

Über das Nebensprechen in kombinierten Fernsprechkreisen.

Von

Leon Lichtenstein.



Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH
1919.

Über das Nebensprechen in kombinierten Fernsprechkreisen.

Von

Leon Lichtenstein.



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1919.

ISBN 978-3-662-42054-6 ISBN 978-3-662-42321-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-42321-9

Erweiterter Sonderabdruck aus der
ELEKTROTECHNISCHEN ZEITSCHRIFT

*(Nachdruck nur mit Genehmigung des Verfassers und der Redaktion der Elektrotechnischen Zeitschrift
und mit Quellenangabe gestattet)*

Über das Nebensprechen in kombinierten Fernsprechkreisen.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

Übersicht. Die vorliegenden Ausführungen bilden den ersten Versuch einer Theorie des Nebensprechens in kombinierten Fernsprechkreisen. Den Betrachtungen liegt ein System von vier räumlich parallel verlegten Leitern zugrunde. Die Ergebnisse gelten mit hinreichender Annäherung, auch wenn es sich um eine „periodische“ Leitung handelt, sofern nur die Periode eine gegenüber der Länge der Übertragung kleine Länge ist. Das Problem wird auf die Auflösung einer gewöhnlichen nicht homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt. In den beiden besonders wichtigen Fällen einer sehr kurzen und einer sehr langen Übertragung ergeben sich dabei einfache Formeln, die eingehend diskutiert werden.

Die folgenden Ausführungen enthalten einen Versuch einer Theorie der in kombinierten Fernsprechkreisen, insbesondere in den Fernsprechkabeln seit lange bekannten Erscheinungen des Mit- und Übersprechens oder, wie wir kürzer zusammenfassend sagen wollen, des Nebensprechens.

Mit der Fortpflanzung von Wechselströmen in Freileitungen und Kabeln beschäftigt sich eine lange Reihe bekannter Arbeiten. Namentlich seit dem Erscheinen der grundlegenden Abhandlungen von F. Breisig und K. W. Wagner besitzen wir eine formvollendete Theorie der Fortleitung der Sprechströme in einfachen und pupinisierten Freileitungen und Kabeln. Mit dem schwierigen Problem der Beeinflussung eines Stromkreises durch einen benachbarten stromdurchflossenen Kreis hat man sich demgegenüber bis jetzt nur wenig abgegeben. Es sei an dieser Stelle vor allem eine wichtige Arbeit von K. W. Wagner: „Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen“, „ETZ“ 1914, S. 639, 677, 705 genannt, in der die Fortpflanzung von Wanderwellen in Mehrfachleitersystemen mit durch-

schlagendem Erfolge betrachtet wird¹⁾. Es gelingt Wagner, die Lösung ohne Integration von Differentialgleichungen in einer für praktische Berechnungen fertigen Form zu gewinnen. In dem uns hier interessierenden Falle eines in einem langgestreckten Stromkreise fließenden räumlich gedämpften Sinusstromes, der einen anderen, dem ersten räumlich parallelen, gestreckten Stromkreis beeinflusst, ist eine so einfache Lösung nicht zu erwarten.

Es würde eine aussichtslose Aufgabe bedeuten, wollte man der theoretischen Verfolgung des Vorganges des Nebensprechens ein wirkliches Fernsprechkabel mit seiner aus fabrikatorischen Gründen von Schritt zu Schritt wechselnden Leiteranordnung zugrunde legen. Sollte auch die exakte Lösung der Aufgabe gelingen, so würde sie unzweifelhaft so kompliziert ausfallen, daß eine Diskussion der Endformeln ausgeschlossen bleibt. Wie in manchen ähnlichen Fällen muß man sich darum auf die Betrachtung eines Modells beschränken, die, wenn sie auch keine praktisch verwertbare Lösung bietet, doch geeignet erscheint, über den untersuchten Vorgang einiges Licht zu verbreiten. In der Regel gelingt es später, auf die so gewonnenen Erkenntnisse gestützt, zu Modellen überzugehen, die sich der Wirklichkeit besser anpassen.

Das den folgenden Betrachtungen zugrunde liegende Modell besteht aus vier räumlich parallel, mithin ohne Drall verlegten, ganz gleichen Leitern 1, 2; 3, 4, die zu zwei Aderpaaren *B* und *C* (einem Vierer) zusammengefaßt und von einer gemeinsamen Hülle

¹⁾ Man vergleiche weiter F. Schrottke, „ETZ“ 1907, S. 685 ff.; F. Breisig, „Theoretische Telegraphie“, Braunschweig 1910, S. 268 bis 273; O. Brauns, „ETZ“ 1908, S. 383 ff.; A. Subrt, „Beitrag zur Berechnung der Influenzwirkung von Starkstromleitungen auf parallellaufende Schwachstromleitungen“, „Elektrotechnik u. Maschinenbau“, Wien 1918, Heft 33.

(Bleimantel) umgeben sind¹⁾. Eine solche Leitung wollen wir der Kürze halber als eine homogene Leitung bezeichnen. Die Ergebnisse dieser Arbeit gelten mit hinreichender Annäherung, auch wenn die Leitung aus einer größeren Anzahl nicht homogener, jedoch unter sich gleicher Teile besteht. In dem zuletzt erwähnten Falle muß ferner angenommen werden, daß die elektrischen Werte sich stetig ändern. Die Leitung kann als „periodisch“ bezeichnet werden. Die Periode wird als eine gegenüber der Länge der Übertragung kleine Länge vorausgesetzt.

Treten punktweise verteilte Ungleichheiten auf, so können sie das Bild nicht unwesentlich verschieben. Solche Ungleichheiten liegen vor, wenn z. B. zwischen den Adern 2 und 3 eines Vierers irgendwo eine punktförmige Kapazität vorkommt. Der Vorgang des Nebensprechens kompliziert sich ferner auch dann, wenn die Widerstände der Hin- und der Rückleitung eines der beiden Stromkreise oder auch der beiden Stromkreise ungleiche Werte haben.

Beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung des Übersprechens, so gelangen wir unter der Voraussetzung räumlich gedämpfter Sinusströme in B und C zu einem System von zwei gewöhnlichen homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten¹⁾. Die Integration dieser Differentialgleichungen bietet keine Schwierigkeiten, um so schwieriger ist die Deutung der sich ergebenden verwickelten Formeln. Eine Vereinfachung tritt erst ein, wenn wir die Rückwirkung des Kreises C auf B vernachlässigen, d. h. annehmen, daß die Fortpflanzung der Sprechströme in B nach den bekannten Regeln, somit so, als ob C nicht vorhanden wäre, vor sich geht. Diese Annahme entspricht den wirklichen Verhältnissen durchaus. Ist der Strom J_C im Kreise C gleich etwa dem zehnten Teile des Stromes in B :

$$J_C = \frac{1}{10} J_B,$$

so beträgt der als Folge der Rückwirkung in B fließende Strom schätzungsweise

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 J_B = \frac{1}{100} J_B$$

und kann vernachlässigt werden.

Sieht man von der Rückwirkung ab, so erhält man zur Bestimmung des Stromes in C

¹⁾ Die Aderpaare B und C bilden die beiden Stammkreise I und II . Den Vierer (1,2): (3,4) bezeichnen wir abgekürzt mit V . Man unterscheidet dementsprechend das Übersprechen I auf II und II auf I sowie das Mitsprechen I, V ; V, I ; II, V ; V, II .

²⁾ Die Betrachtungen dieser Arbeit gelten für das Übersprechen ebenso gut wie für das Mitsprechen. Die Anzahl der Aderpaare im Kabel wird keiner Beschränkung unterworfen.

eine nicht homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Endformel ist auch jetzt noch recht verwickelt. Sie vereinfacht sich aber ganz außerordentlich in den beiden besonders wichtigen Fällen einer kurzen und einer sehr langen Übertragung. Als kurz gilt etwa eine Übertragung, deren Länge l nicht größer als 1 km ist, als sehr lang, wenn

$$\beta l \geq 2,5$$

ist. Als recht lang kann also in diesem Sinne im allgemeinen jede voll ausgebaute Fernübertragung gelten. Die gewonnenen Formeln sind geeignet, einiges Licht über die Vorgänge des Nebensprechens zu verbreiten. Sie bringen insbesondere eine Entscheidung darüber, von welchen Faktoren das Nebensprechen abhängt, ob es vorwiegend kapazitiver oder induktiver (magnetischer) Natur ist.

Sie führen ferner zu der Erkenntnis, daß es vor allem im Falle des Übersprechens nicht schwer ist, die grundlegenden elektrischen Werte der Fernsprechkreise durch direkte Messungen an einzelnen Fabrikationslängen zu bestimmen¹⁾. Die erwähnten Werte sind einerseits: der Wechselstromwiderstand, die Kapazität, Selbstinduktivität und Ableitung, andererseits: der Koeffizient der gegenseitigen Induktivität sowie ein Wert, der als Maß der kapazitiven Kopplung der beiden einander beeinflussenden Fernsprechkreise aufzufassen ist und der im folgenden mit δ_1' bezeichnet wird.

Wir wollen jetzt die wichtigsten in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse übersichtlich zusammenstellen und, soweit angängig, in elementarer Weise erläutern. Die exakte Begründung bleibt vor allem dem Kapitel I vorbehalten.

Es mögen (1), (2), (3), (4) die vier Leiter eines Vierers bezeichnen. Wie bereits erwähnt, betrachten wir der Einfachheit halber nur das Übersprechen des Kreises B (1, 2) auf C (3, 4); die Ergebnisse gelten sinngemäß auch für die beiden Arten des Mitsprechens.

Betrachten wir irgend einen Normalschnitt der Leitung.

Es sei E die augenblickliche Spannung in B^2 , E' die Spannung in C . Die augenblickliche Ladung der Längeneinheit des Kreises B sei Q , diejenige des Kreises C sei Q' . Wie sich zeigen läßt (vgl. Kapitel III), kann man mit hinreichender Annäherung

$$Q = \delta E; \quad Q' = \delta' E' + \delta_1' E$$

¹⁾ Was aus Raummangel im folgenden nicht weiter ausgeführt werden soll.

²⁾ Genauer, die momentane Spannung der beiden Leiter des Kreises B in dem betrachteten Querschnitt.

setzen. Beim Übersprechen ist überdies $\delta = \delta'$. Das Glied $\delta_1' E$ bringt die kapazitive Kopplung der beiden Kreise B und C zum Ausdruck.

Die Leitung sei kurz, die beiden Stromkreise am Ende offen. Der Kreis B sei am Anfang an irgendeinen Stromerzeuger (z. B. eine Frankesche Maschine) gelegt, der Kreis C am Anfang über einen beliebigen Scheinwiderstand \mathfrak{R}_a (d. h. eine beliebige Kombination von Widerstand, Selbstinduktivität und Kapazität) geschlossen.

Der Strom durch \mathfrak{R}_a , der bei konstantem Scheitelwert der Klemmspannung \mathfrak{G}_a des Generators als ein Maß für das Übersprechen betrachtet werden kann, hängt bei einem nicht zu großen absoluten Betrage $|\mathfrak{R}_a|$ ¹⁾ des Scheinwiderstandes \mathfrak{R}_a in der ersten Näherung von $|\mathfrak{R}_a|$ überhaupt nicht ab und ist dem Werte δ_1' und der Länge l der beiden Schleifen proportional (vgl. Kapitel I § 3).

Diese Erscheinung läßt sich wie folgt elementar erklären: Die Ladungen auf B „influenzieren“ auf den Leitern 3 und 4 des Stammes C Ladungen, die sich über den Scheinwiderstand \mathfrak{R}_a in Gestalt sinusförmiger Ströme (falls die Klemmspannung E_a sinusförmig ist) ausgleichen. Die augenblicklichen Ladungen auf 3 und 4 haben den Wert

$$Q' = E_a \delta_1' l \cdot 2$$

Zur Bestimmung des Stromes durch \mathfrak{R}_a erhält man in komplexer Darstellung die Formel

$$\mathfrak{S}_a' = \mathfrak{G}_a \cdot i \omega \delta_1' l.$$

Der Dämpfungsexponent $\beta^* l$ des Übersprechens ist, wenn die Charakteristik des Eichkastens und der Scheinwiderstand des an diesen geschalteten Telephons (Abb. 3) festgehalten werden, proportional

$$\text{lognat} |\mathfrak{S}_a'|.$$

Das Übersprechen (und ebenso das Mitsprechen) wächst bei konstanter Spannung am Generator und, wie vorstehend, konstanter Charakteristik des Eichkastens und konstantem Scheinwiderstande des Fernsprechapparates mit der Länge der untersuchten Leitung (diese immer klein gehalten).

Schließt man den empfangenden Stromkreis C am Ende über einen Scheinwiderstand \mathfrak{R}_e , so wird sich die auf (3) und (4) influenzierte Ladung über die beiden parallel geschalteten

Widerstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e ausgleichen. Ist insbesondere

$$\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}_e,$$

so findet man in einer ersten Näherung (vgl. Kapitel I § 11)

$$\mathfrak{S}_a' = \frac{1}{2} \mathfrak{G}_a i \omega \delta_1' l.$$

Das Übersprechen wird kleiner. Der Dämpfungsexponent $\beta^* l$ des Übersprechens wächst um

$$\text{lognat } 2 = \text{rd } 0,7.$$

Schließt man den gebenden Kreis B am Ende über einen nicht zu kleinen Scheinwiderstand, so ändert sich der Vorgang in C nicht merklich. Bei kurzen Längen ist die Erscheinung des Nebensprechens im wesentlichen kapazitiver Natur. Bei offenen Schleifen B und C kommt in der Formel für \mathfrak{S}_a' der Koeffizient der gegenseitigen Induktivität M erst in den Gliedern dritter Ordnung, d. h. in den Gliedern, die l^3 enthalten, vor (vgl. die Formel (41)).

Auch in dem anderen der Rechnung zugänglichen Falle, nämlich dem Falle einer sehr langen Übertragung findet man, daß das Nebensprechen von dem Zustande am Ende der gebenden Schleife praktisch unabhängig ist²⁾.

Bei pupinisierten Übertragungen ist das Nebensprechen im allgemeinen im wesentlichen kapazitiver Natur; dies auch dann, wenn nur Stammkreise pupinisiert sind²⁾. Natürlich gilt die zuletzt ausgesprochene Behauptung auch bei Übertragungen von mäßiger Länge.

Den Wert δ_1' , der für das Übersprechen maßgebend ist, kann man durch einen Leerlaufversuch wie folgt bestimmen. Man legt den Stromkreis B an die Wechselspannung

$$E_a = \mathfrak{G}_a e^{i \omega t}$$

und mißt die am Anfang des beiderseits offenen Kreises C entstehende Spannung

$$E_a' = \mathfrak{G}_a' e^{i \omega t}$$

Es ist, wenn wir von dem im allgemeinen unmerklichen Einfluß der Ableitung absehen,

$$\frac{\mathfrak{G}_a'}{\mathfrak{G}_a} = - \frac{\delta_1'}{\delta}.$$

Wenn es sich um das Übersprechen handelt, so ist überdies $\delta = \delta'$. (vgl. Kapitel I

¹⁾ Ist beispielsweise

$$\mathfrak{R}_a = w + i \omega L, \text{ so ist } |\mathfrak{R}_a| = \sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}.$$

²⁾ Das der vorhin angegebenen Formel für Q' gemäß noch binzukommende Glied $\delta' E_a' l$ kann zunächst vernachlässigt werden.

¹⁾ Das Ende der empfangenden Schleife kann hierbei offen oder über beliebige Scheinwiderstände geschlossen sein. Gesprochen wird am Kabelanfang, an gleicher Stelle wird auch das Nebensprechen beobachtet.

²⁾ Das gleiche gilt auch für Krarupkabel, überhaupt jedesmal dann, wenn M gegenüber L sehr klein ist.

§ 6). Handelt es sich um das Mitsprechen, so muß die Schaltung etwas modifiziert werden.

Zu einer weiteren Beurteilung der Qualität eines Kabels, was das Nebensprechen betrifft, gehört die Kenntnis der Koeffizienten der gegenseitigen Induktivität M . Wie bereits erwähnt, ist bei kurzen Leitungen der Einfluß der Größen M ganz unmerklich. Bei sehr großen Längen, somit im allgemeinen bei fertig ausgebauten Leitungen kann sich die Sache anders verhalten.

Ist der Dämpfungsexponent der Übertragung (im üblichen Sinne) $\beta l \geq 2,5$ bis $3,0$, so gilt für das Übersprechen die Formel

$$\beta^* l = -\log_{\text{nat}} \frac{1}{4} \left| \frac{\delta_1'}{\delta} - \frac{M}{L} \right|$$

(vgl. Kapitel I § 5). Der Dämpfungsexponent zerfällt in zwei Bestandteile, den kapazitiven $\frac{\delta_1'}{\delta}$ und den induktiven (magnetischen) $-\frac{M}{L}$.

Der zuletzt genannte Bestandteil kann unter Umständen eine merkliche Rolle spielen. Im allgemeinen wird dies, wie schon erwähnt, bei pupinisierten Kabeln nicht der Fall sein, weil hier L groß ist. Es ist bemerkenswert, daß die günstige Wirkung der Pupinisierung sich auch auf das Mitsprechen induktiven (magnetischen) Ursprungs erstreckt, und dies sogar dann, wenn nur die Paare pupinisiert sind. Dies folgt aus der zuletzt mitgeteilten Formel allerdings nicht. Diese gilt aber für das Mitsprechen auch nicht (vgl. die auf das Mitsprechen sich beziehende Formel (52)). Man kann darum sagen, daß bei pupinisierten Kabeln auch bei großen Längen das Nebensprechen im wesentlichen kapazitiver Natur ist.

Kapitel I.

§ 1. Allgemeine Formeln.

Es mögen B und C zwei räumlich parallele, lang gestreckte, homogene Stromkreise bezeichnen. Über die Art ihrer Verkettung werden zunächst keinerlei Voraussetzungen gemacht; die sich ergebenden Formeln gelten daher sowohl für das Über- als auch für das Mitsprechen. Je nach der geometrischen Lage der Adern und einer etwaigen Verkettung werden die elektrischen Daten der Stromkreise verschieden ausfallen. Näheres hierüber ist in dem Kapitel II angegeben. Wie wir bereits in der Einleitung hervorgehoben haben, wird an-

genommen, daß die Leitung homogen ist, d. h. daß die Widerstände, die Selbstinduktivitäten usw. der Länge nach gleichmäßig verteilt sind. Bei Fernsprechkabeln läßt sich aus fabrikatorischen Gründen diese Voraussetzung bezüglich der Kapazität und Selbstinduktivität nicht erfüllen. Wie an der angeführten Stelle erwähnt, genügt es für eine angenäherte Gültigkeit der Ergebnisse, wenn sich dieselben Werte der Länge nach periodisch wiederholen, sofern dabei „die Periode“ nur hinreichend kurz ist.

Der Einfachheit halber wollen wir uns die beiden Stromkreise durch die Leiterpaare (1, 2) und (3, 4) (Abb. 1) veranschaulichen. Doch

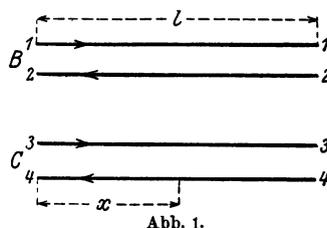


Abb. 1.

gilt alles folgende genau so gut auch dann, wenn der eine Stromkreis aus den beiden Aderpaaren (1, 2) — (3, 4), der andere aus den Drähten (1, 2) besteht (Mitsprechen).

