

TAFELN
ZUR HARMONISCHEN ANALYSE
PERIODISCHER KURVEN

VON

DR.-ING. L. ZIPPERER

MIT 6 ZAHLENTAFELN, 9 ABBILDUNGEN UND
23 GRAPHISCHEN BERECHNUNGSTAFELN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

ISBN-13: 978-3-642-98123-4 e-ISBN-13: 978-3-642-98934-6
DOI: 10.1007/978-3-642-98934-6

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Das vorliegende kleine Werk ist die Ausarbeitung des in Dingers polytechnischen Journal von mir veröffentlichten Verfahrens.

Während der Umarbeitung erfahre ich aus einer Veröffentlichung von Walter Lohmann, daß vor etwa drei Jahrzehnten L. Hermann ein dem meinigen ähnliches Verfahren bekannt gab. Beide Verfasser haben jedoch nicht erkannt, daß durch geeignete Wahl der Einteilung der Periode die Grundtafel wesentlich vereinfacht und damit die Rechenarbeit abgekürzt werden kann.

Die Behandlung der Werte mit positiven und negativen Vorzeichen wird von den Verfassern in verschiedener Weise gelöst. Hermann trägt die Werte mit ihrem Vorzeichen in die Grundtafel ein und legt Schablonen mit ausgeschnittenen Rechtecken auf. Ein über dem Ausschnitt stehendes Vorzeichen gibt an, ob der sichtbare Wert mit dem in der Grundtafel stehenden oder mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zur Berechnung in Frage kommt. Lohmann macht durch Parallelverschiebung der Abszissenachse sämtliche Vorzeichen positiv. Durch verschiedene Umrahmung der in Betracht kommenden Rechtecke gibt es dem Rechner an, mit welchem Vorzeichen der Wert bei der Summenbildung einzusetzen ist. Bei meiner Methode wird die Grundtafel nochmals mit entgegengesetzten Vorzeichen übertragen, derart, daß die beiden Hälften spiegelbildgleich sind zur senk-

¹⁾ D. P. J. 1918, S. 201f. und D. P. J. 1922, S. 4.

²⁾ Harmonische Analyse zum Selbstunterricht 1921 (Fischers medizinische Buchhandlung, Berlin.)

³⁾ Pflügers Archiv für die gesamte Physiologie 1890, S. 45 ff.

rechten Mittellinie. Dabei können die Werte mit den wirklichen Vorzeichen oder nach Achsenverschiebung mit positiven Vorzeichen eingetragen werden.

Für den Rechner ist die Verwendung von Schablonen mit ausgeschnittenen Rechtecken wohl die bequemste Ausführungsform, sie scheidet leider an den hohen Herstellungskosten. Die Verwendung von Pauspapier für die Rechnungstabellen hat den Nachteil, daß infolge der nicht vollständigen Durchsichtbarkeit des Papiers das Durchlesen der Zahlen der Grundtafel erschwert wird. Durch Anwendung einer durchsichtigen Grundtafel und mit leuchtender Farbe gedruckten Rechnungstabellen, hoffe ich eine brauchbare Lösung gefunden zu haben.

Den Hauptvorteil des Verfahrens sehe ich in der Ausführung der Tafelrechnungen durch technisch und mathematisch ungeschulte Arbeitskräfte; mehrfache Versuche in der Praxis bestätigen dies. Zur Ausführung des Rechenganges genügt die Kenntnis der Abschnitte 4–8. Der Leser zeigt nach deren Studium dem mit der Rechnung beauftragten Angestellten das Auflegen der Tafeln und das Bilden der Tafelsummen unter Benutzung der im Abschnitt 8 befindlichen Gebrauchsanweisung. Die ersten drei Abschnitte enthalten die Ableitung der Fourierschen Reihe, der Sonderfälle und die Entwicklung des Tafelverfahrens.

Der Verlagsbuchhandlung spreche ich für die weitgehende Berücksichtigung meiner Wünsche bei der Drucklegung der Tafeln meinen besten Dank aus.

