SAMMLUNG VIEWEG
TAGESFRAGEN AUS DEN GEBIETEN
DER NATURWISSENSCHAFTEN
UND DER TECHNIK

Heft 53

Mathematik und Baukunst

als Grundlagen abendländischer Kultur

Wiedergeburt der Mathematik

aus dem Geiste Kants

Von

Dr. V. Geilen

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg".

Heft 1. Dr. Robert Pohl und Dr. P. Pringsheim-Berlin: *Die lichtelektrischen Erscheinungen.* Mit 36 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 2. Dr. C. Freiherr von Girsewald-Berlin-Halensee: *Peroxyde und Persalze.* M. 2,40.

Heft 3. Diplomingenieur Paul Béjeuhr-Charlottenburg: *Der Blériot-Flugapparat und seine Benutzung durch Pégoud vom Standpunkte des Ingenieurs.* Mit 26 Abbildungen. M. 2,—.

Heft 4. Dr. Stanislaw Loria-Krakau: *Die Lichtbrechung in Gasen als physikal. und chem. Problem.* Mit 3 Abbild. und 1 Tafel. M. 3,—.

Heft 5. Professor Dr. A. Gockel-Freiburg i. d. Schweiz: *Die Radioaktivität von Boden und Quellen.* Mit 10 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 6. Ingenieur D. Sidersky-Paris: *Brennereifragen: Kontinuierliche Gärung der Rübensäfte. — Kontinuierliche Destillation und Rektifikation.* Mit 24 Abbildungen. M. 1,60.

Heft 7. Hofrat Professor Dr. Ed. Donath und Dr. A. Gröger-Brünn: *Die flüssigen Brennstoffe, ihre Bedeutung und Beschaffung.* Mit 1 Abbildung. M. 2,—.

Heft 8. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Max B. Weinstein-Berlin: *Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld.* M. 2,—.

Heft 9/10. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. O. Lummer-Breslau: *Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur.* Mit 50 Abbildungen. M. 5,—.

Heft 11. Dr. E. Przybyllok: *Polhöhen-Schwankungen.* Mit 8 Abbildungen. M. 1,60.

Heft 12. Professor Dr. Albert Oppel-Halle a. S.: *Gewebekulturen und Gewebepflege im Explantat.* Mit 32 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 13. Dr. Wilhelm Foerster-Berlin: *Kalenderwesen und Kalenderreform.* M. 1,60.

Heft 14. Dr. O. Zoth-Graz: *Über die Natur der Mischfarben auf Grund der Undulationshypothese.* Mit 3 Textfig. und 10 Kurventaf. M. 2,80.

Heft 15. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Die Grundlagen der Quantentheorie in elementarer Darstellung.* Mit 8 Abbildungen. **3.** erweiterte Auflage. 1920. M. 5,—.

Heft 16. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Anwendung der Quantenhypothese in der kinetischen Theorie der festen Körper und der Gase. In elementarer Darstellung.* **2.** Auflage in Vorbereitung.

Heft 17. Dr. Hans Witte-Wolfenbüttel: *Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik.* Eine allgemeinverständliche Entwicklung des raumzeitlichen Relativitätsgedankens bis zum Relativitätsprinzip der Trägheitssysteme. Mit 18 Abbild. **3.** Aufl. 1920. M. 2,80.

Heft 18. Dr. Erich Hupka-Tsingtau: *Die Interferenz der Röntgenstrahlen.* Mit 33 Abbild. und 1 Doppeltafel in Lichtdruck. M. 2,60.

Heft 19. Prof. Dr. Robert Kremann-Graz: *Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässerigen Lösungen.* Mit 20 Abbildungen. M. 2,40.

Heft 20. Dr. Erik Liebreich-Berlin: *Rost und Rostschutz.* Mit 22 Abbildungen. M. 3,20.

Heft 21. Prof. Dr. Bruno Glatzel-Berlin: *Elektrische Methoden der Momentphotographie.* Mit dem Bild des Verf. u. 51 Abbild. M. 3,60.

Heft 22. Prof. Dr. med. et phil. Carl Oppenheimer: *Stoffwechselfermente.* M. 2,80.

Heft 23. Dr. Alfred Wegener-Marburg: *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane.* **2.** gänzlich umgearbeitete Auflage erschien als Bd. 66 unserer Sammlung „Die Wissenschaft".

Heft 24. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Die Härtung der Fette.* **2.** Auflage in Vorbereitung.

Wenden!

Mathematik und Baukunst

als Grundlagen abendländischer Kultur

Wiedergeburt der Mathematik

aus dem Geiste Kants

Von

Dr. V. Geilen
Privatdozent für Mathematik an der Universität Münster i. W.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1921

Herausgeber dieses Heftes:
Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. K. Scheel, Berlin.

ISBN 978-3-663-00778-4 ISBN 978-3-663-02691-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-02691-4

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany 1921

Geschrieben steht: „Im Anfang war das Wort!“

Goethe.

Vorwort.

Der Kern, aus dem heraus sich die hier vorliegenden beiden Schriften entwickelt haben, ist merkwürdigerweise ein einziges mathematisches Symbol, das Zeichen

$$„\int“,$$

dessen Sinn und Bedeutung im zweiten Aufsatz näher erläutert wird. Ich fand es Anfang Oktober vorigen Jahres beim Nachdenken über den Begriff der Irrationalzahl und erkannte bald seine weittragende Bedeutung für Grundlegung, Aufbau und Wesen der heutigen Mathematik.

Wie meine Gedanken dann in neue, allgemeinere Bahnen gelenkt wurden, sagen die einleitenden Seiten des ersten Aufsatzes.

Der erste Aufsatz sollte in der „Internationalen Monatsschrift“, der zweite in den „Kant-Studien“ Aufnahme finden, jedoch beide in gekürzter Form. So sehr ich mich den Herausgebern dieser beiden Zeitschriften, Herrn Prof. Dr. Cornicelius in Berlin und Herrn Prof. Dr. Frischeisen-Köhler in Halle, für ihr Entgegenkommen zu Dank verpflichtet fühlte, war ich doch enttäuscht, daß die Aufsätze nicht in allgemein, insbesondere die Jugend ansprechender, sondern in gedrängter, mehr fachmännisch zugeschnittener Form ans Licht treten sollten.

Darum wandte ich mich Ende September an den Verlag Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig und fand hier zugleich für beide Schriften in ungekürzter Gestalt die gewünschte Aufnahme. Ich freue mich besonders, daß nun meine Aufsätze, dank der weitherzigen Auffassung der beteiligten Persönlichkeiten, in eine Folge mathematisch-physikalischer Schriften eingereiht an die Öffentlichkeit treten. Dem Verlag möchte ich für sein mir bei der Drucklegung in jeder Richtung bezeugtes Entgegenkommen noch meinen besonderen Dank aussprechen.

Münster i. W., im Dezember 1920.

V. Geilen.

Mathematik und Baukunst

als Grundlagen abendländischer Kultur

Einleitung.

Diese kleine Schrift verdankt einem Zufall ihre Entstehung: Herr Prof. Dr. Plenge, Ordinarius der Staatswissenschaften an der Universität zu Münster i. W., der im letzten Wintersemester, Anfang 1920, eine Vortragsreihe über „Naturwissenschaft und Politik“ für Studierende aller Fakultäten veranstaltete, forderte mich auf, an Stelle eines verhinderten Vortragenden, der über ein anderes Thema sprechen sollte, einzuspringen und einen Vortrag über „Mathematik und Politik“ zu übernehmen, mich zugleich auf O. Spenglers „Untergang des Abendlandes“ hinweisend. Ich nahm seine Aufforderung an, weil meine Auffassung von dem Endzweck der Wissenschaft ganz in der durch das aufgegebene Thema im weitesten Sinne gegebenen Richtung liegt. So wurde ich zugleich mit Spenglers Buch bekannt, von dessen stark mathematischem Einschlag ich kurz vorher gehört hatte; es kam hinzu, daß mir eine im Semester zuvor gehaltene Vorlesung über „Mengenlehre und reelle Funktionen“ Gelegenheit gegeben hatte, meine Anschauungen über den gegenwärtigen Stand eines wesentlichen Teiles der Mathematik, gemessen an den ihr gerade heute sich darbietenden Aufgaben, zu klären und neu zu ordnen.

Ende Januar durfte ich vor den Studierenden in einstündiger Rede meine Gedanken in ihren wesentlichen Zügen entwickeln, die im folgenden in etwas ausführlicherer Form niedergelegt sind.

Spenglers Buch mit dem düster prophetischen Titel hat viel Beachtung gefunden und zweifellos gerade auf Deutschlands heranreifende Jugend einen tiefen Eindruck gemacht;

nicht nur durch eine erstaunliche Fülle verschiedenartigsten Wissens ragt Spengler hervor, sondern fast mehr noch durch den umfassenden Blick, mit dem er die Massen seines Wissens nach fundamentalen Leitgedanken ordnet. Bemerkenswert ist seine Leistung in der modernen Literatur jedenfalls insofern, als er sich auch mit der Geschichte der Mathematik von ihren Anfängen an bis zur Gegenwart vertraut gemacht hat und daß er von der fundamentalen Bedeutung mathematischen Denkens im Ablauf der Kulturgeschichte des Menschengeschlechts tief durchdrungen ist. Die Mathematik, allgemeiner die „exakten“ Wissenschaften scheinen ihm die Grundgedanken für seine eigenartige Konstruktion der Kulturgeschichte geliefert zu haben.

Wie wohl die meisten meiner mathematischen Fachgenossen muß auch ich es mir normalerweise versagen, die Tageserscheinungen der geisteswissenschaftlichen Literatur zu verfolgen; die Mathematik nimmt fast die ganze Kraft und die ganze Zeit eines Menschen in Anspruch. Das hat seinen naturgemäßen Grund in der Härte und Schwere des wissenschaftlichen Materials, das wir Mathematiker zu bearbeiten und mit dem wir unsere gedanklichen Bauwerke aufzuführen haben. Aber darf die Mathematik auch an dem Werke Spenglers vorübergehen? Ich weiß nicht, ob meine Fachgenossen mir dafür Dank wissen werden, wenn ich die Aufgabe übernehme, mich als Mathematiker in meiner Weise öffentlich mit Spengler auseinanderzusetzen. Andererseits ist es für jemand, der kein „Schriftsteller“ ist, gewagt, gegen einen Spengler das Wort zu ergreifen. Und doch: Hier muß weithin hörbar gesprochen werden, denn es geht hier nicht allein um die Mathematik, sondern um die ganze geistige Einstellung gerade der Jugend, auf deren Schultern die Aufgabe des Wiederaufbaus unseres darniederliegenden Vaterlandes ruht. Der Titel des Spenglerschen Buches nicht nur, sondern seine ganze Grundstimmung ist pessimistisch, dekadent. Sollte es mir demgegenüber gelingen, die Überzeugung zu wecken, daß noch die Möglichkeit gegeben ist, in einer nahen Zukunft Großes und Echtes zu schaffen, wenn man die Zeichen der Zeit versteht und der Erkenntnis die Tat folgen läßt, so habe ich meine Zeit nicht vergebens geopfert. Manches im folgenden Gesagte wäre vielleicht näher zu erörtern und zu begründen, dessen bin ich mir bewußt; vielleicht bleibt auch einiges zu berichtigen. Aber meine Zeit ist beschränkt, und wenn ich alles bis ins kleinste genau ausführen wollte, so würde diese Erwiderung so lange hinausgeschoben werden müssen, daß sie ihren Hauptzweck verfehlen würde. So möge man das Gesagte als eine Art Programm auffassen. Bei gegebener Gelegenheit gedenke ich noch manches hinzuzufügen.

Spengler faßt die Mathematik von vornherein als einen rein geistigen, ideellen Kulturfaktor auf; ich will hingegen zunächst kurz von ihren mehr realen Wirkungen in der Gegenwart sprechen; dann erst will ich den Blick mit Spengler rückwärts richten und seiner Auffassung meine teils ergänzenden, teils berichtigenden Gedanken über die geschichtliche Bedeutung der Mathematik in der Entwicklung der Kultur Europas gegenüberstellen. So wird der Faden meiner Überlegungen das erkennen lassen, was wir als die eigentliche kulturelle Lebensaufgabe des deutschen Volkes aufzufassen haben. Wir kehren dann zur Gegenwart zurück, aber nicht, um in hoffnungsloser Resignation vor einem unabwendbaren Fatum unsere Ohnmacht einzugestehen, sondern in dem Glauben, daß wir es noch in der Hand haben, unser Schicksal zum Guten zu wenden, wenn wir unsere Kräfte gemeinsam auf das Streben nach dem uns von der Natur bestimmten Lebensziel einstellen..

I.

Es bleibt dem nicht in die Tiefe blickenden Auge gewöhnlich verborgen, wie die Mathematik im weitesten Sinne überall unter der Oberfläche des heutigen Lebens ein fein gesponnenes Netz bildet, in das das ganze, tausendfache Gewebe der heutigen Kultur eingespannt ist, wie die Mathematik zugleich aber auch die Eisenkonstruktion ist, die den Bau der heutigen Kultur zusammenhält, ja wie die Mathematik in gewissem Sinne das Fundament ist, das unsere Kultur in ihrer heutigen Ausgestaltung trägt [1]).

Unsere ganze wirtschaftliche Organisation, vom kleinsten Haushalt angefangen bis zum größten, aller Handel und Verkehr, also alle Erwerbs- und Ernährungsmöglichkeit beruht auf der Existenz von Zahl und Maß; die Lebensfähigkeit des Organismus des heutigen Finanz- und Versicherungswesens beruht auf dem Dasein mathematischer Disziplinen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik, Schöpfungen bedeutender Mathematiker des 18. und 19. Jahrhunderts.

Die Schöpfung eines einheitlichen Maßstabes für die Kulturwelt, des Metermaßes, erforderte die Mitwirkung hervorragender mathematischer Geister neben solchen der Naturwissenschaft. In welchem Stadium stände heute wohl noch das Wirtschaftsleben, die Technik, die ganze Naturwissenschaft wenn dieses Einheitsmaß, dessen Autorität wesentlich in seiner mathematischen Begründung beruht, sich nicht durchgesetzt hätte! Zugleich ein Beispiel dafür, wie die Mathematik gerade im Bunde mit der Naturwissenschaft am segensreichsten für die Interessen der Menschheit wirken kann.

Ich will hier nicht näher ausführen, wie die zeichnende und rechnende Mathematik der Technik auf Schritt und Tritt Hilfe leistet; der moderne Ingenieur kann nicht anders als auf mathematischer Grundlage schaffen; das gilt für Häuser- und Städtebau, für Maschinenbau und Elektrotechnik, für Straßen- und Eisenbahnbau, für Kanal- und Schiffbau. Wer denkt daran, daß zum Bau eines Eisenbahntunnels neben vielen anderen Wissenschaften auch die schärfsten mathematischen Hilfsmittel nötig sind? Nicht nur der Bau der kompliziertesten Kriegswaffen, der Kriegsschiffe, Torpedo- und Unterseeboote, der Flugzeuge und Luftschiffe erfordern das intensivste Zusammenwirken des Ingenieurs mit dem Mathematiker; auch alle Orientierungsmittel wie Landkarten, Fernrohre, Entfernungsmesser beruhen auf mathematischer Grundlage.

---

[1]) Ausführlicheres hierüber findet man in meinem Aufsatz: „Die Bedeutung der Mathematik für die Kultur der Gegenwart", abgedruckt in der „Internationalen Monatsschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik", Jahrgang 1919, Heft 5/6.

Wenn schon eine leistungsfähige Technik ohne die Hilfe der Mathematik nicht bestehen kann, um wieviel weniger wird dann die eigentliche wissenschaftliche Naturforschung ohne das Instrument der Mathematik auskommen können! Geophysik und Astronomie, Physik und Chemie brauchen die Mathematik wie das tägliche Brot. Nur zwei Beispiele: Die heutige drahtlose Telegraphie ruht wesentlich auf einer einzigen mathematischen Formel, den Maxwellschen Differentialgleichungen, die den Schlüssel für die Entwicklung dieser im realen Wortsinne weltumspannenden Entdeckungen gebildet haben. Und die heutige Relativitätstheorie, die in ihrer Ausgestaltung durch den Physiker Einstein wissenschaftliche Umwälzungen gezeitigt hat, die in ihrer Größe von manchen mit der Tat des Kopernikus in Vergleich gesetzt werden, waren nur dadurch möglich, daß Einstein die Hilfsmittel der heutigen Mathematik in umfassender Weise beherrschte. Einstein sagt selbst: „Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem ‚absoluten Differentialkalkül', welcher auf den Forschungen von Gauß, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten beruht". Er erwähnt ferner die wichtigen Leistungen des Mathematikers Minkowski, ohne dessen Mithilfe „die allgemeine Relativitätstheorie vielleicht in den Windeln stecken geblieben wäre", und schließlich gedenkt er noch des Mathematikers Großmann, der ihn „beim Suchen nach den Feldgleichungen der Gravitation unterstützte".

Für Botanik, Zoologie, Medizin und viele verwandte Wissensgebiete ist das Mikroskop ein unentbehrliches Instrument, dem wir unabsehbare Fortschritte verdanken; seine Existenz beruht auf mathematischen Überlegungen. Ohne das Mitschaffen der Mathematiker wären seine heute fast unzähligen Abwandlungen und Verfeinerungen nicht möglich. Die Bakteriologie, die in der Bekämpfung der verheerendsten Krankheiten — ich erinnere nur an die Cholera und die Tuberkulose — segensreichstes geleistet hat, verdankt dem Mikroskop überhaupt ihr Dasein

II.

Das Gebäude unserer gegenwärtigen Kultur, der äußeren sowohl wie der mit ihr in steter Wechselwirkung stehenden inneren, ruht demnach deutlich erkennbar auf der Mathematik als einem ihrer wesentlichsten Grundpfeiler. Doch es war ja in früheren Zeiten schon ein Aufblühen hoher Kulturen möglich — welche Rolle hat damals die Mathematik gespielt? Wir wissen von den Griechen, daß sie gute Mathematiker waren; war aber die Mathematik ein wesentlicher Bestandteil ihrer Kultur? Wir hören von dem Kulturvolke der Römer nicht, daß es irgend eine bedeutende neue Leistung in der Mathematik aufzuweisen habe. Wir erfahren nirgends, ob sich die Völker des Abendlandes in der Kulturperiode des Mittelalters mit der Mathematik näher befaßt haben. Spricht nicht das alles dafür, daß eine Kultur zu ihrem Wachstum der Mathematik gar nicht bedarf?

Vor wenigen Jahrzehnten wußten selbst die Mathematiker von Fach noch wenig von dem bedeutenden mathematischen Interesse früherer Völker; sie fanden bei dem raschen Fortschreiten ihrer Wissenschaft nicht die Zeit, sich in den mathematischen Geist früherer Zeiten zu versenken. Man war im allgemeinen gewohnt, die mathematischen Leistungen der Neuzeit gleichwie aus dem Nichts entstanden und aufgeblüht zu betrachten. Erst seit kurzem existieren allgemein zugängliche Werke über die gesamte Geschichte der Mathematik und aus ihnen erst ist uns recht erkennbar geworden, welch vertieftes mathematisches Interesse schon in alten Zeiten geherrscht haben muß und wie der mathematische Gedanke in manchen Kulturen von grundlegender Bedeutung gewesen ist.

Und da tritt nun das neue Buch von O. Spengler, „Der Untergang des Abendlandes“, auf den Plan, dessen Verfasser den Spuren der Geschichte der Mathematik in grauer Vorzeit, nicht nur in der europäischen, sondern auch in der orientalischen Kultur, nachgegangen ist und der gerade infolge dieses seines Interesses an der Mathematik zu seiner großen Auffassung von der Geschichte der Menschheit gekommen zu sein scheint, die die gesamte Erde in ihrer ganzen Lebensdauer umspannen will.

Spenglers Buch stellt eine vergleichende Geschichte der großen Kulturen dar: Jede Kultur, wie die ägyptische, die arabische, die antike, die abendländische, ist nach Spengler einem organischen Lebewesen vergleichbar, an dem alle Spuren seiner verschiedenen Altersstufen — Jugend, Reife, Alter und Tod — nach außen deutlich in die Erscheinung treten. Nachdem man die gemeinsamen Kennzeichen der einzelnen Lebensstadien solcher Völkerkulturen durch historischen Vergleich festgestellt hat, kann man durch Analogieschluß mit Sicherheit erkennen, in welchem Stadium des Lebens sich irgend eine andere Kultur befindet, man kann also gegebenenfalls den zukünftigen Verlauf einer Kultur in großen Zügen voraussehen. So kommt Spengler dazu, den Endverlauf und den baldigen Untergang unserer abendländischen Kultur in gewissem Sinne vorauszusagen.

An Stelle des geschichtlichen Prinzips der Entwicklung, das an eine immer höher ansteigende Entwicklung des Menschengeschlechts in einer aufsteigenden Linie glaubt, setzt er das Prinzip der Gleichberechtigung der verschiedenen Kulturen und ihrer Unabhängigkeit voneinander, ihres periodischen Auf- und Absteigens, des nach unveränderlichen Grundgesetzen sich immer wiederholenden Entstehens und Vergehens. Spengler bezeichnet seine Art der Geschichtsauffassung als „Morphologie" der Weltgeschichte, als Formen-, Gestaltenlehre der Kulturen in ähnlichem Sinne, wie Goethe von einer Morphologie der Pflanzen spricht. Jede Kultur wächst aus ihrer natürlichen Umgebung ursprünglich heraus wie eine Pflanze, sich selbst genug, unberührt und unbekümmert um andere Kulturen, die vor ihr gelebt haben oder neben ihr bestehen. Wir haben, nach Spengler, nicht das Recht, unsere heutige abendländische Kultur gleichsam als die Quintessenz, als die höchste Blüte des bisherigen Kulturlebens der Erde anzusehen. Werturteile über die Höhe, über die Qualität einer Kultur zu fällen, steht uns darum nicht zu. Unsere heutige Art der Geschichtsbetrachtung, die sich für den Mittelpunkt und Höhepunkt der Menschheit hält und von diesem Standpunkt aus die Weltentwicklung beurteilt, vergleicht Spengler mit der Ansicht der vorkopernikanischen Zeit, die da glaubte, die Sonne samt dem ganzen Heer der Sterne drehe sich um unsere unscheinbare Erde als den Mittelpunkt des Weltalls. Erst wenn wir uns von diesem Subjektivismus frei machen und unseren Standpunkt über den Kulturen einnehmen, treten auch die Analogien im zeitlichen Ablauf der verschiedenen Kulturen hervor, die in allen Äußerungen ihres Lebens, in Kunst, Wissenschaft, Staatsform usw. erkennbar sind.

Wie aber jede Kultur in ihrem Verlauf den allgemeinen Gesetzen der Natur unterworfen ist, so trägt doch wiederum jede von ihnen eine für sie charakteristische, individuelle Prägung, wie die Landschaft, in der sie entstanden ist: Antike Kultur und griechische Landschaft gehören untrennbar zusammen. Jeder Kultur liegt eine bestimmte Lebensauffassung, eine Seele eigener Art zugrunde, und die äußeren Formen einer Kultur sind das in die Erscheinung tretende Abbild dieser Kulturseele. Die Seele der antiken Kultur ist völlig verschieden von der der abendländischen Kultur; beide stehen sich innerlich fremd, sich gegenseitig nicht verstehend gegenüber.

Von besonderer Bedeutung für seine Art der Kulturgeschichte wird nun für Spengler die Mathematik, weil sich in dieser die Seele einer Kultur am tiefsten und reinsten erkennbar ausspricht. Schon das „Dasein von Zahlen", des Urgrundes aller Mathematik, ist ihm geradezu ein „Mysterium"; der „Vorstellung von Gott", die nach ihm die „bildgewordene Idee der Notwendigkeit des Schicksals" ist, stellt er die „Zahl" als die „bildgewordene Idee der kausalen Notwendigkeit" gegenüber.

Die Mathematik nimmt nach Spengler „einen einzigartigen Rang unter allen Schöpfungen des Geistes" ein; sie ist ihm eine „echte Kunst neben der Plastik und der Musik", sie ist ihm „eine Metaphysik von höchstem Range"; er stellt „den geborenen Mathematiker neben die großen Meister der Fuge, des Meißels und des Pinsels, die ebenfalls jene große Ordnung aller Dinge, die der bloße Mitmensch ihrer Kultur in sich trägt, ohne sie wirklich zu besitzen, in Symbole kleiden, verwirklichen, mitteilen wollen". „Deshalb bedeutet das Wort ‚schöpferisch' im Mathematischen mehr als in den bloßen Wissenschaften. Newton, Gauß, Riemann waren künstlerische Naturen. Man lese nach, wie ihre großen Konzeptionen sie plötzlich überfielen. ‚Ein Mathematiker', meinte der alte Weierstraß, ‚der nicht zugleich ein Stück von einem Poeten ist, wird niemals ein vollkommener Mathematiker sein'." Das Verfahren der Mathematik ist „synthetisch, künstlerisch gesprochen Komposition, in welcher der echte Künstler einem höheren Zwange — dem ‚a priori' Kants — unterliegt". Umgekehrt ist „das Formgefühl des bildenden Musikers, Malers, Tondichters ein wesentlich mathematisches". „Am engsten" sind der Mathematik die großen Architekturen, die dorische, die gotische usw. „verschwistert". „Die Architektur der großen Pyramidentempel" Ägyptens „ist eine schweigende Mathematik". Umgekehrt ist „aber auch die Analysis" „eine Architektur größten Stils". Ja, Spengler behauptet, daß eine Mathematik nicht nur „mit allen sie begleitenden Künsten, sondern auch mit allen Schöpfungen des tätigen Lebens überhaupt die gleiche Sprache redet".

So wird die zentrale Stellung erkennbar, die Spengler gerade der Mathematik im Gesamtbilde einer Kultur zuweist; um sie gruppieren sich die anderen Äußerungen menschlichen Geistes, in ihr verkörpert sich die „Einheit des Stils" einer Kultur.

Wie die Mathematik so einerseits das gemeinsame Grundprinzip für die verschiedenartigen geistigen und künstlerischen Gestaltungen einer Kultur darstellt, so tritt andererseits nach Spengler gerade an der Mathematik der spezifische Charakter einer bestimmten Kulturseele im Unterschied von allen anderen zutage. Jede Kultur bringt eine ihrem Wesen adäquate Art der Mathematik hervor; es gibt nach Spengler nicht bloß **eine** Mathematik, sondern mehrere „Mathematiken". Der Sinn dieser Auffassung wird uns deutlich werden, wenn wir nach ihm die Mathematik der Griechen mit der des Abendlandes vergleichen.

„Es hängt für den Stil einer entstehenden Mathematik alles davon ab, in welcher Kultur sie wurzelt, was für Menschen über sie nachdenken.“ Die antike Mathematik ist die euklidische Geometrie, sie überschreitet, dem Charakter der griechischen Seele entsprechend, nirgends die Grenzen des Anschaulichen, während die Mathematik des Abendlandes, die Analysis des Unendlichen, mit ihrem Hinausdrängen über das Endliche „aus dem leidenschaftlichen faustischen Hange“ der abendländischen Seele zum Unendlichen geboren ist. Die antike Welt hat ein „tiefes Bedürfnis nach sichtbarer Begrenztheit“, „unser Weltgefühl“ findet dagegen seinen Ausdruck „im Bilde eines unendlichen Raumes“ als des eigentlich Wirklichen, dem gegenüber „alles Sichtbare“ „beinahe als eine Wirklichkeit zweiten Ranges empfunden wird“. Der antike Mathematiker kennt nur das, was er sieht und greift; „der abendländische Mathematiker begibt sich, sobald er von antiken Vorurteilen frei sich selbst gehört, in die gänzlich abstrakten Regionen einer unendlichen Zahlenmannigfaltigkeit von *n* — nicht mehr von drei — Dimensionen, innerhalb deren seine sogenannte Geometrie jeder anschaulichen Hilfe entbehren kann und meistens muß.“ In der antiken Mathematik „dient der Geist dem Auge, in der faustischen überwindet er es“.

