УРАВНЕНІЯ СЪ ЧАСТНЫМИ ДИФФЕРЕНЦІАЛАМИ КАКОГО НИБУДЬ ПОРЯДКА.

Ю А. Давидова.

(Читано 20-го февраля 1865 г.)

Изслѣдованіями Якоби и Коши интеграція уравненій съ частными дифференціалами 1-го порядка разрѣшена въ самомъ общемъ видѣ; замѣчательные способы, употребленные этими учеными, приводятъ интеграцію всякаго уравненія съ частными дифференціалами 1-го порядка къ интеграціи системы дифференціальныхъ уравненій. Пусть будетъ

$$F\,(x,y,z,p,q)=0$$

подобное уравненіе, въ которомъ z изображаетъ функцію отъ x и y а p и q частныя производныя отъ z относительно x и y, и означимъ полный дифференціалъ выраженія F чрезъ

$$X dx+Y dy+Z dz+P dp+Q dq;$$

тогда вопросъ приводится къ интегрированію соовмѣстныхъ дифференці льныхъ уравненій

$$P\frac{dy}{dx}-Q=0$$

$$X+Zp+P\frac{dp}{dx}=0$$

$$Y+Zq+Q\frac{dq}{dx}=0,$$

къ которымъ присоединяемъ еще четвертое уравненіе

$$dz = pdx + qdy = (p\mathrm{P} + q\mathrm{Q})\,\frac{dx}{\mathrm{P}}.$$

Предстоящія изслѣдованія имѣютъ цѣлью обнаружить, что подобныя дифференціальныя уравненія существуютъ для всякаго уравненія съ частными дифференціалами какого нибудь порядка, и что если интеграція этихъ дифференціальныхъ уравненій возможна, то ею разрѣшается и уравненіе съ частными производными.

I.

Означивъ чрезъ x и y независимыя перемѣнныя и чрезъ z функцію ихъ, изобразимъ чрезъ

$$\mathrm{F} = 0$$

уравненіе съ частными дифференціалами, содержащее x,y,z и n первыхъ производныхъ отъ z.

Условимся для краткости въ слѣдующемъ обозначеніи

$$\frac{d^{r+s}z}{dx^r dy^s} = z_r^{(s)},$$

такъ, что подстрочный указатель z означитъ число дифференцированій относительно x и верхній указатель число дифференцированій относительно y. Согласно съ этимъ всякое новое дифференцированіе относительно x увеличитъ на единицу подстрочный указатель, а всякое новое дифференцированіе относительно y увеличитъ на единицу верхній указатель:

$$\frac{dz_r^{(s)}}{dx} = z^{(s)}{}_{r+1}\,;\ \frac{dz_r^{(s)}}{dy} = z_r^{(s+1)}.$$

Очевидно, что на основаніи этого обозначенія будемъ имѣть

$$dz_r^{(s)} = z^{(s)}_{r+1} dx + z_r^{(s+1)} dy.$$

Согласимся въ подобномъ же обозначеніи для производныхъ даннаго выраженія F. Положивъ

$$\frac{dF}{dx} = X;$$

$$\frac{dF}{dy} = Y;$$

$$\frac{dF}{dz} = Z;$$

изобразимъ производную отъ F относительно производной

$$z_r^{(s)}$$

чрезъ

$$Z_r^{(s)},$$

такъ что

$$\frac{dF}{dz_r^{(s)}} = Z_r^{(s)}.$$

Согласно съ этимъ полный дифференціалъ выраженія F изобразится въ видѣ

$$dF = Xdx + Ydy + Zdz + Z_1 dz_1 + Z^{(1)} dz^{(1)} + Z_2 dz_2 + \ldots = 0.$$

Введемъ вмѣсто y новое независимое перемѣнное u, предполагая

$$y = \varphi(x, u)$$

и изображая чрезъ φ совершенно произвольную функцію. Вслѣдствіе этого предположенія z и всѣ производныя отъ z становятся функціями отъ x и u.

Вообразимъ, что функція $\varphi(x, u)$ получаетъ безконечно малое измѣненіе $\delta\varphi$, и что вмѣстѣ съ тѣмъ x и u получаютъ совершенно произвольныя приращенія δx и δu. Означимъ чрезъ характеристику δ измѣненія, произходящія вслѣдствіе этого въ величинахъ, зависящихъ отъ x, u и φ такъ, что

$$\delta y = \delta\varphi + \frac{dy}{dx}\,\delta x + \frac{dy}{du}\,du$$

$$\delta z = \frac{dz}{dx}\,\delta x + \frac{dz}{dy}\,\delta y = \frac{dz}{dy}\,\delta\varphi + \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)dx + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{du}\cdot\delta u$$

т. д.

Замѣтивъ, что

$$dz_r^{(s)} - z^{(s)}_{r+1}\,.\,dx - z_r^{(s+1)}\,.\,dy = 0,$$

означимъ чрезъ

$$m_r^{(s)}$$

совершенно произвольное количество и помножимъ на него первую часть предъидущаго равенства

$$m_r^{(s)}\,[dz_r^{(s)} - z^{(s)}_{r+1}.\,dx - z_r^{(s+1)}.dy] = 0.$$

Продифференцируя это равенство въ смыслѣ δ, находимъ

$$\delta m_r^{(s)}\,.\,[dz_r^{(s)} - z^{(s)}_{r+1}\,.\,dx - z_r^{(s+1)}]$$

$$+ m_r^{(s)}\delta\,[dz^{(s)}_{r+1} - z_r^{(s)}\,.\,dx - z_r^{(s+1)}\,.\,dy] = 0$$

или

$$m_r^{(s)}\delta\,[dz_r^{(s)} - z^{(s)}_{r+1}\,.\,dx - z_r^{(s+1)}\,.\,dy] = 0.$$

Но замѣтивъ, что

$$m_r^{(s)}\,.\,\delta dz_r^{(s)} = d\,[m_r^{(s)}\delta z_r^{(s)}] - dm_r^{(s)}\,.\,\delta z_r^{(s)}$$

$$m_r^{(s)}\delta\,(z^{(s)}_{r+1}\,.\,dx) = m_r^{(s)}\,.\,dx\,.\,\delta z^{(s)}_{r+1} + m_r^{(s)}\,.\,z^{(s)}_{r+1}\,.\,\delta dx$$

$$= m_r^{(s)} dx\delta z^{(s)}_{r+1} + d\,[m_r^{(s)}\,.\,z^{(s)}_{r+1}\,.\,\delta x] - d\,(m_r^{(s)}\,.\,z^{(s)}_{r+1})\,.\,\delta x$$

$$m_r^{(s)}\delta\,(z_r^{(s+1)}\,.\,dy) = m_r^{(s)}\,.\,dy\,.\,\delta z_r^{(s+1)} + m_r^{(s)}\,.\,z_r^{(s+1)}\,.\,\delta dy$$

$$= m_r^{(s)}\,.\,dy\,.\,\delta z_r^{(s+1)} + d\,[m_r^{(s)}\,.\,z_r^{(s+1)}\delta y] - d\,(m_r^{(s)}\,.\,z_r^{(s+1)})\,.\,\delta y$$

и вставляя эти выраженія въ предъидущее равенство, находимъ

$$d\,[m_r^{(s)}\delta z_r^{(s)} - m_r^{(s)}z^{(s)}_{r+1}\delta x - m_r^{(s)}\,.\,z_r^{(s+1)}\delta y] - dm_r^{(s)}\,.\,\delta z_r^{(s)}$$
$$+ d\,(m_r^{(s)}\,.\,z^{(s)}_{r+1})\,\delta x + d\,(m_r^{(s)}\,.\,z_r^{(s+1)})\,\delta y - m_r^{(s)}dx\delta z^{(s)}_{r+1}$$
$$- m_r^{(s)}dy\delta z_r^{(s+1)} = 0$$

а такъ какъ

$$\delta z_r^{(s)} = z^{(s)}_{r+1}\,.\,\delta x + z_r^{(s+1)}\,.\,\delta y$$

то

$$dm_r^{(s)}\,.\,\delta z_r^{(s)} - d\,(m_r^{(s)}z^{(s)}_{r+1})\,\delta x - d\,(m_r^{(s)}z_r^{(s+1)})\,\delta y$$
$$+ m_r^{(s)}dx\delta z^{(s)}_{r+1} + m_r^{(s)}dy\delta z_r^{(s+1)} = 0.$$

Раздѣливъ первую часть этого равенства на $m_r^{(s)}$ и положивъ

$$\frac{dm_r^{(s)}}{m_r^{(s)}} = d\mu_r^{(s)}$$

или

$$(1)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad log\,.\,m_r^{(s)} = \mu_r^{(s)}$$

имѣемъ

$$d\mu_r^{(s)}\,.\,\delta z_r^{(s)} - (z^{(s)}_{r+1}d\mu_r^{(s)} + dz^{(s)}_{r+1})\,\delta x$$
$$-(z_r^{(s+1)}\,.\,d\mu_r^{(s)} + dz_r^{(s+1)})\,\delta y + dx\delta z^{(s)}_{r+1} + dy\delta z_r^{(s+1)} = 0.$$

Положимъ для сокращенія

$$(2).\;.\;.\;.\;.\;.\quad d\xi^{(s)}_{r+1} = z^{(s)}_{r+1}d\mu_r^{(s)} + dz^{(s)}_{r+1}$$
$$d\eta_r^{(s+1)} = z_r^{(s+1)}d\mu_r^{(s)} + dz_r^{(s+1)},$$

тогда предъидущее равенство приметъ видъ

$$d\mu_r^{(s)}\,.\,\delta z_r^{(s)} - d\xi^{(s)}_{r+1}\,.\,\delta x - d\eta_r^{(s+1)}\,.\,\delta y + dx\,.\,\delta z^{(s)}_{r+1}$$
$$+ dy\,.\,\delta z_r^{(s+1)} = 0.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Принимая въ уравненіи (3) для r и s всѣ цѣлыя числа, удовлетворяющія условію

$$r + s = n - 1$$

находимъ слѣдующую систему n равенствъ:

$$d\mu_{n-1} . \delta z_{n-1} - d\xi_n . \delta x - d\eta^{(1)}_{n-1} . \delta y + dx\delta z_n + dy\delta z^{(1)}_{n-1} = 0$$

$$d\mu^{(1)}_{n-2} . \delta z^{(1)}_{n-2} - d\xi^{(1)}_{n-1} . \delta x - d\eta^{(2)}_{n-2} . \delta y + dx\delta z^{(1)}_{n-1} + dy\delta z^{(2)}_{n-2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

. . . .