Die elektrischen Daten des Kreises B seien:

- w der Widerstand der Hin- und Rückleitung für die Längeneinheit der Übertragung in Ohm/km,
- L die Selbstinduktivität für die Längeneinheit in Henry/km,
- δ die Kapazität für die Längeneinheit in Farad/km,
- A die Ableitung für die Längeneinheit in Siemens/km.

Wir bezeichnen ferner mit:

- t die Zeit,
- x die Entfernung vom Anfang der Leitung,
- l die Gesamtlänge der Leitung,
- $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit,
- ω die Kreisfrequenz in sec^{-1} ,
- J den augenblicklichen Strom in Amp,
- E die augenblickliche Spannung in Volt.

Wir setzen unter Benutzung der Symbolik der komplexen Rechenmethode:

$$E = \mathfrak{E} e^{i\omega t}, \quad J = \mathfrak{J} e^{i\omega t} \dots (1)$$

$$\alpha i + \beta = \gamma = \sqrt{(w + i\omega L)(A + i\omega\delta)} \dots (2)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{w + i\omega L}{A + i\omega\delta}} \dots (3)$$

β ist die Charakteristik, γ die Fortpflanzungskonstante, β die Dämpfungskonstante

¹⁾ Die zuletzt hingeschriebene Formel gilt, wie bereits erwähnt, für das Übersprechen. Es wird dabei angenommen, daß die beiden Stromkreise B und C gleiche Kapazität pro Längeneinheit $\delta = \delta'$, und gleiche Selbstinduktivität pro Längeneinheit $L = L'$ haben.

des Stromkreises *B*. Nach bekannten Formeln (vgl. F. Breisig, Theoretische Telegraphie, S. 282) ist

$$\mathfrak{E} = a_1 e^{\gamma x} + a_2 e^{-\gamma x} \dots (4)$$

$$\mathfrak{J} = -\frac{a_1}{3} e^{\gamma x} + \frac{a_2}{3} e^{-\gamma x} \dots (5)$$

unter a_1 und a_2 Konstante verstanden, die sich durch die jeweiligen Grenzbedingungen bestimmen¹⁾.

Sind endlich \mathfrak{E}_a und \mathfrak{J}_a die Werte am Anfang, \mathfrak{E}_e und \mathfrak{J}_e die Werte am Ende der Leitung, so kann man auch setzen (vgl. F. Breisig, Theoretische Telegraphie, S. 282 und 283):

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_a \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - 3 \mathfrak{J}_a \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \mathfrak{E}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + 3 \mathfrak{J}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2} \quad (6)$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_a \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \frac{\mathfrak{E}_a}{3} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \mathfrak{J}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \frac{\mathfrak{E}_e}{3} \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2} \dots (7)$$

Wie ersichtlich, ist in den Formeln (4) bis (7) der Einfluß des in dem Stromkreise *C* durch *E* und *J* hervorgerufenen Strom- und Spannungszustandes nicht berücksichtigt. Von der Rückwirkung des Kreises *C* auf *B* wird also abgesehen.

Es sei:

w' der Widerstand der Hin- und Rückleitung des Kreises *C* für die Längeneinheit der Übertragung in Ohm/km,

L' die Selbstinduktivität des Kreises *C* für die Längeneinheit in Henry/km,

M die Gegeninduktivität von *B* und *C* für die Längeneinheit in Henry/km,

$$E' = \mathfrak{E}' e^{i\omega t} \text{ die Spannung} \dots (8)$$

$$J' = \mathfrak{J}' e^{i\omega t} \text{ der Strom in } C^2) \dots (9)$$

Es sei ferner *Q'* die Ladung für die Längeneinheit in Coulomb/km. In der Abb. 1 ist durch Pfeile die positive Richtung des Stromes angedeutet. Die Spannung *E'* zwischen den Punkten b_3 und b_4 , entsprechend auf den Leitern (3) und (4), gilt als positiv, wenn sie durch einen induktionslosen Widerstand einen Strom von b_3 nach b_4 schicken würde.

Während wir unter Vernachlässigung der Rückwirkung in dem Stromkreise *B* die Ladung *Q* für die Längeneinheit in der Form

$$Q = \delta E \dots (10)$$

¹⁾ Die an der bezeichneten Stelle für \mathfrak{J} und $3\mathfrak{J}_a$ angegebenen Formeln sind infolge einiger Zeichenfehler unrichtig.

²⁾ Die magnetische Energie des Leitersystems pro Längeneinheit ist gleich

$$\frac{1}{2} (LJ^2 + 2MJJ' + L'J'^2).$$

Durch diese Formel denken wir uns die Werte *L*, *M*, *L'* namentlich beim Vorhandensein einer Verkettung der Stromkreise *B* und *C* (Mitsprechen) definiert.

ansetzen dürfen, ist demgegenüber, wie wir im Kapitel II zeigen werden,

$$Q' = \delta' E' + \delta'_1 E \dots (11)$$

zu setzen¹⁾.

Der den Isolationsverlusten und der dielektrischen Hysterese entsprechende Strom berechnet sich aus der Formel

$$A' E' + A'_1 E \dots (11^*)$$

In der bekannten Weise (vgl. z. B. die Ableitung der Telegraphengleichung bei Breisig, S. 280 u. 281) gewinnt man die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$-\frac{\partial E'}{\partial x} = w' J' + L' \frac{\partial J'}{\partial t} + M \frac{\partial J}{\partial t} \quad (12)$$

$$-\frac{\partial J'}{\partial x} = \frac{\partial Q'}{\partial t} + A' E' + A'_1 E \dots (13)$$

Setzt man hier für *E*, *J*, *E'*, *J'* die Werte aus (1), (8) und (9), so erhält man

$$-\frac{d \mathfrak{E}'}{dx} = (w' + i\omega L') \mathfrak{J}' + M i\omega \mathfrak{J} \dots (14)$$

$$-\frac{d \mathfrak{J}'}{dx} = (A' + i\omega \delta') \mathfrak{E}' + (A'_1 + i\omega \delta'_1) \mathfrak{E} \quad (15)$$

Augenscheinlich kommt in den Gliedern $M i\omega \mathfrak{J}$, $i\omega \delta'_1 \mathfrak{E}$, $A'_1 \mathfrak{E}$ der Einfluß des Kreises *B* auf den Kreis *C* zur Geltung. Das Glied $M i\omega \mathfrak{J}$ entspricht der induktiven (magnetischen), das Glied $i\omega \delta'_1 \mathfrak{E}$ der kapazitiven Kopplung. Das Glied $A'_1 \mathfrak{E}$ bringt das Nebensprechen durch die Ableitung zum Ausdruck.

Wir führen die weiteren Bezeichnungen

¹⁾ Die genaue Formel lautet (vergl. Kapitel II) eigentlich

$$Q' = \delta' E' + \delta'_1 E + \delta'_2 E''.$$

Hierin ist, wenn wir der Einfachheit halber 1, 2, 3, 4 als Leiter einer Freileitung voraussetzen und den Fall des Übersprechens betrachten,

$$E'' = \frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{V_3 + V_4}{2},$$

unter V_1, V_2, V_3, V_4 Spannungen der Leiter 1, 2, 3, 4 gegen Erde verstanden. Der Koeffizient δ'_2 ist wie δ'_1 in der Regel klein gegenüber δ' . Desgleichen sind E'' und E' klein gegenüber *E*. Das Glied $\delta'_2 E''$, das gewissermaßen den Einfluß des Mitsprechens *I* auf *V* auf das Übersprechen *I* auf *II* darstellt, kann gegenüber $\delta' E'$ und $\delta'_1 E$ vernachlässigt werden. Aus ähnlichen Gründen kann der „Isolationsstrom“ in der Form (11)* angesetzt werden. Im Kapitel II wird allgemein gezeigt, daß die Formel (11) auch dann gilt, wenn es sich um das Mitsprechen handelt.

Den Wert δ'_1 könnte man als den Koeffizienten der kapazitiven Kopplung der Kreise *I* und *II* bezeichnen.

$$\beta' + \alpha' i = \gamma' = \sqrt{(w' + i \omega L')(A' + i \omega \delta')} \quad (16)$$

$$\gamma_1' = \sqrt{(w' + i \omega L')(A_1' + i \omega \delta_1')} \quad (17)$$

$$\beta' = \sqrt{\frac{w' + i \omega L'}{A' + i \omega \delta'}} \dots \dots \quad (18)$$

ein.

Aus (14) erhält man durch Differentiation

$$\frac{d^2 \mathfrak{E}}{dx^2} = -(w' + L' i \omega) \frac{d \mathfrak{S}'}{dx} - M i \omega \frac{d \mathfrak{S}}{dx}$$

$$= (w' + i \omega L')(A' + i \omega \delta') \mathfrak{E}'$$

$$+ (w' + i \omega L')(A_1' + i \omega \delta_1') \mathfrak{E} - M i \omega \frac{d \mathfrak{S}}{dx} \quad (19)$$

somit nach (16) und (17)

$$\frac{d^2 \mathfrak{E}}{dx^2} = \gamma'^2 \mathfrak{E}' + f(x) \dots \dots \quad (20)$$

$$f(x) = \gamma_1'^2 \mathfrak{E} - M i \omega \frac{d \mathfrak{S}}{dx} \dots \quad (21)$$

Die Funktion $f(x)$ ist als bekannt zu betrachten. Das allgemeine Integral der nicht homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (20) ist, wie man leicht verifizieren kann,

$$\mathfrak{E}' = e^{\gamma' x} \left(c_1 + \frac{1}{2\gamma'} \int f(x) e^{-\gamma' x} dx \right) +$$

$$+ e^{-\gamma' x} \left(c_2 - \frac{1}{2\gamma'} \int f(x) e^{\gamma' x} dx \right) \quad (22)$$

unter c_1 und c_2 Integrationskonstante verstanden. Setzt man in dieser Formel für die Funktion $f(x)$ ihren Ausdruck (21) ein, so erhält man nach Ausführung der Integrationen

$$\mathfrak{E}' = c_1 e^{\gamma' x} + c_2 e^{-\gamma' x} + \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\beta} \gamma \right) \times$$

$$\times \left[a_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{\gamma' x}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{e^{\gamma x}}{\gamma + \gamma'} - a_2 \frac{e^{-\gamma x} - e^{-\gamma' x}}{\gamma' - \gamma} - a_2 \frac{e^{-\gamma x}}{\gamma + \gamma'} \right] \quad (23)$$

Es ist nicht schwer zu verifizieren, daß \mathfrak{E}' in der Tat der Differentialgleichung (23) genügt. Man überzeugt sich ferner leicht, daß die Formel (23) für \mathfrak{E}' auch in dem besonders wichtigen Falle $\gamma' = \gamma$ einen endlichen Wert ergibt. So ergeben die Regeln zur Auswertung der in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Ausdrücke beispielsweise

$$\left[\frac{e^{\gamma x} - e^{\gamma' x}}{\gamma - \gamma'} \right]_{\gamma' = \gamma} = x e^{\gamma x}.$$

Nachdem \mathfrak{E}' bestimmt worden ist, erhält man aus (14) für \mathfrak{S}' den Ausdruck

$$\mathfrak{S}'(w' + i \omega L') = -\gamma' c_1 e^{\gamma' x} + \gamma' c_2 e^{-\gamma' x} -$$

$$- \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\beta} \gamma \right) \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma x} - \gamma' e^{\gamma' x}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma x}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma x} - \gamma' e^{-\gamma' x}}{\gamma' - \gamma} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma x}}{\gamma + \gamma'} \right. \quad (24)$$

$$\left. + \frac{M i \omega}{\beta} (a_1 e^{\gamma x} - a_2 e^{-\gamma x}) \right]$$

§ 2. Die beiden Stromkreise am Ende offen.

Wir spezialisieren jetzt das Problem in folgender Weise: Die beiden Stromkreise B und C sind am Ende offen. Der Stromkreis B ist am Anfang an einen Generator angeschlossen; die Klemmenspannung \mathfrak{E}_a ist als gegeben zu betrachten. Der Stromkreis C ist am Anfang über einen punktförmigen Widerstand \bar{R} und eine ebensolche Selbstinduktivität \bar{L} geschlossen (Abb. 2).

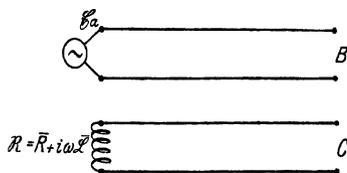


Abb. 2.

Die Grenzbedingungen des Problems lauten jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_e = 0, \quad \mathfrak{S}'_e = 0, \\ \mathfrak{E}_a' = -\mathfrak{R}_a \mathfrak{S}'_a = -(\bar{R} + i \omega \bar{L}) \mathfrak{S}'_a \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Aus (23), (24), (16) und (18) folgt nach einer leichten Umrechnung:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}'_a = -\frac{c_1}{\beta'} + \frac{c_2}{\beta'} - \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \times \\ \times \left[\frac{\gamma_1'^2}{\gamma + \gamma'} - \frac{(\gamma + 2\gamma') M i \omega}{(\gamma + \gamma') \beta} \right] \frac{1}{w' + i \omega L'} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}'_a = c_1 + c_2 - \frac{1}{2\gamma'(\gamma + \gamma')} \times \\ \times (a_1 + a_2) \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\beta} \gamma \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (27)$$

Wir erhalten ferner wegen (5)

$$-\beta \mathfrak{S}_e = a_1 e^{\gamma l} - a_2 e^{-\gamma l} = 0 \quad (28)$$

daher wegen $\mathfrak{S}'_e = 0$ aus (24)

$$\left. \begin{aligned} -\gamma' c_1 e^{\gamma l} + \gamma' c_2 e^{-\gamma l} - \\ - \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\beta} \gamma \right) \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} \right. \\ \left. - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Hieraus sowie aus der sich nach (25), (26) und (27) ergebenden linearen Gleichung werden die c_1 und c_2 ermittelt. Setzt man die erhaltenen Werte in (26) ein, so findet man

$$\mathfrak{S}_a' = \frac{1}{2} \mathfrak{S} \mathfrak{S}_a \left[\frac{\gamma_1'^2}{\gamma + \gamma'} - \frac{(\gamma + 2\gamma') M i \omega}{(\gamma + \gamma') \mathfrak{S}} \right] \frac{1}{\omega' + i \omega L'} + \frac{e^{-\gamma' l}}{2 \mathfrak{S}' \gamma'^2} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{S}} \gamma \right) \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] + \frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{\mathfrak{S}' \left\{ 1 + e^{-2\gamma' l} + \frac{\bar{R} + i \omega \bar{L}}{\mathfrak{S}'} (1 - e^{-2\gamma' l}) \right\}} \times \left\{ \frac{a_1 + a_2}{2 \gamma' (\gamma + \gamma')} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{S}} \gamma \right) + (\bar{R} + i \omega \bar{L}) \frac{a_1 - a_2}{2} \left[\frac{\gamma_1'^2}{\gamma + \gamma'} - \frac{\gamma + 2\gamma'}{\gamma + \gamma'} \frac{M i \omega}{\mathfrak{S}} \right] \frac{1}{\omega' + i \omega L'} \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\bar{R} + i \omega \bar{L}}{\mathfrak{S}'} \right) \frac{e^{-\gamma' l}}{2 \gamma'^2} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{S}} \gamma \right) \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} \right. \right. \\ \left. \left. + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] \right\} \quad (30)$$

Hierin sind für a_1 und a_2 die sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 e^{\gamma l} - a_2 e^{-\gamma l} &= 0 \\ \mathfrak{E}_a &= a_1 + a_2 \end{aligned} \quad (31)$$

ergebenden Werte

$$a_1 = \mathfrak{E}_a \frac{e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}, \quad a_2 = \mathfrak{E}_a \frac{e^{\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} \quad (32)$$

einzusetzen. Endlich ist nach (5)

$$\mathfrak{S}_a = \mathfrak{E}_a \frac{1}{\mathfrak{S}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} \dots \quad (33)$$

Die Formel (30) ist unübersichtlich und für eine Diskussion ganz ungeeignet. Sie vereinfacht sich jedoch ganz außerordentlich in den beiden besonders wichtigen Fällen einer recht langen und einer kurzen Leitung.

§ 3. Besonderer Fall einer sehr langen und einer sehr kurzen Leitung: Vorausberechnung des Dämpfungsexponenten $\beta^* l$. Schlußfolgerungen.

Wir nehmen jetzt an, daß l so groß ist, daß die Werte

$|e^{-2\gamma l}|$ und $|\gamma' l e^{-2\gamma' l}|$ gegen 1 vernachlässigt werden können. Dies trifft, sobald

$$\beta l \geq 2,5, \quad \beta' l \geq 2,5$$

ist, somit im allgemeinen bei jeder fertig ausgebauten Fernübertragung zu.

