всегда возможно (§ 558, c).

Изслѣдованіе кривыхъ двоякой кривизны.

642. [**Примѣчаніе.** Въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ мы условимся разъ навсегда, что взаимное расположеніе координатныхъ осей характеризуется слѣдующимъ образомъ: Представимъ себѣ наблюдателя, стоящаго на плоскости Oxy по направленію положительной оси z-овъ и смотрящаго по направленію положительной

*) Этотъ выводъ имѣлъ бы то преимущество, что не нужна была бы ссылка на теорему Вронскаго [см. часть I, прим. XLIV (къ § 375) на стр. 428].

оси x-овъ; мы условимся, что для этого наблюдателя положительная ось y-овъ направлена вправо; иными словами, положительную ось y-овъ надо повернуть на уголъ въ 90° въ направленіи, противоположномъ движенію часовой стрѣлки, для того, чтобы она совпала съ положительною осью x-овъ. При этомъ условіи, согласно условію конгруентности (6) § 634, расположеніе реберъ основного тріэдра будетъ именно такое, какое изображено на рис. 79, а именно наблюдатель, стоящій на спрямляющей плоскости по положительному направленію главной нормали и смотрящій въ положительномъ направленіи касательной, увидитъ положительное направленіе бинормали вправо отъ себя. Такое соглашеніе дѣлается для того, чтобы можно было кратко и опредѣленно формулировать многіе изъ дальнѣйшихъ результатовъ.]

Когда извѣстны кривизна и крученіе въ данной точкѣ M на кривой, то опредѣлится и положеніе основного тріэдра въ точкѣ M', безконечно близкой къ M. Чтобы это показать, вычислимъ сперва разстояніе $\Sigma A\delta x$ отъ точки M' $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ до плоскости, проходящей черезъ M и перпендикулярной данному направленію $(A,\ B,\ C)$. При этомъ подъ разстояніемъ M' отъ этой плоскости понимается его алгебраическая величина, т. е. разстояніе, взятое съ $+$, для точекъ, лежащихъ съ одной стороны отъ плоскости и съ $-$, для точекъ съ другой стороны. Перемѣна знака этого разстоянія обозначаетъ переходъ точки M' съ одной стороны на другую. Разлагая δx, δy, δz по формулѣ Тэйлора (§ 564), всегда можно принять за независимую перемѣнную дугу s данной кривой; при такомъ предположеніи формулы (11) дадутъ

$$\frac{dx}{ds}=a,\quad \frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\lambda}{\varrho},\quad \frac{d^3x}{ds^3}=\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}-\left(\frac{a}{\varrho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho},\ \dots,$$

а потому

$$\delta x=a\,ds+\frac{\lambda}{\varrho}\frac{ds^2}{2}+\left(\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}-\left(\frac{a}{\varrho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho}\right)\frac{ds^3}{6}+\cdots$$

и окончательно

$$\Sigma A\delta x=\mathfrak{A}\,ds+\frac{\mathfrak{C}}{\varrho}\frac{ds^2}{2}+\left(\mathfrak{C}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}-\left(\frac{\mathfrak{A}}{\varrho}+\frac{\mathfrak{B}}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho}\right)\frac{ds^3}{6}+\cdots,\tag{18}$$

гдѣ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ обозначаютъ косинусы угловъ направленія $(A,\ B,\ C)$ съ ребрами основного тріэдра, т. е.

$$\mathfrak{A}=\Sigma Aa,\quad \mathfrak{B}=\Sigma A\alpha,\quad \mathfrak{C}=\Sigma A\lambda.$$

Только при $\mathfrak{A}=0$ правая часть формулы (18) есть безконечно малая второго порядка (относительно $MM'=ds$), и дѣлается безконечно малою выше второго порядка когда, кромѣ того, еще и $\mathfrak{C}=0$. Отсюда видимъ, что разстояніе точки M' отъ всякой плоскости, проходящей черезъ касательную въ точкѣ M, вообще

безконечно малая второго порядка относительно дуги MM'; лишь одна изъ всѣхъ этихъ плоскостей отстоитъ отъ M' на безконечно маломъ разстояніи, по крайней мѣрѣ, третьяго порядка, а именно соприкасающаяся плоскость (при $\mathfrak{A}=0$, $\mathfrak{C}=0$, направленіе (A, B, C), очевидно, параллельно бинормали). Итакъ, можемъ сказать, что соприкасающаяся плоскость тѣснѣе всѣхъ другихъ плоскостей примыкаетъ къ кривой въ смежности съ точкою M.

643. Формулы (18) тотчасъ дадутъ выраженія координатъ u, v, w точки M' относительно основного тріэдра. Стоитъ только послѣдовательно совмѣщать направленіе (A, B, C) съ касательною $(\mathfrak{A}=1,\ \mathfrak{B}=\mathfrak{C}=0)$, бинормалью $(\mathfrak{B}=1,\ \mathfrak{A}=\mathfrak{C}=0)$ и главною нормалью $(\mathfrak{C}=1,\ \mathfrak{A}=\mathfrak{B}=0)$, чтобы получить, вѣрно до безконечно малыхъ третьяго порядка (относительно ds) включительно, координаты точки M' относительно нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскости, а именно:

$$(19)\qquad u=ds-\frac{ds^3}{6\varrho^2},\quad v=-\frac{ds^3}{6\varrho\tau},\quad w=\frac{ds^2}{2\varrho}-\frac{ds^2\,d\varrho}{6\varrho^2}.$$

Эти формулы даютъ возможность изслѣдовать ходъ кривой въ смежности съ точкою M. Мы предположимъ, что въ этой точкѣ ни первая, ни вторая кривизна не равны нулю и замѣтимъ, что знаки чиселъ u, v, w при достаточно маломъ ds опредѣляются

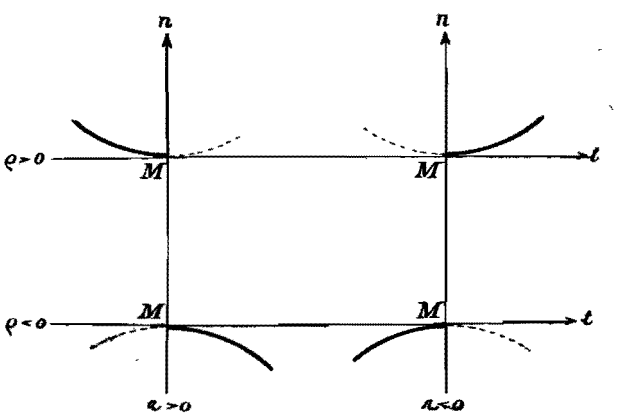


Рис. 80.

знакомъ члена наинизшей степени. Наблюдатель, идущій по кривой въ положительномъ направленіи касательной такъ, что положительное направленіе главной нормали проходитъ отъ ногъ къ головѣ, очевидно, увидитъ, что въ точкѣ M кривая поднимается или опускается, смотря по тому, будетъ ли $\varrho>0$ или <0 ($w>0$ или <0), и

закручивается влѣво или вправо, смотря по тому, будутъ ли τ и ϱ одинаковыхъ или противоположныхъ знаковъ ($v<0$ или $v>0$). Кромѣ того, замѣчая, что замѣна ds на $-ds$ мѣняетъ знакъ v, не мѣняя ни знака w, ни знака разстоянія $\Sigma A\delta x$ вообще, если $\mathfrak{A}=0$, а $\mathfrak{C}$ не $=0$, мы видимъ, что всѣ точки достаточно малой дуги, въ смежности съ точкою M, лежатъ по одну сторону отъ всякой плоскости, проходящей черезъ касательную, за исключеніемъ соприкасающейся плоскости, которую кривая пересѣкаетъ. Четыре различныхъ вида, представляемыхъ кривою въ смежности съ точкою M, въ зависимости отъ знаковъ ϱ и τ, могутъ быть изображены такъ, какъ это сдѣлано на рис. 80, гдѣ пунктиромъ отмѣчены дуги, лежащія влѣво отъ нашего наблюдателя. Такимъ образомъ обнаруживается, что при $\tau<0$, наблюдатель увидитъ кривую (при касаніи съ соприкасающеюся плоскостью), переходящею съ лѣвой ея стороны на правую поднимаясь или съ правой стороны на лѣвую опускаясь, такъ что въ обоихъ случаяхъ кривая будетъ вправо завитою или правою (dextrorsum). Это значитъ, что движеніе точки, удаляющейся по кривой въ положительномъ направленіи, представится глазу наблюдателя происходящимъ по направленію движенія часовой стрѣлки. При $\tau>0$, наоборотъ, кривая будетъ влѣво завитою или лѣвою (sinistrorsum). Итакъ, въ смежности съ обыкновенною точкою (гдѣ ни $\frac{1}{\varrho}$, ни $\frac{1}{\tau}$ не равны 0), кривая будетъ правою при $\tau<0$ и лѣвою при $\tau>0$. Легко также убѣдиться, что тотъ или другой характеръ кривой не зависитъ отъ положенія наблюдателя въ пространствѣ. Примѣры кривыхъ съ положительнымъ или отрицательнымъ крученіемъ встрѣчаются въ природѣ [1]): хмѣль завивается влѣво, а виноградная лоза вправо.

[**Примѣчаніе.** Понятіе о правой и лѣвой кривой есть обобщеніе извѣстнаго понятія о правомъ и лѣвомъ винтѣ. Обыкновенная нарѣзка даетъ правую винтовую линію, моделью которой можетъ служить штопоръ. Нужно замѣтить, однако, что опредѣленія правой (dextrorsum) и лѣвой (sinistrorsum) кривой не установлены вполнѣ опредѣленно въ математической литературѣ: одни называютъ правою такую кривую, которая у другихъ называется лѣвою. Необходимо замѣтить, что установленное въ § 643 соотвѣтствіе между знакомъ крученія τ, опредѣляемаго формулою (17), и характеромъ (правымъ или лѣвымъ) кривой, измѣнится на противоположное (т. е. при $\tau>0$ — правая, а при $\tau<0$ — лѣвая), если измѣнимъ взаимное расположеніе координатныхъ осей или способъ совмѣщенія основного тріэдра съ координатнымъ тріэдромъ, т. е. условіе (6). (См., напр., Гурса „Курсъ“ стр. 316). Замѣтимъ еще, что изслѣдованіе § 643 значительно упрощается, если условимся (какъ это обыкновенно и

[1]) Maxwell. „Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus“: (Bd. I. § 25).

дѣлается) направить положительную главную нормаль въ ту сторону отъ спрямляющей плоскости, съ которой лежатъ всѣ точки кривой, смежныхъ съ M. Тогда $w>0$, а слѣдовательно, и $\varrho>0$, и достаточно разсмотрѣть верхнюю часть рис. 80, и различать два случая $\tau<0$ и $\tau>0$, вмѣсто четырехъ. При $\tau=0$ кривая плоская и не выходитъ изъ соприкасающейся плоскости, т. е. плоскости самой кривой. При $\tau<0$ кривая пересѣкаетъ соприкасающуюся плоскость, переходя съ лѣвой стороны на правую для нашего наблюдателя (знакъ v переходитъ изъ — въ + при измѣненіи знака ds изъ — въ +), при $\tau>0$ — наоборотъ.]

644. Съ помощью тѣхъ же формулъ (19) можно еще подробнѣе изслѣдовать кривую въ смежности съ данною точкою M. Для этого замѣтимъ сперва, что, помѣстивъ начало координатъ въ точку M, считая эту точку за начало счета дугъ, совмѣстивъ тріэдръ координатныхъ осей съ основнымъ тріэдромъ въ точкѣ M и пренебрегая безконечно малыми выше третьяго порядка, мы можемъ дугу данной кривой MM' разсматривать, какъ дугу кривой, изображаемой уравненіями

$$x=s-\frac{s^3}{6\varrho^2},\quad y=-\frac{s^3}{6\varrho\tau},\quad z=\frac{s^2}{2\varrho}-\frac{s^3}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds},$$

которыя получаются изъ (19) замѣною буквъ u, v, w буквами x, y, z и ds черезъ s. Значенія ϱ, τ и $\frac{d\varrho}{ds}$, входящія въ эти уравненія, конечно, обозначаютъ частныя значенія этихъ функцій при $s=0$, въ точкѣ M. Исключая перемѣнную s всѣми возможными способами, получимъ

$$y^2=\frac{2\varrho}{9\tau^2}z^3,\quad z=\frac{x^2}{2\varrho}-\frac{x^3}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds},\quad y=-\frac{x^3}{6\varrho\tau}.$$

Изъ этихъ уравненій видно, что проекція данной кривой на нормальную плоскость (Myz) имѣетъ въ M точку возврата, проекція на соприкасающуюся плоскость (Mxz) — обыкновенную точку, а проекція на спрямляющую плоскость (Mxy) — точку изгиба. Далѣе, такъ какъ направляющіе косинусы касательной въ точкѣ M' равны производнымъ отъ x, y, z по s, а эти производныя, какъ легко видѣть, пропорціональны числамъ $x-\frac{2}{3}s$, y, $z-\frac{s^2}{6\varrho}$, то координаты любой точки (ξ, η, ζ) на этой касательной можно изобразить формулами

$$\xi=kx+\frac{2}{3}(1-k)s,\quad \eta=ky,\quad \zeta=kz+(1-k)\frac{s^2}{6\varrho}.$$

Отсюда находимъ, что касательная въ точкѣ M' пересѣкаетъ соприкасающуюся въ точкѣ M плоскость (т. е. плоскость $\eta=0$)

въ точкѣ $\left(\frac{2}{3}s, \frac{s^2}{6\varrho}\right)$, лежащей съ той же стороны отъ спрямляющей плоскости, съ которой лежитъ M'. Спрямляющую плоскость ($\zeta = 0$) эта касательная пересѣкаетъ въ разстояніи $-\frac{1}{2}y$ отъ соприкасающейся плоскости (изъ уравн. $\zeta = 0$ получаемъ $k = -\frac{6\varrho}{z - \frac{s^2}{6\varrho}} = -\frac{1}{2} + \cdots$). Отсюда слѣдуетъ, что касательныя въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ не пересѣкаются и кратчайшее разстояніе между ними равно $\frac{ds^3}{12\varrho\varkappa}$. Эта теорема принадлежитъ Боннѣ (Bonnet).

645. Изъ предыдущихъ формулъ также выводимъ, что

$$\varrho z - \varkappa y \frac{d\varrho}{ds} = \frac{1}{2}s^2.$$

Если замѣнимъ здѣсь дугу $s(MM')$ хордою ея, т. е. s^2 черезъ $x^2 + y^2 + z^2$, то увидимъ, что эту дугу можно разсматривать, какъ дугу, лежащую на поверхности шара, изображаемаго уравненіемъ

$$x^2 + \left(y + \varkappa\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + (z - \varrho)^2 = \mathfrak{R}^2,$$

гдѣ $\mathfrak{R}^2 = \varrho^2 + \left(\varkappa\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$. Шаръ радіуса $\mathfrak{R}$ съ центромъ въ нормальной плоскости и въ разстоянія $-\varkappa\frac{d\varrho}{ds}$ и ϱ отъ соприкасающейся и спрямляющей плоскости называется соприкасающимся шаромъ къ данной кривой въ данной точкѣ M. Этотъ шаръ, по сравненію со всѣми другими шарами въ пространствѣ, тѣснѣе всего примыкаетъ къ данной кривой. Если бы мы отбросили и безконечно малыя 3-го порядка, то дугу MM' можно было бы разсматривать, какъ плоскую, лежащую въ соприкасающейся плоскости, а если отбросимъ и безконечно малыя 2-го порядка, то дугу MM' можно разсматривать просто, какъ прямолинейный отрѣзокъ на касательной. Поэтому въ изслѣдованіяхъ, въ которыхъ можно не обращать вниманія на безконечно малыя высшихъ порядковъ, позволительно разсматривать кривую, какъ ломанную $MM'M''M'''\ldots$ съ безконечно малыми сторонами, и разсматривать касательную, какъ прямую, на которой лежитъ одинъ элементъ MM', соприкасающуюся плоскость, какъ плоскость, опредѣляемую двумя послѣдовательными элементами MM' и $M'M''$, или тремя точками M, M', M'', и, наконецъ, соприкасающійся шаръ, какъ опредѣляемый четырьмя точками M, M', M'', M'''. Такая точка зрѣнія и такой способъ выраженія, хотя и не вполнѣ правильные, тѣмъ не менѣе могутъ быть полезны въ тѣхъ случаяхъ, когда хотятъ интерпретировать геометрически тѣ

или другіе результаты Дифференціальнаго Исчисленія. Мы можемъ теперь легко констатировать, что для перехода отъ положенія фундаментальнаго тріэдра съ вершиною въ M къ смежному, съ вершиною въ M', надо сперва передвинуть вершину по касательной

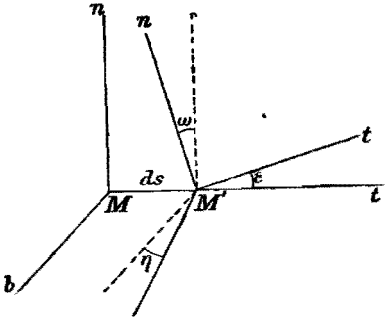


Рис. 81.

на величину ds, а затѣмъ дать ребрамъ его такія вращенія около вершины, чтобы косинусы ихъ направленій относительно первоначальныхъ t, b, n, получили бы слѣдующія значенія:

t':	1	0	ε
b':	0	1	η
n':	$-\varepsilon$,	$-\eta$	1

Это выводится изъ формулъ (5), (8) и (10), если положимъ въ нихъ $a=\beta=\nu=1$, $b=c=\gamma=\alpha=\lambda=\mu=0$, или еще строже съ помощью соображеній § 637.

[**Примѣчаніе.** Для поясненія сказаннаго разсмотримъ, напримѣръ, главную нормаль, направляющіе косинусы которой обозначены черезъ λ, μ, ν. Когда совмѣстимъ основной тріэдръ точки M съ координатнымъ тріэдромъ такъ, какъ сказано въ § 634, т. е. Mt съ Ox, Mb съ Oy, Mn съ Oz, то получимъ $a=1$, $b=c=0$; $\beta=1$, $\alpha=\gamma=0$; $\nu=1$, $\lambda=\mu=0$. При переходѣ отъ M къ M' λ, μ, ν обратятся въ $\lambda+d\lambda$, $\mu+d\mu$, $\nu+d\nu$, гдѣ $d\lambda$, $d\mu$ и $d\nu$ опредѣлятся по формуламъ (10), а λ, μ, ν имѣютъ указанныя выше начальныя значенія, слѣдовательно

$$\lambda+d\lambda=0-1.\varepsilon-0.\eta=-\varepsilon$$
$$\mu+d\mu=0-0.\varepsilon-1.\eta=-\eta$$
$$\nu+d\nu=1-0.\varepsilon-0.\eta=-1$$

Эти значенія и даны въ таблицѣ косинусовъ главной нормали n'. Такимъ же образомъ получаются значенія косинусовъ для t' и b' изъ формулъ (5) и (8).]

646. Особенности. Все, сказанное въ предыдущихъ §§, справедливо лишь въ томъ предположеніи, что разсматриваемая точка на кривой есть обыкновенная точка. Выведенныя заключенія теряютъ силу для точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ условію

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

(см. § 604). Такія точки аналогичны точкамъ изгиба плоскихъ кривыхъ; въ нихъ, на основаніи формулы (17), по крайней мѣрѣ, одна изъ кривизнъ равна нулю, а потому координата v будетъ безконечно малою порядка, выше третьяго. Чтобы вычислить эту координату, надо продолжить вычисленіе, начатое въ § 642. Изъ выраженія $\frac{d^3x}{ds^3}$ и формулъ (11) найдемъ

$$\frac{d^4x}{ds^4} = -3\frac{a}{\varrho}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - a\varrho\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau\varrho^2}\right) + \lambda\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\frac{1}{\varrho}\right], \tag{21}$$

Отсюда, на основаніи условій

$$\Sigma a\alpha = 0, \quad \Sigma\lambda\alpha = 0, \quad \Sigma\alpha^2 = 1,$$

тотчасъ находимъ

$$v = \frac{1}{24}\Sigma\alpha d^4x = -\frac{\varrho ds^3}{24}d\frac{1}{\tau\varrho^2},$$

вѣрно до безконечно малыхъ четвертаго порядка включительно. Слѣдовательно, если

$$\frac{1}{\varrho} = 0, \text{ но } d\left(\frac{1}{\varrho}\right) \gtrless 0, \text{ то } v = -\frac{ds^3}{12\tau}d\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

а если

$$\frac{1}{\tau} = 0, \text{ но } d\left(\frac{1}{\tau}\right) \gtrless 0, \text{ то } v = -\frac{ds^3}{24\varrho}d\left(\frac{1}{\tau}\right)^{*}).$$

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ слѣдующее заключеніе: Точки кривой, смежныя съ точкою M, удовлетворяющею условію (20), лежатъ по одну сторону отъ соприкасающейся плоскости (v не мѣняетъ знака при замѣнѣ ds на $-ds$). При этомъ, всѣ эти точки лежатъ слѣва отъ соприкасающейся плоскости (для наблюдателя § 643), если та кривизна, которая равна нулю въ точкѣ M, принимаетъ затѣмъ знакъ, оди-

---

*) Выраженіе v можно написать и такъ:

$$v = -\frac{ds^4}{12\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right) \text{ или } v = -\frac{ds^3}{24\varrho}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

наковый со знакомъ другой кривизны въ точкѣ M, и справа, въ противномъ случаѣ ($v<0$, если $\frac{1}{\tau}$ и $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ въ точкѣ M одинаковыхъ знаковъ, $v>0$, въ противномъ случаѣ). Если въ точкѣ M обѣ кривизны равны нулю, то v будетъ безконечно малою не ниже пятаго порядка. Дѣйствительно, дифференцируя формулу (21), при сдѣланныхъ предположеніяхъ, легко найдемъ

$$v=\frac{1}{120}\Sigma\alpha d^5x=-\frac{ds^3}{40}d\frac{1}{\varrho}d\frac{1}{\tau},$$

или

$$v=-\frac{ds^5}{40}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Отсюда видимъ, что въ данномъ случаѣ соприкасающаяся плоскость въ точкѣ M пересѣкаетъ кривую, какъ въ обыкновенной точкѣ, и данная точка M будетъ точкою изгиба и для проекціи данной кривой на нормальную плоскость *). Изъ всѣхъ точекъ, для которыхъ имѣетъ мѣсто условіе (20), особенно замѣчательны тѣ, для которыхъ только первая кривизна $\frac{1}{\varrho}$ равна нулю. Въ нихъ происходитъ прямо противоположное тому, что имѣетъ мѣсто въ обыкновенныхъ точкахъ, а именно: кривая пересѣкаетъ всѣ плоскости, проходящія черезъ точку M, за исключеніемъ соприкасающейся. Это происходитъ отъ того, что въ то время, какъ v будетъ, какъ мы видѣли, безконечно малою четвертаго порядка, w будетъ третьяго порядка, и мѣняетъ вмѣстѣ съ u свой знакъ при замѣнѣ ds на $-ds$. Отсюда далѣе слѣдуетъ, что точка M будетъ точкою изгиба для проекціи кривой на соприкасающуюся, а не на спрямляющую плоскость. Такія точки дѣйствительно, въ силу этого обстоятельства, аналогичны точкамъ изгиба плоскихъ кривыхъ. Далѣе, точка M будетъ точкою возврата для проекціи кривой на нормальную плоскость, какъ въ случаѣ $\frac{1}{\varrho}=0$, такъ и въ случаѣ $\frac{1}{\tau}=0$ $\left(\text{при } \frac{1}{\varrho}\gtrless 0\right)$; но въ первомъ случаѣ это будетъ точка возврата перваго, а во второмъ—второго рода (§ 608). Труднѣе изслѣдованіе кривыхъ въ такихъ особенныхъ точкахъ, въ которыхъ ϱ и τ обращаются въ нуль, потому что тогда теряютъ смыслъ вышеприведенныя разложенія координатъ u, v, w, такъ какъ при выводѣ ихъ мы пользовались формулами, въ которыхъ существенную роль играетъ предположеніе, что обѣ кривизны числа конечныя.

---

*) Въ этомъ легко убѣдиться, составивъ уравненіе этой проэкціи подобно тому, какъ это было сдѣлано въ § 644.

[**Примѣчаніе.** Для поясненія изложеннаго положимъ, что въ точкѣ M $\frac{1}{\varrho}=0$, а $\frac{1}{\tau}>0$. Такъ какъ по условію $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ не равно нулю, то $\frac{1}{\varrho}$ непремѣнно измѣняетъ знакъ при переходѣ отъ точекъ, для которыхъ $ds<0$ къ тѣмъ, у которыхъ $ds>0$, т. е. при движеніи въ положительномъ направленіи по кривой. Если знакъ $\frac{1}{\varrho}$ переходитъ изъ $-$ въ $+$, т. е. принимаетъ знакъ, одинаковый съ $\frac{1}{\tau}$, то $\frac{1}{\varrho}$ возрастаетъ и $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)>0$, а тогда формула

$$v=-\frac{ds^4}{12\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

даетъ $v<0$, каковъ бы ни былъ знакъ ds. Слѣдовательно, всѣ точки, смежныя съ M, будутъ съ лѣвой стороны отъ соприкасающейся плоскости (со стороны отрицательнаго направленія бинормали).]

Касаніе кривыхъ съ поверхностями.

647. Въ заключеніе сдѣлаемъ нѣкоторыя указанія по вопросу о касаніи кривой линіи съ поверхностью, отсылая читателя для подробнаго ознакомленія съ вопросами о касаніи кривой линіи съ поверхностью или съ другою кривою къ другимъ сочиненіямъ [1]). Чтобы развить по возможности быстро и наглядно теорію касаній, мы будемъ опираться на нѣкоторые результаты, полученные нами раньше (§ 616) при изученіи касанія плоскихъ кривыхъ. Мы будемъ сообразно этому говорить, что нѣкоторая поверхность имѣетъ съ данною кривою въ точкѣ M касаніе n-го порядка, если эту поверхность можно разсматривать, какъ предѣльное положеніе поверхности, проходящей черезъ точку M и n другихъ точекъ той же кривой, когда эти n точекъ (и никакія другія) стремятся къ совпаденію съ точкою M. Если эта поверхность принадлежитъ къ числу тѣхъ, которыя въ трехмѣрномъ пространствѣ опредѣляются $n+1$ точками, или, что сводится къ тому же, если эта поверхность принадлежитъ къ семейству, общее уравненіе котораго заключаетъ въ себѣ $n+1$ произвольныхъ параметровъ, то порядокъ касанія вообще не можетъ быть больше n. Когда этотъ порядокъ касанія достигнуть, то говорятъ, что разсматриваемая поверхность, есть соприкасающаяся къ данной кривой въ данной точкѣ. Чтобы получить аналитическія условія соприкасанія поверхности съ данною кривою въ данной точкѣ, очевидно, достаточно продифференцировать уравненіе поверхности столько разъ, сколько нужно для полученія достаточнаго для

[1]) См., напр., Hermite „Cours d'Analyse" (p. 116).

опредѣленія параметровъ числа уравненій, и написать, что всѣ эти уравненія удовлетворяются координатами точки $M(x, y, z)$ и ихъ дифференціалами. Такимъ образомъ, дѣйствительно, пользуясь обыкновеннымъ условнымъ способомъ выраженія (§ 645), мы выражаемъ, что поверхность проходитъ черезъ точку M и n безконечно близкихъ къ ней точекъ M', M'' ... на кривой.

648. Соприкасающаяся плоскость. Общее уравненіе плоскости

$$AX+BY+CZ+D=0$$

содержитъ въ дѣйствительности три произвольныхъ параметра, а именно: отношенія трехъ коэффиціентовъ къ четвертому, не равному нулю. Выражая, что это уравненіе и два другихъ, полученныхъ дифференцированіемъ по дугѣ s данной кривой, удовлетворяются координатами x, y, z точки M на кривой, получаемъ

(22) $$Ax+By+Cz+D=0,\quad Aa+Bb+Cc=0,\quad A\lambda+B\mu+C\nu=0.$$

гдѣ a, b, c, λ, μ, ν имѣютъ извѣстныя изъ предыдущихъ §§ значенія. Первое уравненіе требуетъ только того, чтобы плоскость проходила черезъ точку M, если присоединимъ второе, то плоскость будетъ уже проходитъ черезъ касательную въ точкѣ M. Поэтому всякую плоскость, проходящую черезъ эту касательную, можно назвать касательною плоскостью, какъ имѣющую съ кривою касаніе перваго порядка; разстояніе точки M', безконечно близкой къ M на кривой, отъ этой плоскости будетъ безконечно малою 2-го порядка относительно MM'. Если присоединимъ еще третье изъ уравненій (22). то разсматриваемая плоскость должна будетъ пройти и черезъ главную нормаль, т. е. совпасть съ тою, которую мы уже раньше назвали соприкасающеюся плоскостью. Порядокъ касанія съ кривой равенъ двумъ, но въ исключительныхъ точкахъ можетъ быть и выше. Тогда плоскость будетъ имѣть съ кривою пересоприкасаніе или, какъ иначе говорятъ, будетъ стаціонарною соприкасающеюся плоскостью *).

649. Стаціонарная соприкасающаяся плоскость получается, очевидно, въ тѣхъ особенныхъ точкахъ, которыя характеризуются условіемъ, получаемымъ черезъ исключеніе A, B, C изъ уравненій (22) съ присоединеніемъ къ нимъ того, которое найдемъ продифференцировавъ послѣднее изъ нихъ. Но, чтобы быть увѣреннымъ, что ни одинъ изъ возможныхъ случаевъ не будетъ пропущенъ, надо сперва замѣтить, что дифференцированіе второго изъ уравненій (22) даетъ, собственно говоря, слѣдующее уравненіе

(23) $$(A\lambda+B\mu+C\nu)\frac{1}{\varrho}=0.$$

*) Гурса. „Курсъ математическаго Анализа", стр. 491.

Поэтому слѣдующее дифференцированіе дастъ (принимая во вниманіе формулы (11) и второе изъ уравненій (22))

$$(24) \qquad (A\lambda + B\mu + C\nu)\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} = (A\alpha + B\beta + C\gamma)\frac{1}{\varrho\varkappa}.$$

Если $\frac{1}{\varrho}$ не равно 0, то $\Sigma A\lambda = 0$, а потому можно положить $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, и условіе (24) дастъ тогда $\frac{1}{\varkappa} = 0$. Въ противномъ случаѣ $\left(\frac{1}{\varrho} = 0\right)$ уравненіе (23) удовлетворится при произвольныхъ значеніяхъ A, B, C. Тогда всякая касательная плоскость будетъ имѣть касаніе 2-го порядка съ кривою. Изъ этихъ плоскостей соприкасающеюся будетъ та, для которой выполнено условіе (24). Такъ какъ это условіе вообще (т. е., если $\frac{d}{ds}\cdot\frac{1}{\varrho}$ не равно 0) принимаетъ опять видъ $\Sigma A\lambda = 0$, то получается опять соприкасающаяся плоскость, но касаніе будетъ, по крайней мѣрѣ, 3-го порядка. Всегда нужно при этомъ помнить, что всѣ примѣняемыя здѣсь формулы и выводимыя изъ нихъ заключенія только тогда справедливы, когда обѣ кривизны конечны. Итакъ, стаціонарныя соприкасающіяся плоскости получаются въ тѣхъ точкахъ кривой, въ которой, по крайней мѣрѣ, одна изъ кривизнъ равна нулю, т. е., когда выполняется условіе (20). Впрочемъ, если оставимъ въ сторонѣ вопросъ о различныхъ положеніяхъ кривой относительно пере-соприкасающейся плоскости, то можемъ быстрѣе получить условіе (20) при помощи дифференцированія, написать второе изъ уравненій (22) въ видѣ $\Sigma A dx = 0$ и исключая A, B, C изъ этого уравненія и слѣдующихъ двухъ: $\Sigma A d^2x = 0$, $\Sigma A d^3x = 0$.

650. Соприкасающійся шаръ. Исходя изъ общаго уравненія поверхности шара

$$(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + (Z-\zeta)^2 = \mathfrak{R}^2$$

(гдѣ ξ, η, ζ, $\mathfrak{R}$ параметры, которые надо надлежащимъ образомъ опредѣлить), дифференцируя по дугѣ s данной кривой и подставляя вмѣсто X, Y, Z координаты точки $M(x, y, z)$ на кривой, найдемъ, примѣняя извѣстныя обозначенія, слѣдующія уравненія

$$(25) \qquad \begin{cases} (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \mathfrak{R}^2, \\ a(x-\xi) + b(y-\eta) + c(z-\zeta) = 0, \\ \lambda(x-\xi) + \mu(y-\eta) + \nu(z-\zeta) = -\varrho, \\ \alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta) = \varkappa\dfrac{d\varrho}{ds}. \end{cases}$$

Изъ трехъ послѣднихъ уравненій получаемъ, припоминая сказанное объ опредѣлителѣ (6),

$$(26)\qquad \begin{cases} x-\xi = -\lambda\varrho + \alpha\nu\dfrac{d\varrho}{ds}, \\ y-\eta = -\mu\varrho + \beta\nu\dfrac{d\varrho}{ds}, \\ z-\zeta = -\nu\varrho + \gamma\nu\dfrac{d\varrho}{ds}, \end{cases}$$

откуда и находимъ координаты ξ, η, ζ центра шара. Подставляя въ первое уравненіе, получимъ для величины радіуса формулу

$$(27)\qquad \mathfrak{R}^2 = \varrho^2 + \left(\nu\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

Опредѣленный такимъ образомъ шаръ и есть тотъ, который намъ встрѣтился въ началѣ § 645, это видно изъ того, что послѣднія три изъ уравненій (25) выражаютъ, что центръ шара лежитъ въ нормальной плоскости, въ разстояніи ϱ отъ бинормали и $-\nu\dfrac{d\varrho}{ds}$ отъ главной нормали. Этотъ шаръ есть предѣльное положеніе шара, проходящаго черезъ M, M', M'' и M''', когда послѣднія три точки стремятся къ совпаденію съ первою. Предѣльное положеніе круга $MM'M''$, очевидно, есть кругъ, лежащій на поверхности предѣльнаго шара, а такъ какъ плоскость этого круга стремится къ совпаденію съ соприкасающеюся плоскостью, то соприкасающійся кругъ есть пересѣченіе поверхности соприкасающагося шара съ соприкасающеюся плоскостью. Слѣдовательно, ϱ есть радіусъ соприкасающагося круга, и первая кривизна какой угодно кривой равна кривизнѣ соприкасающагося круга, какъ и для плоской кривой. Возвращаясь къ условіямъ (25), замѣтимъ, что первое заставляетъ шаръ пройти черезъ M, второе — касаться кривой въ точкѣ M, третье — проходить черезъ соприкасающійся кругъ. Четвертое же условіе изъ всѣхъ шаровъ, касающихся кривой въ точкѣ M и тамъ же ее пересѣкающихъ, выдѣляетъ одинъ, который кривую не пересѣкаетъ, такъ какъ имѣетъ съ нею касаніе вообще третьяго порядка; это и есть соприкасающійся шаръ.

651. Чтобы узнать, лежитъ ли кривая въ смежности съ точкою M внѣ или внутри соприкасающагося шара, вычислимъ разстояніе h точки M отъ его поверхности. Предполагая радіусъ $\mathfrak{R}$ конечнымъ, изъ равенства

$$(\mathfrak{R}+h)^2 = (x-\xi+\delta x)^2 + (y-\eta+\delta y)^2 + (z-\zeta+\delta z)^2,$$

пренебрегая безконечно малыми выше 4-го порядка, выводимъ

$$\mathfrak{R}h = \Sigma(x-\xi)\,\delta x + \tfrac{1}{2}\Sigma\,\delta x^2.$$

Обозначая опять, какъ въ § 643, черезъ u, v, w координаты точки M' относительно фундаментальнаго тріэдра, имѣемъ

$$\delta x = au + av + \lambda w, \quad \delta y = bu + \beta v + \mu w, \quad \delta z = cu + \gamma v + \nu w,$$

а принимая формулы (26) и условія ортогональности, найдемъ

$$\mathfrak{R}h = -w\varrho + v\tau\frac{d\varrho}{ds} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Въ этой формулѣ, на основаніи (19), можно пренебречь числомъ v^2, ограничиться первымъ членомъ въ w^2, и вычислить u только до членовъ 3-го порядка; но въ w и v надо знать и члены 4-го порядка, а этого легко достигнуть съ помощью формулы (21). Мы найдемъ

$$v = \left(-1 + \frac{d\varrho}{2\varrho} + \frac{d\tau}{4\tau}\right)\frac{ds^3}{6\varrho\tau},$$

$$w = \frac{ds^2}{2\varrho} - \frac{ds^2\,d\varrho}{6\varrho^2} - \left(\varrho\frac{d^2\varrho}{ds^2} - 2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + 1 + \frac{\varrho^2}{\tau^2}\right)\frac{ds^4}{24\varrho^3}.$$

Полагая для сокращенія $\varkappa = \frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right)$, легко находимъ

$$\mathfrak{R}h = \frac{\varkappa\,ds^4}{24\varrho\tau}, \tag{28}$$

а такъ какъ дифференцированіе формулы (27) даетъ еще

$$\mathfrak{R}d\mathfrak{R} = \varkappa\tau d\varrho, \tag{29}$$

то окончательно находимъ

$$h = \frac{ds^4\,d\mathfrak{R}}{24\varrho\tau^2 d\varrho}.$$

Итакъ, если исключимъ тѣ точки, въ которыхъ $d\varrho = 0$, то достаточно малая дуга кривой, взятая въ смежности съ M, будетъ вся внѣ или вся внутри соприкасающагося шара въ точкѣ M, смотря по тому, будутъ ли объемъ шара и площадь соприкасающагося круга одновременно возрастать или убывать или измѣняться въ различномъ смыслѣ.

652. Чтобы найти условіе, при которомъ происходитъ пересоприкасаніе шара съ кривой, т. е. при которомъ порядокъ касанія кривой съ ея соприкасающимся шаромъ будетъ выше третьяго, нужно только продифференцировать послѣднюю изъ формулъ (25), принимая во вниманіе и всѣ предыдущія. Но, чтобы не пропустить ни одного случая, надо сызнова выполнить всѣ дифференцированія, не мѣняя формы послѣдовательныхъ результатовъ (т. е. не сокращая

въ нихъ общихъ множителей). Выполняя сказанное, получимъ послѣднія два условія (25) въ видѣ

$$(30) \qquad \frac{1}{\varrho}\Sigma\lambda(x-\xi)=-1, \quad \frac{1}{\varrho\varkappa}\Sigma\alpha(x-\xi)=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}.$$

Дифференцированіе послѣдняго дастъ $\frac{\varkappa}{\varrho\varkappa}=0$. Къ тому же результату тотчасъ приходимъ, замѣчая, что найденное условіе содержитъ въ себѣ все то, что, на основаніи формулы (28), необходимо и достаточно для того, чтобы h было безконечно малою выше 4-го порядка. Такъ какъ предположеніе $\frac{1}{\varrho}=0$ исключено (потому что $\mathfrak{R}$ предполагается конечнымъ), а также и предположеніе $\frac{1}{\varkappa}=0$ при $d\varrho\gtrless 0$ (на томъ же основаніи), то мы придемъ къ слѣдующему заключенію. Кромѣ точекъ, для которыхъ $\varkappa=0$, пересоприкасаніе шара съ кривою можетъ произойти и въ другихъ точкахъ, характеризуемыхъ тѣмъ, что въ нихъ вторая кривизна равна нулю, хотя радіусъ соприкасающагося шара остается конечнымъ. Въ этихъ послѣднихъ точкахъ второе изъ условій (30) выполняется тождественно, и кривая имѣетъ касаніе 3-го порядка со всѣми шарами, проходящими черезъ соприкасающійся кругъ. Но лишь одинъ изъ этихъ шаровъ можетъ быть названъ соприкасающимся, а именно тотъ, который мы опредѣлили въ началѣ. Слѣдовательно, условіе $\varkappa=0$ достаточно, но не необходимо для пересоприкасанія; формула же (29) показываетъ, что во всѣхъ случаяхъ, если $d\varrho$ не равно нулю, $d\mathfrak{R}$ непремѣнно равно нулю. Отсюда въ частности такое слѣдствіе: Кривая пересѣкаетъ соприкасающійся шаръ въ томъ случаѣ, когда его радіусъ будетъ maximum или minimum, или когда этотъ шаръ пересѣкаетъ стаціонарную соприкасающуюся плоскость по окружности круга, радіусъ котораго будетъ maximum или minimum. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ происходитъ какъ разъ противоположное тому, что бываетъ въ обыкновенной точкѣ, а именно: кривая не пересѣкаетъ ни одного изъ другихъ шаровъ, проходящихъ черезъ соприкасающійся кругъ.

653. Разсмотримъ теперь какую нибудь сферическую кривую, т. е. линію, лежащую на поверхности шара радіуса R. Въ каждой точкѣ ея, очевидно, не можетъ быть иного соприкасающагося или даже пересоприкасающаго шара, кромѣ того, на поверхности котораго она находится. Поэтому, такъ какъ въ нашемъ случаѣ $\mathfrak{R}=R=\text{const.}$, формула (29) дастъ либо $\varkappa=0$, либо $d\varrho=0$, а послѣднее требуетъ, какъ уже было замѣчено въ § 655, чтобы $\frac{1}{\varkappa}=0$ (иначе $\mathfrak{R}$ былъ бы безконечнымъ). Но при $d\varrho=0$ и $\frac{1}{\varkappa}=0$ необходимо и $\varkappa=0$. Слѣдовательно, условіе $\varkappa=0$ необходимо для того, чтобы кривая была

сферическая. Оно будетъ и достаточнымъ. Чтобы въ этомъ убѣдиться продифференцируемъ уравненіе (26). Изъ перваго, пользуясь формулами Френé, получимъ

$$a-\frac{d\xi}{ds}=-\lambda\frac{d\varrho}{ds}+\alpha\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right)+\left(\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\alpha}{\tau}\right)\varrho+\lambda\frac{d\varrho}{ds},$$

слѣдовательно,

$$\frac{d\xi}{ds}=-\varkappa\alpha,\quad \frac{d\eta}{ds}=-\varkappa\beta,\quad \frac{d\zeta}{ds}=-\varkappa\gamma. \tag{31}$$

Если $\varkappa=0$ для всѣхъ точекъ кривой, то изъ формулы (29) видимъ, что $\mathfrak{R}$ равно нѣкоторому постоянному R, а изъ (31), что ξ, η, ζ также постоянныя, т. е. что всѣ точки кривой находятся въ одномъ и томъ же разстояніи R отъ неподвижной точки (ξ, η, ζ) — и кривая лежитъ на сферѣ радіуса R, съ центромъ въ (ξ, η, ζ). Итакъ, условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы кривая была сферическою, состоитъ въ томъ, что

$$\frac{\varrho}{\tau}+\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right)=0.$$

654 *). Возвращаясь къ общему случаю, замѣчаемъ, что формулы (31) выражаютъ слѣдующую теорему: касательныя къ общему мѣсту центровъ соприкасающихся шаровъ параллельны бинормалямъ данной кривой, такъ какъ

$$\frac{d\xi}{\alpha}=\frac{d\eta}{\beta}=\frac{d\zeta}{\gamma}.$$

Возвышая въ квадратъ формулы (31) и складывая, найдемъ $d\sigma^2=\varkappa^2\,ds^2$, если σ — дуга общаго мѣста центровъ соприкасающихся шаровъ. Отсюда $d\sigma=\pm\varkappa\,ds$; если возьмемъ

$$d\sigma=-\varkappa\,ds, \tag{32}$$

то формулы (31) дадутъ

$$\frac{d\xi}{d\sigma}=\alpha,\quad \frac{d\eta}{d\sigma}=\beta,\quad \frac{d\zeta}{d\sigma}=\gamma,$$

т. е. при условіи (32) положительное направленіе касательной къ общему мѣсту центровъ соприкасающихся шаровъ совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ бинормали къ данной кривой. Разсмотримъ теперь зависимости между основными тріэдрами данной кривой, которую будемъ называть первою, и общаго мѣста центровъ

---

*) Въ подлинникѣ въ этомъ § есть нѣкоторыя неточности, а потому здѣсь онъ изложенъ въ другой редакціи.

соприкасающихся шаровъ, которое будемъ называть второю кривою. Удерживая прежнія обозначенія для первой кривой, обозначимъ соотвѣтствующіе элементы второй тѣми же буквами со значкомъ 1. Мы уже видѣли, что, при условіи (32), $a_1 = a$, $b_1 = \beta$, $c_1 = \gamma$. Теперь замѣтимъ, что главныя нормали нашихъ двухъ кривыхъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ параллельны между собою. Дѣйствительно, формулы (8) § 635 даютъ

$$\frac{\lambda}{da} = \frac{\mu}{d\beta} = \frac{\nu}{d\gamma},$$

а формулы (5) § 633, примѣненныя ко второй кривой, дадутъ въ силу вышеупомянутыхъ равенствъ,

$$\frac{\lambda_1}{da} = \frac{\mu_1}{d\beta} = \frac{\nu_1}{d\gamma},$$

откуда и слѣдуетъ сказанное. Какъ слѣдствіе, отсюда вытекаетъ, что касательныя къ первой кривой параллельны бинормалямъ второй. Итакъ, будемъ имѣть

$$\lambda_1 \pm = \lambda, \quad \mu_1 \pm = \mu, \quad \nu_1 = \pm \nu, \quad \text{и}$$
$$a_1 = \pm a, \quad \beta_1 = \pm b, \quad \gamma_1 = \pm c.$$

Знаки въ этихъ формулахъ мы можемъ выбрать по произволу, но если поставимъ условіе, чтобы и для второй кривой имѣло мѣсто равенство

$$(6') \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{vmatrix} = +1,$$

аналогичное (6), то, положивъ

$$a_1 = a_1, \quad \beta_1 = b_1, \quad \gamma_1 = c_1,$$

должны взять

$$\lambda_1 = -\lambda, \quad \mu_1 = -\mu, \quad \nu_1 = -\nu,$$

т. е. взять положительное направленіе главной нормали второй кривой противоположнымъ положительному направленію главной нормали первой кривой. Тогда дѣйствительно,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \\ -\lambda, & -\mu, & -\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a, & \beta, & \gamma \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = +1.$$

При условіи (6') можемъ примѣнить теперь формулы Френѐ (11)

какъ къ первой, такъ и ко второй кривой. Тогда найдемъ

1) $$\frac{\lambda}{\varrho}=\frac{d\alpha}{ds}=-\varkappa\frac{d\alpha_1}{d\sigma}=-\varkappa\frac{\lambda_1}{\varepsilon_1}=\varkappa\cdot\frac{\lambda}{\varepsilon_1},$$

т. е. $\varepsilon_1=\varkappa\varrho$.

2) $$\frac{\lambda_1}{\varrho_1}=\frac{d\alpha_1}{d\sigma}=-\frac{d\alpha}{\varkappa\,ds}=-\frac{\lambda}{\varkappa\varepsilon}=\frac{\lambda_1}{\varkappa\varepsilon},$$

т. е. $\varrho_1=\varkappa\varepsilon$, и наконецъ

$$\varrho_1=\varrho+\varepsilon\frac{d}{ds}\left(\varepsilon\frac{d\varrho}{ds}\right),\quad \varepsilon\varepsilon_1=\varrho\varrho_1.$$

Особенно замѣчательны такъ называемые **косые круги**, т. е. кривыя съ постоянною первою кривизною и не равною нулю второю $\left(\varrho=R,\ \frac{1}{\varepsilon}\gtrless 0\right)$. Для нихъ всѣ соприкасающіеся шары между собою равны ($\mathfrak{R}=\varrho$) и центры ихъ лежатъ на другомъ косомъ кругѣ ($\varrho_1=\varrho$). **Косые круги — единственныя кривыя, съ которыми соприкасается безчисленное множество равныхъ между собою шаровъ**, потому что по формулѣ (29) при ϱ непостоянномъ $\mathfrak{R}$ не можетъ быть постояннымъ, если $\varkappa$ не равно 0, а въ послѣднемъ случаѣ, какъ мы видѣли, всѣ соприкасающіеся шары совпадаютъ въ одинъ, на поверхности котораго и лежитъ данная кривая. Возвращаясь къ общему случаю, замѣтимъ въ заключеніе, что съ помощью формулъ (29) и (32) легко вычислить уголъ $d\vartheta$ между поверхностями двухъ безконечно близкихъ соприкасающихся шаровъ (т. е. между касательными къ нимъ плоскостями въ точкахъ M и M_1). Дѣйствительно, изъ очевидной формулы

$$d\sigma^2=d\mathfrak{R}^2+\mathfrak{R}^2d\vartheta^2,$$

получаемъ

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{\varkappa\varrho}{\mathfrak{R}^2}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\log\mathfrak{R}}{d\log\varrho}.$$

Это отношеніе, которое Демартръ (Demartres) назвалъ **сферическимъ крученіемъ**, есть также полезный для изученія не плоскихъ кривыхъ элементъ.

Упражненія.

655. Винтовыя линіи. а) Разсмотримъ сперва обыкновенную или круговую винтовую линію, т. е. кривую линію, опредѣляемую свойствомъ пересѣкать всѣ образующія прямого кругового цилиндра радіуса r подъ постояннымъ угломъ φ. За ось z-овъ возьмемъ ось цилиндра, а ось x-овъ проведемъ перпендикулярно къ оси z-овъ черезъ нѣкоторую точку A на кривой. Пусть θ обозначаетъ уголъ, образуемый проекціею OM на пло-

скость xy съ осью x-овъ. Такъ какъ, по опредѣленію, $c\left(=\frac{dz}{ds}\right)$ число постоянное и равное $\cos\varphi$, то будемъ имѣть $z = s\cos\varphi$, если условимся отсчитывать дуги отъ точки A; уголъ φ предполагается острымъ и, слѣдовательно, s возрастаетъ вмѣстѣ съ z. Координаты точки M будутъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = s\cos\varphi$. Дифференцируя, получимъ

$$dx = -r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = r\cos\theta\, d\theta, \quad dz = \cos\varphi\, ds,$$

а отсюда, возвышая въ квадратъ и складывая, находимъ $ds^2 = r^2 d\theta^2 + \cos^2\varphi\, ds^2$, и далѣе

$$ds = \frac{r\,d\theta}{\sin\varphi}, \qquad s = \frac{r\theta}{\sin\varphi}.$$

Соотношеніе $z = s\cos\varphi$ уже показываетъ, что если T есть пересѣченіе касательной MT съ плоскостью (xy), то длина MT какъ разъ равна $\smile AM$; теперь же мы видимъ, что если P есть проекція M на ту же плоскость, то $PT = s\sin\varphi = r\theta =$ дугѣ круга AP. Поэтому, когда M описываетъ винтовую линію, точка T опишетъ эвольвенту круга. Далѣе, направляющіе косинусы касательной будутъ

$$a = -\sin\varphi\sin\theta, \quad b = \sin\varphi\cos\theta, \quad c = \cos\varphi,$$

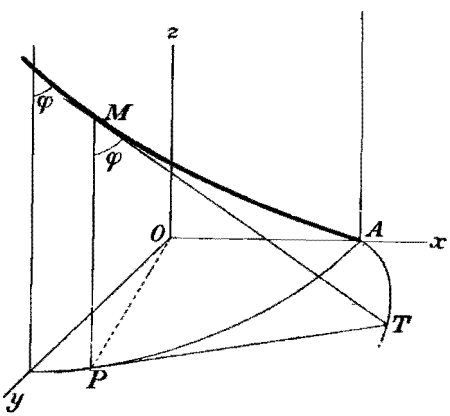


Рис. 82.

откуда, съ помощью дифференцированій, на основаніи перваго столбца формулъ (11), получимъ

$$\frac{\lambda}{\varrho} = -\frac{\sin^2\varphi\cos\theta}{r}, \quad \frac{\mu}{\varrho} = -\frac{\sin^2\varphi\sin\theta}{r}, \quad \nu = 0,$$

и далѣе

$$\varrho = \frac{r}{\sin^2\varphi}, \quad \lambda = -\cos\theta, \quad \mu = -\sin\theta, \quad \nu = 0.$$

Итакъ, главныя нормали винтовой линіи встрѣчаютъ ось цилиндра подъ

прямымъ угломъ ($\nu=0$). Кромѣ того, замѣтимъ, что радіусъ первой кривизны число постоянное. Направляющіе косинусы бинормали будутъ

$$\alpha = c\mu = -\cos\varphi\sin\theta, \quad \beta = -c\lambda = \cos\varphi\cos\theta, \quad \gamma = b\lambda - a\mu = -\sin\varphi,$$

и достаточно продифференцировать α и β, или одинъ изъ косинусовъ главной нормали (припоминая остальныя формулы (11)), чтобы найти радіусъ кручения $\varepsilon = \dfrac{r}{\sin\varphi\cos\varphi}$. Какъ видимъ, и радіусъ второй кривизны число постоянное. Въ данномъ случаѣ его величина число положительное, потому что (§ 643) разсматриваемая винтовая линія будетъ sinistrorsum. Впрочемъ, всѣ выведенныя формулы будутъ справедливы и для винтовой линіи dextrorsum, если въ нихъ положимъ $\sin 2\varphi < 0$.

b) Укажемъ теперь двѣ замѣчательныя поверхности, къ которымъ приводитъ изученіе круговой винтовой линіи. Первая есть общее мѣсто касательныхъ винтовой линіи, и называется развертывающимся геликоидомъ. Мы уже видѣли, что плоскія сѣченія этой поверхности, перпендикулярныя къ оси цилиндра, всѣ равны одной и той же эвольвентѣ круга радіуса r. Чтобы отдать себѣ отчетъ о видѣ поверхности, полезно знать также ея профиль, т. е. сѣченіе поверхности плоскостью, проходящею черезъ ось. Уравненія касательной будутъ

$$\frac{x - r\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{y - r\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{z - R\theta}{\cot\varphi},$$

если обозначимъ черезъ R постоянное число $r\cot\varphi$. Полагая $y=0$, получимъ

$$x = \frac{r}{\cos\theta}, \quad z = R(\theta - \operatorname{tg}\theta).$$

Это уравненія, въ плоскости (xz), уже извѣстной кривой (§ 599, c). Главныя нормали винтовой линіи образуютъ другой геликоидъ, называемый косымъ, или геликоидомъ съ направляющею плоскостью, такъ какъ всѣ образующія его параллельны одной и той же плоскости. Уравненія главной нормали: $y = x\operatorname{tg}\theta$, $z = R\theta$; исключая θ, получаемъ уравненіе косого геликоида: $y = x\operatorname{tg}\dfrac{z}{R}$.

c) Вычисленія перваго упражненія можно обобщить на случай r, равнаго какой нибудь функціи отъ θ, т. е. на случай любой *цилиндрической* винтовой линіи, начерченной на поверхности какого угодно (не кругового) цилиндра и встрѣчающей всѣ образующія подъ постояннымъ угломъ φ. Вмѣсто того, чтобы повторять всѣ вычисленія, мы можемъ, идя болѣе краткимъ путемъ, вывести то, что нужно для раскрытія одного важнаго и характеристичнаго для этихъ кривыхъ свойства. Напомнимъ формулы

$$\frac{dc}{ds} = \frac{\nu}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\varepsilon}, \quad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{c}{\varrho} - \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

и замѣтимъ, что при c постоянномъ получается изъ первой формулы $\nu = 0$, послѣ чего вторая дастъ $\gamma = \text{const}$. Такъ какъ всегда $c^2 + \gamma^2 + \nu^2 = 1$, то при $c = \cos\varphi$, можно положить

$$\gamma = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi,$$

Уголъ φ мы отсчитываемъ въ спрямляющей плоскости отъ касательной въ такомъ направленіи, которое для наблюдателя, находящагося на положительной главной нормали, совпадало бы съ направленіемъ, противоположнымъ движенію часовой стрѣлки. Условившись въ этомъ, изъ третьей изъ предыдущихъ формулъ, получаемъ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\tau}{\varrho}$, и видимъ, что отношеніе двухъ кривизнъ число постоянное. Обратно, положимъ, что для нѣкоторой кривой отношеніе кривизнъ число постоянное. Проведемъ черезъ точку M въ спрямляющей плоскости прямую, опредѣляемую косинусами $l = a\cos\varphi - \alpha\sin\varphi$, $m = b\cos\varphi - \beta\sin\varphi$, $m = c\cos\varphi - \gamma\sin\varphi$, при чемъ постоянный уголъ φ опредѣляется формулою $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\tau}{\varrho}$. На основаніи формулъ (11) найдемъ тогда

$$\frac{dl}{ds}\Big|\lambda = \frac{dm}{ds}\Big|\mu = \frac{dn}{ds}\Big|\nu = \frac{\cos\varphi}{\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\tau} = 0,$$

Слѣдовательно, l, m и n числа постоянныя, а кривая будетъ цилиндрическою винтовою линіею, потому что она начерчена на цилиндрѣ *) и встрѣчаетъ всѣ его образующія подъ постояннымъ угломъ φ. Итакъ, для того, чтобы кривая была цилиндрическою винтовою линіею, необходимо и достаточно, чтобы отношеніе ея двухъ кривизнъ было числомъ постояннымъ. Если далѣе каждая изъ кривизнъ число постоянное, то винтовая линія необходимо будетъ круговою: она будетъ лежать на круговомъ цилиндрѣ, радіусъ котораго равенъ $\frac{\varrho\,\tau^2}{\varrho^2+\tau^2}$. Мы предоставляемъ читателю трудъ доказать эту теорему, найденную Пюизэ (Puiseux).

d) *Коническою* винтовою линіею называютъ такую, которая пересѣкаетъ подъ постояннымъ (но не прямымъ) угломъ ψ всѣ образующія конуса. Если конусъ круговой, то винтовая линія пересѣкаетъ, очевидно, также подъ постояннымъ угломъ φ образующія цилиндра, проектирующаго ее параллельно оси (притомъ, если χ есть уголъ наклоненія образующихъ конуса къ оси, то $\cos\varphi = \cos\psi\cos\chi$). Поэтому винтовая линія будетъ въ то же время и цилиндрическою, а потому и называется цилиндро-коническою винтовою линіею. Это, можно сказать, логариѳмическая спираль пространства. Если возьмемъ вершину конуса за начала координатъ, а ось его за ось z-овъ, и обозначимъ черезъ R разстояніе точки M отъ вершины, то должны имѣть

$$\cos\psi = \frac{x}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{R}\frac{dz}{ds},$$

или $\cos\psi = \frac{dR}{ds}$. Такъ какъ, по предположенію, $\cos\psi$ не равно 0 (иначе имѣли бы $R = \text{const.}$, и кривая лежала бы на поверхности шара), то $R = s\cos\psi$, если считать дуги s отъ вершины. Съ другой стороны $r = R\sin\chi$ **), слѣдовательно, $r = ms\sin\psi$, гдѣ для сокращенія положено $m = \sin\chi\operatorname{cotg}\psi$. Вмѣстѣ съ тѣмъ, координаты точки M будутъ $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $z = r\operatorname{cotg}\chi$; поэтому имѣемъ

$$dr^2 = m^2\sin^2\psi\,(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2) = \cos^2\psi\,dr^2 + m^2 r^2\sin^2\psi\,d\vartheta^2,$$

откуда $dr = mr\,d\vartheta$, $\log r = m\vartheta + \text{const.}$ Итакъ, прямое сѣченіе того ци-

---

*) Образующія цилиндра параллельны направленію (l, m, n), а косинусъ угла между касательною (a, b, c) и образующими (l, m, n) равенъ $al + bm + cn = \cos\varphi$.

**) r — разстояніе проекціи точки M на плоскость (xy) отъ начала координатъ (вершины конуса).

линдра, на которомъ данная линія есть винтовая, есть логариѳмическая спираль. Если теперь замѣтимъ, что

$$\frac{dr}{ds} = m \sin\psi, \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{mr}\frac{dr}{ds} = \frac{\sin\psi}{r} = \frac{1}{ms},$$

то легко найдемъ направляющіе косинусы касательной:

$$a = (m\cos\theta - \sin\theta)\sin\psi, \qquad b = (m\sin\theta + \cos\theta)\sin\psi, \qquad c = \cos\varphi,$$

а, дифференцируя еще разъ, найдемъ и косинусы главной нормали

$$\lambda = -(\cos\theta + m\sin\theta)\frac{\varrho\sin\psi}{ms}, \qquad \mu = -(\sin\theta - m\cos\theta)\frac{\varrho\sin\psi}{ms}, \qquad \nu = 0.$$

Итакъ, главныя нормали перпендикулярны къ оси конуса, но ее не пересѣкаютъ: онѣ нормальны къ поверхности цилиндра, а не конуса. Возвышая въ квадратъ и складывая послѣднія формулы, и замѣчая еще, что $1 + m^2 = \dfrac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi}$, получимъ значеніе ϱ, а изъ него тотчасъ и $\tau = \varrho\,\mathrm{tg}\,\varphi$, а именно:

$$\varrho = \frac{ms}{\sin\varphi}, \qquad \tau = \frac{ms}{\cos\varphi}.$$

Слѣдовательно, радіусы первой и второй кривизны цилиндро-конической винтовой линіи пропорціональны дугѣ, отсчитываемой отъ вершины конуса. Можно доказать, что, обратно, имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема: если для нѣкоторой кривой $\varrho = ks$, $\tau = k's$, гдѣ k и k' постоянныя, то эта кривая необходимо должна быть цилиндро-коническою винтовою линіею, лежащею на круговомъ конусѣ, въ которомъ уголъ χ между осью и образующими опредѣляется формулою

$$\mathrm{tg}\,\chi = k'^2 / \sqrt{k^2 + k'^2 + k^2 k'^2}.$$

656. Представимъ себѣ плоскость въ видѣ гибкой, но нерастяжимой матеріальной поверхности и дадимъ ей при помощи сгибанія, не мѣняющаго длины линій, на ней начерченныхъ, форму какой нибудь цилиндрической поверхности. Прямыя линіи нѣкотораго опредѣленнаго направленія обратятся тогда въ образующія цилиндра, всѣ другія въ цилиндрическія винтовыя линіи. Отрѣзокъ всякой такой линіи будетъ давать кратчайшее разстояніе между двумя достаточно близкими точками на поверхности цилиндра. Такъ же, какъ отрѣзокъ прямой, которая послѣ сгибанія обратилась въ винтовую, давалъ кратчайшее разстояніе между двумя точками на плоскости. Въ силу этого свойства цилиндрическую винтовую линію называютъ геодезическою линіею на поверхности цилиндра. Впослѣдствіи мы разсмотримъ геодезическія линіи съ другой точки зрѣнія и обобщимъ ихъ опредѣленіе для какой угодно поверхности. Но и теперь уже мы можемъ изслѣдовать геодезическія линіи на поверхности конуса, т. е. тѣ линіи, въ которыя обращаются прямыя линіи на плоскости, когда при помощи одного сгибанія мы дадимъ этой плоскости коническую форму. Замѣтимъ тотчасъ же, что коническія винтовыя линіи ни въ какомъ случаѣ не будутъ геодезическими, потому что, какъ мы уже знаемъ изъ предыдущаго онѣ происходятъ изъ логариѳмическихъ спиралей съ полюсомъ въ вершинѣ конуса. Ограничиваясь случаемъ прямого кругового конуса, положимъ, что A есть проекція вершины конуса O на ту прямую, которая при сгибаніи плоскости обращается въ геодезическую линію, l длина отрѣзка OA и R — разстояніе отъ точки O

до какой нибудь (перемѣнной) точки M по той же прямой. Тогда $R^2 = s^2 + l^2$, если условимся считать дугу геодезической кривой отъ точки A, потому что длина отрѣзка AM при сгибаніи не мѣняется. Далѣе, если обозначимъ черезъ φ уголъ OMA (въ пространствѣ это будетъ уголъ между образующей конуса, проходящей черезъ M, и касательной къ кривой въ точкѣ M), то, очевидно, будемъ имѣть

$$\frac{dR}{ds} = \frac{s}{R} = \cos\varphi, \quad \sin\varphi = \frac{l}{R}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\sin\varphi}{R}.$$

Выбравъ теперь координатныя оси такъ же, какъ въ предыдущемъ § 655, d, получимъ для координатъ точки M выраженія $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\operatorname{cotg}\chi$, гдѣ χ уголъ между образующими конуса и его осью, r и θ полярныя координаты проекціи точки M на плоскости Oxy. При этомъ, очевидно, будемъ имѣть $r = R\sin\chi$. Дифференцируя выраженія x, y, z, найдемъ

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta, \quad dz = \operatorname{cotg}\chi\, dr \quad \text{и}$$
$$ds^2 = dR^2 + r^2 d\theta^2.$$

Откуда, далѣе, $\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\varphi}{r}$, если s и θ одновременно возрастаютъ, что всегда можно предположить. Изъ тѣхъ же выраженій для dx, dy, dz легко найдемъ направляющіе косинусы касательной, а именно

$$a = -\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta\sin\chi, \quad b = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta\sin\chi,$$
$$c = \cos\varphi\cos\chi.$$

Дифференцируя еще разъ, получимъ направляющіе косинусы главной нормали

$$\lambda = -\frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cot\chi\cos\chi\cos\theta, \quad \mu = -\frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cot\chi\cos\chi\sin\theta,$$
$$\nu = -\frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cos\chi$$

или

$$\lambda = -\cos\chi\cos\theta, \quad \mu = -\cos\chi\sin\theta, \quad \nu = \sin\chi,$$

если замѣтимъ (возвышая предыдущія формулы въ квадратъ и складывая), что

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^2\varphi}{R}\cot\chi = \frac{l^2}{R^3}\cot\chi.$$

Главныя нормали, слѣдовательно, перпендикулярны къ образующимъ и пересѣкаютъ ось конуса: онѣ нормальны къ поверхности конуса*). Направляющіе косинусы бинормали будутъ

$$\alpha = -\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta\sin\chi, \quad \beta = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta\sin\chi,$$
$$\gamma = -\sin\varphi\cos\chi.$$

---

*) Мы увидимъ впослѣдствіи, что это есть характеристическое свойство геодезическихъ линій на всякой поверхности.

Достаточно продифференцировать послѣднее уравненіе, чтобы найти величину крученія

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R}\cot\chi = \frac{ls}{R^3}\cot\chi.$$

Замѣтимъ соотношеніе $s\tau = l\varrho$. Можно доказать, что то же соотношеніе справедливо для геодезической линіи на любой конической поверхности и не справедливо для другихъ линій на той же поверхности. Итакъ, геодезическія линіи на поверхности конуса характеризуются тѣмъ, что отношеніе первой кривизны ко второй измѣняется обратно пропорціонально длинѣ дуги.

657. Изслѣдуемъ еще кривую, заданную уравненіями

$$x = \frac{R}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})\cos\theta, \quad y = \frac{R}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})\sin\theta, \quad z = R\theta.$$

Прежде всего замѣтимъ, что, въ силу равенствъ $y = x\operatorname{tg}\theta$, $z = R\theta$, кривая лежитъ на косомъ геликоидѣ (§ 655, b). Съ другой стороны, проекція кривой на плоскости (xy) есть спираль, изображаемая въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ

$$r = \frac{R}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right),$$

а такъ какъ $z = R\theta$, то кривая лежитъ также на поверхности вращенія

$$r = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{z}{R}} + e^{-\frac{z}{R}}\right).$$

Эта поверхность есть катеноидъ, образуемый вращеніемъ цѣпной линіи

$$x = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{z}{R}} + e^{-\frac{z}{R}}\right)$$

около оси z-овъ (ея директрисы). Разсматриваемая кривая, слѣдовательно, есть пересѣченіе косого геликоида съ катеноидомъ. Дифференцируя выраженія координатъ, находимъ

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{R}{2}[(e^{\theta} - e^{-\theta})\cos\theta - (e^{\theta} + e^{-\theta})\sin\theta],$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{R}{2}[(e^{\theta} - e^{-\theta})\sin\theta + (e^{\theta} + e^{-\theta})\cos\theta], \qquad \frac{dz}{d\theta} = R,$$

отсюда

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{\sqrt{2}}(e^{\theta} + e^{-\theta}), \quad s = \frac{R}{\sqrt{2}}(e^{\theta} - e^{-\theta}),$$

полагая, что $s = 0$ при $\theta = 0$. Поэтому направляющіе косинусы касательной будутъ

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(k\cos\theta - \sin\theta), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(k\sin\theta + \cos\theta), \quad c = \frac{\sqrt{2}}{e^{\theta} + e^{-\theta}},$$

если обозначимъ для сокращенія $k = \dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$. Такъ какъ

$$-a\sin\theta + b\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

то находимъ, что кривая пересѣкаетъ параллели катеноида подъ угломъ въ 45^0. Замѣчая, далѣе, что $\frac{dk}{d\theta} = 1 - k^2$, и дифференцируя еще разъ, получимъ

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{k}{\sqrt{2}}(\sin\theta + k\cos\theta), \quad \frac{db}{d\theta} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\cos\theta - k\sin\theta),$$

$$\frac{dc}{d\theta} = -\frac{k\sqrt{2}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

Отсюда, возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ $\varepsilon = k\,d\theta$, а потому

$$\varrho = \frac{1}{k}\frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{\sqrt{2}}\frac{(e^{\theta} + e^{-\theta})^2}{e^{\theta} - e^{-\theta}} = s + \frac{2R^2}{s}$$

и

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + k\cos\theta), \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - k\sin\theta), \quad \nu = -\frac{\sqrt{2}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

Наконецъ, получимъ еще

$$\alpha = \frac{2\cos\theta}{e^{\theta} + e^{-\theta}}, \quad \beta = \frac{2\sin\theta}{e^{\theta} + e^{-\theta}}, \quad \gamma = -\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

Такъ какъ $\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\theta$, то бинормаль, очевидно, пересѣкаетъ ось z-овъ, и слѣдовательно, нормальна къ поверхности катеноида*). Для вычисленія второй кривизны достаточно теперь взять одну изъ формулъ (11), напримѣръ, $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\tau}$, и изъ нея получить

$$\tau = \frac{R}{4}(e^{\theta} + e^{-\theta})^2 = R + \frac{s^2}{2R}.$$

Легко показать, что τ равно отрѣзку бинормали между кривою и осью z-овъ. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи извѣстныхъ свойствъ цѣпной линіи (§ 589, c), этотъ отрѣзокъ какъ разъ равенъ $\frac{s^2}{R}$ т. е. τ. Замѣтимъ, наконецъ, что отношеніе первой кривизны ко второй измѣняется прямо пропорціонально длинѣ дуги (обратное тому, что было сказано для геодезическихъ линій на конусѣ въ § 656).

658. Кривыя Бертрана. а) Предложимъ себѣ рѣшить вопросъ: могутъ ли главныя нормали одной кривой (M) быть въ то же время главными нормалями другой кривой (M_1)?**). Каждой точкѣ $M(x, y, z)$ данной кривой соотвѣтствуетъ точка M_1 на другой кривой, координаты которой будутъ

(I) $$x_1 = x + \lambda p, \quad y_1 = y + \mu p, \quad z_1 = z + \nu p,$$

---

*) Это частный случай общаго свойства поверхностей вращенія: нормаль къ поверхности пересѣкаетъ ось вращенія.

**) Для плоскихъ кривыхъ, очевидно, нормали къ одной кривой будутъ нормалями ко всѣмъ кривымъ, ей параллельнымъ; для кривыхъ не плоскихъ, какъ увидимъ, данная кривая должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ, чтобы ея главныя нормали были общими съ другою кривою.

гдѣ p обозначаетъ разстояніе MM_1, а λ, μ, ν — направляющіе косинусы общей для двухъ кривыхъ главной нормали. Положительныя направленія касательной Mt въ точкѣ M къ кривой (M) и касательной M_1t_1 въ точкѣ M_1 къ кривой (M_1) будутъ перпендикулярны къ направленію Mn — общей главной нормали, но, вообще говоря, не будутъ совпадать. Обозначимъ черезъ ψ уголъ, на который надо повернуть полупрямую M_1t_1 около точки M_1, чтобы M_1t_1 сдѣлалась параллельною Mt, при чемъ вращеніе происходитъ въ томъ же направленіи, въ которомъ надо повернуть Mt на уголъ въ 90°, чтобы Mt совпало съ положительнымъ направленіемъ бинормали Mb. При такомъ условіи о счетѣ угла ψ, какъ легко убѣдиться, направляющіе косинусы касательной M_1t_1 выразятся формулами

(II) $$a_1 = a\cos\psi - \alpha\sin\psi, \quad b_1 = b\cos\psi - \beta\sin\psi, \quad c_1 = c\cos\psi - \gamma\sin\psi,$$

Съ другой стороны, имѣемъ, по формуламъ (I) и (11) § 638,

$$\frac{dx_1}{ds} = a - \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\alpha}{\varkappa}\right)p + \lambda\frac{dp}{ds} \text{ и т. д.}$$

и $a_1 = \dfrac{dx_1}{ds_1}$, гдѣ s_1 — дуга кривой (M_1). Отождествляя выраженіе $a_1 = \dfrac{dx_1}{ds}\cdot\dfrac{ds}{ds_1}$ съ тѣмъ, которое даютъ формулы (II), т. е. приравнивая коэффиціенты при a, при α, и независимые отъ a и α члены въ обоихъ выраженіяхъ, получимъ

(33) $$\frac{dp}{ds} = 0, \quad 1 - \frac{p}{\varrho} = \frac{ds_1}{ds}\cos\psi, \quad \frac{p}{\varkappa} = \frac{ds_1}{ds}\sin\psi,$$

такъ что

(34) $$p = \text{const.}, \quad \frac{1}{\varrho} + \frac{\cot\psi}{\varkappa} = \frac{1}{p}.$$

Полученныя формулы выражаютъ только то, что главныя нормали кривой (M) будутъ нѣкоторыми нормалями кривой (M_1); чтобы онѣ были именно главными нормалями и для второй кривой, необходимы еще условія

$$\frac{da_1}{ds_1} = \frac{\lambda}{\varrho_1}, \quad \frac{db_1}{ds_1} = \frac{\mu}{\varrho_1}, \quad \frac{dc_1}{ds_1} = \frac{\nu}{\varrho_1}.$$

Замѣчая, что

$$\frac{da_1}{ds} = \left(\frac{\cos\psi}{\varrho} - \frac{\sin\psi}{\varkappa}\right)\lambda - (a\sin\psi + \alpha\cos\psi)\frac{d\psi}{ds} \text{ и т. д.},$$

находимъ

(35) $$\frac{d\psi}{ds} = 0, \quad \frac{1}{\varrho_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{\cos\psi}{\varrho} - \frac{\sin\psi}{\varkappa},$$

т. е. $\psi = \text{const.}$; а это показываетъ, что основные тріэдры обѣихъ кривыхъ должны быть неподвижно связаны между собою (т. е. относительныя положенія реберъ этихъ тріэдровъ не измѣняются при переходѣ отъ одной точки на кривой къ другой). Кромѣ того, на основаніи формулы (34), между обѣими кривизнами данной кривой (M) должно существовать линейное соотношеніе съ постоянными коэффиціентами. Мы видимъ, такимъ образомъ, что кривая (M) не произвольна: она должна быть кривою Бертрана: такъ называются кривыя, между кривизнами которыхъ существуетъ соотношеніе вида

(36) $$\frac{p}{\varrho} + \frac{q}{\varkappa} = 1,$$

гдѣ p и q — постоянныя.

b) Нужно замѣтить, что и обратно, если дана кривая Бертрана (M), то всѣ найденныя выше условія выполняются, такъ что существуетъ другая кривая (M_1), имѣющая съ данною общія главныя нормали въ соотвѣтствующихъ точкахъ. Эти двѣ кривыя опредѣляютъ на общихъ главныхъ нормаляхъ отрѣзки равной длины p, а касательныя въ концахъ каждаго отрѣзка образуютъ между собою постоянный уголъ $\psi = \operatorname{arctg}\frac{p}{q}$. Очевидно, вторая кривая будетъ также кривою Бертрана, удовлетворяющею уравненію, получаемому изъ (36) замѣною p на $-p$. Это обстоятельство позволяетъ весьма просто вычислить обѣ кривизны кривой (M_1), такъ какъ формула (33) даетъ $\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\tau}$, а также аналогично этому $\frac{ds}{ds_1} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\tau_1}$, откуда $\tau\tau_1 = p^2+q^2$, т. е. **произведеніе вторыхъ кривизнъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ обѣихъ кривыхъ — величина постоянная.** Примѣняя далѣе формулу (36) къ кривой (M_1), получимъ

$$\frac{p}{\varrho_1} = \frac{q}{\tau_1} - 1 = \frac{q\tau}{p^2+q^2} - 1 = \frac{(p\tau+q\varrho)\,q}{(p^2+q^2)\,\varrho} - 1 = \frac{(q\tau-p\varrho)\,p}{(p^2+q^2)\,\varrho},$$

т. е.

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{q\tau-p\varrho}{(p^2+q^2)\,\varrho}, \tag{37}$$

что можно также получить изъ второй формулы (35). Наконецъ, замѣтимъ, что отвѣтъ, полученный нами на поставленный вопросъ, теряетъ смыслъ при $p=0$, т. е. для кривыхъ съ постояннымъ (не равнымъ нулю) крученіемъ и перемѣнною первою кривизною. Въ этомъ случаѣ кривыя M и (M_1) совпадаютъ. Это заключеніе не распространяется на кривыя съ крученіемъ, равнымъ нулю (т. е. плоскія кривыя); въ этомъ случаѣ имѣемъ $\psi = 0$, и формулы (33) и (35) приводятся къ извѣстнымъ результатамъ:

$$p = \text{const.}, \quad \frac{ds_1}{ds} = 1 - \frac{p}{\varrho}, \quad \varrho_1 = \varrho - p,$$

относящимся къ системѣ параллельныхъ кривыхъ (§ 624, b). Полученный результатъ не имѣетъ мѣста и въ томъ случаѣ, когда обѣ кривизны постоянны, потому что тогда уравненіе (36) удовлетворяется безчисленнымъ множествомъ паръ значеній p и q. Это значитъ, что **круговую винтовую линію можно безчисленнымъ множествомъ способовъ разсматривать, какъ кривую Бертрана.** Мы видимъ, что круговыя винтовыя линіи, отъ всѣхъ другихъ линій двоякой кривизны, отличаются тѣмъ, что, подобно плоскимъ кривымъ, имѣютъ общія главныя нормали съ безчисленнымъ множествомъ другихъ кривыхъ. Эти другія кривыя, разумѣется, тоже круговыя винтовыя и между ними одна должна приводиться къ прямой. Она соотвѣтствуетъ тѣмъ значеніямъ p и q, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (36) и (37) при $\varrho_1 = \infty$, т. е.

$$p = \frac{\varrho\tau^2}{\varrho^2+\tau^2}, \qquad q = \frac{\tau\varrho^2}{\varrho^2+\tau^2},$$

и есть не что иное, какъ общая ось всѣхъ цилиндровъ, на которыхъ лежатъ круговыя винтовыя линіи.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ТЕОРІИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Основныя понятія.

659. Касательная плоскость. Ко всѣмъ кривымъ, проходящимъ черезъ точку M на поверхности, проведемъ касательныя прямыя: онѣ называются касательными къ поверхности. Направленіе каждой изъ нихъ опредѣляется косинусами, которые (§ 630) пропорціональны дифференціаламъ координатъ x, y, z точки M, если представимъ себѣ, что эта точка передвигается по одной изъ кривыхъ на поверхности. Если поверхность задана уравненіемъ $f(X, Y, Z) = 0$, то упомянутые дифференціалы связаны уравненіемъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0. \tag{1}$$

Это уравненіе выражаетъ, что всякая касательная, къ какой бы кривой на поверхности черезъ точку M она ни была проведена, перпендикулярна къ прямой, направленіе которой опредѣляется косинусами

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Слѣдовательно, всѣ касательныя въ точкѣ M лежатъ въ одной плоскости. Она называется касательной плоскостью къ поверхности въ точкѣ M, а прямая, къ ней перпендикулярная, возставленная изъ той же точки M — нормалью къ поверхности. Касательная плоскость изображается, слѣдовательно, уравненіемъ

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Если хотимъ ввести въ вычисленіе частныя производныя отъ z по x и по y, обозначаемыя буквами p и q, то косинусы направленія нормали выразятся формулами

$$\mathfrak{L} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mathfrak{M} = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\ ^{*}),$$

а уравненіе касательной плоскости приметъ видъ

$$Z - z = p(X-x) + q(Y-y). \tag{3}$$

---

*) вытекающими изъ уравненій $f'_x + p f'_z = 0$, $f'_y + q f'_z = 0$.

Сближая сказанное въ § 568 съ настоящими выводами, мы видимъ, что нормаль къ поверхности $f = 0$ въ точкѣ M и есть та прямая, вдоль которой функція f стремится измѣняться всего быстрѣе, между тѣмъ, какъ вдоль касательныхъ эта функція стремится сохранить значеніе 0; дѣйствительно, въ точкахъ M', лежащихъ въ касательной плоскости, функція f имѣетъ значенія, безконечно малыя второго порядка относительно MM'.

660. Полезно имѣть также формулы для непосредственнаго вычисленія косинусовъ $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ въ томъ случаѣ, когда поверхность задана уравненіями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v).$$

При этомъ параметры u и v измѣняются независимо одинъ отъ другого. Чтобы эти три уравненія изображали поверхность, необходимо, чтобы двѣ изъ функцій x, y, z были независимы, а слѣдовательно (§ 578), чтобы въ матриссѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

не всѣ миноры второго порядка равнялись нулю. Если теперь v остается постояннымъ, то данныя три уравненія изображаютъ кривую линію на поверхности; $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ будутъ пропорціональны направляющимъ косинусамъ касательной къ этой кривой въ разсматриваемой точкѣ; точно такъ же $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ будутъ пропорціональны косинусамъ касательной къ другой кривой, которую получимъ, разсматривая u, какъ постоянное. Условія перпендикулярности нормали къ обѣимъ касательнымъ даютъ

$$\sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Изъ нихъ вытекаетъ, что $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ пропорціональны вышеупомянутымъ минорамъ, а такъ какъ сумма квадратовъ этихъ миноровъ равна квадрату матриссы, т. е. $ac - b^2$, гдѣ

$$a = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad b = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad c = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v},$$

то, очевидно, будемъ имѣть

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

661. Упражненія. Найдемъ уравненіе конуса, описаннаго около поверхности $f(X, Y, Z) = 0$ съ вершиною въ данной точкѣ $Q(\xi, \eta, \zeta)$, т. е. того конуса, образующія котораго будутъ касательными къ поверхности, проведенными изъ точки Q. Уравненія, выражающія, что точка $M(x, y, z)$ лежитъ на поверхности, и что касательная плоскость въ точкѣ M проходитъ черезъ Q, будутъ

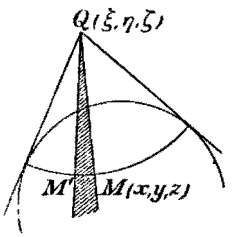


Рис. 83.

$$f(x, y, z) = 0, \tag{4}$$

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Если въ этихъ уравненіяхъ будемъ разсматривать x, y, z, какъ перемѣнныя (текущія) координаты, то эти уравненія изобразятъ кривую касанія конуса съ поверхностью. Такимъ образомъ въ приложеніяхъ опредѣляется, такъ называемый, видимый контуръ поверхности для наблюдателя, смотрящаго на нее изъ точки Q, т. е. кривую, отдѣляющую видимую изъ точки Q часть поверхности отъ невидимой или линію, отдѣляющую свѣтъ отъ тѣни на поверхности, погруженной въ пучекъ свѣтовыхъ лучей, исходящихъ изъ точки Q. Если хотимъ опредѣлить тѣнь, бросаемую данною поверхностью на другую, то должны къ уравненію этой поверхности присоединить уравненіе описаннаго конуса, чтобы получить контуръ, ограничивающій эту тѣнь. Уравненіе этого конуса получимъ, если исключимъ x, y, z изъ уравненій (4) и уравненій образующей QM конуса

$$\frac{X - \xi}{x - \xi} = \frac{Y - \eta}{y - \eta} = \frac{Z - \zeta}{z - \zeta}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда Q находится на безконечности, черезъ исключеніе x, y, z изъ уравненій

$$f(x, y, z) = 0, \quad A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \frac{X - x}{A} = \frac{Y - y}{B} = \frac{Z - z}{C}$$

получимъ уравненіе цилиндра, описаннаго около поверхности съ образующими, параллельными направленію (A, B, C). Возвращаясь къ общему случаю (конуса), замѣтимъ, что исключеніе x, y, z можно произвести весьма просто, разсматривая функцію

$$F(t) = f(\xi + t(X - \xi), \quad \eta + t(Y - \eta), \quad \zeta + t(Z - \zeta))$$

и замѣчая, что второе изъ уравненій (4) обращается въ $F'(t) = 0$. Слѣдовательно, уравненіе описаннаго конуса получится черезъ исключеніе t изъ уравненій $F(t) = 0$ и $F'(t) = 0$.

662. Особенности. Во всемъ предыдущемъ подразумѣвалось, что въ точкѣ $M(x, y, z)$ не всѣ первыя производныя отъ f по x, y и z равны нулю. Иначе условіе (1) обращалось бы въ тождество и не давало бы никакой связи между dx, dy, dz. Если

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

то M будетъ особенная точка, въ томъ отношеніи, что всѣ касательныя къ поверхности въ точкѣ M, вмѣсто того, чтобы лежать въ одной плоскости, образуютъ коническую поверхность. Это можно тотчасъ увидѣть, если напишемъ уравненіе поверхности для точекъ (X, Y, Z), безконечно близкихъ къ M, въ видѣ (§ 376)

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$+\frac{1}{2}\left[(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cdots+2(X-x)(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\cdots\right]+\cdots=0.$$

Если $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, вычисленныя для точки M, не равны нулю одновременно, то, отбрасывая безконечно малыя высшаго порядка, видимъ, что въ смежности съ M поверхность уподобляется плоскости (2); такимъ путемъ можно прямо получить уравненіе касательной плоскости. Если же, наоборотъ, координаты точки M удовлетворяютъ уравненіямъ (5), то, пренебрегая безконечно малыми выше 2-го порядка, можно разсматривать точки поверхности, смежныя съ M, какъ лежащія на поверхности конуса второго порядка.

$$(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(Y-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\cdots+2(X-x)(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\cdots=0$$

и т. д. Разысканіе особенныхъ точекъ поверхности (которыя называются также коническими, или двойными, тройными и т. д. точками) производится путемъ, аналогичнымъ тому, которому мы слѣдовали при изученіи плоскихъ кривыхъ (§ 607); характеръ особенной точки опредѣляется разсмотрѣніемъ плоскихъ сѣченій поверхности въ смежности съ разсматриваемой точкою. Надо замѣтить, что на поверхности особенныя точки могутъ примыкать одна къ другой непрерывно и образовать особенныя линіи. Если, напримѣръ, будемъ проектировать какую нибудь плоскую кривую изъ точки, нележащей въ ея плоскости, то получимъ коническую поверхность, на которой кратными линіями будутъ всѣ тѣ образующія, которыя проходятъ черезъ кратную точку разсматриваемой кривой; точно также кратными линіями поверхности вращенія будутъ всѣ параллели, образуемыя кратными точками меридіана и т. д. Другого рода особенности, аналогичныя точкамъ изгиба плоскихъ кривыхъ, вскорѣ намъ встрѣтятся.

663. Соприкасающіяся прямыя. Возвращаясь къ обыкновеннымъ точкамъ, изучимъ форму поверхности въ смежности съ такою точкою. Возьмемъ уравненіе касательной плоскости въ формѣ (3) и вычислимъ алгебраическое разстояніе h отъ этой

плоскости до безконечно близкой къ M точки на поверхности. Это разстояніе выражается такъ

$$h = \frac{\delta z - p\delta x - q\,\delta y}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

(гдѣ δx, δy, δz разности между координатами M' и M). Мы имѣемъ, далѣе,

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y + \tfrac{1}{2}(r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2) + \cdots,$$

гдѣ p, q, r, s, t имѣютъ извѣстныя (§ 563) значенія и вычисляются для точки M. Отбрасывая безконечно малыя выше 2-го порядка, имѣемъ, слѣдовательно,

$$h = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{2\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{6}$$

Всякая пара значеній dx и dy, съ соотвѣтствующимъ ей значеніемъ $dz = p\,dx + q\,dy$ опредѣляетъ направленіе прямой — касательной къ одной изъ безчисленнаго множества кривыхъ, проходящихъ черезъ M по поверхности, и точку M' всегда можно предположить лежащею на одной изъ этихъ кривыхъ. Вращая касательную въ касательной плоскости въ точкѣ M, мы можемъ достигнуть того, чтобы точка M' приняла любое положеніе внутри нѣкоторой, достаточно малой части ς поверхности, составляющей окрестность точки M. Во время полнаго оборота касательной она два раза приметъ такое положеніе, при которомъ h сдѣлается безконечно малою выше второго порядка. Это будутъ тѣ направленія, для которыхъ числитель выраженія (6) обращается въ нуль. Такимъ образомъ, между безчисленнымъ множествомъ касательныхъ, проходящихъ черезъ точку M, можно отличить двѣ прямыя, которыя называются **соприкасающимися прямыми**, потому что изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ M, онѣ тѣснѣе всего примыкаютъ къ поверхности въ смежности съ M. Эти прямыя будутъ мнимыми или вещественными, смотря по тому, будетъ ли $rt - s^2 > 0$ или < 0 *). Въ первомъ случаѣ точка M называется **эллиптическою**, во второмъ **гиперболическою**. При $rt - s^2 = 0$ соприкасающіяся прямыя совпадаютъ, и точка M называется **параболическою**. Если M эллиптическая точка, то h сохраняетъ опредѣленный знакъ для всѣхъ направленій, и вся часть ς поверхности лежитъ съ одной стороны отъ касательной плоскости. Можно поэтому сказать, что M изолированная точка для линіи пересѣченія поверхности съ касательною плоскостью. Если же M

*) Условія мнимости или вещественности тѣхъ значеній $\frac{dy}{dx}$, при которыхъ $r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$.

гиперболическая точка, то вещественныя соприкасающіяся прямыя опредѣляютъ на касательной плоскости такія двѣ области, что въ одной изъ нихъ $h>0$, а въ другой $h<0$; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ касательная плоскость пересѣкаетъ ς. Далѣе, если M' лежитъ въ этой плоскости, или общнѣе, если она лежитъ на кривой, для которой касательная плоскость въ M будетъ соприкасающеюся плоскостью, то разстояніе h будетъ либо нуль, либо безконечно малою не ниже 3-го порядка, а потому числитель въ выраженіи (6) долженъ обратиться въ нуль. Отсюда вытекаетъ, что соприкасающіяся прямыя будутъ касательными къ тѣмъ кривымъ, для которыхъ соприкасающаяся плоскость совпадаетъ съ касательною плоскостью къ поверхности *). Въ частности, пересѣченіе поверхности съ касательною плоскостью имѣетъ двѣ вѣтви, проходящія черезъ M и касающіяся въ ней соприкасающихся прямыхъ. Слѣдовательно, M будетъ двойною точкою для этой кривой. Обратно, какъ только нѣкоторая кривая на поверхности касается въ точкѣ M соприкасающейся прямой, h дѣлается безконечно малою выше 2-го порядка, и касательная плоскость будетъ соприкасающеюся плоскостью для такой кривой, или (§ 646) первая кривизна кривой въ этой точкѣ равна 0. Наконецъ, замѣтимъ еще, что если функція $rt-s^2$ непрерывна, то эллиптическія и гиперболическія точки заполняютъ такія области на поверхности, которыя разграничиваются линіями, образованными параболическими точками. Эти линіи будутъ линіями пересѣченія данной поверхности съ поверхностью $rt-s^2=0$ (ср. съ § 604).

664. Указательница (индикатриса) Дюпена (Ch. Dupin). Чтобы ближе разсмотрѣть, что происходитъ въ окрестности съ точками двухъ различныхъ родовъ, помѣстимъ начало координатъ въ точку M, а ось z-овъ направимъ по нормали къ поверхности. Знакъ выраженія $rt-s^2$ при этомъ не измѣнится, потому что, какъ мы видѣли, этотъ знакъ характеризуетъ такія геометрическія свойства поверхности, которыя отъ выбора координатныхъ осей, очевидно, не зависятъ. При сдѣланномъ выборѣ мы будемъ имѣть $p=0$ и $q=0$ (§ 659) и въ смежности съ точкою M данная поверхность уподобляется параболоиду $z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)$, эллиптическому при $rt-s^2>0$, гиперболическому при $rt-s^2<0$. Соприкасающіяся прямыя будутъ тѣ именно, мнимыя или вещественныя, прямолинейныя образующія параболоида, которыя лежатъ въ плоскости $z=0$. Если $rt-s^2=0$, то M — параболическая точка и параболоидъ обращается въ параболическій цилиндръ. Пересѣчемъ теперь поверхность двумя плоскостями $z=\pm l$, параллельными касательной плоскости ($z=0$) и безконечно къ ней близкими. Уравненія сѣченій будутъ

$$rx^2+2sxy+ty^2=\pm 2l$$

*) См. дальше § 665.

и изображаютъ либо пару эллипсовъ (одинъ вещественный, другой мнимый), либо пару дополнительныхъ гиперболъ, смотря по тому, будетъ ли точка M эллиптическая или гиперболическая. Проектируемъ эти сѣченія на касательную плоскость и представимъ себѣ ихъ растянутыми по направленію изъ центра, такъ, чтобы ихъ уравненіе обратилось въ уравненіе $rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1$. Вещественная часть этой пары коническихъ сѣченій называется указательницею или индикатрисою Дюпена *). Она пересѣкается каждымъ діаметромъ въ двухъ вещественныхъ точкахъ и ея асимптоты — вещественныя или мнимыя — совпадаютъ съ соприкасающимися прямыми къ поверхности.

665. Замѣчательныя кривыя на поверхности. Изъ всѣхъ линій, которыя можно провести на поверхности, особенно замѣчательны асимптотическія линіи. Это тѣ кривыя, которыя въ каждой свой точкѣ касаются соприкасающейся прямой, т. е. асимптотъ индикатрисы. Асимптотическую линію можно себѣ представить произведенною движеніемъ точки M, которая двигается по соприкасающейся прямой въ M до точки M', затѣмъ по соприкасающейся прямой въ M' до точки M'' и т. д. Если наша точка M, вмѣсто того, чтобы двигаться послѣдовательно по соприкасающимся прямымъ, т. е. постоянно тангенціально къ асимптотамъ индикатрисы, двигалась бы постоянно тангенціально къ осямъ индикатрисы, то описываемая ею линія была бы такъ называемая линія кривизны. Всякая поверхность, слѣдовательно, покрыта сѣтью двухъ системъ линій кривизны, которыя всегда вещественны. Черезъ каждую точку поверхности проходятъ одна линія одной и одна линія другой системы, пересѣкаясь притомъ ортогонально. Черезъ каждую точку поверхности проходятъ также двѣ асимптотическія линіи (вещественныя или мнимыя), одинаково наклоненныя къ обѣимъ линіямъ кривизны (какъ асимптоты гиперболы къ ея осямъ), и образуютъ между собою, вообще, не прямой уголъ. По сдѣланному въ § 663 замѣчанію соприкасающіяся плоскости асимптотической линіи будутъ касательными плоскостями поверхности, если только не постоянно $\frac{1}{\varrho}=0$; въ послѣднемъ случаѣ линія будетъ прямою (§ 639), относительно которой касательная плоскость всегда можетъ быть разсматриваема, какъ соприкасающаяся къ ней (§ 646). Слѣдовательно, для асимптотическихъ линій главная нормаль всегда лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности. Съ другой стороны, черезъ каждую точку поверхности проходитъ безчисленное множество кривыхъ, такъ называемыхъ геодезическихъ линій, для которыхъ главная нормаль есть нормаль къ поверхности. Мы увидимъ впослѣдствіи, что кратчайшій путь по поверхности между двумя ея точками (если разстояніе между ними не превос-

*) Французскій геометръ, ученикъ знаменитаго Монжа.

ходитъ извѣстнаго предѣла) есть именно дуга геодезической линіи, черезъ нихъ проходящей. Очевидно, прямая линія есть и геодезическая и асимптотическая на всякой поверхности, потому что каждая ея нормаль можетъ быть разсматриваема, какъ главная.

Линейчатыя поверхности.

666. Когда прямая линія, двигаясь въ пространствѣ, послѣдовательно занимаетъ простую безконечность (∞^1) различныхъ положеній, то она образуетъ такъ называемую линейчатую поверхность.

[Мы говоримъ, что прямая занимаетъ ∞^1 положеній, когда коэффиціенты въ ея уравненіяхъ зависятъ лишь отъ одного независимаго параметра. Если бы эти коэффиціенты зависѣли отъ двухъ независимыхъ параметровъ, то мы сказали бы, что она занимаетъ ∞^2 различныхъ положеній и образуетъ конгруенцію прямыхъ, а не линейчатую поверхность.]

Фиксируя образующую прямую въ нѣкоторомъ положеніи $\mathfrak{g}$, разсмотримъ другое ея положеніе $\mathfrak{g}'$, безконечно близкое къ $\mathfrak{g}$. Общій перпендикуляръ къ прямымъ $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ встрѣчаетъ прямую $\mathfrak{g}$ въ нѣкоторой точкѣ, которая передвигается при движеніи $\mathfrak{g}'$ и стремится къ нѣкоторому предѣльному положенію Q, съ которымъ и совпадетъ при совпаденіи прямой $\mathfrak{g}'$ съ $\mathfrak{g}$ (рис. 84). Эта точка Q

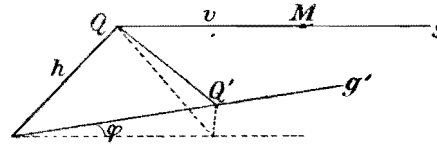


Рис. 84.