Gelsenkirchen, im Oktober 1922.

Zipperer.

Inhaltsverzeichnis.

Textteil:		
	Seite	Seite
1. Fouriersche Reihen	1	Multiplikationstafel der Zahlen 1—200 mit den Faktoren 0,966; 0,866; 0,707; 0,5; 0,259
2. Harmonische Analyse	4	10 u. 11
3. Entwicklung des Tafelverfahrens	6	Tafel: tangens φ
4. Anwendung der Tafeln	6	12
5. Allgemeine Bemerkungen	7	
6. Besondere Anwendungsmöglichkeiten	8	Tafelteil:
7. Zusammenfassung der beiden Wellen	8	Tafeln zur Berechnung des Koeffizienten a_1 bis a_{11} und b_1 bis b_{11} .
8. Reihenfolge der auszuführenden Rechnungen (Gebrauchsanweisung)	9	20 Stück Grundtafeln (nachlieferbar durch den Verlag).

Literaturverzeichnis.

<p>Außer den bereits im Vorwort angeführten Veröffentlichungen seien noch folgende Werke angeführt:</p> <p>Runge, C.: Theorie und Praxis der Reihen. Berlin: Göschen.</p> <p>Arnold, E.: Wechselstromtechnik. Berlin: Julius Springer 1920.</p> <p>Jaeger, W.: Elektrische Meßtechnik. Leipzig: Barth.</p> <p>Hort, W.: Technische Schwingungslehre. Berlin: Julius Springer 1910.</p>	<p>Hort, W.: Differentialgleichungen des Ingenieurs. Berlin: Julius Springer 1914.</p> <p>Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin: Julius Springer 1922.</p> <p>Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichungen.</p> <p>Dubbel, H.: Taschenbuch für den Maschinenbau. Berlin: Julius Springer 1921.</p> <p>„Hütte“, Das Ingenieur-Taschenbuch, Band I.</p>
--	---

1. Fouriersche Reihen.

Nach Fourier kann eine periodische Funktion dargestellt werden durch die Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos 1 \cdot x + a_2 \cos 2 \cdot x + a_3 \cos 3 \cdot x + \dots + b_1 \sin 1 \cdot x + b_2 \sin 2 \cdot x + b_3 \sin 3 \cdot x + \dots \quad (1)$$

oder nach Zusammenfassung der Glieder gleicher Ordnung:

durch: $a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n \sin (nx + \varphi_n) \dots \dots \dots (2)$

worin: $f(x) = c_0 + c_1 \sin (x + \varphi_1) + c_2 \sin (2x + \varphi_2) + \dots,$

$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{und} \quad \text{tang } \varphi_n = \frac{a_n}{b_n} \dots \dots \dots (3)$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_n und b_n wird Gl. 1 mit $\cos nx dx$ bzw. $\sin nx dx$ multipliziert und von 0 bis 2π integriert. Die bei den Ausrechnungen vorkommenden Integrale ergeben:

$$\int_0^{2\pi} \cos (nx) \cos (mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{,, } m = n > 0 \\ 2\pi & \text{,, } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos (mx) \sin (nx) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin (nx) \sin (mx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{,, } m = n > 0 \\ 0 & \text{,, } m = n = 0. \end{cases}$$

Führt man diese Berechnung zur Bestimmung des Koeffizienten a_n aus, so wird:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos (nx) dx &= a_0 \int_0^{2\pi} \cos (nx) dx + a_1 \int_0^{2\pi} \cos (1 \cdot x) \cos (nx) dx \\ &+ \dots + a_n \int_0^{2\pi} \cos (nx) \cos (nx) dx + b_1 \int_0^{2\pi} \sin (1 \cdot x) \cos (nx) dx \\ &+ \dots + b_n \int_0^{2\pi} \sin (nx) \cos (nx) dx \\ &= a_n \cdot \pi. \end{aligned}$$

folglich:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos (nx) dx \dots \dots \dots (4)$$