Man erhält jetzt nach (32) und (33)

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \mathfrak{E}_a, \quad \mathfrak{S}_a = \frac{1}{\mathfrak{S}} \mathfrak{E}_a \quad (34)$$

In der Formel (30) verschwinden das zweite Glied rechter Hand sowie der dritte Summand in den geschweiften Klammern. Setzt man in den übrigen Gliedern für $e^{-2\gamma' l}$ den Wert Null und zieht ähnliche Glieder zusammen, so erhält man die recht einfache Formel

¹⁾ Unter $|m|$ ist der absolute Betrag von m zu verstehen. Es ist also:

$$\begin{aligned} |a + b i| &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ |e^{-2\gamma l}| &= |e^{-2\beta l - 2\alpha i l}| = e^{-2\beta l}, \\ |\gamma' l e^{-2\gamma' l}| &= e^{-2\beta' l} l \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}_a' = \mathfrak{E}_a \frac{1}{\mathfrak{S}' + (\bar{R} + i \omega \bar{L})} \frac{1}{\gamma' (\gamma + \gamma')} \left(\gamma_1'^2 - \frac{M i \omega}{\mathfrak{S}} \gamma \right) \dots \quad (35)$$

Es seien andererseits $|\gamma l|$ und $|\gamma' l|$ so klein, daß in den Entwicklungen

$$e^{\gamma l} = 1 + \frac{\gamma l}{1} + \frac{(\gamma l)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(\gamma l)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots, \quad e^{\gamma' l} = 1 + \frac{\gamma' l}{1} + \frac{\gamma'^2 l^2}{1 \cdot 2} + \frac{\gamma'^3 l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (36)$$

alle Glieder von dem fünften an vernachlässigt werden können. Durch Reihenentwicklung und Zusammenfassung ähnlicher Glieder er-

hält man nacheinander, unter $((l^3))$, $((l^4))$ die Gesamtheit der l^3 , l^4 , .. bzw. l^3 , l^3 , .. usw. enthaltenden Glieder verstanden,

$$\mathfrak{S}_a = \frac{1}{\mathfrak{S}} \mathfrak{E}_a \left\{ \gamma l \left(1 - \frac{\gamma^2 l^2}{\mathfrak{S}} \right) + ((l^4)) \right\}, \quad \mathfrak{E}_a l = \mathfrak{S}_a \frac{\mathfrak{S}}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\mathfrak{S}} + ((l^3)) \right\} \dots \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \mathfrak{E}_a \left\{ 1 - \gamma l + \frac{1}{3} \gamma^3 l^3 + ((l^4)) \right\}, \\ \alpha_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} &= -\frac{1}{2} \mathfrak{E}_a \left\{ 1 + \gamma' l + \left(-\frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma \gamma' + \frac{1}{2} \gamma'^2 \right) l^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{3} \gamma^2 \gamma' - \frac{1}{3} \gamma \gamma'^2 + \frac{1}{6} \gamma'^3 \right) l^3 + \dots \right\} \\ \alpha_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} &= -\frac{1}{2} \mathfrak{E}_a \left\{ 1 - \gamma' l + \left(-\frac{1}{2} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma \gamma' + \frac{1}{2} \gamma'^2 \right) l^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{1}{3} \gamma^2 \gamma' - \frac{1}{3} \gamma \gamma'^2 + \frac{1}{6} \gamma'^3 \right) l^3 + \dots \right\} \\ \alpha_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} - \alpha_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} &= 0, \end{aligned} \right\} (38)$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{3' \left\{ 1 + e^{-2\gamma' l} + \frac{\bar{R} + i\omega \bar{L}}{3'} (1 - e^{-2\gamma' l}) \right\}} \cdot \frac{1}{2\gamma'(\gamma + \gamma')} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \right) \mathfrak{E}_a = \\ &= \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \right) \mathfrak{I}_a \frac{3}{3'} \frac{1}{2\gamma(\gamma + \gamma')} \left\{ 1 - \gamma' \frac{\bar{R} + i\omega \bar{L}}{3'} l + \left[\gamma'^2 \frac{(\bar{R} + i\omega \bar{L})^2}{3'^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma'^2 \right] l^2 + ((l^3)) \right\} \end{aligned} \right\} (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{I}'_a}{\mathfrak{I}_a} &= \frac{A_1' + i\omega \delta_1'}{A + i\omega \delta} \left[1 - (\bar{R} + i\omega \bar{L})(A' + i\omega \delta') l + \left\{ (\bar{R} + i\omega \bar{L})^2 (A' + i\omega \delta')^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} (\omega' + i\omega L')(A' + i\omega \delta') - \frac{1}{3} M i \omega \frac{(A + i\omega \delta)(A' + i\omega \delta')}{A_1' + i\omega \delta_1'} \right\} l^2 + ((l^3)) \right] \end{aligned} \right\} (40)$$

wofür man auch setzen kann

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{I}'_a &= \mathfrak{E}_a l (A_1' + i\omega \delta_1') \left[1 - (\bar{R} + i\omega \bar{L})(A' + i\omega \delta') l + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\bar{R} + i\omega \bar{L})^2 (A' + i\omega \delta')^2 - \frac{1}{3} (\omega' + i\omega L')(A' + i\omega \delta') - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} (\omega + i\omega L)(A + i\omega \delta) - \frac{1}{3} M i \omega \frac{(A + i\omega \delta)(A' + i\omega \delta')}{A_1' + i\omega \delta_1'} \right\} l^2 + ((l^3)) \right] \end{aligned}} \quad (41)$$

Bei der Ableitung dieser Formel ist übrigens

$$\left| \frac{\Re_a}{3'} \frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{1 + e^{-2\gamma' l}} \right| \ll 1 \text{ (klein gegen 1)} \quad (42)$$

vorausgesetzt worden. Der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{1 + e^{-2\gamma' l} + \frac{\Re_a}{3'} (1 - e^{-2\gamma' l})} = \\ &= \frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{1 + e^{-2\gamma' l}} \frac{1}{1 + \frac{\Re_a}{3'} \frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{1 + e^{-2\gamma' l}}} \end{aligned}$$

läßt sich nämlich nach Potenzen von

$$\frac{\Re_a}{3'} \frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{1 + e^{-2\gamma' l}}$$

entwickeln, sobald

$$\left| \frac{\Re_a}{3'} \frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{1 + e^{-2\gamma' l}} \right| < 1 \dots (43)$$

ist.

Ist, wie vorausgesetzt, dieser Ausdruck klein gegen 1, so konvergiert die unendliche Reihe für

$$\frac{1}{1 + \frac{\Re_a}{3'} \frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{1 + e^{-2\gamma' l}}}$$

rasch. Zuletzt wird natürlich

$$\frac{1 - e^{-2\gamma' l}}{1 + e^{-2\gamma' l}} = \gamma' l - \frac{1}{3} \gamma'^3 l^3 + ((l^5)) \quad (44)$$

eingesetzt. Diese Entwicklung konvergiert, wenn $|e^{-2\gamma' l} - 1| < 2$ ist.

Sie konvergiert um so rascher, je kleiner $|\gamma' l|$ ist.

Die Voraussetzung (42) kann man nach (44) durch die einfacheren Bedingungen

$$\left| \frac{\Re_a}{\Im'} \gamma' l \right| \ll 1,$$

oder auch

$$\left| \frac{\Re_a}{\Im'} \alpha' l \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\Re_a}{\Im'} \beta' l \right| \ll 1 \quad (45)$$

ersetzen.

Die bezüglich $|\gamma l|$ und $|\gamma' l|$ getroffene Annahme ist im allgemeinen erfüllt, wenn in den Entwicklungen

$$e^{\beta l} = 1 + \frac{\beta l}{1} + \frac{\beta^2 l^2}{1 \cdot 2} + \frac{\beta^3 l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

$$e^{\beta' l} = 1 + \frac{\beta' l}{1} + \frac{\beta'^2 l^2}{1 \cdot 2} + \frac{\beta'^3 l^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

alle Glieder von dem fünften an vernachlässigt werden können. Diese Vernachlässigung ist gewiß zulässig, wenn

$$\beta l \leq 0,2, \quad \beta' l \leq 0,2 \quad \dots \quad (46)$$

ist. Das fünfte Glied der Reihen für $e^{\beta l}$ und $e^{\beta' l}$ ist dann nämlich kleiner als $\frac{1}{15000}$.

Für die Länge l der Fernsprechübertragung, innerhalb deren die Formel (41) gilt, würde man nach (46) Werte von 5 bis 15 km

$$\Im_a' = \mathfrak{C}_a \cdot 4 \cdot 10^{-6} i$$

$$\times \left[1 - 0,2 i + \left\{ -0,04 - \frac{2}{3} (5 + 3,25 i) i 10^{-4} - \frac{2}{3} (5 + 3,25 i) i 10^{-4} + 0,5 \cdot 10^{-2} \right\} + ((l^3)) \right] \quad (47)$$

Im vorliegenden Falle erscheint die Anwendung der abgekürzten Formel (41) zulässig.

Rechnet man mit einzelnen Fabrikationslängen eines Fernkabels oder mit Gruppen von Längen, wie sie bei Abnahmemessungen öfter aneinandergeschaltet werden ($l \leq 0,6$ km), so kann man für $|\Re_a|$ selbst einen Wert von 2000 Ω setzen, ohne daß die Formel (41) ihre Brauchbarkeit verliert. Aus (47) folgt mit genügender Annäherung

$$\left| \frac{\Im_a'}{\mathfrak{C}_a} \right| = 4 \cdot 10^{-6}.$$

Die Charakteristik der vorhin betrachteten Fernsprechübertragung hat den Wert

$$\Im = \Im' = 298 e^{-23^\circ 30' i} = (262 - 142 i) \text{ Ohm},$$

$$|\Im| = |\Im'| = 298 \text{ Ohm}.$$

Wir nehmen jetzt an, daß der Generator über eine Eichleitung (Abb. 3) auf einen Scheinwiderstand \Re (einen Fernsprechapparat) geschaltet ist. Die Spannung am Generator

bei unpupinisierten, bis 50 km bei pupinisierten Kabeln erhalten. Bei einem so großen Wert von l haben indessen die in (41) mit β^3 , β^4 usw. (im Klammerausdruck) multiplizierten Glieder noch einen wesentlichen Einfluß auf das Endresultat, Ob in einem bestimmten Falle die abgekürzte Formel (41) zulässig ist, erkennt man am einfachsten durch die Ausrechnung der quadratischen Glieder des Klammerausdruckes. Ihr Wert muß klein gegen 1 sein.

Wir nehmen beispielsweise an:

$$\bar{L} = 0, \quad \bar{R} = |\Re_a| = 1000 \text{ Ohm},$$

$$w = w' = 5 \text{ Ohm/km}^1),$$

$$L = L' = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}^1),$$

$$M = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}^2),$$

$$A = A' = A_1' = 0,$$

$$\delta = \delta' = 0,04 \cdot 10^{-6} \text{ Farad/km},$$

$$\delta_1' = 0,02 \delta = 0,0008 \cdot 10^{-6} \text{ Farad/km},$$

$$\omega = 5000 \text{ sec}^{-1},$$

$$\omega \delta = \omega \delta' = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Farad/kmsec};$$

$$\omega \delta_1' = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Farad/kmsec},$$

$$l = 1 \text{ km},$$

$$L \omega = L' \omega = 3,25 \text{ Henry/kmsec}.$$

Wir finden

sei wieder gleich \mathfrak{C}_a ; der Strom durch \Re wird mit \Im^* bezeichnet. Wir nehmen $\Im^* = \Im_a'$ dem soeben betrachteten Werte an.



Abb. 3.

Wie groß muß der Dämpfungsexponent $\beta^* l$ der H-Schaltung (Abb. 3) sein, wenn ihre Charakteristik \Im^* bekannt ist?

Nach bekannten Formeln ist, wenn etwa $\beta^* l \geq 3$ ist, mit ausreichender Genauigkeit (vgl. F. Breisig, Theoretische Telegraphie, S. 280 bis 283):

¹⁾ Diese Werte entsprechen angenähert einem Kabel mit Leitern von 3 mm Durchmesser. Der Einfachheit halber wird \Re_a induktionsfrei vorausgesetzt.

²⁾ Der Wert von M ist als hoch gegriffen zu betrachten. Da es sich hier lediglich um eine überschlägliche Rechnung handelt, so wird der Einfluß der Ableitung vernachlässigt.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}_a &= \frac{1}{2} e^{\gamma l} (\mathfrak{R} + \mathfrak{Z}^*) \mathfrak{Z}^*, \\ |\gamma^*| &= |\beta^* + \alpha^* i|; \quad |e^{\gamma^* l}| = |e^{\beta^* l}| \end{aligned} \right\} (47)$$

Setzt man z. B.

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{Z}^*; \quad |\mathfrak{R}| = |\mathfrak{Z}^*| = 2000 \text{ Ohm},$$

so erhält man

$$\beta^* l = 4,84.$$

Nimmt man hingegen

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{Z}^*} = \text{reellen Zahl}, \quad |\mathfrak{R}| = 2000 \text{ Ohm}, \\ |\mathfrak{Z}^*| = 300 \text{ Ohm},$$

so findet man

$$\beta^* l = 5,35.$$

Wählt man drittens

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{Z}^*} = \text{reellen Zahl}, \quad |\mathfrak{R}| = 1000 \text{ Ohm}, \\ |\mathfrak{Z}^*| = 300 \text{ Ohm},$$

so erhält man

$$\beta^* l = 6,0.$$

Wie ersichtlich, hängt das „ $\beta^* l$ des Nebensprechens“ mit von den Eigenschaften der Eichleitung und des benutzten Fernsprechers ab¹⁾.

Wir haben der zuletzt durchgeführten Berechnung 1 km einer homogenen Leitung zugrunde gelegt. Hätten wir statt dessen $gl = 0,5$ km gesetzt, so würden wir

$$\mathfrak{Z}'_a = \mathfrak{C}_a \cdot 2 \cdot 10^{-6} i \{ 1 - 0,1 i + \dots \}$$

gefunden haben. Für $\beta^* l$ ergeben sich dann die Werte

$$5,54 \text{ für } |\mathfrak{R}| = |\mathfrak{Z}^*| = 2000 \text{ Ohm},$$

$$6,05 \text{ für } |\mathfrak{R}| = 2000 \text{ Ohm}, \quad |\mathfrak{Z}^*| = 300 \text{ Ohm},$$

$$6,70 \text{ für } |\mathfrak{R}| = 1000 \text{ Ohm}, \quad |\mathfrak{Z}^*| = 300 \text{ Ohm}.$$

Die entsprechenden Werte für $l = 0,2$ km sind:

$$6,44; \quad 6,95; \quad 7,60.$$

Bei homogenen Leitungen wächst $\beta^* l$ mit abnehmender Kabellänge. Mit anderen Worten: Mit wachsender Länge der Übertragung (innerhalb der hier betrachteten Grenzen) wächst das Nebensprechen, falls die Leitung homogen ist.

Die Formel (41) ist, wie wir gesehen haben, nur innerhalb enger Grenzen für ziffernmäßige

¹⁾ Das spezielle soeben durchgerechnete Beispiel bezieht sich, wie man leicht sieht, auf das Übersprechen. Denn wir haben $w = w'$, $L = L'$, $\delta = \delta'$ gesetzt. Beim Mitsprechen würde man, wenn das Mitsprechen V auf l betrachtet wird, $w = \frac{1}{2} w'$ zu setzen haben. Unsere Resultate erstrecken sich, qualitativ genommen, auch auf beide Arten des Mitsprechens.

Berechnungen brauchbar. Die vorstehenden Resultate behalten gewiß ihre Geltung, auch wenn l beträchtlich über die vorhin festgestellten Grenzen hinausgeht.

Der vorhin ausgesprochenen Behauptung entgegen findet man in der Praxis nicht selten, daß mit wachsender Länge (zwischen 0,6 km und 6 bis 12 km $\beta^* l$ wächst oder im wesentlichen ungeändert bleibt. Dies liegt einfach daran, daß die Leitung nicht homogen ist und die den einzelnen Fabrikationslängen entsprechenden Werte der Konstanten δ'_1 , die teils positiv, teils negativ sind, einander mehr oder weniger kompensieren. Schaltet man einzelne Kabellängen hintereinander, sorgt aber hierbei, daß die Werte δ'_1 in allen Längen von gleichem Vorzeichen sind, so wächst, wie die Versuche ergeben haben, das Nebensprechen in der Tat mit der Länge.

Wir haben vorhin $\frac{\delta'_1}{\delta} = 0,02$ angenommen.

Ist

$$\frac{\delta'_1}{\delta} = 0,01,$$

so wird das Übersprechen geringer. Wir finden bei $l = 0,2$ km für $\beta^* l$ folgende Werte

$$7,14; \quad 7,65; \quad 8,30.$$

Das Nebensprechen verschwindet sowohl bei unpupinisierten als auch bei pupinisierten Kabeln bei mäßigen Längen der Übertragung, wenn $\delta'_1 = 0$ ist. Bei langen Übertragungen kann bei unpupinisierten Kabeln das induktive (magnetische) Moment wesentlich werden. Die Bedingung $\delta'_1 = 0$ genügt dann im allgemeinen nicht, um ein geringes Nebensprechen zu garantieren.

Setzt man in (41) $\delta'_1 = 0$, so findet man

$$\mathfrak{Z}'_a = 0.$$

Das Nebensprechen verschwindet. Diese Schlußfolgerung gilt für Übertragungen mäßiger Länge.

Damit ist die erste Hälfte unserer zuletzt ausgesprochenen Behauptung bewiesen.

Betrachten wir jetzt eine lange, am Ende offene Leitung, die wir zunächst unpupinisiert voraussetzen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns fürs erste auf die Untersuchung des Übersprechens. Alsdann ist

$$w = w', \quad A = A', \quad L = L', \quad \delta = \delta',$$

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'; \quad \gamma = \gamma'.$$

Aus (34) und (35) ergibt sich

$$\mathfrak{Z}'_a = \frac{\mathfrak{C}_a}{\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}_a} \frac{1}{2 \gamma^2} \left(\gamma_1'^2 - \frac{M i \omega}{\mathfrak{Z}} \gamma \right) = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{C}_a}{\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}_a} \left(\frac{A_1' + i \omega \delta_1'}{A + i \omega \delta} - \frac{M i \omega}{w + i \omega L} \right). \quad (48)$$

Diese Formel ist von der Formel (41) ganz verschieden. Sie enthält die Länge l der Übertragung nicht mehr. Wir wollen \mathfrak{S}_a' für das vorhin betrachtete unpupinisierte Kabel mit Leitern von 3 mm Durchmesser berechnen. Wir fanden vorhin

$$|\mathfrak{B}| = 298 \text{ Ohm.}$$

Wir nehmen jetzt der Einfachheit halber

$$|\mathfrak{R}_a| = 2000 \text{ Ohm, } \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{B}} = \text{einer reellen Zahl,} \\ A = A_1' = 0$$

an und setzen

$$M = 0,3 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km,}$$

d. h. gleich dem zehnten Teil des vorhin angenommenen Wertes. Man findet

$$|\mathfrak{S}_a'| = |\mathfrak{C}_a| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2300} |0,02 - (0,0136 + 0,021i)|. \quad (49)$$

Der „kapazitive“ und der „induktive“ (magnetische) Beitrag sind dieses Mal

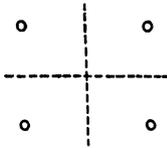


Abb. 4.

von gleicher Größenordnung. Im vorliegenden Beispiele gleichen sich die beiden Beiträge zum Teil aus. Wäre $\frac{\delta_1'}{\delta} = -0,02$, so würde das „induktive“ Moment unmittelbar eine Verstärkung des Nebensprechens bewirken. Offenbar wird auch bei $\delta_1' = 0$ das Nebensprechen jetzt merklich¹⁾.

Aus (49) folgt weiter

$$\left| \frac{\mathfrak{S}_a'}{\mathfrak{C}_a} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2300} \cdot 21,8 \cdot 10^{-3} = 0,475 \cdot 10^{-5}.$$

Bei der Berechnung des Dämpfungsexponenten $\beta^* l$ wird man $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_a$ annehmen müssen, da ja bei der experimentellen Bestimmung des Übersprechens derselbe Fernsprecher

bald auf das zu beeinflussende Leiterpaar, bald auf den Eichkasten geschaltet wird.

Wir finden so, wenn wir $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}$ setzen,

$$\mathfrak{C}_a = \frac{1}{2} e^{\gamma^* l} (\mathfrak{R} + \mathfrak{B}^*) \mathfrak{S}^* \quad \dots (50) \\ \beta^* l = 5,2.$$

Ganz anders liegen nun die Verhältnisse bei einer langen pupinisierten Übertragung. Betrachten wir wieder zunächst nur das Übersprechen und denken wir uns, daß lediglich die Stammleitungen jedes Vierers pupinisiert sind. Die Selbstinduktivität jeder Spule sei gleich 0,15 Henry, der Kupferwiderstand (bei Wechselstrom $\omega = 5000 \text{ sec}^{-1}$) gleich 4,5 Ω . Auf je 1,7 km Entfernung möge eine Spule kommen. Der Einfluß der Spulenkapazität wird der Einfachheit halber vernachlässigt.

Es sei übrigens bemerkt, daß unsere bisherigen Betrachtungen zwar streng genommen eine durchaus homogene, somit jedenfalls nicht pupinisierte Leitung voraussetzen; die Ergebnisse gelten indessen angenähert, auch wenn die Leitung pupinisiert ist, falls nur der Abstand zweier Nachbarspulen klein gegen die Wellenlänge ist.

Die Selbstinduktivität der Leitung selbst ist gegen diejenige der Spulen zu vernachlässigen. Wir erhalten jetzt

$$L = L' = \frac{0,15}{1,7} \text{ Henry/km} = 0,088 \text{ Henry/km,} \\ w = 5 + \frac{4,5}{1,7} = 7,64 \text{ Ohm/km.}$$

Für die kilometrische Gegeninduktivität M nehmen wir mit Absicht den hohen Wert $3,0 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}$

an. Die Charakteristik der Leitung hat jetzt den Wert

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = 1480 \text{ Ohm bei } \omega = 5000 \text{ sec}^{-1}.$$

Nimmt man $\mathfrak{R}_a = 2000 \Omega$ an, so erhält man nach (48), wenn zur Vereinfachung wieder $A = A_1' = 0$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{S}_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathfrak{C}_b}{3480} (0,02 - 0,0034).$$

Selbst bei einer hohen Gegeninduktivität der Leitungen von $3,0 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}$ beträgt der „induktive“ (magnetische) Anteil an dem Übersprechen lediglich 17% des „kapazitiven“.