. . . .

$$d\mu_1^{(n-2)} . \delta z_1^{(n-2)} - d\xi_2^{(n-2)} . \delta x - d\eta_1^{(n-1)} . \delta y + dx . \delta z_2^{(n-2)} + dy\delta z_1^{(n-1)} = 0$$

$$d\mu^{(n-1)} . \delta z^{(n-1)} - d\xi_1^{(n-1)} . \delta x - d\eta^{(n)} . \delta y + dx . \delta z_1^{(n-1)} + dy . \delta z^{(n)} = 0.$$

Разумѣя подъ r цѣлое число, небольшее n, положимъ

$$\alpha^{(r)}_{n-r} = -(-1)^r \left[Z_n \left(\frac{dy}{dx}\right)^r - Z^{(1)}_{n-1} . \left(\frac{dy}{dx}\right)^{r-1} + Z^{(2)}_{n-2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{r-2} \ldots \mp Z^{(r)}_{n-r} \right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

верхній знакъ послѣдняго члена соотвѣтствуетъ нечетному r, а нижній — четному, такъ что этотъ членъ, во всякомъ случаѣ имѣетъ отрицательный знакъ.

Предъидущее выраженіе удовлетворяетъ для всякаго r, небольшаго n, слѣдующему уравненію

$$\alpha^{(r)}_{n-r} . dx + \alpha^{(r-1)}_{n-r+1} . dy = - Z^{(r)}_{n-r} . dx; . \quad . \quad (5)$$

въ этомъ легко удостовѣриться, вставляя вмѣсто

$$\alpha^{(r)}_{n-r} \text{ и } \alpha^{(r-1)}_{n-r+1}$$

ихъ выраженія изъ уравненія (4).

Замѣтимъ, что когда въ уравненіи (4) или въ уравненіи (5) примемъ $r = 0$, то находимъ

$$\alpha_n = - Z_n.$$

Помножимъ первое изъ уравненій (a) на α_n, второе на $\alpha^{(1)}_{n-1}$, третье на $\alpha^{(2)}_{n-2}$ и т. д., послѣднее на $\alpha_1^{(n-1)}$ и приложимъ сумму ихъ къ выраженію

$$dx \,.\, \delta\mathrm{F},$$

тогда уничтожатся всѣ члены той части $\delta\mathrm{F}$, которая зависитъ отъ измѣненій производныхъ n-го порядка, за исключеніемъ только члена, имѣющаго множитель $\delta z^{(n)}$. Въ самомъ дѣлѣ, коеффиціентъ при какой нибудь варіяціи разсматриваемой части, напр. при $\delta z^{(r)}_{n-r}$ состоитъ во первыхъ изъ члена

$$\mathrm{Z}^{(s)}_{n-r} \,.\, dx\,,$$

принадлежащаго выраженію $dx \,.\, \delta\mathrm{F}$, и потомъ еще изъ двухъ членовъ, происходящихъ отъ уравненій (a); а именно изъ члена

$$\alpha^{(r)}_{n-r} \,.\, dx$$

происходящаго отъ $r+1$-го уравненія системы (a) и изъ члена

$$\alpha^{(r-1)}_{n-r+1} \,.\, dy,$$

происходящаго отъ r-го уравненія этой системы, такъ что разсматриваемый коэффиціентъ будетъ

$$\mathrm{Z}^{(r)}_{n-r} \,.\, dx + \alpha^{(r)}_{n-r} \,.\, dx + \alpha^{(r-1)}_{n+r-1} \,.\, dy.$$

Но вслѣдствіе уравненія (5) это выраженіе обращается въ нуль.

Что касается до коэффиціента при варіяціи $\delta z^{(n)}$, то замѣтивъ, что онъ будетъ

$$\mathrm{Z}^{(n)} \,.\, dx + \alpha_1^{(n-1)} \,.\, dy,$$

находимъ его равнымъ

$$-\,\alpha^{(n)} \,.\, dx$$

потому что, принимая въ уравненіи (5) $r = n$, находимъ

$$Z^{(n)}\,.\,dx + \alpha_1^{(n-1)}\,.\,dy = -\,\alpha^{(n)}\,.\,dx.$$

Такимъ образомъ та часть выраженія $dx\,.\,\delta F$, которая зависитъ отъ измѣненій производныхъ n-го порядка, приводится, вслѣдствіе сказаннаго преобразованія, къ виду

$$-\,\alpha^{(n)}dx\,.\,\delta z^n,$$

гдѣ

$$(6)\qquad \alpha^{(n)} = -(-1)^n\Big[Z_n\left(\frac{dy}{dx}\right)^n - Z^{(1)}{}_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Z^{(2)}{}_{n-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2}\,.\,.\,.\,.\mp Z^{(n)}\Big].$$

Слѣдующая часть выраженія $dx\,.\,\delta F$, зависящая отъ измѣненій производныхъ $(n-1)$-го порядка, обратится вслѣдствіе того же преобразованія въ

$$(7)\qquad \begin{aligned} &(Z_{n-1}\,.\,dx + \alpha_n\,.\,d\mu_{n-1})\delta z_{n-1} \\ &+ (Z^{(1)}{}_{n-2}\,.\,dx + \alpha^{(1)}{}_{n-1}d\mu^{(1)}{}_{n-2})\delta z^{(1)}{}_{n-2} \\ &.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ &.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ &+ Z^{(n-1)}.\,dx + \alpha_1^{(n-1)}.\,d\mu^{(n-1)})\delta z^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Остальныя части выраженія $dx\delta F$ остаются безъ измѣненія, за исключеніемъ части $X\delta x + Y\delta y$, которая получитъ приращеніе

$$(8)\qquad \begin{aligned} &-(\alpha_n d\xi_n + \alpha^{(1)}{}_{n-1}d\xi^{(1)}{}_{n-1}\,\ldots + \alpha_1{}^{(n-1)}d\xi_1{}^{(n-1)})\,\delta x \\ &-(\alpha_n d\eta^{(1)}{}_{n-1} + \alpha^{(1)}{}_{n-1}d\eta^{(2)}{}_{n-2}\,\ldots + \alpha_1{}^{(n-1)}d\eta^{(n)})\,\delta y. \end{aligned}$$

Означимъ такимъ образомъ измѣненное выраженіе $dx\delta F$ чрезъ

$$dx\delta F_1 - \alpha^{(n)}dx\delta z^{(n)} = 0,$$

разумѣя подъ

$$dx\delta F_1$$

совокупность частей (7) и (8) и лежащихъ между ними неизмѣнившихся частей выраженія $dx\delta F$.

Съ выраженіемъ $dx\delta F_1$ поступаемъ такимъ же образомъ, какъ поступили съ выраженіемъ $dx\delta F$.

Принимаемъ въ уравненіи (3) для r и s всѣ цѣлыя числа, удовлетворяющія условію

$$r + s = n - 2,$$

находимъ слѣдующую систему $n - 1$ равенствъ

$$
(b)\quad
\begin{aligned}
& d\mu_{n-2}\delta z_{n-2} - d\xi_{n-1}\,.\,\delta x - d\eta^{(1)}{}_{n-2}\,.\delta y + dx\delta z_{n-1} \\
& \qquad + dy\delta z^{(1)}{}_{n-1} = 0 \\
& d\mu^{(1)}{}_{n-3}\delta z^{(1)}{}_{n-3} - d\xi^{(1)}{}_{n-2}\,.\,\delta x - d\eta^{(2)}{}_{n-3}\,.\,\delta y + dx\delta z^{(1)}{}_{n-2} \\
& \qquad + dy\delta z^{(2)}{}_{n-3} = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& d\mu_1{}^{(n-3)}\delta z_1{}^{(n-3)} - d\xi_2{}^{(n-3)}\,.\,\delta x - d\eta_1{}^{(n-2)}\,.\,\delta y + dx\delta z_2{}^{(n-3)} \\
& \qquad + dy\delta z_1{}^{(n-2)} = 0 \\
& d\mu^{(n-2)}\delta z^{(n-2)} - d\xi_1{}^{(n-2)}\,.\,\delta x - d\eta^{(n-1)}\,.\,\delta y + dx\delta z_1{}^{(n-2)} \\
& \qquad + dy\delta z^{(n-1)} = 0.
\end{aligned}
$$

Разумѣя подъ r какое нибудь цѣлое число. небольше $n - 1$, положимъ

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
\beta^{(r)}{}_{n-r-1} = & - (-1)^r \left[Z_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^r - Z^{(1)}{}_{n-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{r-1} \right. \\
& \left. + Z^{(2)}{}_{n-3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{r-2} \ldots \mp Z^{(r)}{}_{n-r-1} \right] \\
& - (-1)^r \left[\alpha_n \frac{d\mu_{n-1}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^r - \alpha^{(1)}{}_{n-1}\frac{d\mu^{(1)}{}_{n-2}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{r-1} \right. \\
& \left. \ldots \mp \alpha^{(r)}{}_{n-r}\frac{d\mu^{(r)}{}_{n-r-1}}{dx} \right].
\end{aligned}
$$

Верхніе знаки послѣднихъ членовъ соотвѣтствуютъ нечетному r, а нижніе — четному r, такъ что во всякомъ случаѣ эти члены имѣютъ отрицательные знаки.

Выраженіе

$$\beta^{(r)}_{n-r-1}$$

для всякаго r, небольшаго $n-1$, удовлетворяетъ слѣдующему уравненію

$$(10)\quad \alpha^{(r)}_{n-r} \cdot d\mu^{(r)}_{n-r-1} + \beta^{(r)}_{n-r-1} \cdot dx + \beta^{(r-1)}_{n-r} \cdot dy$$
$$= - Z^{(r)}_{n-r-1} \cdot dx.$$

Въ этомъ не трудно удостовѣриться, вставляя вмѣсто

$$\beta^{(r)}_{n-r-1} \text{ и } \beta^{(r-1)}_{n-r}$$

ихъ выраженія изъ уравненія (9).

Замѣтимъ, что если въ уравненіи (9) или уравненіи (10) примемъ $r = 0$, то находимъ

$$\alpha_n d\mu_{n-1} + \beta_{n-1} \cdot dx = - Z_{n-1} \cdot dx.$$

Помножимъ первое изъ уравненій (b) на β_{n-1}, второе на $\beta^{(1)}_{n-2}$ и т. д., послѣднее на $\beta_1^{(n-2)}$ и приложимъ сумму ихъ къ выраженію

$$dx\delta F_1 ,$$

тогда уничтожатся всѣ члены той части (7) выраженія $dx\delta F_1$, которая зависитъ отъ измѣненій производныхъ $(n-1)$-го порядка, за исключеніемъ только послѣдняго члена, имѣющаго множителемъ $\delta z^{(n-1)}$. Въ самомъ дѣлѣ коеффиціентъ при какой нибудь варіяціи разсматриваемой части, напр. при $\delta z^{(r)}_{n-r-1}$ состоитъ во первыхъ изъ члена

$$Z^{(r)}_{n-r-1} \cdot dx + \alpha^{(r)}_{n-r} \cdot d\mu^{(r)}_{n-r-1} ,$$

принадлежащаго выраженію (7), а потомъ еще изъ двухъ членовъ, происходящихъ отъ уравненій (b), а именно изъ члена

$$\beta^{(r)}{}_{n-r-1} \,.\, dx,$$

происходящаго отъ $(r+1)$-го уравненія системы (b), и изъ члена

$$\beta^{(r-1)}_{n-r} \,.\, dy.$$

происходящаго отъ r-го уравненія той же системы, такъ, что разсматриваемый коэффиціентъ будетъ

$$Z^{(r)}{}_{n-r-1} \,.\, dx + \alpha^{(r)}{}_{n-r} \,.\, d\mu^{(r)}{}_{n-r-1} + \beta^{(r)}{}_{n-r-1} \,.\, dx$$
$$+ \beta^{(r-1)}_{n-r} \,.\, dy.$$

Но вслѣдствіе уравненія (10) это выраженіе обращается въ нуль.

