D 15

Die 28 Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung

Von

Li En-Po
in Ho-Pei (China)

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1940

D 15

Die 28 Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung

Von

Li En-Po

in Ho-Pei (China)

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1940

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1—2
I. Hessesche Erzeugung und Steinersche Gruppen . . .	3—10
II. Punktgruppen auf einer Kurve vierter Ordnung . . .	10—18

Literaturverzeichnis jüdischer Autoren

M. Noether, Fußnote 5

ISBN 978-3-662-40954-1 ISBN 978-3-662-41438-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-41438-5

Sonderabdruck aus „Mathematische Annalen", Band 118, Heft 1

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1940

Einleitung.

Steiner[1]) hat eine Reihe von Sätzen über die Doppeltangenten der ebenen Kurven vierter Ordnung ohne Beweise ausgesprochen. Einen Teil dieser Sätze haben Hesse, Salmon und Noether bewiesen. Diese Arbeit stellt sich das Ziel, alle von Steiner ausgesprochenen Sätze zu beweisen und noch einige weitergehende Ergebnisse herzuleiten. Die betrachtete Kurve vierter Ordnung wird dabei als doppelpunktfrei und irreduzibel vorausgesetzt.

Wie dies zuerst Hesse[2]) getan hat, betrachten wir die Koordinaten eines Punktes in der Ebene als die Parameter eines Netzes von quadratischen Flächen im Raum und das Verschwinden der Diskriminante als die Gleichung der Kurve vierter Ordnung. Dieses Verschwinden ist die Bedingung dafür, daß die Fläche des Netzes ein Kegel ist; es entspricht also jedem Punkt der Kurve vierter Ordnung in der Ebene ein Kegel des Netzes im Raum. Hieraus hat Hesse viele Ergebnisse erhalten und für die Untersuchung der Doppeltangenten verwertet. Wir können aber auch ohne Betrachtung der Kegel, nur mit Hilfe der acht Schnittpunkte der drei Basisflächen und der invarianten Eigenschaften der Polaren, alle 28 Doppeltangenten darstellen und ihre Eigenschaften diskutieren.

Bekannt ist[3]), daß die 56 Berührungspunkte der 28 Doppeltangenten auf einer Kurve 14. Ordnung liegen. Wenn man also die Schnittpunkte dieser Kurve mit der Kurve vierter Ordnung bestimmt, kann man alle Doppeltangenten erhalten. Diese Methode ist zwar nicht geeignet zur Erforschung der Eigenschaften der Doppeltangenten, aber ihre Existenz kann man so

---

[1]) Steiner, Eigenschaften der Kurven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten. Crelles Journal, Bd. 49.

[2]) Hesse, Über die Doppeltangenten der Kurven vierter Ordnung. Crelles Journal, Bd. 49. — Zu den Doppeltangenten der Kurven vierter Ordnung. Crelles Journal, Bd. 55.

[3]) Hesse, Transformation der Gleichung der Kurven vierzehnten Grades, welche eine gegebene Kurve vierten Grades in den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten schneiden. Crelles Journal, Bd. 52; vgl. auch Weber, Algebra II, Abschn. 13.

beweisen. (Die Existenz und Anzahl der Doppeltangenten folgen übrigens auch aus den Plückerschen Formeln.)

Salmon[4]) faßte die Kurve vierter Ordnung als die Einhüllende eines Systems $\lambda^2 R + 2\lambda Q + S = 0$ auf, wobei R, Q und S drei Kegelschnitte sind. Dabei zeigte er, daß jedes Doppeltangentenpaar fünf andere Paare bestimmt; die sechs Paare zusammen nennt man eine Steinersche Gruppe. Er zeigt noch, wie man aus den Gleichungen von je drei Paaren aus einer Steinerschen Gruppe die Gleichung der Kurve gewinnen kann. Auf Grund dieser Bemerkung kann man aber weiter zeigen, daß irgendeine Kurve vierter Ordnung als die Diskriminante eines quadratischen Flächennetzes dargestellt werden kann. So kann man von der Salmonschen Erzeugung zur Hesseschen übergehen und umgekehrt. Wir werden das nachher unter 1. 2 näher ausführen.

Steiner hat die Behauptung aufgestellt, daß die 63 Steinerschen Gruppen sich für $2 < n < 8$ nach einem Gesetz zu n und n zu Systemen $S[n]$ ordnen, so daß zu je $(n-1)$ Gruppen allemal eine und nur eine bestimmte n-te Gruppe gehört; wählt man aus jeder der n Gruppen eines Systems ein beliebiges Paar, so liegen die $4n$ Berührungspunkte auf einer Kurve n-ter Ordnung. Zum Beweise dieser Behauptung kann man ein Kriterium von M. Noether[5]) heranziehen, wodurch man entscheiden kann, ob die $4n$ Berührungspunkte von $2n$ Doppeltangenten von einer Kurve n-ter Ordnung ausgeschnitten werden. Darüber hinaus kann man nachweisen, daß auf dieser Kurve noch $n(n-2)$ Berührungspunkte einer Kurve $(2n-4)$-ter Ordnung mit denselben $2n$ Doppeltangenten liegen.

Um die Steinerschen Systeme von je n Steinerschen Gruppen zu untersuchen, führen wir den Begriff der Punktgruppe auf einer Kurve ein und erklären die Multiplikation von zwei Gruppen. Aus dieser Betrachtung finden wir sehr leicht die Beziehungen zwischen den Steinerschen Gruppen, sowie den Hauptsatz hinsichtlich der Eigenschaften der Systeme $S[n]$. Demnach können wir alle Systeme $S[n]$ ermitteln und die Anzahl der Systeme berechnen. Als Beispiel schreiben wir uns die Systeme für $n = 3$ und $n = 4$ vollständig hin und untersuchen auch die Kurve dritter Ordnung, welche durch die 12 Berührungspunkte der sechs Doppeltangenten eines Systems $S[3]$ geht.

Im Kapitel I werden wir die Ergebnisse von Salmon und Hesse wiedergeben, soweit sie zu unserem Problem Beziehung haben. Kapitel II bringt die Theorie der Punktgruppen und die Beweise der Steinerschen Sätze.

---

[4]) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven.

[5]) M. Noether, Über die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Kurven vierter Ordnung. Math. Annalen, Bd. 15.

I. Hessesche Erzeugung und Steinersche Gruppen.

1. 1. Es sei ψ $\lambda_0 A + \lambda_1 B + \lambda_2 C = 0$ ein Netz von quadratischen Flächen im Raum S_3; die Koeffizienten dieser Fläche sind Linearformen in λ:

$$f_{kl} = \lambda_0 a_{kl} + \lambda_1 b_{kl} + \lambda_2 c_{kl}. \tag{1}$$

Faßt man nun die $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ als Koordinaten in einer Ebene auf, der Bildebene des Netzes, so definiert die Gleichung $f_{kl} = 0$ in der Bildebene eine Gerade und die Diskriminante

$$F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

eine Kurve 4. Ordnung. Jedem Punkt dieser Kurve entspricht ein Kegel des Netzes.

Es ist bekannt, daß drei Quadriken A, B, C im allgemeinen acht verschiedene Schnittpunkte haben, das Netz ψ also acht Basispunkte hat. Eine Ausnahme kann nur dann auftreten, wenn die Quadriken A, B, C eine Kurve (Gerade, Kegelschnitt oder kubische Raumkurve) oder eine Ebene gemeinsam haben oder wenn mehrfache Schnittpunkte vorkommen. In allen diesen Fällen hätten die drei Quadriken in einem ihrer gemeinsamen Punkte eine gemeinsame Tangente. Es gäbe dann eine Linearkombination $D = \lambda_0 A + \lambda_1 B + \lambda_2 C$, die in diesem Punkte einen Doppelpunkt hat, also einen Kegel. Wir werden sehen, daß dieser Fall nicht vorkommen kann, wenn die Bildkurve (2) doppelpunktfrei ausfallen soll.

Lemma. Ein Büschel von Quadriken in S_3 enthält im allgemeinen 4 Kegel. Hat einer der Kegel seinen Doppelpunkt in einem Basispunkt des Büschels, so fallen zwei der vier Kegel in ihm zusammen.