Die Pupinisierung der Leitung hat nicht allein zur Folge, daß der Dämpfungsexponent βl sinkt, daher die Reichweite wächst. Es wird vielmehr zugleich auch das „induktive“ Übersprechen herabgedrückt.

¹⁾ Liegen die Leiter (1), (2), (3), (4), wie in der Abb. 4 angegeben, in bezug auf eine Horizontale und eine Vertikale symmetrisch, so ist, wie sich leicht zeigen läßt, $\delta_1' < 0$ und $M > 0$ (dieses, sofern die positiven Spannungs- und Stromrichtungen den in § 1 getroffenen Festsetzungen entsprechen). Es wäre zu untersuchen, ob die Vorzeichen der Größen δ_1' und M bei beliebiger Verdrehung (sowohl in den Stammkreisen, als auch in dem Viererkreis) etwa stets entgegengesetzt sind. Von Wichtigkeit wäre ferner die Feststellung, ob mit einer Verkleinerung von δ_1' (durch passende Wahl der Drallängen) stets eine Verkleinerung von M verbunden ist. Im Text ist übrigens einfach $\delta_1' > 0$, $M > 0$ angenommen worden, da es sich lediglich um die Feststellung der Größenordnung des kapazitiven und des induktiven Summanden handelt.

Beilangen pupinisierten Leitungen erhält man für das β^*l des Übersprechens unter Umständen einen besonders einfachen Ausdruck. Die Charakteristik des Eichkastens \mathfrak{Z}^* möge derjenigen der Leitung selbst gleich sein:

$$\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}.$$

Wie wir bereits gesehen haben, ist ferner in der Regel

$$\Re = \Re_a.$$

A und A_1' verschwinden gegenüber $\omega\delta$ und $\omega\delta_1'$, desgleichen ist w klein gegenüber ωL .

Für (48) und (50) schreiben wir daher

$$\frac{\mathfrak{Z}_a'}{\mathfrak{E}_a} (\mathfrak{Z} + \Re_a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_1'}{\delta} - \frac{M}{L} \right)$$

und
$$\frac{\mathfrak{Z}_a'}{\mathfrak{E}_a} (\mathfrak{Z} + \Re_a) = 2 e^{-\gamma^*l}.$$

Hieraus folgt aber

$$\boxed{e^{-\beta^*l} = |e^{-\gamma^*l}| = \frac{1}{4} \left| \frac{\delta_1'}{\delta} - \frac{M}{L} \right|} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma'(\gamma + \gamma')} \frac{Mi\omega}{\mathfrak{Z}} \gamma' &= \frac{Mi\omega}{\mathfrak{Z}} \frac{1}{\gamma + \gamma'} \\ &= Mi\omega \sqrt{\frac{A + i\omega\delta}{w + i\omega L} \frac{1}{V(w + i\omega L)(A + i\omega\delta) + V(w' + i\omega L')(A' + i\omega\delta')}} \quad (52) \end{aligned}$$

proportional. Sind sowohl die Stammleiter als auch die Vierer pupinisiert, so sind L und L' groß. Sind nur die Paare mit Pupinispulen versehen, so ist jedenfalls einer der beiden Werte L und L' groß. Handelt es sich um das Mitsprechen I auf V , so ist L groß, L' klein; betrachtet man das Mitsprechen V auf I , so ist L' groß, L klein. In beiden Fällen ist der Nenner verhältnismäßig groß, das „induktive“ Mitsprechen klein.

§ 4. Sehr lange, am Ende über Scheinwiderstände geschlossene Leitungen.

In dem vorhergehenden Paragraphen haben wir eine sehr lange Leitung untersucht, dabei aber vorausgesetzt, daß die beiden

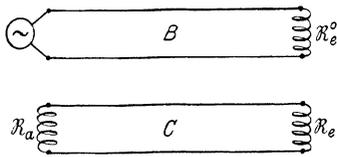


Abb. 5.

Schleifen B und C am Ende offen sind. Die Formel (35) gilt nun, wie wir jetzt zeigen wollen, auch wenn die beiden Schleifen am

Im vorliegenden Falle ist

$$\beta^*l = 5,5.$$

Ist die Leitung so weit ausgeglichen, daß

$$\frac{\delta_1'}{\delta} = 0,005$$

ist, so findet man

$$\beta^*l = 7,8.$$

Alle vorhin abgeleiteten Ergebnisse gelten auch noch für das Mitsprechen. Die Rechnungen sind nur diesmal etwas umständlicher, da jetzt $w' \neq w$ und im allgemeinen $L' \neq L$, $\gamma' \neq \gamma$, $\mathfrak{Z}' \neq \mathfrak{Z}$ ist. Man muß darum von der allgemeinen Formel (35) ausgehen.

Es ist nun bemerkenswert, daß die günstige Wirkung der Pupinisierung (Herabdrückung des induktiven Beitrages) auch beim Mitsprechen besteht, selbst dann sogar, wenn nur die Paare und nicht auch die Vierer pupinisiert sind.

Nach (35) ist der induktive Beitrag dem Ausdrucke

Ende entsprechend über die Scheinwiderstände \Re_e^0 und \Re_e geschlossen sind. Der Zustand am Ende einer sehr langen Leitung ist ohne merklichen Einfluß auf den Vorgang des Nebensprechens am Anfange dieser.

Die Grenzbedingungen (Abb. 5) lauten jetzt

$$\mathfrak{E}_e = \Re_e^0 \mathfrak{Z}_e \dots \dots \dots (53)$$

$$\mathfrak{E}_a' = -\Re_a \mathfrak{Z}_a' \dots \dots \dots (54)$$

$$\mathfrak{E}_e' = \Re_e \mathfrak{Z}_e' \dots \dots \dots (55)$$

Wegen (4), (5) und (59) ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_e &= a_1 e^{\gamma l} + a_2 e^{-\gamma l} \\ &= \Re_e^0 \left(-\frac{a_1}{\mathfrak{Z}} e^{\gamma l} + \frac{a_2}{\mathfrak{Z}} e^{-\gamma l} \right), \end{aligned}$$

folglich nach einer leichten Umrechnung

$$a_1 = a_2 e^{-2\gamma l} \frac{\Re_e^0 - \mathfrak{Z}}{\Re_e^0 + \mathfrak{Z}} \dots \dots (56)$$

Da nach (4)

$$a_1 + a_2 = \mathfrak{E}_a$$

ist,

so ist

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\Re_e^0 - \mathfrak{B}}{\Re_e^0 + \mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{C}_a \cdot \frac{e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l} \frac{\Re_e^0 - \mathfrak{B}}{\Re_e^0 + \mathfrak{B}}} \\
 a_2 &= \mathfrak{C}_a \frac{1}{1 + e^{-2\gamma l} \frac{\Re_e^0 - \mathfrak{B}}{\Re_e^0 + \mathfrak{B}}}
 \end{aligned} \right\} (57)$$

Ist speziell

$$\Re_e^0 = \mathfrak{B} \quad \dots \quad (57')$$

so findet man

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \mathfrak{C}_a \quad \dots \quad (57'')$$

Es ist nun weiter nach (23) und (24)

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{S}' &= -\frac{c_1}{\mathfrak{B}'} e^{\gamma' x} + \frac{c_2}{\mathfrak{B}'} e^{-\gamma' x} - \frac{P}{w'} \times \\
 &\times \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma x} - \gamma' e^{\gamma' x}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma x}}{\gamma + \gamma'} - a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma x} - \gamma' e^{-\gamma' x}}{\gamma - \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma x}}{\gamma + \gamma'} \right] + \\
 &\quad + \frac{M i \omega}{\mathfrak{B} w'} (a_1 e^{\gamma x} - a_2 e^{-\gamma x})
 \end{aligned} \right\} (58)$$

$$\mathfrak{C}' = c_1 e^{\gamma' x} + c_2 e^{-\gamma' x} + P \left[a_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{\gamma' x}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{e^{\gamma x}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{e^{-\gamma' x} - e^{-\gamma x}}{\gamma' - \gamma} - a_2 \frac{e^{-\gamma x}}{\gamma + \gamma'} \right] \quad (59)$$

$$w' = w' + i \omega L', \quad P = \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \gamma \right).$$

Die Grenzbedingungen (54) und (55) liefern zur Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2 nach einer leichten Umrechnung die beiden Gleichungen

$$(c_1 - c_2) \left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) + 2 c_2 = - (a_2 - a_1) \Re_a Q + (a_2 + a_1) P \frac{1}{\gamma + \gamma'},$$

$$Q = \frac{1}{2 w'} \left(\frac{\gamma_1'^2}{\gamma + \gamma'} - \frac{\gamma + 2 \gamma'}{(\gamma + \gamma') \mathfrak{B}} M i \omega \right) \dots \dots \dots (60)$$

und

$$\begin{aligned}
 &(c_1 - c_2) e^{\gamma' l} \left(1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + c_2 \left[e^{\gamma' l} \left(1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + e^{-\gamma' l} \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) \right] \\
 &= - P a_2 \left\{ \frac{e^{-\gamma' l} - e^{-\gamma l}}{\gamma' - \gamma} - \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right\} - P a_1 \left\{ \frac{e^{\gamma l} - e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \frac{e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right\} \\
 &- \Re_e \frac{P a_2}{w'} \left(\gamma \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} - \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} \right) - \\
 &- \Re_e \frac{P a_1}{w'} \left(\frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right) + \Re_e \frac{M i \omega}{\mathfrak{B} w'} (a_1 e^{\gamma l} - a_2 e^{-\gamma l}) \quad (61)
 \end{aligned}$$

Die Nennerdeterminante hat den Wert

$$\Delta = \left. \begin{aligned}
 &\left| \begin{array}{cc}
 1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} & 2 \\
 e^{\gamma' l} \left(1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) & e^{\gamma' l} \left(1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + e^{-\gamma' l} \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right)
 \end{array} \right| \\
 &= - e^{\gamma' l} \left(1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) \left(1 + \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) + e^{-\gamma' l} \left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (62)$$

Es ist ferner

$$c_1 - c_2 = \frac{1}{\Delta} \left(\begin{aligned} & - (a_2 - a_1) \Re_a Q + (a_2 + a_1) P \frac{1}{\gamma + \gamma'}; \\ & - P a_2 \left\{ \frac{e^{-\gamma' l} - e^{-\gamma l}}{\gamma' - \gamma} - \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right\} - \\ & - P a_1 \left\{ \frac{e^{\gamma l} - e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \frac{e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right\} - \\ & - \Re_e \frac{P a_2}{w'} \left(\gamma \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} - \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} \right) - \\ & - \Re_e \frac{P a_1}{w'} \left(\gamma \frac{e^{\gamma l}}{\gamma - \gamma'} - \gamma' \frac{e^{\gamma' l}}{\gamma + \gamma'} - \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right) + \\ & + \Re_e \frac{M i \omega}{\beta w'} (a_1 e^{\gamma l} - a_2 e^{-\gamma l}); \end{aligned} \right. \quad \left. \begin{aligned} & 2 \\ & e^{\gamma' l} \left(1 + \frac{\Re_e}{\beta'} \right) + e^{-\gamma' l} \left(1 - \frac{\Re_e}{\beta'} \right) \end{aligned} \right) \quad (63)$$

Dividiert man den Zähler und den Nenner dieses Ausdruckes durch $e^{\gamma' l}$ und vernachlässigt alle Glieder, die $e^{-2\gamma l}$, $e^{-(\gamma + \gamma') l}$ enthalten, so erhält man

$$c_1 - c_2 = - \frac{\mathfrak{G}_a}{1 + \frac{\beta}{\beta'}} \left(- \Re_a Q + P \frac{1}{\gamma + \gamma'} \right) \quad (64)$$

Hieraus und aus (58) folgt nach einer leichten Umrechnung

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}'_a &= \frac{\mathfrak{G}_a}{\Re_a + \beta'} \left\{ - \Re_a Q + P \frac{1}{\gamma + \gamma'} \right\} + \\ &+ \mathfrak{G}_a Q = \frac{\mathfrak{G}_a}{\Re_a + \beta'} \cdot \frac{1}{\gamma + \gamma'} \left\{ \frac{\gamma_1'^2}{\gamma'} - \frac{M i \omega}{\beta} \right\} \quad (65) \end{aligned}$$

oder wegen

$$\mathfrak{G}_a = \beta \mathfrak{Z}_a,$$

$$\frac{\mathfrak{Z}'_a}{\mathfrak{Z}_a} = \frac{\beta}{\Re_a + \beta'} \cdot \frac{1}{\gamma + \gamma'} \left\{ \frac{\gamma_1'^2}{\gamma'} - \frac{M i \omega}{\beta} \right\} \quad (66)$$

Diese Formel ist aber in der Tat mit der Formel (35) identisch.

Die Schlußfolgerungen, die wir in § 3 für den Fall sehr langer am Ende offener Leitungen abgeleitet haben, gelten mithin allgemein, auch wenn die Leitungen am Ende über beliebige Scheinwiderstände geschlossen sind.

§ 5. Sehr lange Leitungen. Nebensprechen am Ende der empfangenden Schleife.

Wir haben bis jetzt durchweg angenommen, daß der Generator (im allgemeinsten

Sinne des Wortes) und der durch Nebensprechen beeinflusste Apparat sich beide am Anfang, oder, was auf dasselbe hinauskommt, beide am Ende der Leitung befinden. Den Betrachtungen dieses Paragraphen legen wir die in der Abb. 6 veranschaulichte Schaltung zugrunde. Am Anfang der Leitung wird also ge-

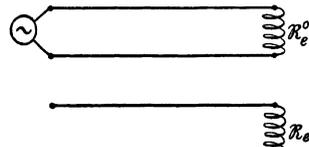


Abb. 6.

sprochen, am Ende das Nebensprechen beobachtet. Zur Vereinfachung der sonst recht komplizierten Formeln nehmen wir

$$\Re_e^0 = \beta, \quad \Re_e = \beta', \quad M = 0 \quad (67)$$

an. Bei pupinisierten Leitungen ist aus den am Schluß des § 3 auseinandergesetzten Gründen die Annahme $M = 0$ durchaus zulässig.

Die Grenzbedingungen lauten jetzt

$$\mathfrak{Z}'_a = 0, \quad \mathfrak{E}'_e = \Re_e \mathfrak{Z}'_e \quad (68)$$

Nach (57') und (57'') ist vor allem jetzt

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \mathfrak{G}_a \quad (69)$$

Aus (68), (23) und (24) ergibt sich weiter nach einer geringfügigen Umrechnung

$$-c_1 + c_2 + \frac{1}{2} \mathfrak{G}_a \frac{\gamma_1'^2}{\gamma'(\gamma + \gamma')} = 0 \quad (70)$$

$$\begin{aligned} c_1 e^{\gamma' l} + c_2 e^{-\gamma' l} + \frac{\gamma_1'^2}{2 \gamma'} \mathfrak{G}_a \left\{ \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right\} \\ = \frac{1}{\gamma'} \left[-\gamma' c_1 e^{\gamma' l} + \gamma' c_2 e^{-\gamma' l} + \frac{\gamma_1'^2}{2 \gamma'} \mathfrak{G}_a \left(\frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right) \right] \quad (71) \end{aligned}$$

Aus (71) folgt leicht

$$c_1 e^{\gamma' l} = \frac{\gamma_1'^2 e^{-\gamma l}}{2\gamma'(\gamma + \gamma')} \mathfrak{E}_a \dots (72)$$

daher wegen (70)

$$c_2 = -\frac{1}{2} \mathfrak{E}_a \frac{\gamma_1'^2}{\gamma'(\gamma + \gamma')} + c_1$$

$$= \frac{1}{2} \mathfrak{E}_a \frac{\gamma_1'^2}{\gamma'(\gamma + \gamma')} (-1 + e^{-(\gamma + \gamma')l}).$$

Aus (24) folgt nach einer Umrechnung

$$\mathfrak{J}_e' = \frac{\mathfrak{E}_a}{\mathfrak{J}'} \cdot \frac{\gamma_1'^2}{2\gamma'} \left\{ \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \frac{e^{-\gamma' l}}{\gamma + \gamma'} \right\} (73)$$

oder auch

$$\mathfrak{J}_e' = \mathfrak{J}_a \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}'} \frac{\gamma_1'^2}{2\gamma'} \left\{ \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \frac{e^{-\gamma' l}}{\gamma + \gamma'} \right\} (74)$$

Diese Formel ist von der Formel, die man erhält, wenn man in (35) $M = 0$ setzt, ganz verschieden. Wegen der Exponentialfaktoren $e^{-\gamma l}$, $e^{-\gamma' l}$ ist \mathfrak{J}_e' beträchtlich kleiner als \mathfrak{J}_a' (aus (35) gewonnen). Das Nebensprechen ist jetzt geringer als bei der Schaltung nach Abb. 2. Diese Folgerung dürfte von den Annahmen (67) unabhängig sein und auch bei mäßigen Längen der Übertragung zutreffen.

Wie wir in § 3 gesehen haben, ist bei pupinisierten Leitungen der induktive Anteil des Nebensprechens gegenüber dem kapazitiven unwesentlich. Wir setzen daher in (35) zur Vereinfachung $M = 0$ und erhalten, wenn wir ferner beachten, daß bei Fernsprechkabeln A_1' gegenüber $\omega \delta_1'$ in der Regel verschwindet,

$$\mathfrak{J}_a' = \mathfrak{J}_a \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}' + \mathfrak{R}_a} \frac{\gamma_1'^2}{\gamma'(\gamma + \gamma')}$$

$$= \mathfrak{J}_a \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}' + \mathfrak{R}_a} \frac{(w' + i\omega L') i\omega \delta_1'}{\gamma'(\gamma + \gamma')} (75)$$

Diese Formel gilt sowohl für das Übersprechen I auf II und II auf I als auch für die vier Arten des Mitsprechens I auf V; V auf I; II auf V; V auf II. Wie im Kapitel II ausführlich begründet wird, sind die den sechs Arten des Nebensprechens entsprechenden sechs Werte δ_1' paarweise einander gleich. Bezeichnen wir ferner mit c_{12} , c_{13} usw. die „gegenseitigen Kapazitäten“ der Leiterpaare (1), (2); (1), (3) usw.¹⁾, so verschwinden alle drei Werte δ_1' , wenn

¹⁾ Bei der Bestimmung von c_{ik} werden alle Leiter, außer (i) und (k), von einander und von dem Bleimantel (der Erde bei Freileitungen) isoliert gehalten, während (i) und (k) an die Spannungsquelle angeschlossen werden.

$$Q = \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{Mi\omega}{\mathfrak{J}} \gamma \right)$$

$$\times \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right], (80)$$

$$S = \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \left[\frac{\gamma_1'^2}{\gamma + \gamma'} - \frac{(\gamma + 2\gamma')}{(\gamma + \gamma')\mathfrak{J}} Mi\omega \right] \frac{1}{w' + i\omega L'}$$

$$c_{13} = c_{14} = c_{23} = c_{24} \dots (76)$$

ist.

Aus praktischen Gründen werden die Gleichungen (76) durch die ihnen gleichwertigen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} p - q = r - s = 0, & \quad p = c_{13} - c_{23}, \\ p + q = 0, & \quad q = c_{14} - c_{24}, \\ r + s = 0, & \quad r = c_{13} - c_{14}, \\ & \quad s = c_{23} - c_{24}, \end{aligned} \right\} (77)$$

ersetzt¹⁾.