называется центральною точкою образующей. Если кратчайшее разстояніе h между двумя безконечно близкими образующими будетъ безконечно малою перваго порядка относительно дуги QQ' кривой (Q) — общаго мѣста центральныхъ точекъ, то поверхность называется косою (windschief) (это и будетъ въ общемъ случаѣ), а кривая (Q) — ея горловою или стрикціонною линіею (Striktionslinie). Если же, наоборотъ, h безконечно малая высшаго порядка, то поверхность называется развертывающеюся (abwickelbar), а кривая Q ея ребромъ возврата (Rückkehrkante).

667. Положимъ, что (a, b, c) обозначаютъ направляющіе, косинусы образующей, а (x, y, z) координаты какой нибудь точки

на ней лежащей. Изъ Аналитической Геометріи извѣстно, что уголъ φ между прямыми $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ опредѣляется по формулѣ

$$\sin^2\varphi = \Sigma(b\delta c - c\delta b)^2 = (b\delta c - c\delta b)^2 + (c\delta a - a\delta c)^2 + (a\delta b - b\delta a)^2,$$

гдѣ символъ δ обозначаетъ приращенія входящихъ сюда величинъ при переходѣ отъ $\mathfrak{g}$ къ $\mathfrak{g}'$. Но h есть проекція отрѣзка между точками (x, y, z) и $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ на общій къ прямымъ $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ перпендикуляръ, а направляющіе косинусы этого перпендикуляра пропорціональны числамъ $b\delta c - c\delta b$, $c\delta a - a\delta c$, $a\delta b - b\delta a$, поэтому h опредѣляется формулою

$$h = \sum \frac{b\delta c - c\delta b}{\sin\varphi}\,\delta x = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix} a & \delta a & \delta x \\ b & \delta b & \delta y \\ c & \delta c & \delta z \end{vmatrix},$$

или короче

$$h\sin\varphi = [a, \delta a, \delta x],$$

гдѣ

$$[a, \delta a, \delta x] = \begin{vmatrix} a & \delta a & \delta x \\ b & \delta b & \delta y \\ c & \delta c & \delta z \end{vmatrix}.$$

Пренебрегая въ обѣихъ частяхъ равенства безконечно малыми выше третьяго порядка, получимъ

$$h\varphi = [a, da, dx] + \tfrac{1}{2}[a, da, d^2x] + \tfrac{1}{2}[a, d^2a, dx] + \cdots.$$

Для того, чтобы h было безконечно малою выше перваго порядка, необходимо и достаточно, чтобы $[a, da, dx] = 0$. Это равенство и выражаетъ условіе, необходимое и достаточное, чтобы поверхность, образуемая прямою

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c},$$

гдѣ (a, b, c) и (x, y, z) функціи отъ одной независимой перемѣнной, была развертывающеюся. Слѣдуетъ замѣтить, что это условіе не измѣнится, если замѣнимъ косинусы a, b, c какими угодно пропорціональными имъ числами. Замѣтимъ еще, что при выполненіи этого условія въ выраженіи $h\varphi$ пропадутъ и члены третьяго порядка, потому что

$$[a, da, d^2x] + [a, d^2a, dx] = d[a, da, dx].$$

Слѣдовательно, въ развертывающейся поверхности кратчайшее разстояніе между двумя безконечно близкими образующими есть безконечно малая не ниже третьяго порядка относительно дуги ребра возврата.

668. Теорія кривыхъ двоякой кривизны тотчасъ дастъ намъ примѣръ развертывающихся поверхностей. А именно, ясно, что общее мѣсто касательныхъ къ кривой двоякой кривизны есть развертывающаяся поверхность, для которой данная кривая служитъ ребромъ возврата, потому что если (x, y, z) есть точка на кривой, то элементы третьяго столбца въ опредѣлителѣ $[a, da, dx]$ пропорціональны элементамъ перваго (§ 630) и опредѣлитель равенъ нулю. Обратно, если опредѣлитель $[a, da, dx] = 0$, то всегда можно на поверхности, образуемой прямою

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c}$$

найти такую кривую, касательныя которой будутъ образующими поверхности. Дѣйствительно, координаты любой точки на образующей можно представить формулами

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

гдѣ v алгебраическая длина отрѣзка между разсматриваемою точкою и точкою (x, y, z). Разсматривая v, какъ функцію отъ той же независимой перемѣнной, отъ которой зависятъ числа x, y, z, a, b, c, мы можемъ разсматривать X, Y, Z какъ координаты точекъ нѣкоторой кривой на данной поверхности. Направляющіе косинусы касательной въ этой кривой въ точкѣ (X, Y, Z) пропорціональны числамъ $dX = dx + v\,da + a\,dv$, $dY = dy + v\,db + b\,dv$, $dZ = dz + v\,dc + c\,dv$. Чтобы касательная совпала съ образующей, необходимо и достаточно, чтобы можно было опредѣлить v такъ, чтобы эти числа были пропорціональны числамъ a, b, c, т. е. чтобы было

$$\frac{dx + v\,da}{a} = \frac{dy + v\,db}{b} = \frac{dz + v\,dc}{c}.$$

А при условіи $[a, da, dx] = 0$ это всегда возможно, потому что оно есть не что иное, какъ условіе совмѣстности написанныхъ двухъ уравненій съ одною неизвѣстною v. Итакъ, всякую развертывающуюся поверхность можно разсматривать, какъ общее мѣсто касательныхъ къ кривой двоякой кривизны.

[**Примѣчаніе.** Въ частномъ случаѣ, эта кривая можетъ обратиться въ точку, черезъ которую тогда и проходятъ всѣ образующія, такъ что получается коническая поверхность; эта въ свою очередь превращается въ цилиндрическую, когда вершина конуса удаляется въ безконечность и образующія дѣлаются параллельными между собою.

Можно отдать себѣ отчетъ въ этомъ свойствѣ, замѣтивъ слѣдующее. Если мы проведемъ черезъ $\mathfrak{g}$ плоскость, параллельную $\mathfrak{g}'$, то разстояніе точки Q' отъ этой плоскости будетъ равно h, а такъ какъ h третьяго порядка, то, вообще говоря, проведенная нами

плоскость совпадетъ съ соприкасающеюся плоскостью къ ребру возврата въ точкѣ Q (§ 642). Чтобы доказать, что g — касательная къ ребру возврата достаточно показать, что разстояніе между g и проекціею точки Q' на соприкасающуюся плоскость будетъ безконечно малою выше перваго порядка. А такъ какъ это разстояніе равно произведенію QQ' на безконечно малый уголъ, то теорема и доказана.

669. Положимъ теперь, что x, y, z обозначаютъ координаты центральной точки и поставимъ себѣ задачей опредѣлить касательную плоскость въ какой нибудь точкѣ M линейчатой поверхности. Образующая g опредѣляется координатами x, y, z и направляющими косинусами a, b, c. Всѣ эти величины, какъ уже было сказано, будутъ функціями отъ одной независимой перемѣнной u, за которую можно принять дугу ребра возврата или стрикціонной линіи, отсчитываемую отъ произвольной начальной точки A на кривой. Точка M на данной образующей опредѣлится тогда ея разстояніемъ v отъ центральной точки. Слѣдовательно, координаты точки M выражаются въ двухъ параметрахъ u и v формулами

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv.$$

Кромѣ того,

$$(7) \qquad \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{dx}{du} + v\frac{da}{du}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{dy}{du} + v\frac{db}{du}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{dz}{du} + v\frac{dc}{du},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = a, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = b, \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = c.$$

Если поверхность развертывающаяся, то $\frac{dx}{du} = a$, $\frac{da}{du} = \frac{\lambda}{\varrho}$ и т. д., а послѣднія формулы обращаются въ

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a + \frac{v\lambda}{\varrho}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = b + \frac{v\mu}{\varrho}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = c + \frac{v\nu}{\varrho}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ направляющіе косинусы $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ нормали къ поверхности (§ 660) будутъ пропорціональны опредѣлителямъ

$$\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)},$$

которые сами пропорціональны опредѣлителямъ матриссы

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

т. е. косинусамъ α, β, γ бинормали. Какъ видимъ, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ не зависятъ отъ v. Слѣдовательно, касательная плоскость въ точкѣ развертывающейся поверхности касается поверх-

ности вдоль всей образующей, проходящей черезъ эту точку, иными словами, во всѣхъ точкахъ данной образующей касательныя плоскости совпадаютъ въ одну.

670. Въ случаѣ косой линейчатой поверхности $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, на основаніи тѣхъ же формулъ § 660, будутъ пропорціональны числамъ

$$b(dz+vdc)-c(dy+vdb)=(bdz-cdy)+v(bdc-cdb) \text{ и т. д.}$$

Въ то же время, обозначая черезъ α, β, γ направляющіе косинусы общаго перпендикуляра къ g и g′, имѣемъ

$$\frac{\alpha}{bdc-cdb}=\frac{\beta}{cda-adc}=\frac{\gamma}{adb-bda}=\frac{1}{\varphi},$$

и аналогично, обозначая черезъ λ, μ, ν направляющіе косинусы общаго перпендикуляра къ g и QQ', также имѣемъ

$$\frac{\lambda}{bdz-cdy}=\frac{\mu}{cdx-adz}=\frac{\nu}{ady-bdx}=\frac{1}{h}.$$

Поэтому, положивъ $h=R\varphi$, находимъ, что $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ пропорціональны числамъ $\lambda+\frac{v}{R}\alpha$, $\mu+\frac{v}{R}\beta$, $\nu+\frac{v}{R}\gamma$ и совпадаютъ съ λ, μ, ν при $v=0$. На основаніи сказаннаго, нормали къ поверхности, соотвѣтствующія значеніямъ 0 и v параметра v, составляютъ между собою уголъ ψ, опредѣляемый формулами

$$\cos\psi=\mathfrak{L}\lambda+\mathfrak{M}\mu+\mathfrak{N}\nu, \quad \sin\psi=\mathfrak{L}\alpha+\mathfrak{M}\beta+\mathfrak{N}\gamma.$$

Изъ равенствъ

$$\frac{\mathfrak{L}}{\lambda+\frac{v}{R}\alpha}=\frac{\mathfrak{M}}{\mu+\frac{v}{R}\beta}=\frac{\mathfrak{N}}{\nu+\frac{v}{R}\gamma}=\frac{\mathfrak{L}\lambda+\mathfrak{M}\mu+\mathfrak{N}\nu}{1}=\cos\psi$$

(потому что $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$, $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$), найдемъ

$$\mathfrak{L}=\left(\lambda+\frac{v}{R}\alpha\right)\cos\psi, \quad \mathfrak{M}=\left(\mu+\frac{v}{R}\beta\right)\cos\psi, \quad \mathfrak{N}=\left(\nu+\frac{v}{R}\gamma\right)\cos\psi,$$

а умножая на α, β, γ и складывая, получимъ

$$\sin\psi=\frac{v}{R}\cos\psi,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{v}{R}.$$

Эта формула, найденная Шалемъ (Chasles) показываетъ нижеслѣдующее. Когда точка касанія, выйдя изъ начальнаго положенія на

горловой линіи, описываетъ образующую косой линейчатой поверхности, то касательная плоскость поворачивается на уголъ, тангенсъ котораго пропорціоналенъ пройденному пути. Для опредѣленія положеній безчисленнаго множества касательныхъ плоскостей въ различныхъ точкахъ одной и той же образующей достаточно знать число R, которое поэтому и называется параметромъ распредѣленія касательныхъ плоскостей. Чтобы интерпретировать геометрическій характеръ теоремы Шаля, примемъ за ось x-овъ прямую $\mathfrak{g}$, за ось y-овъ предѣльное положеніе общаго перпендикуляра къ прямымъ $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$; тогда уравненія нормали въ точкѣ M примутъ видъ

$$X = v, \quad Y = Z \operatorname{tg} \psi$$

и формула Шаля дастъ $XZ = RY$. Слѣдовательно, нормали къ косой линейчатой поверхности вдоль одной и той же образующей лежатъ на поверхности гиперболическаго параболоида.

671. Обращаемся снова къ развертывающимся поверхностямъ и замѣтимъ слѣдующее. Если кривая (M), координаты точекъ которой X, Y, Z опредѣляются формулами

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

пересѣкаетъ всѣ образующія подъ прямымъ угломъ, или, какъ говорятъ, будетъ ортогональною траекторіей образующихъ, то по условію ортогональности будемъ имѣть

$$a\,dX + b\,dY + c\,dZ = \Sigma a\,dX = 0.$$

Но по формуламъ (7), имѣемъ

$$dX = \left(a + \frac{\lambda v}{\varrho}\right) du + a\,dv \quad \text{и т. д.}$$

такъ что $\Sigma a\,dX = d(u+v)$ и условіе $\Sigma a\,dX = 0$ даетъ $u + v = \text{const.}$, т. е. $\smile AQ + QM = \text{const.}$ Отсюда слѣдуетъ, что всякая ортогональная траекторія отсѣкаетъ на любыхъ двухъ образующихъ отрѣзки, разность которыхъ равна длинѣ дуги ребра возврата между точками касанія этихъ образующихъ*). Поэтому, если имѣемъ гибкую нерастяжимую нить, закрѣпленную въ точкѣ A и натянутую по ребру возврата, и будемъ постепенно свивать эту нить, удерживая ее постоянно натянутою, то каждая ея точка будетъ описывать нѣкоторую ортогональную траекторію (M). На этомъ основаніи кривыя (M) называютъ эвольвентами (развертками) ребра возврата, которымъ можетъ быть какая угодно кривая.

672. Обратно, ребро возврата называется эволютою каждой изъ кривыхъ (M), потому что (какъ и въ плоскихъ кривыхъ) ея

*) $\smile AQ + QM = \smile AQ' + Q'M', \quad \smile QQ' = QM - Q'M'.$

касательныя будутъ нормали кривыхъ (M). Изслѣдуемъ теперь, относя все къ основному тріэдру одной изъ кривыхъ (M), какому условію должны удовлетворять нормали этой кривой, для того, чтобы онѣ могли образовать развертывающуюся поверхность. Разсматривая одну изъ этихъ нормалей, обозначимъ, черезъ φ уголъ, образуемый ею съ главною нормалью, тогда направляющіе косинусы разсматриваемой нормали опредѣлятся формулами

$$l = \alpha \sin\varphi + \lambda\cos\varphi, \quad m = \beta\sin\varphi + \mu\cos\varphi, \quad n = \gamma\sin\varphi + \nu\cos\varphi,$$

а формулы

$$l' = \alpha\cos\varphi - \lambda\sin\varphi, \quad m' = \beta\cos\varphi - \mu\sin\varphi, \quad n' = \gamma\cos\varphi - \nu\sin\varphi$$

опредѣлятъ косинусы другой нормали, которая вмѣстѣ съ первою и съ касательною образуетъ ортогональный тріэдръ, удовлетворяющій условію

$$\begin{vmatrix} a & l' & l \\ b & m' & m \\ c & n' & n \end{vmatrix} = 1.$$

Но мы уже видѣли (§ 667), что разсматриваемая нормаль, при передвиженіи точки M по кривой (M) образуетъ развертывающуюся поверхность тогда и только тогда, когда $[l, dl, a] = 0$. Замѣчая, что $dl = (\alpha\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)\,d\varphi + \sin\varphi\,d\alpha + \cos\varphi\,d\lambda$ и пользуясь формулами Френе (§§ 635, 636) $d\alpha = \lambda\eta$, $d\lambda = -\alpha\varepsilon - a\eta$, найдемъ

$$dl = l'(d\varphi - \eta) - a\varepsilon\cos\varphi \text{ и т. д.}$$

Поэтому опредѣлитель $[l, dl, a]$ приведется къ $[l, l', a](d\varphi - \eta)$, т. е. къ $\eta - d\varphi$, такъ какъ $[l, l', a] = -1$. Вышеупомянутое условіе приведется, слѣдовательно, къ $\eta = d\varphi$ или

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau}\ ^{*}). \tag{8}$$

Геометрическое значеніе этого условія можно обнаружить, введя въ разсмотрѣніе величину вращенія ω разсматриваемой нормали относительно главной. Согласно опредѣленію этой величины, данному въ § 637, мы имѣемъ

$$\omega\sin\varphi = \Sigma\,\lambda\,dl = (d\varphi - \eta)\,\Sigma\,\lambda\,l' = (\eta - d\varphi)\sin\varphi,$$

откуда $\omega = \eta - d\varphi$, что очевидно само по себѣ. Поэтому наше условіе требуетъ, чтобы ω было равно нулю, а это значитъ, что

---

*) Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что φ не равно постоянному, если кривая не плоская, а потому ни главныя нормали, ни бинормали не могутъ образовать развертывающейся поверхности.

въ то время, какъ нѣкоторая точка движется по кривой двоякой кривизны, развертывающіяся поверхности описываетъ всякая ея нормаль, двигающаяся въ нормальной плоскости (въ которой фиксирована главная нормаль) такъ, что въ пространствѣ она передвигается перпендикулярно къ этой плоскости.

673. Въ заключеніе докажемъ еще двѣ теоремы, непосредственно вытекающія изъ предыдущаго:

a) Изъ послѣдняго замѣчанія слѣдуетъ, что движеніе образующей происходитъ такимъ образомъ, что соприкасающаяся плоскость къ ребру возврата (Q) всегда остается перпендикулярною къ нормальной плоскости кривой (M) *). Иными словами, нормальная плоскость къ эвольвентѣ совпадаетъ со спрямляющею плоскостью эволюты.

b) Найдя одну функцію φ, удовлетворяющую условію (8), мы получимъ безчисленное множество другихъ, удовлетворяющихъ тому же условію, прибавивъ къ найденной функціи произвольную постоянную. Отсюда вытекаетъ, что образующія развертывающейся поверхности не перестаютъ быть таковыми, если повернемъ ихъ всѣ на произвольный уголъ около одной изъ ихъ ортогональныхъ траекторій. Ребра возврата получаемыхъ такимъ образомъ развертывающихся поверхностей представляютъ безчисленное множество эволютъ данныхъ кривыхъ.

[**Примѣчаніе.** Аналитическую теорію эволютъ и эвольвентъ (развертывающихъ и развертокъ) читатель можетъ найти у Гурса „Курсъ математическаго анализа“, стр. 520, § 231, т. I.].

Огибающія поверхности.

674. Разсмотримъ семейство поверхностей, изображаемое уравненіемъ $f(x, y, z, a) = 0$, гдѣ a независимый перемѣнный параметръ. Любая изъ поверхностей семейства, соотвѣтствующая данному значенію a, вообще говоря, пересѣкается съ другою, соотвѣтствующею значенію $a + h$ того же параметра, по нѣкоторой кривой. Эта кривая, съ приближеніемъ h къ нулю, можетъ стремиться къ нѣкоторому предѣльному положенію на первой поверхности. Въ этомъ предѣльномъ положеніи она называется характеристикою данной поверхности разсматриваемаго семейства. Общее мѣсто характеристикъ всѣхъ поверхностей даннаго семейства называется огибающею

*) Потому что соприкасающуюся плоскость къ кривой (Q) въ точкѣ Q можно разсматривать, какъ плоскость, проходящую черезъ образующую QM и безконечно близкую точку Q'.

(Enveloppe) всѣхъ этихъ поверхностей. Можетъ также случиться, что поверхности (a) и $(a+h)$ не пересѣкаются, какъ бы мало h ни было, но на поверхности (a) могутъ быть точки наибольшаго сближенія съ поверхностью $(a+h)$ (ср. съ § 619), т. е. точки, которыя можно разсматривать, пренебрегая безконечно малыми порядка, высшаго чѣмъ h, какъ точки, общія обѣимъ поверхностямъ. Въ этихъ случаѣ характеристика поверхности (a) есть предѣльное положеніе общаго мѣста этихъ точекъ при безконечно маломъ h. Съ помощью соображеній, аналогичныхъ тѣмъ, которыми мы пользовались при разысканіи огибающей плоскихъ кривыхъ, тотчасъ доказывается, что уравненіе огибающей поверхности получается черезъ исключеніе параметра a изъ уравненій $f=0$ и $\frac{\partial f}{\partial a}=0$. Легко также доказать, что всякая поверхность семейства касается огибающей вдоль всей своей характеристики. Для этого стоитъ только замѣтить, что уравненіе огибающей есть не что иное, какъ уравненіе самого семейства поверхностей $f(x, y, z, a)=0$, если въ немъ a разсматривается, какъ функція отъ координатъ, удовлетворяющая условію $\frac{\partial f}{\partial a}=0$. Первыя производныя лѣвой части уравненія огибающей будутъ, слѣдовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x};\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}$$

и приводятся къ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, какъ и въ случаѣ a постояннаго *).

675. Примѣры. Замѣчательный примѣръ огибающей даетъ семейство плоскостей. Характеристика плоскости, очевидно, прямая линія, слѣдовательно, огибающая будетъ линейчатою поверхностью, а на основаніи послѣдней теоремы, она касается каждой изъ плоскостей семейства вдоль всей образующей, а потому она будетъ развертывающеюся поверхностью. Обратно, на основаніи сказаннаго въ § 669, всякая развертывающаяся поверхность есть огибающая соприкасающихся плоскостей нѣкоторой кривой (ребра возврата). Исходя изъ этого, легко вывести важный аналитическій характеристическій признакъ развертывающихся поверхностей. Уравненіе касательной плоскости къ любой поверхности есть

$$Z=pX+qY+(z-px-qy).$$

Чтобы поверхность была развертывающеюся, необходимо и достаточно, чтобы p, q, $z-px-qy$ были функціями одного независимаго параметра. А для этого необходимо и достаточно (§ 578), чтобы Якобіева матрисса этихъ трехъ функцій имѣла всѣ миноры второго порядка, равные нулю. Такъ какъ

$$\frac{\partial p}{\partial x}=r,\quad \frac{\partial q}{\partial x}=s,\quad \frac{\partial}{\partial x}(z-px-qy)=-(rx+sy),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=s,\quad \frac{\partial q}{\partial y}=t,\quad \frac{\partial}{\partial y}(z-px-qy)=-(sx+ty),$$

*) Откуда и слѣдуетъ, что въ любой точкѣ характеристики касательныя плоскости къ огибающей и огибаемой совпадаютъ.

то эта матрисса приводится къ

$$\begin{vmatrix} r & s & rx+sy \\ s & t & sx+ty \end{vmatrix} \text{ и эквивалентна къ } \begin{vmatrix} r & s & 0 \\ s & t & 0 \end{vmatrix}.$$

Чтобы всѣ миноры второго порядка были нулями, необходимо и достаточно, чтобы $rt - s^2$ было равно 0. Итакъ, развертывающіяся поверхности характеризуются тѣмъ, что для нихъ $rt - s^2 = 0$. Иными словами, это единственныя поверхности, всѣ точки которыхъ параболическія (§ 663). Замѣтимъ, что для косыхъ линейчатыхъ поверхностей всегда $rt - s^2 < 0$, потому что черезъ каждую точку ихъ всегда проходитъ вещественная асимптотическая линія, а именно, прямолинейная образующая. На развертывающейся поверхности оба семейства асимптотическихъ линій совпадаютъ въ одно — семейство прямолинейныхъ образующихъ; но, кромѣ того, существуетъ еще одна изолированная асимптотическая линія — ребро возврата. Это не противорѣчитъ ранѣе сказанному, такъ какъ легко показать (см. § 693, b), что на ребрѣ возврата r, s и t обращаются въ безконечность.

676. Положимъ теперь, что разсматривается дважды безконечная система поверхностей, изображаемыхъ уравненіемъ $f(x, y, z, a, b) = 0$ для всевозможныхъ паръ значеній независимыхъ параметровъ a и b. Фиксируемъ одну изъ этихъ поверхностей S, соотвѣтствующую данной парѣ значеній (a_0, b_0) параметровъ, и, выбравъ произвольно нѣкоторую функцію φ, положимъ

$$b = b_0 + \varphi(a) - \varphi(a_0).$$

Такимъ образомъ разсматриваемый случай сведется къ разсмотрѣнному въ предыдущемъ §, и на поверхности S получится нѣкоторая характеристика, сооотвѣтствующая выбранной функціи φ. Безчисленному множеству функцій φ соотвѣтствуетъ безчисленное множество характеристикъ; всѣ эти характеристики проходятъ черезъ нѣкоторыя опредѣленныя точки на поверхности S. Дѣйствительно, характеристика, соотвѣтствующая нѣкоторой функціи φ, удовлетворяетъ условію

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a) = 0,$$

и на ней лежатъ тѣ точки S, для которыхъ $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$. Эти точки, какъ видимъ, не зависятъ отъ выбора функцій φ. Въ нашемъ случаѣ, въ противоположность первому, на поверхности S не существуетъ линіи, образующей, при переходѣ отъ S къ другой поверхности системы, огибающую, и лишь отдѣльныя точки, общее мѣсто которыхъ при томъ же переходѣ и будетъ огибающею поверхностью данной системы *). Уравненіе этой огибающей получается черезъ исключеніе параметровъ a и b изъ уравненій

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

*) Ее называютъ огибающею второго рода.

И въ этомъ случаѣ огибающая касается всѣхъ огибаемыхъ. Въ частности каждую поверхность можно разсматривать, какъ огибающую ея касательныхъ плоскостей.

677. Иногда система поверхностей задается уравненіемъ $f(x, y, z, a, b, c, \ldots) = 0$, при чемъ между n параметрами $a, b, c, \ldots$ существуетъ ν соотношеній, гдѣ $\nu = n-1$ или $n-2$, смотря по тому, имѣемъ ли дѣло съ семействомъ поверхностей, зависящихъ отъ одного произвольнаго параметра, или съ системою, зависящею отъ двухъ такихъ параметровъ, или, какъ говорятъ, съ простою или двойною безконечностью поверхностей. Чтобы и здѣсь получить уравненіе огибающей, надо выразить, что въ матриссѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} & \cdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial c} & \cdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial c} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

всѣ миноры порядка $\nu+1$ равны нулю. Такимъ образомъ получаются $n-\nu$ уравненій и искомое уравненіе получится черезъ исключеніе n параметровъ изъ уравненія поверхности, данныхъ ν соотношеній между параметрами, и $n-\nu$ полученныхъ уравненій. Можетъ также случиться, что въ уравненіе системы или семейства поверхностей параметры и координаты входятъ неявно, т. е. что уравненіе это имѣетъ видъ $f(u, v, w, \ldots) = 0$, гдѣ $u, v, w, \ldots$ функціи отъ x, y, z и параметровъ; но въ этомъ случаѣ ясно, что частныя производныя по параметру a получатся по формуламъ

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial a} + \cdots \text{ и т. д.}$$

678. Упражненія. а) Найдемъ огибающую всѣхъ поверхностей, гомотетическихъ съ данною поверхностью $f(x, y, z) = 0$ относительно нѣкотораго центра Q. Для этого сперва замѣтимъ, что если ξ, η, ζ будутъ координаты точки Q, и положимъ

$$F(t) = f(\xi + t(x-\xi),\ \eta + t(y-\eta),\ \zeta + t(z-\zeta)),$$

то уравненіе $F(t) = 0$ при всякомъ t изображаетъ одну изъ разсматриваемыхъ поверхностей, и въ частности при $t=1$ данную поверхность. Такъ какъ уравненіе искомой огибающей получается черезъ исключеніе t изъ уравненій $F(t) = 0$ и $F'(t) = 0$, то оказывается, что (§ 661) эта огибающая будетъ конусъ, описанный изъ данной точки около данной поверхности. Если данная поверхность будетъ, напримѣръ, поверхность эллипсоида, отнесенная къ его осямъ, то, полагая

$$f = -1 + \sum\frac{x^2}{a^2}, \quad f_0 = -1 + \sum\frac{\xi^2}{a^2}, \quad f_1 = -1 + \sum\frac{\xi x}{a^2},$$

находимъ $F(t) = (f + f_0 - 2f_1)t^2 - 2(f_0 - f_1)t + f_0$; достаточно приравнять нулю дискриминантъ $ff_0 - f_1^2$ этого уравненія, чтобы получить уравненіе описаннаго около эллипсоида конуса

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = \left(\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1\right)^2.$$

b) Каналомъ называютъ поверхность, огибающую семейство шаровъ одного и того же радіуса, центры которыхъ находятся на данной кривой. Взявъ уравненіе поверхности шара

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = R^2,$$

въ которыхъ координаты центра x, y, z можно разсматривать, какъ функціи одного параметра, а именно длины дуги линіи центровъ, и, дифференцируя его по этому параметру, получимъ уравненіе

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0, \tag{9}$$

и видимъ, что характеристика лежитъ въ нормальной плоскости линіи центровъ. Отсюда слѣдуетъ, что каналъ можно разсматривать, какъ поверхность, образуемую окружностью постояннаго круга, двигающагося въ каждое мгновеніе по направленію, перпендикулярному къ плоскости этого круга. Уравненіе канала получимъ, исключая параметръ s изъ уравненія шара и уравненія (9), въ которыхъ x, y, z, a, b, c — функціи отъ s. Аналогичнымъ образомъ поступаютъ при разысканіи огибающей любого семейства шаровъ (т. е. системы шаровъ, въ уравненіи которыхъ всѣ коэффиціенты функціи одного независимаго параметра). Въ правой части уравненія (9) надо будетъ поставить вмѣсто нуля выраженіе $-R\frac{dR}{ds}$. Въ общемъ случаѣ характеристика уже не будетъ большимъ кругомъ шара и тогда только будетъ вещественною, когда абсолютная величина $\frac{dR}{ds}$ не > 1 *). Иными словами, не существуетъ вещественной огибающей, когда увеличеніе или уменьшеніе объема шара идетъ быстрѣе, чѣмъ передвиженіе его центра. Въ частности, когда $R = s + \text{const.}$, $\left(\frac{dR}{ds} = 1\right)$, огибающая обращается въ кривую линію — эвольвенту линіи центровъ (§ 671), и огибаемые шары будутъ аналогичны соприкасающимся кругамъ плоской кривой (срав. § 626, f). Напротивъ того, соприкасающіеся шары кривой двоякой кривизны всегда имѣютъ огибающую поверхность, а именно — общее мѣсто соприкасающихся круговъ данной кривой.

c) Предложимъ себѣ найти огибающую (2-го рода) плоскостей $\alpha x + \beta y + \gamma z = l$, предполагая, что разстояніе l отъ начала координатъ связано съ косинусами α, β, γ соотношеніемъ

$$\frac{\alpha^2}{l^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{l^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{l^2 - c^2} = 0.$$

Здѣсь α, β, γ, l — параметры, удовлетворяющіе соотношенію (10) и слѣдую-

*) Изслѣдованіе здѣсь аналогично изслѣдованію въ § 626, f.

щему: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Поэтому намъ нужно (§ 677) разсмотрѣть матриссу

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ x & y & z & 1 \\ \dfrac{\alpha}{l^2-a^2} & \dfrac{\beta}{l^2-b^2} & \dfrac{\gamma}{l^2-c^2} & \sigma \end{vmatrix},$$

гдѣ для сокращенія положено

$$\sigma=\frac{l\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}+\frac{l\beta^2}{(l^2-b^2)^2}+\frac{l\gamma^2}{(l^2-c^2)^2}.$$

При помощи извѣстныхъ преобразованій эту матриссу можно представить въ видѣ

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x}{\alpha}\sigma-\dfrac{1}{l^2-a^2} & \dfrac{y}{\beta}\sigma-\dfrac{1}{l^2-b^2} & \dfrac{z}{\gamma}\sigma-\dfrac{1}{l^2-c^2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{l^2-a^2} & \dfrac{1}{l^2-b^2} & \dfrac{1}{l^2-c^2} & \sigma \end{vmatrix}.$$

Для того, чтобы всѣ ея миноры 3-го порядка обратились въ нуль, мы должны имѣть

$$\frac{x}{\alpha}\sigma-\frac{1}{l^2-a^2}=\frac{y}{\beta}\sigma-\frac{1}{l^2-b^2}=\frac{z}{\gamma}\sigma-\frac{1}{l^2-c^2}.$$

Общую величину этихъ трехъ чиселъ получимъ, умножая первое на α^2, второе на β^2, третье на γ^2, и складывая. Принимая во вниманіе равенство (10) получимъ такимъ образомъ, что искомая величина есть $l\sigma$, такъ что

$$x=l\alpha+\frac{1}{l^2-a^2}\cdot\frac{\alpha}{\sigma},\quad y=l\beta+\frac{1}{l^2-b^2}\cdot\frac{\beta}{\sigma},\quad z=l\gamma+\frac{1}{l^2-c^2}\cdot\frac{\gamma}{\sigma}.$$

Возвышеніемъ въ квадратъ и сложеніемъ найдемъ еще

$$x^2+y^2+z^2=l^2+\frac{2l}{\sigma}\sum\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum\frac{\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}=l^2+\frac{1}{l\sigma}.$$

Поэтому можно написать

$$x=\frac{l\alpha}{l^2-a^2}\left(l^2-a^2+\frac{1}{l\sigma}\right)=\frac{l\alpha}{l^2-a^2}\ (x^2+y^2+z^2-a^2)\ \text{ и т. д.},$$

слѣдовательно,

$$\frac{x}{x^2+y^2+z^2-a^2}=\frac{l\alpha}{l^2-a^2},\quad \frac{y}{x^2+y^2+z^2-b^2}=\frac{l\beta}{l^2-b^2},$$
$$\frac{z}{x^2+y^2+z^2-c^2}=\frac{l\gamma}{l^2-c^2}.$$

Умножая еще на x, y, z и складывая, находимъ уравненіе

$$\sum\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}=\sum\frac{l\alpha x}{l^2-a^2}=l^2\sum\frac{\alpha^2}{l^2-a^2}+\frac{1}{\sigma}\sum\frac{l\alpha^2}{(l^2-a^2)^2}=1,$$

которое легко приводится къ болѣе простому виду

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0.$$

Искомая огибающая есть, слѣдовательно, поверхность волны (§ 384, d).

679 *). Мы получимъ полезное приложеніе изложенной выше теоріи, тѣмъ болѣе важное, что въ немъ заключается дополненіе къ теоріи кривыхъ, занявшись разысканіемъ поверхностей, огибающихъ грани основного тріэдра какой нибудь данной кривой. Возьмемъ три уравненія

$$\Sigma\alpha(X-x)=0,\quad \Sigma\alpha(X-x)=0,\quad \Sigma\lambda(X-x)=0,$$

изображающія соотвѣтственно плоскости: нормальную, соприкасающуюся и спрямляющую. Величины x, y, ..., μ, ν, въ нихъ входящія, будутъ функціи дуги s, удовлетворяющія извѣстнымъ соотношеніямъ (§ 638)

$$\frac{dx}{ds}=a,\quad \frac{da}{ds}=\frac{\lambda}{\varrho},\quad \frac{da}{ds}=\frac{\lambda}{\tau},\quad \frac{d\lambda}{ds}=-\frac{a}{\varrho}-\frac{\alpha}{\tau}\ \text{и т. д.}$$

Дифференцируя по s уравненія разсматриваемыхъ плоскостей, получимъ соотвѣтственно

$$\Sigma\lambda(X-x)=\varrho,\quad \Sigma\lambda(X-x)=0,\quad \Sigma l'(X-x)=0, \tag{11}$$

гдѣ въ послѣднемъ уравненіи положено

$$l'=a\sin\varphi+\alpha\cos\varphi,\quad m'=b\sin\varphi+\beta\cos\varphi,\quad n'=c\sin\varphi+\gamma\cos\varphi, \tag{12}$$

при чемъ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\tau}{\varrho}$. Разсматривая эти уравненія, приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

а) Огибающая соприкасающихся плоскостей, какъ и слѣдовало ожидать, есть такъ называемая развертывающаяся касательныхъ, т. е. такая развертывающаяся поверхность, ребро возврата которой есть данная кривая. Дѣйствительно, уравненія образующей (характеристики) въ данномъ случаѣ будутъ:

$$\Sigma\alpha(X-x)=0,\quad \Sigma\lambda(X-x)=0.$$

Ихъ можно написать въ видѣ

$$\frac{X-x}{\beta\nu-\mu\gamma}=\frac{Y-y}{\gamma\lambda-\nu\alpha}=\frac{Z-z}{\alpha\mu-\lambda\beta},$$

или, по формуламъ

$$a=\beta\nu-\mu\gamma,\quad b=\gamma\lambda-\nu\alpha,\quad c=\alpha\mu-\lambda\beta,$$

---

*) Этотъ § изложенъ здѣсь подробнѣе, чѣмъ въ оригиналѣ.

вытекающимъ изъ формулы (6) § 634,

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}.$$

Слѣдовательно, образующія будутъ касательными къ данной кривой, что и надо было показать

b) Огибающая нормальныхъ плоскостей называется полярною поверхностью (Polardeveloppable); ея образующія суть оси соприкасающихся круговъ, т. е. прямыя, проходящія черезъ центръ кривизны *) перпендикулярно къ соприкасающейся плоскости; ихъ называютъ также полярными прямыми. Дѣйствительно, въ данномъ случаѣ, уравненія образующей будутъ

$$\Sigma a(X-x)=0, \quad \Sigma\lambda(X-x)=\varrho$$

и, очевидно, изображаютъ прямую, перпендикулярную къ касательной (a, b, c) и главной нормали (λ, μ, ν), т. е. къ соприкасающейся плоскости; кромѣ того, эта прямая проходитъ черезъ точку $x_1=x+\lambda\varrho$, $y_1=y+\mu\varrho$, $z_1=z+\nu\varrho$, т. е. черезъ центръ кривизны данной кривой въ точкѣ (x, y, z), такъ какъ оба уравненія ея удовлетворяются значеніями $X=x_1$, $Y=y_1$, $Z=z_1$. Мы видѣли (§ 673), что существуетъ безчисленное множество нормалей къ кривой, образующихъ развертывающіяся поверхности, у которыхъ ребрами возврата будутъ эволюты данной кривой. Нетрудно видѣть, что всякая такая нормаль можетъ касаться ребра возврата образуемой ею поверхности только на полярной прямой, а отсюда тотчасъ слѣдуетъ, что полярная поверхность будетъ также общимъ мѣстомъ всѣхъ эволютъ данной кривой. Дѣйствительно, точку касанія нормали къ эвольвентѣ можно разсматривать (пренебрегая безконечно малыми высшаго порядка), какъ точку пересѣченія двухъ безконечно близкихъ нормалей, очевидно, лежащую на прямой, по которой пересѣкаются двѣ безконечно близкія нормальныя плоскости, а предѣльное положеніе этой прямой и есть полярная прямая. Впрочемъ, это заключеніе можно провѣрить и вычисленіемъ.

[**Примѣчаніе.** Пусть $M(x, y, z)$ есть данная точка на данной кривой, MM' нормаль, образующая развертывающуюся поверхность и составляющая уголъ φ съ главною нормалью Mn, точка $M'(\xi, \eta, \zeta)$ точка касанія этой нормали съ эволютою и $M'P$— перпендикуляръ къ Mn, проектирующій M' на главную нормаль. Ясно, что $M'P$ параллельна бинормали Mb, потому что лежитъ въ нормальной плоскости и перпендикулярна главной нормали. Надо показать, что $M'P$ есть полярная прямая, т. е., что P—

*) т. е. черезъ центръ соприкасающагося круга, представляющаго, какъ извѣстно (§ 650), пересѣченіе соприкасающагося шара съ соприкасающеюся плоскостью.

центръ кривизны, т. е., что отрѣзокъ $MP = \varrho$*). Такъ какъ MM' есть касательная къ эволютѣ, то

$$\frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{d\eta}{\eta - y} = \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

или

$$\text{(I)} \qquad d\xi = k(\xi - x), \quad d\eta = k(\eta - y), \quad d\zeta = k(\zeta - z).$$

Съ другой стороны, проектируя $MM'P$ на координатныя оси, найдемъ

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \xi &= x + h\lambda + h \operatorname{tg}\varphi\, \alpha \\ \eta &= y + h\mu + h \operatorname{tg}\varphi\, \beta \\ \zeta &= z + h\nu + h \operatorname{tg}\varphi\, \gamma \end{aligned}$$

Дифференцируя эти равенства, пользуясь формулами Френе (§ 638, (11)), и подставляя въ формулы (I), получимъ

$$\alpha\left(1 - \frac{h}{\varrho}\right) ds + \lambda\left(dh + \frac{h \operatorname{tg}\varphi}{\tau}\, ds - kh\right) + \alpha\left(d(h \operatorname{tg}\varphi) - \frac{h}{\tau}\, ds - kh \operatorname{tg}\varphi\right) = 0$$

и два подобныхъ же уравненія, получаемыхъ отсюда замѣною α, λ, α на b, μ, β и c, ν, γ. Такъ какъ опредѣлитель этой системы уравненій

$$\begin{vmatrix} \alpha & \lambda & \alpha \\ b & \mu & \beta \\ c & \nu & \gamma \end{vmatrix}$$

по условію (6) § 634 не равенъ нулю, то изъ этой системы получаемъ

$$1 - \frac{h}{\varrho} = 0, \quad dh + \frac{h \operatorname{tg}\varphi}{\tau}\, ds - kh = 0$$

$$d(h \operatorname{tg}\varphi) - \frac{h}{\tau}\, ds - kh \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Первое уравненіе даетъ $h = \varrho$, что и требовалось показать. Исключая k изъ другихъ двухъ, легко найдемъ $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau}$ — извѣстный уже раньше результатъ.]

Пользуясь замѣчаніемъ, сдѣланнымъ выше (§ 673, а), можемъ еще утверждать, что эволюты данной кривой будутъ геодезическими линіями полярной поверхности. Дѣйствительно, нормальная плоскость эвольвенты (данной кривой) совпадаетъ съ спрямляющею плоскостью эволюты, слѣдовательно, бинормаль послѣдней лежитъ въ нормальной плоскости данной кривой, а потому главная нормаль эволюты, перпендикулярная къ MM', перпендикулярна къ этой плоскости, т. е. къ плоскости, касательной къ полярной поверхности.

*) См. Гурса (русскій переводъ, стр. 521).

Иными словами, главная нормаль эволюты совпадаетъ съ нормалью къ полярной поверхности, что и требовалось показать. Составимъ, наконецъ, уравненія ребра возврата полярной поверхности. Для этого, какъ извѣстно, надо къ уравненіямъ образующей присоединить еще третье уравненіе, получаемое дифференцированіемъ второго. Въ этомъ состоитъ общій способъ вывода уравненій ребра возврата, вытекающій изъ самаго опредѣленія его, какъ кривой, къ которой всѣ образующія будутъ касательными. Мы получимъ, такимъ образомъ, уравненія

$$\Sigma a(X-x)=0, \quad \Sigma\lambda(X-x)=\varrho, \quad \Sigma\alpha(X-x)=-\tau\frac{d\varrho}{ds},$$

которыя даютъ для X, Y, Z значенія (ξ, η, ζ) центра соприкасающагося шара (§ 650). Итакъ, **ребро возврата полярной поверхности есть общее мѣсто центровъ соприкасающихся шаровъ.**

c) Разсмотримъ, наконецъ, огибающую спрямляющихъ плоскостей. Данная кривая, очевидно, лежитъ на этой поверхности, потому что значенія $X=x$, $Y=y$, $Z=z$ удовлетворяютъ уравненіямъ образующихъ $\Sigma\lambda(X-x)=0$, $\Sigma l'(X-x)=0$. На этой поверхности данная кривая есть, очевидно, **геодезическая линія**, потому что ея главная нормаль перпендикулярна къ спрямляющей плоскости кривой, т. е. къ касательной плоскости разсматриваемой поверхности. Данная кривая пересѣкаетъ образующія подъ угломъ, вообще говоря, перемѣннымъ, но зависящимъ лишь отъ отношенія двухъ кривизнъ $\frac{\tau}{\varrho}$, которымъ опредѣляется уголъ φ. Если хотимъ опредѣлить ребро возврата этой огибающей поверхности, то можемъ это сдѣлать, опредѣливъ алгебраическую величину отрѣзка t, отсѣкаемаго данною кривою на образующей, считая этотъ отрѣзокъ отъ точки на ребрѣ возврата. Для этого замѣтимъ сперва, что изъ уравненій образующей тотчасъ получаемъ направляющіе косинусы ея, представивъ ея уравненія въ видѣ

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n},$$

и получаемъ

$$l=a\cos\varphi-\alpha\sin\varphi, \quad m=b\cos\varphi-\beta\sin\varphi, \quad n=c\cos\varphi-\gamma\sin\varphi.$$

Уравненія ребра возврата будутъ

$$\text{(III)} \quad \Sigma\lambda(X-x)=0, \quad \Sigma l'(X-x)=0, \quad \Sigma dl'(X-x)-\Sigma al'=0.$$

Изъ выраженій l', m', n' имѣемъ

$$dl'=ld\varphi+\sin\varphi\,da+\cos\varphi\,d\alpha=ld\varphi+\lambda\left[\frac{\sin\varphi}{\varrho}+\frac{\cos\varphi}{\tau}\right]ds.$$

$$dm' = m\,d\varphi + \mu\left[\frac{\sin\varphi}{\varrho} + \frac{\cos\varphi}{\tau}\right]ds, \quad dn' = n\,d\varphi + \nu\left[\frac{\sin\varphi}{\varrho} + \frac{\cos\varphi}{\tau}\right]ds,$$

а

$$\sum a l' = \sin\varphi.$$

Поэтому послѣднее изъ уравненій (III) даетъ

$$\frac{d\varphi}{ds}\sum l(X - x) = \sin\varphi,$$

или

$$t \cdot d\varphi = \sin\varphi\, ds.$$

Такъ какъ $al + bm + cn = \cos\varphi$, то $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\tau}{\varrho}$ и будетъ уголъ, подъ которымъ данная кривая пересѣкаетъ образующія. Изъ сказаннаго, между прочимъ, ясно, что только для цилиндрическихъ винтовыхъ линій (§ 655, c) огибающая спрямляющихъ плоскостей есть цилиндрическая поверхность. Дѣйствительно, для этихъ линій φ — постоянная, не равная нулю, l, m, n — также постоянныя, какъ было показано въ § 655, c, и образующія параллельны между собою, а ребро возврата будетъ точка въ безконечности. Обратно, чтобы $t = \infty$, необходимо, чтобы $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, т. е. $\varphi = \text{const}$.

Кривизна.

680. Теорема Менье (Meusnier). Приступимъ теперь къ изученію кривизны линій на данной поверхности. Разсмотримъ кривую, проходящую черезъ данную точку M на поверхности; пусть (a, b, c) будутъ направляющіе косинусы касательной къ этой кривой, и φ — уголъ, образуемый ея главною нормалью съ нормалью къ поверхности. Возьмемъ точку M' на той же кривой, безконечно близкую къ M, и пусть P есть проекція M' на касательную плоскость въ точкѣ M, а Q — проекція M' на касательную прямую. Пренебрегая безконечно малыми выше 2-го порядка, мы можемъ разсматривать M', какъ лежащую въ соприкасающейся плоскости (§ 645), такъ что $M'Q$ будетъ параллельна главной нормали (рис. 85), а $M'P$, очевидно, параллельна нормали къ поверхности въ точкѣ M. Слѣдовательно, въ треугольникѣ $M'PQ$ уголъ при M' равенъ φ, сторона $M'P$ имѣетъ длину (§ 663)

$$h = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{2\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

а сторона $M'Q$ равна $\frac{d\sigma^2}{2\varrho}$ (см. § 643, выраженіе w), если $d\sigma$ обо-

значаетъ дифференціалъ, эквивалентный дугѣ MM'. Подставляя эти величины въ соотношеніе $M'P = M'Q \cdot \cos\varphi$, получаемъ

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = \frac{r a^2 + 2 s a b + t b^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{13}$$

Разсмотримъ теперь всѣ кривыя на поверхности, имѣющія общую касательную въ точкѣ M, и между ними отличимъ ту, которая лежитъ въ плоскости, опредѣляемой общею касательною (a, b, c)

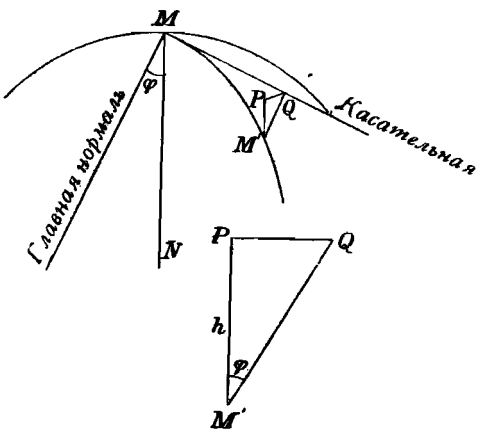


Рис. 85.

и нормалью къ поверхности. Эта кривая называется нормальнымъ сѣченіемъ поверхности въ данной точкѣ M. Для всѣхъ этихъ кривыхъ правая часть равенства (13) имѣетъ одно и то же значеніе, поэтому то же самое можно сказать и о лѣвой. Слѣдовательно, если ϱ_0 — радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія ($\varphi = 0$), то будемъ имѣть

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0}, \text{ т. е. } \varrho = \varrho_0 \cos\varphi,$$

предполагая ϱ_0 конечнымъ. Итакъ, центръ кривизны какой угодно кривой на поверхности въ данной точкѣ M есть проекція на соприкасающуюся плоскость этой кривой центра кривизны нормальнаго сѣченія поверхности, касающагося данной кривой въ точкѣ M.

681. Примѣры. а) На шарѣ нормальныя сѣченія большіе круги и общій ихъ центръ кривизны есть центръ шара. Отсюда, на основаніи теоремы Менье, слѣдуетъ, что центръ кривизны всякой сферической кривой въ данной точкѣ есть проекція центра шара на соприкасающуюся къ данной кривой плоскость въ данной точкѣ. Это слѣдуетъ также изъ того (§ 650), что для всякой кривой соприкасающійся кругъ есть пересѣченіе соприкасающагося шара съ соприкасающейся плоскостью.

b) На поверхности вращенія параллельные круги будутъ, вообще, наклонными (а не нормальными) сѣченіями. Центры ихъ кривизны лежатъ на оси вращенія, а такъ какъ ихъ плоскости перпендикулярны къ этой оси, то и центры кривизны нормальныхъ сѣченій, касающихся параллелей, будутъ также лежать на оси. Замѣчая, что сѣченіе поверхности плоскостью, проведенною черезъ данную на поверхности точку M перпендикулярно къ касательной къ меридіану въ точкѣ M, будетъ, очевидно, нормальнымъ сѣченіемъ, касающимся параллели въ точкѣ M, заключаемъ, что центръ кривизны плоскаго сѣченія поверхности вращенія, проведеннаго перпендикулярно къ меридіану черезъ точку M, соотвѣтствующій этой точкѣ, лежитъ на оси вращенія.

682. Для асимптотической кривой, равно какъ и для всякой кривой, касающейся ея въ точкѣ M, правая часть равенства (13) равна нулю, а потому и $\frac{\cos\varphi}{\varrho}=0$. Это соотношеніе удовлетворяется въ каждой точкѣ асимптотической линіи, такъ какъ въ ней $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (главная нормаль кривой перпендикулярна нормали къ поверхности), а $\frac{1}{\varrho}$ вообще не равно нулю. Напротивъ того, для всякой кривой, касающейся въ точкѣ M съ соприкасающеюся прямою, но имѣющей соприкасающуюся плоскость, не совпадающую съ касательною плоскостью къ поверхности, φ, вообще говоря, не равно нулю, а потому $\frac{1}{\varrho}$ должно быть равно нулю, какъ мы это уже видѣли въ § 613, на основаніи другихъ соображеній. Такъ, напримѣръ, всякое сѣченіе поверхности плоскостью, проходящею черезъ одну лишь изъ соприкасающихся прямыхъ въ точкѣ M, будетъ имѣть въ этой точкѣ кривизну, равную нулю. Если же разсмотримъ, наоборотъ, сѣченіе поверхности касательною плоскостью въ точкѣ M (гиперболической), то окажется, что каждая вѣтвь этого сѣченія будетъ имѣть въ точкѣ M кривизну, равную $\frac{2}{3}$ кривизны асимптотической линіи, касающейся разсматриваемой вѣтви въ точкѣ M. Эту интересную теорему Бельтрами [1]) мы докажемъ въ § 704. Мы видимъ изъ сказаннаго, что теорема Менье не примѣнима къ кривымъ, касательнымъ къ соприкасающимся прямымъ, потому ли, что тогда вышеприведенное геометрическое построеніе оказывается не выполнимымъ, или потому, что безчисленное множество кривыхъ, взаимно касающихся и имѣющихъ соприкасающуюся плоскость, совпадающую въ данной точкѣ съ касательною плоскостью къ поверхности, имѣютъ различную кривизну *).

---

[1]) „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1865, стр. 258. См. также „Natürliche Geometrie" E. Cesàro, стр. 223.

*) Теорема Бельтрами даетъ примѣръ такихъ кривыхъ, а именно плоской кривой, по которой поверхность пересѣкается касательною плоскостью въ гиперболической точкѣ M и асимптотической линіи, касающейся этой кривой въ той же точкѣ.

683. Нормальная кривизна и геодезическая кривизна. Величина $\frac{\cos\varphi}{\varrho}$, дающая кривизну нормальнаго сѣченія, касающагося данной кривой въ данной точкѣ, называется нормальною кривизною данной кривой въ данной точкѣ, а величина $\frac{\sin\varphi}{\varrho}$ ея геодезическою кривизною. Ось соприкасающагося круга (полярная прямая) пересѣкаетъ плоскость нормальнаго сѣченія въ нѣкоторой точкѣ C_0 (рис. 86), а касательную плоскость въ нѣкоторой точкѣ C_1. Кривизны, нормальная и геодезическая, очевидно, измѣряются обратными величинами отрѣзковъ MC_0 и MC_1. Точки C_0 и C_1 называются соотвѣтственно центрами, а прямыя MC_0 и MC_1 — радіусами нормальной и геодезической кривизны. Замѣтимъ, что геодезическая кривизна есть не что иное, какъ кривизна проекціи данной кривой на касательную плоскость. Дѣйствительно, по теоремѣ Менье, на цилиндрѣ, проектирующемъ данную кривую на касательной плоскости, кривизна нормальнаго сѣченія, касающагося данной кривой (равнаго проекціи данной кривой на касательную плоскость) равна именно $\frac{\sin\varphi}{\varrho}$, потому что нормаль къ поверхности этого цилиндра перпендикулярна къ образующимъ цилиндра, т. е. къ нормали данной поверхности. Къ понятію о нормальной и геодезической кривизнѣ всего естественнѣе приводитъ изученіе измѣненія направленія касательной. Величина ея вращенія (§ 637) относительно нормали къ поверхности равна

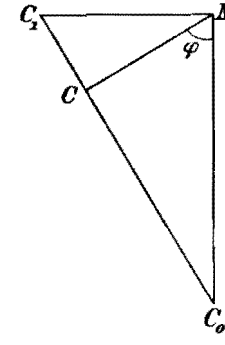


Рис. 86.

$$\omega = \Sigma\mathfrak{L}\,da = \varepsilon\,\Sigma\mathfrak{L}\lambda = \varepsilon\cos\varphi.$$

А величина вращенія касательной относительно перпендикуляра къ ней, лежащаго въ касательной плоскости и опредѣляемаго косинусами $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ будетъ

$$\omega' = \Sigma\mathfrak{L}'\,da = \varepsilon\,\Sigma\mathfrak{L}'\lambda = \varepsilon\sin\varphi.$$

Поэтому измѣненіе направленія касательной въ пространствѣ, т. е. ε, можно разсматривать, какъ равнодѣйствующую вращеній ω и ω', отношенія которыхъ къ ds:

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\varrho}, \quad \frac{\omega'}{ds} = \frac{\sin\varphi}{\varrho},$$

и равны нормальной и геодезической кривизнѣ. Первая, слѣдовательно, служитъ мѣрою болѣе или менѣе сильнаго изгибанія кривой въ сторону отъ поверхности, а вторая — мѣрою ея изгибанія на поверхности. Важно замѣтить, что въ каждой точкѣ геоде-

зической линіи ($\varphi = 0$) геодезическая кривизна равна нулю, а въ каждой точкѣ асимптотической $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ то же самое можно сказать о нормальной кривизнѣ. Иными словами, когда точка движется по геодезической линіи, то можно сказать, что касательная передвигается всегда нормально къ поверхности, а когда точка движется по асимптотической линіи, то касательная движется тангенціально къ поверхности.

684. Кривизна нормальнаго сѣченія выражается формулою

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r a^2 + 2 s a b + t b^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{14}$$

Чтобы получить геометрическое представленіе объ измѣненіи ϱ, когда сѣченіе вращается около точки M, перенесемъ начало координатъ въ точку M и направимъ ось z-овъ по нормали къ поверхности; тогда $p = q = c = 0$. Если положимъ $a = \cos\theta$, а поэтому $b = \sin\theta$, то формула (14) приметъ видъ

$$\frac{1}{\varrho} = r\cos^2\theta + 2 s \cos\theta \sin\theta + t \sin^2\theta. \tag{15}$$

Отложимъ теперь на каждой касательной отъ точки M, отрѣзокъ, равный корню квадратному изъ абсолютной величины соотвѣтствующаго радіуса кривизны. Конецъ такого отрѣзка имѣетъ въ касательной плоскости координаты

$$x = \sqrt{\pm\varrho}\cdot\cos\theta, \qquad y = \sqrt{\pm\varrho}\cdot\sin\theta,$$

которыя, въ силу (15), удовлетворяютъ уравненію

$$r x^2 + 2 s x y + t y^2 = \pm 1.$$

Слѣдовательно (§ 664), въ каждой данной точкѣ, при переходѣ отъ одного нормальнаго сѣченія къ другому, кривизна измѣняется обратно пропорціонально квадрату соотвѣтственнаго діаметра индикатрисы Дюпена. Въ частности, она равна нулю для сѣченій, опредѣляемыхъ соприкасающимися прямыми, и достигаетъ наименьшаго или наибольшаго значенія для сѣченій, соотвѣтствующихъ осямъ индикатрисы. Эти послѣднія сѣченія называются главными; ихъ кривизны $\frac{1}{\varrho_1}$ и $\frac{1}{\varrho_2}$ — главными кривизнами.

685. Теорема Эйлера. Если примемъ за координатныя оси x-овъ и y-овъ оси индикатрисы, то въ уравненіи (15) пропадетъ членъ $\cos\theta\sin\theta$, а такъ какъ при $\theta = 0$ должно быть $\varrho = \varrho_1$, а для $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varrho = \varrho_2$, то будемъ имѣть $\frac{1}{\varrho_1} = r$, $\frac{1}{\varrho_2} = t$ и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho_2}.$$

Въ этомъ состоитъ теорема Эйлера. Если напишемъ предыдущее уравненіе въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ

$$\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_1}=\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\sin^2\theta,\quad \frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho}=\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\cos^2\theta$$

и допустимъ для опредѣленности, что $\frac{1}{\varrho_1}<\frac{1}{\varrho_2}$, то тотчасъ увидимъ, что всегда

$$\frac{1}{\varrho_1}\leqq\frac{1}{\varrho}\leqq\frac{1}{\varrho_2}.$$

Въ эллиптическихъ точкахъ ϱ_1 и ϱ_2 числа одинаковыхъ знаковъ, т. е. главные центры кривизны C_1 и C_2 лежатъ по одну сторону отъ касательной плоскости. А такъ какъ, въ силу вышеупомянутаго ограниченія ϱ всегда должно заключаться между ϱ_1 и ϱ_2, то оказывается, что центры кривизны всѣхъ нормальныхъ сѣченій лежатъ на отрѣзкѣ C_1C_2. Напротивъ того, въ гиперболической точкѣ касательная плоскость отдѣляетъ C_1 отъ C_2, и ϱ можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ. Въ первомъ случаѣ $\varrho\geqq\varrho_2>0$, во второмъ $\varrho\leqq\varrho_1<0$, такъ что центры кривизны всѣхъ нормальныхъ сѣченій лежатъ внѣ отрѣзка C_1C_2.

686. Теоремы Эйлера и Менье показываютъ, что достаточно знать объ главныя кривизны для того, чтобы опредѣлить кривизну въ точкѣ M для любой кривой, проведенной по данной поверхности черезъ эту точку, предполагая, что соприкасающаяся плоскость къ этой кривой не совпадаетъ съ касательною плоскостью къ поверхности въ точкѣ M. Поэтому весьма важно умѣть опредѣлить главные радіусы кривизны въ данной точкѣ на поверхности. На основаніи формулы (14) вопросъ приводится къ нахожденію минимума и максимума трехчлена $ra^2+2sab+tb^2$. При этомъ между перемѣнными a и b существуетъ соотношеніе

$$(1+p^2)a^2+2pqab+(1+q^2)b^2=1, \tag{16}$$

получаемое черезъ исключеніе c изъ $a^2+b^2+c^2=1$ и изъ условія ортогональности $pa+qb-c=0$. Повторяя изложенное уже при болѣе общихъ условіяхъ вычисленіе (§ 384, c), мы видимъ, что надо положить

$$\left\{\begin{aligned} ra+sb&=k[(1+p^2)a+pqb],\\ sa+tb&=k[pqa+(1+q^2)b].\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Исключая k, получаемъ еще одно уравненіе между a и b, которое вмѣстѣ съ (16), и служитъ для опредѣленія направленій осей индикатрисы, а слѣдовательно, и главныхъ сѣченій. Если, наоборотъ, исключимъ a и b, то получимъ уравненіе

$$\begin{vmatrix} r-k(1+p^2) & s-kpq\\ s-kpq & t-k(1+q^2)\end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$(18)\qquad rt-s^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]k+(1+p^2+q^2)k^2=0.$$

Съ другой стороны, умножая первое изъ уравненій (17) на a, второе на b, и складывая получаемъ

$$ra^2+2sab+tb^2=k[(1+p^2)a^2+2pqab+(1+q^2)b^2]=k.$$

Итакъ, число k, раздѣленное на $\sqrt{1+p^2+q^2}$, и будетъ наименьшимъ или наибольшимъ значеніемъ кривизны $\frac{1}{\varrho}$; а такъ какъ корни k_1 и k_2 уравненія (18) связаны соотношеніями

$$k_1+k_2=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{1+p^2+q^2},\qquad k_1k_2=\frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2},$$

то будемъ имѣть

$$(19)\qquad \frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Это и будутъ формулы, служащія для опредѣленія главныхъ кривизнъ. Полагая

$$\mathfrak{L}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \mathfrak{M}=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

съ помощью легкаго вычисленія увидимъ, что формулы (19) можно писать и въ болѣе краткомъ видѣ

$$(20)\qquad H=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y},\qquad K=\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)}$$

если обозначимъ, какъ это принято, черезъ H сумму, а черезъ K произведеніе главныхъ кривизнъ.

687. Остановимся на минуту на формулахъ (20) и замѣтимъ, что въ частныхъ производныхъ, входящихъ въ эти формулы, x и y считаются перемѣнными независимыми. Очевидно, число H, напримѣръ, можно представить также въ одной изъ слѣдующихъ формъ

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z},\qquad \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}.$$

Но въ трехъ различныхъ видахъ выраженія H частныя производныя по одной и той же перемѣнной имѣютъ различныя значенія. Если, напримѣръ, вмѣсто того, чтобы разсматривать z, какъ функцію отъ x и y, хотимъ разсматривать y, какъ функцію отъ x и z, принимая

послѣднія за независимыя, и отличая скобками производныя, взятыя въ этомъ предположеніи, то будемъ имѣть

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}=q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

а поэтому

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}=\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right).$$

Точно такъ же имѣемъ

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)}=q\frac{\partial((\mathfrak{L},\mathfrak{N}))}{\partial((x,z))}.$$

Исключая производныя отъ $\mathfrak{M}$ съ помощью соотношеній

$$p\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+q\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}=\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x},\quad p\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}+q\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}=\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y},$$

найдемъ

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)}=\frac{1}{q}\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{N})}{\partial(x,y)}=\frac{\partial((\mathfrak{L},\mathfrak{N}))}{\partial((x,z))}.$$

688. Средняя кривизна. Понятіемъ о средней кривизнѣ мы обязаны Софи Жерменъ (Sophie Germain). Среднею кривизною называется ариѳметическое среднее $\frac{1}{2}H$ главныхъ кривизнъ. Чтобы оправдать такое названіе, замѣтимъ сперва слѣдующее: если ϱ и ϱ' обозначаютъ радіусы кривизны какихъ нибудь двухъ взаимно перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій, то формула Эйлера дастъ

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\cos^2\theta}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\theta}{\varrho_2},\quad \frac{1}{\varrho'}=\frac{\sin^2\theta}{\varrho_1}+\frac{\cos^2\theta}{\varrho_2},$$

откуда путемъ сложенія получаемъ

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=H.$$

Разсмотримъ теперь $2n$ касательныхъ, равномѣрно распредѣленныхъ вокругъ точки M. Стоитъ только представить себѣ, что всѣ онѣ раздѣлены на n паръ взаимно перпендикулярныхъ касательныхъ, чтобы убѣдиться, что и при возрастаніи n до безконечности, ариѳметическое среднее нормальныхъ кривизнъ всегда остается равнымъ величинѣ $\frac{1}{2}H$ въ точкѣ M.

689. Поверхности съ постоянною среднею кривизною играютъ важную роль въ явленіяхъ капиллярности и были получены опытнымъ путемъ физикомъ Плато (Plateau)[1]). Особенно замѣчательны

[1]) См., напримѣръ, „Cours de Physique" Jamin (3-е изд., томъ I, стр. 225) или 4-ю главу „Leçons sur la capillarité" H. Poincaré. См. также E. Cesàro „Natürliche Geometrie", стр. 233.

поверхности, для которыхъ средняя кривизна равна нулю, т. е. поверхности, у которыхъ въ каждой точкѣ главные радіусы кривизны равны между собою по абсолютной величинѣ и противоположны по знаку. Это свойство равносильно тому, что индикатриса Дюпена приводится къ системѣ двухъ дополнительныхъ равносторонних гиперболъ, что влечетъ за собою нижеслѣдующее характеристическое свойство разсматриваемыхъ поверхностей: асимптотическія линіи въ каждой точкѣ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Аналитически эти поверхности, на основаніи первой изъ формулъ (19), характеризуются слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіемъ

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Ихъ называютъ минимальными поверхностями вслѣдствіе того, что всякая сомкнутая кривая, проведенная по такой поверхности, выдѣляетъ часть поверхности, мѣньшую чѣмъ та, которую та же кривая выдѣлитъ на другой поверхности, проходящей черезъ ту же кривую. Доказательство этого свойства относится къ варіаціонному исчисленію.

690. Примѣры. a) Примѣръ минимальной поверхности мы тотчасъ найдемъ между поверхностями вращенія. Мы очень скоро увидимъ, что на этихъ поверхностяхъ одно изъ главныхъ сѣченій есть меридіанъ, а другое касается параллели въ данной точкѣ M. Главными радіусами кривизны будутъ, слѣдовательно, радіусъ кривизны меридіана и (§ 681, b) отрѣзокъ, отсѣкаемый осью вращенія на нормали къ поверхности, считаемый отъ точки M. Для минимальной поверхности эти радіусы должны быть противоположны по направленію, а потому меридіанъ долженъ быть обращенъ выпуклостью къ оси вращенія. Кромѣ того, онъ долженъ обладать свойствомъ, что его центръ кривизны симметрично расположенъ относительно данной точки съ точкою пересѣченія нормали съ неподвижною прямою. Раньше мы видѣли (§ 595, 1), что такимъ свойствомъ обладаетъ цѣпная линія, а впослѣдствіи мы увидимъ, что другія кривыя этимъ свойствомъ обладать не могутъ. Слѣдовательно, катеноидъ есть единственная минимальная поверхность вращенія.

b) Геликоидъ съ направляющею плоскостью (косой) (§ 655, b) также минимальная поверхность. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ образующія косого геликоида суть главныя нормали круговой винтовой линіи и безчисленнаго множества другихъ винтовыхъ линій, лежащихъ на концентрическихъ цилиндрахъ (§ 658, b), то ясно, что эти винтовыя линіи изображаютъ собою одну изъ системъ асимптотическихъ линій. Другая система изображается, какъ на всякой линейчатой поверхности, самими образующими. Убѣдившись, такимъ образомъ, въ ортогональности двухъ системъ асимптотическихъ линій, мы доказали этимъ самымъ, что косой геликоидъ минимальная поверхность. Обратно, на каждой минимальной линейчатой поверхности одна изъ системъ асимптотическихъ линій изображается ортогональными траекторіями образующихъ, и поэтому эти кривыя имѣютъ главныя нормали, совпадающія съ образующими поверхности. Отсюда слѣдуетъ (§ 658, b), что каждая изъ этихъ кривыхъ имѣетъ главныя нормали, общія съ безконечнымъ множествомъ другихъ кривыхъ, и потому будетъ круговою винтовою линіею. Слѣдовательно, поверхность (образуемая, какъ видимъ, главными нормалями круговой винтовой линіи) есть косой геликоидъ Такимъ образомъ получается теорема, найденная Каталаномъ: Косой геликоидъ есть единственная минимальная линейчатая поверхность.

691. Полная кривизна. Понятіемъ о полной кривизнѣ мы обязаны Гауссу. Полною кривизною называется произведеніе главныхъ кривизнъ

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}. \tag{21}$$

Аналогія между полною кривизною поверхности и кривизною плоскихъ кривыхъ обнаруживается, если возьмемъ уравненіе поверхности въ видѣ $f(x, y, z) = 0$ и выразимъ K черезъ частныя производныя отъ f. А именно, на основаніи извѣстныхъ формулъ (§ 574), находимъ

$$K = -\frac{1}{(\Delta f)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Параболическія точки поверхности (§ 663) оказываются аналогичными точкамъ изгиба плоскихъ кривыхъ; различіе между эллиптическими и гиперболическими точками основывается исключительно на томъ, будетъ ли $K >$ или < 0. Слѣдуетъ упомянуть еще, что Казорати (Casorati) предложилъ еще третью мѣру кривизны поверхности

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}\right) = \frac{1}{2} H^2 - K,$$

которая какъ будто ближе передаетъ обыкновенное понятіе о кривизнѣ. Не слѣдуетъ, однако, придавать слишкомъ большого значенія разсужденіямъ о наиболѣе цѣлесообразномъ выборѣ выраженій для мѣры кривизны. Важно въ концѣ концовъ опредѣленіе главныхъ радіусовъ кривизны ϱ_1 и ϱ_2, или установленіе двухъ независимыхъ одна отъ другой функцій этихъ величинъ; и функціи (19), являющіяся аналитически наиболѣе простымъ и естественнымъ путемъ, встрѣчаются и въ важнѣйшихъ вопросахъ Геометріи и Механики. Допустимъ, напримѣръ, что дана нѣкоторая поверхность, на которую требуется наложить другую, безъ разрывовъ и складокъ, какъ весьма тонкую, гибкую, но не растяжимую ткань. Гауссъ доказалъ [1]) (въ знаменитомъ мемуарѣ „Disquisitiones generales circa superficias curvas“), что необходимое условіе для возможности такого наложенія состоитъ въ слѣдующемъ: въ соотвѣтствующихъ точкахъ двухъ поверхностей (т. е. въ такихъ, которыя при наложеніи должны

[1]) См., напримѣръ, „Calcul différentiel“, Boussinesq (стр. 298).

совпасть) полная кривизна обѣихъ поверхностей должна быть одинакова. Слѣдовательно, полная кривизна поверхности въ каждой ея точкѣ представляетъ нѣчто такое, что остается неизмѣннымъ при деформированіи поверхности помощью одного сгибанія. Изъ теоремы Гаусса слѣдуетъ также, что единственныя поверхности, на которыхъ (какъ на плоскости или на шаровой поверхности) можно произвольную фигуру передвигать съ одного мѣста на другое, не измѣняя ея формы, суть поверхности съ постоянною полною кривизною. Эти поверхности называютъ кратко поверхностями постоянной кривизны. Предыдущее замѣчаніе имѣетъ огромное значеніе въ вопросѣ объ основныхъ аксіомахъ Геометріи.

692. Примѣры. a) Замѣчательные примѣры поверхностей постоянной кривизны даютъ нѣкоторыя поверхности вращенія. На шарѣ радіуса a кривизна вездѣ равна $\frac{1}{a^2}$. Но существуетъ безчисленное множество другихъ поверхностей вращенія, имѣющихъ постоянную (положительную или отрицательную) кривизну [1]). Псевдосфера, т. е. поверхность, образуемая вращеніемъ трактрисы (§ 626, d) около ея асимптоты, имѣетъ въ каждой точкѣ кривизну, равную $-\frac{1}{a^2}$, гдѣ a обозначаетъ постоянную длину отрѣзка касательной между точкою касанія и асимптотою. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что проекція центра кривизны C_1 на ось вращенія совпадаетъ съ точкою пересѣченія T касательной съ осью, между тѣмъ, какъ другой центръ кривизны C_2 лежитъ на самой оси. Но въ прямоугольномъ треугольникѣ TC_1C_2 имѣемъ

$$MC_1 \cdot MC_2 = MT^2, \text{ т. е } \varrho_1\varrho_2 = -a^2.$$

b) Поверхности, которыя могутъ быть наложены на плоскость при помощи одного сгибанія, должны имѣть кривизну, равную нулю, т. е. для каждой точки ихъ должно быть $rt - s^2 = 0$. Эти поверхности суть, слѣдовательно, разсмотрѣнныя выше развертывающіяся поверхности (§ 675). По Казорати единственною поверхностью съ кривизною, равною нулю, была бы плоскость, а круговой цилиндръ имѣлъ бы кривизну, равную половинѣ кривизны поверхности шара того же радіуса. Возвратимся, однако, къ Гауссову опредѣленію кривизны и замѣтимъ, что очень важно, что геодезическія линіи, когда онѣ представляютъ кратчайшій путь между двумя точками на поверхности, остаются геодезическими и послѣ наложенія данной поверхности на другую. Слѣдовательно, при развертываніи поверхности на плоскость геодезическія линіи обращаются въ прямыя. Въ частности, всякая кривая обращается въ прямую линіи при наложеніи ея спрямляющей развертывающейся поверхности (§ 679, c) на плоскость, иными словами, черезъ всякую кривую можно провести такую развертывающуюся поверхность, при наложеніи которой на плоскость кривая обратится въ прямую. Наоборотъ, эволюты кривой (§ 679, b) обращаются въ прямыя при наложеніи полярной развертывающейся поверхности на плоскость. Замѣтимъ здѣсь еще, что полярная поверхность плоской кривой всегда будетъ цилиндръ и, слѣдовательно, эволюты плоской кривой суть круговыя винтовыя линіи.

693. Упражненія. a) Для поверхности второго порядка съ центромъ, отнесенной къ ея осямъ, можно вычислить полную кривизну съ помощью формулы (22), положивъ

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

[1]) „Natürliche Geometrie“, стр. 229.

Сперва замѣтимъ, что уравненіе касательной плоскости будетъ $\sum \frac{Xx}{a^2} = 1$, а разстояніе h этой плоскости отъ центра поверхности опредѣляется изъ уравненія

$$\frac{1}{h^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \Delta f.$$

Формула (22) дастъ тогда

$$K = -\frac{h^4}{a^4b^4c^4} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & a^2 & 0 & 0 \\ y & 0 & b^2 & 0 \\ z & 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{h^4}{a^2b^2c^2}.$$

Итакъ, имѣемъ слѣдующую теорему (срав. § 595, h): Въ поверхностяхъ второго порядка съ центромъ полная кривизна измѣняется пропорціонально четвертой степени разстоянія отъ касательной плоскости до центра.

b) Предложимъ себѣ теперь вычислить главныя кривизны въ любой точкѣ M на развертывающейся поверхности. Координаты точки M можно изобразить формулами

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

въ которыхъ a, b, c изображаютъ направляющіе косинусы образующей, а x, y, z координаты точки Q, въ которой образующая касается ребра возврата. Эти шесть величинъ зависятъ исключительно отъ длины дуги u ребра возврата, а v обозначаетъ длину отрѣзка QM. Какъ извѣстно (§ 669), направляющіе косинусы нормали къ поверхности совпадаютъ съ косинусами α, β, γ бинормали кривой (Q), поэтому тотчасъ находимъ, что $p = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $q = -\frac{\beta}{\gamma}$, откуда слѣдуетъ

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{b}{z\gamma^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{a}{z\gamma^2},$$

т. е.

$$ra + sb = sa + tb = 0, \quad r\lambda + s\mu = -\frac{\varrho b}{zv\gamma^2}, \quad s\lambda + t\mu = \frac{\varrho a}{zv\gamma^2},$$

а слѣдовательно,

$$r = -\frac{\varrho b^2}{zv\gamma^3}, \quad s = \frac{\varrho ab}{zv\gamma^3}, \quad t = -\frac{\varrho a^2}{zv\gamma^3}.$$

Формула (21) даетъ $K = 0$. Этого и слѣдовало ожидать, такъ какъ мы уже видѣли (§ 675), что въ каждой точкѣ развертывающейся поверхности $rt - s^2 = 0$. Къ тому же заключенію приводитъ также замѣчаніе, что совпаденіе обѣихъ системъ асимптотическихъ линій въ одну систему образующихъ показываетъ, что одно изъ главныхъ сѣченій, проходящихъ черезъ любую точку M есть образующая, проведенная черезъ эту точку, потому что касательныя къ этимъ сѣченіямъ должны вѣдь дѣлить пополамъ углы между соприкасающимися прямыми. Слѣдовательно, одна изъ главныхъ кривизнъ равна нулю. Другая дается первою изъ формулъ (19) и имѣетъ значеніе

$$\frac{1}{R} = -[(1-\beta^2)a^2 + 2\alpha\beta ab + (1-\alpha^2)b^2]\frac{\varrho}{zv\gamma^2} = -(1-c^2-\gamma^2)\frac{\varrho}{zv\gamma^2} = -\frac{\varrho}{zv}.$$

Отсюда видно, что $R = -v \operatorname{tg} \varphi$, гдѣ φ есть уголъ, на который касательная къ ребру возврата должна повернуться въ опредѣленномъ уже раньше направленіи (§ 679), чтобы совпасть съ образующею развертывающейся поверхности, огибающей спрямляющія плоскости. Такъ какъ длина R откладывается по положительному направленію бинормали, то мы видимъ, что центры нормальной кривизны всѣхъ ортогональныхъ траекторій образующихъ развертывающейся поверхности лежатъ на поверхности, огибающей спрямляющія плоскости ребра возврата. Къ тому же заключенію приводитъ и замѣчаніе, что образующая огибающей спрямляющія плоскости ребра возврата есть въ то же врѣмя (§§ 673, a; 679, b, c) ось соприкасающихся круговъ всѣхъ ортогональныхъ траекторій. Отсюда, принимая во вниманіе теорему Менье, мы видимъ, что упомянутая образующая встрѣчаетъ плоскости, перпендикулярныя къ образующимъ первой поверхности, въ центрахъ кривизны соотвѣтствующихъ сѣченій вдоль этихъ образующихъ.

694. Въ заключеніе мы обобщимъ формулы (19) такимъ образомъ, чтобы сдѣлать ихъ непосредственно примѣнимыми къ тому случаю, когда x, y, z даны въ видѣ функцій отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ u и v. Напомнимъ, что въ концѣ § 660 были даны формулы

$$(23)\quad \mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

въ которыхъ

$$a = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad b = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\quad c = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)} \text{ и т. д.}$$

то по второй изъ формулъ (20) получимъ

$$\sqrt{ab-c^2} \cdot K = \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial(\mathfrak{N},\mathfrak{L})}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)}.$$

Умножая эти три выраженія соотвѣтственно на $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{N}^2$ (сумма которыхъ равна 1) и складывая, получимъ

$$(24)\qquad \sqrt{ab-c^2} \cdot K = \mathfrak{L} \frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,v)} + \mathfrak{M} \frac{\partial(\mathfrak{N},\mathfrak{L})}{\partial(u,v)} + \mathfrak{N} \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)}$$

или

$$\sqrt{ab-c^2} \cdot K = \begin{vmatrix} \mathfrak{L} & \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} \\ \mathfrak{M} & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v} \\ \mathfrak{N} & \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Формулу (24) можно преобразовать еще такимъ образомъ, что въ выраженіе K войдутъ явно первыя и вторыя производныя отъ x, y, z по u и по v. Написавъ эту формулу въ видѣ

$$(ab-c^2)K=\sum'\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,v)},$$

тотчасъ увидимъ (§ 29), что правая часть равна произведенію матриссъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Съ другой стороны, выполняя умноженіе и принимая во вниманіе уравненія, получаемыя дифференцированіемъ по u и по v условій ортогональности

$$\sum'\mathfrak{L}\frac{\partial x}{\partial u}=0, \quad \sum'\mathfrak{L}\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

находимъ, что элементы опредѣлителя, равнаго произведенію упомянутыхъ матриссъ, будутъ

$$\sum'\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u}=-\sum'\mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{ab-c^2}},$$

$$\sum'\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}=-\sum'\mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{ab-c^2}},$$

$$\sum'\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u}=-\sum'\mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}=-\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{ab-c^2}},$$

$$\sum'\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}=-\sum'\mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{ab-c^2}}.$$

При этомъ, для сокращенія, положено

$$\mathfrak{A}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{C}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} \end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно,

$$K = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}{(ab - c^2)^2}. \tag{25}$$

695. Подобнымъ же образомъ поступимъ для вычисленія H, исходя изъ первой формулы (20), при чемъ измѣнимъ знаки правыхъ частей на противоположные для того, чтобы косинусы $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ взяты были съ тѣми знаками, какіе для нихъ получаются изъ формулы (23) при $u = x$, $v = y$. Очевидно, имѣемъ

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} = \frac{\partial(\mathfrak{L}, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, x)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{N}} \left[\frac{\partial(\mathfrak{L}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, x)}{\partial(u, v)}\right] \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, $\sqrt{ab - c^2}$. H можетъ быть представлено каждою изъ трехъ разностей

$$\frac{\partial(\mathfrak{N}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\mathfrak{L}, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{N}, x)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\mathfrak{M}, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{L}, y)}{\partial(u, v)},$$

дѣленныхъ соотвѣтственно на $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$; умножая ихъ соотвѣтственно на $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{N}^2$ и складывая, получимъ

$$\sqrt{ab - c^2} \cdot H = \sum \mathfrak{L} \left[\frac{\partial(\mathfrak{N}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, z)}{\partial(u, v)}\right]$$

или

$$\sqrt{ab - c^2} \cdot H = \sum \left[\left(\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial v} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} - \left(\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial u} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}\right].$$

Между тѣмъ, при помощи легкаго вычисленія найдемъ еще

$$\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial v} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}}\left(c\frac{\partial x}{\partial v} - b\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

$$\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial u} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}}\left(a\frac{\partial x}{\partial v} - c\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

Слѣдовательно,

$$(ab - c^2)H = \sum \left[-b\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} - a\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} + c\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u}\right)\right]$$

и, наконецъ,

$$H = \frac{\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a - 2\mathfrak{C}c}{(ab - c^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{26}$$

Легко провѣрить, что формулы (25) и (26) приводятся къ формуламъ (19), когда положимъ $u = x$, $v = y$, потому что при этихъ предположеніяхъ функціи a, b, c, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ обращаются въ $1 + p^2$, $1 + q^2$, pq, r, t и s.

Опредѣленія и свойства замѣчательныхъ кривыхъ на поверхности.

696. Линіи кривизны и точки закругленія. Для опредѣленія линій кривизны (§ 665) на данной поверхности, мы имѣемъ слѣдующее уравненіе, получаемое черезъ исключеніе k изъ уравненій (17) § 686, съ замѣною a и b на dx и dy

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}, \tag{27}$$

т. е.

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{r}{1+p^2}-\dfrac{s}{pq}\right)\dfrac{dx^2}{1+q^2}-\left(\dfrac{t}{1+q^2}-\dfrac{r}{1+p^2}\right)\dfrac{dx\,dy}{pq}\\ \qquad+\left(\dfrac{s}{pq}-\dfrac{t}{1+q^2}\right)\dfrac{dy^2}{1+p^2}=0,\end{array}\right. \tag{28}$$

потому что въ уравненіяхъ (17) a и b обозначаютъ косинусы угловъ осей индикатрисы съ координатными осями x и y, а оси индикатрисы въ каждой точкѣ касаются линіи кривизны. Представляя себѣ, что p, q, r, s, t выражены въ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, получаемъ изъ уравненій (28) два уравненія

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y),\qquad \frac{dy}{dx}=\psi(x,y). \tag{29}$$

Изъ этихъ уравненій, разсматриваемыхъ одно отдѣльно отъ другого, при помощи пріема, который будетъ разъясненъ въ концѣ этого учебника, приходимъ къ уравненіямъ двухъ системъ цилиндрическихъ поверхностей, параллельныхъ оси z-овъ, пересѣкающихъ поверхность по линіямъ кривизны. Замѣтимъ, что уравненія (28) удовлетворяются тождественно тогда и только тогда, когда координаты x, y, z точки M на поверхности удовлетворяютъ еще двумъ нижеслѣдующимъ уравненіямъ

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}. \tag{30}$$

Черезъ такую точку M проходитъ, слѣдовательно, безчисленное множество линій кривизны. Такія точки называются точками закругленія (Nabelpunkte, ombilics). Число ихъ, вообще говоря, конечно. Но возможны случаи, когда онѣ заполняютъ цѣлую линію на поверхности; это будетъ тогда, когда два уравненія (30) приводятся къ одному. Неопредѣленность направленій касательныхъ къ линіямъ кривизны въ точкѣ закругленія можетъ проистекать только изъ неопредѣленности направленій осей индикатрисы Дюпена, т. е. изъ того, что эта индикатриса будетъ кругъ. Отсюда слѣдуетъ

(§ 664), что поверхность въ смежности съ точкою закругленія уподобляется шару, потому что, если передвинемъ безконечно мало касательную плоскость въ такой точкѣ такимъ образомъ, чтобы эта плоскость осталась перпендикулярною къ нормали, то на поверхности опредѣлится безконечно малое круглое сѣченіе. Это обстоятельство позволяетъ тотчасъ заключить, что на эллипсоидѣ, напримѣръ, находятся четыре вещественныхъ точки закругленія. Эти точки будутъ именно точки пересѣченія поверхности съ діаметрами, сопряженными съ двумя системами круговыхъ сѣченій эллипсоида. Впрочемъ, можно непосредственно провѣрить, что условія (30) равносильны условію $\varrho_1 = \varrho_2$. Дѣйствительно, изъ уравненій (19), съ помощью простого вычисленія, получаемъ

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)^2$$

$$= \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^3}\left[(1+p^2+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right)^2 + p^2q^2\left(\frac{r}{1+p^2} + \frac{t}{1+q^2} - \frac{2s}{pq}\right)^2\right],$$

откуда и видимъ, что для существованія равенства $\varrho_1 = \varrho_2$ условія (30) необходимы и достаточны.

697. Нормали къ поверхности, проведенныя черезъ различныя точки нѣкоторой кривой, лежащей на этой поверхности, или, какъ говорятъ, нормали вдоль нѣкоторой кривой, вообще, образуютъ косую линейчатую поверхность, носящую названіе нормальной поверхности или нормаліи (normalie). Спрашивается, нѣтъ ли между безчисленнымъ множествомъ нормалій, проходящихъ черезъ данную точку на поверхности, развертывающихся поверхностей? Условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы нормаль въ точкѣ M образовала развертывающуюся поверхность при движеніи точки M на поверхности (§ 667) есть

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx \\ q & dq & dy \\ -1 & 0 & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Этотъ опредѣлитель равенъ

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx + p\,dz \\ q & dq & dy + q\,dz \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx + p\,dz & dp \\ dy + q\,dz & dq \end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно, должно существовать уравненіе

$$(31) \qquad \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq};$$

но это уравненіе совпадаетъ съ уравненіемъ (27), въ чемъ тотчасъ убѣждаемся, замѣчая, что

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Итакъ, черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ развертывающіяся нормаліи, слѣды которыхъ на данной поверхности будутъ не что иное, какъ ея линіи кривизны. Ребра возврата всѣхъ этихъ нормалій образуютъ поверхность съ двумя полáми, которую можно разсматривать, какъ общее мѣсто всѣхъ главныхъ центровъ кривизны. Эта вторая поверхность представляетъ относительно первой до нѣкоторой степени аналогію съ тѣмъ, что представляетъ эволюта кривой относительно самой кривой [1]). Общее мѣсто главныхъ центровъ кривизны называется эволютою данной поверхности и состоитъ изъ двухъ полъ: одна образуется однимъ, другая другимъ главнымъ центромъ кривизны. Данная поверхность, по отношенію къ своей эволютѣ, называется эвольвентою, по аналогіи съ кривыми линіями. Указанное выше характеристическое свойство линіи кривизны можно формулировать слѣдующимъ образомъ: Всякая линія кривизны есть ортогональная траекторія образующихъ развертывающейся поверхности, состоящей изъ нормалей къ поверхности, и этимъ свойствомъ не обладаетъ никакая другая кривая на поверхности. Отсюда не трудно вывести, если припомнимъ одну раньше доказанную теорему (§ 673, b), слѣдующее предложеніе: Если нѣкоторая линія есть линія кривизны на нѣкоторой поверхности, то она сохранитъ тотъ же характеръ на всѣхъ поверхностяхъ, пересѣкающихъ первую поверхность подъ постояннымъ угломъ вдоль всей данной линіи. Отсюда въ частности слѣдуетъ, что если нѣкоторая плоскость пересѣкаетъ данную поверхность подъ постояннымъ угломъ, то линія пересѣченія непремѣнно будетъ линіею кривизны; и обратно, если линія кривизны — линія плоская, то ея плоскость пересѣкаетъ поверхность подъ постояннымъ угломъ. То же самое можно общнѣе утверждать о сферическихъ кривыхъ, потому что на сферѣ всякая линія есть линія кривизны.

698. Формулы Родрига. Условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы нѣкоторая точка (x, y, z) данной поверхности описывала линію кривизны, можно прямо написать, выражая, что нормальная плоскость разсматриваемой кривой совпадаетъ со спрямляющею плоскостью эволюты этой кривой (§ 673, a), касательныя которой будутъ нормали къ поверхности. Слѣдовательно, мы должны имѣть

$$\frac{dx}{d\mathfrak{L}} = \frac{dy}{d\mathfrak{M}} = \frac{dz}{d\mathfrak{N}}. \tag{32}$$

---

[1]) О свойствахъ эволютъ поверхностей см. „Natürliche Geometrie“, стр. 217.

Эти формулы называются формулами Родрига. Два уравненія, ими выражаемыя, приводятся къ одному, если примемъ во вниманіе условіе ортогональности

$$\mathfrak{L}\,dx + \mathfrak{M}\,dy + \mathfrak{N}\,dz = 0.$$

Обратно, если условія (32) выполнены, то

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{L} & d\mathfrak{L} & dx \\ \mathfrak{M} & d\mathfrak{M} & dy \\ \mathfrak{N} & d\mathfrak{N} & dz \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. (§ 667) нормаль къ поверхности образуетъ развертывающуюся поверхность, и точка (x, y, z) описываетъ, слѣдовательно, линію кривизны. Можно, впрочемъ, вывести также формулы (32) изъ послѣдняго условія, потому что вызвышая предыдущее уравненіе въ квадратъ, легко приведемъ его къ виду

$$(d\mathfrak{N}\,dy - d\mathfrak{M}\,dz)^2 + (d\mathfrak{L}\,dz - d\mathfrak{N}\,dx)^2 + (d\mathfrak{M}\,dx - d\mathfrak{L}\,dy)^2 = 0,$$

а послѣднее равенство, очевидно, разбивается на два равенства (32). Далѣе, легко видѣть, что общая величина отношеній (32) равна, независимо отъ знака, длинѣ соотвѣтствующаго главнаго радіуса кривизны. Наконецъ, отъ формулъ Родрига можно придти и къ формулѣ (31), дифференцируя равенства $\mathfrak{L} = -\mathfrak{N}p$, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}q$, и замѣчая, что $d\mathfrak{L} + p\,d\mathfrak{N}$, $d\mathfrak{M} + q\,d\mathfrak{N}$, а слѣдовательно, и $dx + p\,dz$ и $dy + q\,dz$ пропорціональны dp и dq.

699. Примѣры. a) На поверхностяхъ вращенія линіями кривизны будутъ меридіаны и параллели. Дѣйствительно, нормали къ поверхности вдоль меридіана лежатъ въ плоскости меридіана, а нормали вдоль параллели пересѣкаются всѣ на оси вращенія и образуютъ коническую поверхность. Еще проще убѣдимся въ сказанномъ, замѣчая, что плоскости каждаго меридіана и каждой параллели пересѣкаютъ поверхность подъ постояннымъ угломъ. Впрочемъ, найдя одну изъ системъ линій кривизны, можно опредѣлить другую изъ условія ортогональности обѣихъ системъ. Двѣ системы линій кривизны соотвѣтствуютъ двумъ полáмъ эволюты поверхности. Одна изъ нихъ образуется вращеніемъ эволюты меридіана около оси поверхности, другая сводится (§ 681, b) къ самой оси. Напримѣръ, катеноидъ въ совокупности съ осью вращенія образуетъ эволюту псевдосферы.

b) На развертывающейся поверхности каждая образующая есть линія кривизны, потому что нормали къ поверхности вдоль образующей лежатъ въ одной плоскости. Если повернемъ образующія на прямой уголъ около одной изъ ихъ ортогональныхъ траекторій, то онѣ сдѣлаются нормалями къ поверхности, а съ другой стороны остаются образующими развертывающейся поверхности (§ 673, b). Такимъ образомъ прямо получаемъ, что ортогональныя траекторіи образующихъ представляютъ вторую систему линій кривизны. Эволюта поверхности имѣетъ одну полу на безконечности, а другая (§ 693, b) есть спрямляющая развертывающаяся поверхность ребра возврата.

c) На огибающей семейства шаровъ (т. е. системы шаровъ, въ уравненіяхъ которыхъ коэффиціенты — функціи одного независимаго параметра) линіями кривизны будутъ характеристики, потому что (§ 674) вдоль

каждой изъ нихъ нормали къ поверхности будутъ радіусы огибаемыхъ шаровъ, пересѣкающіеся въ центрѣ C_1. Отсюда слѣдуетъ, что одинъ изъ главныхъ центровъ кривизны есть точка C_1 (рис. 87). Второй главный центръ кривизны, для того случая, когда имѣемъ дѣло съ поверхностью канала (§ 678, b), опредѣлится изъ того замѣчанія, что онъ находится на ребрѣ возврата развертывающейся поверхности, образуемой нормалью къ линіи центровъ, и слѣдовательно, долженъ находится (§ 679, b) на оси соприкасающагося круга этой кривой. Поэтому главные радіусы кривизны будутъ

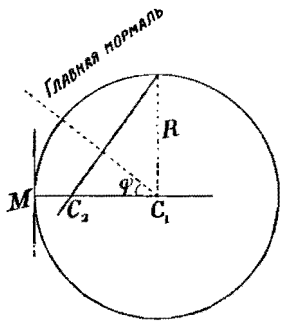


Рис. 87.

$$\varrho_1 = R, \quad \varrho_2 = R - \frac{\varrho}{\cos\varphi},$$

что, впрочемъ, легко получить и при помощи вычисленія, пользуясь формулами (19) и полагая $\Sigma\lambda(X-x) = \cos\varphi$, или еще проще, положивъ $u = s$, $v = \varphi$, и примѣняя формулы (25) и (26). Замѣтимъ, наконецъ, что эволюта канала состоитъ изъ полярной поверхности линіи центровъ и самой этой кривой.

700. Геодезическое кручені̇е. Найденное въ § 697 характеристическое свойство линіи кривизны находится въ тѣсной связи съ понятіемъ о геодезическомъ кручені̇и. Это понятіе введено было Бертраномъ съ цѣлью дать мѣру вращательной составляющей

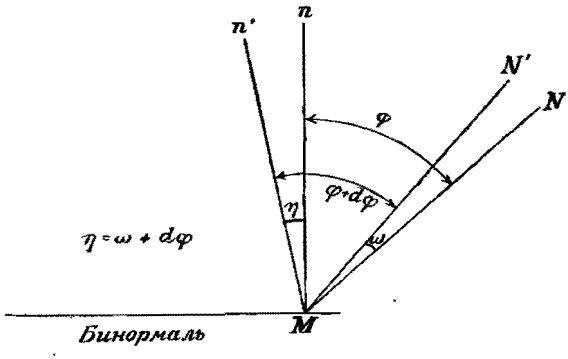


Рис. 88.

въ движеніи касательной плоскости, при перемѣщеніи точки касанія по направленію касательной. Естественно принять за мѣру этого вращенія отношеніе угла, на который повернется проекція нормали къ поверхности на нормальную плоскость, къ $d\sigma$ (дифференціалу дуги кривой). Мы уже видѣли (въ § 672), что этотъ уголъ равенъ $\eta - d\varphi$. Вышеупомянутое отношеніе

$$\tau = \frac{1}{\varrho} - \frac{d\varphi}{ds}$$

и называется геодезическимъ крученіемъ. Ясно, что характеристическое свойство линій кривизны, о которомъ идетъ рѣчь, можетъ быть выражено тѣмъ, что для линіи кривизны геодезическое крученіе во всякой ея точкѣ равно нулю (см. § 672). Слѣдовательно, геодезическое крученіе имѣетъ для линій кривизны то же значеніе, какое нормальная кривизна (§ 683) имѣетъ для асимптотическихъ линій, при этомъ, какъ нормальная кривизна, такъ и геодезическое крученіе будутъ имѣть одинаковое значеніе въ данной точкѣ на всѣхъ кривыхъ, имѣющихъ общую касательную, между тѣмъ какъ геодезическая кривизна для такихъ кривыхъ мѣняется при измѣненіи соприкасающейся плоскости. Мы увидимъ также далѣе, что существуютъ извѣстныя аналогіи между законами измѣненія нормальной кривизны и геодезическаго крученія при переходѣ отъ одной изъ безчисленнаго множества кривыхъ, проводимыхъ по поверхности черезъ данную точку въ различныхъ направленіяхъ, къ другой. А именно, и то и другое выражаются однородными квадратичными функціями отъ косинусовъ, опредѣляющихъ эти направленія.