Что касается до коэффиціента при варіяціи $\delta z^{(n-1)}$, то замѣтивъ, что онъ будетъ

$$Z^{(n-1)} \,.\, dx + \alpha_1{}^{(n-1)} \,.\, d\mu^{(n-1)} + \beta_1{}^{(n-2)} \,.\, dy,$$

находимъ его равнымъ

$$-\beta^{(n-1)} \,.\, dx,$$

потому что, принимая въ уравненіи (10) $r = n-1$, получаемъ

$$Z^{(n-1)}dx + \alpha_1{}^{(n-1)}d\mu^{(n-1)} + \beta_1{}^{(n-2)} \,.\, dy = -\beta^{(n-1)} \,.\, dx.$$

Такимъ образомъ, вслѣдствіе сказаннаго преобразованія, часть (6) выраженія $dx\delta\mathrm{F}$ приводится къ

$$-\beta^{(n-1)} \,.\, dx\delta z^{(n-1)},$$

гдѣ

$$\beta^{(n-1)} = -(-1)^{n-1}\left[Z_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} - Z^{(1)}{}_{n-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + Z^{(2)}{}_{n-3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-3} \dots \mp Z^{(n-1)}\right]$$

(11)

$$-(-1)^{n-1}\left[\alpha_n\frac{d\mu_{n-1}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} - \alpha^{(1)}{}_{n-1}\frac{d\mu^{(1)}{}_{n-2}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} \dots \mp \alpha_1{}^{(n-1)}\frac{d\mu^{(n-1)}}{dx}\right].$$

Слѣдующая часть выраженія $dx\delta F_1$, зависящая отъ измѣненій производныхъ $(n-2)$-го порядка, обритится вслѣдствіе того же преобразованія въ

$$\begin{aligned}&(Z_{n-2}\,.\,dx+\beta_{n-1}\,.\,d\mu_{n-2})\,\delta z_{n-2}\\&+(Z^{(1)}{}_{n-3}dx+\beta^{(1)}{}_{n-2}d\mu^{(1)}{}_{n-3})\,\delta z^{(1)}{}_{n-3}\\&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (12).\\&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(Z^{n-2}dx+\beta_1{}^{(n-2)}d\mu^{(n-2)})\,\delta z^{(n-2)}\ldots.\end{aligned}$$

Остальныя части выраженія $dx\delta F_1$ остаются безъ измѣненія, за исключеніемъ части, зависящей отъ δx и δy, которая получитъ новое приращеніе

$$\begin{aligned}&-(\beta_{n-1}d\xi_{n-1}+\beta^{(1)}{}_{n-2}d\xi^{(1)}{}_{n-2}\ldots.+\beta_1{}^{(n-2)}d\xi^{(n-1)})\,\delta x\\&-(\beta_{n-1}d\eta^{(1)}{}_{n-2}+\beta^{(1)}{}_{n-1}d\eta^{(2)}{}_{n-3}\ldots.+\beta_1{}^{(n-2)}d\eta^{(n-1)})\delta y..\ (13).\end{aligned}$$

Означимъ такимъ образомъ измѣненное выраженіе $dx\delta F$ чрезъ

$$dx\delta F_2-\beta^{(n-1)}dx\delta z^{(n-1)}-\alpha^{(n)}dx\delta z^{(n)}=0,$$

разумѣя подъ

$$dx\delta F_2$$

совокупность частей (12) и (13) и лежащихъ между ними не измѣнившихся частей выраженія $dx\delta F_1$.

Съ выраженіемъ $dx\delta F_2$ поступаемъ такимъ же образомъ, какъ поступили съ выраженіемъ $dx\delta F_1$. Принимаемъ въ уравненіи (3) для r и s всѣ цѣлыя числа, удовлетворяющія условію

$$r+s=n-3,$$

и находимъ слѣдующую систему $n-2$ равенствъ:

$$d\mu_{n-3}\delta z_{n-3} - d\xi_{n-2}\delta x - d\eta^{(1)}{}_{n-3}\delta y + dx\delta z_{n-2}$$
$$+ dy\delta z^{(1)}{}_{n-3} = 0$$
$$d\mu^{(1)}{}_{n-4}\delta z^{(1)}{}_{n-4} - d\xi^{(1)}{}_{n-3}\delta x - d\eta^{(2)}{}_{n-4}\delta y + dx\delta z^{(1)}{}_{n-3}$$
$$+ dy\delta z^{(2)}{}_{n-4} = 0$$

. . . .

. . . .

(c)

$$d\mu_1{}^{(n-4)}\delta z^{(n-4)} - d\xi_2{}^{(n-4)}\delta x - d\eta_1{}^{(n-3)}\delta y + dx\delta z_2{}^{(n-4)}$$
$$+ dy\delta z_1{}^{(n-3)} = 0$$
$$d\mu^{(n-3)}\delta z^{(n-3)} - d\xi_1{}^{(n-3)}\delta x - d\eta^{(n-2)}\delta y + dx\delta z_1{}^{(n-3)}$$
$$+ dy\delta z^{(n-2)} = 0.$$

Разумѣя подъ r цѣлое число, небольшее $n-2$, положимъ

$$\gamma^{(r)}{}_{n-r-2} = -(-1)^r\left[Z_{n-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^r - Z^{(1)}{}_{n-3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{r-1}\ldots\right.$$
$$\left.\mp Z^{(r)}{}_{n-r-2}\right]$$

(14)

$$-(-1)^r\left[\beta_{n-1}\frac{d\mu_{n-2}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^r - \beta^{(1)}{}_{n-2}\frac{d\mu^{(1)}{}_{n-3}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{r-1}\right.$$
$$\left.\ldots \mp \beta^{(r)}{}_{n-r-1}\frac{d\mu^r{}_{n-r-2}}{dx}\right];$$

верхніе знаки послѣднихъ членовъ соотвѣтствуютъ нечетному r, а нижніе четному r, такъ что эти члены во всякомъ случаѣ имѣютъ отрицательные знаки.

Выраженіе

$$\gamma^{(r)}{}_{n-r-2}$$

для всякаго r, небольшаго $n-2$, удовлетворяетъ слѣдующему уравненію

$$(15)\quad \beta^{(r)}{}_{n-r-1}\,.\,d\mu^{(r)}{}_{n-r-2} + \gamma^{(r)}{}_{n-r-2}dx + \gamma^{(r-1)}{}_{n-r-1}dy = -Z^{(r)}{}_{n-r-2}.$$

Въ этомъ не трудно удостовѣриться, вставляя вмѣсто

$$\gamma^{(r)}{}_{n-r-2} \text{ и } \gamma^{(r-1)}{}_{n-r-1}$$

ихъ выраженія изъ уравненія (14).

Помножимъ первое изъ уравненій (c) на γ_{n-2}, второе на $\gamma^{(1)}{}_{n-3}$ и т. д., послѣднее на $\gamma_1{}^{(n-3)}$ и приложимъ сумму ихъ къ выраженію

$$dx\delta F_2,$$

тогда уничтожатся всѣ члены той части (12) выраженія $dx\delta F_2$, которая зависитъ отъ измѣненій производныхъ (n—2)-го порядка, за исключеніемъ только послѣдняго члена, имѣющаго множителемъ $\delta z^{(n-2}$. Въ самомъ дѣлѣ коэффиціентъ при какой нибудь варіяціи разсматриваемой части, на пр. при $\delta z^{(r)}{}_{n-r-2}$ состоитъ во первыхъ изъ члена

$$Z^{(r)}{}_{n-r-2}dx + \beta^{(r)}{}_{n-r-1}d\mu^{(r)}{}_{n-r-2},$$

принадлежащаго части (12), а потомъ еще изъ двухъ членовъ, происходящихъ отъ уравненій (c); а именно изъ члена

$$\gamma^{(r)}{}_{n-r-2}dx,$$

происходящаго отъ ($r+1$)-го уравненія системы, и изъ члена

$$\gamma^{(r-1)}{}_{n-r-1},$$

происходящаго отъ r-го уравненія той же системы, такъ что этотъ коэффиціентъ будетъ

$$Z^{(r)}{}_{n-r-2}dx + \beta^{(r)}{}_{n-r-1}d\mu^{(r)}{}_{n-r-2} + \gamma^{(r)}{}_{n-r-2}dx + \gamma^{(r-1)}{}_{n-r-1}\,.\,dy.$$

Но вслѣдствіе уравненія (15) это выраженіе обращается въ нуль.

Что касается до коэффиціента при варіяціи $\delta z^{(n-2)}$, то замѣтимъ, что онъ, выражаясь чрезъ

$$Z^{(n-2)} \,.\, dx + \beta_1{}^{(n-2)} d\mu^{(n-2)} + \gamma_1{}^{(n-3)} \,.\, dy,$$

будетъ равняться

$$-\gamma^{(n-2)} \,.\, dx,$$

потому что, принимая въ уравненіи (15) $r=n-2$, находимъ

$$Z^{(n-2)} dx + \beta_1{}^{(n-2)} d\mu^{(n-2)} + \gamma^{(n-3)} \,.\, dy = -\gamma^{(n-2)} \,.\, dx.$$

Такимъ образомъ вслѣдствіе сказаннаго преобразованія разсматриваемая часть выраженія $dxd\mathrm{F}_2$ приводится къ виду

$$-\gamma^{(n-2)} dx \delta z^{(n-2)},$$

гдѣ

$$\gamma^{(n-2)} = -(-1)^{n-2}\left[Z_{n-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + Z^{(1)}{}_{n-3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-3} \dots \mp Z^{(n-2)}\right]$$

$$\dots\dots (16)$$

$$-(-1)^{n-2}\left[\beta_{n-1}\frac{d\mu_{n-2}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} - \beta^{(1)}{}_{n-2}\frac{d\mu^{(1)}{}_{n-3}}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-3} \dots \mp \beta_1{}^{(n-2)}\frac{d\mu^{(n-2)}}{dx}\right].$$

Очевидно, что слѣдующая часть выраженія $dx\delta_2\mathrm{F}_1$, зависящая отъ измѣненій производныхъ n — 3-го порядка, получитъ соотвѣтственное измѣненіе, остальныя же части остаются безъ измѣненія, за исключеніемъ первой, которая получитъ новое приращеніе

$$-(\gamma_{n-2} d\xi_{n-2} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} d\xi^{(1)}{}_{n-3} \dots + \gamma_1{}^{(n-3)} d\xi_1{}^{(n-3)})\,\delta x$$

$$\dots (17).$$

$$-(\gamma_{n-2} d\eta^{(1)}{}_{n-3} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} d\eta^{(2)}{}_{n-4} \dots + \gamma_1{}^{(n-3)} d\eta^{(n-2)})\,\delta y$$

Разсуждая такимъ образомъ далѣе, можно чрезъ n послѣдовательныхъ преобразованій измѣнить выраженіе $dx\delta F$ такъ, чтобъ оно содержало по одной варіяціи производныхъ каждаго порядка, а именно по варіяціи производной каждаго порядка, имѣющей наибольшій верхній указатель.

