

Die symbolische Methode zur Lösung von Wechsel- stromaufgaben

Einführung in den praktischen Gebrauch

von

Hugo Ring

Ingenieur der Firma Hülsin & Voß, Hamburg

Mit 33 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1921

Die symbolische Methode zur Lösung von Wechsel- stromaufgaben

Einführung in den praktischen Gebrauch

von

Hugo Ring

Ingenieur der Firma Blohm & Voß, Hamburg

Mit 33 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1921

Alle Rechte,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

ISBN 978-3-662-23948-3 ISBN 978-3-662-26060-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-26060-9

Copyright 1921 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1921.

VORWORT.

Die symbolische Methode zur Lösung von Wechselstromaufgaben hat trotz der vorhandenen klassischen Werke über diese Rechnungsmethode bisher nicht die Verbreitung bei den Starkstrom-Ingenieuren gefunden, die sie verdient. Nicht nur, daß schon der recht beträchtliche Umfang dieser Werke dem in der Praxis stehenden Ingenieur von vornherein nur wenig „vertrauenerweckend“ vorkommt, behandeln sie nach wenigen einleitenden Worten über die symbolische Lösungsweise von Wechselstromaufgaben gleich Wechselstromprobleme, bei denen der Vorteil der symbolischen Methode für den Neuling im allgemeinen erheblich verschleiert wird. Um sich den praktischen Wert der symbolischen Methode aus diesen großzügigen Werken zunutze machen zu können, muß der auf dem Gebiete der symbolischen (komplexen) Rechnung Belehrung suchende Ingenieur an das Studium von ganz speziellen Wechselstromproblemen herangehen, das ihm nach mehr oder weniger großem Zeitaufwand nicht das zu versprechen scheint, was er vorher davon erhofft hatte. So haben die an und für sich hervorragenden auf der symbolischen Rechnungsmethode aufgebauten Werke wohl dem Spezialisten, der die besonders ihn interessierenden Probleme nach der symbolischen Methode darin behandelt vorfindet, Gewinn gebracht, allein die Allgemeinheit der praktisch tätigen Ingenieure hat sich bis heute für die symbolische Rechnungsweise nicht nachhaltig zu interessieren vermocht. Und doch ist gerade die symbolische Rechnungsmethode Hand in Hand mit der graphischen diejenige Methode, welche die Lösung von Wechselstromproblemen mit solcher Leichtigkeit und solcher Übersichtlichkeit über den Zusammenhang aller in Betracht kommenden elektrischen Größen ermöglicht, wie keine zweite.

Dies an praktischen Beispielen aus der allgemeinen Wechselstromtechnik so zu veranschaulichen, daß auch die Allgemeinheit der praktisch tätigen Elektro-Ingenieure die symbolische Lösungsweise von Wechselstromaufgaben aus der Praxis mehr und mehr zu ihrem Gemeingut macht, ist der Zweck des vorliegenden Buches.

Aber auch allen, die, nur mit den Anfangsgründen der Wechselstromtechnik vertraut, gern in das Gebiet der Lösung von Wechselstromaufgaben aus der Praxis ohne sonderliche Mühe und dabei doch mit größter Übersichtlichkeit über den Zusammenhang der einzelnen in Betracht kommenden Größen eindringen möchten, soll das Buch ein Förderer ihrer Weiterbildung nach dieser Richtung hin sein.

Hamburg, im Januar 1921.

H. Ring.

INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
I. Einleitung	1
1. Die gebräuchlichen Ausdrücke.	
2. Die symbolische Schreibweise.	
3. Die komplexe Form eines Symbols.	
4. Die Widerstandsgrößen eines Wechselstromkreises.	
5. Die erste Hauptgleichung des allgemeinen Wechselstromkreises.	
6. Die Spannungskomponenten E_s und E_r .	
II. Übergang zum reellen Wert	3
Übergang von der komplexen Form der ersten Hauptgleichung in die reelle Form.	
III. Leitwertgrößen	4
1. Die Leitwertgrößen eines Wechselstromkreises.	
2. Die zweite Hauptgleichung des allgemeinen Wechselstromkreises.	
IV. Übergang zum reellen Wert	5
1. Die Stromkomponenten J_s und J_n .	
2. Übergang von der komplexen Form der zweiten Hauptgleichung in die reelle Form.	
V. Hintereinanderschaltung von Widerständen	6
VI. Parallelschaltung von Widerständen	6
VII. Positiver und negativer Phasenwinkel	7
VIII. Praktische Anwendung	9
1. Parallelschaltung zweier Scheinwiderstände	9
Leitwert- und Stromdiagramm dazu.	
2. Parallelschaltung eines Scheinwiderstandes mit einem negativen Blindwiderstand und einem Wirkwiderstand	11
Leitwert- und Stromdiagramm dazu.	
2a. Spezialfall von 2	14
3. Hintereinanderschaltung eines Wirkwiderstandes mit einer Parallelschaltung (ein negativer Blindwiderstand parallel mit einem zweiten Wirkwiderstand)	15
Widerstands- und Spannungsdiagramm dazu.	
4. Eine mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität behaftete Fernleitung (die ganze Kapazität der Fernleitung ist auf die Mitte derselben konzentriert gedacht)	19
Widerstandsdiagramm, Spannungsdiagramm und Stromdiagramm dazu.	

	Seite
5. Eine mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität behaftete Fernleitung (die ganze Kapazität der Fernleitung ist in zwei gleichen Teilen an Anfang und Ende der Fernleitung konzentriert gedacht)	25
6. Der ganze unverzweigte geschlossene Wechselstromkreis (Wechselstromgenerator mit angeschlossenem Belastungsstromkreis)	27
7. Eine mit Widerstand und Selbstinduktion behaftete Fernleitung mit drei untereinander in der Phase verschobenen Abzweigströmen J_1 , J_2 und J_3	31
a) Der Gesamtspannungsabfall in der Fernleitung.	
b) Der Spannungsabfall bis zur ersten Stromabzweigstelle.	
c) Die Spannung an der ersten Stromabzweigstelle.	
d) Stromdiagramm und Spannungsdiagramm zu b) und c).	
e) Die Ermittlung der wichtigsten Phasenwinkel.	
f) Der Spannungsabfall von der ersten Abzweigstelle bis zur zweiten.	
g) Die Spannung an der zweiten Abzweigstelle.	
h) Stromdiagramm und Spannungsdiagramm zu f) und g).	
8. Eine mit Widerstand und Selbstinduktion behaftete Fernleitung, an deren Ende ein Transformator angeschlossen ist.	37
a) Ersatzstromkreis des Transformators.	
b) Reduzierung der Sekundärgrößen auf primär.	
c) Der Kupplungsfaktor.	
d) Ströme und Spannungen des Ersatzstromkreises; Ermittlung derselben.	
e) Die wichtigsten Phasenwinkel zwischen den Strömen und Spannungen des Transformators (des Ersatzstromkreises).	
f) Der Phasenwinkel zwischen Sekundärstrom und Primärstrom.	
g) Strom- und Spannungsdiagramm des Ersatzstromkreises.	
h) Übergang vom Diagramm des Ersatzstromkreises zum eigentlichen Transformatoridiagramm.	
i) Die Spannung am Anfange der Fernleitung.	
9. Dem Transformator unter Fall 8 wird ein induktionsfreier Widerstand (ein Wirkwiderstand) an seinen Primärklemmen parallel geschaltet	47
a) Die totale Impedanz des Transformators.	
b) Der Strom im Parallelwiderstande.	
c) Der Strom über den Transformator (über die totale Impedanz desselben).	
d) Der Gesamtstrom.	
e) Die prozentuale Stromänderung bei angeschlossenem Parallelwiderstande.	
IX. Anhang	50

I. Einleitung.

In der vorliegenden Schrift sind die bekannten Ausdrücke Induktanz, Impedanz, Konduktanz, Suszeptanz usw. mit eingeführt. Der Grund dafür ist der, daß bis in die jüngste Zeit hinein bekannte Autoren in ihren Werken diese Ausdrücke ausgiebig gebrauchen. Solange aber diese internationalen Bezeichnungen in Werken gebraucht werden, die für Theorie und Praxis wertvoll sind, ist es wohl empfehlenswerter, daß man ihren bisherigen Gebrauch zu erhalten sucht, als daß man sie aus gewisser Voreingenommenheit meidet.

In der symbolischen Schreibweise gilt für den allgemeinen Wechselstromkreis wie bei Gleichstrom:

$$\dot{E} = J \dot{Z}.$$

Hierin bedeutet:

\dot{E} das Symbol der Wechselstromspannung E

J das Symbol des Wechselstromes J

\dot{Z} das Symbol des Scheinwiderstandes (der Impedanz) Z .

Die komplexe Form des Symbols \dot{Z} ist

$$r - jx.$$

Hierin bedeutet:

$r = w$ den Ohmschen Widerstand oder Wirkwiderstand (Resistanz),

$x = \omega L$ den induktiven Widerstand oder positiven Blindwiderstand (positive Reaktanz)¹⁾,

$-x = -\frac{1}{\omega C}$ den kapazitiven Widerstand oder negativen Blindwiderstand (negative Reaktanz)²⁾,

$j = \sqrt{-1}$, weitere Bedeutung im unmittelbar nachfolgenden.

¹⁾ Auch Induktanz genannt.

²⁾ Auch Kapazitätanz genannt.

Setzt man $r - jx$ in die erste Gleichung oben für \dot{Z} ein, so ergibt sich:

$$\dot{E} = j\dot{Z} = j(r - jx) \dots \dots \dots (1)$$

Dies ist in symbolischer Schreibweise die erste Hauptgleichung des allgemeinen Wechselstromkreises. Sie gibt an, daß \dot{E} in 2 Komponenten \dot{E}_r und \dot{E}_s zerlegt werden kann. Die Komponente $\dot{E}_r = E_r = J \cdot r$ als der reelle Teil des Ausdruckes fällt dabei mit dem Strome als die in der reellen Zahlenachse liegende

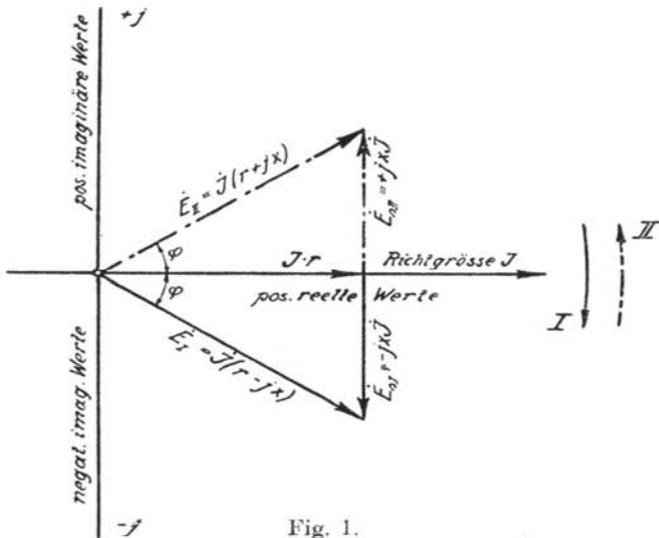


Fig. 1.

Richtgröße (siehe Fig. 1) zusammen, während die Komponente $\dot{E}_s = -j\dot{J}x$ um 90° dem Strom voraussieht. In diesem Falle bedeutet dann Multiplikation mit $-j$ stets Nacheilung desjenigen Vektors, der mit $-j$ multipliziert wird (J), gegenüber dem aus dieser Multiplikation entstehenden Vektor (E_s) um 90° . Das negative Vorzeichen von j rührt daher, daß die Drehrichtung der Vektoren mit dem negativen Drehsinn übereinstimmt. Wird die Drehrichtung der Vektoren geändert, so ändert sich damit auch das negative Vorzeichen in Plus, wie bei Betrachtung von Fig. 1 der Augenschein lehrt. Bei Drehrichtung der Vektoren im positiven Sinne bedeutet dann Multi-

plikation mit $+j$ stets Nacheilung desjenigen Vektors, der mit $+j$ multipliziert wird (J), gegenüber dem aus dieser Multiplikation entstehenden Vektor (E_s) um 90° ¹⁾.

Gleichung (1) findet immer Anwendung bei Hintereinanderschaltung von Widerständen.

II. Übergang zum reellen Wert.

Aus Fig. 1 ergibt sich ohne weiteres, daß Gleichung (1) in reellen Werten durch

$$E^2 = (J \cdot r)^2 + (Jx)^2$$

oder

$$E = J \sqrt{r^2 + x^2} \dots \dots \dots (1a)$$

ausgedrückt wird. Denselben reellen Ausdruck für Gleichung (1)

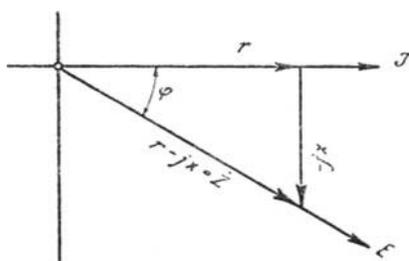


Fig. 2.

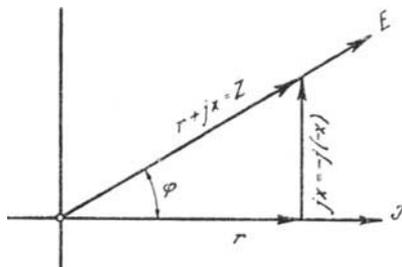


Fig. 2a.

erhält man, wenn man \dot{J} als mit der reellen Zahlenachse zusammenfallende Ausgangs- oder Richtgröße ansieht gemäß Fig. 1. Dann ist nämlich das Symbol (\dot{J}) gleich dem absoluten oder reellen Werte (J), und es ist nur von $\dot{Z} = r - jx$ der absolute Wert zu ermitteln. Der Augenschein auf Fig. 2 lehrt, daß

$$Z = \sqrt{r^2 + x^2}$$

ist. Die ganze Gleichung (1) wird mithin durch

$$E = J \sqrt{r^2 + x^2} \dots \dots \dots (1a)$$

in absoluten oder reellen Werten ausgedrückt.

¹⁾ Ob positiver oder negativer Drehsinn der Vektoren gewählt wird, das ist ganz gleich, in beiden Fällen soll J hinter E zurückbleiben.

²⁾ Fig. 2 erhält dann für $-jx$ die Bezeichnung „ $+x$ “ und für $\dot{Z} = r - jx$ die Bezeichnung „ $Z = \sqrt{r^2 + x^2}$ “.

III. Leitwertgrößen.

In $\dot{Z} = r - jx$ ist $r - jx$ die komplexe Form des Symbols \dot{Z} . Prof. Rößler nennt den allgemeinen Ausdruck $p - jq = r - jx$ die Nebenform des Symbols. Die Nebenform des Symbols ist durch Fig. 1 und 2 graphisch dargestellt. Demgemäß ist, um die Fig. 1 und 2 und das dazu Gesagte sinngemäß anwenden zu können, immer der Weg über die Nebenform des Symbols einzuschlagen, z. B.:

Aus Gleichung (1) für den unverzweigten Stromkreis entsteht:

$$\dot{J} = \dot{E} \frac{1}{\dot{Z}} = \dot{E} \frac{1}{r - jx} \dots \dots \dots (2a)$$

Für $\frac{1}{r - jx}$ die Nebenform entwickelt, gibt:

$$\dot{J} = \dot{E} \frac{1}{r - jx} \cdot \frac{r + jx}{r + jx} = \dot{E} \left(\frac{r}{r^2 + x^2} + j \frac{x}{r^2 + x^2} \right) \dots (2b)$$

Hierin bedeutet:

$$\frac{r}{r^2 + x^2} = g = \text{Wirkleitwert (Konduktanz),}$$

$$\frac{x}{r^2 + x^2} = b = \text{Blindleitwert (indukt. Suszeptanz).}$$

$$-\frac{x}{r^2 + x^2} = -b = \text{negat. Blindleitwert (kapazit. Suszeptanz),}$$

$$g + jb = \dot{y} = \text{Scheinleitwert (Admittanz).}$$

Die letzte Gleichung für den Klammerausdruck der Gleichung (2b) benutzt, gibt:

$$\text{oder } \left. \begin{aligned} \dot{J} &= \dot{E}(g + jb) \\ \dot{J} &= \dot{E}\dot{y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

Dies ist in symbolischer Schreibweise die zweite Hauptgleichung des allgemeinen Wechselstromkreises. Sie ist entstanden aus der symbolisch unentwickelten Gleichung (2a) für \dot{J} . Da sie ganz allgemein für den unverzweigten Stromkreis gilt, gilt sie ebensogut auch für jeden Einzelzweig einer Parallelschaltung.