701. Положимъ, что $(a,\ b,\ c)$ обозначаютъ направляющіе косинусы данной касательной къ поверхности въ данной точкѣ M, $(a',\ b',\ c')$ — направляющіе косинусы другой, перпендикулярной къ первой. Нормаль $(\mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N})$ къ поверхности въ точкѣ M и прямая $(a',\ b',\ c')$, очевидно, будутъ лежать въ нормальной плоскости къ кривой, имѣющей касательную $(a,\ b,\ c)$, такъ какъ въ этой плоскости лежатъ всѣ перпендикуляры къ $(a,\ b,\ c)$. Поэтому, разсматривая прямоугольный треугольникъ, у котораго гипотенуза равна единицѣ и направлена по нормали къ поверхности въ точкѣ M, а катеты по главной нормали $Mn\ (\lambda,\ \mu,\ \nu)$ и бинормали $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ къ данной кривой, и проектируя стороны этого треугольника на координатныя оси, получимъ

$$\mathfrak{L} = a\sin\varphi + \lambda\cos\varphi,\quad \mathfrak{M} = \beta\sin\varphi + \mu\cos\varphi,\quad \mathfrak{N} = \gamma\sin\varphi + \nu\cos\varphi$$

(φ — обозначаетъ, какъ и выше, уголъ между нормалью къ поверхности и главною нормалью кривой, т. е. уголъ нашего треугольника, прилегающій къ главной нормали). Точно также, замѣнивъ направленіе $(\mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N})$ направленіемъ $(a',\ b',\ c')$, очевидно, ему перпендикулярнымъ, получимъ

$$a' = a\cos\varphi - \lambda\sin\varphi,\quad b' = \beta\cos\varphi - \mu\sin\varphi,\quad c' = \gamma\cos\varphi - \nu\sin\varphi.$$

Дифференцируя эти формулы по σ, пользуясь формулами (11) и выраженіемъ τ, тотчасъ получимъ

$$(33)\quad \frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma} = -\frac{a}{\varrho}\cos\varphi - a'\tau,\quad \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\sigma} = -\frac{b}{\varrho}\cos\varphi - b'\tau,\quad \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\sigma} = -\frac{c}{\varrho}\cos\varphi - c'\tau.$$

Это, такъ сказать, формулы Френе для ортогональной системы трехъ направленій, опредѣляемыхъ ортогональнымъ опредѣлителемъ

$$\Omega = \begin{vmatrix} a & a' & \mathfrak{L} \\ b & b' & \mathfrak{M} \\ c & c' & \mathfrak{N} \end{vmatrix} = 1.$$

Умножая формулы (33) сперва на a, b, c, затѣмъ на a', b', c', получимъ путемъ сложенія

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = -\sum a\frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma}, \quad \tau = -\sum a'\frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma}.$$

А такъ какъ $\mathfrak{L} = -\mathfrak{N}p$, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}q$, то, принимая во вниманіе условія ортогональности $pa + qb - c = 0$ и $pa' + qb' - c' = 0$, получимъ изъ предыдущихъ формулъ слѣдующія:

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = a\left(p\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b\left(q\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = \mathfrak{N}\left(a\frac{dp}{d\sigma} + b\frac{dq}{d\sigma}\right),$$

$$\tau = a'\left(p\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b'\left(q\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c'\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = \mathfrak{N}\left(a'\frac{dp}{d\sigma} + b'\frac{dq}{d\sigma}\right).$$

Первая формула есть не что иное, какъ извѣстная уже формула (13), для которой, слѣдовательно, мы получили здѣсь новое доказательство, потому что $\frac{dp}{d\sigma} = \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\sigma} = ar + bs$ и т. д., вторая даетъ

$$\tau = \frac{raa' + s(ab' + ba') + tbb'}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{34}$$

Это равенство можно привести къ формѣ, аналогичной формулѣ (13), замѣчая, что по свойству опредѣлителя Ω, имѣемъ

$$a' = \mathfrak{M}c - \mathfrak{N}b = -\mathfrak{N}(b + qc) = -\mathfrak{N}[pqa + (1 + q^2)b],$$

$$b' = \mathfrak{N}a - \mathfrak{L}c = \mathfrak{N}(a + pc) = \mathfrak{N}[(1 + p^2)a + pqb].$$

Отсюда получаемъ

$$\tau = \frac{-(ra + sb)[pqa + (1 + q^2)b] + (sa + tb)[(1 + p^2)a + pqb]}{1 + p^2 + q^2},$$

и снова находимъ характеристичное для линій кривизны условіе (27), приравнивая τ нулю.

702. Если желаемъ изучить свойства геодезическаго крученія, то удобнѣе всего будетъ пользоваться выраженіемъ (34).

а) Первое свойство получается тотчасъ при помощи слѣдующаго замѣчанія. Замѣняя направленіе (a, b, c) направленіемъ (a', b', c'),

мы должны послѣднее замѣнить на $(-a, -b, -c)$ для того, чтобы Ω не измѣнило своего значенія, а тогда τ измѣнитъ лишь свой знакъ. Слѣдовательно, двѣ кривыя, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ, имѣютъ геодезическія кручения, равныя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку.

b) Если (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) будутъ направленія линій кривизны, то, вслѣдствіе ихъ ортогональности, всегда можно положить

$$a = a_1 \cos\vartheta + a_2 \sin\vartheta, \quad a' = -a_1 \sin\vartheta + a_2 \cos\vartheta,$$
$$b = b_1 \cos\vartheta + b_2 \sin\vartheta, \quad b' = -b_1 \sin\vartheta + b_2 \cos\vartheta.$$

Замѣчая еще, что

$$r a_1 a_2 + s(a_1 b_2 + a_2 b_1) + t b_1 b_2 = 0$$

(изъ формулы (34) при $\tau = 0$), и подставляя вышенаписанныя выраженія въ (34), получимъ формулу

$$\tau = \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \sin\vartheta \cos\vartheta, \tag{35}$$

гдѣ ϱ_1 и ϱ_2 главные радіусы кривизны, ясно показывающую, какъ измѣняется τ при вращеніи кривой около данной точки.

c) Обозначимъ теперь черезъ $\frac{1}{\varrho}$ и $\frac{1}{\varrho'}$ кривизны нормальныхъ сѣченій, касающихся прямыхъ (a, b, c) и (a', b', c'), т. е. нормальныя кривизны первой и второй разсматриваемыхъ нами кривыхъ. Величины $\frac{1}{\varrho}$ и $\frac{1}{\varrho'}$ выразятся, какъ извѣстно, формулами

$$\frac{1}{\varrho} = (r a^2 + 2 s a b + t b^2)\, \mathfrak{N}^2,$$
$$\frac{1}{\varrho'} = (r a'^2 + 2 s a' b' + t b'^2)\, \mathfrak{N}^2.$$

Замѣтимъ еще, что $ab' - a'b$, очевидно, равно $\mathfrak{N}$, потому что $ab' - a'b$ есть косинусъ угла, образуемаго перпендикуляромъ къ (a, b, c) и (a', b', c'), т. е. нормалью къ поверхности, съ осью z-овъ, и, какъ легко провѣрить,

$$(r a^2 + 2 s a b + t b^2)(r a'^2 + 2 s a' b' + t b'^2) - (r a a' + s(a b' + b a') + t b b')^2$$

тождественно равно $(rt - s^2)(ab' - a'b)$, т. е. $(rt - s^2)\mathfrak{N}^2$. Тогда найдемъ слѣдующую важную формулу

$$\frac{1}{\varrho \varrho'} - \tau^2 = K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}. \tag{36}$$

Эту формулу можно вывести также изъ выраженія (35) для τ и формулы Эйлера. Дѣйствительно, написавъ послѣднюю въ тѣхъ

двухъ видахъ, которые указаны были въ § 685, путемъ умноженія тотчасъ найдемъ

$$\tau^2 = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho}\right) = -\frac{1}{\varrho^2} + \frac{H}{\varrho} - K = \frac{1}{\varrho\varrho'} - K,$$

такъ какъ $H = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$.

703. Асимптотическія линіи. Теорема Эннепера. Разысканіе асимптотическихъ линій основывается на уравненіи

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{37}$$

Оно выражаетъ, что нормальная кривизна этихъ линій въ каждой ихъ точкѣ равна нулю. Уравненіе (37) выражаетъ также перпендикулярность главной нормали кривой и нормали къ поверхности, потому что лѣвая его часть тождественно равна выраженію $-p\,d^2x - q\,d^2y + d^2z$. Уравненіе (37) можно поэтому написать и въ слѣдующемъ болѣе общемъ видѣ

$$\mathfrak{L}\,d^2x + \mathfrak{M}\,d^2y + \mathfrak{N}\,d^2z = 0.$$

Если x, y, z заданы, какъ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ u, v, и замѣтимъ, что

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv^2 \text{ и т. д.},$$

то послѣднее уравненіе приметъ видъ

$$\mathfrak{A}\,du^2 + 2\,\mathfrak{C}\,du\,dv + \mathfrak{B}\,dv^2 = 0 \tag{38}$$

гдѣ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ имѣютъ установленныя въ концѣ § 694 значенія. Впослѣдствіи мы увидимъ, что уравненіе (37), какъ и (28), имѣющее тотъ же видъ, характеризуетъ два семейства (съ однимъ независимымъ параметромъ) поверхностей, пересѣкающихъ данную поверхность по асимптотическимъ линіямъ. Впрочемъ, для изученія асимптотическихъ линій на данной поверхности не неизбѣжно знать ихъ уравненія. А именно, если извѣстны главныя кривизны, то можно, съ помощью нѣкоторыхъ формулъ найти и кривизны асимптотическихъ линій. Не выходя за предѣлы, поставленные для настоящаго учебника, мы не можемъ дать здѣсь доказательство одной формулы Бонне [1]), выражающей первую кривизну асимптотическихъ линій черезъ ϱ_1 и ϱ_2. Относительно же кручения легко доказать слѣдующую теорему Эннепера: Кручение асимптотическихъ линій равно корню квадратному изъ полной кривизны, взятой съ обратнымъ знакомъ. Дѣйствительно, для асимтотическихъ

[1]) „Nouvelles Annales de Mathématiques“ 1865, стр. 268.

линій, какъ и вообще для всѣхъ кривыхъ, главныя нормали которыхъ вездѣ одинаково наклонены къ нормали поверхности, т. е. для которыхъ $\varphi = \text{const}$. (что имѣетъ мѣсто и для геодезическихъ линій) геодезическое кручeніе равно абсолютному кручeнію. Поэтому, такъ какъ $\frac{1}{\tau} = \tau$, а $\frac{1}{\varrho} = 0$, то формула (36) и даетъ $\tau = \pm\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}$.

704. Теорема Бельтрами. Въ заключеніе докажемъ теорему Бельтрами, упомянутую въ § 682. Помѣстимъ начало координатъ въ любой точкѣ M на поверхности; затѣмъ въ касательной плоскости примемъ за ось x-овъ касательную къ асимптотической линіи, за ось y-овъ ея главную нормаль, а ось z-овъ (нормаль къ поверхности) направимъ въ отрицательную сторону по бинормали. Выведенныя въ § 643 формулы (19) примѣнимы ко всякой кривой, которая касается асимптотической линіи и для которой соприкасающаяся плоскость въ точкѣ M совпадаетъ съ касательною плоскостью на поверхности. Слѣдовательно, если (x, y, z) будутъ координаты $(u, w, -v)$ точки M', безконечно близкой къ M, на разсматриваемой кривой, то

$$\lim\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\varrho}, \quad \lim\frac{z}{x^3} = \frac{1}{6\varrho\tau}.$$

Въ частности, эти формулы справедливы для асимптотической линіи, если въ нихъ замѣнимъ ϱ и τ соотвѣтствующими значеніями ϱ_0 и τ_0, въ точкѣ M на асимптотической линіи. Съ другой стороны, уравненіе поверхности въ смежности съ точкою M можно написать въ видѣ (до членовъ 3-го порядка включительно)

$$z = \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + kx^3 + \cdots.$$

Такъ какъ, по предположенію, одна изъ соприкасающихся прямыхъ есть ось x-овъ, то $r = 0$. Кромѣ того, формула (34) даетъ $s = \frac{1}{\tau_0}$[1]). Слѣдовательно, при безпредѣльномъ приближеніи M' къ M получимъ

$$k = \lim\frac{z}{x^3} - \frac{1}{\tau_0}\lim\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\varrho}\left(\frac{1}{3\tau} - \frac{1}{\tau_0}\right).$$

Въ частности, когда M' приближается къ M по асимптотической линіи, находимъ $k = -\frac{1}{3\varrho_0\tau_0}$. Изъ сравненія двухъ выраженій k находимъ интересную формулу Бонне

$$2\frac{\varrho}{\varrho_0} + \frac{\tau_0}{\tau} = 3,$$

которая заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай (при $\tau = \infty$), теорему Бельтрами.

---

[1]) Эти значенія r и s даютъ новое доказательство теоремы Эннепера, потому что $K = rt - s^2 = -1/\tau_0^2$.

705. Геодезическія линіи; формулы Вейнгартена. Опредѣленіе геодезическихъ линій на поверхности (главная нормаль совпадаетъ съ нормалью къ поверхности) (§ 665) выражается уравненіями

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} : \mathfrak{L} = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} : \mathfrak{M} = \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} : \mathfrak{N}, \tag{39}$$

гдѣ s обозначаетъ длину дуги кривой. Надо замѣтить, что эти уравненія, въ сущности, приводятся къ одному, потому что

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = 0, \quad \sum \mathfrak{L}\frac{dx}{ds} = 0,$$

откуда

$$\frac{\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}}{\mathfrak{L}} = \frac{\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}}{\mathfrak{M}} = \frac{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}}{\mathfrak{L}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{M}\frac{dy}{ds}}$$

$$= \frac{-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}}{-\frac{dz}{ds}\mathfrak{N}} = \frac{\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}}{\mathfrak{N}},$$

такъ что второе уравненіе есть слѣдствіе перваго. Впрочемъ, можно прямо придти къ одному единственному уравненію, если, вмѣсто того, чтобы выражать, что главная нормаль совпадаетъ съ нормалью къ поверхности, выразимъ, что бинормаль лежитъ въ касательной плоскости, т. е. перпендикулярна нормали къ поверхности, что прямо даетъ уравненіе

$$\sum \mathfrak{L}(dy\, d^2z - dz\, d^2y) = 0.$$

Въ очень рѣдкихъ случаяхъ удается перейти отъ дифференціальныхъ уравненій (39) къ уравненіямъ между x, y, z и двумя произвольными постоянными (см. интегрированіе дифференціальныхъ уравненій), которыя вмѣстѣ съ уравненіемъ поверхности изображаютъ дважды безконечную систему геодезическихъ линій. Несмотря на это, можно изучать геодезическія линіи, не зная ихъ уравненій въ конечномъ видѣ. Для приложеній особенно важно знать ходъ геодезическихъ линій въ весьма малой части поверхности. Помѣстимъ начало координатъ въ точку M и направимъ оси x-овъ и y-овъ по касательнымъ къ линіямъ кривизны, проходящимъ черезъ M. Ось z-овъ будетъ направлена по нормали къ поверхности, совпадающей съ главною нормалью геодезической линіи, а плоскости zMx и zMy совпадутъ съ главными нормальными сѣченіями поверхности въ точкѣ M. Разсмотримъ затѣмъ (рис. 89) дугу $MM' = \sigma$ геодезической линіи, опредѣляемую угломъ θ, образуемымъ касательною къ ней въ точкѣ M съ осью Mx. Если, кромѣ того, проведемъ нормальное сѣченіе, проходящее черезъ M и точку M', то получится еще дуга другой кривой $MM' = \sigma + \delta$. Плоскость этого нормальнаго сѣченія

на практикѣ принимаютъ за соприкасающуюся плоскость геодезической линіи въ точкѣ M, хотя, конечно, для того, чтобы эта плоскость дѣйствительно была таковою (т. е. совпала съ плоскостью, проходящею черезъ Mn и касательную къ геодезической линіи), ее нужно повернуть на нѣкоторый уголъ ε. Отсчитывая этотъ уголъ въ направленіи движенія часовой стрѣлки для наблюдателя, стоящаго по оси z-овъ (главной нормали) легко найдемъ его величину, замѣтивъ, что $\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{v}{u}$, гдѣ u и v (§ 643) обозначаютъ разстоянія точки M' отъ нормальной и отъ соприкасающейся плоскости. Прилагая формулы (19) § 643, съ замѣною въ нихъ ds на σ, тотчасъ найдемъ $\varepsilon = \frac{\sigma^2}{6\varrho\tau}$, т. е. уголъ вращенія ε безконечно малая второго порядка относительно σ. Это заключеніе, столь простое, которое, впрочемъ, можно было предвидѣть, составляетъ тѣмъ не менѣе, одну изъ основныхъ теоремъ Геодезіи. Въ практикѣ

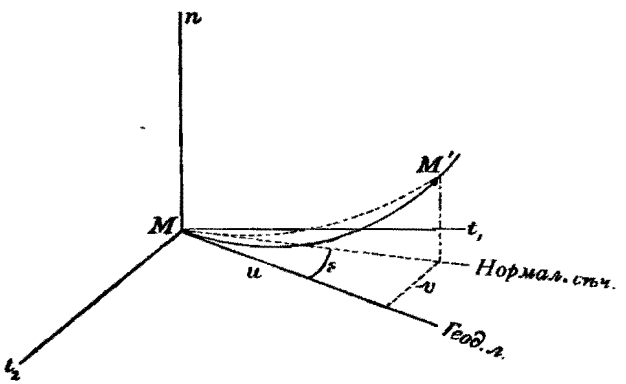


Рис. 89.

принято также, и съ еще бо́льшимъ правомъ, пренебрегать числомъ δ, т. е. считать дугу MM' нормальнаго сѣченія за дугу геодезической линіи. Это оправдывается доказательствомъ того, что $\delta = \frac{2}{5}\sigma\varepsilon^2$, такъ что разность между обѣими дугами оказывается безконечно малою пятаго порядка относительно σ. Этотъ и другіе важные результаты могутъ быть выведены изъ формулъ Вейнгартена, выражающихъ координаты x, y, z точки M' въ зависимости отъ σ и θ. По вышеупомянутымъ формуламъ (19) § 643 мы имѣемъ для координатъ этой точки M' относительно реберъ основного тріэдра выраженія

$$u = \sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho^2} + \cdots, \quad v = -\frac{\sigma^3}{6\varrho\tau} + \cdots, \quad w = \frac{\sigma^2}{2\varrho} + \frac{\sigma^3}{6}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} + \cdots,$$

а отсюда тотчасъ получаемъ $z = w$, и

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta = \sigma\cos\theta - \frac{\sigma^3}{6\varrho}\left(\frac{\cos\theta}{\varrho} - \frac{\sin\theta}{\tau}\right) + \cdots,$$

$$y = u\sin\theta + v\cos\theta = \sigma\sin\theta - \frac{\sigma^3}{6\varrho}\left(\frac{\sin\theta}{\varrho} + \frac{\cos\theta}{\tau}\right) + \cdots.$$

Съ другой стороны, замѣчая, что для геодезической линіи $\varphi = 0$, слѣдовательно, геодезическое крученіе τ равно $\frac{1}{\tau}$, а $\frac{1}{\varrho}$ равно кривизнѣ нормальнаго сѣченія, касающагося геодезической линіи въ точкѣ M, съ помощью формулы (35) и теоремы Эйлера (§ 685)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho_2}$$

тотчасъ находимъ

$$\frac{\cos\theta}{\varrho} - \frac{\sin\theta}{\tau} = \frac{\cos\theta}{\varrho_1}, \quad \frac{\sin\theta}{\varrho} + \frac{\cos\theta}{\tau} = \frac{\sin\theta}{\varrho_2}.$$

Слѣдовательно, получимъ

$$x = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho\varrho_1} + \cdots\right)\cos\theta, \quad y = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho\varrho_2} + \cdots\right)\sin\theta, \quad z = \frac{\sigma^2}{2\varrho} + \cdots$$

— формулы Вейнгартена *).

706. Приложеніе къ поверхностямъ вращенія. а) Чтобы найти асимптотическія линіи, выберемъ ось вращенія за ось z-овъ и пусть $z = f(x)$ есть уравненіе меридіана въ плоскости (xz). Уравненіе поверхности будетъ тогда $z = f(R)$, гдѣ $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Отсюда находимъ

$$p = \frac{x}{R}f'(R) = x\varphi(R). \qquad q = \frac{y}{R}f'(R) = y\varphi(R);$$

далѣе

$$r = \varphi(R) + \frac{x^2}{R}\varphi'(R), \quad s = \frac{xy}{R}\varphi'(R), \quad t = \varphi(R) + \frac{y^2}{R}\varphi'(R).$$

Уравненіе (37) въ настоящемъ случаѣ дастъ

$$(dx^2 + dy^2)\varphi(R) + (x\,dx + y\,dy)^2\frac{\varphi'(R)}{R} = 0$$

или, вводя въ плоскости (xy) полярныя координаты,

$$(dR^2 + R^2 d\theta^2)\varphi(R) + R\varphi'(R)\,dR^2 = 0,$$

а потому

$$\pm\frac{d\theta}{dR} = \sqrt{-\frac{f''(R)}{Rf'(R)}}. \tag{40}$$

*) Статью Вейнгартена, въ которой даны эти формулы и различныя слѣдствія, выводимыя изъ нихъ, можно найти въ сочиненіи Jordan'a „Handbuch der Vermessungskunde" II Theil, § 76 (изд. 1878 г.).

Проще еще получимъ это уравненіе изъ (38), такъ какъ, полагая $u = R$, $v = \theta$, легко найдемъ

$$\mathfrak{A} = Rf''(R), \quad \mathfrak{B} = R^2 f'(R), \quad \mathfrak{C} = 0.$$

Въ интегральномъ исчисленіи узнаемъ, что изъ уравненія (40) получается уравненіе въ конечномъ видѣ

$$\pm(\theta - \theta_0) = F(R),$$

изображающее два семейства кривыхъ, а именно проекціи асимптотическихъ линій на плоскость (xy). Всѣ эти кривыя могутъ быть получены изъ одной $\theta = F(R)$ при помощи зеркальнаго изображенія относительно полярной оси и вращенія около полюса.

b) Лишь въ совершенно исключительныхъ случаяхъ возможно полное опредѣленіе геодезическихъ линій. Тѣмъ не менѣе въ самомъ общемъ случаѣ изъ уравненій (39) можно вывести замѣчательную теорему, значительно облегчающую разысканіе геодезическихъ линій на поверхности вращенія и позволяющую прослѣдить ихъ ходъ. Дѣйствительно, для этихъ линій должны имѣть мѣсто равенства

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} : x = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} : y \quad \text{или} \quad x\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} - y\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = 0,$$

слѣдовательно,

$$\frac{d}{ds}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = c,$$

гдѣ c произвольная постоянная. Пусть теперь ψ обозначаетъ уголъ, образуемый геодезическою линіею съ меридіаномъ, и замѣтимъ, что $-\sin\theta$, $\cos\theta$, 0 будутъ направляющіе косинусы касательной къ параллели, а $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ направляющіе косинусы касательной геодезической линіи. Тогда будемъ имѣть

$$\sin\psi = -\sin\theta \cdot \frac{dx}{ds} + \cos\theta \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{1}{R}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right),$$

т. е. $R\sin\psi = c$. Геодезическія линіи на поверхности вращенія пересѣкаютъ меридіаны подъ угломъ, синусъ котораго измѣняется пропорціонально кривизнѣ параллели. Эта теорема, найденная Клеро, весьма полезна въ Геодезіи. Она устанавливаетъ границы для тѣхъ областей, которыя могутъ быть заполнены геодезическими линіями, соотвѣтствующими данному (не равному нулю) значенію c. Дѣйствительно, R не можетъ быть меньше c по абсолютной величинѣ. Поэтому, если будемъ передвигаться по геодезической линіи въ томъ направленіи, въ которомъ параллельные круги становятся все меньше и меньше, то геодезическая линія будетъ все болѣе и болѣе уклоняться отъ меридіана и приближаться къ параллели, чтобы въ концѣ концовъ сдѣлаться касательною къ параллели радіуса c и не имѣть возможности за нее перейти.

707. Упражненія. a) Асимптотическія линіи косого геликоида (§ 690, b) намъ уже извѣстны, но мы укажемъ здѣсь другой способъ ихъ опредѣленія, а именно способъ, основанный на пріемѣ, изложенномъ въ § 703. Уравненіе поверхности есть $z = a\theta$, гдѣ $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, сложенному съ про-

извольнымъ кратнымъ числа π. Отсюда слѣдуетъ, что

$$(41) \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ay}{x^2+y^2}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ax}{x^2+y^2}.$$

Взявъ еще разъ производныя, найдемъ, что r, s, t пропорціональны соотвѣтственно числамъ $-2xy$, x^2-y^2, $2xy$, такъ что уравненіе (37) приводится къ

$$-xy\,dx^2 + (x^2-y^2)\,dx\,dy + xy\,dy^2 = 0.$$

Оно разбивается на два слѣдующихъ:

$$y\,dx - x\,dy = 0, \quad x\,dx + y\,dy = 0.$$

Первое даетъ образующія ($y = kx$), а второе даетъ $x^2+y^2 = \text{const}$. Двѣ системы асимптотическихъ линій, слѣдовательно, ортогональны, и поэтому разсматриваемая поверхность принадлежитъ къ числу минимальныхъ, какъ мы уже и раньше видѣли. Можно быстрѣе придти къ цѣли, положивъ $u = R$, $v = \theta$, и примѣняя уравненіе (38), которое приведется къ $dR\,d\theta = 0$, потому что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = -a$. Слѣдовательно, асимптотическія линіи будутъ $R = \text{const}$, (винтовыя линіи) и $\theta = \text{const}$. (образующія).

b) Предложимъ себѣ найти линіи кривизны на той же поверхности. Онѣ, очевидно, пересѣкаютъ образующія подъ угломъ въ 45^0. Чтобы опредѣлить ихъ аналитически, подставляемъ значенія (41) или

$$p = -\frac{a}{R}\sin\theta, \quad q = \frac{a}{R}\cos\theta$$

въ уравненіе (31). Оно приводится къ

$$\frac{\frac{dR}{R}\cos\theta - \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\sin\theta\,d\theta}{\frac{dR}{R}\sin\theta - \cos\theta\,d\theta} + \frac{\frac{dR}{R}\sin\theta + \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\cos\theta\,d\theta}{\frac{dR}{R}\cos\theta + \sin\theta\,d\theta} = 0,$$

и даетъ

$$\pm\frac{d\theta}{dR} = \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} \quad \text{или} \quad \mp\,d\theta = \frac{d\psi}{\sin\psi},$$

если положимъ $R = a\operatorname{cotg}\psi$. Правая часть есть дифференціалъ отъ $\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ (§ 292, b).. Слѣдовательно, получимъ

$$e^{\pm(\theta-\theta_0)} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}, \quad R = \frac{a}{2}\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)} - e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Всѣ эти кривыя, проекціи линій кривизны на направляющую плоскость, можно получить, вращая спираль $R = \frac{a}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta})$ около полюса. Эта спираль выходитъ изъ полюса, какъ Архимедова спираль, и имѣетъ стремленіе обратиться на безконечности въ двѣ логариѳмическія спирали, встрѣчающія радіусы векторы подъ угломъ въ 45^0.

c) Для опредѣленія асимптотическихъ линій катеноида, воспользуемся формулою (40) и замѣтимъ, что функція $z = f(R)$ въ даниомъ случаѣ неявно

опредѣляется уравненіемъ меридіана $R = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$. Изъ него, взявъ два раза производныя по R, получаемъ

$$\frac{1}{f'(R)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}\right), \qquad -\frac{f''(R)}{f'^3(R)} = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right) = \frac{R}{a^2},$$

такъ что формула (40) переходитъ въ

$$\pm\frac{d\theta}{dR} = \frac{f'(R)}{a}, \text{ откуда } \pm a(\theta - \theta_0) = f(R).$$

Отсюда видимъ, что проекціи асимптотическихъ линій на плоскость горлового круга (Kehlkreis), въ полярныхъ координатахъ, изображаются уравненіемъ, получаемымъ путемъ замѣны z черезъ $\pm a(\theta - \theta_0)$ въ уравненіи меридіана

$$R = \frac{a}{2}\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)} + e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Всѣ эти кривыя получаются вращеніемъ спирали

$$R = \frac{a}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right),$$

около полюса. Слѣдовательно, достаточно знать одну асимптотическую линію, чтобы знать всѣ. Уравненія

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)\cos\theta, \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)\sin\theta, \qquad z = a\theta,$$

изображаютъ одну изъ асимптотическихъ линій, и мы ее уже изслѣдовали въ § 657. Свойство этой кривой, состоящее въ томъ, что оно встрѣчаетъ параллели катеноида подъ угломъ въ 45^0, становится теперь очевиднымъ Дѣйствительно, такъ какъ катенондъ минимальная поверхность (§ 690, а), то его асимптотическія линіи должны встрѣчать его линіи кривизны, т. е. меридіаны и параллели подъ угломъ въ 45^0. Другое свойство нашей кривой, относящееся къ ея радіусу кручения, есть непосредственное слѣдствіе теоремы Эннепера. Въ самомъ дѣлѣ, если обозначимъ черезъ n отрѣзокъ нормали къ поверхности между точкою на поверхности и пересѣченіемъ нормали съ осью вращенія, то главные радіусы кривизны будутъ $\varrho_1 = n$, $\varrho_2 = -n$. Формула, данная въ концѣ § 703, тотчасъ и дастъ $\varkappa = \pm n$.

d) Слѣдуетъ замѣтить еще асимптотическія линіи псевдосферы (§ 693, а). Обозначимъ черезъ ψ уголъ между касательною и осью вращенія, такъ что будемъ имѣть $R = a\sin\psi$, $f'(R) = -\operatorname{cotg}\psi$, а потому $f''(R) = \frac{1}{a\cos\psi\sin^2\psi}$. Формула (40) дастъ $\pm d\theta = \frac{d\psi}{\sin\psi}$, откуда

$$\pm(\theta - \theta_0) = \log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$$

и, слѣдовательно,

$$R = \frac{2a}{e^{\pm(\theta-\theta_0)} + e^{\mp(\theta-\theta_0)}}$$

Это уравненіе изображаетъ безчисленное множество положеній, принимаемыхъ *спиралью Пуансо* (Poinsot) $R = 2a/(e^{\theta} + e^{-\theta})$ при вращеніи около полюса. И здѣсь, для изученія всѣхъ асимптотическихъ линій псевдосферы достаточно

изслѣдовать одну изъ нихъ. Разсмотримъ ту, которая соотвѣтствуетъ уравненію $-\theta = \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$, и замѣтимъ, что

$$\frac{dz}{d\psi} = a\frac{dx}{dR}\cos\psi = -a\frac{\cos^2\psi}{\sin\psi} = -\frac{a}{\sin\psi} + a\sin\psi.$$

Отсюда, $z = -a\left(\log \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} + \cos\psi\right)$. Асимптотическая линія, которую мы желаемъ разсмотрѣть, изобразится уравненіемъ

$$x = \frac{2a\cos\theta}{e^{\theta}+e^{-\theta}}, \quad y = \frac{2a\sin\theta}{e^{\theta}+e^{-\theta}}, \quad z = a\left(\theta - \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}\right).$$

Поступая такъ, какъ въ § 657, легко найдемъ $s = a\theta$. Итакъ, всякая (не слишкомъ большая) дуга асимптотической линіи равна дугѣ, отсѣкаемой меридіанами въ крайнихъ точкахъ на наибольшей параллели. Обозначимъ теперь черезъ l, m, n направляющіе косинусы оси вращенія относительно фундаментальнаго тріэдра кривой. Дифференцируя z, получимъ

$$l = \frac{dz}{ds} = -\frac{\sin\psi}{a}\frac{dz}{d\psi}\cos^2\psi.$$

Съ другой стороны (§ 638), имѣемъ

$$\frac{dl}{ds} = \frac{n}{\varrho}, \quad \frac{dm}{ds} = \frac{n}{\tau}, \tag{42}$$

а значенія m и τ намъ уже извѣстны. Дѣйствительно, $m = -\sin\psi$ есть косинусъ угла, образуемаго бинормалью (нормалью къ поверхности) съ осью z-овъ. Кромѣ того, изъ теоремы Эннепера имѣемъ тотчасъ $\tau = \pm a$. Положимъ $\tau = a$ (влѣво завитая асимптотическая линія) и замѣтимъ, что изъ второй формулы (42) вытекаетъ

$$n = a\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{d\theta} = \cos\psi\sin\psi.$$

Отсюда, подставляя въ первую формулу (42), находимъ

$$\varrho = \frac{a}{2\sin\psi} = \frac{a}{4}(e^{\theta}+e^{-\theta}) = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

Замѣтимъ, что въ точкѣ касанія асимптотической линіи съ наибольшею параллелью радіусъ кривизны равенъ $\frac{1}{2}a$, между тѣмъ, какъ по теоремѣ Бельтрами, онъ долженъ былъ бы быть равнымъ $\frac{2}{3}a$. Это несогласіе объясняется тѣмъ, что вышеупомянутая параллель (общее мѣсто точекъ возврата меридіана) есть особенная линія поверхности *).

---

*) Для болѣе подробнаго изученія теоріи поверхностей можно указать на русскомъ языкѣ переводъ Дифференціальнаго исчисленія Ж. Бертрана, книга III, а на нѣмецкомъ переводъ сочиненія Bianchi. Differential. Geometrie. 1911 годъ.

КНИГА СЕДЬМАЯ.

Интегральное Исчисленіе.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ.

Основныя понятія.

708. Всякая функція, дифференціалъ которой равенъ $f(x)\,dx$, называется интеграломъ отъ $f(x)\,dx$ и обозначается символомъ $\int f(x)\,dx$. Иными словами, когда пишутъ $\int f(x)\,dx = F(x)$, то этимъ утверждаютъ, что $dF(x) = f(x)\,dx$. Такъ какъ изъ этихъ двухъ равенствъ, исключая тотъ или другой изъ символовъ f или F, получаемъ

$$f(x)\,dx = d\int f(x)\,dx, \qquad \int dF(x) = F(x),$$

то видимъ, что знаки d и $\int$ взаимно уничтожаются. Поэтому, называя интегрированіемъ операцію, изображаемую знакомъ $\int$ и дающую F по данному f, можемъ сказать, что интегрированіе есть операція, обратная дифференцированію. Намъ уже извѣстно (§ 307, b), что если $F(x)$ есть нѣкоторая функція, имѣющая дифференціалъ, равный $f(x)\,dx$, то всѣ другія функціи, имѣющія тотъ же дифференціалъ изобразятся формулою $F(x) + C$, гдѣ C произвольная постоянная. Если же составимъ разность значеній, принимаемыхъ на границахъ нѣкотораго интервала (a, b) интеграломъ $\int f(x)\,dx$, соотвѣтствующимъ какому угодно данному значенію C, то получимъ вполнѣ опредѣленное число, потому что при составленіи этой разности C сокращается. Эту разность (въ которой уменьшаемое соотвѣтствуетъ верхней границѣ b, а вычитаемое нижней a) обозначаютъ символомъ $\int_a^b f(x)\,dx$ и называютъ опредѣ-

леннымъ интегралomъ (взятымъ въ предѣлахъ a и b), въ отличіе отъ неопредѣленнаго интеграла $\int f(x)\,dx$. Итакъ, имѣемъ

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Эти опредѣленія, однако, неудовлетворительны, потому что ничего не говорятъ ни о существованіи интеграла, ни о способахъ его вычисленія. Ихъ можно разсматривать лишь, какъ объясненія символовъ, а потому мы постараемся преобразовать ихъ въ другія, служащія опредѣленіемъ самой операціи, изображаемой этими символами.

708a. Чтобы избѣжать въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ различныхъ отступленій, сдѣлаемъ сперва нѣкоторыя замѣчанія о такъ называемомъ разложеніи интервала (a, b) на безконечно большое число безконечно малыхъ частей, съ которыми намъ придется имѣть дѣло. Положимъ, для опредѣленности, что $a < b$, и разложимъ интервалъ (a, b) на частные интервалы

(1) $$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ \ldots,\ (x_{n-1}, b)$$

гдѣ числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ подчинены единственному условію

$$a < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < b.$$

Числа $h_1 = x_1 - a$, $h_2 = x_2 - x_1$, $\ldots$, $h_n = b - x_{n-1}$, положительныя при сдѣланномъ условіи, называются длинами интерваловъ (1). Сумма ихъ, каково бы ни было число n, всегда равна $b - a$, т. е. длинѣ даннаго интервала (a, b). Мы будемъ говорить, что намъ дано разложеніе

(I) $$(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b) \text{ или } (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

интервала (a, b) на частные интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Замѣняя рядъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ какимъ нибудь другимъ рядомъ чиселъ $x_1', x_2', \ldots, x'_{n'-1}$, также расположенныхъ по порядку ихъ величинъ, получимъ другое разложеніе того же интервала (a, b)

(II) $$(a, x_1', x_2', \ldots, x'_{n'-1}, b) \text{ или } h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$$

на частные интервалы $h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$, гдѣ $h_i' = x_i' - x_{i-1}'$ при $i = 1, 2, \ldots, n'$ ($x_0' = a$, $x_{n'}' = b$). Продолжая такимъ образомъ, мы получимъ нѣкоторую послѣдовательность

(I), (II), (III), . . .

разложеній интервала (a, b). Мы будемъ разсматривать лишь такія послѣдовательности разложеній, въ которыхъ длины всѣхъ частныхъ интерваловъ, или, какъ будемъ говорить для сокращенія рѣчи, всѣ частные интервалы безпредѣльно убываютъ, т. е. стре-

мятся къ нулю, при чемъ, очевидно, число ихъ должно возрастать безпредѣльно, потому что сумма ихъ всегда остается равною $b-a$. Переходъ отъ одного разложенія такой послѣдовательности къ другому, отъ него къ третьему и т. д. и называютъ разложеніемъ интервала (a, b) на безконечно большое число безконечно малыхъ частей. Ясно, что существуетъ безчисленное множество различныхъ послѣдовательностей, удовлетворяющихъ поставленному условію; это и выражаютъ, когда говорятъ, что интервалъ (a, b) можно разложить на безконечно большое число безконечно малыхъ частей безчисленнымъ множествомъ способовъ. Разсматривая числа a и b, какъ абсциссы начала и конца нѣкотораго прямолинейнаго отрѣзка AB, мы видимъ, что $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ будутъ абсцисами точекъ, лежащихъ между A и B. Каждому разложенію интервала (a, b) на частные интервалы соотвѣтствуетъ раздѣленіе отрѣзка AB на частные отрѣзки. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ мы будемъ называть, для краткости, точками дѣленія интервала или отрѣзка. Разсматривая два послѣдовательныхъ разложенія, мы будемъ говорить, что второе разложеніе есть продолженіе перваго, если всѣ точки дѣленія перваго разложенія входятъ въ составъ второго, иными словами, если второе разложеніе получается черезъ подраздѣленіе интерваловъ (отрѣзковъ) перваго на болѣе мелкія части. Когда даны какія нибудь два разложенія

$$(a, x_1', x_2', \ldots, x'_{n'-1}, b) \quad \text{и} \quad (a, x_1'', x_2'', \ldots, x''_{n''-1}, b),$$

то изъ нихъ всегда можно составить такое третье

$$(a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b),$$

которое будетъ продолженіемъ какъ перваго, такъ и второго, подраздѣливъ интервалы (отрѣзки) перваго точками дѣленія второго, или интервалы второго точками дѣленія перваго, при чемъ, очевидно, получается одно и то же разложеніе. Числа

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

будутъ не что иное, какъ числа

$$x_1', x_2', \ldots, x'_{n'-1}, \quad x_1'', x_2'', \ldots, x''_{n''-1},$$

расположенныя по порядку ихъ величинъ, при чемъ, конечно, если $x_i' = x_k''$, то эти два числа дадутъ только одно число x_ε. Ясно, что всякій интервалъ перваго разложенія h_i' равенъ либо одному изъ интерваловъ h_ε, либо суммѣ нѣсколькихъ интерваловъ третьяго разложенія, и то же самое можно сказать и о каждомъ интервалѣ второго разложенія.

709. Перейдемъ теперь къ выясненію понятія объ опредѣленномъ интегралѣ $\int_a^b f(x)\,dx$, который, по опредѣленію, данному въ

§ 708, есть разность $F(b)-F(a)$, если $F'(x)=f(x)$. Возьмемъ какое нибудь разложеніе интервала $(a,\ b)$ на n частныхъ интерваловъ $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n$, гдѣ $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $x_0=a$, $x_n=b$, примѣнимъ къ каждому изъ нихъ теорему Лагранжа (§ 306). Обозначая черезъ a_i нѣкоторое опредѣленное число, лежащее въ интервалѣ $(x_{i-1},\ x_i)$, получимъ (принимая во вниманіе, что $F'(x)=f(x)$)

$$F(x_1)-F(a)=h_1f(a_1).\ F(x_2)-F(x_1)=h_2f(a_2),\ \ldots,\ F(b)-F(x_{n-1})=h_nf(a_n);$$

складывая эти равенства и полагая

$$\sigma=h_1f(a_1)+h_2f(a_2)+\cdots+h_nf(a_n)=\sum_1^n h_if(a_i),$$

получимъ

$$F(b)-F(a)=\sigma.$$

Формула эта еще не даетъ, сама по себѣ, способа для вычисленія разности $F(b)-F(a)$, потому что числа a_i намъ неизвѣстны. Но съ ея помощью, мы получимъ весьма важный результатъ. Сравнимъ сумму σ съ другою суммою

$$\tau=h_1f(\beta_1)+h_2f(\beta_2)+\cdots+h_nf(\beta_n)=\sum_1^n h_if(\beta_i),$$

гдѣ β_i обозначаетъ любое число въ интервалѣ $(x_{i-1},\ x_i)$, и можетъ быть выбираемо нами по произволу. Предположимъ теперь, что функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ $(a,\ b)$. На основаніи теоремы Кантора (§ 279) извѣстно, что всякому, сколько угодно малому, положительному числу ε соотвѣтствуетъ другое положительное число η, такое, что когда всѣ $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n$ будутъ меньше η, то $|f(\beta_i)-f(a_i)|$ будетъ меньше ε для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Поэтому

$$|\tau-\sigma|\leq\sum_1^n h_i\,|f(\beta_i)-f(a_i)|<\varepsilon\cdot\sum_1^n h_i=(b-a)\,\varepsilon.$$

Замѣчая, что число $\varepsilon(b-a)$ можно сдѣлать меньшимъ любого положительнаго числа ε', взявъ $\varepsilon<\frac{\varepsilon'}{b-a}$, приходимъ къ слѣдующему заключенію: Послѣдовательность значеній суммы τ

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_m,\ \ldots,$$

соотвѣтствующихъ любой послѣдовательности разложеній интервала $(a,\ b)$ на частные интервалы, стремящіеся одновременно къ нулю, стремится къ предѣлу, равному σ, т. е. опредѣленному интегралу

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Этотъ результатъ можно формулировать болѣе кратко, не опасаясь недоразумѣнія, послѣ всего сказаннаго выше, а именно такъ: сумма $\tau = \sum_1^n h_i f(\beta_i)$ стремится къ предѣлу, равному $\int_a^b f(x)\,dx$, когда всѣ интервалы h_i стремятся къ нулю, и записать этотъ результатъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\lim_{h_i=0} \sum_1^n h_i f(\beta_i) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Всѣ наши разсужденія основаны были на томъ: 1) что существуетъ первообразная функція $F(x)$ отъ $f(x)$ и 2) что $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ. Теперь мы отрѣшимся отъ этихъ предположеній и ограничимъ функцію $f(x)$ только условіемъ конечности ея въ интервалѣ (a, b).

710. Опредѣленіе интеграла. Руководствуясь вышеизложенными соображеніями, мы можемъ теперь установить нижеслѣдующее опредѣленіе интеграла: „Разложимъ интервалъ (a, b) какимъ угодно способомъ на частные интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$, стремящіеся одновременно къ нулю, при чемъ число ихъ безпредѣльно возрастаетъ; обозначимъ черезъ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ какія угодно числа, лежащія между нижнею и верхнею границами функціи $f(x)$ въ соотвѣтствующихъ интервалахъ (или совпадающія съ этими границами), и составимъ сумму

$$\tau = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n = \sum_1^n h_i f_i.$$

Если эта сумма всегда стремится къ одному и тому же предѣлу, то этотъ предѣлъ называютъ опредѣленнымъ интеграломъ отъ $f(x)\,dx$, взятымъ отъ a до b, и обозначаютъ знакомъ $\int_a^b f(x)\,dx$".

Число a называютъ нижнимъ, а b верхнимъ предѣломъ интеграла. Разсматривая затѣмъ верхній предѣлъ b, какъ число перемѣнное, и обозначая его буквою x, получимъ опредѣленіе неопредѣленнаго интеграла $F(x)$ *). Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ $f(x)\,dx$ называютъ элементомъ интеграла и говорятъ, что интегралъ есть сумма безконечно большого числа безконечно малыхъ элементовъ.

[**Примѣчаніе.** Точный смыслъ установленнаго здѣсь опредѣленія $\int_a^b f(x)\,dx$, какъ видно изъ разъясненій, сдѣланныхъ въ

*) Такая терминологія не всѣми принята; неопредѣленнымъ интеграломъ отъ $f(x)\,dx$ называютъ обыкновенно общее выраженіе $F(x)+C$ всѣхъ функцій, дифференціалъ которыхъ есть $f(x)\,dx$.

§§ 708a и 709, состоитъ въ слѣдующемъ: Если всѣ послѣдовательности

(τ) $$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$$

значеній суммы τ, соотвѣтствующія всевозможнымъ послѣдовательностямъ разложеній интервала (a, b), для которыхъ всѣ h_i стремятся къ нулю, имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ, независимо отъ выбора чиселъ f_i въ указанныхъ границахъ, то этотъ предѣлъ и будетъ, по опредѣленію, $\int_a^b f(x)\,dx$. Если существуетъ упомянутый предѣлъ, то говорятъ, что функція $f(x)$ интегрируема въ интервалѣ (a, b). При выводѣ условій интегрируемости (§ 714) и нужно имѣть въ виду вышеприведенное толкованіе опредѣленія интеграла.]]

711. Прежде чѣмъ перейдемъ къ выводу условій интегрируемости функціи $f(x)$, замѣтимъ теперь же нѣкоторыя свойства интеграла, вытекающія непосредственно изъ его опредѣленія, а именно:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \text{ при } k \text{ постоянномъ},$$

$$\int_a^b (u+v+\cdots)\,dx = \int_a^b u\,dx + \int_a^b v\,dx + \cdots;$$

послѣднее равенство, очевидно, справедливо при любомъ, но конечномъ, числѣ функцій $u, v, \ldots$. Для доказательства стоитъ только перейти къ предѣламъ въ равенствахъ

$$\sum_1^n kh_if_i = k\sum_1^n h_if_i, \quad \sum_1^n h_i(u_i+v_i+\cdots) = \sum_1^n h_iu_i + \sum_1^n h_iv_i + \cdots,$$

предполагая, конечно, что интегралы отъ $f\,dx$, $u\,dx$, $v\,dx$, ... существуютъ. Далѣе, умѣстно будетъ избавиться отъ нѣкоторыхъ ограниченій, заключающихся въ установленномъ выше понятіи объ интегралѣ.

а) Чтобы избавиться отъ необходимости считать $a<b$, условимся полагать

(1) $$\int_a^b = -\int_b^a.$$

Это условіе вполнѣ естественно, потому что, если считать интервалъ $b-a$ числомъ отрицательнымъ, то и всѣ интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$ надо считать отрицательными, между тѣмъ какъ числа $f_1, f_2, \ldots, f_n$ остаются безъ измѣненія. Иными словами, каждый элементъ $f(x)\,dx$

имѣетъ знакъ, одинаковый съ $f(x)$, или противоположный, смотря по тому, будетъ ли dx положительнымъ или отрицательнымъ при измѣненіи x отъ нижняго предѣла a до верхняго b. Теперь легко показать, что всегда будемъ имѣть

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b. \tag{2}$$

Это свойство, очевидно, когда c лежитъ между a и b *); въ противномъ же случаѣ, если, напримѣръ, $a<b<c$, тотчасъ найдемъ, пользуясь равенствомъ (1),

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

b) Опредѣленіе $\int_a^b f(x)\,dx$ требуетъ, чтобы $f(x)$ оставалась конечною въ интервалѣ (a, b). Но это ограниченіе отпадаетъ въ случаѣ, если $f(x)=\infty$ при $x=c$, съ помощью соглашенія

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b.$$

c) Часто приходится также разсматривать интегралы, распространенные на безконечные интервалы; но ихъ надо разсматривать, какъ предѣлы другихъ, распространенныхъ на конечные интервалы. А именно, въ видѣ опредѣленій полагаютъ

$$\int_a^{\pm\infty} = \lim_{x=\pm\infty} \int_a^x, \qquad \int_{\pm\infty}^a = \lim_{x=\pm\infty} \int_x^a,$$

и, кромѣ того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^a + \int_a^\infty.$$

Легко убѣдиться, что вышеизложенныя свойства интеграловъ при конечномъ интервалѣ распространяются и на случай безконечнаго интервала.

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, если интегралъ существуетъ, то мы можемъ выбирать точки дѣленія интервала (a, b) по нашему произволу, а поэтому можемъ сперва разложить его на два интервала (a, c) и (c, b) и затѣмъ разлагать далѣе каждый изъ нихъ.

d) На основаніи предыдущихъ опредѣленій, нельзя, вообще говоря, разсматривать интегралъ, распространенный на безконечный интервалъ, какъ предѣлъ, къ которому стремится сумма безконечнаго ряда

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots,$$

когда всѣ h_i стремятся къ нулю. Но мы укажемъ здѣсь же одинъ весьма общій случай, когда такое разсмотрѣніе законно. Положимъ, что интервалъ (a, ∞) разбитъ на безконечное число частныхъ интерваловъ h_1, h_2, h_3, ..., стремящихся одновременно къ нулю, и для каждаго интервала h_i выбрано значеніе f_i, лежащее между нижнею и верхнею границами функціи $f(x)$ въ этомъ интервалѣ. Положимъ, что рядъ

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots$$

сходящійся и сумма его стремится къ опредѣленному предѣлу, когда всѣ h_i стремятся къ нулю; обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ $\varrho(a)$, такъ что

$$\varrho(a) = \lim \{ h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots \}.$$

Если $\varrho(x)$, составленная по тому же закону, стремится къ нулю при возрастаніи x до ∞, то можно утверждать, что

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \varrho(a).$$

Дѣйствительно, полагая $h_1 = x_1 - a$, $h_2 = x_2 - x_1$, ..., $h_i = x - x_{i-1}$ и т. д., мы можемъ написать, что

$$\varrho(a) = \lim \{ (x_1 - a) f_1 + (x_2 - x_1) f_2 + \cdots + (x - x_{i-1}) f_i \}$$
$$+ \lim \{ (x_{i+1} - x) f_{i+1} + (x_{i+2} - x_{i+1}) f_{i+2} + \cdots \}$$
$$\text{т. е. } \varrho(a) = \int_a^x f(x)\, dx + \varrho(x).$$

Увеличивая x до ∞, и замѣчая, что $\lim\limits_{x=\infty} \varrho(x) = 0$ по условію, находимъ

$$\varrho(a) = \int_a^{\infty} f(x)\, dx,$$

(см. примѣръ e) въ § 721).

712. Изъ безчисленнаго множества способовъ разложенія интервала (a, b) на безконечно малые интервалы h_1, h_2, h_3, ..., самымъ простымъ, безъ сомнѣнія, будетъ разложеніе на равныя между собою части; въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$\tau_n = h(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = (b - a)\, \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}{n}$$

и, слѣдовательно, такъ какъ $\lim h_i = \lim \frac{b-a}{n} = 0$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_1+f_2+\cdots+f_n}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

На этомъ основаніи правую часть равенства называютъ среднимъ значеніемъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b). Такъ какъ всѣ числа f_i лежатъ между нижнею границею λ и верхнею границею μ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b), то въ тѣхъ же границахъ лежитъ среднее ариѳметическое этихъ чиселъ, а потому и среднее значеніе $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) лежитъ между λ и μ. Разсмотримъ теперь функцію

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

дадимъ верхнему предѣлу x приращеніе h и, припоминая свойство (2), получимъ

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx = h f_0,$$

гдѣ f_0 есть среднее значеніе $f(x)$ въ $(x, x+h)$, остающееся конечнымъ при приближеніи h къ нулю. Отсюда видимъ, что

$$\lim_{h=0} F(x+h) = F(x),$$

т. е. *функція $F(x)$ непрерывна.*

713. Если интегрируемая функція $f(x)$ непрерывна, то можно сказать еще больше, потому что тогда λ и μ будутъ частными значеніями функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) (§ 278), и функція $f(x)$ при переходѣ отъ одного къ другому, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ сдѣлается равною своему среднему значенію въ (a, b) (§ 276). Поэтому, для нѣкотораго, надлежащимъ образомъ выбраннаго, числа ξ между a и b, будемъ имѣть

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi). \tag{3}$$

Теперь легко понять, что данное въ § 710 опредѣленіе интеграла совпадаетъ съ первоначально высказаннымъ въ § 708, а именно, что производная отъ $F(x)$ есть $f(x)$. Дѣйствительно, примѣняя формулу (3) къ интервалу $(x, x+h)$, получимъ $F(x+h) - F(x) = h f(\xi)$,

гдѣ ξ лежитъ между x и $x+h$, а поэтому стремится къ предѣлу x, когда h стремится къ нулю. Отсюда вытекаетъ

$$F'(x) = \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim f(\xi) = f(x).$$

Изъ вышеизложеннаго ясно, что формула (3) есть не что иное, какъ формула Лагранжа, примѣненная къ опредѣленному интегралу. Только въ томъ случаѣ, когда $f(x)$ разрывна, прежнее и новое опредѣленіе интеграла могутъ быть не равносильными, и дѣйствительно, можно доказать [1]), что существуютъ случаи, когда $f(x)$ имѣетъ первообразную функцію, а интеграла отъ $f(x)\,dx$, какъ предѣла суммы, не существуетъ, т. е. функція не интегрируема въ смыслѣ § 710. И наоборотъ, легко построить функцію, имѣющую интегралъ по новому опредѣленію, и не имѣющую первообразной функціи (для этого достаточно, напримѣръ, измѣнить значенія непрерывной функціи въ конечномъ числѣ точекъ). Во всякомъ случаѣ, изъ § 709 ясно, что если существуютъ интегралы, согласно обоимъ опредѣленіямъ, то они совпадаютъ, такъ что опредѣленія не противорѣчивы.

Интегрируемость.

714. Условіе интегрируемости функціи дается слѣдующею теоремою:

Теорема. Для существованія $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая послѣдовательность разложеній интервала (a, b) на безконечно малые интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$, для которой сумма

$$\omega_n = h_1\mathcal{O}_1 + h_2\mathcal{O}_2 + \cdots + h_n\mathcal{O}_n,$$

гдѣ $\mathcal{O}_i$ обозначаетъ колебаніе *) функціи $f(x)$ въ интервалѣ h_i, стремится къ нулю, когда всѣ h_i стремятся къ нулю, а число ихъ возрастаетъ безпредѣльно.

Доказательство. а) Если интегралъ существуетъ, то это значитъ, что сумма $\tau = \sum_1^n h_i f_i$ стремится къ одному и тому же предѣлу, независимо отъ выбора чиселъ f_i въ соотвѣтствующихъ

---

[1]) Volterra (Giornale di Mathematiche, 1881, стр. 334).

*) Напомнимъ, что колебаніемъ функціи въ нѣкоторомъ интервалѣ называется разность между верхнею и нижнею границами функціи въ этомъ интервалѣ. Число b можно считать большимъ a, т. е. всѣ $h_i > 0$.

интервалахъ. Полагая одинъ разъ f_i равными верхнимъ, а другой разъ нижнимъ границамъ функціи f въ соотвѣтствующихъ интервалахъ, и вычитая второе изъ полученныхъ выраженій τ изъ перваго, получимъ (переходя къ предѣламъ) $\lim \omega = 0$, какова бы ни была послѣдовательность разложеній интервала (a, b) на безконечно малые элементы. Слѣдовательно, условіе, высказанное въ теоремѣ, необходимо. Достаточность его будетъ вытекать изъ слѣдующихъ трехъ вспомогательныхъ теоремъ.

b) Если $\lim \omega = 0$ для любой послѣдовательности разложеній (a, b) на безконечно малые элементы (а не для одной только, какъ того требуетъ теорема), то суммы

$$\tau' = \sum_1^{n'} h_i' f_i' \quad \text{и} \quad \tau'' = \sum_1^{n''} h_i'' f_i'',$$

соотвѣтствующія двумъ различнымъ послѣдовательностямъ разложеній интервала (a, b), не могутъ стремиться къ различнымъ предѣламъ. Дѣйствительно, возьмемъ какое нибудь разложеніе $(h_1', h_2', \ldots, h_{n'}')$ изъ первой послѣдовательности и какое нибудь разложеніе $(h_1'', h_2'', \ldots, h_{n''}'')$ изъ второй, и составимъ изъ нихъ третье $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, указаннымъ въ § 708a путемъ, такъ что третье разложеніе будетъ продолженіемъ какъ перваго, такъ и второго. Всякій интервалъ h_i' будетъ состоять изъ одного или нѣсколькихъ интерваловъ h_i; то же самое можно сказать о каждомъ интервалѣ h_i''. Положимъ, напримѣръ, что $h_i' = h_{r+1} + h_{r+2} + \cdots + h_s$. Выберемъ для каждаго новаго интервала h_i любое значеніе f_i между нижнею и верхнею границею функціи $f(x)$ въ этомъ интервалѣ. Мы можемъ тогда написать выраженіе $h_i' f_i'$ въ видѣ

$$h_i' f_i' = h_{r+1} f_{r+1} + h_{r+2} f_{r+2} + \cdots + h_s f_s$$
$$+ h_{r+1}(f_i' - f_{r+1}) + h_{r+2}(f_i' - f_{r+2}) + \cdots + h_s(f_i' - f_s).$$

Вторая часть этой суммы (написанная во второй строкѣ) не превзойдетъ произведенія Θ_i' на $h_{r+1} + h_{r+2} + \cdots + h_s$, т. е. числа $h_i' \Theta_i'$. Складывая всѣ такія равенства, соотвѣтствующія значеніямъ $i = 1, 2, \ldots, n'$, обозначая $\sum_1^n h_i f_i$ черезъ τ, и замѣчая, что все сказанное выше примѣнимо и къ интерваламъ h_i'', получимъ

$$\tau' = \tau + \varrho', \quad \tau'' = \tau + \varrho'',$$

гдѣ

$$|\varrho'| \leqq \omega', \quad |\varrho''| \leqq \omega'',$$

а ω' и ω'' значенія ω для первой и второй послѣдовательности. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\tau' - \tau'' = \varrho' - \varrho'', \quad |\tau' - \tau''| \leqq \omega' + \omega''.$$

По условію ω' и ω'' стремятся къ нулю, когда всѣ h_i' и h_i'' стремятся къ нулю, поэтому тогда и $|\tau' - \tau''|$ стремится къ нулю, а потому τ' не можетъ стремиться къ какому нибудь предѣлу, если τ'' не стремится къ тому же предѣлу.

c) Разсмотримъ теперь какую нибудь опредѣленную послѣдовательность разложеній и соотвѣтствующія ей послѣдовательности значеній τ

(τ) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m, \ldots$

и значеній ω

(ω) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, \ldots$

Мы докажемъ, что, если послѣдовательность (ω) имѣетъ предѣломъ нуль, т. е. $\lim\limits_{m=\infty} \omega_m = 0$, то послѣдовательность (τ) имѣетъ опредѣленный и конечный предѣлъ. Для этого намъ достаточно (§ 139) показать, что, каково бы ни было наперед заданное положительное число ε, существуетъ такое число k, что

$$|\tau_{m'} - \tau_{m''}| < \varepsilon,$$

если $\tau_{m'}$ и $\tau_{m''}$ — любые два члена послѣдовательности (τ), для которыхъ указатели m' и m'' оба больше k. Предполагая, что ε дано, мы возьмемъ такое число k, чтобы для всякаго $m > k$ выполнялось неравенство

$$\omega_m < \frac{\varepsilon}{2};$$

это сдѣлать можно въ виду допущенія, что $\lim\limits_{m=\infty} \omega_m = 0$. Возьмемъ теперь два произвольныхъ цѣлыхъ числа m' и m'', большихъ k. Ясно, что къ суммамъ $\tau_{m'}$ и $\tau_{m''}$ можно примѣнить все сказанное въ пунктѣ b) о суммахъ τ' и τ'', такъ что мы получаемъ

$$|\tau_{m'} - \tau_{m''}| \leqq \omega_{m'} + \omega_{m''} < \varepsilon \quad |\, m', \; m'' > k \,|,$$

что и надо было доказать.

d) Для доказательства основной теоремы этого параграфа остается еще доказать, что, если ω стремится къ нулю при какой нибудь одной послѣдовательности разложеній интервала (a, b) на безконечно малыя части, то оно будетъ стремиться къ нулю и при всякой другой послѣдовательности. Положимъ, что дана нѣкоторая послѣдовательность разложеній, для которой $\lim \omega = 0$, и пусть $h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$, система интерваловъ въ одномъ изъ разложеній этой послѣдовательности. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно считать, что ω', т. е. значеніе ω, соотвѣтствующее этой системѣ, уже меньше ε. Далѣе, относительно интерваловъ $h_1'', h_2'', \ldots, h_{n''}''$ какого нибудь разло-

женія, принадлежащаго другой послѣдовательности, можно предположить, что всѣ h_i'' уже меньше $\frac{\eta}{n'}$, гдѣ η—другое, сколь угодно малое, положительное число, потому что $\lim h_i''$ также равенъ нулю. Замѣтивъ это, разсмотримъ опять, какъ въ пунктѣ b), разложеніе съ интервалами $h_1, h_2, \ldots, h_n$, составляющее продолженіе какъ перваго, такъ и второго разложенія. Подобно тому, что было получено въ пунктѣ b), здѣсь будемъ имѣть

$$h_i'\mathcal{O}_i' = h_{r+1}\mathcal{O}_{r+1} + h_{r+2}\mathcal{O}_{r+2} + h_{r+3}\mathcal{O}_{r+3} + \cdots + h_s\mathcal{O}_s$$
$$+ h_{r+1}(\mathcal{O}_i' - \mathcal{O}_{r+1}) + h_{r+2}(\mathcal{O}_i' - \mathcal{O}_{r+2}) + \cdots + h_s(\mathcal{O}_i' - \mathcal{O}_s)$$

или, замѣчая, что $\mathcal{O}_{r+1}, \mathcal{O}_{r+2}, \ldots, \mathcal{O}_s$ не превосходятъ $\mathcal{O}_i'$, находимъ

$$h_i'\mathcal{O}_i' \geqq h_{r+1}\mathcal{O}_{r+1} + h_{r+2}\mathcal{O}_{r+2} + \cdots + h_s\mathcal{O}_s,$$

а суммируя по значку i, получимъ, что $\omega' \geqq \omega$. Разсмотримъ, съ другой стороны, число ω'', соотвѣтствующее разложенію на интервалы $h_1'', h_2'', \ldots, h_{n''}''$. Въ выраженіе этого ω'' входятъ всѣ тѣ члены суммы ω (соотвѣтствующей разложенію на $h_1, h_2, \ldots, h_n$), которые относятся къ такимъ интерваламъ h_i'', внутри которыхъ нѣтъ точекъ дѣленія перваго разложенія на $h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$ (потому что такіе интервалы h_i'' будутъ въ то же время интервалами h_i); кромѣ этихъ членовъ, въ ω'' входятъ и другіе, число которыхъ навѣрно меньше n', потому что они относятся къ тѣмъ изъ интерваловъ h_i'', внутри которыхъ находится, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ перваго разложенія, а число всѣхъ такихъ точекъ равно $n'-1$. Замѣчая, что каждый изъ этихъ послѣднихъ членовъ меньше, чѣмъ произведеніе $\frac{\eta}{n'}$ на колебаніе функціи, навѣрно не превышающее полнаго колебанія $\mathcal{O}$ въ цѣломъ интервалѣ (a, b), мы видимъ, что сумма всѣхъ этихъ членовъ меньше $\eta\mathcal{O}$. Слѣдовательно,

$$\omega'' < \omega + \eta\mathcal{O}, \quad \text{а такъ какъ } \omega' \geqq \omega, \text{ то } \omega'' < \omega' + \eta\mathcal{O} < \varepsilon + \eta\mathcal{O}.$$

При дальнѣйшемъ уменьшеніи интерваловъ h_i'' послѣднее неравенство сохраняетъ свою силу, и ω'' остается меньше числа $\varepsilon + \eta\mathcal{O}$, которое можно сдѣлать сколь угодно малымъ, распоряжаясь числами ε и η. Иначе говоря, $\lim \omega'' = 0$, и теорема доказана.

715. Изъ доказаннаго критеріума интегрируемости мы выведемъ нѣкоторыя полезныя слѣдствія.

а) Если существуетъ интегралъ отъ $f(x)\,dx$, то существуетъ и интегралъ отъ $|f(x)|\,dx$. Въ самомъ дѣлѣ, если функція $f(x)$ не мѣняетъ знака въ интервалѣ, то колебаніе $\mathcal{O}_i'$ функціи $|f(x)|$, очевидно, равно колебанію $\mathcal{O}_i$ функціи $f(x)$ въ томъ же интервалѣ, а если $f(x)$ мѣняетъ знакъ, то $\mathcal{O}_i' < \mathcal{O}_i$. Отсюда всегда $\mathcal{O}_i' \leqq \mathcal{O}_i$,

слѣдовательно, $\omega' \leqq \omega$, и если $\lim \omega = 0$, то и $\lim \omega' = 0$. Замѣтимъ, кромѣ того, что вслѣдствіе неравенства

$$\left| \sum_1^n h_i f_i \right| \leqq \sum_1^n |h_i f_i| ,$$

въ предѣлѣ получаемъ

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqq \int_a^b |f(x)|\, dx .$$

b) Сумма двухъ и вообще конечнаго числа интегрируемыхъ функцій интегрируема. Эта теорема, которую мы выше указали (§ 711), какъ непосредственное слѣдствіе опредѣленія интеграла, можетъ быть также выведена изъ условія интегрируемости. Нужно только замѣтить, что колебаніе суммы нѣсколькихъ функцій въ данномъ интервалѣ не больше суммы колебаній слагаемыхъ въ томъ же интервалѣ. Дѣйствительно, если λ' и μ' — границы функціи u, λ'' и μ'' — границы функціи v, то $\lambda' + \lambda'' \leqq u + v \leqq \mu' + \mu''$. Слѣдовательно, нижняя граница λ функціи $u + v$ не меньше $\lambda' + \lambda''$, а верхняя μ не больше $\mu' + \mu''$, такъ что колебаніе Θ функціи $(u + v)$ удовлетворяетъ неравенству $\Theta = \mu - \lambda \leqq \Theta' + \Theta''$. Примѣняя это неравенство къ каждому интервалу h_i и складывая, получимъ $\omega \leqq \omega' + \omega''$, откуда $\lim \omega = 0$, если $\lim \omega' = \lim \omega'' = 0$.

c) Произведеніе двухъ или нѣсколькихъ интегрируемыхъ функцій (при конечномъ числѣ сомножителей) интегрируемо. Въ самомъ дѣлѣ*), обозначая черезъ c число, не мéньшее, чѣмъ наибольшее изъ чиселъ 0, $-\lambda'$, $-\lambda''$, имѣемъ

$$(\lambda' + c)(\lambda'' + c) \leqq (u + c)(v + c) \leqq (\mu' + c)(\mu'' + c),$$

откуда,

$$\lambda'\lambda'' - c(\Theta' + \Theta'') \leqq uv \leqq \mu'\mu'' + c(\Theta' + \Theta''),$$

а потому

$$\Theta \leqq \mu'\mu'' - \lambda'\lambda'' + 2c(\Theta' + \Theta'') = \mu'\Theta'' + \lambda''\Theta' + 2c(\Theta' + \Theta''),$$

и наконецъ, $\Theta < k(\Theta' + \Theta'')$, гдѣ k обозначаетъ число, бóльшее $\mu' + 2c$ и $\lambda'' + 2c$. Это заключеніе распространяется на всякій интервалъ h_i, при чемъ значенія c и k остаются неизмѣнными, такъ какъ $\lambda' \leqq \lambda_i'$, $\lambda'' \leqq \lambda_i''$; $\mu' \geqq \mu_i'$, $\mu'' \geqq \mu_i''$. Отсюда выводится $\Theta_i < k(\Theta_i' + \Theta_i'')$, далѣе, $\omega < k(\omega' + \omega'')$, и потому $\lim \omega = 0$, если $\lim \omega' = 0$ и $\lim \omega'' = 0$.

---

*) Читатель пойметъ, безъ дальнѣйшихъ объясненій, смыслъ вводимыхъ здѣсь и дальше обозначеній.

d) Если $f(x)$ интегрируема, то и $\frac{1}{f(x)}$ интегрируема, при условіи, что $\frac{1}{f(x)}$ остается конечною въ разсматриваемомъ интервалѣ. Если, напримѣръ, $f(x)$ остается постоянно бо́льшею, чѣмъ данное положительное число, то ея нижняя граница $\lambda > 0$, и границы $\frac{1}{f(x)}$ будутъ $\lambda' = \frac{1}{\mu}$, $\mu' = \frac{1}{\lambda}$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\mathcal{O}' = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mathcal{O}}{\lambda\mu} \leqq \frac{\mathcal{O}}{\lambda^2}.$$

Итакъ, въ каждомъ интервалѣ h_i будемъ имѣть $\mathcal{O}_i' \leqq \frac{\mathcal{O}_i}{\lambda^2}$, поэтому и $\omega' \leqq \frac{\omega}{\lambda^2}$ и, наконецъ, $\lim \omega' = 0$, если $\lim \omega = 0$.

e) Частное отъ дѣленія одной интегрируемой функціи на другую такую же есть интегрируемая функція, при условіи, что она остается конечной въ интервалѣ интегрированія. Дѣйствительно, если функціи u и v, по предположенію конечныя, интегрируемы, то и $\frac{1}{v}$, то же конечная, по условію, интегрируема. Слѣдовательно и функція $\frac{u}{v}$, какъ произведеніе u на $\frac{1}{v}$, интегрируема.

f) Укажемъ здѣсь еще одно непосредственное слѣдствіе условія интегрируемости, чтобы имѣть возможность вскорѣ на него сослаться, а именно, что всякая конечная монотонная, т. е. измѣняющаяся постоянно въ одномъ направленіи функція — интегрируема. При этомъ не исключаются и функціи съ разрывами непрерывности (по необходимости обыкновенными) въ предѣлахъ интегрированія. Для такихъ функцій колебанія $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n$ равны абсолютнымъ величинамъ разностей

$$f(x_1) - f(a), \quad f(x_2) - f(x_1), \ldots, \quad f(b) - f(x_{n-1}),$$

которые всѣ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ. Сумма ихъ поэтому равна полному колебанію $\mathcal{O}$ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b), т. е. абсолютной величинѣ разности $f(b) - f(a)$. Поэтому, если $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ дѣлятъ интервалъ (a, b) на равныя части, то

$$\omega = \sum_1^n h_i \mathcal{O}_i = h\mathcal{O}, \quad \lim \omega = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ также интегрируемость всякой конечной функціи съ конечнымъ числомъ максимумовъ и минимумовъ въ интервалѣ интегрированія; стоитъ только разбить интервалъ на такія части, въ которыхъ функція монотонна, чтобы убѣдиться въ сказанномъ.

716. Остановимся здѣсь на минуту, чтобы доказать двѣ теоремы, весьма полезныя при изслѣдованіи опредѣленныхъ интеграловъ.

a) Понятіе о среднемъ значеніи (§ 712) интегрируемой функціи можно обобщить, снабжая интервалъ (a, b) въ каждой его точкѣ x плотностью $\varphi(x)$, которая по условію будетъ всегда положительнымъ числомъ, или замѣняя dx черезъ $\varphi(x)\,dx$, т. е. считая, что величина каждаго частнаго интервала равна не h_i, а $h_i\varphi_i$. Такъ какъ $\lambda \leqq f_i \leqq \mu$, то будемъ имѣть

$$\lambda \sum_1^n h_i \varphi_i \leqq \sum_1^n h_i f_i \varphi_i \leqq \mu \sum_1^n h_i \varphi_i ,$$

потому что $\varphi_i > 0$. Поэтому, предполагая, что $\varphi(x)$ интегрируема, откуда (§ 715, c) слѣдуетъ и интегрируемость $f(x)\varphi(x)$, будемъ имѣть

$$\lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqq \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f_0 \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

гдѣ f_0 число, среднее между λ и μ. Полученный результатъ извѣстенъ подъ именемъ первой теоремы о среднемъ значеніи.

b) Далѣе, положимъ, что $f(x)$ монотонная, а $\varphi(x)$ — какая угодно интегрируемая функція. Мы можемъ написать, что

$$\sum_1^n h_i f_i \varphi_i = (f_1 - f_2) h_1\varphi_1 + (f_2 - f_3)(h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2) + \cdots$$

$$+ (f_{n-1} - f_n)(h_1\varphi_1 + \cdots + h_{n-1}\varphi_{n-1}) + f_n(h_1\varphi_1 + \cdots + h_n\varphi_n).$$

Такъ какъ разности $f_1 - f_2$, $f_2 - f_3$, ... всѣ одного знака, то можно далѣе написать

$$\sum_1^n h_i f_i \varphi_i = \varkappa(f_1 - f_n) + f_n \sum_1^n h_i \varphi_i,$$

гдѣ $\varkappa$ число, среднее между суммами

$$h_1\varphi_1, \quad h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2, \quad \ldots, \quad h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \cdots + h_{n-1}\varphi_{n-1}.$$

Замѣчая (§ 715, f, c), что функція $f(x)\varphi(x)$ интегрируема, видимъ, что, при безпредѣльномъ одновременномъ убываніи всѣхъ h_i,

x должно стремиться къ нѣкоторому предѣлу k, такъ что предыдущее равенство обращается въ слѣдующее:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = k\,[f(a) - f(b)] + f(b)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Число k, очевидно, имѣетъ значеніе, лежащее между значеніями, принимаемыми интеграломъ $\int_a^x \varphi(x)\,dx$ при измѣненіи x отъ a до b. А такъ какъ этотъ интегралъ непрерывная функція отъ x (§ 712), то въ интервалѣ $(a,\ b)$ найдется такое число ξ, что $k = \int_a^\xi \varphi(x)\,dx$. Съ другой стороны, въ силу свойства (2) можно написать

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = k + \int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

[**Примѣчаніе.** То обстоятельство, что число k содержится между нижней границей l и верхней границей m значеній интеграла $\int_a^x \varphi(x)\,dx$, нуждается еще въ доказательствѣ. Если обозначимъ черезъ λ_i, μ_i соотвѣтственно нижную и верхнюю границы значеній $\varphi(x)$ въ интервалѣ $(x_{i-1},\ x_i)$ съ длиною h_i, то—при $\nu = 1, 2, \ldots, n$—

(I) $$\sum_1^\nu h_i\lambda_i \leqq \sum_1^\nu h_i\varphi_i \leqq \sum_1^\nu h_i\mu_i.$$

Въ силу же § 712

$$h_i\,\lambda_i \leqq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x)\,dx \leqq h_i\,\mu_i,$$

откуда, суммируя по значку i отъ 1 до ν, получаемъ

(II) $$\sum_1^\nu h_i\,\lambda_i \leqq \int_a^{x_\nu} \varphi(x)\,dx \leqq \sum_1^\nu h_i\,\mu_i.$$

Изъ соотношеній (I) и (II) заключаемъ, что — при $\nu = 1, 2, \ldots, n$ —

$$\left|\sum_1^\nu h_i\,\varphi_i - \int_a^{x_\nu} \varphi(x)\,dx\right| \leqq \sum_1^\nu h_i(\mu_i - \lambda_i) = \sum_1^\nu h_i\,\mathcal{O}_i \leqq \omega,$$

гдѣ $\omega = \sum_1^n h_i \mathcal{O}_i$. Отсюда

$$\int_a^{x_\nu} \varphi(x)\,dx - \omega \leqq \sum_1^{\nu} h_i \varphi_i \leqq \int_a^{x_\nu} \varphi(x)\,dx + \omega$$

и a fortiori

$$l - \omega \leqq \sum_1^{\nu} h_i \varphi_i \leqq m + \omega \quad [\nu = 1, 2, \ldots, n].$$

Эти же соотношенія должны быть справедливы и для средняго значенія $\varkappa$:

$$l - \omega \leqq \varkappa \leqq m + \omega;$$

переходя къ предѣлу и имѣя въ виду, что $\lim \omega = 0$, получаемъ окончательно

$$l \leqq k \leqq m.]$$

Это вторая теорема о среднемъ значеніи, данная Бонне. Замѣтимъ, что если $f(x)$ была бы разрывною на границахъ a и b, то надо было бы вмѣсто $f(a)$ и $f(b)$ писать соотвѣтственно $f(a+0)$ и $f(b-0)$, потому что послѣднія два числа и будутъ предѣлами f_1 и f_n.

717. Приложенія. a) Чтобы узнать, существуетъ ли интегралъ отъ $f(x)\,dx$, распространенный на интервалъ (a, b), когда $f(x)$ обращается въ безконечность въ нѣкоторой точкѣ c, лежащей между a и b, надо изслѣдовать (§ 711, b), стремятся ли интегралы

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx$$

къ опредѣленнымъ предѣламъ съ приближеніемъ ε и η къ нулю. Для опредѣленности разсмотримъ первый изъ этихъ интеграловъ*). Чтобы этотъ интегралъ стремился къ опредѣленному предѣлу, необходимо и достаточно (§ 264), чтобы

$$\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx - \int_a^{c-\beta} f(x)\,dx = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)\,dx$$

стремился къ нулю, когда α и β, одно независимо отъ другого, стремятся къ нулю. Чтобы узнать, выполнено ли это условіе, можно воспользоваться первою теоремою о среднемъ значеніи. Положимъ, напримѣръ, что $f(x)$ обращается въ ∞ такимъ образомъ, что $g(x) = (c-x)^r f(x)$ стремится къ конечному предѣлу $k \gtrless 0$, съ приближеніемъ x къ c, т. е., какъ говорятъ, что $f(x)$ обращается въ ∞ порядка r при $x = c$. Тогда

$$\int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)\,dx = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} (c-x)^{-r} g(x)\,dx = g_0 \int_{c-\beta}^{c-\alpha} (c-x)^{-r}\,dx,$$

*) Заключеніе, къ которому придемъ, не измѣнится и при разсмотрѣніи второго.

потому что $(c-x)^{-r}$ слѣва отъ c знака не мѣняетъ, и функція $g(x)$, стремящаяся къ предѣлу k, и интегрируемая (какъ произведеніе двухъ интегрируемыхъ функцій), навѣрно имѣетъ среднее значеніе g_0, стремящееся къ тому же предѣлу k, когда α и β стремятся къ 0. Замѣчаемъ теперь, что при $r \gtrless 1$ функція $(c-x)^{-r}$ имѣетъ первообразную функцію $F(x)=\dfrac{(c-x)^{1-r}}{r-1}$, а при $r=1$ первообразная функція отъ $(c-x)^{-1}$ будетъ $-\log(c-x)$. Поэтому

$$\int_{c-\beta}^{c-\alpha}(c-x)^{-r}\,dx = \frac{\alpha^{1-r}-\beta^{1-r}}{r-1}, \text{ при } r \gtrless 1$$

$$= \log\frac{\beta}{\alpha}, \text{ при } r=1.$$

Вопросъ сводится къ тому, чтобы узнать, при какомъ r $\alpha^{1-r}-\beta^{1-r}$ стремится къ 0, когда α и β стремятся къ 0; это, очевидно, будетъ при $r<1$; при $r=1$, $\log\dfrac{\beta}{\alpha}$ ни къ какому предѣлу не стремится. Итакъ, разсматриваемый интегралъ имѣетъ смыслъ лишь тогда, когда $f(x)$ обращается въ ∞ порядка, мѣньшаго единицы.

b) Поставимъ аналогичный вопросъ, когда интегралъ отъ $f(x)\,dx$, распространеніый на безконечный интервалъ (§ 711, c), имѣетъ смыслъ? Чтобы существовалъ предѣлъ $\int_a^b f(x)\,dx$ при b безконечномъ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

стремился къ нулю, когда α и β, одно независимо отъ другого, стремятся къ ∞. Допустимъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи x, $\lim\limits_{x=\infty} x^r f(x) = k \gtrless 0$. Тогда

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha x^{-r} g(x)\,dx = g_0\int_\beta^\alpha x^{-r}\,dx,$$

гдѣ g_0 имѣетъ предѣломъ k. Слѣдовательно, $\alpha^{1-r}-\beta^{1-r}$ должно стремиться къ 0 при безпредѣльномъ возрастаніи α и β, а для этого должно быть $r>1$. Поэтому интегралъ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ только тогда имѣетъ смыслъ, когда $f(x)$ при x безконечномъ будетъ безконечно малымъ порядка, большаго единицы.

[**Примѣчаніе**. Надо замѣтить, что въ пунктахъ a) и b) разсмотрѣны только такіе случаи, когда существуютъ $\lim\limits_{x=c}(c-x)^r f(x)$ и $\lim\limits_{x=\infty} x^r f(x)$, а потому и заключенія относятся только къ такимъ случаямъ.]

c) Интегралъ отъ $f(x)\,dx$, распространенный на безконечный интервалъ не имѣетъ смысла, если функція $g(x)=xf(x)$ стремится къ предѣлу, отличному отъ нуля, при x безконечномъ, но интегралъ этотъ можетъ существовать въ иныхъ случаяхъ, когда $g(x)$ ни къ какому предѣлу не стремится, и даже навѣрно существуетъ, если интегралъ отъ этой функціи $g(x)$, распространенный на любой интервалъ (т. е. взятый отъ нижней до

верхней границы любого конечнаго интервала) будетъ по абсолютной величинѣ меньше нѣкотораго числа k. Дѣйствительно, примѣняя вторую теорему о среднемъ значеніи, имѣемъ

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\xi g(x)\,dx + \frac{1}{\beta}\int_\xi^\beta g(x)\,dx,$$

а слѣдовательно,

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| < k\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right), \qquad \lim\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0,$$

при безпредѣльномъ возрастаніи α и β.

718. Критеріумъ Риманна. Риманнъ указалъ весьма простое средство для испытанія интегрируемости функціи $f(x)$, на основаніи теоремы, доказанной въ § 714, доказавъ, что „для интегрируемости функціи необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары сколь угодно малыхъ положительныхъ чиселъ ε и η можно было указать такое разложеніе интервала интегрированія на частные интервалы, въ которыхъ сумма тѣхъ интерваловъ, гдѣ колебаніе функціи больше или равно ε, была бы меньше η“ *). Прежде всего замѣтимъ, что условіе, установленное въ § 714, очевидно, равносильно слѣдующему: Каково бы ни было данное, сколь угодно малое положительное число α, всегда найдется такое разложеніе интервала (a, b) на частные интервалы, для котораго ω будетъ меньше α. Дѣйствительно, взявъ произвольную послѣдовательность безпредѣльно убывающихъ положительныхъ чиселъ

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \ldots$$

и опредѣляя соотвѣтствующую ей послѣдовательность разложеній интервала (a, b) на частные интервалы, мы и получимъ такую послѣдовательность разложеній, для которой $\lim\omega = 0$. Замѣтивъ это, обозначимъ черезъ l сумму тѣхъ интерваловъ въ нѣкоторомъ разложеніи $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, для которыхъ $\mathcal{O}_i \geqq \varepsilon$. Тогда, очевидно, для этого разложенія будемъ имѣть

$$\omega = h_1\mathcal{O}_1 + h_2\mathcal{O}_2 + \cdots + h_n\mathcal{O}_n \geqq l\varepsilon. \tag{1}$$

Отсюда прямо вытекаетъ необходимость доказываемаго условія. Въ самомъ дѣлѣ, если интегралъ существуетъ, то мы можемъ взять $\omega < \eta\varepsilon$, каковы бы ни были числа ε и η, а тогда изъ (1) найдемъ $l < \eta$. Достаточность этого условія получится изъ другого

*) Cp. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable (2-me édition (1910), t. 2, p. 10).

неравенства, которое вытекаетъ изъ слѣдующаго разсужденія: Такъ какъ ни одно изъ чиселъ $\mathcal{O}_i$ не превосходитъ $\mathcal{O}$ (полнаго колебанія функціи f въ интервалѣ (a, b)), а сумма интерваловъ, въ которыхъ колебаніе меньше ε, равна $b-a-l$, то

$$\omega \leqq \mathcal{O} l + (b-a-l)\,\varepsilon \leqq \mathcal{O} l + (b-a)\,\varepsilon. \tag{2}$$

Поэтому, если для разсматриваемаго разложенія $l < \eta$, то для того же разложенія $\omega \leqq \mathcal{O}\eta + (b-a)\,\varepsilon$, гдѣ вторая часть, вслѣдствіе произвольности чиселъ η и ε можетъ быть сдѣлана меньше любого положительнаго числа α. Слѣдовательно, существуетъ такое разложеніе интервала (a, b), для котораго $\omega < \alpha$, а этого и достаточно для существованія интеграла.

719. Если, напримѣръ, $f(x)$ непрерывна, то по теоремѣ Кантора (§ 279), при данномъ ε можно взять интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$ достаточно малыми, чтобы колебаніе функціи $f(x)$ въ каждомъ изъ нихъ было меньше ε. Слѣдовательно, здѣсь $l = 0$, а потому всякая непрерывная функція интегрируема. Однако, въ то же время ясно, и намъ уже извѣстно (§ 715, f), что и разрывныя функціи могутъ быть интегрируемы. Таковы, напримѣръ, конечныя функціи, съ конечнымъ числомъ разрывовъ (§ 272, a), потому что ихъ точки разрыва, являющіяся въ конечномъ числѣ, могутъ быть заключены въ сколь угодно малые промежутки. Интегрируемы также конечныя функціи съ безконечнымъ числомъ точекъ разрыва, если только число точекъ, въ смежности съ которыми находится безконечное множество разрывовъ, будетъ конечнымъ. Изолируя сперва эти точки сколь угодно малыми интервалами, мы получимъ въ остальной части даннаго интервала лишь конечное число точекъ разрыва, которыя въ свою очередь могутъ быть заключены въ сколь угодно малые интервалы, и сумма l всѣхъ этихъ интерваловъ, первыхъ и вторыхъ (единственныхъ, которые могутъ войти въ составъ l), будетъ сколь угодно мала. Во многихъ другихъ случаяхъ [1]) функціи могутъ быть интегрируемы, несмотря на безчисленное множество разрывовъ въ интервалѣ интегрированія; и легко доказать [1]), что только вполнѣ разрывныя функціи (§ 272, c) никогда не бываютъ интегрируемы. Во всякомъ случаѣ, мы видимъ, что непрерывность функціи достаточное, но не необходимое условіе ея интегрируемости. Напротивъ того, какъ мы уже знаемъ (§ 282, e, f), непрерывность функціи есть необходимое, но не достаточное условіе для существованія ея производной. Совокупность интегрируемыхъ функцій заключаетъ въ себѣ поэтому всѣ функціи, имѣющія производныя, но гораздо обширнѣе совокупности послѣднихъ. Тѣмъ не менѣе практически операція интегрированія гораздо труднѣе дифференци-

[1]) Dini. „Fondamenti etc.“, стр. 245—249.

рованія, и въ то время какъ мы имѣемъ общія правила дифференцированія, для интегрированія мы имѣетъ лишь нѣсколько вспомогательныхъ средствъ. Эти средства, впрочемъ, достаточны для выполненія интегрированій, съ которыми встрѣчаемся на практикѣ, да и въ высшей Математикѣ искусное ихъ примѣненіе ведетъ къ весьма важнымъ результатамъ.

Правила интегрированія.

720. Прямое интегрированіе (суммированіе). Первое правило, которое представляется для вычисленій интегралов, вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія интеграла, какъ предѣла суммы; самый естественный способъ его примѣненія состоитъ въ томъ, что интервалъ интегрированія разлагается на n частей, равныхъ h (такъ что $nh = b - a$), и въ каждомъ интервалѣ берется значеніе функціи на одной изъ его границъ

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h=0} h\,\{f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+nh)\}.$$

Но возможно прибѣгать и къ другимъ способамъ раздѣленія $b - a$ на части, иной разъ болѣе выгоднымъ. Если, напримѣръ, $a > 0$, то можно положить $b = aq^n$ *), гдѣ $q > 1$ и стремится къ предѣлу 1 при безконечномъ n; тогда будемъ имѣть

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{q=1} a\,(q-1)\,\{f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + \cdots + q^{n-1} f(aq^{n-1})\}.$$

По тому же закону можно дѣлить интервалъ интегрированія и въ томъ случаѣ, когда одна изъ границъ интервала лежитъ въ точкѣ 0; тогда надо начинать съ другой границы, но надо помнить, что этотъ пріемъ (срав. съ § 711, d) не строгъ. Обозначая черезъ q число, стремящееся къ 1, постоянно возрастая, находимъ

$$(6) \qquad \int_0^a f(x)\,dx = \lim_{q=1} a\,(1-q)\,\{f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + q^3 f(aq^3) + \cdots\}.$$

---

*) И вообще $h_i = aq^i - aq^{i-1} = aq^{i-1}(q-1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

721. Примѣры. a) Если $f(x)=e^x$, то по формулѣ (4) получимъ

$$\int_0^x e^x\,dx = \lim_{h=0} h\,(e^h+e^{2h}+\cdots+e^{nh}) = (e^x-1)\lim_{h=0}\frac{h}{e^h-1} = e^x-1.$$

Неопредѣленный интегралъ $\int e^x\,dx = e^x + C$.

b) Теперь возьмемъ примѣръ, гдѣ полезнѣе будетъ формула (5)

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \lim_{q=1} n\,(q-1) = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{x}{a}}-1\right) = \log\frac{x}{a}.$$

Аналогично этому найдемъ

$$\int_a^x \log x\,dx = \lim_{q=1}\sum_1^n (aq^i - aq^{i-1})\log(aq^i)$$

$$= x\log x - a\log a - (x-a)\lim_{q=1}\frac{\log q}{q-1} = x(\log x-1) - a(\log a-1).$$

Въ неопредѣленномъ видѣ

$$\int\frac{dx}{x} = \log x + C, \qquad \int \log x\,dx = x(\log x-1)+C.$$

Нужно, однако, замѣтить, что во всѣхъ этихъ результатахъ подразумѣвается условіе $a>0$, потому что въ области вещественныхъ чиселъ функція $\log x$ для $x\leqq 0$ не существуетъ. Такъ, напримѣръ, первообразная функція отъ $\frac{1}{x}$ при $x<0$ будетъ $\log(-x)$, а не $\log x$.

c) Вышеприведенное вычисленіе не примѣнимо, когда $a=0$. Но изъ полученнаго результата, припоминая, что интегралъ необходимо непрерывная функція, тотчасъ найдемъ

$$\int_0^x \log x\,dx = x(\log x-1) - \lim_{a=0} a(\log a-1) = x(\log x-1).$$

Къ тому же результату легко придти съ помощью формулы (6)

$$\int_0^x \log x\,dx = x\lim_{q=1}\left(\log x + \frac{q\log q}{q-1}\right) = x(\log x-1)$$

или болѣе строгимъ путемъ, прилагая одну изъ выведенныхъ раньше (§ 335, c) формулъ

$$\int_0^x \log x\,dx = \lim_{h=0} h\log(n!\,h^n)$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{x}{n}\left(n\log n - n + \cdots + n\log\frac{x}{n}\right) = x(\log x-1).$$

d) Очень легко вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$, если (§ 459) извѣстна формула

$$\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $nh = \frac{\pi}{2}$, тотчасъ найдемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \lim_{h=0} h \log \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{2} \lim_{n=\infty} \log \frac{n^{\frac{1}{2n}}}{2^{1-\frac{1}{n}}} = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

e) Для вычисленія интеграла Пуассона *) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, разложимъ интервалъ (x, ∞) на равные интервалы, величину которыхъ обозначимъ черезъ h, и станемъ искать предѣлъ $\varrho(x)$ суммы

$$h\,(e^{-(x+h)^2} + e^{-(x+2h)^2} + e^{-(x+3h)^2} + \cdots)$$

при убываніи h до нуля. Полагая $e^{-h^2} = q$, легко найдемъ $\varrho(0)$, съ помощью формулы (§ 342, c)

$$\lim_{q=1} (q + q^4 + q^9 + \cdots) \sqrt{1-q} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\varrho(0) = \lim_{h=0} h\,(q + q^4 + q^9 + \cdots) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \lim_{h=0} \frac{h}{\sqrt{1-e^{-h^2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Такъ какъ $e^{-(x+\alpha)^2} < e^{-x^2} \cdot e^{-\alpha^2}$ то, очевидно,

$$0 < \varrho(x) < \varrho(0)\, e^{-x^2}, \quad \lim_{x=\infty} \varrho(x) = 0;$$

и на основаніи замѣчанія, сдѣланнаго въ § 711, d, можно утверждать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

f) Точно такъ же, чтобы вычислить интегралъ Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, достаточно знать, что

$$\sin h + \tfrac{1}{2}\sin 2h + \tfrac{1}{3}\sin 3h + \cdots = \tfrac{1}{2}(\pi - h),$$

---

*) Пуассону принадлежитъ одинъ изъ выводовъ значенія этого интеграла, но другимъ путемъ онъ уже былъ найденъ Эйлеромъ.

при условіи $0 < h < 2\pi$. Отсюда тотчасъ слѣдуетъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{h=0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Къ тому же результату пришелъ Фурье [1]) подобнымъ же пріемомъ, однако, совершенно не строгимъ, исходя изъ формулы

$$\sin h + \frac{1}{3}\sin 3h + \frac{1}{5}\sin 5h + \cdots = \frac{\pi}{4}(-1)^{\left[\frac{h}{\pi}\right]},$$

вытекающей непосредственно изъ вышеприведенной. Раздѣляя интервалъ $(0, \infty)$ на безконечное число интерваловъ, изъ которыхъ первый равенъ h, а всѣ другіе вдвое больше, найдемъ, что разсматриваемый интегралъ равенъ

$$\lim_{h=0}\left(\sin h + \frac{2}{3}\sin 3h + \frac{2}{5}\sin 5h + \cdots\right) = \frac{\pi}{2} - \lim_{h=0}\sin h = \frac{\pi}{2}.$$

Замѣтимъ, что такимъ же образомъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{h=0}\frac{1}{h}(\sin^2 h + \tfrac{1}{4}\sin^2 2h + \tfrac{1}{9}\sin^2 3h + \cdots)$$

$$= \lim_{h=0}(\sin 2h + \tfrac{1}{2}\sin 4h + \tfrac{1}{3}\sin 6h + \cdots),$$

а слѣдовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{h=0}\frac{\pi - 2h}{2} = \frac{\pi}{2},$$

такъ что оба интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

имѣютъ одну и ту же величину $\frac{\pi}{2}$, хотя элементы второго интеграла меньше соотвѣтствующихъ элементовъ перваго. Это объясняется тѣмъ, что всѣ элементы второго интеграла положительны, между тѣмъ, какъ элементы перваго по очереди положительны и отрицательны въ интервалахъ $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ и т. д.

g) Вычисляя $\int_0^1 \log(-\log x)\,dx$ по формулѣ (6), приходимъ къ разысканію предѣла

$$(1-q)\{\log(-\log q) + q\log(-2\log q) + q^2\log(-3\log q) + \cdots)$$

$$= \log(-\log q) + \sum_1^\infty q^n \log\frac{n+1}{n} = \log\frac{\log q}{q-1} - \sum_1^\infty q^n\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$$

---

[1]) „Oeuvres“. T. I, стр. 402.