Для большей ясности выведемъ еще два послѣднихъ преобразованія.

Положимъ, что совершены $n-2$ послѣдовательныхъ преобразованій, такъ что выраженіе $dx\delta F$ приняло видъ

$$dx\delta F_{n-2}-\rho^{(3)}\delta z^{(3)}-k^{(4)}\delta z^{(4)}\ldots\gamma^{(n-2)}\delta z^{(n-2)}-\beta^{(n-1)}\delta z^{(n-1)}-\alpha^{(n)}\delta z^{(n)},$$

гдѣ δF_{n-2} зависитъ отъ измѣненій производныхъ не выше 2-го порядка.

Принимая въ уравненіи (3) для r и s числа, удовлетворяющія условію

$$r+s=1$$

т. е.

$$r=1 \text{ и } s=0;\ r=0 \text{ и } s=1,$$

находимъ слѣдующія два равенства

$$d\mu_1\delta z_1-d\xi_2 dx-d\eta_1{}^{(1)}dy+dx\delta z_2+dy\delta z_1{}^{(1)}=0$$

$(n-1)\ldots.$

$$d\mu^{(1)}\delta z^{(1)}-d\xi_1{}^{(1)}dx-d\eta^{(2)}dy+dx\delta z_1{}^{(1)}+dy\delta z^{(2)}=0.$$

Пусть будутъ

$$\rho_3\,,\ \rho_2{}^{(1)},\ \rho_1{}^{(2)}$$

множители предшествующей системы равенствъ, такъ что членъ выраженія $dx\delta F_{n-1}$, зависящій отъ измѣненій производныхъ 2-го порядка будетъ

$$\left.\begin{aligned}&(Z_2dx+\rho_3d\mu_2)\delta z_2+(Z_1{}^{(1)}dx+\rho_2{}^{(1)}d\mu_1{}^{(1)})\delta z_1{}^{(1)}\\&+(Z^{(2)}dx+\rho_1{}^{(2)}d\mu^{(2)})\delta z^{(2)}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (18).$$

Положимъ

$$\sigma^{(2)} = -\left[Z_2\left(\frac{dy}{dx}\right) - Z_1^{(1)}\left(\frac{dy}{dx}\right) + Z^{(2)}\right]$$

$$-\left[\rho_3\,\frac{d\mu_2}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \rho_2^{(1)}\,\frac{d\mu_1^{(1)}}{dx}\,\frac{dy}{dx} + \rho_1^{(2)}\frac{d\mu^{(2)}}{dx}\right]$$

$$\sigma_1^{(1)} = Z_2\,\frac{dy}{dx} - Z_1^{(1)} + \rho_3\,\frac{d\mu_2}{dx}\,\frac{dy}{dx} - \rho_2^{(1)}\,\frac{d\mu_1^{(1)}}{dx} \tag{19}$$

$$\sigma_2 = -Z_2 - \rho_3\,\frac{d\mu_2}{dx},$$

и помножимъ первое изъ уравненій $(n-1)$ на σ_2, второе на $\sigma_1^{(1)}$ и приложимъ сумму ихъ къ выраженію $dx\delta F_{n-1}$, тогда первые два члена той части (18) этого выраженія, которая зависитъ отъ измѣненій производныхъ 2-го порядка, уничтожатся, а послѣдній членъ приметъ видъ

$$-\sigma^{(2)}dx\delta z^{(2)},$$

потому что вслѣдствіе уравненій (19)

$$Z_2dx + \rho_3 d\mu_2 = 0$$

$$Z_1^{(1)}dx + \rho_2^{(1)}d\mu_1^{(1)} + \sigma_2 dy + \sigma_1^{(1)}dx = 0$$

$$Z^{(2)}dx + \rho_1^{(2)}d\mu^{(2)} + \sigma_1^{(1)}dy = -\sigma^{(2)}dx\delta z^{(2)}.$$

Слѣдующій за тѣмъ членъ выраженія $dx\delta F_{n-1}$ будетъ

$$(Z_1dx + \sigma_2 d\mu_1)\,\delta z_1 + (Z^{(1)}dx + \sigma_1^{(1)}d\mu^{(1)})\,\delta z^{(1)} \tag{20}$$

и часть этого выраженія, зависящая отъ δx и δy, получитъ новое приращеніе

$$-(\sigma_2 d\xi_2 + \sigma_1^{(1)}d\xi_1^{(1)})\,\delta x - (\sigma_2 d\eta_1^{(1)} + \sigma_1^{(1)}d\eta^{(2)})\,\delta y. \tag{21}$$

Пусть будетъ измѣненное такимъ образомъ выраженіе $dx\delta F$

$$dx\delta F_n - \sigma^{(2)}dx\delta z^{(2)} - \rho^{(3)}dx\delta z^{(3)} \ldots - \beta^{(n-1)}dx\delta z^{(n-1)} - \alpha^{(n)}dx\delta z^{(n)} = 0.$$

Выраженіе

$$dx\delta F_n$$

кромѣ части, зависящей отъ δx и δy и члена (20), содержитъ еще одинъ только членъ

$$Z\delta z.$$

Принявъ наконецъ въ уравненіи (3) $r=0$ и $s=0$, находимъ равенство

$$d\mu\delta z - d\xi_1\delta x - \delta\eta^{(1)}\delta y + dx\delta z_1 + dy\delta z^{(1)} = 0 \ldots . (n).$$

Положивъ

$$\tau^{(1)} = Z_1 \frac{dy}{dx} - Z^{(1)} + \sigma_2 \frac{d\mu_1}{dx}\frac{dy}{dx} - \sigma_1{}^{(1)} \frac{d\mu^{(1)}}{dx}$$

$$\tau_1 = -Z_1 - \sigma_2 \frac{d\mu_1}{dx} \qquad (22)$$

и помноживъ первую часть равенства (n) на τ_1, сложимъ его съ выраженіемъ $dx\delta F_n$, тогда первый членъ выраженія (20) сократится, потому что вслѣдствіе уравненій (22) имѣемъ

$$Z_1 dx + \sigma_2 d\mu_1 + \tau_1 dx = 0,$$

а послѣдній членъ этого выраженія приметъ видъ

$$-\tau^{(1)} dx\delta z^{(1)}, \ldots \ldots \ldots (23)$$

потому что вслѣдствіе тѣхъ же уравненій (22) имѣемъ

$$Z^{(1)}dx + \sigma_1{}^{(1)} d\mu^{(1)} + \tau_1 dy = -\tau^{(1)} dx.$$

Слѣдующій за тѣмъ членъ выраженія $dx\delta F_n$ будетъ

$$(Zdx + \tau_1 d\mu)\delta z,$$

и положивъ

$$(24) \ldots \ldots \ldots \quad Z + \tau_1 \frac{d\mu}{dx} = v,$$

представимъ этотъ членъ въ видѣ

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad v dx\delta z.$$

Часть выраженія $dx\delta F_n$, зависящая отъ δx и δy, получитъ новое приращеніе

$$(26) \quad \ldots\ldots \quad -\tau_1 d\xi_1 \delta x - \tau_1 d\eta^{(1)} \delta y.$$

Соединимъ вмѣстѣ всѣ члены, изъ которыхъ состоитъ выраженіе $dx\delta F$ послѣ упомянутыхъ n послѣдовательныхъ преобразованій. Для этого, обративъ вниманіе на выраженія (8), (13), (17), (21) и (26), положимъ

$$
(27) \quad
\begin{aligned}
Adx = Xdx &- (\alpha_n d\xi_n + \alpha^{(1)}{}_{n-1} d\xi^{(1)}{}_{n-1} \ldots + \alpha_1{}^{(n-1)} d\xi^{(n-1)}) \\
&- (\beta_{n-1} d\xi_{n-1} + \beta^{(1)}{}_{n-2} d\xi^{(1)}{}_{n-2} \ldots + \beta_1{}^{(n-2)} d\xi_1{}^{(n-2)}) \\
&- (\gamma_{n-2} d\xi_{n-2} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} d\xi^{(1)}{}_{n-3} + \ldots + \gamma_1{}^{(n-3)} d\xi_1{}^{(n-3)}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- (\rho_3 d\xi_3 + \rho_2{}^{(1)} d\xi_2{}^{(1)} + \rho_1{}^{(2)} d\xi_1{}^{(2)}) \\
&- (\sigma_2 d\xi_2 + \sigma_1{}^{(1)} d\xi_1{}^{(1)}) - \tau_1 d\xi_1.
\end{aligned}
$$

$$
(28) \quad
\begin{aligned}
Bdx = Ydx &- (\alpha_n d\eta^{(1)}{}_{n-1} + \alpha^{(1)}{}_{n-1} d\eta^{(2)}{}_{n-2} + \ldots + \alpha_1{}^{(n-1)} d\eta^{(n)}) \\
&- (\beta_{n-1} d\eta^{(1)}{}_{n-2} + \beta^{(1)}{}_{n-2} d\eta^{(2)}{}_{n-3} + \ldots + \beta_1{}^{(n-2)} d\eta^{(n-1)}) \\
&- (\gamma_{n-2} d\eta^{(1)}{}_{n-3} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} d\eta^{(2)}{}_{n-3} + \ldots + \gamma_1{}^{(n-3)} d\eta^{(n-2)}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- (\rho_3 d\eta_2{}^{(1)} + \rho_2{}^{(1)} d\eta_1{}^{(2)} + \rho_1{}^{(2)} d\eta^{(3)}) \\
&- (\sigma_2 d\eta_1{}^{(1)} + \sigma_1{}^{(1)} d\eta^{(2)}) - \tau_1 d\eta^{(1}
\end{aligned}
$$

тогда преобразованное выраженіе δF представится въ слѣдующемъ видѣ

$$A\delta x + B\delta y + v\delta z - \tau^{(1)}\delta z^{(1)} - \sigma^{(2)}\delta z^{(2)} - \rho^{(3)}\delta z^{(3)} \dots$$
$$- \gamma^{(n-2)}\delta z^{(n-2)} - \beta^{(n-1)}\delta z^{(n-1)} - \alpha^{(n)}\delta z^{(n)} = 0. \quad (29).$$

II.