IV. Übergang zum reellen Wert.

Für die Gleichung (2) gilt das Diagramm der Fig. 3. Wie vorher \dot{J} auf der rechten Seite der Gleichung (1), wird jetzt \dot{E} auf der rechten Seite der Gleichung (2) als mit der reellen Zahlenachse zusammenfallende Ausgangs- oder Richtgröße angesehen. Dann fällt, wie Gleichung (2) selbst angibt, die Komponente $\dot{J}_n = J_n = E \cdot g$ als der reelle Teil des Ausdruckes mit der Spannung zusammen, während die Komponente $\dot{J}_s = +j\dot{E}b$ um 90° der Spannung nacheilt (negativer Drehsinn der Vektoren). Aus Fig. 3 ergibt sich nun ohne wei-

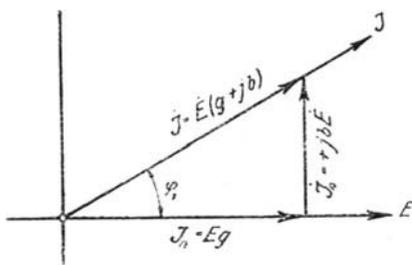


Fig. 3.

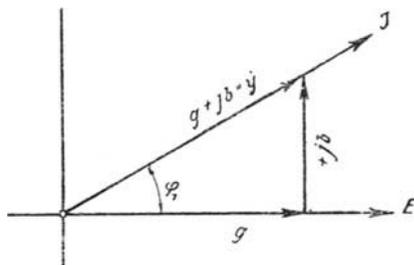


Fig. 4.

teres, daß Gleichung (2) in absoluten oder reellen Werten durch

$$J^2 = (E \cdot g)^2 + (E \cdot b)^2$$

oder

$$J = E \sqrt{g^2 + b^2} \dots \dots \dots (2c)$$

ausgedrückt wird. Denselben reellen Ausdruck erhält man für Gleichung (2), wenn man \dot{E} als Ausgangs- oder Richtgröße zugrunde legt. Dann ist das Symbol \dot{E} gleich dem reellen Werte E , und es ist nur von $y = g + jb$ der reelle Wert zu ermitteln. Der Augenschein auf Fig. 4, die das Diagramm bei sinngemäßer Anwendung des eingangs unter IV Gesagten für $y = g + jb$ wiedergibt, lehrt, daß

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

ist. Die ganze Gleichung (2) wird mithin durch

$$J = E \sqrt{g^2 + b^2}$$

in reellen Werten ausgedrückt.

6) Hintereinander- und Parallelschaltung von Widerständen.

V. Hintereinanderschaltung von Widerständen.

Für die Gesamtspannung E der durch Fig. 5 wiedergegebenen Hintereinanderschaltung ist in symbolischer Schreibweise wie bei Gleichstrom

$$\dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{J} \cdot \dot{Z}_1 + \dot{J} \dot{Z}_2 = \dot{J} (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) = \dot{J} \dot{Z} \quad \dots \quad (3)$$

$$\dot{E} = \dot{J} \{ (r_1 - jx_1) + (r_2 - jx_2) \} = \dot{J} \{ (r_1 + r_2) - j(x_1 + x_2) \} \quad (3a)$$

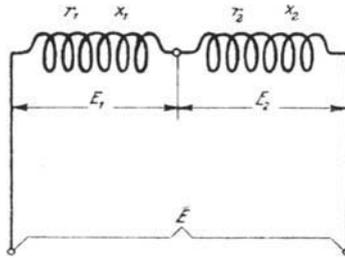


Fig. 5.

Bei Anwendung des unter Abschnitt I über die Bedeutung von $-j$ Gesagten ergibt sich für die letzte Gleichung das Vektordiagramm der Fig. 5 a.

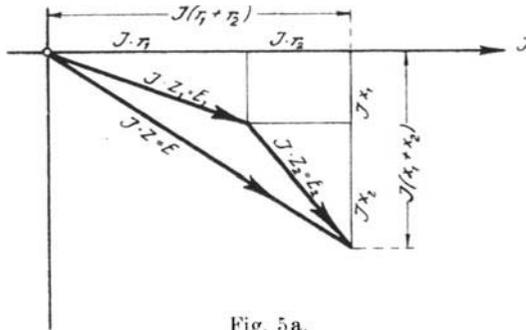


Fig. 5 a.

VI. Parallelschaltung von Widerständen.

Für den Gesamtstrom der durch Fig. 6 wiedergegebenen Parallelschaltung ist in symbolischer Schreibweise wie bei Gleichstrom

$$\dot{J} = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = \dot{E} \dot{y}_1 + \dot{E} \dot{y}_2 = \dot{E} (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) = \dot{E} \dot{y} \quad \dots \quad (4)$$

$$\dot{J} = \dot{E} \{ (g_1 + jb_1) + (g_2 + jb_2) \} = \dot{E} \{ (g_1 + g_2) + j(b_1 + b_2) \} \quad (4a)$$

Bei Anwendung des unter Abschnitt IV eingangs Erwähnten und in Übereinstimmung mit dem unter Abschnitt I über die

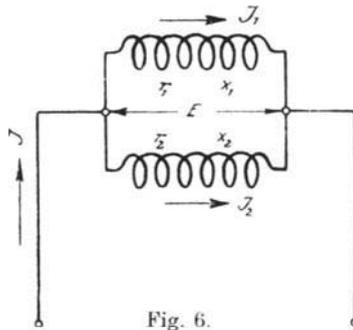


Fig. 6.

Bedeutung von $-j$ Gesagten ergibt sich für die letzte Gleichung das Vektordiagramm der Fig. 6a.

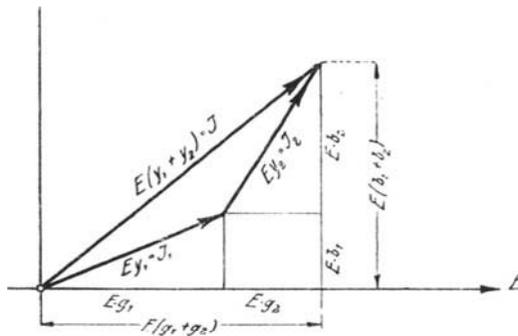


Fig. 6a.

VII. Positiver und negativer Phasenwinkel.

Wie der Augenschein auf Fig. 1 lehrt, ist bei Darstellung einer Spannung (E_I) mittels des komplexen Ausdrucks $\dot{J} \cdot r - j \dot{J} x = \dot{J} (r - jx)$ der Phasenwinkel zwischen Strom J und Spannung E_I :

$$\varphi = \arctg \frac{+x}{r} = + \arctg \frac{x}{r}.$$

Bei Darstellung derselben Spannung (E_I) mittels des komplexen Ausdrucks $\dot{J} r + j \dot{J} x = \dot{J} r - j \dot{J} (-x)$

ist dagegen der Phasenwinkel zwischen Strom J und Spannung E_I bei gleicher Vektordrehrichtung wie vor:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{-x}{r} = - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{r}.$$

Bei Darstellung einer elektrischen Größe durch den allgemeinen komplexen Ausdruck $\dot{A}(r \mp jx)$ entspricht also bei negativem Drehsinn der Vektoren negativem Vorzeichen im komplexen Ausdruck stets ein positiver Phasenwinkel und positivem Vorzeichen im komplexen Ausdruck stets ein negativer Phasenwinkel.

Dasselbe gilt auch für die trigonometrische komplexe Form

$$A(\cos \varphi \mp j \sin \varphi) = A e^{\mp j \varphi}.$$

Wie Fig. 3 zeigt, ist bei Darstellung eines Stromes J mittels des komplexen Ausdrucks $\dot{E} \cdot g + j \dot{E} b = \dot{E}(g + jb)$ der Phasenwinkel zwischen Strom J und Spannung E bei gleicher Vektordrehrichtung wie vor:

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{+b}{g} = + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{g}.$$

Bei Darstellung desselben Stromes (J) mittels des komplexen Ausdrucks

$$\dot{E} g - j \dot{E} b = \dot{E} g + j \dot{E}(-b)$$

ist dagegen der Phasenwinkel zwischen Strom J und Spannung E bei gleicher Drehrichtung der Vektoren wie vor:

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{-b}{g} = - \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{g}.$$

In der Darstellung einer elektrischen Größe durch den allgemeinen komplexen Ausdruck $\dot{A}(g \pm jb)$ entspricht also bei negativem Drehsinn der Vektoren positivem Vorzeichen im komplexen Ausdruck stets ein positiver Phasenwinkel und negativem Vorzeichen im komplexen Ausdruck stets ein negativer Phasenwinkel.

Dasselbe gilt auch für die trigonometrische komplexe Form (Abschnitt VIII):

$$A(\cos \varphi_1 \pm j \sin \varphi_1) = A e^{\pm j \varphi_1}.$$

VIII. Praktische Anwendung.

Fall 1. In symbolischer Schreibweise ist der gesamte durch die in Fig. 7 wiedergegebene Stromverzweigung hindurchgetriebene Strom:

$$\dot{J} = \dot{E} \dot{y} = \dot{E} (\dot{y}_1 + \dot{y}_2);$$

für die Symbole \dot{y} , \dot{y}_1 und \dot{y}_2 deren Nebenformen (komplexe Formen) gesetzt, gibt:

$$\dot{J} = \dot{E} (g + jb) = \dot{E} \{ (g_1 + jb_1) + (g_2 + jb_2) \},$$

$$\dot{J} = \dot{E} \{ (g_1 + g_2) + j(b_1 + b_2) \}.$$

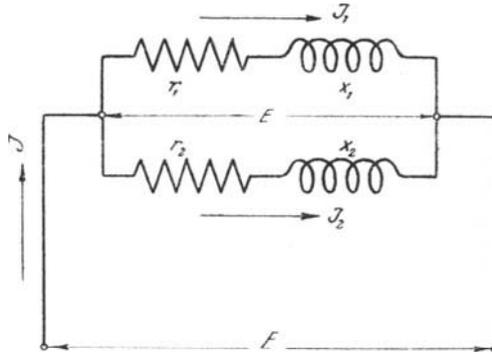


Fig. 7.

Für g und b deren Werte unter Abschnitt III eingesetzt, gibt:

$$\dot{J} = \dot{E} \left\{ \left(\frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} \right) + j \left(\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} \right) \right\},$$

oder in reellen Werten ausgedrückt:

$$J = E \cdot \sqrt{\left\{ \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} \right\}^2}.$$

Die Ausdrücke unter der Wurzel ausmultipliziert und gekürzt, gibt:

$$J = E \cdot \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2}{(r_1^2 + x_1^2)(r_2^2 + x_2^2)}};$$

für $r = \omega L$ und $x = \omega L$ eingesetzt und die Wurzel als Nenner

unter E gebracht, gibt die bekannte, sonst auf dem Wege der Differentiation gefundene Gleichung:

$$J = \frac{E}{\sqrt{\frac{(w_1^2 + \omega^2 L_1^2)(w_2^2 + \omega^2 L_2^2)}{(w_1 + w_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2)^2}}}$$

Fig. 8 zeigt die graphische Darstellung der Nebenformen der Symbole \dot{y} , \dot{y}_1 und \dot{y}_2 . Aus Fig. 8 ergibt sich ohne weiteres

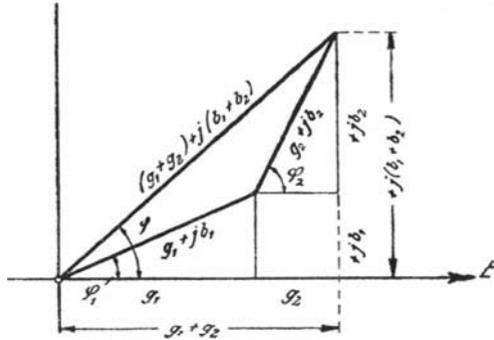


Fig. 8.

für die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom und Klemmenspannung:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b_1 + b_2}{g_1 + g_2} = \frac{\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2}}{\frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2}};$$

diesen Bruch oben und unten auf den Generalnenner gebracht, gekürzt und $r = w$ und $x = \omega L$ gesetzt, gibt das bekannte Resultat:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L_1 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2) + \omega L_2 (w_1^2 + \omega^2 L_1^2)}{w_1 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2) + w_2 (w_1^2 + \omega^2 L_1^2)}.$$

Die Phasenverschiebungen zwischen den Einzelströmen J_1 , J_2 und der Klemmenspannung sind gemäß Fig. 8 aus:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_1}{g_1} = \frac{\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2}}{\frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2}} = \frac{\omega L_1}{w_1}$$

und $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_2}{w_2}$
 ermittelbar.

Aus Fig. 8 ergibt sich ohne weiteres in Übereinstimmung mit dem unter Abschnitt IV Erwähnten das Stromdiagramm der vorliegenden Stromverzweigung. Fig. 9 zeigt das Stromdiagramm. Aus Fig. 9 lassen sich dann die Winkel der Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Strömen leicht berechnen, z. B. die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom J und J_1 zu:

$$\varphi' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L_1 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2) + \omega L_2 (w_1^2 + \omega^2 L_1^2)}{w_1 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2) + w_2 (w_1^2 + \omega^2 L_1^2)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L_1}{w_1}.$$

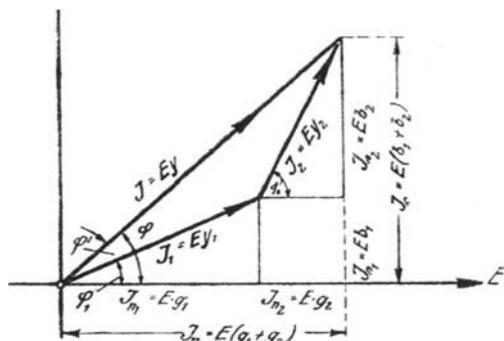


Fig. 9.

Fall 2. In symbolischer Schreibweise ist der gesamte durch die in Fig. 10 wiedergegebene Stromverzweigung hindurchgetriebene Strom:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{J}_1 + \dot{J}_2 + \dot{J}_3 = \dot{E}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3) = \dot{E}\dot{y}, \\ \dot{J} &= \dot{E}\{g_1 + j b_1 + 0 + j(-b_2) + g_3 + 0\} \\ &= \dot{E}\{(g_1 + g_3) + j(b_1 - b_2)\} \end{aligned}$$

oder in reellen Werten ausgedrückt:

$$\begin{aligned} J &= E \sqrt{(g_1 + g_3)^2 + (b_1 - b_2)^2} \\ &= E \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} - \frac{1}{x_2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Für $r = w$, $x = \omega L$ bzw. $\frac{1}{\omega C}$ eingesetzt, gibt die be-

kannte Gleichung

$$J = E \sqrt{\left(\frac{w_1}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{1}{w_3}\right)^2 + \left(\frac{\omega L_1}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} - \omega C\right)^2}.$$

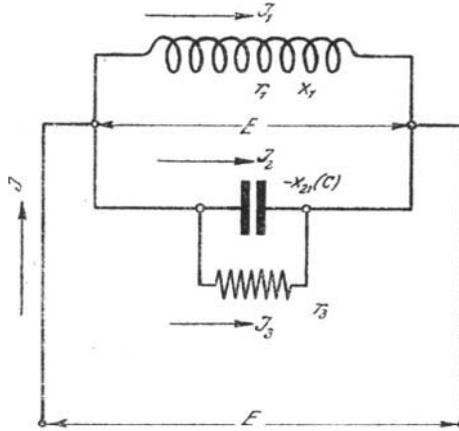


Fig. 10.