съ приближеніемъ $q < 1$ къ единицѣ. На основаніи теоремы Абеля (§ 340) будемъ имѣть

$$\lim_{q=1-0} \sum_{1}^{\infty} q^n \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n=\infty} (J_n - \log n).$$

Мы знаемъ (§ 183), что предѣлъ этотъ существуетъ и равенъ Эйлеровой постоянной. Такимъ путемъ находимъ полученное Маскерони значеніе

$$\int_0^1 \log(-\log x)\, dx = -0{,}577215664\ldots.$$

h) Предложимъ себѣ теперь найти значеніе весьма важнаго интеграла

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} \cdot e^{-x}\, dx, \quad (\mu > 0)$$

носящаго названіе Эйлерова интеграла второго вида. Его значеніе равно предѣлу суммы

$$h^\mu (1^{\mu-1} e^{-h} + 2^{\mu-1} e^{-2h} + 3^{\mu-1} e^{-3h} + \cdots)$$

при безконечно маломъ h; полагая $e^{-h} = q$ и припоминая одинъ изъ ранѣе найденныхъ результатовъ (§ 342, f), находимъ, что искомый предѣлъ равенъ

$$\lim_{q=1} h^\mu (1^{\mu-1} q + 2^{\mu-1} q^2 + 3^{\mu-1} q^3 + \cdots) = \Gamma(\mu) \lim_{h=0} \left(\frac{h}{1-e^{-h}} \right)^\mu = \Gamma(\mu).$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(\mu).$$

i) На основаніи извѣстнаго свойства (§ 464, e) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, припоминая еще выведенную въ § 459 формулу, получимъ

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}}} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{\sqrt{n}},$$

что, впрочемъ, легко получить и изъ самаго опредѣленія функціи Γ. Замѣтивъ вышесказанное, будемъ имѣть

$$\lim_{h=0} h \log \Gamma(h)\,\Gamma(2h) \ldots \Gamma(nh) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1) \log \sqrt{2\pi} - \log \sqrt{n} \right\}$$

и отсюда

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \log \sqrt{2\pi}.$$

Теперь можно еще, слѣдуя Лершу (Lerch), найти общнѣе значеніе того же

интеграла въ предѣлахъ отъ μ до $\mu+1$, при всякомъ $\mu>0$. Обозначая искомое значеніе черезъ $f(\mu)$ и замѣчая, что

$$f(\mu)=\int_0^{\mu+1}-\int_0^{\mu},\quad f'(\mu)=\log\Gamma(\mu+1)-\log\Gamma(\mu)=\log\mu,$$

найдемъ съ помощью выведеннаго раньше результата

$$f(\mu)=\mu(\log\mu-1)+f(0),$$

и придемъ къ формулѣ Раабе

$$\int_{\mu}^{\mu+1}\log\Gamma(x)\,dx=\mu\log\mu-\mu+\log\sqrt{2\pi}.$$

722. Непосредственное интегрированіе. Изложенная и развитая въ предыдущихъ параграфахъ метода въ большинствѣ случаевъ практически не выполнима, такъ какъ мы наталкиваемся при этомъ на трудности (вычисленіе предѣловъ суммъ), для преодолѣнія которыхъ нужно (§ 357) знать первообразную функцію F отъ интегрируемой функціи f. Выгоды, какъ будто представляемыя двойнымъ произволомъ въ выборѣ закона раздѣленія интервала интегрированія на части и въ выборѣ значеній функціи въ каждомъ интервалѣ — въ сущности ничего не даютъ. Каковъ бы ни былъ законъ подраздѣленія даннаго интервала на части, наилучшій выборъ значеній f, очевидно, состоялъ бы въ томъ, чтобы въ каждомъ интервалѣ было взято такое значеніе f, произведеніе котораго на величину интервала равнялось бы приращенію функціи F при переходѣ отъ одного конца интервала къ другому *). Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ сумма, предѣлъ которой мы ищемъ, была бы непосредственно равна (§ 709) значенію интеграла. Отсюда и видно, что изложенная метода, при всей своей огромной общности, не даетъ намъ вѣрнаго средства для преодолѣнія трудности, происходящей отъ неизвѣстности первообразной функціи. Поэтому предпочтительнѣе будетъ избрать другой путь, а именно воспользоваться тѣми результатами, которые намъ дало разысканіе производныхъ извѣстныхъ функцій (§§ 288—291) и, на основаніи доказанной въ § 713 теоремы, непосредственно написать нижеслѣдующія основныя формулы

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\quad \int\frac{dx}{x}=\log|x|+C,\quad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+C,$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C,\quad \int\sin x\,dx=-\cos x+C,\quad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C,$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}x+C.$$

*) Для этого требовалось бы знать число ξ, среднее между значеніями x на границахъ интервала, входящее въ формулу Лагранжа, а опредѣлить это число никакихъ средствъ мы не имѣемъ.

Эти формулы надо удержать въ памяти и стараться прилично выбираемыми искусственными пріемами сводить къ нимъ по возможности всѣ другіе интегралы, съ которыми приходится встрѣчаться на практикѣ.

723. Примѣры. a) Часто встрѣчаются интегралы вида

$$\int \frac{du}{u} = \log|u| + C.$$

Напримѣръ, имѣемъ

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = x - \log(e^x+1) + C,$$

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}dx = 2\int \frac{d\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$= 2\log\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) + C = \log(e^x + e^{-x} + 2) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\{x + \log|\sin x + \cos x|\} + C.$$

b) Вычисленіе интеграла $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$ легко производится, если положимъ

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Тогда интегралъ обращается въ

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+\alpha)| + C.$$

Замѣнивъ α его значеніемъ $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$, найдемъ

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left|\frac{b\sin x - a\cos x + \sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x + b\cos x}\right| + C.$$

c) Весьма часто также встрѣчаются интегралы вида

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$$

Напримѣръ —

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Такимъ же образомъ получимъ, замѣчая, что $\int u\,du = \frac{u^2}{2} + C$, непосредственно слѣдующіе интегралы

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C, \qquad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C.$$

d) Еще примѣры для упражненія

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} x + C,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C.$$

Общнѣе, можно вычислить всякій интегралъ вида $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x \cdot \cos\gamma x \ldots dx$, основываясь на извѣстной формулѣ Тригонометріи

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

Если, напримѣръ, предложено найти интегралъ отъ $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$, то пишемъ сперва

$$\cos x \cos 2x = \tfrac{1}{2}(\cos x + \cos 3x),$$

далѣе

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = \tfrac{1}{4}(1 + \cos 2x + \cos x4 + \cos 6x)$$

и, наконецъ,

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x \cdot dx = \tfrac{1}{4}(x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\sin 4x + \tfrac{1}{6}\sin 6x) + C.$$

e) Другіе интегралы приводятся къ виду

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$$

Положимъ, напримѣръ, что требуется найти интегралъ, предложенный Эрмитомъ [1])

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

[1]) C. Hermite „Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique", стр. 260.

Слѣдуя весьма простому пути, указанному W. W. Bemaп'омъ, замѣчаемъ сперва, что

$$x\cos x - \sin x = x\sin x\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \cos x\,(x - \operatorname{tg} x)$$

и разлагаемъ подъинтегральную функцію на слагаемыя

$$\frac{\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}}{\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)^2} + \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{(x - \operatorname{tg} x)^2}.$$

Такъ какъ имѣемъ

$$d\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)dx, \quad d(x - \operatorname{tg} x) = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx,$$

то первообразная функція будетъ

$$\frac{1}{\cot x - \dfrac{1}{x}} + \frac{1}{x - \operatorname{tg} x} = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x} = \frac{\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}},$$

и окончательно

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x - \sin x)^2} = \operatorname{tg}\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right) + C.$$

724. Интегрированіе путемъ подстановки. Для вычисленія интеграла $u = \int f(x)\,dx$ часто бываетъ полезно ввести новую перемѣнную $t = \varphi(x)$. Если изъ этого уравненія получается выраженіе $x = \psi(t)$, такъ что $dx = \psi'(t)\,dt$, то, очевидно будемъ имѣть

$$du = f(x)\,dx = f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt,$$

такъ что

$$u = \int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$$

и можетъ случиться, что въ новой формѣ вычисленіе интеграла легче произвести; а тогда стоитъ лишь подставить вмѣсто t функцію $\varphi(x)$, чтобы получить выраженіе искомаго интеграла u черезъ перемѣнную x. Если первое интегрированіе производится между предѣлами a и b, то второе, очевидно, надо произвести въ предѣлахъ отъ $\varphi(a)$ до $\varphi(b)$, предполагая, что въ этихъ предѣлахъ перемѣнная t измѣняется постоянно въ одномъ направленіи *) и притомъ непрерывна. Въ этомъ случаѣ можемъ писать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt, \tag{7}$$

*) Иначе перемѣнная x не была бы однозначною функціею отъ t.

гдѣ $g(t)$ для краткости обозначаетъ функцію $f(\psi(t))\psi'(t)$. Если же, напротивъ того, при измѣненіи x въ одномъ и томъ же направленіи отъ a до b, перемѣнная t сперва измѣняется въ одномъ направленіи до $x=c_1$, потомъ въ другомъ до $x=c_2$ и т. д., то второй интегралъ надо разбить на два или на нѣсколько другихъ, удовлетворяющихъ условію, что между предѣлами каждаго изъ нихъ t измѣняется постоянно въ одномъ направленіи; въ этомъ случаѣ будемъ имѣть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c_1)} g_1(t)\,dt + \int_{\varphi(c_1)}^{\varphi(c_2)} g_2(t)\,dt + \ldots;$$

здѣсь $g_1(t)$ обозначаетъ выраженіе $g'(t)$, вычисленное на основаніи выраженія $\psi_1(t)$ перемѣнной x въ интервалѣ $(a,\ c_1)$, $g_2(t)$ выраженіе $g(t)$, вычисленное для $x=\psi_2(t)$ въ интервалы $(c_1,\ c_2)$ и т. д. (Въ разныхъ интервалахъ выраженіе $x=\psi(t)$ можетъ быть различно). Если, напримѣръ, при измѣненіи x отъ a до b, перемѣнная t, исходя изъ значенія $\alpha=\varphi(a)$, снова возвращается къ тому же значенію $\alpha=\varphi(b)$, переходя черезъ максимумъ или минимумъ $\beta=\varphi(c)$, то ясно, что значенія x въ интервалѣ $(a,\ c)$ изображаются нѣкоторой функціею $\psi_1(t)$, а въ интервалѣ $(c,\ b)$ — другою $\psi_2(t)$, такъ какъ каждому значенію t, лежащему между α и β должны соотвѣтствовать два различныхъ значенія x. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\beta g_1(t)\,dt + \int_\beta^a g_2(t)\,dt = \int_a^\beta \{g_1(t) - g_2(t)\}\,dt.$$

Если бы мы не приняли во вниманіе этого замѣчанія, то впали бы въ грубую ошибку, заключивъ, что нашъ интегралъ равенъ нулю, потому что $\int_a^a = 0$. Все это показываетъ, что при установленіи предѣловъ интегрированія по новой перемѣнной, необходимо обращать вниманіе на то, какимъ образомъ измѣняется эта перемѣнная. Если далѣе, эта перемѣнная разрывна и имѣетъ, напримѣръ, обыкновенный разрывъ при $x=c$, то, очевидно, надо было бы писать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c-0)} g(t)\,dt + \int_{\varphi(c+0)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt - \int_{\varphi(c-0)}^{\varphi(c+0)} g(t)\,dt.$$

То же самое случится, если $\varphi(x)$ при $x=c$ обращается въ безконечность и мѣняетъ знакъ; въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{+\infty} g(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\varphi(b)} g(t)\,dt.$$

Такимъ образомъ получается, вообще, значеніе интеграла, отличное отъ того, которое получилось бы при грубомъ приложеніи формулы (7), а именно значеніе, отличающееся отъ него на величину $G(\pm\infty) - G(\mp\infty)$, гдѣ $G(t)$ есть первообразная функція отъ $g(t)dt$.

725. Примѣры. a) Подставляя по очереди $x=at$, $x=\frac{a}{t}$, $x=a(1-t)$, найдемъ

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\mp\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cos}t+C=\pm\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\mp\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pm\operatorname{arc\,cos}t+C=\pm\operatorname{arc\,cos}\frac{a-x}{a}+C.$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ надо взять верхній знакъ при $a>0$, а нижній при $a<0$. Точно такъ же въ предпослѣднемъ примѣрѣ надо взять верхній или нижній знакъ, смотря по тому, на положительныя или отрицательныя значенія x желаютъ распространить интегрированіе; отъ одного случая къ другому, впрочемъ, можно перейти, замѣчая, что

$$\operatorname{arc\,cos}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,cos}x.$$

Двойной знакъ получается отъ того, что подъ знакомъ интеграла находится корень квадратный, который по предположенію всегда берется со знакомъ $+$, такъ что имѣемъ

$$\sqrt{cx^2}=|x|\sqrt{c},\text{ а не }\sqrt{cx^2}=x\sqrt{c}.$$

b) Съ помощью подстановки $x=\cos\theta$ вычисляютъ слѣдующіе другіе интегралы

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=-2\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=-(\theta-\sin\theta)+C=\operatorname{arc\,sin}x+\sqrt{1-x^2}+C'.$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=-\int\sin^2\theta\,d\theta=-\tfrac{1}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)+C$$

$$=\tfrac{1}{2}(\operatorname{arc\,sin}x+x\sqrt{1-x^2})+C',$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\int\cos^2\theta\,d\theta=-\tfrac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C$$

$$=\tfrac{1}{2}(\operatorname{arc\,sin}x-x\sqrt{1-x^2})+C'.$$

Если же хотимъ вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, то лучше будетъ положить $x=\operatorname{cotg}\theta$, при условіи $\sin\theta>0$, чѣмъ не ограничивается измѣняемость x. Данный интегралъ обращается въ

$$-\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\cot\frac{\theta}{2}+C=\log\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+C.$$

Поэтому

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

c) Предложимъ себѣ вычислить

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}.$$

Умножая числителя и знаменателя на $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$, приводимъ данный интегралъ къ слѣдующему

$$\frac{1}{2}\int (\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})\frac{dx}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Изъ этихъ четырехъ интегралovъ первый и второй преобразуются помощью подстановки $x=\frac{1}{t}$ въ слѣдующіе

$$-\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=-\sqrt{t^2+1}+c', \qquad -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}=-\sqrt{t^2-1}+c''.$$

Третій вычисленъ уже раньше, а четвертый равенъ $\arcsin x+c'''$. Итакъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

d) Для вычисленія $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ сперва предположимъ $q>\frac{p^2}{4}$ и положимъ $x+\frac{p}{2}=t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, такъ что $dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dt$ и

$$x^2+px+q=(x+\tfrac{1}{2}p)^2+(q-\tfrac{1}{4}p^2)=(q-\tfrac{1}{4}p^2)(1+t^2)$$

Тотчасъ получаемъ

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}+C.$$

Если, напротивъ того, $q<\frac{p^2}{4}$, то полагаемъ $x+\frac{p}{2}=t\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Данный интегралъ преобразуется въ

$$\int \frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C,$$

дѣленный на $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$. Поэтому будемъ имѣть

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}} \log \left| \frac{x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}{x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}} \right| + C.$$

Впрочемъ, обѣ формулы эквивалентны, въ силу соотношеній

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix}, \qquad \log x = 2i \operatorname{arc\,tg}\left(i\frac{1-x}{1+x}\right),$$

легко получаемыхъ изъ извѣстной формулы Эйлера (§§ 406, 411).

e) Безъ всякаго, такъ сказать, вычисленія находимъ значеніе интегралов

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$$

если замѣтимъ, что одинъ преобразуется въ другой подстановкою $\frac{\pi}{2} - x$ на мѣсто x, и что сумма ихъ равна $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$. Общая величина данныхъ интегралов равна, слѣдовательно, $\frac{\pi}{4}$. Точно такъ же, замѣняя x на $\pi - x$, найдемъ

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} \cos x\right)_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{4}.$$

f) Совершенно аналогичнымъ путемъ, найдемъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$, вычисленный уже раньше иначе (§ 721, d). Мы имѣемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \log (\sin x \cos x)\, dx,$$

т. е., замѣняя въ послѣднемъ интегралѣ x черезъ $\frac{1}{2}x$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \log\left(\frac{1}{2}\sin x\right) dx = -\frac{\pi}{4} \log 2 + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \log \sin x\, dx.$$

Если, далѣе, замѣнимъ x черезъ $\pi - x$ и замѣтимъ, что

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx,$$

то можемъ также написать

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{4} \log 2 + \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx,$$

откуда и получаемъ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

g) Подобнымъ же образомъ, замѣною x на $1 - x$, найдемъ

$$\int_{0}^{1} \log \Gamma(x) \, dx = \int_{0}^{1} \log \Gamma(1-x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \log \frac{\pi}{\sin \pi x} \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \pi - \tfrac{1}{2} \int_{0}^{1} \log \sin \pi x \, dx.$$

Послѣдній интегралъ подстановкою $\pi x = \theta$ обращается въ

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \log \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \theta \, d\theta = -\log 2.$$

Слѣдовательно (срав. съ § 721, i),

$$\int_{0}^{1} \log \Gamma(x) \, dx = \log \sqrt{2\pi}.$$

h) Положимъ, что предложено вычислить $\int_{0}^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx$. При $a = 0$ этотъ интегралъ приводится къ интегралу Пуассона (§ 721, e). Положимъ теперь $a = 0$ и замѣнимъ x на $\frac{a}{x}$; данный интегралъ преобразуется въ

$-\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} d\left(\frac{a}{x}\right)$, и будетъ, слѣдовательно, равенъ

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} d\left(x-\frac{a}{x}\right) = \frac{1}{2}\, e^{-2a}\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2} d\left(x-\frac{a}{x}\right).$$

Полагая $x-\frac{a}{x}=t$, замѣчаемъ, что при измѣненіи x отъ 0 до ∞, t постоянно возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, когда x возрастаетъ отъ 0 до ∞, замѣняя букву t опять буквою x, найдемъ

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{1}{2}\, e^{-2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{2a}}.$$

i) Чтобы вычислить $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x\, dx}{1-k\cos x}$, гдѣ $|k|\leq 1$, разобьемъ интервалъ интегрированія на двѣ равныя части и въ правой половинѣ замѣнимъ x на $\pi-x$. Интегралъ преобразуется въ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{1-k\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{1+k\cos x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{1-k^2\cos^2 x}.$$

Полагая, $\operatorname{tg} x = t$, преобразуемъ полученный интегралъ въ

$$\int_0^\infty \frac{t^2\, dt}{(1-k^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{k^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1-k^2}{1-k^2+t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\operatorname{arc\,tg} t - \sqrt{1-k^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{1-k^2}}\right)_0^\infty = \frac{\pi}{2k^2}\left(1-\sqrt{1-k^2}\right),$$

такъ что

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x\, dx}{1-k\cos x} = \frac{\pi}{1+\sqrt{1-k^2}}.$$

j) Чтобы показать на примѣрѣ, какъ осторожно нужно поступать при опредѣленіи предѣловъ новой перемѣнной, вводимой взамѣнъ прежней, замѣтимъ слѣдующее. Если будемъ обращать вниманіе только на начальное и крайнее значенія новой перемѣнной, то можемъ подвергаться опасности получить нелѣпые результаты, въ родѣ слѣдующаго

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\left(-\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}} = -\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = 0.$$

Между тѣмъ ясно, что интегралъ равенъ $\operatorname{arc\,tg}(+1) - \operatorname{arc\,tg}(-1) = \frac{\pi}{2}$.

Ошибка произошла отъ того, что интервалъ $(-1, +1)$ при замѣнѣ x на $\frac{1}{x}$ преобразовывается не самъ въ себя, а въ сумму интерваловъ $(-1, -\infty)+(\infty, 1)$, а потому имѣемъ

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{-\infty} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} + \int_{\infty}^{1} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}},$$

а замѣнивъ въ первомъ изъ этихъ интеграловъ x на $-x$, получимъ

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

k) Если встрѣтится интегралъ вида

$$\int_{a}^{b} \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+\varphi^2(x)}, \tag{8}$$

то естественно приходимъ къ тому, чтобы взять за новую перемѣнную $t = \varphi(x)$. Такимъ образомъ, при условіи, что $\varphi(x)$ остается конечною и непрерывною въ интервалѣ (a, b), тотчасъ получаемъ значеніе интеграла

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg}\varphi(b) - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a).$$

Но если $\varphi(x)$ претерпѣваетъ разрывы въ интервалѣ (a, b), то надо припомнить замѣчанія, сдѣланныя въ концѣ предыдущаго параграфа. Если, напримѣръ $\varphi(x)$ только въ одной точкѣ c между a и b мѣняетъ знакъ, обращаясь въ безконечность, то предложенный интегралъ разбивается на два и будетъ равенъ

$$\int_{\varphi(a)}^{\pm\infty} d\operatorname{arc\,tg} t + \int_{\mp\infty}^{\varphi(b)} d\operatorname{arc\,tg} t = \left(\pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a)\right) + \left(\operatorname{arc\,tg}\varphi(b) \pm \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \operatorname{arc\,tg}\varphi(b) - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a) \pm \pi.$$

Общнѣе, если при непрерывномъ измѣненіи x отъ a до b функція $\varphi(x)$ k разъ обращается въ безконечность, переходя отъ $+$ къ $-$, и k'-разъ, переходя отъ $-$ къ $+$, то получимъ

$$\int_{a}^{b} \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+\varphi^2(x)} = \operatorname{arc\,tg}\varphi(b) - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a) + (k-k')\pi.$$

l) Къ тому же типу (8) можно причислить интегралъ $\int_0^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$, потому что функція $x-[x]$ имѣетъ производную 1, для нецѣлыхъ значеній x и справа отъ цѣлыхъ значеній x, слѣва же отъ нихъ претерпѣваетъ разрывы. Вслѣдствіе этихъ разрывовъ и оказывается, что для $x \geq 1$ значеніе интеграла не равно $\operatorname{arc\,tg}(x-[x])$. Въ этомъ легко убѣдиться, написавъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1} \int_\nu^{\nu+1} \frac{dx}{1+(x-\nu)^2} + \int_{[x]}^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{x-[x]} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}(x-[x]) + \frac{1}{4}\pi[x].$$

Общнѣе имѣемъ

$$\int_0^x f(x-[x])\,dx = [x]\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^{x-[x]} f(x)\,dx.$$

m) Интегралъ $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$ непосредственно вычисляется, съ помощью подстановки $x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$, которая преобразовываетъ его къ $\int d\theta$, такъ что

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}} + C.$$

Точно такъ же, чтобы вычислить $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx$, положимъ

$$x = a\cos^2\frac{\theta}{2} + b\sin^2\frac{\theta}{2},$$

откуда слѣдуетъ

$$x-a = (b-a)\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad b-x = (b-a)\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad dx = \frac{1}{2}(b-a)\sin\theta\,d\theta.$$

Предложенный интегралъ обращается въ

$$\frac{b-a}{8}\int (a+3b-4b\cos\theta+(b-a)\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{b-a}{8}((a+3b)\theta - 4b\sin\theta + (b-a)\sin\theta\cos\theta) + C,$$

слѣдовательно,

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx = \frac{1}{4}(b-a)(a+3b)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$
$$+ \tfrac{1}{4}(a-3b-2x)\sqrt{(x-a)(b-x)} + C.$$

Въ частности,

$$\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, x\, dx = \frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b).$$

п) Ту же подстановку можно приложить къ вычисленію интеграла

$$\mathfrak{J} = \int_a^b [(x-a)(b-x)]^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{x-a}+\frac{\beta^2}{b-x}\right)} dx,$$

который встрѣтился Бельтрами въ одномъ вопросѣ о распространеніи тепла [1]) Но здѣсь мы изберемъ другой путь, указанный самимъ Бельтрами, взявъ за новую перемѣнную

$$t = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{x-a}{b-x}\right)$$

при положительныхъ α и β. Такъ какъ

$$\frac{x-a}{\alpha e^{t}} = \frac{b-x}{\beta e^{-t}} = \frac{b-a}{\alpha e^{t}+\beta e^{-t}},$$

то тотчасъ находимъ

$$2\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x-a}+\frac{1}{b-x} = \frac{(\alpha e^{t}+\beta e^{-t})^2}{\alpha\beta(b-a)},$$

откуда

$$\mathfrak{J} = \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}(b-a)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta(e^{2t}+e^{-2t})}{b-a}}\cdot(\alpha e^{t}+\beta e^{-t})dt,$$

Стоитъ только замѣнить t на $-t$ и взять ариѳметическое среднее обоихъ выраженій, чтобы найти

$$\mathfrak{J} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}(b-a)^{-2} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha\beta}{b-a}(e^{t}-e^{-t})^2} d(e^{t}-e^{-t}).$$

Теперь естественно взять за новую перемѣнную $\theta = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{b-a}}(e^{t}-e^{-t})$, которая измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, постоянно возрастая; тогда, припоминая значеніе интеграла Пуассона (§ 721, е), мы и найдемъ

$$\mathfrak{J} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta = \sqrt{\pi}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}$$

---

[1]) Memorie dell' Academia di Bologna (4e serie, t. VIII).

o) Весьма легко представить Кронеккерову функцію sgn (§ 254, e) въ видѣ опредѣленнаго интеграла. Если въ интегралѣ Дирихле (§ 721, f) замѣнимъ x на $\pm kx$, смотря по тому, будетъ ли $k>0$ или <0, то получимъ

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\pm\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\,dx,$$

а такъ какъ при $k=0$ второй интегралъ равенъ нулю, то мы и видимъ, что

$$\operatorname{sgn} k=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\,dx. \tag{9}$$

Аналогичнымъ образомъ можно доказать, что

$$|k|=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}\,dx. \tag{10}$$

Изъ этихъ результатовъ легко получаются другіе, нѣсколько болѣе общіе. Предложимъ себѣ, напримѣръ, вычислить интегралы

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\cdot\cos\beta x\cdot\frac{dx}{x},\quad \int_0^\infty \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\cdot\frac{dx}{x^2}, \tag{11}$$

которые соотвѣтственно при $\beta=0$ и при $\beta=\alpha$ приводятся къ (9) и (10). Первый тотчасъ разбивается на два

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx,$$

и по формулѣ (9) получается

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\cdot\cos\beta x\cdot\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{4}\{\operatorname{sgn}(\alpha+\beta)+\operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\}.$$

Иными словами, разсматриваемый интегралъ равенъ соотвѣтственно $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$, $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$, 0, смотря по тому, будетъ ли $|\beta|$ меньше, равно, или больше $|\alpha|$. Такъ же второй интегралъ (11) разбивается на

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}x}{x^2}\,dx-\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}x}{x^2}\,dx$$

и по формулѣ (10) имѣетъ значеніе $\frac{\pi}{4}(|\alpha+\beta|-|\alpha-\beta|)$. Иными словами, если α есть наименьшее по абсолютной величинѣ изъ чиселъ α, β, то

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \cdot \sin\beta x \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\pi\alpha \operatorname{sgn}\beta.$$

Съ помощью формулъ Тригонометріи изъ найденныхъ здѣсь интеграловъ можно вывести безчисленное множество другихъ. Напримѣръ, если возвысимъ (§ 407) въ n-ую степень $2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}$, то при нечетномъ n получимъ

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin(n-4)x - \cdots \pm \cdots \sin x\right\}.$$

Умножая обѣ части равенства на $\sin x\frac{dx}{x^2}$, интегрируя въ предѣлахъ отъ 0 до ∞, и пользуясь при этомъ выведеннымъ въ концѣ § 332 тождествомъ

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2} - \cdots \pm \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu} = \pm\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu},$$

получимъ, замѣнивъ еще n на $2n-1$ и x на $\frac{1}{x}$,

$$\int_0^\infty \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{2n} dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

При возрастаніи n до ∞ интегралъ стремится къ 0, и притомъ асимптотически съ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

726. Интегрированіе по частямъ. Пусть u и v двѣ функціи отъ x. Изъ формулы $d(uv) = u\,dv + v\,du$ интегрированіемъ выводимъ

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{12}$$

Эта формула позволяетъ найти $\int u\,dv$, если извѣстенъ $\int v\,du$ *). Такое вычисленіе называютъ интегрированіемъ по частямъ. Когда предложено найти нѣкоторый интегралъ, то подъинтегральную функцію $f(x)$ можно безчисленнымъ множествомъ способовъ пред-

*) Примѣнительно къ опредѣленнымъ интеграламъ эта формула принимаетъ видъ

$$\int_a^b u\,dv = (uv)_a^b - \int_a^b v\,du.$$

ставить въ видѣ $f(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$, и притомъ такъ, что $\psi(x)\,dx$ будетъ дифференціаломъ извѣстной функціи v, но при выборѣ функціи $\psi(x)$ надо руководиться тѣмъ, чтобы интегрированіе $v\varphi'(x)\,dx$ было проще, чѣмъ интегрированіе $f(x)\,dx$. Мы видимъ, слѣдовательно, что интегрированіе по частямъ, такъ же какъ и съ помощью подстановки, есть не болѣе, какъ пріемъ, имѣющій цѣлью облегчить интегрированіе, подготовляя его къ непосредственному. Нерѣдко встрѣчается и такой случай, когда интегралъ, предложенный для вычисленія, самъ появляется въ правой части формулы (12) съ коэффиціентомъ, не равнымъ единицѣ; въ этихъ случаяхъ интегрированіе по частямъ дѣлается настоящею методой интегрированія, потому что формула (12) дастъ тогда безъ новыхъ вычисленій значеніе искомаго интеграла.

727. Примѣры. a) Значеніе $\int \sqrt{1-x^2}\cdot dx$ тотчасъ получимъ, написавъ

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

второй интегралъ разбивается на

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Слѣдовательно (срав. съ § 725, b),

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C.$$

b) Чтобы найти интегралы отъ $\sin\log x\,dx$ и $\cos\log x\,dx$, замѣчаемъ, что интегрированіе по частямъ, примѣненное къ обоимъ, даетъ

$$\int \sin\log x\cdot dx = x\sin\log x - \int \cos\log x\cdot dx,$$

$$\int \cos\log x\cdot dx = x\cos\log x + \int \sin\log x\cdot dx.$$

Отсюда выходитъ, что

$$\int \sin\log x\cdot dx = \frac{x}{2}(\sin\log x - \cos\log x) + C,$$

$$\int \cos\log x\cdot dx = \frac{x}{2}(\sin\log x + \cos\log x) + C.$$

Такимъ же образомъ, примѣняя интегрированіе по частямъ къ $e^x\sin x\,dx$ и $e^x\cos x\,dx$, находимъ

$$\int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx,$$

$$\int e^x\cos x\,dx = \quad e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx,$$

откуда

$$\int e^x \sin x\, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C,$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

Впрочемъ, эти интегралы не отличаются существенно отъ предыдущихъ, къ которымъ они и приводятся подстановкою $x = \log t$.

c) Аналогично будемъ имѣть

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \cos x\, d \sin x = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C,$$

$$\int x \cos x\, dx = \int x\, d \sin x = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C,$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx$$

$$= 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C,$$

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\, dx$$

$$= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x\, dx$$

$$= (x^n - n(n-1) x^{n-2} + \cdots) \sin x + (n x^{n-1} - n(n-1)(n-2) x^{n-3} + \cdots) \cos x + C,$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\, dx}{1 + x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \log \sqrt{1 + x^2} + C,$$

$$\int \log (x + \sqrt{1 + x^2})\, dx = x \log (x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C,$$

$$\int \log (\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x})\, dx = x \log (\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}) + \tfrac{1}{2} (\arcsin x - x) + C,$$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \int e^x d \sqrt{e^x - 1} = 2 e^x \sqrt{e^x - 1} - 2 \int e^x \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

$$= 2 e^x \sqrt{e^x - 1} - 2 \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}} + 2 \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2}{3} (e^x + 2) \sqrt{e^x - 1} + C.$$

$$\int \frac{x\, dx}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{4} \int x\, d \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ x \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \log (e^x + e^{-x}) \right\} + C.$$

Отсюда, въ частности,

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{4} \log 2.$$

Наконецъ, подстановкою $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\theta$, откуда $x=\operatorname{cotg}\theta$, и интегрированіемъ по частямъ получимъ

$$\int_0^\infty\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 dx=\lim_{\theta=0}\theta^2\operatorname{cotg}\theta+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\operatorname{cotg}\theta\,d\theta,$$

а слѣдовательно (§ 725, f),

$$\int_0^\infty\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\,d\log\sin\theta=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\theta\,d\theta=\pi\log 2$$

(Послѣдніе два примѣра взяты изъ итальянскаго изданія 1905 года).

d) Чтобы взять интегралъ отъ $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$ [1]) примѣняемъ интегрированіе по частямъ

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x-\int\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}e^x dx,$$

и пишемъ послѣдній дифференціалъ въ видѣ

$$\frac{e^x dx}{1+\cos x}+\frac{e^x\sin x\,dx}{(1+\cos x)^2}=\frac{de^x}{1+\cos x}+e^x d\frac{1}{1+\cos x}=d\frac{e^x}{1+\cos x}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx=e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Можно было бы избѣжать интегрированія по частямъ, умножая числителя и знаменателя на $1-\cos x$ и разбивая полученный дифференціалъ слѣдующимъ образомъ

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)e^x dx+\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)e^x dx=-d(e^x\cot x)+d\frac{e^x}{\sin x}.$$

e) Если требуется найти интегралъ отъ $x^m\log^n x\,dx$, при $m>-1$ и n — цѣломъ положительномъ, то съ помощью интегрированія по частямъ, и повторнаго приложенія перваго получаемаго результата, найдемъ

$$\int x^m\log^n x\cdot dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x-\frac{n}{m+1}\int x^m\log^{n-1}x\cdot dx$$

$$=\frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log^n x-\frac{n}{m+1}\log^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\log^{n-2}x-\cdots\pm\frac{n!}{(m+1)^n}\right)+C.$$

---

[1]) Этотъ примѣръ заимствованъ изъ „Glasgow University Calendar“ (1901—02), гдѣ читатель найдетъ много другихъ полезныхъ примѣровъ.

Такъ какъ при всякомъ $\nu > 0$ и $m > -1$, функція $x^{m+1}\log^{\nu} x$, равная нулю при $x = 1$, стремится къ нулю справа отъ 0 (§ 312, a), то въ частности будемъ имѣть

$$\int_0^1 x^m \log^n x \cdot dx = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}}. \tag{13}$$

Аналогично этому находимъ

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$= -(x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!)\,e^{-x} + C,$$

и въ частности, замѣчая, что, при всякомъ $\nu > 0$, $(x^{\nu} e^{-x})_0^{\infty} = 0$ *),

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!\,(e^{-x})_{\infty}^{0} = n! \tag{14}$$

Если этотъ результатъ извѣстенъ, то можно легко имъ воспользоваться чтобы изъ него вывести (13): стоитъ только сдѣлать подстановку $x = e^{-\frac{t}{m+1}}$. Дѣйствительно, тогда

$$\int_0^1 x^m \log^n x\,dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} t^n e^{-t}\,dt = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Впрочемъ, формула (14) есть частный случай другой раньше доказанной (§ 721, h), потому что $n!$ есть значеніе $\Gamma(n+1)$ для цѣлаго n.

f) Интегрированіе по частямъ, примѣненное къ интеграламъ

$$a_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \cos x\,dx, \qquad b_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \sin x\,dx,$$

даетъ

$$a_n = (x^n e^{-x} \sin x)_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (nx^{n-1} - x^n)\, e^{-x} \sin x\,dx,$$

$$b_n = (x^n e^{-x} \cos x)_{\infty}^{0} + \int_0^{\infty} (nx^{n-1} - x^n)\, e^{-x} \cos x\,dx,$$

т. е.

$$a_n = b_n - n b_{n-1}, \qquad b_n = -a_n + n a_{n-1}.$$

Эти соотношенія можно соединить въ одно: $c_n = \frac{1}{2}(1+i)\,n\,c_{n-1}$, положивъ

*) Символъ $(f(x))_a^b$ обозначаетъ разность $f(b) - f(a)$.

$c_n = a_n + ib_n$, при $i^2 = -1$. Замѣчая, что $c_0 = \frac{1}{2}(1+i)$, выводимъ отсюда

$$c_n = n!\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} = n!\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\, e^{(n+1)\frac{i\pi}{4}}.$$

Слѣдовательно,

$$a_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\cos(n+1)\frac{\pi}{4}, \qquad b_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\sin(n+1)\frac{\pi}{4}.$$

Общнѣе, при $\cos\alpha > 0$, имѣемъ

$$\int_0^\infty x^n e^{-x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)\,dx = n!\cos(n+1)\alpha,$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)\,dx = n!\sin(n+1)\alpha.$$

Изъ этихъ формулъ получаются предыдущія при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и замѣнѣ x на $x\sqrt{2}$.

g) Вычислимъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ при n цѣломъ положительномъ. Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\cdot d(-\cos x) = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cdot dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,$$

откуда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-4}x\,dx = \cdots,$$

такъ что, въ концѣ концовъ, приходимъ къ одному изъ двухъ интеграловъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1,$$

смотря по тому, будетъ ли n четное или нечетное. Итакъ,

$$(15)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{при } n \text{ четномъ,} \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & \text{при } n \text{ нечетномъ.} \end{cases}$$

Отсюда легко вывести формулу Валлиса (§ 464, а), исходя изъ неравенствъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\cdot dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\cdot dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\cdot dx,$$

которыя теперь обращаются въ слѣдующія

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}.$$

Поэтому, замѣчая, что отношеніе $\dfrac{2n}{2n+1}$ стремится къ предѣлу 1 при n безконечномъ, мы и находимъ

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots.$$

Отсюда же легко заключить (§ 337, с), что, при возрастаніи n, оба выраженія (15) стремятся принять форму $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, такъ что

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

h) Интегралъ $\mathfrak{J}_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$ при $n=0$ намъ уже извѣстенъ (§ 721, е), а при $n=1$ легко вычисляется, потому что

$$\mathfrak{J}_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,d(x^2) = \tfrac{1}{2}(e^{-x^2})_{\infty}^{0} = \tfrac{1}{2}.$$

Впрочемъ, замѣна x на $\sqrt{x}$ даетъ, при всякомъ n, $\mathfrak{J}_n = \dfrac{1}{2}\,\Gamma\!\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$. Но положимъ, что это соотношеніе неизвѣстно; тогда при всякомъ цѣломъ поло-

жительномъ n интегралъ $\mathfrak{J}_n$ вычисляется съ помощью интегрированія по частямъ слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{n-1}\,d(-e^{-x^2}) = \frac{1}{2}\,(x^{n-1}\,e^{-x^2})_\infty^0 + \frac{n-1}{2}\int_0^\infty x^{n-2}\,e^{-x^2}\,dx = \frac{n-1}{2}\,\mathfrak{J}_{n-2},$$

$$(16)\qquad \mathfrak{J}_n = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2^{\frac{n}{2}}}\,\mathfrak{J}_0, & \text{при } n \text{ четномъ} \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{2^{\frac{n+1}{2}}} & \text{при } n \text{ нечетномъ} \end{cases}$$

Чтобы вычислить теперь и $\mathfrak{J}_0$, замѣтимъ [1]), что выраженіе

$$\mathfrak{J}_{n+1} + 2\,\alpha\,\mathfrak{J}_n + \alpha^2\,\mathfrak{J}_{n-1} = \int_0^\infty x^{n-1}\,(x+\alpha)^2\,e^{-x^2}\,dx$$

для всѣхъ вещественныхъ значеній α положительно, и что для этого необходимо $\mathfrak{J}_{n-1}\,\mathfrak{J}_{n+1} > \mathfrak{J}_n^2$, т. е.

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}},\ \text{между тѣмъ, какъ}\ \frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n}\cdot\frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \frac{2}{n}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} > \sqrt{\frac{2}{n}} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}},$$

а поэтому послѣдовательно

$$\sqrt{\frac{2}{n}} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}},\quad \lim_{n=\infty}\frac{\mathfrak{J}_n\sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \sqrt{2},\quad \lim_{n=\infty}\frac{\mathfrak{J}_{2n}\sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{2n+1}} = 1.$$

Остается подставить выраженія (16) въ послѣднее равенство, чтобы получить (§ 337, c)

$$\mathfrak{J}_0 = \frac{1}{2}\lim\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Далѣе легко установить, что выраженія (16) при безпредѣльномъ возрастаніи n стремятся принять асимптотическую форму

$$\mathfrak{J}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

---

[1]) Stieltjes. „Nouvelles Annales de Mathématiques“ (1890, стр. 479).

i) Предложимъ себѣ вычислить

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x}\,dx$$

при a и b положительныхъ, слѣдуя пути, указанному Лершемъ (Lerch, Giornale di Mathematiche, мартъ 1903 г.). Значеніе этого интеграла при $a=b=1$ уже извѣстно (см. § 727, c) и мы вскорѣ снова найдемъ, что это значеніе $k=\pi\log 2$. Затѣмъ, при $a=b$, интегралъ равенъ ka, что прямо получается замѣною x на ax. Отсюда слѣдуетъ, что

$$2\,\mathfrak{J} + k(a+b) = \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x}\right)^2 dx.$$

Замѣчая теперь, что (§ 254, d)

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab} + \begin{cases}\pi \text{ при } x<\sqrt{ab}\\ 0 \text{ при } x>\sqrt{ab}\end{cases}$$

получимъ

$$2\,\mathfrak{J} + k(a+b) = \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\right)^2 dx + \int_{\sqrt{ab}}^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx$$

$$= \pi^2\sqrt{ab} - 2\pi\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\,dx + \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx.$$

Для вычисленія послѣдняго интеграла, замѣнимъ x на $\frac{ab}{x}$ и замѣтимъ, что

$$\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx = -\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 d\,\frac{ab}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 d\left(x-\frac{ab}{x}\right),$$

а замѣняя теперь $x-\frac{ab}{x}$ черезъ x, найдемъ, что искомый интегралъ приводится къ

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{x}\right)^2 dx = \int_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)}{x}\right)^2 dx = k(a+b).$$

Слѣдовательно,

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\pi^2\sqrt{ab} - \pi\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\,dx.$$

Теперь можно было бы прямо примѣнить интегрированіе по частямъ, но проще разбить интегралъ во второй части на два

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx + \int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}\,dx$$

и интегрированіемъ по частямъ получимъ

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\,dx = \sqrt{ab}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{a}{2}\log\frac{a+b}{a},$$

откуда

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi\sqrt{ab} - \frac{1}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$$

и окончательно

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}.$$

[Этотъ примѣръ взятъ изъ итальянскаго изданія 1905 г.].

j) Въ заключеніе покажемъ, что второй интегралъ въ формулахъ (11) получается изъ перваго интегрированіемъ по частямъ. Такъ какъ

$$\left(\frac{\sin\alpha x\cdot\sin\beta x}{x}\right)_\infty^0 = \lim_{x=0}\frac{\sin\alpha x}{x}\sin\beta x = \alpha\lim_{x=0}\sin\beta x = 0,$$

то

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\,\frac{dx}{x^2} = \int_0^\infty \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\cdot d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \int_0^\infty (\beta\sin\alpha x\cos\beta x + \alpha\sin\beta x\cos\alpha x)\frac{dx}{x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi\beta\{\operatorname{sgn}(\alpha+\beta)+\operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\} + \tfrac{1}{4}\pi\alpha\{\operatorname{sgn}(\beta+\alpha)+\operatorname{sgn}(\beta-\alpha)\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi(\alpha+\beta)\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{4}\pi(\alpha-\beta)\operatorname{sgn}(\alpha-\beta) = \tfrac{1}{4}\pi\{|\alpha+\beta| - |\alpha-\beta|\}.$$

728. Интегрированіе при помощи рядовъ. Если въ нѣкоторомъ интервалѣ (a, b) рядъ

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots,$$

члены котораго непрерывныя функціи, равномѣрно сходящійся, то будемъ имѣть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots.$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что (§ 322) при данныхъ условіяхъ $f(x)$, такъ же, какъ и $u_i(x)$, непрерывная, а потому и интегрируемая (§ 719) функція. Слѣдовательно, если $\varphi_n(x)$ обозначаетъ остатокъ даннаго ряда, то можно написать

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Если теперь ε по произволу заданное сколь угодно малое положительное число, то, какъ мы знаемъ, можно указать такое число, что для всѣхъ значеній n бо́льшихъ этого числа, и для любого значенія x въ интервалѣ (a, b), будемъ имѣть $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$. Поэтому

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\,\varepsilon,$$

а потому

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = 0, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots.$$

Замѣтимъ, что, въ частности, всякій степенной рядъ допускаетъ почленное интегрированіе.

729. Примѣры. а) Интегрированіе при помощи рядовъ можетъ служить для разложенія функціи въ степенно́й рядъ, если извѣстно разложеніе производной. Такъ, напримѣръ (§ 233, е),

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

при условіи, что въ правой части x^2 не >1. На основаніи извѣстныхъ формулъ, приведенныхъ выше (§ 725, d) оба разложенія эквивалентны, потому что

$$\operatorname{arc\,sin} ix = \operatorname{arc\,tg} \frac{ix}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2i} \log \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x} = i \log (x+\sqrt{1+x^2}).$$

b) Интегрированіе при помощи рядовъ часто полезно для вычисленія нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Такъ напримѣръ, весьма быстро вычисляется интегралъ отъ $x^x dx$ въ предѣлахъ 0 и 1 при помощи разложенія

$$x^x = e^{x \log x} = 1 + \frac{x \log x}{1} + \frac{x^2 \log^2 x}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 \log^3 x}{1 \cdot 2} + \cdots.$$

Дѣйствительно, интегрируя и припоминая формулу (13), тотчасъ находимъ

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \log^n x \, dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}},$$

т. е.

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots = 0{,}783\ldots.$$

Общнѣе имѣемъ

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{\alpha x+\beta} \log^n x \, dx = \frac{1}{(\beta+1)^{n+1}} - \frac{(n+1)\alpha}{1!\,(\beta+2)^{n+2}} + \frac{(n+1)(n+2)\alpha^2}{2!\,(\beta+3)^{n+3}} - \cdots.$$

Въ частности, замѣтимъ, что

$$-\int_0^1 x^x \log x \, dx = \int_0^1 x^x \, dx.$$

c) Точно такъ же для вычисленія интеграла отъ $\log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x}$ въ предѣлахъ 0 и ∞ можно воспользоваться разложеніемъ подъинтегральной функціи въ степенной рядъ. Но необходимо замѣтить, что въ интервалѣ отъ 0 до 1 ее надо разложить по восходящимъ степенямъ x, а въ интервалѣ отъ 1 до ∞ по восходящимъ степенямъ $\frac{1}{x}$. Однако, можно избѣжать этого второго разложенія, ограничивъ интегрированіе интерваломъ отъ 0 до 1. Достаточно разбить данный интегралъ на два

$$2\int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} + 2\int_1^\infty \log \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{dx}{x}$$

и замѣтить, что второй интегралъ при подстановкѣ $\frac{1}{x}$ на мѣсто x, обратится въ

$$\int_1^0 \log\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\cdot x\,d\,\frac{1}{x} = \int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x}.$$

Поэтому данный интегралъ имѣетъ значеніе, равное (§ 219)

$$4\int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x} = 8\int_0^1\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right)dx,$$

т. е. равенъ суммѣ ряда (§ 365, a)

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots = \sum_1^\infty\frac{1}{n^2}-\sum_1^\infty\frac{1}{4n^2} = \frac{3}{4}\sum_1^\infty\frac{1}{n^2} = \frac{1}{8}\pi^2,$$

умноженной на 8, такъ что

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{dx}{x} = \pi^2.$$

d) Обратно, можно воспользоваться интегрированіемъ съ помощью рядовъ для суммированія нѣкоторыхъ рядовъ, изображая члены этихъ рядовъ опредѣленными интегралами. Такъ, напримѣръ, чтобы найти сумму ряда $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$, достаточно замѣтить, что ея значеніе равно опредѣленному интегралу (§ 725, d)

$$\int_0^1(1+x-x^3-x^4+x^6+\cdots)\,dx = \int_0^1\frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1-2x}{\sqrt{3}}\right)_1^0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Слѣдовательно,

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Точно такъ же сумма ряда $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$ равна интегралу

$$\int_0^1(x-x^2+x^4-x^5+\cdots)\,dx = \int_0^1\frac{x\,dx}{1+x+x^2}$$

$$= \left(\log\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)_0^1,$$

а потому имѣемъ

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots=\log\sqrt{3}-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

e) Первый изъ полученныхъ въ пунктѣ d) результатовъ заключается, какъ частный случай, при $\alpha=\frac{\pi}{3}$, въ извѣстной формулѣ (§ 363)

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha+\cdots=\frac{\pi-\alpha}{2}+\left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]\pi, \tag{17}$$

которая сама можетъ быть получена такимъ же путемъ, т. е. при помощи интегрированія ряда

$$\sin\alpha+x\sin 2\alpha+x^2\sin 3\alpha+x^3\sin 4\alpha+\cdots$$

между предѣлами 0 и 1. Такъ какъ $\sin(n-1)\alpha+\sin(n+1)\alpha=2\sin n\alpha\cos\alpha$, то имѣемъ тождественно

$$(1+x^2)\sum_1^\infty x^{n-1}\sin n\alpha=\sin\alpha+2x\cos\alpha\sum_1^\infty x^{n-1}\sin n\alpha,$$

откуда вытекаетъ

$$\sum_1^\infty x^{n-1}\sin n\alpha=\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}. \tag{18}$$

Поэтому сумма ряда (17), при условіи, что исключаются тѣ значенія, при которыхъ $\sin\alpha=0$, можетъ быть выражена такъ

$$\int_0^1\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)_0^1=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}(\cot\alpha).$$

Слѣдовательно, искомая сумма (§ 254, d) равна $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$, потому что $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<1$. Полученное выраженіе равно выраженію (17) и изображаетъ сумму ряда и при α, равномъ нечетному кратному отъ π. Но оно теряетъ смыслъ при α, равномъ четному кратному отъ π, когда, какъ мы знаемъ, и формула (17) не имѣетъ мѣста.

f) Къ другимъ замѣчательнымъ результатамъ приводимъ интегрированіе выраженія (18) по α въ предѣлахъ отъ 0 до какого нибудь α, при чемъ x остается постояннымъ и лежащимъ между 0 и 1. При этомъ предположеніи, какъ извѣстно (§ 320, b), рядъ (18) равномѣрно сходящійся. Съ помощью интегрированія тотчасъ находимъ

$$\sum_1^\infty\frac{x^n}{n}(1-\cos n\alpha)=\int_0^a\frac{d(-x\cos\alpha)}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1-2x\cos\alpha+x^2}{(1-x)^2},$$

т. е., замѣняя α на 2α,

$$x\sin^2\alpha+\frac{1}{2}x^2\sin^2 2\alpha+\frac{1}{3}x^3\sin^2 3\alpha+\cdots=\frac{1}{4}\log\frac{1-2x\cos 2\alpha+x^2}{(1-x)^2}.$$

Замѣчая далѣе, что $\sin\alpha\sin\beta=\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, получаемъ еще

$$x\sin\alpha\sin\beta+\tfrac{1}{2}x^2\sin 2\alpha\sin 2\beta+\tfrac{1}{3}x^3\sin 3\alpha\sin 3\beta+\cdots$$
$$=\frac{1}{4}\log\frac{1-2x\cos(\alpha+\beta)+x^2}{1-2x\cos(\alpha-\beta)+x^2}.$$

Отсюда, на основаніи теоремы Абеля (§ 340), слѣдуетъ

$$\sin\alpha\sin\beta+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\sin 2\beta+\frac{1}{3}\sin 3\alpha\sin 3\beta+\cdots=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\right|.$$

Эта формула даетъ намъ возможность вычислить еще другой интегралъ, аналогичный интегралу (11). Съ помощью не вполнѣ строгаго пріема, уже примѣненнаго раньше (§ 721, e, f, h), легко найдемъ

$$\int_0^\infty\sin\alpha x\sin\beta x\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|.$$

g) Вычислимъ, наконецъ, еще интегралъ Дирихле (§ 721, f), собирая всѣ элементы, соотвѣтствующіе одной и той же абсолютной величинѣ $\sin x$. При этомъ, когда x имѣетъ значеніе, лежащее между 0 и $\frac{\pi}{2}$, дуги x, $\pi-x$, $2\pi+x$, $3\pi-x$, $4\pi+x$ и т. д. будутъ имѣть одно и то же значеніе синуса, а дуги $\pi+x$, $2\pi-x$, $3\pi+x$, $4\pi-x$ и т. д. — то же значеніе съ обратнымъ знакомъ. Отсюда слѣдуетъ, что $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ можетъ быть представленъ слѣдующимъ образомъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\pi+x}-\frac{1}{2\pi-x}+\frac{1}{2\pi+x}+\frac{1}{3\pi-x}-\cdots\right)\sin x\,dx.$$

Между тѣмъ (§ 464, c) рядъ въ скобкахъ имѣетъ значеніе

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x-n\pi}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-2n\pi}-\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-(2n+1)\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}x-n\pi}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}(\pi-x)-n\pi}=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sin x}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Это вычисленіе легко сдѣлать совершенно строгимъ [1]).

Кратные интегралы.

730. Неопредѣленное интегрированіе. Изъ предыдущихъ изслѣдованій ясно, что задача простого интегрированія въ сущности состоитъ въ разысканіи функціи y, когда извѣстна ея производная $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Не будетъ существенно новою задачею вопросъ о разысканіи неизвѣстной функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ по данной частной ея производной, взятой по одной изъ перемѣнныхъ. Напримѣръ, если требуется найти функціи z отъ x и y, когда дана $\frac{dz}{dx} = f(x, y)$, при составленіи которой y разсматривается, какъ постоянная, то такъ же на нее надо смотрѣть при интегрированіи, такъ что $z = \int f(x, y)\, dx$. Но такъ какъ при этомъ y считается постояннымъ, то подъ произвольной постоянной, являющейся при этомъ интегрированіи, надо понимать независящую отъ x величину. Она можетъ зависѣть отъ y и будетъ въ сущности произвольной функціей отъ y. Точно такъ же не новыми, по существу дѣла, будутъ вопросы о нахожденіи функціи y по данной $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$, или z по данной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f(x, y)$, и вообще по данной производной какого угодно порядка, но взятой по одной лишь перемѣнной. Нѣсколько послѣдовательныхъ интегрированій по этой перемѣнной, при чемъ другая разсматривается, какъ постоянная, всегда приведутъ къ цѣли, не требуя какихъ либо добавленій къ сказанному раньше. Новый вопросъ является лишь тогда, когда требуется найти функцію z, удовлетворяющую уравненію

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y), \tag{19}$$

гдѣ f данная функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Допуская a priori существованіе такой функціи z, замѣчаемъ, что

[1]) См. „Calcolo integrale" Arcais (стр. 198).

лѣвая часть равенства (19) есть частная производная отъ $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятая по x, при составленіи которой y разсматривается, какъ постоянная, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int f(x, y)\, dx.$$

Интегрируя теперь по y, въ предположеніи, что x остается постояннымъ, получимъ

$$z = \int \left\{ \int f(x, y)\, dx \right\} dy,$$

или, какъ иначе пишутъ,

$$z = \int dy \int f(x, y)\, dx.$$

Ясно, что можно разсматривать лѣвую часть равенства (19), наоборотъ, какъ производную отъ $\frac{\partial z}{\partial x}$, взятую по y, и тогда аналогичнымъ путемъ найдемъ

$$z = \int dx \int f(x, y)\, dy.$$

Общій результатъ двухъ послѣдовательныхъ интегрированій (если онъ существуетъ), по различнымъ, одна отъ другой независимымъ перемѣннымъ называется двойнымъ интеграломъ и изображается слѣдующимъ образомъ

$$z = \int\int f(x, y)\, dx\, dy. \tag{20}$$

Надо замѣтить, что если существуетъ одна функція $z = F(x, y)$, удовлетворяющая уравненію (19), то существуетъ и безчисленное множество функцій, ему удовлетворяющихъ, и общее ихъ выраженіе будетъ

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y),$$

гдѣ $\varphi(x)$ произвольная функція одного x, а $\psi(y)$ произвольная функція одного y. Къ этому результату можно придти, выписывая при послѣдовательныхъ интегрированіяхъ произвольныя постоянныя (которыя въ данномъ случаѣ будутъ произвольными функціями отъ той перемѣнной, которая разсматривается, какъ постоянная при интегрированіи), но еще проще сдѣлать повѣрку предыдущаго равенства, которая дастъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \varphi'(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y},$$

т. е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y)$, по условію.

731. Опредѣленный двойной интегралъ. Когда мы ищемъ простой опредѣленный интегралъ отъ $f(x)\,dx$ въ интервалѣ $(a,\ b)$, гдѣ $a<b$, то ограниченіе, налагаемое нами на перемѣнную x, можно выразить неравенствомъ $(x-a)(x-b)\leqq 0$, такъ какъ этому неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, лежащія въ интервалѣ $(a,\ b)$ и только эти значенія. Общнѣе, всякое неравенство $L(x)\leqq 0$ изображаетъ одинъ или нѣсколько интерваловъ, совокупность которыхъ составляетъ область интегрированія. Обращаясь къ двойному интегралу (20), положимъ, что перемѣнныя x и y, оставаясь одна отъ другой независимыми, должны удовлетворять нѣкоторому неравенству

(21) $$L(x,\ y)\leqq 0.$$

Допустимъ еще, чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, что изъ этого неравенства, при данномъ значеніи x, вытекаютъ неравенства

(21a) $$a(x)\leqq y\leqq b(x),$$

гдѣ $a(x)$ и $b(x)$ нѣкоторыя функціи отъ x, и что значенія y, такимъ образомъ ограниченныя, существуютъ для всѣхъ значеній x, ограниченныхъ неравенствами

(21b) $$\alpha\leqq x\leqq\beta,$$

гдѣ α и β — постоянныя; обыкновенно эти числа будутъ корнями уравненія $a(x)=b(x)$. Интегрируя функцію $f(x,\ y)$ по y въ предѣлахъ отъ $y=a(x)$ до $y=b(x)$, разсматривая, конечно, при этомъ x, какъ постоянную, получимъ результатъ, зависящій, вообще говоря, отъ x

$$\varphi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,\ y)\,dy.$$

Теперь возьмемъ интегралъ отъ $\varphi(x)\,dx$ въ предѣлахъ отъ α до β. Полученное при этомъ число

(22) $$z=\int_{\alpha}^{\beta} dx\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,\ y)\,dx,$$

называется опредѣленнымъ двойнымъ интеграломъ, распространеннымъ на область, опредѣляемую неравенствомъ (21), или равносильными ему неравенствами (21a) и (21b). Если $F(x,\ y)$, при x постоянномъ, есть первообразная функція отъ $f(x,\ y)$, то формула (22) дастъ для z значеніе

$$z=\int_{\alpha}^{\beta}[F(x,\ b(x))-F(x,\ a(x))]\,dx.$$

[**Примѣчаніе.** Если изъ того же неравенства (21) вытекаютъ неравенства

(21c) $$c(y) \leqq x \leqq d(y),$$

ограничивающія значенія x при данномъ y для всѣхъ значеній y, удовлетворяющихъ неравенствамъ

(21d) $$\gamma \leqq y \leqq \delta,$$

то двойной интегралъ

(22bis) $$z = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{c(y)}^{d(y)} f(x, y)\, dx,$$

отличающійся отъ (22) порядкомъ интегрированій и предѣлами для перемѣнныхъ, также называется двойнымъ интеграломъ, распространеннымъ на ту же область (21). Изложенныя до сихъ поръ соображенія не даютъ возможности доказать, что формулы (22) и (22 bis) даютъ для z одно и то же число, т. е. что значеніе двойного интеграла отъ $f(x, y)\, dx\, dy$ вполнѣ опредѣляется, когда дана область интегрированія; результатъ этотъ вытекаетъ непосредственно изъ новаго опредѣленія опредѣленнаго интеграла, которое будетъ дано ниже (§ 735). Если будемъ разсматривать x и y, какъ Декартовы координаты точки на плоскости, то область, опредѣляемую неравенствомъ (21), можно разсматривать, какъ часть плоскости, всѣ точки которой удовлетворяютъ неравенству

$$L(x, y) \leqq 0.$$

Наше предположеніе, состоящее въ томъ, что неравенство (21) равносильно неравенствамъ $a(x) \leqq y \leqq b(x)$ и $\alpha \leqq x \leqq \beta$, обозначаетъ, что часть плоскости ограничена двумя кривыми

$$y = a(x), \quad y = b(x),$$

и двумя прямыми, параллельными оси y-овъ: $x = \alpha$, $x = \beta$, при чемъ $a(x) < b(x)$, $\alpha < \beta$. Предположеніе, что неравенство $L(x, y) \leqq 0$ равносильно также неравенствамъ

$$c(y) \leqq x \leqq d(y), \quad \gamma \leqq y \leqq \delta$$

обозначаетъ, что ту же часть плоскости можно разсматривать, какъ ограниченную двумя кривыми

$$x = c(y), \quad x = d(y),$$

и двумя прямыми, параллельными оси x-овъ: $y = \gamma$, $y = \delta$, при чемъ $c(y) < d(y)$, $\gamma < \delta$. Если та часть плоскости, на которую распространяется интегрированіе, ограничена сомкнутою кривою линіею, $L(x, y) = 0$, которая пересѣкается прямыми линіями, параллельными осямъ, не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, то рѣшая уравненіе

$L(x, y) = 0$ относительно y, найдемъ два значенія при данномъ x: $y = a(x)$, $y = b(x)$; α и β — предѣлы для x — будутъ абсциссы точекъ касанія кривой съ прямыми, параллельными оси y-овъ, такъ какъ эти абсциссы и будутъ наименьшимъ и наибольшимъ значеніями x въ данной области. Рѣшая то же уравненіе относительно x, получимъ $x = c(y)$, $x = d(y)$, а числа γ и δ — предѣлы для y — будутъ ординаты точекъ касанія кривой съ прямыми, параллельными оси x-овъ. Въ разсматриваемомъ случаѣ, какъ видимъ, неравенство $L(x, y) \leqq 0$ равносильно какъ неравенствамъ (21a) и (21b), такъ и неравенствамъ (21c) и (21d), и двойной интегралъ, распространенный на данную область, можно представлять въ формѣ (22) или въ формѣ (22 bis). Наконецъ, замѣтимъ, что если разсматриваемая область интегрированія, выражаемая неравенствомъ $L(x, y) \leqq 0$, не можетъ быть выражена неравенствами вида (21a) и (21b), то мы разбиваемъ ее на части, для каждой изъ которыхъ это требованіе выполняется, и подъ интеграломъ, распространеннымъ на всю область, понимаемъ сумму интеграловъ, распространенныхъ на каждую часть отдѣльно.]

732. Примѣры. Если область интегрированія задана неравенствомъ $x^2 + y^2 \leqq 2x$, то изъ него вытекаетъ

$$-\sqrt{2x - x^2} \leqq y \leqq +\sqrt{2x - x^2},$$

и y будетъ вещественнымъ только при $0 \leqq x \leqq 2$. Слѣдовательно, двойной интегралъ, распространенный на эту область, выразится формулою

$$z = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{+\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy.$$

Но изъ даннаго неравенства, также вытекаетъ, что

$$1 - \sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq 1 + \sqrt{1 - y^2}$$
$$-1 \leqq y \leqq +1,$$

поэтому интегралъ, распространенный на данную область, можно представить и такъ:

$$z = \int_{-1}^{+1} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx,$$

перемѣнивъ порядокъ интегрированій. Отсюда вытекаетъ, что если $\varphi(x, y)$ есть первообразная функція отъ $f(x, y)$ при x постоянномъ, а $\psi(x, y)$ первообразная функція отъ $f(x, y)$ при y постоянномъ, то двойной интегралъ $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$, распространенный на данную область, можетъ быть представленъ въ одномъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ

$$\int_0^2 [\varphi(t, \sqrt{2t-t^2}) - \varphi(t, -\sqrt{2t-t^2})]\, dt,$$

$$\int_{-1}^1 [\psi(1+\sqrt{1-t^2},\ t) - \psi(1-\sqrt{1-t^2},\ t)]\, dt.$$

[Такъ какъ тождественность этихъ выраженій пока вообще не доказана, то мы можемъ здѣсь лишь провѣрить ее на частномъ примѣрѣ. Положивъ, напримѣръ, $f(x, y) = xy$, легко найдемъ для того и другого интеграла значеніе, равное нулю.]

733. Двойной интегралъ разсматривался нами, какъ результатъ интегрированія простого интеграла. Является вопросъ, какъ производится дифференцированіе простого интеграла по перемѣнной, независящей отъ перемѣнной интегрированія, или, какъ говорятъ, по параметру, отъ котораго зависитъ подъинтегральная функція, и который при интегрированіи разсматривается, какъ постоянная. Разсмотримъ функцію

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy, \quad (a < b)$$

и положимъ сперва, что a и b отъ x независятъ. [Докажемъ слѣдующую теорему: Если функція $f(x, y)$ непрерывна относительно x и y для всѣхъ значеній x и y, удовлетворяющихъ неравенствамъ $a \leqq y \leqq b$, $c \leqq x \leqq d$, то функція $\varphi(x)$ будетъ непрерывна въ интервалѣ (c, d). Возьмемъ произвольное значеніе $x = a$ въ интервалѣ (c, d) и покажемъ, что $\varphi(x)$ непрерывна для этого значенія. Мы имѣемъ

$$\text{(A)} \qquad |\varphi(x) - \varphi(a)| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(a, y)|\, dy,$$

(см. § 715, а). Вслѣдствіе непрерывности функціи $f(x, y)$, каждому данному положительному числу ε соотвѣтствуетъ такое число δ, что

$$|f(x, y) - f(a, y)| < \varepsilon,$$

если $|x - a| < \delta$, а потому изъ предыдущаго неравенства получаемъ $|\varphi(x) - \varphi(a)| < (b-a)\varepsilon$, а положивъ $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{b-a}$, гдѣ ε' сколь угодно малое положительное число, мы находимъ, что при $|x - a| < \delta$, $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon'$, что и доказываетъ непрерывность $\varphi(x)$ при $x = a$, а слѣдовательно, и во всемъ интервалѣ (c, d), потому что значеніе $x = a$ выбрано было по произволу.

Полученный результатъ можно обобщить на тотъ случай, когда $f(x, y)$, оставаясь лишь конечною имѣетъ конечное число разрывовъ для нѣкоторыхъ или даже для всѣхъ значеній x въ интервалѣ (c, d) и различныхъ y въ интервалѣ (a, b).] *).

Перейдемъ теперь въ разысканію производной отъ $\varphi(x)$. Мы имѣемъ

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}\, dx$$

$$= \int_a^b f'_x(x+\vartheta h, y)\, dy, \text{ гдѣ } 0<\vartheta<1.$$

Положимъ, что каждому, сколь угодно малому, положительному числу ε, соотвѣтствуетъ такое положительное числи δ, что, при $|h|<\delta$, всегда будемъ имѣть при $|h|<\delta$,

$$|f'_x(x+h, y)-f'_x(x, y)|<\varepsilon,$$

каково бы ни было значеніе y въ интервалѣ (a, b). Тогда ясно, что будемъ имѣть

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_a^b f'_x(x, y)\, dy\right|$$

$$= \left|\int_a^b [f'_x(x+\vartheta h, y)-f'_x(x, y)]\, dy\right| < (b-a)\,\varepsilon,$$

а отсюда

$$\varphi'(x) = \lim_{h=0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \int_a^b f'_x(x, y)\, dy \text{ **}).$$

Полезно замѣтить, что поставленное выше условіе относительно f'_x всегда выполняется, если производная f''_{xx} отъ f'_x существуетъ и конечна. Дѣйствительно, если $|f''_{xx}|$ будетъ при $c\leqq x\leqq d$, $a\leqq y\leqq b$ всегда меньше нѣкотораго даннаго числа l, то достаточно взять $|h|<\frac{\varepsilon}{l}$, чтобы имѣть

$$\left|f'_x(x+h, y)-f'_x(x, y)\right| < \frac{\varepsilon}{l}\left|f''_{xx}(x+\vartheta h, y)\right| < \varepsilon \text{ ***}).$$

---

*) См. Poussin, de la Vallée, Cours d'Analyse infinitésimale, т. II, 2-е изд. 1912, стр. 4.

**) Формула эта выражаетъ такъ называемое правило Лейбница.

***) Очевидно, также, что для выполненія упомянутаго условія достаточно, чтобы $f'_x(x, y)$ была непрерывною въ данной области, какъ функція отъ двухъ перемѣнныхъ.

Итакъ, производная интеграла, взятая по параметру, при предѣлахъ, отъ него независящихъ, равна интегралу отъ производной подъинтегральной функціи, взятой по этому параметру. На этомъ основаніи формула

$$\varphi'(x) = \int_a^b f'_x(x, y)\, dy$$

называется также формулою дифференцированія подъ знакомъ интеграла *). Если a и b не постоянныя, а функціи отъ x, то производную $\varphi'(x)$ получимъ, разсматривая $\varphi(x)$, какъ сложную функцію (§ 369), и припоминая, что производная интеграла по одному изъ его предѣловъ равна значенію подъинтегральной функціи (§ 713) на этомъ предѣлѣ, взятому со знакомъ $+$ или $-$ (§ 711, а), смотря по тому, будетъ ли эта производная по верхнему или по нижнему предѣлу **). Примѣняя сказанное, получимъ

$$\varphi'(x) = f(x, b)\, b' - f(x, a)\, a' + \int_a^b f'_x(x, y)\, dy.$$

734. Возвратимся теперь къ интегрированію интеграла и будемъ опять считать a и b постоянными. Предложимъ себѣ интегрировать интегралъ $\varphi(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy$ въ предѣлахъ отъ α до β. Если положимъ

$$\psi(x, y) = \int_a^x f(x, y)\, dx, \qquad F(x) = \int_a^b \psi(x, y)\, dy,$$

то, очевидно, будемъ имѣть

$$F'(x) = \int_a^b \psi'_x(x, y)\, dy = \int_a^b f(x, y)\, dy = \varphi(x),$$

а слѣдовательно,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx = F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^b \psi(\beta, y)\, dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx.$$

---

*) Правило это выведено только для случая конечныхъ предѣловъ интеграловъ. Дальше встрѣчаются, однако, приложенія его въ случаѣ безконечныхъ предѣловъ. Объ условіяхъ, когда такое распространеніе законно, можно прочесть, напр., у Гурса „Курсъ математическаго Анализа“ (т. I, стр. 395).

**) Примѣняя это правило § 713, мы должны предположить непрерывность подъинтегральной функціи по y, по крайней мѣрѣ, при $y = a$ и $y = b$.

Итакъ, чтобы интегрировать интегралъ по параметру (т. е. по перемѣнной, независящей отъ перемѣнной интегрированія въ данномъ интегралѣ), достаточно интегрировать по этому параметру подъинтегральную функцію. Иными словами, подставляя вмѣсто $\varphi(x)$ ея выраженіе, получимъ

$$\int_a^\beta dx \int_a^b f(x, y, dy = \int_a^b dy \int_a^\beta f(x, y)\, dx.$$

[**Примѣчаніе.** Эта формула показываетъ, что значеніе двойного интеграла, когда предѣлы интегрированія по обѣимъ перемѣннымъ постоянны, не зависитъ отъ порядка интегрированій. Формула эта выведена при помощи формулы дифференцированія и можетъ считаться доказанною только въ случаѣ конечныхъ предѣловъ и непрерывности подъинтегральной функціи. Дѣйствительно, въ этомъ предположеніи, $f(x, y)$ будетъ интегрируема и по x, и по y. Далѣе (см. § 733), функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x, y)$ будутъ непрерывны (а слѣдовательно, и интегрируемы), первая по x, вторая по y. Кромѣ того, изъ непрерывности $f(x, y))$ по x вытекаетъ (§ 713), что $\psi'_x(x, y) = f(x, y)$, а непрерывность $f(x, y)$ по обѣимъ перемѣннымъ даетъ право (см. примѣчаніе ***) на стр. 298) примѣнить къ интегралу $\int_a^b \psi(x, y)\, dy$ правило, изложенное въ § 733. О распространеніи формулы на безконечные предѣлы см. Гурса, l. c.]

Случай, когда предѣлы a и b не постоянныя числа, а функціи отъ x, можетъ быть сведенъ къ случаю постоянныхъ предѣловъ помощью введенія новой перемѣнной. Достаточно, при интегрированіи по y, положить $y = a + (b - a)t$; тогда t будетъ измѣняться отъ 0 до 1, при измѣненіи y отъ a до b.

735. Новое опредѣленіе двойного интеграла. Приведенное выше опредѣленіе двойного интеграла страдаетъ тѣми же недостатками, какъ данное въ началѣ этой книгѣ опредѣленіе простого интеграла. Поэтому нужно его видоизмѣнить такъ, чтобы оно давало возможность установить условія существованія интеграла и, кромѣ того, указывало путь для вычисленія его значенія (не предполагая извѣстными, ни даже существующими первообразныя функціи φ и ψ, о которыхъ говорилось въ § 732). Мы предположимъ, что область интегрированія конечна, т. е. что можно указать два конечныхъ интервала (α, β) и (γ, δ), въ которыхъ должны заключаться соотвѣтственно значенія перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющихъ неравенству $L(x, y) \leqq 0$, опредѣляющему область интегрированія. Функцію $f(x, y)$ мы предположимъ конечною въ области интегрированія и условимся, что $f(x, y)$ равно нулю для всѣхъ значеній x и y, лежащихъ внѣ области интегрированія.

[**Примѣчаніе.** Подъ α и β понимаются наименьшее и наибольшее значеніе x въ области интегрированія, подъ γ и δ — наименьшее и наибольшее значеніе y въ той же области. Пользуясь геометрической интерпретаціей, можемъ сказать, что та часть плоскости, которая изображаетъ область интегрированія, лежитъ вся внутри прямоугольника, ограниченнаго прямыми $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = \gamma$, $y = \delta$.]

Разложимъ интервалъ (α, β) на частные интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$, а (γ, δ) на интервалы $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Положимъ, что какъ тѣ, такъ и другіе, стремятся къ нулю (при чемъ, конечно, числа m и n должны безпредѣльно возрастать), не будучи связаны никакою зависимостью. Когда x и y измѣняются соотвѣтственно въ интервалахъ h_i и k_j, независимо одно отъ другого, значенія функціи $f(x, y)$ остаются между нѣкоторою нижнею и нѣкоторою верхнею границами; выберемъ по произволу число f_{ij}, содержащееся между этими границами, и разсмотримъ двойную сумму

$$\sum_{ij} h_i k_j f_{ij} = h_1 k_1 f_{11} + h_1 k_2 f_{12} + h_2 k_1 f_{21} + \cdots + h_n k_m f_{nm}.$$

Если эта сумма всегда стремится къ одному и тому же предѣлу, когда всѣ h_i и всѣ k_j стремятся къ 0, при чемъ m и n безпредѣльно возрастаютъ, независимо отъ закона разложенія интерваловъ (α, β) и (γ, δ) на части, и независимо отъ выбора чиселъ f_{ij} въ соотвѣтствующихъ границахъ, то этотъ предѣлъ и называется опредѣленнымъ двойнымъ интеграломъ отъ $f(x, y)$ въ данной области, и обозначается знакомъ

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy.$$

Выраженіе $f(x, y)\, dx\, dy$ называется элементомъ интеграла, а интегралъ есть сумма безконечно большого числа безконечно малыхъ элементовъ. Это опредѣленіе вполнѣ аналогично опредѣленію простого интеграла, данному въ § 710. Положивъ его въ основаніе, можно изъ него вывести слѣдствія, аналогичныя тѣмъ, которыя были выведены изъ опредѣленія простого интеграла, и въ частности изъ него можно вывести необходимое и достаточное условіе существованія интеграла или, иначе говоря, условіе интегрируемости функціи $f(x, y)$ въ данной области (вполнѣ аналогичное условію интегрируемости функціи отъ одной перемѣнной въ данной области). Здѣсь мы ограничимся формулировкою опредѣленія и для всего прочаго отсылаемъ читателя къ подробныхъ курсамъ интегральнаго исчисленія *).

*) См., напримѣръ, Гурсà. „Курсъ математическаго анализа". Вопросъ объ интегрируемости функцій отъ одной или отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ трактуется у Гурсà и въ большинствѣ французскихъ руководствъ съ нѣсколько иной точки зрѣнія, съ которою полезно ознакомиться.

736. Намъ остается только показать, что если интегралъ (по новому опредѣленію) существуетъ, то значеніе его получается изложеннымъ въ § 731 способомъ, т. е. получается при помощи двухъ простыхъ интегрированій. Предположимъ, какъ и въ § 731, что область интегрированія, опредѣляемая неравенствомъ $L(x, y) \leqq 0$, совпадаетъ съ областью, опредѣляемою неравенствами

$$a(x) \leqq y \leqq b(x), \quad \alpha \leqq x \leqq \beta.$$

Если интегралъ, какъ предѣлъ суммы, существуетъ, то мы можемъ распоряжаться послѣдовательностями разложеній по произволу, напримѣръ, сперва взять опредѣленное разложеніе интервала (α, β) на частные интервалы $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, т. е. считать всѣ h_j и число n постояннымъ, и измѣнять разложеніе интервала (γ, δ) на частные, безпредѣльно убывающіе интервалы $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, при чемъ m будетъ безпредѣльно возрастать; число f_{ij} между нижнею и верхнею границами значеній, которыя принимаетъ $f(x, y)$, когда x остается неподвижнымъ въ начальной точкѣ элемента h_i, а y измѣняется въ интервалѣ k_j, можемъ выбирать также по произволу. Тогда вышенаписанная двойная сумма разложится на n простыхъ суммъ, изъ которыхъ одна, соотвѣтствующая данному i, будетъ

$$\text{(A)} \qquad h_i \{ k_1 f_{i1} + k_2 f_{i2} + \cdots + k_m f_{im} \}.$$

Прилично выбирая числа f_{ij}, мы можемъ сказать, что эта сумма равна

$$h_i \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y)\, dy.$$

Дѣйствительно, разлагая интервалъ (γ, δ) на интервалы $k_1, k_2, \ldots, k_m$ мы можемъ представить интегралъ въ видѣ

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y)\, dy = \sum_{j=1}^{j=m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\, dy$$

$$= \sum_{(j)} k_j f_j, \quad (y_j - y_{j-1} = k_j),$$

гдѣ f_j есть нѣкоторое опредѣленное число, лежащее между границами функціи f въ интервалѣ k_j. Взявъ въ суммѣ (A) числа f_{ij} равными этимъ f_j, что мы въ правѣ сдѣлать, мы убѣдимся въ справедливости сказаннаго. Далѣе, такъ какъ, по условію, $f(x, y)$ равна нулю внѣ области интегрированія, то можемъ написать, что

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y)\, dy = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy,$$

потому что интервалы $(\gamma,\ a(x))$ и $(b(x),\ \delta)$ лежатъ внѣ области интегрированія. Полагая

$$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,\ y)\,dy$$

и обозначая черезъ F_i значеніе $F(x)$ для x, лежащаго въ началѣ интервала h_i, находимъ, что наша двойная сумма равна

$$h_1F_1+h_2F_2+\cdots+h_nF_n,$$

а предѣлъ ея, когда всѣ h_i стремятся къ 0, а n возрастаетъ безпредѣльно, равенъ

$$\int_{\alpha}^{\beta}F(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}dx\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,y)\,dy,$$

т. е. выраженію (22) въ § 731.

[**Примѣчаніе.** Если та же самая область интегрированія $L(x,\ y)\leqq 0$ можетъ быть изображена неравенствами

$$c(y)\leq x\leq d(y),\quad \gamma\leq y\leq\delta,$$

то совершенно такъ же убѣдимся, измѣнивъ порядокъ суммированія, что двойной интегралъ, т. е. предѣлъ двойной суммы, распространенный на область $L(x,\ y)\leqq 0$, будетъ равенъ

(22 bis)
$$\int_{\gamma}^{\delta}dy\int_{c(y)}^{d(y)}f(x,\ y)\,dx.$$

Отсюда и видно, что

$$\int_{\alpha}^{\beta}dx\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,\ y)\,dy=\int_{\gamma}^{\delta}dy\int_{c(y)}^{d(y)}f(x,\ y)\,dx,$$

если неравенства

$$\left\{\begin{array}{c}a(x)\leqq y\leqq b(x)\\ \alpha\leqq x\leqq\beta\end{array}\right\}\ \text{и}\ \left\{\begin{array}{c}c(y)\leqq x\leqq d(y)\\ \gamma\leqq y\leqq\delta\end{array}\right\}$$

опредѣляютъ одну и ту же область интегрированія $L(x,\ y)\leqq 0$, потому что эти интегралы равны одному и тому же опредѣленному числу, а именно двойному интегралу

$$\int\int f(x,\ y)\,dx\,dy,$$

распространенному на эту область. Если область интегрированія опредѣлена неравенствами

$$\alpha\leqq x\leqq\beta,\quad \gamma\leqq y\leqq\delta,$$

гдѣ α, β, γ, δ числа постоянныя (т. е. изображается прямоугольникомъ съ вершинами (α, γ), (α, δ), (β, γ) и (β, δ)), то найдемъ, что $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$, распространенный на эту область, можетъ быть представленъ въ слѣдующихъ двухъ видахъ

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y)\,dy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\,dx,$$

такъ что снова получается формула § 734, выражающая теорему объ измѣненіи порядка интегрированій. Необходимо только замѣтить, что выводъ ея, сдѣланный здѣсь, нельзя считать строгимъ, потому что онъ основанъ на предположеніи о существованіи двойного интеграла

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

а условія этого существованія не были разсмотрѣны. На основаніи § 734, мы въ правѣ лишь утверждать, что теорема эта вѣрна, когда $f(x, y)$ непрерывна].

Перемѣна порядка интегрированій, какъ мы увидимъ дальше, есть весьма цѣнное средство для разныхъ изслѣдованій. Не нужно только забывать, что примѣненіе его можетъ иногда вести къ невѣрнымъ результатамъ, вслѣдствіе несоблюденія функціею $f(x, y)$ ограничивающихъ ее условій, напримѣръ, когда эта функція разрывна въ области интегрированія, или когда эта область безконечна.

736a. Подъ двойнымъ интеграломъ, распространеннымъ на безконечную область, напримѣръ, на всю полу-плоскость, лежащую со стороны положительныхъ ординатъ, опредѣляемую неравенствомъ $0 \leqq y < +\infty$, $-\infty < x < +\infty$, понимаютъ предѣлъ, къ которому стремится интегралъ, распространенный на конечную область, когда ея граница удаляется въ безконечность, если такой предѣлъ существуетъ. Напримѣръ, для вышеупомянутой области вычисляютъ интегралъ, распространенный на площадь прямоугольника, ограниченнаго прямыми $y = 0$, $y = \delta$, $x = -\alpha$, $x = \alpha$ и затѣмъ ищутъ его предѣлъ при возрастаніи δ и α до ∞. Разсматривая функцію отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ $f(x, y, z)$, можно установить понятіе о тройномъ опредѣленномъ интегралѣ, аналогичномъ понятію о двойномъ, а затѣмъ и о n — кратномъ интегралѣ функціи отъ n перемѣнныхъ независимыхъ. Отсылая читателя для подробностей къ подробнымъ курсамъ интегральнаго исчисленія, цитированнымъ выше, мы ограничимся здѣсь нѣсколькими замѣчаніями о тройныхъ интегралахъ. Для наглядности мы воспользуемся геометрическими соображеніями, разсматривая x, y, z, какъ прямоугольныя координаты точки въ пространствѣ. Мы предположимъ, что точка (x, y, z) должна всегда оставаться внутри или на границѣ нѣкотораго объема, который весь заключается внутри параллелепипеда, ограниченнаго

тремя парами плоскостей, соотвѣтственно параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ

$$(1)\qquad x=x_0,\ x=X>x_0;\quad y=y_0,\ y=Y>y_0;\quad z=z_0,\ z=Z>z_0.$$

Представимъ себѣ затѣмъ, что мы разбили этотъ параллелепипедъ на элементарные параллелепипеды тремя системами плоскостей, соотвѣтственно параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ. Мы предположимъ затѣмъ, что разстоянія между каждыми двумя смежными плоскостями каждой изъ трехъ системъ стремятся къ нулю, такъ что всѣ три ребра каждаго элементарнаго параллелепипеда стремятся къ нулю. Обозначая черезъ h_i, k_j, l_g ребра одного изъ элементарныхъ параллелепипедовъ, а черезъ f_{ijg} произвольно выбранное число, лежащее между границами значеній функціи f, соотвѣтствующими точкамъ внутри или на границахъ того же параллелепипеда, разсмотримъ тройную сумму

$$(2)\qquad \sum_{(i,j,g)} f_{ijg}\,h_i\,k_j\,l_g,$$

распространенную на всѣ комбинаціи значковъ i, j, g, соотвѣтствующія всѣмъ элементарнымъ параллелепипедамъ, на которые разложенъ данный параллелепипедъ, ограниченный плоскостями (1). Условимся, наконецъ, считать функцію $f(x, y, z)$ равною нулю во всѣхъ точкахъ внѣ данной области. Предѣлъ, къ которому стремится сумма (2), когда всѣ h_i, k_j, l_g стремятся къ нулю, при чемъ число ихъ, конечно, возрастаетъ безпредѣльно (если такой предѣлъ существуетъ)—называется тройнымъ интеграломъ отъ $f(x, y, z)$, распространеннымъ по данному объему или по данной области, и обозначается знакомъ

$$\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Символы dx, dy, dz обозначаютъ длины реберъ элементарныхъ параллелепипедовъ, и, какъ таковыя, всегда будутъ безконечно малыми положительными числами. Затѣмъ легко показать (аналогично тому, что было показано для двойного интеграла), что вычисленіе тройного интеграла приводится къ тремъ простымъ интегрированіямъ. Какова бы ни была область интегрированія, мы можемъ ее разбить на нѣсколько частей, ограниченныхъ слѣдующимъ образомъ: двумя плоскостями, параллельными плоскости zy, $x=x_0$, $x=X>x_0$; двумя цилиндрическими поверхностями, съ образующими, параллельными оси z-овъ, $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)>\varphi(x)$; и двумя поверхностями $z=F(x, y)$ и $z=\Phi(x, y)>F(x, y)$. При этомъ послѣднія двѣ поверхности таковы, что прямыя, параллельныя оси z-овъ, встрѣчаютъ каждую изъ нихъ только въ одной точкѣ, а кривыя $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ въ плоскости xy таковы, что каждая изъ нихъ встрѣчается съ прямою, параллельною оси y-овъ, только въ одной точкѣ.

Тогда легко показать, что тройной интегралъ, распространенный на объемъ, ограниченный такимъ образомъ, вычислится по формулѣ

$$\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{F(x,y)}^{\Phi(x,y)} f(x, y, z)\,dz,$$

гдѣ послѣдовательныя интегрированія надо вести по порядку отъ правой руки къ лѣвой.

737. Введеніе новыхъ перемѣнныхъ. Положимъ, что въ интегралѣ $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$ дѣлается подстановка $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, гдѣ u и v новыя (независимыя) перемѣнныя интегрированія. Независимость функцій x и y требуетъ (§ 579), чтобы опредѣлитель

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

не былъ равенъ нулю. Предполагая это условіе выполненнымъ, положимъ, что $g(u, v)$ есть та функція отъ u и v, которая получится, когда въ $f(x, y)$ замѣнимъ x и y ихъ выраженіями въ новыхъ перемѣнныхъ, и напишемъ данный интегралъ въ видѣ $\int dy \int f(x, y)\,dx$. Кромѣ того, чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, предположимъ, что при отдѣльныхъ интегрированіяхъ соотвѣтствующая перемѣнная постоянно возрастаетъ, такъ что дифференціалы перемѣнныхъ всегда разсматриваются, какъ положительныя числа. Сначала перейдемъ отъ перемѣнныхъ x и y къ перемѣннымъ u и y; при этомъ мы подъ v разумѣемъ ту функцію отъ y и u, которая, при условіи (§ 572) $\frac{\partial y}{\partial v} \gtrless 0$, опредѣляется изъ уравненія $y = \psi(u, v)$. При интегрированіи по x, y должно оставаться постояннымъ, т. е. должно быть

$$\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv = 0,$$

а слѣдовательно,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial y}{\partial v}}\right) du = \frac{\mathfrak{D}}{\frac{\partial y}{\partial v}}\,du.$$

Поэтому интегралъ обращается въ

$$\int dy \int g(u, v) \frac{\left|\mathfrak{D}\right|}{\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|}\,du = \int du \int g(u, v) \frac{\left|\mathfrak{D}\right|}{\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|}\,dy.$$

(при чемъ, если понадобится, предѣлы интегрированія по u переставимъ *)). Теперь перейдемъ отъ перемѣнныхъ u и y къ перемѣннымъ u и v. При интегрированіи по y, u должно оставаться постояннымъ, поэтому

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv = \frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

Послѣдній интегралъ обращается въ $\int du \int g(u, v) \left| \mathfrak{D} \right| dv$ (при чемъ опять, если понадобится, переставимъ предѣлы интегрированія по v). Итакъ, будемъ имѣть

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\int g(u, v) \left| \mathfrak{D} \right| du\,dv. \tag{23}$$

Общнѣе можно доказать, что

$$\int\cdots\int f(x,y,z,\ldots)\,dx\,dy\,dz\cdots = \int\cdots\int g(u,v,w,\ldots)\left|\frac{\partial(x,y,z,\ldots)}{\partial(u,v,w,\ldots)}\right| du\,dv\,dw\ldots$$

738. Если будемъ разсматривать x и y, какъ Декартовы координаты точки на плоскости, то переходъ къ новымъ перемѣннымъ можно геометрически интерпретировать, какъ переходъ къ криволинейнымъ координатамъ (§ 413), при чемъ область интегрированія инымъ манеромъ разбивается на безконечно малые элементы кривыми u и кривыми v. Въ самомъ дѣлѣ, формула (23) показываетъ, что вмѣсто того, чтобы разбивать область интегрированія на прямоугольники $dx\,dy$, какъ того требуетъ опредѣленіе, можно ту же область разбить вышеупомянутыми кривыми на другіе элементы. Каждый изъ этихъ элементовъ (если пренебрежемъ безконечно малыми высшаго порядка) можно разсматривать, какъ параллелограммъ со сторонами $d\sigma$ и $d\tau$, составляющими между собою уголъ ω, синусъ котораго, по извѣстной формулѣ (§ 571, d), равенъ частному отъ дѣленія $\mathfrak{D}$ на $\frac{d\sigma}{du}\cdot\frac{d\tau}{dv}$; площадь такого параллелограмма равна, слѣдовательно, абсолютной величинѣ выраженія $\sin\omega\cdot d\sigma\,d\tau = \mathfrak{D}\,du\,dv$. Итакъ, формула (23) выражаетъ интегралъ, какъ сумму безконечно большого числа безконечно малыхъ элементовъ, равныхъ произведеніямъ площади каждаго параллелограмма на число g, среднее между значеніями интегрируемой функціи для различныхъ точекъ этого параллелограмма. Такимъ образомъ получается обобщеніе опредѣленія, даннаго въ § 735.

---

*) Съ тою цѣлью, чтобы du было больше 0.

739. Примѣры. a) Геометрическое изображеніе области интегрированія значительно облегчаетъ разысканіе предѣловъ, въ которыхъ надо производить отдѣльныя простыя интегрированія, какъ при перемѣнѣ порядка интегрированія, такъ и при введеніи новыхъ перемѣнныхъ. Такъ, въ примѣрѣ § 732 все становится очевиднымъ, если замѣтимъ, что область интегрированія есть кругъ радіуса, равнаго единицѣ, касающійся оси Oy въ началѣ координатъ. Для другого примѣра положимъ, что надо вычислить интегралъ отъ $\int dx\,dy$, распространенный на площадь треугольника, ограниченнаго прямыми $x=1$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$. Тотчасъ же видимъ, что

$$\int_0^1 dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy = \int_0^{\alpha} dy \int_{\frac{y}{\alpha}}^{\frac{y}{\beta}} f(x,y)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{\frac{y}{\beta}}^{1} f(x,y)\,dx.$$

Точно такъ же имѣемъ

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{x} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} dy \int_{y}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

b) Геометрическая интерпретація формулы (23) во многихъ случаяхъ избавляетъ отъ необходимости вычислять опредѣлитель $\mathfrak{D}$. Напримѣръ, при переходѣ отъ Декартовыхъ координатъ на плоскости къ полярнымъ, имѣемъ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, и

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{24}$$

Къ тому же результату приходимъ геометрически, замѣчая, что линіи r и линіи θ дѣлятъ плоскость на безконечно малые элементы, которые можно разсматривать, какъ прямоугольники; стороны этихъ прямоугольниковъ будутъ: отрѣзокъ dr, отсѣкаемый кругами радіусовъ r и $r+dr$ на всякой прямой, проходящей черезъ начало координатъ, и дуга $r\,d\theta$, отсѣкаемая прямыми, образующими углы θ и $\theta+d\theta$ съ полярною осью, на окружности круга радіуса r. Площадь этого прямоугольника равна, слѣдовательно, $r\,d\theta\cdot dr$.

c) Подобно этому, въ пространствѣ, обозначая черезъ φ долготу, а черезъ ψ широту, будемъ имѣть

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

а отсюда

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = r^2 \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix} = r^2\cos\psi.$$

Слѣдовательно,

$$\int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)\,r^2|\cos\psi|\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

Къ тому же результату приходимъ съ помощью слѣдующаго замѣчанія: Если одно r измѣнится безконечно мало, то точка $M(x, y, z)$ опишетъ прямолинейный элементъ $MM' = dr$; если одно φ возрастетъ безконечно мало, то точка M опишетъ элементарную дугу круга $MM'' = r\,|\cos\psi|\,d\varphi$, въ плоскости, перпендикулярной къ Oz; наконецъ, если одно ψ возрастаетъ на $d\psi$, то точка M опишетъ дугу круга $MM''' = r\,d\psi$, въ плоскости, опредѣляемой угломъ φ. Эти три элемента можно разсматривать, какъ ребра прямоугольнаго параллелепипеда $MM'M''M'''$, эквивалентнаго тому тѣлу, которое ограничено поверхностями шаровъ съ радіусами r и $r+dr$, плоскостями φ и $\varphi+d\varphi$ и конусами ψ и $\psi+d\psi$. Объемъ этого тѣла, если пренебрежемъ безконечно малыми высшаго порядка, будетъ, слѣдовательно, равенъ $r\,|\cos\psi|\,d\varphi\cdot r\,d\psi\cdot dr$.

740. Упражненія. a) Чтобы видѣть, какимъ образомъ перемѣна порядка интегрированій можетъ вліять на результатъ, вычислимъ слѣдующіе интегралы

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = -\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2};$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Замѣтимъ, что въ обоихъ случаяхъ подъинтегральная функція обращается въ безконечность въ точкѣ (0, 0). Несмотря на это, неопредѣленные интегралы существуютъ, а именно

$$\frac{1}{2}\frac{x-y}{x+y} + \varphi(x) + \psi(y), \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \varphi(x) + \psi(y),$$

но въ точкѣ (0, 0) они разрывны, потому что въ смежности съ нею могутъ принимать любое значеніе.

b) Если оказывается удобнымъ при вычисленіи интеграла ввести вмѣсто y, напримѣръ, новую перемѣнную $z = xy$, то для примѣненія формулы (23) надо замѣтить, что

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial z}{\partial y} = x, \qquad \mathfrak{D} = \frac{1}{x}.$$

Напримѣръ,

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 z^z\,dz \int_z^1 \frac{dx}{x} = -\int_0^1 z^z \log z\,dz = \int_0^1 z^z\,dz = 0{,}783\ldots.$$

Это преобразованіе сводится къ тому, чтобы разбить плоскость равносторонними гиперболами, $xy = \text{const.}$, на полосы безконечно малой ширины.

c) Можетъ случиться, что кривыя u и кривыя v составятъ одно семейство кривыхъ. Положимъ, напримѣръ, что разсматривается часть плоскости, лежащая между осью Ox и равнодѣлящею угла yOx. Для

изображенія точекъ этой области можно приравнять x и y ариѳметическому и геометрическому среднему новыхъ перемѣнныхъ u и v, т. е. положить $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\sqrt{uv}$. Тогда будемъ имѣть

$$\mathfrak{D}=\frac{u-v}{4\sqrt{uv}}.$$

Чтобы одна изъ новыхъ перемѣнныхъ оставалась равною нѣкоторому постоянному a, между x и y необходимо должно существовать нѣкоторое соотношеніе, которое и получимъ, исключая другую перемѣнную изъ выраженій x и y черезъ u и v. Это соотношеніе будетъ, слѣдовательно: $y^2=2ax-a^2$. Оно и изображаетъ единственное семейство кривыхъ u и кривыхъ v, и состоитъ, какъ мы видимъ, изъ всѣхъ параболъ, имѣющихъ осью Ox, а директрисою Oy. Значенія u и v въ каждой точкѣ даются формулою $x\pm\sqrt{x^2-y^2}$. Если условимся положить $u=x+\sqrt{x^2-y^2}$, а слѣдовательно, $v=x-\sqrt{x^2-y^2}$, то на параболѣ съ параметромъ a будемъ имѣть

$$u=x+|x-a|,\quad v=x-|x-a|,$$

откуда $u=a$ при $x\leqq a$ и $v=a$ при $x\geqq a$. Поэтому, если раздѣлимъ въ данномъ углѣ между Ox и прямою $y=x$ параболу на конечную дугу между вершиною и точкою касанія съ прямою $y=x$, и на другую безконечную, отъ послѣдней точки до безконечности, то на первой дугѣ u равно постоянному, а $v=2x-a$ измѣняется отъ 0 до a; на второй v остается постояннымъ, а $u=2x-a$ измѣняется отъ a до ∞. Если положимъ, напримѣръ, что область интегрированія ограничена осью Ox и параболами съ параметрами a и b, то интегралъ отъ $f\,dx\,dy$ можетъ быть представленъ одною изъ слѣдующихъ двухъ формулъ

$$\int_0^{\sqrt{ab}}dy\int_{\frac{y^2+a^2}{2a}}^{\frac{y^2+b^2}{2b}}f(x,y)\,dx=\int_{\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}b}dx\int_0^{\sqrt{2ax-a^2}}f(x,y)\,dy+\int_{\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}(a+b)}dx\int_{\sqrt{2bx-b^2}}^{\sqrt{2ax-a^2}}f(x,y)\,dy.$$

Если же примемъ u и v за перемѣнныя интегрированія, то онъ представится проще, а именно такъ:

$$\int_a^b\int_0^a f(\tfrac{1}{2}(u+v),\ \sqrt{uv})\,(u-v)\,d\sqrt{u}\,d\sqrt{v}.$$

d) При помощи весьма обыкновеннаго пріема, не вполнѣ строгаго, но который можно сдѣлать строгимъ[1]), можно вычислить интегралъ Дирихле (§ 729, g), замѣчая, что при $x>0$

$$\frac{1}{x}=\int_0^\infty e^{-xy}\,dy,$$

[1]) См., напримѣръ, „Calculo integral“ Gomez-Teixeira (1-я часть, стр. 94) или „Traité d'Analyse“ E. Picard (т. I, стр. 34).

а слѣдовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx\,dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx.$$

Такъ какъ при $y > 0$

$$(e^{-xy} \cos x)_0^\infty = -1, \quad (e^{-xy} \sin x)_0^\infty = 0,$$

то интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx = 1 - y \int_0^\infty e^{-xy} \cos x\,dx = 1 - y^2 \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx,$$

откуда

$$(1 + y^2) \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx = 1.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = (\operatorname{arc\,tg} y)_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

е) Подобнымъ же образомъ для вычисленія интеграла

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \log \sin x\,dx$$

можно написать

$$\mathfrak{J} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cot y\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot y\,dy \int_0^y \sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} - \sin y\right) dy = \left(\cos y - \log \cos^2 \frac{y}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \log 2.$$

Впрочемъ, предложенный интегралъ легко вычислить и въ неопредѣленномъ видѣ съ помощью интегрированія по частямъ

$$\int \sin x \cdot \log \sin x\,dx = -\cos x \log \sin x + \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + C.$$

Отсюда слѣдуетъ (§ 312, b)

$$\mathfrak{J} = -1 + \lim_{x=0} \left(\cos x \cdot \log \sin x - \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = -1 + \log 2.$$

f) Чтобы вычислить интегралъ Пуассона $\mathfrak{J}$ (§ 721, e), разсмотримъ двойной интегралъ

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\infty \mathfrak{J}\,e^{-x^2}\,dx = \mathfrak{J}^2, \tag{25}$$

и постараемся вычислить его иначе. Напишемъ

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy,$$

и замѣнимъ при первомъ интегрированіи (по y) y новою перемѣнною t, опредѣляемою равенствомъ $y = tx$. Тогда получимъ

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,x\,dx \int_0^\infty e^{-t^2x^2}\,dt = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx.$$

Теперь тотчасъ найдемъ

$$\int e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx = -\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{2(1+t^2)} + C, \qquad \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2(1+t^2)}.$$

Замѣчая, что $\mathfrak{J}$ должно быть больше 0, окончательно получимъ

$$\mathfrak{J}^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

g) Къ тому же результату можно придти, преобразовавъ сперва интегралъ (25) по формулѣ (24), а потомъ уже вычисляя его. Принимая во вниманіе, что r измѣняется отъ 0 до ∞, а θ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, когда x и y независимо одно отъ другого принимаютъ всѣ положительныя значенія, тотчасъ находимъ

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}\right)_0^\infty = \frac{\pi}{4}, \quad \mathfrak{J} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Впрочемъ, этотъ не строгій пріемъ [1]) не отличается существенно отъ предыдущаго, что сейчасъ увидимъ, замѣтивъ, что $t = \operatorname{tg}\theta$. И въ томъ и другомъ необходимо еще доказать существованіе $\mathfrak{J}$, а это получается тотчасъ (§ 717, b) изъ того обстоятельства, что функція $x^n e^{-x^2}$ стремится къ 0 при x безконечномъ, каково бы ни было n.

---

[1]) Этотъ пріемъ данъ былъ Пуассономъ и исправленъ Кейли (Cayley) „Quarterly Journal of Mathematics“ (1872, стр. 120). См. „Mélanges mathématiques“ Mansion (стр. 15) и „Traité d'Analyse“ Picard (т. I, стр. 103).

h) Дифференцированіе (§ 733) по перемѣнной, не зависящей отъ перемѣнной интегрированія (по параметру, какъ говорятъ), часто бываетъ полезно при вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ. Такъ, напримѣръ, изъ второго интеграла (11) тотчасъ получается первый черезъ дифференцированіе по β, если принять во вниманіе, что производная отъ $|x|$ равна $\operatorname{sgn} x$. Точно такъ же изъ опредѣленнаго интеграла $\Gamma(a)$ дифференцированіемъ по a тотчасъ получимъ (314, j)

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \log x \, dx = \left(-\mathbf{C} + 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a+1} + \cdots \right) \Gamma(a).$$

Въ частности, будемъ имѣть

$$\int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx = -\mathbf{C}, \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} \log x \, dx = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,(\mathbf{C} + \log 4).$$

Если въ первомъ интегралѣ замѣнимъ x на $-\log x$, то снова найдемъ интегралъ Маскерони (§ 721, g). Дифференцируя еще разъ и полагая затѣмъ $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ и т. д., найдемъ

$$\int_0^\infty e^{-x} \log^2 x \, dx = \mathbf{C}^2 + \tfrac{1}{6}\pi^2, \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \log^2 x \, dx = \tfrac{1}{8}\sqrt{\pi}\,\{(\mathbf{C} + \log 4)^2 + \tfrac{1}{2}\pi^2\} \text{ и т. д.}$$

i) Интегралъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \tag{26}$$

весьма легко вычисляется съ помощью подстановки $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a} t$, если условимся подъ a и b понимать положительные квадратные корни изъ a^2 и b^2. Дифференцируя одинъ разъ по a, другой по b, получимъ интегралы

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3},$$

сумма которыхъ равна

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \pi \frac{a^2 + b^2}{4a^3 b^3}.$$

Продолжая такимъ же образомъ и обозначая для сокращенія

$$k_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n},$$

найдемъ въ концѣ концовъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^{n+1}}$$

$$= \pi \frac{k_n a^{2n} + k_1 k_{n-1} a^{2n-2} b^2 + k_2 k_{n-2} a^{2n-4} b^4 + \cdots + k_n b^{2n}}{2\,(ab)^{2n+1}}$$

Обратнымъ путемъ (т. е. интегрированіемъ) можно вывести изъ интеграла (26) безчисленное множество другихъ. Сперва замѣтимъ, что тождество $(a^2 - b^2)\sin^2 x = (a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) - b^2$ даетъ

$$(a^2 - b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi b}{2a},$$

откуда получается

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x\,dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{a+b}.$$

Отсюда интегрированіемъ по a въ предѣлахъ b и a, и замѣною a на $b\sqrt{1-k^2}$ получаемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\log\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}.$$

Для провѣрки замѣтимъ, что послѣдній интегралъ при $k=0$ обращается въ 0, а при $k=1$ равенъ $-\frac{1}{2}\pi\log 2$, что уже раньше было найдено другимъ путемъ (§ 725, f).

j) Интегрированіемъ по частямъ интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\cdot dx, \qquad \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\cdot dx \qquad (a>0)$$

приводятся одинъ къ другому. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$b\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\cdot dx = (e^{-ax}\sin bx)_0^{\infty} + a\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\cdot dx = a\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\cdot dx,$$

$$b\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\cdot dx = (e^{-ax}\cos bx)_{\infty}^{0} - a\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\cdot dx = 1 - a\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\cdot dx,$$

откуда

$$(27)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cdot dx=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cdot dx=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Интегрируя первый по b въ предѣлахъ 0 и b, или второй по a въ предѣлахъ отъ a до ∞, получимъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

Съ приближеніемъ a къ нулю, въ предѣлѣ получаемъ опять формулу (9), такъ какъ предѣлъ правой части равенъ $\frac{1}{2}\pi\operatorname{sgn} b$.

k) Съ цѣлью провѣрки нѣкоторыхъ полученныхъ раньше результатовъ, укажемъ еще иной путь для нахожденія интеграла Дирихле. Сперва, однако, нужно доказать непосредственно существованіе этого интеграла. Этого мы весьма быстро достигнемъ, опираясь на одинъ изъ прежде добытыхъ результатовъ (§ 717, c) и замѣчая, что

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin x\,dx\right|=|\cos\alpha-\cos\beta|\leqq 2.$$

Но, для упражненія, мы пойдемъ здѣсь другимъ путемъ. Очевидно, существуетъ интегралъ

$$\mathfrak{J}_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=\int_0^\pi\frac{\sin x\,dx}{x+(n-1)\pi},$$

и значеніе его лежитъ между $\frac{2}{n\pi}$ и $\frac{2}{(n-1)\pi}$, потому что $\int_0^\pi \sin x\,dx=2$.

Отсюда слѣдуетъ

$$\mathfrak{J}_n>\frac{2}{n\pi}>\mathfrak{J}_{n+1},\qquad \lim_{n=\infty}\mathfrak{J}_n=0,$$

а потому (§ 195) рядъ $\mathfrak{J}_1-\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_3-\cdots$ сходящійся. Въ то же время, если n наибольшее цѣлое число, не превышающее $\frac{a}{\pi}$, то будемъ имѣть

$$\int_0^a\frac{\sin x}{x}\,dx=\mathfrak{J}_1-\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_3-\cdots\pm\mathfrak{J}_n\mp\vartheta\mathfrak{J}_{n+1},$$

гдѣ ϑ лежитъ между 0 и 1. Итакъ, если будемъ увеличивать a, а слѣдовательно, и n безпредѣльно, то будетъ существовать

$$\mathfrak{J}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\mathfrak{J}_1-\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_3-\cdots>0.$$

Установивъ вышесказанное, находимъ (§ 729, f, c)

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty \sin x \sin tx \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\int_0^\infty \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\pi^2$$

и, такъ какъ $\mathfrak{J} > 0$, $\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\pi$.

1) Положимъ, что требуется вычислить интегралъ $\mathfrak{J} = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax \cdot dx$, приводящійся при $a = 0$ къ интегралу Пуассона $\mathfrak{J}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Дифференцируемъ по a и интегрируемъ по частямъ полученный результатъ, тогда найдемъ

$$\mathfrak{J}' = \int_0^\infty \sin 2ax \cdot d(e^{-x^2}) = -2a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax \cdot dx = -2a\mathfrak{J}.$$

Отсюда слѣдуетъ $\log \mathfrak{J} = -a^2 + \log \mathfrak{J}_0$, откуда $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 e^{-a^2}$, т. е.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-a^2}.$$

1⁰) Вычислимъ еще, слѣдуя De la Valleé-Poussain, интегралъ, предложенный Mesanger'омъ въ Intermédiaire des mathématicens, 1903, стр. 207, 293:

$$\mathfrak{J} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\log\left|1-\frac{k}{x}\right| dx$$

при $|k| \leqq 1$. Положимъ для удобства письма $k = \frac{1}{a}$ и замѣнивъ подъ интеграломъ x на kx, увидимъ, что интегралъ приведется къ $k^2 f(a)$, гдѣ

$$f(a) = \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2-x^2}\log\left|1-\frac{1}{x}\right| dx = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\log\left|1-\frac{1}{x^2}\right| dx.$$

Замѣчаемъ теперь, что

$$f'(a) = a\int_0^a \log\left|1-\frac{1}{x^2}\right| \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\int_0^1 \log\left|1-\frac{k^2}{x^2}\right| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

или

$$f'(\alpha) = \alpha \{ \varphi(k) - \varphi(0) \},$$

гдѣ

$$\varphi(k) = \int_0^1 \log | x^2 - k^2 | \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Положивъ $x = \sin\theta$, $k = \sin\omega$, находимъ

$$\varphi(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log | \sin^2\theta - \sin^2\omega | \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log | \sin(\theta+\omega) | \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log | \sin(\theta-\omega) | \, d\theta$$

$$\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}+\omega} \log | \sin\theta | \, d\theta + \int_{-\omega}^{\frac{\pi}{2}-\omega} \log | \sin\theta | \, d\theta = \int_{\omega}^{\omega+\frac{\pi}{2}} \log | \sin\theta | \, d\theta - \int_{\omega}^{\omega-\frac{\pi}{2}} \log | \sin\theta | \, d\theta$$

или

$$\varphi(k) = \int_{\omega-\frac{\pi}{2}}^{\omega+\frac{\pi}{2}} \log | \sin\theta | \, d\theta.$$

Производная этой функціи отъ ω (§ 733) равна

$$\log \left| \sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \right| - \log \left| \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \right|$$

$$= \log | \cos\omega | - \log | -\cos\omega | = 0.$$

Откуда послѣдовательно получимъ

$$\varphi'(k) = 0, \quad \varphi(k) = \varphi(0), \quad f'(\alpha) = 0, \quad f(\alpha) = f(1).$$

Но, полагая $x = \sin\theta$ или $x = \cos\theta$, получимъ для $f(1)$ то или другое изъ выраженій

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \log \operatorname{cotg}\theta \, d\theta, \qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \log \operatorname{tg}\theta \, d\theta,$$

изъ которыхъ, при помощи сложенія и интегрированія по частямъ, найдемъ

$$f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \log \operatorname{cogt}\theta \, d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d \log \operatorname{cotg}\theta = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Слѣдовательно,

$$\mathfrak{J} = \tfrac{1}{2}\pi k^2.$$

m) Вычислимъ еще интегралъ $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx$ [1]), разсматривая его, какъ производную функціи

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\,dx,$$

и замѣчая, что

$$f(\alpha) - f''(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} \alpha.$$

Такъ какъ $-e^{-\alpha}(f-f'')$ есть производная функціи $e^{-\alpha}(f+f')$, приводящейся при $\alpha = 0$ къ $f'(0) = \operatorname{arc\,tg} \infty = \frac{\pi}{2}$, то будемъ имѣть

$$e^{-\alpha}(f+f') - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\int_0^\alpha e^{-\alpha} \operatorname{sgn} \alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2}(e^{-\alpha} - 1)\operatorname{sgn} \alpha,$$

откуда получается

$$f(\alpha) + f'(\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{\alpha} + \frac{\pi}{2}(1 - e^{\alpha}) \operatorname{sgn} \alpha,$$

а замѣняя α на $-\alpha$

$$-f(\alpha) + f'(\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha} - \frac{\pi}{2}(1 - e^{-\alpha}) \operatorname{sgn} \alpha.$$

Складывая эти равеиства, находимъ

$$f'(\alpha) = \frac{\pi}{4}\{(1 - \operatorname{sgn} \alpha)e^{\alpha} + (1 + \operatorname{sgn} \alpha)e^{-\alpha}\}.$$

Выраженіе въ скобкахъ приводится при $\alpha > 0$ къ $2e^{-\alpha}$, при $\alpha < 0$ къ $2e^{\alpha}$, и къ 2 при $\alpha = 0$, такъ что оно всегда равно $2e^{-|\alpha|}$. Итакъ,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|\alpha|}.$$

n) Послѣдній результатъ вмѣстѣ съ безчисленнымъ множествомъ другихъ, заключается, какъ частный случай, въ одной важной формулѣ

---

[1]) Этотъ примѣръ заимствованъ изъ „Trattato di Calcolo“ Todhunter'a, который цитируетъ „Transactions of the Royal Irish Academy“ (т. XIX, стр. 227).

Фурье [1]), позволяющей всякую дифференцируемую [2]) (т. е. имѣющую производную) функцію $f(\alpha)$, стремящуюся къ нулю при $\alpha = \pm\infty$, изобразить въ видѣ опредѣленнаго интеграла. Сперва замѣтимъ, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\,\mathrm{sgn}\,(\alpha-\theta)\,d\theta = \int_{-\infty}^{\alpha} f'(\theta)\,d\theta - \int_{\alpha}^{\infty} f'(\theta)\,d\theta = 2f(\alpha).$$

Отсюда, по формулѣ (9)

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\,d\theta \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\alpha-\theta)x}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\sin(\alpha-\theta)x\cdot d\theta.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\sin(\alpha-\theta)x\cdot d\theta = x\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos(\alpha-\theta)x\cdot dx.$$

Слѣдовательно,

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos(\alpha-\theta)x\cdot d\theta.$$

Если теперь положимъ

$$(28)\qquad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos\theta x\cdot d\theta, \qquad \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\sin\theta x\cdot d\theta,$$

то получимъ

$$(29)\qquad f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\{\varphi(x)\cos\alpha x + \psi(x)\sin\alpha x\}\,dx.$$

Это и есть **формула Фурье**. Въ томъ случаѣ, когда $f(-\alpha) = f(\alpha)$, формулы (28) дадутъ

$$\varphi(x) = 2\int_{0}^{\infty} f(\theta)\cos\theta x\cdot d\theta, \qquad \psi(x) = 0,$$

и потому формула (29) дастъ

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\varphi(x)\cos\alpha x\cdot dx.$$

Въ частности, для $f(\alpha) = e^{-|\alpha|}$, припоминая первый интегралъ (27), имѣемъ $\varphi(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ и приходимъ къ результату предыдущаго упражненія [3]).

---

[1]) „Théorie analytique de la chaleur", т. 1, стр. 408.

[2]) Это условіе слишкомъ узко. См., напримѣръ, Poincaré „Théorie analytique de la propagatiln de la chaleur" (стр. 102).

[3]) Fourier, l. c. стр. 395.

Замѣтимъ, наконецъ, что вышеприведенное доказательство формулы Фурье не измѣнится, если въ формулахъ (28) предѣлами интегрированія будутъ два корня функціи $f(\theta)$. Тогда правая часть формулы (29) будетъ изображать $f(\alpha)$ для значеній α, лежащихъ между этими корнями, и приводится къ 0 въ противномъ случаѣ. Такимъ образомъ, для $f(\theta) = \cos\theta$, обозная черезъ β корень этой функціи, найдемъ, что интегралъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x \cdot \cos\beta x}{1-x^2}\,dx$$

(который, очевидно, не имѣетъ смысла, когда $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ оба отличны отъ нуля). равенъ $\frac{\pi}{2}\cos\alpha\,|\sin\beta|$ или $\frac{\pi}{4}\cos\beta\,|\sin\beta|$ или 0, смотря по тому, будетъ ли $|\alpha| <, =$ или $> |\beta|$. Къ тому же результату, впрочемъ, придемъ, приводя этотъ интегралъ (при помощи весьма простого преобразованія) къ первому изъ интеграловъ (11).

[**Примѣчаніе.** Преобразованіе интеграла

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x \cos\beta x}{1-x^2}\,dx$$

къ первому изъ интеграловъ (11) § 725, о получается слѣдующимъ путемъ. Замѣчая, что

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right),$$

имѣемъ

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x \cos\beta x}{x+1}\,dx - \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x \cos\beta x}{x-1}\,dx\right)$$

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\left(\int_1^\infty \frac{\cos\alpha(\xi-1)\cos\beta(\xi-1)}{\xi}\,d\xi - \int_{-1}^\infty \frac{\cos\alpha(\xi+1)\cos\beta(\xi+1)}{\xi}\,d\xi\right).$$

Разбивая интервалъ $(1, \infty)$ на $(0, \infty) - (0, 1)$, а $(-1, \infty)$ на $(-1, 0) + (0, \infty)$, тотчасъ увидимъ, что интегралы, распространенные на интервалы $(0, 1)$ и $(-1, 0)$ сохранятся и потому

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha(\xi-1)\cos\beta(\xi-1) - \cos\alpha(\xi+1)\cos\beta(\xi+1)}{\xi}\,d\xi.$$

Замѣчая, что по условію $\cos\beta = 0$, имѣемъ

$$\cos\beta(\xi-1) = \sin\beta\xi\sin\alpha, \qquad \cos\beta(\xi+1) = -\sin\beta\xi\sin\beta,$$

тотчасъ найдемъ

$$\mathfrak{J} + \cos\alpha \sin\beta \int_0^\infty \frac{\sin\beta\xi \cos\alpha\xi}{\xi} d\xi$$

и, подставляя значенія интеграла, указанныя въ § 725, о (перемѣстивъ буквы α и β), мы и получимъ данныя выше значенія $\mathfrak{J}$.]

741. Интегрированіе полныхъ дифференціаловъ. Задача кратнаго интегрированія является естественнымъ распространеніемъ указанной въ началѣ (§ 708) задачи, когда поставимъ вопросъ о разысканіи функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ по данному ея полному дифференціалу. Разсмотримъ сперва простѣйшій случай, когда дано дифференціальное выраженіе вида

$$u(x, y)\,dx + v(x, y)\,dy,$$

и спрашивается будетъ ли оно, какъ говорятъ, точнымъ дифференціаломъ, т. е. существуетъ ли такая функція z отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, полный дифференціалъ которой равенъ данному выраженію? Вопросъ сводится къ другому — существуетъ ли функція z, для которой

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = v(x, y). \tag{30}$$

Мы видимъ тотчасъ, что для существованія такой функціи необходимо условіе:

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y), \tag{31}$$

(§ 368), по крайней мѣрѣ для того случая, которымъ мы и ограничимся, когда функціи u и v и ихъ первыя производныя непрерывны. При дѣйствительномъ разысканіи функціи z необходимость этого условія сама собою обнаружится, но мы въ то же время увидимъ, что оно и достаточно для существованія z. Интегрируя (§ 730) второе изъ уравненій (30), получаемъ $z = \int v\,dy + \varphi(x)$. Взявъ производную по x и принимая во вниманіе первое уравненіе (30), найдемъ, что, кромѣ того, должно быть

$$\varphi'(x) = u(x, y) - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy.$$

Чтобы правая часть этого равенства не зависѣла отъ y, какъ не зависитъ отъ него лѣвая, необходимо, чтобы производная

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy\right) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

обращалась въ нуль, т. е. чтобы $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ изображались одною и тою же функціею $f(x, y)$. Если это условіе выполнено, то будемъ имѣть

$$z = \int v\,dy + \int \left(u - \int \frac{\partial v}{\partial x}\,dy\right) dx = \int u\,dx + \int v\,dy - \int\int f\,dx\,dy,$$

результатъ, который легко приводится въ виду (20). Итакъ, имѣемъ теорему: Для того, чтобы $u\,dx + v\,dy$ было точнымъ дифференціаломъ, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Точно такъ же для существованія функціи Φ отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ, имѣющей полный дифференціалъ

$$d\Phi = u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

необходимы и достаточны условія

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{32}$$

Въ самомъ дѣлѣ, исходя изъ равенства $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = w$, интегрированіемъ его (при x и y постоянныхъ) получимъ

$$\Phi = \int w\,dz + \varphi(x, y).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ имѣть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u - \int \frac{\partial w}{\partial x}\,dz, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v - \int \frac{\partial w}{\partial y}\,dz.$$

Такъ какъ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ независимы отъ z, то видимъ тотчасъ же, что должно быть

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u - \int \frac{\partial w}{\partial x}\,dz\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(v - \int \frac{\partial w}{\partial y}\,dz\right) = 0,$$

такъ что первыя два условія (32) должны быть выполнены. Далѣе, чтобы существовала функція $\varphi(x, y)$, на основаніи того, что мы видѣли въ случаѣ двухъ перемѣнныхъ, должно выполняться условіе

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u - \int \frac{\partial w}{\partial x}\,dz\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v - \int \frac{\partial w}{\partial y}\,dz\right),$$

т. е. какъ разъ третье условіе (31). Аналогичнымъ путемъ доказывается слѣдующая общая теорема: Если даны n функцій

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ то $n(n-1)$ условій

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + \cdots + u_n dx_n$ было точнымъ дифференціаломъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ ИЗЛОЖЕННЫХЪ ПРІЕМОВЪ КЪ НАХОЖДЕНІЮ НѢКОТОРЫХЪ ЗАМѢЧАТЕЛЬНЫХЪ КЛАССОВЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Интегрированіе раціональныхъ дифференціаловъ.

742. Если подъинтегральная функція раціональна, то она всегда можетъ быть приведена къ виду $\frac{f(x)}{g(x)}$, гдѣ $f(x)$ и $g(x)$ цѣлыя функціи, не имѣющія общаго дѣлителя. Если $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ обозначаютъ корни функціи $g(x)$, $r, s, t, \ldots$ соотвѣтственно показатели кратности ихъ, $\varphi(x)$ цѣлая функція, называемая частнымъ отъ дѣленія $f(x)$ на $g(x)$, то, какъ извѣстно (§ 460), дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ разлагается слѣдующимъ образомъ на частныя дроби

$$\varphi(x) + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{b_1}{x-\beta} + \cdots + \frac{b_s}{(x-\beta)^s} + \cdots.$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \varphi(x) dx + a_1 \log|x-\alpha| + b_1 \log|x-\beta| + c_1 \log|x-\gamma| + \cdots$$
$$- \frac{a_2}{x-\alpha} - \frac{a_3}{2(x-\alpha)^2} - \cdots - \frac{b_2}{x-\beta} - \frac{b_3}{2(x-\beta)^2} - \cdots,$$

и первый интегралъ въ правой части разлагается тотчасъ на другіе, которые умѣемъ вычислять. Итакъ, интегралы отъ раціональныхъ дифференціаловъ всегда выражаются въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ, т. е. черезъ конечное число знаковъ алгебраическихъ и логариѳмическихъ функцій.

743. Если не всѣ корни вещественны, то правая часть представляется въ мнимомъ видѣ, хотя она и вещественна, если коэффиціенты даннаго дифференціала вещественны. Можно было бы

перейти отъ мнимой формы къ вещественной, примѣняя извѣстныя соотношенія (§ 725, d) между arc tg и log; но предпочитаютъ совсѣмъ обойтись безъ мнимыхъ членовъ, припоминая, что (§ 461) соотвѣтствующіе парѣ мнимыхъ корней $g(x)$ члены даютъ въ разложеніи $\frac{f(x)}{g(x)}$ сумму слѣдующаго вида:

$$\frac{a_1 x + b_1}{x^2 + px + q} + \frac{a_2 x + b_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{a_r x + b_r}{(x^2 + px + q)_r}.$$

Дѣло сводится къ вычисленію интеграла

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n}\, dx.$$

При $n = 1$ его значеніе извѣстно, потому что тогда онъ разлагается на

$$a \int \frac{(x + \frac{1}{2}p)\, dx}{x^2 + px + q} + \left(b - \frac{1}{2} ap\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q},$$

такъ что (§ 725, d) будемъ имѣть

$$\int \frac{(ax + b)\, dx}{x^2 + px + q} = a \log \sqrt{x^2 + px + q} + \frac{b - \frac{1}{2} ap}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \frac{1}{2}p}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} + C.$$

При $n > 1$ можно аналогично написать

$$\int \frac{(ax + b)\, dx}{(x^2 + px + q)^n} = -\frac{a}{2(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \left(b - \frac{1}{2} ap\right) \mathfrak{J}_n,$$

такъ что остается вычислить интегралъ

$$\mathfrak{J}_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Примѣняя интегрированіе по частямъ къ $\mathfrak{J}_{n-1}$, получимъ

$$\mathfrak{J}_{n-1} = \int \frac{d(x + \frac{1}{2}p)}{(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

$$= \frac{x + \frac{1}{2}p}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + 2(n-1)\{\mathfrak{J}_{n-1} - (q - \tfrac{1}{4}p^2)\mathfrak{J}_n\},$$

принявъ во вниманіе тождество

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = x^2 + px + q - (q - \tfrac{1}{4}p^2).$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2(n-1)(q - \frac{1}{4}p^2)} \left\{(2n-3)\mathfrak{J}_{n-1} + \frac{x + \frac{1}{2}p}{(x^2 + px + q)^{n-1}}\right\}.$$

Такимъ образомъ изъ $\mathfrak{J}_1$ получается $\mathfrak{J}_2$, оттуда $\mathfrak{J}_3$ и т. д.

744. Упражненія. a) Чтобы вычислить интегралъ отъ $\frac{dx}{x^3+1}$, полагаемъ

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{c}{x+1}+\frac{ax+b}{x^2-x+1},$$

такъ что тождественно должно быть $c(x^2-x+1)+(ax+b)(x+1)=1$. Достаточно положить $x=-1$, чтобы получить $c=\frac{1}{3}$. Замѣнивъ c его значеніемъ, получимъ $ax+b=-\frac{1}{3}(x-2)$. Слѣдовательно, предложенный интегралъ разложится такъ

$$\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1},$$

и мы найдемъ

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

b) Интегралъ отъ $\frac{x^5dx}{x^4-1}$ тотчасъ разлагается на $\int x\,dx+\int\frac{x\,dx}{x^4-1}$; первый равенъ $\frac{1}{2}x^2+C$; во второмъ удобно положить $x^2=t$. Тогда

$$\int\frac{x\,dx}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Слѣдовательно,

$$\int\frac{x^5dx}{x^4-1}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+C.$$

c) Весьма легко вычисляется интегралъ

$$\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}-\int\frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Третій интегралъ правой части прямо берется; второй приводится къ первому интегрированіемъ послѣдняго по частямъ

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+2\int\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(x^2+x+1)^2}dx.$$

$$=\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+2\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Отсюда получается

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1},$$

и предложенный интегралъ дѣлается равнымъ

$$\frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1},$$

и окончательно

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Къ полученному результату можно придти быстрѣе, производя упомянутое интегрированіе по частямъ слѣдующимъ образомъ:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x+c}{x^2+x+1} + \int \frac{(x+c)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$$

Теперь опредѣлимъ c такъ, чтобы для прилично выбранныхъ a и b имѣть:

$$(x+c)(2x+1) = a(x^2+x+1) + b(x^2-x+1).$$

Оказывается, что надо взять $2 = c = a+b$, $2c+1 = a-b$, т. е. $c = 2$ $a = \frac{7}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$. Поэтому будемъ имѣть

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$$

откуда и получается вышеприведенное значеніе интеграла.

d) Для вычисленія интеграла отъ $\dfrac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$ нужно прежде всего опредѣлить постоянныя c, a, b, a', b' такъ, чтобы

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{c}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{a'x+b'}{(x^2+1)^2},$$

т. е. $c(x^2+1)^2 + (ax+b)(x^2+1)(x+1) + (a'x+b')(x+1) = 1.$

При $x^2 = -1$ находимъ

$$a'x + b' = \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}(x-1),$$

и равенство между первымъ и послѣднимъ членами, справедливое при мнимомъ x, должно быть справедливо при всякомъ x, потому что a' и b' — вещественны. Вслѣдствіе этого вышенаписанное тождество обращается въ

$$c(x^2+1) + (ax+b)(x+1) = \tfrac{1}{2},$$

а при $x^2 = -1$ даетъ $ax+b = \frac{1}{2}(a'x+b')$. Поэтому получимъ $c = \frac{1}{4}$, что, впрочемъ, слѣдуетъ и изъ первоначальнаго тождества, если положимъ $x = -1$. Послѣ этого тотчасъ видимъ, что предложенный интегралъ имѣетъ то же значеніе, что и

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1} + \log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \operatorname{arc\,tg} x\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

откуда слѣдуетъ

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right).$$

Итакъ,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{x^2+1} + \log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + 2\operatorname{arc\,tg} x\right) + C.$$

е) Чтобы вычислить интегралъ отъ $\frac{dx}{x^4+1}$ прежде всего замѣчаемъ, что

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

и полагаемъ

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{a'x+b'}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Такъ какъ замѣна x на $-x$ не мѣняетъ лѣвой части, а въ правой замѣняетъ знаменатель одной дроби знаменателемъ другой, то то же самое должно произойти и съ числителями, потому что разложеніе дроби на частныя единственное. Отсюда слѣдуетъ: $-ax+b = a'x+b'$, такъ что должно быть тождественно

$$1 = (ax+b)(x^2-x\sqrt{2}+1) - (ax-b)(x^2+x\sqrt{2}+1) = 2(b-a\sqrt{2})x^2 + 2b,$$

откуда $b = a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Слѣдовательно,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{(x+\sqrt{2})\,dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{(x-\sqrt{2})\,dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Полагая $p = \pm\sqrt{2}$, видимъ, что достаточно вычислить одинъ интегралъ

$$\int \frac{(x+p)\,dx}{x^2+px+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+1} + \frac{1}{2}p\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2}p)^2+\frac{1}{2}}$$
$$= \log\sqrt{x^2+px+1} + \frac{p}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2}+\frac{p}{\sqrt{2}}\right) + C,$$

и замѣтить, что (§ 254, d)

$$\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C,$$

чтобы получить окончательно

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right) + C.$$

f) Еще легче вычисленіе интеграла

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C.$$

Если интегрированіе производится отъ 0 до 1, то, такъ какъ

$$\lim_{x=1-0} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\pi,$$

для значенія опредѣленнаго интеграла получается $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Разлагая подъинтегральную функцію въ степенной рядъ, получаемъ такимъ путемъ формулу

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

которую можно также вывести изъ формулы (17) предыдущей главы (§ 729, e) при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

g) Если предложено вычислить интегралъ отъ $\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$, то можно начать съ замѣчанія, что

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}\right).$$

Если замѣнимъ x на x^2 и замѣтимъ, что

$$x^4-x^2+1 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{3})^2 = (x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

то найдемъ

$$\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{2}{3(x^2+1)} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right).$$

Въ то же время при $p = \pm\sqrt{3}$ имѣемъ

$$\int \frac{dx}{x^2+px+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 2 \operatorname{arc\,tg}(2x+p) + C.$$

Слѣдовательно, предложенный интегралъ равенъ

$$\tfrac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} x + \tfrac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}(2x+\sqrt{3}) + \tfrac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}(2x-\sqrt{3}) + C$$

или окончательно

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = -\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1} + C.$$

Разложеніе подъинтегральной функціи въ степенной рядъ показываетъ, что опредѣленный интегралъ въ предѣлахъ 0 и 1 равенъ суммѣ ряда

$$1+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{11}+\cdots,$$

которую, съ другой стороны, мы можемъ вывести изъ цитированной въ предыдущемъ примѣрѣ формулы. Дѣйствительно, упомянутая формула при $a=\frac{\pi}{6}$ даетъ

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\cdots\right)+\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)=\frac{5}{12}\pi,$$

откуда выводимъ (§ 729, d)

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots=\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}\pi.$$

Между тѣмъ кажется, какъ будто, вышенайденное выраженіе опредѣленнаго интеграла даетъ для опредѣленнаго интеграла между 0 и 1 значеніе, равное 0 (нелѣпый результатъ); но надо принять во вниманіе (§ 725, k), что въ интервалѣ (0, 1) функція $\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$ обращается въ ∞ при $x=c=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, и слѣва отъ c будетъ <0, а справа >0. Поэтому

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=-\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_0^{c-0}-\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c+0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0}=\frac{1}{3}\pi.$$

Точно такъ же, если интегралъ взяли бы въ предѣлахъ отъ 0 до ∞, то надо было бы обратить вниманіе на другой положительный корень $c'=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ функціи x^4-4x^2+1. Для значенія интеграла нашли бы

$$\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0}+\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c'-0}^{c'+0}=\frac{2}{3}\pi.$$

Съ цѣлью провѣрки замѣтимъ слѣдующее: если разложимъ интервалъ $(0,\infty)$ на $(0,1)+(1,\infty)$, и замѣнимъ въ интегралѣ, распространенномъ на интервалъ $(1,\infty)$, x на $\frac{1}{x}$, то прямо получимъ

$$\int_0^\infty\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=2\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=\frac{2}{3}\pi.$$

Интегрированіе ирраціональныхъ дифференціаловъ.

745. Если ирраціональность подъинтегральнаго дифференціала происходитъ исключительно отъ присутствія въ немъ степеней перемѣнной интегрированія x съ дробными показателями, то эту ирраціональность можно тотчасъ устранить подстановкою $x = t^m$, гдѣ m наименьшее кратное знаменателей показателей, и интегралъ вычисляется затѣмъ въ новомъ видѣ такъ, какъ было показано. Въ случаѣ ирраціональностей болѣе сложнаго характера въ большинствѣ случаевъ интегрированіе практически не выполнимо въ томъ смыслѣ, что не существуетъ такой комбинаціи конечнаго числа алгебраическихъ и логариѳмическихъ функцій, которая изображала бы данный интегралъ. Но существуютъ нѣкоторые классы интеграловъ, составляющіе исключеніе, и вычисляемые при помощи простыхъ искусственныхъ пріемовъ. Разсмотримъ здѣсь важнѣйшіе случаи этого рода.

a) Для вычисленія интеграла отъ $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ приравняемъ радикалъ выраженію $t-x$, тогда будемъ имѣть

$$(1)\qquad x=\frac{t^2-q}{2t+p},\quad t-x=\frac{t^2+pt+q}{2t+p},\quad dx=2\frac{t^2+pt+q}{(2t+p)^2}\,dt.$$

Интегралъ приводится къ

$$\int\frac{dt}{t+\frac{p}{2}}=\log\left|t+\frac{p}{2}\right|+C,$$

и слѣдовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\log\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C.$$

b) Чтобы вычислить интегралъ $\dfrac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$, замѣчаемъ, что

$$-x^2+px+q=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+q+\frac{1}{4}p^2$$

(гдѣ $q+\frac{1}{4}p^2$ должно быть положительнымъ, если желаемъ оставаться въ области вещественныхъ чиселъ), и полагаемъ

$$x-\frac{p}{2}=t\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},\quad\text{такъ что}\quad -x^2+px+q=\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)(1-t^2).$$

Предложенный интегралъ приводится къ $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, поэтому имѣемъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} = \arcsin \frac{x-\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}} + C.$$

c) Интегрированіе по частямъ даетъ (сравн. § 727, a)

$$\int \sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx = \left(x \pm \frac{1}{2}p\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} \mp \int \frac{\left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}.$$

Правая часть, въ силу тождества

$$\pm\left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 = \pm x^2 + px + q - \left(q \mp \frac{1}{4}p^2\right)$$

преобразовывается въ

$$\left(x \pm \frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} - \int \sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx + \left(q \mp \frac{1}{4}p^2\right)\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}.$$

Слѣдовательно,

$$2\int \sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} + \left(q \mp \frac{1}{4}p^2\right)\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}},$$

а потому

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{x^2+px+q} + \frac{1}{2}\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)\log\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right| + C,$$

$$\int \sqrt{-x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)\sqrt{-x^2+px+q} + \frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)\arcsin\frac{x-\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}} + C.$$

746. Положимъ, переходя къ болѣе общему случаю, что $f(x,y)$ есть раціональная функція отъ x и y, и разсмотримъ интегралъ отъ $f\left(x, \sqrt{\pm x^2+px+q}\right)dx$. Какъ бы сложно ни было подъинтегральное выраженіе, легко можно показать, что оно можетъ быть приведено къ раціональному виду прилично выбранною подстановкою, и поэтому такой интегралъ всегда выражается въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ. Дѣйствительно, стоитъ только ввести новую перемѣнную $t = x + \sqrt{x^2+px+q}$, чтобы на основаніи формулы (1) уничтожить ирраціональность въ $f(x,y)\,dx$, когда $y = \sqrt{x^2+px+q}$. Это не справедливо при $y = \sqrt{-x^2+px+q}$, но въ этомъ случаѣ можно примѣнить другую подстановку, пригодную и въ первомъ случаѣ, если корни функціи x^2+px+q вещественны; во второмъ случаѣ эти корни навѣрно вещественны, иначе y былъ

бы мнимымъ при всякомъ значеніи x. Обозначая черезъ α и β эти корни, положимъ

$$x = \frac{\beta \mp \alpha t^2}{1 \mp t^2}, \tag{2}$$

и тогда найдемъ (выбравъ t съ приличнымъ знакомъ)

$$y = \sqrt{\pm (x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{(\beta-\alpha)t}{1 \mp t^2}, \quad dx = \pm \frac{2(\beta-\alpha)t\,dt}{(1 \mp t^2)^2},$$

откуда и видно, что $f(x, y)\,dx$ принимаетъ видъ $\varphi(t)\,dt$, гдѣ $\varphi(t)$ раціональна и вещественна.

747. Впрочемъ, вышеупомянутыя подстановки служатъ главнымъ образомъ для того, чтобы показать возможность привести, въ разсматриваемомъ исключительномъ случаѣ, ирраціональный дифференціалъ къ раціональному виду. На практикѣ всегда лучше будетъ предварительно извѣстнымъ образомъ упростить выраженіе $f(x, y)$. Раціональную отъ x и y функцію f всегда можно представить въ видѣ отношенія двухъ цѣлыхъ функцій. Расположивъ эти функціи по степенямъ y и замѣнивъ y^{2n} черезъ $(\pm x^2 + px + q)^n$, а y^{2n+1} черезъ $(\pm x^2 + px + q)^n y$, приведемъ данное выраженіе къ виду

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x) + y\,\psi_1(x)}{\varphi_2(x) + y\,\psi_2(x)},$$

гдѣ φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 — цѣлыя функціи отъ x. Умножая числителя и знаменателя на $\varphi_2 - y\psi_2$ и снова подставляя

$$y^2 = \pm x^2 + px + q, \quad y = \frac{\pm x^2 + px + q}{y},$$

находимъ

$$f(x, y) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y},$$

гдѣ φ и ψ — раціональныя функціи отъ x. Разлагая затѣмъ $\psi(x)$ на частныя дроби (сравн. § 742), увидимъ, что помимо интеграловъ отъ раціональныхъ дифференціаловъ, вычисленіе даннаго интеграла приводится къ вычисленію одного или нѣсколькихъ интеграловъ слѣдующихъ типовъ:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{\pm x^2 + px + q}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{\pm x^2 + px + q}},$$

гдѣ n цѣлое положительное число, и a вещественная или мнимая постоянная. Подстановкою $x = a + \frac{1}{z}$ интегралы второго типа приводятся къ интеграламъ перваго типа, а эти послѣдніе, какъ

легко видѣть, приводятся къ единственному $\int \frac{dx}{y}$, который вычисленъ въ § 745. Дѣйствительно,

$$\int x^n \frac{dx}{y} = \pm \int x^{n-1} \left(\pm x + \frac{p}{2}\right) \frac{dx}{y} \mp \frac{p}{2} \int x^{n-1} \frac{dx}{y},$$

а такъ какъ $y\,dy = \left(\pm x + \frac{p}{2}\right) dx$, то

$$\int x^{n-1} \left(\pm x + \frac{p}{2}\right) \frac{dx}{y} = \int x^{n-1}\, dy$$

$$= x^{n-1} y - (n-1) \int x^{n-2} (\pm x^2 + px + q) \frac{dx}{y},$$

а потому, подставляя въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$n \int x^n \frac{dx}{y} = \pm\, x^{n-1} y \mp \left(n - \frac{1}{2}\right) p \int x^{n-1} \frac{dx}{y} \mp (n-1)\, q \int x^{n-2} \frac{dx}{y}.$$

Изъ этой формулы приведенія послѣдовательно находимъ при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int x \frac{dx}{y} = \pm y \mp \frac{p}{2} \int \frac{dx}{y}, \quad \int x^2 \frac{dx}{y} = \frac{1}{2}\left(\pm x - \frac{3}{2} p\right) y \mp \frac{1}{2}\left(q \mp \frac{3}{4} p^2\right) \int \frac{dx}{y},$$

$$\int x^3 \frac{dx}{y} = \frac{1}{3} y^3 - \left(\frac{3}{4} px + q \mp \frac{5}{8} p^2\right) y + \frac{p}{4}\left(3q \mp \frac{5}{4} p^2\right) \int \frac{dx}{y}, \ldots.$$

748. Аналогичнымъ пріемомъ можно упростить интегрированіе дифференціала $f(x, y)\,dx$, ирраціональность котораго зависитъ исключительно отъ присутствія корня квадратнаго

$$y = \sqrt{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m}.$$

Замѣтимъ сперва, что при m — четномъ можно свести степень подкоренного полинома къ $m-1$; этого достигнемъ съ помощью подстановки $x = a + \frac{1}{z}$, гдѣ a корень этого полинома. Возвращаясь, напримѣръ, къ случаю $y = \sqrt{\pm x^2 + px + q}$ и обозначая черезъ β другой корень подкоренного полинома, получимъ $yz = \sqrt{\mp(\beta - a) z \pm 1}$. Принимая новый радикалъ за новую перемѣнную интегрированія, мы и придемъ къ подстановкѣ (2). Точно такъ же случай $m = 4$ сводится къ случаю $m = 3$; но тщетно было бы пытаться свести послѣдній къ случаю $m = 2$. А именно, болѣе глубокое изученіе этихъ интеграловъ (при $m = 4$ и $m = 3$), называемыхъ эллипти-

ческими, дастъ возможность доказать, что ихъ нельзя, вообще говоря, выразить въ конечномъ видѣ алгебраически-логариѳмическими функціями, и что попытка привести ихъ къ интеграламъ отъ раціональныхъ дифференціаловъ можетъ быть сравниваема съ попыткою придать поверхности кольца сферическую форму путемъ непрерывной деформаціи [1]). При помощи вычисленія, подобнаго изложенному въ предыдущемъ §, удается лишь доказать, что эллиптическіе интегралы приводятся къ слѣдующимъ:

$$\int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)y},$$

которые называются интегралами перваго, второго и третьяго вида; далѣе при помощи извѣстныхъ подстановокъ приходимъ къ тому, чтобы принять интегралы

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

за типы интеграловъ перваго и второго вида. Первый изъ этихъ интеграловъ, взятый въ предѣлахъ отъ 0 до φ, обозначаютъ обыкновенно черезъ $F(k, \varphi)$, а второй, взятый въ тѣхъ же предѣлахъ, можно написать такъ

$$\frac{1}{k^2}\int_0^{\varphi} \frac{1-(1-k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{k^2}\{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)\},$$

условившись обозначать черезъ $E(k, \varphi)$ интегралъ

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Значеніе φ на верхнемъ предѣлѣ называютъ амплитудою, а число k модулемъ интеграловъ. Въ механическихъ и геометрическихъ приложеніяхъ особенно важны значенія интеграловъ F и E при амплитудѣ $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ихъ называютъ полными эллиптическими интегралами и обозначаютъ такъ

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

---

[1]) См., для $m > 4$, „Cours d'Annalyse de l'École polytechnique“ par. C. Hermite (стр. 291—297).

749. Займемся теперь тѣми подстановками, о которыхъ упомянули въ предыдущемъ §, и постараемся составить ихъ такъ, чтобы избѣжать введенія мнимыхъ чиселъ. Сперва предположимъ вещественными корни α, β, γ функціи $y = \sqrt{\pm x^3 + ax^2 + bx + c}$. Пусть α означаетъ наименьшій изъ нихъ, когда при x^3 стоитъ знакъ $+$, и наибольшій въ противномъ случаѣ, β — пусть будетъ средній изъ корней; черезъ k^2 обозначимъ отношеніе $\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$, всегда лежащее между 0 и 1. Подстановки $x = \alpha + (\beta-\alpha)\sin^2\varphi$ дастъ

$$\pm x^3 + ax^2 + bx + c = |\gamma-\alpha|\,(\beta-\alpha)^2\,(1-k^2\sin^2\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi;$$

поэтому, независимо отъ вещественнаго постояннаго множителя, радикалъ y преобразуется въ произведеніе $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ на $\sin\varphi\cos\varphi$ и поэтому

$$\frac{dx}{y} \text{ будетъ пропорціонально } \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Къ тому же результату приходимъ, когда не всѣ корни вещественны. При этомъ предположеніи, считая всегда коэффиціенты вещественными, можно представить y^2 въ видѣ $\pm(x-\alpha)(x^2+px+q)$ съ вещественными α, p и q. Положимъ

$$x = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\,\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Простое вычисленіе дастъ

$$\pm(x-\alpha)(x^2+px+q) = (\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{3}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}},$$

гдѣ число

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right)$$

всегда лежитъ между 0 и 1, потому что

$$\alpha^2+p\alpha+q = \left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{1}{4}p^2\right) > \left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Итакъ, въ обоихъ случаяхъ $\int\frac{dx}{y}$ преобразуется въ $F(k,\varphi)$; что же касается интеграла $\int\frac{x\,dx}{y}$, то онъ приведется къ тому или

другому изъ интегралов

$$\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

смотря по тому, будутъ ли всѣ корни y вещественны или нѣтъ. Мы уже видѣли, что первый выражается черезъ интегралы F и E. Чтобы показать, что то же самое имѣетъ мѣсто и для второго, замѣтимъ, что

$$d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right)=\left(\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)-k^2\sin^2\varphi\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

откуда, интегрируя, получимъ

$$\int_0^{\varphi}\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(k,\varphi)-2E(k,\varphi)+2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Далѣе, если y^2 полиномъ 4-ой степени, то, какъ уже сказано, подстановкою $x=a+\frac{1}{z}$, гдѣ a одинъ изъ корней этого полинома, сведемъ этотъ случай къ предыдущему. Но, если этотъ полиномъ не имѣетъ вещественнаго корня, то, не желая вводить мнимыхъ чиселъ, прибѣгаемъ къ другой подстановкѣ, которую мы здѣсь только укажемъ, не останавливаясь на ведущемъ къ ней изслѣдованіи [1]). Положимъ, что $y^2=(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')$ и предположимъ, что каждый множитель правой части остается всегда положительнымъ. Полагая

$$(p-p')\lambda=q-q'-\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')},$$
$$(p-p')\mu=q-q'+\sqrt{(q-q')^2+(p-p')(pq'-qp')},$$

находимъ искомую подстановку въ видѣ

$$x=\frac{\lambda+\mu m\operatorname{tg}\varphi}{1+m\operatorname{tg}\varphi},$$

гдѣ m наименьшее изъ двухъ чиселъ

$$\sqrt{\frac{\lambda^2-p\lambda+q}{\mu^2-p\mu+q}}, \quad \sqrt{\frac{\lambda^2-p'\lambda+q'}{\mu^2-p'\mu+q'}}.$$

---

[1]) См. Schloemilch. „Compendium der höheren Analysis“ 3-е изд., т. II, стр. 290 и слѣд.

750. Возможность выразить интегралъ отъ $f(x, y)\,dx$ при $y^2 = \pm x^2 + px + q$ въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ объясняется тѣмъ, что предыдущее уравненіе есть уравненіе коническаго сѣченія, т. е. уникурсальной кривой (§ 611) или кривой нулевого рода. Если, въ болѣе общемъ случаѣ, предположимъ, что въ $f(x, y)$ перемѣнная y связана съ x уравненіемъ $F(x, y) = 0$ какой нибудь уникурсальной кривой, то $f(x, y)\,dx$, очевидно, можно привести къ раціональному виду, принявъ за новую перемѣнную тотъ параметръ t, въ которомъ x и y могутъ быть въ данномъ случаѣ раціонально выражены. Такимъ образомъ и оказывается, что безчисленное множество дифференціаловъ, несравненно болѣе сложной формы, чѣмъ эллиптическіе, приводятся къ раціональному виду и интегрируются въ алгебраически-логариѳмическихъ функціяхъ. Гораздо труднѣе доказать обратную теорему: Если $F(x, y) = 0$ не уникурсальна, то $\int f(x, y)\,dx$ не выражается въ конечномъ видѣ въ алгебраическихъ и логариѳмическихъ функціяхъ.

[**Примѣчаніе.** Это теорема справедлива лишь въ томъ смыслѣ, что если $F = 0$ не уникурсальная кривая, то $\int f(x, y)\,dx$ при всякой раціональной функціи f отъ x и y не выражается въ упомянутой формѣ (см. И. Пташицкій „Общія предложенія объ интегрированіи въ конечномъ видѣ абелевыхъ дифференціаловъ". Матем. Сборникъ Т. XXI). Но нельзя сказать, что никакой интегралъ вида $\int f(x, y)\,dx$ не выражается въ этой формѣ, если $F = 0$ не уникурсальна (см. Е. Золотаревъ, „Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ" (СПБ. 1874), стр. 107.]

Это выясняетъ истинную причину невозможности, вообще говоря, выразить въ такой формѣ эллиптическій интегралъ, потому что кривая 3-го порядка

$$y^2 = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

не имѣющая, вообще говоря, двойной точки, будетъ рода 1; она тогда лишь уникурсальна, когда она имѣетъ двойную точку, для чего необходимо, чтобы одинъ изъ трехъ корней функціи y былъ двойнымъ ($\alpha = \beta$), и тогда достаточно положить $x = \gamma + t^2$, чтобы сдѣлать подъинтегральный дифференціалъ раціональнымъ. Нѣсколько болѣе общій результатъ заключается въ слѣдующемъ: Всякій разъ, когда x и y связаны уравненіемъ вида

$$ay^n + bxy^{n-1} + cx^2y^{n-2} + \cdots = a'y^{n-1} + b'xy^{n-2} + c'x^2y^{n-3} + \cdots$$

стоитъ только положить $y = tz$, чтобы получить

$$x = \frac{a't^{n-1} + b't^{n-2} + \cdots}{at^n + bt^{n-1} + \cdots}, \quad y = \frac{a't^n + b't^{n-1} + \cdots}{at^n + bt^{n-1} + \cdots}$$

и такимъ образомъ преобразовать $f(x, y)\,dx$ въ $\varphi(t)\,dt$, гдѣ $\varphi(t)$ — раціональная функція отъ t.

751. Биноміальные дифференціалы. Подъ этимъ названіемъ понимаютъ дифференціалы вида $x^p(a+bx^m)^q dx$. Мы обозначимъ интегралъ отъ даннаго дифференціала черезъ $\Im(p, q)$ и замѣтимъ, что подстановка $a+bx^m=t$ приводитъ его къ виду

$$\Im(p, q)=\frac{1}{mb}\int\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{p+1}{m}-1} t^q\, dt.$$

Интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, если $\frac{p+1}{m}$ цѣлое число. Интегрированіе выполняется непосредственно, если это число цѣлое и положительное; въ противномъ случаѣ достаточно сдѣлать подстановку $t=\theta^n$ и выбрать цѣлое число n такъ, чтобы и nq было цѣлымъ, благодаря чему данный дифференціалъ приводится къ раціональному виду. Далѣе, если напишемъ $x^p(a+bx^m)^q$ въ видѣ $x^{p+mq}(b+ax^{-m})^q$, то, примѣняя къ новому выраженію предыдущее условіе, видимъ, что интегрированіе выполняется тотчасъ же (при помощи подстановки $b+ax^{-m}=t$), если число $\frac{p+mq+1}{m}$ — цѣлое. Итакъ, данный интегралъ приводится къ интегралу отъ раціональнаго дифференціала тогда, когда одно изъ чиселъ

$$\frac{p+1}{m},\quad \frac{p+1}{m}+q,$$

цѣлое или нуль. Эти условія называются условіями интегрируемости биномiальныхъ дифференціаловъ. Замѣтимъ еще, что числа p, m, q предполагаются всегда раціональными, иначе дифференціалъ былъ бы трансцендентнымъ. Чебышевъ [1]) доказалъ, что упомянутые случаи единственные, въ которыхъ интегралъ отъ биномiальнаго дифференціала выражается въ конечномъ видѣ (черезъ алгебраически-логариѳмическія функціи). Здѣсь, конечно, подразумѣвается, что дифференціалъ самъ по себѣ не раціоналенъ (и, слѣдовательно, p, q, m не всѣ равны цѣлымъ числамъ), и еще, что онъ не приводится къ раціональному виду подстановкою $x=t^n$, что имѣло бы мѣсто при p и m — дробныхъ и q цѣломъ. За исключеніемъ этихъ случаевъ, слѣдовательно, предполагается, что p и m — цѣлыя, а q — дробное; кромѣ того, можно предположить $m>0$, потому что подстановкою $x=\frac{1}{t}$ тотчасъ сведемъ къ этому случаю случай $m<0$.

752. Для вычисленія или упрощенія интеграла отъ биномiальнаго дифференціала стараются выразить его черезъ другіе, подобные ему, болѣе простые интегралы. При этомъ прежде всего замѣтимъ,

---

[1]) „Journal de Liouville“ (1853, стр. 108).

что q всегда можно считать лежащимъ между 0 и 1. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая $p+1 \gtrless 0$, интегрированіе по частямъ даетъ

$$\mathfrak{J}(p, q)=\int (a+bx^m)^q d\frac{x^{p+1}}{p+1}=\frac{x^{p+1}}{p+1}(a+bx^m)^q-\frac{mqb}{p+1}\mathfrak{J}(p+m, q-1).$$

Съ другой стороны имѣемъ тождество

$$b\mathfrak{J}(p+m, q-1)=\mathfrak{J}(p, q)-a\mathfrak{J}(p, q-1).$$

Слѣдовательно,

$$(3)\qquad (p+mq+1)\mathfrak{J}(p, q)=x^{p+1}(a+bx^m)^q+mqa\mathfrak{J}(p, q-1).$$

Изъ этой формулы беремъ $\mathfrak{J}(p, q)$ или $\mathfrak{J}(p, q-1)$, смотря по тому, будетъ ли $q>0$ или <0. Повторнымъ примѣненіемъ этого преобразованія можно отъ $q>0$ отнять, или къ $q<0$ прибавить сколько угодно единицъ. Замѣтимъ при этомъ, что какъ только одинъ изъ коэффиціентовъ при $\mathfrak{J}(p, q)$ или при $\mathfrak{J}(p, q-1)$ окажется нулемъ, такъ будемъ имѣть дѣло съ однимъ изъ случаевъ интегрируемости (въ конечномъ видѣ), и формула (3) сама дастъ значеніе $\mathfrak{J}(p, q-1)$ или $\mathfrak{J}(p, q)$. Точно такъ же можно достигнуть того, что p будетъ заключаться между 0 и m. Дѣйствительно, интегрированіе по частямъ, произведенное при $q+1 \gtrless 0$, дастъ

$$\mathfrak{J}(p, q)=\int x^{p-m+1} d\frac{(a+bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb}$$

$$=x^{p-m+1}\frac{(a+bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb}-\frac{p-m+1}{(q+1)mb}\mathfrak{J}(p-m, q+1).$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\mathfrak{J}(p-m, q+1)=a\mathfrak{J}(p-m, q)+b\mathfrak{J}(p, q),$$

слѣдовательно,

$$(4)\quad (p+mq+1)b\mathfrak{J}(p, q)=x^{p-m+1}(a+bx^m)^{q+1}-(p-m+1)a\mathfrak{J}(p-m, q).$$

Изъ этого соотношенія беремъ $\mathfrak{J}(p, q)$ или $\mathfrak{J}(p-m, q)$, смотря по тому, будетъ ли $p>0$ или <0. Итакъ, мы видимъ, что съ помощью формулъ (3) и (4) вычисленіе интеграла отъ всякаго биноміальнаго дифференціала всегда приводится къ случаямъ, въ которыхъ

$$p \text{ и } m\text{—цѣлыя, } m>0,\quad 0<q<1,\quad 0<p<m.$$

753. Примѣры. а) Для вычисленія $\int \sqrt{x^2+2x-1}\,\frac{dx}{x}$, полагаемъ $\sqrt{x^2+2x-1}=t-x$, откуда

$$x=\frac{t^2+1}{2(t+1)},\quad \sqrt{x^2+2x-1}=t-x=\frac{t^2+2t-1}{2(t+1)},\quad dx=\frac{t^2+2t-1}{2(t+1)^2}dt.$$

Предложенный интегралъ преобразуется въ

$$\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2t-1)^2\,dt}{(t+1)^2(t^2+1)}=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt.$$

Легкое вычисленіе дастъ окончательно для значенія интеграла выраженіе

$$\sqrt{x^2+2x-1}+\log\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right)-2\operatorname{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)+C.$$

Быстрѣе мы достигли бы цѣли, разложивъ интегралъ на

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}-\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}},$$

и замѣтивъ, что

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\mp\int\frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}=\pm\operatorname{arc\,sin}\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C',$$

гдѣ (сравн. съ § 725, a) надо взять верхній или нижній знакъ, смотря по тому, будетъ ли $x>0$ или <0. Первоначально полученное выраженіе потому и предпочтительнѣе, что въ немъ нѣтъ двойственности знака. Эквивалентность обѣихъ формъ вытекаетъ изъ тождества

$$\pm\operatorname{arc\,sin}\frac{x-1}{x\sqrt{2}}=2\operatorname{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right)-(1\pm2)\frac{\pi}{4}\cdot$$

b) Аналогичнымъ путемъ вычисляется $\int\sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x}$. Но можно этотъ интегралъ разсматривать, какъ интегралъ отъ биноміальнаго дифференціала, въ которомъ $p=-1$, $m=2$, $q=\frac{1}{2}$. Слѣдовательно, $\frac{p+1}{m}=0$ и первое условіе интегрируемости выполнено (что всегда имѣемъ мѣсто при $p=-1$, каково бы ни было $m\gtrless0$). Поэтому полагаемъ $x^2-1=t^2$ и получаемъ

$$\int\sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x}=\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=t-\operatorname{arc\,tg}t+C=\sqrt{x^2-1}\pm\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{x}+C.$$

c) Если желаемъ вычислить интегралъ отъ $\frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$, разсматривая это выраженіе, какъ биноміальный дифференціалъ, то замѣтимъ сперва, что $p=-3$, $m=1$, $q=-\frac{1}{2}$, первое условіе интегрируемости выполнено (какъ это всегда бываетъ при $m=\pm1$ и $p-$цѣломъ), и достаточно положить $x-1=t^2$, чтобы сдѣлать дифференціалъ раціональнымъ и съ помощью весьма легкаго интегрированія найти

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}=\frac{3}{4}\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1}+C.$$

d) Въ интегралѣ отъ $\frac{x^4\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ имѣемъ $p=4$, $m=2$, $q=-\frac{3}{2}$; второе условіе интегрируемости выполнено, такъ какъ $\frac{p+1}{m}+q=1$. Слѣдовательно, надо положить $x^{-2}-1=t^{-2}$, т. е.

$$x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad dx=\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но въ данномъ случаѣ скорѣе придемъ къ цѣли, если сперва произведемъ интегрированіе по частямъ

$$\int\frac{x^4\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int x^3\,d(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}-3\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{3x-x^3}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+C.$$

Это сводится къ примѣненію формулы (4).

e) Въ интегралѣ отъ $\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ имѣемъ $p=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{3}$; $\frac{p+1}{m}=2$ — первое условіе интегрируемости выполнено. Поэтому можно быть увѣреннымъ, что подстановка $t=1+\sqrt[4]{x}$ приведетъ къ цѣли. Мы получимъ

$$4\int(t-1)\,t^{\frac{1}{3}}\,dt=\tfrac{3}{7}(4t-7)\,t^{\frac{4}{3}}+C,$$

слѣдовательно,

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

f) Если требуется вычислить

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

то, замѣчая, что

$$\frac{p+1}{m}=\frac{n+1}{2},\quad\frac{p+1}{m}+q=\frac{n}{2},$$

мы видимъ, что приведеніе къ интегралу отъ раціональной функціи возможно лишь при n — цѣломъ Смотря по тому, будетъ ли n нечетное или четное, интегралъ приведется къ

$$-\int(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt,\quad\int\frac{t^n\,dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

подстановкою $x = \sqrt{1-t^2}$ или $x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Впрочемъ, интегрированіе по частямъ даетъ формулу

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

которая позволяетъ свести данный интегралъ къ

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

смотря по тому, будетъ ли n нечетное или четное. Если интегралъ берется отъ 0 до 1, то приходимъ къ извѣстнымъ уже результатамъ (§ 727, g), что легко видѣть, положивъ $x = \sin\theta$.

g) Если желаемъ вычислить интегралъ [1])

$$\int \left(\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3+x^6}}\right) dx,$$

то стоитъ только замѣтить, что коэффиціентъ при dx, на основаніи формулы Тарталіа (§ 528), есть корень уравненія $y^3 + 3xy - 2x^3 = 0$; припоминая замѣчаніе, сдѣланное въ концѣ § 750, тотчасъ приходимъ къ подстановкѣ $x = \frac{3t}{2-t^3}$, которая приводитъ данный интегралъ къ $18\int \frac{(1+t^3)\,t^2\,dt}{(2-t^3)^3}$, а полагая еще $2 - t^3 = 3\theta$, къ

$$2\int \frac{\theta - 1}{\theta^3}\,d\theta = \frac{1-2\theta}{\theta^2} + C = \frac{x^2}{y^2}(x^2 - 2y) + C.$$

Въ то же время имѣемъ $xy^3 - 2y^2 = 2x^4 - 3x^2y - 2y^2 = (x^2 - 2y)(2x^2 + y)$. Поэтому предложенный интегралъ равенъ

$$\frac{x^3\left(\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3+x^6}}\right) - 2x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^3+x^6}}\right) + 2x^2} + C.$$

Предыдущее вычисленіе можно нѣсколько сократить, если замѣтимъ, что $x^2\,dt = x\,dy - y\,dx$, откуда слѣдуетъ

$$\int y\,dx = \int x\,dy - \int x^2\,dt = xy - \int y\,dx - \int x^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(xy - \int x^2\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(xy + \int \frac{d\theta}{\theta^2}\right)$$

$$= \frac{x}{2y}(y^2 - x) + C = x^2\frac{xy-2}{y+2x^2} + C \text{ и т. д.}$$

---

[1]) Hermite. „Cours d'Analyse", стр 242.

Интегрированіе трансцендентныхъ дифференціаловъ.

754. Случаи интегрируемости въ конечномъ видѣ трансцендентныхъ дифференціаловъ, т. е. случаи, когда эти интегралы выражаются въ извѣстныхъ элементарныхъ функціяхъ, весьма рѣдки. Въ простѣйшихъ случаяхъ, когда такое выраженіе возможно, обыкновенно примѣняютъ болѣе или менѣе искусственные пріемы, а не какіе нибудь общія правила. Нѣкоторыя изъ этихъ общихъ правилъ надо, однако, замѣтить. Если f есть символъ раціональной функціи, то интегралы

$$\int f(e^x)\,dx, \quad \int f(\operatorname{tg} x)\,dx, \quad \int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

всегда могутъ быть найдены съ помощью соотвѣтственныхъ подстановокъ $t = e^x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ гдѣ t — новая перемѣнная интегрированія. Такимъ образомъ получаютъ

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(t)\,\frac{dt}{t}, \quad \int f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int \frac{f(t)\,dt}{1+t^2},$$

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

и преобразованные интегралы вычисляются, какъ интегралы отъ раціональныхъ дифференціаловъ. Тѣ же подстановки бываютъ часто полезны и тогда, когда f не раціональная функція.

755. Упражненія. a) Интегралъ отъ $\frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ берется съ помощью подстановки $t = e^x$, и получается

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg} e^x + C$$

b) Чтобы найти интегралъ отъ $\frac{dx}{a + b\cos x}$, возьмемъ за новую перемѣнную $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Получаемъ, смотря по тому, будетъ ли a^2 больше или меньше b^2,

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \pm \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \left| \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\cdot \sin x}{a + b\cos x} \right| + C,$$

гдѣ $\pm$ означаетъ $\operatorname{sng}(a+b)$. Отъ одного выраженія къ другому легко перейти на основаніи соотношенія между $\operatorname{arc\,tg}$ и $\log$.

c) Точно такъ же вычисленіе $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$ приводится къ вычисленію $\int \frac{t^n\,dt}{1+t^2}$ при помощи подстановки $t=\operatorname{tg} x$. Но при n — цѣломъ положительномъ можно иначе поступить, повторно примѣняя слѣдующую формулу

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\operatorname{tg}^{n-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx.$$

Такимъ образомъ въ концѣ концовъ придемъ къ одному изъ интеграловъ

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\log|\cos x| + C, \quad \int dx = x + C,$$

смотря по тому, будетъ ли n — нечетное или четное. Можно такъ же поступать при n — отрицательномъ, но въ этомъ случаѣ удобнѣе замѣтить, что

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x} = \int \operatorname{cot}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cot}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cot}^{n-2} x\,dx$$

и т. д.

d) Чтобы вычислить интегралъ отъ $\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$, положимъ $\operatorname{tg} x = t^2$; интегралъ приведется къ $2\int \frac{dt}{1+t^4}$ — интегралу, который мы уже вычисляли (§ 744, c). Мы получимъ окончательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left|\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sin}(\sin x - \cos x) + C.$$

e) При вычисленіи интеграла вида $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ часто можно обойтись безъ примѣненія указанной въ § 754 подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, примѣняя интегрированіе по частямъ и различные искусственные пріемы, къ которымъ (сравн. съ § 723, d) принадлежитъ умноженіе дифференціала на $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Напримѣръ, съ помощью упомянутой подстановки можно найти

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\operatorname{cot} x}{4}\left(\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{3}{2\sin x}\right) + \frac{3}{8}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Но удобнѣе свести данный интегралъ (ср. съ § 723, a) къ одному изъ слѣдующихъ

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cot} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

что всегда возможно, когда дѣло идетъ объ интегралѣ $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ при n цѣломъ положительномъ. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \int \cos x\, d \frac{1}{\sin^{n-1} x},$$

а слѣдовательно, съ помощью интегрированія по частямъ

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}.$$

Аналогично этому трактуется $\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

f) Подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ даетъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}}.$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ передъ собою эллиптическій интегралъ, который можно разсматривать и какъ интегралъ отъ биноміальнаго дифференціала, въ которомъ

$$p = q = -\frac{1}{2}, \quad m = 2, \quad \frac{p+1}{m} = \frac{1}{4}, \quad \frac{p+1}{m} + q = -\frac{1}{4}.$$

Поэтому (§§ 749, 751) тщетно надѣяться какимъ либо путемъ выразить этотъ интегралъ въ конечномъ видѣ.

g) Для вычисленія интеграловъ въ родѣ $\int \sin^3 x\, dx$, $\int \cos^4 x\, dx$ и т. д. также нѣтъ надобности прибѣгать къ подстановкѣ. Тригонометрія (сравн. съ § 725, o) даетъ соотношенія

$$\sin^3 x = \tfrac{3}{4} \sin x - \tfrac{1}{4} \sin 3x, \qquad \cos^4 x = \tfrac{1}{8} \cos 4x + \tfrac{1}{2} \cos 2x + \tfrac{3}{8},$$

откуда тотчасъ получаемъ

$$\int \sin^3 x\, dx = -\tfrac{3}{4} \cos x + \tfrac{1}{12} \cos 3x + C,$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \tfrac{1}{32} \sin 4x + \tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{3}{8} x + C.$$

Точно такъ же, для вычисленія $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$ можемъ взять тѣ же два соотношенія и, перемножая ихъ, вывести (ср. съ § 723, d) слѣдующее

$$32 \sin^3 x \cos^4 x = \tfrac{1}{2} (3 \sin x + 3 \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x),$$

откуда интегрированіемъ получимъ

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \tfrac{1}{64} \left(-3 \cos x - \cos 3x + \tfrac{1}{5} \cos 5x + \tfrac{1}{7} \cos 7x \right) + C.$$

Аналогичнымъ способомъ вычисляютъ всѣ интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. Но можно также воспользоваться формулою приведенія, которая получается интегрированіемъ по частямъ, а именно

$$(m+n)\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx \text{ и т. д.}$$

h) Иногда одного интегрированія по частямъ достаточно, чтобы избавиться отъ нѣкоторыхъ трансцендентныхъ функцій подъ знакомъ интеграла. Такъ, напримѣръ, для всякой пары раціональныхъ функцій f и g имѣемъ

$$\int g'(x) \log f(x)\, dx = g(x) \log f(x) - \int \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)\, dx,$$

и послѣдній интегралъ выражается въ извѣстныхъ функціяхъ. Напримѣръ, (ср. съ § 744, b)

$$\int x \log (x^4 - 1)\, dx = \frac{1}{2} x^2 \log (x^4 - 1) - 2\int \frac{x^5 dx}{x^4 - 1}$$
$$= (x^2 - 1) \log \sqrt{x^2 - 1} + (x^2 + 1) \log \sqrt{x^2 + 1} - x^2 + C.$$

Замѣчательные опредѣленные интегралы.

756. Эллиптическіе интегралы. Полный эллиптическій интегралъ (§ 748) перваго вида $F(k)$ легко вычисляется съ помощью ряда, такъ какъ (§ 233, e) имѣемъ

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \cdots\right) d\varphi.$$

Отсюда, пользуясь формулою (15) § 727, найдемъ

$$(5) \qquad F(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2} k\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^2\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^3\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Легко прослѣдить, какъ измѣняется $F(k)$ при возрастаніи k отъ 0 до 1. Ясно, что $F(k)$ постоянно возрастаетъ отъ $F(0) = \frac{\pi}{2}$ до

$$F(1) = \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \infty.$$

Справа отъ $k=0$ функція F возрастаетъ медленно, такъ какъ изображающая ее кривая уподобляется здѣсь параболѣ $y=\frac{\pi}{8}x^2$ въ смежности съ ея вершиною; а подъ конецъ она возрастаетъ весьма быстро, такъ что кривая становится асимптотическою къ прямой $k=1$ (рис. 90). Чтобы увидать, какъ измѣняется функція $F(k)$ въ смежности съ $k=1$, замѣтимъ, что коэффиціентъ при k^{2n} въ разложеніи этой функціи асимптотиченъ къ $\frac{1}{2n}$ (§ 337, c). откуда слѣдуетъ, что (§ 339) слѣва отъ $k=1$ имѣетъ мѣсто асимптотическое равенство

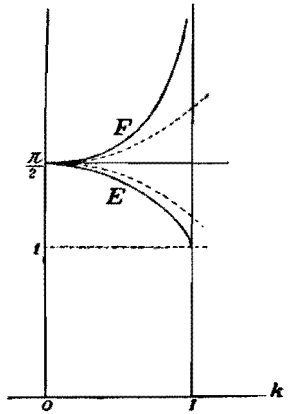


Рис. 90.

$$F(k)=\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}. \tag{6}$$

757. Такимъ же образомъ вычисляется полный эллиптическій интегралъ второго вида $E(k)$, для котораго имѣетъ

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2\cdot4}k^4\sin^4\varphi-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\varphi-\cdots\right)d\varphi;$$

интегрируя почленно, получимъ

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}k\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^3\right)^2-\cdots\right\}. \tag{7}$$

При возрастаніи k отъ 0 до 1, $E(k)$ постоянно убываетъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до

$$E(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=1.$$

Справа отъ $k=0$ кривая, изображающая функцію, уподобляется параболѣ $y=-\frac{1}{8}\pi x^2$ и при $k=1$ кривая касается прямой $k=1$ (рис. 90). Чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ только вычислить производную

$$E'(k)=-\frac{\pi}{k}\left\{\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^2\right)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^3\right)^2+\cdots\right\}.$$

и замѣтить, что

$$kE'(k)=E(k)-F(k),$$

откуда и слѣдуетъ, что $\lim_{k=1-0} E'(k) = -\infty$. Чтобы ближе изслѣдовать ходъ функціи слѣва отъ $k=1$, замѣтимъ, что для k, стремящагося къ предѣлу 1, теорема Лопиталя дастъ

$$\lim \frac{1-E(k)}{(1-k^2)\log\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{2}\lim \frac{E'(k)}{\log\sqrt{1-k^2}} = -\frac{1}{2}\lim \frac{F'(k)}{\log\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ асимптотическое равенство

$$E(k) = 1 + \frac{1-k^2}{2}\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}. \tag{8}$$

758. Ряды (5) и (7) весьма полезны для вычисленія значеній $F(k)$ и $E(k)$ при весьма малыхъ значеніяхъ k, но при k недостаточно маломъ они становятся непригодными вслѣдствіе крайне медленной сходимости. Если k близко къ единицѣ, то асимптотическія выраженія (6) и (8) даютъ понятіе объ общемъ ходѣ этихъ функцій, но если мы хотимъ дѣйствительно вычислить значенія функцій, то надо эти формулы дополнить, чтобы получить сколько нибудь достаточное приближеніе. Мы ограничимся здѣсь тѣмъ, что покажемъ какимъ образомъ вычисленіе интегралов F и E можетъ быть приведено къ вычисленію подобныхъ же интегралов, но съ модулемъ, сколь угодно малымъ. Этой цѣли можно достигнуть съ помощью такъ называемаго преобразованія Ландена (Landen)

$$\sin\varphi = \frac{(1+\mu)\sin\psi}{1+\mu\sin^2\psi}, \tag{9}$$

гдѣ постоянная μ (лежащая между 0 и 1) опредѣляется уравненіемъ $k = \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}$. Легкое вычисленіе даетъ

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{1-\mu\sin^2\psi}{1+\mu\sin^2\psi}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\psi}}{1+\mu\sin^2\psi}\cos\psi.$$

Изъ (9) дифференцированіемъ получаемъ теперь

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{(1+\mu)\,d\psi}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\psi}}$$

и, наконецъ,

$$F(k) = (1+\mu)\,F(\mu), \tag{10}$$

если примемъ во вниманіе, что при постоянномъ возрастаніи ψ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ первоначальная перемѣнная дѣлаетъ то же самое. Аналогичное вычисленіе, которое мы, для сокращенія, здѣсь опускаемъ, даетъ вторую важную формулу, а именно

$$E(k) = \frac{2}{1+\mu}E(\mu) - (1-\mu)\,F(\mu). \tag{11}$$

Ясно, что обѣ выше приведенныя формулы остаются справедливыми и для неполныхъ интеграловъ; амплитуды φ и ψ имѣютъ тогда различныя значенія, связанныя формулою (9). Уравненіе (11) раскрываетъ слѣдующее важное обстоятельство: Всякій эллиптическій интегралъ перваго вида можетъ быть выраженъ черезъ два интеграла второго вида.

759. Возвратимся къ полнымъ интеграламъ и покажемъ, какимъ образомъ можно воспользоваться формулою (10), чтобы вычислить $F(k)$ при k близкомъ къ 1. Начиная съ k, составимъ такой рядъ чиселъ k, k_1, k_2, ..., чтобы

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad k_1 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_3}}{1+k_3}, \quad \ldots.$$

Тогда будемъ имѣть вообще

$$k_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{1+\sqrt{1-k_n^2}} < \frac{1-(1-k_n)}{1+(1-k_n)} < k_n.$$

Числа k_n — положительныя и постоянно убывающія при возрастаніи n, должны стремиться къ нѣкоторому предѣлу l. Этотъ предѣлъ долженъ удовлетворять уравненію $l = \frac{2\sqrt{l}}{1+l}$. Освободивъ это уравненіе отъ корня $l = 0$ и отбросивъ недопустимый корень $l = 1$, приведемъ его къ $2 + \sqrt{l} + l = 0$, которое не имѣетъ вещественныхъ корней. Поэтому $l = 0$. Повторное примѣненіе формулы (10) даетъ

$$F(k) = (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots(1+k_n)\,F(k_n),$$

гдѣ k_n будетъ сколь угодно мало. При безконечно большомъ n можно, такимъ образомъ, съ помощью (5) вычислить $F(k_n)$, а затѣмъ и $F(k)$. При возрастаніи n до ∞ имѣемъ

$$\lim F(k_n) = F(0) = \frac{\pi}{2},$$

а слѣдовательно,

$$F(k) = \tfrac{1}{2}\pi(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots.$$

Построивъ таблицу значеній F, съ помощью формулы (11) аналогичнымъ образомъ можно вычислить и значенія E. Такія, весьма полезныя для приложеній, таблицы составлены Лежандромъ (и для неполныхъ интеграловъ) и называются эллиптическими таблицами [1]). Приведемъ изъ нихъ здѣсь нѣсколько чиселъ

$$F\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}617\ldots,\ F\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}685\ldots,\ F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}854\ldots,\ F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2{,}156\ldots,$$

$$E\left(\frac{1}{3}\right)=1{,}526\ldots,\ E\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}467\ldots,\ E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}350\ldots,\ E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1{,}211\ldots,$$

[1]) Legendre. „Traité des fonctions elliptiques“, т. II.

760. Упражненія. a) При вычисленіи интеграла отъ $\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$, которое мы предприняли въ § 755, f съ помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, предпочтительнѣе примѣнить болѣе простую подстановку $\sin x = t$. Тогда съ помощью дальнѣйшей подстановки $t=\cos^2\varphi$ (на которую наводятъ соображенія § 749), приходимъ къ слѣдующему нормальному виду даннаго интеграла

$$-2\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}=-\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Въ частности, получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2{,}622\ldots.$$

b) Подобнымъ же образомъ вычислимъ интегралы

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\quad\text{и}\quad\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

положивъ $x=\cos\varphi$. Они преобразуются соотвѣтственно въ

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}-\sqrt{2}\int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Въ частности, будемъ имѣть

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}311\ldots.$$

$$\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0{,}599\ldots.$$

c) Нѣсколько сложнѣе будетъ вычисленіе интегралов

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},\quad\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Примѣняя къ первому подстановку $x=-1+\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$, получимъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin^2\varphi}}.$$

Ко второму, на основаніи сказаннаго въ концѣ § 749, надо примѣнить подстановку

$$x = \frac{\operatorname{tg}\varphi - (1-\sqrt{2})}{\operatorname{tg}\varphi + (1+\sqrt{2})}.$$

Тогда онъ преобразуется въ

$$\int \frac{(2+\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{\sin^4\varphi + 6(3+2\sqrt{2})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^4\varphi}}.$$

Выраженіе подъ знакомъ корня получается отъ умноженія

$$\sin^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^2\varphi = (3+2\sqrt{2})^2\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi\right)$$

на $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{(2-\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi}}.$$

Принимая, далѣе, во вниманіе, что

$$\text{при } k^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}, \qquad \mu = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

получимъ, примѣняя формулу (10),

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) F\left(\frac{2\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}927\ldots.$$

d) Когда предложено найти интегралъ

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}},$$

который напоминаетъ другой, уже вычисленный въ § 725, i, то можно начать съ интегрированія по частямъ, которое дастъ

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{2}{k}\int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\sqrt{1-k\cos\varphi} = -\frac{2}{k}\int_0^{\pi} \sqrt{1-k\cos\varphi}\cdot\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{k}\int_0^{\pi} \frac{k-\cos\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}\,d\varphi - 2\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{2}{3k}\int_0^{\pi} \frac{k-\cos\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}\,d\varphi.$$

Послѣдній интегралъ при замѣнѣ φ на $\pi - 2\varphi$ приметъ видъ

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k+\cos 2\varphi}{\sqrt{1+k\cos 2\varphi}}\,d\varphi = \frac{2}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+k\cos 2\varphi}\,d\varphi - \frac{2}{k}(1-k^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+k\cos 2\varphi}},$$

или, если еще напишемъ $1+k-2k\sin^2\varphi$ вмѣсто $1+k\cos 2\varphi$,

$$\frac{2}{k}\sqrt{1+k}\left\{E\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) - (1-k)F\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right)\right\}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{4\sqrt{1+k}}{3k^2}\left\{E\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) - (1-k)F\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right)\right\}.$$

е) Могутъ встрѣтиться эллиптическіе интегралы съ модулемъ $k>1$, но ихъ всегда можно привести къ другимъ съ модулемъ, лежащимъ между 0 и 1. Разсмотримъ, напримѣръ, интегралы

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

въ которыхъ верхній предѣлъ φ не достигаетъ значенія $\frac{\pi}{2}$, а можетъ достигать лишь максимальнаго значенія α, опредѣляемаго уравненіемъ $\sin\alpha = \frac{1}{k}$. Когда φ измѣняется отъ 0 до α, то перемѣнная ψ, связанная съ φ уравненіемъ $\sin\psi = k\sin\varphi$ измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, а такъ какъ

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{k^2-\sin^2\psi}},$$

то будемъ имѣть

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k}F\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{k}F\left(\frac{1}{k}\right) + k\left\{E\left(\frac{1}{k}\right) - F\left(\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Напримѣръ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = 1{,}311\ldots, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 0{,}599\ldots.$$

f) Въ Механикѣ доказывается, что время полнаго колебанія простого маятника, съ длиною l и амплитудою колебанія 2α, измѣряется величиною интеграла

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}},$$

гдѣ g обозначаетъ ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ наблюденія. Этою важною формулою пользуются для опредѣленія g въ различныхъ мѣстахъ земной поверхности, съ тѣмъ, чтобы изъ результатовъ многихъ наблюденій составить себѣ понятіе о формѣ этой поверхности. Если положимъ $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi$, то получимъ

$$\cos\theta - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2k^2\cos^2\varphi.$$

Принимая далѣе во вниманіе, что при измѣненіи θ отъ 0 до α, φ постоянно возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, найдемъ

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}F(k) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \frac{25}{256}\sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots\right).$$

Если α очень мало, то можно ограничиться въ выраженіи T первымъ членомъ, который отъ α не зависитъ, и такимъ образомъ получить доказательство изохронизма малыхъ колебаній. Если хотимъ достигнуть бо̀льшей точности, то удерживаемъ еще одинъ членъ въ разложеніи. Можно также примѣнить формулу (10), замѣтивъ, что въ данномъ случаѣ $\mu = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$, и написать

$$T = \frac{\pi}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

g) Другой замѣчательный интегралъ, встрѣчающійся въ теоріи движенія волчка, изображается такъ

$$\Phi = \frac{ab}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta}}.$$

Сведемъ сперва интервалъ интегрированія къ $(0, \pi)$, замѣчая, что интегралъ, распространенный на другую часть $(\pi, 2\pi)$, приводится къ первому замѣною θ на $2\pi - \theta$. Далѣе можно считать, что $ab > 0$, потому что при $ab < 0$ замѣною θ на $\pi - \theta$ сведемъ этотъ случай къ первому. Съ другой стороны, замѣтимъ, что

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta = (a+b)^2 + c^2 - 4ab\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{4ab}{k^2}\left(1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

если положимъ

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + c^2}.$$

Поэтому, принимая за перемѣнную интегрированія $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$, получимъ

$$\Phi = \frac{k}{2\pi}\sqrt{ab}\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = -\frac{k}{\pi}\sqrt{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Написавъ еще $1 - 2\sin^2\varphi$ вмѣсто $\cos 2\varphi$, находимъ

$$-\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\Phi = kF(k) + \frac{2}{k}\{E(k) - F(k)\}. \tag{12}$$

Затѣмъ формулы (5) и (7) дадутъ разложеніе Φ по степенямъ k:

$$\Phi = \frac{\sqrt{ab}}{16}\left(k^3 + \frac{3}{4}k^5 + \cdots\right).$$

Болѣе простое выраженіе получимъ, если отъ модуля k перейдемъ къ модулю

$$\mu = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1-k^2}} = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2} - \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}{\sqrt{(a+b)^2 + c^2} + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}},$$

пользуясь формулами (10) и (11). Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что

$$\frac{2}{k(1+\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad \frac{1}{2}k(1+\mu) - \frac{2}{k} = \sqrt{\mu} - \left(\sqrt{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\mu}},$$

преобразуемъ (12) въ

$$-\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\Phi = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\{E(\mu) - F(\mu)\}. \tag{13}$$

Иными словами, предложенный интегралъ приводится къ типическому эллиптическому интегралу второго вида (§ 748):

$$\Phi = \frac{2\mu}{\pi}\sqrt{\mu ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \mu^2\sin^2\varphi}}.$$

Разлагая правую часть формулы (13) въ рядъ, получимъ

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu ab}\,(\mu + \tfrac{3}{8}\mu^3 + \tfrac{15}{64}\mu^5 + \cdots).$$

Если k весьма мало, то послѣднее разложеніе цѣлесообразнѣе разложенія, выведеннаго изъ формулы (12); если же k близко къ 1, то лучше прямо примѣнить асимптотическую формулу (6) къ выраженію (12).

h) При помощи довольно длиннаго, но не представляющаго существенныхъ затрудненій, вычисленія [1]), приходимъ къ формулѣ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = -\frac{1}{2} F(k) \log k - \frac{1}{4} \pi F(k'),$$

гдѣ $k' = \sqrt{1 - k^2}$, и отсюда получаются при k весьма близкомъ къ 1 тѣ формулы, на которыя мы указывали въ началѣ § 758. Мы ограничимся здѣсь слѣдующимъ замѣчаніемъ. Напишемъ правую часть предыдущей формулы въ слѣдующемъ видѣ:

$$-\frac{1}{2}\left\{F(k) - \frac{\pi}{2}\right\} \log k - \frac{\pi}{4}\{F(k') + \log k\},$$

припомнимъ, что (§ 721, d)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

и что

$$\lim_{k=0}\left\{\left[F(k) - \frac{\pi}{2}\right] \log k\right\} = 0,$$

какъ то слѣдуетъ изъ разложенія $F(k)$ въ рядъ по степенямъ k (§ 756, (5)) и перейдемъ къ предѣлу при $k = 0$; тогда, замѣнивъ еще k на k' и обратно, получимъ

$$\lim_{k=1}\left\{F(k) + \log \sqrt{1 - k^2}\right\} = \log 4.$$

Эта формула не только заключаетъ въ себѣ формулу (6), но позволяетъ внести въ эту формулу и въ формулу (8) еще маленькую поправку, состоящую въ томъ, что разность между лѣвою и правою частью формулы (6) будетъ не нуль, а $\log 4$:

$$F(k) = \log \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}}, \qquad E(k) = 1 + \frac{1 - k^2}{2} \log \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}}.$$

i) Чтобы дать читателямъ понятіе о болѣе трудныхъ вопросахъ, которые могутъ быть рѣшены при помощи эллиптическихъ интеграловъ, мы приведемъ здѣсь двѣ интересныя формулы съ тѣмъ, чтобы вывести изъ нихъ нѣкоторыя заключенія. Когда k измѣняется отъ 0 до 1, то интегралы $F(k)$ и $F(k')$ измѣняются такъ, что отношеніе второго къ первому измѣняется отъ 0 до ∞ и притомъ постоянно возрастаетъ. Поэтому, если x

[1]) Schlömilch. „Compend. der höheren Analysis“, т. 2, стр. 322, и въ „Billetin de Darboux“ (1897, стр. 109).

будетъ какое нибудь данное число, лежащее между 0 и 1, то будетъ существовать одно и только одно значеніе k, для котораго

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{x}=\frac{F(k')}{F(k)}.$$

Въ то же время можно доказать, что

$$1+2x+2x^4+2x^9+2x^{16}+\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}F(k)},$$

гдѣ k функція отъ x, опредѣляемая предыдущимъ уравненіемъ*). Въ частности, когда x безпредѣльно приближается къ 1, будемъ имѣть все съ бо́льшимъ и бо́льшимъ приближеніемъ $F(k)=\dfrac{\pi^2}{2\log\dfrac{1}{x}}$, и потому сумма ряда будетъ стремиться (сравн. § 342, c) совпасть съ

$$\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{x}}} \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

Точно такъ же имѣемъ

$$1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}k'F(k)},$$

а поэтому (сравн. § 342, d), припоминая формулу (6), получимъ

$$\lim_{x=1}(x-x^4+x^9-x^{16}+\cdots)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{k'=0}\sqrt{k'\log\frac{1}{k'}}=\frac{1}{2}.$$

Напротивъ того, при $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, когда и $k'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x=e^{-\pi}$, откуда

$$1+2e^{-\pi}+2e^{-4\pi}+2e^{-9\pi}+\cdots=\sqrt{\frac{2}{\pi}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=1{,}086\ldots,$$

$$1-2e^{-\pi}+2e^{-4\pi}-2e^{-9\pi}+\cdots=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=0{,}913\ldots.$$

Если хотимъ теперь переставить k и k', то надо будетъ замѣнить x другимъ числомъ x', связаннымъ съ x соотношеніемъ $\log\dfrac{1}{x}\log\dfrac{1}{x'}=\pi^2$, а такъ какъ съ другой стороны имѣемъ

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}F(k)F(k')},$$

---

*) Это извѣстная формула изъ теоріи эллиптическихъ функцій. См., напримѣръ, Schlömilch „Compendium der höheren Analysis“. 2-й томъ второго изданія 1874 г., стр. 439, формула (105).

то видимъ, что лѣвая часть, какъ и правая, не измѣняется отъ замѣны x на x' и обратно. Такимъ образомъ получается доказательство одного раннѣе даннаго соотношенія (§ 342, c). Наконецъ, замѣтимъ, что переходя, при помощи преобразованія Ландена, отъ модуля k къ модулю $\varkappa = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, съ помощью того же преобразованія, примѣненнаго въ обратномъ смыслѣ, переходимъ отъ k' къ $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$. На основаніи формулы (10) будемъ поэтому имѣть

$$F(\varkappa) = (1+k)\,F(k), \quad F(\varkappa') = \tfrac{1}{2}(1+k)\,F(k'),$$

при чемъ значеніе ξ перемѣнной x, соотвѣтствующее модулю $\varkappa$, будетъ таково, что

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\xi} = \frac{F(\varkappa')}{F(\varkappa)} = \frac{1}{2}\frac{F(k')}{F(k)} = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{x},$$

т. е. $\xi = \sqrt{x}$. Поэтому имѣемъ

$$1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^9} + \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}(1+k)\,F(k)},$$

$$1 - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^9} + \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}(1-k)\,F(k)}.$$

Переходя опять отъ k къ $\varkappa$, получимъ

$$1 + 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^4} + 2\sqrt[4]{x^9} + \cdots = (1+\sqrt{k})\sqrt{\frac{2}{\pi}F(k)},$$

$$1 - 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^4} - 2\sqrt[4]{x^9} + \cdots = (1-\sqrt{k})\sqrt{\frac{2}{\pi}F(k)},$$

откуда получается

$$\frac{2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^9} + 2\sqrt[4]{x^{25}} + \cdots}{1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots} = \sqrt{k}.$$

Съ другой стороны,

$$\frac{1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \cdots}{1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots} = \sqrt{k'}.$$

Возвышая оба равенства въ 4-ую степень и складывая, находимъ тождество

$$\left(2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^9} + 2\sqrt[4]{x^{25}} + \cdots\right)^4 + (1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \cdots)^4 = (1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots)^4.$$

Изъ него, путемъ сравненія коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x въ лѣвой и правой части, получается слѣдующая ариѳметическая теорема: Число всевозможныхъ разложеній нечетнаго числа на четыре квадрата въ восемь разъ больше числа всевозможныхъ разложеній учетвереннаго числа на четыре квадрата нечетныхъ чиселъ.

761. Эйлеровы интегралы. Подъ этимъ названіемъ понимаютъ интегралы

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx, \qquad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx.$$

Первый называется Эйлеровымъ интеграломъ перваго вида. Это функція отъ двухъ положительныхъ перемѣнныхъ μ и ν, и притомъ симметрическая (что тотчасъ обнаруживается при замѣнѣ x на $1-x$). Второй интегралъ — функція отъ одной положительной перемѣнной μ, называется Эйлеровымъ интеграломъ второго вида. Мы уже видѣли, что второй интегралъ равенъ $\Gamma(\mu)$; этотъ результатъ мы снова подтвердимъ, вычисляя первый при цѣломъ положительномъ ν. Предполагая еще $\nu>1$, при помощи интегрированія по частямъ находимъ

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx=\frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu-2}\,dx$$

$$=\frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}\,dx-\frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx,$$

откуда получаемъ

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx=\frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}\,dx,$$

а повторнымъ примѣненіемъ этой формулы найдемъ

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx=\frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\cdot\frac{\nu-2}{\mu+\nu-2}\cdots\frac{1}{\mu+1}\int_0^1 x^{\mu-1}dx=\frac{(\nu-1)!}{\mu(\mu+1)\cdots(\mu+\nu-1)}.$$

Замѣнивъ x на $\frac{x}{\nu}$, получимъ

$$\int_0^\nu x^{\mu-1}\left(1-\frac{x}{\nu}\right)^{\nu-1}dx=\frac{\nu!\,\nu^{\mu-1}}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+\nu-1)},$$

а увеличивая ν до безконечности и припоминая опредѣленіе функціи Γ (§ 252, c), находимъ

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx=\Gamma(\mu).$$

Замѣтимъ еще формулу, получаемую отсюда замѣною x на nx

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-nx}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{n^\mu}, \tag{14}$$

важную по ея многочисленнымъ приложеніямъ.

762. Докажемъ теперь, что интегралы перваго вида выражаются черезъ функцію Γ. Подстановка $x = \frac{y}{1+y}$ даетъ

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\, dx = \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}\, dy}{(1+y)^{\mu+\nu}}.$$

Второй части можно придать видъ двойного интеграла, пользуясь формулою (14), послѣ замѣны въ ней μ на $\mu+\nu$, и n на $1+y$

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty y^{\mu-1}dy\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-(1+y)x}dx=\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}dy.$$

Но на основаніи той же формулы (14) имѣемъ

$$\int_0^\infty y^{\mu-1} e^{-xy}\, dy = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu}. \tag{15}$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1} e^{-x}\, dx \int_0^\infty y^{\mu-1} e^{-xy}\, dy = \Gamma(\mu)\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu).$$

Итакъ,

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}. \tag{16}$$

Такимъ образомъ можно вычислить всякій интегралъ перваго вида съ помощью таблицъ для $\log\Gamma(x)$ (съ 20 десятичными знаками), составленныхъ по настоянію Гаусса [1]).

---

[1]) Gauss Werke, т. III. См. также упомянутый уже „Traité" Legendre, т. II.

763. Формулу (16), весьма полезную въ приложеніяхъ, часто пишутъ въ видѣ

$$(17)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\mu-1}\vartheta\cdot\cos^{2\nu-1}\vartheta\cdot d\vartheta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)},$$

который она принимаетъ, когда положимъ $x=\sin^2\vartheta$. Между прочимъ, изъ нея можно получить, при $\mu=\nu$, доказательство формулы Лежандра (§ 252, d), если припомнимъ, что $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma(2\mu)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\vartheta\cos\vartheta)^{2\mu-1}\,d\vartheta=\frac{1}{2^{2\mu-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\mu-1}2\vartheta\cdot d\vartheta$$

$$=\frac{1}{2^{2\mu-1}}\int_0^{\pi}\sin^{2\mu-1}\vartheta\cdot d\vartheta=\frac{1}{2^{2\mu-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\mu-1}\vartheta\cdot d\vartheta=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})},$$

откуда получается

$$\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)}.$$

На этомъ основаніи, при всякомъ $\mu>0$, получаемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\mu-1}\vartheta\cdot d\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\mu-1}\vartheta\cdot d\vartheta=2^{2\mu-2}\,\frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma(2\mu)},$$

а это есть обобщеніе одного изъ прежде полученныхъ результатовъ (§ 727, g).