„Die entscheidende Tat des Descartes,“ sagt Spengler, „bestand nicht in der Einführung einer neuen Methode oder Anschauung auf dem Gebiete der überlieferten Geometrie, wie dies immer wieder ausgesprochen wird, sondern in der endgültigen Konzeption einer neuen Zahlenidee, die sich in der Lösung der Geometrie von der optischen Handhabe der Konstruktion, von der gemessenen und meßbaren Strecke überhaupt aussprach. Damit war die Analysis des Unendlichen Tatsache geworden.“ „An Stelle des sinnlichen Elements der konkreten Strecke und Fläche — des spezifischen Ausdrucks antiken Grenzgefühls — tritt das abstrakträumliche, mithin unantike Element des Punktes, der von nun an als Gruppe zugeordneter reiner Zahlen charakterisiert wird. Descartes hat den literarisch ererbten Begriff der Größe, der sinnlichen Dimension, zerstört und durch den veränderlichen Beziehungswert der Lagen im Raume ersetzt. Daß dies aber eine Beseitigung der Geometrie überhaupt war, die von nun an innerhalb der Zahlenwelt der Analysis nur noch ein durch antike Reminiszenzen verschleiertes Scheindasein führt, hat man übersehen." „Die Zahl als reine Größe" „findet ihr Gegenstück in der Zahl als reiner Beziehung." Das Symbol des abendländischen Weltgefühls ist der „in keiner andern Kultur ausgedrückte Begriff der Funktion." „Nicht nur die euklidische, d. h. die allgemein menschliche, populäre Geometrie, sondern auch die archimedische Sphäre des elementaren Rechnens, die Arithmetik, hört damit auf, für die wirklich bedeutende Mathematik Westeuropas zu existieren. Es gibt nur noch eine abstrakte Analysis." Die „tiefsinnigen Schöpfungen" der neueren Mathematik, die der imaginären Zahlen, der unendlichen Reihen, der Logarithmen, des bestimmten Integrals usw. sind nach Spengler lauter „Siege über das populär-sinnliche Zahlengefühl in uns, das aus dem Geiste der neuen Mathematik heraus", „überwunden werden mußte". Es ist, nach Spengler, nur die Schuld der von der Antike übernommenen Zeichensprache der Mathematik, wenn „noch heute auch unter Mathematikern der Glaube herrscht, Zahlen seien Größen". „Die Funktion selbst als Einheit, als Element, die variable, in optische Grenzen nicht mehr einzuschließende Beziehung ist die neue Zahl."

„Mit der Einführung der imaginären und komplexen Zahlen" „ist jeder Rest antik-populärer Greifbarkeit zerstört worden." Die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen stellt „die abendländische Mathematik in ihrer Reinheit" dar. „Die Geometrie von der Anschauung, die Algebra vom Begriff der Größe zu befreien und beide jenseits der elementaren Schranken von Konstruktion und Rechnung zu dem mächtigen Gebäude der Funktionstheorie zu vereinigen, das war der große Weg des abendländischen Zahlendenkens."

Hören wir weiter, wie Spengler über die „fortschreitende Emanzipation" der abendländischen Mathematik von Anschauung und Größenbegriff spricht. Die n-dimensionalen Räume der heutigen Mathematik sind ihm „transzendente Raumwelten, die zu keiner wie immer gearteten Sinnlichkeit mehr in Beziehung stehen". „Erst in dieser Sphäre des Zahlendenkens, die nur einem sehr kleinen Kreis von Menschen noch zugänglich ist", „erhalten selbst Bildungen, wie die Systeme der hyperkomplexen Zahlen (etwa die Quaternionen der Vektorenrechnung)" „den Charakter von etwas Wirklichem. Man hat eben zu begreifen, daß Wirklichkeit nicht nur sinnliche Wirklichkeit ist, daß vielmehr das Seelische seine Idee in noch ganz anderen als anschaulichen Bildungen verwirklichen kann".

„Aus dieser großartigen Intuition symbolischer Raumwelten folgt die letzte und abschließende Fassung der gesamten abendländischen Mathematik, die Erweiterung und Vergeistigung der Funktionentheorie zur Gruppentheorie." „Es handelt sich, wie man fühlt, um Welten ganz neuer Zahlen, die für das innere Auge des Eingeweihten doch nicht ganz ohne eine gewisse Sinnlichkeit sind."

„Auf diesem höchsten Gipfel," so sagt Spengler am Schlusse der vergleichenden Betrachtung der Mathematik des Abendlandes und der Antike, nachdem er noch zur Illustration dieser „ungeheuer abstrakten" Gebiete der Mathematik das von Klein formulierte allgemeine Problem der Gruppentheorie angeführt hat, „schließt nunmehr — nach Erschöpfung ihrer sämtlichen inneren Möglichkeiten und nachdem sie ihre Bestimmung, Abbild und reinster Ausdruck der Idee des faustischen Seelentums zu sein, erfüllt hat — die Mathematik des Abendlandes ihre Entwicklung ab, in demselben Sinne, wie es die Mathematik der antiken Kultur im 3. Jahrhundert tat. Beide Wissenschaften — es sind die einzigen, deren organische Struktur sich heute schon historisch durchschauen läßt — sind aus der Konzeption einer völlig neuen Zahl durch Pythagoras und Descartes entstanden, beide haben in prachtvollem Aufschwung ein Jahrhundert später ihre Reife erlangt, und beide vollendeten nach einer Blüte von drei Jahrhunderten das Gebäude ihrer Ideen, in derselben Epoche, durch welche die Kultur, der sie angehören, in eine weltstädtische Zivilisation überging." „Sicher ist, daß für uns die Zeit der großen Mathematiker vorüber ist. Es ist heute dieselbe Arbeit des Erhaltens, Abrundens, Verfeinerns, Auswählens, die talentvolle Kleinarbeit an Stelle der großen Schöpfungen im Gange, wie sie auch die alexandrinische Mathematik des spätern Hellenismus kennzeichnet."

So ersehen wir zugleich, was Spengler unter den Lebensstufen einer Kultur versteht und wie seine Voraussage vom „Untergang des Abendlandes" aufzufassen ist. An einer anderen Stelle zieht Spengler die praktischen Konsequenzen aus seiner Auffassung: „Wenn unter dem Eindruck dieses Buches sich Menschen der neuen Generation der Technik statt der Lyrik, der Marine statt der Malerei, der Plastik statt der Erkenntniskritik zuwenden, so tun sie, was ich wünsche, und ich kann ihnen nichts Besseres wünschen."

So scheint die sich fast in eine Art Mystizismus verflüchtigende Verherrlichung des „Abstrakten" bei der Berührung mit der realen Wirklichkeit sofort in eine Lebensphilosophie des Praktischen, allzu Praktischen umzuschlagen!

III.

Bleibt uns Jüngeren wirklich nichts anderes übrig als das, wozu Spengler uns rät? Das wäre in der Tat ein ruhmloses Ende unserer Kultur! Und nicht erst, wie Spengler annimmt, in mehreren Jahrhunderten, sondern wahrscheinlich schon in viel kürzerer Zeit wäre bei unserer gegenwärtigen Lage — Spenglers Buch ist vor dem Zusammenbruch Mitteleuropas geschrieben — ihr Ende besiegelt. Spengler sieht selbst „den Prüfstein für den Wert eines Denkers in seinem Blick für die großen Tatsachen seiner Zeit. Erst hier entscheidet es sich, ob jemand nur ein geschickter Konstrukteur von Systemen und Prinzipien ist, ob er sich nur mit Gewandtheit und Belesenheit in Definitionen und Analysen bewegt — oder ob es die Seele der Zeit selbst ist, die aus seinen Werken und Intuitionen redet. Ein Philosoph, der nicht auch die Wirklichkeit begreift, wird niemals ersten Ranges sein."

Suchen wir, nachdem uns durch Spengler der Blick geschärft ist, einmal nach unserer Weise die Struktur des europäischen Kulturlebens aus seinem ganzen organischen Werden, von der Antike an bis zur Jetztzeit, im Zusammenhange zu verstehen. Sind Antike und Neuzeit wirklich zwei getrennte Welten, die sich innerlich fremd gegenüberstehen, die durch keine Brücke verbunden sind? Gibt es nicht doch eine durchgehende, ansteigende Linie der Entwicklung, der die periodisch auf- und absteigende Spenglersche Linie übergelagert ist und an der wir Richtung und Ziel unserer Kultur erkennen können? Und wenn es uns gelingt, diese Linie aufzudecken, so werden wir nicht nur fragen, was wir von der Zukunft zu **erwarten** haben, sondern auch, was wir noch **tun** können, um unsere Zukunft zu einer möglichst ersprießlichen zu gestalten. Haben wir nicht doch noch die Möglichkeit, „dem Schicksal in den Rachen zu greifen", oder bleibt uns wirklich nur noch die technische Verfeinerung, das allmähliche Verdorren zu seelenloser Erstarrung, also die innere Verflachung auf der einen Seite und auf der anderen der Rückfall in Mystizismus und Fatalismus im Sinne Spenglers übrig?

So grandios das kulturgeschichtliche Gemälde ist, das Spengler vor unseren Augen entrollt, es ist nicht die ganze Wirklichkeit; er preßt die Natur zu sehr in sein Schema, er treibt die Tendenz seiner Gedanken auf die Spitze; er ist so sehr „objektiv", daß er das Besondere seiner heimatlichen und gegenwärtigen Kultur übersieht. So wollen wir also daran gehen, ein naturgetreueres Bild der europäischen Kulturgeschichte in ihren wesentlichen Zügen zu entwerfen, wobei, wie bei Spengler, das Mathematische im weitesten Sinne als Urgrund und Kern der Kultur, um den sich das übrige gruppiert und der die treibenden Kräfte der Kulturentwicklung in sich birgt, in seiner Bedeutung erkennbar werden wird.

IV.

Fragen wir uns zunächst, was uns Bewohnern Europas das Recht gibt, von vornherein unsere eigenen Kulturleistungen im bisherigen Ablauf der Kulturentwicklung der Erde als etwas Besonderes, von den Kulturen anderer Weltteile sich Abhebendes, als eine Art Höhepunkt aufzufassen.

Schon die geographische und klimatische Beschaffenheit unseres Erdteiles gibt eine Antwort darauf; die Landkarte Europas ist Symbol: Hier die abwechslungsreiche Gestaltung der Küste, die trennenden und doch wieder verbindenden Meeresbuchten, dort — in Ägypten, Arabien, Indien, China — die Karte in riesenhafter Eintönigkeit. Hier fruchtbare Täler und sanft geschwungene Berge und Mittelgebirge, die Völker in Untergruppen zergliedernd und doch übersteigbar, dort gewaltig sich hinstreckende ungegliederte Flächen und daneben Hochgebirge als unüberwindbare Mauern; hier Flüsse in freundlichen, waldumkränzten Tälern, willkommene Adern des Verkehrs, dort gewaltig sich hinwälzende Ströme, wie Riesen, unbezähmbar, wenn sie über ihre Ufer treten. Hier der unablässige, unberechenbare Wechsel von Sonne und Regen, Wärme und Kälte, der die Bewohner immer von neuem aus ihrer Ruhe aufrüttelt, dort der einschläfernde, gleichmäßige Wechsel zwischen Regen- und Sonnenperiode. Kurz: Europa ein nach Raum und Zeit harmonisch wohlgegliederter, lebensvoller Organismus, die alten Kulturländer dagegen ungeschlachten, vorweltlichen Wesen vergleichbar. Den Menschen Europas gab ihre Natur immer neuen Anstoß, ihren Geist reicher und reicher zu entwickeln; sie konnten ihre Meere, Berge, Flüsse und die Belästigungen des Klimas überwinden und sich die Natur dienstbar machen, wodurch sich ihre Kräfte zu ungeahnter, die ganze Erde umspannender Größe steigerten; die Völker des Morgenlandes hingegen mußten vor der Größe der sie umgebenden Natur erlahmen in ihrer Kraft und nach gewiß bewundernswerten Kulturleistungen in sich zusammensinken, ohne die äußere und innere Kultur der Welt wesentlich und dauernd beeinflußt zu haben.

So tritt ganz naturgemäß die Kultur der europäischen Völkergruppe den morgenländischen Kulturen gegenüber; die griechische Kultur, an der Grenze zwischen Morgen- und Abendland stehend, bildet den Ausgangspunkt der europäischen Kultur.

Die Natur selbst weist uns also darauf hin, die antike mit der römischen und der mitteleuropäischen Kultur als Teile eines organischen Ganzen aufzufassen und ein sie umspannendes Entwicklungsprinzip zu finden.

Es wurde oben schon angedeutet, daß dieses Entwicklungsprinzip im Grunde als ein mathematisches zutage treten werde.

Deshalb stellen wir uns zuerst die Frage: Worin haben wir das eigentliche Wesen des mathematischen Denkens zu erblicken? Welches ist die spezifische Anlage des menschlichen Geistes, in der das mathematische Denken wurzelt? Die Geschichte des menschlichen Denkens in seiner Verbindung von Mathematik und Philosophie wird uns hier den rechten Weg zeigen:

Der Philosoph und Mathematiker Pythagoras hat seine ganze Philosophie auf der Idee der Zahl als dem Wesen aller Dinge aufgebaut. Was nicht auf Zahlen und auf Verhältnisse solcher zueinander zurückgeführt werden kann, hat keine Harmonie; die Zahl ist das Symbol der gesetzmäßigen Ordnung. Von Pythagoras soll die Bezeichnung „Kosmos" herstammen, der Begriff des Weltalls als eines harmonisch gegliederten Ganzen, und diese Idee wird ihm zugleich die Grundlage alles sittlichen und politischen Lebens. So lebte der einzelne Pythagoräer gemäß den Regeln dieses mathematisch-philosophischen Systems, so taten sich die Anhänger des Pythagoras zusammen, um nach einer Art Ordensregel zu leben, und so gründete Pythagoras einen Städtebund, dessen Verfassung und politisches Leben er aus den Grundsätzen seines philosophischen Systems ableitete.

Auch Platos Philosophie ruht auf mathematischer Grundlage: „Kein der Geometrie Unkundiger darf hier eintreten!" ließ er über den Eingang zu seiner Akademie schreiben. Plato nennt seine „Ideen" zuweilen auch „die Zahlen".

Höchster Idealismus ist das Charakteristikum platonischer Lebensphilosophie; das Geistige herrscht überall über das Materielle. Aus seinen Prinzipien heraus entwickelt Plato das Idealbild eines „Staates“: Streng geordnete Sitte, ständische Gliederung, ein Monarch an der Spitze, der zugleich ein vollkommener Philosoph sein soll.

Der Vater der neueren Philosophie, Descartes, ist als der Entdecker der „analytischen Geometrie“ zugleich der Begründer der modernen Mathematik. Er entwickelt sein philosophisches System aus einem Grundgedanken heraus ganz nach mathematischer Methode.

Sein Antipode, Spinoza, betitelt sein Hauptwerk als „Ethica, more geometrico demonstrata“ und folgt im Aufbau seines Systems nach mathematischer Methode auch äußerlich seinem Vorbild, dem alten Geometer Euklid.

Leibniz, Philosoph und Staatsmann in einer Person, ist neben dem Naturforscher Newton zugleich der Begründer der Infinitesimalrechnung. Seine Philosophie ist wie eine mathematische Konstruktion. Im Vorgang des menschlichen Erkennens wie im Walten der Natur, überall findet er gesetzmäßige Ordnung, zweckmäßig schaffenden Geist, vollendete Harmonie.

Kant, der fundamentalste aller Denker, hat in seiner „Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels“ den Versuch gemacht, den Bau des ganzen Weltgebäudes von seinen Anfängen an gemäß Newtonschen Grundsätzen durch gesetzmäßiges Denken nachzukonstruieren. In mathematischer Sprache tat dasselbe fast gleichzeitig mit Kant der Astronom Laplace. Der Gedankenbau des Kantischen philosophischen Systems ruht auf der Existenz mathematischen Denkens: An den Eingang seiner Philosophie hat Kant die Grundfrage gesetzt: „Wie ist reine Mathematik möglich?“ Wenn auch nicht eigentlich Mathematiker, so erörtert er doch eingehend die grundlegenden Fragen der Mathematik, und sein System macht den Eindruck einer mathematisch festgefügten Konstruktion. In dieses strenge System ordnet sich naturgemäß die Kantische Ethik ein. Gesetzmäßigkeit findet Kant überall: Ehrfürchtiges Staunen ergreift ihn vor den Gesetzen des

„gestirnten Himmels“ über sich wie vor dem moralischen Gesetz in sich, dessen obersten Grundsatz er in seinem „kategorischen Imperativ“ formuliert hat.

So wird schon deutlich geworden sein, worin das eigentliche Wesen mathematischen Denkens bestehen mag. Doch das Bild läßt sich durch einen Kontrast noch vertiefen. Wenige Beispiele werden genügen, um zu zeigen, was ich meine.

Der griechische Philosoph Demokritos, in vielem das Gegenstück zu Plato, geht von einer Unzahl gleichartiger, kleinster Stoffteilchen, den Atomen, aus, die wie durch Zufall sich zusammenschließen und wieder auseinanderfallen. Die Idee einer organisierten, gesetzmäßig aufbauenden Intelligenz und die Idee eines feststehenden Sittengesetzes tritt dem gegenüber weit in den Hintergrund.

Dem deutschen Philosophen und Mathematiker Leibniz steht eine Reihe englischer und französischer Philosophen gegenüber, denen die Mathematik fremd ist. In theoretischer Hinsicht bildet hier der englische Philosoph Hume einen gewissen Abschluß. Seine Kritik des „Kausalbegriffes“ endet mit der restlosen Vertreibung alles geistigen Bandes aus der Natur und in völliger Atomisierung des Weltbildes; unter den Trümmern seines Skeptizismus bleibt keine aufbauende Kraft mehr übrig.

Die mehr praktischen Konsequenzen solcher Lehre zogen einige französische Philosophen: Der Einzelmensch, durch kein höheres Gesetz behindert, soll als sein Moralprinzip die Selbstliebe und den Eigennutz offen aussprechen. Materielle Genüsse sind das letzte Lebensziel; der Mensch ist ein willenloses Geschöpf, Geist ist eine Wahnidee.

> Danach dürfte nun das innerste Wesen mathematischen Denkens offenbar sein: Die mathematische Anlage ist ihrem positiven, wertvollsten Bestandteile nach die dem menschlichen Geiste ursprünglich innewohnende, gestaltende und konstruktive Kraft in ihrer elementarsten, reinsten Form. Darum eben ist sie gleichen Wesens mit aller künstlerisch schaffenden Begabung, mit der Gabe zu architektonischem Aufbau in jeder Wissenschaft wie in jeder bildenden und redenden Kunst, sie

ist gleichbedeutend mit der Anlage zu organisatorischem Aufbau im Einzel- und Gemeinschaftsleben, sie ist schließlich eines Ursprungs mit der Fähigkeit, die uns umgebende Natur, den Kosmos, in unserm Geiste nachschaffend aufzubauen.

Aus diesem Grunde sind schließlich alle Lebensäußerungen einer Kultur Ausstrahlungen einer und derselben Kraft des menschlichen Geistes, und diese Kraft scheint sich am unverhülltesten in den geistigen Konstruktionen der mathematischen Wissenschaft zu offenbaren. Auf dieser im tiefsten Innern des Geisteslebens wirkenden, geheimnisvoll formenden Kraft scheint diejenige Einheitlichkeit aller äußeren Erscheinungsformen einer Kultur zu beruhen, die wir als den „Stil" einer Kulturperiode bezeichnen.

Diese Einheit des Stils — die der euklidischen Mathematik mit der auf ihrem Boden erwachsenen antiken Kultur wie die der Infinitesimalmathematik mit allen Äußerungen abendländischer Kultur — ist es, die Spengler in seinem Buche durch Andeuten mannigfacher Parallelen in seiner Weise verständlich zu machen sucht.

V.

Hierüber hinaus erwächst uns nunmehr, wie schon angedeutet, die Aufgabe, die ununterbrochene Linie der Entwicklung aufzuzeigen, die von der griechischen Kultur bis zu der Kultur unserer Tage hinüberführt; diese Linie wird sich uns nach dem soeben Gesagten als eine immer reichere Entfaltung einerseits des mathematischen Gedankens, andererseits der auf diesem Boden erwachsenden Äußerungen des Formgefühles, darunter vor allem der Baukunst, der fundamentalsten aller Künste, darstellen.

Wieviel die alten Griechen früheren Kulturen verdanken, das alles festzustellen ist für den vorliegenden Zweck unwesentlich. Es sei nur vergleichend erwähnt, daß — wenn man von den ägyptischen Tempeln absehen darf — der Übergang von der Pyramide Ägyptens zum quaderförmigen Block des griechischen Tempelbaues die flächenhafte, sinnenfällige

Gegenwartswirkung griechischer Bauwerke gegenüber der sich in die Tiefe verflüchtigenden Wirkung der schrägen Flächen und Konturen der ägyptischen Pyramiden, deren schon von unten auf beginnende Zuspitzung einer freien Entfaltung hindernd im Wege steht, im griechischen Baustil einer Ausdehnung der Fassade in die ruhig sich hinlagernde Breite Platz macht.

Es ist hier nicht der Ort, darauf einzugehen, welche Fortschritte in mathematisch-konstruktiver Hinsicht der feinere Bau eines griechischen Tempels samt seiner Bedachung gegenüber der Aufführung des massiven Kolosses einer Pyramide voraussetzt. In der Lösung statischer und technischer Aufgaben sind ja die Griechen von späteren Völkern überboten worden. Ihre Meisterschaft aber haben sie in der harmonischen Ausgestaltung der Proportionen der breiten Fläche erreicht. Die Proportionen der Grund- und Aufrißflächen ihrer Tempel sind teils den Verhältnissen der Längen des regelmäßigen Dreiecks oder seiner Verdoppelung, des Hexagramms, teils denen des regelmäßigen Fünfecks bzw. des Pentagramms, also der Figur des „goldenen Schnittes“ entnommen, die man aus rein mathematischen Überlegungen heraus als die vollkommenste geradlinige Figur bezeichnen muß, die also als Symbol der höchsten Harmonie gelten kann, wie ihr ja in früheren Zeiten geradezu eine Art Wunderkraft zugeschrieben worden ist.

Die ebene Figur des Pentagramms hängt eng zusammen mit dem höchst entwickelten der fünf regelmäßigen, „platonischen“ Körper, dem Ikosaeder, über das hinaus kein weiterer regelmäßiger Körper mehr möglich ist. Nun ist bemerkenswert, daß die Natur in den Kristallen, ihren vollkommensten unorganischen Gebilden, in gewissem Sinne nicht über die Figur des Quadrats und des Hexagramms hinausgeht und aus einem mathematisch einleuchtenden Grunde, der mit dem Wesen der „irrationalen“ Zahl zusammenhängt, auch nicht darüber hinausgehen kann. Um so merkwürdiger ist es, daß die Proportionen des menschlichen Körpers in seiner Vollkommenheit nach der Regel des „goldenen Schnittes“, also nach den Maßverhältnissen des Pentagramms, gebildet zu sein scheinen. Den Griechen scheint dieses Geheimnis der Formenschönheit — das in der Zeit der Renaissance wiedergefunden und dann bewußt angewendet wurde — bekannt gewesen zu sein und sie haben das „goldene Schnittverhältnis", wie ihre menschlichen Statuen bis ins einzelne dartun, in der Tat nicht nur bei den Nachbildungen des menschlichen Körpers und wie schon erwähnt, an ihren Tempelbauten, sondern, wie es scheint, auch an den Tempelgeräten bis ins einzelne angewendet. So wird vielleicht verständlich, was Plato meint, wenn er seine „Ideen" als die „Zahlen" bezeichnet.

Wie in der wissenschaftlichen Geometrie, so haben die Griechen also auch in der künstlerischen Geometrie, in der Kunst der harmonischen Einteilung der ebenen Fläche, das Höchste erreicht.

Die römische Kultur bildet die Brücke von der griechischen zu der neueren abendländischen. Wenn die Römer auch von der griechischen Kultur nicht unberührt geblieben sind, so scheint hier doch das Prinzip der durchlaufenden Linie in der Entwicklung gerade des mathematischen Gedankens zu versagen. Warum die Zeit für die Entstehung einer neuen Mathematik durch die Römer noch nicht gekommen war, wird sich später zeigen. Aber die alte Mathematik vor allem hatte die Möglichkeiten ihrer Auswirkung insbesondere in den monumentalen Werken der Baukunst noch nicht erschöpft.

Daß die Römer ein eminent „mathematisch" veranlagtes Volk in dem oben angegebenen allgemeinen Sinne gewesen sind, zeigt sich unzweifelhaft in ihrer gewaltigen Organisationskraft, die den Riesenbau des römischen Reiches errichtete und aufrecht erhielt.

> Und dieses konstruktive, spezifisch mathematische Element offenbart sich am ursprünglichsten, frühesten und nachhaltigsten in der römischen Sprache.

Ihr ehernes Satzgefüge ist ein Abbild römischer Organisationskraft, ein Mikrokosmos gegenüber dem Makrokosmos des römischen Weltreiches; in ihr weht derselbe Geist der Über- und Unterordnung wie im Gebäude der römischen Verwaltung, der römischen Rechtsordnung.

Man weiß, daß der große Gauß, dessen „alles zermalmender Geistesgewalt kein mathematisches Problem widerstand“, als angehender Student zwischen dem Studium der alten Sprachen und dem der Mathematik geschwankt hat. Er hat noch das Fundament für die „Zahlentheorie“, auf dem heute der imposante Bau der „Theorie der Zahlkörper“ ruht, in lateinischer Sprache gelegt. Und von Weierstraß, dem Großmeister der Mathematik in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, der daneben die Analysis zu den höchsten Höhen der gedanklichen Konstruktion hinaufgeführt hat, heißt es ebenfalls, daß er in seiner Jugend gerade in den alten Sprachen besondere Begabung gezeigt habe.

Wenn die Römer also auch keine spezifisch neue, in wissenschaftlichen Symbolen redende Mathematik ausgebildet haben, so dürfen wir ihnen doch nicht die mathematische Anlage absprechen, und im Grunde sind sie konstruktiver veranlagt als die Griechen: In der einzigen Richtung, die ihnen vor der Entstehung der neuen Mathematik blieb, in der Algebra, haben sich späte Nachkommen von ihnen in der Tat in diesem konstruktiven Sinne betätigt, indem sie über die Griechen hinausgehend die algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades auflösten.

Das charakteristisch Neue des römischen Baustils ist die Verwendung der Kreislinie, also einer gekrümmten Linie neben der in sich ruhenden geraden Linie. Der Kreis ist die einfachste und vollkommenste krumme Linie, dynamisch gedeutet die Kurve der gleichmäßig gespannten Kraft. Bedenken wir einmal, zu welchen Konsequenzen die so unscheinbar aussehende Einführung des neuen mathematischen Elementes, des Kreisbogens, als architektonischen Elementes, notwendig führen mußte. Die flach hingelagerte Kreislinie ist zwar auch in der Baukunst der Griechen nicht ganz unbekannt, das zeigen ihre Amphitheater. Die Römer aber richteten sie auf, und damit beginnt von selbst eine andersartige, eine dynamische Baukunst: Jeder Bogen, der nicht aus einem Stein gehauen ist, übt einen Seitendruck aus, dem man entgegenwirken muß.

Wenn wir nun darangehen, in der Baukunst der Römer die Entwicklung des mathematischen Gedankens aufzuzeigen, wollen wir, ohne die Leistungen besonders der römischen Kaiserzeit zu verkennen, im Hinblick auf unser Ziel unsere Betrachtungen sogleich an den „romanischen Baustil“ anknüpfen, wie er sich zugleich mit der neu heraufkommenden Kultur des Christentums im Abendlande entwickelt hat.

Die nach den Seiten drängenden Kräfte werden durch die schwer nach unten drückenden Massen der Mauern ausgeglichen, wodurch der ganze Eindruck des Wuchtigen, Bodenständigen erzeugt wird, der allen romanischen Bauten, besonders den Domen, eigen ist. Die sich ganz naturgemäß einstellende Anwendung von Halbkreisbogen in Abstufungen von verschiedener Größe ermöglicht — im Gegensatz zum Gebrauch der eintönigen Geraden — eine reichere Ausgestaltung des Innenraumes. Während die griechischen Tempel mit den sie umrahmenden Säulen ihre Hauptwirkung auf den außenstehenden Beschauer ausüben, kehrt nun die Baukunst ihre Seite nach innen. Diese Verinnerlichung der Baukunst setzt sich weiter fort. Die Säulen treten ins Innere und mit ihnen erscheinen die Seitenschiffe neben dem Hauptschiff. So wird die räumliche Wirkung des Innenraumes immer reicher; es tritt zu der charakteristischen Dimension der Griechen, der Breite, mit ihrer flächenhaften Wirkung eine neue Dimension, die Tiefe, und damit die Raumwirkung hinzu. Als Folge dieser Tiefenwirkung erwacht — wie bei den Ägyptern — im Abendlande das Gefühl für die zeitliche Tiefe.