Aus $J = \dot{E} \{ (g_1 + g_3) + j(b_1 - b_3) \}$ und Fig. 10a, die die graphische Darstellung der Nebenformen der Symbole \dot{y} , \dot{y}_1 , \dot{y}_2

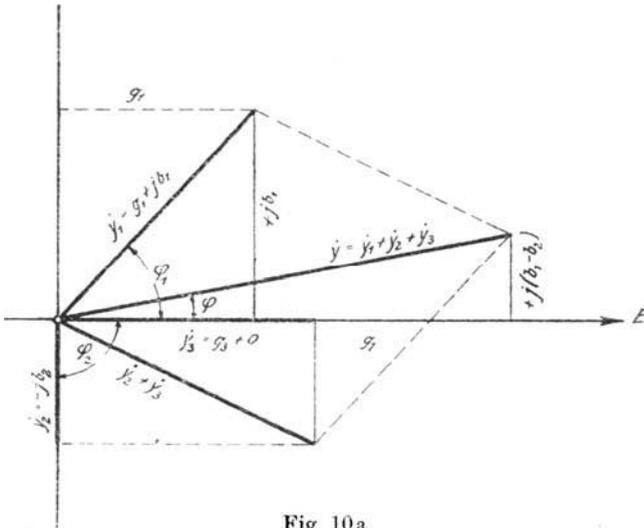


Fig. 10a.

und y_3 zeigt, ergibt sich für die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom und Klemmenspannung ohne weiteres:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b_1 - b_2}{g_1 + g_3} = \frac{\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} - \frac{1}{x_2}}{\frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{1}{r_3}};$$

für r und x die entsprechenden Werte eingesetzt, gibt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\omega L_1}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} - \omega C}{\frac{w_1}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{1}{w_3}}.$$

Die Phasenverschiebungen zwischen den Einzelströmen J_1 , J_2 , J_3 und der Klemmenspannung E ergeben sich aus:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-b_2}{0} = -\infty \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{0}{g_3} = 0.$$

Aus Fig. 10a ergibt sich ohne weiteres in Übereinstimmung mit dem unter Abschnitt IV Gesagten das Stromdiagramm (Fig. 10b) der vorliegenden Stromverzweigung. Analog Fall 1

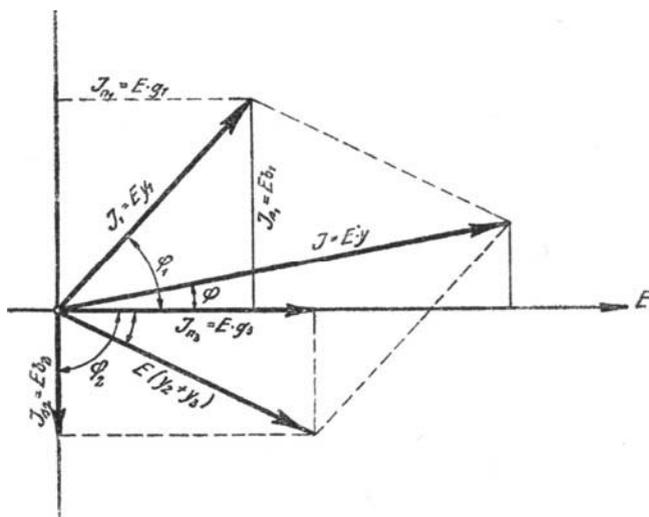


Fig. 10b.

lassen sich dann leicht aus Fig. 10b die Phasenverschiebungswinkel zwischen den einzelnen Strömen ermitteln.

Die Einzelströme selbst sind gemäß Fig. 10a und 10b:

$$\dot{J}_1 = \dot{E} \dot{y}_1 = \dot{E} (g_1 + j b_1),$$

oder in reellen Werten:

$$J_1 = E \sqrt{g_1^2 + b_1^2} = E \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2}\right)^2}.$$

Den Wurzelausdruck umgeformt und für $r = w$ und $x = \omega L$ gesetzt, gibt:

$$J_1 = \frac{E}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}},$$

$$\dot{J}_2 = \dot{E} \cdot \dot{y}_2 = \dot{E} \{0 + j(-b_2)\},$$

oder in reellen Werten:

$$J_2 = E \sqrt{b_2^2} = E \sqrt{\frac{1}{x_2^2}};$$

für $x = \frac{1}{\omega C}$ gesetzt:

$$J_2 = E \cdot \omega C,$$

$$J_3 = \frac{E}{w_3}.$$

Fall 2a. Für den speziellen Fall, daß r_1 und $L_1 \omega$ des Falles 2 gleich Null werden, ist in symbolischer Schreibweise der dann durch die Stromverzweigung (Fig. 11) hindurchgetriebene Gesamtstrom:

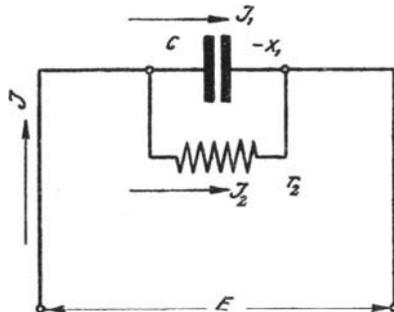


Fig. 11.

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = \dot{E}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) = \dot{E}\dot{y}, \\ \dot{J} &= \dot{E}\{0 + j(-b_1) + g_2 + 0\}, \\ \dot{J} &= \dot{E}(g_2 - jb_1) = \dot{E}\left(\frac{r_2}{r_2^2 + 0} - j\frac{x_1}{0 + x_1^2}\right), \\ \dot{J} &= \dot{E}\left(\frac{1}{r_2} - j\omega C_1\right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist identisch mit der von Prof. Rößler in seinem Buche „Die Fernleitung von Wechselströmen“ Abschnitt VI daselbst entwickelten Gleichung (6)

$$\dot{J} = \left(j\omega C + \frac{1}{\rho}\right)\dot{E}.$$

Diese Gleichung entsteht also dadurch, daß zunächst auf jeden der beiden parallelen Zweige (ρ und C) für sich die zweite Hauptgleichung des allgemeinen Wechselstromkreises in der Grundgleichung $\dot{J} = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = \dot{E}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$ angewandt wird.

Fall 3. In symbolischer Schreibweise ist die Gesamtspannung \dot{E} der in Fig. 12 wiedergegebenen Widerstandskombination nach dem Ohmschen Gesetz wie bei Gleichstrom:

$$\dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{J}(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2).$$

\dot{Z}_2 ist das Symbol des Scheinwiderstandes (der Impedanz) der Kombination ($w_1 C_2$). Wie bei Gleichstrom ist an

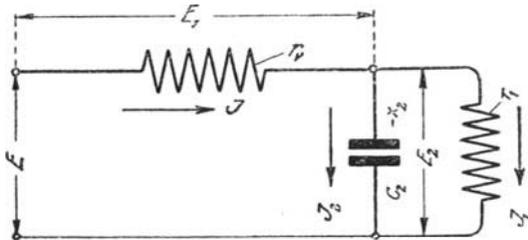


Fig. 12.

Stelle des Scheinwiderstandes mit dem reziproken Scheinleitwerte (der reziproken Admittanz) der Kombination ($w_1 C_2$) zu rechnen, also:

$$\dot{E} = \dot{J}\left(\dot{Z}_1 + \frac{1}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}\right) = \dot{J}\left(\dot{Z}_1 + \frac{1}{\dot{y}_2}\right)$$

$$\dot{E} = \dot{J} \left(\frac{\dot{Z}_1 \dot{y}_k + 1}{\dot{y}_k} \right)$$

oder

$$\dot{E} \dot{y}_k = \dot{J} (\dot{Z}_1 \dot{y}_k + 1)$$

Würde nun in irgend eine der zuletzt nach dem Ohmschen Gesetz wie bei Gleichstrom entwickelten Gleichungen in der bisherigen Rechnungsweise an Stelle der Symbole \dot{Z} und \dot{y} einfach deren komplexe Formen gesetzt, also etwa:

$$\begin{aligned} \dot{E}(g_1 + jb_2) &= \dot{J} \{ (r_v - jx_v)(g_1 + jb_2) + 1 \} \\ &= \dot{J} \{ (r_v g_1 + x_v b_2) - j(g_1 x_v - r_v b_2) + 1 \}, \end{aligned}$$

so würde sich nach Übergang zur reellen Form für den durch den gezeichneten Stromkreis (Fig. 12) hindurchgetriebenen Gesamtstrom J ein falsches Resultat ergeben.

Den Weg, der im vorliegenden Falle zu beschreiten ist, zeigt folgende einfache Überlegung:

In dem Ansätze $\dot{E} = \dot{J} \left(\dot{Z}_1 + \frac{1}{\dot{y}_k} \right)$ wird ausgedrückt, daß die Einzelscheinwiderstände \dot{Z}_1 und $\dot{Z}_2 = \dot{Z}_k = \frac{1}{\dot{y}_k}$ zum Gesamtscheinwiderstande \dot{Z} zusammensetzen sind. Diese Zusammensetzung macht aber entsprechend der vorliegenden Hintereinanderschaltung von \dot{Z}_1 und $\frac{1}{\dot{y}_k}$ für den symbolischen Ausdruck $\frac{1}{\dot{y}_k}$ eine solche komplexe Form $r_k - jx_k$ erforderlich, die eine (graphische) Zusammensetzung derselben mit der komplexen Form des Symbols \dot{Z}_1 zur komplexen Form des Symbols \dot{Z} des Gesamtscheinwiderstandes ermöglicht. Fig. 13 gibt die graphische Zusammensetzung der komplexen Form von \dot{Z}_1 mit der komplexen Form von \dot{Z}_k zur komplexen Form des Symbols \dot{Z} des resultierenden oder Gesamtscheinwiderstandes wieder. In Fig. 13 kommen entsprechend der vorliegenden Hintereinanderschaltung des Wirkwiderstandes w_v mit der Stromverzweigung ($w_1 C_3$) nur komplexe Ausdrücke von der Form $r - jx$ zur graphischen Darstellung. Rechnerisch besteht somit die weitere Aufgabe zunächst darin, den Ausdruck $\frac{1}{g_k + jb_k}$ für $\frac{1}{\dot{y}_k}$ auf die Form $r_k - jx_k$ zu bringen.

Multipliziert man den Ausdruck $\frac{1}{g_k + j b_k}$ oben und unten mit $g_k - j b_k$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{g_k + j b_k} \cdot \frac{g_k - j b_k}{g_k - j b_k} = \frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2} - j \frac{b_k}{g_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{\dot{y}_k} = \dot{Z}_k;$$

da $\frac{1}{\dot{y}_k} = \dot{Z}_k = r_k - j x_k$ ist, folgt daraus und aus der vorhergehenden Gleichung, daß für

$$r_k = \frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2}$$

und für

$$x_k = \frac{b_k}{g_k^2 + b_k^2}$$

gesetzt werden muß.

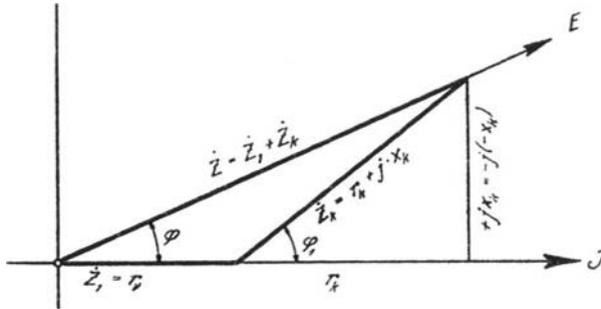


Fig. 13.

Demgemäß und gemäß Fig. 13 ergibt sich jetzt für den vorliegenden Fall:

$$\dot{E} = J \dot{Z} = J (r - j x) = J \{ (r_v - j x_v) + (r_k - j x_k) \},$$

oder in reellen Werten ausgedrückt und die Werte für r_k und x_k eingesetzt:

$$E = J \sqrt{\left(r_v + \frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2} \right)^2 + \left(0 + \frac{b_k}{g_k^2 + b_k^2} \right)^2};$$

für $g_k = g_1 + g_2$ und $b_k = b_1 + b_2$ gemäß Abschnitt VI eingesetzt, wobei entsprechend der g_k und b_k zugrunde liegenden Kombination ($w_1 C_2$) $g_2 = 0$ und $b_1 = 0$ ist, gibt:

$$E = J \sqrt{\frac{\{ r_v (g_1^2 + b_2^2) + g_1 \}^2 + b_2^2}{(g_1^2 + b_2^2)^2}};$$

die Werte von g und b bzw. von r und x eingesetzt, gibt:

$$E = J \sqrt{\frac{\left\{ r_v \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{x_c^2} \right) + \frac{1}{r_1} \right\}^2 + \frac{1}{x_c^2}}{\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{x_c^2} \right)^2}}$$

$$= J \sqrt{\frac{\left\{ w_v \cdot \frac{1 + (\omega C w_1)^2}{w_1^2} + \frac{1}{w_1} \right\}^2 + (\omega C)^2}{\left\{ \frac{1 + (\omega C w_1)^2}{w_1^2} \right\}^2}};$$

den Bruch unter der Wurzel auf den Hauptnenner gebracht und gekürzt, ergibt für den durch die in Fig. 12 wiedergegebenen Widerstandskombination hindurchgetriebenen Gesamtstrom

$$J = \frac{E \{1 + (\omega C w_1)^2\}}{\sqrt{\{w_v [1 + (\omega C w_1)^2] + w_1\}^2 + (\omega C w_1)^2 \cdot w_1^2}}$$

Aus Fig 13 und $\dot{E} = j \left\{ \left(r_v + \frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2} \right) - j \left(x_v + \frac{b_k}{g_k^2 + b_k^2} \right) \right\}$ ergibt sich für die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom und Klemmenspannung ohne weiteres:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{b_2}{g_1^2 + b_2^2}}{\frac{g_1}{g_1^2 + b_2^2} + r_v} = -\frac{b_2}{g_1 + (g_1^2 + b_2^2) r_v};$$

die Werte für b und g bzw. für r und x eingesetzt, gibt:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega C w_1^2}{w_1 + \{1 + (\omega C w_1)^2\} w_v}.$$

Analog ergibt sich für die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom J und Teilspannung E_3 :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_k}{r_k} = \frac{\frac{b_k}{g_k^2 + b_k^2}}{\frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2}} = -\frac{b_2}{g_1},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -w_1 \omega C_2.$$

Die Teilspannung E_1 ist:

$$E_1 = J \cdot w_v.$$

Die Teilspannung E_2 ist leicht in der bisherigen Weise aus

$$\dot{E}_2 = \dot{J}(r_k - j x_k)$$

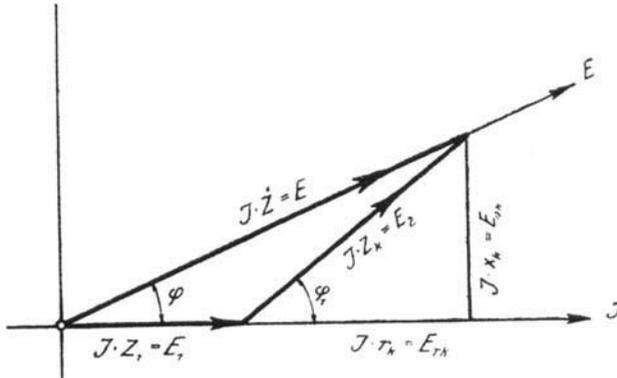


Fig. 13a.

zu errechnen, nicht etwa durch algebraische Subtraktion:

$$E_2 = E - E_1.$$

Fig. 13a zeigt das Spannungsdiagramm zu vorliegendem Fall.

Fall 4. Es liegt eine mit Widerstand, Selbstinduktion und verteilter Kapazität behaftete Fernleitung vor, an deren Ende ein induktionsfreier Widerstand angeschlossen ist. Die Kapazität der ganzen Leitung ist in der Mitte derselben konzentriert gedacht. Fig. 14 gibt die schematische Darstellung dieses Falles.

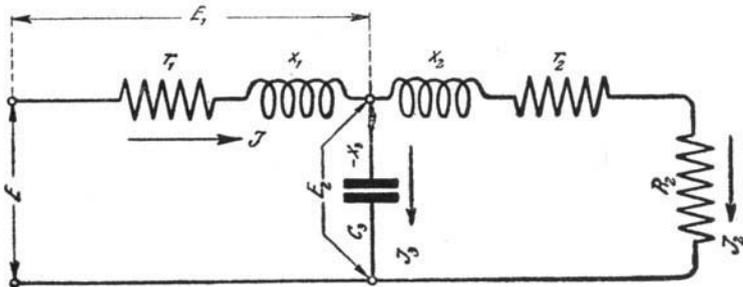


Fig. 14.

ein induktionsfreier Widerstand angeschlossen ist. Die Kapazität der ganzen Leitung ist in der Mitte derselben konzentriert gedacht. Fig. 14 gibt die schematische Darstellung dieses Falles.