In gleicher Weise ergibt:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin (nx) dx \dots \dots \dots (5)$$

Gleichung 4 wird für $n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Damit erhält man für das von x freie Glied der Gleichung 1, das bei einer graphisch gegebenen Kurve nichts anderes als der Mittelwert des Kurvenzugs ist:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \dots \dots \dots (6)$$

Ist die Periode der Funktion $f(x)$ nicht 2π sondern $2m$, so setzt man in die Gleichungen für x den Wert $\frac{x \cdot \pi}{m}$ ein, und erhält:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n \frac{2\pi}{2m} dx \\ b_n &= \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} f(x) \sin n \frac{2\pi}{2m} dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Bei Kurven mit symmetrischen Eigenschaften können die Integrale durch Zusammenfassungen umgeformt werden. Wegen

$$\begin{aligned} \sin nx &= -\sin n(2\pi - x) \\ \cos nx &= \cos n(2\pi - x) \end{aligned}$$

und

wird:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x) + f(2\pi - x)] \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x) - f(2\pi - x)] \sin nx dx \end{aligned}$$

oder, da $f(2\pi - x) = f(-x)$ ist:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x) + f(-x)] \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x) - f(-x)] \sin nx \, dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Bei Betrachtung dieser Ausdrücke zeigt sich, daß $a_n = 0$ wird, wenn $f(x) = -f(-x)$, d. h. bei ungeraden Funktionen. Die Reihe besteht nur aus Sinus-Gliedern und lautet:

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots + b_n \sin nx,$$

worin:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx \dots \dots \dots (9)$$

Bei geraden Funktionen verschwinden wegen $f(x) = +f(-x)$ alle Sinus-Glieder ($b_n = 0$), die Funktion ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + a_n \cos nx$$

für

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx \dots \dots \dots (10)$$

In der Wechselstromtechnik kommen vorwiegend periodische Kurven vor, deren Ordinaten, die einen Abstand von einer halben Periode voneinander haben, entgegengesetzt gleich sind (Sonderfall a, Abb. 1). Da bei diesen Kurven $f(x) = -f(x - \pi)$ ist, ergeben sich die Koeffizienten:

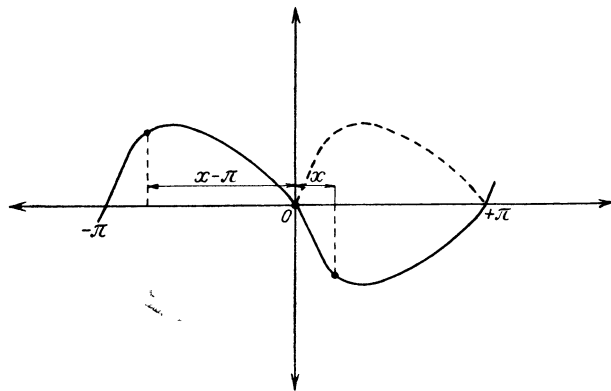


Abb. 1. Sonderfall a.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x) + f(x - \pi)] \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x) - f(x)] \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x) - f(x - \pi)] \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

Ist n gerade, so wird $\cos n\pi = +1$ und damit

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } n \text{ gerade } \dots \dots \dots (11)$$

Für ungerades n ist $\cos n\pi = -1$, die Koeffizienten mit ungeradem Index werden:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx \end{aligned} \right\} n \text{ ungerade } \dots \dots \dots (12)$$

Ist die Kurve außerdem symmetrisch zum Ursprung (Sonderfall b, Abb. 2), so erhält man die Koeffizienten in folgender Weise.