In den drei letzten Paragraphen haben wir uns mit sehr langen Fernsprechübertragungen beschäftigt. Wir kehren jetzt zur Betrachtung kurzer Leitungen zurück. Das Studium dieser ist aus doppeltem Grunde von Interesse: zuerst liegen bei den Laboratoriumsversuchen meist nur kurze Kabelstrecken vor, zweitens gewinnt man aus der Betrachtung kurzer Schleifen Methoden zur experimentellen Bestimmung der elektrischen Konstanten, vor allem der Konstanten M und δ_1' .

§ 6. Kurze Leitungen. Beiderseits offener empfangender Kreis.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung betrachten wir den in der nebenstehenden Abb. 7 veranschaulichten Betriebsfall. Der

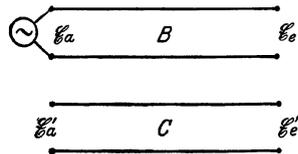


Abb. 7.

Stromkreis B ist am Ende, der Stromkreis C beiderseits offen. Die Grenzbedingungen sind jetzt

$$\mathfrak{J}_e = \mathfrak{J}_e' = \mathfrak{J}_a' = 0. \dots (78)$$

Sie liefern nach den allgemeinen Formeln in § 1 die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten c_1 und c_2 :

$$\left. \begin{aligned} -\gamma' e^{\gamma' l} c_1 + \gamma' e^{-\gamma' l} c_2 &= Q, \\ -\frac{1}{\mathfrak{J}'} c_1 + \frac{1}{\mathfrak{J}'} c_2 &= S, \end{aligned} \right\} (79)$$

¹⁾ Vgl. die genauere Theorie im Kapitel II, § 2

Aus (79) erhält man:

$$c_1 = \frac{\frac{1}{3'} Q - \gamma' e^{-\gamma' l} S}{\frac{\gamma'}{3'} (e^{-\gamma' l} - e^{\gamma' l})},$$

$$c_2 = \frac{-\gamma' S e^{\gamma' l} + \frac{1}{3'} Q}{\frac{\gamma'}{3'} (e^{-\gamma' l} - e^{\gamma' l})},$$

daher

$$c_1 + c_2 = \frac{\frac{2}{3'} Q - S \gamma' (e^{\gamma' l} + e^{-\gamma' l})}{\frac{\gamma'}{3'} (e^{-\gamma' l} - e^{\gamma' l})}.$$

Die Spannung am Anfang des Stromkreises C ist nach (27) gleich

$$\mathfrak{G}_a' = c_1 + c_2 - \frac{1}{2 \gamma' (\gamma + \gamma')} \mathfrak{G}_a (\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma).$$

Für kurze Leitungen ($l \leq 1$ km) erhält man durch Reihenentwicklung nacheinander

$$Q = \frac{1}{2 \gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma \right) \mathfrak{G}_a \left\{ \gamma' l + \left(-\frac{1}{3} \gamma^2 \gamma' - \frac{1}{3} \gamma \gamma'^2 + \frac{1}{6} \gamma'^3 \right) l^3 + \dots \right\}$$

$$S \gamma' (e^{\gamma' l} + e^{-\gamma' l}) = -\mathfrak{G}_a \gamma \gamma' l \left[\frac{\gamma_1'^2}{\gamma + \gamma'} - \frac{\gamma + 2 \gamma'}{\gamma + \gamma'} \frac{M i \omega}{3} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{w' + i \omega L'} \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma'^2}{2} - \frac{\gamma^2}{3} \right) l^2 + ((l^4)) \right\},$$

$$\frac{1}{\frac{\gamma'}{3'} (e^{-\gamma' l} - e^{\gamma' l})} = -\frac{3'}{2 \gamma'^2 l} \left\{ 1 - \frac{\gamma'^2 l^2}{3} + ((l^4)) \right\},$$

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{2 \gamma'^2} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma \right) \mathfrak{G}_a \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma \gamma' - \frac{1}{6} \gamma'^2 \right) l^2 + \dots \right\},$$

$$\frac{\mathfrak{G}_a'}{\mathfrak{G}_a} = -\frac{A_1' + i \omega \delta_1'}{A' + i \omega \delta'} +$$

$$+ l^2 \left[\frac{\gamma_1'^2}{2} \frac{\frac{2}{3} \gamma^3 + \frac{1}{3} \gamma^2 \gamma' + \frac{1}{6} \gamma'^3}{\gamma'^2 (\gamma + \gamma')} + \frac{M i \omega}{3} \gamma \frac{1}{2 \gamma'} \frac{\frac{1}{3} \gamma \gamma' - \frac{1}{3} \gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma'^2}{\gamma + \gamma'} \right] + ((l^3)) \dots \quad (81)$$

Bis auf Glieder zweiter Ordnung ist

$$\boxed{\frac{\mathfrak{G}_a'}{\mathfrak{G}_a} = -\frac{A_1' + i \omega \delta_1'}{A' + i \omega \delta'}}$$

oder, da bei $\omega = 5000$ die Werte A' und A_1' in der Regel entsprechend gegenüber $\omega \delta'$ und $\omega \delta_1'$ verschwinden,

$$\boxed{\frac{\mathfrak{G}_a'}{\mathfrak{G}_a} = -\frac{\delta_1'}{\delta'}} \dots (82)$$

In der Formel (82) bezeichnet δ' die Kapazität des Stromkreises B für 1 km. Ist

diese Kapazität bekannt, so liefert die Gleichung (82) sogleich den maßgebenden Wert δ_1' der Größe und dem Vorzeichen nach.

Um die Größenordnung des Klammerausdruckes in (81) abzuschätzen, nehmen wir

$$\gamma = \gamma' \text{ (Übersprechen), } l = 0,2 \text{ km,}$$

$$M = 3,0 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}$$

an. Im übrigen sei das Kabel mit dem in § 3 betrachteten identisch (Leiter von 3 mm Durchmesser). Wir finden

$$\frac{\mathfrak{G}_a'}{\mathfrak{G}_a} = -\frac{A_1' + i \omega \delta_1'}{A' + i \omega \delta'} + 0,04 \left[\frac{7}{24} (A_1' + i \omega \delta_1') (w' + i \omega L') + \frac{1}{\gamma} M i \omega (A + i \omega \delta) \right] + ((l^3)).$$

Das erste Glied rechter Hand ist gleich 0,02, das zweite etwa $1,6 \times 10^{-6}$, kann also dem ersten gegenüber in der Tat vernachlässigt werden. Die Vernachlässigung erscheint auch bei $l = 1$ km noch zulässig.

§ 7. Kurze Leitungen. Der gebende Kreis kurzgeschlossen, der empfangende Kreis über einen kleinen Widerstand geschlossen.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung (Bestimmung des Koeffizienten der gegenseitigen Induktivität M) wird jetzt der fol-

gende Betriebsfall betrachtet. (Abb. 8.) Der

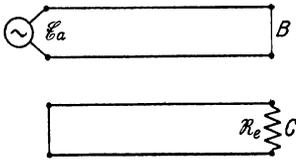


Abb. 8.

Stromkreis B ist am Ende kurzgeschlossen, der Stromkreis C ist am Anfang kurz, am Ende über einen Scheinwiderstand

$$\mathfrak{R}_e = R_e + i \omega L_e$$

geschlossen. (Abb. 8). Offenbar ist jetzt

$$\mathcal{E}_a' = 0, \mathcal{E}_e = 0, \mathcal{E}_e' = \mathfrak{R}_e \mathfrak{J}_e'. \quad (83)$$

Die Gl. (23) ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e' &= c_1 e^{\gamma' l} + c_2 e^{-\gamma' l} + \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma \right) \times \\ &\times \left[a_1 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} - a_2 \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} - a_2 \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right], \dots \quad (84) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_a' = c_1 + c_2 - \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma \right) \frac{\mathcal{E}_a}{\gamma + \gamma'} = 0, \quad (85)$$

Es ist ferner nach (4) und (57)

$$\mathcal{E}_e = a_1 e^{\gamma l} + a_2 e^{-\gamma l} = 0, \mathcal{E}_a = a_1 + a_2,$$

folglich

$$a_1 = -\mathcal{E}_a \frac{e^{-2\gamma l}}{1 - e^{-2\gamma l}}, a_2 = \mathcal{E}_a \frac{1}{1 - e^{-2\gamma l}}. \quad (87)$$

daher

$$c_1 + c_2 = \frac{\mathcal{E}_a}{\gamma + \gamma'} \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma \right). \quad (86)$$

Die Gl. (24) liefert weiter

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_e' (\omega' + L' i \omega) &= -\gamma' c_1 e^{\gamma' l} + \gamma' c_2 e^{-\gamma' l} - \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma \right) \times \\ &\times \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] \\ &+ \frac{M i \omega}{3} (a_1 e^{\gamma l} - a_2 e^{-\gamma l}). \dots \quad (88) \end{aligned}$$

Die Formeln (83), (84) und (88) ergeben eine lineare Gleichung für c_1 und c_2 . Aus dieser und aus (86) werden c_1 und c_2 bestimmt. Wir begnügen uns mit der Durchrechnung des besonderen Falles einer kurzen Leitung ($l \leq 1$ km).

lung und Zusammenfassen ähnlicher Glieder nacheinander

$$\begin{aligned} a_1 &= -\mathcal{E}_a \frac{1}{2\gamma l} \left\{ 1 - \gamma l + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + ((l^4)) \right\}, \\ a_2 &= \mathcal{E}_a \frac{1}{2\gamma l} \left\{ 1 + \gamma l + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + ((l^4)) \right\}, \end{aligned}$$

Man erhält jetzt durch Reihenentwick-

$$\begin{aligned} \left[a_1 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} - a_2 \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} - a_2 \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] \\ = -\mathcal{E}_a \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma^2}{6} - \frac{\gamma \gamma'}{3} \right) l^2 + ((l^4)) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma' - \gamma} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] \\ = \mathcal{E}_a \frac{1}{l} \frac{\gamma'}{\gamma(\gamma + \gamma')} \left\{ -1 + l^2 \left(\frac{2}{3} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma'^2 \right) + ((l^4)) \right\}, \end{aligned}$$

$$a_1 e^{\gamma l} - a_2 e^{-\gamma l} = -\frac{1}{\gamma l} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \gamma^2 l^2 + ((l^4)) \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_e' &= \frac{1}{\omega' + i \omega L'} \left\{ -\gamma' c_1 e^{\gamma' l} + \gamma' c_2 e^{-\gamma' l} - \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma \right) \mathcal{E}_a \frac{1}{l} \frac{\gamma'}{\gamma(\gamma + \gamma')} \times \right. \\ &\times \left. \left\{ -1 + l^2 \left(\frac{2}{3} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma'^2 \right) + ((l^4)) \right\} - \frac{M i \omega}{3} \frac{\mathcal{E}_a}{\gamma l} \left\{ 1 - \frac{\gamma^2 l^2}{6} + ((l^4)) \right\} \right\}, \dots \quad (89) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_e' = c_1 e^{\gamma' l} + c_2 e^{-\gamma' l} - \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{3} \gamma \right) \frac{\mathcal{E}_a}{\gamma} \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma^2}{6} - \frac{\gamma \gamma'}{3} \right) l^2 + ((l^4)) \right\}. \quad (90)$$

Zur Bestimmung der Konstanten c_1 ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
 c_1 \left\{ e^{\gamma' l} + \frac{\Re_e}{w' + i \omega L'} \gamma' e^{\gamma' l} - e^{-\gamma' l} + \frac{\Re_e}{w' + i \omega L'} \gamma' e^{-\gamma' l} \right\} = \\
 = \frac{1}{2 \gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \gamma \right) \frac{\mathfrak{G}_a}{\gamma} \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma'^2}{6} - \frac{\gamma \gamma'}{\mathfrak{B}} \right) l^2 + ((l^4)) \right\} \\
 - \frac{\Re_e}{w' + i \omega L'} \frac{1}{2 \gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \gamma \right) \mathfrak{G}_a \frac{1}{l} \frac{\gamma'}{\gamma (\gamma + \gamma')} \times \\
 \times \left\{ -1 + l^2 \left(\frac{2}{3} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma'^2 \right) + ((l^4)) \right\} - \\
 - \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \frac{\Re_e}{w' + i \omega L'} \frac{1}{\gamma l} \left\{ 1 - \frac{\gamma^2 l^2}{6} + ((l^4)) \right\} - \\
 - \frac{\mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} \frac{1}{2 \gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \gamma \right) \left\{ e^{-\gamma' l} - \frac{\Re_e}{w' + i \omega L'} \gamma' e^{-\gamma' l} \right\}. \quad \dots \quad (91)
 \end{aligned}$$

Der gesamte Scheinwiderstand des Stromkreises C (außer \Re_e) ist gleich

$$(w' + i \omega L') l \quad \dots \quad (92)$$

Wir nehmen an, daß $|\Re_e|$ und $|(w' + i \omega L')|$

von gleicher Größenordnung sind, und setzen demgemäß

$$\Re_e = \theta (w' + i \omega L') l \quad \dots \quad (93)$$

unter θ eine komplexe Zahl von der Größenordnung 1 verstanden. Alsdann ist

$$\frac{1}{e^{\gamma' l} - e^{-\gamma' l} + \frac{\Re_e \gamma'}{w' + i \omega L'} (e^{\gamma' l} + e^{-\gamma' l})} = \frac{1}{2 \gamma' l} \frac{1}{1 + \theta} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \theta} \frac{\theta}{6} \gamma'^2 l^2 + ((l^4)) \right\};$$

$$e^{-\gamma' l} - \theta l \gamma' e^{-\gamma' l} = 1 - (1 + \theta) \gamma' l + \left(\frac{1}{2} + \theta \right) \gamma'^2 l^2 + ((l^3)),$$

$$c_1 = \mathfrak{G}_a \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{P}{\gamma (\gamma + \gamma')} \frac{1}{l} - \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{1}{\gamma \gamma'} \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \frac{1}{l} + P \frac{1}{\gamma + \gamma'} + ((l)) \right\}, \quad P = \frac{1}{2 \gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \gamma \right)$$

$$c_2 = \mathfrak{G}_a \cdot \frac{1}{2} \left\{ -\frac{P}{\gamma (\gamma + \gamma')} \frac{1}{l} + \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{1}{\gamma \gamma'} \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \frac{1}{l} + P \frac{1}{\gamma + \gamma'} + ((l)) \right\},$$

$$\gamma' (c_2 e^{-\gamma' l} - c_1 e^{\gamma' l}) = \gamma' \left\{ c_2 - c_1 - (c_1 + c_2) \gamma' l + (c_2 - c_1) \frac{\gamma'^2 l^2}{2} + \dots \right\}$$

$$= \gamma' \mathfrak{G}_a \left[-\frac{P}{\gamma (\gamma + \gamma')} \frac{1}{l} + \frac{\theta}{1 + \theta} \frac{1}{\gamma \gamma'} \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \frac{1}{l} + ((l)) \right],$$

$$\mathfrak{S}_e' (w' + i \omega L') = \mathfrak{G}_a \left\{ -\frac{1}{1 + \theta} \frac{1}{\gamma} \frac{M i \omega}{\mathfrak{B}} \frac{1}{l} + ((l)) \right\}.$$

Da überdies

$$\mathfrak{S}_a = \frac{a_2 - a_1}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}_a \frac{1}{\gamma l} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + \dots \right\}, \quad \frac{\mathfrak{G}_a}{\mathfrak{B} \gamma l} = \mathfrak{S}_a \left\{ 1 - \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + \dots \right\}. \quad \dots \quad (94)$$

ist, so ist endgültig

$$\boxed{\mathfrak{S}_e' = -\mathfrak{S}_a \frac{M i \omega}{(1 + \theta) (w' + i \omega L')} + ((l^2)) = -\mathfrak{S}_a \frac{l M i \omega}{l (w' + i \omega L') + \Re_e} + ((l^2))}. \quad \dots \quad (95)$$

Hier bezeichnet lM die gegenseitige Induktivität der Stromkreise B und C . Der Nenner $l(w' + i \omega L') + \Re_e$ ist der gesamte Scheinwiderstand des Stromkreises C (den Scheinwiderstand \Re_e mitbegriffen). Wie ersichtlich,

verhalten sich die beiden Stromkreise B und C so, wie wenn die Selbst- und die gegenseitige Induktivität punktförmig und nicht gleichmäßig verteilt wären. Der Einfluß der

Kapazität (kapazitiver Kopplung) äußert sich erst in dem Gliede $((l^2))$.

Aus (83) und (95) folgt nunmehr

$$\mathfrak{E}_e = -\mathfrak{Z}_a \frac{l M i \omega \mathfrak{R}_e}{l(w' + i \omega L') + \mathfrak{R}_e} + ((l^2)) \quad (96)$$

Ist insbesondere $\mathfrak{R}_e = 0$ (d. h. C kurzgeschlossen), so ist

$$\mathfrak{Z}_e' = -\mathfrak{Z}_a \frac{M i \omega}{w' + i \omega L'} + ((l^2)) \quad (97)$$

Die Formel (96) eröffnet die Möglichkeit, den Koeffizienten der Gegeninduktivität M an kürzeren Übertragungen (einzelnen Fabrikationslängen oder Gruppen von Längen) experimentell zu bestimmen. Man wird so z. B. den Einfluß der Verschiedenheit der Dralle auf den Wert M verfolgen können.

Ist der Widerstand nicht am Ende, sondern am Anfang der Schleife C untergebracht, so ist

$$\mathfrak{Z}_a' = -\mathfrak{Z}_a \frac{l M i \omega}{l(w' + i \omega L') + \mathfrak{R}_a} + ((l^2)) \quad (98)$$

Auch jetzt wird vorausgesetzt, daß

$$\mathfrak{R}_a = \theta' (w' + i \omega L') l$$

ist, unter θ' eine komplexe Zahl von der Größenordnung 1 verstanden.

$$\mathfrak{E}_e' = c_1 e^{\gamma l} + c_2 e^{-\gamma l} + P \left[a_1 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{\gamma - \gamma'} + a_2 \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} \right], \dots \quad (104)$$

$$\mathfrak{Z}_e' (w' + i \omega L') = -\gamma' c_1 e^{\gamma l} + \gamma' c_2 e^{-\gamma l} -$$

$$- P \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] +$$

$$+ \frac{M i \omega}{\mathfrak{Z}} (a_1 e^{\gamma l} - a_2 e^{-\gamma l}), \dots \quad (105)$$

$$\mathfrak{Z}_a' (w' + i \omega L') = -\gamma' c_1 + \gamma' c_2 - Q (a_1 - a_2) (w' + i \omega L'), \dots \quad (106)$$

$$P = \frac{1}{2\gamma} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\mathfrak{Z}} \gamma \right),$$

$$Q = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_1'^2}{\gamma + \gamma'} - \frac{\gamma + 2\gamma' M i \omega}{\gamma + \gamma'} \frac{1}{\mathfrak{Z}} \right] \frac{1}{w' + i \omega L'} \quad (107)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten c_1 und c_2 erhält man die beiden linearen Gleichungen

$$\mathfrak{E}_a' = -\mathfrak{R}_a \mathfrak{Z}_a', \quad \mathfrak{E}_e' = \mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_e'. \quad (108)$$

Wir beschränken uns auf die Betrachtung einer kurzen Fernsprechübertragung ($l \leq 1 \text{ km}$)

§ 8. Kurze Leitungen. Der gebende Kreis kurzgeschlossen. Der empfangende Kreis beiderseits über verhältnismäßig große Widerstände geschlossen.