In symbolischer Schreibweise ist die Gesamtspannung der in Fig. 14 wiedergegebenen Widerstandskombination:

$$\dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{J}(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) = \dot{J}(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_k);$$

denn es handelt sich, wie Fig. 14 zeigt, um die Hintereinanderschaltung eines Ohmschen und eines induktiven Widerstandes ($r_1, \omega L_1$) mit einer Stromverzweigung ($r_2, R_2, \omega L_2 \parallel C_3$).

In vorstehender Gleichung ist $\dot{Z}_2 = \dot{Z}_k$ wieder das Symbol des Scheinwiderstandes der Stromverzweigung. Analog Fall 3 gilt also:

$$\dot{E} = \dot{J}\left(\dot{Z} + \frac{1}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}\right) = \dot{J}\left(\dot{Z} + \frac{1}{\dot{y}_k}\right) = \dot{J}\left(\dot{Z}_1 + \frac{1}{g_k + j b_k}\right).$$

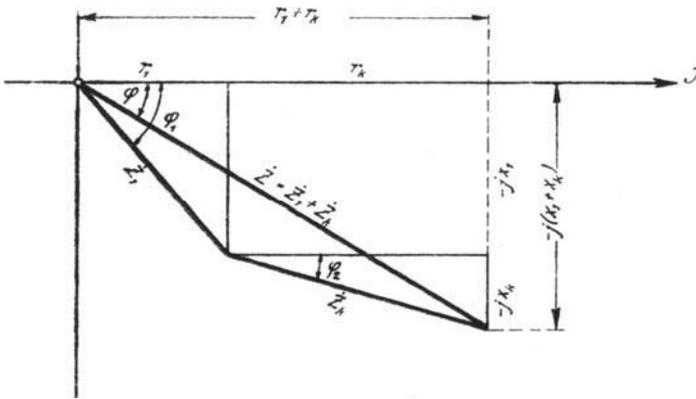


Fig. 15.

Die Aufgabe besteht also zunächst wieder darin, für den Ausdruck $\frac{1}{\dot{y}_k}$ diejenige komplexe Form ($r_k - j x_k$) zu ermitteln, die mit der komplexen Form des Symbols \dot{Z}_1 zur komplexen Form des Symbols \dot{Z} des Gesamtscheinwiderstandes (der Gesamtimpedanz) zusammengesetzt werden kann. Demgemäß und in Übereinstimmung mit Fig. 15, die die graphische Zusammensetzung der komplexen Formen von \dot{Z}_1 und \dot{Z}_k zu der von \dot{Z} wiedergibt, ist an Stelle der letzten Gleichung zu schreiben:

$$\dot{E} = \dot{J}(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_k) = \dot{J}\{(r_1 - j x_1) + (r_k - j x_k)\},$$

wobei wieder wie in Fall 3 für $r_k = \frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2}$ und für $x_k = \frac{b_k}{g_k^2 + b_k^2}$ zu setzen ist.

Die letzte Gleichung für \dot{E} geht dann über in:

$$\dot{E} = J \left\{ \left(r_1 + \frac{g_2}{g_2^2 + (b_2 - b_3)^2} \right) - j \left(x_1 + \frac{b_2 - b_3}{g_2^2 + (b_2 - b_3)^2} \right) \right\},$$

wenn wieder wie in Fall 3 gleichzeitig berücksichtigt wird, daß $g_k = g_1 + g_2$ und $b_k = b_1 + b_2$ ist.

In reellen Werten ausgedrückt, ergibt sich für die Klemmenspannung E :

$$E = J \sqrt{\left(r_1 + \frac{g_2}{g_2^2 + (b_2 - b_3)^2} \right)^2 + \left(x_1 + \frac{b_2 - b_3}{g_2^2 + (b_2 - b_3)^2} \right)^2},$$

für g_2 , b_2 und b_3 die Werte unter Abschnitt III eingesetzt gibt:

$$E = J \sqrt{\left\{ r_1 + \frac{\frac{r_{22}}{r_{22}^2 + x_2^2}}{\frac{r_{22}^2}{(r_{22}^2 + x_2^2)^2} + \left(\frac{x_2}{r_{22}^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_3} \right)^2} \right\}^2 + \left\{ x_1 + \frac{\frac{x_2}{r_{22}^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_3}}{\frac{r_{22}^2}{(r_{22}^2 + x_2^2)^2} + \left(\frac{x_2}{r_{22}^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_3} \right)^2} \right\}^2},$$

nach geringfügiger Umformung ergibt sich weiter:

$$E = J \sqrt{\left\{ r_1 + \frac{r_{22}(r_{22}^2 + x_2^2)}{r_{22}^2 + \left\{ x_2 - (r_{22}^2 + x_2^2) \frac{1}{x_3} \right\}^2} \right\}^2 + \left\{ x_1 + \frac{x_2(r_{22}^2 + x_2^2) - (r_{22}^2 + x_2^2)^2 \frac{1}{x_3}}{r_{22}^2 + \left\{ x_2 - (r_{22}^2 + x_2^2) \frac{1}{x_3} \right\}^2} \right\}^2}.$$

Die Werte für r und x eingesetzt, wobei $r_{22} = R_2 + r_2$, gibt schließlich:

$$J = \frac{E}{\sqrt{\left\{w_1 + \frac{w_{22} \{w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2\}}{w_{22}^2 + \{\omega L_2 - (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C\}^2}\right\}^2 + \left\{\omega L_1 + \frac{\omega L_2 (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) - (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2)^2 \omega C}{w_{22}^2 + \{\omega L_2 - (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C\}^2}\right\}^2}}$$

Gemäß Fig. 16 ergibt sich aus:

$$\dot{E} = \dot{J} \left\{ \left(r_1 + \frac{g_2}{g_2^2 + (b_2 - b_3)^2} \right) - j \left(x_1 + \frac{b_2 - b_3}{g_2^2 + (b_2 - b_3)^2} \right) \right\}$$

und der vorstehenden Umformung dieser Formel für die Phasen-

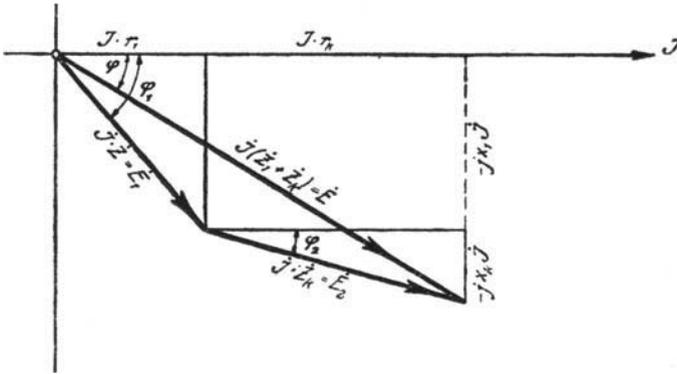


Fig. 16.

verschiebung zwischen Gesamtstrom J und Klemmenspannung E ohne weiteres:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi = & \frac{\omega L_1 w_{22}^2 + \omega L_1 \{ \omega L_2 - (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C \}^2}{w_1 \{ w_{22}^2 + [\omega L_2 - (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C]^2 \}} \\ & + \frac{\{ [\omega L_2 - (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C] \} (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2)}{+ w_{22} (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2)} \end{aligned}$$

In Übereinstimmung mit Fig. 15 und 16 ergibt sich ferner für die Phasenverschiebung zwischen Teilspannung E_1 und Gesamtstrom J

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1}{r_1} = \frac{\omega L_1}{w_1}$$

für die Phasenverschiebung zwischen Teilspannung E_2 und Gesamtstrom J

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_k}{r_k} = \frac{b_2 - b_3}{g_2} = \frac{\frac{x_2}{r_{22}^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_3}}{\frac{r_{22}}{r_{22}^2 + x_2^2}};$$

nach geringfügiger Umformung und die Werte für r und x , wobei $r_{22} = r_2 + R_2$ eingesetzt, ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_2 - [(w_2 + W_2)^2 + \omega^2 L_2^2] \omega C}{w_2 + W_2},$$

der Phasenwinkel zwischen den Teilspannungen E_1 und E_2

$$\varphi_3 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L_1}{w_1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L_2 - \{(w_2 + W_2)^2 + \omega^2 L_2^2\} \omega C}{w_2 + W_2}.$$

Die Phasenverschiebung zwischen den Zweigströmen J_2 bzw. J_3 und der Teilspannung E_2 ermittelt sich entsprechend der dabei allein in Betracht kommenden Stromverzweigung ($r_2, R_2, \omega L_2 \parallel C_3$) in Übereinstimmung mit dem unter Abschnitt VI Gesagten aus:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{J}_{23} = \dot{J}_2 + \dot{J}_3 = \dot{E}_2 y_2 + \dot{E}_2 y_3 \\ \dot{J}_{23} &= \dot{E}_2 (g_2 + j b_2) + E_2 (g_3 + j b_3), \end{aligned}$$

und zwar die Phasenverschiebung zwischen J_2 und E_2 aus:

$$\operatorname{tg} \varphi'_2 = \frac{b_2}{g_2} = \frac{\frac{x_2}{r_{22}^2 + x_2^2}}{\frac{r_{22}}{r_{22}^2 + x_2^2}} = \frac{\omega L_2}{w_2 + W_2},$$

und die Phasenverschiebung zwischen J_3 und E_2 aus:

$$\operatorname{tg} \varphi'_3 = \frac{-b_3}{g_3} = \frac{-b_3}{0} = -\infty.$$

Die Teilspannung E_2 ermittelt sich gemäß Fig. 16 aus:

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \dot{J}(r_k - j x_k) \\ \dot{E}_2 &= \dot{J} \left\{ \left(\frac{g_2}{g_2^2 + (b_2 - b_3)^2} \right) - j \left(\frac{b_2 - b_3}{g_2^2 + (b_2 - b_3)^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

oder in reellen Werten ausgedrückt und die Werte für g und b bzw. für r und x eingesetzt, gibt:

$$E_2 = J \frac{\sqrt{\{w_{22}(w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2)\}^2 + \{\omega L_2(w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) - (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C\}^2}}{w_{22}^2 + \{\omega L_2 - (w_{22}^2 + \omega^2 L_2^2) \omega C\}^2}.$$

Die Teilspannung E_1 ist:

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= \dot{J}(r_1 - jx_1) \\ E_1 &= J\sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}.\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung für E_1 ergibt sich

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}.$$

Die Einzelströme der Stromverzweigung sind:

$$\dot{J}_2 = \dot{E}_2 y_2 = \dot{E}_2 (g_2 + jb_2),$$

oder in reellen Werten ausgedrückt: $J_2 = E_2 \sqrt{g_2^2 + b_2^2}$.

Die Werte von g und dann von r sowie von b und dann x eingesetzt, gibt:

$$\begin{aligned}J_2 &= \frac{E_2}{\sqrt{(w_2 + W_3)^2 + \omega^2 L_2^2}}, \\ J_3 &= \dot{E}_2 \cdot y_3 = \dot{E}_2 (0 + j(-b_3)), \\ J_3 &= E_2 \sqrt{b_3^2} = E_2 \omega C.\end{aligned}$$

Aus Fig. 16 und gemäß dem unter Abschnitt IV Gesagten ergibt sich das in Fig. 17 wiedergegebene Stromdiagramm für den vorliegenden Fall. Aus diesem Diagramm lassen sich wieder die Winkel der Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Strömen unter Benutzung der entsprechenden für die

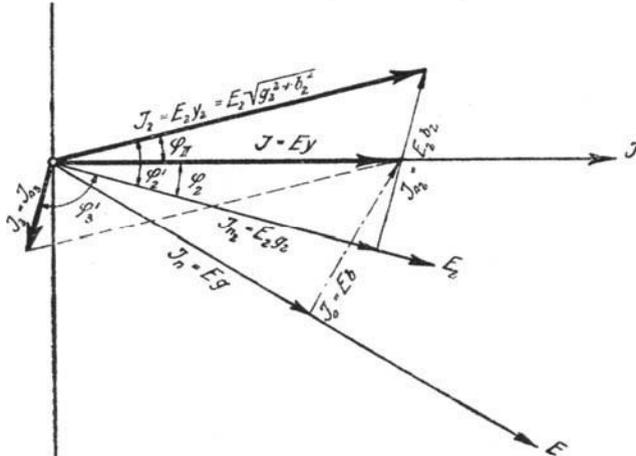


Fig. 17.

einzelnen Phasenverschiebungen entwickelten Gleichungen leicht berechnen, z. B. die Phasenverschiebung zwischen Zweigstrom J_2 und Gesamtstrom J zu:

$$\varphi_n = \arctg \frac{\omega L_2}{w_2 + W_2} - \arctg \frac{\omega L_2 - \{(w_2 + W_2)^2 + \omega^2 L_2^2\} \omega C}{w_2 + W_2}.$$

Fall 5. Es liegt wieder eine mit verteilter Selbstinduktion und verteilter Kapazität behaftete Fernleitung vor, an deren Ende ein induktionsfreier Widerstand angeschlossen ist. Diesmal ist jedoch die gesamte Kapazität der Fernleitung in zwei gleichen Teilen an Anfang und Ende der Leitung konzentriert gedacht.

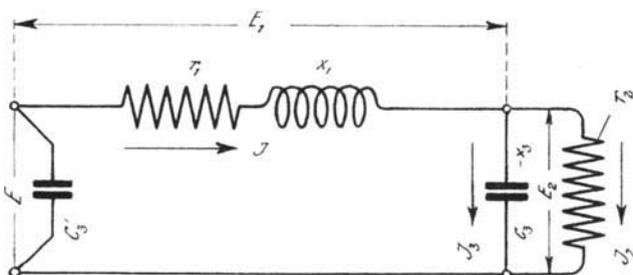


Fig. 18.

Fig. 18 zeigt die schematische Darstellung dieses Falles. Setzt man im vorhergehenden Falle ωL_2 und w_2 gleich Null, dann geht der vorhergehende Fall in den vorliegenden Fall 5 über. Ohne die Kenntnis der Ergebnisse des vorigen Falles ergibt sich für den neuen Fall folgender einfacher Rechnungsvorgang zur Bestimmung der Gesamtstromstärke J und der einzelnen Phasenwinkel:

In symbolischer Schreibweise ist:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = J \left(Z_1 + \frac{1}{y_k} \right) \\ \dot{E} &= J \{ (r_1 + r_k) - j(x_1 + x_k) \} \end{aligned}$$

Es ist wieder wie im Fall 3:

$$\begin{aligned} r_k &= \frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2} = \frac{g_1 + g_2}{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \\ x_k &= \frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2} = \frac{b_1 + b_2}{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}. \end{aligned}$$

Dies in die letzte Gleichung für \dot{E} eingesetzt:

$$\dot{E} = j \left\{ \left[r_1 + \frac{g_2}{g_2^2 + (-b_3)^2} \right] - j \left[x_1 + \frac{-b_3}{g_2^2 + (-b_3)^2} \right] \right\}$$

$$E = J \sqrt{\frac{\{r_1(g_2^2 + b_3^2) + g_2\}^2 + \{x_1(g_2^2 + b_3^2) - b_3\}^2}{(g_2^2 + b_3^2)^2}}$$

für g und b die Werte nach Abschnitt III eingesetzt und umgeformt:

$$E = J \sqrt{\frac{\{r_1(r_2^2 + x_3^2) + r_2 x_3\}^2 + \{x_1(r_2^2 + x_3^2) - r_2 x_3\}^2}{(r_2^2 + x_3^2)^2} \cdot \frac{\{r_2^2 x_3\}^2}{(r_2^2 + x_3^2)^2}}$$

für $r = w$, $x = \omega L$ bzw. $\frac{1}{\omega C}$ eingesetzt, gibt:

$$E = J \sqrt{\frac{\left\{ w_1 \left[w_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] + w_2 \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ \omega L_1 \left[w_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] - w_2^2 \frac{1}{\omega C} \right\}^2}{\left\{ w_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right\}^2}}$$

nach geringfügiger Umformung ergibt sich schließlich für den Gesamtstrom die Gleichung:

$$J = \frac{E \{1 + (w_2 \omega C)^2\}}{\sqrt{\{w_1 [1 + (w_2 \omega C)^2] + w_2\}^2 + \{\omega L_1 [1 + (w_2 \omega C)^2] - w_2^2 \omega C\}^2}}$$

Aus Fig. 19 und $\dot{E} = J \{ (r_1 + r_k) - j(x_1 + x_k) \}$

$$= j \left\{ \left(r_1 + \frac{g_2}{g_2^2 + b_3^2} \right) - j \left(x_1 + \frac{-b_3}{g_2^2 + b_3^2} \right) \right\}$$

ergibt sich für die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom J und Klemmenspannung E ohne weiteres:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_1 + \frac{-b_3}{g_2^2 + b_3^2}}{r_1 + \frac{g_2}{g_2^2 + b_3^2}} = \frac{x_1(r_2^2 + x_3^2) - r_2^2 x_3}{r_1(r_2^2 + x_3^2) + r_2 x_3^2}$$

die Werte für r und x eingesetzt, gibt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L_1 \{1 + w_2^2 (\omega C)^2\} - w_2^2 \omega C}{w_2 + \{1 + w_2^2 (\omega C)^2\} \cdot w_1}$$

Die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom J und Teilspannung E_2 ermittelt sich gemäß Fig. 19 aus:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_k}{r_k} = \frac{-b_3}{\frac{g_2^2 + b_3^2}{g_3}} = -\frac{b_3}{g_2} = -\omega C \cdot w_2.$$

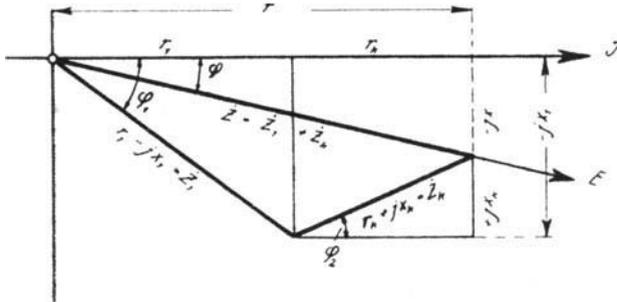


Fig. 19.