Die anfänglich, in den Basiliken, noch flache Decke wird durch ein Gewölbe ersetzt, die Seitenschiffe dämpfen den Seitendruck. Die starre Decke samt dem flachen Giebeldreieck der Griechen macht einem organischen Abschluß durch ein elastisch wirkendes Gewölbe Platz; es tritt eine Ausweitung nach oben hinzu, die schließlich im Kuppelbau, dem Abbild und Symbol der Himmelskugel, den natürlichen Endpunkt ihrer Entwicklung erreicht.

Welcher Fortschritt in der konstruktiven Kraft des Aufbaues, in der gegliederten Organisation, der gedanklichen Bewältigung eines größeren Ganzen gegenüber der Baukunst der Griechen!

Und diese Entwicklung vollzieht sich auf Grund einer einzigen, neu hinzutretenden mathematischen Gesetzmäßigkeit, der der Kreislinie bzw. der Kugel. Wie mit Naturnotwendigkeit bis zum Ende ablaufend wirkt sich dieses eine neue mathematische Prinzip aus in immer reicherer Entfaltung eines dem denkenden Geiste entsprungenen Gebildes. In den Steinen seiner Dome hat der Geist des „romanischen" Zeitalters seine Geometrie des Raumes geschrieben und in dieser steinernen Mathematik symbolisch zugleich den Geist seiner Zeit offenbart.

Dem Drängen in die Breite und in die räumliche Tiefe konnte mit den gegebenen, formalen mathematischen Mitteln genug getan werden. Eins aber blieb noch zu tun übrig. Vielleicht hat die Kuppel mit der statischen Schwierigkeit, sie oben genau halbkugelförmig abzuschließen, also der Endpunkt der bisherigen Entwicklung, zugleich den Anstoß zu einer neu beginnenden Entwicklung gegeben: Die Zuspitzung der Halbkugel ergibt in ihrem ebenen, zeichnerischen Querschnitt den Spitzbogen; statt des genau abgeschlossenen vollen Halbkreises zwei symmetrisch einander gegenüberstehende Kreisbögen von beliebig wählbarer Länge. Dieses neu auftauchende mathematische Element zieht die ganze Entfaltung der gotischen Baukunst nach sich. Der mittlere, am stärksten nach der Seite drängende Teil des Halbkreisbogens verschwindet mehr und mehr, die zwei Kreisbögen lehnen sich leicht und leichter aneinander; die massige Schwere und flächenhafte Breite der Mauern löst sich auf in immer feiner und immer freier organisierte Glieder; immer höher hinaus recken sich die Fenster, Pfeiler, Gewölbe, Türme. Wieder scheint es deutlich: Nicht die verstandesmäßig ausgeklügelte Absicht, auch noch die letzte geometrische Möglichkeit, die Höhenwirkung, auszuschöpfen, bewirkt den Umschwung, sondern das neue statische Problem bzw. das zugrunde liegende neue mathematische Symbol zieht den Geist der schaffenden Künstlergenerationen mit sich fort und wandelt die Seele des Bauwerkes völlig um und mit ihm die Menschen, die mit empfänglicher Seele sein Dasein auf sich wirken lassen.

Nachdem einmal „die Form zerbrochen“ war, zerlegte man den Kreisbogen nunmehr in immer kleinere Stücke und fügte die Bogen zu immer freieren Gebilden zusammen im Maßwerk der Fenster, in dem Flechtwerk der Turmhelme, in dem rankenden Netz der sich verästelnden Gewölberippen. Die organische Natur ist unversehens hinzugetreten, und in der Ornamentik tritt sie schließlich in alten Gestalten, in pflanzlichen, tierischen und menschlichen, offen zutage.

Die Wunderbauten der gotischen Dome stellen die äußerste Verfeinerung des Ideenkreises dar, der sich auf der Grundlage der formalen und dynamischen Probleme des Kreisbogens aufbaut. Bei der Konzentration alles Strebens nach der Höhe wird der Ausgestaltung des Innenraumes weniger Beachtung geschenkt, die Baukunst wendet sich wieder mehr dem Äußeren zu und verwendet allen Reichtum der Phantasie auf die äußere Ornamentik. Es ist hier nicht der Ort, die Seele des gotischen Zeitalters in Wissenschaft, Kunst, Literatur und öffentlichem Leben mit dem Charakter der gotischen Dome, in dem diese Seele sich am eindringlichsten und klarsten ausgesprochen hat, in Beziehung zu setzen. Von besonderer Bedeutung ist, daß die Gotik in Nordostfrankreich, an der Grenze romanischen und germanischen Geistes, entstanden ist und daß das Höchste in der Kunst der Gotik auf germanischem Boden erwachsen ist. An und mit dieser Kunst entfaltete sich in der germanischen Seele das „faustische“ Streben nach den Höhen des Unendlichen und kam zugleich ihr Sich-eins-fühlen mit der Natur zu äußerem Ausdruck; zu vollkommener künstlerischer Entwicklung hätten diese Triebe aber ohne Schaffung des fundamentalen mathematischen Symbols nicht gelangen können.

VI.

Während das Germanentum aus dem Reichtum seiner Phantasie immer neue Gestaltungen der Gotik hervorbrachte — ich denke da auch an die gotischen Backsteinbauten im Lande der deutschen Ordensritter und in den Städten der deutschen Hansa —, begann in Italien das Wehen einer neuen Zeit.

Dort setzte das Übergewicht der formalen Anlage des Geistes einer Durchbrechung der Schranken der strengen Form in der Baukunst Widerstand entgegen; der romanische Geist, nach Lage der Sache noch außerstande, aus sich heraus eine neue, ihm adäquate Form der monumentalen Baukunst zu schaffen, wendet sich zurück zum Studium des geschichtlichen Ursprungs seiner Kunst, zum Griechentum. Dort findet er in seinem Suchen nach einer neuen Form, über die Kunst des Anorganischen hinausgehend, den Weg ins Freie in dem organischen Bau des menschlichen Körpers.

Wir stehen damit am Ausgangspunkt der Renaissance. Unerschöpflich sind nun die neuen formalen Möglichkeiten für die bildende Kunst. Was der Germane in freier Phantasie schaffend als Zierde seinen gotischen Domen beigegeben hatte, das sucht der Romane in der ihm eigenen Gesetzmäßigkeit zu verstehen. So wird er durch die Griechen auf die Spur der Mathematik geführt, und er entdeckt das Gesetz des menschlichen Körperbaues wieder im Pentagramm, in der Regel des „goldenen Schnittes". Leonardo da Vinci verfaßte in diesem Sinne sein Buch: „De divina proportione". Die räumliche Vertiefung der Malerei auf der Grundlage exakter mathematischer Perspektive ist sein Werk. Von ihm stammt das Wort: „Was die Sonne für den Körper, das ist die Klarheit der mathematischen Wahrheit für den Geist." Während aber Leonardo noch im Geiste der Griechen die Formenschönheit als in sich ruhend, also statisch empfindet, tritt bei dem gewaltigen Michelangelo das eigentlich Neue, über die griechische Kunst hinausführende Moment hinzu, das Dynamische. Er ist der eigentliche Künder einer neuen Zeit. Die über die gegebenen Grenzen hinausdrängende, aber durch Gesetze gefesselte Kraft ist Michelangelos Problem. Dieser Gegensatz von Kraft und Gesetz durchzieht alle seine Werke. Nicht Ruhe, sondern gespannte Kraft ist das Grundthema seines Schaffens. Und die Grundlage des künstlerischen Schaffens überhaupt, in der Malerei sowohl wie in der Bildhauer- und der Baukunst, ist nach seinen eigenen Worten die Zeichnung; die wuchtigen Umrisse seiner Skizzen stellen seine Ursprache dar; es ist die geheimnisvolle Kraft dieser Symbole, die, selbst losgelöst von jedem Anklingen an organische Gebilde, die Seele in Mitschwingung versetzen, und diese Kraft ruht auf der ihnen innewohnenden mathematischen Gesetzmäßigkeit. In Michelangelo verkörpert sich die Einheit der drei bildenden Künste auf ihrer gemeinsamen Grundlage, der Formensprache der gesetzmäßigen Linien. Bau und Linien des menschlichen Körpers waren Michelangelo auch Urbild für seine architektonischen Schöpfungen: Beherrschung des Ganzen durch freiere, organische Gliederung und elastisch geschwungene Linien sind die Kennzeichen seiner Baukunst. Er ist der Vater des Barockstils.

Doch er blieb noch ein Einsamer. Was er dem innersten Wesen nach geahnt hatte, den mathematisch-gesetzmäßigen Untergrund seiner Linien als Ursache ihrer die Seele mitreißenden Kraft, was sich ihm trotz leidenschaftlichen Ringens nicht zu bewußtem Wissen verdichtet hatte, ging wieder verloren und fand in Italien nur äußerliche Nachahmer. Es mußte noch ein anderer Anstoß kommen, um einer neuen europäischen Kunst zum Durchbruch zu verhelfen. Durch tieferes Studium der in der Natur wirkenden Kräfte mußten erst die Gesetze ihres Ablaufs erkannt und die diese gesetzmäßigen Kräfte versinnbildenden Linien gefunden werden.

So greift nunmehr die mathematische Naturwissenschaft in den Gang der Kulturentwicklung mitbestimmend ein.

Kopernikus hatte eben erst die erhaben einfache Harmonie des Sonnensystems ergründet und das Gesetz der gleichmäßig in sich zurücklaufenden Kreislinie im Malwokosmos entdeckt, Kepler hatte sich bemüht, die statische Gesetzmäßigkeit der „platonischen“ Körper, also letzten Endes die Proportionen des Pentagramms im Planetensystem wiederzufinden, wodurch er auf die nach ihm benannten Gesetze geführt wurde, beide suchten also den Kosmos im Zustande seines harmonisch in sich ruhenden Gleichgewichts zu verstehen. Beide haben vielleicht nur einen Abschluß zu geben geglaubt, aber sie legten zugleich das Fundament für eine neue Zeit.

Mit Galilei beginnt der Aufbau dieses neuen Zeitalters von der Seite der Naturforschung her. Er folgt der Bewegung des fallenden Steines von Augenblick zu Augenblick und findet das mathematische Gesetz einer „ungleichförmigen“, beschleunigten Bewegung; er lehrt die Zeit genau messen — als neue Dimension — und führt den Begriff exakt zu messender Kraft in die Naturforschung ein. So wird er der Begründer der „Dynamik“ als Wissenschaft, wie Michelangelo der Begründer der Dynamik als Kunst war.

Die Ergründung der Gesetze der ruhenden Schönheit war die Leistung der Griechen, die Ergründung der Gesetze der bewegenden Kraft wird seit Michelangelo und Galilei die große Aufgabe Mitteleuropas, die noch keiner Kulturgemeinschaft gestellt worden war.

In diesem Sinne war die Synthese von Kunst und Natur von Michelangelo begonnen, die Synthese von Mathematik und Natur durch Galilei eingeleitet; das neue Band aber zwischen Kunst und Mathematik wurde von Descartes entdeckt. Ihm gelang es durch seine Methode der „analytischen Geometrie“, das einer anschaulichen geometrischen Kurve zugrunde liegende Gesetzmäßige durch eine „Gleichung“ auszudrücken, durch eine Beziehung zwischen Zahlen auszusprechen. So war das Wesen jeder Linie, ihre Gestalt, ihre „Idee“ im platonischen Sinne, auf die „Zahlen“ zurückgeführt. Die Harmonie, die Vollkommenheit einer Kurve, mußte sich in der Vollkommenheit des ihr entsprechenden Gesetzes ausprägen. Umgekehrt war nun die Möglichkeit rein gedanklicher, logischer Konstruktionen mittels der analytischen Gesetze und damit die Möglichkeit der Erzeugung immer neuer geometrischer Formen in den zugehörigen Kurven gegeben.

Gab so Descartes dem von der unmittelbaren Anschauung losgelösten, mathematischen Denken mehr Leichtigkeit und freie Entfaltungskraft, so konnte doch die Abstraktion nicht Selbstzweck sein, sondern nur ein willkommenes Hilfsmittel, um der Anschauung neue Wege zu weisen und ihr neue Nahrung zu geben; die Fruchtbarkeit des neuen Gedankens beruhte eben darin, daß er die Synthese von Analysis und Geometrie und damit eine Synthese von Denken und Anschauung vollzog.

So hätte die bildende Kunst die Möglichkeit gehabt, zahlreiche und neue gesetzmäßige Formen aus der Mathematik zu übernehmen, aber solche, allein von dem reinen, wenn auch gesetzmäßigen Denken erzeugte Gebilde hätten nicht Stoßkraft genug in sich gehabt, eine von Grund aus neue Kunst hervorzubringen. Erst im Gesamtbilde der von Galilei begonnenen neuen Art der Naturerforschung konnten die fundamentalen, einfachen und freieren Formen und die neuen Auffassungen entstehen, die imstande waren, eine neue und allgemeine Kunst- und Kulturperiode heraufzuführen.

Ich muß es mir versagen, im einzelnen auszuführen, wie die von Galilei und Descartes ausgehenden Grundgedanken von den mathematischen Geistern jener Zeit weiter ausgesponnen wurden und wie dabei in erster Linie die Naturforschung und die Anschauung die Entfaltung des mathematischen Denkens gefördert haben. Es kommt hinzu, daß man auch die Gesetze des Naturgeschehens, der Dynamik, nach der Descartesschen Methode durch Kurven anschaulich machen konnte, indem man die fließende Zeit als eine neue, mit den Dimensionen des Raumes gleichwertige Dimension auffaßte. Am Leitfaden der geometrischen Kurven entwickelten sich so die Probleme, die auf ihre Lösung durch eine neue Art der Mathematik hindrängten. Galilei hatte bei seiner Erforschung der Fallgesetze die Zeit in immer kleinere Teile zerlegt. Descartes' Methode lehrte die Kurven als aus einzelnen, immer näher aneinander rückenden Punkten bestehend auffassen. Aus diesen Anfängen entwickelte sich die Methode des „Unendlichkleinen“. Wir erkennen so den Ursprung der „Infinitesimalmathematik“ als einer Methode der schrittweisen Verkleinerung und Annäherung, und aus diesem einfachen Grundgedanken der sukzessiven Näherung ist auch die Methode der „unendlichen Reihen“ entstanden. Gerade ein Naturforscher ist es, der große Newton, der in dieser, der Erforschung der Natur genau angepaßten Methode Fundamentales geleistet hat.

Newton war es schließlich auch, der zuerst den gemeinsamen Untergrund der verschiedenartigen, hier angedeuteten Probleme erkannte, um deren Einzellösungen sich besonders französische Mathematiker verdient gemacht hatten, und dadurch, daß er sie in die ihnen gemeinsame Formelsprache kleidete, zum Erfinder der Infinitesimalrechnung wurde. Er gab ihr den Namen „Fluxionsrechnung“, wobei er unter dem „Fließenden“ die Zeit verstand, dadurch die Naturforschung als den Ursprung der neuen Mathematik deutlich kennzeichnend. Unabhängig von Newton und kurz nach ihm erfand Leibniz die Infinitesimalrechnung; er verlieh ihr durch die charakteristischen Symbole des Differential- und Integralzeichens das feste Gerüst und die Gestalt, in der sie ihren Weg in eine breitere Öffentlichkeit antreten konnte.

Bevor wir die Entwicklung der neuen Mathematik weiter verfolgen, wollen wir nun die formalen Elemente herausheben, die die von Michelangelo eingeleitete neue Kunst des Barock in der Mathematik vorgebildet finden konnte. Das Charakteristische der neuen Mathematik, im Gegensatz zu der alten Geometrie der geraden Linie und des Kreises, sind die freier gekrümmten und geschwungenen Linien.

Die wesentlich neue und zugleich fundamentalste Kurve der höheren Mathematik ist die kraftvoll ansteigende Exponentialkurve, die man auch als die „Kurve des organischen Wachstums“ bezeichnet. Ihr tritt die wellenförmig auf und ab schwingende Sinuslinie zur Seite, die einerseits analytisch in der Exponentialkurve enthalten ist, andererseits geometrisch sich aus der Kreislinie entwickeln läßt. Beide Kurven sind für die Erkenntnis des Naturgeschehens von fundamentaler Bedeutung und in ihnen dürften zugleich die Urelemente der Formen des Barockstils vorgebildet sein.

Dazu kommt die Ellipse, die Kepler-Newtonsche Kurve der Planetenbahnen, vielleicht auch die Parabel, die Galileische Kurve des Fallgesetzes, und schließlich die fundamentalen Kurven der Spirale und der Schraubenlinie, die ihrerseits wieder die Sinuslinie in sich birgt.

Um den Charakter des Barockstils tiefer zu verstehen, liegt es uns nun ob, das eigentliche Wesen der neuen Mathematik, die wir erst in ihren Anfängen verfolgt haben, in ihrer ferneren Entwicklung und ihren Auswirkungen kennen zu lernen.

In Frankreich fanden sich zuerst die formgewandten Geister, die den neuen Kalkul, wie er von Leibniz geschaffen war, nach allen Seiten hin ausbauten. So wurde die glänzendste aller Epochen wahrhaft schöpferischen Denkens eingeleitet, die die Menschheit erlebt hat. Dem Menschengeist waren mit der neuen mathematischen Methode gleichsam Flügel gewachsen. Eine ungeahnte Bereicherung des Naturerkennens war die Folge; die Entdeckungen im Gebiete der Dynamik, der Astronomie, der gesamten Physik überstürzten sich. Die mathematische Physik, die exakte Naturwissenschaft wird statt der Geometrie endgültig zum zentralen Bau der gesamten Mathematik. So ist es wieder eine Synthese, die des mathematischen Denkens mit der Natur, die die reichsten Früchte trägt.

Und die neue Mathematik greift in ihren Wirkungen weit in andere Gebiete der Geistes- und Lebenskultur über. Durch sie vor allem wird die absolute Herrschaft der starren lateinischen Sprache in der Wissenschaft gebrochen und zuerst durch die elastische, moderne französische Sprache ersetzt; die großen französischen Mathematiker und Philosophen selbst haben sie in ihren charakteristischen Eigenschaften geschaffen. In ihren grundlegenden Werken vollzogen sie zuerst den Übergang von der alten wissenschaftlichen Methode, deren Charakteristikum bis dahin das Fortschreiten nach dem Stufenschema „Voraussetzung, Behauptung, Beweis“ gewesen war, zu einer zusammenhängenden Darstellung; so näherte sich die wissenschaftliche mehr der schöngeistigen Literatur und gewann dadurch an allgemeinem Interesse. Während früher vielleicht die Gefahr vorlag, daß bei der gleichmäßig aneinanderreihenden, starren Darstellungsweise der Gesamteindruck von den Einzelheiten überwuchert wurde, hatte man nun die Freiheit, die wesentlichen Gedanken eindringlicher zu betonen und die organische Einheitlichkeit und zweckmäßige Gliederung der gedanklichen Konstruktion fühlbarer zu machen.

Damit haben wir nun zugleich das Charakteristische der neuen Mathematik gegenüber der früheren getroffen. Diese ist starr und spröde wie ihre geometrischen Figuren, in sich geschlossen, scharfsinnig und von minutiöser Genauigkeit in ihrem umgrenzten Kreise, deduzierend, analysierend und streng systematisch, zu abstrakter Logik neigend trotz ihres geometrischen Untergrundes; die neue Mathematik hingegen ist elastisch und lebendig, wie ihre geschwungenen Kurven; sie ist großzügig und unbegrenzt aufnahmefähig für alle von außen kommenden Anregungen; sie schafft intuitiv unbedenklich Neues im Vertrauen auf eine spätere streng logische Begründung; sie verfährt induktiv, wie aus einem Kerne sich immer reicher entfaltend; sie bringt umfassende, sich weit verzweigende Gedankengebilde in ihren Theorien hervor, die alles zu einem einheitlichen großen Ganzen verbinden und doch jedem Gliede Freiheit der Entwicklung lassen.

So ist die alte Mathematik einer Zusammenordnung anorganischer Gebilde, etwa von Kristallen vergleichbar, die neue Mathematik dagegen ist in Aufbau und Gliederung das Abbild eines lebenden Organismus.

Ähnlich wie die neue Mathematik zur alten verhält sich auch der neue Baustil des Barock zu den früheren Baustilen, insbesondere zum Stil der Renaissance. In der Gotik vernehmen wir in der Ornamentik schon das vielstimmige leise Raunen einer neuen Zeit; Michelangelos, des Einsamen, gewaltiger Ruf verhallte noch unverstanden. Vorerst mußte sich von Grund aus eine Umstimmung der europäischen Seele vollziehen; sie mußte sich der neuen formalen Symbole in der Mathematik bewußt werden und ihr fundamentales Gegründetsein in der Natur fühlen und erkennen; so erst wuchs den neuen Ideen die Kraft, allgemeinen Widerhall zu erwecken und schließlich ihre symbolische Verkörperung in einer neuen Baukunst, in der der organischen Natur abgelauschten Kunst des Barock, zu erleben.

Der eigentliche Barockstil blieb in Frankreich an etwas zu steife Formen gebunden; in seine Ornamentik nahm er dagegen alsbald die noch flüssigeren, freieren Kurven der neueren Mathematik auf, wodurch er sich schnell zum Rokokostil verflüchtigte.

Die herrlichsten Schöpfungen des neuen Stils sind wiederum in Deutschland entstanden, dort, wo sich die Seele am engsten mit der Natur verbunden gefühlt hat. Unbehindert durch die Fesseln einer zu starren Form konnte sie nun ihrem inneren Reichtum, ihrer sprudelnden Phantasie und ihrem tiefen Naturempfinden immer neuen Ausdruck geben. Die große Anpassungsfähigkeit, die dem deutschen Barock eigen ist, bewirkte seine Verbreitung neben dem Kirchenbau auch im Schloß- und Städtebau.

Diesem Baustil fügt sich die Bildhauerkunst organisch ein; ihre Figuren nehmen in Haltung und Art den Charakter der Architektur an. Das freiere, lebendigere Spiel der Linien findet auch in der zugehörigen Malerei vielseitigste Verwendung. So tritt im Barockstil die Einheit der drei bildenden Künste, die schon die Person Michelangelos verkörpert hatte, deutlich zutage.

Wenn man die Kunst des deutschen Barock mit anderen Gebieten der deutschen Kunst, mit Musik und Poesie, wie auch mit den politischen und geselligen Lebensformen jener Zeit in Parallele setzt, so wird man erkennen, wie der weichere Barockstil das deutsche Wesen unverfälscht widerspiegelt; darum konnte das Deutschtum in dieser ihm adäquaten Formensprache auch noch gesündeste und echteste Kulturwerke schaffen und sich einer hohen Stufe wahrer Kultur und innerer Harmonie erfreuen, die in der Periode der deutschen Romantik allmählich verklang.

VII.

Was nach der deutschen Barockzeit kam, hat bisher nicht den Charakter eines einheitlichen, mit den vergangenen auf gleicher Höhe stehenden Lebensstils angenommen. Die Fragen, die sich deshalb nach allem Gesagten aufdrängen, sind die:

> Kann das, was etwa seit Beginn des 19. Jahrhunderts in den fundamentalen Wissenschaften der Naturforschung und der Mathematik Neues geschaffen worden ist, als Grundlage einer zukünftigen einheitlichen deutschen, ja vielleicht europäischen Kultur dienen?
>
> Wenn das der Fall ist — und es wird das der Fall sein müssen, wenn man nicht auf die Annahme einer dem

Weltgeschehen zugrunde liegenden „Vernunft“ verzichten will —, zeigt dann die Gesamtorientierung dieser fundamentalen Wissenschaften in die Richtung nach dem zu erstrebenden Ziele hin?

Wird ferner aus dem Gesagten vielleicht erkennbar, welche ihm eigentümliche Rolle speziell das deutsche Volk im Ablauf der Kulturentwicklung zu spielen berufen ist? Hat es diese seine kulturelle Sendung etwa schon restlos erfüllt, so daß keine Hoffnung für einen echten, wahren Wiederaufstieg in der Zukunft mehr bleibt?

Wir haben gesehen, daß der Kern der neueren abendländischen Kultur die sonst noch niemals und nirgends in solcher Tiefe vollzogene Synthese von Natur und exaktem Denken und deren reifstes Erzeugnis, der kunstvolle Gedankenbau der modernen mathematischen Physik im weitesten Sinne ist. Die beiden wertvollsten Anlagen, die dies Ergebnis mit allen von ihm ausgehenden Wirkungen auf die innere und äußere Kultur gezeitigt haben, der „Sinn“ für die Natur, ebenso wie das organisatorische, konstruktive Denken sind dem deutschen Volke in besonderem Maße verliehen. Jener manifestiert sich schon in der altgermanischen Naturreligion mit ihren Mythen und Sagen, in der urwüchsigen deutschen Volkskunst mit ihren Märchen und Volksliedern, wie in vielen der reifsten und höchsten Schöpfungen der großen Dichtkunst, am tiefsten und umfassendsten schließlich in der deutschen Naturphilosophie; überall prägt sich das enge Verwachsensein, das tiefe Sich-eins-fühlen, das liebevolle Sich-versenken in die Natur aus, — dieses zeigt sich sowohl ursprünglich in dem Sinn für aufbauende Organisation auf allen Gebieten des Lebens wie in den großen Erzeugnissen der konstruktiven Kunst und Wissenschaft.

Ist aber die Synthese dieser beiden spezifisch germanischen Anlagen schon in dem angedeuteten tiefsten Sinne vollständig vollzogen?

Wenn noch nicht, so hätte das deutsche Volk hier ja noch eine Möglichkeit, Ureigenstes hervorzubringen und den ihm von der Natur selbst vorgezeichneten Weg zu vollenden.

Dieser Aufstieg wird nach dem Gesagten seinen Ausgangspunkt nur davon nehmen können, daß man zunächst das dem Germanentum charakteristische Naturgefühl zu bewußtem Naturerkennen in seiner fundamentalsten und abgeklärtesten Form emporführt, indem man die Pflege der konstruktiven, mathematischen Anlage ganz in den Dienst dieser großen Aufgabe stellt.

Die Frage läuft also darauf hinaus, ob die neue Mathematik in Deutschland sich bis heute ihres Ursprungs aus der Naturforschung stets bewußt geblieben und ihr Endziel, die Förderung der Naturerkenntnis, dauernd im Auge behalten hat.

Das mathematische Streben des 18. Jahrhunderts, vor allem in Frankreich, war ganz auf die Erkenntnis der Natur gerichtet; die Mechanik des Weltgebäudes, wenn möglich, auf eine einzige mathematische Formel zu bringen, schwebte damals als ideales Ziel vor, daneben versäumte man es nicht, auch den Anwendungen der Mathematik auf das Nächstliegende ihre Aufmerksamkeit zu schenken. Deutsche Mathematiker betätigten sich im selben Geiste. Der gewaltige Euler, ein Neuschöpfer in den höchsten Sphären der reinen Mathematik, widmete sich zugleich ihren Anwendungen auf Naturwissenschaft, Technik und öffentliches Leben, und Gauß, der „Fürst der Mathematiker", war zugleich Astronom, Geodät und Physiker. Er wandte sich als erster einer umfassenden Erforschung der magnetischen Kräfte des Erdkörpers zu. So wies er die Naturforschung des 19. Jahrhunderts auf die Bahn der Entwicklung, in der sich die formvollendete klassische Mechanik des 18. Jahrhunderts, wie sie in Frankreich entstanden war, zu dem mehr germanischen Bilde von der Natur vertieft hat, das uns seit Maxwell in der Theorie des elektrischen Feldes, speziell in der Relativitätstheorie ungeahnte Weiten des Makrokosmos und in der Atomtheorie seit der Entdeckung Röntgens ungeahnte Tiefen des Mikrokosmos erschlossen hat.