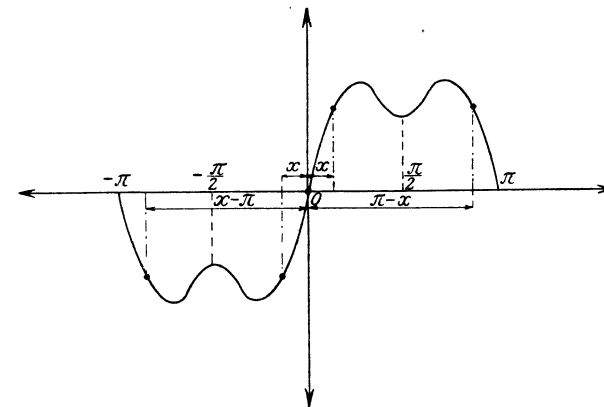


Abb. 2. Sonderfall b.

In den Gleichungen:

$$a_n = \int_0^\pi [f(x) + f(-x)] \cos nx \, dx$$

$$b_n = \int_0^\pi [f(x) - f(-x)] \sin nx \, dx$$

wird gesetzt:

$$f(x) + f(-x) = \varphi(x)$$

und

$$f(x) - f(-x) = \psi(x),$$

womit sich ergibt:

$$a_n = \int_0^\pi \varphi(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \int_0^\pi \psi(x) \sin nx \, dx.$$

Mit:
$$\left. \begin{aligned} \cos nx &= \cos n(\pi - x) \\ \sin nx &= -\sin n(\pi - x) \end{aligned} \right\} \text{für } n \text{ gerade}$$
 und:
$$\left. \begin{aligned} \cos nx &= -\cos n(\pi - x) \\ \sin nx &= \sin n(\pi - x) \end{aligned} \right\} \text{für } n \text{ ungerade}$$

ergeben sich analog der Ableitung der Gl. 8 die Koeffizienten zu:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\varphi(x) + \varphi(\pi - x)] \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\psi(x) - \psi(\pi - x)] \sin nx \, dx \end{aligned} \right\} n \text{ gerade}$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\varphi(x) - \varphi(\pi - x)] \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\psi(x) + \psi(\pi - x)] \sin nx \, dx \end{aligned} \right\} n \text{ ungerade.}$$

Die eben angegebene Kurve hat die Eigenschaften:

$$f(x) = -f(-x) = f(\pi - x) = -f(x - \pi).$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + f(-x) &= 0 \\ \varphi(\pi - x) &= f(\pi - x) + f(\pi - x) &= 0 \\ \psi(x) &= f(x) - f(-x) &= 2f(x) \\ \psi(\pi - x) &= f(\pi - x) - f(\pi - x) &= 2f(x) \end{aligned}$$

und schließlich werden die Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= 0 \end{aligned} \right\} n \text{ gerade}$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx \, dx \end{aligned} \right\} n \text{ ungerade} \quad \dots \dots (13)$$

Die Funktion kann dargestellt werden durch die Reihe:

$$f(x) = b_1 \sin 1 \cdot x + b_3 \sin 3 \cdot x + b_5 \sin 5 \cdot x + \dots$$

Beispiel. Für die dreieckige periodische Kurve nach Abb. 3 ergeben sich wegen der zweifachen Symmetrie die Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= 0 \text{ für } n \text{ gerade} \\ b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} ax \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

Hierbei wird nach $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$ das Integral:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \left[x \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^2}$$

und damit der Koeffizient:

$$b_n = \frac{4a}{\pi^2} \cdot \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^2} \quad (n \text{ ungerade}),$$

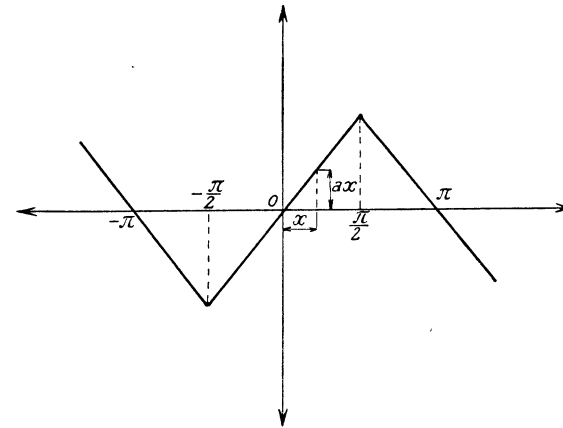


Abb. 3.

also:

$$b_1 = \frac{4a}{\pi}; \quad b_3 = -\frac{4a}{9\pi}; \quad b_5 = +\frac{4a}{25\pi} \text{ usw.}$$

Die Fouriersche Reihe lautet:

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - \frac{\sin 7x}{49} + \dots \right).$$

Der Größtwert ist: $a \frac{\pi}{2}$.