Beweis. Das Büschel sei durch

$$\lambda_1 B + \lambda_2 C = 0$$

gegeben. Die Kegel im Büschel entsprechen dann den Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 b_{11} + \lambda_2 c_{11} & \lambda_1 b_{12} + \lambda_2 c_{12} & \dots & \lambda_1 b_{14} + \lambda_2 c_{14} \\ \lambda_1 b_{21} + \lambda_2 c_{21} & \lambda_1 b_{22} + \lambda_2 c_{22} & \dots & \lambda_1 b_{24} + \lambda_2 c_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 b_{41} + \lambda_2 c_{41} & \lambda_1 b_{42} + \lambda_2 c_{42} & \dots & \lambda_1 b_{44} + \lambda_2 c_{44} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Ist der Punkt (1, 0, 0, 0) die Spitze des Kegels B, so ist $b_{11} = b_{12} = b_{13} = b_{14} = 0$. Geht nun außerdem die Fläche C durch denselben Punkt, so wird $c_{11} = 0$, und die linke Seite von (3) wird durch λ_2^2 teilbar.

Einem Büschel des Netzes ψ entspricht eine Gerade in der Bildebene des Netzes. Den vier Kegeln des Büschels entsprechen die vier Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve (2). Würde das Netz einen Kegel D enthalten, dessen Spitze ein Basispunkt des Netzes wäre, so würde jedes D enthaltende Büschel in D zwei zusammenfallende Kegel haben, also wäre der D entsprechende Punkt in der Bildebene ein Doppelpunkt der Kurve (2). Das ist unmöglich, da die Kurve als doppelpunktfrei vorausgesetzt wurde. Auf Grund der oben genannten Bemerkung folgt nun:

Das Netz ψ hat 8 verschiedene Basispunkte[6]).

Wählt man irgend vier Basispunkte E_1, E_2, E_3, E_4 des Netzes als Ecken des Koordinatentetraeders, so nimmt die Gleichung (2) die Gestalt

$$(3)\quad F = \begin{vmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 \end{vmatrix} = (f_{14}f_{23} - f_{12}f_{34} - f_{13}f_{24})^2 - 4 f_{12}f_{34}f_{13}f_{24} = 0$$

an.

Aus (3) sieht man, daß jede der vier Geraden $f_{12} = 0$, $f_{34} = 0$, $f_{13} = 0$, $f_{24} = 0$ die Kurve F zweimal in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet und deshalb eine Doppeltangente ist.

Mit $(E:\psi)$ bezeichnet man die erste Polarform irgendeines Punktes E in bezug auf ψ. Dann gilt:

$$(E_1:\psi) = x_2 f_{12} + x_3 f_{13} + x_4 f_{14}$$

und

$$E_2:(E_1:\psi) = f_{12},$$

wobei $E_1 = (1, 0, 0, 0)$ und $E_2 = (0, 1, 0, 0)$.

Jede Polarform der Form ψ in bezug auf je zwei Basispunkte E_j und E_k bestimmt also eine Doppeltangente; die zwei Basispunkte werden die Pole der Doppeltangente genannt. Im ganzen gibt es 28 Doppeltangenten; jede von ihnen bezeichnet man mit $\overline{jk}$, und zwar ist $\overline{jk} = \overline{kj}$.

1. 2. Aus dem Obigen folgt, daß die Diskriminante eines Netzes von quadratischen Flächen im Raum S_3 eine Kurve vierter Ordnung darstellt. Nun ergibt sich die Frage: Wie stellt man eine gegebene Kurve vierter Ordnung $F = 0$ als die Diskriminante eines solchen Netzes dar?

Seien t_1, t_1' irgend zwei verschiedene Doppeltangenten der Kurve F und Q ein beliebiger durch ihre vier Berührungspunkte gehender Kegelschnitt. Dann definiert $\lambda F + Q^2 = 0$ ein Büschel von Kurven vierter Ordnung. Jede Kurve im Büschel berührt die Geraden t_1 und t_1' in denselben vier Punkten.

---

[6]) Dieser Beweis wurde einem unpublizierten Manuskript von Prof. van der Waerden entnommen.

Wählt man also λ so, daß die Kurve $\lambda F + Q^2 = 0$ durch den Schnittpunkt der beiden Geraden geht, so hat sie mit jeder der beiden Geraden 5 Punkte gemeinsam, also sind die beiden Geraden als Bestandteile in ihr enthalten. Man hat daher die Identität

$$\lambda F + Q^2 = t_1 t_1' S$$

oder, wenn man λF wieder F nennt und $t_1 t_1' = R$ setzt,

$$F = RS - Q^2, \tag{4}$$

wo R, S und Q quadratische Formen sind und R in t_1 und t_1' zerfällt. Aus (4) folgt für beliebige λ

$$F = R(\lambda^2 R + 2\lambda Q + S) - (\lambda R + Q)^2. \tag{4a}$$

Die Gleichung (4a) bedeutet, daß die Kurve F die Einhüllende des Systems

$$\lambda^2 R + 2\lambda Q + S = 0 \tag{5}$$

ist. Jeder Kegelschnitt des Systems berührt die Kurve F in vier Punkten, die mit den vier Berührungspunkten der zwei Doppeltangenten t_1 und t_1' auf einem Kegelschnitt $\lambda R + Q = 0$ liegen.

Aus (4) folgt:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 F = (\lambda_1^2 R + 2\lambda_1 Q + S)(\lambda_2^2 R + 2\lambda_2 Q + S) - \\ - [\lambda_1\lambda_2 R + (\lambda_1 + \lambda_2) Q + S]^2;$$

daraus ergibt sich, daß je zwei Kegelschnitte des Systems die Kurve F in acht Punkten berühren, die auf einem Kegelschnitt liegen; insbesondere liegen die acht Berührungspunkte von je zwei zerfallenden Kegelschnitten des Systems (5) auf einem Kegelschnitt.

Will man R und S symmetrisch behandeln, so muß man die Formel (5) homogen machen, also sie durch

$$\lambda_1^2 R + 2\lambda_1\lambda_2 Q + \lambda_2^2 S = 0 \tag{6}$$

ersetzen.

Wir fragen nun, ob unter den Kegelschnitten des Systems (6) außer R noch weitere zerfallende Kegelschnitte vorkommen. Ein Kegelschnitt (6) zerfällt, wenn seine Diskriminante

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 r_{00} + 2\lambda_1\lambda_2 q_{00} + \lambda_2^2 s_{00} & \cdots & \lambda_1^2 r_{02} + 2\lambda_1\lambda_2 q_{02} + \lambda_2^2 s_{02} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \lambda_1^2 r_{22} + 2\lambda_1\lambda_2 q_{22} + \lambda_2^2 s_{22} \end{vmatrix} \tag{7}$$

den Wert Null annimmt. Das ergibt eine Gleichung 6. Grades zur Bestimmung des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$, von der wir zeigen wollen, daß sie keine mehrfachen Wurzeln haben kann.

Gesetzt etwa, $\lambda_1 = 0$ wäre eine mehrfache Wurzel, die Diskriminante (7) wäre also durch λ_1^2 teilbar. (Durch eine lineare Parametertransformation kann man jede andere Wurzel auf $\lambda_1 = 0$ zurückführen.) Wir wählen die Koordinaten so, daß der zur Wurzel $\lambda_1 = 0$ gehörige zerfallende Kegelschnitt die Gleichung $y_1 y_2 = 0$ hat [der Kegelschnitt S kann nicht in zwei zusammenfallende Geraden zerfallen, denn dann wäre wegen (4) jeder Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kegelschnitt Q ein Doppelpunkt der Kurve F, die doch doppelpunktfrei sein sollte]; dann sind alle s_{kl}, mit Ausnahme von $s_{12} = s_{21}$, gleich Null. In der Determinante (7) sind jetzt die erste Zeile und die erste Spalte durch λ_1 teilbar; also alle Determinantenglieder durch λ_1^2 teilbar, außer dem einen

$$- 2\,\lambda_1 \lambda_2 q_{00} \cdot \lambda_2^2\, s_{12} \cdot \lambda_2^2\, s_{21}\,.$$

Dieses ist nur dann durch λ_1^2 teilbar, wenn $q_{00} = 0$ ist, das heißt, wenn der Kegelschnitt Q durch den Punkt $(1, 0, 0)$, den Doppelpunkt des Kegelschnittes S, geht. Nach (4) wäre dann dieser Punkt auch Doppelpunkt von F, was unmöglich ist.