764. Упражненія. а) Интегралъ отъ $\mathrm{tg}^n x\,dx$ въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ можетъ быть вычисленъ съ помощью (17), если положимъ $2\mu-1=n$, $2\nu-1=-n$; тогда, вслѣдствіе того, что $\mu+\nu=1$, найдемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^{-n}x\,dx=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right).$$

Пользуясь формулою (§ 464, e)

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)=\frac{\pi}{\sin\mu\pi}, \tag{19}$$

видимъ, что при $|n|<1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^n x\,dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}. \tag{20}$$

Въ частности, получимъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

что можно получить и изъ ранѣе сдѣланнаго примѣра (§ 755, d). Ограниченіе $|n|<1$ получается, независимо отъ границъ приложимости формулы (17), также и изъ прежнихъ замѣчаній (§ 717, a), потому что $\operatorname{tg}^n x$ обращается въ ∞ порядка $|n|$ при $x=\frac{\pi}{2}$ или при $x=0$, смотря по тому, будетъ ли $n>$ или <0. Слѣдовательно, a priori можно было утверждать, что интегралъ не существуетъ при $|n|\geqq 1$.

b) Чтобы вычислить

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}},$$

замѣнимъ x на $x^{\frac{1}{n}}$. Интегралъ приведется къ

$$\frac{1}{n}\int_0^1 x^{\frac{1}{n}-1}(1-x)^{-\frac{1}{n}}\,dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда слѣдуетъ по формулѣ (19)

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}},$$

при условіи $n>1$. Впрочемъ, и неопредѣленный интегралъ можно найти въ алгебраически-логариѳмическихъ функціяхъ, потому что подъинтегральное выраженіе есть биноміальный дифференціалъ, въ которомъ выполнено второе условіе интегрируемости (§ 751). Для приведенія этого дифференціала къ раціональному виду стоитъ только положить $x=\frac{1}{\sqrt[n]{1+t^n}}$.

c) Для вычисленія $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ примѣняемъ формулу (18), которая тотчасъ даетъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Сравненіе этого результата съ полученнымъ въ § 760, даетъ нижеслѣдующее выраженіе одного Эйлерова интеграла черезъ эллиптическій:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right) = 2\sqrt{\sqrt{\pi}\, F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 3{,}625\ldots.$$

Далѣе, изъ (19) слѣдуетъ

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = 1{,}225\ldots.$$

d) Интегралъ отъ $\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ въ предѣлахъ отъ 0 до 1 также легко приводится къ Эйлерову интегралу 1-го вида. Стоитъ только взять за новую перемѣнную $t = x^4$, чтобы получить, на основаніи формулы (16)

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{n-3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)},$$

или, по формулѣ Лежандра,

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2^{\frac{n-5}{2}}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Напримѣръ,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Сравненіе послѣдняго результата съ прежде полученнымъ (§ 760, b) даетъ слѣдующее соотношеніе между значеніями F и E съ модулемъ $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

е) Другой интегралъ, легко приводящійся къ функціямъ Γ, есть слѣдующій

$$\mathcal{J} = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}\varphi \, d\varphi}{(1 + k\cos\varphi)^n}.$$

Всегда можно предположить $k \geqq 0$, потому что случай $k < 0$ сводится къ первому замѣною φ на $\pi - \varphi$. Замѣтимъ, далѣе, что при $n \leqq 0$ подъинтегральная функція обращается на предѣлахъ интеграла въ безконечность порядка $1 - n \geqq 1$. Отсюда слѣдуетъ, что интегралъ можетъ существовать только при $n > 0$ (§ 717, а); и онъ дѣйствительно существуетъ, если еще $k < 1$, потому что тогда подъинтегральная функція конечна и непрерывна въ интервалѣ интегрированія. При $k = 1$, напротивъ того, интегралъ не существуетъ, потому что тогда подъинтегральная функція на верхнемъ предѣлѣ обращается въ безконечность порядка $n + 1 > 1$. Если $k > 1$, то подъинтегральная функція обращается въ безконечность порядка n при $\varphi = \alpha$, гдѣ $\cos\alpha = -\frac{1}{k}$. Слѣдовательно, интегралъ существуетъ и при $k > 1$, если при этомъ $n < 1$. Чтобы вычислить его въ первомъ случаѣ, когда $0 \leqq k < 1$, $n > 0$, стоитъ только примѣнить подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

которою часто пользуются въ Астрономіи, такъ какъ она примѣняется во многихъ вопросахъ, касающихся эллипса. Къ этой подстановкѣ приходимъ всего естественнѣе, если хотимъ перейти отъ эксцентрической аномаліи φ, опредѣляющей положеніе точки на эллипсѣ, къ полярнымъ координатамъ r и θ, принимая одинъ фокусъ за полюсъ и направляя полярную ось къ другому фокусу. Очевидно, r будетъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны $ka + a\cos\varphi$ и $b\sin\varphi$, такъ что

$$r^2 = a^2\{(k + \cos\varphi)^2 + (1 - k^2)\sin^2\varphi\} = a^2(1 + k\cos\varphi)^2,$$

т. е. $r = a(1 + k\cos\varphi)$, слѣдовательно,

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-k^2}\cdot\sin\varphi}{1 + k\cos\varphi}, \qquad \cos\theta = \frac{k + \cos\varphi}{1 + k\cos\varphi},$$

откуда, дифференцируя, получимъ

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-k^2}\,d\varphi}{1 + k\cos\varphi}, \quad \text{т. е.} \quad r\,d\theta = b\,d\varphi.$$

Изъ тѣхъ же уравненій, кромѣ того, выводимъ

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{\sqrt{1-k^2}\sin\varphi}{(1+k)(1+\cos\varphi)} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Такъ какъ θ возрастаетъ отъ 0 до π когда φ возрастаетъ отъ 0 до π, то, очевидно, будемъ имѣть

$$(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1 + k\cos\varphi}\right)^{n-1}\frac{d\varphi}{1 + k\cos\varphi} = \int_0^{\pi}\sin^{n-1}\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta,$$

или, по формулѣ (18)

$$\mathfrak{J} = \frac{2^{n-1}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(n)}.$$

Переходя ко второму случаю ($k>1$, $0<n<1$), возьмемъ за интервалъ интегрированія только часть $(0,\ \alpha)$, чтобы подъинтегральная функція не могла сдѣлаться мнимою. Примѣняя подстановку $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ и замѣчая, что θ возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, когда φ измѣняется отъ 0 до α, при помощи вычисленія, совершенно аналогичнаго предыдущему, получимъ

$$\int_0^{\alpha}\frac{\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi}{(1+k\cos\varphi)^n} = \frac{1}{(k^2-1)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\cos^{-n}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,(k^2-1)^{\frac{n}{2}}}.$$

f) Покажемъ здѣсь еще пріемъ, уже примѣненный нами въ одномъ спеціальномъ случаѣ (§ 740, d), для вычисленія интеграловъ

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\mu}}\,dx, \qquad \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}}\,dx,$$

при чемъ μ обозначаетъ положительное число, меньшее 1 въ первомъ и меньшее 2 во второмъ интегралѣ. Что интегралы наши не существуютъ при другихъ значеніяхъ μ, видно, на основаніи замѣчанія § 717, a, изъ того, что при $x=0$ подъинтегральная функція обращается въ безконечность порядка μ въ первомъ, и порядка $\mu-1$ во второмъ интегралѣ. Установивъ сказанное, преобразуемъ наши интегралы въ двойные, съ помощью формулы (15), тогда получимъ

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}y^{\mu-1}e^{-xy}\cos x\,dx\,dy, \qquad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}y^{\mu-1}e^{-xy}\sin x\,dx\,dy.$$

Припоминая значенія интеграловъ

$$\int_0^{\infty}e^{-xy}\cos x\,dx = \frac{y}{1+y^2}, \qquad \int_0^{\infty}e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2},$$

найденныхъ въ одномъ изъ предыдущихъ упражненій (§ 740, j), приводимъ вышенаписанные двойные интегралы къ

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\frac{y^{\mu}\,dy}{1+y^2}, \qquad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\frac{y^{\mu-1}\,dy}{1+y^2}.$$

Между тѣмъ, принимая во вниманіе формулу (20), съ помощью подстановки $y = \operatorname{tg}\theta$, находимъ

$$\int_0^\infty \frac{y^n\,dy}{1+y^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}, \quad (-1 < n < 1).$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\,dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}}.$$

Въ частности,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

765. Въ заключеніе докажемъ одну весьма важную формулу, дозволяющую вычислить съ большою точностью значеніе $\Gamma(x)$ при x весьма большомъ. За исходную точку возьмемъ формулу, опредѣляющую функцію Γ (§ 252, а)

$$\Gamma(x+1) = \prod_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}},$$

и напишемъ, логариѳмируя обѣ части равенства:

$$\log\Gamma(x) = -\log x + \sum_1^\infty \{\, x\log(n+1) - (x-1)\log n - \log(x+n)\,\}.$$

Избавимся отъ логариѳмовъ въ правой части съ помощью формулы:

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^x dx \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-xt})\,\frac{dt}{t}.$$

Легкое вычисленіе дастъ тогда

$$\log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left\{(x-1)\,e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right\}\frac{dt}{t}. \tag{21}$$

Интегрируя затѣмъ по x въ предѣлахъ отъ x до $x+1$ и примѣняя формулу Раабе (§ 721, i) находимъ

$$x\log x - x + \log\sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left\{\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t} + \frac{e^{-xt}}{t}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Правую часть можно разложить на

$$\int_0^\infty \left\{\left(x-1-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-t}-e^{-xt})\frac{dt}{t}.$$

Слѣдовательно,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left\{\left(x-1-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Формула (21) приметъ тогда видъ

$$\log\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t}.$$

*) Докажемъ теперь слѣдующія неравенства:

(22) $$0 < \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < \frac{t}{12}.$$

Разсмотримъ функцію

$$f(x) = \frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{2n-1} + \cdots$$

и составимъ произведеніе $f^2(x)$ по правилу умноженія рядовъ. Общій членъ въ этомъ произведеніи будетъ $S_n x^{2n-2}$, гдѣ

$$S_n = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2n-5} + \cdots + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{и}\quad f^2(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} S_n x^{2n-2}$$

---

*) Конецъ этого § изложенъ на основаніи замѣчанія бывшаго ученика Чезаро, Г. Эскамара, въ итальянскомъ изданіи „Elementi“ 1905, стр. 526. Въ нѣмецкомъ и итальянскомъ оригиналахъ въ выводѣ результата была ошибка.

Легко показать, что $S_n > \frac{3}{2n+1}$. Дѣйствительно, замѣчая, что

$$\frac{1}{1(2n-1)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1}\right)$$
$$\frac{1}{3(2n-3)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n-3}\right)$$
$$\frac{1}{5(2n-5)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2n-5}\right)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\frac{1}{(2n-1)1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1}\right).$$

Путемъ сложенія получимъ

$$S_n = \frac{1}{n}\left\{1 + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1}\right\} > \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-1}{2n+1}\right) = \frac{3}{2n+1}.$$

Поэтому

$$f^2(x) > 1 + \sum_2^\infty \frac{3}{2n+1}\, x^{2n-2} = 1 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^4 + \cdots.$$

Съ другой стороны,

$$\frac{f(x)-1}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^4 + \cdots.$$

Слѣдовательно,

$$f^2(x) > \frac{3}{x^2}(f(x)-1). \tag{23}$$

Положивъ

$$x = \frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}, \text{ получимъ } \frac{1+x}{1-x} = e^t,$$
$$f(x) = \frac{t}{2x}, \quad t > 2x,$$

и неравенство (23) вмѣстѣ съ этимъ дастъ

$$1 < \frac{t}{2x} < 1 + \frac{t^2}{12},$$

откуда

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-t}}{1-e^{-t}} < \frac{1}{t} + \frac{t}{12}$$

и, наконецъ,

$$0 < \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < \frac{t}{12},$$

что и требовалось доказать. Поэтому можно написать

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) e^{-xt}\,\frac{dt}{t} = \frac{\theta}{12}\int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{\theta}{12x},$$

гдѣ $0<\theta<1$. Слѣдовательно,

$$\log\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12x}.$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, окончательно получимъ

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\,.\,x^{x-\frac{1}{2}}\,e^{-x+\frac{\theta}{12x}}.$$

Отсюда, въ частности, получается формула Стирлинга (§ 221), когда x равно цѣлому числу n, такъ какъ $n! = n\Gamma(n)$.

ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМЪ ИЗМѢРЕНІЯМЪ.

Длины дугъ.

766. Такъ какъ мы умѣемъ найти дифференціалъ, а слѣдовательно, и производную, длины дуги s данной кривой по нѣкоторой перемѣнной t (§§ 583, 630), то мы можемъ теперь вычислить и длину самой дуги, какъ функцію отъ t:

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt.$$

Въ частности, для плоскихъ кривыхъ, заданныхъ въ Декартовыхъ или полярныхъ координатахъ, можно принять соотвѣтственно x или θ за перемѣнную интегрированія, и написать

$$s = \int \sqrt{1+y'^2}\,dx \quad \text{или} \quad s = \int \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta.$$

767. Примѣры. а) Для астроиды, заданной уравненіемъ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, имѣемъ $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. $\sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Если начало дуги помѣщено въ точкѣ (0,), то

$$s = a^{\frac{1}{3}}\int_0^x x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \tfrac{3}{2}\,a^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}}.$$

Въ частности, $\frac{3}{2}a$ будетъ длина дуги, заключенной въ углѣ положительныхъ x и y, а потому длина всей астроиды есть $6a$.

b) Логариѳмическую кривую $y = ae^{\frac{x}{a}}$ можно изобразить уравненіями $x = a \log \operatorname{tg} \varphi$, $y = a \operatorname{tg} \varphi$. Отсюда получимъ (интегрированіемъ почастямъ или съ помощью умноженія на $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

$$s = a\int \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{\sin \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi} + a\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = a\left(\sec \varphi + \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) + \text{const.});$$

отсчитывая дугу s, напримѣръ, отъ вершины или точки наибольшей кривизны ($y = a/\sqrt{2}$), получимъ

$$s = a\left(\sec \varphi - \sqrt{\frac{3}{2}} + \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right).$$

c) Для цѣпной линіи равнаго сопротивленія, изображаемой уравненіемъ $y = -a \log \cos \frac{x}{a}$, имѣемъ $y' = \operatorname{tg} \frac{x}{a}$, слѣдовательно,

$$s = \int_0^x \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}} = a \log \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right).$$

Теперь мы можемъ найти и натуральное уравненіе кривой (§ 595, m). Стоитъ только сложить уравненія

$$e^{\frac{s}{a}} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right), \quad e^{-\frac{s}{a}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right)$$

и припомнить, что $\varrho \cos \frac{x}{a} = a$.

d) Длина дуги параболы $y^2 = 2ax$, раздѣляемой вершиной пополамъ, равна (§ 745, c)

$$s = \frac{2}{a}\int_0^y \sqrt{y^2 + a^2}\, dy = \frac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2} + a \log \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a}.$$

Напримѣръ, дуга, хорда которой дѣлится пополамъ въ фокусѣ, имѣетъ длину $= 1{,}147\ldots$ длины хорды.

e) Длина лемнискаты (сравн. съ §§ 589, m; 760, a) $r = \sqrt{\sin 2\vartheta}$ равна

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin 2\vartheta}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin \vartheta}} = 2\sqrt{2}\, F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5{,}244\ldots.$$

Точно такъ же находимъ длину дуги синусоиды между двумя послѣдовательными точками перегиба

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx = 2\sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3{,}820\ldots.$$

f) Вся длина эллипса съ полуосями a и $b = a\sqrt{1-k^2}$ или съ большою полуосью a и эксцентриситетомъ k выражается формулою

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 4a\,E(k).$$

Если обозначимъ черезъ R радіусъ круга, у котораго длина окружности равна всей длинѣ эллипса, то будемъ имѣть

$$R = \frac{2a}{\pi}E(k) = a\left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} - \frac{5k^6}{256} - \frac{175k^8}{16384} - \frac{567k^{10}}{65536} - \ldots\right).$$

Извѣстны различныя приближенныя выраженія R; но простѣйшія составляются при помощи чиселъ

$$a' = \tfrac{1}{2}(a+b),\quad b' = \sqrt{ab},\quad a'' = \tfrac{1}{2}(a'+b'),\quad b'' = \sqrt{a'b'}$$

и т. д. Если k очень мало, то, пренебрегая всѣми степенями k выше второй, можно ограничиться значеніемъ $R = a'$; но это значеніе не достаточно близко къ истинному. Если удержимъ въ разложеніи R всѣ степени k до 6-ой, то придемъ къ значеніямъ $R = 3b'' - 2b'$ или $R = \frac{1}{2}(3a' - b')$, которыя уже потому предпочтительнѣе a', что одно изъ нихъ больше, а другое меньше истиннаго. Впрочемъ, первое можно замѣнить ариѳметическимъ среднимъ обоихъ, т. е. взять $R = \frac{1}{4}(3a' - 5b' + 6b'')$, разложеніе котораго по степенямъ k совпадаетъ до 10-хъ степеней съ R и т. д. Такъ, напримѣръ, при $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, получимъ

$$a' = \frac{3}{4},\quad b' = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad b'' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}},\quad \frac{1}{4}(3a' - 5b' + 6b'') = 0{,}7709\ldots.$$

Эллиптическія таблицы (§ 759) даютъ $R = \frac{2}{\pi}E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}7709\ldots.$

g) Вся длина (§ 589, k) улитки $r = a\cos\vartheta + b$ равна

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\vartheta}\,d\vartheta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a+b)^2 - 4ab\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= 4(a+b)\,E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

Если c обозначаетъ наибольшее, а μc наименьшее изъ чиселъ a и b, то формула (11) § 758 даетъ возможность написать послѣднее выраженіе такъ:

$$8c\{E(\mu)-\tfrac{1}{2}(1-\mu^2)F(\mu)\}.$$

Напримѣръ, длина улитки съ двумя совпадающими точками изгиба ($b=2a$) равна отрѣзку, отсѣкаемому кривою на оси симметріи, умноженному на 3,341....

h) Требуется вычислить длину дуги гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ между вершиною $(a, 0)$ и какою нибудь точкою (x, y) съ положительными координатами. Замѣчая, что

$$dx=\frac{a^2y}{b^2x}dy=\frac{ay\,dy}{\sqrt{y^2+b^2}},\quad ds=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2+b^4}{b^2(y^2+b^2)}}\,dy,$$

приходимъ къ тому, чтобы положить $y=\frac{b^2\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и находимъ

$$s=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

гдѣ $k=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, т. е. эксцентриситетъ равенъ $\frac{1}{k}$. Умножая предыдущій интегралъ на $1-k^2=(1-k^2\sin^2\varphi)-k^2\cos^2\varphi$, разобьемъ его на два другихъ

$$(1-k^2)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-k^2F(k,\varphi).$$

Между тѣмъ интегрированіе по частямъ даетъ

$$(1)\quad \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\operatorname{tg}\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+F(k,\varphi)-E(k,\varphi).$$

Слѣдовательно,

$$s=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}F(k,\varphi)-\sqrt{a^2+b^2}\,E(k,\varphi)+\operatorname{tg}\varphi\cdot\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2}.$$

Вычисленіе s въ каждомъ частномъ случаѣ требуетъ употребленія таблицъ Лежандра (съ двойнымъ входомъ). Замѣтимъ, что возрастаніе s до безконечности съ приближеніемъ φ къ $\frac{\pi}{2}$, зависитъ исключительно отъ третьяго члена, который изображаетъ разстояніе отъ центра до нормали въ концѣ дуги.

i) Разсмотримъ логоциклику (§ 602, b) изображаемую уравненіемъ

$$(2)\qquad (x+y)(x^2+y^2)=2axy,$$

или въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ $r = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\cos 2\vartheta}{\cos \vartheta}$, если примемъ ось симметріи за полярную ось. Длина любой дуги, считаемой отъ вершины, равна

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\vartheta} \sqrt{\cos^2 2\vartheta + 2\sin^2 2\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta},$$

а потому вся длина петли, образуемой кривой, будетъ

$$a\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^2 2\vartheta + 2\sin^2 2\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}}{1 + \sin \varphi} d\varphi$$

$$= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Между тѣмъ изъ (1) получаемъ

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right),$$

а интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^{\varphi} \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}\right)_0^{\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\cos \varphi + \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Слѣдовательно,

$$\int_0^{\varphi} (1 - \sin \varphi) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = 1 - \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\cos \varphi + \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}{1 + \sqrt{2}} + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right).$$

Полагая, наконецъ, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, находимъ, что вся длина петли логоциклики равна

$$2a\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2} - 1) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\};$$

эта величина въ 2,489... разъ больше длины отрѣзка, отсѣкаемаго кривою на ея оси симметріи. Свойство имѣть дуги, длины которыхъ выражаются эллиптическими интегралами первыхъ двухъ видовъ, т. е. дугами коническихъ сѣченій, принадлежитъ безчисленному множеству уникурсальныхъ кривыхъ 3-го порядка. Онѣ, вмѣстѣ съ логоцикликою, образуютъ такъ называемый классъ циркулярныхъ кривыхъ 3-го порядка [1]). Всѣ эти кривыя могутъ быть изображены уравненіемъ (2), къ правой части котораго надо прибавить членъ вида $(x+y)(px+py)$; $a/\sqrt{2}$ какъ и прежде обозначаетъ разстояніе двойной точки отъ асимптоты.

j) Разсмотримъ еще кривую Вивіани (Viviani), т. е. пересѣченіе шара съ цилиндромъ, основаніе котораго есть кругъ, построенный на радіусѣ шара, какъ на діаметрѣ. Изъ уравненій кривой

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=ax$$

получаемъ

$$y^2=x(a-x), \quad z^2=a(a-x),$$

и полагаемъ $x=a\cos^2\varphi$. Ограничиваясь тою четвертью кривой, которая лежитъ въ углѣ положительныхъ координатъ, будемъ имѣть $y=a\sin\varphi\cos\varphi$, $z=a\sin\varphi$. Послѣднее уравненіе показываетъ, что φ есть широта точки (x, y, z), а изъ выраженія x вытекаетъ, что φ есть и долгота той же точки. Слѣдовательно, кривую Вивіани можно опредѣлить, какъ сферическую кривую, въ каждой точкѣ которой широта равна долготѣ. Замѣтивъ это, будемъ далѣе имѣть

$$dx=-a\sin 2\varphi\, d\varphi, \quad dy=a\cos 2\varphi\, d\varphi, \quad dz=a\cos\varphi\, d\varphi,$$

откуда, возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ $ds^2=a^2(1+\cos^2\varphi)\,d\varphi^2$. Итакъ, вся длина кривой равна

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi=4a\sqrt{2}\cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Иными словами, длина кривой Вивіани на шарѣ радіуса a равна длинѣ эллипса съ полуосями a и $a\sqrt{2}$, т. е. равна длинѣ окружности большого круга, умноженной на 1,216.... Къ тому же результату можно еще проще придти на основаніи слѣдующаго замѣчанія: если развернемъ цилиндръ на плоскости, то кривая превратится въ двѣ полныя дуги синусоиды. Обратно, чтобы построить кривую Вивіани, надо начертить пару синусоидъ $y=\pm a\sin\frac{x}{a}$ и вырѣзать изъ бумаги тотъ кусокъ, который лежитъ между двумя дугами, ограниченными однѣми и тѣми же точками перегиба. Если согнемъ этотъ кусокъ такъ, чтобы общая хорда обѣихъ дугъ сдѣлалась окружностью круга, то край бумаги превратится въ кривую Вивіани, принадлежащую шару радіуса a.

---

[1]) Salmon-Fiedler, Analytische-Geometrie der höheren ebenen Kurven, стр. 221 и слѣд.

Площади плоскихъ кривыхъ.

768. Чтобы вычислить площадь, ограниченную кривою $y=f(x)$, осью x-овъ и двумя ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ a и b, раздѣлимъ (a, b) на интервалы $h_1, h_2, \ldots, h_n$ и замѣтимъ слѣдующее: полоса, ограниченная ординатами, соотвѣтствующими концамъ интервала h_i, можетъ быть замѣнена прямоугольникомъ съ основаніемъ h_i и высотою y_i, заключающеюся между наименьшимъ и наибольшимъ изъ значеній y въ интервалѣ h_i. Искомая площадь A, слѣдовательно, всегда будетъ изображаться суммою $\sum_1^n h_i y_i$, при чемъ интервалы h_i будутъ стремиться къ нулю, а число n увеличиваться безпредѣльно; а такъ какъ при этихъ условіяхъ упомянутая сумма стремится къ предѣлу, равному интегралу отъ $y\,dx$, взятому отъ a до b, то необходимо $A=\int_a^b y\,dx$. Подобнымъ же образомъ доказывается, что площадь, ограниченная кривою $r=f(\theta)$ и двумя радіусами векторами, выражается формулою $A=\frac{1}{2}\int_a^b r^2\,d\theta$, гдѣ a и b — крайнія значенія θ. Если, далѣе, дѣло идетъ о вычисленіи площади, ограниченной сомкнутою кривою и, въ простѣйшемъ случаѣ, пересѣкающеюся съ прямыми параллельными оси y-овъ, или прямыми, выходящими изъ полюса, не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, то будемъ имѣть

$$A=\int_a^b(\beta-\alpha)\,dx, \quad A=\tfrac{1}{2}\int_a^b(\beta^2-\alpha^2)\,d\theta. \tag{3}$$

При этомъ α и β обозначаютъ наименьшее и наибольшее изъ двухъ значеній y (или r во второй формулѣ), соотвѣтствущихъ одному и тому же x (или θ), а a и b крайнія значенія перемѣнной интегрированія (обыкновенно корни уравненія $\beta-\alpha=0$). Къ этимъ формуламъ мы пришли, разлагая площадь на безконечно малые элементы перваго порядка. Но мы можемъ ее разбивать и на безконечно малые элементы второго порядка. Въ случаѣ Декартовыхъ координатъ такими элементами будутъ прямоугольники, построенные на сторонахъ dx и dy; въ случаѣ полярныхъ координатъ прямоугольники со сторонами dr и $r\,d\theta$. Тогда, на основаніи опредѣленія двойного интеграла, получается та или другая изъ формулъ

$$A=\int\int dx\,dy \quad \text{или} \quad A=\int\int r\,dr\,d\theta.$$

Послѣднія формулы заключаютъ въ себѣ формулы (3), что дѣлается очевиднымъ, если напишемъ

$$A=\int_a^b dx\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy,\quad A=\int_a^b d\theta\int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} r\,dr.$$

Онѣ общнѣе первыхъ, потому что могутъ служить для вычисленія площадей, ограниченныхъ какою угодно кривой. Впрочемъ, для системы какихъ угодно криволинейныхъ координатъ (§ 738) имѣемъ формулы

$$A=\int\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv, \tag{4}$$

при чемъ интегрированіе надо распространить на всю измѣряемую площадь и условиться выполнять отдѣльныя интегрированія въ томъ направленіи, въ которомъ соотвѣтствующія перемѣнныя возрастаютъ *).

769. Другія формулы полезны особенно въ томъ случаѣ, когда координаты x и y точекъ ограничивающей кривой заданы какъ

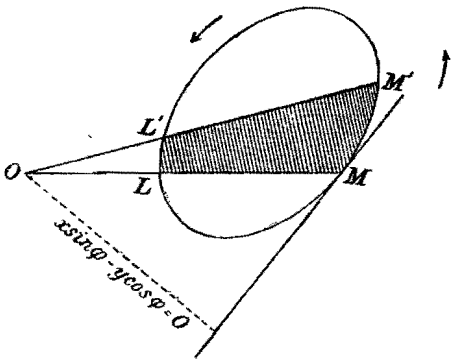


Рис. 91.

функціи одного параметра t. Мы будемъ измѣнять этотъ параметръ такимъ образомъ, чтобы при этомъ соотвѣтствующая точка, описывая кривую, оставляла влѣво отъ себя ограниченную площадь (рис. 91). За элементъ площади возьмемъ четырехугольникъ $MM'LL'$, лежащій между двумя безконечно близкими прямыми, выходящими изъ начала координатъ. Замѣчая, что

$$MM'L'L=OMM'-OLL'=OMM'+OL'L,$$

*) Т. е. такъ, чтобы du и dv всегда обозначали положительныя числа.

мы можемъ принять за положительный или отрицательный элементъ треугольникъ OMM', взятый съ принадлежащимъ ему знакомъ (ср. съ § 348, d):

$$OMM' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x+dx \\ 0 & y & y+dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Это значеніе мы получимъ также, взявъ половину произведенія основанія ds на высоту $x\sin\varphi - y\cos\varphi$. Подразумѣвая подъ x и y всегда ихъ выраженія, какъ функцій отъ независимой перемѣнной t, получимъ

$$A = \tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx). \tag{5}$$

Замѣчая еще, что значеніе интеграла отъ $x\,dy + y\,dx$, распространеннаго на какую угодно дугу кривой, равно, очевидно, разности значеній xy въ концахъ дуги, видимъ, что $\int (x\,dy + y\,dx) = 0$, если интегрированіе распространено на всю кривую. Отсюда слѣдуетъ, что A можно представить также въ одной изъ слѣдующихъ формъ:

$$A = \int x\,dy, \qquad A = -\int y\,dx. \tag{6}$$

Въ томъ же самомъ, впрочемъ, можно также убѣдиться, производя надлежащимъ образомъ интегрированія въ выраженіи $\int\int dx\,dy$. Наконецъ, если въ формулѣ (5) за перемѣнную интегрированія примемъ $t = \frac{y}{x}$, то получимъ

$$A = \tfrac{1}{2}\int x^2\,dt. \tag{7}$$

Эту формулу надо предпочесть формуламъ (6), потому что она не требуетъ, какъ тѣ, дифференцированія x и y по t, и, подобно (5), примѣнима ко всякой площади, ограниченной двумя радіусами векторами. Что же касается формулъ (6), то, чтобы примѣнить ихъ къ случаю какой угодно дуги, надо прибавить къ A или отнять отъ него разность значеній $\frac{1}{2}xy$ въ концахъ дуги. Такимъ образомъ мы снова придемъ къ той формулѣ, которую указали въ началѣ для площади между дугою кривой, прямою (осью) и перпендикулярами, опущенными изъ концовъ дуги на эту ось. Впрочемъ, формула (7) не отличается существенно отъ формулы (3), въ которую она и переходитъ, если сдѣлаемъ подстановку $t = \operatorname{tg}\theta$.

770. Примѣры. a) Вся площадь, ограниченная лемнискатою $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ равна

$$A = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\vartheta \, d\vartheta = a^2.$$

Она равна площади треугольника, составленнаго касательною въ вершинѣ и двумя касательными въ двойной точкѣ. Подобно этому найдемъ для улитки $r = a\cos\vartheta + b$

$$A = \int_0^{\pi} r^2 d\vartheta = \int_0^{\pi} (\tfrac{1}{2}a^2 + b^2 + 2ab\cos\vartheta + \tfrac{1}{2}a^2\cos 2\vartheta)\, d\vartheta = \pi(\tfrac{1}{2}a^2 + b^2).$$

Этотъ результатъ справедливъ при $b \geq a$, и, въ частности, для кардіоиды $A = \frac{3}{2}\pi a^2$. При $b < a$ найденное выраженіе изображаетъ сумму двухъ площадей, ограниченныхъ двумя петлями, внѣшнею и внутреннею; величины каждой изъ этихъ площадей выражаются формулами

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right) \pm \left\{\frac{3}{2}\, b\sqrt{a^2 - b^2} + \left(\frac{1}{2}\, a^2 + b^2\right) \arcsin\frac{b}{a}\right\}.$$

b) Для параболы $y^2 = 2ax$ имѣемъ

$$A = \int_0^x y\, dx = \frac{1}{a}\int_0^y y^2\, dy = \frac{y^3}{3a} = \frac{2}{3}xy.$$

Поэтому площадь параболическаго сегмента OMP равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника TMP (рис. 92). Отсюда легко вывести, что площадь, лежащая между дугою параболы и ея хордою, равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника, ограниченнаго хордою и касательными въ концахъ дуги. Впрочемъ, къ этому результату можно и прямо придти, повторяя приведенное въ началѣ вычисленіе, принявъ за ось y-овъ касательную, параллельную хордѣ, а за начало координатъ точку касанія. За элементъ площади можно тогда принять произведеніе $y\, dx$ на синусъ угла между координатными осями.

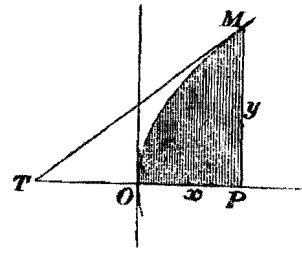


Рис. 92.

c) Для цѣпной линіи (§ 589, c) съ параметромъ a площадь, заключающаяся между дугою кривой, директрисою и двумя крайними ординатами, равна площади прямоугольника, стороны котораго равны a и длинѣ дуги. Въ самомъ дѣлѣ, если начало дуги въ вершинѣ, то

$$A = \frac{1}{2}\, a \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a^2 y' = as.$$

Слѣдовательно, для любой дуги MM'

$$A = a(s' - s) = a \cdot \text{дуга } MM'.$$

d) Положимъ, что движущаяся точка описываетъ **логариѳмическую** спираль (§ 589, e) и возвращается на тотъ же радіусъ векторъ, съ котораго она начала двигаться. Этотъ радіусъ векторъ и описанная точкою дуга ограничиваютъ площадь, величину которой легко выразить въ функціи отъ разстояній a и b отъ полюса до концовъ дуги. Дѣйствительно, если положимъ $b = ae^{2m\pi}$, то уравненіе спирали будетъ $r = ae^{m\theta}$ и

$$A = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} e^{2m\theta}\, d\theta = \frac{a^2}{4m}(e^{4m\pi} - 1) = \pi \frac{b^2 - a^2}{\log \frac{b^2}{a^2}}.$$

Если перпендикуляръ, возставленный къ хордѣ изъ ея середины, встрѣчаетъ касательныя въ концахъ дуги въ точкахъ P и Q, то площадь (равнобедреннаго) треугольника OPQ какъ разъ равна A. Полагая, что m стремится къ нулю, а b, слѣдовательно, къ a, найдемъ величину площади круга радіуса a:

$$A = \lim \frac{b+a}{2} \cdot \frac{b-a}{2m} = a^2 \lim \frac{e^{2m\pi} - 1}{2m} = \pi a^2.$$

Замѣтимъ еще, что длина PQ имѣетъ предѣломъ длину окружности этого круга.

e) Предложимъ себѣ вычислить площадь, лежащую между цѣлою дугою **циклоиды** (§ 595, n) и ея хордою (рис. 93). Помѣстимъ начало коор-

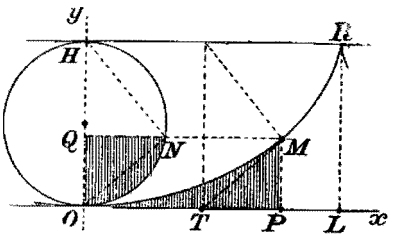


Рис. 93.

динатъ въ вершину и примемъ касательную въ ней за ось x-овъ. Пусть L и H будутъ проекціи точки возврата R на координатныя оси, а P и Q проекціи любой точки M циклоиды на тѣ же оси. Кругъ, построенный на OH, какъ на діаметрѣ, встрѣтитъ отрѣзокъ MQ въ нѣкоторой точкѣ N. Извѣстно, что касательная къ циклоидѣ въ точкѣ M параллельна ON, такъ что $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} NOx = \frac{y}{NQ}$. Слѣдовательно, площадь $OPM = \int_0^x y\,dx = \int_0^y NQ \cdot dy$, т. е. площади половины кругового сегмента ONQ. Изъ этого уже легко видѣть, что половина искомой площади получится, если отнимемъ $\frac{1}{2}\pi a^2$ отъ

площади прямоугольника $OLRH$; послѣдняя равна $OL \cdot OH = \pi a \cdot 2a = 2\pi a^2$. Слѣдовательно,

$$A = 2\,(2\,\pi a^2 - \tfrac{1}{2}\,\pi a^2) = 3\,\pi a^2,$$

т. е. искомая площадь равна тремъ площадямъ образующаго круга.

f) Вычислимъ площадь, ограниченную осью x-овъ и дугою квадратрисы $y = x \operatorname{cotg} \dfrac{x}{a}$, заключающеюся между двумя ближайшими къ началу

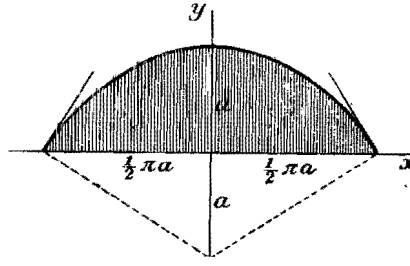


Рис. 94.

координатъ точками пересѣченія кривой съ осью x-овъ (рис. 94). Мы будемъ имѣть, очевидно,

$$A = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi a} x \cot\frac{x}{a}\,dx = 2\,a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \vartheta \cot\vartheta\,d\vartheta$$

$$= 2\,a^2\,(\vartheta \log\sin\vartheta)_0^{\frac{1}{2}\pi} - 2\,a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

На основаніи теоремы Лопиталя, съ приближеніемъ ϑ къ 0,

$$\lim\,(\vartheta \log\sin\vartheta) = -\lim\frac{\vartheta^2}{\sin\vartheta} = 0.$$

Слѣдовательно, (§ 721, d)

$$A = -\,2\,a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\sin\vartheta\,d\vartheta = \pi a^2 \log 2.$$

g) Вся площадь эллипса, съ полуосями a и b, равна

$$A = 4\,b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4\,ab \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt.$$

Вычисленіе этого интеграла очень просто (§ 727, a), но мы и его можемъ избѣжать, замѣтивъ, что при $b=a$ должно быть $A=\pi a^2$. Слѣдовательно,

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \tfrac{1}{4}\pi, \quad A=\pi ab.$$

Нѣсколько сложнѣе будетъ вычисленіе съ полярными координатами, когда полюсъ помѣщенъ въ одномъ изъ фокусовъ. Уравненіе эллипса при этомъ предположеніи будетъ

$$r=\frac{b^2}{a(1-k\cos\theta)}.$$

Но мы быстро достигнемъ цѣли, если припомнимъ (§ 764, e), что въ силу соотношенія между r, θ и эксцентрической аномаліей φ, имѣемъ $r\,d\theta = b\,d\varphi$, $r=a(1+k\cos\varphi)$. Отсюда

$$A=\int_0^{\pi} r^2\,d\theta = ab\int_0^{\pi}(1+k\cos\varphi)\,d\varphi = \pi ab.$$

h) Положимъ, что эллипсъ заданъ общимъ уравненіемъ

$$ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy=0,$$

въ которомъ всегда можно предположить, что a и b положительны и, кромѣ того,

$$ab-h^2>0, \quad D=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} < 0.$$

Если напишемъ данное уравненіе въ видѣ

$$by^2+2(hx+f)y+ax^2+2gx+c=0,$$

то замѣтимъ, что каждому значенію x соотвѣтствуетъ два значенія для y, которыя совпадаютъ въ одно при значеніяхъ $x=\alpha$ и $x=\beta>\alpha$, удовлетворяющихъ уравненію $b(ax^2+2gx+c)-(hx+f)^2=0$. Это уравненіе можно написать въ видѣ $c'x^2-2g'x+a'=0$, если обозначимъ черезъ a', b', c', . . ., h' алгебраическія дополненія элементовъ a, b, c, . . ., h въ D. Разность между двумя упомянутыми значеніями y будетъ равна

$$\frac{2}{b}\sqrt{-c'x^2+2g'x-a'} = \frac{2\sqrt{c'}}{b}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}.$$

Слѣдовательно, если положимъ $x=\alpha+(\beta-\alpha)t$, то первая изъ формулъ (3) дастъ

$$A=\frac{2\sqrt{c'}}{b}(\beta-\alpha)^2\int_0^1\sqrt{t(1-t)}\,dt.$$

Значеніе послѣдняго интеграла тотчасъ получимъ, безъ всякаго вычисленія, замѣтивъ, что онъ изображаетъ половину площади круга $y^2=x(1-x)$;

величина его, слѣдовательно, равна $\frac{1}{8}\pi$. Съ другой стороны, $\beta - \alpha = \frac{2}{c'}\sqrt{g'^2 - a'c'}$, а $a'c' - g'^2$, какъ извѣстно (§ 38), есть алгебраическое дополненіе элемента b' въ опредѣлителѣ, взаимномъ съ D, и потому $a'c' - g'^2 = bD$. Итакъ,

$$A = \frac{-\pi D}{(ab - h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Легко, впрочемъ, убѣдиться (§ 384, c), что множитель при π въ этомъ выраженіи A равенъ произведенію полуосей эллипса.

i) Площадь, ограниченную двурогомъ (§ 610, e) тотчасъ найдемъ примѣняя первую изъ формулъ (3):

$$A = 2\int_0^a \left(\frac{a^2 - x^2}{2a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a^2 - x^2}{2a + \sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx = 4\int_0^a \frac{a^2 - x^2}{3a^2 + x^2}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Послѣдній интегралъ разлагается на слѣдующія слагаемыя

$$-4a^2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + 16a^4\int_0^a \frac{dx}{(3a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}};$$

вычисляя интегралъ

$$\int \frac{dx}{(3a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2a^2\sqrt{3}} \arcsin\frac{2x}{\sqrt{3a^2 + x^2}} + C,$$

найдемъ окончательно $A = (16 - 9\sqrt{3})\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$. Итакъ, площадь A равна площади наибольшаго вписаннаго круга, умноженной на 2,13843....

j) Площадь, ограниченная астроидою $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, равна

$$A = 4\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx = 6a^2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1 - t)^{\frac{3}{2}}\, dt.$$

Замѣняя t на $1 - t$, находимъ

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1 - t)^{\frac{3}{2}}\, dt = \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1 - t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t(1 - t)}\, dt = \frac{\pi}{16}.$$

Слѣдовательно, $A = \frac{3}{8}\pi a^2$. Впрочемъ, можно общнѣе вычислить площадь

между кривою $x^n + y^n = a^n$ и положительными осями координатъ, при помощи функціи Γ:

$$A = \int_0^a (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{a^2}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}}\, dt = \frac{a^2\, \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{2\, n\, \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

Всякій разъ, когда положительное число n равно дроби съ четнымъ числителемъ и нечетнымъ знаменателемъ, кривая будетъ сомкнутая (аналогичная астроидѣ или кругу, смотря по тому, будетъ ли $n < 1$ или > 1). Она ограничиваетъ площадь, вчетверо большую предыдущей. Въ частности, при $n = 2$ и $n = \frac{2}{3}$ получаемъ $A = \pi a^2$ и $A = \frac{3}{8}\pi a^2$.

k) Чтобы вычислить площадь, ограниченную одною изъ петель кривой $x^4 = (x^2 - y^2)y$ (§ 610, b), примѣнимъ формулу (7). Мы тотчасъ найдемъ

$$A = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (t - t^3)^2\, dt = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{7}\right) = \tfrac{4}{105}.$$

Точно такъ же площадь петли Декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, равна

$$A = 9a^2 \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{(1+t^3)^2} = 3a^2 \left(\frac{1}{1+t^3}\right)_1^0 = \frac{3}{2} a^2.$$

Отсюда видно, что Декартовъ листъ дѣлитъ на двѣ равновеликія части треугольникъ, образуемый касательными въ вершинѣ и въ двойной точкѣ. Общнѣе найдемъ для кривой

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n+1)\, a x^n y^n, \text{ что } A = (n + \tfrac{1}{2})\, a^2.$$

l) Для вычисленія площадей, ограниченныхъ обѣими петлями кривой $(x^2 + y^2 - ay)^2 = 2a^2 xy$ удобнѣе прилагается вторая формула (3). Она требуетъ, чтобы уравненіе кривой было написано въ полярныхъ координатахъ $r = a(\sin\theta \pm \sqrt{\sin 2\theta})$. Всякому значенію θ между 0 и $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\, 2 = 63^\circ 26' \ldots$ соотвѣтствуютъ двѣ точки. Одна изъ нихъ описываетъ цѣлую петлю въ области отрицательныхъ x и y (и притомъ наименьшую), а другая описываетъ только нѣкоторую дугу наибольшей петли. Эта дуга дополняется другою $\left(\text{когда } \theta \text{ измѣняется отъ } \alpha \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$, которая касается оси y-овъ въ точкѣ a, и прямой $y = 2x$ въ началѣ координатъ. Отсюда слѣдуетъ, что площадь, ограниченная этою (большею) петлею, равна

$$A = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\sin\theta + \sqrt{\sin 2\theta})^2\, d\theta - \tfrac{1}{2} a^2 \int_\alpha^{\frac{1}{4}\pi} (\sin\theta - \sqrt{\sin 2\theta})\, d\theta,$$

а площадь другой петли равна

$$A' = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^\alpha (\sin\theta - \sqrt{\sin 2\theta})^2\, d\theta.$$

Поэтому

$$A - A' = 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta \sqrt{\sin 2\vartheta}\, d\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi a^2.$$

Далѣе,

$$A + A' = a^2 \int_0^{a} (\sin^2\vartheta + \sin 2\vartheta)\, d\vartheta + 2a^2 \int_a^{\frac{1}{2}\pi} \sin\vartheta \sqrt{\sin 2\vartheta}\, d\vartheta.$$

Первый интегралъ берется безъ затрудненія. Чтобы вычислить второй, беремъ за новую перемѣнную интегрированія $t = \operatorname{tg}\vartheta$. Такимъ образомъ найдемъ

$$A' = \tfrac{1}{2}a^2 (1 - \tfrac{1}{4}\log 5 - \operatorname{arc\,tg}\tfrac{1}{2}) = a^2 \cdot 0{,}06682\ldots.$$

и затѣмъ $A = A' + \frac{1}{2}\pi a^2 = a^2 \cdot 1{,}63762\cdots > 24\,A'$.

m) Разсмотримъ тѣ изъ кривыхъ (§ 602, b)

$$(x+y)(x^2 - 2k\,xy + y^2) = 2(1+k)\,a\,xy, \tag{8}$$

которыя имѣютъ только одну асимптоту ($k^2 < 1$), и предложимъ себѣ вычислить площадь, ограниченную петлею каждой изъ нихъ. Поступая такъ же, какъ въ случаѣ Декартова листа ($k = \frac{1}{2}$), получимъ

$$A = 4(1+k)^2 a^2 \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{(1+t)^2 (1 - 2kt + t^2)^2}.$$

За новую перемѣнную удобно будетъ принять $z = \dfrac{1-t}{1+t}$ и написать

$$A = \frac{1}{2}(1+k)^2 a^2 \int_0^1 \frac{(1-z^2)^2\, dz}{(1 - k + (1+k)z^2)^2}.$$

Замѣняя z на $\dfrac{z}{\sqrt{m}}$, гдѣ $m = \dfrac{1+k}{1-k}$, найдемъ

$$A = \frac{a^2}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{m}} \left(\frac{m - z^2}{1+z^2}\right)^2 dz$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{m}} \left\{ \sqrt{m} - 2(m+1) \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{1+z^2} + (m+1)^2 \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right\}.$$

Замѣчая, наконецъ, что

$$\int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{m}, \qquad \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{m} + \frac{\sqrt{m}}{m+1}\right),$$

получаемъ

$$A = \left\{ m + 3 + \frac{(m+1)(m-3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{m} \right\} \frac{a^2}{4}.$$

Въ частности, въ случаѣ Декартова листа ($m = 3$) и логоциклики ($m = 1$), имѣемъ

$$A = \tfrac{3}{2} a^2, \quad A = (1 - \tfrac{1}{4}\pi) a^2.$$

п) Къ полученному результату можно придти и съ помощью первой формулы, выведенной въ § 768, если сперва повернемъ координатныя оси на уголъ $\frac{\pi}{4}$ около начала координатъ. Уравненіе (8) приметъ простой видъ:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}},$$

и легкое вычисленіе дастъ (§ 725, m)

$$\int^{x} \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}}\, x\, dx = -\frac{1}{4}\left((m+3)\frac{a}{2} - x\sqrt{2}\right)\sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}$$

$$+ \left\{ m + 3 + \frac{(m+1)(m-3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{\frac{2}{m}}}{a + \sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}} \right\} \frac{a^2}{8}.$$

Стоитъ только положить $x = \frac{ma}{\sqrt{2}}$, чтобы найти вышеприведенное выраженіе для A. Если же положимъ $x = -a\sqrt{2}$, то получимъ величину площади A' между кривою и ея асимптотою:

$$A' = A - \frac{(m+1)(m-3)}{8\sqrt{m}} \pi a^2.$$

Для $m = 3$, $A' = A$, т. е. площадь петли Декартова листа равна площади между кривою и асимптотою ея: послѣдняя дѣлится на три равныя части касательными въ двойной точкѣ. При $m = 1$ получаемъ $A' = (1 + \frac{1}{4}\pi) a^2$, откуда $A + A' = 2a^2$, т. е. вся площадь, ограниченная логоцикликою и ея асимптотою равна учетверенной площади треугольника, образуемаго асимптотою и касательными въ двойной точкѣ. Наконецъ, при безконечномъ m имѣемъ слѣдующее: $\lim A = \infty$, $\lim A' = \frac{1}{2} a^2$. Петля стремится развернуться въ параболическую форму, т. е. стремится разложиться на двѣ безконечныя вѣтви, асимптотически расположенныя относительно параболы $y^2 = \frac{1}{2} a (x\sqrt{2} - a)$. Площадь, лежащая между кривою и ея прямолинейною асимптотою, наоборотъ, остается конечною.

о) Предложимъ себѣ вычислить часть площади эллипса, заключа-

ющуюся между двумя вѣтвями однофокусной съ нимъ равносторонней гиперболы. Уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \tag{9}$$

изображаетъ безконечное множество однофокусныхъ коническихъ сѣченій. Между ними содержится и данный эллипсъ (при $\lambda=0$). При $\lambda<b^2$ уравненіе (9) изображаетъ безчисленное множество эллипсовъ, лежащихъ внутри или внѣ даннаго, смотря по тому, будетъ ли $\lambda>0$ или <0. При $\lambda>b^2$ то же уравненіе изображаетъ безчисленное множество гиперболъ, стремящихся совпасть съ осью y-овъ съ приближеніемъ λ къ a^2. Одна изъ этихъ гиперболъ равносторонняя: она соотвѣтствуетъ значенію $\lambda=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Мы обозначимъ черезъ μ тѣ значенія λ, при которыхъ уравненіе (9) изображаетъ гиперболу. Черезъ каждую точку (x, y) разсматриваемой площади проходятъ два коническихъ сѣченія (9), а именно, одинъ эллипсъ и одна гипербола. Первый характеризуется нѣкоторымъ значеніемъ λ между 0 и b^2, другая нѣкоторымъ значеніемъ μ между $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ и a^2. Оба эти значенія будутъ корнями уравненія (9) (при данныхъ x и y), т. е. уравненія

$$(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)+(\lambda-b^2)x^2+(\lambda-a^2)y^2=0,$$

Поэтому для этихъ значеній λ и μ имѣемъ

$$\lambda+\mu=a^2+b^2-x^2-y^2,\quad \lambda\mu=a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2,$$

откуда слѣдуетъ

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}{a^2-b^2},\quad y^2=-\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{a^2-b^2},$$

и далѣе

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)}\right|=\frac{\frac{1}{4}(\mu-\lambda)}{\sqrt{-(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}.$$

Слѣдовательно, примѣняя формулу (4), получимъ

$$A=\int_0^{b^2}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}\int_{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}^{a^2}\frac{(\mu-\lambda)\,d\mu}{\sqrt{-(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}.$$

Чтобы выполнить первое интегрированіе, положимъ $\mu=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$, при чемъ θ измѣняется отъ $\frac{\pi}{4}$ до 0. Тогда тотчасъ найдемъ значеніе этого интеграла:

$$2\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-\lambda)\,d\theta=\tfrac{1}{2}\pi\{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\lambda\}+\tfrac{1}{2}(a^2-b^2),$$

вслѣдствіе чего

$$A=\frac{1}{2}\pi\int_0^{b^2}\frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}\,d\lambda+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\int_0^{b^2}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}$$

и наконецъ (§ 723, c; § 745, a)

$$A = \frac{1}{2}\pi ab + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\log\frac{a+b}{a-b}.$$

Поверхности и объемы тѣлъ вращенія.

771. Положимъ, что въ плоскости дана нѣкоторая дуга кривой; заставимъ эту дугу вращаться около прямой, лежащей въ той же плоскости. За элементъ образуемой при этомъ поверхности можно принять полосу, заключающуюся между нѣкоторымъ параллельнымъ кругомъ радіуса R и другимъ параллельнымъ кругомъ радіуса $R + dR$. Эту полосу можно разсматривать, какъ поверхность усѣченнаго конуса, образуемаго прямолинейнымъ элементомъ ds (элементомъ дуги данной кривой). Эта элементарная поверхность измѣряется произведеніемъ образующей ds на среднее ариѳметическое окружностей основаній усѣченнаго конуса, т. е. на $2\pi(R + \frac{1}{2}dR)$ или просто на $2\pi R$ (отбрасывая безконечно малое слагаемое πdR). Слѣдовательно, отбрасывая безконечно малыя высшаго порядка въ выраженіи элемента, что не измѣняетъ значенія интеграла, мы видимъ, что поверхность тѣла вращенія равна $A = 2\pi\int R\,ds$, гдѣ знакъ R всегда надо брать одинаковымъ со знакомъ ds. Точно такъ же, принимая за элементъ объема слой, лежащій между плоскостями тѣхъ же двухъ параллелей и элементомъ поверхности, можемъ его разсматривать, какъ цилиндръ съ основаніемъ πR^2 и высотою dz (проекціею ds на ось вращенія). Поэтому объемъ тѣла вращенія, ограниченнаго образуемою поверхностью и плоскостями двухъ крайнихъ параллелей будетъ равенъ $V = \pi\int R^2 dz$. При опредѣленіи предѣловъ интегрированій надо принимать во вниманіе характеръ измѣненія перемѣнной интегрированія вдоль образующей дуги PQ (рис. 95) и на знакъ дифференціала. При вычисленіи A перемѣнная s по существу своему постоянно возрастаетъ (могла бы, если угодно, постоянно убывать) отъ одного конца дуги P до другого Q; но если потребуется для выполненія интегрированія ввести новую перемѣнную, то можетъ случиться, что интегралъ надо будетъ разбить на нѣсколько другихъ, согласно замѣчаніямъ, которыя были сдѣланы раннѣе объ измѣненіи перемѣнной интегрированія (§ 724). Положимъ, напримѣръ, что PQ есть часть нѣкоторой сомкнутой кривой, и что перемѣнная z (которую вводимъ вмѣсто s) сперва возрастаетъ отъ a до c, а потомъ убываетъ

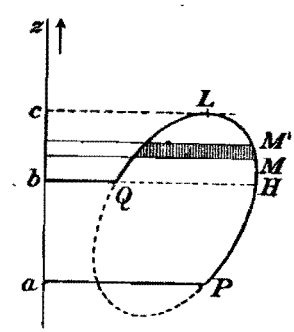


Рис. 95.

отъ c до b. Если примемъ z за новую перемѣнную интегрированія, то интегралъ $2\pi\int R\,ds$, взятый въ предѣлахъ отъ a до b перемѣнной z $\left(\text{т. е. } 2\pi\int_a^b R\frac{ds}{dz}\cdot dz\right)$, далъ бы только часть поверхности вращенія, соотвѣтствующую дугѣ PH, части дуги PQ, а искомая поверхность равна

$$A=2\pi\int_a^c R\frac{ds}{dz}\cdot dz+2\pi\int_c^b R\frac{ds}{dz}\,dz$$

(гдѣ R подъ знакомъ перваго и R подъ знакомъ второго интеграла имѣютъ различныя значенія). Первое слагаемое даетъ величину поверхности, образуемой дугою PL, второе — величину поверхности, образуемой дугою LQ; оба слагаемыя положительныя. Точно такъ же для объема V будемъ имѣть

$$V=\pi\int_a^c R^2\,dz+\pi\int_c^b R^2\,dz,$$

но здѣсь второе слагаемое отрицательно, какъ и должно быть, потому что объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ дуги LQ надо вычесть изъ объема, образуемаго дугою PL, чтобы получить объемъ тѣла, образуемаго всею дугою PLQ.

772. Примѣры. a) Поверхность, образуемая вращеніемъ астроиды около одной изъ ея касательныхъ въ точкахъ перегиба, равна

$$A=4\pi\int_{x=0}^{x=a}x\,ds=4\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\,dx=\tfrac{12}{5}\pi a^2,$$

т. е. вся поверхность равна $\frac{3}{5}$ поверхности описаннаго шара. Объемъ того же тѣла вращенія (§ 762)

$$V=2\pi\int_0^a x^2dy=3\pi a^3\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^3\,dt=3\pi a^3\frac{3!\,2^4}{9\cdot7\cdot5\cdot3}=\frac{32\pi a^3}{105}.$$

b) Поверхность катеноида, между горловымъ кругомъ и произвольною параллелью радіуса y (припоминая равенство $y\,dx=a\,ds$) равна

$$A=2\pi\int y\,ds=\frac{2\pi}{a}\int_0^x y^2dx=\frac{1}{2}\pi a\int_0^x\left(e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}+2\right)dx=\pi a(x+yy').$$

Слѣдовательно, она пропорціональна отрѣзку на оси вращенія между нормалью и плоскостью горлового круга Отсюда слѣдуетъ, что нормальные къ катеноиду конусы, вершины которыхъ лежатъ въ концахъ какого угодно отрѣзка длины b на оси, отграничиваютъ на поверхности полосу, площадь которой $A = \pi a b$. Объемъ тѣла, ограниченнаго этою полосою и плоскостями крайнихъ параллелей, равенъ

$$V = \pi \int y^2 \, dx = \tfrac{1}{2} a A = \tfrac{1}{2} \pi a^2 b.$$

c) При рѣшеніи вопросовъ, относящихся къ циклоидѣ, полезно припомнить слѣдующее (§ 770, e): если за координатныя оси возьмемъ касательную и нормаль въ вершинѣ, то угловой коэффиціентъ касательной въ данной точкѣ (x, y) будетъ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{y(2a-y)}}$, откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{2a-y}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{ds}{\sqrt{2a}}.$$

Если, напримѣръ, цѣлая дуга циклоиды вращается около касательной въ вершинѣ, то величина образуемой поверхности будетъ

$$A = 4\pi \int_0^{4a} y \, ds = 4\pi \sqrt{2a} \int_0^{2a} \sqrt{y} \, dy = \tfrac{32}{3} \pi a^2,$$

т. е. приблизительно въ 11 разъ больше площади образующаго (циклоиду) круга. Объемъ тѣла, ограниченнаго этою поверхностью и плоскостями крайнихъ параллелей, равенъ (ср. съ § 770, j)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} y^2 \, dx = 2\pi \int_0^{2a} y^{\frac{3}{2}} (2a-y)^{\frac{1}{2}} \, dy = 16\pi a^3 \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \, dt = \pi^2 a^3.$$

Если же дуга циклоиды вращается около директрисы (основанія), то получимъ вдвое большую поверхность

$$A = 4\pi \int_0^{4a} (2a-y) \, ds = 32\pi a^2 - 4\pi \int_0^{4a} y \, ds = \tfrac{64}{3} \pi a^2,$$

а объемъ V будетъ въ 5 разъ больше предыдущаго. Дѣйствительно, припоминая результаты

$$\int_0^{\pi a} y \, dx = \tfrac{1}{2} \pi a^2, \qquad \int_0^{\pi a} y^2 \, dx = \tfrac{1}{2} \pi a^3,$$

тотчасъ находимъ

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} (2a-y)^2 \, dx = 5\pi^2 a^3.$$

Если, наконецъ, дуга вращается около нормали въ вершинѣ, то прежде всего замѣтимъ, что длина всякой дуги, одинъ конецъ которой находится въ вершинѣ, равна

$$s = \sqrt{2a}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Такъ какъ, далѣе, въ точкѣ возврата $s = 4a$, $x = \pi a$, то интегрированіемъ по частямъ находимъ

$$\int_0^{4a} x\,ds = 4\pi a^2 - \int_0^{\pi a} s\,dx = 4\pi a^2 - 2\sqrt{2a}\int_0^{2a}\sqrt{2a-y}\cdot dy = 4a^2(\pi - \tfrac{4}{3}).$$

Слѣдовательно, величина образуемой поверхности равна $8\pi a^2(\pi - \frac{4}{3})$.

d) Найдемъ теперь всю поверхность сфероида (эллипсоида вращенія). Изъ уравненія меридіана имѣемъ

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \qquad ds = \sqrt{\frac{b^4 + (a^2-b^2)y^2}{b^2(b^2-y^2)}}\,dy,$$

поэтому

$$A = \frac{4\pi a}{b^2}\int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2-b^2)y^2}\,dy.$$

Если сфероидъ сжатый ($a > b$), то, положивъ $y = \dfrac{b^2 t}{\sqrt{a^2-b^2}}$, получаемъ

$$A = \frac{4\pi a b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Если эксцентриситетъ меридіана малъ (какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, для земли), то приближенно можно взять $A = 4\pi a^2(1 - \frac{1}{3}k^2)$. Въ случаѣ растянутаго сфероида, послѣ того какъ замѣнимъ a на b и наоборотъ, чтобы опять обозначить черезъ $2a$ фокальную ось, найдемъ

$$A = \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2-b^2)y^2}\,dy,$$

и, полагая $y = \dfrac{a^2 t}{\sqrt{a^2-b^2}}$, получимъ

$$A = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \sqrt{1-t^2}\,dt = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b}{a}.$$

При маломъ эксцентриситетѣ получимъ приблизительно $A = 4\pi b^2(1 + \frac{1}{2}k^2)$. Итакъ, поверхность слабо эксцентричнаго сфероида приблизительно равна поверхности шара, касающагося сфероида вдоль экватора, умноженной на $1 \mp \frac{1}{2}k^2$, смотря по тому, будетъ ли сфероидъ сжатый или растянутый.

е) Вычислимъ теперь поверхность и объемъ тора, т. е. кольца, образуемаго вращеніемъ круга около прямой, лежащей въ его плоскости. Если b есть разстояніе отъ центра круга до оси вращенія, и радіусъ круга $a < b$, то радіусъ параллели $R = b + a\cos\vartheta$ *) и $ds = a\,d\vartheta$, слѣдовательно,

$$A = 4\pi a\int_0^{\pi}(b + a\cos\vartheta)\,d\vartheta = 4\pi^2 a\,b.$$

Поверхность имѣетъ двѣ особенныя касательныя плоскости, которыя касаются поверхности вдоль параллелей и раздѣляютъ ее на внутреннюю и внѣшнюю часть. Чтобы опредѣлить поверхности каждой изъ этихъ частей, достаточно знать ихъ разность:

$$A' - A'' = 8\pi a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta = 8\pi a^2.$$

Точно такъ же, цилиндръ, опредѣляемый упомянутыми двумя параллелями раздѣляетъ кольцо на двѣ части, объемы которыхъ будутъ

$$V' = 2\pi a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(b + a\cos\vartheta)^2\cos\vartheta\,d\vartheta - 2\pi a\,b^2,$$

$$V'' = 2\pi a\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}(b + a\cos\vartheta)^2\cos\vartheta\,d\vartheta + 2\pi a\,b^2,$$

такъ что объемъ всего кольца будетъ

$$V = 2\pi a\int_0^{\pi}(b + a\cos\vartheta)^2\cos\vartheta\,d\vartheta = 4\pi a^2 b\int_0^{\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta = 2\pi^2 a^2 b.$$

Кромѣ того, имѣемъ

$$V' - V'' = 4\pi a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(b^2 + a^2\cos^2\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta - 4\pi a\,b^2 = 4\pi a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^3\vartheta\,d\vartheta = \tfrac{8}{3}\pi a^3.$$

Замѣтимъ, что половины разностей $A' - A''$ и $V' - V''$ равны соотвѣтственно поверхности и объему шара радіуса a, поэтому онѣ не измѣняются, когда кольцо будетъ постоянно расширяться, оставаясь всегда заключеннымъ между особенными касательными плоскостями, предполагая послѣднія непо-

*) ϑ — уголъ, образуемый радіусомъ круга, проведеннымъ черезъ какую нибудь точку M на окружности, съ перпендикуляромъ къ оси вращенія.

движными. Объясненіе этого факта вскорѣ (§ 774) будетъ дано. Если, наконецъ, $b < a$, то кругъ пересѣкаетъ ось вращенія и видимая поверхность будетъ

$$A = 4\pi a \int_0^{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)} (b + a\cos\theta)\, d\theta = 4\pi a b \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + 4\pi a\sqrt{a^2 - b^2},$$

а объемъ ограничиваемаго ею тѣла

$$V = 2\pi a \int_0^{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta = 2\pi a^2 b \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{2}{3}\pi(2a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Въ частномъ случаѣ, при $b = 0$, получаемъ шаръ и $A = 4\pi a^2$, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

f) Положимъ, что кардіоида $r = 2a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ вращается около своей оси симметріи. Радіусъ параллели, соотвѣтствующей данному значенію θ, будетъ $R = r\sin\theta$, элементъ дуги кардіоиды $ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$, поэтому, такъ какъ θ измѣняется вдоль кривой постоянно въ одномъ направленіи, получимъ

$$A = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

Чтобы вычислить весь объемъ тѣла, ограниченнаго данною поверхностью, удобно принять r за перемѣнную интегрированія, такъ какъ r постоянно возрастаетъ при движеніи отъ точки возврата кривой до вершины. Такъ какъ

$$\cos\theta = \frac{r - a}{a}, \qquad R = r\sin\theta = \frac{r}{a}\sqrt{2ar - r^2},$$

то тотчасъ получимъ

$$V = \frac{\pi}{a^3} \int_0^{2a} r^3 (2a - r)(2r - a)\, dr = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

Для провѣрки полезно сравнить эти результаты съ тѣми, которые получаются если разсмотримъ, напримѣръ, наименьшій описанный шаръ. Чтобы опредѣлить радіусъ R наименьшаго изъ круговъ, съ центромъ на оси симметріи, касающихся кардіоиды, достаточно замѣтить, что по условію минимума должно быть $R\, dR = 0$, а потому хорда касанія должна быть нормальна къ кардіоидѣ. Отсюда слѣдуетъ, что радіусъ параллели касанія, совпадающій съ радіусомъ R искомаго круга, равенъ максимуму $r\sin\theta$. Это будетъ при $\theta = \frac{\pi}{3}$, такъ что $r = \frac{3}{2}a$, и искомый радіусъ $R = \frac{3}{4}a\sqrt{3}$. Теперь легко констатировать, что шаръ радіуса R будетъ имѣть объемъ, нѣсколько бо́льшій объема разсматриваемаго тѣла, и то же самое справедливо и для по-

верхностей, хотя a priori въ этомъ нельзя было быть увѣреннымъ. Читатель можетъ подобнымъ же образомъ вычислить объемъ тѣла, образуемаго любою улиткою $r = a\cos\theta + b$ безъ двойной точки ($b > a$), при вращеніи кривой около оси симметріи. Онъ найдетъ $V = \frac{4}{3}\pi b\,(a^2 + b^2)$. Въ случаѣ $b < a$ это число изображаетъ величину объема, заключеннаго между поверхностями, образуемыми двумя петлями кривой; но каждая изъ этихъ петель, внутренняя и внѣшняя, ограничиваетъ тѣла, объемы которыхъ равны соотвѣтственно

$$\frac{\pi}{6a}(a-b)^4 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{6a}(a+b)^4.$$

Къ этимъ результатамъ приходимъ почти безъ вычисленія съ помощью другой формулы, которая будетъ выведена въ концѣ § 779.

Центры тяжести.

773. Разсмотримъ въ пространствѣ ансамбль точекъ, состоящій изъ точекъ куска s нѣкоторой линіи, поверхности или самого трехмѣрнаго пространства. Центромъ тяжести такого куска s называютъ точку G, координаты которой равны среднимъ значеніямъ (§ 712) координатъ точекъ самого s. Если, чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, s обозначаетъ дугу нѣкоторой линіи, то координаты ξ, η, ζ точки G опредѣляются слѣдующими уравненіями

$$\xi s = \int x\,ds, \qquad \eta s = \int y\,ds, \qquad \zeta s = \int z\,ds.$$

Такъ какъ всякое линейное преобразованіе, произведенное надъ координатами x, y, z точекъ s, повторится тождественно и надъ ξ, η, ζ, то ясно, что положеніе центра тяжести отъ выбора координатныхъ осей не зависитъ. Замѣтимъ здѣсь же, что если нѣкоторая фигура имѣетъ плоскость симметріи, то центръ тяжести ея будетъ лежать въ этой плоскости. Дѣйствительно, если примемъ эту плоскость за плоскость Oxy, то каждый элементъ $z\,ds$ интеграла, выражающаго ξ, уничтожится съ другимъ элементомъ $-z\,ds$, и ξ будетъ равно 0. Въ частности замѣтимъ, что центръ тяжести всякой плоской фигуры лежитъ въ плоскости самой фигуры и что центръ тяжести фигуры, имѣющей центръ симметріи, непремѣнно совпадаетъ съ этимъ центромъ. Наконецъ замѣтимъ еще слѣдующее: если фигура состоитъ изъ двухъ частей s_1 и s_2, центры тяжести которыхъ G_1 и G_2 извѣстны, то центръ тяжести всей фигуры дѣлитъ отрѣзокъ прямой G_1G_2 въ отношеніи, обратномъ отношенію s_1 къ s_2. Это вытекаетъ тотчасъ изъ очевидныхъ равенствъ

$$\xi s = \xi_1 s_1 + \xi_2 s_2, \ldots.$$

774. Теорема Гульдена. Возьмемъ снова формулы, выведенныя въ § 771, для поверхности или объема, образуемыхъ вращеніемъ плоской дуги s или площади σ около прямой, лежащей въ

ихъ плоскости. Если эту прямую примемъ за ось x-овъ, то упомянутыя формулы можно будетъ написать такъ:

$$A = 2\pi \int y\, ds = 2\pi\eta \cdot s, \quad V = \pi \int y^2 dx = 2\pi \int\int y\, dx\, dy = 2\pi\eta \cdot \sigma.$$

Слѣдовательно, поверхность и объемъ разсматриваемаго тѣла получимъ, если умножимъ соотвѣтственно длину или площадь образующей фигуры на окружность круга, описываемаго ихъ центромъ тяжести. Если желаемъ получить не всю поверхность или весь объемъ, а только ту часть ихъ, которая лежитъ между двумя меридіанальными плоскостями, то, очевидно, надо будетъ вмѣсто всей окружности круга взять только ту ея дугу, которая на ней ограничивается упомянутыми плоскостями. Установивъ вышесказанное, разсмотримъ теперь общнѣе дугу s или площадь σ въ плоскости, движущейся въ пространствѣ такъ, что она остается постоянно нормальною къ траекторіямъ ея точекъ. При этихъ условіяхъ, очевидно, можно разсматривать безконечно малое перемѣщеніе, плоскости, какъ вращеніе ея около ея характеристики (§ 674). Поэтому можно и элементарную поверхность или элементарный объемъ, образуемый дугой s или, соотвѣтственно, площадью σ, пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ, изобразить произведеніями длины s или площади σ на перемѣщеніи dl ихъ центра тяжести. Для конечнаго движенія такого рода будемъ поэтому имѣть

$$A = \int s\, dl = s \int dl, \quad V = \int \sigma\, dl = \sigma \int dl,$$

т. е. поверхность и объемъ тѣла, образуемаго разсматриваемою фигурою, получимъ, умножая s или σ на длину пути, пройденнаго соотвѣтствующимъ центромъ тяжести. Эти теоремы полезны при вычисленіи нѣкоторыхъ поверхностей и объемовъ, но могутъ быть приложены также и къ нахожденію положенія центровъ тяжести извѣстныхъ фигуръ.

775 Примѣры. a) Центръ тяжести дуги цѣпной линіи, симметричной относительно нормали въ вершинѣ, лежитъ на этой нормали; разстояніе его η отъ директрисы вычисляется (ср. § 772, b) изъ равенства $2\pi\eta \,.\, 2s = 2\pi ab$; слѣдовательно, $\eta = \frac{ab}{2s} = \frac{1}{2} b \operatorname{cotg} \varphi$. Итакъ, центръ тяжести G лежитъ въ серединѣ отрѣзка, образуемаго крайними нормалями на нормали въ вершинѣ, считаемаго отъ директрисы. Для опредѣленія центра тяжести G' площади, ограниченной кривою, директрисою и крайними нормалями, имѣемъ формулу $2\pi\eta \,.\, 2as = \pi a^2 b$. Поэтому $\eta = \frac{1}{4} b \operatorname{cotg} \varphi$, такъ что G' лежитъ въ серединѣ OG.

b) Центръ тяжести полной дуги циклоиды лежитъ на нормали въ

вершинѣ, въ разстояніи отъ этой вершины, равномъ

$$\eta = \frac{1}{4a}\int y ds = \frac{1}{2\sqrt{2a}}\int_0^{2a} \sqrt{y}\, dy = \frac{2}{3}a$$

Слѣдовательно, (ср. съ § 772, c) величина поверхности, образуемой вращеніемъ дуги около основанія, равна $\frac{4}{3}\pi a \cdot 8a = \frac{32}{3}\pi a^2$. Слѣдуя обратному пути, и считая извѣстнымъ, что объемъ тѣла, образуемаго вращеніемъ площади, лежащей между кривою и ея основаніемъ, равенъ $5\pi^2 a^3$, найдемъ положеніе центра тяжести этой площади слѣдующимъ образомъ: центръ тяжести лежитъ, очевидно, на нормали въ вершинѣ въ разстояніи η отъ основанія, которое получимъ, приравнивая $5\pi^2 a^3$ произведенію $2\pi\eta$ на $3\pi a^2$. Находимъ $\eta = \frac{5}{6}a$.

c) На окружности круга радіуса a возьмемъ нѣкоторую дугу LM; обозначимъ черезъ r и θ координаты центра тяжести G дуги LM, принимая центръ круга O за полюсъ и прямую OL за полярную ось. По сдѣланному въ § 773 замѣчанію мы знаемъ, что G лежитъ на прямой, дѣлящей уголъ LOM пополамъ. Далѣе, изъ опредѣленія центра тяжести находимъ

$$2a\theta \cdot r = 2\int_0^{\theta} a\cos\varphi \cdot a\, d\varphi = 2a^2 \sin\theta, \text{ т. е. } r = a\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Отсюда видно, что (§ 589, h) общее мѣсто центровъ тяжести дугъ круга, имѣющихъ общее начало въ точкѣ L, будетъ кохлеоида, вершины которой въ L, а полюсъ въ центрѣ круга. Этимъ свойствомъ кохлеоиды пользуются при черченіи построеній сводовъ (въ Архитектурѣ) *). Принимая во вниманіе то, какимъ образомъ передвигается G, когда M описываетъ окружность круга, двигаясь постоянно въ одномъ направленіи можно отдать себѣ отчетъ въ свойствахъ кохлеоиды. Далѣе, для опредѣленія центра тяжести G' кругового сектора LOM, имѣемъ

$$a^2\theta \cdot r = 2\int_0^{a}\int_0^{\theta} l\cos\varphi\, l\, dl\, d\varphi = \frac{2}{3}a^2 \sin\theta, \text{ т. е. } r = \frac{2}{3}a\frac{\sin\theta}{\theta};$$

Слѣдовательно, G' дѣлитъ отрѣзокъ OG въ отношеніи 2 къ 1.

d) Чтобы быстро найти центръ тяжести полуокружности круга радіуса a, стоитъ только замѣтить слѣдующее. Центръ тяжести, очевидно, лежитъ на радіусѣ, перпендикулярномъ къ хордѣ полуокружности. Разстояніе его η отъ центра круга получимъ, замѣчая, что произведеніе $2\pi\eta$ на πa (длину полуокружности) должно быть равно $4\pi a^2$ (поверхности шара радіуса a). Отсюда $\eta = \frac{2a}{\pi}$. Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ центръ тяжести площади полукруга, приравнивая объемъ $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ произведенію $2\pi\eta$ и $\frac{1}{2}\pi a^2$ (величину площади полукруга), мы получимъ $\eta = \frac{4a}{3\pi}$. Общнѣе, можно такимъ же путемъ найти результаты предыдущаго примѣра, если припомнимъ изъ элементарной Геометріи выраженія поверхности шарового пояса,

*) См. напр. „Cours de Construction“ N. de Vos (т. 1, стр 276).

и объема шарового сектора, образуемыхъ вращеніемъ дуги LM и площади LOM около OL, а именно $2\pi ah$ и $\frac{2}{3}\pi a^2h$, гдѣ h обозначаетъ высоту $a(1-\cos 2\theta)$.

e) Величина поверхности тора (ср. съ § 772, e), опредѣляемаго радіусомъ a образующаго круга и разстояніемъ $b(>a)$ центра круга отъ оси вращенія, равна $2\pi a.2\pi b = 4\pi^2 ab$; объемъ равенъ $\pi a^2.2\pi b = 2\pi^2 a^2 b$. Общнѣе, величина цоверхности и объемъ канала (Tubus) (§ 678, b) между двумя плоскостями, перпендикулярными къ линіи центровъ, равны $2\omega al$ и $\pi a^2 l$, гдѣ l—длина дуги линіи центровъ между упомянутыми плоскостями. Еще общнѣе, величина боковой поверхности и объемъ первоначально цилиндрическаго стержня, деформируемаго (измѣненіемъ кривизны и кручения линій центровъ тяжести) такъ, что площадь поперечнаго сѣченія сохраняется, остаются неизмѣнными при всѣхъ формахъ, принимаемыхъ стержнемъ, до тѣхъ поръ, пока онъ не приметъ, напр., форму кольца при совмѣщеніи основаній.

f) Разсмотримъ въ заключеніе клотоиду, интересную кривую, придуманную для изученія явленій диффракціи[1]) (рис. 96). Координаты точки на этой кривой изображаются интегралами Френеля

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}}d\varphi,\quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}d\varphi,$$

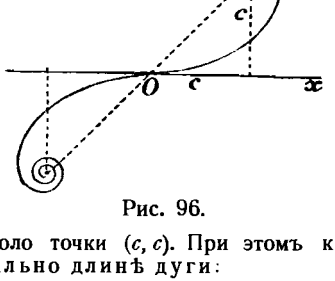


Рис. 96.

значенія которыхъ не выражаются въ конечномъ видѣ при произвольномъ φ, но извѣстны намъ при $\varphi = \infty$, а именно $x = y = c = \frac{1}{2}a\sqrt{\pi}$. Тотчасъ видимъ, что $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$, такъ что φ обозначаетъ уголъ наклоненія касательной къ оси x-овъ. Поэтому, когда φ измѣняется отъ 0 до ∞, то кривая выходитъ изъ начала координатъ, касаясь въ немъ оси x-овъ, чтобы затѣмъ асимптотически обвиваться около точки (c, c). При этомъ кривизна ея возрастаетъ пропорціонально длинѣ дуги:

$$s = a\int_0^{\varphi}\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} = a\sqrt{2\varphi},\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{s}{a^2}.$$

Форма кривой ясно показываетъ, что x и y стремятся къ предѣлу c, постоянно колеблясь около него. Но для того, чтобы видѣть расположеніе точекъ клотоиды относительно асимптотической точки Q, необходимо нужно вычислять приближенно интегралы Френеля[2]). Такъ, напр., если раздѣлить дугу OQ на безконечное число дугъ OP_1, P_1P_2, P_2P_3, ... общая длина

[1]) Cornu „Journal de Physique“ (1874, стр. 9).

[2]) Таблица значеній этихъ интегралъ помѣщена въ „Oeuvres Complètes“ Fresnel'я (т. 1, стр. 319). См. также мемуары Abria о диффракціи свѣта въ „Journal de Liouville“ (1849, стр. 248). Что касается различныхъ методовъ вычисленія этихъ интегралъ, то читатель можетъ объ этомъ прочесть въ „Leçon d'Optique physique“ Verdet (т. 1, стр. 328).

которыхъ равна $2c$, то, принявъ c за единицу, для координатъ точекъ P_1, P_2, P_3, ... найдемъ числа:

$$x = 1{,}560\ldots,\ 0{,}977\ldots,\ 1{,}212\ldots,\ 0{,}997\ldots$$

$$y = 0{,}875\ldots,\ 0{,}686\ldots,\ 0{,}991\ldots,\ 0{,}840\ldots.$$

Замѣтимъ, что P_1 есть наиболѣе удаленная отъ оси y-овъ точка, что P_2 на дугѣ P_1Q наближе къ Ox лежащая точка и т. д.

Займемся теперь опредѣленіемъ центра тяжести дуги OM клотоиды. Координаты искомаго центра тяжести, по опредѣленію, будутъ

$$\xi = \frac{1}{2}\varrho \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta}} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}\, d\psi, \qquad \eta = \frac{1}{2}\varrho \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta}} \int_0^{\vartheta} \frac{\sin\psi}{\sqrt{\psi}}\, d\psi.$$

Понимая подъ f любой изъ двухъ символовъ sin или cos, полагая $\psi = t\vartheta$ и выполнивъ интегрированіе по ϑ, найдемъ

$$\frac{1}{2}\varrho \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta}} \int_0^{\vartheta} \frac{f(\psi)}{\sqrt{\psi}} d\psi = -\tfrac{1}{2}\varrho \int_0^{\varphi} d\vartheta \int_0^{1} \frac{f'(t\vartheta)}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\varrho \int_0^{1} \frac{f'(0) - f'(t\varphi)}{t\sqrt{t}}\, dt,$$

Принимая далѣе $t\varphi$ за перемѣнную интегрированія и интегрируя по частямъ, получимъ

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{f'(0) - f'(\varphi)}{\varphi\sqrt{\varphi}} d\varphi = -a\frac{f'(0) - f'(\varphi)}{\sqrt{2\varphi}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{f(\varphi)}{\sqrt{\varphi}} d\varphi.$$

Подставляя, наконецъ, вмѣсто f по очереди cos и sin, находимъ

$$\xi = x - \varrho \sin\varphi, \quad \eta = y - \varrho(1 - \cos\varphi)$$

Итакъ, центръ тяжести дуги OM лежитъ на соприкасающемся кругѣ въ M, и притомъ на нижнемъ концѣ діаметра, перпендикулярнаго къ касательной въ O. Положимъ теперь, что G_1 и G_2 центры тяжести дугъ OM_1 и OM_2 и замѣтимъ, что на основаніи замѣчанія, сдѣланнаго въ концѣ § 773, центръ тяжести G дуги M_1M_2 находится въ такой точкѣ на прямой G_1G_2, для которой имѣетъ мѣсто пропорція

$$\frac{G_1G_2}{G_2G} = \frac{s_2 - s_1}{s_1} \text{ или } \frac{GG_1}{GG_2} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

Итакъ, центръ тяжести какой угодно дуги клотоиды есть прямой центръ подобія соприкасающихся круговъ въ концахъ дуги. Въ заключеніе сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе: если концы дуги соотвѣтствуютъ значеніямъ φ, кратнымъ отъ 2π, то центръ тяжести дуги будетъ находиться на ея хордѣ и въ частности, если одинъ изъ концовъ дуги есть начало координатъ, то центръ тяжести совпадетъ съ другимъ концомъ.

Поверхности и объемы какихъ угодно тѣлъ.

776. Поверхности. Ограничиваясь обыкновенными (встрѣчающимися на практикѣ) поверхностями, мы примемъ за очевидное, что всякая безконечно малая часть поверхности можетъ быть разсматриваема, какъ лежащая въ касательной плоскости къ поверхности въ одной изъ точекъ разсматриваемой части. Всякій элементъ $dxdy$ въ плоскости Oxy будетъ тогда ортогональною проекціею безконечно малой части поверхности, принимаемой за элементъ поверхности. Этотъ элементъ измѣряется, слѣдовательно, отношеніемъ $dxdy$ къ косинусу угла, образуемаго касательною плоскостью въ точкѣ (x,y) съ плоскостью Oxy. Поэтому величина конечной части поверхности будетъ (§ 659)

$$A=\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy. \tag{10}$$

Интегрированіе распространяется на всѣ пары значеній x и y, принадлежащія координатамъ точекъ измѣряемой части поверхности. Въ этой формулѣ заключается, какъ частный случай, выведенная въ § 771 формула для поверхностей вращенія. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, полагая $\sqrt{x^2+y^2}=R$, $z=f(R)$, имѣемъ

$$p=\frac{x}{R}f'(R),\ q=\frac{y}{R}f'(R),\ p^2+q^2=f'^2(R).$$

Переходя (въ плоскости Oxy) отъ Декартовыхъ координатъ къ полярнымъ получимъ

$$A=\int\int\sqrt{1+f'^2(R)}\,.\,Rd\theta\,dR=\int\int Rd\theta\,ds=2\pi\int Rds.$$

Однако, если хотимъ имѣть часть поверхности, ограниченную нѣкоторою сомкнутою кривою, то надо остаться при формулѣ $A=\int\int Rd\theta ds$; это значитъ, что за элементъ въ A мы беремъ величину той части поверхности, которая ограничена меридіанами θ и $\theta+d\theta$ и параллелями R и $R+dR$. Этотъ элементъ поверхности можетъ быть разсматриваемъ, какъ прямоугольникъ, сторонами котораго будутъ элементы ds и $Rd\theta$ меридіана и параллели, откуда и слѣдуетъ написанная выше формула.

777. Примѣры. а) Для вычисленія величины части поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, по формулѣ (10) получимъ $A=\int\int\frac{a}{z}\,dxdy$, гдѣ остается еще опредѣлить предѣлы интегрированій по даннымъ границамъ вычисляемой части поверхности. Если хотимъ получить всю поверхность

шара, то замѣчая, что въ углѣ положительныхъ x и y заключается восьмая ея часть, найдемъ

$$A = 8a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 4\pi a \int_0^a dx = 4\pi a^2.$$

Въ дѣйствительности, въ приложеніи къ шару предпочтительнѣе послѣдняя формула предыдущаго §, которая здѣсь приводится къ

$$A = a^2 \int\int \cos\psi \, d\varphi \, d\psi.$$

Ее можно вывести также прямо изъ формулы, данной въ началѣ, пользуясь выраженіями

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \quad y = a\sin\varphi\cos\psi, \quad z = a\sin\psi,$$

въ силу которыхъ получимъ

$$A = \int\int \frac{a}{z}\, dx\, dy = \int\int \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sin\psi} = a^2 \int\int \cos\psi \, d\varphi \, d\psi;$$

необходимо только имѣть въ виду, что элементъ интеграла долженъ быть всегда положительнымъ. Напримѣръ, при вычислеиіи всей поверхности шара, надо мѣнять перемѣнную ψ только въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ и писать

$$A = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi \, d\psi = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi a^2.$$

Если бы мы пожелали измѣнять ψ отъ 0 до π, то достаточно было бы измѣнять φ отъ 0 до π, и написать

$$A = 2a^2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |\cos\psi| \, d\psi = 4a^2 \int_0^{\pi} d\varphi = 4\pi a^2.$$

b) Предложимъ себѣ теперь измѣрить величину части поверхности того же шара, лежащей внутри кривой Вивіани (§ 767, j). Эта часть поверхности проектируется на плоскость Oxy по кругу $y^2 = x(a-x)$ и симметрична относительно плоскости Oxz; слѣдовательно

$$A = 2a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 2a \int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx.$$

Обозначая черезъ θ тотъ arcus, который находится подъ знакомъ интеграла, имѣемъ $x = a\,\mathrm{tg}^2\theta$ и интегрированіе по частямъ (§ 723, d) дастъ

$$\int \theta\, dx = \theta x - a\int \mathrm{tg}^2\theta\, d\theta = \frac{a}{\cos^2\theta}(\theta - \sin\theta\cos\theta).$$

Такъ какъ θ измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{4}$, когда x измѣняется отъ 0 до a, то получится $A = (\pi - 2)a^2$. Гораздо скорѣе придемъ къ этому результату, примѣняя полярныя координаты

$$A = 2a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi\, d\psi = 2a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1 - \sin\varphi)\, d\varphi = (\pi - 2)a^2.$$

c) Попытаемся вычислить величину всей поверхности эллипсоида. Изъ уравненія $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, находимъ

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}, \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{c^2}{z^2}\left(1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - \frac{\eta^2 y^2}{b^2}\right),$$

гдѣ ε и η обозначаютъ эксцентриситеты сѣченій поверхности эллипсоида плоскостями Oxz и Oyz. Формула (10) дастъ

$$A = 8\int\int \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2} - \frac{\eta^2 y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\, dx\, dy,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на всѣ пары значеній x и y, удовлетворяющія неравенству $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Обозначая черезъ t стоящій подъ знакомъ интеграла радикалъ, легко находимъ

$$(t^2 - \varepsilon^2)\frac{x^2}{a^2} + (t^2 - \eta^2)\frac{y^2}{b^2} = t^2 - 1,$$

что наводитъ на мысль положить

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \varepsilon^2}}\cos\theta, \qquad \frac{y}{b} = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \eta^2}}\sin\theta,$$

гдѣ θ измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, а t отъ 1 до ∞. Принимая θ и t за новыя перемѣнныя интегрированія, преобразуемъ предыдущій интегралъ (§ 737) въ слѣдующій

$$\int_1^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \theta)}\right| t\, dt\, d\theta.$$

Въ то же время замѣтимъ, что если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ обозначаютъ радикалы, входящіе въ выраженія x и y, то

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a\varphi'(t)\cos\vartheta, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = b\psi'(t)\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -a\varphi(t)\sin\vartheta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = b\psi(t)\cos\vartheta.$$

Поэтому

$$A = 8ab\int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\{\varphi'(t)\psi(t)\cos^2\vartheta + \varphi(t)\psi'(t)\sin^2\vartheta\}\, t\, dt\, d\vartheta,$$

если замѣтимъ, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ функціи возрастающія, а потому имѣютъ положительныя производныя. Такъ какъ интегралы отъ $\cos^2\vartheta\, d\vartheta$ и $\sin^2\vartheta\, d\vartheta$ въ предѣлахъ 0 и $\frac{\pi}{2}$ равны $\frac{\pi}{4}$ (§725, e), то будемъ имѣть

$$A = 2\pi ab\int_1^\infty\{\varphi'(t)\psi(t) + \varphi(t)\psi'(t)\}\, t\, dt,$$

и наконецъ

$$A = 2\pi ab\left\{\int_1^\infty \frac{(1-\varepsilon^2)\, t^2\, dt}{(t^2-\varepsilon^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}} + \int_1^\infty \frac{(1-\eta^2)\, t^2\, dt}{(t^2-\eta^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}}\right\}.$$

Дальше въ общемъ случаѣ мы идти не можемъ, потому что имѣемъ здѣсь эллиптическіе интегралы. Но, при $\varepsilon = \eta$, и при $\eta = 0$, мы пришли бы снова къ формуламъ (§ 772, d), относящимся къ сжатому и растянутому сфероиду. Наконецъ, если эксцентриситеты ε и η очень малы, то разложеніе въ рядъ даетъ

$$A = 4\pi ab\{1 - \tfrac{1}{6}(\varepsilon^2+\eta^2) + \cdots\},$$

и такъ какъ $c^2 = ab(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2+\eta^2) + \ldots)$, то получается [1]) приближенная формула

$$A = 4\pi ab\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\frac{1}{3}} = 4\pi\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2.$$

d) Чтобы вычислить величину поверхности эллипсоида съ достаточною точностью, надо пользоваться таблицами Лежандра (съ двойнымъ входомъ), а для этого надо сперва выразить A въ типическихъ интегралахъ F и E. Если положимъ $\varepsilon = \sin\alpha$, $\eta = k\sin\alpha$, такъ что

$$k = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} < 1, \qquad \alpha = \arccos\frac{c}{a},$$

---

[1]) О приближенномъ вычисленіи поверхности эллипсоида см. „Calcul intégral" Boussinesq'a (стр. 78) и замѣтку Peano въ „Rendiconti dei Lincei" (1890, стр. 317).

то подстановкою $t = \frac{\varepsilon}{\sin\varphi}$ преобразуемъ полученное выше выраженіе A въ слѣдующее

$$A = \frac{2\pi ab}{\sin\alpha}\left\{\cos^2\alpha\int_0^a \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \right.$$
$$\left. + (1-k^2\sin^2\alpha)\int_0^a \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right\}.$$

Мы уже имѣемъ (§ 767, h) значеніе перваго интеграла

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) - \frac{E(k,\varphi) - \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2}.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ слѣдующееe выраженіе того же интеграла:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + F(k,\varphi) - \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

откуда выводимъ

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{E(k,\varphi)}{1-k^2} - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Слѣдовательно,

$$A = \frac{2\pi ab}{\sin\alpha}\left\{\cos^2\alpha\cdot F(k,\alpha) + \sin^2\alpha\cdot E(k,\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\right\}.$$

Подставляя, наконецъ, вмѣсто k и α ихъ выраженія въ a, b, c, мы и придемъ къ формулѣ Лежандра

$$A = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left\{c^2 F\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},\ \arccos\frac{c}{a}\right) + \right.$$
$$\left. + (a^2-c^2)E\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},\ \arccos\frac{c}{a}\right)\right\}.$$

Предлагаемъ читателю, для упражненія, доказать, что при $a^2 = b^2 + c^2$, величина поверхности измѣряется числомъ $\pi a^2 + \pi b^2 E + \pi c^2 F$, гдѣ E и F полные эллиптическіе интегралы съ модулемъ $\sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\right)^4}$. Такъ, напримѣръ, при $a^2 : b^2 : c^2 = 3:2:1$, найдемъ $A = \pi a^2 \cdot 2{,}52620923\ldots$.

е) Формулою (10) можно воспользоваться, чтобы доказать[1]), что для поверхностей имѣетъ мѣсто нѣчто подобное тому, что мы замѣтили у плоскихъ кривыхъ въ § 591. А именно, если выдѣлимъ около нѣкоторой точки M на поверхности нѣкоторую часть ς, то полная кривизна K въ точкѣ M есть предѣлъ отношенія величины тѣлеснаго угла ω, образуемаго нормалями къ поверхности, проведенными въ точкахъ границы ς, къ величинѣ A поверхности самой ς, когда эта послѣдняя стремится обратиться въ точку M. Положимъ, что кривизна, предполагаемая непрерывною, будетъ положительна (чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ), и выберемъ ς столь малою, чтобы и во всѣхъ ея точкахъ K было больше нуля. Перемѣнныя x и y въ формулѣ (10) можно замѣнить перемѣнными p и q, которыя независимы, потому что (§§ 579, 691)

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = (1 + p^2 + q^2)^2 K > 0.$$

Замѣтивъ это, находимъ, что формула (10) дастъ (§ 737)

$$A = \int\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} K} = \frac{1}{\varkappa} \int\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

гдѣ $\varkappa$ обозначаетъ число, среднее между значеніями K къ точкахъ ς. Съ другой стороны, построимъ конусъ, производящія котораго параллельны нормалямъ къ поверхности, проведеннымъ вдоль границы ς. По опредѣленію, тѣлесный уголъ, заключенный между этими нормалями, измѣряется величиною поверхности ω, которую этотъ конусъ выдѣляетъ на шарѣ радіуса 1, съ центромъ въ вершинѣ конуса; а такъ какъ кривизна поверхности этого шара вездѣ равна 1, то предыдущая формула, примѣненная къ шару, дастъ

$$\omega = \int\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

при тѣхъ же предѣлахъ интегрированія. Отсюда и слѣдуетъ, что $A = \frac{\omega}{\varkappa}$. Поэтому, когда ς стремится совпасть съ точкою M, то для этой точки получимъ

$$K = \lim \varkappa = \lim \frac{\omega}{A}.$$

778. Объемы. Если требуется вычислить объемъ тѣла, ограниченнаго частью данной поверхности, прямымъ цилиндромъ, проектирующимъ границу этой части на плоскость Oxy, и самою этою плоскостью, то можно (ср. съ § 768) принять за элементъ объема V подобный же объемъ, соотвѣтствующій элементу данной поверхности. Такой элементъ объема измѣряется произведеніемъ основанія $dx\,dy$ на высоту z. Слѣдовательно, будемъ имѣть

(11) $$V = \int\int z\,dx\,dy,$$

[1]) См. также „Natürliche Geometrie“ автора, стр. 214.

гдѣ z функція отъ x и y, опредѣляемая уравненіемъ данной поверхности. Общнѣе: можно разбить какое угодно тѣло на элементы третьяго порядка $dx\,dy\,dz$ и, опираясь на опредѣленіе тройного интеграла, написать

$$V=\int\int\int dx\,dy\,dz. \tag{12}$$

При этомъ предѣлы послѣдовательныхъ интегрированій опредѣляются въ каждомъ случаѣ на основаніи формы разсматриваемаго тѣла. Если, напримѣръ, тѣло имѣетъ описанную въ началѣ этого § форму, то можно сперва при постоянномъ x и y выполнить интегрированіе dz, откуда и получается значеніе z на данной поверхности и приходимъ снова къ формулѣ (11). Можетъ также случиться, что при постоянномъ z извѣстенъ будетъ результатъ $\sigma(z)$ интегрированія $dx\,dy$, т. е. что извѣстна площадь сѣченія, произведеннаго въ разсматриваемомъ тѣлѣ плоскостью, параллельною плоскости Oxy въ разстояніи z отъ нея. Въ этомъ случаѣ вычисленіе V сводится къ простому интегрированію

$$V=\int\sigma(z)\,dz. \tag{13}$$

Такое вычисленіе сводится къ раздѣленію тѣла на элементы перваго порядка, такъ какъ $\sigma(z)\,dz$ изображаетъ объемъ слоя даннаго тѣла, лежащаго между плоскостями z и $z+dz$. Такъ мы и дѣлали въ частномъ случаѣ тѣлъ вращенія, въ которомъ $\sigma(z)=\pi R^2$. Существуетъ безчисленное множество другихъ способовъ разбиванія тѣла на безконечно малые элементы третьяго порядка. Изъ нихъ особенно надо замѣтить тотъ (§ 739, b), который получается при примѣненіи полярныхъ координатъ. Поверхности шаровъ, опредѣляемыхъ радіусами r и $r+dr$, плоскости, опредѣляемыя долготами φ и $\varphi+d\varphi$, и поверхности конусовъ, опредѣляемыя широтами ψ и $\psi+d\psi$, ограничиваютъ безконечно малое тѣло, которое можно разсматривать, какъ прямоугольный параллелепипедъ съ ребрами dr, $r|\cos\psi|d\varphi$ и $r\,d\psi$, пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ. Такимъ образомъ приходимъ къ формулѣ

$$V=\int\int\int r^2|\cos\psi|\,dr\,d\varphi\,d\psi, \tag{14}$$

которую можно вывести и аналитически изъ формулы (12) (§ 737).