Bei einer Wechselstromkurve mit dreieckigem Verlauf und einer Amplitude I lautet die Reihe, weil $I = \frac{a\pi}{2}$ und $x = \omega t$ ist:

$$f(i) = \frac{8I}{\pi^2} \left(\frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25} - \frac{\sin 7\omega t}{49} + \dots \right).$$

In gleicher Weise können periodische Kurven mit geometrisch einfachen Kurvenzügen analytisch behandelt werden. Für die in Abb. 4 zusammengestellten Kurven¹⁾ ergeben sich folgende Fouriersche Reihen.

1. Rechteck: $f(i) = \frac{4I}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right]$

2. „ $f(i) = \frac{4I}{\pi} \left[\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega t - \dots \right]$

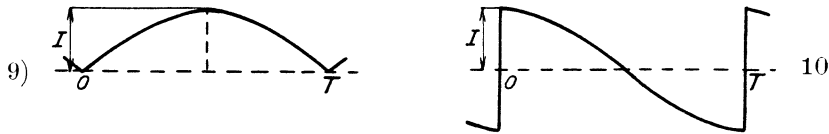
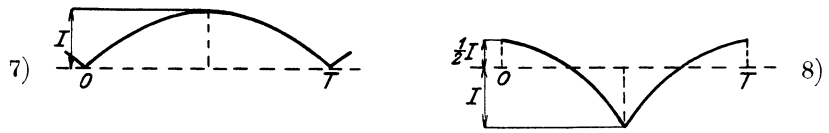
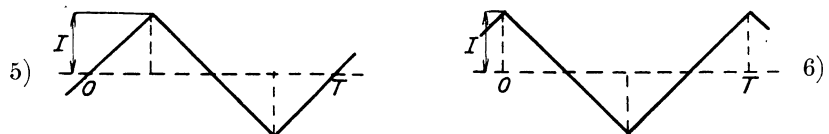
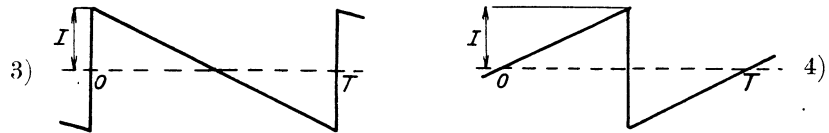
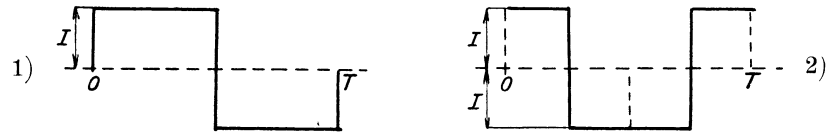


Abb. 4.

3. Säge: $f(i) = \frac{2I}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2 \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \dots \right]$

4. „ $f(i) = \frac{2I}{\pi} \left[\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2 \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t - \dots \right]$

¹⁾ Aus Strecker, Hilfsbuch f. d. Elektrotechnik. 1921. S. 84.