Also hat die obige Gleichung 6. Grades sechs verschiedene Wurzeln[7]. Es folgt:

Das quadratische Kegelschnittsystem (5) enthält sechs zerfallende Kegelschnitte; jeder von ihnen zerfällt in zwei Doppeltangenten der Kurve F. Man nennt ein solches System von je sechs Doppeltangentenpaaren eine Steinersche Gruppe.

Ist $t_2 t_2'$ ein zweites Paar der durch $t_1 t_1'$ bestimmten Steinerschen Gruppe, so ist $t_2 t_2'$ im System $\lambda^2 R + 2\,\lambda Q + S = 0$ enthalten, also gibt es ein solches λ, daß $t_2 t_2' = \lambda^2 R + 2\,\lambda Q + S$ wird. Man erhält dann, wenn statt $\lambda R + Q$ wieder Q geschrieben wird, nach (4a)

$$F = t_1\, t_1'\, t_2\, t_2' - Q^2. \tag{8}$$

Die obige Identität zeigt, daß das Doppeltangentenpaar $t_2 t_2'$ dieselbe Steinersche Gruppe bestimmt wie das Paar $t_1 t_1'$; also wird eine Steinersche Gruppe durch ein beliebiges der sechs Doppeltangentenpaare bestimmt. Da es $\frac{28 \cdot 27}{2}$ Paare von Doppeltangenten gibt, von denen je sechs eine Steinersche Gruppe bilden, so gibt es genau 63 Steinersche Gruppen.

Ist $t_3 t_3'$ ein drittes Paar derjenigen Steinerschen Gruppe, der auch $t_1 t_1'$ und $t_2 t_2'$ angehören, so ist $t_3 t_3'$ im System (5) enthalten, also $t_3 t_3' = \lambda^2 R +$

---

[7]) Dieser Beweis wurde einem unpublizierten Manuskript von Prof. van der Waerden entnommen.

$+ 2\lambda Q + S$. Daraus folgt: $Q = \frac{1}{2\lambda}(t_3 t_3' - \lambda^2 t_1 t_1' - t_2 t_2')$. Nun kann man statt (8) auch schreiben:

$$\begin{aligned} F &= t_1 t_1' (\lambda^2 t_1 t_1' + 2\lambda Q + t_2 t_2') - (\lambda t_1 t_1' + Q)^2 \\ &= t_1' t_1' \, t_3 t_3' - \left[\lambda\, t_1 t_1' + \frac{1}{2\lambda}(t_3 t_3' - \lambda^2 t_1 t_1' - t_2 t_2')\right]^2. \end{aligned}$$

Schreibt man nun für $\frac{t_3}{\lambda}, \lambda t_1, \frac{t_2}{\lambda}$ wieder t_3, t_1, t_2, so erhält man

$$-4F = (t_3 t_3' - t_2 t_2' - t_1 t_1')^2 - 4\, t_1 t_1' \, t_2 t_2' = \begin{vmatrix} 0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & 0 & t_3' & t_2' \\ t_2 & t_3' & 0 & t_1' \\ t_3 & t_2' & t_1' & 0 \end{vmatrix}.$$

Es folgt, daß jedes geordnete System von sechs Doppeltangenten $t_1 t_1' \; t_2 t_2' \; t_3 t_3'$, die drei Paare einer Steinerschen Gruppe bilden, in eindeutiger Weise zu einer Hesseschen Erzeugung der Kurve vierter Ordnung führt, mit bestimmter Numerierung der vier ersten Basispunkte 1, 2, 3, 4, und zwar so, daß $t_1, t_1', t_2, t_2', t_3, t_3'$ die Nummern 12, 34, 13, 24, 14, 23 erhalten; umgekehrt führt jede Hessesche Erzeugung mit vier numerierten Basispunkten 1, 2, 3, 4 zu einem solchen System $t_1 t_1' \; t_2 t_2' \; t_3 t_3'$. Da je drei Paare $3! \cdot 2^3 = 48$ solcher geordneten Systeme ergeben, so gibt es zu jeder Steinerschen Gruppe $48 \cdot 20 = 960$ Hessesche Erzeugungen. Die Anzahl der Steinerschen Gruppen ist 63, die Anzahl der geordneten Systeme $t_1 t_1' \; t_2 t_2' \; t_3 t_3'$ also $63 \cdot 960$, die Anzahl der Hesseschen Erzeugungen mit vier numerierten Basispunkten somit auch $63 \cdot 960$. Beachtet man die Willkür in der Bezeichnung der Basispunkte 1, 2, 3, 4 eines Quadrikennetzes, so folgt, daß es $\frac{63 \cdot 960}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = 36$ Hessesche Erzeugungen einer vorgegebenen biquadratischen Kurve gibt.

1. 3. Sind $t_i t_i'$ und $t_j t_j'$ irgend zwei Doppeltangentenpaare einer Steinerschen Gruppe, so erhält man $F = t_i t_i' \; t_j t_j' - Q^2$, wobei Q der durch die acht Berührungspunkte gehende Kegelschnitt ist. In dieser Gleichung können die Rollen von $t_i t_i' \; t_j t_j'$ beliebig vertauscht werden. Wenn also die Paare $t_i t_i' \; t_j t_j'$ einer Steinerschen Gruppe angehören, so gehören auch $t_i t_j$ und $t_i' t_j'$ sowie $t_i' t_j$ und $t_i t_j'$ je einer Steinerschen Gruppe an. Man nennt ein solches Quadrupel, dessen acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, ein syzygetisches Quadrupel. Weiter: je drei Doppeltangenten $t_i t_i' t_j$, deren sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, lassen sich immer zu einem syzygetischen Quadrupel ergänzen. Denn setzt man wieder $R = t_i t_i'$ und nimmt für Q den Kegelschnitt durch die sechs Berührungspunkte, so gilt wie oben die Gleichung $F = RS - Q^2$, aus der folgt, daß der Kegelschnitt S die Kurve F in vier Punkten berührt, zu denen die zwei Berührungspunkte der Doppeltangente t_j gehören. Also enthält der Kegelschnitt die Gerade t_j als

Bestandteil. Setzt man nun $S = t_j t_j'$, so geht diese Gleichung in $F = t_i t_i'\, t_j t_j' - Q^2$ über; es bilden also $t_i t_i'\, t_j t_j'$ ein syzygetisches Quadrupel. Ein solches Tripel von Doppeltangenten, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, nennt man ein syzygetisches Tripel; jedes andere Tripel heißt asyzygetisch.

1. 4. Nach 1. 1. hat jede Doppeltangente $\overline{jk}$ zwei „Pole“ E_j und E_k. Wir haben gesehen, daß jedes Doppeltangentenpaar eine Steinersche Gruppe bestimmt. Zwei Doppeltangenten haben aber entweder einen gemeinsamen Pol, wie $\overline{jl}$ und $\overline{kl}$, oder keinen, wie $\overline{jk}$ und $\overline{lm}$. Wir fragen nun: Welche Bezeichnung tragen die anderen fünf Doppeltangentenpaare, die mit $\overline{jl}\,\overline{kl}$ oder $\overline{jk}\,\overline{lm}$ eine Steinersche Gruppe bilden?