Auf Gauß folgte Riemann, einer der tiefsten mathematischen Denker, der den Blick immer zugleich auf die Geometrie, die Naturerkenntnis und die Philosophie richtete und über die konventionelle mathematische Symbolik die zugrunde liegenden, wesentlichen Gedanken setzte. Sein Leben war zu kurz, und so konnte er selbst die Grundrichtung seiner Ideen nicht mehr zu allgemeiner Geltung bringen. Seit Riemann scheinen sich die Wege der reinen Mathematik von denen der exakten Naturforschung mehr und mehr zu trennen. Die Abzweigung war eine naturgemäße Folge des raschen Wachstums beider Wissenschaften. Großes hatte zudem die Mathematik noch auf ihrem eigenen Gebiete zu leisten.

Nach Riemann übernahm Weierstrass die Führung im Reiche der Analysis, bewundernswürdig sowohl durch die konstruktive Kraft seines Geistes wie durch die begriffliche Schärfe seines Verstandes. Unbeirrt den Blick vorwärts gerichtet, türmt er den monumentalen Gedankenbau seiner Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen in seinen mathematischen Symbolen in die Höhe. Auf sicheren Grundpfeilern und in sich geschlossen steht seine Konstruktion da; aber in seinen Werken findet sich kaum eine Figur, und beim Antritt seiner Lehrtätigkeit an der Universität in Berlin von Zweiflern nach der Anwendbarkeit seiner mathematischen Ideen gefragt, antwortet er mit ruhiger Würde, daß „doch auch die Griechen sich mit der Lehre von den Kegelschnitten beschäftigt hätten, zweitausend Jahre bevor man wußte, daß sie die Bahnen seien, in denen die Planeten wandeln".

Weierstrass hat, im ganzen genommen, auf Jahrzehnte hinaus der mathematischen Wissenschaft den Charakter seines Geistes aufgeprägt. Wenn er sich selbst auch sehr wohl der Beziehungen seiner Theorien zur Naturwissenschaft und Geometrie bewußt blieb, so war es doch gerade seine abstrakt gerichtete Denkungsart, die in ihrer sich selbst genügenden Einfachheit und Größe die Geister in ihren Bann schlug und sich bis zu den letzten Konsequenzen auswirken mußte.

Aber auch die Schärfe Weierstrassschen Denkens wurde bis zum äußersten getrieben: Weierstrass hatte das Fundament seiner Konstruktion, zurückgehend bis auf den Begriff der Irrationalzahl, mit philosophischer Schärfe und Gründlichkeit zu legen gesucht. Aus der Verallgemeinerung und Vertiefung dieses Bestrebens nach einer philosophischen Begründung der gesamten neueren Mathematik entwickelte sich die „Mengenlehre“ Cantors und mit ihr die Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Die Mathematik suchte aus sich heraus eine neue Philosophie des Begriffs der Zahl und der Funktion zu entwickeln und eine „neue Logik“ zu begründen. Aber man glaubte hierbei über philosophische „Machtsprüche“, über Kantische Grundsätze und Gaußische Warnungen hinwegschreiten zu dürfen, indem man mit dem Begriff des „vollendeten Unendlich“ wie mit einem wirklichen, exakten Begriff operierte. Unruhe und Unsicherheit begannen damit den sonst ruhig und sicher fortschreitenden Gang der Entwicklung des mathematischen Gedankens zu stören. Widerspruch erhob sich in den eigenen Reihen der Mathematiker; doch das mit äußerster Schärfe kritisch analysierende Denken drang unaufhaltsam in immer weitere Gebiete der Mathematik. Der Zusammenhang mit der geometrischen Anschauung und mit den für die Erkenntnis der Natur bedeutungsvollen Gedankengängen lockerte sich in der jüngsten Generation mehr und mehr. Trotz aller Anstrengungen hat man aber das Ziel einer einheitlichen, sicheren Fundierung der Mathematik nicht erreichen können: der Schlüsselpunkt, „das Problem des Irrationalen“ ist heute umstrittener als je.

VIII.

So überschauen wir die gegenwärtige Verfassung der Mathematik in ihren hervorstechendsten Zügen. In den Höhen und Tiefen der Abstraktion, in die sie sich gewagt hat, hat sie das große, einigende Ziel aus den Augen verloren. Die Losung kann darum nur lauten: Zurück zur Anschauung, hin zur Natur! Aus diesen Quellen hat die Mathematik ihr Leben empfangen und nur aus ihnen wird ihr auch weiter neues Leben zuströmen können.

Die abstrakten Formeln sind ja nicht Selbstzweck, sondern nur Mittel zum begrifflichen Erfassen der Außenwelt. Sie sind nur die Noten, in denen die Musik der mathematischen Kompositionen niedergelegt ist.

Niemand wird die großen Leistungen der neuesten Mathematik in positiv aufbauender und kritisch klärender Richtung verkennen. Wertvollste Bestrebungen der Mathematiker selbst haben immer auch der Pflege der Beziehungen zur geometrischen Anschauung, zur Naturwissenschaft, zur Technik und zum öffentlichen Leben gegolten — ich brauche da nur die Göttinger Schule und ihre Führer Hilbert, Klein, Runge zu nennen —, das Gebiet der Geometrie selbst hat seit Gauß noch eine vorher nicht geahnte Entfaltung erfahren. Die Gesamtentwicklungslinie der Mathematik des 19. Jahrhunderts zeigt jedoch in der Tat die Tendenz zu immer höherer Abstraktion[1]).

Diese Linie rückwärts verfolgend hat nun Spengler gefunden und in seinem Werke gezeigt, wie die neue Mathematik von ihrem Ursprung an zu immer reineren Höhen des Abstrahierens gedrängt worden ist. Gewiß war diese Vergeistigung der Denkmittel für die Entwicklung der Mathematik notwendig. Darum ist aber die Herstellung feinerer Werkzeuge des Denkens doch nicht Endziel der Mathematik. Gerade die Geschichte der neueren Mathematik hätte Spengler zu einer andern Auffassung führen sollen.

Doch Spengler behauptet ja, daß vielen der fundamentalen Begriffe der heutigen Mathematik nichts Anschauliches mehr entspreche. Über diesen Punkt sind die Ansichten der Mathematiker heute noch geteilt, ja die Überzeugung der allermeisten scheint heute noch dahin zu gehen, daß die „Anschauung“ an manchen Punkten „versage“. Demgegenüber ist zu bedenken, daß es die Geschichte des mathematischen Denkens gerade der letzten Jahrzehnte nahelegen dürfte, an diesen Punkten nicht dem „Denken“, sondern, wie es naturgemäß ist, der „Anschauung“ den Vorrang und die letzte Entscheidung zuzuerkennen. Nötigenfalls wird man den Begriff der „Anschauung“ weiter fassen und den umstrittenen Begriff des „vollendeten Unendlich“ als unerlaubt aus der Mathematik verweisen müssen. In einer so umgrenzten Mathematik

[1]) Über die besondere Bedeutung der „Gruppentheorie“ in diesem Zusammenhange wird später Näheres zu sagen sein.

wird in der Tat kaum etwas übrig bleiben, was nicht die Möglichkeit der Veranschaulichung in sich trüge. So dürften der neuesten Mathematik noch manche Möglichkeiten zu Gebote stehen, die sich ihr aus einer prinzipiellen Begründung des Vorrangs und der Unerschütterlichkeit der „Anschauung“ von selbst ergeben werden.

Seitdem Klein an die Spitze einer großzügigen Bewegung für die Reform zunächst des grundlegenden mathematischen Unterrichts in Richtung einer stärkeren Betonung der Anschauung getreten ist, sind auf diesem Wege schon reichste Früchte gezeitigt worden; eine grundsätzliche Durchdringung auch der gesamten Hochschulmathematik und schließlich auch der mathematischen Forschung mit dem belebenden Element der Anschauung, wie sie insbesondere unter dem Vorgange von Klein und Runge in der Tat schon begonnen hat, wird noch weittragende Folgen, insbesondere wiederum starke Rückwirkungen auf den Schulunterricht auslösen können.

Doch nicht nur die Synthese von Denken und Anschauung ist noch zu vollenden, sondern darüber hinaus vor allem die Synthese von Denken und Natur. Der innere Zusammenhang der reinen Mathematik mit der sich entwickelnden neuen Physik wurde seit Riemann immer schwächer. Es ist charakteristisch, daß die um die Mitte des 19. Jahrhunderts etwa gleichzeitig in England und Deutschland auftauchende Vektorenrechnung, die sich späterhin als so bedeutungsvoll für die neue Physik erwiesen hat, lange Zeit in den Kreisen der Mathematiker kaum beachtet wurde. So kam es schließlich dahin, daß Klein, der stets für die Zusammenführung von Mathematik und Physik eingetreten war, sich veranlaßt sah, kurz vor Ausbruch des großen Krieges die Lage etwa mit den Worten zu kennzeichnen, die Physik schreie geradezu nach Mathematik.

Demnach hat also das Germanentum in Zukunft gerade noch die rechte Vollendung derjenigen Aufgabe vor sich, deren Erfüllung wir nach allem als seine spezifische Lebensaufgabe zu betrachten berechtigt sind.

Hat doch der germanische Geist gerade in der Theorie des Äthers und in der der Atome und auf der anderen Seite in der reinen Mathematik Beweise höchsten Könnens in den beiden Richtungen gegeben, in denen seine spezifischen Anlagen liegen, das tiefe Versenken in die Natur und das konstruktive Denken. Und wie es die Bestimmung des gesamten Abendlandes war, in der organischen Mathematik und im Barockstil die Synthese von Denken und Natur zu vollziehen — wobei sich die Kräfte des Germanentums in der Epoche des deutschen Barock schon in höchsten Leistungen gezeigt haben —, so wird dem Deutschtum, dem nun einmal das Herz des Abendlandes als Wohnsitz zugefallen ist, vielleicht die Aufgabe bevorstehen, in besonderem Maße daran mitzuarbeiten, diese Synthese zu den Höhen einer neuen, abgeklärten Kultur emporzuführen und zu vollenden.

IX.

Wollen wir dieses hohe Ziel, diese der germanischen Seele angeborene „Idee“, ihren naturgegebenen Lebenszweck, erreichen, so werden wir in Zukunft unsere ganze Kraft dafür einsetzen, diese Aufgabe von Grund auf und im rechten Geiste in Angriff zu nehmen, und alle Sonderinteressen dem Streben nach diesem Ziele unterordnen müssen.

Wie ist aber eine Arbeit mit vereinten Kräften an der gemeinsamen Aufgabe heute möglich? Kann die Philosophie, die die Grundlage der Mathematik bildet, sich mit einer Mathematik befreunden, die die kritisch zweifelnden Stimmen der Philosophie entweder gar nicht hört oder allzu selbstsicher über sie hinwegschreitet? Kann die Naturforschung, die die herrlichsten Schätze an neuem Wissen gesammelt hat, zur Nutzbarmachung dieser Schätze viel von der Mathematik erwarten, wenn diese, nur zu sehr an sich selbst denkend, ihre abstrakten Konstruktionen aufbaut und auf der anderen Seite in rein logischer Schärfe und Allgemeinheit sich verliert? Was hat vollends die Kunst von einer Mathematik zu erhoffen, die ihre rein gedanklichen Konstruktionen als ihren letzten

Zweck zu offenbaren scheint, während doch die Gestaltung des sinnenfälligen Lebens die Aufgabe der Kunst ist?

Und doch, nicht nur die Physik, sondern auch die Philosophie und die Kunst „schreien“ heute mehr denn je nach Mathematik, aber nicht nach einer abstrakten, starren, sondern nach einer lebendigen, natürlichen Mathematik.

Darf da die Mathematik als der stützende Unterbau und das Band der Wissenschaften und Künste diesen an sie ergehenden Ruf überhören? Stimmen des Unmutes erheben sich vielleicht auf Seiten der Mathematiker: Darf unsere stolze Wissenschaft andern Zwecken dienstbar werden als solchen, die in ihr selbst liegen? Gewiß: Wenn die Not es fordert, werden Opfer gebracht werden müssen, aber diese Opfer werden der Mathematik selbst zum Guten gereichen.

Und eine Umwandlung der Mathematik ist in der Tat noch möglich. Es soll hier der Weg nur angedeutet werden, den man unweigerlich wird gehen müssen, wenn das gekennzeichnete Ziel erreicht werden soll.

Die wesentlichste Aufgabe der nächsten Zeit wird nach dem Gesagten die sein müssen, einer möglichst großen Zahl der an philosophischem, naturwissenschaftlichem und künstlerischem Schaffen interessierten Menschen einen möglichst naturgemäßen Eingang in die Infinitesimalrechnung zu eröffnen. Dafür wird vor allem eine philosophisch unangreifbare, einheitliche Auffassung und Behandlung des sogenannten „Unendlichkleinen“, dieses heute, 250 Jahre nach Erfindung der Infinitesimalrechnung, immer noch nicht widerspruchslos geklärten Grundbegriffs der Analysis, und zugleich eine einheitliche Erledigung des Problems des Irrationalen notwendig sein. Dazu wird ferner eine sich prinzipiell auf „Anschauung“ und Gesetzmäßigkeit gründende Einführung des Funktionsbegriffs erforderlich sein, wie es dem Ziel der Naturforschung gemäß ist. Man wird danach die gesetzmäßig gezeichnete Kurve geradezu als das Primäre, als das Wesentliche auffassen müssen, die zugehörige Formel dagegen als das Sekundäre, als ein Mittel zum leichteren Operieren mit den anschaulichen Elementen; so werden auch die künstlerisch veranlagten Naturen an der Infinitesimalanalysis Interesse gewinnen.

Wie diese Forderungen des Näheren verwirklicht werden können, das näher auszuführen wird sich, wie ich hoffe, demnächst Gelegenheit bieten[1]. Einmal in ihrer fundamentalen Notwendigkeit recht erkannt, werden sie auch bald eine befriedigende Lösung finden.

Weiterhin wird dann die Methode des Aufbaues der Infinitesimalrechnung nicht so sehr die der Analyse, als viel mehr die des organischen Fortschreitens nach dem Prinzip der Entwicklung, der immer reicheren Entfaltung aus ganz bestimmten Grundbegriffen und mit Hilfe weniger fundamentaler, philosophisch begründeter Grundprinzipien sein. Die Infinitesimalanalyse würde sich damit bewußt in eine Infinitesimalsynthese umwandeln. So entspricht es am meisten dem Entwicklungsgang des jugendlichen Geistes und so wird zugleich wieder dem Philosophen, dem künftigen Naturforscher und dem Künstler am besten Genüge getan.

Um die an der Pforte der höheren Mathematik Einlaß begehrenden jungen Geister für die erhabene Schönheit dieser Wissenschaft im voraus empfänglich zu machen, wird sich der vorbereitende Unterricht von Grund aus und ganz allgemein dem Streben nach dem als richtig erkannten Ziele anpassen müssen. Dabei wird man sich immer bewußt bleiben müssen, daß man ein Haus, dessen Fundamente von einer Sturmflut bedroht sind — und das deutsche Volk wohnt zurzeit in einem solchen Hause — zunächst durch Festigung und Verbreiterung der Fundamente, kaum aber durch Verbesserungen und Umänderungen nur der oberen Stockwerke wird retten können. Dann aber dürften sich uns in der Tat noch Möglichkeiten bieten, die die Reformbestrebungen der letzten Jahrzehnte zu tiefster und breitester Auswirkung führen werden.

Das menschlich schöne Ziel, den immer noch nicht aufhörenden Klagen eines großen Teiles der deutschen Jugend — und vielleicht nicht des wertlosesten — über einen zu abstrakten Unterricht in der Mathematik, die doch für alle Menschen mit klarem Verstande und mit gesunden Sinnen eine der anziehendsten aller Wissenschaften sein müßte, ein Ende zu

---

[1]) Man vergleiche hierzu die zweite Abhandlung.

setzen und recht viele wenigstens einen Einblick in den harmonischen Bau der höheren Mathematik gewinnen zu lassen, ist gewiß dauernd der höchsten Bemühungen wert. Und die Rückwirkung eines lebensvollen, Freude weckenden Unterrichts auf die zum Lehren der Mathematik Berufenen wird nicht ausbleiben.

Es liegt auf der Hand, daß vor allem auch das Zeichnen dem zukünftigen Unterricht in der Mathematik weitgehend wird angepaßt werden müssen. Die sorgsame Handhabung von Stift und Feder, Lineal und Zirkel ist ja die Grundlage aller „Handfertigkeit“ und der Ausgangspunkt aller bildenden Kunst.

Nach dem früher Gesagten wird klar, wie sich schließlich auch der mathematische Hochschulunterricht dem Ganzen zwanglos wird einordnen können. Das große Ziel wird sein, möglichst vielen das Verständnis des vertieften Weltbildes zu ermöglichen, an dessen Schaffung gerade die germanische Naturwissenschaft des letzten Jahrhunderts so hervorragend mitgewirkt hat und das eben erst zu einer gewissen Abrundung gelangt ist, und das wird am ehesten von dem Boden einer räumlich vertieften Anschauung aus erzielt werden können. So würde erreicht werden, was die notwendige Vorbedingung einer neuen, einheitlichen Kultur ist: Einheitliche Grundlage, einheitlicher Aufbau und einheitliches Ziel in denjenigen Wissenschaften, die das Fundament jeder und in besonderem Maße unserer heutigen, insbesondere der deutschen Kultur bilden.

X.

Welche tiefergreifenden, idealen Wirkungen eine einheitliche Einstellung des deutschen Geisteslebens auf das gekennzeichnete große Ziel hin wird haben können, ist schon aus dem früher Gesagten zu entnehmen. Unsere gegenwärtige Lage verlangt aber, daß wir auch prüfen, welche realen Wirkungen eine solche geistige Umwandlung wird auslösen können. Scharnhorst, der Reorganisator des preußischen Heeres nach dem Zusammenbruch von 1806, betrachtet die

Mathematik als „die Grundlage aller Wissenschaften und aller feineren Geistesbildung“; dieser Ausspruch wird ergänzt durch das Wort Napoleons: „Die Wohlfahrt der Nationen ist an das Gedeihen der Mathematik gebunden“.

Eine Umwandlung des ganzen deutschen Volkes von innen heraus ist die Vorbedingung eines Wiederaufbaues. Diese Aufgabe wird von den verschiedensten Seiten in Angriff genommen werden müssen; doch ohne ein tiefes, festes und breites mathematisches Fundament würde das neue Gebäude auf unsicherem Grunde stehen.

Jeder, der zum Führer des Volkes berufen ist, sollte Gelegenheit haben, die konstruktive, organisatorische Kraft des Denkens zu stählen an den Ideengängen der Mathematik; jeder sollte an ihr die Kraft einer „Theorie“ erlebt haben, eines einheitlichen Planes, aus dem heraus alle Verzweigungen ins einzelne und alle Anwendungen auf die Realitäten des Lebens mühelos sich ergeben. Jeder sollte an der Mathematik seinen Blick geschärft haben, um hinter der verwirrenden Oberfläche der Außendinge das Wesentliche, das Typische erkennen und danach seine Entschlüsse, sein Handeln und Wirken einrichten zu können. An den unabänderlichen Gesetzen der Mathematik sollte jedem bewußt werden, daß hinter aller scheinbaren Regellosigkeit des Naturverlaufs und selbst des Denkens doch ein unzerstörbarer Kern der Wahrheit verborgen ist, daß in dem ewigen Fließen doch Ruhepunkte unverrückbar feststehen, die uns Zutrauen zu unserm Denken und Handeln und Festigkeit in unserm Streben verleihen können.

Der neutrale Untergrund einer auf mathematischer Grundlage ruhenden Naturwissenschaft und Naturphilosophie wird auch erst eine Vereinheitlichung unseres sozial, religiös und politisch so sehr zerrissenen Volkes ermöglichen und ihm zu der äußeren Einheit auch die so notwendige innere, geistige und seelische Einheit verleihen, deren segensreiche Wirkungen sich bald an der Oberfläche des Lebens zeigen werden.

Die bildende Kunst, vor allem die Baukunst, wird aus dem Boden einer neu orientierten, organischen Mathematik neue Kraft und Einheitlichkeit bei aller Freiheit schöpfen können und durch die wachsende Empfänglichkeit weiterer Kreise für ihre Bestrebungen zu immer neuem Schaffen angeregt werden.

Sie dürfte wieder anknüpfen an die große, echte Kunst des deutschen Barock, die unerschöpflich ist in ihrer Abwandlungsfähigkeit, und sie zugleich vertiefend und abklärend in einheitlichem, breitem Strome weiter aufwärts führen. Die Geschichte scheint es deutlich zu lehren, daß sich erst an einer einheitlichen, großen Baukunst ein einheitlicher, großer Kulturstil zu wahrer Höhe emporranken kann.

Mit den bildenden Künsten würden auch die redenden Künste, nicht zuletzt auch die Musik weiter aufwärts geführt und so die germanische Seele — worauf das früher Gesagte hindeutet — in der Zukunft noch zu ihren erhabensten und tiefsten Schöpfungen beflügelt werden.

Und auch die Technik wird, von den führenden Geistern emporgetragen, zu immer edlerer Blüte erstehen können. Der Ingenieur wird die Mathematik nicht mehr nur als seine Sklavin betrachten, die ihm die Formeln für seine Berechnungen beschafft; er wird den künstlerisch bildenden Gehalt der Mathematik in sich verspürt haben und aus solchem Geiste heraus die Technik zur Kunst vollenden. Die Mathematik wird ihrerseits nicht in falschem Stolze abseits stehen dürfen, sondern in ihrer Art tätig mithelfen müssen an der Veredlung des äußeren Antlitzes der Kultur.

Das Handwerk ferner wird unter der Einwirkung der neuen Führer dem Ziele zustreben, in jedem, auch dem unscheinbarsten Erzeugnisse zum Kunsthandwerk zu werden; aber erst auf dem Boden einer einheitlich orientierten Kunst kann, wie ja die Geschichte lehrt, im Kleinen das Höchste geleistet werden.

So erst wird die erstrebte Qualitätsarbeit zur Tatsache werden können, ohne die ein wirtschaftlicher Aufschwung unmöglich ist.

Unermeßliche Wissenschätze hat die Naturforschung in den letzten Jahrzehnten gesammelt; Wunder über Wunder haben sich vor ihrem Blick entschleiert, in unermeßliche

Tiefen und Weiten schaut das Auge des Forschers; aber diese Wunder der Natur sind in ihrer ganzen Größe vorerst nur wenigen erreichbar. Diese Schätze einer größeren Allgemeinheit zugänglich machen zu helfen, wird eine wesentliche Aufgabe der Mathematik der Zukunft sein. So wird das urgermanische Naturgefühl neue Nahrung finden; das Staunen vor der Erhabenheit der Natur wird wieder Einkehr halten in die Seele des Volkes, die Ehrfurcht vor dem Walten der Natur wie die Achtung vor ihren Geschöpfen wird weiterwirkend ihren veredelnden Einfluß auf das Zusammenleben der Menschen geltend machen.

Und wenn der Krieg unserem Wohlstand tödliche Wunden geschlagen hat, so bleibt uns noch die Naturforschung als ein unversiegbarer Quell, aus dem dem deutschen Volke wieder neue Kräfte und immer neue, ideale wie reale Werte erstehen können. Klammern wir uns um so enger an die lebenspendende Mutter Natur, je stärker wir vom Untergange bedroht sind, und sie wird unsere Retterin werden können! Noch ungeahnte Möglichkeiten in der Vertiefung unseres heutigen Wissens von der Natur sowohl wie in der Formung und Abrundung unseres Weltbildes dürften hier vorliegen, Großes, vielleicht das Letzte und Größte steht hier, wenn die Geschichte nicht trügt, gerade in der nächsten Zukunft dem abendländischen Geiste bevor, und hier wird gerade der deutsche Geist ein dankbares Feld der Betätigung finden können.

XI.

Am Eingang des vergangenen Jahrhunderts abendländischer Naturforschung stehen zwei Männer einander gegenüber: G a u ß, der Fürst im Reiche der mathematischen Wissenschaft, G o e t h e, der König im Reiche der Dichtkunst, beide zugleich unablässig bemüht um die Ergründung der Geheimnisse der Natur. Gauß will den Bau der Natur mit der Kraft seines Verstandes nachkonstruieren, Goethe geht mehr den Spuren der Natur im Kleinen nach und will mit seinen nichts übersehenden Augen die ewigen Formen der Natur erschauen. Gauß war wohl wenig empfänglich für Goethes Naturforschung; Goethe seinerseits hat sich mißbilligend über die Anwendung der Mathematik auf die Erforschung der lebendigen Natur geäußert. Aber er spricht mit Worten hoher Achtung von der Mathematik an sich und sein Tadel trifft eben ihre „Einseitigkeit“ und ihre „Beschränktheit“. Würde aber der Goethe, der schließlich als Naturforscher von der „tausendköpfigen Hydra der Empirie“ erdrückt zu werden fürchtete, der so tiefes Verständnis für alle bildenden Künste bewiesen hat, der ferner mit praktischem Blick schon die wirtschaftlichen Folgen eines Durchstichs der Landengen von Suez und Panama erwog, seinen Vorwurf gegen die Mathematik erhoben haben, wenn er die Möglichkeit gehabt hätte, zu überschauen, wie sowohl Kunst wie Technik und Naturforschung im Boden mathematischen Denkens wurzeln?

Noch heute mag es viele geben, die der Mathematik ähnlich wie Goethe gegenüberstehen. Wäre es nicht eine dankbare Aufgabe für die Mathematik, Menschen mit Künstleraugen und schöpferischen Kräften das Tor zum Tempel der Mathematik weit zu öffnen?

In seiner gewaltigsten Dichtung legt Goethe ein Bekenntnis ab, das uns eine Mahnung sein kann: Nach erfolglosem Ringen um die Geheimnisse der Natur fällt Faust in seiner Verzweiflung zunächst dem Taumel sinnlichen Genusses anheim; doch er rafft sich auf zum Wirken am Wohle der Gesamtheit und fühlt schließlich sein höchstes Glück darin, die Fluten des Meeres zu bezwingen und neues Siedelungsland, weitere Lebensmöglichkeit für seine Mitmenschen zu schaffen. So wird auch die Mathematik es nicht als eine ihrer Tradition weniger würdige, sondern vielmehr als die höchste Aufgabe betrachten dürfen, vor die sie jemals gestellt worden ist, mit allen Kräften mitzuhelfen an der Eindämmung der Fluten, die heute alles zu vernichten drohen. Aus der Not ist die Mathematik entstanden; es heißt, die Ägypter hätten die Geometrie erfunden, um nach den Überschwemmungen des Nils die verwischten Grenzen ihrer Äcker wieder abstecken zu können. So sei die Mathematik auch heute zur Stelle, wo es gilt, die Not zu bannen!

Der strenge, stolze Gauß, der die ausgereiften Erzeugnisse seines Geistes nur in vollendeter, in sich abgeschlossener

Form an die Öffentlichkeit brachte, war nicht geneigt, den Lesern seiner Werke im Interesse leichterer Faßlichkeit Zugeständnisse zu machen; er dachte weniger an die Jugend. Nur das Forschen war seine Freude, das Lehren empfand er als eine Last.

Demgegenüber wird die Auffassung Goethes, des allzeit Gütigen, von seinem Beruf als Dichter gerade der heutigen Mathematik als Leitstern voranleuchten können. In einem seiner Gedichte erzählt er allegorisch, wie ihm bei einer Morgenwanderung die „Wahrheit“ als eine edle Frauengestalt entgegentritt und ihm, der „in seinem Stolze“ sein „Glück nur mit sich selbst genießen“ zu können glaubt, erwidert:

„Kaum bist du sicher vor dem gröbsten Trug, ...
So glaubst du dich schon Übermensch genug,
Versäumst die Pflicht des Mannes zu erfüllen!
Wieviel bist du von andern unterschieden?
Erkenne dich, leb' mit der Welt in Frieden!“

Auf diese vorwurfsvollen Worte entgegnet der Dichter, innerlich umgewandelt:

„Für andre wächst in mir das edle Gut,
Ich kann und will das Pfund nicht mehr vergraben!
Warum sucht' ich den Weg so sehnsuchtsvoll,
Wenn ich ihn nicht den Brüdern zeigen soll?“

Erst nach dieser Sinnesänderung wird er gewürdigt, den „Schleier“ „aus der Hand der Wahrheit“ zu empfangen, und in freudigem Entschlusse ruft er aus:

„So kommt denn, Freunde, wenn auf euren Wegen
Des Lebens Bürde schwer und schwerer drückt, ...
Wir geh'n vereint dem nächsten Tag entgegen!
So leben wir, so wandeln wir beglückt.
Und dann auch soll, wenn Enkel um uns trauern,
Zu ihrer Lust noch unsere Liebe dauern.“

Wiedergeburt der Mathematik

aus dem Geiste Kants

So protestire ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Gauß.