Anmerkung. Dividiert man die rechte Seite der Gleichung für J oben und unten durch $\{1 + (w_2 \omega C)^2\}$, so erhält man dieselbe Gleichungsform, wie sie Prof. Benischke in seinem Werke „Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik“ für den gleichen Fall wie hier für J angegeben hat.

Fall 6. Der in Fig. 20 schematisch dargestellte geschlossene unverzweigte Stromkreis soll nach der symbolisch-

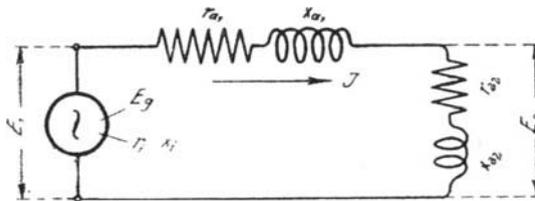


Fig. 20.

komplexen Methode untersucht werden. Für den ganzen Stromkreis ist in symbolischer Schreibweise nach dem Ohmschen Gesetz wie bei Gleichstrom:

$$\dot{E} = j(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2) = j\dot{Z}.$$

Darin bedeutet:

\dot{E}_g das Symbol für die EMK (E_g) des Wechselstromgenerators.

\dot{J} das Symbol für den Strom im geschlossenen unverzweigten Stromkreise.

\dot{Z}_i das Symbol für den Scheinwiderstand (die Impedanz) des Generators.

\dot{Z}_a das Symbol für den Scheinwiderstand (die Impedanz) des Belastungsstromkreises

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_{a1} + \dot{Z}_{a2}.$$

Dies in die Gleichung für E_g eingesetzt und an Stelle der Symbole \dot{Z} deren komplexe Formen gesetzt:

$$\dot{E}_g = \dot{J} \{ (r_i - jx_i) + (r_{a1} - jx_{a1}) + (r_{a2} - jx_{a2}) \} = \dot{J} (r - jx)$$

$$\dot{E}_g = \dot{J} \{ (r_i + r_{a1} + r_{a2}) - j(x_i + x_{a1} + x_{a2}) \},$$

in reellen Werten ausgedrückt und für $r = w$ bzw. $x = \omega L$ gesetzt, gibt

$$J = \frac{E_g}{\sqrt{(w_i + w_{a1} + w_{a2})^2 + \omega^2 (L_i + L_{a1} + L_{a2})^2}}.$$

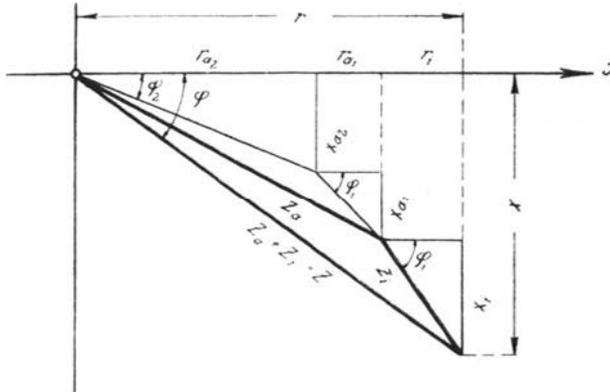


Fig. 21.

In Übereinstimmung mit dem unter Abschnitt V Gesagten gibt Fig. 21 die graphische Zusammensetzung der reellen Formen der Einzelimpedanzen Z_i , Z_{a1} und Z_{a2} wieder (Widerstandsdiagramm). Multipliziert man die Einzelwerte dieses Diagramms

mit J , so erhält man das Spannungsdiagramm Fig. 22 für den vorliegenden Fall.

Aus den Fig. 21 und 22 sowie aus der diesen Figuren zugrunde liegenden Formel

$$\begin{aligned} \dot{E}_g &= J \{ (r_i + r_{a1} + r_{a2}) - j(x_i + x_{a1} + x_{a2}) \} \\ &= J(r_i - jx_i) + J(r_{a1} - jx_{a1}) + J(r_{a2} - jx_{a2}) \end{aligned}$$

ergibt sich

für die Phasenverschiebung zwischen Strom und EMK E_g des Generators:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_i + x_{a1} + x_{a2}}{r_i + r_{a1} + r_{a2}} = \frac{\omega(L_i + L_{a1} + L_{a2})}{w_i + w_{a1} + w_{a2}},$$

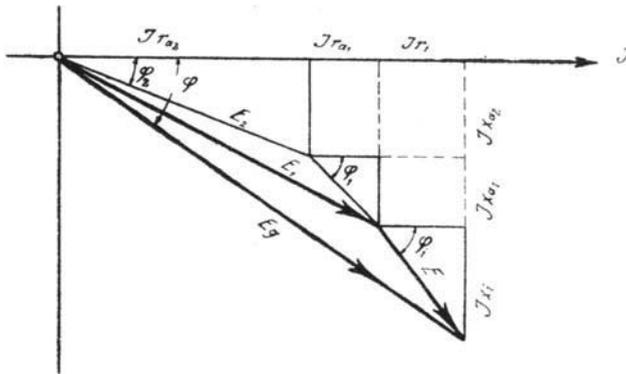


Fig. 22.

für die Phasenverschiebungen zwischen Strom und Teilspannungen E_i , E_1 und E_2

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{x_i}{r_i} = \frac{\omega L_i}{w_i},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_{a1}}{r_{a1}} = \frac{\omega L_{a1}}{w_{a1}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{x_{a2}}{r_{a2}} = \frac{\omega L_{a2}}{w_{a2}}.$$

Soll bei unbekanntem Strome J , also wenn nur die Klemmenspannung E_1 und die äußeren Widerstände bekannt sind, die

Teilspannung E_2 ermittelt werden, dann ist in symbolischer Schreibweise anzusetzen wie bei Gleichstrom:

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= J \dot{Z}_{a2} \\ \dot{E}_1 &= J(\dot{Z}_{a1} + \dot{Z}_{a2}).\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich für E_2 ohne Kenntnis von J :

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= \dot{E}_1 \frac{\dot{Z}_{a2}}{\dot{Z}_{a1} + \dot{Z}_{a2}} \\ \dot{E}_2 &= \dot{E}_1 \frac{r_{a2} - jx_{a2}}{(r_{a1} + r_{a2}) - j(x_{a1} + x_{a2})} = \dot{E}_1 \frac{r_{a2} - jx_{a2}}{r_{12} - jx_{12}}.\end{aligned}$$

Soll unter Benutzung der letzten Gleichung die Phasenverschiebung zwischen den Teilspannungen E_2 und E_1 bestimmt werden, dann ist der Quotient von E_2 auf die allgemeine komplexe Form, die Nebenform, zu bringen, indem der Quotient von E_1 oben und unten mit $r_{12} + jx_{12}$ multipliziert wird. Aus der letzten Gleichung wird dann:

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= \dot{E}_1 \left\{ \frac{r_{a2} \cdot r_{12} + x_{a2} x_{12}}{r_{12}^2 + x_{12}^2} + j \frac{r_{a2} x_{12} - r_{12} x_{a2}}{r_{12}^2 + x_{12}^2} \right\} \\ &= \dot{E}_1 (r_k + jx_k) = \dot{E}_1 r_k + j \dot{E}_1 x_k.\end{aligned}$$

Wie in früheren Beispielen ist jetzt \dot{E}_1 der letzten Gleichung als Richtgröße zu betrachten, fällt also mit der positiven reellen

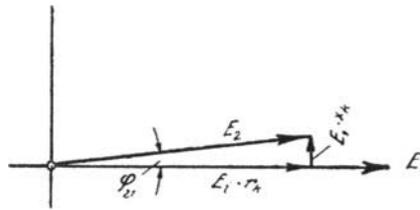


Fig. 23.

Zahlenachse zusammen, während der Neigungswinkel von E_2 aus der ganzen rechten Seite der letzten Gleichung bestimmbar ist. Denn die letzte Gleichung sagt, daß \dot{E}_2 aus den beiden Komponenten $\dot{E}_1 r_k$ und $+j \dot{E}_1 x_k$ besteht. In Übereinstimmung

hiermit und mit dem unter Abschnitt I über die Bedeutung von j Gesagten ergibt sich Fig. 23. Aus derselben und der letzten Gleichung ergibt sich schließlich für die Phasenverschiebung zwischen E_2 und E_1

$$\operatorname{tg} \varphi_{21} = -\frac{x_k}{r_k} = -\frac{r_{a2}x_{12} - r_{12}x_{a2}}{r_{a2}r_{12} + x_{a2}x_{12}};$$

für $r = w$ und $x = \omega L$ gesetzt, ergibt endgültig:

$$\operatorname{tg} \varphi_{21} = -\frac{w_{a2}\omega L_{12} - w_{12}\omega L_{a2}}{w_{a2}\cdot w_{12} + \omega^2 L_{a2}\cdot L_{12}}.$$

Darin ist:

$$\begin{aligned} w_{12} &= w_{a1} + w_{a2} \\ L_{12} &= L_{a1} + L_{a2}. \end{aligned}$$

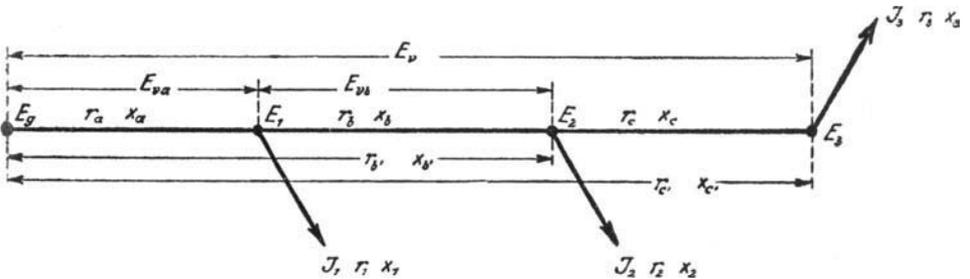


Fig. 24.

Fall 7. Von den drei Punkten E_1 , E_2 und E_3 einer nur mit Widerstand und verteilter Selbstinduktion behafteten Fernleitung (Fig. 24) führen drei Leitungen nach den Großkonsumenten J_1 , J_2 und J_3 . Die Selbstinduktionen (Reaktanzen) der drei Großverbraucher bewirke nicht wie in der Praxis oft angenommen wird gleichen $\cos \varphi$ derselben untereinander, sondern untereinander stark abweichende $\cos \varphi$. Bei gleicher Energieentnahme untereinander soll also der Prozentsatz an Selbstinduktion für den einzelnen Verbraucher verschieden sein. Es soll der gesamte Spannungsabfall der Fernleitung, die Spannung am Abzweigpunkte E_1 , die Spannung am Abzweigpunkte E_2 und die Phasenverschiebung zwischen der gegebenen Spannung E_g am Anfange der Fernleitung und dem Strome J_a ebenda ermittelt werden. Die Widerstände (Resistenzen und

Reaktanzen) der Fernleitung und Verbraucher sind als gegeben zu betrachten¹⁾.

Nach der bei Netzberechnungen üblichen Methode, zur Ermittlung der Belastungsströme ($J_1 J_2 J_3$) überall gleiche Spannung im Netze zugrunde zu legen, ergibt sich für den vorliegenden Fall in symbolischer Schreibweise:

$$\begin{aligned} \dot{J}_a &= \dot{J}_1 + \dot{J}_2 + \dot{J}_3 = \dot{E}_g (g_1 + j b_1) + \dot{E}_g (g_2 + j b_2) + \dot{E}_g (g_3 + j b_3) \\ \dot{J}_a &= \dot{E}_g \dot{y}_1 + \dot{E}_g \dot{y}_2 + \dot{E}_g \dot{y}_3. \end{aligned}$$

Für den weiteren Gang der Rechnung wird nun zweckmäßig an Stelle der algebraischen Form der komplexen Ausdrücke für y die trigonometrische Form der komplexen Ausdrücke für die Symbole \dot{y}_1 , \dot{y}_2 und \dot{y}_3 gewählt:

$$\dot{y}_1 = y_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \quad \text{(a)}$$

Wie die Algebra lehrt, läßt sich die letzte Form des komplexen Ausdrucks für \dot{y}_1 auch noch in Exponentialform schreiben:

$$\dot{y}_1 = y_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = y_1 \cdot e^{+j\varphi_1}$$

e = Basis des ln.

Nach früherem ist

$$\dot{y}_1 = (g_1 + j b_1)$$

und

$$y_1 = \sqrt{g_1^2 + b_1^2},$$

also:

$$\dot{y}_1 = y_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = y_1 e^{+j\varphi_1} = \sqrt{g_1^2 + b_1^2} e^{+j\varphi_1} \quad . \text{(b)}$$

Nach diesem ergibt sich nun für den gesamten Spannungs-

¹⁾ Anmerkung. Sind Leistung und Leistungsfaktor ($\cos \varphi$) des Stromverbrauchers gegeben, so bestimmt man unter der zulässigen Annahme, daß überall gleiche Spannung im Netze herrscht, w und ωL des betreffenden Stromverbrauchers wie folgt.

Aus

$$W_2 = E_2 \cdot J_2 \cdot \cos \varphi_2$$

wird zunächst J_2 bestimmt, wobei

W_2 aufgenommene Leistung des Stromverbrauchers in Watt,

E_2 überall gleiche Spannung im Netze, an das der Stromverbraucher angeschlossen ist.

Die Wirkspannung ist dann $E_{2w} = E_2 \cos \varphi_2 = J_2 w_2$.

Die Blindspannung ist $E_{2s} = E_2 \sin \varphi_2 = J_2 \omega L_2$.

abfall in der Fernleitung:

$$\begin{aligned} \dot{E}_v &= \dot{J}_1(r_a - jx_a) + \dot{J}_2(r_{b'} - jx_{b'}) + \dot{J}_3(r_{c'} - jx_{c'}) \\ \dot{E}_v &= \dot{E}_g \left\{ \sqrt{g_1^2 + b_1^2} \sqrt{r_a^2 + x_a^2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_1')} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{g_2^2 + b_2^2} \sqrt{r_{b'}^2 + x_{b'}^2} e^{j(\varphi_2 - \varphi_2')} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{g_3^2 + b_3^2} \sqrt{r_{c'}^2 + x_{c'}^2} e^{j(\varphi_3 - \varphi_3')} \right\} \\ \varphi_1 &= \text{arc tg } \frac{b_1}{g_1}; \quad \varphi_1' = \text{arc tg } \frac{x_a}{r_a}; \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_1 - \varphi_1' &= \alpha_1; \quad \varphi_2 - \varphi_2' = \alpha_2; \quad \varphi_3 - \varphi_3' = \alpha_3. \end{aligned}$$

Dies in die letzte Gleichung für \dot{E}_v eingesetzt und in dieser an Stelle der Wurzelprodukte A_1, A_2 und A_3 gesetzt, gibt unter Zugrundelegung der letzten Hilfsgleichung (b):

$$\begin{aligned} \dot{E}_v &= \dot{E}_g \left\{ A_1 (\cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1) + A_2 (\cos \alpha_2 + j \sin \alpha_2) \right. \\ &\quad \left. + A_3 (\cos \alpha_3 + j \sin \alpha_3) \right\}. \end{aligned}$$

Wie bei der algebraischen Form der komplexen Ausdrücke, wo bei der Addition mehrerer solcher Ausdrücke die reellen Größen für sich und die imaginären Größen für sich zusammengefaßt wurden, sind auch bei der Addition der Klammerglieder der letzten Gleichung die reellen Größen für sich und die imaginären Größen für sich zusammenzufassen; nicht aber erst gliedweise auszuwerten und dann einfach algebraisch zu addieren:

$$\begin{aligned} \dot{E}_v &= \dot{E}_g \left\{ (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \cos \alpha_3) \right. \\ &\quad \left. + j (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + A_3 \sin \alpha_3) \right\}, \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

Der Wirkwiderstand des Verbrauchers zu $w_2 = \frac{E_2 \cos \varphi_2}{J_2}$.