Wählt man irgend vier Basispunkte j, k, l, m des quadratischen Flächennetzes als Ecken des Koordinatentetraeders, so sieht man nach (3), daß die Doppeltangenten $\overline{jk}\,\overline{lm}\,\overline{jl}\,\overline{mk}$ stets ein syzygetisches Quadrupel bilden. Somit gehören die Paare $\overline{jk}\,\overline{mk}$ und $\overline{jl}\,\overline{ml}$ oder die Paare $\overline{jk}\,\overline{lm}$ und $\overline{jl}\,\overline{mk}$ derselben Steinerschen Gruppe an. Daraus folgt, daß $\overline{1k}\,\overline{2k}$ ($k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$) eine Steinersche Gruppe bilden. Es folgt weiter, daß die Tripel $\overline{13}\,\overline{23}\,\overline{12}$, $\overline{12}\,\overline{23}\,\overline{45}$ und $\overline{13}\,\overline{23}\,\overline{34}$ asyzygetisch sind, denn in der durch $\overline{13}\,\overline{23}$ bestimmten Steinerschen Gruppe kommen die Doppeltangenten $\overline{12}$, $\overline{34}$ und $\overline{45}$ nicht vor. Allgemein ist das Tripel $\overline{1k}\,\overline{2k}\,\overline{12}$, $\overline{1l}\,\overline{2l}\,\overline{kl}$ oder $\overline{1l}\,\overline{2l}\,\overline{jk}$ ($j, k, l = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und $j \neq k \neq l$) asyzygetisch.

Bezeichnen wir irgendeine Doppeltangente mit einem Strich: $|$, zwei Doppeltangenten, die einen gemeinschaftlichen Pol haben, mit $\wedge$, sonst mit $||$ und entsprechend für Tripel und Quadrupel, so können wir das eben Gesagte auch so ausdrücken: Die Quadrupel $\square$ und daher die Tripel $\sqcap$ sind syzygetisch, die Tripel $\triangle$, $\vee\!\!\!\!|$ und $|\vee$ dagegen asyzygetisch.

Das Paar $\overline{12}\,\overline{34}$ definiert eine Steinersche Gruppe, welche nach dem obigen keine Doppeltangenten $\overline{kl}$ ($k = 1, 2, 3, 4$; $l = 5, 6, 7, 8$) enthalten kann. Also kann die Gruppe nur aus den Paaren $\overline{12}\,\overline{34}$, $\overline{13}\,\overline{42}$, $\overline{14}\,\overline{23}$, $\overline{56}\,\overline{78}$, $\overline{57}\,\overline{68}$, $\overline{58}\,\overline{67}$ bestehen. Demnach sind die Quadrupel $||||$ und die Tripel $|||$ syzygetisch.

Hieraus erkennt man, daß es zwei Arten von Steinerschen Gruppen gibt:

Bei der ersten Art haben die Doppeltangenten je eines Paares der Gruppe einen Pol gemeinsam und die sechs Doppeltangentenpaare zwei Pole E_j und E_k gemeinsam; man bezeichnet eine solche Steinersche Gruppe mit $\{jk\}$. Ihre Anzahl beträgt 28. Beispiel: $\overline{13}\,\overline{23}$, $\overline{14}\,\overline{24}$, $\overline{15}\,\overline{25}$, $\overline{16}\,\overline{26}$, $\overline{17}\,\overline{27}$, $\overline{18}\,\overline{28}$.

Bei der zweiten Art haben je zwei Doppeltangenten eines Paares irgendeiner Gruppe keinen Pol gemeinsam und je zwei Doppeltangentenpaare entweder vier Pole gemeinsam oder gar keinen. Wenn sie vier Pole E_j, E_k, E_l, E_m gemeinsam haben, dann gehört noch das dritte Doppeltangentenpaar dazu, welches auch die vier Pole hat; die drei übrigen Doppeltangentenpaare haben die vier anderen Pole E_p, E_q, E_r, E_s gemeinsam. Man bezeichnet eine solche Steinersche Gruppe mit $\{jklm\}$ oder $\{pqrs\}$; ihre Anzahl beträgt 35. Beispiel: $\overline{12}\ \overline{34}$, $\overline{13}\ \overline{24}$, $\overline{14}\ \overline{23}$, $\overline{56}\ \overline{73}$, $\overline{57}\ \overline{68}$, $\overline{58}\ \overline{67}$.

Wählt man aus irgendeiner Steinerschen Gruppe drei beliebige Doppeltangentenpaare, hernach aus jedem Paar eine beliebige Doppeltangente, so bilden diese ein asyzygetisches Tripel, da ein solches Tripel nur das Symbol $\triangle$, ⩛ oder $|\vee$ haben kann.

1. 5. Seien $t_1\,t_2\,t_3\,t_4$ und $u_1u_2u_3u_4$ irgend zwei syzygetische Quadrupel, dann erhält man

$$\begin{aligned} F &= t_1\,t_2\,t_3\,t_4 - Q^2 \\ &= u_1u_2u_3u_4 - Q'^2, \end{aligned}$$

wobei Q und Q' zwei Kegelschnitte sind. Daraus folgt

$$t_1t_2t_3t_4 - u_1u_2u_3u_4 = (Q + Q')\,(Q - Q').$$

Die obige Identität zeigt, daß die 16 Schnittpunkte von t und u auf zwei Kegelschnitten $Q + Q'$ und $Q - Q'$ liegen. Wenn die zwei Quadrupel eine Doppeltangente gemeinsam haben, z. B. $t_4 = u_4$, dann ist $t_4\,(t_1t_2t_3 - u_1u_2u_3) = (Q + Q')\,(Q - Q')$. So zerfällt entweder $Q + Q'$ oder $Q - Q'$ in zwei Geraden t_4 und t'_4. In jedem der beiden Fälle ergibt sich, daß die 9 Schnittpunkte von $t_1t_2t_3$ und $u_1u_2u_3$ auf einem Kegelschnitt und einer Geraden t'_4 liegen; das heißt, daß die sechs Doppeltangenten ein Pascalsches Sechseck bilden. Es folgt:

Die 16 Schnittpunkte von je zwei syzygetischen Quadrupeln liegen auf zwei Kegelschnitten. Wenn die beiden eine Doppeltangente gemeinsam haben, so bilden die übrigen sechs ein Pascalsches Sechseck.

1. 6. Wir schreiben das Kegelschnittsystem $\lambda^2 R + 2\,\lambda\,Q + S = 0$ in Linienkoordinaten $\sum A_{ik}u_iu_k = 0$, wobei $A_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}\lambda + \gamma_{ik}\lambda^2 + {} + \delta_{ik}\lambda^3 + \varepsilon_{ik}\lambda^4$ ist. Sei b_{ik} eine Lösung der fünf Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum \alpha_{ik}b_{ik} &= 0, \\ \sum \beta_{ik}b_{ik} &= 0, \\ \sum \gamma_{ik}b_{ik} &= 0, \\ \sum \delta_{ik}b_{ik} &= 0, \\ \sum \varepsilon_{ik}b_{ik} &= 0, \end{aligned}$$

dann ist

$$\sum A_{ik}b_{ik} = 0 \tag{9}$$

identisch in λ. Weiter sei x_i der Doppelpunkt eines zerfallenden Kegelschnittes des Systems, dann ist $\sum A_{ik} u_i u_k = (\sum x_i u_i)^2$. Daraus folgt:

$$A_{ik} = x_i x_k. \tag{10}$$

Durch Einsetzen von (10) in (9) erhalten wir

$$\sum x_i x_k b_{ik} = 0,$$

das heißt, der Doppelpunkt x_i liegt auf dem Kegelschnitt

$$\sum b_{ik} x_i x_k = 0.$$

Es folgt:

Die sechs Schnittpunkte x_i der sechs Doppeltangentenpaare einer Steinerschen Gruppe liegen auf einem Kegelschnitt[8]).

II. Punktgruppen auf einer Kurve vierter Ordnung.

2. 1. Betrachtet man je endlich viele Punkte $P_1 P_2 P_3 \ldots P_n$ auf einer Kurve zusammen als eine Punktgruppe und bezeichnet diese mit D; betrachtet man weiter zwei Punktgruppen $D'D''$ zusammen genommen als ihr Produkt und bezeichnet es mit $D = D'D''$, dann sagt der Restsatz aus:

Wenn $D'D''$ von einer Kurve $(m + n)$-ter Ordnung, D' von einer Kurve m-ter Ordnung ausgeschnitten wird, so wird D'' von einer Kurve n-ter Ordnung ausgeschnitten[9]).