Einleitung.

Im Herbstsemester 1919 war mir gelegentlich einer an der Universität zu Münster i. W. gehaltenen Vorlesung über „Mengenlehre und reelle Funktionen" das heute bestehende Mißverhältnis zwischen Mathematik und Philosophie so recht zum Bewußtsein gekommen, und ich glaubte zugleich das Mittel gefunden zu haben, das diesem unhaltbaren Zustande von der mathematischen Seite her ein Ende zu machen geeignet sein könnte.

Stets auch für die Philosophie, speziell für die Erkenntnistheorie interessiert — als meine Lehrer in dieser Wissenschaft kann ich insbesondere Husserl und Becher nennen —, kam ich so wieder mit der Philosophie in Berührung und erkannte bald in der Erkenntnistheorie Kants die Anschauungen, die am ehesten als Basis für eine Verständigung zwischen Mathematik und Philosophie dienen könnten.

Anfang Februar 1920 wurde ich von Herrn Prof. Dr. Braun, mit dem ich gelegentlich über meine Ideen gesprochen hatte, aufgefordert, in der von ihm soeben in Münster gegründeten Ortsgruppe der „Kant-Gesellschaft" meine Gedanken zu entwickeln. So unerwartet mir diese Aufforderung auch kam, ergriff ich doch gern die mir damit winkende Gelegenheit zu einer Aussprache vor größerem Kreise. Unter dem Titel „Kant und die neueste Mathematik" sollte ich Ende März sprechen, doch unterblieb der Vortrag infolge äußerer Umstände.

Inzwischen habe ich die für den Vortrag gemachten Notizen ihrer nunmehrigen Bestimmung entsprechend durchgearbeitet; doch habe ich möglichst darauf Bedacht genommen, daß — wie es in der Absicht des Herrn Prof. Braun lag, die Vorträge der „Kant - Gesellschaft“ auch den Studierenden zugänglich zu machen — meine Ausführungen gerade auch von angehenden Philosophen und Mathematikern verstanden werden können. Darum habe ich auch vorläufig von einem tieferen Eingehen auf einzelnes absehen zu dürfen geglaubt. Worauf es unter den gegenwärtigen Umständen ankommt, ist ja zunächst gerade eine Loslösung von einer zu weitgehenden kritischen Vertiefung und Auflösung in eine übergroße Fülle von Einzeltatsachen, um zunächst einen neutralen Standpunkt über den widerstreitenden Parteien zu gewinnen. Von da aus werden sich später mannigfache Anknüpfungspunkte an das Vorhandene ergeben. So wird das Vorliegende zugleich als orientierende Einleitung zu einigen Aufsätzen dienen können, in denen einer Neuorientierung der Mathematik in ihrer Stellung zu ihren Nachbarwissenschaften, insbesondere zur Philosophie und zur Naturwissenschaft, die Wege geebnet werden sollen mit dem Endziel einer einheitlichen, auf mathematischer Grundlage ruhenden Naturphilosophie.

Wie sehr die in diesem Aufsatze berührten mathematisch-philosophischen Grenzfragen heute unter den Mathematikern im Vordergrunde des Interesses stehen, zeigt der neueste Band des „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ (Bd. 28, 1919, 2. Hälfte, ausgegeben am 15. März 1920), der die Aufsätze enthält:

H. Weyl, „Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis“,

R. E. J. Brouwer, „Intuitionistische Mengenlehre“,

die beide im wesentlichen in die von mir im folgenden eingeschlagene Richtung zu weisen scheinen, und den Aufsatz:

F. Bernstein, „Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus“,

in dem die gegenteilige Ansicht vertreten wird.

Vieles deutet ferner darauf hin, daß sich die Auffassungen der deutschen Mathematiker heute, nach einer Periode der völligen Abkehr von Kant, wieder mehr dem Komplex der Anschauungen nähern, der mit dem Namen Kants verknüpft ist, wenn auch die speziellen Ausführungen Kants zur Begründung der Mathematik nicht als ausreichend befunden werden.

I.

Die Geschichte der Wissenschaften zeigt von alters her eine ständige Wechselwirkung zwischen Philosophie und Mathematik. Philosophen wie Pythagoras, Plato, Descartes, Leibniz sind zugleich bahnbrechende Mathematiker gewesen. Ihrem Kopfe sind die folgenreichsten mathematischen Entdeckungen entsprungen. Seit Kant scheint das Band zwischen Mathematik und Philosophie lockerer geworden zu sein. Zwar wird keine Philosophie an einer Auseinandersetzung mit den Grundlagen der Mathematik vorübergehen, doch scheint sich die Philosophie an den Versuchen fortschreitender Vertiefung und Klärung der Grundlagen mathematischen Denkens weniger aktiv betätigt zu haben. So verständlich diese Tatsache angesichts der Entwicklung der Wissenschaften im 19. Jahrhundert auch ist, so wird doch immer wieder zum Nutzen der beiden aufeinander angewiesenen Wissenschaften und der Allgemeinheit ein Zusammenarbeiten und ein Ausgleich der Ansichten auf der Basis gegenseitiger Wertschätzung angestrebt werden müssen. In Deutschland haben sich besonders die sich an dem Namen Kants orientierenden Philosophen, insbesondere neuerdings die Schule der Neu-Kantianer um eine Annäherung von Philosophie und Mathematik verdient gemacht. Enger und allgemeiner ist das Band zwischen den beiden Wissenschaften in Frankreich geknüpft, wo sich die Philosophen um den Namen des Mathematikers Poincaré gruppieren, der sich in der Grundlegung mathematisch-philosophischen Denkens ebenfalls Kantischen Auffassungen nähert. Doch es ist bisher noch nicht genug in der bezeichneten Richtung geschehen, wie ich im folgenden zeigen möchte; und es wird sich überdies ergeben, daß die Zukunft einer gemeinsamen Arbeit von Philosophie und Mathematik noch dankbare Aufgaben stellen wird.

Die „Analysis des Unendlichen“ — um diese wird es sich hier handeln — brauchte seit ihrer Entdeckung durch Leibniz und Newton am Ende des 17. Jahrhunderts etwa 150 Jahre, um sich in rascher Entwicklung zuerst in ihrer ganzen Breite und Höhe zu entfalten. „Nur vorwärts, die Begründung wird schon von selbst kommen“, so etwa heißt ein Wort des Mathematikers Lambert aus der Zeit und Umgebung Friedrichs des Großen; aber die Begründung war nicht so leicht, und heute ist der Streit um die Grundlegung der Infinitesimalmathematik nicht etwa beendigt, sondern schärfer als je. Darum möge die Philosophie nicht versäumen, in den Endkampf, der demnächst, wie es scheint, ausgetragen werden wird, mit ihren gewichtigen Waffen einzugreifen, um die Bahn recht bald frei zu machen zu gemeinsamem, positiv aufbauendem Schaffen.

Wir stehen in den exakten Wissenschaften heute im Zeichen der Relativitätstheorie, deren letzte Konsequenzen, von dem Physiker Einstein gezogen, ein wissenschaftliches Ereignis darstellen, das von manchen der Einführung der Kopernikanischen Theorie des Sonnensystems gleichgewertet wird. Wir verdanken diese Resultate einem Naturforscher, der sowohl in philosophisch tiefgründiger Weise die Grundbegriffe der Naturwissenschaft kritisch durchdacht, wie auch die schärfsten und tiefsten Hilfsmittel der Mathematik anzuwenden verstanden hat: Ein weithin leuchtendes Beispiel dafür, wie gerade durch die Synthese philosophischen und mathematisch-naturwissenschaftlichen Denkens Großes geleistet werden kann.

II.

Auch die neuere Mathematik, die „Analysis des Unendlichen“ ruht, wie alle Mathematik, auf dem Fundamentalbegriff der ganzen Zahlen und deren Urbegriff, der Einheit.

Wir setzen die Einheit, setzen ihr eine andere Einheit entgegen und fassen beide Einheiten zu einer neuen Einheit zusammen. Die Wiederholung dieses elementaren dreiteiligen

Schrittes, der von der Thesis über die Antithesis zur Synthesis fortgeht, führt zu der Vorstellung der nicht abbrechenden Reihe der ganzen Zahlen, also zum Unendlichen. So steht schon an der Eingangspforte zum Gebäude der Mathematik das rätselvolle Wort „Unendlich", das Gegenbild des Begriffs „Eins".

Der philosophischen Klärung des Begriffs der Zahl hat die Mathematik besonders in den letzten 50 Jahren ihre Aufmerksamkeit zugewandt; im Vordergrunde steht hier der Name Cantors, des Schöpfers der Lehre von den „unendlichen Mengen", der sogenannten „Mengenlehre", die von ihm gerade zum Zweck einer exakten Begründung und Erforschung des Zahlbegriffs in allen seinen Verzweigungen geschaffen worden ist. Die Vorstellung des Inbegriffs aller ganzen Zahlen als einer geschlossenen Gesamtheit unendlich vieler Einzeldinge ist das erste Beispiel für den Begriff der „Menge", der nach Cantor die letzte Basis mathematischen Denkens ist.

Nehmen wir die der unbegrenzten Reihe der positiven ganzen Zahlen

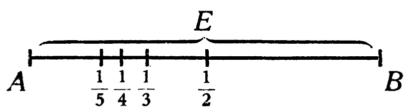
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots.$$

entsprechenden reziproken Werte

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots.,$$

so haben wir wieder eine unendliche Menge.

Denken wir uns diese Werte als Strecken auf einer Geraden nach Setzung eines Anfangspunktes A und einer Einheitsstrecke E der Reihe nach abgetragen,



so sinkt die Länge dieser Folge von Strecken $\frac{1}{n}$ mit unbegrenzt groß werdendem n zu unbegrenzter Kleinheit herab; die Strecke $\frac{1}{n}$ wird schließlich „unendlichklein", sie ist eine „infinitesimale" Größe. Den Wert Null, dem die Größe $\frac{1}{n}$

immer näher kommt, nennt man den „Grenzwert" der Wertefolge $\frac{1}{n}$. Erreicht sie diesen Wert jemals wirklich? Jedenfalls kann das erst dann eintreten, wenn n „wirklich" unendlich groß geworden sein sollte.

Damit haben wir die beiden Fundamentalbegriffe der Infinitesimalmathematik, den des „Unendlichkleinen" und den des „Grenzwertes", neben dem Begriff der unbegrenzten „Folge" kennen gelernt.

Vervollständigen wir die oben angegebene Folge der Zahlen $\frac{1}{n}$, indem wir neben jeden Wert $\frac{1}{n}$ die Werte

$$\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$$

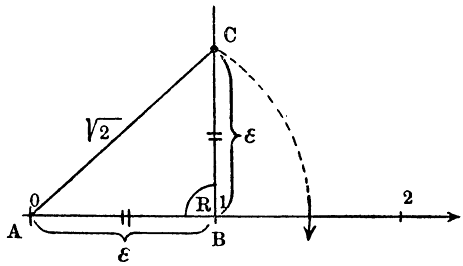
hinschreiben, so erhalten wir die Gesamtheit aller „echten" Brüche, — darunter viele von gleichem Werte mehrmals, oder die unendliche „Menge" aller „rationalen" Zahlen zwischen Null und Eins. Die Endpunkte der Strecken, die diesen Zahlwerten entsprechen, bedecken die Einheitsstrecke immer dichter und dichter und scheinen sie schließlich lückenlos auszufüllen. Ihre Gesamtheit ist eine neue unendliche Menge, speziell eine auf einer geraden Linie angeordnete, eine „lineare Punktmenge". Solche „Punktmengen" sind der Hauptgegenstand der Cantorschen Mengenlehre.

Bildet nun die Gesamtheit dieser Punkte ein in sich zusammenhängendes, „stetiges" Ganze, ist sie „äquivalent" mit der „kontinuierlichen" geometrischen Strecke E, bildet sie ein „Kontinuum"? Damit stehen wir vor einer Frage, die fast so alt ist wie die Kultur Europas und die doch, allen Bemühungen zum Trotz, in ihren Konsequenzen heute noch nicht eine das philosophische Denken völlig befriedigende Aufklärung gefunden hat.

Ist diese Strecke E so dicht mit Punkten besät, daß darauf kein einziger außer den angegebenen rationalen Punkten mehr Platz findet?

Denken wir uns im Endpunkte B der Einheitsstrecke die Senkrechte errichtet und auf dieser die Einheit bis zum

Punkte C abgetragen (vergl. die Figur). Dann ist die Länge der Diagonale des so entstehenden rechtwinkligen Dreiecks nach dem Satze des Pythagoras gleich dem Zahlwerte, der mit sich selbst multipliziert gleich 2 ist und den wir als „$\sqrt{2}$“ bezeichnen. Denken wir uns nun alle rationalen Punkte zwischen 1 und 2 markiert und die Strecke AC von A aus auf der verlängerten horizontalen Geraden abgetragen, so erhalten wir einen Punkt, der mit keinem rationalen Punkte der Strecke $\widehat{12}$ zusammenfällt; denn es gibt



keine rationale Zahl — d. h. eine solche von der Form $\frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen sind —, die mit sich selbst multipliziert genau den Wert 2 ergäbe.

Man erkennt so, daß die Gesamtheit aller rationalen Punkte noch nicht das darstellt, was wir unter einem „Kontinuum“ verstehen. Damit gibt also die nicht rationale, die „Irrationalzahl“ $\sqrt{2}$ eine ganz neue Ansicht des „Kontinuumproblems“, das — obwohl schon Pythagoras die Existenz der Irrationalzahl entdeckt hat und der Gottheit für diese Entdeckung seinen Dank durch das Opfer einer Hekatombe bezeugt haben soll — die Geister bis auf den heutigen Tag nicht hat zur Ruhe kommen lassen.

Außer der $\sqrt{2}$ lassen sich analog unzählig viele Irrationalzahlen zwischen die schon vorhandenen, unendlich vielen rationalen Zahlen einschalten.

So scheint es, als ob sich im Unendlichen, das doch seinem Umfange nach ein völlig unbestimmter Begriff ist, dennoch gewisse Abstufungen deutlich abheben[1]). Diese Beobachtung hat bei Cantor den Anstoß zum Ausbau der „Mengenlehre“, speziell zur Lehre von den überendlichen, den sogenannten „transfiniten“ Zahlen gegeben.

[1]) Solche Abstufungen spielen übrigens auch sonst in der Infinitesimalmathematik eine Rolle.

Wir verfolgen die weitere Entfaltung des Zahlbegriffs und die parallel laufende Frage, ob wir nach Einfügung der Irrationalzahlen zwischen die Rationalzahlen auf der Geraden das „Kontinuum" erreicht haben, nicht weiter. Es kam hier nur darauf an, deutlich zu machen, in wie vielfach wechselnder Gestalt der Begriff des „Unendlichen" in den Grundbegriffen der Mathematik, insbesondere der Infinitesimalanalysis auftritt, wie nicht nur die Begriffe der unendlichen Menge, des Unendlichgroßen und des Unendlichkleinen, sondern auch die des Grenzwertes und der Irrationalzahl auf ihm als ihrer einheitlichen Grundlage ruhen und darum die zugehörigen Probleme als im wesentlichen äquivalent betrachtet werden können.

Letzten Endes handelt es sich nach dem Gesagten, um die Frage, ob überhaupt und in welcher Weise wir ein anschaulich gegebenes, geometrisches Ganzes, ein „Kontinuum", nachdem wir es gedanklich, mit Hilfe des Zahlbegriffs, in eine Menge von Einzeldingen, „Punkten", zertrümmert haben, aus diesen Atomen als einheitliches Ganzes wieder erstehen lassen können. Und man sieht, wie die Frage der Synthese von Denken und Anschauung, diese uralte, ewig neue Frage der Philosophie, als das Problem des Dualismus von Arithmetik und Geometrie zugleich eine Grundfrage der Mathematik bildet.

Die Mengenlehre speziell ist nach einem Ausspruch ihres Schöpfers Cantor von ihm eigens zum Zweck einer „Fusion" von Arithmetik und Geometrie geschaffen worden, und auf der Theorie der „linearen Punktmengen", als der Theorie der „Variablen", ruht der Zentralbegriff der neueren Mathematik, der der „Funktion", dem als geometrisches Bild eine Kurve etwa in einem Cartesischen Koordinatensystem entspricht.

So stehen wir an der Grundfrage der höheren Mathematik, und diese läßt sich nach dem Gesagten, wenn überhaupt, so nur auf dem Wege einer Klärung des Begriffs des „Unendlichen" lösen.

III.

Wir erkennen aus dem Gesagten schon, daß unter dem Begriff „Unendlich“ in der Infinitesimalmathematik nicht das schlechthin unbestimmbare Unendlich, das alle Grenzen des Vorstellungsvermögens überschritten hat, gemeint sein wird. Ein solcher Begriff kann zwar Endpunkt, Ziel sein, wäre aber als Grundlage für exakte begriffliche Operationen und Konstruktionen nicht verwendbar.

Davon abgesehen, tritt der Begriff des „Unendlichen“ in der Infinitesimalmathematik in zwei Fassungen auf: Einmal als eine Größe, die entweder über jede noch so große, bestimmt angebbare Grenze hinaus zu wachsen imstande ist, wie etwa die unbegrenzte Reihe der ganzen Zahlen, oder die unter jeden beliebig vorgeschriebenen Grad der Kleinheit hinabsinken kann, wie etwa die dem Grenzwert 0 zustrebende, nicht abbrechende Reihe der Werte $\frac{1}{n}$, wo n die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft. Dieses durch die Praxis mathematisch konstruktiven Denkens allgemein sanktionierte „Unendlich“, aufgefaßt als eine Größe, die die Möglichkeit bzw. die Fähigkeit des Unendlichwerdens in sich trägt, wird als „potentielles“ Unendlich bezeichnet.

Ihm tritt die Auffassung des Unendlichgroßen und -kleinen als einer vollendeten, in sich abgeschlossenen, wirklich unendlich gewordenen Größe, des „aktuell“ Unendlichen, gegenüber, als eines Zwischenbegriffs, der zwar nicht eine schlechthin unendliche, aber auch nicht mehr eine endliche Größe bezeichnen soll. Mit ihm glaubt man besonders in der Mengenlehre wie mit anderen, scharf umgrenzten Begriffen mathematische Operationen, Additionen, Multiplikationen usw. ausführen, ihn also als Basis für exakte gedankliche Konstruktionen verwenden zu dürfen.

Der Geistesphilosoph Leibniz war es, der, während der Naturphilosoph Newton noch über eine philosophisch unangreifbare Begründung der Infinitesimalrechnung mittels seiner „Fluxionen“ — das Wort ist schon charakteristisch für

Newtons Auffassung — nachsann und deshalb mit der Veröffentlichung seiner Entdeckung zögerte, den gordischen Knoten dieser Grundschwierigkeit durchschlug, indem er für eine „unendlichkleine“ Differenz das Wort „Differential“ einführte und dafür zugleich das Symbol „*dx*“ schuf. Das war die Geburtsstunde der Differentialrechnung, zugleich aber auch die des „aktual“ Unendlichen. Mit diesen Differentialen wurde seitdem wie mit andern mathematischen Größen gerechnet, und wenn auch Leibniz selbst sich der philosophischen Gefahren dieses Begriffs immer bewußt blieb und bis heute immer wieder vor einer mißverständlichen Auffassung des Begriffs des „Differentials“ gewarnt wird, das Symbol *dx*, das der Differentialrechnung die Lebensfähigkeit gab, scheint den Geist immer wieder zu der Auffassung des Unendlichen als einer „aktualen“, vollendet unendlichen Größe zu verleiten.

Es scheint nicht zweifelhaft, daß Kant, der sowohl mit den Prinzipien der Newtonschen Naturphilosophie wie mit den Grundzügen der Infinitesimalrechnung in der Leibnizschen Form, speziell mit dem Begriff des aktual Unendlichen vertraut war, mit seiner Auffassung Newton nahe gestanden haben wird, und daß vielleicht gerade die Schwierigkeit des Begriffs des aktual Unendlichen für ihn ein Hauptgrund gewesen ist, bei der Grundlegung seiner Erkenntnistheorie wohl die „elementare“, nicht aber die Infinitesimalmathematik in Betracht zu ziehen.

Während man in der Mathematik seit Beginn des 19. Jahrhunderts einer unrichtigen Verwendung des aktual Unendlichkleinen durch eine präzise Fassung des Grenzwertbegriffs vorzubeugen sich bemühte, wurde der Begriff des aktual Unendlichgroßen zwecks schärferer Erfassung des Zahlbegriffs von Cantor seit 1874 beim Aufbau seiner Mengenlehre systematisch benutzt und damit der Versuch gemacht, die Infinitesimalrechnung von anderer Seite her auf den Begriff des aktual Unendlichen zu basieren. Wir haben oben Beispiele Cantorscher Mengen, die als aus unendlich vielen Einzeldingen bestehende, in sich abgeschlossene Gesamtheiten aufgefaßt werden, kennen gelernt. Die unendliche Anzahl der Einzeldinge einer solchen Menge nennt Cantor eben eine „transfinite

Zahl". Mit solchen „Zahlen" operiert Cantor analog wie mit bestimmt gegeneinander abgegrenzten Begriffen endlichen Umfanges; und es gelingt ihm, im Bereich des aktual Unendlichen eine Art Arithmetik der überendlichen Zahlen aufzuführen.

Es ist nun eine Hauptfrage der gegenwärtigen Mathematik: Ist die Begründung der Infinitesimalmathematik mit Hilfe der Cantorschen Begriffe der Mengenlehre als eine hinreichend sichere und endgültige zu betrachten? Dann wäre durch die Mathematik die Entscheidung zuungunsten der Kantischen Auffassung von dem Begriff des Unendlichen herbeigeführt worden.

So will ich nun im folgenden zuerst kurz referierend dartun, daß die sich um diesen Punkt gruppierenden Probleme als noch nicht einwandfrei gelöst betrachtet werden, daß vielmehr die Wage in diesem noch immer unbeendeten Kampfe „Leibniz contra Kant" sich wieder Kantischen Auffassungen zuzuneigen beginnt.

Darauf will ich zeigen, in welche Richtung die positiven Vorschläge zur Behebung der Unstimmigkeiten weisen und wie sich aus diesem scheinbar hoffnungslosen Streit der Meinungen noch ein letzter Ausweg bietet, daß dieser Weg zugleich aber von weitreichendem Einfluß auf die gesamte Grundlegung und den Aufbau der Infinitesimalrechnung, ja auch auf die ganze Auffassung vom Wesen und der Bestimmung der mathematischen Wissenschaft zu werden verspricht.

IV.

Etwa bis ums Jahr 1900 verhielt sich wohl die Mehrzahl der Mathematiker wie der Philosophen der Mengenlehre gegenüber ablehnend, aber die neue Theorie zog nach und nach alle Gebiete der Mathematik in den Bereich ihrer Begriffe, und so wurde angesichts der tatsächlichen Leistungen der Mengenlehre der Widerspruch auf mathematischer Seite allmählich schwächer, wenn man auch der Grundlegung gegenüber skeptisch bleiben mochte. Die Fachphilosophen dürften auch heute noch im großen ganzen der Mengenlehre feindlich gegenüberstehen; und es kennzeichnet die Lage, daß selbst Natorp, der heute führende Philosoph der Marburger Philosophenschule, die — wie schon zu Anfang erwähnt — am meisten den Fortschritten in der Begründung der modernen Mathematik gerecht zu werden sich bemüht hat, das aktual Unendliche, wenn er es auch nicht abweisen mag, dennoch als den „anstößigsten Punkt“ in der philosophischen Fundierung der Mathematik bezeichnet hat [1]).

Es ist nun heute, da in der jüngsten Zeit gerade mehrere zusammenfassende Lehrbücher über die Mengenlehre und ihre Anwendungen erschienen sind, auch dem Nichtspezialisten leichter gemacht, einen Einblick in das hier in Betracht kommende Wissensgebiet zu gewinnen. Ich erwähne hier A. Schönflies, „Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen“ (Leipzig 1913); F. Hausdorff, „Grundzüge der Mengenlehre“ (Leipzig 1914); C. Carathéodory, „Vorlesungen über reelle Funktionen“ (Leipzig 1918); A. Fraenkel, „Einleitung in die Mengenlehre“ (Berlin 1919).

Besonders aus dem Buch von Fraenkel kann man ersehen, wie heute, nach fast 50 Jahren emsigster und scharfsinnigster Arbeit in der Mengenlehre, diese Theorie an wesentlichen Punkten immer noch der Vollendung und der sonst in der Mathematik geforderten Sicherheit in ihren Grundzügen entbehrt.

Wir erfahren da, daß man der wichtigsten „transfiniten Zahl“, der Zahl, die die Anzahl der Punkte des „Kontinuums“ charakterisieren soll, „trotz erheblicher Bemühungen“ „noch“ immer nicht einen bestimmten Platz in der Reihe der Cantorschen transfiniten Zahlen hat zuweisen können, obwohl es „wahrscheinlich“ sein soll, daß sie die „zweite“ transfinite Zahl ist.

Man erfährt weiter, daß der ursprüngliche Mengenbegriff Cantors auf logische Widersprüche, die sogenannten „Para-

---

[1]) Vgl. P. Natorp, „Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften“, S. VI. Leipzig 1910.

doxien“ oder „Antinomien der Mengenlehre“ — das Analogon zu den Kantischen „Antinomien der reinen Vernunft“ — geführt hat, die „einzelne, darunter auch ganz hervorragende Mathematiker veranlaßt“ haben, „die allgemeinen Teile der Mengenlehre abzulehnen“. Fraenkel fügt hinzu: „Auch wo dieser prinzipiell abweisende Standpunkt nicht eingenommen wurde, hat begreiflicherweise das Vorhandensein einer mathematischen Disziplin, die sich logische Blößen gab und in der es viel mehr auf subjektive Überzeugung als auf zwingend begründete Erkenntnisse anzukommen schien, neuerdings großes Unbehagen hervorgerufen.“

Man hat neuerdings den schwierigen Versuch gemacht, den Paradoxien der Mengenlehre aus dem Wege zu gehen, indem man den einfachen Cantorschen Begriff der Menge gewissen Einschränkungen unterwarf; doch hat dadurch schon der Ausgangspunkt der Theorie eine solche Komplizierung erfahren, daß wie bisher, so auch in Zukunft diese Art der Begründung wohl kaum allgemeine Anerkennung finden wird.

Nach Hausdorff ist die Mengenlehre Cantors „das Fundament der gesamten Mathematik; Differential- und Integralrechnung, Analysis und Geometrie arbeiten in Wirklichkeit, wenn auch vielleicht in verschleiernder Ausdrucksweise, beständig mit unendlichen Mengen“. Dennoch ist auch nach ihm „über das Fundament dieses Fundamentes, also über eine einwandfreie Grundlegung der Mengenlehre selbst eine vollkommene Einigung noch nicht erzielt worden“.

Darf man aber bei der Bedeutung, die die Mengenlehre hier für sich in Anspruch nimmt, die Gründe der Gegner als „Vorurteile und philosophische Machtsprüche“ bezeichnen, über die Cantor „hinwegschreitend eine neue Wissenschaft begründet“ hat? Wird nach Lage der Sache die Hoffnung auf eine „vollkommene Einigung“ in dem von Hausdorff gemeinten Sinne nicht überhaupt als unerfüllbar sich erweisen?

Hier fügt sich naturgemäß ein Wort der Erklärung ein über die Tatsache, daß die Mengenlehre einen so weiten und tiefen Einfluß auf die gegenwärtige Entwicklung des mathematischen Denkens gewonnen hat. Daß eine Disziplin, die die letzten Grundfragen aller Mathematik zum Ausgangspunkte nimmt, sämtliche Bereiche der mathematischen Wissenschaft in den Kreis ihrer Erörterungen ziehen wird, ist ganz naturgemäß. Wie aber erklärt sich die augenscheinliche „Fruchtbarkeit“ der Mengentheorie auch für die Weiterentwickelung der Mathematik gerade in ihren letzten, feinsten Verzweigungen? Der Grund hierfür liegt in dem sehr allgemeinen Begriff der „Funktion“, an dem sich die Mengenlehre betätigt.