Посмотримъ теперь, какія заключенія можно вывести изъ уравненія (29).

Замѣтимъ, что за исключеніемъ коэффиціента $\alpha^{(n)}$ (6), всѣ остальные коэффиціенты

$$\beta^{(n-1)}, \gamma^{(n-2)}, \dots \tau^{(1)}, v, B, A$$

зависятъ отъ произвольныхъ множителей

$$d\mu_{n-1}, d\mu^{(1)}_{n-2} \dots; d\mu_{n-2}, d\mu^{(1)}_{n-3}, \dots$$

какъ это видно изъ выраженій (11), (16), (22), (24), (27) и (28) этихъ коэффиціентовъ. Число этихъ множителей очевидно равняется числу уравненій (a), (b), $(e) \dots (n-1)$, n; а потому это число будетъ

$$n + (n-1) + (n-2) \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Положимъ, что эти множители такъ избраны, что они удовлетворяютъ n уравненіямъ

$$(30) \qquad \begin{aligned} \beta^{(n-1)} &= 0 \\ \gamma^{(n-2)} &= 0 \\ &\dots \\ &\dots \\ \rho^{(3)} &= 0 \\ \sigma^{(2)} &= 0 \\ \tau^{(1)} &= 0 \\ v &= 0. \end{aligned}$$

Этимъ уравненіямъ всегда можно удовлетворить, потому что первое изъ нихъ, по выраженію (11), содержитъ n произвольныхъ множителей

$$d\mu_{n-1},\ d\mu^{(1)}{}_{n-2},\ \ldots.\ d\mu^{(n-1)},$$

второе содержитъ, по выраженію (16), кромѣ этихъ множилей еще $n-1$ новыхъ

$$d\mu_{n-2},\ d\mu^{(1)}{}_{n-3},\ \ldots.\ d\mu^{(n-2)}$$

и т. д. Предпослѣднее уравненіе $\tau^{(1)}=0$ содержитъ, по выраженію (22), два новыхъ множителя

$$d\mu_1 \text{ и } d\mu^{(1)},$$

и наконецъ послѣднее уравненіе $v=0$ содержитъ, по выраженію (24), новый множитель $d\mu$.

Хотя число всѣхъ множителей, равное

$$\frac{n\,(n+1)}{2},$$

превышаетъ число уравненій (30), которое равно n, но лишними множителями нельзя воспользоваться для обращенія въ нули коэффиціентовъ A и B, потому что эти коэффиціенты, какъ мы увидимъ ниже, становятся, вслѣдствіе уравненій (30), независимыми отъ этихъ множителей.

На основаніи уравненій (30), выраженіе (29) принимаетъ слѣдующій видъ

$$\mathrm{A}\delta x+\mathrm{B}\delta y-\alpha^{(n)}\delta z^{(n)}=0\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ (31).$$

Измѣненія, изображенныя знакомъ δ, отличаются отъ дифференціаловъ тѣмъ, что первыя зависятъ отъ измѣненія вида произвольной функціи

$$y=\varphi\,(x,u).$$

Если же предположимъ, что видъ этой функціи неизмѣняется, то варіяціи δ переходятъ въ дифференціалы d. Изъ этого слѣдуетъ, что уравненіе (31), существующее для характеристики δ, должно имѣть мѣсто также тогда, когда въ немъ знакъ δ за́мѣнимъ знакомъ d. Поэтому будемъ имѣть

$$Adx + Bdy - \alpha^{(n)}dz^{(n)} = 0.$$

Помноживъ это уравненіе на

$$\frac{\delta z^{(n)}}{dz^{(n)}}$$

и вычтя изъ уравненія (31), находимъ

$$A\left(\delta x - \frac{dx\delta z^{(n)}}{dz^{(n)}}\right) + B\left(\delta y - \frac{dy\delta z^{(n)}}{dz^{(n)}}\right) = 0.$$

Но такъ какъ

$$dz^n = Z_1^{(n)}dx + Z^{(n+1)}dy$$

$$\delta z^{(n)} = Z_1^{(n)}\delta x + Z^{(n+1)}\delta y,$$

то

$$dz^{(n)}\delta x - dx\delta z^{(n)} = Z^{(n+1)}(\delta x dy - dx\delta y)$$

$$dz^{(n)}\delta y - dy\delta z^{(n)} = -Z_1^{(n)}(\delta x dy - dx\delta y)$$

или

$$\delta x - \frac{\delta x\delta z^{(n)}}{dz^{(n)}} = Z^{(n+1)}\left(\frac{\delta x dy - dx\delta y}{dz^{(n)}}\right)$$

$$\delta y - \frac{dy\delta z^{(n)}}{dz^{(n)}} = -Z_1^{(n)}\left(\frac{\delta x dy - dx\delta y}{dz^{(n)}}\right).$$

Вставляя эти выраженія въ предъидущее уравненіе и сокративъ множитель

$$\frac{\delta x dy - dx\delta y}{\delta z^{(n)}},$$

находимъ

$$AZ^{(n+1)} - BZ_1^{(n)} = 0.$$

Мы предположили, что y есть произвольная функція отъ x и u; отличимъ производныя, взятыя въ этомъ предположеніи, съ помощію знака ( ); тогда имѣемъ

$$\left(\frac{dz^{(n)}}{du}\right)=\frac{dz^{(n)}}{dy}\left(\frac{dy}{du}\right)=Z^{(n+1)}\ \frac{dy}{du}$$

$$\left(\frac{dz^{(n)}}{dx}\right)=\frac{dz^{(n)}}{dx}+\frac{dz^{(n)}}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)=Z_1^{(n)}+Z^{(n+1)}.\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Опредѣливъ изъ этихъ двухъ уравненій производныя

$$Z_1^{(n)} \text{ и } Z^{(n+1)},$$

находимъ

$$Z^{(n+1)}=\frac{\left(\frac{dz^{(n)}}{du}\right)}{\left(\frac{dy}{du}\right)}$$

$$Z_1^{(n)}=\frac{\left(\frac{dz^{(n)}}{dx}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)-\left(\frac{dz^{(n)}}{du}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{du}\right)}.$$

Вставляя эти выраженія въ предыдущее уравненіе и опустивъ общій знаменатель

$$\left(\frac{dy}{du}\right),$$

получаемъ

$$A\left(\frac{dz^{(n)}}{du}\right)-B\left[\left(\frac{dz^{(n)}}{dx}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)-\left(\frac{dz^{(n)}}{du}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=0$$

или

$$\left[A+B\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\left(\frac{dz^{(n)}}{du}\right)-B\left(\frac{dz^{(n)}}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dy}{du}\right)=0.$$

Такъ какъ y совершенно произвольная функція отъ x и u, то выберемъ эту функцію такъ, чтобы она удовлетворяла уравненію

$$A+B\left(\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Вслѣдствіе этого находимъ, по предъидущему уравненію,

$$B = 0,$$

а потому также будемъ имѣть $A = 0$.

Изъ двухъ уравненій

$$A = 0 \text{ и } B = 0$$

по уравненію (31), слѣдуетъ

$$\alpha^{(n)} = 0.$$

Мы замѣтили, что выраженіе $\alpha^{(n)}$ (6) независитъ отъ множителей $d\mu$. Можно показать, что вслѣдствіе уравненій (30), выраженія A и B становятся также независимыми отъ этихъ множителей.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣтивъ, что по уравненію (2)

$$d\xi^{(s)}{}_{r+1} = z^{(s)}{}_{r+1} d\mu_r{}^{(s)} + dz^{(s)}{}_{r+1}$$

представимъ выраженіе (27) въ слѣдующемъ видѣ.

$$\begin{aligned}
&A dx = X dx \\
&- (\alpha_n z_n d\mu_{n-1} + \alpha^{(1)}{}_{n-1} z^{(1)}{}_{n-1} d\mu^{(1)}{}_{n-2} \ldots + \alpha_1{}^{(n-1)} z_1{}^{(n-1)} d\mu^{(n-1)}) \\
&- (\alpha_n dz_n + \alpha^{(1)}{}_{n-1} dz^{(1)}{}_{n-1} \ldots + \alpha_1{}^{(n-1)} dz_1{}^{(n-1)}) \\
&- (\beta_{n-1} z_{n-1} d\mu_{n-2} + \beta^{(1)}{}_{n-2} z^{(1)}{}_{n-2} d\mu^{(1)}{}_{n-3} \ldots \\
&+ \beta_1{}^{(n-2)} z_1{}^{(n-2)} d\mu^{(n-2)}) \\
&- (\beta_{n-1} dz_{n-1} + \beta^{(1)}{}_{n-2} dz^{(1)}{}_{n-2} \ldots + \beta_1{}^{(n-2)} dz_1{}^{(n-2)}) \\
&- (\gamma_{n-2} z_{n-2} d\mu_{n-3} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} z^{(1)}{}_{n-3} d\mu_{n-4} \ldots \\
&+ \gamma_1{}^{(n-3)} . z_1{}^{(n-3)} . d\mu^{(n-3)}) \\
&- (\gamma_{n-2} dz_{n-2} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} dz^{(1)}{}_{n-3} \ldots + \gamma_1{}^{(n-3)} dz_1{}^{n-3)}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- (\rho_3 z_3 d\mu_2 + \rho_2{}^{(1)} z_2{}^{(1)} d\mu_1{}^{(1)} + \rho_1{}^{(2)} z_1{}^{(2)} d\mu^{(2)}) \\
&- (\rho_3 dz_3 + \rho_2{}^{(1)} dz_2{}^{(1)} + \rho_1{}^{(2)} dz_1{}^{(2)}) \\
&- (\sigma_2 z_2 d\mu_1 + \sigma_1{}^{(1)} z_1{}^{(1)} d\mu^{(1)}) - (\sigma_2 dz_2 + \sigma_1{}^{(1)} dz_1{}^{(1)}) - \tau_1 z_1 d\mu_1 - \tau_1 dz_1.
\end{aligned}$$

Но первый членъ каждой строки со вторымъ членомъ слѣдующей строки даетъ выраженіе, независящее отъ множителей $d\mu$.