Wenn es eine Kurve K von m-ter Ordnung gibt, die die Punktgruppe DC ausschneidet, und eine Kurve K' von m-ter Ordnung, die die Punktgruppe $D'C$ ausschneidet, so heißen D und D' äquivalent, und man schreibt $D \sim D'$. Dann folgt leicht:

(a) $D \sim D$;
(b) wenn $D \sim D'$, so $D' \sim D$;
(c) wenn $D \sim D'$, $D' \sim D''$, so $D \sim D''$;
(d) wenn $D \sim D'$, $E \sim E'$, so $DE \sim D'E'$.

So sind alle Punktgruppen, die zu einer festen äquivalent sind, auch untereinander äquivalent und bilden eine Klasse von Punktgruppen, die man mit K_D bezeichnet.

Aus zwei Klassen K_D und K_E bildet man alle Punktgruppen $D_i E_j$, die untereinander wieder äquivalent sind. Man findet also eine neue Klasse und bezeichnet sie mit $K_D K_E = K_{DE}$, wonach $D_i E_j \in K_{DE}$ ist.

---

[8]) Siehe E. Caporali, Memorie di geometria, Napoli 1888, S. 364.

[9]) Vgl. den „Satz vom Doppelpunktsdivisor" bei v. d. Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939, S. 215. In unserem Fall ist der Doppelpunktsdivisor D leer, da die Grundkurve keine Doppelpunkte hat.

Sind π und π' irgend zwei Doppeltangentenpaare einer Steinerschen Gruppe, ist weiter α die Gruppe der vier Berührungspunkte von π und β die Gruppe der vier Berührungspunkte von π', dann liegen $\alpha\beta$ auf einem Kegelschnitt Q und $\alpha\alpha$ auf dem Kegelschnitt π, also sind α und β äquivalent. Umgekehrt sei $\gamma \sim \delta$, wobei γ die Berührungspunktgruppe des Doppeltangentenpaares π_1 und δ die Berührungspunktgruppe des Doppeltangentenpaares π_2 ist, so ist auch $\gamma\gamma \sim \gamma\delta$, und es gibt eine Kurve K m-ter Ordnung, die die Grundkurve in $\gamma\gamma R$ schneidet und eine Kurve K' m-ter Ordnung, die die Grundkurve in $\gamma\delta R$ schneidet. Da $\gamma\gamma$ auf einem Kegelschnitt liegen, wird nach dem Restsatz R von einer Kurve $(m-2)$-ter Ordnung ausgeschnitten. Da weiter $\gamma\delta R$ von der Kurve K' ausgeschnitten wird, so wird, wieder nach dem Restsatz, $\gamma\delta$ von einem Kegelschnitt ausgeschnitten. Somit gehören π_1 und π_2 derselben Steinerschen Gruppe an. Es folgt:

Je sechs Punktgruppen auf einer Kurve vierter Ordnung, von denen jede aus den vier Berührungspunkten eines Doppeltangentenpaares einer Steinerschen Gruppe besteht, gehören einer Klasse an und umgekehrt.

Man bezeichnet die Klasse mit $[jk]$ oder $[jklm]$, je nachdem das Doppeltangentenpaar, dessen Berührungspunkte die Punktgruppe bilden, der Steinerschen Gruppe $\{jk\}$ oder $\{jklm\}$ angehört. Man bezeichnet die Gruppe der Berührungspunkte des Doppeltangentenpaares $\overline{jk}\,\overline{lm}$ mit $(jklm)$, die Gruppe der Berührungspunkte der Doppeltangente $\overline{jk}$ mit (jk). Dann ergibt sich:

1. $(jk) = (kj)$;
2. $(jlkl) \sim (jmkm)$;
3. $(jklm) \sim (jlmk) \sim (jmkl) \sim (pqrs) \sim (prsq) \sim (psqr)$;
4. $[jklm] \equiv [jlmk] \equiv [jmkl] \equiv [pqrs] \equiv [prsq] \equiv [psqr]$.

2. 2. Lemma. Indem man aus zwei Steinerschen Gruppen je ein Doppeltangentenpaar nimmt, kann man immer zwei solche Doppeltangentenpaare erhalten, die eine zweimal vorkommende Doppeltangente enthalten. Und die zwei übrigen Doppeltangenten bilden ein Doppeltangentenpaar, welches zu einer dritten Steinerschen Gruppe gehört, und zwar erhält man das Symbol $\{jk\}$ oder $\{jklm\}$ dieser dritten Gruppe, indem man die Symbole der ersten beiden Gruppen nebeneinander schreibt und die zweimal vorkommenden Ziffern wegläßt, oder auch, indem man die einmal vorkommenden Ziffern wegläßt und die nicht oder zweimal vorkommenden aufschreibt. Man nennt sie die Produktgruppe der beiden Gruppen.

Beweis. Wenn die zwei Steinerschen Gruppen beide der ersten Art der Steinerschen Gruppen angehören, so gibt es zwei Fälle: $\{jk\}$, $\{lm\}$ und $\{jk\}$, $\{jl\}$. Von $\{jk\}$, $\{lm\}$ enthält $\{jk\}$ das Paar $\overline{jl}\,\overline{kl}$ und $\{lm\}$ das Paar $\overline{lj}\,\overline{mj}$; also enthalten die zwei Paare eine zweimal vorkommende Doppeltangente $\overline{jl}$

und das der Steinerschen Gruppe $\{lmjk\}$ angehörende Doppeltangentenpaar $\overline{kl}\,\overline{mj}$. Von $\{jk\}$, $\{jl\}$ enthält $\{jk\}$ das Paar $\overline{jl}\,\overline{kl}$ und $\{jl\}$ das Paar $\overline{jk}\,\overline{lk}$; also enthalten die zwei Paare eine zweimal vorkommende Doppeltangente $\overline{kl}$ und das der Steinerschen Gruppe $\{kl\}$ angehörende Doppeltangentenpaar $\overline{kj}\,\overline{lj}$. Wenn die zwei Steinerschen Gruppen beide zu der zweiten Art der Steinerschen Gruppen gehören, so gibt es zwei Fälle: $\{jklm\}$, $\{jkpq\}$ und $\{jklm\}$, $\{jklp\}$. Von $\{jklm\}$, $\{jkpq\}$ enthält $\{jklm\}$ das Paar $\overline{jk}\,\overline{lm}$ und $\{jkpq\}$ das Paar $\overline{jk}\,\overline{pq}$; also enthalten die zwei Paare eine zweimal vorkommende Doppeltangente $\overline{jk}$ und das der Steinerschen Gruppe $\{lmpq\}$ angehörende Doppeltangentenpaar $\overline{lm}\,\overline{pq}$. Von $\{jklm\}$, $\{jklp\}$ enthält $\{jklm\}$ das Paar $\overline{jk}\,\overline{lm}$ und $\{jklp\}$ das Paar $\overline{jk}\,\overline{lp}$; also enthalten die zwei Paare eine zweimal vorkommende Doppeltangente $\overline{jk}$ und das zu der Steinerschen Gruppe $\{mp\}$ gehörige Doppeltangentenpaar $\overline{lm}\,\overline{lp}$.

Wenn eine der zwei Steinerschen Gruppen der ersten Art und die andere der zweiten Art angehört, dann gibt es zwei Fälle: $\{jklm\}$, $\{jk\}$ und $\{jklm\}$, $\{jp\}$. Von $\{jklm\}$, $\{jk\}$ enthält $\{jklm\}$ das Paar $\overline{jl}\,\overline{km}$ und $\{jk\}$ das Paar $\overline{jl}\,\overline{kl}$; also enthalten die zwei Paare eine zweimal vorkommende Doppeltangente $\overline{jl}$ und das zu der Steinerschen Gruppe $\{lm\}$ gehörende Doppeltangentenpaar $\overline{kl}\,\overline{km}$. Von $\{jklm\}$, $\{jp\}$ enthält $\{jklm\}$ das Paar $\overline{jk}\,\overline{lm}$ und $\{jp\}$ das Paar $\overline{jk}\,\overline{pk}$; also enthalten die zwei Paare eine zweimal vorkommende Doppeltangente $\overline{jk}$ und das der Steinerschen Gruppe $\{klmp\}$ angehörende Doppeltangentenpaar $\overline{lm}\,\overline{pk}$.