779. Къ другому разложенію тѣлъ на элементы второго порядка (ср. съ § 769) приходимъ, когда дѣло идетъ о вычисленіи объема тѣла, ограниченнаго частью данной поверхности и конусомъ, образующія котораго соединяютъ точки границы этой части поверхности съ данной точкой. Если помѣстимъ начало координатъ въ вершину конуса, то естественно взять за элементъ объема объемъ

того конуса, основаніемъ котораго служитъ элементъ поверхности $\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ (§ 776). Такъ какъ объемъ этого конуса равенъ одной трети произведенія площади основанія на высоту, равную разстоянію начала координатъ отъ касательной плоскости, то мы получимъ

$$V=\tfrac{1}{3}\int\int(z-px-qy)\,dx\,dy, \tag{15}$$

при чемъ, если понадобится, измѣняютъ знакъ элемента. Если, напримѣръ, требуется вычислить объемъ тѣла между поверхностью вращенія и конусами, проектирующими два параллельныхъ круга изъ точки, лежащей на оси вращенія, то получится (§ 776) формула $V=\frac{2}{3}\pi\int R(R\,dz-z\,dR)$. Эта формула приметъ особенно простой видъ въ полярныхъ координатахъ, если полярная ось направлена по оси вращенія, а именно $V=\frac{2}{3}\pi\int r^3\,d\cos\vartheta$, которую можно вывести и изъ формулы (14). Впрочемъ, эта формула не отличается существенно отъ выведенной въ § 771 и сводится къ послѣдней, если къ объёмъ ея частямъ прибавимъ объемъ конуса, основаніемъ котораго служитъ перемѣнный параллельный кругъ радіуса R, а вершиною — полюсъ:

$$\tfrac{1}{3}\pi R^2 z=\tfrac{1}{3}\pi\int R(R\,dz+2z\,dR),$$

$$V+\tfrac{1}{3}\pi R^2 z=\pi\int R^2\,dz.$$

780 Примѣры. а) Весь объемъ эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

равенъ

$$V=8\int\int z\,dx\,dy=8c\int\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

т. е. если выпишемъ предѣлы отдѣльныхъ интегрированій

$$V=8c\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

Полагая $y=\frac{b}{a}t\sqrt{a^2-x^2}$, приведемъ внутренній интегралъ въ правой части къ

$$b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{4}\pi b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Слѣдовательно,

$$V = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Къ этому результату приводитъ и формула (15)

$$V = \frac{8}{3} c \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{4}{3}\pi bc \int_0^a dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Тѣмъ или другимъ путемъ, а также (ср. съ § 770, j) вычисляя сперва $\sigma(z)$, и примѣняя затѣмъ формулу (13), при всякомъ положительномъ числѣ n, равномъ отношенію четнаго числа къ нечетному, общнѣе найдемъ, что объемъ тѣла, ограниченнаго поверхностью

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1,$$

равенъ

$$V = 2\int_0^c \sigma(z)\, dz = \frac{4abc}{n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{2}{n}} dt = \frac{8abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Въ частности, для объема, ограниченнаго тѣлесною астроидою

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

значеніе $V = \frac{4\pi}{35} a^3$, т. е. немного больше $\frac{1}{12}$ части объема описаннаго шара.

b) Когда эллипсоидъ заданъ общимъ уравненіемъ

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1,$$

то удобнѣе прилагается формула (13), потому что плоское сѣченіе, параллельное плоскости Oxy на разстояніи z отъ нея, имѣетъ уравненіе вида

$$a'x^2 + b'y^2 + c' + 2f'y + 2g'x + 2h'xy = 0$$

и площадь его, какъ мы знаемъ (§ 770, h) равна $\sigma(z) = -\pi D'/(a'b' - h'^2)^{\frac{3}{2}}$. При постоянномъ z, изъ сравненія уравненія кривой съ уравненіемъ поверхности получается

$$a' = a, \quad b' = b, \quad h' = h, \quad f' = fz, \quad g' = gz, \quad c' = cz^2 - 1.$$

Слѣдовательно,

$$D' = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \dfrac{1}{z^2} \end{vmatrix} z^2 = z^2 D - (ab - h^2)$$

и потому

$$\sigma(z) = \frac{\pi}{\sqrt{ab - h^2}} \left(1 - \frac{z^2 D}{ab - h^2}\right), \quad \int_0^z \sigma(z)\, dz = \frac{2\pi z}{3\sqrt{ab - h^2}} + \frac{1}{3} z\sigma(z).$$

Предѣлы интегрированія въ V равны, очевидно, корнямъ уравненія $\sigma(z) = 0$ т. е. $\pm \sqrt{\dfrac{ab - h^2}{D}}$. Итакъ, $V = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{D}}$.

c) Предложимъ себѣ вычислить объемъ общей части двухъ круговыхъ цилиндровъ, оси которыхъ взаимно перпендикулярны. Пусть a будетъ радіусъ наибольшаго изъ двухъ цилиндровъ, ka — радіусъ другого. За оси y-овъ и z-овъ возьмемъ оси обоихъ цилиндровъ. Уравненія цилиндровъ будутъ $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = k^2 a^2$. Искомый объемъ будетъ

$$V = 8 \int_0^{ka} \int_0^{\sqrt{k^2 a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy = 8 \int_0^{ka} \sqrt{(a^2 - x^2)(k^2 a^2 - x^2)}\, dx,$$

или, полагая $x = ka \sin\varphi$,

$$V = 8 k^2 a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \cdot \cos\varphi \sin\varphi + \int \left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + \frac{k^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\right) \sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Выраженіе подъ знакомъ послѣдняго интеграла легко преобразуется въ

$$-2\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi + \frac{1 + k^2}{k^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} - \frac{1 - k^2}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Слѣдовательно,

$$3 k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$(1 + k^2) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi - (1 - k^2) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

и наконецъ

$$V = \tfrac{8}{3} a^3 \{ (1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k) \}.$$

Въ частности, когда цилиндры равны между собой, получимъ $V = \frac{2}{3} (2a)^3$. Въ общемъ случаѣ (§§ 756, 757) имѣемъ

$$V = 2\pi k^2 a^3 \left(1 - \frac{k^2}{8} - \frac{7 k^4}{48} - \dots\right).$$

Поэтому, когда k стремится къ нулю, V (какъ и слѣдовало ожидать) съ возрастающимъ приближеніемъ будетъ измѣряться произведеніемъ площади сѣченія $\pi k^2 a^2$ меньшаго цилиндра на длину $2a$ отрѣзка, отсѣкаемаго другимъ цилиндромъ на его оси. Наоборотъ, при k, близкомъ къ 1, объемъ V приблизительно равенъ $\frac{2}{3} k (2a)^3$.

d) Даны двѣ взаимно перпендикулярныя, но не пересѣкающіяся прямыя; разсмотримъ движеніе отрѣзка постоянной длины, опирающагося своими концами на данныя прямыя. Обозначимъ черезъ $2a$ разстояніе между данными прямыми, а черезъ α уголъ (постоянный) между двигающимся отрѣзкомъ и общимъ перпендикуляромъ къ даннымъ прямымъ; тогда длина отрѣзка будетъ $\dfrac{2a}{\cos\alpha}$. Помѣстимъ начало координатъ на общій перпендикуляръ къ даннымъ прямымъ въ одинаковомъ отъ нихъ разстояніи, а оси x-овъ и y-овъ возьмемъ соотвѣтственно параллельными этимъ прямымъ. При такомъ выборѣ осей уравненіе поверхности, образуемой движущимся отрѣзкомъ будетъ

$$\frac{x^2}{(a - z)^2} + \frac{y^2}{(a + z)^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Поэтому сѣченіе плоскостью, перпендикулярною къ оси z-овъ, будетъ эллипсъ, который при $z = 0$ обращается въ кругъ, а при $z = \pm a$ стремится обратиться въ прямолинейный отрѣзокъ, лежащій на той или другой изъ данныхъ прямыхъ. Концы обоихъ отрѣзковъ—особенныя точки поверхности. При данномъ между $-a$ и $+a$ значеніи z соотвѣтствующій эллипсъ имѣетъ полуоси $(a - z) \operatorname{tg}\alpha$ и $(a + z) \operatorname{tg}\alpha$. Такъ какъ сумма ихъ величина постоянная, то (§ 626, c) изъ этого слѣдуетъ, что огибающая проекцій всѣхъ эллипсовъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ z, на плоскость Oxy будетъ астроида. Иными словами, образуемая подвижнымъ отрѣзкомъ поверхность будетъ вся заключаться въ цилиндрѣ съ высотою $2a$, прямое сѣченіе котораго есть астроида. Четыре дуги, по которымъ эта поверхность касается боковой поверхности цилиндра, вмѣстѣ съ прямолинейными отрѣзками на данныхъ прямыхъ, образуютъ нѣчто въ родѣ тетраэдра, схематически изображающаго форму образуемаго тѣла. Такъ какъ площадь эллипса (§ 770, g), соотвѣтствующаго данному z, равна $\sigma(z) = \pi (a^2 - z^2) \operatorname{tg}^2 \alpha$, то для объема названнаго тѣла получимъ

$$V = 2\pi \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^a (a^2 - z^2)\, dz = \tfrac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

т. е. $\frac{4}{9}$ объема цилиндра, потому что этотъ послѣдній измѣряется произведеніемъ высоты $2a$ на площадь (§ 770, j) прямого сѣченія $\frac{8}{3} \pi (2a \operatorname{tg}\alpha)^2$, равнымъ $3\pi a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$.]

e) Разсмотримъ общее мѣсто точекъ, для которыхъ сумма обратныхъ величинъ разстояній отъ четырехъ боковыхъ граней правильнаго тетраэдра число постоянное. Пусть Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 обозначаютъ вершины тетраэдра, а q_i разстояніе какой угодно точки отъ

грани, противолежащей вершинѣ Q_i. Это разстояніе считается положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, лежитъ ли разсматриваемая точка отъ разсматриваемой грани съ той же стороны, что и тетраэдръ, или съ противоположной. Уравненіе поверхности будетъ

$$\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=0; \tag{16}$$

но ни одна изъ выведенныхъ выше формулъ не примѣнима къ такимъ координатамъ. Поэтому перейдемъ къ Декартовымъ координатамъ, при чемъ удобно будетъ выбрать координатныя оси слѣдующимъ образомъ: за оси x-овъ, y-овъ, z-овъ мы возьмемъ прямыя, соединяющія середины Q_0Q_1, Q_0Q_2, Q_0Q_3 соотвѣтственно съ серединами Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2. Обозначая черезъ $2a$ разстояніе между двумя противолежащими ребрами, видимъ, что координаты точекъ Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 будутъ соотвѣтственно $-a, -a, -a)$, $(-a, a, a)$ $(a, -a, a)$, $(a, a, -a)$, а поэтому

$$q_0\sqrt{3}=-x-y-z+a, \quad q_2\sqrt{3}=x-y+z+a,$$
$$q_1\sqrt{3}=-x+y+z+a, \quad q_3\sqrt{3}=x+y-z+a,$$

Уравненіе (16) преобразуется въ

$$xyz+\tfrac{1}{2}a(x^2+y^2+z^2-a^2)=0. \tag{17}$$

Мы имѣемъ, слѣдовательно, поверхность третьяго порядка. Она имѣетъ четыре двойныя точки въ углахъ тетраэдра, и видъ, такъ сказать, раздутаго тетраэдра; она касается граней куба, описаннаго около тетраэдра вдоль реберъ, и пересѣкается діагональными плоскостями этого куба по шести параболамъ. Плоское сѣченіе, параллельное плоскости Oxy въ разстояніи z отъ нея, есть эллипсъ, изображаемый уравненіемъ

$$x^2+y^2+\frac{2z}{a}xy=a^2-z^2,$$

т. е. эллипсъ, оси котораго параллельны сторонамъ Q_0Q_3, Q_1Q_2, а вершины лежатъ на двухъ изъ шести параболъ. Полуоси этого эллипса равны

$$\sqrt{a(a-z)} \text{ и } \sqrt{a(a+z)};$$

изъ того обстоятельства, что сумма ихъ квадратовъ величина постоянная можно заключить (§ 626, c), что при измѣненіи z эллипсъ передвигается и деформируется, оставаясь всегда касательнымъ къ четыремъ гранямъ куба: точки касанія описываютъ четыре ребра тетраэдра. Для того, чтобы вычислить объемъ тѣла, ограниченнаго нашею поверхностью, достаточно замѣтить, что площадь эллипса $\sigma(z)=\pi a\sqrt{a^2-z^2}$, и формула (13) дастъ

$$V=2\pi a\int_0^a\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\tfrac{1}{2}\pi^2a^3=a^3\cdot 4{,}9348022\ldots.$$

Это и есть величина всего объема, заключающаяся, очевидно, между объемомъ $\frac{8}{3}a^3$ вписаннаго тетраэдра и объемомъ $8a^3$ описаннаго куба. Замѣтимъ, что уравненіе (17) можно также написать въ видѣ

$$\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{a}+\arcsin\frac{z}{a}=\frac{1}{2}\pi, \tag{18}$$

такъ что x, y, z, a обозначаютъ стороны четырехугольника, вписаннаго въ кругъ діаметра a.

f) Мы рекомендуемъ читателю изучить болѣе общій вопросъ о поверхностяхъ, изображаемыхъ уравненіемъ (18), когда въ правой части будетъ какая угодно постоянная. Здѣсь мы ограничимся разсмотрѣніемъ той изъ этихъ поверхностей, которая соотвѣтствуетъ значенію π этой постоянной, т. е. представляетъ собою общее мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ трехъ плоскостей прямоугольной системы координатъ равны сторонамъ треугольника, вписаннаго въ кругъ діаметра a. Уравненіе этой поверхности въ алгебраическомъ видѣ будетъ

$$x^2y^2z^2+\tfrac{1}{4}a^2(x^4+y^4+z^4-2y^2z^2-2z^2x^2-2x^2y^2)=0,$$

Въ смежности съ началомъ координатъ, гдѣ членомъ шестой степени можно пренебречь по отношенію къ членамъ четвертой степени, эта поверхность уподобляется системѣ четырехъ плоскостей

$$-x^4-y^4-\cdots+2x^2y^2=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=0.$$

пересѣкающимся по тремъ парамъ перпендикулярныхъ прямыхъ, лежащихъ на поверхности. У этой поверхности четырехкратная точка въ началѣ координатъ и шесть двойныхъ прямыхъ. Вся поверхность заключена внутри куба съ ребромъ $2a$, грани котораго касаются этой поверхности по вписаннымъ въ эти грани кругамъ. Она ограничиваетъ тѣло, имѣющее видъ закругленнаго на углахъ и ребрахъ куба съ гранями, воронкообразно выдолбленными до центра. Чтобы вычислить объемъ такого тѣла, вычислимъ сперва площадь сѣченія плоскостью, параллельною одной изъ граней куба. Это сѣченіе состоитъ, какъ мы увидимъ (рис. 97), изъ двухъ равныхъ эллипсовъ съ общими осями. Эти эллипсы совпадаютъ въ одинъ кругъ, когда плоскость совпадаетъ съ гранью куба и превращаются въ одну изъ трехъ паръ ортогональныхъ отрѣзковъ, принадлежащихъ поверхности, когда плоскость сѣченія проходитъ черезъ центръ куба. Достаточно написать уравненіе поверхности въ видѣ

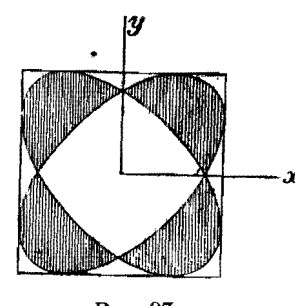


Рис. 97.

$$(x^2+y^2-z^2)^2=4x^2y^2\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right),$$

чтобы выдѣлить уравненія обоихъ эллипсовъ. Въ полярныхъ координатахъ, послѣ того какъ положимъ $z=a\cos\varphi$, можемъ написать уравненія ихъ такъ

$$r^2=\frac{a^2\cos^2\varphi}{1+\sin\varphi\sin 2\theta},\qquad r^2=\frac{a^2\cos^2\varphi}{1-\sin\varphi\sin 2\theta}.$$

Отсюда, примѣняя вторую изъ формулъ (3), находимъ, что площадь сѣченія, перпендикулярнаго къ оси z-овъ и проведеннаго въ разстояніи z отъ начала координатъ, будетъ

$$\sigma(z) = 8a^2\cos^2\varphi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin\varphi \sin 2\theta\, d\theta}{1-\sin^2\varphi \sin^2 2\theta}$$

Принявъ за перемѣнную интегрированія $t = \operatorname{tg}\varphi \cos 2\theta$, найдемъ

$$\sigma(z) = 4a^2\cos\varphi \int_0^{\operatorname{tg}\varphi} \frac{dt}{1+t^2} = 4a^2\varphi\cos\varphi.$$

Такъ какъ φ должно измѣняться отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, то иавѣрно $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi$. Теперь формула (13) даетъ

$$V = 2\int_0^a \sigma(z)\,dz = 8a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = a^3\int_0^{\pi} \varphi\sin\varphi\,d\varphi,$$

и наконецъ, съ помощью интегрированія по частямъ

$$V = a^3(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)_{\pi}^{0} = \pi a^3.$$

Этотъ объемъ не составляетъ и $\frac{2}{3}$ объема наименьшаго шара, заключающаго въ себѣ всю поверхность тѣла, шара, очевидно, концентрическаго съ этою поверхностью и касающагося ея въ 8 точкахъ, которыя будутъ точками закругленія поверхности. Подобнымъ же вычисленіемъ найдемъ, что объемъ каждой изъ вышеупомянутыхъ воронокъ равенъ $\frac{1}{4}\pi a^3$. Поэтому объемъ тѣла, похожаго на игральную кость, которое получится, когда заполнимъ и 6 этихъ воронокъ, равенъ $\frac{2}{3}\pi a^3$. Легко повѣряется, что то, что надо удалить на углахъ куба, чтобы получить разсматриваемое тѣло, составляетъ ничтожную часть всего объема куба, а именно 0,00228 ....

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ.

Уравненія съ двумя перемѣнными.

781. Задача интегрированія въ томъ видѣ, какъ мы ее до сихъ поръ разсматривали, есть лишь частный случай задачи, въ которой разыскиваются функціи отъ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, связанныхъ съ перемѣнными и производными искомыхъ функцій однимъ или нѣсколькими

соотношеніями. Такія соотношенія называются дифференціальными уравненіями и разысканіе неизвѣстныхъ функцій есть также задача интегральнаго исчисленія. Такъ, напримѣръ, въ простѣйшемъ случаѣ, которымъ мы сперва и займемся, дано дифференціальное уравненіе $f(x, y, y', y'', \ldots,) = 0$ и требуется найти всѣ функціи y, которыя тождественно удовлетворяютъ этому уравненію. Такія уравненія называются обыкновенными дифференціальными уравненіями, въ отличіе отъ уравненій въ частныхъ производныхъ, въ которыя входятъ двѣ или болѣе независимыхъ перемѣнныхъ и частныя производныя неизвѣстныхъ функцій по различнымъ перемѣннымъ. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ порядкомъ уравненія называютъ наивысшій порядокъ производныхъ, въ него входящихъ. Мы почти исключительно будемъ заниматься здѣсь уравненіями перваго порядка.

782. Общій интегралъ и частные интегралы. Предположимъ, что уравненіе $f(x, y, y') = 0$ способно опредѣлить y', какъ непрерывную функцію отъ x и y. Представимъ себѣ, что черезъ каждую точку (x, y) проведена прямая, угловой коэффиціентъ которой равенъ соотвѣтствующему значенію y'. Положимъ далѣе, что подвижная точка M, выйдя изъ нѣкотораго произвольнаго положенія M_0 проходитъ безконечно малый путь по прямой, проведенной черезъ M_0 упомянутымъ способомъ, до точки M_1, затѣмъ изъ M_1 по прямой, проведенной черезъ M_1, до точки M_2 и т. д. до безконечности; ясно, что вдоль всей описываемой такимъ образомъ кривой данное уравненіе удовлетворяется. Если гдѣ нибудь внѣ этой кривой возьмемъ другую начальную точку, то подобнымъ же образомъ можемъ построить другую кривую съ тѣмъ же свойствомъ, и слѣдовательно, выходя изъ безчисленнаго множества начальныхъ точекъ, можемъ построить безчисленное множество такихъ кривыхъ, составляющихъ семейство $F(x, y, a) = 0$. Это уравненіе, изображающее безчисленное множество кривыхъ, удовлетворяющихъ данному дифференціальному уравненію, называется общимъ интеграломъ этого уравненія, и заключаетъ въ себѣ безконечное множество частныхъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ постоянной a. Итакъ, даннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ $f(x, y, y') = 0$ точки на плоскости распредѣляются на нѣкоторыя опредѣленныя совокупности, но въ сущности, y не связывается съ x, потому что значеніемъ постоянной a въ общемъ интегралѣ можно такъ распорядиться, чтобы при данномъ по произволу значеніи x перемѣнная y приняла также произвольно заданное значеніе. Поэтому, если желаемъ опредѣлить нѣкоторую функцію y съ помощью дифференціальнаго уравненія перваго порядка, то должны еще добавить условіе, въ силу котораго, для нѣкотораго даннаго значенія x, y долженъ принять заданное значеніе. Иными словами, если x_0 и y_0 заданы по произволу, то существуетъ такая функція x отъ y, которая удовлетво-

ряетъ уравненію $f(x, y, y') = 0$ и принимаетъ значеніе y_0 при $x = x_0$. Однако, для того, чтобы эта теорема имѣла мѣсто, необходимы извѣстныя ограниченія, которыя не вытекаютъ изъ изложенныхъ выше разсужденій. Эти разсужденія даютъ намъ возможность отдать себѣ отчетъ въ существованіи и геометрическомъ значеніи общаго интеграла, но никоимъ образомъ не могутъ насъ избавить отъ строгаго аналитическаго доказательства существованія интеграла [1]). Здѣсь мы ограничимся только указаніемъ на единственность общаго интеграла, т. е. на невозможность существованія двухъ независимыхъ функцій u и v, которыя, будучи приравнены произвольной постоянной, изображали бы общій интегралъ одного и того же дифференціальнаго уравненія перваго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ изъ уравненій u=const. и v=const. должно получиться одно и то же значеніе y' (совпадающее съ тѣмъ, которое получается изъ даннаго уравненія $f(x, y, y') = 0$), то должно также быть $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$, а слѣдовательно (§ 579), между u и v должно существовать соотношеніе, въ силу котораго приравнять u или v постоянному равносильно одно другому *).

783. Особенный интегралъ. Общій интегралъ $F(x, y, a) = 0$ удовлетворяетъ уравненію $f(x, y, y') = 0$ и тогда, когда a не постоянная, а функція отъ x и y, неявно опредѣляемая уравненіемъ $F'_a(x, y, a) = 0$; дѣйствительно (ср. съ § 621), получаемое изъ него значеніе y' во второмъ предположеніи совпадаетъ съ тѣмъ, которое получится и при a постоянномъ. Особеннымъ интеграломъ и называется тотъ, который получается черезъ исключеніе a изъ уравненій $F(x, y, a) = 0$ и $F'_a(x, y, a) = 0$. Геометрически это выражается слѣдующимъ образомъ: Данное дифференціальное уравненіе удовлетворяется не только безчисленнымъ множествомъ кривыхъ, изображаемыхъ общимъ интеграломъ, но и огибающею этихъ кривыхъ, изображаемой особеннымъ интеграломъ. Поэтому обыкновенно и говорятъ, что особенный интегралъ есть огибающая безчисленнаго множества частныхъ интеграловъ. Благодаря существованію особеннаго интеграла точка, двигающаяся непрерывно такъ, что она постоянно удовлетворяетъ данному дифференціальному уравненію, не осуждена непремѣнно оставаться на опредѣленной

---

[1]) По этому вопросу надо обратиться либо къ „Lehrbuch der Analysis" Lipschitz'a (стр. 500), либо къ „Traité d'Analyse" Picard'a (т. 2, стр. 292), замѣткѣ Peano въ „Atti dell' Accademia di Torino" (1885—86, стр. 677), замѣткамъ Arzelà въ „Memorie dell' Accademia di Bologna" (1895, стр 257; 1896, стр. 131). Peano даетъ доказательство существованія интеграла подъ однимъ только условіемъ, указаннымъ въ началѣ этого параграфа.

*) Т. е. если $u = \text{const.}$, то и $v = \varphi(u) = \text{const.}$

частной кривой, а, наоборотъ, можетъ, пройдя нѣкоторую дугу огибающей, сойти затѣмъ на всякую другую частную кривую [1]).

784. Слѣдуетъ замѣтимъ, что особенный интегралъ можно получить, не выполняя какого либо интегрированія. Если лѣвая часть уравненія $f(x, y, y') = 0$ есть непрерывная функція съ непрерывными первыми производными, то особенный интегралъ получится черезъ исключеніе y' изъ уравненій $f = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, фиксируемъ одну изъ безчисленнаго множества кривыхъ, изображаемыхъ общимъ интеграломъ, и положимъ, что она касается въ точкѣ A той кривой линіи, которая изображается особеннымъ интеграломъ. Разсмотримъ другую частную кривую (изображаемую другимъ частнымъ интеграломъ), безконечно близкую къ первой, и пусть A' будетъ безконечно близкая къ A точка ея касанія съ особенною кривою (огибающею). Ясно, что обѣ частныя кривыя имѣютъ общую точку M, безконечно близкую къ A, координаты ξ и η которой стремятся къ предѣламъ x и y — координатамъ точки A, когда A' стремится къ A. Пусть η' и $\eta' + h$ будутъ угловые коэффиціенты касательныхъ въ точкѣ M къ двумъ частнымъ кривымъ, пересѣкающимся въ M. Ясно, что съ приближеніемъ A' къ A эти касательныя въ M стремятся совпасть съ касательною въ A къ особенной кривой. Слѣдовательно, одновременно будемъ имѣть $\lim \xi = x$, $\lim \eta = y$, $\lim \eta' = y'$, $\lim h = 0$. Такъ какъ точка M принадлежитъ двумъ кривымъ, удовлетворяющимъ данному дифференціальному уравненію, то должно быть $f(\xi, \eta, \eta') = 0$, $f(\xi, \eta, \eta' + h) = 0$. Второе уравненіе, будучи расположено по степенямъ h, обратится въ $f_{y'}(\xi, \eta, \eta') = 0$, если отбросимъ всѣ члены съ степенями h, начиная со второй. Слѣдовательно, въ предѣлѣ (т. е. на особенной кривой) имѣемъ $f(x, y, y') = 0$ и $f_{y'}(x, y, y') = 0$ *).

785. Что касается интегрированія дифференціальныхъ уравненій, то не существуетъ методы, примѣнимой ко всѣмъ уравненіямъ, и намъ приходится ограничиться указаніемъ нѣкоторыхъ отдѣльныхъ

---

[1]) Этимъ замѣчаніемъ, столь очевиднымъ, что указывать на него кажется даже излишнимъ, очень искусно воспользовался Boussinesq для „Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale" (Paris, Gauthier-Villars, 1878). Смотри также этюды того же автора „Sur divers points de la philosophie des sciences", стр. 82.

*) Изъ разсужденія § 784 явствуетъ, что если особенный интегралъ существуетъ, то онъ можетъ быть полученъ указаннымъ путемъ; въ противномъ случаѣ исключеніе y' изъ уравненій $f(x, y, y') = 0$ и $f_{y'}(x, y, y') = 0$ можетъ привести къ частному интегралу и даже къ функціи, вовсе не удовлетворяющей дифференціальному уравненію.

случаевъ, въ которыхъ можно помощью частныхъ пріемовъ найти общій интегралъ.

a) Если мы выведемъ изъ даннаго уравненія одно изъ возможныхъ значеній y' и подставимъ $\frac{dy}{dx}$ вмѣсто y', то придемъ къ разсмотрѣнію уравненій вида $udx+vdy=0$, гдѣ u и v данныя функціи отъ x и y. Интегрированіе выполняется непосредственно и даетъ

$$\int u\,dx + \int v\,dy = \text{const.}$$

въ томъ случаѣ, когда u функція одного x, а v функція одного y. Тогда говорятъ, что перемѣнныя отдѣлены. Отдѣленія перемѣнныхъ всегда можно достигнуть, когда u и v равны произведеніямъ функцій одного x на функціи одного y. А именно, стоитъ только раздѣлить все уравненіе на ту функцію отъ y, которая входитъ множителемъ въ u, и на ту функцію отъ x, которая входитъ въ v.

b) Перемѣнныя всегда можно отдѣлить, когда u и v однородныя функціи одной и той же степени. Дѣйствительно, полагая $y=tx$, находимъ $u=x^n\varphi(t)$, $v=x^n\psi(t)$ и уравненіе принимаетъ видъ

$$\varphi(t)\,dx+\psi(t)\,(t\,dx+x\,dt)=0.$$

Раздѣляя на x и на $\varphi+t\psi$ и интегрируя, получимъ

$$\log x+\int\frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)+t\psi(t)}=\text{const.}$$

c) Очень просто интегрируется уравненіе $f(x, y, y')=0$, если въ него не входитъ x или y. Мы предположимъ, что уравненіе не можемъ или не желаемъ рѣшать относительно y' Иначе, изъ $y'=\varphi(x)$, или $y'=\varphi(y)$ тотчасъ получили бы

$$y=\int\varphi(x)\,dx,\text{ или }\ x=\int\frac{dy}{\varphi(y)}.$$

Но зато мы предположимъ, что уравненіе можно рѣшить относительно x или y. Если, напримѣръ, $x=\varphi(y')$, то, положивъ $y'=t$, имѣемъ $y=\int t\,dx=\int\varphi'(t)\,t\,dt$. Исключеніе t изъ уравненій $x=\varphi(t)$ и $y=t\varphi(t)-\int\varphi(t)\,dt$ даетъ искомое уравненіе между x, y и c. Точно также изъ $y=\varphi(y')$, положивъ $y'=t$, получимъ

$$x=\int\frac{dy}{t}=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}$$

и т. д.

d) Уравненіе второго порядка, не содержащее x или y, легко сводится къ уравненію перваго порядка. А именно, если не входитъ y, то можно разсматривать y' какъ неизвѣстную функцію, относительно которой уравненіе будетъ уже перваго порядка; интегрированіе его, которое предполагаемъ возможнымъ, приведетъ къ уравненію $F(x, y', a) = 0$, гдѣ a произвольная постоянная. Интегрируя это уравненіе, придемъ къ искомому уравненію между x и y, которое будетъ содержать уже двѣ произвольныя постоянныя a и b. Если въ данное уравненіе не входитъ x, то стоитъ только принять y за независимую перемѣнную, разсматривать y', какъ неизвѣстную функцію отъ нея и замѣтить, что

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = y' \frac{dy'}{dy}.$$

Такимъ образомъ получается уравненіе перваго порядка, интегрированіе котораго дастъ уравненіе $F(y, y', a) = 0$ и т. д.

e) Если выраженіе y', выведенное изъ даннаго уравненія, будетъ первой степени относительно y, то уравненіе называется *линейнымъ*, и его интегрированіе всегда возможно. Дѣйствительно, положивъ $y = uv$, гдѣ u и v функціи отъ x, преобразуемъ уравненіе $y' + y\varphi(x) = f(x)$ въ $u'v + (v' + v\varphi)u = f$, и сведемъ его къ $u'v = f$, принявъ за v какую нибудь функцію, удовлетворяющую условію $v' + v\varphi = 0$. Съ помощью отдѣленія перемѣнныхъ и интегрированія найдемъ $v = e^{-\int \varphi\, dx}$. Слѣдовательно, $u' = fe^{\int \varphi\, dx}$ и наконецъ

$$y = e^{-\int \varphi\, dx} \int e^{\int \varphi\, dx} f\, dx.$$

Итакъ, нужно выполнить, какъ говорятъ, двѣ квадратуры, т. е. два простыхъ интегрированія, чтобы получить общій интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка.

f) Уравненіе Бернулли $y' + y\varphi(x) = y^n f(x)$ тотчасъ приводится къ линейному, стоитъ только раздѣлить его на y^n и принять y^{1-n} за неизвѣстную функцію.

g) Интересно уравненіе Клеро $y = xy' + f(y')$. Дифференцируя его, получимъ $\{x + f'(y')\}y'' = 0$. Поэтому послѣдовательно получаемъ $y'' = 0$, $y' = a$, $y = ax + f(a)$—это общій интегралъ. Если y'' не равно 0, то должно быть $x + f'(y') = 0$, исключая y' изъ этого и изъ даннаго уравненія, получимъ особенный интегралъ; путь, которымъ мы его здѣсь нашли, и есть тотъ, который мы указали въ § 784.

h) Уравненіе $y = x\varphi(y') + \psi(y')$, если оно не уравненіе Клеро, приводится къ линейному; дифференцируя его, получимъ

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x\varphi'(y') + \psi'(y')}{\varphi(y') - y'} = 0$$

(линейное относительно x). Интегрируя его, принявъ x за неизвѣстную функцію отъ независимой перемѣнной y', получимъ уравненіе вида $F(x, y', a) = 0$, а исключая y' изъ этого и изъ даннаго уравненія, получимъ общій интегралъ. Общнѣе, когда дано уравненіе $y = f(x, y')$, дифференцированіемъ изъ него выводимъ

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Если мы умѣемъ интегрировать это уравненіе (перваго порядка относительно y'), то, исключая y' изъ его общаго интеграла $F(x, y', a) = 0$ и даннаго уравненія, получимъ искомое соотношеніе между x, y и a.

i) Если выраженіе y', выведенное изъ даннаго уравненія перваго порядка, будетъ второй степени относительно y, то интегрированіе выполняется лишь въ совершенно исключительныхъ случаяхъ, которыми мы займемся въ слѣдующемъ параграфѣ. Здѣсь же ограничимся указаніемъ нѣкоторыхъ замѣчательныхъ свойствъ такихъ уравненій. Эти уравненія имѣютъ видъ

$$y' = y^2\varphi(x) + y\chi(x) + \psi(x)$$

и называются уравненіями Риккати (Riccati). Если какимъ нибудь путемъ найдено одно частное рѣшеніе u, то полное интегрированіе выполняется при помощи двухъ квадратуръ. Полагая $x = u - \frac{1}{z}$, приведемъ уравненіе къ линейному

$$z' + (2u\varphi + \chi)z = \varphi,$$

и, слѣдовательно, общій интегралъ будетъ

$$(1) \qquad y = u - \frac{e^{\int (2u\varphi + \chi)\,dx}}{\int e^{\int (2u\varphi + \chi)\,dx} \varphi\, dx}.$$

Если извѣстны два частныхъ рѣшенія u и v, то интегрированіе сводится къ одной квадратурѣ. Дѣйствительно, вычитая изъ даннаго уравненія тождества

$$u' = u^2\varphi + u\chi + \psi, \quad v' = v^2\varphi + v\chi + \psi,$$

получимъ уравненіе

$$\frac{d}{dx}\log(y - u) = (y + u)\varphi + \chi, \quad \frac{d}{dx}\log(y - v) = (y + v)\varphi + \chi.$$

Вычитая одно изъ этихъ уравненій изъ другого и интегрируя, найдемъ

$$\frac{y-u}{y-v} = e^{\int (u-v)\varphi\, dx}. \tag{2}$$

Если далѣе извѣстны три частныхъ рѣшенія u, v, w, то интегрированіе выполняется безъ помощи квадратуръ, потому что изъ предыдущаго соотношенія тотчасъ выводимъ

$$\frac{y-u}{y-v} : \frac{w-u}{w-v} = \text{const.}$$

Итакъ, ангармоническое отношеніе какихъ угодно четырехъ частныхъ рѣшеній уравненія Риккати есть число постоянное. Въ заключеніе укажемъ еще крайне простую форму, къ которой всегда можно привести уравненіе Риккати. Полагая

$$z = y\, e^{-\int \chi\, dx}, \quad t = -\int e^{\int \chi\, dx} \varphi\, dx$$

и принимая t за независимую перемѣнную, а z—за неизвѣстную функцію, находимъ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y' - y\chi}{e^{2\int \chi\, dx}\varphi} = -\frac{y^2\varphi + \psi}{e^{2\int \chi\, dx}\varphi} = -z^2 - \frac{\psi}{\varphi} e^{-2\int \chi\, dx},$$

и уравненіе принимаетъ видъ

$$z' + z^2 = f(t).$$

786. Примѣры. a) Чтобы проинтегрировать уравненія

$$(3x^2 - y^2)\, y\, dx - (x^2 - 3y^2)\, x\, dy = 0, \quad (x^2 - 3y^2)\, x\, dx + (3x^2 - y^2)\, y\, dy = 0,$$

достаточно (§ 785, b) положить $y = tx$ и тѣмъ преобразовать данныя уравненія въ слѣдующія:

$$\frac{dx}{x} - \frac{(1-3t^2)\, dt}{2t(1+t^2)} = 0, \quad \frac{dx}{x} + \frac{(3-t^2)\, t\, dt}{1-t^4} = 0,$$

интегрированіемъ найдемъ

$$x = \frac{a\sqrt{2}\, t}{1+t^2}, \quad x = \frac{a\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},$$

т. е. $x^2 + y^2 = a\sqrt{2xy}$, $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$,

или въ полярныхъ координатахъ $r = a\sqrt{\sin 2\theta}$, $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Интегралы перваго и второго уравненія изображаютъ, слѣдовательно (§ 589, m), безконечное множество лемнискатъ, касающихся въ полюсѣ осей или прямыхъ,

дѣлящихъ пополамъ углы между осями. Замѣтимъ, что двѣ лемнискаты, по произволу выбранныя одна въ одномъ, другая въ другомъ семействѣ, пересѣкаются внѣ полюса подъ прямымъ угломъ. Легко даже провѣрить, что оба данныя дифференціальныя уравненія выражаютъ общее свойство касательной и нормали, а именно—свойство составлять съ радіусомъ векторомъ уголъ, равный удвоенному углу наклоненія радіуса вектора къ неподвижной прямой. Эта прямая есть касательная въ полюсѣ или нормальная ось симметріи, смотря по тому, о свойствѣ касательной или о свойствѣ нормали идетъ рѣчь. Если мы такую задачу выразимъ уравненіемъ, примѣняя полярные координаты, то получимъ уравненія $r' = r \operatorname{cotg} 2\theta$, $r' = -r \operatorname{tg} 2\theta$, и интегрированіе дѣлается особенно простымъ.

b) Чтобы проинтегрировать уравненіе

$$(a x + b y + c)\, d x + (a' x + b' y + c')\, d y = 0,$$

можемъ принять за новыя перемѣнныя

$$\xi = a x + b y + c, \quad \eta = a' x + b' y + c',$$

если $a b' - b a'$ не равно 0 (иначе между ξ и η существовало бы соотношеніе). Уравненіе обращается въ

$$(b' \xi - a' \eta)\, d \xi - (b \xi - a \eta)\, d \eta = 0,$$

и для интегрированія полагаемъ $\eta = t \xi$ и т. д. Если $a b' = b a'$ и въ то же время $a c' = c a'$, то уравненіе, освобожденное отъ дѣлителя $a x + b y + c$, дастъ $a x + a' y = \text{const}$. Если же $a c' \gtrless c a'$, то можно написать

$$(a x + b y)\, d (a x + a' y) + a\, d (c x + c' y) = 0,$$

такъ что, полагая $\xi = a x + a' y$, $\eta = c x + c' y$ и принимая ξ и η за новыя перемѣнныя, получимъ уравненіе вида

$$(\alpha \xi + \beta \eta)\, d \xi + a\, d \eta = 0.$$

Для отдѣленія перемѣнныхъ достаточно ввести новую перемѣнную $z = \alpha \xi + \beta \eta$ вмѣсто η; тогда получимъ

$$(\beta z - a \alpha)\, d \xi + a\, d z = 0$$

и т. д.

c) Уравненіе $y \sin x + y' \cos x = 1$ — линейное; чтобы его интегрировать, достаточно (§ 785, e) опредѣлить какую нибудь функцію v, удовлетворяющую уравненію $v \sin x + v' \cos x = 0$, затѣмъ положить $y = u v$ и найти всѣ функціи, удовлетворяющія уравненію $v u' \cos x = 1$. Такимъ образомъ найдемъ $v = \cos x$, $u = \operatorname{tg} x + a$ и $y = \sin x + a \cos x$.

d) Если предложено уравненіе $(y - x y') \cos y' = 1 - x \sin y'$, то сперва рѣшаемъ его относительно y (§ 785, h), а затѣмъ дифференцируемъ

$$y = x (v' - \operatorname{tg} y') + \sec y', \quad x \sin y' + \frac{d x}{d y'} \cos y' = 1.$$

Разсматривая теперь x, какъ неизвѣстную функцію отъ y', находимъ

$$x = \sin y' + a \cos y'$$

и выводимъ отсюда

$$(1+a^2)\sin y' = x \pm a\sqrt{1+a^2-x^2},\ (1+a^2)\cos y' = a\,x \mp \sqrt{1+a^2-x^2}.$$

Подставляя эти результаты въ данное дифференціальное уравненіе, найдемъ общій интегралъ

$$y + x \operatorname{arc\,tg} \frac{a \pm x\sqrt{1+a^2-x^2}}{1-x^2} \pm \sqrt{1+a^2-x^2} = 0.$$

e) Аналогично интегрируется уравненіе $y = x\,y' + x^2 f(y')$, дифференцируя которое, найдемъ

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x f'(y')}{2f(y')} + \frac{1}{2f(y')} = 0,$$

откуда, положивъ $\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, получимъ

$$x = -\tfrac{1}{2}\varphi(y')\,\varphi'(y').$$

Исключая y' изъ этого и изъ даннаго уравненія, получимъ общій интегралъ.

f) Чтобы проинтегрировать уравненіе

$$(a^2-x^2)\,dy^2 + 2x\,y\,dx\,dy + (b^2-y^2)\,dx^2 = 0,$$

рѣшаемъ уравненіе относительно y и замѣчаемъ, что полученное уравненіе $y = x\,y' \pm \sqrt{a^2y'^2+b^2}$ есть уравненіе Клеро (§ 785, g). Слѣдовательно, общій интегралъ даннаго уравненія есть

$$y = c\,x \pm \sqrt{a^2c^2+b^2},\ \text{или}\ c^2(a^2-x^2) + 2\,c\,x\,y + (b^2-y^2) = 0,$$

а особенный интегралъ будетъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

g) для уравненія $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2y' = 0$ тотчасъ видимъ частное рѣшеніе $y = \frac{1}{x}$, а потому достаточно въ формулѣ (1) положить $u = \frac{1}{x}$, $\varphi = -\frac{1}{2}$, $\chi = 0$, чтобы найти общій интегралъ

$$\frac{1}{1-x\,y} + \tfrac{1}{2}\log x = \text{const.}$$

Нѣсколько общнѣе, если дано уравненіе $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2\,k\,y' = 0$, то, пробуя удовлетворить ему выраженіемъ $y = \frac{m}{x}$, найдемъ, что m должно удовлетворять условію $m^2 - 2\,k\,m + 1 = 0$; при $k^2 \gtrless 1$ получимъ такимъ образомъ два частныхъ рѣшенія

$$u = \frac{k+\sqrt{k^2-1}}{x},\quad v = \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{x},$$

а затѣмъ по формулѣ (2) и общій интегралъ

$$xy = k + \sqrt{k^2-1}\,\frac{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}} - a}{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}} + a}.$$

При $k^2 < 1$, цѣлесообразнѣе преобразовать его къ слѣдующему виду:

$$xy = k - \sqrt{1-k^2}\,\operatorname{tg}\left(a + \frac{\sqrt{1-k^2}}{2k}\log x\right).$$

Къ тому же результату (см. § 725, d) можно придти съ помощью подстановки $xy = z$, которая ведетъ къ отдѣленію перемѣнныхъ

$$\frac{dx}{x} + \frac{2k\,dz}{z^2 - 2kz + 1} = 0.$$

h) Разсмотримъ теперь вообще уравненіе Риккати, которое мы уже привели къ виду $y' + ay^2 = f(x)$ (§ 785, i). Мы укажемъ безчисленное множество случаевъ, въ которыхъ интегралъ этого уравненія выражается въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ. Эти случаи относятся къ предположенію, что $f(x)$ пропорціональна степени x; пусть $f(x) = bx^n$. Положивъ $y = uz + v$, получимъ уравненіе

$$uz' + (v' + av^2) + (u' + 2auv)z + au^2z^2 = bx^n,$$

которое приведется просто къ $z' + auz^2 = \frac{bx^n}{u}$, если u и v выберемъ такъ, чтобы онѣ удовлетворяли условіямъ $v' + av^2 = 0$, $u' + 2auv = 0$. Этимъ условіямъ удовлетворимъ, положивъ $v = \frac{1}{ax}$ и затѣмъ $u = \frac{1}{x^2}$. Слѣдовательно, преобразованное уравненіе будетъ $z' + a\frac{z^2}{x^2} = bx^{n+2}$, и приводится къ первоначальной формѣ, если положимъ $z = \frac{1}{y_1}$, $x = x_1^{\nu}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы тогда будемъ имѣть

$$\frac{dy_1}{dx_1} + \nu b y_1^2 x_1^{(n+3)\nu-1} = \nu a_1 x_1^{-(\nu+1)},$$

и стоитъ только взять $\nu = \frac{1}{n+3}$, чтобы уравненіе приняло первоначальный видъ, т. е. $\frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{n_1}$, гдѣ $a_1 = \frac{b}{n+3}$, $b_1 = \frac{a}{n+3}$, $n_1 = -\frac{n+4}{n+3}$. Представимъ себѣ теперь, что указанное преобразованіе повторяется нѣсколько разъ. Мы получимъ тогда рядъ уравненій Риккати, въ которыхъ показатель n замѣняется послѣдовательно показателями $n_1, n_2, n_3, \ldots$, которые связаны соотношеніемъ

$$n_{i+1} = -\frac{n_i + 4}{n_i + 3}, \text{ при чемъ } n_0 = n.$$

Прибавляя число 2 къ обѣимъ частямъ равенства, получимъ

$$n_{i+1}+2=\frac{n_i+2}{(n_i+2)+1},\quad \text{т. е.}\quad \frac{1}{n_{i+1}+2}=1+\frac{1}{n_i+2}.$$

Замѣняя i черезъ $i-1$, $i-2$, . . , 2, 1, 0 и складывая, находимъ

$$\frac{1}{n_i+2}=i+\frac{1}{n+2}.$$

Въ предложенномъ уравненіи перемѣнныя непосредственно отдѣляются при $n=0$. Поэтому мы можемъ утверждать, что уравненіе интегрируется, если въ рядѣ чиселъ n_1, n_2, n_3, . . . встрѣтится число, равное нулю. Слѣдовательно, оно интегрируется, если

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}=\text{цѣлому числу}.$$

Собственно говоря, нужно, чтобы $\frac{n}{2n+4}$ (число i) было цѣлымъ и положительнымъ, но въ случаѣ отрицательнаго цѣлаго числа, мы справляемся слѣдующимъ образомъ. Въ данномъ уравненіи дѣлаемъ $y=\frac{1}{y_1}$, $x=x_1^{\overline{n+1}}$. Тогда уравненіе принимаетъ видъ $\frac{dy_1}{dx_1}+a_1y_1^2=b_1x_1^{n_1}$, гдѣ $a_1=\frac{b}{n+1}$, $b_1=\frac{a}{n+1}$, $n_1=-\frac{n}{n+1}$, такъ что $\frac{n_1}{2n_1+4}=-\frac{n}{2n+4}$. Если, наконецъ, это цѣлое число не было бы конечнымъ, то потребовалось бы безконечное число преобразованій; но этотъ случай, соотвѣтствующій значенію $n=-2$, былъ только что разобранъ (см. g) инымъ путемъ.

[**Примѣчаніе.** При $n=0$, интегралъ уравненія $y'+ay^2=b$ или $dy+(ay^2-b)\,dx=0$ будетъ $x+C=\int\frac{dy}{ay^2+b}$ и выражается въ логариѳмахъ. Замѣчая, что всѣ послѣдовательныя преобразованія алгебраическія, мы видимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, т. е. когда $\frac{n}{2n+4}$ цѣлое число, уравненіе Риккати интегрируется въ алгебраическихъ и логариѳмическихъ функціяхъ].

Итакъ, резюмируя, можемъ сказать, что уравненіе $y'+ay^2=bx^n$ интегрируется при

$$-\frac{n}{4}=0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ 1\ ^*).$$

---

*) Условіе $\frac{2n+4}{n}=i=$ цѣлому числу, даетъ

$-\frac{n}{4}=\frac{i}{2i-1}$; полагая $i=0,\ -1,\ -2,\ \cdots\pm\infty,\ \cdots\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,$

и получимъ написанныя значенія.

i) Уравненіе второго порядка $y''=f(x)$ всегда можно (§ 785, d) трактовать, какъ уравненіе перваго порядка, принявъ y' за неизвѣстную функцію: $y'=\int f(x)\,dx$ съ произвольною постоянною a, содержащеюся въ выраженіи интеграла. Далѣе имѣемъ $y=\int y'\,dx=xy'-\int x\,dy'$, т. е. $y=x\int f(x)\,dx-\int xf(x)\,dx$ со второю произвольною постоянною, содержащеюся во второмъ интегралѣ, такъ что произвольная часть въ выраженіи y будетъ $ax+b$, какъ и слѣдовало ожидать. Уравненіе $y''=f(y)$ также сводится тотчасъ къ уравненію перваго порядка (§ 785, d), если напишемъ $y'dy'$ вмѣсто $y''dy$, такъ что послѣдовательно найдемъ

$$\frac{1}{2}y'^2=\int f(y)\,dy,\quad x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy}}.$$

И здѣсь имѣются двѣ произвольныя постоянныя, появляющіяся при послѣдовательныхъ интегрированіяхъ.

j) Чтобы проинтегрировать уравненіе $y''\cos y+y'^2\sin y=y'$, умножимъ все на dy и замѣнимъ $y''dy$ черезъ $y'dy'$. Тогда получимъ, освободивъ уравненіе отъ очевиднаго интеграла $y=C$, уравненіе перваго порядка

$$\frac{dy'}{dy}\cos y+y'\sin y=1,$$

которое, какъ мы уже видѣли, имѣетъ общій интегралъ $y'=\sin y+\operatorname{tg}a\cos y$. Слѣдовательно,

$$x=\int\frac{dy}{\sin y+\operatorname{tg}a\cos y}=\int\frac{\cos a\,dy}{\sin(y+a)}=a+\cos a\log\operatorname{tg}\frac{y+a}{2},$$

гдѣ a и a произвольныя постоянныя.

k) Подобнымъ же образомъ можно привести уравненіе $y''(1+yy')=y'(1+y'^2)$, къ виду

$$\frac{dy}{dy'}=\frac{1+yy'}{1+y'^2}$$

и интегрировать (§ 785, e), принявъ y' за независимую перемѣнную. Можно также сперва привести уравненіе къ виду

$$(1+y'^2)(dy-dy')=(1+yy')\,dy'-(1+y'^2)\,dy'=(y-y')\,y'dy',$$

и затѣмъ послѣдовательно вывести

$$\frac{d(y-y')}{y-y'}=\frac{y'\,dy'}{1+y'^2},\quad y=y'+k\sqrt{1+y'^2},$$

далѣе,

$$x=\int\frac{y+k\sqrt{y^2+1-k^2}}{y^2-k^2}\,dy,$$

и наконецъ,

$$x=a+k\log\left(y+\sqrt{y^2+1-k^2}\right)+\log\left(y-k\sqrt{y^2+1-k^2}\right),$$

гдѣ a и k произвольныя постоянныя. Въ частности при $k=1$, если передъ тѣмъ положимъ $a=-\log(1-k^2)$, получимъ совсѣмъ простой интегралъ

$$y=\sqrt{1+e^x}.$$

l) Уравненіе $yy'y''=y'^3+y''^2$ приводится, если примемъ y за перемѣнную независимую, къ уравненію Клеро $y'=y\frac{dy'}{dy}-\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2$, общій интегралъ даннаго уравненія найдемъ, слѣдовательно, интегрируя уравненіе $y'=ay-a^2$, а именно $y=a+be^{ax}$, гдѣ a и b произвольныя постоянныя. Но особенный интегралъ уравненія Клеро $4y'=y^2$ обнаруживаетъ еще безчисленное множество интеграловъ даннаго уравненія, а именно $(a-x)y=4$, не заключающихся въ общемъ интегралѣ.

m) Въ заключеніе покажемъ на примѣрѣ, какимъ образомъ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій можетъ служить къ разысканію замѣчательныхъ свойствъ функцій. Разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=0, \tag{3}$$

очевидно имѣющее общій интегралъ

$$F(k,\varphi)+F(k,\psi)=\text{const}. \tag{4}$$

Попытаемся теперь иначе придти къ интегралу того же уравненія. Функціи $u=\sin\varphi$, $v=\sin\psi$, разсматриваемыя, какъ функціи отъ независимой перемѣнной $x=F(k,\varphi)$ или $x=F(k,\psi)$, очевидно, имѣютъ производныя

$$u'=\cos\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \qquad v'=\cos\psi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}$$

и, слѣдовательно, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$y'^2=(1-y^2)(1-k^2y^2), \quad y''=-(1+k^2)y+2k^2y^3.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$v^2u'^2-u^2v'^2=-(u^2-v^2)(1-k^2u^2v^2),$$
$$vu''-uv''=2k^2uv(u^2-v^2),$$

а потому

$$\frac{vu''-uv''}{vu'-uv'}=-\frac{2k^2uv(uv)'}{1-k^2(uv)^2}, \qquad \frac{vu'-uv'}{1-k^2u^2v^2}=\text{const}.$$

Послѣднее уравненіе, если подставимъ въ него вмѣсто u, v, u', v' ихъ выраженія черезъ φ и ψ, принимаетъ видъ

$$\frac{\sin\varphi\cos\psi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\sin\psi\cos\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}=\text{const}. \tag{5}$$

Это уравненіе есть лишь другая форма общаго интеграла уравненія (3). Поэтому, если обозначимъ черезъ $\sin\sigma$ ту функцію отъ φ и ψ, которая написана въ лѣвой части уравненія (5), то, въ силу замѣчанія, сдѣланнаго въ концѣ § 782, можемъ утверждать, что лѣвая часть уравненія (4) есть функція отъ σ, которую обозначимъ черезъ $f(\sigma)$. Такъ какъ, далѣе, при $\psi=0$, $\sigma=\varphi$ (на основаніи уравненія (5)), то $F(k,\varphi)=f(\varphi)$. Итакъ, получается слѣдующая теорема: Если

$$F(k,\varphi)+F(k,\psi)=F(k,\sigma),$$

то σ, φ, ψ связаны уравненіемъ

$$(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\sin\sigma=\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Въ этомъ состоитъ весьма важная, открытая Эйлеромъ, теорема сложенія эллиптическихъ интеграловъ перваго вида [1]). Полезно замѣтить, что послѣднее соотношеніе можетъ быть написано еще въ слѣдующихъ формахъ:

$$\cos\sigma=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma},$$

$$\operatorname{tg}\sigma=\frac{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\operatorname{tg}\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\psi)}}.$$

Въ частности, при $k=0$ находимъ извѣстныя формулы Тригонометріи, дающія выраженія $\sin(\varphi+\psi)$, $\cos(\varphi+\psi)$, $\operatorname{tg}(\varphi+\psi)$. Замѣтимъ еще, что при $\sigma=\frac{\pi}{2}$, полагая $\varphi=\psi$, можно найти амплитуду φ, для которой $F(k,\varphi)=\frac{1}{2}F(k)$, а именно $\varphi=\operatorname{arc\,cot}\sqrt[4]{1-k^2}$. Такимъ образомъ дѣлается возможнымъ рѣшеніе одной, поставленной раньше (§ 777, d) задачи.

Геометрическія приложенія.

787. Плоскія кривыя. a) Положимъ, что ищется кривая, для которой отрѣзокъ, образуемый касательною на данной прямой, отсчитываемый отъ данной точки, есть данная функція угла между касательною и тою же прямою; условіе задачи выражается, какъ легко видѣть, уравненіемъ Клеро. Искомая кривая изображается особеннымъ интеграломъ, а общій интегралъ даетъ совокупность всѣхъ касательныхъ прямыхъ. Если, напримѣръ, желаютъ, чтобы упомянутый отрѣзокъ на оси x-овъ, считаемый отъ начала координатъ, былъ пропорціоналенъ y' — предположеніе, къ которому приводитъ вопросъ о разысканіи антиподэры (§ 627) прямой относительно данной точки — то надо будетъ интегрировать уравненіе $y=xy'-ay'^2$. Отсюда дифференцированіемъ находимъ: либо $y'=0$, откуда $y'=k$ и далѣе $y=kx-k^2a$, что даетъ семейство касательныхъ къ параболѣ $x^2=4ay$, либо $x=2ay'$, и затѣмъ $x^2=4ay$. Подобнымъ же образомъ, если ищется кривая, въ которой всѣ отрѣзки, образуемые координатными осями на касательныхъ, имѣютъ одну и ту же длину, то получается дифференціальное уравненіе $y=xy'+ay'/\sqrt{1+y'^2}$, и достаточно будетъ найти (§ 784) особенный интегралъ: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Исключеніе, которое надо произвести, чтобы придти къ этому результату, въ сущности не отличается отъ того, которое надо было бы выполнить (§ 620), рѣшая эту задачу съ точки зрѣнія теоріи огибающихъ.

b) Аналогичнымъ образомъ поступаютъ, когда вмѣсто касательной разсматривается нормаль, и дифференціальное уравненіе имѣетъ видъ $x+yy'=f(y')$. Это уравненіе можно тотчасъ рѣшить относительно y (см. § 785, h). Но можно начать и съ дифференцированія этого уравненія,

---

[1]) Объ интегралахъ (эллиптическихъ) другихъ видовъ см. Schlömilch, Comp der höh. Analysis, Томъ II, стр. 339 и слѣд.

и затѣмъ исключить y изъ полученнаго уравненія $1+y'^2+yy''=f'(y')y''$ и изъ даннаго. Такимъ путемъ придемъ къ линейному уравненію

$$y'\frac{dx}{dy'}=\frac{x}{1+y'^2}+\frac{y'f'(y')-f(y')}{1+y'^2},$$

которое умѣемъ интегрировать. Если $F(x, y', a)=0$ будетъ общій интегралъ этого уравненія, то, исключая y' изъ даннаго уравненія и уравненія $F(x, y', a)=0$, получимъ общій интегралъ даннаго. Если, напримѣръ, желаемъ найти кривую, для которой всѣ отрѣзки, образуемые осями координатъ на нормаляхъ, имѣютъ одну и ту же длину a, то придемъ къ уравненію $x+yy'=ay'/\sqrt{1+y'^2}$ и находимъ общій интегралъ черезъ исключеніе y' изъ уравненій

$$x=\frac{ay'}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1-k+\frac{1}{1+y'^2}\right),\quad y=\frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1+k-\frac{1}{1+y'^2}\right).$$

Впрочемъ, достаточно знать одну кривую, удовлетворяющую поставленному условію, чтобы знать всѣ такія кривыя, и мы можемъ ограничиться, напримѣръ, значеніемъ $k=\frac{1}{2}$. Тогда предыдущія уравненія обратятся въ слѣдующія

$$x=\frac{a}{8(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\{(1+y')^3-(1-y')^3\},\quad y=\frac{a}{8(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\{(1+y')^3+(1-y')^3\},$$

и исключеніемъ y' найдемъ

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Слѣдовательно, искомыя кривыя — кривыя параллельныя астроидѣ, вершины которой лежатъ на осяхъ; это будутъ поэтому (§ 626, e), какъ и надо было ожидать, всѣ безчисленныя эвольвенты астроиды

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

c) Положимъ, что ищется кривая, обладающая слѣдующимъ свойствомъ. Въ каждой точкѣ кривой отрѣзокъ нормали между точкою на кривой и одной изъ координатныхъ осей равенъ данной функціи отрѣзка, считаемаго отъ неподвижной точки, образуемаго нормалью на той же оси. Получаемъ уравненіе $y\sqrt{1+y'^2}=f(x+yy')$. Дифференцируя его, получимъ уравненіе, которое разбивается на два

$$(6)\qquad 1+y'^2+yy''=0,\quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=f'(x+yy').$$

Исключая y' изъ послѣдняго и изъ даннаго уравненія, находимъ особенный интегралъ, который и изображаетъ искомую кривую. Если же проинтегрируемъ первое уравненіе (6), то получится уравненіе $x+yy'=a$, и подставляя выраженіе y', взятое отсюда, въ данное уравненіе, найдемъ $(x-a)^2+y^2=f^2(a)$. Это уравненіе семейства круговъ, касающихся полученной выше кривой.

d) Если хотимъ найти плоскую кривую, для которой радіусъ кривизны въ каждой точкѣ есть данная функція отъ абсциссы точки, то должны интегрировать уравненіе $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=y''f(x)$. Здѣсь перемѣнныя тотчасъ от-

дѣляются, и получается $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{dx}{f(x)}$ и т. д. Напримѣръ, для $f(x) = \frac{a^2}{2x}$ получаемъ кривую упругости (elastische Kurve), изображаемую уравненіемъ $y = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Эта кривая есть профиль упругаго клинка (Klinge), прикрѣпленнаго однимъ концомъ и растягиваемаго нѣкоторою силою за другой конецъ.

e) Найти плоскую кривую, для которой радіусъ кривизны равенъ длинѣ нормали (т. е. отрѣзку нормали между точкою на кривой и неподвижною прямою). Уравненіе, выражающее условіе вопроса, есть

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm y\sqrt{1+y'^2}, \quad \text{т. е. } 1+y'^2 = \pm yy''.$$

Если возьмемъ знакъ —, то это уравненіе совпадаетъ съ первымъ изъ уравненій (6), и поэтому круги (съ центрами на данной прямой) принадлежатъ къ числу искомыхъ кривыхъ. При знакѣ +, получимъ $1+y'^2 = yy''$ или, умножая на dy и замѣняя $y''dy$ черезъ $y'\,dy'$,

$$\frac{dy}{y} = \frac{y'\,dy'}{1+y'^2}, \quad y = a\sqrt{1+y'^2}, \quad y = \int \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}.$$

Выбравъ начало координатъ такъ, чтобы при $x=0$ было $y=a$, найдемъ

$$x = a\log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}, \quad \text{т. е. } y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Это уравненіе цѣпной линіи.

f) Общнѣе будетъ уравненіе кривыхъ Рибокура (§ 595, k)

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ky\sqrt{1+y'^2}, \quad \text{т. е. } 1+y'^2 = kyy''.$$

Для интегрированія замѣнимъ опять $y''dy$ черезъ $y'dy'$ и получимъ

$$\frac{dy}{y} = k\frac{y'\,dy'}{1+y'^2},$$

откуда

$$y = a\,(1+y'^2)^{\frac{1}{2}k}, \quad \text{т. е. } y' = \pm\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}}.$$

Это общее уравненіе кривыхъ Рибокура. Оно приводится къ логариѳмически-алгебраической формѣ только при $\frac{k}{2}$ или $\frac{k-1}{2}$ цѣломъ (§ 751), т. е. когда k цѣлое число. При $k=-1$ и $k=1$ получаемъ опять кругъ и цѣпную линію, при $k=-2$ циклоиду, при $k=2$ параболу и т. д.

g) Еще болѣе общею будетъ задача о разысканіи кривыхъ, для которыхъ радіусъ кривизны есть данная функція отъ длины нормали. Эта задача всегда рѣшается при помощи двухъ квадратуръ. Дѣйствительно, длина нормали $n=\frac{y}{\cos\varphi}$ (φ — уголъ касательной съ осью x-овъ). Кривизна (§ 591)

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{d\varphi}{ds}=-\frac{d}{dy}\cos\varphi=-\frac{d}{dy}\frac{y}{n}=-\frac{1}{n}+\frac{y}{n^2}\frac{dn}{dy}.$$

Уравненіе $\varrho=f(n)$ преобразуется въ

$$\frac{dy}{y}=\frac{dn}{n}-\frac{dn}{n+f(n)}$$

и даетъ

$$y=ne^{-\int\frac{dn}{n+f(n)}}=\varphi(n).$$

Слѣдовательно,

$$y'=\frac{\sqrt{n^2-\varphi^2(n)}}{\varphi(n)},\quad x=\int^{n}\frac{\varphi(n)\,\varphi'(n)\,dn}{\sqrt{n^2-\varphi^2(n)}}\text{ и т. д.}$$

Къ этой задачѣ приводится вопросъ о разысканіи поверхностей вращенія, опредѣляемыхъ даннымъ соотношеніемъ между главными радіусами кривизны.

788. Траекторіи. Задача о траекторіяхъ состоитъ въ разысканіи кривыхъ, пересѣкающихъ подъ постояннымъ угломъ ω всѣ кривыя даннаго семейства $\varphi(x, y, a)=0$. Условія задачи выражаются тѣмъ, что при всякомъ значеніи параметра a должно быть

$$y'=\frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\operatorname{tg}\omega}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\operatorname{tg}\omega},$$

т. е.

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin\omega+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\omega}=\frac{dy}{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\omega+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\omega}.$$

Подставляя вмѣсто a его выраженіе, которое получается изъ уравненія $\varphi=0$, находимъ дифференціальное уравненіе перваго порядка, интегрированіе котораго даетъ уравненіе $\psi(x, y, b)=0$ другого семейства, всѣ кривыя котораго обладаютъ требуемымъ свойствомъ. Въ частности, вопросъ объ ортогональныхъ траекторіяхъ $\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)$ кривыхъ $\varphi=0$ рѣшается

интегрированіемъ дифференціальнаго уравненія, получаемаго исключеніемъ a изъ уравненія $\varphi = 0$ и

$$dx : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = dy : \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

a) Найти ортогональныя траекторіи круговъ радіуса a съ центрами на данной прямой (которую цѣлесообразно будетъ принять за ось x-овъ) Для этого надо исключить b изъ уравненій

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{dx}{x-b} = \frac{dy}{y}.$$

Положивъ $y = a \sin\theta$ и условившись, что при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, получимъ

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\, dy = a \int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta = a\left(\cos\theta + \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right),$$

т. е. траекторіи (очевидно, трактрисы) получаются передвиженіемъ кривой, опредѣляемой уравненіями

$$x = a\left(\cos\theta + \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right), \quad y = a \sin\theta,$$

параллельно отъ x-овъ. Легко провѣрить, что эволюта этой кривой — цѣпная линія. При произвольномъ углѣ ω, мы нашли бы другія эвольвенты цѣпной линіи.

b) Пучекъ круговъ $x^2 + y^2 - a^2 = 2\mu a y$ можно изобразить также его дифференціальнымъ уравненіемъ $2xy\,dx = (x^2 - y^2 - a^2)\,dy$, которое получается черезъ исключеніе μ изъ первоначальнаго уравненія и получаемаго изъ него дифференцированіемъ. Замѣна $\frac{dy}{dx}$ на $-\frac{dx}{dy}$ дастъ дифференціальное уравненіе ортогональныхъ траекторій круговъ даннаго пучка, а такъ какъ получаемое такимъ образомъ уравненіе $2xy\,dy = (y^2 - x^2 + a^2)\,dx$ отличается отъ дифференціальнаго уравненія даннаго пучка только замѣною x на y и a^2 на $-a^2$, то безъ всякаго интегрированія находимъ, что искомыя ортогональныя траекторіи составляютъ другой пучекъ круговъ $x^2 + y^2 + a^2 = 2\lambda a x$. Оба пучка составляютъ основаніе такъ называемыхъ диполярныхъ координатъ (§ 413) $u = \frac{1}{2} \log \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, $v = \operatorname{arc\,cot} \mu$.

c) Опредѣленіе ортогональныхъ траекторій какого угодно семейства круговъ приводится къ интегрированію уравненія Риккати. Положимъ, что координаты ξ, η центра и радіусъ a нѣкотораго круга будутъ три извѣстныя функціи отъ дуги s линіи центровъ. Обозначимъ черезъ φ уголъ между касательною къ этой линіи и осью x-овъ, а черезъ θ уголъ между нормалью къ этой же линіи и касательною къ траекторіи въ точкѣ (x, y) встрѣчи ея съ упомянутымъ кругомъ. Мы имѣемъ

$$x = \xi - a \sin(\theta + \varphi), \quad y = \eta + a \cos(\theta + \varphi)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi - \frac{da}{ds}\sin(\theta+\varphi) - a\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\varrho}\right)\cos(\theta+\varphi),$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi + \frac{da}{ds}\cos(\theta+\varphi) - a\left(\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\varrho}\right)\sin(\theta+\varphi).$$

Такъ какъ $-\frac{dx}{dy}$ должно быть равно $\operatorname{tg}(\theta+\varphi)$, то видимъ, что неизвѣстная функція θ должна удовлетворять дифференціальному уравненію

$$\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\theta}{a},$$

въ которыхъ ϱ, радіусъ кривизны линій центровъ есть извѣстная функція отъ s. Теперь достаточно будетъ принять за неизвѣстную функцію $t=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, чтобы придти къ уравненію Риккати

$$\frac{dt}{ds}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{a}\right)t^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{a}\right)=0.$$

Впрочемъ, для изученія свойствъ траекторіи знаніе общаго интеграла не необходимо. Воспользовавшись дифференціальнымъ уравненіемъ постольку, поскольку оно даетъ выраженіе производной θ' отъ θ по s черезъ извѣстныя функціи, мы можемъ предыдущія выраженія $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ написать такъ:

$$\frac{dx}{ds} = (\sin\theta - a')\sin(\theta+\varphi), \quad \frac{dy}{ds} = -(\sin\theta - a')\cos(\theta+\varphi).$$

Слѣдовательно, дифференціалъ дуги траекторіи $ds_1 = (\sin\theta - a')\,ds$, а такъ какъ уголъ смежности, очевидно, равенъ $d\theta + \frac{ds}{\varrho}$, то видно, что радіусъ кривизны опредѣляется формулою $\varrho_1\cos\theta = a(\sin\theta - a')$. Въ частности, при $a'=0$ (a — постоянная) находимъ обобщеніе извѣстнаго свойства трактрисы, а именно: радіусъ кривизны въ каждой точкѣ ортогональной траекторіи семейства круговъ постояннаго радіуса лежитъ на соотвѣтствующей нормали къ линіи центровъ. Далѣе, легко видѣть, что какъ только будетъ извѣстно выраженіе θ, какъ функціи отъ s, натуральное уравненіе траекторіи получится черезъ исключеніе s изъ уравненій

$$s_1 = \int \sin\theta\, ds, \qquad \varrho_1 = a\operatorname{tg}\theta.$$

Наконецъ (§ 626, f) при $a'=1$ находимъ, что центръ кривизны въ каждой точкѣ ортогональной траекторіи соприкасающихся круговъ данной кривой лежитъ на касательной къ этой кривой.

d) Чтобы найти ортогональныя траекторіи семейства однофокусныхъ коническихъ сѣченій

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1,$$

составимъ сперва съ помощью дифференцированія и исключенія параметра λ дифференціальное уравненіе этого семейства

$$(y\,dx - x\,dy)(x\,dx + y\,dy) + (a^2 - b^2)\,dx\,dy = 0.$$

Такъ какъ замѣна $\frac{dy}{dx}$ на $-\frac{dx}{dy}$ этого уравненія не мѣняетъ, то отсюда можно заключить, что искомыя траекторіи будутъ тѣ же коническія сѣченія. Это становится яснымъ, если замѣтимъ, что при данныхъ x и y изъ перваго уравненія получаются два значенія для λ. Одно изъ нихъ меньше b^2 и соотвѣтствуетъ эллипсу, другое, лежащее между b^2 и a^2 — гиперболѣ. Слѣдовательно, черезъ каждую точку на плоскости проходятъ, пересѣкаясь ортогонально, эллипсъ и гипербола, фокусы которыхъ лежатъ въ данныхъ точкахъ, и тѣ значенія λ, которыя характеризуютъ этотъ эллипсъ и эту гиперболу среди всего семейства коническихъ сѣченій съ тѣми же фокусами, будутъ эллиптическія координаты точки (см. § 770, o).

789. Поверхности. a) При изображеніи ограниченныхъ частей земной поверхности приходится разсматривать, такъ называемыя линіи уровня (Niveaulinien), т. е. сѣченія поверхности горизонтальными плоскостями. Уравненіе поверхности $F(x, y, z) = 0$ при всякомъ данномъ z изображаетъ проекцію линіи уровня на горизонтальную плоскость Oxy. Исключеніе z изъ уравненій $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0$ даетъ дифференціальное уравненіе проекцій всѣхъ линій уровня. Ихъ огибающая — особенный интегралъ этого уравненія — даетъ такъ называемую линію тѣни (см. § 661), отбрасываемой поверхностью на горизонтальную плоскость для вертикальнаго пучка свѣтовыхъ лучей. Если, далѣе, замѣнимъ въ дифференціальномъ уравненіи линій уровня y' на $-\frac{1}{y'}$, то общій интегралъ новаго дифференціальнаго уравненія представитъ линіи наибольшаго паденія — ортогональныя траекторіи линій уровня [1]).

b) Опредѣленіе ортогональныхъ траекторій прямолинейныхъ образующихъ линейчатой поверхности всегда можетъ быть получено при помощи одной квадратуры. Мы допустимъ, что положеніе точки на линейчатой поверхности опредѣляется общепринятыми (§ 669) координатами u и v, такъ что

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

гдѣ x, y, z, a, b, c зависятъ только отъ u. Обозначая черезъ $x', y', \ldots, c'$ производныя этихъ функцій, имѣемъ $dX = (x' + a'v)\,du + a\,dv$, и т. д. и условіе ортогональности $\Sigma a\,dX = 0$ обращается въ

$$(ax' + by' + cz')\,du + dv = 0.$$

Отсюда тотчасъ находимъ интегрированіемъ $v = -\int (ax' + by' + cz')\,du$. Найдя одну траекторію $v = f(u)$, найдемъ, что всѣ другія изображаются уравненіемъ $v = f(u) + \text{const.}$ и, слѣдовательно, двѣ какія угодно траекторіи опредѣляютъ на всѣхъ образующихъ одинаковые отрѣзки.

c) Для опредѣленія асимптотическихъ линій линейчатой поверхности беремъ уравненіе (§ 703)

$$(7) \qquad \mathfrak{A}\,du^2 + \mathfrak{B}\,dv^2 + 2\,\mathfrak{C}\,du\,dv = 0,$$

---

[1]) Объ изслѣдованіи этихъ и другихъ замѣчательныхъ линій см. „Calcul différentiel“ Boussinesq'a, стр. 229—243.

въ которомъ

$$\mathfrak{A}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{C}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}.$$

Здѣсь надо подставить вмѣсто x, y, z выраженія $X = x + av$, $Y = y + bv$, $Z = z + cv$, такъ что

$$\mathfrak{B}=0, \quad \mathfrak{C}=\begin{vmatrix} a & a' & x' \\ b & b' & y' \\ c & c' & z' \end{vmatrix},$$

между тѣмъ, какъ $\mathfrak{A}$ будетъ квадратичною функціею отъ v, съ коэффиціентами, вообще, зависящими отъ u. Если поверхность развертывающаяся, то (§ 667) $\mathfrak{C}=0$, и уравненіе (7) приводится къ $du^2=0$, т. е. оба семейства асимптотическихъ линій совпадаютъ въ одно, составляемое образующими ($u=$ const.). Если поверхность не развертывающаяся, то $\mathfrak{C}$ не равно 0, и уравненіе (7) распадается на два: $du=0$ — уравненіе образующихъ — и

$$\frac{dv}{du}=v^2\varphi(u)+v\chi(u)+\psi(u). \tag{8}$$

Слѣдовательно, опредѣленіе асимптотическихъ линій косой линейчатой поверхности приводится къ интегрированію уравненія Риккати. Отсюда слѣдуетъ (§ 785, i), что четыре какія угодно асимптотическія линіи пересѣкаютъ образующія въ четырехъ точкахъ, ангармоническое отношеніе которыхъ для всѣхъ образующихъ одно и то же[1]). Далѣе, достаточно знать двѣ асимптотическія линіи, чтобы найти всѣ другія съ помощью одной квадратуры, или одну — чтобы всѣ другія опредѣлились съ помощью двухъ квадратуръ.

d) Приведеніе вопроса къ двумъ квадратурамъ возможно всегда для линейчатыхъ поверхностей съ направляющею плоскостью, потому что

$$2\mathfrak{C}\varphi(u)=\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

[1]) Геометрическое доказательство этой теоремы далъ A. Demoulin, въ журналѣ „Mathesis“ (1899, стр. 159).

обращается въ нуль тождественно и уравненіе (8) приводится къ линейному, которое интегрируется съ помощью двухъ квадратуръ (§ 785, e). Съ другой стороны, чтобы вышенаписанный опредѣлитель обратился въ нуль, достаточно, чтобы существовали три постоянныя (не равныя 0 одновременно) l, m, n, для которыхъ. $la+mb+nc=0$ тождественно, т. е. чтобы всѣ образующія были параллельны одной неподвижной плоскости. Можно также предвидѣть возможность интегрированія (8) съ помощью двухъ квадратуръ въ томъ случаѣ, когда дѣло идетъ о нахожденіи асимптотическихъ линій поверхности, образуемой главными нормалями нѣкоторой кривой, потому что эта кривая и есть одна изъ искомыхъ кривыхъ. Подставляя вмѣсто x, y, z выраженія $X=x+\lambda v$, $Y=y+\mu v$, $Z=z+\nu v$ и принимая во вниманіе формулы Френе (§ 636), найдемъ

$$\mathfrak{A}=\frac{v}{\tau^2}\left(v\frac{d}{du}\frac{\tau}{\varrho}-\frac{d\tau}{du}\right),\qquad \mathfrak{C}=\frac{1}{\tau}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе (8) принимаетъ крайне простой видъ

$$2\tau d\left(\frac{1}{v}\right)+\frac{d\tau}{v}=d\left(\frac{\tau}{\varrho}\right).$$

если оставимъ въ сторонѣ извѣстный a priori интегралъ $v=0$. Отсюда слѣдуетъ $v=2\sqrt{\tau}\Big/\int\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\frac{\tau}{\varrho}$, при чемъ подъ знакомъ корня условлено считать τ положительнымъ. Въ частности, если обозначимъ черезъ R произвольную постоянную длину, для кривыхъ съ постояннымъ крученіемъ получимъ $v=\frac{2R\varrho}{R+\varrho}$, для цилиндрическихъ винтовыхъ линій (§ 655, c) $v=\sqrt{R\tau}$, и общнѣе для всякой кривой Бертрана (§ 658) съ перемѣннымъ крученіемъ $\frac{1}{v}-\frac{1}{\sqrt{R\tau}}=\text{const}$. Эта постоянная не произвольна, а зависитъ отъ разсматриваемой кривой и для косого круга равна первой кривизнѣ его.

e) Чтобы опредѣлить геодезическія линіи косого геликоида (§ 655, b), примѣнимъ второй изъ указанныхъ въ § 705 пріемовъ. Такъ какъ косинусы направленія нормали къ поверхности пропорціональны числамъ ay, $-ax$, x^2+y^2, то должны имѣть

$$ay\,(dy\,d^2z-dz\,d^2y)-ax\,(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(x^2+y^2)\,(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0,$$

т. е.

$$(9)\quad a\,(x\,dx+y\,dy)\,d^2z-a\,(x\,d^2x+y\,d^2y)\,dz+(x^2+y^2)\,(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0$$

Между тѣмъ изъ равенства $x^2+y^2=r^2$, припоминая соотношеніе

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2\,d\vartheta^2,$$

выводимъ

$$x\,dx+y\,dy=r\,dr,\qquad x\,d^2x+y\,d^2y=r\,d^2r-r^2\,d\vartheta^2$$

и, кромѣ того, какъ мы знаемъ (§ 558, c), имѣютъ мѣсто равенства

$$dx\,d^2y-dy\,d^2x=(r^2\,d\vartheta^2+2\,dr^2-r\,d^2r)\,d\vartheta.$$

Слѣдовательно, уравненіе (9) преобразуется въ

$$r''=\frac{2rr'^2}{r^2+a^2}+r,$$

если оставимъ въ сторонѣ интегралъ $\theta = \text{const.}$, изображающій прямолинейныя образующія. Лѣвую часть можно написать въ видѣ $r' \frac{dr'}{dr}$, но естественнѣе взять за неизвѣстную функцію $u = r'^2$. Тогда получимъ уравненіе

$$\frac{du}{dr} = \frac{4ru}{r^2 + a^2} + 2r,$$

и извѣстно (§ 785, e), что это уравненіе можно интегрировать, полагая

$$u = ve^{\int \frac{4r\,dr}{r^2+a^2}} = (r^2 + a^2)^2 v,$$

гдѣ новая неизвѣстная функція v должна удовлетворять уравненію $\frac{dv}{dr} = \frac{2r}{(r^2+a^2)^2}$. Отсюда вытекаетъ

$$v = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2+a^2}, \qquad u = \frac{1}{b^2}(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 - b^2)$$

съ произвольною постоянною b. Наконецъ, получимъ

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int \frac{b\,dr}{\sqrt{(r^2+a^2)(r^2+a^2-b^2)}}.$$

Правая часть — эллиптическій интегралъ — вообще не выражается въ алгебраически-логариѳмическомъ видѣ. Но при $b = 0$ находимъ образующія ($\theta = \text{const.}$), а при $b = a$ другое интересное семейство геодезическихъ линій, которое легко выводится изъ уравненій линій кривизны (§ 707, b), такъ какъ тогда

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2+a^2}} = \log \frac{\sqrt{r^2+a^2} - a}{r}$$

и наконецъ

$$r = \frac{2a}{e^{-(\theta-\theta_0)} - e^{+(\theta-\theta_0)}}.$$

f) Въ заключеніе найдемъ асимптотическія линіи и линіи кривизны поверхности Шерка (Scherk)[1])

$$\sin\frac{z}{a} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{y}{a}.$$

Легкое вычисленіе даетъ

$$p\cos\frac{z}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{y}{a}, \qquad q\cos\frac{z}{a} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\cos\frac{z}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a}.$$

---

[1]) Crelles Journal, 1834, стр. 200. Эту поверхность G. van der Mensbrugghe (Bulletin de l'Académie de Belgique, 2-ая серія, томъ XXI, стр. 552) изслѣдовалъ и построилъ опытнымъ путемъ.

Если введемъ гиперболическія амплитуды ξ и η отъ $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{a}$, такъ что (§ 409)

$$\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\xi, \quad \operatorname{ch}\frac{x}{a} = 1/\cos\xi, \quad \operatorname{th}\frac{x}{a} = \sin\xi \quad \text{и т. д.},$$

то получимъ $\mathfrak{L} = \sin\eta$, $\mathfrak{M} = \sin\xi$, т. е. ξ и η измѣряютъ углы наклоненія осей y-овъ и (соотвѣтственно) x-овъ къ касательной плоскости. Если теперь еще примемъ во вниманіе, что

$$dx = \frac{a\,d\xi}{\cos\xi}, \quad dy = \frac{a\,d\eta}{\cos\eta},$$

то, на основаніи извѣстныхъ формулъ (§ 686), получимъ

$$H = 0, \quad K = -\frac{1}{a^2}\cos^2\xi\cos^2\eta.$$

Слѣдовательно, разсматриваемая поверхность принадлежитъ къ минимальнымъ поверхностямъ, и абсолютныя величины главныхъ радіусовъ кривизны равны $a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a}$. Для опредѣленія линій кривизны удобно будетъ воспользоваться формулами Родрига (§ 698) и написать $\frac{dx}{d\mathfrak{L}} = \frac{dy}{d\mathfrak{M}}$, т. е. $d\xi^2 = d\eta^2$, откуда $\xi \pm \eta = \text{const}$. Для опредѣленія асимптотическихъ линій нужно прежде всего вычислить r, s, t. Изъ выраженій p и q тотчасъ выводимъ, дифференцируя первое по x, второе по y

$$r = \frac{1+p^2}{a}\operatorname{tg}\frac{z}{a}, \quad t = \frac{1+q^2}{a}\operatorname{tg}\frac{z}{a}.$$

Припоминая, что $H = 0$, находимъ

$$s = \frac{(1+q^2)\,r + (1+p^2)\,t}{2\,p\,q} = \frac{1+q^2}{p\,q}r = \frac{1+p^2}{p\,q}t.$$

Между тѣмъ имѣемъ

$$\frac{1+p^2}{\cos^2\xi} = \frac{p\,q}{\sin\xi\,\sin\eta} = \frac{1+q^2}{\cos^2\eta},$$

и поэтому дифференціальное уравненіе асимптотическихъ линій будетъ (§ 703)

$$d\xi^2 + 2\cot\xi\cot\eta\,d\xi\,d\eta + d\eta^2 = 0.$$

Это уравненіе легко приводится къ уже разсмотрѣнному раньше (§ 786, f). Достаточно положить $u = \cos\eta$, $v = \cos\xi$, чтобы найти

$$(1-u^2)\,dv^2 + 2\,u\,v\,du\,dv + (1-v^2)\,du^2 = 0.$$

Общій интегралъ, слѣдовательно, будетъ

$$(1-u^2)\cos^2\alpha - 2\,u\,v\sin\alpha\cos\alpha + (1-v^2)\sin^2\alpha = 0,$$

т. е.

$$\sin\alpha\cos\xi + \cos\alpha\cos\eta = 1,$$

гдѣ a — произвольная постоянная. Особенный интегралъ $\cos(\xi \pm \eta) = 0$ изображаетъ одну изъ линій кривизны, которая въ проекціи на плоскость (xy) касается всѣхъ асимптотическихъ линій. Это линія касанія поверхности съ описаннымъ цилиндромъ, параллельнымъ Ox. Она состоитъ изъ безчисленнаго множества равныхъ кривыхъ, лежащихъ въ плоскостяхъ $\cos\frac{z}{a} = 0$. Всякая изъ этихъ кривыхъ (какъ и всякая другая, полученная въ сѣченіи плоскостью, перпендикулярною къ оси z-овъ) похожа на равностороннюю гиперболу. Такъ какъ въ данномъ случаѣ $\mathfrak{L} = \pm\cos\xi$, $\mathfrak{M} = \sin\xi$, то $d\xi$, очевидно, есть уголъ смежности; но по одной изъ раньше выведенныхъ формулъ, радіусъ кривизны равенъ

$$\varrho = \frac{a}{\sin\xi\cos\xi} = a(\operatorname{tg}\xi + \operatorname{cot}\xi),$$

такъ что для выраженія дуги имѣемъ $s = \int \varrho\, d\xi = a \log \operatorname{tg}\xi$, а слѣдовательно, $\varrho = a\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$. Итакъ, натуральное уравненіе разсматриваемой кривой подобно уравненію цѣпной линіи равнаго сопротивленія (§ 767, c).

Линейныя дифференціальныя уравненія.

790. Продолжаемъ теперь разсмотрѣніе дифференціальныхъ уравненій съ двумя перемѣнными и займемся спеціально такими, въ которыя неизвѣстная функція и ея производныя входятъ линейно, т. е. уравненіями вида

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}f_1(x) + y^{(n-2)}f_2(x) + \cdots + y'f_{n-1}(x) + yf_n(x) = f(x). \tag{10}$$

Онѣ называются линейными дифференціальными уравненіями. Если $f(x) = 0$, то уравненіе называютъ неполнымъ (или также уравненіемъ безъ послѣдняго члена):

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}f_1(x) + y^{(n-2)}f_2(x) + \cdots + y'f_{n-1}(x) + yf_n(x) = 0. \tag{11}$$

Это уравненіе (11), очевидно, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всякое его рѣшеніе, т. е. всякая функція y, ему удовлетворяющая, будетъ ему удовлетворять и тогда, когда мы умножимъ это рѣшеніе на постоянное число, а также и тѣмъ, что ему удовлетворяетъ сумма конечнаго числа частныхъ рѣшеній, умноженныхъ на постоянныя числа. Предпославъ вышесказанное, легко теперь доказать слѣдующую теорему: Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будутъ n линейно независимыхъ частныхъ рѣшеній неполнаго линейнаго уравненія n-го порядка, то общій интегралъ этого уравненія будетъ

$$y = a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n, \tag{12}$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвольныя постоянныя.

[**Примѣчаніе.** Общій интегралъ линейнаго уравненія заключаетъ въ себѣ всѣ рѣшенія уравненія, чего нельзя сказать объ уравненіяхъ не-линейныхъ, могущихъ имѣть особенныя рѣшенія. Доказательство этой теоремы можно найти также, напримѣръ, въ „Курсѣ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій" К. Поссе, 3-е изд. 1912, стр. 610].

Ограничимся для бо́льшей ясности случаемъ $n = 3$ и положимъ, что u, v, w будутъ три линейно независимыя функціи, удовлетворяющія уравненію

$$y''' + y''\varphi(x) + y'\chi(x) + y\psi(x) = 0 \tag{13}$$

Это значитъ, что имѣемъ три тождества

$$u''' + u''\varphi + u'\chi + u\psi = 0, \quad v''' + v''\varphi + v'\chi + v\psi = 0, \quad w''' + w''\varphi + w'\chi + w\psi = 0.$$

Положимъ, что y есть какое нибудь другое, отличное отъ u, v, w рѣшеніе уравненія (13). Чтобы всѣ четыре соотношенія могли существовать одновременно, необходимо, чтобы эта функція y была связана съ u, v и w соотношеніемъ

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{vmatrix} = 0,$$

а это требуетъ (§ 375), чтобы между четырьмя этими функціями существовало линейное соотношеніе. Въ это соотношеніе между y, u, v, w необходимо долженъ входить y, иначе, вопреки предположенію, u, v, w не были бы линейно независимы. Слѣдовательно, $y = au + bv + cw$, гдѣ a, b, c — постоянныя и притомъ произвольныя, такъ какъ по сдѣланному въ началѣ § замѣчанію написанное выраженіе y удовлетворитъ уравненію (11), каковы бы ни были значенія постоянныхъ a, b, c.

[**Примѣчаніе.** Ссылка на теорему § 375 въ данномъ случаѣ достаточна, потому что, если функціи y, u, v, w будутъ рѣшеніями линейнаго однороднаго дифференціальнаго уравненія съ непрерывными коэффиціентами, то указанный въ примѣчаніи XLIV (1 часть, стр. 428) къ § 375 исключительный случай не можетъ имѣть мѣста. Для подробностей отсылаемъ читателя къ одному изъ тѣхъ курсовъ интегральнаго исчисленія, которые авторъ называетъ въ предисловіи къ своему курсу (I часть, стр. VII). Краткая глава, посвященная авторомъ дифференціальнымъ уравненіямъ никоимъ образомъ не можетъ считаться исчерпывающею этотъ обширный отдѣлъ интегральнаго исчисленія.]

791. Когда общій интегралъ уравненія (11) извѣстенъ, то общій интегралъ полнаго уравненія (10) можетъ быть выраженъ черезъ n квадратуръ, съ помощью пріема, который по Лагранжу называется измѣненіемъ произвольныхъ постоянныхъ. Попытаемся удовлетворить уравненію (10) тѣмъ же выраженіемъ (12), въ которомъ подъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будемъ понимать прилично выбранныя функціи отъ x. Возьмемъ опять для простоты уравненіе 3-го порядка

$$y''' + y''\varphi(x) + y'\chi(x) + y\psi(x) = f(x), \tag{14}$$

и положимъ, что извѣстны три независимыя частныя рѣшенія u, v, w соотвѣтствующаго неполнаго уравненія (13). Попробуемъ удовлетворить уравненію (14) выраженіемъ $y = au + bv + cw$, гдѣ a, b, c три неизвѣстныя функціи отъ x. Мы всегда можемъ подчинить ихъ двумъ условіямъ

$$a'u + b'v + c'w = 0, \quad a'u' + b'v' + c'w' = 0.$$

Подставимъ теперь выраженія y и его производныхъ

$$y' = au' + bv' + cw', \quad y'' = au'' + bv'' + cw'',$$
$$y''' = au''' + bv''' + cw''' + a'u'' + b'v'' + c'w''.$$

въ уравненіе (14); тогда найдемъ третье условіе, которому должны удовлетворять a, b, c, чтобы уравненіе (14) удовлетворялось, а именно:

$$a'u'' + b'v'' + c'w'' = f(x);$$

Слѣдовательно, a', b', c' опредѣляются изъ системы уравненій

$$\begin{aligned} a'u + b'v + c'w &= 0, \\ a'u' + b'v' + c'w' &= 0, \\ a'u'' + b'v'' + c'w'' &= f(x). \end{aligned}$$

Эта система имѣетъ одно опредѣленное рѣшеніе, потому что u, v, w независимы, а слѣдовательно, опредѣлитель системы

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю. Опредѣливъ такимъ образомъ a', b', c', мы найдемъ и a, b, c съ помощью простыхъ квадратуръ, а затѣмъ и y — общій интегралъ съ тремя произвольными постоянными (которыя входятъ въ квадратуры, выражающія a, b, c). Въ общемъ случаѣ, каждый изъ коэффиціентовъ a_i замѣнится нѣкоторою опредѣленною функціею отъ x, сложенною съ произвольною постоянною. Мы

видимъ, слѣдовательно, что общій интегралъ уравненія (10) имѣетъ видъ

$$y = y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n, \tag{15}$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольныя постоянныя, а y_0 — нѣкоторая функція отъ x (очевидно, удовлетворяющая уравненію (10) при $a_1 = a_2 = \cdots = 0$). Можетъ случится, что будетъ извѣстно какое нибудь частное рѣшеніе y_0 полнаго уравненія (10). Тогда достаточно знать n независимыхъ частныхъ рѣшеній $y_1, y_2, \ldots, y_n$ неполнаго уравненія, чтобы получить общій интегралъ (15) полнаго уравненія, не прибѣгая къ методѣ Лагранжа. Дѣйствительно, если въ уравненіи (10) положимъ $y = y_0 + z$, то тотчасъ увидимъ, что z должно удовлетворять уравненію (11).

792. Теорема. Если извѣстны m линейно независимыхъ, частныхъ рѣшеній неполнаго линейнаго дифференціальнаго уравненія n-го порядка, то интегрированіе соотвѣтствующаго полнаго уравненія сводится къ интегрированію линейнаго уравненія $(n-m)$-го порядка и къ m слѣдующимъ затѣмъ квадратурамъ.

Дѣйствительно, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_m$ будутъ рѣшенія уравненія (11) и

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \cdots & y_1^{(m-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \cdots & y_2^{(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_m & y_m' & y_m'' & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

ихъ опредѣлитель Вронскаго. Попытаемся, какъ и въ предыдущемъ §, удовлетворить уравненію (10) выраженіемъ $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_m y_m$, подчинивъ производныя $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ условію быть пропорціональными алгебраическимъ дополненіямъ послѣдняго столбца въ опредѣлителѣ a, такъ что, обозначая черезъ z коэффиціентъ пропорціональности, будемъ имѣть

$$\sum_1^m a_i' y_i = 0, \quad \sum_1^m a_i' y_i^{(v)} = 0 \ (v = 1, 2, \ldots, m-2), \quad \sum_1^m a_i' y_i^{(m-1)} = az.$$

Легко видѣть, что тогда производныя отъ y опредѣляются слѣдующими формулами

$$y^{(v)} = \sum_1^m a_i y_i^{(v)} \ (\text{для } v < m), \quad y^{(m)} = \sum_1^m a_i y_i^{(m)} + az,$$

$$y^{(v)} = \sum_1^m a_i y_i^{(v)} + az^{(v-m)} + a_{1,v} z^{(v-m-1)} + \cdots + a_{v-m,v} \ (\text{для } v > m).$$

Подставивъ эти выраженія въ (10) придемъ къ уравненію вида

$$az^{(n-m)} + a_1 z^{(n-m-1)} + \cdots + a_{n-m} z = f(x).$$

Если будетъ извѣстенъ общій интегралъ этого линейнаго уравненія $(n-m)$-го порядка, то будутъ также извѣстны и m функцій a_i', откуда затѣмъ съ помощью m квадратуръ опредѣлятся и функціи a_i. Предыдущее доказательство есть естественное обобщеніе разсужденія въ § 791, соотвѣтствующаго предположенію $m=n$. При $m=n-1$, припоминая сказанное о линейныхъ уравненіяхъ перваго порядка, получаемъ слѣдующій результатъ: Интегрированіе линейнаго уравненія n-го порядка, если извѣстны $n-1$ линейно независимыхъ рѣшеній соотвѣтствующаго неполнаго уравненія, приводится къ $n+1$ квадратурамъ.

793. Примѣры. a) Линейное уравненіе перваго порядка $y'+y\varphi(x)=f(x)$ всегда интегрируется въ квадратурахъ, потому что извѣстенъ общій интегралъ неполнаго уравненія $y'+y\varphi(x)=0$, а именно $y=ae^{-\int \varphi\, dx}$. Метода Лагранжа даетъ $a'e^{-\int \varphi\, dx}=f(x)$, слѣдовательно,

$$a=\int e^{\int \varphi\, dx} f\, dx, \quad y=e^{-\int \varphi\, dx}\int e^{\int \varphi\, dx} f\, dx.$$

b) Уравненіе второго порядка $y''+y'\varphi+y\psi=f$ интегрируется съ помощью трехъ квадратуръ, если извѣстна функція u, удовлетворяющая уравненію $u''+u'\varphi+u\psi=0$. Дѣйствительно, полагая $y=au$, приходимъ къ уравненію $a''u+a'(2u'+\varphi)=f$. Это уравненіе перваго порядка относительно a', и a' получается изъ него съ помощью двухъ квадратуръ, а затѣмъ находимъ

$$y=u\int \frac{\int u\, e^{\int \varphi\, dx}\cdot f\, dx}{u^2 e^{\int \varphi\, dx}}\, dx.$$

c) Полезно замѣтить, что интегрированіе каждаго неполнаго линейнаго уравненія второго порядка приводится къ интегрированію уравненія Риккати и одной слѣдующей затѣмъ квадратурѣ. Дѣйствительно, подстановка $y=e^{\int z\, dx}$ приводитъ уравненіе

$$y''+y'\varphi+y\psi=0 \quad \text{въ} \quad z'+z^2+z\varphi+\psi=0.$$

Вслѣдствіе этого, свойства линейныхъ уравненій бросаютъ свѣтъ на уравненіе Риккати и обратно.

d) Съ помощью четырехъ квадратуръ интегрируется уравненіе (14), когда извѣстны двѣ независимыя функціи u и v, удовлетворяющія уравненію (13). Дѣйствительно, полагая $y=au+bv$, $a'=-vz$, $b'=uz$, $\alpha=uv'-vu'$, получимъ

$$y'=au'+bv', \quad y''=au''+bv''+\alpha z, \quad y'''=au'''+bv'''+\alpha z'+2\alpha' z.$$

Данное уравненіе преобразуется въ $az' + (2a' + a\varphi)z = f$, и съ помощью двухъ квадратуръ даетъ

$$z = \frac{\int a\, e^{\int \varphi\, dx} \cdot f\, dx}{a^2 e^{\int \varphi\, dx}};$$

Затѣмъ съ помощью двухъ другихъ квадратуръ получимъ и общій интегралъ даннаго уравненія $y = v\int uz\, dx - u\int vz\, dx$.