Der Blindwiderstand des Verbrauchers zu $\omega L_2 = \frac{E_2 \sin \varphi_2}{J_2}$.

Zu $w_2 = r_2$ berechnet man den Wirkleitwert g_2 gemäß Formel (2b), Abschnitt III:

$$g_2 = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2},$$

und zu $\omega L_2 = x_2$ berechnet man den Blindleitwert b_2 ebenfalls analog Formel (2b), Abschnitt III:

$$b_2 = \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2}.$$

oder in reellen Werten:

$$E_v = E_g \sqrt{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \cos \alpha_3}^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + A_3 \sin \alpha_3)^2.$$

Die Spannung am Abzweigpunkte E_1 ermittelt sich wie folgt.

Es ist

$$\dot{J}_a = \dot{E}_g (y_1 e^{j\varphi_1} + y_2 e^{j\varphi_2} + y_3 e^{j\varphi_3}).$$

Der Verlust von E_g bis E_1 beträgt dann:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{v_a} &= \dot{J}_a (r_a - jx_a) = \dot{J}_a z_a e^{-j\varphi_a} \\ \dot{E}_{v_a} &= \dot{E}_g \{y_1 z_a e^{j(\varphi_1 - \varphi_a)} + y_2 z_a e^{j(\varphi_2 - \varphi_a)} + y_3 z_a e^{j(\varphi_3 - \varphi_a)}\} \\ y_1 z_a &= \sqrt{g_1^2 + b_1^2} \sqrt{r_a^2 + x_a^2} = A_1' \\ \varphi_1 &= \arctg \frac{b_1}{g_1}; \quad \varphi_a = \arctg \frac{x_a}{r_a}; \quad \varphi_1 - \varphi_a = \alpha_1'. \end{aligned}$$

Dies in die letzte Gleichung für \dot{E}_{v_a} eingesetzt und die trigonometrische Form gewählt (Hilfsgleichung (b)), gibt:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{v_a} &= \dot{E}_g \{(A_1' \cos \alpha_1' + A_2' \cos \alpha_2' + A_3' \cos \alpha_3') \\ &\quad + j(A_1' \sin \alpha_1' + A_2' \sin \alpha_2' + A_3' \sin \alpha_3')\} \end{aligned}$$

oder in reellen Werten:

$$E_{v_a} = E_g \sqrt{(A_1' \cos \alpha_1' + \dots)^2 + (A_1' \sin \alpha_1' + \dots)^2}.$$

In symbolischer Schreibweise ist die Spannung E_1 am Abzweigpunkte der Fernleitung (E_1):

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_g - \dot{E}_{v_a}.$$

Graphisch erfolgt diese symbolisch geschriebene Subtraktion nach Fig. 25. Daraus ergibt sich die gesuchte Spannung E_1 ohne weiteres zu:

$$E_1 = \sqrt{E_{v_a}^2 + E_g^2 - 2 E_{v_a} E_g \cos \psi}.$$

Der Winkel ψ als Phasenwinkel zwischen der Spannung E_g und dem Spannungsabfall E_{v_a} ermittelt sich dann entweder unmittelbar aus der letzten Gleichung für \dot{E}_{v_a} zu

$$\psi = \arctg \frac{A_1' \sin \alpha_1' + A_2' \sin \alpha_2' + A_3' \sin \alpha_3'}{A_1' \cos \alpha_1' + A_2' \cos \alpha_2' + A_3' \cos \alpha_3'}.$$

oder aus der Differenz der beiden Phasenwinkel zwischen J_a , E_g einerseits und zwischen J_a und E_{v_a} andererseits:

Die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom J_a und Anfangsspannung E_g ergibt sich aus

$$J_a = \dot{E}_g (\sqrt{g_1^2 + b_1^2} e^{j\varphi_1} + \sqrt{g_2^2 + b_2^2} e^{j\varphi_2} + \sqrt{g_3^2 + b_3^2} e^{j\varphi_3}),$$

wenn für die Wurzelausdrücke A_1'' , A_2'' und A_3'' gesetzt wird, zu:

$$\varphi = \arctg \frac{A_1'' \sin \varphi_1 + A_2'' \sin \varphi_2 + A_3'' \sin \varphi_3}{A_1'' \cos \varphi_1 + A_2'' \cos \varphi_2 + A_3'' \cos \varphi_3},$$

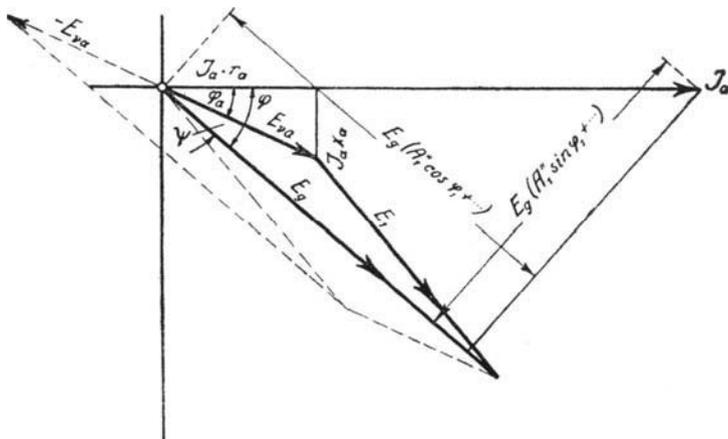


Fig. 25.

und die Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom J_a und Spannungsabfall $E_{v a}$ ergibt sich aus

$$\dot{E}_{v a} = J_a (r_a - jx_a)$$

zu:

$$\varphi_a = \arctg \frac{x_a}{r_a} = \arctg \frac{\omega L_a}{w_a}$$

$$\psi = \varphi - \varphi_a.$$

Für die Phasenverschiebung zwischen der Spannung \dot{E}_g am Anfange der Fernleitung und dem gesamten Spannungsabfall E_v derselben ergibt sich aus der letzten Gleichung für E_v

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + A_3 \sin \alpha_3}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + A_3 \cos \alpha_3}.$$

Die Spannung am Abzweigpunkte E_2 ermittelt sich in gleicher Weise wie die Spannung am Punkte E_1 . Es ist

$$\begin{aligned}\dot{E}_{v_b} &= \dot{J}_b (r_b - jx_b) = \dot{J}_b z_b e^{-j\varphi_b}, \\ \dot{J}_b &= \dot{E}_1 \{y_2 e^{j\varphi_2} + y_3 e^{j\varphi_3}\}.\end{aligned}$$

Den Wert für \dot{J}_b in die Gleichung für \dot{E}_{v_b} eingesetzt, gibt:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{v_b} &= \dot{E}_1 \{y_2 z_b e^{j(\varphi_2 - \varphi_b)} + y_3 z_b e^{j(\varphi_3 - \varphi_b)}\} \\ &= \dot{E}_1 \left\{ \sqrt{g_2^2 + b_2^2} \sqrt{r_b^2 + x_b^2} e^{j(\varphi_2 - \varphi_b)} + \sqrt{g_3^2 + b_3^2} \sqrt{r_b^2 + x_b^2} e^{j(\varphi_3 - \varphi_b)} \right\} \\ \varphi_2 &= \text{arc tg } \frac{b_2}{g_2}; \quad \varphi_b = \text{arc tg } \frac{x_b}{r_b}; \quad \varphi_2 - \varphi_b = \beta_2.\end{aligned}$$

Dies in die letzte Gleichung für E_{v_b} eingeführt und an Stelle der Wurzelprodukte B_2 und B_3 gesetzt, gibt:

$$\dot{E}_{v_b} = \dot{E}_1 \{(B_2 \cos \beta_2 + B_3 \cos \beta_3) + j(B_2 \sin \beta_2 + B_3 \sin \beta_3)\}$$

oder in reellen Werten:

$$E_{v_b} = E_1 \sqrt{(B_2 \cos \beta_2 + B_3 \cos \beta_3)^2 + (B_2 \sin \beta_2 + B_3 \sin \beta_3)^2}$$

$$E_2 = E_1 - E_{v_b}$$

$$E_2 = \sqrt{E_1^2 + E_{v_b}^2 - 2 E_1 E_{v_b} \cos \psi_2}$$

(siehe auch Fig. 26).

Der Phasenverschiebungswinkel ψ_2 in der letzten Gleichung ermittelt sich aus der letzten Gleichung für \dot{E}_{v_b} zu:

$$\psi_2 = \text{arc tg } \frac{B_2 \sin \beta_2 + B_3 \sin \beta_3}{B_2 \cos \beta_2 + B_3 \cos \beta_3}.$$

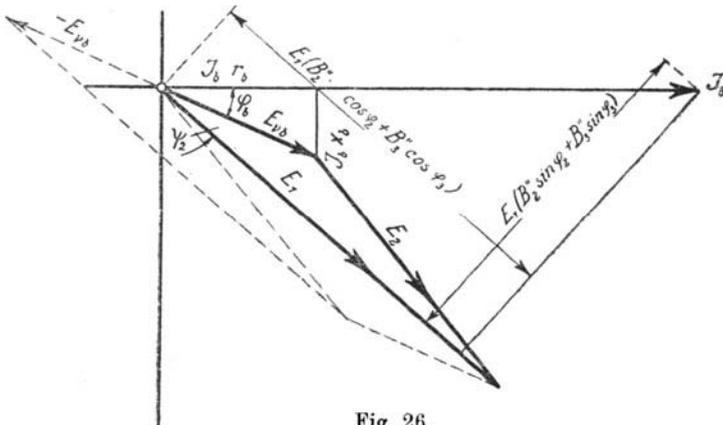


Fig. 26.

kreise unter Fall 4. Für den Ersatzstromkreis, vom Punkte *B* ab gerechnet, setzen wir also, das Übersetzungsverhältnis des Transformators zunächst gleich eins angenommen, an wie in Fall 4:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{k1} &= \dot{E}_{1s} + \dot{E}_2 = \dot{J}_1 (\dot{Z}_{1s} + \dot{Z}_k) = \dot{J}_1 \dot{Z}_t = \dot{J}_1 \left(\dot{Z}_{1s} + \frac{1}{\dot{y}_k} \right) \\ \dot{E}_{k1} &= \dot{J}_1 \left(\dot{Z}_{1s} + \frac{1}{\dot{y}_2 + \dot{y}_m} \right) = \dot{J}_1 \left(\frac{1 + \dot{Z}_{1s} \dot{y}_2 + \dot{Z}_{1s} \dot{y}_m}{\dot{y}_2 + \dot{y}_m} \right). \end{aligned}$$

Sind die primären und die sekundären Windungszahlen verschieden, was meist der Fall ist, dann führt man die elektrischen Größen der Sekundärwicklung auf die primäre Windungszahl wie folgt zurück¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_{2\text{pr}}}{E_2} &= \frac{w_1}{w_2}; & E_{2\text{pr}} &= \frac{w_1}{w_2} E_2 = k \cdot E_2; \\ \frac{J_{2\text{pr}}}{J_2} &= \frac{w_2^2}{w_1^2}; & J_{2\text{pr}} &= \frac{w_2}{w_1} J_2 = \frac{1}{k} J_2. \\ \frac{E_{2\text{pr}}}{J_{2\text{pr}}} &= r_{2\text{pr}} = \frac{w_1 \cdot w_1 E_2}{w_2 \cdot w_2 J_2} = \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 r_2 = k^2 r_2; \\ x_{2\text{pr}} &= k^2 x_2 & \text{und} & & Z_{2\text{pr}} &= k^2 Z_2. \end{aligned} \right\} \dots (a_3)$$

Da $y = \frac{1}{Z}$

$$y_{2\text{pr}} = \frac{1}{k^2 Z_2} = \frac{y_2}{k^2}.$$

¹⁾ Es sind natürlich alle sekundären Werte, die in einer Gleichung vorkommen, zu reduzieren.

²⁾ Streng genommen ist für das Verhältnis zwischen Sekundär- und Primärstrom wegen der Streuung des Transformators zu schreiben:

$$\frac{J_1}{J_2} = \kappa \frac{w_2}{w_1},$$

wo κ der Kupplungsfaktor ist. Dieser bringt zahlenmäßig zum Ausdruck, wie stark die Kupplung zwischen den beiden magnetisch verketteten Stromkreisen I u. II der Fig. 27 ist. Nach Prof. Dr. Benischke liegt der Wert von κ bei normalen Transformatoren zwischen 0,99 und 1. Auch bei Stromtransformatoren für Meßzwecke soll κ zwischen den angegebenen Werten liegen. Für die Bedürfnisse der Praxis genügt es also, das Übersetzungsverhältnis normaler Transformatoren als durch

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{k}$$

bestimmt anzusehen.

Führt man in die letzte Gleichung für \dot{E}_{k1} die auf die primäre Windungszahl reduzierten sekundären Größen ein, so geht diese Gleichung über in:

$$\dot{J}_1 = \dot{E}_{k1} \frac{\frac{\dot{y}_2}{k^2} + \dot{y}_m}{1 + \dot{Z}_{1s} \dot{y}_m + \dot{Z}_{1s} \frac{\dot{y}_2}{k^2}}$$

Dies ist dieselbe Gleichung wie sie Steinmetz auf anderem Wege für den vorliegenden Fall entwickelt hat.

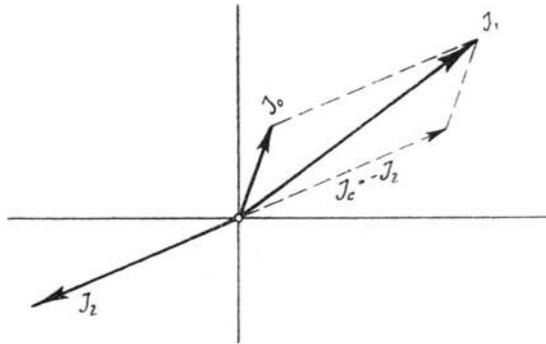


Fig. 29.