Die so erklärte Multiplikation ist offenbar kommutativ und assoziativ, denn die Produktgruppe von drei oder mehr Gruppen wird immer so erhalten, daß die Symbole dieser Gruppen nebeneinander geschrieben werden und dann entweder die Ziffern, die eine gerade Anzahl Male vorkommen, weggelassen und die anderen beibehalten werden, oder umgekehrt.

2. 3. Nun untersuchen wir die Punktgruppen auf einer Kurve vierter Ordnung.

Kriterium. Die Punktgruppe $P = P_1 P_2 \ldots P_{4n}$ wird dann und nur dann von einer Kurve n-ter Ordnung ausgeschnitten, wenn $P \sim (12)^{2n}$ ist.

Das Kriterium folgt unmittelbar aus dem Restsatz, weil die $4\,n$ Punkte $(12)^{2n}$ immer von einer Kurve n-ter Ordnung, nämlich der n mal gezählten Geraden $\overline{12}$, ausgeschnitten werden.

Hauptsatz. (1) *Je $n - 1$ $(2 < n < 8)$ Steinersche Gruppen, von denen keine die Produktgruppe von m $(m < n - 1)$ aus den übrigen ist, bilden mit ihrer Produktgruppe ein System $S\,[n]$, und zwar gibt es*

$$\frac{63\,(63-1)\left(63-2-\binom{2}{2}\right)\cdots\left(63-(n-2)-\binom{n-2}{2}-\binom{n-2}{3}\cdots\binom{n-2}{n-2}\right)}{n!}$$

Systeme $S[n]$.

(2) *Wählt man aus jeder der n Steinerschen Gruppen ein beliebiges Doppeltangentenpaar, so werden die 4 n Berührungspunkte von einer Kurve n-ter Ordnung ausgeschnitten.*

(3) *Werden 4 n Berührungspunkte von n Doppeltangentenpaaren von einer Kurve n-ter Ordnung ausgeschnitten, so gehören die n Doppeltangentenpaare je einer Steinerschen Gruppe eines Systems $S[n]$ an.*

Beweis. (1) Für die erste Gruppe kann man jede der 63 Steinerschen Gruppen, für die zweite jede der übrigen 63 — 1 wählen. Für die dritte aber kann man nur jede von $63 - 2 - \binom{2}{2}$ Steinerschen Gruppen wählen; weil nämlich je zwei der gewählten Steinerschen Gruppen eine Produktgruppe haben, muß man diese auch abrechnen. Allgemeiner kann man für die r-te Gruppe nur jede von den übrigen $63 - (\gamma - 1) - \binom{\gamma - 1}{2} - \binom{\gamma - 1}{3} \cdots - \binom{\gamma - 1}{\gamma - 1}$ Steinerschen Gruppen wählen; deshalb gibt es im Ganzen

$$\frac{63.(63-1)\left(63-2-\binom{2}{2}\right)\cdots\left(63-(n-2)-\binom{n-2}{2}\cdots-\binom{n-2}{n-2}\right)}{n!}$$

Systeme $S[n]$.

(2) Sei π_i ein beliebiges Doppeltangentenpaar der i-ten Gruppe und π_{P_m} ein beliebiges Doppeltangentenpaar der Produktgruppe $\{P_m\}$, dann ist

$$(\pi_1)(\pi_2) \sim (jk)^2 (\pi_{P_2}),$$

weil $(12)^2 \sim (13)^2 \cdots \sim (18)^2 \sim (23)^2 \cdots \sim (28)^2 \cdots \sim (78)^2$ ist, folgt daraus

$$(\pi_1)(\pi_2) \sim (12)^2 (\pi_{P_2}),$$

$$(\pi_1)(\pi_2)(\pi_3) \sim (12)^2 (\pi_{P_2})(\pi_3) \sim (12)^2 (12)^2 (\pi_{P_3}) \sim (12)^4 (\pi_{P_3});$$

und

$$(\pi_1)(\pi_2)\cdots(\pi_{n-1}) \sim (12)^{2(n-2)} (\pi_{P_{n-1}});$$

also

$$(\pi_1)(\pi_2)\cdots(\pi_{n-1})(\pi_{P_{n-1}}) \sim (12)^{2(n-2)} (\pi_{P_{n-1}})(\pi_{P_{n-1}}) \sim (12)^{2n},$$

deshalb werden die 4 n Berührungspunkte von einer Kurve n-ter Ordnung ausgeschnitten.

(3) Da jedes Doppeltangentenpaar einer Steinerschen Gruppe angehört, so gehört jedes Paar π_i der n Doppeltangentenpaare $\pi_1\pi_2\pi_3 \ldots \pi_n$ zu einer bestimmten Steinerschen Gruppe g_i. Sei $g' = g_1 g_2 \ldots g_{n-1}$ und π' irgendein Doppeltangentenpaar der Steinerschen Gruppe g', so werden $(\pi_1\pi_2\pi_3 \ldots \pi_{n-1}\pi')$ nach (2) von einer Kurve n-ter Ordnung K ausgeschnitten. Nach der Voraussetzung werden $(\pi_1\pi_2\pi_3 \ldots \pi_{n-1}\pi_n)$ von einer Kurve n-ter Ordnung K' ausgeschnitten, also ist $(\pi_n) \sim (\pi')$ und $(\pi_n\pi')$ werden von einem Kegelschnitt ausgeschnitten. Mithin gilt $g_n \equiv g'$, somit bilden $g_1, g_2, \ldots g_n$ ein System $S[n]$.

Def. Ein 2 n-tupel von Doppeltangenten, welches aus n Doppeltangentenpaaren aus den n Steinerschen Gruppen eines Systems $S\,[n]$ besteht, heißt syzygetisch.

2. 4. Wendet man den Hauptsatz auf die Systeme $S\,[3]$ an, so findet man vier Arten:

1. Irgendein System der ersten Art wird von 3 Basispunkten definiert, etwa $\{jk\}$, $\{kl\}$, $\{lj\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art ist 56;

$$\begin{array}{rl} \text{z. B.}\quad \{12\}: & \overline{13}\,\overline{23},\ \overline{14}\,\overline{24},\ \overline{15}\,\overline{25},\ \overline{16}\,\overline{26},\ \overline{17}\,\overline{27},\ \overline{18}\,\overline{28}; \\ \{23\}: & \overline{21}\,\overline{31},\ \overline{24}\,\overline{34},\ \overline{25}\,\overline{35},\ \overline{26}\,\overline{36},\ \overline{27}\,\overline{37},\ \overline{28}\,\overline{38}; \\ \{31\}: & \overline{32}\,\overline{12},\ \overline{34}\,\overline{14},\ \overline{35}\,\overline{15},\ \overline{36}\,\overline{16},\ \overline{37}\,\overline{17},\ \overline{38}\,\overline{18}. \end{array}$$

2. Irgendein System der zweiten Art wird von 4 Basispunkten definiert, etwa $\{jklm\}$, $\{jk\}$, $\{lm\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art ist 105;

$$\begin{array}{rl} \text{z. B.}\quad \{1234\}: & \overline{12}\,\overline{34},\ \overline{13}\,\overline{24},\ \overline{14}\,\overline{23},\ \overline{56}\,\overline{78},\ \overline{57}\,\overline{68},\ \overline{58}\,\overline{67}; \\ \{12\}: & \overline{13}\,\overline{23},\ \overline{14}\,\overline{24},\ \overline{15}\,\overline{25},\ \overline{16}\,\overline{26},\ \overline{17}\,\overline{27},\ \overline{18}\,\overline{28}; \\ \{34\}: & \overline{31}\,\overline{41},\ \overline{32}\,\overline{42},\ \overline{35}\,\overline{45},\ \overline{36}\,\overline{46},\ \overline{37}\,\overline{47},\ \overline{38}\,\overline{48}. \end{array}$$