794. Уравненія съ постоянными коэффиціентами. Если коэффиціенты при неизвѣстной функціи и ея производныхъ въ уравненіи (10) числа постоянныя, то легко можно найти n линейно независимыхъ рѣшеній неполнаго уравненія (11), а затѣмъ, извѣстнымъ путемъ, съ помощью n квадратуръ составить и общій интегралъ полнаго уравненія. Дѣйствительно, попробуемъ удовлетворить уравненію (11) выраженіемъ $y = e^{kx}$; это уравненіе обращается (по сокращеніи на e^{kx}) въ условное уравненіе, опредѣляющее k — такъ называемое характеристическое уравненіе:

$$\varphi(k) = k^n + k^{n-1}f_1 + k^{n-2}f_2 + \cdots + kf_{n-1} + f_n = 0.$$

Если всѣ корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ уравненія $\varphi(k) = 0$ различны, то функціи $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$ будутъ линейно независимыя рѣшенія уравненія (11), потому что ихъ опредѣлитель Вронскаго равенъ произведенію e^{-xf_1} на (§ 27, d)

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \ldots & k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & k_2^2 & \ldots & k_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k_n & k_n^2 & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=n-1} (k_{i+1} - k_i)(k_{i+2} - k_i)\ldots(k_n - k_i) \gtrless 0$$

Итакъ, общій интегралъ неполнаго уравненія выражается формулою

(16) $$y = a_1 e^{k_1x} + a_2 e^{k_2x} + \cdots + a_n e^{k_nx},$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольныя постоянныя. Теперь полагаемъ, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такія функціи отъ x, производныя которыхъ $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ опредѣляются системою

$$k_1^{\nu} a_1' e^{k_1x} + k_2^{\nu} a_2' e^{k_2x} + \cdots + k_n^{\nu} a_n' e^{k_nx} = \begin{cases} 0 \text{ при } \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \\ f(x) \text{ при } \nu = n-1, \end{cases}$$

и, слѣдовательно, выражаются формулами

$$a_i' = \frac{e^{-k_i x} f(x)}{\varphi'(k_i)}.$$

Тогда метода Лагранжа даетъ общій интегралъ полнаго уравненія, въ видѣ

$$y=\frac{e^{k_1x}}{\varphi'(k_1)}\int e^{-k_1x}f(x)\,dx+\frac{e^{k_2x}}{\varphi'(k_2)}\int e^{-k_2x}f(x)\,dx+\cdots+\frac{e^{k_nx}}{\varphi'(k_n)}\int e^{-k_nx}f(x)dx.$$

Далѣе, если характеристическое уравненіе имѣетъ кратные корни, то число различныхъ частныхъ рѣшеній e^{kx} будетъ меньше порядка уравненія, и формула (16) уже не изображаетъ общаго интеграла неполнаго уравненія. Попробуемъ тогда удовлетворить этому уравненію выраженіемъ $y=x^\mu e^{kx}$. Лѣвая его часть приведется къ произведенію e^{kx} на

$$x^\mu\varphi(k)+\mu x^{\mu-1}\varphi'(k)+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot2}x^{\mu-2}\varphi''(k)+\cdots+\varphi^{(\mu)}(k).$$

Если a будетъ r — кратный корень, т. е. (§ 450, c) если

$$\varphi(a)=0,\quad \varphi'(a)=0,\quad \ldots,\quad \varphi^{(r-1)}(a)=0,$$

то предыдущее выраженіе обращается тождественно въ нуль при $k=a$ и для всякаго изъ значеній $0, 1, 2, \ldots, (r-1)$ числа μ. Поэтому, если характеристическое уравненіе имѣетъ корни $\alpha, \beta, \ldots$ соотвѣтственно кратности $r, s, \ldots$, то общій интегралъ неполнаго уравненія имѣетъ форму

$$y=(a_0+a_1x+\cdots+a_{r-1}x^{r-1})e^{\alpha x}+(b_0+b_1x+\cdots+b_{s-1}x^{s-1})e^{\beta x}+\cdots,$$

гдѣ n постоянныхъ $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ произвольны. Въ заключеніе упомянемъ, что обыкновенно коэффиціенты дифференціальнаго уравненія вещественны. Такъ какъ при этомъ желательно, чтобы и y представленъ былъ въ вещественномъ видѣ, то отъ мнимой формы стараются избавиться, замѣчая, что сумма $ae^{(\alpha+i\beta)x}+be^{(\alpha-i\beta)x}$, происходящая отъ каждой пары мнимыхъ сопряженныхъ корней (§ 447) можетъ быть представлена въ вещественномъ видѣ $(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}$, гдѣ постоянныя $A=a+b$ и $B=i(a-b)$ будутъ также вещественны.

795. Примѣры. a) Требуется проинтегрировать уравненіе $y''+y=f(x)$. Здѣсь характеристическое уравненіе $k^2+1=0$, поэтому e^{ix} и e^{-ix} — частныя рѣшенія неполнаго уравненія. Ихъ можно замѣнить, какъ было сказано, рѣшеніями $\sin x$ и $\cos x$. Общій интегралъ уравненія $y''+y=0$ будетъ $y=a\sin x+b\cos x$. Измѣненіе произвольныхъ постоянныхъ даетъ уравненіе

$$a'\sin x+b'\cos x=0,\quad a'\cos x-b'\sin x=f(x),$$

изъ которыхъ выводимъ $a'=f(x)\cos x$, $b'=-f(x)\sin x$, и слѣдовательно,

$$v=\sin x\int f(x)\cos x\,dx-\cos x\int f(x)\sin x\,dx.$$

b) Интегрировать уравненіе $y''' = f(x)$. Характеристическое уравненіе имѣетъ тройной корень 0, и общій интегралъ уравненія $y''' = 0$ будетъ $y = a + bx + cx^2$, что можно было предвидѣть. Измѣненіе произвольныхъ постоянныхъ дастъ систему

$$a' + b'x + c'x^2 = 0, \quad b' + 2c'x = 0, \quad 2c' = f(x),$$

изъ которой находимъ $a' = \frac{1}{2}x^2 f(x)$, $b' = -xf(x)$, $c' = \frac{1}{2}f(x)$. Общій интегралъ уравненія $y''' = f(x)$ будетъ

$$y = \tfrac{1}{2}\int x^2 f(x)\,dx - x\int xf(x)\,dx + \tfrac{1}{2}x^2\int f(x)\,dx.$$

Впрочемъ, этотъ результатъ почти очевиденъ, потому что, полагая

$$\int f(x)\,dx = f_1(x), \quad \int f_1(x)\,dx = f_2(x), \quad \int f_2(x)\,dx = f_3(x),$$

интегрированіемъ по частямъ получимъ

$$\int xf(x)\,dx = xf_1(x) - f_2(x), \quad \int x^2 f(x)\,dx = x^2 f_1(x) - 2xf_2(x) + 2f_3(x),$$

и выраженіе общаго интеграла будетъ $y = f_3(x)$.

c) Интегрировать уравненіе $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = f(x)$. Корни характеристическаго уравненія будутъ -1, -1, i, $-i$. Общій интегралъ неполнаго уравненія будетъ поэтому $y = (a + bx)e^{-x} + \alpha\cos x + \beta\sin x$. По медодѣ Лагранжа вычисляется затѣмъ общій интегралъ даннаго уравненія

$$y = \tfrac{1}{2}(1+x)e^{-x}\int e^x f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}e^{-x}\int x\,e^x f(x)\,dx$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin x\int f(x)\sin x\,dx - \tfrac{1}{2}\cos x\int f(x)\cos x\,dx.$$

Когда $f(x)$ задано и квадратуры выполнены, то интегралъ обыкновенно приводятъ къ виду (15), т. е. обнаруживаютъ частное рѣшеніе y_0, которое можно привести къ простѣйшему виду, отнимая отъ него всѣ слагаемыя, удовлетворяющія неполному уравненію. Напримѣръ, для $f(x) = e^{-x}$ найдемъ $y_0 = \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$.

d) Интегрировать уравненіе $y = xy' + x^2 y''$. Пробуя удовлетворить этому уравненію выраженіемъ $y = x^n$, найдемъ, что n должно удовлетворять уравненію $1 = n + n(n-1)$, т. е. $n = \pm 1$. Слѣдовательно, общій интегралъ будетъ $y = ax + \dfrac{b}{x}$. Далѣе, если предложено уравненіе $y = xy' + x^2 y'' + f(x)$, то метода Лагранжа даетъ

$$y = \frac{1}{2}\,x\int f(x)\,d\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\int f(x)\,dx.$$

e) Чтобы проинтегрировать уравненіе $y + xy' + x^2 y'' = x$, положимъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, въ неполномъ уравненіи $y = x^n$, и найдемъ $n = \pm i$; а такъ какъ

$$x^{\pm i} = e^{\pm i\log x} = \cos\log x \pm i\sin\log x,$$

то $\cos\log x$ и $\sin\log x$ будутъ частныя рѣшенія неполнаго уравненія. Далѣе, частное рѣшеніе полнаго уравненія очевидно, а именно $\frac{1}{2}x$. Поэтому общій интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$y = \tfrac{1}{2}x + a\sin\log x + b\cos\log x$$

f) Аналогичнымъ образомъ можно интегрировать уравненіе $x^2y'' - (2\mu-1)xy' + \mu^2 y = 0$. Полагая $y = x^n$ найдемъ для n одно только значеніе $n = \mu$; но одного частнаго рѣшенія x^μ достаточно (§ 793, b) для составленія общаго интеграла. Полагая $y = x^\mu z$, для опредѣленія z получимъ уравненіе $xz'' + z' = 0$, и отсюда найдемъ $z = a + b\log x$. Слѣдовательно, $y = x^\mu(a + b\log x)$. Къ тому же результату можно придти, измѣняя независимую перемѣнную. Положимъ $x = e^t$. Такъ какъ (§ 558, a)

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

то уравненіе обращается въ

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\mu\frac{dy}{dt} + \mu^2 y = 0.$$

Здѣсь коэффиціенты постоянные и характеристическое уравненіе имѣетъ двойной корень μ; слѣдовательно, общій интегралъ будетъ вида $(a+bt)e^{\mu t}$ и для даннаго уравненія получимъ $y = x^\mu(a + b\log x)$.

g) Подобнымъ же образомъ для интегрированія уравненія $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ полагаемъ $x = \cos t$, такъ что

$$y' = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = -\frac{\cot s}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Данное уравненіе преобразуется въ $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ и имѣемъ частныя рѣшенія $\cos t = x$, $\sin t = \sqrt{1-x^2}$. Слѣдовательно, общій интегралъ $y = ax + b\sqrt{1-x^2}$.

h) Замѣну одной независимой перемѣнной другою часто дѣлаютъ съ цѣлью достигнуть того или другого упрощенія даннаго уравненія. Такъ напримѣръ, уравненіе $(1+x^2)y'' + xy' = \mu^2 y$ обращается, при замѣнѣ x новою перемѣнною t (пока произвольною), въ уравненіе

$$(1+x^2)t'^2\frac{d^2y}{dt^2} + \{(1+x^2)t'' + xt'\}\frac{dy}{dt} = \mu^2 y.$$

Здѣсь можно уничтожить членъ съ $\frac{dy}{dt}$, выбравъ t такъ, чтобы $\frac{t''}{t'} + \frac{x}{1+x^2} = 0$, т. е. взявъ $t' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, и слѣдовательно, $t = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2})$. При такой подстановкѣ данное уравненіе обращается въ $\frac{d^2y}{dt^2} = \mu^2 y$ и имѣетъ общій интегралъ $y = ae^{\mu t} + be^{-\mu t}$. Замѣчая, что $e^t = x + \sqrt{1+x^2}$, $e^{-t} = -x + \sqrt{1+x^2}$, найдемъ, что общій интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$y = a(x + \sqrt{1+x^2})^\mu + b(-x + \sqrt{1+x^2})^\mu.$$

i) Чтобы интегрировать уравненіе, разсматриваемое Лежандромъ, $y = \frac{1}{2}y' + xy''$, положимъ $x = t^2$ и замѣтимъ, что

$$y' = \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = -\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{4t_2}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Уравненіе принимаетъ видъ $\frac{d^2y}{dt^2} = 4y$ и даетъ общій интегралъ

$$y = ae^{2\sqrt{x}} + be^{-2\sqrt{x}}.$$

Лепэжъ (Lepaige) замѣтилъ, что болѣе общее уравненіе $y = my' + xy''$ интегрируется при безчисленномъ множествѣ значеній m. Дѣйствительно, подстановкою $y = e^{\int z\,dx}$ (§ 793, c) это уравненіе можно привести къ уравненію Риккати: $x(z' + z^2) + mz = 1$. Полагая $z = uv$ и опредѣляя v такъ, чтобы $xv' + mv = 0$ (чего и достигнемъ, взявъ $v = x^{-m}$), найдемъ, что u должно удовлетворять уравненію $xv(u' + vu^2) = 1$, т. е. $u' + u^2x^{-m} = x^{m-1}$. Подстановка $x = t^\mu$ преобразуетъ послѣднее уравненіе въ слѣдующее:

$$\frac{du}{dt} + \mu u^2 t^{\mu(1-m)-1} = \mu t^{\mu m - 1},$$

далѣе (предполагая $m \gtrless 1$ и полагая $\mu = \frac{1}{1-m}$), получаемъ такое уравненіе

$$\frac{du}{dt} + \frac{u^2}{1-m} = \frac{t^n}{1-m}, \quad \text{гдѣ } n = -\frac{1-2m}{1-m}, \quad \text{а потому } \frac{n}{2n+4} = m - \frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно, данное уравненіе интегрируется (§ 786, h) при значеніяхъ

$$m = \pm\tfrac{1}{2},\ \pm\tfrac{3}{2},\ \pm\tfrac{5}{2},\ \pm\tfrac{7}{2},\ \pm\tfrac{9}{2},\ \ldots.$$

j) Попытаемся интегрировать уравненіе не линейное

$$y'' + 3y' + 2(y - y^3) = 0,$$

слѣдуя пути, указанному Мансіономъ (Mansion). Положимъ $y' + y = z$, что преобразуетъ данное уравненіе въ $z' + 2z = 2y^3$. Пользуясь методой измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, полагаемъ $y = ue^{-x}$, $z = ve^{-2x}$, гдѣ u и v должны удовлетворять условіямъ $u' = ve^{-x}$, $v' = 2u^3e^{-x}$. Исключая x, получимъ $v\,dv = 2u^3\,du$, откуда $v^2 = u^4 - a^4$ (a — произвольная постоянная). Подставляя затѣмъ въ $u' = ve^{-x}$ вмѣсто v его выраженіе и интегрируя, находимъ

$$e^{-x} = \mp\int \frac{du}{\sqrt{u^4 - a^4}}.$$

Въ правой части эллиптическій интегралъ. Если бы мы умѣли выразить u, какъ функцію отъ x, то получили бы и общій интегралъ $y = ue^{-x}$. Во всякомъ случаѣ мы можемъ найти безчисленное множество частныхъ рѣшеній, взявъ $a = 0$. Тогда получается

$$e^{-x} = c \pm \frac{1}{u}, \qquad y = \frac{\pm 1}{1 - ce^x}.$$

Аналогичнымъ образомъ можно трактовать болѣе общее уравненіе

$$y'' + (n+1)y' + n(y - y^{2n-1}) = 0$$

и найти его общій интегралъ въ явной, конечной формѣ, при всякомъ цѣломъ значеніи $\frac{1}{n}$. Напримѣръ, общій интегралъ уравненія $y^4 - y^3 y'' = 1$ $\left(\frac{1}{n} = -1\right)$ будетъ

$$y^2 = a e^{2x} + b e^{-2x} \pm \sqrt{1 + 4ab}.$$

Это можно получить и другимъ путемъ (§ 785, d).

k) Приложеніе рядовъ весьма полезно при интегрированіи нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій. Напримѣръ, уравненіе $y'' + \frac{4}{x}y' + n^2 y = 0$, встрѣчающееся въ Механикѣ, интегрируется съ помощью ряда

$$f_\nu(x) = 1 - \frac{x^2}{2(\nu+1)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(\nu+1)(\nu+3)} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(\nu+1)(\nu+3)(\nu+5)} + \cdots.$$

Дѣйствительно, замѣчая, что $f_\nu''(x) + \frac{\nu}{x} f_\nu'(x) + f_\nu(x) = 0$ и полагая въ предложенномъ уравненіи $y = x^\mu f_\nu(nx)$, находимъ

$$f_\nu''(nx) + \frac{2\mu+4}{nx} f_\nu'(nx) + \left(1 + \frac{\mu(\mu+3)}{n^2x^2}\right) f_\nu(nx) = 0.$$

Это уравненіе можетъ совпадать съ предыдущимъ только при $\mu(\mu+3) = 0$, $\nu = 2\mu + 4$. Поэтому должно быть либо $\mu = 0$, $\nu = 4$, либо $\mu = -3$, $\nu = -2$. Слѣдовательно, искомый общій интегралъ будетъ $y = a f_4(nx) + b x^{-3} f_{-2}(nx)$. Впрочемъ, функція f_{-2} и f_4 очень просто могутъ быть выражены въ конечномъ видѣ. Для этого замѣтимъ, что $f_{\nu+2}(x) = -\frac{\nu+1}{x} f_\nu'(x)$. Между тѣмъ (§ 332, a) мы видимъ, что

$$f_0(x) = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots = \cos x.$$

Откуда слѣдуетъ

$$f_{-2}(x) = 1 + \int_0^x x \cos x\, dx = x \sin x + \cos x,$$

далѣе

$$f_2(x) = -\frac{1}{x} f_0'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{3}{x} f_2'(x) = \frac{3\sin x}{x^3} - \frac{3\cos x}{x^2}.$$

Окончательно общій интегралъ можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = \frac{a}{x^3}(\sin nx - nx\cos nx) + \frac{b}{x^3}(\cos nx + nx \sin nx).$$

l) Весьма важную роль играетъ гипергеометрическій рядъ [1])

$$f(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(1+\alpha)\cdot\beta(1+\beta)}{1\cdot 2\cdot\gamma(1+\gamma)}x^2+\frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)\cdot\beta(1+\beta)(2+\beta)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(1+\gamma)(2+\gamma)}x^3+\cdots,$$

удовлетворяющій, какъ легко провѣрить, Гауссову дифференціальному уравненію

$$(x-x^2)y''+\{\gamma-(1+\alpha+\beta)x\}y'=\alpha\beta y.$$

Пробуя удовлетворить этому уравненію болѣе общимъ выраженіемъ $y=x^\mu f(\alpha',\beta',\gamma',x)$, найдемъ, что либо должно быть $\mu=0$, $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$, либо $\mu=1-\gamma$, $\alpha'=1+\alpha-\gamma$, $\beta'=1+\beta-\gamma$, $\gamma'=2-\gamma$. Слѣдовательно, общій интегралъ будетъ

$$y=af(\alpha,\beta,\gamma,x)+bx^{1-\gamma}f(1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma,\ x).$$

Полезно знать, что гипергеометрическій рядъ заключаетъ въ себѣ, какъ частные случаи, многія извѣстныя разложенія. Такъ, напримѣръ, при $\beta=\gamma$ или $\alpha=\gamma=1$, или $\alpha=\beta=1$ и $\gamma=2$, находимъ разложенія функціи $(1-x)^{-\alpha}$, $e^{\beta x}$, $-\frac{1}{x}\log(1-x)$. Замѣтимъ въ заключеніе, что найденныя выше два частныхъ рѣшенія совпадутъ въ одно при $\gamma=1$; но извѣстно, что достаточно знать одно рѣшеніе, чтобы найти и общій интегралъ. Такъ, напримѣръ, при $\beta=1$ уравненіе будетъ

$$(x-x^2)y''+\{1-(2+\alpha)x\}y'=\alpha y,$$

и допускаетъ частное рѣшеніе $(1-x)^{-\alpha}$. Простое вычисленіе (§ 793, b) покажетъ, что общій интегралъ будетъ

$$y=a(1-x)^{-\alpha}+b\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1-x}{1+\alpha}+\frac{(1-x)^2}{2+\alpha}+\frac{(1-x)^3}{3+\alpha}+\cdots\right),$$

предполагая, конечно, что правая часть имѣетъ смыслъ.

[**Примѣчаніе** (Г. Эскамара, изъ итальянскаго изданія 1905 года). Въ противномъ случаѣ, т. е. при $\alpha=-n$, гдѣ $n=1,2,3,\ldots$, получимъ

$$y=(1-x)^n\left\{a+b\log\frac{x}{1-x}\right\}+b\left\{(1-x)^{n-1}+\frac{1}{2}(1-x)^{n-2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$$

$$\left(\text{При } \alpha=0,\ y=a+b\log\frac{x}{1-x}\right).$$

Впрочемъ, затрудненія, встрѣтившагося при $\gamma=1$, можно избѣжать, замѣтивъ, что предложенное уравненіе не измѣнитъ своего вида при замѣнѣ γ на $1+\alpha+\beta-\gamma$, если при этомъ замѣнимъ x на $1-x$. Отсюда слѣдуетъ, что y можно писать также въ видѣ:

$$y=a(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ 1-\alpha-\beta+\gamma,\ 1-x)+$$
$$+bf(\alpha,\ \beta,\ 1+\alpha+\beta-\gamma,\ 1-x),$$

а въ частномъ случаѣ $\beta=\gamma=1$

$$y=a(1-x)^{-\alpha}+bf(\alpha,\ 1,\ 1+\alpha,\ 1-x)\,].$$

---

[1]) См. Novi „Algebra superiore“ стр. 286 или Jordan „Cours d'Analyse“ т. I, стр. 154.

Уравненія со многими перемѣнными.

796. Уравненія съ полными дифференціалами (Totale Differentialgleichungen). Положимъ, что вмѣсто уравненія $u\,dx + v\,dy = 0$ (разсмотрѣннаго выше), дано уравненіе

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0, \tag{17}$$

въ которомъ u, v, w извѣстныя функціи отъ x, y, z. Если одну изъ трехъ перемѣнныхъ, напримѣръ z, будемъ разсматривать, какъ функцію отъ двухъ другихъ (независимыхъ), то уравненіе (17), очевидно, разлагается на слѣдующія два:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w}, \tag{18}$$

откуда уже видно, что функціи u, v, w не вполнѣ произвольны. Дѣйствительно, такъ какъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{w} + \frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{u}{w}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{w} + \frac{u}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{v}{w},$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{w}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{w^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{w^2}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -\frac{1}{w}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{w^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{w^2}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z},$$

то приравнивая одно другому эти выраженія (§ 368), найдемъ

$$u\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{19}$$

Это необходимое условіе для существованія зависимости между тремя перемѣнными x, y, z, полные дифференціалы которыхъ связаны соотношеніемъ (17). Чтобы показать, что условіе (19) въ то же время достаточно, мы покажемъ, что если оно выполнено, то интегрированіе уравненія (17) или равносильныхъ ему уравненій (18) возможно. Второе уравненіе (18) можно разсматривать, какъ обыкновенное дифференціальное уравненіе перваго порядка съ двумя перемѣнными y и z (принимая x за постоянную). Обозначая черезъ $\varphi(x)$ произвольную функцію отъ одного x, можно написать общій интегралъ этого уравненія въ видѣ

$$f(x, y, z) = \varphi(x), \tag{20}$$

такъ какъ, хотя x и разсматривается, какъ постоянная, но функціи u и v отъ него зависятъ, что и надо обозначить. Замѣтимъ теперь,

что дифференцируя уравненіе (20) (при постоянномъ x), мы снова должны получить то дифференціальное уравненіе, интегрированіемъ котораго получилось (20). Отсюда получимъ (сравнивая два выраженія $\frac{\partial z}{\partial y}$)

$$\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial z} = \mu,$$

гдѣ μ прилично выбранная функція отъ x, y, z. Если хотимъ, чтобы и первое уравненіе (18) удовлетворилось, то должны выбрать функцію $\varphi(x)$ такъ, чтобы при дифференцированіи (20) по x (при постоянномъ y) получилось бы

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \mu u. \tag{21}$$

А для этого необходимо (и достаточно), чтобы $\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u$ была функціею одного x. Весь вопросъ сводится къ тому, чтобы показать, что при выполненіи условія (19), производная по y отъ $\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u$ равна нулю, при чемъ z разсматривается, какъ функція отъ x и y, опредѣляемая уравненіемъ (20). Иными словами должно быть

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) - \frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = 0.$$

Но мы имѣетъ также

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = \frac{\partial \mu v}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = \frac{\partial \mu w}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial z}.$$

Поэтому, если прибавимъ еще членъ

$$\frac{\partial \mu w}{\partial y} - \frac{\partial \mu v}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0,$$

умноженный на u, то послѣднее условіе приметъ видъ

$$u\left(\frac{\partial \mu w}{\partial y} - \frac{\partial \mu v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \mu u}{\partial z} - \frac{\partial \mu w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial \mu v}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial y}\right) = 0.$$

А это равенство тотчасъ приводится къ (19), потому что лѣвая его часть равна произведенію μ на лѣвую часть (19), сложенному съ выраженіемъ

$$u\left(w\frac{\partial \mu}{\partial y} - v\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) + v\left(u\frac{\partial \mu}{\partial z} - w\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) + w\left(v\frac{\partial \mu}{\partial x} - u\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0.$$

Если условіе (19) выполнено, то можно утверждать, что уравненіе (20), въ которомъ $\varphi(x)$ получается съ помощью квадратуры

изъ (21), будетъ интеграломъ уравненія (17). Замѣтимъ въ заключеніе, что лѣвая часть уравненія (17), когда оно интегрируемо, дѣлается точнымъ дифференціаломъ (§ 741) по умноженіи на выбранную надлежащимъ образомъ функцію отъ x, y, z. А именно, если напишемъ уравненіе (20) въ видѣ $\Phi(x, y, z) = \text{const}$. (перенося всѣ не постоянные члены въ лѣвую часть), то будемъ имѣть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \varphi'(x) = \mu u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \mu v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = \mu w,$$

откуда $\mu(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = d\Phi$. Геометрически разсмотрѣнный вопросъ сводится къ слѣдующему: дана нѣкоторая совокупность безконечнаго числа плоскостей (уравненія которыхъ получаются изъ одного при безчисленномъ множествѣ значеній одного независимаго параметра) (см. § 782) и требуется найти систему поверхностей, касающихся этихъ плоскостей въ назначенныхъ точкахъ. Изъ предыдущихъ изслѣдованій видно, что рѣшеніе этой задачи вообще невозможно. Причина этой невозможности заключается въ томъ, что ищутся поверхности (которыя могутъ и не существовать). Замѣтимъ, что, напротивъ того, существуетъ безчисленное множество кривыхъ линій, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ, даже тогда, когда условіе (19) не выполнено. Дѣйствительно, исключеніе z изъ уравненій (17) и произвольной зависимости $\varphi(x, y, z) = 0$ приводитъ къ дифференціальному уравненію перваго порядка съ двумя перемѣнными, которое всегда имѣетъ безконечное множество рѣшеній, получаемыхъ изъ одного при безчисленномъ множествѣ значеній одного параметра (произвольной постоянной).

797. Обыкновенныя совокупныя дифференціальныя уравненія. Поставимъ теперь вопросъ, каковы должны быть соотношенія между тремя перемѣнными x, y, z для того, чтобы дифференціалы ихъ были пропорціональны извѣстнымъ функціямъ u, v, w отъ x, y, z:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \tag{22}$$

Геометрически это значитъ во всѣхъ точкахъ пространства a priori назначить направленія касательныхъ къ неизвѣстнымъ кривымъ. Исходя изъ этой точки зрѣнія, не трудно усмотрѣть (см. § 782), что существуетъ ∞^2 такихъ кривыхъ. Слѣдовательно, уравненія, составляющія интегральную систему уравненій (22), должны быть вида

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad G(x, y, z, a, b) = 0, \tag{23}$$

гдѣ a и b произвольныя постоянныя. И въ самомъ дѣлѣ, уравненія (22) представляютъ не что иное, какъ два обыкновенныя диффе-

ренціальныя уравненія перваго порядка, которыя въ болѣе общей формѣ могутъ быть написаны слѣдующимъ образомъ:

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad g(x, y, z, y', z') = 0. \tag{24}$$

Рѣшимъ эти уравненія относительно z и z': $z = \varphi(x, y, y')$, $z' = \psi(x, y, y')$. Приравнивая второе выраженіе производной первому, получимъ соотношеніе между x, y, y', и y'', т. е. дифференціальное уравненіе 2-го порядка между двумя перемѣнными x и y. Интегрируя это уравненіе, получимъ выраженіе y черезъ x и двѣ произвольныя постоянныя a и b. Подставляя выраженія y и y' въ $z = \varphi(x, y, y')$, получимъ и выраженіе z черезъ x, a и b. Такимъ образомъ и будутъ проинтегрированы уравненія (24) или (22). Замѣтимъ далѣе, что уравненія (24) могутъ быть представлены въ видѣ (22), если рѣшимъ первыя относительно $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. Подобнымъ же образомъ обстоитъ дѣло, когда предложены три обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненія перваго порядка съ 4-мя перемѣнными x, y, z, t. Представимъ себѣ эти уравненія рѣшенными относительно производныхъ x, y, z по t: $x' = u$, $y' = v$, $z' = w$, гдѣ u, v, w будутъ извѣстныя функціи отъ x, y, z, t. Выведемъ изъ перваго $y = \varphi(t, x, z, x')$ и подставимъ выраженія y и y' въ остальныя два; эти послѣднія примутъ видъ:

$$f(t, x, z, x', z', x'') = 0, \quad g(t, x, z, x', z') = 0.$$

Отсюда выведемъ выраженія $z = \psi(t, x, x', x'')$ и $z' = \chi(t, x, x', x'')$ и приравняемъ второе производной перваго. Полученное такимъ путемъ соотношеніе между t, x, x' x'', x''' будетъ обыкновенное дифференціальное уравненіе 3-го порядка, интегрированіемъ котораго найдемъ выраженіе x черезъ t и три произвольныя постоянныя. Подставляя найденное выраженіе x и его производныхъ въ $z = \psi(t, x, x', x'')$, а затѣмъ выраженіе x и z въ $y = \varphi(t, x, z, x')$, получимъ и выраженія z и y въ t и тѣхъ же трехъ произвольныхъ постоянныхъ. Вообще, если дана система n обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ $n+1$ перемѣнными:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \cdots = \frac{dx_n}{u_n},$$

то интегрированіе этой системы, путемъ исключенія $n-1$ перемѣнныхъ приводится къ интегрированію одного дифференціальнаго уравненія n-го порядка съ двумя перемѣнными, и такимъ образомъ система совокупныхъ интегральныхъ уравненій получается въ видѣ

$$F_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

куда входятъ n произвольныхъ постоянныхъ. Благодаря присутствію этихъ постоянныхъ систему n функцій отъ одной независимой

перемѣнной, которыя должны принимать заранѣе данныя значенія для даннаго значенія независимой перемѣнной можно опредѣлять системою n совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

798. Уравненія въ частныхъ производныхъ. Простѣйшее уравненіе въ частныхъ производныхъ (§ 781) есть то, которое связываетъ частныя производныя p и q неизвѣстной функціи z отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y съ этою функціею и независимыми перемѣнными. Мы остановимся здѣсь главнымъ образомъ на такихъ уравненіяхъ, въ которыя p и q входятъ линейно, и которыя поэтому и называются линейными. Ихъ общій видъ есть

$$up + vq = w, \tag{25}$$

гдѣ u, v, w извѣстныя функціи отъ x, y, z. Вопросъ о разысканіи всѣхъ функцій z, удовлетворяющихъ такому уравненію, геометрически сводится къ разысканію всѣхъ поверхностей, которыя въ каждой точкѣ (x, y, z) касаются прямой, проведенной черезъ эту точку въ направленіи (u, v, w), потому что уравненіе (25) можно разсматривать, какъ условіе перпендикулярности прямой даннаго направленія (u, v, w) съ нормалью $(p, q, -1)$ къ искомой поверхности (§ 659). Разсматривая вопросъ съ этой точки зрѣнія, не трудно видѣть, что всякая такая поверхность будетъ общимъ мѣстомъ кривыхъ нѣкотораго семейства, принадлежащаго къ дважды безконечной системѣ кривыхъ (23). Совокупность всѣхъ этихъ поверхностей должна, слѣдовательно, получиться, если установимъ нѣкоторую произвольную зависимость между постоянными a и b въ уравненіяхъ (23). Уравненіе всякой поверхности, удовлетворяющей уравненію (25) должно поэтому получиться черезъ исключеніе a и b изъ уравненій (23) и произвольнаго соотношенія $\omega(a, b) = 0$. Этотъ предугаданный результатъ тотчасъ подтвердится вычисленіемъ. Положимъ, что $f(x, y, z) = 0$ есть такое соотношеніе, которое опредѣляетъ z, какъ функцію отъ x и y, удовлетворяющую уравненію (25). Полагая въ (25) $p = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}$, $q = -\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}$, приводимъ уравненіе (25) къ виду

$$u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{26}$$

линейнаго и однороднаго уравненія, которое тотчасъ можно проинтегрировать, если извѣстна система интегральныхъ уравненій системы (22). Дѣйствительно, представимъ себѣ, что уравненія (23) рѣшены относительно постоянныхъ:

$$\varphi(x, y, z) = a, \quad \psi(x, y, z) = b. \tag{27}$$

Замѣтимъ, что функціи φ и ψ независимы одна отъ другой; иначе, задавъ опредѣленное значеніе для a мы не могли бы выбрать b по произволу. Теперь оказывается, что уравненіе (26) удовлетворяется, какъ при $f=\varphi$, такъ и при $f=\psi$, потому что, дифференцируя уравненія (27) и замѣняя dx, dy, dz пропорціональными имъ u, v, w, получаемъ

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\quad u\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}+w\frac{\partial\psi}{\partial z}=0. \tag{28}$$

Понимая теперь подъ f какую угодно функцію, удовлетворяющую условію (26), замѣчаемъ, что совмѣстность этого условія съ (28) требуетъ, чтобы

$$\frac{\partial(f,\ \varphi,\ \psi)}{\partial(x,\ y,\ z)}=0.$$

Слѣдовательно (§ 579), между f, φ и ψ должно существовать соотношеніе. Оно непремѣнно содержитъ въ себѣ f, иначе φ и ψ не были бы независимыми. Итакъ, $f=\omega(\varphi,\ \psi)$. Что касается ω, то это символъ совершенно произвольной функціи. Какъ бы мы ни выбирали ω, всегда будемъ имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

откуда

$$\sum u\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\sum u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\sum u\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

и уравненіе (26) удовлетворяется. Теперь мы и видимъ, что достаточно положить $\omega(\varphi,\ \psi)=0$, чтобы удовлетворить уравненію (25). Общнѣе, интегрированіе линейнаго уравненія съ n независимыми перемѣнными

$$u_1\frac{\partial x}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial x}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial x}{\partial x_n}=u, \tag{29}$$

сводится къ интегрированію линейнаго и однороднаго уравненія съ $n+1$ независимыми перемѣнными

$$u_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+u_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0, \tag{30}$$

а для интегрированія послѣдняго нужно интегрировать систему обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx}{u}=\frac{dx_1}{u_1}=\frac{dx_2}{u_2}=\cdots=\frac{dx_n}{u_n},$$

и представитъ интегральную систему въ видѣ

$$\varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Самое общее рѣшеніе уравненія (30) будетъ $f = \omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, а уравненіе (29) удовлетворится самымъ общимъ образомъ, если положимъ $\omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$, гдѣ w есть символъ произвольной функціи.

799. Полезно замѣтить, что, зная одно частное рѣшеніе $f = \varphi$ уравненія (26), можно упростить интегрированіе, сводя число независимыхъ перемѣнныхъ съ трехъ на двѣ. Такъ какъ φ заключаетъ въ себѣ по крайней мѣрѣ одну изъ перемѣнныхъ, то всегда можно предположить, что φ зависитъ отъ z, измѣняя, если понадобится, обозначеніе перемѣнныхъ; слѣдовательно, можно принять φ вмѣсто z за независимую перемѣнную. Заключая въ скобки частныя производныя, взятыя по новой системѣ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, φ, получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

и уравненіе (26) приведется къ $u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$. Вопросъ приводится, слѣдовательно, къ интегрированію обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія съ двумя перемѣнными: $y' = \chi(x, y, \varphi)$, въ которомъ φ трактуется, какъ постоянная. Общнѣе, если извѣстны ν независимыхъ частныхъ рѣшеній уравненія (30), т. е. ν функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, удовлетворяющихъ уравненію (30), при чемъ ни одна изъ нихъ не есть функція другихъ, то можемъ преобразовать уравненіе (30) въ другое, подобное ему, съ $n - \nu + 1$ независимыми перемѣнными. Къ этому послѣднему приходимъ, принявъ за новыя независимыя перемѣнныя функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, взамѣнъ нѣкоторыхъ ν прежнихъ.

800. Чтобы интегрировать, слѣдуя Лагранжу, какое угодно уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка съ двумя независимыми перемѣнными

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{31}$$

ищемъ еще одно соотношеніе $g(x, y, z, p, q) = 0$, чтобы изъ него и даннаго (31) выразить p и q въ функціяхъ отъ x, y, z, и затѣмъ найти z интегрированіемъ уравненія $dz = p\,dx + q\,dy$ съ полными дифференціалами. Взявъ частныя производныя по x, y, z отъ $f = 0$ и $g = 0$ получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0.$$

Исключимъ отсюда $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial q}{\partial y}$, и полученныя затѣмъ выраженія остальныхъ четырехъ производныхъ подставимъ въ уравненіе

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z},$$

выражающее (§ 741) необходимое и достаточное условіе интегрируемости уравненія $dz = p\,dx + q\,dy$. Тогда получимъ уравненіе

$$(32)\quad \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y} + \left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial g}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial q}.$$

Это линейное однородное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка съ пятью независимыми перемѣнными (x, y, z, p, q). Его интегрированіе приводится, какъ мы видѣли (§ 798) къ интегрированію системы четырехъ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій перваго порядка. Впрочемъ, по важному замѣчанію Шарпитта (Charpit) достачно знать одинъ лишь интегралъ (рѣшеніе) уравненія (32) съ одной произвольной постоянной, чтобы затѣмъ, съ помощью интегрированія уравненія $dz = p\,dx + q\,dy$, получить самое общее выраженіе функціи $z = F(x, y, a, b)$, удовлетворяющее уравненію (31). При этомъ a и b разсматриваются, какъ постоянныя или какъ перемѣнныя, подчиненныя извѣстнымъ условіямъ. Положимъ, для большой ясности *), что уравненіе (31) приведено къ виду: $z = \Phi(x, y, p, q)$; пусть $G(x, y)$ какая нибудь функція, ему удовлетворяющая, такъ что тождественно будемъ имѣть $G = \Phi\left(x, y, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right)$. Съ другой стороны, опредѣлимъ a и b изъ уравненій

$$(33)\quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y}.$$

Принимая во вниманіе, что предложенное уравненіе должно удовлетворяться независимо отъ a и b, когда положимъ $z = F(x, y, a, b)$, мы видимъ тотчасъ, что

$$F(x, y, a, b) = \Phi\left(x, y, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \Phi\left(x, y, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right) = G(x, y).$$

Слѣдовательно, $F(x, y, a, b)$ заключаетъ въ себѣ всѣ возможныя функціи z, удовлетворяющія данному уравненію, и на этомъ основаніи называется полнымъ интеграломъ этого уравненія. Между тѣмъ, взявъ частныя производныя отъ тождества $F = G$, и принимая во вниманіе уравненіе (33), видимъ, что должно быть

$$(34)\quad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

*) Считая пока a и b постоянными.

Эти соотношенія, удовлетворяющіяся тождественно при a и b постоянныхъ, остаются справедливыми и въ томъ случаѣ, когда a и b будутъ надлежащимъ образомъ выбранныя функціи отъ x и y. Эти функціи будутъ либо независимы, либо въ произвольной зависимости одна отъ другой. Въ первомъ случаѣ опредѣлитель $\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)}$ не равенъ нулю, а потому должно быть $\frac{\partial F}{\partial a}=0$, $\frac{\partial F}{\partial b}=0$, откуда для a и b получаются двѣ различныя функціи, подстановка которыхъ въ $z=F(x, y, a, b)$ даетъ такъ называемый особенный интегралъ. Во второмъ случаѣ, когда $b=\omega(a)$, гдѣ ω произвольная функція, уравненія (34) приводятся къ одному $\frac{\partial F}{\partial a}+\omega'(a)\frac{\partial F}{\partial b}=0$, и для a и b получимъ выраженія, въ составъ которыхъ входитъ символъ произвольной функціи. Подставляя ихъ въ $z=F(x, y, a, b)$ получимъ такъ называемый общій интегралъ даннаго уравненія [1]).

ПРИБАВЛЕНІЕ

Функція Вейерштрасса.

801. Функція, на которую мы указали въ концѣ § 282, имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$f(x) = \cos \pi x + b \cos \pi a x + b^2 \cos \pi a^2 x + b^3 \cos \pi a^3 x + \cdots$$

при нѣкоторыхъ, надлежащимъ образомъ выбранныхъ, a и b. Извѣстно, что при $|b| < 1$ этотъ рядъ равномѣрно сходящійся (§ 319) и, слѣдовательно, его сумма — непрерывная функція отъ x (§ 322). Мы покажемъ теперь, что, несмотря на непрерывность, $f(x)$ ни при какомъ значеніи x не имѣетъ производной. Сперва, фиксируя значеніе x, составимъ послѣдовательность такихъ цѣлыхъ (положительныхъ или отрицательныхъ) чиселъ a_0, a_1, a_2, ..., чтобы всѣ разности

$$x - a_0, \quad ax - a_1, \quad a^2x - a_2, \quad a^3x - a_3, \quad \ldots$$

были больше $-\frac{1}{2}$ и не больше $\frac{1}{2}$; для этого достаточно взять $-a_n = [\frac{1}{2} - a^n x]$. Положимъ теперь

$$x_n = \frac{a_n - 1}{a^n}, \quad x_n' = \frac{a_n + 1}{a^n},$$

такъ что

$$\tfrac{1}{2} < a^n (x - x_n) \leqq \tfrac{3}{2}, \quad \tfrac{1}{2} \leqq a^n (x_n' - x) < \tfrac{3}{2}.$$

Если $a \geqq 3$, то будемъ имѣть

$$x - x_{n+1} \leqq \frac{3}{2\, a^{n+1}} \leqq \frac{1}{2\, a^n} < x - x_n,$$

и поэтому

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots, \quad \lim_{n=\infty} x_n = x.$$

Точно также

$$x_0' > x_1' > x_2' > x_3' > \cdots, \quad \lim_{n=\infty} x_n' = x.$$

Теперь разсмотримъ два отношенія приращеній

$$\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}, \qquad \frac{f(x_n')-f(x)}{x_n'-x}.$$

Первое будетъ лѣвостороннее, второе правостороннее. Лѣвостороннее отношеніе приращеній

$$\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n} = \sum_0^\infty b^\nu \frac{\cos(\pi a^\nu x) - \cos(\pi a^\nu x_n)}{x-x_n}.$$

разлагается на слагаемыя

$$(1) \quad \sum_0^{n-1} (ab)^\nu \frac{\cos(\pi a^\nu x)-\cos(\pi a^\nu x_n)}{a^\nu (x-x_n)} + \sum_0^\infty b^{n+\nu} \frac{\cos(\pi a^{n+\nu} x)-\cos(\pi a^{n+\nu} x_n)}{x-x_n}.$$

Относительно первой суммы замѣтимъ, что

$$\frac{\cos(\pi a^\nu x)-\cos(\pi a^\nu x_n)}{a^\nu (x-x_n)} = -\pi \sin\left(\pi a^\nu \frac{x+x_n}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi a^\nu \dfrac{x-x_n}{2}\right)}{\pi a^\nu \dfrac{x-x_n}{2}}.$$

Такъ какъ абсолютныя величины $\sin x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ не больше 1, то абсолютная величина послѣдняго выраженія не больше π. Отсюда слѣдуетъ, если предположимъ $b>0$, что первая изъ суммъ въ (1) по абсолютной величинѣ будетъ меньше, чѣмъ

$$\pi \sum_0^{n-1} (ab)^\nu = \pi \frac{(ab)^n - 1}{ab-1} < \frac{\pi}{ab-1} (ab)^n.$$

Слѣдовательно, ее можно представить въ видѣ $\dfrac{\pi\theta}{ab-1}(ab)^n$, гдѣ θ содержится между -1 и $+1$. Что касается второй суммы въ формулѣ (1), то замѣтимъ, что

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x) - \cos(\pi a^{n+\nu} x_n)$$
$$= -\cos(\pi a^{n+\nu} x_n)\{1-\cos(\pi a^{n+\nu}(x-x_n))\} - \sin(\pi a^{n+\nu} x_n)\sin(\pi a^{n+\nu}(x-x_n)).$$

Предполагая теперь, что a нечетное цѣлое число, мы видимъ, что дуга

$$\pi a^{n+\nu} x_n = \pi a^\nu \cdot a^n x_n = \pi a^\nu (a_n - 1)$$

есть кратное отъ π и при томъ четное или нечетное, смотря по

тому, будетъ ли a_n нечетное или четное число. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x_n) = -(-1)^{a_n}, \quad \sin(\pi a^{n+\nu} x_n) = 0,$$

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x) - \cos(\pi a^{n+\nu} x_n) = (-1)^{a_n}\{1 - \cos(\pi a^{n+\nu}(x - x_n))\}.$$

Поэтому разсматриваемая сумма приводится къ

$$(2) \qquad (-1)^{a_n}(ab)^n \sum_0^\infty b^\nu \frac{1 - \cos(\pi a^{n+\nu}(x - x_n))}{a^n(x - x_n)}.$$

Всѣ члены подъ знакомъ суммы положительны или равны нулю. Первый членъ равенъ

$$\frac{1 - \cos(\pi a^n (x - x_n))}{a^n (x - x_n)}$$

Дуга $\pi a^n (x - x_n) > \frac{1}{2}\pi$, и $\leqq \frac{3}{2}\pi$. Ея косинусъ, слѣдовательно, меньше нуля или равенъ нулю, поэтому разсматриваемый членъ, въ которомъ числитель не меньше 1, а знаменатель не больше $\frac{3}{2}$, будетъ не меньше $\frac{2}{3}$. А вся сумма въ формулѣ (2) поэтому навѣрно больше $\frac{2}{3}$. Отсюда заключаемъ, что выраженіе (2) можно представить въ видѣ $(-1)^{a_n} \cdot \frac{2}{3} k (ab)^n$, гдѣ $k > 1$. Итакъ, будемъ имѣть

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = (-1)^{a_n}(ab)^n \left(\frac{2k}{3} + \frac{\pi\theta}{ab - 1}\right).$$

Выраженіе въ скобкахъ всегда больше, чѣмъ

$$\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{ab - \left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)}{ab - 1},$$

и будетъ поэтому положительнымъ при $ab \geqq 1 + \frac{3}{2}\pi$. Съ другой стороны, извѣстно, что $(ab)^n$ съ возрастаніемъ n превзойдетъ всякое данное чѝсло. Итакъ, лѣвостороннеее отношеніе приращеній возрастаетъ безпредѣльно, когда независимая перемѣнная стремится къ предѣлу x проходя послѣдовательность значеній $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Совершенно подобное же вычисленіе даетъ

$$\frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} = -(-1)^{a_n}(ab)^n \left(\frac{2k'}{3} + \frac{\pi\theta'}{ab - 1}\right),$$

гдѣ $k' > 1$, а θ' лежитъ между -1 и $+1$. Поэтому правостороннее отношеніе тоже безпредѣльно растетъ по абсолютной величинѣ, но при всякомъ значеніи n имѣемъ знакъ, противоположный знаку лѣвосторонняго отношенія, когда независимая перемѣнная стремится къ тому же предѣлу x, проходя послѣдовательность значеній $x_0', x_1', x_2', \ldots$.

Кромѣ того Винеръ (Wiener) [1]) доказалъ, что можно составить и другія послѣдовательности, для которыхъ отношенія приращеній будутъ стремиться къ произвольно заданнымъ предѣламъ. Винеръ воспользовался также функціей Вейерштрасса, чтобы показать (см. § 692, b), что поверхность, не будучи линейчатой, можетъ быть развертывающеюся. Разумѣется, матеріально такую поверхность нельзя осуществить, потому что у нея нѣтъ касательной плоскости ни въ одной точкѣ [2]).

Нѣкоторыя свѣдѣнія объ исчисленіи конечныхъ разностей.

802. Когда дана нѣкоторая послѣдовательность чиселъ $u_0, u_1, u_2, \ldots$, то конечною разностью или просто разностью какого нибудь члена называютъ то число, которое надо съ нимъ сложить, чтобы получить слѣдующій членъ. Составленіе разностей членовъ нѣкоторой послѣдовательности есть операція, обозначаемая символомъ Δ:

$$\Delta u_p = u_{p+1} - u_p.$$

Простой переходъ отъ одного члена къ слѣдующему (замѣна одного другимъ) можетъ быть также разсматриваема, какъ нѣкоторая операціи ∇ такого рода, что

$$\nabla u_p = u_{p+1}.$$

Правая часть есть не что иное, какъ $u_p + \Delta u_p$ и потому можно сказать, что операціи Δ и ∇ находятся между собою въ символической зависимости $\nabla = 1 + \Delta$. Если же въ выраженіи Δu_p замѣнимъ u_{p+1} черезъ ∇u_p, то получимъ $\Delta = \nabla - 1$.

803. Мы покажемъ теперь, что знаки операціи Δ и ∇ подчиняются алгебраическому вычисленію, по правиламъ, изложеннымъ въ § 350. Сперва замѣтимъ, что какъ p — кратное примѣненіе операціи Δ надъ u_q, такъ и q — кратное ея примѣненіе къ u_p, даютъ u_{p+q}, такъ что имѣемъ

$$\nabla^p u_q = \nabla^q u_p = u_{p+q},$$

---

[1]) „Crelle's Journal", 1881. Стр. 221.

[2]) „Lehrbuch der darstellenden Geometrie". Томъ II, Стр. 33.

или, подставляя $\nabla^v u_0$ вмѣсто u_v,

$$\nabla^p \cdot \nabla^q = \nabla^q \cdot \nabla^p = \nabla^{p+q}.$$

Далѣе, замѣтимъ, что операціи Δ и ∇ могутъ быть переставляемы, потому что $\nabla \Delta u_p$ изображаетъ членъ, слѣдующій за Δu_p въ послѣдовательности Δu_0, Δu_1, Δu_2, ..., т. е. Δu_{p+1}, вмѣсто котораго, очевидно, можно писать $\Delta \nabla u_p$. Итакъ, $\nabla \Delta = \Delta \nabla$. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ операцій Δ и ∇, можно производить въ какомъ угодно порядкѣ. Далѣе, такъ какъ разность суммы, очевидно, равна суммѣ разностей слагаемыхъ членовъ, то

$$\Delta^2 = \Delta(\nabla - 1) = \Delta\nabla - \Delta = \nabla\Delta - \Delta$$
$$= \nabla(\nabla - 1) - (\nabla - 1) = (\nabla - 1)^2.$$

Общнѣе, допустивъ, что

$$\Delta^p = (\nabla - 1)^p,$$

получимъ

$$\Delta^{p+1} = \Delta(\nabla - 1)^p = (\nabla - 1)^p \Delta = (\nabla - 1)^{p+1},$$

такъ что вышеуказанная формула справедлива при всякомъ p. Отсюда вытекаетъ, что для выраженія p-ой разности перваго члена послѣдовательности u_0, u_1, u_2, ..., имѣемъ

$$\Delta^p u_0 = u_p - \frac{p}{1} u_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} u_{p-2} - \cdots \pm u_0. \tag{1}$$

Для любого другого члена имѣемъ

$$\Delta^p u_q = \Delta^p \nabla^q u_0 = \nabla^q \Delta^p u_0 = \nabla^q (\nabla - 1)^p u_0,$$

т. е.

$$\Delta^p u_q = u_{p+q} - \frac{p}{1} u_{p+q-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} u_{p+q-2} - \cdots \pm u_q.$$

Если, наоборотъ, желаемъ возстановить самую послѣдовательность, зная послѣдовательныя разности перваго члена, то надо примѣнить формулу $\nabla^p = (1 + \Delta)^p$, которая даетъ

$$u_p = u_0 + \frac{p}{1} \Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^p u_0. \tag{2}$$

804. Разности отъ 0^q. Такъ называютъ для краткости послѣдовательныя разности перваго члена послѣдовательности чиселъ 0^q, 1^q, 2^q, 3^q, ... На основаніи формулы (1) имѣемъ

$$\Delta^p 0^q = p^q - \frac{p}{1}(p-1)^q + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}(p-2)^q - \cdots \pm p. \tag{3}$$

Составляя, напримѣръ, разности кубовъ, получаемъ слѣдующую таблицу чиселъ:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 & 343 & 512 & 729 & 1000 & \ldots \\
& 1 & 7 & 19 & 37 & 61 & 91 & 127 & 169 & 217 & 271 & \ldots \\
& & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & \ldots \\
& & & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & \ldots \\
& & & & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Какъ видимъ, четвертыя разности всѣхъ членовъ послѣдовательности равны нулю. Мы вскорѣ увидимъ, что это лишь частный случай одной общей теоремы, которая даетъ возможность обратно возстановить первоначальную послѣдовательность путемъ простого сложенія *). Это полезно на практикѣ при составленіи таблицъ квадратовъ и кубовъ. Возвратимся къ формулѣ (3) и выведемъ изъ нея простой способъ быстро вычислять разности отъ 0^q. Замѣнивъ p на $p-1$ и складывая получаемую формулу съ (3), найдемъ

$$\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q = p^q - \frac{p-1}{1}(p-1)^q + \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(p-2)^q - \cdots \pm 1.$$

Между тѣмъ правая часть, умноженная на p, даетъ

$$p^{q+1} - \frac{p}{1}(p-1)^{q+1} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^{q+1} - \cdots + p = \Delta^p 0^{q+1}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ

$$\Delta^p 0^{q+1} = p\,(\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q). \tag{4}$$

Примѣняя эту формулу, весьма легко составить слѣдующую таблицу:

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8
0^1	1							
0^2	1	2						
0^3	1	6	6					
0^4	1	14	36	24				
0^5	1	30	150	240	120			
0^6	1	62	540	1560	1800	720		
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320
	.	.	.	.	.	.	.	.

*) См. формулу (5) § 806, гдѣ $y^{(\nu)} = 0$ при $\nu = p, p+1, p+2, \ldots$, если y — цѣлая функція степени $< p$.

Элементы второго столбца получаются слѣдующимъ образомъ: начиная съ 2, прибавивъ это число къ 1 и удвоивъ сумму, получаемъ 6; прибавивъ 6 къ 1 и удвоивъ сумму, получимъ 14; $(14+1)2=30$ и т. д. Для составленія 3-го столбца поступаемъ аналогично, а именно: прибавляемъ первое число столбца къ стоящему отъ него слѣва числу предыдущаго столбца и сумму утраиваемъ и т. д. Такъ, напримѣръ, начиная съ 6, получаемъ $(6+6)\cdot 3=36$; далѣе $(36+14)\cdot 3=150$ и т. д.*) Таблицу, составленную такимъ образомъ, полезно имѣть передъ собою, когда надо вычислять разности отъ 0^q, что встрѣчается во многихъ интересныхъ вопросахъ Анализа.

805. Полезно также замѣтить нѣкоторыя свойства, которыя легко выводятся изъ (4). Прежде всего, $\Delta^p 0^q = 0$, когда $p > q$. Дѣйствительно, допуская, что это справедливо для нѣкотораго значенія q (а это очевидно при $q=1$), изъ формулы (4) тотчасъ увидимъ, что это будетъ справедливо и при замѣнѣ q на $q+1$. Изъ той же формулы вытекаетъ, если положимъ $q=p-1$, что $\Delta^p 0^p = p!$ Наконецъ, замѣтимъ, что $\Delta^p 0^q$ всегда дѣлится на $p!$ Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ формулу (4) слѣдующимъ образомъ:

$$\Delta^p 0^q = p\,\Delta^{p-1} 0^{q-1} + p\,\Delta^p 0^{q-1}$$

и примѣнимъ эту формулу нѣсколько разъ ко второму члену правой части. Тогда получимъ

$$\Delta^p 0^q = p\Delta^{p-1} 0^{q-1} + p^2\Delta^{p-1} 0^{q-2} + \cdots + p^{q-p+1}\Delta^{p-1} 0^{p-1}.$$

Слѣдовательно, $\Delta^p 0^q$ дѣлится на p; а такъ какъ во второй части входятъ только $(p-1)$-ыя разности, то можно сказать, что $\Delta^p 0^q$ дѣлится на $p(p-1)$. Отсюда слѣдуетъ, что каждый членъ второй части дѣлится на $p(p-1)(p-2)$, а потому и $\Delta^p 0^q$ дѣлится на $p(p-1)(p-2)$ и т. д. Такимъ путемъ съ помощью цѣпи послѣдовательныхъ заключеній ясно увидимъ, что $\Delta^p 0^q$ дѣлится на $p!$, каково бы ни было q.

806. Разности функцій. Положимъ теперь, что составлена послѣдовательность значеній $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, ... нѣкоторой функціи y. Разность p-го порядка (p-ая разность) перваго числа, по формулѣ (1), будетъ

$$\Delta^p y = f(x+ph) - \frac{p}{1} f(x+(p-1)h) + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2} f(x+(p-2)h) - \cdots \pm f(x).$$

Если разложимъ каждый членъ правой части по формулѣ Тэйлора, то найдемъ, что коэффиціентъ при h^ν будетъ

$$\frac{y^{(\nu)}}{\nu!}\left(p^\nu - \frac{p}{1}(p-1)^\nu + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^\nu - \cdots \pm p\right) = \frac{y^{(\nu)}}{\nu!}\Delta^p 0^\nu.$$

*) Первое число каждаго столбца равно первому числу предыдущаго, умноженному на p, гдѣ p номеръ столбца.

Въ силу перваго свойства, указаннаго въ предыдущемъ §, пропадутъ, слѣдовательно, всѣ члены съ h, h^2, ..., h^{p-1}; пропадетъ и членъ, независимый отъ h (что можно было предвидѣть), потому что онъ равенъ произведенію $f(x)$ на $(1-1)^p = 0$. Поэтому будемъ имѣть

$$\Delta^p y = \sum_{\nu=p}^{\nu=\infty} \frac{h^\nu y^{(\nu)}}{\nu!} \Delta^p 0^\nu. \tag{5}$$

Эта формула предполагаетъ возможность разложенія $f(x)$ въ безконечный рядъ. Чтобы имѣть общую формулу съ остаточнымъ членомъ, замѣтимъ, что $\Delta^p y$ при данномъ x есть функція отъ h, производная которой имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$p^n f^{(n)}(x+ph) - \frac{p}{1}(p-1)^n f^{(n)}(x+(p-1)h) + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^n f^{(n)}(x+(p-2)h) - \cdots$$

Слѣдовательно, если (§ 330) остановимъ разложеніе (5) на членѣ, соотвѣтствующемъ $\nu = n-1$, то надо еще добавить

$$R_n = \frac{h^n}{n!} \Delta^p (0^n f^{(n)}(x)),$$

гдѣ написанныя здѣсь разности должны быть вычислены для интерваловъ θh вмѣсто h. Буква θ, какъ обыкновенно, обозначаетъ число, лежащее между 0 и 1.

807. Упражненія. а) Для $y = e^x$ имѣемъ $\Delta y = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$ откуда

$$\Delta^p y = e^x (e^h - 1)^p.$$

Формула (5) дастъ, по раздѣленіи обѣихъ частей на e^x и замѣнѣ h на x,

$$(e^x - 1)^p = \sum_p^\infty \frac{x^\nu}{\nu!} \Delta^p 0^\nu.$$

Такъ какъ лѣвую часть можно написать въ видѣ

$$\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^p,$$

то тотчасъ найдемъ, пользуясь обозначеніемъ, уже объясненнымъ раньше (§ 467), формулу

$$\frac{\Delta^p 0^q}{q!} = \sum_q^p \frac{1}{r!}.$$

Эта формула позволяетъ непосредственно вычислить $\Delta^p 0^q$. Если желаемъ,

напримѣръ, имѣть $\Delta^4 0^7$, то нужно замѣтить, что разложенія 7 на четыре цѣлыя слагамыя будутъ

$$1+1+1+4, \quad 1+1+2+3, \quad 1+2+2+2.$$

Первое и третье считается по четыре раза, а второе 12 разъ. Слѣдовательно,

$$\Delta^4 0^7 = 7!\left(\frac{4}{4!}+\frac{12}{2!\,3!}+\frac{4}{2!\,2!\,2!}\right) = 8400.$$

b) Для функціи $y=\frac{1}{x}$ получаемъ

$$\Delta y = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h} = -\frac{h}{x(x+h)},$$

$$\Delta^2 y = \frac{h}{x(x+h)}-\frac{h}{(x+h)(x+2h)} = \frac{2h^2}{x(x+h)(x+2h)}, \ldots$$

и вообще

$$\Delta^p y = \frac{(-1)^p p!\, h^p}{x(x+h)(x+2h)\cdots(x+ph)}.$$

Положивъ $h=-1$ и замѣнивъ x на $\frac{1}{x}$ въ формулѣ (5), получимъ

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-px)} = \frac{1}{p!}(\Delta^p 0^p + x\,\Delta^p 0^{p+1} + x^2\,\Delta^p 0^{p+2} + \cdots).$$

Разлагая каждый множитель лѣвой части въ рядъ (геометрическую прогрессію) и представляя себѣ умноженіе выполненнымъ, легко найдемъ, что $\frac{\Delta^q 0^{p+q}}{p!}$ равна суммѣ всѣхъ произведеній изъ q цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, равныхъ или неравныхъ, не превосходящихъ p. Такимъ образомъ становится очевиднымъ доказанное въ концѣ § 805 свойство.

c) Объясненное въ § 802 обозначеніе позволяетъ воспользоваться символическимъ вычисленіемъ (§ 350), такъ что различные результаты получаются весьма легко. Замѣтимъ, что

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots = (1 + x\,\nabla + x^2\,\nabla^2 + \cdots)\,u_0,$$

и преобразуемъ выраженіе въ скобкахъ въ

$$\frac{1}{1-x\,\nabla} = \frac{1}{(1-x)-x\,\nabla} = \frac{1}{1-x} + \frac{x\,\Delta}{(1-x)^2} + \frac{x^2\,\Delta^2}{(1-x)^3} + \cdots.$$

Тогда тотчасъ получится

$$\sum_0^\infty u^\nu x_\nu = \sum_0^\infty \frac{x^\nu\,\Delta^\nu u_0}{(1-x)^{\nu+1}}.$$

Если, напримѣръ, данъ рядъ

$$f(x) = 1^q x + 2^q x^2 + 3^q x^3 + 4^q x^4 + \cdots,$$

то легко найти его сумму

$$f(x) = \frac{x\,\Delta 0^q}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 0^q}{(1-x)^3} + \cdots + \frac{x^q\,\Delta^q 0^q}{(1-x)^{q+1}}.$$

Мы видимъ, что $f(x)$ есть частное отъ дѣленія полинома степени q на $(1-x)^{q+1}$.

d) Подобнымъ же образомъ, когда данъ рядъ

$$f(x) = \frac{1^q x}{1!} + \frac{2^q x^2}{2!} + \frac{3^q x^3}{3!} + \frac{4^q x^4}{4!} + \cdots,$$

получимъ

$$f(x) = e^{xV} = e^x \cdot e^{x\Delta} = e^x \left(\frac{x}{1!}\Delta 0^q + \frac{x^2}{2!}\Delta^2 0^q + \cdots + \frac{x^q}{q!}\Delta^q 0_q \right).$$

Итакъ, сумма даннаго ряда есть произведеніе e^x на полиномъ степени q съ цѣлыми коэффиціентами. Отсюда слѣдуетъ, что сумма ряда

$$\frac{1^q}{1!} + \frac{2^q}{2!} + \frac{3^q}{3!} + \frac{4^q}{4!} + \cdots$$

равна цѣлому кратному отъ e. Напримѣръ, имѣемъ

$$\frac{1}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \cdots = 2e, \quad \frac{1}{1!} + \frac{8}{2!} + \frac{27}{3!} + \cdots = 5e.$$

808. Исчисленіе конечныхъ разностей имѣетъ много полезныхъ приложеній въ Алгебрѣ, о чемъ читатель можетъ узнать въ другихъ сочиненіяхъ [1]) *). Здѣсь мы ограничимся указаніемъ на то, какимъ образомъ оно можетъ служить для рѣшенія задачи интерполированія (§ 343), т. е. для составленія цѣлой функціи y, принимающей заранѣе заданныя значенія $y_0, y_1, y_2, \ldots$ при данныхъ значеніяхъ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ независимой перемѣнной. Представимъ себѣ еще третью перемѣнную t, которая соотвѣтственно парамъ $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots$ перемѣнныхъ x и y принимаетъ значенія 0, 1, 2, ... Перемѣнныя x и y, разсматриваемыя, какъ функціи отъ t, должны, слѣдовательно, при $t = p$ принимать значенія x_p и y_p, и такъ какъ вообще $u_p = (1+\Delta)^p u_0$, то мы можемъ написать

$$x = (1+\Delta)^t x_0, \quad y = (1+\Delta)^t y_0. \tag{6}$$

---

[1]) Bertrand. „Algèbre". 2-ая часть, стр. 239, 249 и др.

*) Для ознакомленія съ теоріею конечныхъ разностей и разнообразными ея приложеніями рекомендуемъ читателю сочиненіе академика А. Маркова „Исчисленіе конечныхъ разностей". 2-ое изданіе „Mathesis". 1910.

Исключеніе t изъ этихъ уравненій въ каждомъ данномъ случаѣ и дастъ искомое соотношеніе между x и y. Положимъ, напримѣръ, что $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ взяты черезъ равные промежутки h въ интервалѣ (x_0, x_n). Въ этомъ случаѣ $\Delta x_0 = h$, $\Delta^2 x_0 = 0$, $\Delta^3 x_0 = 0 \ldots$ и, слѣдовательно,

$$x = x_0 + t\Delta x_0 + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 x_0 + \cdots = x_0 + th,$$

что, впрочемъ, можно было предвидѣть. Значеніе t, получаемое отсюда, подставимъ во второе уравненіе (6). Оно обратится тогда въ Ньютонову формулу [1])

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{\Delta y_0}{1} + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1\cdot 2} + \cdots.$$

Свойства Бернулліевыхъ чиселъ.

809. Бернулліевы числа (§ 351) очень просто выражаются въ разностяхъ отъ 0^q. Дѣйствительно, разсмотримъ послѣдовательность чиселъ, первый членъ которой $u_0 = 0$, а остальные опредѣляются формулою

$$u_p = 0^q + 1^q + 2^q + \cdots + (p-1)^q.$$

Послѣдовательность первыхъ разностей и будетъ 0^q, 1^q, 2^q, ... Слѣдовательно, $\Delta^p u_0 = \Delta^{p-1} 0^q$. Отсюда вытекаетъ, если приложимъ формулу (2) § 803 и возьмемъ $p > q$, что

$$1^q + 2^q + \cdots + (p-1)^q = \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\Delta 0^q + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-q)}{1\cdot 2\cdots(q+1)}\Delta^q 0^q.$$

Если разложимъ правую часть по степенямъ p, то коэффиціентъ при p будетъ

$$-\tfrac{1}{2}\Delta 0^q + \tfrac{1}{3}\Delta^2 0^q - \tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q + \cdots.$$

Въ лѣвой части при $q > 1$ коэффиціентъ при p будетъ тотъ же, что въ $1^q + 2^q + \cdots + p^q$, т. е. (§ 358, а) B_q. При $q = 1$, онъ равенъ $B_1 - 1 = -B_1$. При всякомъ другомъ нечетномъ q, $B_q = 0$, поэтому можно сказать, что коэффиціентъ при p въ u_p всегда равенъ $(-1)^q B_q$. Итакъ, имѣемъ

$$(1) \qquad (-1)^{q-1} B_q = \tfrac{1}{2}\Delta 0^q - \tfrac{1}{3}\Delta^2 0^q + \tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q - \cdots.$$

---

[1]) Интересное приложеніе этой формулы къ отдѣленію корней даетъ теорема Choquet и Matrot (Mathesis, 1891, стр 218).

Эта формула послужитъ намъ для доказательства одной интересной теоремы.

810. Теорема Штаудта и Клàузена (Staudt und Clausen). Всякое Бернулліево число B_{2n} равно цѣлому числу безъ суммы обратныхъ величинъ тѣхъ простыхъ чиселъ, которыя дѣлаются дѣлителями $2n$, когда ихъ уменьшимъ на единицу [1]).

a) Докажемъ сперва слѣдующую лемму: Всякое составное число p, бо̀льшее 4, есть дѣлитель числа $(p-1)!$ Дѣйствительно, число p, если оно не простое и не квадратъ простого, можетъ быть разложено на два множителя, не равныхъ между собою и не равныхъ 1. Эти числа входятъ въ составъ произведенія $2\cdot3\cdots(p-1)$, слѣдовательно $(p-1)!$ дѣлится на p. Если p квадратъ простого числа μ, то произведеніе $2\cdot3\cdots(p-1)$ содержитъ въ себѣ множителей μ и 2μ и потому дѣлится на $2\mu^2$, а слѣдовательно, и на p, если $2\mu<p$, т. е. $\mu>2$. Слѣдовательно, между числами p, не простыми, только 2^2 составляетъ исключеніе.

b) Посмотримъ теперь когда $\Delta^{p-1}0^q$ дѣлится на p. По доказанной леммѣ оно дѣлится на p при всякомъ составномъ p, которое больше 4, потому что такое число p дѣлитъ $(p-1)!$, которое само есть дѣлитель $\Delta^{p-1}0^q$ (§ 805). Но и при $p=4$ будетъ то же самое, если q число четное; дѣйствительно, въ этомъ случаѣ прямо видно, что число

$$\tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q = \tfrac{1}{4}(3^{q-1}+1) - 3\cdot 2^{q-2}$$

есть число цѣлое, потому что $3^{q-1}+1$ дѣлится на 4. Остается разсмотрѣть случай p простого.

c) Раздѣлимъ q на $p-1$, и пусть $q=k(p-1)+r$. Такъ какъ $r<p-1$, то $\Delta^{p-1}0^r=0$. Поэтому, если въ извѣстной формулѣ (§ 804)

$$\Delta^{p-1}0^q = (p-1)^q - \frac{p-1}{1}(p-2)^q + \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(p-3)^q - \cdots \pm (p-1)$$

вмѣсто q поставимъ r, то получимъ

$$0 = (p-1)^r - \frac{p-1}{1}(p-2)^r + \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(p-3)^r - \cdots \pm (p-1),$$

при условіи, что r не равно 0, въ какомъ случаѣ въ правой части надо еще прибавить ∓ 1. Поэтому, $\Delta^{p-1}0^q$ выражается также формулою:

---

[1]) Приводимое здѣсь доказательство, принадлежитъ Radicke (Радике). См. „Nouvelle Correspondance Mathématique“, 1880, стр. 503.

$$\{(p-1)^q-(p-1)^r\}-\frac{p-1}{1}\{(p-2)^q-(p-2)^r\}+\cdots$$
$$\pm\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(2^q-2^r)+\varrho,$$

гдѣ, вообще, $\varrho=0$, а при $r=0$ имѣемъ $\varrho=(-1)^p$. Между тѣмъ, по теоремѣ Фермата [1]), простое число p, не дѣлящее a, дѣлитъ $a^{p-1}-1$. Иными словами, a^{p-1} есть кратное отъ p, увеличенное на 1, и то же самое, очевидно, можно сказать и объ $a^{k(p-1)}$. Отсюда слѣдуетъ, что разность

$$a^q-a^r=a^r\{a^{k(p-1)}-1\}$$

дѣлится на p. Итакъ, $\Delta^{p-1}0^q\equiv\varrho \pmod p$.

d) Изъ предыдущаго изслѣдованія вытекаетъ слѣдующее: $\Delta^{p-1}0^q$ не дѣлится на p только при p простомъ и q дѣлящемся на $p-1$. Въ послѣднемъ случаѣ остатокъ отъ дѣленія $\Delta^{p-1}0^q$ на p равенъ $(-1)^p$, т. е. равенъ -1 (или при $p=2$ сравнимъ съ $-1 \pmod p$)). Поэтому, если въ формулѣ (1) положимъ $q=2n$ и обозначимъ черезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ всѣ простыя числа, обладающія тѣмъ свойствомъ, что $2n$ дѣлится на $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$, то получимъ

$$B_{2n}=\text{цѣлое число}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdots\right),$$

что и выражаетъ теорему. Эта теорема облегчаетъ составленіе таблицъ Бернулліевыхъ чиселъ. Только съ ея помощью Адамсъ [2]) могъ довести вычисленіе этихъ чиселъ, начатое Омомъ (Ohm), до B_{124}. Кромѣ того, она до извѣстной степени раскрываетъ связь между теоріей Бернулліевыхъ чиселъ и нѣкоторыми трудными вопросами теоріи чиселъ. Такъ, напримѣръ, Куммеръ [3]) доказалъ знаменитую теорему Фермата о невозможности рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$, для всѣхъ простыхъ чиселъ, которыя не дѣлятъ числителей Бернулліевыхъ чиселъ $B_2, B_4, \ldots, B_{n-3}$.

811. Въ § 361 было показано, что Бернулліевы числа съ четнымъ показателемъ имѣютъ по очередно знаки $+$ и $-$; теперь мы покажемъ, слѣдуя Липшицу (Lipschitz) [4]), что, начиная съ нѣко-

---

[1]) Baltzer, „Elemente der Mathematik“ (2-ая часть, § 13) или Чебышевъ, „Теорія сравненій“, стр. 31—32.

[2]) „Crelle's Journal“ (1878, стр. 269). Чтобы составить себѣ понятіе о механическихъ затрудненіяхъ этого вычисленія, достаточно указать на то, что, начиная съ B_{100}, въ числителѣ будетъ болѣе 80 цифръ.

[3]) „Crelle's Journal“ (1850, стр. 130).

[4]) „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques (1886, стр. 142).

тораго мѣста, то же самое справедливо относительно цѣлыхъ частей этихъ чиселъ [1]). Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$B_2 = 1 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})$$
$$B_4 = 1 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5})$$
$$B_6 = 1 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7})$$
$$B_8 = 1 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5})$$
$$B_{10} = 1 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{11})$$
$$B_{12} = 1 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{13})$$
$$B_{14} = 2 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})$$

$$B_{16} = -6 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{17})$$
$$B_{18} = 56 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{19})$$
$$B_{20} = -528 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{11})$$
$$B_{22} = 6193 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{23})$$
$$B_{24} = -86579 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{13})$$
$$B_{26} = 1425518 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})$$
$$B_{28} = -27298230 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{29})$$

. . . . . .

Такъ какъ $B_{2p} > 0$ при p нечетномъ, то тѣмъ болѣе цѣлая его часть будетъ > 0, и надо поэтому доказать, что при p четномъ, не меньшемъ 8, цѣлая часть въ B_{2p} будетъ < 1. Положивъ $p = 2n$, найдемъ на основаніи формулы (2), что цѣлая часть B_{2n} навѣрно меньше, чѣмъ

$$B_{4n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n+1} < B_{4n} + \log(4n+1),$$

такъ какъ (§ 183) $H_n - \log n < H_{n-1} - \log(n-1) < \cdots < H_1 - \log 1 = 1$.

Между тѣмъ, припоминая формулу Стирлинга, имѣемъ (§ 365, а)

$$-B_{4n} = 2\frac{(4n)!}{(2\pi)^{4n}}\left(1 + \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \cdots\right) > 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n+\frac{1}{2}}.$$

Слѣдовательно, цѣлая часть въ B_{4n} меньше, чѣмъ

$$\log(4n+1) - 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n+\frac{1}{2}},$$

и теорема Липшица будетъ доказана, если удастся найти такое значеніе n, при которомъ послѣднее выраженіе < 0, потому что тогда для всякаго n, большаго найденнаго, оно также будетъ < 0. Для этой цѣли достаточно опредѣлить n такъ, чтобы одновременно было

$$2n > \pi e, \quad \log(4n+1) < 4\pi\sqrt{e}$$

и тотчасъ видно, что эти неравенства выполняются при $n = 5$.

---

[1]) Объ этихъ цѣлыхъ частяхъ трактуется въ нѣкоторыхъ изслѣдованіяхъ Эрмита (Hermite) въ „Crelle's Journal“ (1876, стр. 93).

Послѣдовательныя производныя функціи отъ функціи.

812. Положимъ, что послѣдовательныя производныя нѣкоторой функціи u извѣстны, и составимъ сумму (§ 467)

$$U_{p,\,i} = \sum_{p}^{i} \frac{u^{(r)}}{r!}.$$

Такъ какъ производная функціи $\varepsilon_r = \frac{u^{(r)}}{r!}$ равна $\varepsilon_r' = (r+1)\,\varepsilon_{r+1}$, то производная члена $\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_{r_i}\,(r_1+r_2+\cdots+r_i=p)$ въ суммѣ $U_{p,\,i}$ будетъ равна

$$\sum_{v=1}^{v=i}(r_v+1)\,\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_{r_{v-1}}\varepsilon_{r_v}\varepsilon_{r_{v+1}}\cdots\varepsilon_{r_i}. \tag{1}$$

Чтобы одинъ изъ этихъ членовъ совпалъ съ даннымъ членомъ

$$\varepsilon_{\varrho_1}\varepsilon_{\varrho_2}\varepsilon_{\varrho_3}\cdots\varepsilon_{\varrho_i}\quad(\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\cdots+\varrho_i=p+1) \tag{2}$$

суммы $U_{p+1,\,i}$, должно быть

$$r_1=\varrho_1,\ \ldots,\ r_{v-1}=\varrho_{v-1},\ r_v=\varrho_v-1,\ r_{v+1}=\varrho_{v+1},\ \ldots,\ r_i=\varrho_i$$

и, слѣдовательно, $\varrho_v>1$. Если это такъ, то членъ (2) встрѣтится ϱ_v разъ въ (1). Итакъ, вышеназванный членъ заключается въ $U'_{p,\,i}$ столько разъ, сколько единицъ въ суммѣ тѣхъ ϱ, которые больше 1, т. е. $(p+1-m)$ разъ, гдѣ m есть число тѣхъ ϱ, которые равны 1. Разсмотримъ теперь члены

$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3}\cdots\varepsilon_{r_{i-1}}\quad(r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{i-1}=p)$$

суммы $U_{p,\,i-1}$, и умножимъ каждый изъ нихъ на ε_1, помѣщая этотъ новый множитель послѣдовательно на каждое изъ i мѣстъ, которыя онъ можетъ занимать

$$\varepsilon_1\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_{i-1}},\quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{r_{i-1}},\quad\ldots,\quad \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\cdots\varepsilon_1.$$

Такимъ образомъ мы построимъ схему, въ которой членъ (2) будетъ заключаться m разъ, въ то время, какъ число всѣхъ членовъ схемы, очевидно, будетъ равно $i\,\varepsilon_1\,U_{p,\,i-1}$. Слѣдовательно, членъ (2) будетъ заключаться $(p+1-m)+m=p+1$ разъ въ $U'_{p,\,i}+i\,\varepsilon_1\,U_{p,\,i-1}$, и потому будемъ имѣть

$$U'_{p,\,i}=(p+1)\,U_{p+1,\,i}-iu'\,U_{p,\,i}. \tag{3}$$

Эта формула выражаетъ основное свойство алгоріѳма U. Она будетъ справедлива безъ ограниченій, если условимся полагать $U_{p,\,i}=0$, когда $i>p$ или $i<1$.

813. Теперь мы имѣемъ возможность найти общее выраженіе p-ой производной функціи $f(x)=\varphi(\psi(x))$, если послѣдовательныя производныя функціи φ и ψ извѣстны. Для простоты положимъ $y=f(x)$, $u=\psi(x)$, такъ что $y=\varphi(u)$, и докажемъ, что

$$\frac{y^{(p)}}{p!}=\frac{\varphi'(u)}{1!}U_{p,\,1}+\frac{\varphi''(u)}{2!}U_{p,\,2}+\frac{\varphi'''(u)}{3!}U_{p,\,3}+\cdots. \tag{4}$$

Взявъ производную по x, пользуясь при этомъ формулою (3), увидимъ, что полученное выраженіе будетъ отличаться отъ (4) только замѣною p на $p+1$; а такъ какъ формула (4), очевидно, справедлива при $p=1$, то она справедлива и вообще.

814. Приложенія. a) Производная порядка p отъ $y=\varphi(e^x)$ можетъ быть выражена съ помощью алгоріѳма (§ 807, a)

$$U_{p,\,i}=\sum_{p}^{i}\frac{e^x}{r!}=e^{ix}\sum_{p}^{i}\frac{1}{r!}=e^{ix}\frac{\Delta^i 0^p}{p!}.$$

Формула (4) даетъ

$$y^{(p)}=\frac{\varphi'(e^x)}{1}e^x\Delta 0^p+\frac{\varphi''(e^x)}{1\cdot 2}e^{2x}\Delta^2 0^p+\frac{\varphi'''(e^x)}{1\cdot 2\cdot 3}e^{3x}\Delta^3 0^p+\cdots. \tag{5}$$

b) Полагая, въ частности,

$$\varphi(x)=\frac{2x}{1+x^2},\ \text{такъ что}\ \frac{\varphi^{(i)}(1)}{i!}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{i-1}\sin(i-1)\frac{\pi}{4}$$

получимъ, какъ извѣстно (§ 354), $y=e^{Ex}$. Формула (5) дастъ тогда при $x=0$ слѣдующее выраженіе Эйлерова числа E_p черезъ разности отъ 0^p:

$$\begin{aligned}E_p=&-\frac{1}{4}(2\Delta^2 0^p-2\Delta^3 0^p+\Delta^4 0^p)\\&+\frac{1}{4^2}(2\Delta^6 0^p-2\Delta^7 0^p+\Delta^8 0^p)\\&-\frac{1}{4^3}(2\Delta^{10} 0^p-2\Delta^{11} 0^p+\Delta^{12} 0^p)+\cdots.\end{aligned}$$

c) При $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ формула (4) дастъ

$$\frac{y^{(p)}}{p!}=\sum_{i=1}^{i=p}\{(-1)^i y^{i+1}U_{p,\,i}\}.$$

Полагая послѣдовательно

$$u=\frac{1}{x}(1-e^{-x}),\quad u=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

и полагая въ послѣдней формулѣ $x=0$, получимъ слѣдующія выраженія Бернулліевыхъ и Эйлеровыхъ чиселъ:

$$\frac{B_p}{p!}=\sum_{i=1}^{i=p}\left\{(-1)^{i+p}\overset{i}{\underset{p}{S}}\frac{1}{(r+1)!}\right\},\qquad \frac{E_{2p}}{(2p)!}=\sum_{i=1}^{i=p}\left\{(-1)^{i}\overset{i}{\underset{p}{S}}\frac{1}{(2r)!}\right\}.$$

d) Полагая, наконецъ,

$$y=(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)\cdots=e^{u},$$

обозначимъ черезъ s_r и c_r суммы r-ыхъ степеней чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и произведеній ихъ по r. При $x=0$, имѣемъ, очевидно,

$$\frac{y^{(r)}}{r!}=c_r,\qquad \frac{u^{(r)}}{r!}=\frac{s_r}{r}.$$

Если въ формулѣ (4) положимъ послѣдовательно $\varphi(x)=e^x$, $\varphi(x)=\log x$. и $x=0$, то снова найдемъ формулы Варинга (§ 467)

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка*	*Напечатано*	*Нужно читать*
21	3 св.	ae^{ax}	ae^{ax}
65	2 сн.	Пропущено имя автора статьи: Клейнъ	
71	9 сн.	$\frac{\partial \varphi}{\partial s}$	$\frac{d \varphi}{d s}$
229	16 сн.	706	706
„	10 сн.	$\frac{x^2}{R} \varphi (R)$	$\frac{x^2}{R} \varphi' (R)$
238	9 сн.	$h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'}$	$(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'})$

Въ первой части книги замѣчены еще слѣдующія опечатки:

427	4 св.	253	353
„	9 св.	положивъ $n = 2p$	положивъ $n = 2p$, $x = 0$
„	13 св.	363	362

Предметный указатель.

(Числа обозначаютъ страницы книги).

Антиподэра. 133.

Асимптотическія линіи на поверхности. 184 (въ частности, на пов. вращенія. 229). Теорема Бельтрами относительно кривизны асимпт. линій. 204, 226. Теорема Эннепера относительно кручения асимпт. линій. 225.

Асимптоты плоской кривой. 33. Ас. алгебраической кривой. 98.

Астроида. 81, 131. Астроида, какъ гипоциклоида. 91.

Безконечно малая величина. 3. Предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ. 7.

Бернулли. Дифференціальное уравненіе Бернулли. 415.

Бернулліевы числа. Теорема Штаудта и Клаузена. 470.

Бертрановы кривыя. 175.

Биноміальные дифференціалы. 338.

Бинормаль къ кривой двоякой кривизны. 140.

Вейерштрассова функція (непрер. функція безъ производной). 459.

Вивіани. Кривая Вивіани. 373.

Винтовая линія, цилиндрическая. 170. Отношеніе кривизны постоянно. 171. Круговая винтовая линія. 168. Объ кривизны постоянны. 170. Коническая и цилиндро-коническая винтовая линія. 171.

Гамма (функція). Формула Лежандра для $\Gamma(x+\frac{1}{2})$. 360. Формула Раабе. 263. Формулы для вычисленія $\Gamma(x)$. 365. Таблицы для $\log \Gamma(x)$. 359.

Геликоидъ, развертывающійся. 170. Гел. съ направляющей плоскостью. 170. Онъ является единств. минимальной линейчатой поверхностью. 210.

Геодезическая кривизна кривой на поверхности. 205. Геод. кривизна обращается въ нуль на геодезич. линіяхъ. 206.

Геодезическія линіи на поверхности. 184. Формулы Вейнгартена. 229. Геодез. линіи на конусѣ. 173. Геодез. линіи на пов. вращенія. 230.

Геодезическое кручение кривой на поверхности. 221. Геод. кручение обращается въ нуль вдоль линій кривизны. 222.

Гиперболическія точки поверхности. 182.

Гипергеометрическій рядъ. 446. Диффер. уравненіе Гаусса. 446.

Главные радіусы кривизны пов. въ какой либо точкѣ ея. 207.

Главная нормаль къ кривой двоякой кривизны. 140.

Горловая (стрикціонная) линія линейчатой пов. 185.

Двойной интегралъ. 293, 300. Введеніе новыхъ перемѣнныхъ. 306.

Двойныя касательныя плоской кривой. 116.

Двойныя точки плоской кривой. 109.

Двурогъ. 115.

Декартовъ листъ. 100, 112.

Дифференціалъ функціи отъ одной перемѣнной. 9. Геом. значеніе дифференціала. 10. *n*-ый дифференціалъ. 11. Измѣненіе независимой перемѣнной. 15. Частный дифференціалъ функціи отъ многихъ перемѣнныхъ. 21. Полный дифференціалъ. 22. Его геометрическое значеніе. 24. Послѣдовательное дифференцированіе. 24.

Дифференціальное уравненіе (обыкновенное и въ частныхъ производныхъ). 410. Обыкн. диф. уравненія, которыя можно проинтегрировать. 414. Линейныя диф. уравненія. 435 (съ пост. коэффиціентами. 440). Обыкн. совокупныя диф. уравненія. 449. Диф. уравненія съ полными дифференціалами. 447. Линейныя уравненія въ частныхъ производныхъ. 451.

Дифференціальные параметры. 30.

Дуга. Дифференціалъ дуги плоской кривой. 52. Диф. дуги кривой двоякой кривизны. 139. Длина дуги кривой. 368.

Измѣненіе произвольныхъ постоянныхъ (метода интегр. линейныхъ диф. уравненій). 437.

Изолированныя точки кривой. 109.

Индикатриса (указательница) Дюпена. 183.

Интегралъ (неопредѣленный и опредѣленный). 237. Другое опредѣленіе. 241. Условія интегрируемостн. 246. Критеріумъ Римана. 256. Двойной интегралъ. 293, 300.

Интегралы обыкн. диф. уравненій; общій инт. 411; частн. инт. 411. особенный инт. 412.

Интегрированіе функціи путемъ подстановки. 266. Интегр. по частямъ. 277. Инт. путемъ разложенія въ рядъ. 287. Кратное интегр. 292. Инт. раціональныхъ дифференціаловъ, 323, ирраціональныхъ, 330, биноміальныхъ, 338, трасцендентныхъ 343, полныхъ дифференціаловъ, 321.

Исчисленіе конечныхъ разностей. 462.

Каналъ (поверхность). 196.

Кардіоида. 66. К., какъ эпициклоида, 90, какъ каустика круга, 138. Построеніе центровъ кривизны. 80.

Касаніе *n*-го порядка между плоскими кривыми. 120. Касаніе между поверхностями и кривыми. 160.

Касательная къ плоской кривой. 56. Кас. къ алгебраической кривой. 57. Кас. къ неплоск. кривой. 138. Кратчайшее разст. между двумя безконечно близкими касат. (теорема Бонне). 156.

Касательныя возврата къ плоской кривой. 116.

Касательныя изгиба къ плоской кривой. 116.

Касательныя и касательная плоскость къ поверхности. 178.

Катенондъ. 174. Кат. — единств. минимальная пов. вращенія. 210. Его асимптотическія линіи. 231.

Каустика плоской кривой относительно точки. 135.

Квадратриса. 65.

Классъ алгебраич. кривой. 116.

Клеро. Диф. уравненіе Клеро. 415.

Клотоида. 395.

Коническое сѣченіе. Различныя построенія центровъ кривизны. 83 и слѣд.

Конхоиды плоской кривой. 66.

Косыя круги. 168.

Кохлеоида. 64.

Кратныя точки плоской кривой. 108. Связь съ формой Гессе въ случаѣ алгебраической кривой. 111.

Кривизна плоской кривой, радіусъ кривизны, центръ кривизны. 72. Формулы для радіуса кривизны. 76.

Кривизна (первая) неплоской кривой, радіусъ кривизны. 148. Геом. значеніе знака кривизны. 153. Прямыя — единств. кривыя, у кот. кривизна всегда равна нулю. 149. Вторая кривизна неплоской кривой (см. крученіе).

Кривизна кривыхъ на поверхности. 202. Теорема Менье. 203. Теорема Эйлера относительно кривизнъ нормальныхъ сѣченій. 206.

Кривизна поверхности, средняя, 209, полная (Гауссова), 211. Неизмѣняемость полной кривизны при сгибаніи. 212. Поверхности съ постоянной средней кривизной; минимальныя пов. 210. Пов. съ пост. полной кривизной. 212.

Кривыя, плоскія 52, двоякой кривизны, 138.

Крученіе, радіусъ крученія кривой. 148, 150. Плоскія кривыя являются единств., у кот. крученіе всегда равно нулю. 151. Геом. значеніе знака крученія. 154.

Линейчатыя поверхности (косыя и развертывающіяся). 185. Условіе, характеризующее развертывающуюся пов. 186. Нормали къ косой линейчатой пов. вдоль образующей. 190. Опредѣленіе асимптотич. линій на косой линейч. пов. зависитъ отъ уравненія Риккатти. 431.

Линіи кривизны на пов. 184, 217. Формулы Родрига. 219. Теорема о линіяхъ кривизны, которыя являются плоскими или сферич. кривыми. 219.

Логариѳмическая кривая. 60. Центры кривизны. 78.

Логоциклика. 101.

Минимальныя поверхности. 210. Миним. пов. Шерка. 433. См. также геликоидъ съ напр. плоскостью и катеноидъ.

Монотонныя функціи. Ихъ интегрируемость. 251.

Неявная функція. 37 и слѣд.

Нормаль къ плоской кривой. 56. Норм. къ поверхности. 178.

Нормальная плоскость къ кривой двоякой кривизны. 140

Нормальная кривизна кривой на поверхности. 205. Она обращается въ нуль на асимптотическихъ линіяхъ. 206.

Объемы тѣлъ вращенія. 386. Объемы произвольныхъ тѣлъ. 397.

Огибающая семейства кривыхъ. 126. Огибающая ∞^1 поверхностей, 192, ∞^2 поверхностей, 194.

Описанный около поверхности конусъ и цилиндъ. 180.

Особенности плоскихъ кривыхъ въ координатахъ точки, 103 и слѣд., въ тангенціальныхъ координатахъ, 116.

Особенныя точки и линіи на поверхности. 180.

Параболическія точки поверхности. 182.

Пересоприкасаніе (см. соприкасаніе).

Площади плоскихъ кривыхъ. 374.

Плюккеровы формулы (относящіяся къ особенностямъ алг. кривыхъ). 116.

Поверхности. 178 и слѣд. Пов. 2-го порядка; ихъ полная кривизна. 212.

Поверхности тѣлъ вращенія. 386. Поверхности произвольныхъ тѣлъ. 397.

Подкасательная плоской кривой. 58. Полярная подкасательная. 59.

Поднормаль плоской кривой. 58. Полярная поднормаль. 59.

Подэра. 70. Построеніе центра кривизны. 85.

Полярная поверхность кривой двоякой кривизны. 199 Эволюты кривой служатъ геодез. линіями на полярн. пов. 200. Ребро возврата есть общее мѣсто центровъ соприкас. шаровъ. 201.

Порядокъ алгебр. кривой. 116.

Производная. Произв. функціи $f(x, y, z)$ въ данномъ направленіи. 29. Производныя высшихъ порядковъ функціи отъ функціи. 473.

Псевдосфера. 212. Асимптотическія линіи. 232.

Развертывающіяся поверхности. 185, 212. Ихъ дифференціальное уравненіе. 194. Главныя кривизны. 213.

Рибокуръ. Кривыя Рибокура. 86, 92.

Риккати. Диф. уравненіе Риккати. 416.

Родъ алгебраич. кривой. 116. Кривыя нулевого рода (уникурсальныя). 117.

Рулетты. 88.

Ряды функцій. Почленное интегрированіе. 287.

Синусъ-спирали. 68, 92. Радіусъ кривизны. 81.

Соприкасаніе въ случаѣ плоскихъ кривыхъ. 123. Соприкасающійся кругъ; онъ вообще пересѣкаетъ кривую. 74. Если его радіусъ достигаетъ max. или min., то имѣетъ мѣсто пересоприкасаніе. 125.

Соприкасающій кругъ къ кривой двоякой кривизны. 163.

Соприкасающіяся поверхности къ кривой двоякой кривизны. 160. Соприкас. плоскость. 140, 161. Стаціонарная соприкас. плоскость. 161. Кривая вообще пересѣкаетъ соприк. плоскость. 154. Исключенія. 159. Соприкас. шаръ. 156, 162. Кривая вообще не пересѣкаетъ его. 163. Пере-соприкас. шаръ. 164. Общее мѣсто центровъ соприкас. шаровъ. 166.

Соприкасающіяся прямыя къ поверхности. 181.

Спираль, архимедова. 62. Архим. спираль, какъ подэра эвольвенты круга. 137. Гиперболическая спираль. 64. Логариѳмическая спираль. 61.

Спрямляющія плоскости кривой двоякой кривизны. 140. Ихъ огибающая. 201.

Стрикціонная (горловая) линія линейчатой поверхности. 185.

Сферическія кривыя. 165. Ихъ центры кривизны. 203.

Сферическое кручепіе кривой двоякой кривизны. 168.

Теоремы о среднемъ значеніи (первая и вторая). 252.

Точки возврата плоской кривой. 109, 111.

Точки закругленія поверхности. 217.

Точки изгиба плоской кривой. 103. Связь съ формой Гессе въ случаѣ алгебраич. кривыхъ. 105.

Траекторіи семейства кривыхъ на плоскости. 427.

Трактриса. 132.

Уголъ кручепія. 141.

Уголъ смежности, въ случаѣ плоской кривой, 71, въ случаѣ кривой двоякой кривизны, 141.

Указательница (индикатриса) Дюпена. 183.

Улитка. 66.

Уникурсальныя кривыя (нулевого рода). 117.

Френе. Формулы Френе для дифференціаловъ фундаментальныхъ косинусовъ кривой двоякой кривизны. 146.

Френель. Интегралъ Френеля. 395.

Функціональный опредѣлитель (Якобіанъ). 27.

Центры тяжести. 392. Теорема Гульдѣна. 392.

Циклоида. 69. Длина дуги и кривизна, натур. уравненіе. 87, 88. Эволютой циклоиды является также циклоида. 132.

Цѣпная линія 60. Центры кривизны, натур. уравненіе. 86.

Цѣпная линія равнаго сопротивленія. 61. Центры кривизны, натур. уравненіе. 87.

Эвольвента круга. Натур. уравненіе. 88.

Эволюта и эвольвенты плоской кривой. 128. Радіусъ кривизны эволюты. 130. Эволюты и эвольвенты кривой двоякой кривизны. 190.

Эйлеровы интегралы. 262, 358.

Эллиптическіе интегралы (1., 2., 3. вида). 334. Полные интегр. 1. и 2. вида. 346. Преобразованіе Ландена. 348. Каждый эллипт. интегр. 1. вида выражается черезъ два эллипт. интегр. 2. вида. 349. Теорема сложенія для эллипт. интегр. 1. вида. 424.

Эллиптическія таблицы Лежандра. 349.

Эллиптическія точки поверхности. 182.

Эпи- и гипо-циклоиды. 89. Онѣ подобны своимъ эволютамъ. 132.

Якобіанъ (функціональный опредѣлитель). 27.

Якоби. Матрисса Якоби системы функцій, ея значеніе въ вопросѣ о независимости функцій. 45.