Wir betrachten jetzt den folgenden Betriebsfall:

Die Stromschleife B ist am Ende kurzgeschlossen, die Stromschleife C ist am Anfang und am Ende entsprechend über die Schein-

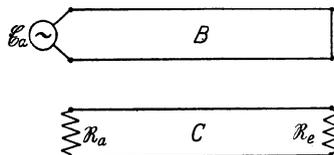


Abb. 9.

widerstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e geschlossen (Abb. 9). Die Grenzbedingungen lauten jetzt:

$$\mathfrak{E}_e = 0, \quad \mathfrak{E}_a' = -\mathfrak{R}_a \mathfrak{Z}_a', \quad \mathfrak{E}_e = \mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_e'. \quad (99)$$

Wegen

$$\mathfrak{E}_e = a_1 e^{\gamma l} + a_2 e^{-\gamma l} = 0 \quad (100)$$

und

$$\mathfrak{E}_a' = a_1 + a_2 \quad (101)$$

ist

$$a_1 = \mathfrak{E}_a \frac{1}{1 - e^{2\gamma l}}, \quad a_2 = \mathfrak{E}_a \frac{1}{1 - e^{-2\gamma l}} \quad (102)$$

Ferner ist nach (23) und (24)

$$\mathfrak{E}_a' = c_1 + c_2 - \frac{P \mathfrak{E}_a}{\gamma + \gamma'} \quad (103)$$

und entwickeln sogleich die Exponentialfunktionen nach Potenzen von γl und $\gamma' l$. Es ergibt sich so:

$$a_1 = -\frac{\mathfrak{E}_a}{2\gamma l} \left\{ 1 - \gamma l + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + ((l^4)) \right\},$$

$$a_2 = \frac{\mathfrak{E}_a}{2\gamma l} \left\{ 1 + \gamma l + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + ((l^4)) \right\},$$

$$a_1 - a_2 = -\frac{\mathfrak{E}_a}{\gamma l} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + ((l^4)) \right\}$$

$$\begin{aligned} & \left[a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - a_1 \frac{\gamma e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} + a_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] \\ & = \mathfrak{G}_a \frac{\gamma'}{\gamma(\gamma + \gamma')l} \left\{ -1 + \left(\frac{2}{3} \gamma^2 - \frac{1}{2} \gamma'^2 \right) l^2 + ((l^4))' \right\}, \\ & \left[a_1 \frac{e^{\gamma l} - e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} + a_2 \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} \right] = -\mathfrak{G}_a \frac{1}{\gamma} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3} \gamma \gamma' + \frac{1}{6} \gamma'^2 \right) l^2 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung von c_1 und c_2 schreiben wir in der Form

$$(c_1 - c_2) \left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) + 2c_2 = \frac{\mathfrak{G}_a P}{\gamma + \gamma'} - \Re_a Q \mathfrak{G}_a \frac{1}{\gamma l} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + ((l^4)) \right\}. \quad (109)$$

$$\begin{aligned} & c_1 - c_2 \left(1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + c_2 \left\{ \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) e^{-2\gamma' l} + \left(1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) \right\} \\ & = \frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma} \left\{ 1 - \gamma' l + \left(-\frac{1}{3} \gamma \gamma' + \frac{2}{3} \gamma^2 \right) l^2 + \dots \right\} - \Re_e \frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma(\gamma + \gamma') \mathfrak{B}' l} \left\{ -1 + \gamma' l + \left(\frac{2}{3} \gamma^2 - \gamma'^2 \right) l^2 + \dots \right\} \\ & \quad - \Re_e \frac{M i \omega}{\mathfrak{B} \mathfrak{B}' \gamma \gamma' l} \mathfrak{G}_a \left\{ 1 - \gamma' l + \left(\frac{\gamma'^2}{2} - \frac{1}{6} \gamma^2 \right) l^2 + \dots \right\}. \quad (110) \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen wird $c_1 - c_2$ ermittelt und in die aus (106) sich ergebende Formel

$$\mathfrak{A}' = -\frac{c_1 - c_2}{\mathfrak{B}'} - Q(a_1 - a_2) \dots \dots \dots (111)$$

eingesetzt.

Die Nennerdeterminante der Gleichungen (109), (110) hat den Wert

$$\begin{aligned} \Delta & = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} & 2 \\ 1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} & \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) e^{-2\gamma' l} + \left(1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) \end{vmatrix} \\ & = -2 \left\{ \frac{\Re_a + \Re_e}{\mathfrak{B}'} + \left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) \left(\gamma' l - \gamma'^2 l^2 + \frac{2}{3} \gamma'^3 l^3 - \dots \right) \right\} \quad (112) \end{aligned}$$

Für $c_1 - c_2$ ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} & c_1 - c_2 = \frac{\mathfrak{G}_a P}{\gamma + \gamma'} - \Re_a Q \mathfrak{G}_a \frac{1}{\gamma l} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + \dots \right\}; \quad 2 \\ & = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma} \left\{ 1 - \gamma' l + \left(-\frac{1}{3} \gamma \gamma' + \frac{2}{3} \gamma^2 \right) l^2 + \dots \right\} - \right. \\ & \quad \left. - \Re_e \frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma(\gamma + \gamma') \mathfrak{B}' l} \left\{ -1 + \gamma' l + \left(\frac{2}{3} \gamma^2 - \gamma'^2 \right) l^2 + \dots \right\} - \right. \\ & \quad \left. - \Re_e \frac{M i \omega}{\mathfrak{B} \mathfrak{B}' \gamma \gamma' l} \mathfrak{G}_a \left\{ 1 - \gamma' l + \left(\frac{\gamma'^2}{2} - \frac{1}{6} \gamma^2 \right) l^2 + \dots \right\}; \quad 2 - \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) 2 \gamma' l + \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) 2 \gamma'^2 l^2 \right] \quad (113) \end{aligned}$$

Es wird jetzt die weitere Voraussetzung gemacht, daß der Ausdruck

$$\left| \frac{\left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right)}{\frac{\Re_a + \Re_e}{\mathfrak{B}'}} \cdot \frac{e^{-2\gamma' l} - 1}{2} \right| \ll 1 \text{ (klein gegen 1)} \dots \dots \dots (114)$$

ist.

Diese Voraussetzung ist in der Regel erfüllt, wenn beispielsweise $\beta' l \leq 0,01$ und

$$\frac{1}{5} \mathfrak{B}' \leq |\mathfrak{R}_a| \leq 5 |\mathfrak{B}'|,$$

$$\frac{1}{5} \mathfrak{B}' \leq |\mathfrak{R}_e| \leq 5 |\mathfrak{B}'|$$

ist.

Von dieser Größenordnung sind die Scheinwiderstände der üblichen Fernsprechapparate.

Die Ungleichheit (114) ist ferner erfüllt,

wenn $\left| \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{B}'} \right| = \infty$ gilt, d. h. wenn das entfernte Ende der Schleife C offen ist, wenn zugleich

$$\left| 1 - \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{B}'} \right| \cdot \left| \frac{e^{-2\gamma' l} - 1}{2} \right| \ll 1 \quad (115)$$

gilt. Hierzu genügt es zum Beispiel, daß

$$0 \leq \left| \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{B}'} \right| \leq 2 \dots \dots \dots (116)$$

ist.

Nunmehr erhält man durch Reihenentwicklung die Formel

$$\frac{1}{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \left\{ 1 + \frac{\left(1 - \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{B}'}\right) \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{B}'}\right)}{\frac{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{B}'}} (-\gamma' l + \gamma'^2 l^2 - \dots) + \frac{\left(1 - \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{B}'}\right)^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{B}'}\right)^2}{\left(\frac{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{B}'}\right)^2} (-\gamma' l + \gamma'^2 l^2 - \dots)^2 \dots \right\} \quad (117)$$

Dieser Wert wird in (113) eingesetzt und der sich ergebende Ausdruck nach Potenzen von l geordnet. Man findet ganz einfach

$$c_1 - c_2 = \mathfrak{E}_a \left\{ \mathfrak{B}' Q \frac{1}{\gamma' l} + \frac{M i \omega}{\gamma \mathfrak{B}} \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} + ((l)) \right\} \dots \dots \dots (118)$$

Hieraus und aus (111) ergibt sich jetzt

$$\mathfrak{S}_a' = -\mathfrak{E}_a \left\{ \frac{M i \omega}{\gamma \mathfrak{B}} \frac{1}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} + ((l)) \right\} \dots \quad (119)$$

Da nun nach (5) und (102)

$$\mathfrak{S}_a = \frac{1}{\mathfrak{B}} \mathfrak{E}_a \frac{1}{\gamma l} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 + \dots \right\} \dots \quad (120)$$

ist, so kann man für (119) auch setzen

$$\mathfrak{S}_a = -\frac{M i \omega l}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} + ((l^2)) \quad (121)$$

Ist insbesondere $|\mathfrak{R}_e| = \infty$ (Schleife C am Ende offen), so folgt aus (121) unter der Annahme $0 \leq \left| \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{B}'} \right| \leq 2$,

$$\mathfrak{S}_a' = ((l^2)) \dots \dots \dots (122)$$

Die Formel (121) ist der früher abgeleiteten Formel (95) ganz analog. Jene Formel (95) haben wir unter der Annahme erhalten, daß $|\mathfrak{R}_e|$ von der Größenordnung $|w' + i \omega L'|$ sei. Im vorliegenden Falle ist nun die Größenordnung der Scheinwiderstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e eine ganz andere.

In den Formeln (95) und (121) ist $M l$ die gesamte gegenseitige Induktivität der Stromkreise B und C ; die Nenner $l(w' + i \omega L) + \mathfrak{R}_e$ und $\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e$ stellen den gesamten Scheinwiderstand des Kreises C^1 dar. Wie ersichtlich, verhalten sich die beiden Stromkreise so, wie wenn die Selbst- und die gegenseitige Induktivität punktförmig und nicht gleichmäßig verteilt wären. Der Einfluß der Kapazität äußert sich in dem Gliede $((l^2))$.

§ 9. Kurze Leitungen. Der empfangende Kreis am Ende offen. Der gebende Kreis über einen verhältnismäßig großen Widerstand geschlossen.

Wir sind nunmehr in der Lage, den Einfluß eines am Ende einer kurzen Schleife B ($l \leq 1$ km) angeschlossenen Apparates auf den Vorgang in dem am Ende offen gedachten Stromkreise C zu untersuchen. (Abb. 10.)

Es ist allgemein (vgl. F. Breisig, Theoretische Telegraphie, S. 283), wenn \mathfrak{E}_e und \mathfrak{S}_e wie bisher die Spannung und den Strom am Ende der Schleife B bezeichnen,

¹⁾ In (121) ist $l(w' + i \omega L')$ gegen $\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e$ von der Ordnung l ; der Einfluß dieses Widerstandes äußert sich daher erst in dem Gliede $((l^2))$.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \mathfrak{B} \mathfrak{S}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2}, \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{E}_e \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{e^{\gamma(l-x)} - e^{-\gamma(l-x)}}{2} + \mathfrak{S}_e \frac{e^{\gamma(l-x)} + e^{-\gamma(l-x)}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (123)$$

Ist der Scheinwiderstand des Apparates am Ende von B gleich \mathfrak{R}_* , so ist ferner

$$\mathfrak{E}_e = \mathfrak{R}_* \mathfrak{I}_e (124)$$

Die Werte des Stromes und der Spannung in einem beliebigen Punkte x der Schleife B sind lineare, homogene Funktionen der Werte \mathfrak{E} und \mathfrak{I} . Die Differentialgleichungen (14) und (15) enthalten \mathfrak{E} und \mathfrak{I} linear. Denselben

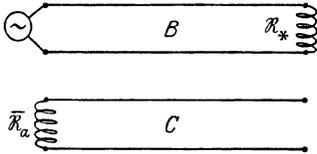


Abb. 10.

linearen Charakter haben auch die Grenzbedingungen. Auch \mathfrak{I}_a' und \mathfrak{E}_a' werden sich somit als lineare, homogene Funktionen von \mathfrak{E}_e und \mathfrak{I}_e ergeben:

$$\mathfrak{E}_a = \mathfrak{E}_e \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = \mathfrak{E}_e \left\{ 1 + \frac{\gamma^2 l^2}{2} + ((l^4)) \right\}, (128)$$

daher wegen (126) und (41)

$$\left. \begin{aligned} p &= l(A_1' + i\omega \delta_1') \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{2} + ((l^4)) \right) \left[1 - (\bar{R} + i\omega \bar{L})(A' + i\omega \delta') l + \right. \\ &+ \left\{ (\bar{R} + i\omega \bar{L})^2 (A' + i\omega \delta')^2 - \frac{1}{3} (\omega' + i\omega L')(A' + i\omega \delta') - \right. \\ &- \left. \left. \frac{1}{3} (\omega + i\omega L)(A + i\omega \delta) - \frac{1}{3} M i \omega \frac{(A + i\omega \delta)(A' + i\omega \delta')}{A_1' + i\omega \delta_1'} \right\} l^2 + ((l^3)) \right] \end{aligned} \right\} (129)$$

Beim Kurzschluß ist andererseits nach (130)

$$\mathfrak{I}_a = \mathfrak{I}_e \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = \mathfrak{I}_e \left\{ 1 + \frac{\gamma^2 l^2}{2} + ((l^4)) \right\}, (130)$$

daher wegen (127) und (122)

$$q = ((l^2)) (131)$$

$$\mathfrak{I}_a' = p \mathfrak{E}_a \cdot \left(1 - \frac{\gamma^2 l^2}{2} + ((l^4)) \right) + \frac{\mathfrak{E}_a}{\mathfrak{R}_*} ((l^2)) (132)$$

In (132) muß man nun folgerichtig das Glied $-p \mathfrak{E}_a \frac{\gamma^2 l^2}{2}$ in das Symbol $((l^2))$ einbeziehen. Man erhält somit die Formel:

$$\mathfrak{I}_a' = (A_1' + i\omega \delta_1') l \mathfrak{E}_a + ((l^2)) (133)$$

Es wird hierbei stillschweigend vorausgesetzt, daß \mathfrak{R}_* verhältnismäßig groß, etwa von der Größenordnung \mathfrak{Z} ist, widrigenfalls die Glieder $\left| \frac{\mathfrak{E}_a}{\mathfrak{R}_*} \right| ((l^2))$ nicht mehr gegenüber dem Hauptgliede $p \mathfrak{E}_a$ vernachlässigt werden können.

$$\mathfrak{I}_a' = p \mathfrak{E}_e + q \mathfrak{I}_e ;$$

$$\mathfrak{E}_a' = -(\bar{R} + i\omega \bar{L})(p \mathfrak{E}_e + q \mathfrak{I}_e) (125)$$

Die Konstanten p und q haben, wie man leicht sieht, folgende Bedeutung:

Setzt man in (125)

$$\mathfrak{I}_e = 0 \quad \mathfrak{E}_e = 1,$$

so erhält man

$$\mathfrak{I}_a' = p (126)$$

Offenbar ist p derjenige Strom \mathfrak{I}_a' , der beim Leerlauf der Schleife B den Scheinwiderstand $\bar{R} + i\omega \bar{L}$ durchfließt, sofern zugleich die Spannung \mathfrak{E}_e den Wert 1 erhält. Setzt man

$$\mathfrak{E}_e = 0, \quad \mathfrak{I}_e = 1,$$

so findet man

$$\mathfrak{I}_a' = q (127)$$

Schließt man den Stromkreis B kurz und reguliert die Spannung \mathfrak{E} so ein, daß $\mathfrak{I}_e = 1$ wird, so erhält man $q = \mathfrak{I}_a'$.

Beim Leerlauf ist nun nach (123)

Ist der Scheinwiderstand des Apparates am Ende der Schleife B wie vorhin gleich \mathfrak{R}_* , so finden wir endgültig

Unter den im Laufe dieser Untersuchung gemachten Voraussetzungen

$$\left. \begin{aligned} \beta l &\leq 0,01, \quad l \leq 1 \text{ km} \\ 0 &\leq \left| \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}} \right| \leq 2 \\ \mathfrak{R}_* &\geq \mathfrak{Z} \end{aligned} \right\} . . (134)$$

ist somit der Strom am Anfange der (offenen) Schleife C von dem Zustande am Ende der Schleife B unabhängig. Die magnetische Kopplung der beiden Schleifen B und C verschwindet gegenüber der kapazitiven.

Dasselbe Ergebnis haben wir in § 4 für den Grenzfall einer sehr langen (pupinierten) Leitung abgeleitet.

§ 10. Kurze Leitungen. Der gebende Kreis offen. Der empfangende Kreis beiderseits über große Widerstände geschlossen.

Wir betrachten jetzt die folgende Anordnung. Die Stromschleife *B* ist am Ende offen,

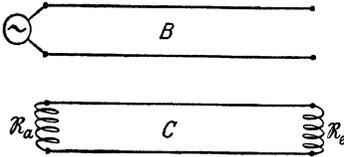


Abb. 11.

die Schleife *C* am Anfang und am Ende entsprechend über die Scheinwiderstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e geschlossen (Abb. 11).

Die Grenzbedingungen sind jetzt:

$$\mathfrak{Z}_e = 0, \quad \mathfrak{G}_a' = -\mathfrak{R}_a' \mathfrak{Z}_a', \quad \mathfrak{G}_e' = \mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_e' \quad (135)$$

Aus den allgemeinen Formeln ergeben sich jetzt, zur Abkürzung wieder

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2\gamma'} \left(\gamma_1'^2 + \frac{M i \omega}{\beta} \gamma \right), \\ Q &= \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_1'^2}{\gamma + \gamma'} - \frac{\gamma + 2\gamma' M i \omega}{\gamma + \gamma'} \frac{1}{\beta} \right] \frac{1}{w' + i \omega L'} \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

gesetzt, die Gleichungen:

$$\alpha_1 e^{\gamma l} - \alpha_2 e^{-\gamma l} = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \mathfrak{G}_a,$$

$$\mathfrak{Z}_a' = -\frac{c_1}{\beta'} + \frac{c_2}{\beta'} - (\alpha_1 - \alpha_2) Q. \quad (136)$$

$$\mathfrak{G}_a' = c_1 + c_2 - \frac{\mathfrak{G}_a P}{\gamma + \gamma'} \quad (137)$$

$$\mathfrak{Z}_e' = \frac{1}{w' + i \omega L'} \left[-\gamma' c_1 e^{\gamma' l} + \gamma' c_2 e^{-\gamma' l} - P \left(\alpha_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \alpha_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} \right) \right] \quad (138)$$

$$\mathfrak{G}_e' = c_1 e^{\gamma' l} + c_2 e^{-\gamma' l} + P \left[\alpha_1 \frac{e^{\gamma l} - e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} + \alpha_2 \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \alpha_1 \frac{e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} - \alpha_2 \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] \quad (139)$$

$$\alpha_1 = \mathfrak{G}_a \frac{e^{-\gamma}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}, \quad \alpha_2 = \mathfrak{G}_a \frac{e^{\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma}} \quad (140)$$

Sind die Leitungen als kurz zu betrachten ($\beta l \leq 0,01$, $l \leq 1$ km), so findet man durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktionen:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \mathfrak{G}_a \left\{ 1 - \gamma l + \frac{\gamma^3 l^3}{3} + ((l^4)) \right\},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{G}_a \left\{ 1 + \gamma l - \frac{\gamma^3 l^3}{3} + ((l^4)) \right\},$$

$$\left[\alpha_1 \frac{e^{\gamma l} - e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} + \alpha_2 \frac{e^{-\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \alpha_1 \frac{e^{\gamma l}}{\gamma + \gamma'} - \alpha_2 \frac{e^{-\gamma l}}{\gamma + \gamma'} \right] = \frac{\mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} \left\{ -1 + \frac{1}{2} \gamma'^2 l^2 + ((l^4)) \right\},$$

$$e^{-\gamma l} \left[\alpha_1 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} + \dots - \alpha_2 \frac{e^{-\gamma' l}}{\gamma + \gamma'} \right] = \frac{\mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} \left\{ -1 + \gamma' l + ((l^3)) \right\},$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \alpha_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} \right] = \mathfrak{G}_a \left\{ \gamma' l + \left(-\frac{1}{3} \gamma'^2 \gamma - \frac{1}{3} \gamma \gamma'^2 + \frac{1}{6} \gamma'^3 \right) l^3 + ((l^5)) \right\},$$

$$e^{-\gamma' l} \left[\alpha_1 \frac{\gamma e^{\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} - \alpha_2 \frac{\gamma e^{-\gamma l} - \gamma' e^{-\gamma' l}}{\gamma - \gamma'} \right] = \mathfrak{G}_a \gamma' l \left\{ 1 - \gamma' l + \left(-\frac{1}{3} \gamma'^2 - \frac{1}{3} \gamma \gamma' + \frac{2}{3} \gamma'^2 \right) l^2 + ((l^3)) \right\}.$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2 können in der Form

$$(c_1 - c_2) \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_a}{\beta'} \right) + 2c_2 = \frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} - \mathfrak{R}_a Q \mathfrak{G}_a \gamma l \left\{ 1 - \frac{\gamma'^2 l^2}{3} + \dots \right\} \dots \quad (141)$$

$$(c_1 - c_2) \left(1 + \frac{\mathfrak{R}_e}{\beta'} \right) + c_2 \left\{ \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_e}{\beta'} \right) e^{-2\gamma' l} + 1 + \frac{\mathfrak{R}_e}{\beta'} \right\} = -\frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} \left\{ -1 + \gamma' l + ((l^3)) \right\} - \frac{\mathfrak{R}_e P \mathfrak{G}_a \gamma' l}{w' + i \omega L'} \left\{ 1 - \gamma' l + \left(-\frac{1}{3} \gamma'^2 - \frac{1}{3} \gamma \gamma' + \frac{2}{3} \gamma'^2 \right) l^2 + \dots \right\}$$

geschrieben werden.