3. Irgendein System der dritten Art wird von 5 Basispunkten definiert, etwa $\{jklm\}$, $\{jklp\}$, $\{mp\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art ist 280;

$$\begin{array}{rl} \text{z. B.}\quad \{1234\}: & \overline{12}\,\overline{34},\ \overline{13}\,\overline{24},\ \overline{14}\,\overline{23},\ \overline{56}\,\overline{78},\ \overline{57}\,\overline{68},\ \overline{58}\,\overline{67}; \\ \{1235\}: & \overline{12}\,\overline{35},\ \overline{13}\,\overline{25},\ \overline{15}\,\overline{23},\ \overline{46}\,\overline{78},\ \overline{47}\,\overline{68},\ \overline{48}\,\overline{67}; \\ \{45\}: & \overline{41}\,\overline{51},\ \overline{42}\,\overline{52},\ \overline{43}\,\overline{53},\ \overline{46}\,\overline{56},\ \overline{47}\,\overline{57},\ \overline{48}\,\overline{58}. \end{array}$$

4. Irgendein System der vierten Art wird von 6 Basispunkten definiert, etwa $\{lmpq\}$, $\{pqjk\}$, $\{jklm\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art ist 210;

$$\begin{array}{rl} \text{z. B.}\quad \{1234\}: & \overline{12}\,\overline{34},\ \overline{13}\,\overline{24},\ \overline{14}\,\overline{23},\ \overline{56}\,\overline{78},\ \overline{57}\,\overline{68},\ \overline{58}\,\overline{67}; \\ \{3456\}: & \overline{34}\,\overline{56},\ \overline{35}\,\overline{46},\ \overline{36}\,\overline{54},\ \overline{12}\,\overline{78},\ \overline{17}\,\overline{28},\ \overline{18}\,\overline{27}; \\ \{5612\}: & \overline{56}\,\overline{12},\ \overline{51}\,\overline{62},\ \overline{52}\,\overline{61},\ \overline{34}\,\overline{78},\ \overline{37}\,\overline{48},\ \overline{38}\,\overline{47}. \end{array}$$

Jedes System der zweiten oder vierten Art umfaßt alle die 28 Doppeltangenten. Man bezeichnet diese Systeme zusammen mit $S_1\,[3]$. Ein System der ersten oder dritten Art aber umfaßt nur 18 verschiedene Doppeltangenten. Man bezeichnet diese Systeme mit $S_2\,[3]$. Daraus erkennt man, daß die drei Steinerschen Gruppen eines jeden Systems $S_1\,[3]$ vier solche Doppeltangenten, die in jeder Steinerschen Gruppe zwei Doppeltangentenpaare bilden, gemeinsam haben; die drei Steinerschen Gruppen eines Systems $S_2\,[3]$ haben keine gemeinsamen Doppeltangenten.

Weiter, wenn drei Doppeltangentenpaare, die man aus den drei Gruppen des Systems $S\,[3]$ wählt, drei zweimal vorkommende Doppeltangenten umfassen, so zerfällt die Kurve Q_3, die durch die 12 Berührungspunkte geht, in drei Geraden; wenn sie eine zweimal vorkommende Doppeltangente und vier andere, die zwei Doppeltangentenpaare einer gewissen Steinerschen Gruppe bilden, umfassen, dann zerfällt Q_3 in eine Gerade und einen Kegelschnitt. Man bezeichnet jede der vier gemeinsamen Doppeltangenten eines Systems S_1 [3] mit t_0 und jeden durch die acht Berührungspunkte dieser vier Doppeltangenten gehenden Kegelschnitt mit Q_0, die 24 übrigen Doppeltangenten mit t, den durch die 8 Berührungspunkte von irgend vier Doppeltangenten t oder t und t_0 gehenden Kegelschnitt mit Q. Durch alleinige Kombination findet man folgendes:

1. In jedem System S_1 [3] bestehen von den 216 Kurven Q_3
   a) 4 aus je drei der vier t_0,
   b) 4 aus $Q_0 + t_0$,
   c) 4 aus $Q + t_0$;
   d) die übrigen 160 sind eigentliche Q_3.
2. In jedem System S_2 [3] bestehen von den 216 Kurven Q_3
   e) 6 aus 3 t,
   f) 90 aus $Q + t$;
   g) die übrigen 120 sind die eigentlichen Kurven Q_3.

An verschiedenen Kurven Q_3 gibt es im ganzen

3276, die aus je 3 t,
1260, die aus $Q_0 + t_0$,
7560, die aus $Q + t$ bestehen, und
6048 eigentliche Kurven Q_3.

Seien $t_1 t_2 \ldots t_6$ die 6 Doppeltangenten eines syzygetischen 6-tupels und Q_3 die durch die 12 Berührungspunkte gehende Kurve dritter Ordnung, dann definiert $\lambda Q_3^2 + t_1 t_2 \ldots t_6 = 0$ ein Büschel von Kurven sechster Ordnung. Jede Kurve des Büschels berührt die Kurve F in denselben 12 Punkten. Wählt man also λ so, daß die Kurve $\lambda Q_3^2 + t_1 t_2 \ldots t_6 = 0$ noch durch einen weiteren Punkt von F geht, so hat diese Kurve mit F 25 Punkte gemeinsam; F ist dann als Bestandteil in ihr enthalten; man hat daher die Identität

$$\lambda Q_3^2 + t_1 t_2 \ldots t_6 = F P,$$

oder wenn man λQ_3^2 als $- Q_3^2$ bezeichnet,

$$F P = t_1 t_2 \ldots t_6 - Q_3^2,$$

wobei $P = 0$ ein Kegelschnitt ist.

Die obige Identität bedeutet, daß die zerfallende Kurve sechster Ordnung $F P = 0$ die Einhüllende des Systems $\lambda^2 t_1 t_2 t_3 + 2 \lambda Q_3 + t_4 t_5 t_6 = 0$ ist, und $t_1 t_2 t_3$ sowie $t_4 t_5 t_6$ sind zwei zerfallende Kurven des Systems. Weiter: Jede

Doppeltangente t_i berührt den Kegelschnitt P, und die Kurve Q_3 geht noch durch die 6 Berührungspunkte von P mit t_i. Nach einem bekannten Satze folgt:

Die 6 Ecken zweier Dreiseite $t_1 t_2 t_3$ und $t_4 t_5 t_6$, wobei $t_1 t_2 \ldots t_6$ die Doppeltangenten eines syzygetischen 6-tupels sind, liegen auf einem Kegelschnitt, und zwar definiert ein syzygetisches 6-tupel 10 solche Kegelschnitte.

2. 5. Wendet man den Hauptsatz auf die Systeme S [4] an, so findet man 11 Arten:

Irgendein System der ersten oder zweiten Art wird von 4 Basispunkten definiert, und zwar gilt folgendes:

1. Bei der ersten Art sind die Systeme so beschaffen: $\{jk\}$, $\{kl\}$, $\{lm\}$, $\{mj\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{4} \cdot 3! \cdot \frac{1}{2} = 210$.

2. Bei der zweiten Art ist irgendein System so beschaffen: $\{jk\}$, $\{jl\}$, $\{jm\}$, $\{jklm\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{4} \cdot 4 = 280$.

Irgendein System der dritten, vierten oder fünften Art wird von 5 Basispunkten definiert, und zwar:

3. Bei der dritten Art ist irgendein System so beschaffen: $\{jklm\}$, $\{jk\}$, $\{lp\}$, $\{mp\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{5} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{2} = 1680$.

4. Bei der vierten Art ist irgendein System so beschaffen: $\{jklm\}$, $\{klmp\}$, $\{jl\}$, $\{lp\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{5} \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} = 1680$.

5. Bei der fünften Art ist irgendein System so beschaffen: $\{jklm\}$, $\{jklp\}$, $\{jkmp\}$, $\{jk\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{5} \cdot \binom{5}{2} = 560$.