Zur weiteren Entwicklung des Ansatzes $\dot{E}_{k1} = \dot{J}_1 \left(\dot{Z}_{1s} + \frac{1}{\dot{y}_k} \right)$ benutzen wir nun denselben Weg, den wir unter Fall 4 für die Weiterbildung desselben Ansatzes eingeschlagen haben. Darnach war für den symbolischen Ausdruck $\frac{1}{\dot{y}_k}$ die komplexe Form $(r_k - j x_k)$ zu suchen, um sie mit dem komplexen Ausdruck für \dot{Z}_{1s} zusammensetzen zu können. Unter Berücksichtigung des Transformatorübersetzungsverhältnisses (also der Hilfsgleichungen (a₃)) ergibt sich zunächst für $\frac{1}{\dot{y}_k}$:

$$\frac{1}{\dot{y}_k} = \frac{1}{\frac{\dot{y}_2}{k^2} + \dot{y}_m} = \frac{k^2}{\dot{y}_2 + \dot{y}_m k^2} = \frac{k^2}{(g_2 + j b_2) + (g_m + j b_m) k^2}$$

$$\frac{1}{\dot{y}_k} = \frac{k^2}{(g_2 + k^2 g_m) + j (b_2 + k^2 b_m)};$$

$$k^2 g_m = g'_m \quad \text{und} \quad k^2 b_m = b'_m.$$

$$\frac{k^2}{(g_2 + g'_m) + j(b_2 + b'_m)} = \frac{k^2}{g_k + j b_k}; \quad \dots \dots (b_8)$$

$$\frac{1}{j_k} = \dot{Z} = \frac{k^2 g_k}{g_k^2 + b_k^2} - j \frac{k^2 b_k}{g_k^2 + b_k^2} = k^2 (r_k - j x_k).$$

Dies in den Ansatz für \dot{E}_{k1} eingesetzt, gibt:

$$\dot{E}_{k1} = \dot{J}_1 \dot{Z}_t = \dot{J}_1 \{ (r_{1s} - j x_{1s}) + (r_k - j x_k) k^2 \}$$

$$\dot{E}_{k1} = \dot{J}_1 \{ (r_{1s} + k^2 r_k) - j (x_{1s} + k^2 x_k) \}$$

$$E_{k1} = J_1 \sqrt{\left(r_{1s} + \frac{k^2 g_k}{g_k^2 + b_k^2} \right)^2 + \left(x_{1s} + \frac{k^2 b_k}{g_k^2 + b_k^2} \right)^2}.$$

In die letzte Gleichung die Werte für g_k und b_k gemäß Gl. (b₈), nämlich für

$$g_k = g_2 + g'_m = g_2 + k^2 g_m$$

und für

$$b_k = b_2 + b'_m = b_2 + k^2 b_m,$$

eingesetzt, gibt:

$$E_{k1} = J_1 \sqrt{\left\{ r_{1s} + \frac{k^2 (g_2 + k^2 g_m)}{(g_2 + k^2 g_m)^2 + (b_2 + k^2 b_m)^2} \right\}^2 + \left\{ x_{1s} + \frac{k^2 (b_2 + k^2 b_m)}{(g_2 + k^2 g_m)^2 + (b_2 + k^2 b_m)^2} \right\}^2};$$

für g_2 und b_2 die Werte unter Abschnitt III eingesetzt ergibt:

$$E_{k1} = J_1 \sqrt{\left\{ r_{1s} + \frac{k^2 \left(\frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} + k^2 g_m \right)}{\left(\frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} + k^2 g_m \right)^2 + \left(\frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} + k^2 b_m \right)^2} \right\}^2 + \left\{ x_{1s} + \frac{k^2 \left(\frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} + k^2 b_m \right)}{\left(\frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} + k^2 g_m \right)^2 + \left(\frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} + k^2 b_m \right)^2} \right\}^2}.$$

Nach geringfügiger Umformung ergibt sich weiter:

$$E_{k_1} = J_1 \sqrt{\left\{ r_{1s} + \frac{k^2 \{r_2^2 + x_2^2\} \{r_2 + k^2 g_m (r_2^2 + x_2^2)\}}{(r_2 + k^2 g_m (r_2^2 + x_2^2))^2 + (x_2 + k^2 b_m (r_2^2 + x_2^2))^2} \right\}^2 + \left\{ x_{1s} + \frac{k_2 \{r_2^2 + x_2^2\} \{x_2 + k^2 b_m (r_2^2 + x_2^2)\}}{(r_2 + k^2 g_m (r_2^2 + x_2^2))^2 + (x_2 + k^2 b_m (r_2^2 + x_2^2))^2} \right\}^2}.$$

Schließlich für $r=w$ und $x=\omega L$ gesetzt, gibt für die durch den ganzen Stromkreis hindurchgetriebene Stromstärke

$$J_1 = \frac{E_{k_1}}{\sqrt{\left\{ w_{1s} + \frac{k^2 \{w_2^2 + \omega^2 L_2^2\} \{w_2 + k^2 g_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)\}}{(w_2 + k^2 g_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2))^2 + (\omega L_2 + k^2 b_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2))^2} \right\}^2 + \left\{ \omega L_{1s} + \frac{k^2 \{w_2^2 + \omega^2 L_2^2\} \{\omega L_2 + k^2 b_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)\}}{(w_2 + k^2 g_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2))^2 + (\omega L_2 + k^2 b_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2))^2} \right\}^2}}.$$

Faßt man $(w_2^2 + \omega^2 L_2^2)$ zusammen zu W_2 , so vereinfacht sich die letzte Gleichung um eine Kleinigkeit.

Die Werte g_m (Erregerkonduktanz) und b_m (Erregersuszeptanz) ermitteln sich nach Arnold, Band 1, aus den Eisenverlusten des Transformators zu:

$$k \cdot E_2 \cdot k \cdot E_2 \cdot g_m = k E_2 \cdot J_n = W$$

$$g_m = \frac{W}{(k E_2)^2}$$

W = Eisenverluste in Watt.

E_{2pr} ist noch unbekannt. Für die Bedürfnisse der Praxis genügt es, an Stelle von $E_2 \cdot k$ entweder E_{k_1} oder $k E_{k_2}$ zu setzen. Die Abweichung vom genauen Werte für g_m ist dabei in beiden Fällen äußerst minimal. Es ist also sehr angenähert:

$$g_m \approx \sim \frac{W}{E_{k_1}^2} \approx \sim \frac{W}{(k E_{k_2})^2}; \quad J_n \approx \sim \frac{W}{E_{k_1}}$$

$$b_m \approx \sim \frac{J_s}{E_{k_1}}; \quad J_s = \sqrt{J_0^2 - J_n^2}; \quad J_0 \approx \sim \frac{W}{E_{k_1} \cos \varphi_0}$$

J_s = wattlose Komponente des Leerlaufstromes J_0 gemäß Fig. 29 a.

$$\alpha_0 = \text{arc tg } \frac{g_m}{b_m}$$

$$\varphi_0 = 90^\circ - \alpha_0.$$

Praktische Anwendung.

Hierin ist α_0 der Eisenverlustwinkel und φ_0 der Phasenverschiebungswinkel zwischen Leerlaufstrom J_0 und EMK E_2 , bei Belastung des Transformators (siehe auch Fig. 29a).

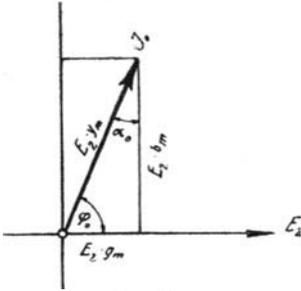


Fig. 29 a.

Die Eisenverluste W können für normale Transformatoren, die hier nur in Betracht kommen, jeweils aus der Preisliste für Transformatoren entnommen werden. Es ist somit, bevor der Gang der Rechnung fortgesetzt wird, zunächst aus den Sekundärgrößen durch Überschlagsrechnung eine listenmäßige Transformatorgröße zu bestimmen.

Bestimmung der Teilspannung $E_{2\text{pr}} = (\text{EMK } k E_2 = \text{EMK } E_1)$ des Ersatzstromkreises.

Die Teilspannung E_2 des Ersatzstromkreises, die identisch mit der EMK ($k E_2$) des Transformators ist, ergibt sich in Übereinstimmung mit Fig. 28 aus:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{2\text{pr}} &= \dot{J}_1 (r_k - j x_k) \cdot k^2; & \dot{E}_{2\text{pr}} &= -k \cdot \dot{E}_2. \\ E_{2\text{pr}} &= J_1 \sqrt{\left\{ \frac{k^2 \cdot W_2 \{w_2 + k^2 g_m W_2\}}{(w_2 + k^2 g_m W_2)^2 + (\omega L_2 + k^2 b_m W_2)^2} \right\}^2} \\ &+ \left\{ \frac{k^2 W_2 \{\omega L_2 + k^2 b_m W_2\}}{(w_2 + k^2 g_m W_2)^2 + (\omega L_2 + k^2 b_m W_2)^2} \right\}^2, \end{aligned}$$

wobei wieder $(w_2^2 + \omega^2 L_2^2) = W_2$ ist.

$E_{2\text{pr}}$ ergibt sich einfacher noch aus:

$$\dot{E}_{2\text{pr}} = \dot{E}_{k1} - \dot{E}_{1s} = \dot{E}_{k1} - \dot{J}_1 (r_{1s} - j x_{1s}).$$

Graphisch erfolgt diese Subtraktion nach Fig. 30. Daraus ergibt sich diese Spannung $E_{2\text{pr}}$ zu:

$$E_{2\text{pr}} = \sqrt{E_{1s}^2 + E_{k1}^2 - 2 E_{1s} \cdot E_{k1} \cos \psi_1};$$

darin ist: $\psi_1 = \varphi_{1s} - \varphi_{k1}^1)$,

$$E_{1s} = J_1 \sqrt{w_{1s}^2 + \omega^2 L_{1s}^2}$$

und

$$\varphi_{1s} = \text{arc tg } \frac{\omega L_{1s}}{w_{1s}}.$$

¹⁾ Die Ermittlung von φ_{k1} erfolgt weiter hinten.

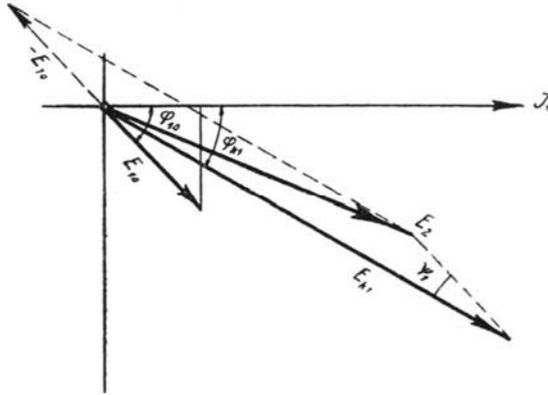


Fig. 30.

Bestimmung der Zweigströme J_0 und J_c ($J_c = -\frac{J_2}{k}$).

Um die Zweigströme J_0 und J_c des Ersatzstromkreises zu erhalten, setzen wir in symbolischer Schreibweise an:

$$\dot{E}_{2\text{pr}} \dot{y}_k = \dot{J}_0 + \dot{J}_c = \dot{E}_{2\text{pr}} \dot{y}_m + \dot{E}_{2\text{pr}} \dot{y}_c,$$

$$\dot{J}_0 = \dot{E}_{2\text{pr}} \dot{y}_m = \dot{E}_{2\text{pr}} (g_m + j b_m),$$

$$\dot{J}_0 = E_{2\text{pr}} \sqrt{g_m^2 + b_m^2},$$

$$\dot{J}_c = \dot{E}_{2\text{pr}} \cdot \dot{y}_c = \dot{E}_{2\text{pr}} (g_c + j b_c),$$

$$J_c = -\frac{\dot{J}_2}{k}; \quad \dot{y}_c = \frac{\dot{y}_2}{k^2},$$

$$J_c = \frac{E_{2\text{pr}}}{k^2} (g_2 + j b_2) = \frac{E_{2\text{pr}}}{k^2} \left\{ \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} + j \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2} \right\}.$$

Gemäß Fig. 28 ist

$$r_2 = r_{2s} + r_{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = x_{2s} + x_{2a},$$

dies in die letzte Gleichung für J_c eingesetzt und in reellen Werten ausgedrückt, gibt bei gleichzeitiger geringfügiger Umformung

$$J_c = \frac{E_{2\text{pr}}}{k^2} \frac{\sqrt{(w_{2s} + w_{2a})^2 + (\omega L_{2s} + \omega L_{2a})^2}}{(w_{2s} + w_{2a})^2 + (\omega L_{2s} + \omega L_{2a})^2}.$$

Die reduzierte sekundäre Klemmenspannung $k E_{k2}$ des

Transformators oder, was dasselbe ist, die Teilspannung $E_{k2\text{pr}}$ des Ersatzstromkreises ist dann:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{k2\text{pr}} &= \dot{J}_c k^2 (r_{2a} - jx_{2a}), \\ E_{k2\text{pr}} &= J_c k^2 \sqrt{r_{2a}^2 + x_{2a}^2} = J_c k^2 \sqrt{w_{2a}^2 + \omega^2 L_{2a}^2}, \\ E_{k2\text{pr}} &= -k E_{k2}.\end{aligned}$$

Bestimmung der Phasenverschiebungen.

Die Phasenverschiebung zwischen dem Sekundärstrom $J_c (J_2)$ und der Teilspannung $E_{k2\text{pr}} (E_{k2})$ ermittelt sich zu:

$$\varphi_{k2} = \text{arc tg} \frac{x_{2a}}{r_{2a}} = \text{arc tg} \frac{\omega L_{2a}}{w_{2a}}.$$

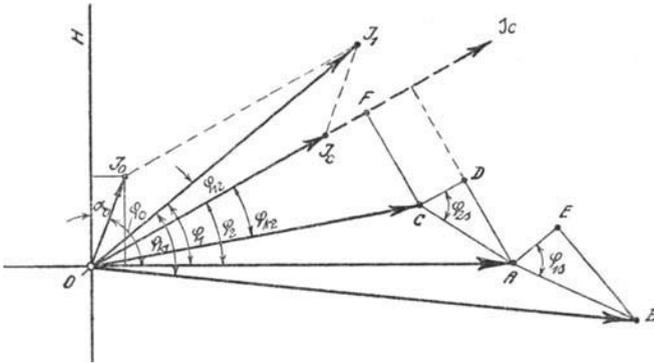


Fig. 31.

Die Phasenverschiebung zwischen der Teilspannung $E_{2\text{pr}} (E_2)$ und dem Sekundärstrom $J_c (J_2)$ ermittelt sich aus Fig. 31 und der letzten Formel für \dot{J}_c zu:

$$\varphi_2 = \text{arc tg} \frac{x_2}{r_2} = \text{arc tg} \frac{\omega(L_{2s} + L_{2a})}{w_{2s} + w_{2a}}.$$

Die Phasenverschiebung zwischen Teilspannung $E_{2s\text{pr}}$ (Streuungsspannung E_{2s}) und dem Sekundärstrom $J_c (J_2)$ ermittelt sich aus Fig. 31 und aus der Gleichung für $E_{2s\text{pr}}$:

$$\dot{E}_{2s\text{pr}} = \dot{J}_c (r_{2s} - jx_{2s}) k^2$$

zu:

$$\varphi_{2s} = \text{arc tg} \frac{\omega L_{2s}}{w_{2s}}.$$

Für die Phasenverschiebung zwischen der primären Klemmenspannung E_{k_1} und dem Primärstrom J_1 ergibt sich aus der letzten Gleichung für E_{k_1} und der weiteren Umformung derselben:

$$\operatorname{tg} \varphi_{k_1} = \frac{\omega L_{1s} \{ (w_2 + k^2 g_m W_2)^2 + (\omega L_2 + k^2 b_m W_2)^2 \}}{w_{1s} \{ w_2 + k^2 g_m W_2 \}^2 + (\omega L_2 + k^2 b_m W_2)^2} + \frac{k^2 W_2 (\omega L_2 + k^2 b_m W_2)}{k^2 W_2 (w_2 + k^2 g_m W_2)}.$$

Für die Phasenverschiebung zwischen der Teilspannung E_{2pr} oder, was dasselbe ist, der EMK E_1 und dem Primärstrom J_1 ergibt sich aus der letzten Gleichung für E_{2pr} (E_1) und der weiteren Umformung derselben:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(\omega L_2 + k^2 \cdot b_m W_2)}{(w_2 + k^2 \cdot g_m W_2)}.$$

Fig. 31 zeigt das Spannungsdiagramm für den in Fig. 28 wiedergegebenen Ersatzstromkreis. In dem Spannungsdiagramm Fig. 31 ist:

- OA Teilspannung E_2 ($\text{EMK } E_1 = \text{EMK} - kE_2$).
- OB Klemmenspannung E_{k_1} der Primärwicklung.
- AB gesamter Spannungsabfall E_{1s} in der Primärwicklung, Streuimpedanzspannung derselben.
- EB induktiver Spannungsabfall E_{s_1} in der Primärwicklung, Streureaktanzspannung derselben.
- AE Ohmscher Spannungsabfall E_{1w} in der Primärwicklung.
- OC Klemmenspannung E_{k_2} (E_{k_2pr}) der Sekundärwicklung.
- CA gesamter Spannungsabfall E_{2s} (E_{2spr}) in der Sekundärwicklung, Streuimpedanzspannung derselben.
- DA induktiver Spannungsabfall E_{s_2} (E_{s_2pr}) in der Sekundärwicklung, Streureaktanzspannung derselben.
- CD Ohmscher Spannungsabfall E_{2w} (E_{2wpr}) in der Sekundärwicklung.
- OF Resistanzspannung E_{2w_a} ($E_{2w_a pr}$) des äußeren sekundären Stromkreises.
- FC Reaktanzspannung E_{2s_a} ($E_{2s_a pr}$) des äußeren sekundären Stromkreises.
- OJ_1 Primärstrom J_1 ; OJ_2 Sekundärstrom J_c (J_{2pr}).
- OJ_0 Leerlaufstrom J_0 .