Die Nennerdeterminante hat den Wert

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} & 2 \\ 1 + \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} & 2 \left\{ 1 - \gamma' l \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + \gamma'^2 l^2 \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + ((l^3)) \right\} \end{array} \right| = \\
 &= -2 \left(\frac{\Re_a + \Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) - 2 \left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) \gamma' l + 2 \left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) \gamma'^2 l^2 + \dots \quad (142)
 \end{aligned}$$

Für die Differenz $c_1 - c_2$, auf die allein es nach (136) ankommt, erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 c_1 - c_2 &= \left| \begin{array}{cc} \frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} - \Re_a \mathfrak{G}_a Q \gamma l \left(1 - \frac{\gamma^2 l^2}{3} + \dots \right); & 2 \\ \frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} \left\{ -1 + \gamma' l + ((l^3)) \right\} - \frac{P \Re_e \mathfrak{G}_a \gamma' l}{w' + i w L'} \times & \\ \times \left\{ 1 - \gamma' l + \left(-\frac{1}{3} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma \gamma' + \frac{2}{3} \gamma'^2 \right) l^2 + \dots \right\}; & 2 \left\{ 1 - \gamma' l \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + \gamma'^2 l^2 \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + ((l^3)) \right\} \end{array} \right| \quad (143)
 \end{aligned}$$

Wird wie in § 9 vorausgesetzt, daß

$$\left| \frac{\left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) e^{-2\gamma' l} - 1}{\frac{\Re_a + \Re_e}{\mathfrak{B}'}} \right| \ll 1 \text{ (klein gegen 1) } \dots \quad (144)$$

ist, so gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\mathcal{A} \mathfrak{B}'} &= \frac{1}{2(\Re_a + \Re_e)} \left\{ 1 - \frac{\left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right) \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right)}{\frac{\Re_a + \Re_e}{\mathfrak{B}'}} \left(\gamma' l - \gamma'^2 l^2 + \frac{2}{3} \gamma'^3 l^3 + \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\left(1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right)^2 \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right)^2}{\left(\frac{\Re_a + \Re_e}{\mathfrak{B}'} \right)} (\gamma' l - \gamma'^2 l^2 + \dots)^2 \right\} \dots \dots \dots \quad (145)
 \end{aligned}$$

Die Voraussetzung (144) ist, wie wir schon gesehen haben, insbesondere erfüllt, wenn $\beta' l \leq 0,01$,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{5} | \mathfrak{B}' | \leq | \Re_a | \leq 5 | \mathfrak{B}' |, \\ \frac{1}{5} | \mathfrak{B}' | \leq | \Re_e | \leq 5 | \mathfrak{B}' |, \end{array} \right\} \quad (146)$$

gilt, oder, wenn $\left| \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right| = \infty$ ist und zugleich

die Beziehung

$$\left| 1 - \frac{\Re_a}{\mathfrak{B}'} \right| \left| \frac{e^{-2\gamma' l} - 1}{2} \right| \ll 1 \dots \quad (147)$$

gilt.

Für den Strom \mathfrak{S}_a' gewinnt man den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_a' &= -\frac{2}{\Delta \mathfrak{B}'} \left\{ \left[\frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} - \Re_a \mathfrak{G}_a Q \gamma l \left(1 - \frac{\gamma^2 l^2}{3} + \dots \right) \right] \left[1 - \gamma' l \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + \gamma'^2 l^2 \left(1 - \frac{\Re_e}{\mathfrak{B}'} \right) + \dots \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{P \mathfrak{G}_a}{\gamma + \gamma'} \left\{ -1 + \gamma' l + ((l^3)) \right\} + \frac{P \Re_e \mathfrak{G}_a \gamma' l}{w' + i w L'} \left\{ 1 - \gamma' l + \left(-\frac{1}{3} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma \gamma' + \frac{2}{3} \gamma'^2 \right) l^2 + \dots \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma l \mathfrak{G}_a \left\{ 1 - \frac{\gamma^2 l^2}{3} + \dots \right\} Q \dots \dots \dots \right. \quad (148)
 \end{aligned}$$

Führt man die angedeuteten Rechenoperationen aus und ordnet die Glieder nach Potenzen von l , so erhält man die einfache Formel

$$\mathfrak{J}'_a = \mathfrak{E}_a l \left\{ \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \frac{\gamma_1'^2}{\gamma_1' \mathfrak{Z}} + \frac{l}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \left[-\frac{M i \omega \gamma}{\mathfrak{Z}} + \gamma_1'^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_a - \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} - \mathfrak{R}_e \frac{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \frac{1}{\mathfrak{Z}^2} \right) \right] + ((L^2)) \right\}, \quad (149)$$

wofür man auch schreiben kann

$$\mathfrak{J}'_a = \mathfrak{E}_a l \left\{ \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} (A_1' + i \omega \delta_1') - \frac{M i \omega l (A + i \omega \delta)}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} + \frac{l}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \left(\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_a - \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} (w' + i \omega L') (A_1' + i \omega \delta_1') - \mathfrak{R}_e \frac{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} (A' + i \omega \delta') (A_1' + i \omega \delta_1') \right) + ((L^2)) \right\} \dots \quad (150)$$

In dem besonderen Falle $\mathfrak{R}_e = \infty$ (die Schleife C offen) ergibt sich hieraus einfacher

$$\mathfrak{J}'_a = \mathfrak{E}_a l \left\{ (A_1' + i \omega \delta_1') - l \mathfrak{R}_a (A' + i \omega \delta') (A_1' + i \omega \delta_1') + ((L^2)) \right\} \dots \quad (151)$$

Diese Formel stimmt mit der Formel (41) vollständig überein. An jener Stelle ist die Entwicklung um ein Glied (mit L^2) weiter getrieben als jetzt. Für \mathfrak{R}_a haben wir dort $\bar{R} + i \omega \bar{L}$ gesetzt.

Die einzelnen Glieder der Formeln (150) und (151) gestatten (im Falle des Übersprechens) die folgende anschauliche elementare Deutung: Die auf die Spannung \mathfrak{E}_a gebrachten Leiter 1 und 2 der Schleife B „influenzieren“ auf den Leitern 3 und 4 der Stromschleife C Ladungen

$$\delta_1' \mathfrak{E}_a \text{ und } -\delta_1' \mathfrak{E}_a.$$

Diese gleichen sich, da die Spannung in B sich sinusförmig ändert, durch Sinusströme

$$\frac{+}{\bigcirc} B \quad \frac{-}{\bigcirc}$$

$$\frac{-}{\bigcirc} C \quad \frac{+}{\bigcirc}$$

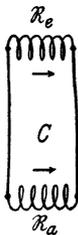


Abb. 12.

über die parallel geschalteten Widerstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e aus. Der Strom am Anfang der Schleife C hat den Wert

$$\mathfrak{E}_a l \frac{\mathfrak{R}_e i \omega \delta_1'}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \dots \quad (152)$$

wenn zur Vereinfachung von der Ableitung abgesehen wird; $\mathfrak{E}_a l \delta_1'$ ist die Gesamtladung

auf (3). Da bei der auf der Abb. 12 veranschaulichten Anordnung $\delta_1' < 0$ ist, so hat \mathfrak{J}_a die durch den Pfeil (Abb. 12) angedeutete augenblickliche Richtung¹⁾.

Der Ladestrom in B ist, wenn wieder $A = 0$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{E}_a l \omega \delta i \dots \quad (153)$$

Der durch die gegenseitige Induktion in C hervorgerufene Strom ist gleich

$$- \mathfrak{E}_a l \omega \delta i \frac{M l}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} \dots \quad (154)$$

In der Tat ist M die gesamte gegenseitige Induktion der beiden Schleifen, $\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e$ der gesamte Widerstand des Stromkreises C (denn $w l + i \omega L' l$ verschwindet gegenüber $\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e$). Der Ausdruck (154) ist bis auf den Beitrag der Ableitung das zweite Glied der Formel (150). Die übrigen Glieder rühren von der Eigenkapazität des Stromkreises C her. Der Einfluß dieser läßt sich an Hand der Formel (151) bequem elementar verfolgen. Die Wirkung der gegenseitigen Induktion wird unmerklich (der Stromkreis C ist offen). Der durch Influenz hervorgerufene Strom in C ist gleich

$$\mathfrak{E}_a l i \omega \delta_1' \dots \quad (155)$$

Die Spannung an den Klemmen des Widerstandes \mathfrak{R}_a ist

$$- \mathfrak{R}_a \mathfrak{E}_a l i \omega \delta_1' \dots \quad (156)$$

Der dieser entsprechende Ladestrom ist

$$- \mathfrak{R}_a \mathfrak{E}_a l i \omega \delta_1' \cdot l i \omega \delta' \dots \quad (157)$$

Der Gesamtstrom ist somit

$$\mathfrak{E}_a l i \omega \delta_1' (1 - \mathfrak{R}_a l i \omega \delta') \dots \quad (158)$$

Dies ist aber bis auf den Beitrag der Ableitung der Ausdruck (151).

¹⁾ In der Abb. 12 ist vorausgesetzt, daß die Ladung des Leiters 1 im Wachsen begriffen ist.

§ 11. Kurze Leitungen. Einfluß der Abzweigspulen auf den Wert des Dämpfungsexponenten $\beta_* l$ des Nebensprechens.

Wir sind nunmehr in der Lage, den Strom \mathfrak{I}_a' zu bestimmen, wenn wie zuletzt am Anfang und Ende der Schleife *C* sich Scheinwiderstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e befinden, während die Schleife *B* über einen beliebigen Scheinwiderstand \mathfrak{R}_* geschlossen ist (Abb. 13). Wir verfahren genau so wie in § 10 und erhalten,

wenn wir uns der Einfachheit halber auf die mit *l* multiplizierten Glieder (Glieder erster Ordnung) beschränken,

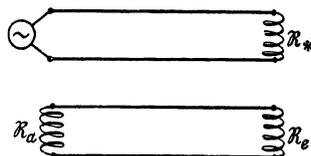


Abb. 13.

$$\mathfrak{I}_a' = \mathfrak{E}_e l \left\{ \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} (A_1' + i \omega \delta_1') - \frac{1}{\mathfrak{R}_*} \frac{M i \omega}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} + ((l)) \right\} \dots \dots (159)$$

Da, wie man leicht sieht,

$$\mathfrak{E}_a = \mathfrak{E}_e + ((l))$$

ist, so kann man für (159) auch setzen

$$\mathfrak{I}_a' = \mathfrak{E}_a l \left\{ \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} (A_1' + i \omega \delta_1') - \frac{1}{\mathfrak{R}_*} \frac{M i \omega}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e} + ((l)) \right\} \dots \dots (160)$$

In der Regel wird das zweite Glied in dem Klammerausdruck gegenüber dem ersten verschwinden, dies wegen des Faktors

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_*} \cdot \frac{1}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e}$$

In der Regel ist daher auch jetzt noch der Vorgang der Beeinflussung des Stromkreises *C* durch den Stromkreis *B* als ein Vorgang im wesentlichen kapazitiver Natur anzusprechen. Bei nicht zu kleinem $|\mathfrak{R}_*|$ ist der Zustand in *C* von dem Werte des Widerstandes \mathfrak{R}_* unabhängig. Bei alledem ist im Auge zu behalten, daß allen unseren Schlüssen die Voraussetzungen

$$\beta l \leq 0,01 \quad l \leq 1 \text{ km,}$$

$$\frac{1}{5} \leq \left| \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}'} \right| \leq 5, \quad \frac{1}{5} \leq \left| \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}'} \right| \leq 5 \dots (161)$$

oder

$$\left| \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}'} \right| = \infty, \quad \left| 1 - \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}'} \right| \left| \frac{e^{-2r'l} - 1}{2} \right| \ll 1,$$

$$\left| \frac{\mathfrak{R}_*}{\mathfrak{Z}'} \right| \geq 1 \dots$$

zugrunde liegen.

Die Formel (160) gestattet, den Einfluß der Abzweigspulen auf das Nebensprechen zu überschauen.

Der Einfachheit halber betrachten wir lediglich das Übersprechen. In den Abb. 14 und 11 sind zwei zu vergleichende Schaltungen wiedergegeben. In beiden Fällen ist der gebende Kreis (*B*) am Ende offen. Der empfangende Kreis *C* ist einmal (Abb. 14) offen, das

andere Mal über einen Scheinwiderstand \mathfrak{R}_e geschlossen. Unter \mathfrak{R}_e ist eine Abzweigspule, ein eingeschaltetes Fernsprechgehäuse, überhaupt irgendein Scheinwiderstand am entfernten Kabelende zu verstehen. Zur Vereinfachung setzen wir

$$\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}_e \dots \dots (162)$$

Sind, wie wir voraussetzen wollen, die Stromkreise *B* und *C* sehr kurz, so berechnet sich der

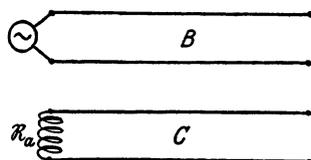


Abb. 14.

Strom am Anfang des Kreises *C* bei offenem *C* in der ersten Näherung zu

$$\mathfrak{I}_a' = \mathfrak{E}_a l (A_1' + i \omega \delta_1') \dots (163)$$

bei geschlossenem *C* aber zu

$$\mathfrak{I}_a' = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_a l (A_1' + i \omega \delta_1') \dots (164)$$

Das Übersprechen ist beim Vorhandensein der Abzweigspule am Ende des empfangenden Kreises geringer als ohne diese.

Dieses Ergebnis gilt in ähnlicher Weise auch beim Mitsprechen.

Daß das Einschalten von Abzweigspulen u. dgl. am Ende des gebenden Kreises ohne wesentlichen Einfluß auf den Zustand des empfangen-

den Kreise ist (kurze Leitungen und großen Widerstand der Spulen vorausgesetzt), haben wir in §§ 9 und 11 gesehen.

In dem vorliegenden Falle (Abb. 14 und 11); $\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}_e$ beträgt die Erhöhung des Dämpfungsexponenten $\beta^* l$ des Übersprechens infolge der Einschaltung des Widerstandes \mathfrak{R}_e , wie sich aus (50) leicht errechnen läßt, $\lognat 2 = 0,7$.

§ 12. Die Spannung \mathfrak{E}_v im Vierer.

Betrachten wir den Vierer (1, 2, 3, 4). Der Einfachheit halber denken wir uns die Leitungen (1), (2), (3), (4) am Ende isoliert (offen) und nur am Anfang in der betriebsmäßigen Schaltung miteinander verbunden (Abb. 15).

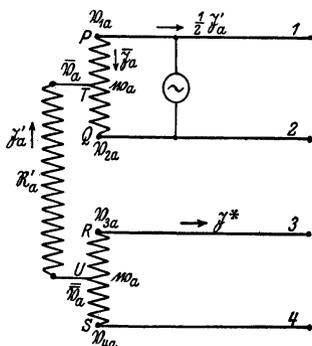


Abb. 15.

Es sei m_a der Scheinwiderstand jeder Abzweigspeule gegenüber dem Viererstrom, \mathfrak{R}_a' der Scheinwiderstand des Fernsprechers im Viererkreise. Mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ bezeichnen wir die Spannungen der Leiter gegen den Bleimantel an einer beliebigen Stelle des Kabels, mit $\mathfrak{B}_{1a}, \mathfrak{B}_{2a}, \mathfrak{B}_{3a}, \mathfrak{B}_{4a}$ die entsprechenden Werte an seinem Anfang; $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}_{1a}, \mathfrak{B}_{2a}, \mathfrak{B}_{3a}, \mathfrak{B}_{4a}$ sind im allgemeinen komplexe Wer e.

Wir betrachten das Mitsprechen I auf V und denken uns den Stamm I etwa durch eine Frankesche Maschine betrieben.

Eine „Spannung im Vierer“ im eigentlichen Sinne gibt es nicht. Denn wiewohl je zwei Leiter für das Sprechen im Vierer parallel geschaltet sind, haben alle vier Leiter im allgemeinen verschiedene Spannungen gegen den Bleimantel.

Wir führen den Ausdruck

$$\mathfrak{E}_v = \frac{\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2}{2} - \frac{\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_4}{2} \dots (165)$$

ein und bezeichnen \mathfrak{E}_v als die (fiktive) Spannung im Vierer. Auch \mathfrak{E}_v bezeichnet einen komplexen Wert. Es ist eigentlich nur eine Übereinkunft, gerade \mathfrak{E}_v als die Spannung im Vierer zu bezeichnen. Doch diese Definition

ist zweckmäßig, denn sie gestattet, die allgemeinen Ergebnisse dieses Kapitels auf das Mitsprechen anzuwenden.

Führt man nämlich \mathfrak{E}_v und die dazugehörigen (im Kapitel II §§ 1 u. 2 bestimmten) Werte δ' und δ_1' ein, so erhält man beispielsweise für den in dem vorliegenden Paragraphen vorausgesetzten Betriebszustand (Abb. 15), wie wir gleich sehen werden, aus der Formel (41) mit Leichtigkeit den Strom $\mathfrak{I}_{a'}$ durch den Scheinwiderstand \mathfrak{R}_a' im Viererkreise.