Такъ замѣтивъ, что

$$
\begin{aligned}
dz_{n-1} &= z_n dx + z^{(1)}_{n-1} dy \\
dz^{(1)}_{n-2} &= z^{(1)}_{n-1} dx + z^{(2)}_{n-2} dy \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
dz_1^{(n-2)} &= z_2^{(n-2)} dx + z_1^{(n-1)} dy
\end{aligned}
$$

находимъ

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n z_n d\mu_{n-1} + \alpha^{(1)}_{n-1} z^{(1)}_{n-1} d\mu^{(1)}_{n-2} \dots + \alpha_1^{(n-1)} z_1^{(n-1)} d\mu^{(n-1)} \\
&\quad + \beta_{n-1} dz_{n-1} + \beta^{(1)}_{n-2} dz^{(1)}_{n-2} + \dots + \beta_1^{(n-2)} dz_1^{(n-2)} \\
&\quad = z_n (\alpha_n d\mu_{n-1} + \beta_{n-1} dx) \\
&\quad + z^{(1)}_{n-1} (\alpha^{(1)}_{n-1} d\mu^{(1)}_{n-2} + \beta^{(1)}_{n-2} dx + \beta_{n-1} \cdot dy) \\
&\quad + z^{(2)}_{n-2} (\alpha^{(2)}_{n-2} d\mu^{(2)}_{n-3} + \beta^{(2)}_{n-3} dx + \beta^{(1)}_{n-2} dy) \dots \\
&\quad + z_1^{(n-1)} (\alpha_1^{(n-1)} d\mu^{(n-1)} + \beta_1^{(n-2)} dy).
\end{aligned}
$$

Но вслѣдствіе уравненія (10) и уравненія

$$\beta^{(n-1)} = 0$$

это выраженіе приводится къ

$$
\begin{aligned}
-\,(Z_{n-1} \cdot z_n + Z^{(1)}_{n-2} z^{(1)}_{n-1} + Z^{(2)}_{n-3} z^{(2)}_{n-2} + \dots \\
+ Z^{(n-1)} z_1^{(n-1)})\, dx.
\end{aligned}
$$

Равнымъ образомъ замѣтивъ, что

$$
\begin{aligned}
dz_{n-2} &= z_{n-1} dx + z^{(1)}_{n-2} dy \\
dz^{(1)}_{n-3} &= z^{(1)}_{n-2} dx + z^{(2)}_{n-3} dy \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
dz_1^{(n-3)} &= z_2^{(n-3)} dx + z_1^{(n-2)} dy
\end{aligned}
$$

находимъ

$$\beta_{n-1}z_{n-1}d\mu_{n-2}+\beta^{(1)}{}_{n-2}z^{(1)}{}_{n-2}d\mu^{(1)}{}_{n-3}\ldots+\beta_1{}^{(n-2)}z_1{}^{(n-2)}d\mu^{(n-1)}$$
$$+\gamma_{n-2}dz_{n-2}+\gamma^{(1)}{}_{n-3}dz^{(1)}{}_{n-3}+\ldots+\gamma_1{}^{(n-3)}dz_1{}^{(n-3)}$$
$$=z_{n-1}(\beta_{n-1}d\mu_{n-2}+\gamma_{n-2}dx)$$
$$+z^{(1)}{}_{n-2}(\beta^{(1)}{}_{n-2}d\mu^{(1)}{}_{n-3}+\gamma^{(1)}{}_{n-3}dx+\gamma_{n-2}dy)$$
$$+z^{(2)}{}_{n-3}(\beta^{(2)}{}_{n-3}d\mu^{(2)}{}_{n-4}+\gamma^{(2)}{}_{n-4}dx+\gamma^{(1)}{}_{n-3}dy)\ldots$$
$$+z_1{}^{(n-2)}(\beta_1{}^{n-2}d\mu^{n-2}+\gamma_1{}^{(n-3)}dy).$$

Но вслѣдствіе уравненія (15) и уравненія

$$\gamma^{(n-2)}=0.$$

Это выраженіе приводится къ

$$-(Z_{n-2}\,.\,z_{n-1}+Z^{(1)}{}_{n-3}\,.\,z^{(1)}{}_{n-2}+Z^{(2)}{}_{n-4}\,.\,z^{(2)}{}_{n-3}+\ldots$$
$$+Z^{(n-2)}\,.\,z_1{}^{(n-2)})\,dx$$

и т. д.

Замѣтивъ, что

$$dz_2=z_3dx+z_2{}^{(1)}dy$$
$$dz_1{}^{(1)}=z_2{}^{(1)}dx+z_1{}^{(2)}dy$$

находимъ

$$\rho_3z_3d\mu_2+\rho_2{}^{(1)}z_2{}^{(1)}d\mu_1{}^{(1)}+\rho_1{}^{(2)}z_1{}^{(2)}d\mu^{(2)}+\sigma_2dz_2+\sigma_1{}^{(1)}dz_1{}^{(1)}$$
$$=z_3(\rho_3d\mu_2+\sigma_2dx)+z_2{}^{(1)}(\rho_2{}^{(1)}d\mu_1{}^{(1)}+\sigma_1{}^{(1)}dx+\sigma_2dy)$$
$$+z_1{}^{(2)}(\rho_1{}^{(2)}d\mu^{(2)}+\sigma_1{}^{(1)}dy).$$

Но вслѣдствіе уравненія (19) и уравненія

$$\sigma^{(2)}=0,$$

это выраженіе приводится къ

$$-(Z_2z_3+Z_1{}^{(1)}z_2{}^{(1)}+Z^{(2)}\,.\,z_1{}^{(2)})\,dx.$$

Наконецъ замѣтивъ, что

$$dz_1 = z_2 dx + z_1^{(1)} dy,$$

имѣемъ

$$\sigma_2 z_2 d\mu_1 + \sigma_1^{(1)} z_1^{(1)} d\mu^{(1)} + \tau_1 dz_1 = z_2 (\sigma_2 d\mu_1 + \tau_1 dx)$$
$$+ z_1^{(1)} (\sigma_1^{(1)} \delta\mu^{(1)} + \tau_1 dy).$$

Но вслѣдствіе уравненія (22) и уравненія

$$\tau^{(1)} = 0$$

это выраженіе приводится къ

$$-(Z_1 z_2 + Z^{(1)} . z_1^{(1)})\, dx.$$

Что касается до послѣдняго члена

$$\tau_1 z_1 d\mu_1,$$

то вслѣдствіе уравненія (24) и уравненія

$$v = 0$$

онъ приводится къ

$$-Zz_1 dx.$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$A dx = [X + Zz_1 + (Z_1 z_2 + Z^{(1)} z_1^{(1)}) + \dots$$
$$+ (Z_{n-1} z_n + Z^{(1)}_{n-2} z^{(1)}_{n-1} \dots + Z^{(n-1)} z_1^{(n-1)})]\, dx$$
$$-(\alpha_n dz_n + \alpha^{(1)}_{n-1} dz^{(1)}_{n-1} + \dots + \alpha_1^{(n-1)} dz_1^{(n-1)})$$

Означимъ чрезъ X_1 полную производную выраженія F относительно x въ томъ предположеніи, что производныя z n-го порядка не измѣняются, такъ что

$$X_1 = X + Zz_1 + (Z_1 z_2 + Z^{(1)} z_1^{(1)}) + \dots$$
$$+ (Z_{n-1} z_n + Z^{(1)}_{n-2} z^{(1)}_{n-1} + \dots + Z^{(n-1)} z_1^{(n-1)})$$

тогда

$$A dx = X_1 dx - (\alpha_n dz_n + \alpha^{(1)}{}_{n-1} dz^{(1)}{}_{n-1} + \ldots + \alpha_1{}^{(n-1)} dz_1{}^{(n-1)}) (32).$$

Подобнымъ образомъ можно обнаружить, что выраженіе **B**, вслѣдствіе уравненій (30), становится независимымъ отъ множителей $d\mu$. Для этого замѣтивъ, что по уравненію (2)

$$d\eta_r{}^{(s+1)} = z_r{}^{(s+1)} d\mu_r{}^{(s)} + dz_r{}^{(s+1)},$$

находимъ

$$\begin{aligned}
B dx = Y dx - \\
&- (\alpha_n z^{(1)}{}_{n-1} d\mu_{n-1} + \alpha^{(1)}{}_{n-1} z^{(2)}{}_{n-2} d\mu^{(1)}{}_{n-2} + \ldots \\
&+ \alpha_1{}^{(n-1)} z^{(n)} d\mu^{(n-1)}) \\
&- (\alpha_n dz^{(1)}{}_{n-1} + \alpha^{(1)}{}_{n-1} dz^{(2)}{}_{n-2} \ldots + \alpha_1{}^{(n-1)} dz^{(n)}) \\
&- (\beta_{n-1} z^{(1)}{}_{n-2} d\mu_{n-2} + \beta^{(1)}{}_{n-2} z^{(2)}{}_{n-3} d\mu^{(1)}{}_{n-3} + \ldots \\
&+ \beta_1{}^{(n-2)} z^{(n-1)} d\mu^{(n-2)}) \\
&- (\beta_{n-1} dz^{(1)}{}_{n-2} + \beta^{(1)}{}_{n-2} dz^{(2)}{}_{n-3} + \ldots + \beta_1{}^{(n-2)} dz^{(n-1)}) \\
&- (\gamma_{n-2} z^{(1)}{}_{n-3} d\mu_{n-3} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} z^{(2)}{}_{n-4} d\mu^{(1)}{}_{n-4} \ldots \\
&+ \gamma_1{}^{(n-3)} z^{(n-2)} d\mu^{(n-3)}) \\
&- (\gamma_{n-2} dz^{(1)}{}_{n-3} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} dz^{(2)}{}_{n-4} \ldots + \gamma_1{}^{(n-3)} dz^{(n-2)}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- (\rho_3 z_2{}^{(1)} d\mu_2 + \rho_2{}^{(1)} z_1{}^{(2)} d\mu_1{}^{(1)} + \rho_1{}^{(2)} z^{(3)} d\mu^{(2)}) \\
&- (\rho_3 dz_2{}^{(1)} + \rho_2{}^{(1)} dz_1{}^{(2)} + \rho_1{}^{(2)} dz^{(3)}) \\
&- (\sigma_2 z_1{}^{(1)} d\mu_1 + \sigma_1{}^{(1)} z^{(2)} d\mu^{(1)}) - (\sigma_2 dz_1{}^{(1)} + \sigma_1{}^{(1)} dz^{(2)}) \\
&- \tau_1 z^{(1)} d\mu - \tau_1 dz^{(1)}.
\end{aligned}$$