Irgendein System der sechsten, siebenten, achten oder neunten Art wird von 6 Basispunkten definiert, und zwar:

6. Bei der sechsten Art ist irgendein System so beschaffen: $\{jklm\}$, $\{jkpq\}$, $\{lp\}$, $\{mq\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{6} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1260$.

7. Bei der siebenten Art ist irgendein System so beschaffen: $\{jk\}$, $\{lm\}$, $\{jkpq\}$, $\{lmpq\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{6} \cdot \binom{6}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 630$.

8. Bei der achten Art ist irgendein System so beschaffen: $\{jk\}$, $\{jklm\}$, $\{jlpq\}$, $\{jmpq\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{6} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2520$.

9. Bei der neunten Art ist irgendein System so beschaffen: $\{jklm\}$, $\{klmp\}$, $\{lmpq\}$, $\{jlmq\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\binom{8}{6} \cdot \binom{6}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 630$.

10. Irgendein System der zehnten Art wird von 7 Basispunkten definiert, etwa $\{jklm\}$, $\{jkpq\}$, $\{jlpq\}$, $\{jmqr\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $\frac{\binom{8}{7} \cdot 7 \cdot \binom{6}{3} \cdot 3!}{4 \cdot 8} = 210$.

11. Irgendein System der elften Art wird von 8 Basispunkten definiert, etwa $\{jk\}$, $\{lm\}$, $\{pq\}$, $\{rs\}$. Die Anzahl der Systeme von dieser Art beträgt $8! \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} = 105$.

Im ganzen gibt es 9675 Systeme S [4].

Wählt man wie bei S [3] aus jeder Steinerschen Gruppe eines Systems S [4] ein beliebiges Doppeltangentenpaar, so geht durch die 16 Berührungspunkte eine Kurve Q_4. Außer dieser gibt es aber noch unendlich viele, denn die Q_4 gehört einer linearen Schar $\lambda_0 F + \lambda_1 Q_4 = 0$ an, wobei F die Grundkurve ist. Und zwar ist diese Schar irreduzibel. Da nämlich erstens F und Q_4 keinen gemeinsamen Bestandteil haben, zweitens F irreduzibel ist, so ist nach einem bekannten Bertinischen Satz[10]) diese Schar irreduzibel.

a) Wenn die vier Doppeltangentenpaare vier zweimal vorkommende Doppeltangenten umfassen, dann zerfällt eine Kurve Q_4 in $t_1 t_2 t_3 t_4$.

b) Wenn die vier Doppeltangentenpaare zwei zweimal vorkommende Doppeltangenten umfassen, dann zerfällt eine Kurve Q_4 in $t_1 t_2 Q$.

c) Wenn die vier Doppeltangentenpaare eine zweimal vorkommende Doppeltangente und sechs andere syzygetische Doppeltangenten umfassen, dann zerfällt eine Kurve Q_4 in t und Q_3.

d) Wenn die vier Doppeltangentenpaare zwei syzygetische Doppeltangentenquadrupel umfassen, dann zerfällt eine Kurve Q_4 in Q und Q'.

Offenbar tritt in jedem Falle nur eine solche zerfallende Kurve auf. So gibt es in S [4] nur endlich viele in t, Q, Q_3 zerfallende Kurven Q_4. Dabei sieht man auch, daß, wenn eine Kurve Q_4 nach Fall a) zerfällt, alle Kurven der Schar die Grundkurve in denselben acht Punkten berühren. Wenn eine Kurve Q_4 nach Fall b) zerfällt, so berühren alle Kurven der Schar die Grundkurve in denselben vier Punkten, usw.

Es seien $t_1 t_2 \ldots t_8$ acht Doppeltangenten eines syzygetischen 8-tupels, weiter sei Q_4 eine durch die 16 Berührungspunkte gehende Kurve vierter Ordnung, dann definiert $\lambda Q_4^2 + t_1 t_2 \ldots t_8 = 0$ ein Büschel von Kurven

---

[10]) Siehe etwa B. L. v. d. Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939, S. 204.

achter Ordnung. Jede Kurve im Büschel berührt die Kurve F in denselben 16 Punkten. Wählt man also λ so, daß die Kurve $\lambda Q_4^2 + t_1 t_2 \ldots t_8 = 0$ noch durch einen Punkt von F geht, so hat diese Kurve mit F 33 Punkte gemeinsam; also ist F als Bestandteil in ihr enthalten. Man erhält somit die Identität $\lambda Q_4^2 + t_1 t_2 \ldots t_8 = F P_4$, wobei P_4 eine Kurve vierter Ordnung ist. Diese Identität zeigt, daß jede Doppeltangente t_i die Kurve P_4 auch in zwei Punkten berührt und daß die Kurve Q_4 auch durch die 16 Berührungspunkte von P_4 mit t_i geht.

2. 6. Wählt man ebenso aus jeder Steinerschen Gruppe eines Systems $S[n]$ für $4 < n < 8$ ein beliebiges Doppeltangentenpaar, so gehen durch die $4n$ Berührungspunkte unendlich viele Kurven Q_n, die eine irreduzibel lineare Schar bilden. Jede Kurve Q_n definiert nämlich eine Linearschar

$$\lambda_0 Q_n + (\lambda_1 x_0^{n-4} + \lambda_2 x_0^{n-5} x_1 + \cdots + \lambda_\omega x_2^{n-4}) F = 0.$$

Wenn Q_n die Grundkurve nicht als Bestandteil enthält, so haben Q_n und $x_0^{n-4} F$ und $x_1^{n-4} F$ keinen gemeinsamen Bestandteil. Wäre nun die Schar reduzibel, so müßten nach dem Satz von Bertini alle Kurven der Schar, insbesondere also alle Kurven $P_{n-4} F = 0$ in Bestandteile zerfallen, die einem und demselben Büschel angehören. Wählt man nun $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\omega$ so, daß P_{n-4} irreduzibel ausfällt, so gehören F und P_{n-4} nicht demselben Büschel an, da ihre Ordnungen verschieden sind. Also ist die Schar irreduzibel.

Es seien $t_1 t_2 \ldots t_{2n}$ ($n = 5, 6, 7$) $2n$ Doppeltangenten eines syzygetischen $2n$-tupels, und Q_n sei eine durch die $4n$ Berührungspunkte gehende Kurve n-ter Ordnung. Dann definiert $\lambda Q_n^2 + t_1 t_2 \ldots t_{2n} = 0$ ein Büschel von Kurven $2n$-ter Ordnung. Es sei $\lambda Q_n^2 + t_1 t_2 \ldots t_{2n} = 0$ eine noch durch einen Punkt von F gehende Kurve. Dann erhält man, genau wie in den Fällen $n = 2, 3, 4$, eine Identität

$$\lambda Q_n^2 + t_1 t_2 \ldots t_{2n} = F P_{2n-4},$$

wobei P_{2n-4} eine Kurve $(2n - 4)$-ter Ordnung ist. Jede t_i berührt die Kurve P_{2n-4} in $n - 2$ Punkten, und die Kurve Q_n geht noch durch die $n(n - 2)$ Berührungspunkte von P_{2n-4} mit t_i.

(Eingegangen am 13. 11. 1940.)

Lebenslauf

Ich, Li En-Po, wurde am 23. April 1899 zu Tsun-Hua, Provinz Ho-Pei, China, als Sohn des Gymnasiallehrers Li Schuyun geboren. Meine erste Schulbildung genoß ich ab 1908 in der Volksschule in Tsun-Hua. Dort besuchte ich auch das Gymnasium, welches ich im Juli 1919 mit dem Reifezeugnis verließ. 1920 besuchte ich die Staatliche Normal-Universität in Peking, um Mathematik und Physik zu studieren. Im Juli 1924 bestand ich die Abschlußprüfung. Von 1924 bis 1928 war ich Mathematiklehrer des 9. Provinzialgymnasiums in der Provinz Chili, von 1928 bis 1936 Lehrer des Gymnasiums der Staatlichen Normal-Universität in Peking. Im Jahre 1936 kam ich nach Deutschland. Sommersemester und Wintersemester 1937 habe ich an der Universität Berlin studiert. Ab Sommersemester 1938 setzte ich mein Studium an der Universität Leipzig fort.