Dem Begriff der „reellen“ Funktion im üblichen Sinne entspricht als geometrisches Bild in einem System rechtwinkliger Koordinaten eine Kurve, deren einzelne Punkte nach bestimmten Gesetzen den Punkten der x-Achse zugeordnet sind. So stellt beispielsweise die Gleichung

$$y = x^2$$

das Gesetz dar, nach dem man zu einer Reihe bestimmt angenommener Werte der x, etwa

$$1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots.$$

die zugehörige Reihe der y, also

$$1, \tfrac{9}{4}, 4, \ldots.$$

finden kann.

Die Mengenlehre geht aber von einem höchst allgemeinen Funktionsbegriff aus, wonach jedem Einzelpunkt der Abszissenachse der Endpunkt einer „beliebig“ anzunehmenden Ordinate zugeordnet ist. Diese „willkürliche Funktion“ ist also gleichsam der Inbegriff der aktual unendlich vielen, verschiedenen Einzelgesetze, vermöge deren ihre Punkte über den aktual unendlich vielen Punkten einer auf der x-Achse ausgebreiteten, linearen Punktmenge als ihrer Basis konstruiert gedacht werden.

An diesem höchst willkürlichen Funktionsbegriff, für den schon die „Stetigkeit“ bei sonst ganz beliebigem Verlauf des Kurvenzuges eine spezielle Voraussetzung ist, betätigt sich nun die Mengenlehre; und da sie so von Beginn an von allen Fesseln hemmender Gesetze frei und außerdem der Begriff der linearen Punktmenge der mannigfachsten Variationen fähig ist, ist eine schier unabsehbare Verästelung und Verfeinerung des Funktionsbegriffs möglich.

In dieser Sphäre ersinnt man Funktionen mit sich häufenden Absonderlichkeiten, man türmt immer neue Komplikationen übereinander, und dieser reich verzweigten und kunstvoll verflochtenen Ornamentik des Funktionsbegriffs widmet man die scharfsinnigsten Untersuchungen einer raffinierten, abstrakten Logik. Indem man auf diese Funktionen weiterhin die Methoden der Differential- und Integralrechnung anwendet, findet man eine Fülle neuer Einzelprobleme, die, wenn sie sich auch großen, leitenden Gesichtspunkten unterordnen, in fast unerschöpflicher Zahl auseinander hervorgehen.

So spinnt die Mengenlehre im Reich der immanenten Logik ihre Gedanken zu immer feineren Fäden aus; darin hat sie Bewundernswertes geleistet; darin besteht ihre Fruchtbarkeit. Gewiß muß immer und überall die freischaffende Logik, über das zunächst anschaulich Gegebene hinausgehend, Entdeckungen in bisher unbetretenem Lande zu machen suchen; das freie Spiel ihrer Kräfte zu erproben, wird ihr niemand verwehren. Aber — so sind wir insbesondere angesichts der heutigen Zeitlage sicher berechtigt zu fragen — hat das Überwiegen mengentheoretischen Forschens nicht die Gesamtorientierung mathematischen Denkens zu stark beeinflußt, so daß die Resultierende dieser geistigen Kräfte nicht nach derjenigen Richtung hinweist, die das Endziel aller Mathematik sein muß? Darf man einen Baum „fruchtbar“ im rechten Sinne nennen, wenn sich seine Krone zu einem immer dichteren Geflecht immer feiner sich verästelnder Zweige entwickelt, wenn er die überschießenden Säfte nur für sein eigenes Wachstum verbraucht, ohne für die Allgemeinheit, die ihn pflanzte und pflegte, Früchte hervorzubringen?

V.

Kehren wir nach dieser Abweichung vom Wege zu unserer Hauptfrage zurück. Wie wir soeben gehört haben, erhebt die Mengenlehre den Anspruch, das „Fundament der gesamten Mathematik“ zu sein, und sie hofft bestimmt, die ihr damit zufallende Aufgabe einer sicheren Fundierung der Mathematik in absehbarer Zeit vollenden zu können.

Daß die Mengenlehre in der von Cantor geschaffenen Form doch noch nicht so nahe vor der Erreichung dieses Zieles steht, wie es äußerlich den Anschein haben mag, darüber belehrt uns das erst vor zwei Jahren erschienene Buch von Weyl über „Das Kontinuum“, das den Untertitel trägt: „Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis“, und dessen Verfasser, der nach seinen eigenen Worten „durch Tradition“ in den „heute in der Mathematik zur unbedingten Herrschaft gelangten Gedankenkomplex“ der Mengenlehre „eingesponnen“ gewesen ist, sich zu einer anderen Auffassung über die Mengenlehre durchgerungen hat, die er nun mit rückhaltloser Offenheit vertritt.

Schon im Vorwort sagt er, er sei der Meinung, daß „das Haus der Analysis“ „zu einem wesentlichen Teile auf Sand gebaut ist“, und er betont ausdrücklich, daß er „gern nicht bloß auf den Kathedern, sondern auch von allen Studierenden verstanden sein“ möchte, „die mit den heute gelehrten ‚strengen‘ Grundlagen der Analysis bekannt geworden sind“.

Das Buch enthält vieles, das den Philosophen interessieren wird, setzt aber in manchen Teilen mathematische Vorkenntnisse, besonders solche aus der Mengenlehre und daneben einige aus der Theorie der reellen Funktionen voraus.

„Elementare Geometrie, Arithmetik, rationale Algebra“, sagt Weyl, „diese Hauptteile des mathematischen Gebäudes sind in gutem Stand; nicht so aber die Analysis und die Mengenlehre“. „Die vielgerühmte Kritik, welche das 19. Jahrhundert an den Grundlagen der klassischen Analysis geübt hat, war berechtigt, wie niemand bestreiten wird; und gewiß ist durch sie ein ungeheurer Fortschritt in der Strenge des Denkens bewirkt worden. Was man aber positiv an die Stelle des Alten gesetzt hat, ist, wenn man den Blick auf die letzten Prinzipien richtet, unklarer und anfechtbarer als dieses — so wenig daran zu zweifeln ist, daß der größte Teil des von der modernen kritischen Forschung Erarbeiteten sich bei einer endgültigen Fundierung der Analysis von neuem als Bauzeug verwerten läßt.“ „Die große Aufgabe, welche seit der Pythagoreischen Entdeckung des Irrationalen gestellt ist, das uns (namentlich in der fließenden Zeit und der Bewegung) unmittelbar anschaulich gegebene Stetige nach seinem in »exakten« Erkenntnissen formulierbaren Gehalt als Gesamtheit diskreter »Stadien« mathematisch zu erfassen, dieses Problem ist trotz Dedekind, Cantor und Weierstrass heute so ungelöst wie je.“

Nach Weyl ist der Begriff der unendlichen Menge selbst, der von Cantor gerade für die Lösung dieses Problems geschaffen worden ist, philosophisch nicht unangreifbar. „Die Vorstellung der unendlichen Menge als einer durch unendlich viele einzelne willkürliche Wahlakte zusammengebrachten, kolligierten und nun vom Bewußtsein als Ganzes überblickten »Versammlung« ist unsinnig[1]; die »Unerschöpflichkeit« liegt im Wesen des Unendlichen.“

Weyl behauptet weiter, daß sich „unsere heutige Analysis auf Schritt und Tritt“ in logischen Zirkelschlüssen bewege, und daß diese durch die „nebelhafte Natur“ des üblichen Mengenbegriffs und des „völlig vagen“ Funktionsbegriffs, wie er „seit Dirichlet in der Analysis kanonisch geworden“ ist, immer nur „verhüllt“ würden. Dieser circulus vitiosus ist nach ihm „nicht etwa“ nur „ein leicht zu beseitigender formaler Fehler im Aufbau der Analysis“, sondern von „fundamentaler Bedeutung“. „Je deutlicher man sich“ „das logische Gewebe der Analysis zur Gegebenheit bringt“, „um so klarer wird es, daß bei der heutigen Begründungsweise sozusagen jede Zelle des gewaltigen Organismus von diesem Gift des Widerspruchs durchsetzt ist; und daß eine durchgreifende Kontrolle nötig ist, um hier Abhilfe zu schaffen.“

So ist nach Weyl der „Abgrund zwischen dem Endlichen und Unendlichen“, den auszufüllen sich die Mengenlehre als Ziel gesetzt hatte, nur „scheinbar ausgefüllt“, und der Gegensatz zwischen Diskretem und Stetigem besteht immer noch „in seiner klaffenden Tiefe“.

Was ist bei solcher Sachlage, solch scharfen Gegensätzen in den fundamentalsten Fragen der Infinitesimalanalysis zu tun?

[1]) Man vergleiche hiermit auch die Auffassung Brouwers in seiner in der Einleitung genannten Abhandlung.

Dürfen wir nach dem Gehörten hoffen, daß den Anhängern der Mengenlehre in Zukunft gelingen wird, was ihnen trotz jahrzehntelanger, ausgedehntester und vertieftester Anstrengungen unter Aufbietung alles Scharfsinns nicht gelingen wollte [1]?

So stehen sich also an den Grundlagen der Mathematik, die zugleich die der Philosophie, ja des Denkens überhaupt, sind, die Meinungen der Geister heute schroff gegenüber. Jeder Versuch, über diesen Angelpunkt der Wissenschaft zu einer Einigung zu gelangen, ist aber nicht allein von theoretischem Wert. Nicht nur das Interesse der mathematischen und philosophischen Forschung erfordert hier eine Klärung, sondern auch und vor allem das Interesse der nach den Quellen der Wissenschaft dürstenden Jugend macht es der Gegenwart zur dringendsten Pflicht, erst einmal einen sicheren, unangreifbaren Ausgangspunkt zu gewinnen. Denn der Widerstreit der Auffassungen hierüber dringt mit Notwendigkeit bis tief in die einführenden Lehrbücher der Analysis, und die Unsicherheit und Verschiedenartigkeit der Stellungnahme der Verfasser zu den Grundfragen erschwert und verleidet dem Jünger der Wissenschaft naturnotwendig das Eindringen in das Reich der höheren Mathematik.

Wer ferner als Tieferblickender erkennt, welche wichtige Rolle der Analysis in Verbindung mit der Naturforschung und der Philosophie bei der inneren und äußeren Wiederaufrichtung des deutschen Volkes zufallen wird, wird die Bedeutung dieser Frage erst voll zu würdigen verstehen.

VI.

Nach dem Gesagten drängen sich uns starke Zweifel auf, ob heute, 250 Jahre nach Entdeckung der Infinitesimalanalysis und nach so vielen vergeblichen Mühen überhaupt noch ein Ausweg aus diesem Streit der Geister möglich ist.

---

[1]) Man vergleiche hierzu die Bemerkungen H. Poincarés in seinem Buche „Wissenschaft und Methode“ (übersetzt von F. u. L. Lindemann, Leipzig 1914) über die von Zermelo, Russell und Couturat in dieser Richtung unternommenen Versuche.

Dennoch ist noch eine letzte Möglichkeit zu einer Einigung auf fester Basis vorhanden, wie ich im folgenden zeigen werde.

Die Mengenlehre selbst hat erst die Vorbedingungen dazu geschaffen. Es ist eben das Unvergängliche an ihr, daß sie eine geschichtlich notwendige Etappe in der Entwicklung von Mathematik und Philosophie darstellt, indem sie bei ihrem gewaltigen Drängen nach diesem Punkte hin die philosophischen Fundamente der Mathematik bis auf den Grund aufgewühlt und hierbei die Mittel zu einer letzten Klärung der Frage aus der Tiefe zutage gefördert hat.

Die Mengenlehre hat das Unendliche als zuerst Gegebenes gesetzt und wollte von ihm aus das Endliche, die Einheit, rein logisch ableiten. Das aktual Unendliche ist ihr zum logisch bestimmten Begriff geworden, mit dem sie geglaubt hat operieren und ein festes Gebäude aufführen zu können. Es ist ihr nicht gelungen. Was bleibt uns anderes übrig, als das Endliche, die Einheit, zum Ausgangspunkt zu nehmen und nach dem Unendlichen als letztem Ziel hinzustreben?

Der fundamentalste Begriff neben dem der unendlichen Menge selbst ist für die Mengenlehre der der „Abzählbarkeit“. Cantor nennt eine gegebene unendliche Menge „abzählbar“, wenn sich die einzelnen Elemente der Menge, die man sich vorerst als einen ungeordneten Haufen von Dingen vorstellen mag, nach irgend einem Gesichtspunkte in eine Reihe so anordnen lassen, daß jedes Element nunmehr einen bestimmten Platz einnimmt, daß es also ein erstes, zweites, drittes usw. Element gibt [1]).

Für eine wirklich „abgezählte“ unendliche Menge hat nun die Mengenlehre den charakteristischen Begriff der „Folge“ geprägt, der von ebenso fundamentaler Bedeutung ist wie der der Menge selbst. Denn eine unendliche Menge „abzählen“

---

[1]) Der Vorgang ist im Konkreten allbekannt. Man denke an eine etwa nach der Größe in eine Reihe geordnete und dann „abgezählte“ Menge Menschen, etwa Soldaten oder Schüler, so daß jedem einzelnen eine bestimmte Rangnummer zukommt.

heißt nach dem Gesagten nichts anderes, als jedes einzelne Element der Menge einer der natürlichen, ganzen Zahlen zuordnen. Beim Abzählen einer Menge stützen wir uns aber nicht nur auf den Begriff der ganzen Zahlen an sich, sondern vor allem auch darauf, daß sie in ihrer natürlichen Anordnung gegeben sind, so daß man, von der Einheit als Urbegriff ausgehend, durch einen Gedankenschritt zur Zwei und durch fortgesetzte Wiederholung dieses Schrittes zu der unbegrenzten Reihe aller ganzen Zahlen gelangen kann. Es besteht also von Anbeginn eine Ordnung unter den ganzen Zahlen, eine Relation, ein bestimmtes Gesetz, das die scheinbar lose Reihe der Zahlen zu einer Zahlenkette zusammenschmiedet, aus der kein Glied herausgerissen werden kann.

Diese Reihe der Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung ist aber selbst eine „Folge", sie ist die „Urfolge", die man als schon vorhanden voraussetzt, sobald man damit beginnen will, dem völlig unbestimmten Begriff der unendlichen Menge irgend einen begrifflich exakten Inhalt zu geben.

Gegen die gegenteilige Auffassung der Mengentheoretiker, denen die Menge, das Unendliche, als das Primäre, dagegen die bestimmte Zahl, das Endliche, als das Sekundäre erscheint, haben wohl immer Bedenken bestanden. Poincaré besonders hat immer wieder auf diesen Punkt hingewiesen[1]) und betont, daß die Reihe der ganzen Zahlen mit dem sie verknüpfenden Gesetz als Grundlage aller Mathematik zu betrachten sei.

Und wieder ist es Weyl, der in seinem schon zitierten Buch über „Das Kontinuum" sich scharf auf den der Mengenlehre entgegengesetzten Standpunkt stellt. Ihm ist „in Übereinstimmung mit Poincaré" „die Vorstellung" „der natürlichen Zahlenreihe ein letztes Fundament des mathematischen Denkens". Den wiederholten elementaren Denkvorgang des Fortschreitens von einer Zahl zu der auf sie folgenden bezeichnet er als den Prozeß der „Iteration" und dieser ist ihm — worauf auch Poincaré immer wieder hingewiesen hat — äquivalent mit der logischen Schlußweise

[1]) Vgl. besonders „Wissenschaft und Methode".

der „*vollständigen Induktion*“, des Schlusses von n auf $n+1$.

„Die alte Erklärung der Mathematik“, sagt Weyl, „als der Lehre von Zahl und Raum hat man, der neueren Entwicklung unserer Wissenschaft entsprechend, für zu eng befunden; dennoch ist kein Zweifel, daß auch in solchen Disziplinen wie der reinen Geometrie, der Analysis situs, der Gruppentheorie usw. zu den behandelten Gegenständen von vornherein die natürlichen Zahlen in Beziehung gebracht werden.“

VII.

So wird denn eine *Grundlegung der Mathematik* nach philosophischen Prinzipien mit den *ganzen Zahlen* als „*Urbegriffen*“, speziell mit der *Einheit*, und mit der Beziehung des Aufeinanderfolgens zweier Zahlen als dem „*Urgesetz*“ beginnen müssen.

Nun kennt ja, wie oben hervorgehoben, die Mengenlehre für eine „abgezählte“ Menge, also eine solche, deren Einzelelemente a_i der Reihe nach den natürlichen Zahlen zugeordnet sind,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots,$$

den Begriff der „*Folge*“. Führen wir für diesen Begriff — den in seiner fundamentalen Bedeutung für die Analysis herausgearbeitet zu haben eben ein besonderes Verdienst der Mengenlehre ist — den *Anfangsbuchstaben des Wortes* „*Folge*“ in stilisierter Form

$$f$$

als *Symbol* ein, so können wir in leicht verständlicher Weise für die oben angegebene „Folge“ schreiben:

$$f a_n$$

(gesprochen: „Folge a_n“), wo das Symbol „f“ die gedankliche Operation des immer wiederholten Fortschreitens von einer

Zahl n zur nächstfolgenden, $n+1$, beginnend mit der Einheit, versinnbildet.

Fassen wir weiter dieses Symbol in seiner Reinheit auf und setzen wir statt der Reihe der Elemente a_n die Reihe der ganzen Zahlen selbst, so symbolisiert das Zeichen

$$\int_1^\infty n$$

die „Urbegriffs“-Reihe der ganzen Zahlen,

$$1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots,$$

also das letzte Fundament der Mathematik und zugleich das „Urgesetz“, wie dieses die unendliche Folge der natürlichen Zahlen aus dem Urbegriff, der Einheit, erzeugt.

So stehen wir am Urquell nicht nur aller Mathematik, sondern am Urgrund des Denkens überhaupt; denn die Konzeption eines Bewußtseinsinhalts als einer Einheit und der Prozeß des Überganges zu einem neuen Denkgegenstand sind die Urvorgänge alles begrifflichen Denkens.

Und wie das Zeichen „1“ die in sich ruhende, die statische Einheit, den Grundbegriff der alten Mathematik darstellt, so ist das Zeichen $\int$, das die impulsartig immer um eine Einheit wachsende, die dynamische Einheit versinnbildet, der Grundstein der neueren Mathematik, der Mathematik des Werdens[1]).

VIII.

Wie mit Naturnotwendigkeit scheint die Entwicklung der letzten Jahrzehnte in der Fundierung des mathematischen Gebäudes auf dieses Symbol als Abschluß hingedrängt zu haben.

---

[1]) Das Zeichen an sich, das Symbol der sich taktmäßig immer wiederholenden „Thesis“, könnte man mutatis mutandis als die „Uhr“ im Sinne Galileis, ganz allgemein als das Urbild des „Rhythmus“ bezeichnen.

Daß dieses Symbol aber nicht nur der Endpunkt einer abgeschlossenen Periode ist, sondern zugleich der Ausgangspunkt einer heute mehr als je zu fordernden einheitlichen Auffassung der mathematischen Analysis werden kann und, da es den einzig möglichen Weg zeigt, es notwendig auch werden wird, will ich im folgenden noch durch Hervorheben einiger wesentlicher Punkte deutlich machen[1]).

Der wichtigste Grundbegriff der Infinitesimalanalysis neben dem Begriff der Funktion und von diesem untrennbar, ist der des Grenzwertes, den wir zu Beginn schon kennen gelernt haben.

Betrachten wir z. B. die unendliche Folge von Größen

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^{n+1}},$$

in der der Wert jedes Gliedes gleich der Hälfte des vorhergehenden ist, so nähert sich das letzte Glied immer mehr dem Werte Null als Grenze. In der weiteren Reihe

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$$

strebt das Endelement nach dem Werte Eins als Grenzwert.

Das immer weiter fortschreitende Glied würde den Endwert Null bzw. Eins, dem es sich unbegrenzt nähert, erst nach unendlich vielen Schritten erreichen, erreicht ihn also in Wirklichkeit niemals genau.

Wir stehen hier vor dem alten Paradoxon, das der griechische Philosoph Zeno durch das Beispiel des nach seinem Ziele fliegenden Pfeiles und durch den Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte illustriert hat.

In der Mathematik symbolisiert man obigen Sachverhalt im allgemeinen so:

$$\lim_{n=\infty} a_n = b,$$

wo „lim“ eine Abkürzung des Wortes „limes“, d. h. Grenze, bedeutet.

---

[1]) Das Nähere werde ich später ausführen.

Daß an dieser Bezeichnungsweise mancherlei auszusetzen ist, ist in der Mathematik wohlbekannt. So erkennt man nach dem eben Gesagten, daß das zweite Gleichheitszeichen hier nicht genau in demselben Sinne zu nehmen ist, wie es in der Gleichung

$$1 + 1 = 2$$

gebraucht wird. Man hat deshalb seine Zuflucht dazu genommen, dem Begriff der „Gleichheit" eine modifizierte Bedeutung beizulegen und zwei Größen in der Analysis auch dann als „gleich" zu bezeichnen, wenn sie „beliebig wenig" voneinander verschieden sind. Sehen wir von einer Kritik der Bezeichnung „$n = \infty$" ab, so bleibt noch zu bemerken, daß man durch das Vorsetzen des Wortes „lim" das Vorhandensein des Grenzwertes gewissermaßen vorwegnimmt, während doch seine „Existenz" sowohl vom allgemein philosophischen Standpunkte aus in gewissem Sinne problematisch ist als auch mathematisch in vielen Fällen nicht von vornherein feststeht.

Erst in der letzten Zeit haben sich manche Mathematiker entschlossen, von der historisch gewordenen Grenzwertbezeichnung abzuweichen. Man bedient sich eben des Begriffs der „Folge" und ersetzt das Gleichheitszeichen sehr charakteristisch durch den Zenonischen Pfeil. Man schreibt

$$a_n \rightarrow b$$

und spricht: „Die Folge der a_n strebt gegen den Grenzwert b" [1]). So bleibt es dahingestellt, ob der Grenzwert wirklich erreicht wird, man bleibt in der Frage der philosophischen „Existenz" des Grenzwertes auf neutralem Boden.

Mit der Einführung des Begriffes der „Folge" und des Pfeiles ist in der neuen Schreibweise mit dem Gleichheitszeichen auch die Bezeichnung „lim" fortgefallen, aber man hat an die Stelle dieser den mathematischen Prozeß andeutenden Abkürzung bisher nichts Positives gesetzt, sondern sich

---

[1]) Man vgl. etwa K. Knopp, „Funktionentheorie", I, S. 18 (Leipzig 1918), der diese Symbolisierung gegenüber der alten als „äußerst prägnant" bezeichnet, und E. Landau, „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie", S. 6 (Berlin 1916).

damit begnügt, das charakterisierende Wort „Folge“ in den Text zu verlegen. Damit fehlt in der Bezeichnung

$$a_n \longrightarrow b$$

für das Auge ein deutlicher Hinweis, der das Denken sofort an die vorzunehmende Operation erinnert; es fehlt dem Gebilde gleichsam der Kopf. Schreibt man deshalb

$$\mathfrak{f}\, a_n \longrightarrow b$$

(gesprochen „Folge a_n strebt nach b“), so ist dem Denken und der Anschauung zugleich in allen Punkten Genüge getan. In dieser Schreibweise lauten also die beiden oben angegebenen Beispiele:

$$\mathfrak{f}\, \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$$

und

$$\mathfrak{f}\, \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1.$$

Mit dieser sinnfälligen Bezeichnung dürften nun auch die Bestrebungen mancher Autoren, den Begriff des Grenzwertes und den damit zusammenhängenden der Konvergenz in den einführenden Lehrbüchern durchgängig auf den Begriff der „Folge“ zu basieren — ich erinnere hier besonders an die „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“ von G. Kowalewski [2. Auflage, Leipzig 1919][1]) —, eine wesentliche Förderung erfahren zum Nutzen der Jugend wie auch im Interesse einer einheitlichen Begründung der Analysis.

Der Grenzwertbegriff kommt in der Analysis besonders häufig als die „Summe“ einer „unendlichen Reihe“ im spezifischen Sinne vor. Man sagt, die Summe z. B. der folgenden Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots$$

---

[1]) Man vgl. auch A. Pringsheim: „Vorlesungen über Zahlen und Funktionenlehre“, Bd. I, 1: „Reelle Zahlen und Zahlenfolgen“ (Leipzig 1916).

sei gleich Eins und meint damit den Grenzwert, dem die Folge der Summen:

$$\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$
$$\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zustrebt, wenn die Anzahl der Summanden in den Gliedern dieser Folge, bei jedem Schritt um eins wachsend, unbegrenzt groß wird. In der gewöhnlichen Bezeichnungsweise würde man schreiben

$$\lim_{n=\infty}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\cdots\right)=1,$$

allgemein

$$\lim_{n=\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots)=s.$$

Über diese Bezeichnungsweise wäre außer dem soeben allgemein über die Grenzwertbezeichnung Gesagten noch hinzuzufügen, daß daran nicht ohne weiteres deutlich erkennbar ist, wie der Grenzwert der unendlichen Reihe als Grenze der Einzelsummen aufzufassen ist.

Mittels des Symbols der Folge $\fint$ kann man nun, indem man es mit einem „S“ als dem Anfangsbuchstaben des Wortes Summe kombiniert, für den Begriff der „Summenfolge“ das Zeichen

$$\sum\!\!\!\!\int$$

einführen; die letzte Grenzwertbezeichnung lautet dann in korrekter Form

$$\sum\!\!\!\!\int a^n \longrightarrow s.$$

Man hat also neben das Symbol nur das sogenannte allgemeine Glied a_n hinzuschreiben. Will man nun den Grenzwert der obigen speziellen Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

symbolisieren, so schreibt man mittels des allgemeinen Gliedes $\frac{1}{2^n}$ dieser Reihe:

$$\oint \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

und hat damit eine mathematisch exakte, philosophisch unangreifbare und zugleich kurze und augenfällige Bezeichnung gewonnen.

Auf dem Begriff der Folge ruht weiter die ganze moderne Theorie der Irrationalzahl, das zentrale Problem der Theorie des Zahlbegriffes, das, wie oben gezeigt, trotz aller Bemühungen der letzten Jahrzehnte noch heute als nicht geklärt gilt.

Es ist das Charakteristische an den neuen Theorien der Irrationalzahl von Weierstrass bis Cantor, daß man diese als definiert auffaßt durch eine Folge von Rationalzahlen, und diese „Folgen“ selbst, die von Cantor „Fundamentalreihen“ genannt werden, als ursprüngliche, fundamentale, neben den rationalen Zahlen ein neues Reich von Größen konstituierende Zahlgebilde ansieht, auf die nun die bei den gewöhnlichen Zahlen üblichen Rechnungsregeln sinngemäß zu übertragen sind. Den Kern dieser Auffassung gestattet nun wieder das Symbol der „Folge“ in sinnfälliger Weise wiederzugeben, indem man etwa statt der Bezeichnung

$$(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots)$$

wieder schreibt:

$$\oint r_n,$$

die einerseits auf die vorzunehmende Operation hinweist, andererseits dem Geist durch die Anschauung den Eindruck eines konkreten, in sich abgeschlossenen Begriffs von bestimmtem Charakter suggeriert[1].

[1]) Meine eigene, nach dem bisher Gesagten und dem im folgenden noch zu Sagenden wohl schon erkennbare, sich dem System zwanglos einordnende Auffassung und „Lösung“ des Problems des Irrationalen werde ich später entwickeln.

IX.

Wie auch die übrigen Grundbegriffe der Infinitesimalmathematik mit dem Begriff der „Folge“ zusammenhängen, wie also der ganze gewaltige Bau der neueren Mathematik auf der Säulenreihe der ganzen Zahlen ruht, das soll nun kurz durch Angabe der entsprechenden Symbole verdeutlicht werden.