Но первый членъ каждой строки со вторымъ членомъ слѣдующей строки даетъ выраженіе, независящее отъ множителей $d\mu$. Въ самомъ дѣлѣ

$$\alpha_n z^{(1)}{}_{n-1} d\mu_{n-1} + \alpha^{(1)}{}_{n-1} z^{(2)}{}_{n-2} d\mu^{(1)}{}_{n-2} + \ldots + \alpha_1{}^{(n-1)} z^{(n)} d\mu^{n-1}$$
$$+ \beta_{n-1} dz^{(1)}{}_{n-2} + \beta^{(1)}{}_{n-2} dz^{(2)}{}_{n-3} + \ldots + \beta_1{}^{(n-2)} dz^{(n-1)}$$
$$= z^{(1)}{}_{n-1} (\alpha_n d\mu_{n-1} + \beta_{n-1} dx)$$
$$+ z^{(2)}{}_{n-2} (\alpha^{(1)}{}_{n-1} d\mu^{(1)}{}_{n-2} + \beta^{(1)}{}_{n-2} dx + \beta_{n-1} dy)$$
$$+ z^{(3)}{}_{n-3} (\alpha^{(2)}{}_{n-2} d\mu^{(2)}{}_{n-3} + \beta^{(2)}{}_{n-3} dx + \beta^{(1)}{}_{n-2} dy) \ldots .$$
$$+ z^{(n)} (\alpha_1{}^{(n-1)} d\mu^{(n-1)} + \beta_1{}^{(n-2)} dy).$$

Но вслѣдствіе уравненія (10) и уравненія $\beta^{(n-1)} = 0$, это выраженіе приводится къ

$$-(Z_{n-1} z^{(1)}{}_{n-1} + Z^{(1)}{}_{n-2} \,.\, z^{(2)}{}_{n-2} + \ldots\; Z^{(n-1)} z^n)\, dx.$$

Подобнымъ образомъ находимъ вслѣдствіе уравненія (5)

$$\beta_{n-1} z^{(1)}{}_{n-2} d\mu_{n-2} + \beta^{(1)}{}_{n-2} z^{(2)}{}_{n-3} d\mu^{(1)}{}_{n-3} + \ldots$$
$$+ \beta_1{}^{(n-2)} z^{(n-1)} d\mu^{(n-2)}$$
$$+ \gamma_{n-2} dz^{(1)}{}_{n-3} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} dz^{(2)}{}_{n-4} + \ldots + \gamma_1{}^{(n-3)} dz^{(n-3)}$$
$$= z^{(1)}{}_{n-2} (\beta_{n-1} d\mu_{n-2} + \gamma_{n-2} dx)$$
$$+ z^{(2)}{}_{n-3} (\beta^{(1)}{}_{n-2} d\mu^{(1)}{}_{n-3} + \gamma^{(1)}{}_{n-3} dx + \gamma_{n-2} dy) + \ldots .$$
$$+ z^{(n-1)} (\beta_1{}^{(n-3)} d\mu^{(n-2)} + \gamma_1{}^{(n-3)} dy)$$
$$= -\,[Z_{n-2} z^{(1)}{}_{n-2} + Z^{(1)}{}_{n-3} z^{(2)}{}_{n-3} + \ldots + Z^{(n-2)} z^{(n-1)}]\, dx$$

и т. д.

Наконецъ вслѣдствіе уравненій (19)

$$\sigma_2 z_1{}^{(1)} d\mu_1 + \sigma_1{}^{(1)} z^{(2)} d\mu^{(1)} + \tau_1 dz^{(1)} = z_1{}^{(1)} (\sigma_2 d\mu_1 + \tau_1 dx)$$
$$+ z^{(2)} (\sigma_1{}^{(1)} d\mu^{(1)} + \tau_1 dy) = -\,[Z_1 z_1{}^{(1)} + Z^{(1)} z^{(2)}]\, dx.$$

Что касается до послѣдняго члена

$$\tau_1 z^{(1)} d\mu,$$

то онъ вслѣдствіе уравненія (24) и уравненія $v = 0$ приводится къ

$$-Zz^{(1)}dx.$$

Такимъ образомъ находимъ

$$\begin{aligned} Bdx = [Y + Zz^{(1)} + (Z_1 z_1^{(1)} + Z^{(1)}z^{(2)}) \ldots . \\ + (Z_{n-1}z^{(1)}_{n-1} + Z^{(1)}_{n-2}z^{(2)}_{n-2} \ldots . + Z^{(n-1)}z^{(n)})] \\ -(\alpha_n dz^{(1)}_{n-1} + \alpha^{(1)}_{n-1}dz^{(2)}_{n-2} + \ldots . + \alpha_1^{(n-1)}dz^{(n)}). \end{aligned}$$

Означимъ чрезъ Y полную производную выраженія F относительно y въ томъ предположеніи, что производныя z n-го порядка не измѣняются, такъ что

$$\begin{aligned} Y_1 = Y + Zz^{(1)} + (Z_1 z_1^{(1)} + Z^{(1)}z^{(2)}) + \ldots . \\ + (Z_{n-1}z^{(1)}_{n-1} + Z^{(1)}_{n-2}z^{(2)}_{n-2} \ldots . + Z^{(n-1)}z^{(n)}) \end{aligned}$$

тогда

$$(33)\quad Bdx = Y_1 dx - (\alpha_n dz^{(1)}_{n-1} + \alpha^{(1)}_{n-1}dz^{(2)}_{n-2} \ldots + \alpha_1^{(n-1)}dz^{(n)}).$$

Такимъ образомъ три уравненія

$$\alpha^{(n)} = 0 \; ; A = 0 \; ; B = 0$$

не содержатъ множителей $d\mu$, и представятся въ слѣдующемъ видѣ

$$(\mathrm{I}).\quad Z_n\left(\frac{dy}{dx}\right)^n - Z^{(1)}_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Z^{(2)}_{n-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} \ldots \mp Z^{(n)} = 0$$

$$(\mathrm{II}).\quad X_1 dx - (\alpha_n dz_n + \alpha^{(1)}_{n-1}dz^{(1)}_{n-1} \ldots + \alpha_1^{(n-1)}dz_1^{(n-1)}) = 0$$

$$(\mathrm{III}).\quad Y_1 dx - (\alpha_n dz^{(1)}_{n-1} + \alpha^{(1)}_{n-1}dz^{(2)}_{n-2} + \ldots + \alpha_1^{(n-1)}dz^{(n)}) = 0.$$

Не трудно обнаружить, что предъидущія три уравненія (I), (II) и (III) содержатъ въ себѣ данное уравненіе

$$F = 0,$$

такъ что каждое изъ нихъ можно разсматривать какъ слѣдствіе двухъ другихъ уравненій вмѣстѣ съ уравненіемъ $dF = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, помножимъ уравненіе (I) на

$$(-1)^n dz^{(n)}$$

уравненіе (III) на

$$\frac{dy}{dx}$$

и составимъ сумму всѣхъ трехъ уравненій, замѣтивъ, что первая часть уравненія (1) умноженная на $(-1)^n$ будетъ $-\alpha^{(n)}$, находимъ такимъ образомъ

$$X_1 dx + Y_1 dy - \alpha_n dz_n - \left(\alpha^{(1)}{}_{n-1} + \alpha_n \frac{dy}{dx}\right) dz^{(1)}{}_{n-1}$$

$$-\left(\alpha^{(2)}{}_{n-2} + \alpha^{(1)}{}_{n-1} \frac{dy}{dx}\right) dz^{(2)}{}_{n-2} \ldots - \left(\alpha^{(n)} + \alpha_1{}^{(n-1)} \frac{dy}{dx}\right) dz^{(n)} = 0. \tag{34}$$

Но

$$X_1 dx + Y_1 dy = X dx + Y dy + Z(z_1 dx + z^{(1)} dy) + Z_1 (z_2 dx + z_1{}^{(1)} dy)$$
$$+ Z^{(1)}(z_1{}^{(1)} dx + z^{(2)} dy) \ldots + Z^{(n-1)}(z_1{}^{(n-1)} dx + z^{(n)} dy)$$
$$= X dx + Y dy + Z dz + Z_1 dz_1 + Z^{(1)} dz^{(1)} \ldots + Z^{(n-1)} dz^{(n-1)}$$

т. е. $X_1 dx + Y_1 dy$ представляетъ полное измѣненіе выраженія F въ предположеніи, что производныя z n-го порядка не измѣняются; а по уравненіямъ (5) имѣемъ

$$-\left[\alpha_n dz_n + \left(\alpha^{(1)}{}_{n-1} + \alpha_n \frac{dy}{dx}\right) dz^{(1)}{}_{n-1} \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\alpha^{(n)} + \alpha_1{}^{(n-1)} \frac{dy}{dx}\right) dz^{(n)}\right]$$
$$= Z_n dz_n + Z^{(1)}{}_{n-1} dz^{(1)}{}_{n-1} + \ldots + Z^{(n)} dz^{(n)}.$$

Отсюда заключаемъ, что выраженіе (34) тождественно съ выраженіемъ $dF = 0$.

Къ тремъ уравненіямъ (I) (II) и (III) присоединяемъ еще уравненія

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
dz &= z_1 dx + z^{(1)} dy \\
dz_1 &= z_2 dx + z_1^{(1)} dy \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots \\
dz^{(n-1)} &= z_1^{(n-1)} dx + z^{(n)} dy
\end{aligned}
$$

число которыхъ равняется

$$1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

такъ что число всѣхъ уравненій будетъ

$$3 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 6}{2}.$$

Въ этихъ уравненіяхъ y, z и всѣ производныя z должно разсматривать какъ функціи отъ x и u, но какъ эти уравненія явно не содержатъ u, то ихъ можно считать за дифференціальныя уравненія, въ которыхъ y, z и производныя z будутъ искомыя функціи отъ x, съ тѣмъ, чтобы принять произвольныя постоянныя интеграціи за произвольныя функціи u. Такимъ образомъ искомыя функціи будутъ

$$y,\ z,\ z_1,\ z^{(1)}\ \dots\ z^{(n)},$$

а какъ число производныхъ z равняется

$$2 + 3 + 4 \dots + (n+1) = \frac{n(n+3)}{2}$$

то число этихъ количествъ будетъ

$$2 + \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 4}{2}.$$

Очевидно, что число искомыхъ функцій превышаетъ число уравненій на

$$\frac{n^2 + 3n + 4}{2} - \frac{n^2 + n + 6}{2} = n - 1.$$

Если возможно интегрировать систему дифференціальныхъ уравненій (I), (II) (III) и (35), то исключивъ между интегралами ихъ высшія производныя z, найдемъ соотношеніе между x, y, z и производными z, которыхъ высшій порядокъ будетъ меньше n. Такимъ образомъ получится уравненіе также съ частными производными, котораго порядокъ будетъ ниже даннаго уравненія.

Что касается до уравненій (30), полученныхъ вмѣстѣ съ уравненіями (I), (II) и (III), то они, содержа неопредѣленныя количества $d\mu$, не могутъ способствовать къ нахожденію интеграла даннаго уравненія $F = 0$, но они опредѣляютъ условія, при которыхъ уравненія (I), (II) и (III) возможны; эти уравненія тогда только могутъ быть допущены, когда существуетъ система множителей $d\mu$, удовлетворяющихъ уравненіямъ (30).