Die Phasenverschiebung zwischen dem Primärstrom J_1 und dem (reduzierten) Sekundärstrom J_c (J_{2pr}) ist

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

wobei φ_1 und φ_2 aus den für sie auf Seite 44 u. 45 aufgestellten Gleichungen bestimmbar sind.

Übergang vom Diagramm des Ersatzstromkreises auf das Transformatorendiagramm.

Gemäß Fig. 29 ist $J_c = - J_2 \left(J_{2pr} = - \frac{J_2}{k} \right)$, der Sekundärstrom J_2 ist um 180° gegen J_c verschoben. Die Phasenverschiebung zwischen dem Primärstrom J_1 und dem Sekundärstrom $J_2 \left(\frac{J_2}{k} \right)$ ist mithin:

$$\chi = 180^\circ - \varphi_{12}.$$

Anmerkung. Prof. Dr. Benischke gibt in seinem Werke „Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik“ für die Phasenverschiebung zwischen Primärstrom und Sekundärstrom eine andere Formel an, nämlich:

$$\operatorname{tg} \chi = - \frac{w_2}{\omega L_2} = - \frac{w_{2s} + w_{2a}}{\omega L_{2s} + \omega L_{2a}}.$$

Hierin besteht die Reaktanz ωL_{2s} aus der dem sekundären Streufelde entsprechenden Reaktanz ωL_{2s} und der dem fiktiven Felde Z_{2f} entsprechenden Reaktanz ωL_{2f} .

Da in vorliegender Arbeit fiktive Größen nicht eingeführt sind, ergibt sich für $\operatorname{tg} \chi$ ein anderer Ausdruck als dort. Beide Ausdrücke führen zu dem gleichen Resultat.

Es gilt für die auf primär reduzierten Sekundärgrößen weiter:

$$\begin{aligned} E_{2pr} &= + E_1 = - k E_2 \\ E_{k2pr} &= - k E_{k2}; \quad E_{2spr} = - k E_{2s} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Alle auf primär reduzierten Sekundärgrößen des Diagramms für den Ersatz-Stromkreis sind somit, um das Transformatorendiagramm zu erhalten, um 180° gedreht zu denken. Auf diese Weise entsteht bei gleichzeitigem kurzen Rückblick auf den bisherigen Rechnungsgang des vorliegenden Falles ein außerordentlich klares Bild von dem endgültigen Diagramm des Transformators (Fig. 32).

Zweigstrom J_t nimmt seinen Weg durch die totale Impedanz Z_t des Transformators.

Die totale primäre Impedanz (der totale Scheinwiderstand) des Transformators ist, symbolisch geschrieben:

$$\dot{Z}_t = \dot{Z}_{1s} + \dot{Z}_k = \dot{Z}_{1s} + \frac{1}{\dot{y}_2' + \dot{y}_m} = \dot{Z}_{1s} + \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_2'} + \dot{y}_m},$$

worin

$$\dot{y}_2' = \frac{\dot{y}_2}{k_2} \quad \text{und} \quad \dot{Z}_2' = \dot{Z}_2 \cdot k^2 = (\dot{Z}_{2s} + \dot{Z}_{2a})k^2.$$

Gemäß der Weiterbildung des Ansatzes für $\dot{Z}_k = \dot{Z}$ auf Seite 39 ist

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= \{(r_{1s} - jx_{1s}) + (r_k - jx_k)k^2\} \\ r_k &= \frac{g_k}{g_k^2 + b_k^2} = \frac{g_2 + k^2 \cdot g_m}{(g_2 + k^2 \cdot g_m)^2 + (b_2 + k^2 \cdot b_m)^2} \\ x_k &= \frac{b_k}{g_k^2 + b_k^2} = \frac{b_2 + k^2 \cdot b_m}{(g_2 + k^2 \cdot g_m)^2 + (b_2 + k^2 \cdot b_m)^2}. \end{aligned}$$

Der Leitungsstrom J ist nun:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{J}_R + \dot{J}_t = \dot{E}'_{k1} g_R + \dot{E}'_{k1} (g_t + j b_t) \\ \dot{J}_R + \dot{J}_t &= \dot{E}'_{k1} y_R + \dot{E}'_{k1} y_t \end{aligned}$$

$$\dot{y}_t = \frac{1}{\dot{Z}_t} = \frac{1}{(r_{1s} + k^2 r_k) - j(x_{1s} + k^2 x_k)} = \frac{1}{R_t - j \chi_t},$$

wenn

$$r_{1s} + k^2 r_k = R_t \quad \text{und} \quad x_{1s} + k^2 x_k = \chi_t$$

ist.

$$\dot{y}_t = \frac{R_t}{R_t^2 + \chi_t^2} + j \frac{\chi_t}{R_t^2 + \chi_t^2} = g_t + j b_t.$$

Daraus und aus der letzten Gleichung für \dot{J} ergibt sich der Zweigstrom J_R zu

$$J_R = E'_{k1} g_2 = E'_{k1} \frac{1}{R} = \frac{E'_{k1}}{W},$$

und der Zweigstrom J_t findet sich zu

$$J_t = \frac{E'_{k1}}{\sqrt{\{w_{1s} + k^2 w_k\}^2 + \{\omega L_{1s} + k^2 \omega L_k\}^2}}.$$

J_t wird als gegeben betrachtet, dann ist

$$E'_{k1} = J_t \sqrt{\{w_{1s} + k^2 w_k\}^2 + \{\omega L_{1s} + k^2 \omega L\}^2}.$$

Es ist weiter:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{J}_R + \dot{J}_t = \dot{E}'_{k1} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{R_t}{R_t^2 + \chi_t^2} + j \frac{\chi_t}{R_t^2 + \chi_t^2} \right\} \\ &= \dot{E}'_{k1} \left\{ \frac{(R_t^2 + \chi_t^2) + R_t R}{R(R_t^2 + \chi_t^2)} + j \frac{\chi_t}{R_t^2 + \chi_t^2} \right\}. \end{aligned}$$

in reellen Werten ausgedrückt und geringfügig umgeformt, gibt:

$$J = \frac{E'_{k1} \sqrt{\{R_t^2 + \chi_t^2 + R_t \cdot R\}^2 + R^2 \chi_t^2}}{\{R(R_t^2 + \chi_t^2)\}}.$$

Darin ist:

$$R = W$$

$$R_t = w_{1s} + k^2 w_k$$

$$w_k = r_k = \frac{g_2 + k^2 \cdot g_m}{(g_2 + k^2 \cdot g_m)^2 + (b_2 + k^2 b_m)^2};$$

die Werte für g_2 und b_2 eingesetzt, gibt

$$w_k = \frac{\{w_2 + k^2 \cdot g_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)\} \{w_2^2 + \omega^2 L_2^2\}}{\{w_2 + k^2 \cdot g_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)\}^2 + \{\omega L_2 + k^2 \cdot b_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)\}^2}$$

$$\chi_t = \omega L_{1s} + k^2 \omega L_k$$

$$\omega L_k = x_k = \frac{\{\omega L_2 + k^2 b_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)\} \{w_2^2 + \omega^2 L_2^2\}}{\{w_2 + k^2 \cdot g_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)\}^2 + \{\omega L_2 + k^2 \cdot b_m (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)\}^2}$$

w_2 ist der gesamte Wirkwiderstand des Sekundärkreises, ωL_2 ist der gesamte Blindwiderstand (die gesamte Reaktanz) des Sekundärkreises des Transformators.

Die Phasenverschiebungen zwischen J , J_R , J_t und der Spannung E'_{k1} zwischen den Punkten BB' des Ersatzstromkreises sind aus den Ansätzen für \dot{J} , \dot{J}_R und \dot{J}_t jeweilig leicht ermittelbar. Fig. 33 gibt das Stromdiagramm für den vorliegenden Fall 9 wieder.

Vor Anschluß des Parallelwiderstandes R fließt der ganze Leitungsstrom J durch den Zweig Z_t , also

$$J_t = J;$$

bei Anschluß von R fließt durch den Stromzweig Z_t ein Strom, der kleiner als J ist. Die prozentuale Änderung des Stromes

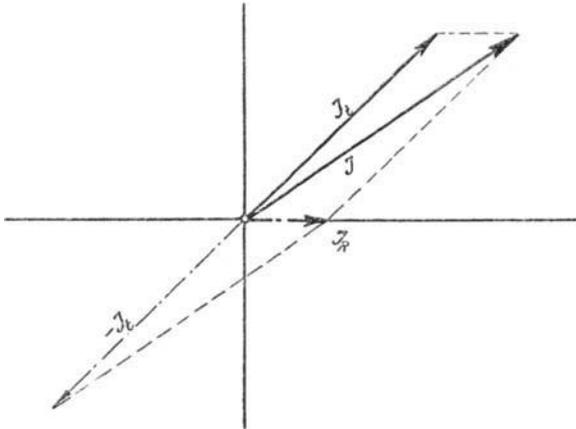


Fig. 33.

im Zweige Z_t bei Anschluß von R gegenüber dem Strome im selben Zweige vor Anschluß von R ist in Übereinstimmung mit Fig. 33:

$$\frac{J - J_t}{J} \cdot 100 = \frac{J_R}{J} \cdot 100\%.$$

IX. Anhang.

1. $j = \sqrt{-1}$; $j^2 = -1$; $-j^2 = -1$.
2. $+b^2(-1) = -b^2 = +b_2$.
- 2 a) $-b^2(-1) = +b^2$.
3. $+b^2 \cdot (1 - 1) = b^2 - b^2$.
- 3 a) $-b^2 \cdot (1 - 1) = -b^2 + b^2$.
4. $A_1 = a_1 + jb_1$ $A_2 = a_2 + jb_2$.
 $\dot{A}_1 + A_2 = a + jb = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2)$
 $= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$;
 $\dot{A}_1 - A_2 = a + jb = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2)$
 $= (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$.
5. $\dot{A}_1 = a_1 + jb_1 = A_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = A_1 e^{j\varphi_1}$;
 $\dot{A}_2 = a_2 + jb_2 = A_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = A_2 e^{j\varphi_2}$;

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 \dot{A}_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ \text{oder } \dot{A}_1 \dot{A}_2 &= A_1 e^{j\varphi_1} \cdot A_2 e^{j\varphi_2} = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= A_1 A_2 \{ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} &= \frac{a_1 + j b_1}{a_2 + j b_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)^1}{a^2 + b^2} + \frac{j(a_2 b_1 - a_1 b_2)^1}{a^2 + b^2}; \\ \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} &= \frac{A_1 e^{j\varphi_1}}{A_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= \frac{A_1}{A_2} \{ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \}. \end{aligned}$$

7. Für $a_1 + j b_1 = a_2 + j b_2$ gilt:
 $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.

Ebenso für

$$A_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = A_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$$

oder

$$A_1 \cos \varphi_1 + j A_1 \sin \varphi_1 = A_2 \cos \varphi_2 + j A_2 \sin \varphi_2$$

$$A_1 \cos \varphi_1 = A_2 \cos \varphi_2$$

und

$$A_1 \sin \varphi_1 = A_2 \sin \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

¹⁾ $(a_2 + j b_2)(a_2 - j b_2) = a_2^2 + j b_2 a_2 - j b_2 a_2 - (j^2) b_2^2 = a_2^2 - (-1) b_2^2 = a_2^2 + b_2^2.$

Die Wechselstromtechnik. Herausgegeben von Professor Dr.-Ing. **E. Arnold** (Karlsruhe). In fünf Bänden. Unveränderter Neudruck.

- I. **Theorie der Wechselströme** von **J. L. la Cour** und **O. S. Bragstad**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 591 Textfiguren. Gebunden Preis M. 100,—.
- II. **Die Transformatoren.** Ihre Theorie, Konstruktion, Berechnung und Arbeitsweise. Von **E. Arnold** und **J. L. la Cour**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 443 Textfiguren und 6 Tafeln. Gebunden Preis M. 70,—.
- III. **Die Wicklungen der Wechselstrommaschinen.** Von **E. Arnold**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 463 Textfiguren und 5 Tafeln. Gebunden Preis M. 64,—.
- IV. **Die synchronen Wechselstrommaschinen.** Generatoren, Motoren und Umformer. Ihre Theorie, Konstruktion, Berechnung und Arbeitsweise. Von **E. Arnold** und **J. L. la Cour**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 530 Textfiguren und 18 Tafeln. Gebunden Preis M. 110,—.
- V. **Die asynchronen Wechselstrommaschinen.**
 1. Teil: **Die Induktionsmaschinen.** Ihre Theorie, Berechnung, Konstruktion und Arbeitsweise. Von **E. Arnold** und **J. L. la Cour** unter Mitarbeit von **A. Fraenckel**. Mit 307 Textfiguren und 10 Tafeln. Gebunden Preis M. 88,—.
 2. Teil: **Die Wechselstromkommutatormaschinen.** Ihre Theorie, Berechnung, Konstruktion und Arbeitsweise. Von **E. Arnold**, **J. L. la Cour** und **A. Fraenckel**. Mit 400 Textfiguren, 8 Tafeln. Gebunden Preis M. 88,—.

Die Berechnung von Gleich- und Wechselstromsystemen. Neue Gesetze über ihre Leistungsaufnahme. Von Dr.-Ing. **Fr. Natalls**. Mit 19 Textfiguren. Preis M. 6,—.

Ankerwicklungen für Gleich- und Wechselstrommaschinen. Ein Lehrbuch von Professor **Rudolf Richter**. Mit 377 Textabbildungen. Gebunden Preis M. 78,—.

Magnetische Ausgleichsvorgänge in elektrischen Maschinen. Von **J. Biermanns**, Vorsteher des Hochspannungslaboratoriums der A. E. G. Mit 123 Textfiguren. Preis M. 17,—; gebunden M. 19,—.

Hierzu Teuerungszuschläge

Aufgaben und Lösungen aus der Gleich- und Wechselstromtechnik. Ein Übungsbuch für den Unterricht an technischen Hoch- und Fachschulen, sowie zum Selbststudium. Von Professor **H. Vieweger**. Fünfte, verbesserte Auflage. Unveränderter Neudruck. Mit 210 Textfiguren und 2 Tafeln.
Gebunden Preis M. 24,—.

Kurzer Leitfaden der Elektrotechnik für Unterricht und Praxis in allgemeinverständlicher Darstellung. Von **Rudolf Krause**, Ingenieur. Vierte, verbesserte Auflage. Herausgegeben von **H. Vieweger**. Mit 375 Textfiguren. Gebunden Preis M. 20,—.

Elektrische Starkstromanlagen, Maschinen, Apparate, Schaltungen, Betrieb. Kurzgefaßtes Hilfsbuch für Ingenieure und Techniker sowie zum Gebrauch an technischen Lehranstalten. Von Dipl.-Ing. **Emil Kosack**, Studienrat an den Staatl. Vereinigten Maschinenbauschulen zu Magdeburg. Fünfte, durchgesehene Auflage. Mit 294 Textabbildungen. Gebunden Preis M. 32,—.

Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik. Von Dr. **Adolf Thomälen**, a. o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Achte, verbesserte Auflage. Mit 499 Textabbildungen. Gebunden Preis M. 30,—.

Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik. Von Professor Dr. **Gustav Benischke**. Fünfte, vermehrte Auflage. Mit 602 Textabbildungen.
Preis M. 66,—; gebunden M. 76,—.

Hilfsbuch für die Elektrotechnik. Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen bearbeitet und herausgegeben von Dr. **Karl Strecker**. Neunte, umgearbeitete Auflage. Mit 552 Textabbildungen. Gebunden Preis M. 70,—.

Die Berechnung der Anlaß- und Regelwiderstände. Von Ing. **Erich Jasse**. Mit 65 Textabbildungen. Preis M. 27,—.

Die Transformatoren. Von Dr. techn. **Milan Vidmar**, ordentl. Professor der Universität Ljubljana, Direktor der Maschinenfabriken und Gießereien A.-G. Ljubljana. Mit 297 Textabbildungen. Preis M. 110,—; gebunden M. 120,—.

Hierzu Teuerungszuschläge