Die Grundlegung des Funktionsbegriffs, um den sich die gesamte Infinitesimalmathematik gruppiert, wird am einfachsten ausgehen von einer Folge von Ordinaten, die sich über einer Folge von Werten der Variablen x als Abszissen erhebt, wie ja in der Theorie der reellen Funktionen, wie sie durch die Mengenlehre zur Entwicklung gebracht worden ist, der Begriff der „Ordinatenmenge“ schon üblich ist[1]). Das Symbol der „Ordinatenfolge“ y_n wäre:

$$\oint y_n.$$

Der Begriff der Tangente einer Kurve ist der Grundbegriff der Differentialrechnung. Die Richtung der Tangente wird bestimmt durch den „Differentialquotienten“. Das „Differential“ wird als eine nach Null strebende Folge von Differenzen, als „Differenzen-Nullfolge“:

$$\oint a_n \rightarrow 0$$

symbolisiert, und der Quotient zweier solcher Folgen, der Differentialquotient, wird analog durch den Quotienten zweier solcher Nullfolgen dargestellt:

$$\oint \frac{y_n}{x_n},$$

die „synchron“ fortschreitend die Tangentenrichtung analytisch als Grenzwert zweier Differenzenfolgen ergeben.

Der Begriff des Flächeninhalts ist der Grundbegriff der Integralrechnung.

---

[1]) Man vgl. etwa F. Hausdorff, „Grundzüge der Mengenlehre“, S. 431 oder C. Carathéodory, „Vorlesungen über reelle Funktionen“, S. 418.

Im einfachsten Falle betrachtet man hier ein Flächenstück, das als Grundlinie ein Stück der x-Achse, als Seitenbegrenzung zwei Ordinaten hat und nach oben hin durch eine gegebene Kurve abgeschlossen ist.

Durch Teilung des Intervalls auf der x-Achse wird dieses Flächenstück durch eine Summe von Rechtecken R ersetzt, und durch schrittweise Verfeinerung der Intervallteilung ergibt sich eine Folge von Rechtecks-Summen, deren Grenzwert der gesuchte Flächeninhalt F ist:

$$\mathfrak{f}\, R_i \longrightarrow F$$ [1]

(gesprochen: „Summenfolge R_i strebt nach F").

Nach Leibniz wird der Flächeninhalt F, das „Integral", durch

$$F = \int y\,dx$$

symbolisiert, wo das Zeichen „$\int$" den stilisierten Anfangsbuchstaben des Wortes „Summe" darstellt. Wir haben also die Beziehung

$$\mathfrak{f} \longrightarrow \int;$$

das altehrwürdige, vor den sonstigen mathematischen Symbolen durch seine elastisch geschwungene Gestalt so charakteristisch hervortretende Integralzeichen ordnet sich demnach zwanglos der Symbolik der „Folge" ein.

Das $\int$-Zeichen, das Leibniz statt der Bezeichnung

„*omn*"

(Abkürzung für „omnia") setzte, hob den Begriff des Integrals für das Auge erst in der rechten Weise hervor, so daß es zum Feldzeichen im Siegeszuge der neuen Mathematik wurde.

Umgekehrt erscheint das Symbol der Folge als eine organische Fortbildung des Leibnizschen Symbols, womit also auch in der äußeren Form die geschichtliche Kontinuität gewahrt bleibt. So sieht sich das bisher in erhabener Höhe einsam thronende Integralsymbol unvermutet von einer ganzen Gruppe verwandter Symbole umgeben, die seiner Würde aber

[1] Näheres über die Symbolisierung dieses Begriffs werde ich später sagen.

keineswegs Abbruch tun, sondern im Gegenteil seine wie seines Schöpfers Größe nun erst ins rechte Licht setzen werden. Die ungeahnte Abwandelbarkeit des Zeichens, die bisher unausgenutzt geblieben ist, wird ihm nunmehr zu neuem, umfassenderem Wirken verhelfen.

In den Begriffen des Grenzwertes an sich, der unendlichen Reihe, des Differentials und des Integrals sind die wesentlichsten Stammbegriffe der neueren Mathematik aufgezählt und als Ausstrahlungen ihres gemeinsamen Kerns, des Begriffs der „Folge“, versinnbildlicht.

Die Möglichkeiten der Verwendung dieses Ursymbols der Mathematik im einzelnen sind unabsehbar; es wird sich bald zeigen, welche Triebkraft ihm innewohnt nicht nur für die Vereinheitlichung der Grundlegung, sondern auch zur Erfassung neuer wie zur Vereinfachung alter Probleme. Ja, sein Einfluß wird sich weit über die Grenzen der Infinitesimal-Analysis hinaus bemerkbar machen.

Hier soll nur noch ein letzter Begriff der Analysis genannt werden, dessen fundamentale Bedeutung — nicht allein für die Mathematik — unmittelbar neben dem der einfachen Folge demnächst zutage treten wird.

Neben die immer in einer Richtung fortschreitende, „monotone“ Folge tritt die von Schritt zu Schritt ihre Richtung wechselnde, die oszillierende Folge, oder kurz die „Pendelfolge“, z. B.:

$$+1, -2, +3, -4, + \cdots.$$

Wir symbolisieren sie etwa durch:

$$\int\!\!\!\!\!\!\rightleftarrows n$$

oder noch besser durch

$$\int\!\!\!\!\!\!\sim n\ ^{1)}.$$

[1] Das Symbol für sich charakterisiert den Vorgang des Oszillierens, des Pendelns, der Wellenbewegung, allgemein das „Pulsieren“ in noch tieferem Sinne als das Zeichen der einfachen Folge. Statisch aufgefaßt kann es als Symbol der Spiegelung, der „Symmetrie“ gelten.

Dann könnte z. B. die „oszillierende unendliche Reihe“ als „oszillierende Summenfolge“ das Symbol erhalten:

$$\int\!\!\!\!\!\mathfrak{S},$$

mit der der fundamentale Begriff der „oszillierenden Funktion“ — das Gegenstück der „monotonen“ Funktion — eng verwandt ist.

Wenn ich anhangsweise noch den Begriff des „unendlichen Produkts“ und seine präzise Darstellung als „Produktfolge“:

$$\int\!\!\!\!\!\mathfrak{P}\,(1 - a_n) \longrightarrow b$$

anführe, ferner an die dem „Doppelintegral“ analoge Symbolisierung der „*Doppelfolge*“ und schließlich an den äußerst fruchtbaren Begriff der „*Folge von Funktionen*“, der „*Curvenfolge*“, erinnere, so wird erkennbar, welche unbegrenzten Möglichkeiten der Begriff samt dem Symbol der „Folge“ zunächst im Sinne einer klärenden Umbildung und danach auch einer Fortentwicklung der Analysis darbietet.

X.

Ich gehe nun zu dem über, was ich *die Psychologie des neuen Symbols* nennen möchte. Wie die Wissenschaft die ihr adäquaten Begriffe aus sich heraus entwickelt, so beeinflussen rückwirkend die einmal geschaffenen Begriffe die Entwicklung der Wissenschaft; und die Begriffe der Mathematik finden ihre prägnanteste Verkörperung in ihren Symbolen. Und wenn, wie der Physiker *Hertz* mit Bezug auf die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik gesagt hat, „den mathematischen *Formeln* bisweilen selbständiges Leben und eigener Verstand innezuwohnen“ scheint — einen ähnlichen Gedanken hat vor ihm *Gauß* ausgesprochen —, so gilt Analoges, wie man seit *Leibniz*’ Symbolik der Analysis weiß, auch von den *Symbolen* der Mathematik.

In welcher Richtung das Symbol der „Folge“ in Zukunft seine charakteristischen Wirkungen äußern wird, wenn man sich seiner im rechten Geiste bedient, das soll nun noch in kurzen Umrissen angedeutet werden.

Wie das Symbol des Begriffs der „Folge" die Grundlegung der höheren Mathematik vereinfacht, indem es die gemeinsame Wurzel der vielfältigen Begriffe ans Tageslicht bringt, und wie es damit Klarheit schafft bis auf den Grund, wie daneben das Symbol der Folge dem unfruchtbaren Streit um das „aktual" Unendliche, das sich nunmehr deutlich für den Aufbau der Infinitesimalanalysis als unwesentlich, als entbehrlich erweisen dürfte, ein Ende zu machen geeignet sein und so der Auffassung zum Siege verhelfen wird, daß das Endliche, die Thesis der Einheit, als Ursprung aller exakten Wissenschaft zu betrachten ist, das wird aus dem bisher Gesagten schon erkennbar geworden sein.

Erinnern wir uns weiter der in mathematischen Büchern üblichen Schreibweise einer „Folge", etwa einer „unendlichen Reihe", z. B.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

so findet man in analogen Fällen manchmal neben der Reihe noch erläuternd das „allgemeine Glied", hier $\frac{1}{n!}$, angegeben. Eben dieses brauchen wir für die Bezeichnung der Reihe mittels des Symbols der Folge:

$$\int\!\!\!\!\!\!\!-\ \frac{1}{n!}.$$

Das allgemeine Glied aber bringt gerade das zum Ausdruck, was das Wesentliche an der unendlichen Reihe ist: Es ist der Repräsentant des zugrunde liegenden Gesetzes, das die unendliche Menge der losen Einzelglieder des Gebildes erst zu einem einheitlichen, in sich geschlossenen Organismus umschafft.

Und auch in dem Falle einer „beliebigen" Folge

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

in Zeichen

$$\int\!\!\!\!\!\!\!-\ a_n,$$

wird die Aufmerksamkeit unwillkürlich mehr auf das zugrunde liegend gedachte Gesetz als auf die lockere Reihe der Einzelglieder eingestellt. — So führt das Symbol den Geist mit sanfter, aber unwiderstehlich wirkender Gewalt von dem Wege des Willkürlichen, des Beliebigen, des Individuellen zurück auf die Bahn der Bestimmtheit und Gebundenheit durch das leitende und aufbauende Gesetz.

Auf diesem Wege wollen wir uns noch eine kurze Strecke weiterführen lassen. Zunächst ergibt sich nun ganz naturgemäß eine in sich abgeschlossene Gruppe von gesetzmäßigen Folgen aus ganzen Zahlen

$$\int n, \quad \int n^2, \quad \int n^3, \quad \ldots;$$

$$\int 2^n, \quad \ldots \quad \int 10^n \quad \ldots;$$

$$\int n! \equiv \int\!\!\!\pi\, n$$ [1],

die der Idee nach die Grundfunktionen der Analysis, die ganzen rationalen und die Exponentialfunktionen und als Abschluß die sogenannte Gamma-Funktion enthalten.

Diesen als wachsenden, nach Unendlich strebenden Folgen steht als Gegenbild eine Gruppe abnehmender, nach Null strebender Folgen zur Seite:

$$\int \frac{1}{n}, \quad \int \frac{1}{n^2}, \quad \int \frac{1}{n^3}, \quad \ldots;$$

$$\int \frac{1}{2^n}, \quad \ldots \quad \int \frac{1}{10^n}, \quad \ldots;$$

$$\int \frac{1}{n!}$$ [2],

die die gesetzmäßigen Unterteilungen eines Einheitsintervalls darstellen, darunter als besonders bemerkenswert

---

[1]) Man kann diese Folgen als „Urmotive" bezeichnen.

[2]) Die Stärke des Strebens einer Folge nach ihrem Genzwert, den Grad ihrer „Konvergenz", kann man gegebenenfalls vergleichsweise durch Fiederung des Pfeiles andeuten, z. B.

$$\int \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \int \frac{1}{n!} \ggg\!\!\rightarrow 0.$$

die „harmonische“ Teilung $\int \frac{1}{n}$ und die Exponentialteilungen, speziell die in der Mengenlehre immer wiederkehrende dyadische Teilung $\int \frac{1}{2^n}$ nebst der natürlichen Dezimalteilung $\int \frac{1}{10^n}$, und schließlich die Fakultätenteilung $\int \frac{1}{n!}$. Diese Intervallteilungen werden mit Vorteil Verwendung finden sowohl bei der Bildung der normalen Funktionen als einer sich durch Unterteilung des Einheitsintervalls der Abszisse immer mehr verdichtenden Folge von Ordinaten wie bei der Herleitung des Differentialquotienten und des Integrals.

Die Gruppe dieser „Nullfolgen“ beginnt mit derjenigen Folge, die im Keime den Logarithmus enthält, und endigt mit der Folge der Zahl „e“, die die Grundzahl der höheren Mathematik ist. So wird unmittelbar deutlich, wie die Exponentialfunktion e^x, die „Kurve des organischen Wachstums“, den eigentlichen Fortschritt und den Mittelpunkt der neueren Mathematik, der Mathematik des Werdens, darstellt.

Nach dem soeben Gesagten wird weiter erkennbar sein, daß mit der konsequenten Einführung des Begriffs und des Symbols der „Folge“ die neuerdings unternommenen Versuche, das Gebäude der Infinitesimalmathematik auf einheitlicher Grundlage nach allgemeinen, philosophischen Prinzipien aufzubauen, in ein neues und Erfolg verheißendes Stadium treten werden.

Das wird füglich nicht anders geschehen können, als indem man nach Grundlegung des Zahlbegriffs von den einfachsten gesetzmäßigen Funktionen ausgeht und, nach dem Prinzip der Entwicklung induktiv fortschreitend, zu immer reicherer Entfaltung dieser Gedankengebilde gelangt. So verfährt die organische Natur außer uns und so entspricht es auch der naturgemäßen geistigen Entwicklung jedes Menschen. Jeder Versuch hingegen, den Begriff einer „beliebigen“ bzw. „willkürlichen“ Funktion zum Ausgangspunkt für den Aufbau der Analysis zu wählen, ist von vornherein logisch angreifbar, und die damit schon am Eingang zum Reiche der Analysis unvermeidbaren Verschiedenheiten der Auffassung werden immer wieder Jünger der Wissenschaft vom Studium der Mathematik abschrecken, noch ehe sie Interesse gewinnen und festen Fuß haben fassen können. Eine einheitliche Führung wenigstens eine Strecke weit in das Land der Analysis hinein, ehe sich die Pfade verzweigen, wäre aufs dringendste zu wünschen. Das läge nicht nur im höchsten Interesse der jungen Mathematiker, sondern auch der jungen Philosophen und Naturforscher, die auf breiter, sicherer Straße dahinwandelnd die höhere Mathematik in ihren Grundzügen kennen lernen wollen, um sich danach recht bald ihren eigenen Aufgaben zuwenden zu können. Getragen von der auf wirklicher Kenntnis gegründeten Wertschätzung weitester Kreise würde die Mathematik an Lebenskraft immer mehr gewinnen und so erst ihre Wirksamkeit zum Segen der Allgemeinheit voll entfalten können.

Das Streben nach philosophisch korrekter Begründung und einheitlichem Aufbau der Analysis ist wohl so alt wie diese Wissenschaft selbst. Den umfassendsten Versuch dieser Art hat der französische Mathematiker Lagrange vor etwa 150 Jahren unternommen, doch blieb sein Kampf gegen das aktual Unendliche — denn um dieses handelte es sich auch damals — noch ohne dauernden Erfolg. Der Versuch, diese Frage mit Unterstützung des Symbols der „Folge“ zur Entscheidung zu bringen, wäre wohl der Mühe wert.

In seinem Buche über „Das Kontinuum“ spricht sich Weyl ausdrücklich dahin aus, daß, der „modernen Entwicklung der Mathematik“ entsprechend, „die speziellen algebraischen Konstruktionsprinzipien, von denen die alte Analysis ausging“, durch „allgemeine logische Konstruktionsprinzipien ersetzt werden“ müßten, die nach ihm „einerseits auf den Begriffen »und, oder, nicht, es gibt« beruhen“ — wie vor Weyl ähnlich schon der englische Mathematiker Russell betont hat — „anderseits auf den spezifisch mathematischen der Menge, der Funktion, der natürlichen Zahl (Iteration)“. Und er fügt gegenüber den Auffassungen mancher Mathematiker hinzu, die Aufstellung dieser Prinzipien sei „jedenfalls nicht eine Sache der Konvention, sondern der logischen Erkenntnis“.

So scheint sich hier also gerade der Zusammenarbeit von Mathematik und Philosophie noch eine dankbare und wichtige Aufgabe zu bieten, deren Lösung zugleich ein neuer Beleg dafür sein wird, daß Philosophie und Mathematik eine Einheit bilden, daß sie berufen sind, sich gegenseitig weitgehend zu stützen und zu fördern[1]).

XI.

Noch ein letzter und wichtiger Punkt darf hier nicht unerörtert bleiben, der sich bei konsequenter Verfolgung der Richtung, in die das Symbol der Folge weist, zu ergeben scheint. Den leitenden Gedanken hierfür können wir der letzten der vier Kantischen Kategorientafeln entnehmen, die die Stammbegriffe der Modalität „Möglichkeit, Wirklichkeit, Notwendigkeit“ aufweist. Wenn die mathematische Wissenschaft auch mit den Mitteln reinen Denkens ihr Gebäude aufführt, also alles auf der Grundlage mathematischer Begriffe logisch Mögliche als zu ihrem Bereich gehörig betrachten darf, so wäre es doch nicht recht, wenn sie diese rein logischen Konstruktionen als ihren letzten Zweck oder auch nur als ihre Hauptaufgabe betrachten wollte. Ganz abgesehen davon, daß ihr dann von außen her stets leicht der Vorwurf eines für die Allgemeinheit wenig wertvollen Gedankenspiels gemacht werden könnte, wäre zu befürchten, daß sie selbst, wie gerade die Geschichte der theoretischen Mengenlehre darzutun scheint, unheilbar an innerer Uneinigkeit kranken würde. Und was kann die Allgemeinheit gerade heute von einer im Prinzip abstrakt logisch orientierten Mathematik erwarten?

Darum darf die Mathematik nicht auf dieser Stufe stehen bleiben, sondern muß den weiteren Schritt tun, ihre logischen Konstruktionen mit der konkreten Wirklichkeit in Ver-

---

[1]) Meine Gedanken zur Lösung dieser Aufgabe, über die zu sprechen ich schon in meinen Vorlesungen Gelegenheit gefunden habe, werde ich demnächst veröffentlichen.

bindung zu setzen, sie muß im Kantischen Sinne „Transzendental“-Wissenschaft, auf die Erkenntnis der Außenwelt gerichtet sein. Diese Erkenntnis geht in zwei Stufen vor sich.

Wie alle Geistestätigkeit mit der „Anschauung“ der Außenwelt beginnt und wie die Anschauung die Führerin des Geistes auf seinen oft verschlungenen Pfaden ist, so muß die Rückkehr zur „Anschauung“ das nächste Ziel der heutigen Mathematik sein. Nun hat aber die Mathematik in den letzten Jahrzehnten immer wieder behauptet, die Anschauung, auch die kritisch geschulte, versage. Sie hat gewichtige Gründe für diese Auffassung vorgebracht und als Stütze für diese Behauptung vor allem die von Weierstrass entdeckte „Kurve“ angeführt, die, obwohl stetig, dennoch in keinem einzigen Punkte eine Tangente besitzt.

Trotzdem dürfte es nicht richtig gewesen sein, die Anschauung so völlig in Mißkredit zu bringen; nur da, wo das aktual Unendliche hineinspielt, beginnen die Widersprüche zwischen Denken und Anschauung, und es bleibt die Frage noch offen, ob es nicht besser wäre, zu sagen, daß das exakte Denken an gewissen Punkten seine Grenzen findet, anstatt daß man diese Grenzen überschreitet und danach etwa auftretende Widersprüche unter Hinweis auf die Mängel der „Anschauung“ aufrecht zu erhalten bestrebt ist. Wollte man sich entschließen, dem strengen Begriff der „Folge“ getreu das aktual Unendliche ganz zu vermeiden und nur mit logisch bestimmten Begriffen zu operieren, so dürfte kaum etwas übrig bleiben, was nicht der Anschauung zugänglich gemacht werden könnte[1]). Gewiß wird niemand den dahineilenden Flug abstrakt mathematischen Denkens auf Schritt und Tritt hemmen wollen, indem man es zu fortgesetzter Veranschaulichung in Ebene oder Raum nötigt. Aber die Möglichkeit, jeden Schritt und jedes gewonnene Resultat des Denkens mit dem sicheren Boden der Anschauung in klare Verbindung zu setzen, wird stets erhalten bleiben müssen. Letzte Instanz

[1]) Auf die hier und im folgenden angedeuteten Fragen, insbesondere auf den Begriff der „Anschauung“, werde ich später an anderer Stelle näher eingehen.

aller exakten Wissenschaft kann nur die Anschauung sein, ein Analogon des Kantischen Begriffs der „Erfahrung".

Von diesem Standpunkte aus wird der Tatbestand der Weierstrass-Kurve im Interesse der Rehabilitierung des Vertrauens in die Anschauung erneut diskutiert werden müssen[1]).

Doch auch auf der Stufe der „Wirklichkeit" darf die Mathematik noch nicht stehen bleiben. Letztes Ziel aller exakten Wissenschaft, auf das auch die Mathematik hinsteuert, muß die Feststellung des zeitlichen Verlaufs des Naturgeschehens in seiner Notwendigkeit, das Erkennen der Naturgesetze sein. Und auch diese werden sich wieder, da man ja die fließende Zeit durch eine neue Dimension neben denen der Räumlichkeit versinnbilden kann, in ihrer Bestimmtheit mit den Hilfsmitteln der „Anschauung", wenn man den Begriff weit genug faßt, dem Auge restlos vergegenwärtigen lassen müssen.

Mit dem Begriff der Anschauung ist endlich der philosophisch wie mathematisch gleich wichtige Begriff der „Existenz" aufs engste verknüpft; wir wollen auch diesen Begriff mit der Kantischen Kategorientafel der Modalität in Beziehung setzen. Jeder durch logisches Denken gebildete Begriff ist ein möglicher Gegenstand der Mathematik, er hat logische Existenz. „Bestimmtheit" ist neben innerer Widerspruchslosigkeit aber Voraussetzung dafür, daß man ein solches Gebilde als Grundlage oder als Baustein für eine mathematische Konstruktion benutzen darf. Diese Voraussetzungen sind beim aktual Unendlichen nicht erfüllt, und ein auf solch schwankendem Untergrunde errichtetes Gebäude, wie es etwa die Arithmetik der „transfiniten" Zahlen ist, wird niemals in das Stadium der eigentlichen Existenz treten können, es wird sich niemals mit der Wirklichkeit und der „Anschauung" in feste Beziehung setzen lassen, es bleibt ewig ein immanentes Geistesgeschöpf.

Jeder logisch widerspruchsfreie Begriff existiert der Möglichkeit nach, besitzt subjektive, potentielle Existenz;

---

[1]) Ich denke hier auch an die von H. A. Schwarz angegebene „Fläche ohne Inhalt".

jeder solche Begriff trägt aber das Streben nach objektiver, aktueller Existenz, nach Loslösung vom Geiste und Gestaltwerdung in der Außenwelt, nach Objektivierung, in sich, und das bedeutet bei den logisch bestimmten Begriffen der Mathematik eben Veranschaulichung im Raume und in der Zeit.

„Begriffe ohne Anschauungen sind leer." Ihr formaler Rahmen will sich mit Inhalt füllen. Die Mathematik würde auf einer Vorstufe der Existenz stehen bleiben, wenn sie nicht immer das Bestreben hätte, ihren Begriffen zu wirklichem Dasein in der Anschauung zu verhelfen und diese Stufe als die höhere gegenüber der ersten zu bewerten. Bei Anerkennung dieser Sachlage wird sie niemals in die Lage kommen, das rein logische Denken über die Anschauung zu setzen, sondern umgekehrt immer das Denken, wie es naturgemäß ist, an der Anschauung korrigieren. Alles, was der Möglichkeit der Veranschaulichung nicht genügt, wird so als noch nicht ausgereiftes mathematisches Erzeugnis, etwa als „logische Hypothese" zu bewerten und dementsprechend beim Aufbau des mathematischen Gebäudes auch nur mit Vorbehalt zu verwenden sein.

Das mathematische Denken wird schließlich bestrebt sein, die Gebilde, die es, angeregt durch die Anschauung, d. h. durch die Natur, gestaltet hat, in der Natur wiederzufinden, seine geistigen Ideen als Abbilder der ewigen Ideen und notwendigen Gesetze der Natur wiederzuerkennen. So erst erreicht der Begriff der „Existenz" seine höchste Stufe, und erst mit der Anwendung auf die Erkenntnis der Natur hat die Mathematik ihren höchsten Zweck erreicht.

Die Naturwissenschaft selbst gebraucht den Begriff der Existenz genau in der angegebenen Weise, wie z. B. die Entwicklung der Theorie der Atome lehrt. Die Existenz des Atoms blieb so lange eine Hypothese, als man es der Größe nach noch nicht mit der Umwelt in Vergleich setzen konnte. Erst in dem Moment, wo man die Größenverhältnisse des Atoms erkannte, wurde aus seiner hypothetischen eine reale Existenz. Man faßt also einen Begriff erst von dem Zeitpunkte ab als wirklich existierend auf, wo die Möglichkeit seiner Veranschaulichung gegeben ist. Die weitere Entwicklung der Theorie des Atoms ist ein Streben nach immer deutlicherer Veranschaulichung der inneren Struktur des Atoms, was gleichbedeutend damit ist, die Notwendigkeit seiner Existenz immer tiefer mit dem Ganzen der Natur zu verflechten.

Analog ist so die ganze Geschichte der Naturwissenschaft, wie sie sich immer von neuem von der Hypothese zur Wirklichkeit durchzuringen sucht, ein einziges großes Streben des Menschengeistes nach Anschauung, und daraus wird die Mathematik, wenn sie ihre wahre Aufgabe recht erfüllen will, ihre Lehre ziehen müssen.

XII.

Nachdem wir so den Weg durchmessen haben, der mit dem Ursprung der Mathematik beginnend uns bis zu einem Ausblick auf ihre letzten Ziele geführt hat, gewahren wir rückschauend, wie bedeutungsvoll an entscheidenden Punkten der Name Kants aufgetaucht ist. Kantische Grundanschauungen sind es in der Tat, durch die sich die Mathematik am ehesten von den ihr gerade im Hinblick auf die Erfordernisse der Gegenwart noch anhaftenden Mängeln wird befreien können.

Wählen wir als Mathematiker darum Kant zu unserm Führer, vertrauen wir uns unbedenklich dem Geiste seiner Philosophie an, so wie sie uns in ihrer geschichtlichen Gestalt überliefert ist:

Folgen wir dem Kant, der gelehrt hat, daß das bloße Denken nicht ungestraft die Grenzen des Endlichen überschreiten darf. Verbannen wir also aus der höheren Mathematik endgültig das aktual Unendliche, wo immer es sich eingeschlichen hat. Beugen wir ferner nach Möglichkeit von vornherein einer irrigen Auffassung des berechtigten „Infinitesimalen“ vor; denn zu leicht zieht das Wort und die entsprechenden Symbole den Geist immer wieder nach den Scheinbegriff des „aktual Unendlichen“ hin. Basieren wir deshalb die höhere Mathematik einheitlich auf den Begriff der „Folge“

und seines Symbols, um den Geist mit der Hilfe der Anschauung immer wieder nach der rechten Denkrichtung hinzulenken.

Folgen wir weiter dem Kant, der ein tief und fest fundiertes und nach großen Leitgedanken aufgeführtes „System“ aufgebaut hat. Nehmen wir als sichere Basis der Mathematik die Reihe der ganzen Zahlen. Vereinheitlichen und festigen wir zugleich die Grundlage, indem wir das gemeinsame Fundament der heute noch ohne Verbindung nebeneinander stehenden mannigfachen Symbole durch eine einheitliche Symbolisierung auch äußerlich erkennbar machen. Gehen wir beim Aufbau der Analysis unter möglichster Vermeidung alles Unbestimmten, Beliebigen, nach allgemeinen, aber ganz bestimmten Prinzipien des Denkens vor; verfahren wir also, wo irgend möglich, induktiv, statt deduktiv, synthetisch, statt analytisch[1]).

Halten wir uns ferner an den Kant der Transzendentalphilosophie, dem die Philosophie im wesentlichen Erkenntnistheorie ist, dem das Denken nicht Selbstzweck, sondern Mittel zur Erkenntnis der Außenwelt ist. Betrachten wir darum die Mathematik nicht so sehr als Übungsfeld reiner Logik, als vielmehr als Werkzeug zur Erforschung der Natur. Dann wird es nicht mehr geschehen, daß sich die reine Mathematik in wesentlichen Teilen abseits von der Wirklichkeit einsam in den Regionen abstraktesten Denkens verliert, während die Naturforschung ihre schönsten Triumphe feiert, eben weil sie es verstanden hat, sich mit der konkreten Mathematik und der fundamentalen Erkenntnistheorie zu verbinden.