Ist der Scheinwiderstand der Abzweigspeulen gegenüber den Strömen in den Stammkreisen w , der Strom, den die Frankesche Maschine direkt durch die Abzweigspeule in I schiebt, $\mathfrak{I}_{a'}$, der (durch Übersprechen hervorgerufene) Strom im Stamm II \mathfrak{I}^* , die Spannung der Punkte T und U gegen den Bleimantel \mathfrak{B}_a und \mathfrak{B}_a , so ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_{1a} &= \mathfrak{B}_a - 2m_a \frac{\mathfrak{I}_{a'}}{2} + \frac{1}{2} w \mathfrak{I}_{a'}, \\ \mathfrak{B}_{2a} &= \mathfrak{B}_a - 2m_a \frac{\mathfrak{I}_{a'}}{2} - \frac{1}{2} w \mathfrak{I}_{a'}, \\ \mathfrak{B}_{3a} &= \mathfrak{B}_a + 2m_a \frac{\mathfrak{I}_{a'}}{2} - \frac{1}{2} w \mathfrak{I}^*, \\ \mathfrak{B}_{4a} &= \mathfrak{B}_a + 2m_a \frac{\mathfrak{I}_{a'}}{2} + \frac{1}{2} w \mathfrak{I}^*, \end{aligned} \right\} (166)$$

daher

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_v &= \frac{\mathfrak{B}_{1a} + \mathfrak{B}_{2a}}{2} - \frac{\mathfrak{B}_{3a} + \mathfrak{B}_{4a}}{2} \\ &= \mathfrak{B}_a - \mathfrak{B}_a - 2m_a \mathfrak{I}_{a'} \end{aligned} \right\} (167)$$

Die Formel (41) ist nun ohne weiteres anwendbar, wenn wir für \mathfrak{E}_a' in § 2 den Wert \mathfrak{E}_v und für den an jener Stelle eingeführten Widerstand \mathfrak{R}_a den Wert

$$\mathfrak{R}_a' + 2m_a \dots (168)$$

setzen. Aus (167) ersieht man, daß der Wert \mathfrak{E}_v , der an einer willkürlich herausgegriffenen Stelle des Kabels eine lediglich fingierte Spannung darstellt, am Anfang des Kabels eine unmittelbare physikalische Bedeutung hat.

Kapitel II.

Die Bestimmung der Konstanten δ' und δ_1 der Stamm- und Viererkreise, wenn die Teilkapazitäten c_{12}, c_{13} usw. je zweier Adern im Vierer bekannt sind.

§ 1. Teilkapazitäten c_{12}, c_{13}, \dots

Den folgenden Überlegungen wird der aus den Adern (1), (2), (3), (4) bestehende Vierer

§ 2. Die Konstanten δ' und δ'_i .

Wir bezeichnen jetzt die Spannung im Stamme *I* mit E_1 , im Stamme *II* mit E_2 , im Vierer mit E_v . Unter E_v verstehen wir entsprechend den Ausführungen in § 12 des I. Kapitels den Ausdruck

$$E_v = \frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{V_3 + V_4}{2} \quad (181)$$

Es ist ferner

$$E_1 = V_1 - V_2, \quad E_2 = V_3 - V_4 \quad (182)$$

Die Ladungen der einzelnen Leiter setzen wir in der Form

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} Q_v + Q'; & Q_2 &= \frac{1}{2} Q_v - Q' \\ Q_3 &= -\frac{1}{2} Q_v + Q''; & Q_4 &= -\frac{1}{2} Q_v - Q'' \end{aligned} \right\} (183)$$

an.

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \mu_{11} \left(\frac{1}{2} Q_v + Q' \right) + \mu_{12} \left(\frac{1}{2} Q_v - Q' \right) + \mu_{13} \left(-\frac{1}{2} Q_v + Q'' \right) + \mu_{14} \left(-\frac{1}{2} Q_v - Q'' \right) \\ V_2 &= \mu_{21} \left(\frac{1}{2} Q_v + Q' \right) + \mu_{22} \left(\frac{1}{2} Q_v - Q' \right) + \mu_{23} \left(-\frac{1}{2} Q_v + Q'' \right) + \mu_{24} \left(-\frac{1}{2} Q_v - Q'' \right) \\ V_3 &= \mu_{31} \left(\frac{1}{2} Q_v + Q' \right) + \mu_{32} \left(\frac{1}{2} Q_v - Q' \right) + \mu_{33} \left(-\frac{1}{2} Q_v + Q'' \right) + \mu_{34} \left(-\frac{1}{2} Q_v - Q'' \right) \\ V_4 &= \mu_{41} \left(\frac{1}{2} Q_v + Q' \right) + \mu_{42} \left(\frac{1}{2} Q_v - Q' \right) + \mu_{43} \left(-\frac{1}{2} Q_v + Q'' \right) + \mu_{44} \left(-\frac{1}{2} Q_v - Q'' \right) \end{aligned} \right\} (186)$$

folglich mit Rücksicht auf (181) und (182)

$$E_1 = (\mu_{11} - 2\mu_{12} + \mu_{22}) Q' + (\mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{23} + \mu_{24}) Q'' + \frac{1}{2} (\mu_{11} - \mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{22} + \mu_{23} + \mu_{24}) Q_v;$$

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= (\mu_{13} - \mu_{23} - \mu_{14} + \mu_{24}) Q' + (\mu_{33} - 2\mu_{34} + \mu_{44}) Q'' + \frac{1}{2} (\mu_{13} + \mu_{23} - \mu_{33} - \mu_{14} - \mu_{24} + \mu_{44}) Q_v \\ E_v &= \frac{1}{2} (\mu_{11} - \mu_{22} - \mu_{13} + \mu_{23} - \mu_{14} + \mu_{24}) Q' + \frac{1}{2} (\mu_{13} - \mu_{14} + \mu_{23} - \mu_{24} - \mu_{33} + \mu_{44}) Q'' + \\ &\quad + \frac{1}{4} (\mu_{11} + 2\mu_{12} - 2\mu_{13} - 2\mu_{14} + \mu_{22} - 2\mu_{23} - 2\mu_{24} + \mu_{33} + 2\mu_{34} + \mu_{44}) Q_v \end{aligned} \right\} (187)$$

wofür wir zur Abkürzung setzen

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= p_{11} Q' + p_{12} Q'' + p_{1v} Q_v \\ E_2 &= p_{21} Q' + p_{22} Q'' + p_{2v} Q_v \\ E_v &= p_{v1} Q' + p_{v2} Q'' + p_{vv} Q_v \end{aligned} \right\} (188)$$

$$p_{12} = p_{21}, \quad p_{1v} = p_{v1}, \quad p_{2v} = p_{v2}.$$

Das Mit- und Übersprechen, sofern es kapazitiven Ursprunges ist, verschwindet gänzlich,

Man kann dies immer tun, wenn

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 \quad (184)$$

ist. Denn es bleiben dann von den vier Ladungswerten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 nur drei voneinander unabhängige übrig, denen in (183) drei Unbekannte Q_v, Q', Q'' entsprechen. Sind z. B. Q_1, Q_2, Q_3 bekannt, so ergeben sich aus (183) und (184) eindeutig Q_4, Q_v, Q', Q'' . Es ist eben

$$\left. \begin{aligned} Q_4 &= -Q_1 - Q_2 - Q_3, \\ Q_v &= Q_1 + Q_2 = -Q_3 - Q_4, \\ Q &= \frac{Q_1 - Q_2}{2}, \\ Q'' &= \frac{Q_3 - Q_4}{2} = \frac{Q_1 + Q_2 + 2Q_3}{2} \end{aligned} \right\} (185)$$

Die Bedingung (184) ist aber bei einem Viererbetriebe immer erfüllt, sobald die den Leitern irgendwie erteilten statischen Ladungen verschwunden sind. In den Formeln (183) liegt also keinerlei willkürliche Annahme. Die Formeln (173) ergeben jetzt

wenn

$$p_{12} = 0, \quad p_{1v} = 0, \quad p_{2v} = 0 \quad (189)$$

ist. Man erhält so drei Bedingungs-gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{23} + \mu_{24} &= 0 \\ \mu_{11} - \mu_{13} - \mu_{14} - \mu_{22} + \mu_{23} + \mu_{24} &= 0 \\ \mu_{13} + \mu_{23} - \mu_{33} - \mu_{14} - \mu_{24} + \mu_{44} &= 0 \end{aligned} \right\} (190)$$

oder wegen (179) und (180) nach einer Umformung auch

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{c_{13}} + \frac{1}{c_{14}} + \frac{1}{c_{23}} - \frac{1}{c_{24}} \right) &= 0, \\ \frac{1}{c_{13}} - \frac{1}{c_{23}} &= 0, \\ -\frac{1}{c_{23}} + \frac{1}{c_{24}} &= 0. \end{aligned} \right\} (191)$$

Das Mit- und Übersprechen kapazitiven Ursprunges verschwindet mit hin gänzlich, wenn

$$c_{13} = c_{23} = c_{14} = c_{24} \dots (192)$$

ist.

Durch Auflösung der Gleichungen (188) erhält man die weiteren Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} Q' &= q_{11} E_1 + q_{12} E_2 + q_{1v} E_v, \\ Q'' &= q_{21} E_1 + q_{22} E_2 + q_{2v} E_v, \\ Q_v &= q_{v1} E_1 + q_{v2} E_2 + q_{vv} E_v, \end{aligned} \right\} (193)$$

$$q_{12} = q_{21}, \quad q_{1v} = q_{v1}, \quad q_{2v} = q_{v2}.$$

Betrachten wir jetzt beispielsweise das Mitsprechen I auf V . In den allgemeinen Formeln des ersten Kapitels haben wir die Ladung im Kreise C (jetzt V) gleich

$$Q' = \delta' E' + \delta'_1 E \dots (194)$$

gesetzt.

Für die Ladung Q_v erhalten wir jetzt indessen den dreigliedrigen Ausdruck $q_{v1} E_1 + q_{v2} E_2 + q_{vv} E_v$. Dies kommt daher, weil infolge des Übersprechens auch im Kreise II eine Spannung E_2 entsteht.

In kombinierten Systemen hat man in Wirklichkeit stets mit einem Vorgang in allen drei Kreisen I, II, V gleichzeitig zu tun. Die Anwendung der vereinfachten Formel (194) ist aber doch durchaus zulässig. Im vorliegenden Falle des Mitsprechens I auf V sind erfahrungsgemäß E_2 und E_v klein gegen E_1 . Desgleichen sind die Koeffizienten q_{v1} und q_{v2} klein gegenüber q_{vv} . Das zweite Glied rechter

¹⁾ Aus (187) und (188) ergibt sich, daß p_{v1} und p_{v2} dem absoluten Betrage nach klein gegenüber $|p_{vv}|$ sind. Es ist z. B.

$$p_{1v} = \frac{1}{2} (\mu_{11} - \mu_{22} + \mu_{33} - \mu_{13} + \mu_{24} - \mu_{14}),$$

$$p_{vv} = \frac{1}{4} (\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33} + \mu_{44} + 2\mu_{12} + 2\mu_{34} - 2\mu_{13} - 2\mu_{14} - 2\mu_{23} - 2\mu_{24}).$$

Nun sind die Größen $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{44}$ einerseits, die Größen $\mu_{23}, \mu_{14}, \mu_{13}, \mu_{24}$ andererseits von einander wenig verschieden. Ferner sind $\mu_{13}, \mu_{14}, \mu_{23}, \mu_{24}, \mu_{12}, \mu_{34}$ klein gegenüber μ_{11} . Also ist $|p_{1v}|$ klein gegenüber $|p_{vv}|$.

Die Koeffizienten q_{v1}, q_{v2}, q_{vv} sind den Minoren der Elemente p_{v1}, p_{v2}, p_{vv} in der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{1v} \\ p_{21} & p_{22} & p_{2v} \\ p_{v1} & p_{v2} & p_{vv} \end{vmatrix}$$

proportional. Man überzeugt sich nunmehr ohne Schwierigkeiten, daß in der Tat $|q_{v1}|, |q_{v2}|$ klein gegenüber q_{vv} sind.

Hand in der Formel für Q_v ist klein gegenüber dem ersten und dem dritten Gliede, die von gleicher Größenordnung sind. Mit genügender Annäherung darf man daher setzen:

$$I \text{ auf } V: Q_v = q_{v1} E_1 + q_{vv} E_v$$

und in ähnlicher Weise

$$\left. \begin{aligned} II \text{ auf } V: Q_v &= q_{v2} E_2 + q_{vv} E_v, \\ V \text{ ,, } I: Q' &= q_{11} E_1 + q_{1v} E_v, \\ V \text{ ,, } II: Q'' &= q_{22} E_2 + q_{2v} E_v, \\ I \text{ ,, } II: Q'' &= q_{21} E_1 + q_{22} E_2, \\ II \text{ ,, } I: Q' &= q_{11} E_1 + q_{12} E_2. \end{aligned} \right\} (195)$$

Den allgemeinen Formeln des I. Kapitels gemäß ist für die Beeinflussung der Stromschleife C durch die Schleife B vor allem der Wert δ'_1 maßgebend. Je kleiner δ'_1 , um so geringer wird unter sonst gleichen Bedingungen das Nebensprechen ausfallen. Der Wert δ'_1 ist nun nach (195) gleich:

$$\left. \begin{aligned} \text{Nebensprechen } I \text{ auf } II \dots q_{21} &= q_{12}, \\ \text{,, } II \text{ ,, } I \dots q_{12} &, \\ \text{,, } I \text{ ,, } V \dots q_{v1} &= q_{1v}, \\ \text{,, } V \text{ ,, } I \dots q_{1v} &, \\ \text{,, } II \text{ ,, } V \dots q_{v2} &= q_{2v}, \\ \text{,, } V \text{ ,, } II \dots q_{2v} &. \end{aligned} \right\} (196)$$

Wie im Kapitel I bereits erwähnt, sind die sechs Werte δ'_1 paarweise einander gleich.

Bei kurzen Längen ($l \leq 1$ km) sind nach (41) demnach die Werte $\beta^* l$

$$\left. \begin{aligned} I \text{ gegen } II \text{ und } II \text{ gegen } I, \\ I \text{ ,, } V \text{ ,, } V \text{ ,, } I, \\ II \text{ ,, } V \text{ ,, } V \text{ ,, } II, \end{aligned} \right\}$$

einander gleich. Auch bei sehr großen Längen ($\beta l \geq 2,5$) ist nach (51) das Übersprechen I gegen II gleich dem Übersprechen II gegen I . Dagegen wird im allgemeinen bei sehr großen Längen, da die Formel (51) in bezug auf die elektrischen Daten der Stromkreise B und C unsymmetrisch ist, das Mitsprechen I gegen V vom Mitsprechen V auf I verschieden ausfallen. Der Unterschied dürfte indessen unbeträchtlich sein.

Aus (188) folgt nun

$$\left. \begin{aligned} q_{12} &= \frac{p_{1v} p_{2v} - p_{12} p_{vv}}{D}, \\ q_{1v} &= \frac{p_{12} p_{2v} - p_{1v} p_{22}}{D}, \\ q_{2v} &= \frac{p_{12} p_{1v} - p_{11} p_{2v}}{D}. \end{aligned} \right\} (197)$$

Aus (197), (187), (188), (179), (180) ergeben sich Formeln für δ'_1 als Funktionen der Teil-

kapazitäten c_{12} , c_{13} usw. Diese genauen Formeln sind sehr kompliziert. Man kann indes mit genügender Annäherung setzen

$$\left. \begin{aligned} D &= p_{11} p_{22} p_{vv}, \\ q_{12} &= -\frac{p_{12}}{p_{11} p_{22}}, \quad q_{1v} = -\frac{p_{1v}}{p_{11} p_{vv}}, \\ q_{2v} &= -\frac{p_{2v}}{p_{22} p_{vv}} \end{aligned} \right\} (198)$$

Die Werte p_{11} , p_{12} , ... sind aus den Gleichungen (187) und (188) zu entnehmen. Es bleibt nur noch übrig, die einzelnen Koeffizienten μ_{11} , μ_{12} , ... durch c_{12} , c_{13} , ... auszudrücken. Aus (208) und (209) folgt, wie man leicht verifizieren kann,

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{c_{12}}, \\ p_{22} &= \frac{1}{c_{24}}, \\ p_{vv} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c_{13}} + \frac{1}{c_{24}} + \frac{1}{c_{14}} + \frac{1}{c_{23}} - \frac{1}{c_{12}} - \frac{1}{c_{24}} \right), \\ p_{12} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{c_{13}} + \frac{1}{c_{14}} + \frac{1}{c_{23}} - \frac{1}{c_{24}} \right), \\ p_{1v} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c_{13}} + \frac{1}{c_{14}} - \frac{1}{c_{24}} - \frac{1}{c_{23}} \right), \\ p_{2v} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c_{14}} + \frac{1}{c_{24}} - \frac{1}{c_{13}} - \frac{1}{c_{23}} \right), \end{aligned} \right\} (199)$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{c_{13}} - \frac{1}{c_{23}}, & Q &= \frac{1}{c_{14}} - \frac{1}{c_{24}} \\ R &= \frac{1}{c_{13}} - \frac{1}{c_{14}}, & S &= \frac{1}{c_{23}} - \frac{1}{c_{24}}, \end{aligned} \quad (200)$$

so findet man zunächst die Identität

$$P - Q = R - S,$$

ferner die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} p_{12} &= \frac{1}{2} (Q - P) \\ p_{1v} &= \frac{1}{4} (P + Q) \\ p_{2v} &= -\frac{1}{4} (R + S) \end{aligned} \right\} \dots (202)$$

Für das Abgleichen der Fernsprechkabel ist das vorhin abgeleitete Resultat, daß alle drei Werte d_1' verschwinden, sofern

$$c_{13} = c_{14} = c_{23} = c_{24} \dots (203)$$

ist, von besonderer Wichtigkeit. Setzt man

$$\left. \begin{aligned} p &= c_{13} - c_{23}, & q &= c_{14} - c_{24} \\ r &= c_{13} - c_{14}, & s &= c_{23} - c_{24} \end{aligned} \right\} \dots (204)$$

so ist die Bedingung (203), wie leicht zu verifizieren, den bekannten Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} p - q &= r - s = 0 \\ p + q &= 0, & r + s &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (205)$$

gleichwertig.

Soll das Abgleichen sich lediglich auf das Übersprechen erstrecken, so ist nach (196) und (202) die Beziehung

$$P - Q = R - S = 0 \dots (206)$$

zu erfüllen. Für das Mitsprechen I auf V und V auf I erhält man

$$P + Q = 0 \dots (207)$$

für das Mitsprechen II auf V und V auf II

$$R + S = 0 \dots (208)$$

Die Beziehungen (206), (207), (208) gelten übrigens wie die Formeln (198) nur angenähert.

Es ist nun

$$\begin{aligned} P - Q &= \left(\frac{1}{c_{13}} - \frac{1}{c_{23}} \right) - \left(\frac{1}{c_{14}} - \frac{1}{c_{24}} \right) \\ &= \frac{c_{23} - c_{13}}{c_{13} c_{23}} - \frac{c_{24} - c_{14}}{c_{14} c_{24}}. \end{aligned}$$

Da die beiden Produkte $c_{13} c_{23}$ und $c_{14} c_{24}$ nahezu gleich sind, so kann man für (206)

$$(c_{23} - c_{13}) - (c_{24} - c_{14}) = 0 \dots (209)$$

oder nach (204) auch

$$p - q = r - s = 0 \dots (210)$$

setzen. Für das Verschwinden des Mitsprechens I auf V und V auf I erhält man ebenso angenähert die Bedingung

$$p + q = 0 \dots (211)$$

für das Mitsprechen II auf V und V auf II die Bedingung

$$r + s = 0 \dots (212)$$