III.

Приложимъ общіе выводы къ уравненіямъ съ частными производными перваго и втораго порядковъ.

Положимъ, что уравненіе

$$F = 0$$

содержитъ x, y, z и первыя производныя z. Пусть будутъ

$$p = \frac{dz}{dx}$$

$$q = \frac{dz}{dy}$$

и означимъ полный дифференціалъ dF чрезъ

$$Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq = 0.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ высшій порядокъ производныхъ $n = 1$, и согласно съ принятымъ нами способомъ обозначенія

$$P = Z_1 \,;\; Q = Z^{(1)}.$$

Всѣ выраженія Z съ указателями, превышающими единицу, должны быть приняты за нули, а потому уравненіе (1) приводится къ

$$P\frac{dy}{dx} - Q = 0.$$

Далѣе X_1 и Y_1 означаютъ полныя производныя отъ F относительно x и y въ предположеніи, что высшія производныя z не измѣняются, а потому

$$X_1 = X + Zp$$
$$Y_1 = Y + Zq$$

замѣтивъ при томъ, что вслѣдствіе уравненія (4)

$$\alpha_1 = -Z_1 = -P$$

$$\alpha^{(1)} = Z_1\frac{dy}{dx} - Z^{(1)} = P\frac{dy}{dx} - Q = 0$$

находимъ, что уравненія (II) и (III) принимаютъ слѣдующій видъ

$$(X + Zp)\,dx + Pdp = 0$$
$$(Y + Zq)\,dx + Pdq = 0.$$

Система уравненій (35) приводится въ разсматриваемомъ случаѣ къ одному уравненію

$$dz = pdx + qdy,$$

которое, вслѣдствіе уравненія

$$P\frac{dy}{dx} - Q = 0,$$

принимаетъ слѣдующій видъ

$$dz = \frac{(pP + qQ)\,.\,dx}{P}.$$

Такимъ образомъ получаемъ извѣстную систему дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{pP+qQ}=\frac{-dp}{X+Zp}=\frac{-dq}{Y+Zq},$$

къ интеграціи которыхъ приводится интеграція уравненій съ частными производными перваго порядка.

Уравненія (30), опредѣляющія условія возможности предъидущихъ дифференціальныхъ уравненій, приводятся въ разсматриваемомъ случаѣ къ одному уравненію

$$\beta=0.$$

Но, принимая въ уравненіи (9) $r=0$, находимъ

$$\beta=-Z-\alpha_1\frac{d\mu}{dx}=-Z+P\frac{d\mu}{dx};$$

а потому предъидущее уравненіе даетъ

$$P\frac{d\mu}{dx}=Z$$

или

$$\mu=\int\frac{Z}{P}dx.$$

Вслѣдствіе же уравненія (1) будемъ имѣть

$$lym=\int\frac{Z}{P}dx.$$

Отсюда заключаемъ, что когда интегралъ

$$\int\frac{Z}{P}dx$$

не имѣетъ конечной или опредѣленной величины, то предъидущая система дифференціальныхъ уравненій не представляетъ рѣшенія даннаго уравненія съ частными дифференціалами.

Положимъ, что уравненіе

$$F = 0$$

содержитъ x, y, z, первыя и вторыя производныя отъ z. Пусть будутъ

$$\frac{dz}{dx} = p; \frac{dz}{dy} = q$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r; \frac{d^2z}{dxdy} = s; \frac{d^2z}{dy^2} = t.$$

и означимъ полный дифференціалъ dF чрезъ

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz + \mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \mathrm{S}ds + \mathrm{T}dt = 0.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ $n = 2$, и согласно съ принятымъ нами способомъ обозначенія

$$\mathrm{Z}_1 = \mathrm{P}\ ;\ \mathrm{Z}^{(1)} = \mathrm{Q}\ ;\ \mathrm{Z}_2 = \mathrm{R}\ ;\ \mathrm{Z}_1{}^{(1)} = \mathrm{S}\ ;\ \mathrm{Z}^{(2)} = \mathrm{T}.$$

всѣ другія выраженія Z съ указателями превышающими 2, должно принять за нули. Вслѣдствіе этого уравненіе (I) приводится къ слѣдующему

$$\mathrm{R}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \mathrm{S}\frac{dy}{dx} + \mathrm{T} = 0. \tag{36}$$

Далѣе, такъ какъ X_1 и Y_1 означаютъ частныя производныя F относительно x и y въ предположеніи, что высшія производныя z не измѣняются, то

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{X} + \mathrm{Z}p + \mathrm{P}r + \mathrm{Q}s$$
$$\mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y} + \mathrm{Z}q + \mathrm{P}s + \mathrm{Q}t.$$

замѣтивъ при томъ, что вслѣдствіе уравненія (4)

$$\alpha_2 = -\mathrm{Z}_2 = -\mathrm{R}$$

$$\alpha_1{}^{(1)} = \mathrm{Z}_2\frac{dy}{dx} - \mathrm{Z}_1{}^{(1)} = \mathrm{R}\frac{dy}{dx} - \mathrm{S}$$

а какъ на основаніи предъидущаго уравненія

$$R\frac{dy}{dx} - S = -T\frac{dx}{dy}$$

то

$$\alpha_1^{(1)} = -T\frac{dx}{dy}.$$

Отсюда заключаемъ, что уравненія (II) и (III) принимаютъ слѣдующій видъ

$$X_1 dx + Rdr + T\frac{dx}{dy}ds = 0$$

$$Y_1 dx + Rds + T\frac{dx}{dy}dt = 0$$

или умноживъ на dy, находимъ

$$\left.\begin{aligned} X_1 dxdy + Rdrdy + Tdsdx &= 0 \\ Y_1 dxdy + Rdsdy + Tdtdx &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Система уравненій (35) приводится въ разсматриваемомъ случаѣ къ слѣдующимъ тремъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ dp &= rdx + sdy \\ dq &= sdx + tdy. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Такимъ образомъ имѣемъ шесть дифференціальныхъ уравненій (36), (37) и (38), содержащихъ 7 неизвѣстныхъ функцій

$$y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s \text{ и } t.$$

Если интеграція этой системы дифференціальныхъ уравненій возможна, то ею опредѣляется также интегралъ даннаго уравненія $F = 0$ съ частными производными.

Уравненія (30), опредѣляющія условія возможности дифференціальныхъ уравненій (36) и (37), приводятся въ разсматриваемомъ случаѣ къ двумъ уравненіямъ

$$\beta^{(1)} = 0\ ;\ \gamma = 0.$$

Принимая $r = 1$ въ уравненіи (9), находимъ

$$\beta^{(1)} = Z_1 \frac{dy}{dx} - Z^{(1)} + \alpha_2 \frac{d\mu_1}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} - \alpha_1{}^{(1)} \frac{d\mu^{(1)}}{dx}$$

$$= P \frac{dy}{dx} - Q - \frac{dy}{dx} R \frac{d\mu_1}{dx} + T \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d\mu^{(1)}}{dx}$$

а потому первое изъ двухъ предъидущихъ уравненій будетъ

$$R \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\mu_1}{dx} - T \frac{d\mu^{(1)}}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = P \frac{dy}{dx} - Q.$$

Принимая $r = 0$ въ уравненіи (14), находимъ

$$\gamma = - Z - \beta_1 \frac{d\mu}{dx}.$$

Но изъ уравненія (9) получаемъ

$$\beta_1 = - Z_1 - \alpha_2 \frac{d\mu_1}{dx} = - P + R \frac{d\mu_1}{dx}$$

слѣдовательно

$$\gamma = - Z + P \frac{d\mu}{dx} - R \frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{d\mu_1}{dx}.$$

Вслѣдствіе этого второе изъ двухъ предъидущихъ уравненій будетъ

$$R d\mu d\mu_1 - P d\mu dx + Z dx^2 = 0.$$

Съ помощію этого уравненія можно представить первое, по исключеніи изъ него количества P, въ слѣдующемъ видѣ

$$T d\mu d\mu^{(1)} - Q d\mu dx + Z dy^2 = 0.$$

Положимъ для примѣра, что данное уравненіе съ частными дифференціалами втораго порядка, есть слѣдующее

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0.$$

Уравненія (36) и (37) въ этомъ случаѣ будутъ

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$(2xr + 2ys)\,dydx + x^2 drdy + y^2 dsdx = 0$$

$$(2xs + 2yt)\,dydx + x^2 dsdy + y^2 dtdx = 0.$$

Изъ перваго уравненія находимъ

$$ydx - xdy = 0$$

или

$$y = \alpha x$$

гдѣ α произвольная функція отъ u.

Исключивъ съ помощію этого соотношенія y изъ третьяго уравненія, находимъ

$$x^2\frac{ds}{dx} + 2xs + 2\alpha tx + \alpha x^2\frac{dt}{dx} = 0$$

или

$$d\,[x^2\,(s + \alpha t)] = 0.$$

Отсюда

$$x^2\,(s + \alpha t) = \beta$$

гдѣ β также функція отъ u.

Второе изъ предъидущихъ трехъ уравненій, или, что все равно, данное уравненіе, по исключеніи изъ него y, даетъ

$$r + 2\alpha s + \alpha^2 t = 0$$

или

$$r + \alpha s = -\alpha\,(s + \alpha t) = -\frac{\alpha\beta}{x^2}.$$

Изъ уравненій (38) затѣмъ находимъ

$$dp = rdx + sdy = (r + \alpha s)\,dx = -\frac{\alpha\beta\,.\,dx}{x^2}$$

$$dq = sdx + tdy = (s + \alpha t)\,dx = \frac{\beta dx}{x^2};$$

отсюда

$$p = \frac{\alpha\beta}{x} + \gamma$$

$$q = -\frac{\beta}{x} + \gamma_1$$

гдѣ γ и γ_1 означаютъ функціи отъ u.

Наконецъ первое изъ уравненій (38) даетъ

$$dz = pdx + qdy = (p + \alpha q)\, dx = (\gamma + \alpha\gamma_1)\, dx;$$

отсюда

$$z = (\gamma + \alpha\gamma_1)\, x + \gamma_2$$

гдѣ γ_2 означаетъ новую функцію отъ u.

Если исключимъ u между этимъ уравненіемъ и уравненіемъ

$$y = \alpha x,$$

то получимъ соотношеніе между x, y и z, которое представитъ интегралъ даннаго уравненія.

Положивъ

$$\begin{aligned} \gamma + \alpha\gamma_1 &= f(u); \\ \gamma_2 &= f_1(u) \\ \alpha &= f_2(u) \end{aligned}$$

находимъ по исключеніи u между упомянутыми уравненіями

$$z = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$