Vertrauen wir uns weiter dem Kant an, der die Gesetzestafeln der Kategorien aufgestellt hat, in denen er die

---

[1]) Es wäre am besten, wenn man sich dazu entschließen wollte, statt des Wortes „infinitesimal“, an dem für immer der Begriff des „aktual“ Unendlichen haften bleiben wird, zugleich mit dem Symbol „$\int$“ das Wort „infinital“ als Ausdruck des Strebens nach dem Unendlichen einzuführen, in einem analogen Sinne wie Kant das Wort „transzendental“ im Hinblick auf das „Transzendente“ gebraucht. Aus der „Infinitesimal-Analyse“ würde dann mittels des Symbols der „Folge“ eine „Infinital-Synthese“ hervorgehen.

leitenden Prinzipien des Verstandes gruppiert hat, die auch heute noch für Grundlegung und Aufbau der Mathematik maßgebend sein können. Beachten wir besonders die für Kant so charakteristische Kategorientafel der Modalität, deren Stufen „Möglichkeit, Wirklichkeit, Notwendigkeit“ zugleich die Entwicklungsstadien alles geistigen Neuschaffens darstellen. Was dem reinen Denken nach möglich ist, soll durch Anschauung wirklich werden und sich in der Anwendung auf die Natur als notwendig ausweisen. Diesem Prinzip wird das Werturteil über die einzelnen Zweige der mathematischen Wissenschaft angepaßt und danach die Auswahl des Stoffes im mathematischen Unterricht getroffen werden müssen.

Wählen wir im besondern den Kantischen Ausspruch als Leitwort: „Begriffe ohne Anschauungen sind leer“. Verhelfen wir dem, was wir durch bestimmtes Denken gestaltet haben, mehr als bisher zur bildlichen Darstellung, sowohl in der Forschung wie im Unterricht. Mag man weiterhin behaupten, die Anschauung versage; daß das reine Denken nicht minder versagen kann, hat ja die neueste Entwicklung mathematischen Denkens deutlich gezeigt. Letzte und sicherste Stütze exakter Wissenschaft wird immer die durch Denken geläuterte „Anschauung“, etwa die „Erfahrung“ im Kantischen Sinne bleiben müssen; eine andere Auffassung würde die Verewigung des Streites um die wichtigsten Fragen bedeuten.

Mögen wir uns endlich sowohl als Philosophen wie als Mathematiker mehr als bisher daran erinnern, daß Kant in seiner Jugend eine „Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels“ entwarf, womit er einen großzügigen Versuch unternahm, Ursprung und Bau des „ganzen Weltgebäudes“ nach den Prinzipien Newtonscher Naturphilosophie zu begründen; wenn er als gereifter Mann daran ging, zunächst die Grundlagen des Denkens zu sichern und ein festes Gebäude der Geistesphilosophie zu errichten, so ist in ihm doch stets der Sinn für die Erforschung der Natur und für die Größe und Harmonie des Kosmos wach geblieben. Beweis dafür ist sein herrlicher Ausspruch: „Zwei Dinge sind es, die das menschliche Gemüt mit immer größerer Bewunderung erfüllen, je öfter und anhaltender sich das Denken damit beschäftigt: der gestirnte Himmel über mir und das ungeschriebene Gesetz in mir.“

Mögen wir das, was Kant als Ziel vorgeschwebt haben mag, nunmehr als sein kostbarstes Vermächtnis bewahren und gemeinsam dieser höchsten Aufgabe unsere Kräfte widmen, möglichst viele jugendliche Menschen die erhabene Einfachheit und die ruhevolle Schönheit der ewigen Natur erkennen und empfinden zu lassen.

Dann werden wir, so glaube ich, gewahr werden, daß das ungeschriebene Gesetz in uns tief verankert ist in dem ungeschriebenen Gesetz über uns.

Nachwort.

Das in diesen beiden Aufsätzen Niedergeschriebene hoffte ich im laufenden Semester in einer wöchentlich einstündigen Vorlesung über „Mathematik und Wiederaufbau“ weiter ausführen zu können. Die Pflicht, kurz vor Beginn des Semesters andere Vorlesungen zu übernehmen, nötigte mich aber, jene Vorlesung wieder abzusagen.

Ich gedenke nunmehr in einer folgenden Schrift Näheres über den Aufbau der Analysis in dem oben angedeuteten Sinne zu sagen und in einer daran anknüpfenden Schrift die Prinzipien der Naturerkenntnis zu erörtern.

Münster i. W., im Dezember 1920.

Bei der Abteilung Ia haben sich ferner Personen gemeldet, die

gesetzt: von 8 bis 12 Uhr für Kind

Die Dame aus New-York.

[30. Fortsetzung.] Roman von Fritz Reck-Malleczewen. [Nachdr. verboten.]

Dann tut der Sesam sich auf: Vorhänge heben sich zur Seite, in dem halbdunklen Vorgemach zwitschern die Stimmen zwerghafter Boys und werden aufgesogen von den kniehohen Teppichen des Bodens. Schreckhafte gepanzerte Bronzegötzen mit leuchtendem Gebiß blitzen im Hintergrund auf vor dem Farbenreigen der Wandmatten. Fein und scharf duftet der Orient, beizend und süß, als stünden Wälder vorweltlicher Farne in Brand, und Steppenwind trüge den Duft ihrer Flammen über die Ebene.

Da steht sie in dem bunten Schein und fröstelt, weiß nichts anderes, als sich an den großen, den schrecklichen Mann da zu klammern.

„Nimm andere Kleider und komme wieder.“ Eine junge Mongolin taucht auf aus den Wandteppichen und führt sie fort. In dem heißen Bad, das auf sie wartet, fühlt sie das Leben wiederkommen, dehnt wohlig die erstarrten Glieder und schließt die Augen. Aber mit dem Leben will die Erinnerung an den Tag, der hinter ihr liegt, kommen. Sie glaubt plötzlich Tarquansons Hand zu fühlen, sieht das schlaffe Gesicht mit den hängenden Fettpolstern und dem blutigen Riß in der trockenen Unterlippe, zuckt zusammen und fährt auf. Da sehen die Augen der farbigen Dienerin auf ihre Nacktheit, und ihr Gesicht ist voll der unsäglichen Verächtlichkeit, mit der die Chinesin dem weißen Menschen begegnet. Gewiß, sie kennt diesen Blick, man muß ihn wohl ertragen lernen! Sie richtet sich auf und läßt ihren Leib pflegen und nimmt die weiten Seidenhosen des chinesischen Frauenkleides und den Chignon mit den bunten Glasperlen. Dann geht sie in das Zimmer zurück, in dem ihr Freund wartet.

Sie findet ihn ausgestreckt auf der Matte, die Boys, zwischen denen er liegt, mühen sich mit dem Rauchgerät. Der blaue Seidenmantel hat den Europäer verschwinden lassen: auf die Ellenbogen gestützt, mit den eiskalten, bernsteingelben Augen jede Bewegung des Weibes verfolgend, hat er die statuarische Ruhe einer großen, wartenden Katze.

Er winkt die Boys fort. „Diener oder Lustknaben?“ fragt sie leichthin, als die winzigen Gestalten wie kleine, bunte Tropenvögel davonhuschen. Da trifft sie wieder der verächtliche Blick.

„Eine Frage für Europäer.“

„Und die Antwort?“

Er wirft sich hintüber, daß
Mantels den Arm freigeben.
of Hensbarrow.
„Und was ist hinter der Lust
„Hinter der Lust kommt der
Sie zuckt zusammen, sieht ih
der Sphinx nichts anderes zu
Da versucht sie, die Furcht du
„Wenn alles Lust ist . . . war
walt? Wenn alles Lust ist . . .
of Hensbarrow nicht die schwa
am ersten Tage zu sich?“
Er ändert seine Stellung nich
kommen würde.“
Da steht sie vor seinem Lage
„Ein Tag . . . eine Nacht . . .
Männern, glaubst du, hat Vic
gestern?“
Er antwortet nicht, er liegt
Sie sieht ihn überrascht an: „D
süchtig?“
„Ein Ding für Europäer.“
Da schreit sie auf in der
du mich nehmen und den Geru
Der Earl of Hensbarrow ste
bleibt gerade vor ihr stehen.
wortet er: „Unrein ist, wer ni
deinen Leib, und das Vergange
Sie sieht ihn ungläubig an
plötzlich, das große Reinigungs
dehnt sie die Arme in die Höhe
Befreiung. Da bricht alles nied
Hemmungen aufgerichtet haben
Christenapostels Lehre von dem
von Sünde und Buße ist fort
fremden Welt.
Da springt der andere auf, s
Sie ringen stumm in dem bun
Weib. Noch einmal macht sie s
stößt ihn von sich, daß der ries
steht sie mit keuchender Brust, s
das auch die Wollust nicht er
Sauhirt kann eine betrunkene
sie erwacht . . .“
„Dann?“
„Dann tötet sie ihn!“

er und Hammel und von 8½ bis

Besitzers von Anteilscheinen, die Einlösung bis zum 31. Dezember

die weiten Aermel seines
„Lust ist alles,“ sagt der Earl

t?“
Tod.“
n an. Nun ist in dem Gesicht
lesen als tödliche Grausamkeit.
rch Koketterie zu betäuben.
ich nicht immer in deiner Ge-
, weshalb holte der starke Earl
ache Violet Tarquanson schon

t: „Er wußte, daß sie von selbst

er, das Vergangene foltert sie:
eine kurze Zeit . . . Wieviel
olet Tarquanson gehört seit

noch immer ruhig und lächelt.
Du fragst nicht, bist nicht eifer-

Qual ihrer Befleckung: „Willst
ch des andern spüren?“
ht ruhig auf von seiner Matte,
ihr in die Augen sehend, ant-
e vergessen kann. Du wäschst
ne ist fort.“
: „Und alles ist fort?“ Und
bad des Vergessens begreifend,
und schreit auf in unendlicher
er, was zwei Jahrtausende an
in ihrem Blut, und des
für immer geschändeten Leib,
rgespült von dem Strom der

pringt sie wie ein Raubtier an.
ten Licht, der Mann und das
ch los mit verzweifelter Kraft.
ige Mann zurücktaumelt. Da
tarrt ihm in das eisige Gesicht,
wärmt: „Hüte dich, du! Ein
Königin umarmen, aber wenn

„Und was tust du?“

„Wenn du dich ausgibst für einen, der du nicht bist, wenn du dich nur vermummt hast, werde ich dich töten!“

Er sieht ihr ruhig ins Gesicht: „Nach der Lust kommt der Tod — mir oder dir.“

Da läßt sie sich still und klaren Sinnes in seine Arme nehmen; und unter dem bunten Farbenspiel der Laternen fließen sie ineinander, die beiden Welten, die sich ewig umgeben in ewigem Haß und ewiger Liebe. —

Als sie erwacht, findet sie sich allein. In dem einsamen Gemach läßt sie den Blick herumschweifen, sieht endlich den Lampion zu ihren Häupten: aus dem Farbenkreisel starrt ein Totenkopf ihr entgegen, halb verwest, mit verrotteten Haarbüscheln auf der modrigen Haut, fletscht gelbe Zähne und streckt die skelettierte Hand nach ihr aus. Das alles steht so plötzlich vor ihr, daß sie aufschreit.

Er erscheint geräuschlos hinter dem Teppich. „Was ist?“ Sie deutet stumm auf die Lampe. Er lächelt, läßt eine andere Lampe bringen und verabschiedet den Boy mit einem Fußtritt.

„Oishi-San, die in der Ampel ihrem Gatten erscheint,“ erklärt er, „Hokusai, der Japaner, liebte solche Spielereien.“

„Und weswegen erschien Oishi-San ihrem Gatten?“

„Weil er sie zu Tode gequält hatte.“

„Und weswegen hatte er sie zu Tode gequält?“

„Weil er ihrer überdrüssig geworden war.“

Als sie schweigt, neigt er sich zu ihr. „Fürchtest du dich?“

Da wirft sie sich mit wildem Schrei in seine Arme: „Vor dem Tod kommt die Liebe!“ — — —

Abermals erwachend in tiefer Nacht findet sie ihn, halb aufgerichtet, mit dem breiten japanischen Richtschwert spielend, das zuvor zu ihren Häupten gehangen hatte. Sie hört die Schneide durch die Luft pfeifen, fürchtet sich, sucht sanft seine Finger loszubiegen von dem Griff: „Lege es fort!“

Er sträubt sich, sie ringen stumm um die Waffe, sie fühlt plötzlich einen feinen Schmerz und sieht Blut aus einem Schnitt an der Hand fließen. Sie sieht ihn vorwurfsvoll an. Er beachtet die Wunde mit keinem Blick, starrt noch immer wie ein asiatischer Henker vor sich: „Erzähle, was gestern und heute war.“

Da erzählt sie von Whitening und von Tarquanson. Sie schont sich nicht, sie versteckt keine peinliche Einzelheit. Er schleudert, als sie fertig ist, die kostbare Waffe durch den Raum: „Gut, beide werden sterben.“

Sie lächelt: „So bist du doch eifersüchtig?“

„Es ist Sitte so, daß sie sterben.“ (Fortsetzung folgt.)

Mathematik und Kultur.

Von [Nachdruck verboten.]

Dr. Alfred Gradenwitz (Berlin).

Die Mathematik ist fraglos von allen Wissenschaften die unpopulärste: Während sich alle anderen Wissensgebiete — wenigstens in ihren großen Zügen — dem Laien verständlich machen lassen, widersteht die Mathematik derartigen Annäherungsversuchen und offenbart ihre Schönheiten nur wenigen Auserwählten.

Und diese spröde, schwerverstandene Wissenschaft sollte unserer gesamten Kultur zugrunde liegen, nicht nur ihren materiellen, technischen, sondern auch ihren ästhetischen Aeußerungen! Von ihrer Fortentwicklung sollte das Wohl und Wehe menschlicher „Gesittung“ abhängen! So wenigstens will es Dr. V. Geilen in seinen scharfsinnigen Ausführungen über „Mathematik und Baukunst als Grundlagen abendländischer Kultur“ und „Wiedergeburt der Mathematik aus dem Geiste Kants“. (Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig.)

Was Geilen für die mathematische Anlage des Menschengeistes in Anspruch nimmt, daß sie die „ihm ursprünglich innewohnende, gestaltende und konstruktive Kraft in ihrer elementarsten, reinsten Form“ ist, gilt unseres Erachtens ganz allgemein von ihrer Rolle in der Natur, der belebten wie der unbelebten. Ueberall in der Natur, in allen ihren Gebilden und Geschöpfen, tritt die ursprüngliche, form- und lebengebende Kraft in mathematischer Form zutage, bei den Lebensäußerungen der „niederen“ Geschöpfe und des primitiven Menschen unbewußt, beim „Kulturmenschen“ hingegen vielfach individuell bewußt.

Geilen bemüht sich nun, die ununterbrochene Linie der Entwicklung zu zeigen, die von der griechischen bis zur gegenwärtigen Kultur führt, eine Linie, die sich „als eine immer reichere Entfaltung einerseits des mathematischen Gedankens, andererseits der auf diesem Boden erwachsenden Aeußerungen des Formgefühls, darunter vor allem der Baukunst, der fundamentalsten aller Künste“, darstellt.

Auf die massigen Flächen und Linien der ägyptischen Baukunst folgt die harmonische Gestaltung der Flächenproportionen, in der die Griechen Meister sind. Die Figur des „goldenen Schnittes“, die nach rein mathematischen Ueberlegungen als die vollkommenste geradlinige Figur bezeichnet werden muß, und nach der wohl auch die Proportionen des menschlichen Körpers gebildet sind, findet bei den Griechen als Ausdruck höchster Harmonie nicht nur in allen Einzelheiten ihrer menschlichen Bildwerke, sondern in ihren Tempelbauten und anscheinend sogar in ihren Tempelgeräten allgemeine Verwendung. Ueberall vollkommene Uebereinstimmung zwischen griechischer Geometrie, Skulptur und Baukunst!

Daß die Römer, deren Kultur den Uebergang zwischen griechischer und moderner abendländischer bildet, trotz ihrer großen

mathematisch-organisatorischen
geschaffen haben, erklärt sich
mals „die Möglichkeiten ihre
monumentalen Werken der Bau
Das wesentlich Neue am römisch
wendung der Kreislinie neben
„Der Kreis ist die einfachste
dynamisch gedeutet die Kurve

Die Entwicklung der römisch
in dem romanischen Baust
wendung von Halbkreisbogen —
vorherrschenden Betonung der e
Gestaltung des Innenraumes er
Dimension der Griechen, der Br
Wirkung, tritt eine neue Dime
Raumwirkung, hinzu.“ „
Geilen, „hat der Geist d
Geometrie des Raumes
Mathematik symbolisch zugleich

Der Umstand, daß zu den bi
neues, der Spitzbogen, hinzu
der gotischen Baukunst. Ab
geklügelte Absicht, auch noch die
Höhenwirkung, auszuschöpf
das neue statische Problem zieht
generation mit sich fort, wandelt
und mit ihm die Menschen, die
auf sich wirken lassen.“ Der
kleinere Stücke zerlegt, und die
artigen Netz der Gewölberippen,
In der Ornamentik tritt sch
hand Gestalten, pflanzlichen, tier

Nachdem sich hierauf in der
eine vorübergehende Rückkehr
Michelangelo durch die f
elastisch geschwungenen Linien
beschränkt bleibenden) Bar
mathematische Naturw
Kulturentwicklung einen maßg
wird „der Begründer der „Dyn
angelo der Begründer der
gründung der Gesetze der ruhen
Griechen, die Ergründung
seit Michelangelo und
europas, die noch keiner

„Das Charakteristische der ne
alten Geometrie der geraden
gekrümmten und geschwungenen

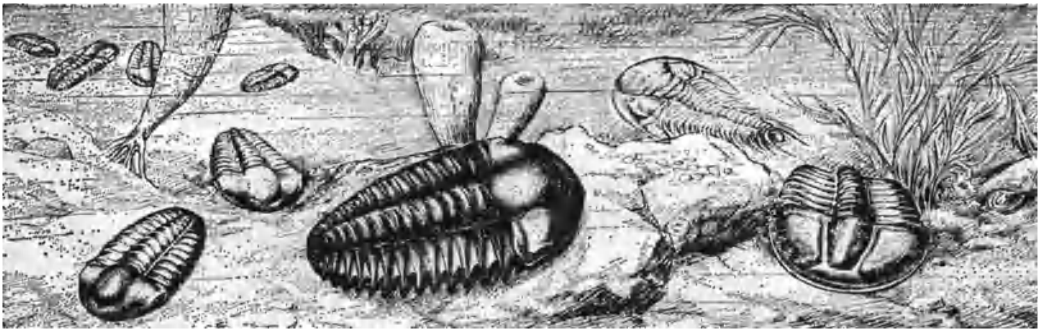
...ragbung keine eigene Mathematik
...aus, daß die alte Mathematik da-
... Auswirkung, insbesondere in den
...arst", noch keineswegs erschöpft hatte.
...n Baustil sieht G e i l e n in der Ver-
...er in sich ruhenden geraden Linie.
...und vollkommenste krumme Linie,
...der gleichmäßig gespannten Kraft."
...n Baukunst erreicht ihren Höhepunkt
...i l, der mit seiner naturgemäßen An-
...im Gegensatz zu der bei den Griechen
...nförmigen Geraden — eine reichere
...möglicht. „Zu der charakteristischen
...e i t e, mit ihrer f l ä c h e n h a f t e n
...nsion, die T i e f e, und damit die
...In den Steinen seiner Dome," sagt
...s „romanischen" Zeitalters seine
... geschrieben und in dieser steinernen
...en Geist seiner Zeit offenbart."
...herigen geometrischen Elementen ein
...ritt, gibt den Anstoß zur Entfaltung
...er „nicht die verstandesmäßig aus-
... letzte geometrische Möglichkeit, die
...en, bewirkt den Umschwung, sondern
... den Geist der schaffenden Künstler-
... die Seele des Bauwerkes völlig um
...mit empfänglicher Seele sein Dasein
...Kreisbogen wurde dann in immer
...Bogen wurden u. a. in dem ranken-
... zu immer freieren Gebilden gefügt.
...ließlich die organische Natur in aller-
...ischen und menschlichen, offen zutage.
... i t a l i e n i s c h e n R e n a i s s a n c e
... zum Griechentum vollzogen und
...ere, organische Gliederung und die
...er Baukunst den (zunächst auf ihn
...i l eingeleitet hat, beginnt die
...i s s e n s c h a f t auf den Gang der
...den Einfluß auszuüben. G a l i l e i
...k" als Wissenschaft, wie M i c h e l-
...namik als Kunst war. Die Er-
...en Schönheit war die Leistung der
...esetze der bewegenden Kraft wird
...i die große Aufgabe M i t t e l-
...[illegible] gestellt worden war.
...en Mathematik, im Gegensatz zu der
...nie und des Kreises sind die freier
... Linien." Vor allem sind es zwei

Kurven, die „Kurve des organischen Wachstums" und die [illegible]förmig auf und abschwingende Sinuslinie, Kurven von grundlegender Bedeutung für die Erkenntnis des Naturgeschehens, in denen die Urelemente der B a r o c k f o r m e n vorgebildet sind. „Dazu kommt die Ellipse, die Kepler-Newtonsche Kurve der Planetenbahnen, vielleicht auch die Parabel, die Galileische Kurve des Fallgesetzes, und schließlich die fundamentalen Kurven der Spirale und der Schraubenlinie, die ihrerseits wieder die Sinuslinie in sich birgt."

Ein ähnliches Verhältnis, wie es zwischen der alten und der neuen Mathematik besteht, sieht G e i l e n zwischen den früheren Stilformen und dem neuen Baustil des „der organischen Natur abgelauschten" Barock. „Die herrlichsten Schöpfungen des neuen Stils sind (wiederum) in Deutschland entstanden, dort, wo sich die Seele am engsten mit der Natur verbunden gefühlt hat." Auch die anderen bildenden Künste passen sich dem Charakter des Barock an und erzeugen somit vollkommene Stileinheit.

Der auf den deutschen Barockstil folgende Kulturverlauf hat bisher noch nicht den Charakter eines einheitlichen Lebensstils angenommen, und G e i l e n stellt sich die Frage, ob die seit Beginn des 19. Jahrhunderts gewonnenen neuen Erkenntnisse auf dem Gebiete von Naturforschung und Mathematik überhaupt geeignet sind, die Grundlagen einer einheitlichen Kultur zu werden. Leider muß er sich sagen, daß die Mathematik sich im Laufe der letzten Jahrzehnte allzusehr in abstrakten Spekulationen gefallen und ihren Zusammenhang mit ihrem eigentlichen Endziel, der Förderung der Naturerkenntnis, aus dem Auge verloren hat. „Die Lösung kann darum nur lauten: Z u r ü c k z u r A n s c h a u u n g, h i n z u r N a t u r! Aus diesen Quellen hat die Mathematik ihr Leben empfangen, und nur aus ihnen wird ihr auch weiter neues Leben zuströmen können."

Zu diesem Zwecke regt der Verfasser eine Umwandlung der Mathematik an, der keine unüberwindlichen Schwierigkeiten entgegenstehen dürften. „Die wesentlichste Aufgabe der nächsten Zeit wird die sein müssen, einer möglichst großen Zahl der an philosophischem, naturwissenschaftlichem und künstlerischem Schaffen interessierten Menschen einen m ö g l i c h s t n a t u r g e m ä ß e n E i n g a n g in d i e I n f i n i t e s i m a l r e c h n u n g zu eröffnen. Dafür wird vor allem eine p h i l o s o p h i s c h unangreifbare, einheitliche Auffassung und Behandlung des sogenannten „Unendlichkleinen" und zugleich eine einheitliche Erledigung des Problems des Irrationalen notwendig sein. Dazu ist ferner nötig, eine sich prinzipiell auf „Anschauung" und Gesetzmäßigkeit gründende Einführung des Funktionsbegriffs, wie es dem Ziel der N a t u r f o r s c h u n g gemäß ist." Wenn dies gelungen ist, meint G e i l e n, wird auch denen, die bei dem gegenwärtigen Schulunterricht über den allzu [illegible] Charakter der Mathematik klagen, ein Einblick in den harmonischen Bau der höheren Mathematik gewährt werden. Dann [illegible] eine harmonische Synthese von Technik und Kunst zustande [illegible]



Trilobiten

Die Trilobiten bilden eine ausgestorbene Gruppe mariner *Arthropoden* (= Gliederfüßer). Ihr Körper war von einem *Rückenpanzer* aus chitinartiger Substanz bedeckt, der sowohl längs als auch quer zur Körperachse eine typische *Dreiteilung* aufwies (in Längsrichtung in Kopfschild, Rumpf und Schwanzschild; quer in eine zentrale Spindel, zu beiden Seiten von Pleuren begrenzt). Von diesem Körperbau leitet sich auch der Name *Dreilapper* (Trilobiten) ab. Die gegeneinander verschiebbaren *Segmente* garantierten eine große Beweglichkeit des Körpers. Die Tiere besaßen *Spaltbeine,* wobei deren jeweils innerer Ast zum Schreiten diente. Der äußere, mit langen Borsten dicht besetzte Ast dagegen funktionierte als Schwimm- und Atmungsorgan.

Die meisten Trilobiten besaßen an den Seitenteilen des Kopfschildes sog. *Facettenaugen* — sie entsprachen also etwa dem Bau der heutigen Insektenaugen —, die bei einzelnen Gattungen bis 15 000 einzelne Facetten vereinigten. Es sind jedoch auch zahlreiche Formen bekannt, die *sekundär erblindet* waren.

Da Trilobiten im Verlauf ihres Wachstums mehrmals durch *Häutungen* ihr Außenskelett wechseln mußten, findet man die *Häutungsreste* (Exuvien) gelegentlich in großer Anzahl im Sediment. Allerdings ging bei der Häutung oder auch bei der nachfolgenden Einbettung vielfach der Zusammenhang der Skeletthaut verloren, so daß man meist nur Bruchstücke davon vorfindet.

Die kleinsten Trilobiten erreichten nur eine *Größe* von 5 mm, die *größte bisher* bekannte Art dagegen eine Länge von 75 cm.

Trilobiten waren ausschließlich *Tiere der Urmeere,* wo sie hauptsächlich in den flachen Schelfregionen lebten. Sie ernährten sich vermutlich von Kleinlebewesen und waren wohl auch Sedimentfresser.

Die Trilobiten erschienen „schlagartig" und sogleich mit einer verblüffend großen Formenmannigfaltigkeit (ca. 1 400 Gattungen) im *Unteren Kambrium* und erlangten schnell eine bedeutende Rolle als Leitfossilien für die Stratigraphie des Paläozoikums. Im Mittleren *Perm* starben die Trilobiten aus.

Zu den bekanntesten Fundgebieten von Trilobiten in Europa zählen zweifellos die unter- und mittelkambrischen Schichten bei *Pribram in der CSSR.* Dort werden die besonders gut erhaltenen Trilobitenarten Ellipsocephalus hoffi, Paradoxides gracilis, Conocoryphe sulzeri u. a. gefunden, wobei Jince bei Pribram bisher die schönsten Exemplare hervorbrachte. Die Fundstellen liegen heute in einem Naturschutzgebiet, weshalb dort nicht mehr gegraben werden darf.

Die **„Sammlung Vieweg“** hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen, durch zusammenfassende Behandlung unter Beifügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten.** Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Verzeichnis der bisher erschienenen Hefte siehe 3. und 4. Umschlagseite.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig, und zwar für:

Physik (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):

Herr Professor **Dr. Karl Scheel,** Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;

Chemie (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):

Herr Professor **Dr. B. Neumann,** Techn. Hochschule, Breslau;

Technik (Wasser-, Straßen- und Brückenbau, Maschinen- und Elektrotechnik, Schiffsbau, mechanische, physikalische und wirtschaftliche Probleme der Technik):

Herr Professor **Dr.-Ing. h. c. Fritz Emde,** Techn. Hochschule, Stuttgart;