5. Dreieck: $f(i) = \frac{8I}{\pi^2} \left[\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3 \omega t + \frac{1}{25} \sin 5 \omega t - \dots \right]$

6. „ $f(i) = \frac{8I}{\pi^2} \left[\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3 \omega t + \frac{1}{25} \cos 5 \omega t + \dots \right]$

7. Parabelbogen: $f(i) = \frac{4I}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{6} - \cos \omega t - \frac{1}{4} \cos 2 \omega t - \frac{1}{9} \cos 3 \omega t - \dots \right]$

8. „ $f(i) = \frac{6I}{\pi^2} \left[\cos \omega t - \frac{1}{4} \cos 2 \omega t + \frac{1}{9} \cos 3 \omega t - \dots \right]$

9. Kommutierte Sinuslinie: $f(i) = \frac{2I}{\pi} \left[1 - \frac{2 \cos \omega t}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 2 \omega t}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cos 3 \omega t}{5 \cdot 7} - \dots \right]$

10. Kommutierte Kosinuslinie: $f(i) = \frac{8I}{\pi} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} \sin \omega t + \frac{2}{3 \cdot 5} \sin 2 \omega t + \frac{3}{5 \cdot 7} \sin 3 \omega t + \dots \right]$

2. Harmonische Analyse.

Die Entwicklung einer periodischen Kurve, Funktion, in eine Fouriersche Reihe nennt man harmonische Analyse. In der Praxis kommen Kurven vor, die als Kurvendiagramm gegeben oder durch Auftragen einiger Beobachtungswerte entstanden sind, sie lassen sich nicht durch ein analytisches Gesetz ausdrücken. Zur Berechnung der Koeffizienten wird ein numerisches Verfahren gewählt, das darauf beruht, die Integrale durch Summen zu ersetzen.

Zur praktischen Ausführung teilt man die Periode $2\pi = 360^\circ$ in $2m$ gleiche Teile, bestimmt die Ordinaten der Kurve für die einzelnen Teilpunkte, außerdem die Ordinaten der Sinus- und Kosinuskurven. Also für die Abszissen:

$$x_1 = \frac{2\pi}{2m} \cdot 1 \text{ die Ordinaten: } y_1, \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot 1 \text{ und } \sin n \frac{2\pi}{2m} \cdot 1$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{2m} \cdot 2 \text{ „ „ : } y_2, \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot 2 \text{ „ } \sin n \frac{2\pi}{2m} \cdot 2$$

$$x_3 = \frac{2\pi}{2m} \cdot 3 \text{ „ „ : } y_3, \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot 3 \text{ „ } \sin n \frac{2\pi}{2m} \cdot 3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x_r = \frac{2\pi}{2m} \cdot r \text{ „ „ : } y_r, \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot r \text{ „ } \sin n \frac{2\pi}{2m} \cdot r;$$

für $r = 1, 2, 3 \dots$ bis $2m$.

Damit erhält man für die Koeffizienten:

$$a_n = \frac{1}{m} \int_0^{2m} f(x) \cos n \frac{2\pi}{2m} x dx$$

$$= \frac{1}{m} \left[y_1 \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot 1 + y_2 \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot 2 + \dots + y_{2m} \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot 2m \right]$$

$$a_n = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{2m} y_r \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot r$$

$$b_n = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{2m} y_r \sin n \frac{2\pi}{2m} \cdot r.$$

Für eine Kurve nach Abb. 1 ergeben sich die Koeffizienten zu:

$$a_n = \frac{2}{m} \sum_1^m y_r \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot r$$

$$b_n = \frac{2}{m} \sum_1^m y_r \sin n \frac{2\pi}{2m} \cdot r$$

und für eine außerdem zum Ursprung symmetrische Kurve (Abb. 2):

$$a_n = \frac{4}{m} \sum_1^{m/2} y_r \cos n \frac{2\pi}{2m} \cdot r$$

$$b_n = \frac{4}{m} \sum_1^{m/2} y_r \sin n \frac{2\pi}{2m} \cdot r.$$

Mit einer für die meisten Fälle ausreichenden Einteilung der Periode in $2m = 24$ Teile erhält man zum Beispiel für die Grundkurve ($n = 1$) für den Koeffizienten der Kosinuskurve folgenden Ausdruck:

$$a_1 = \frac{1}{12} (y_1 \cos 15^\circ + y_2 \cos 30^\circ + y_3 \cos 45^\circ + y_4 \cos 60^\circ + \dots + y_{24} \cos 360^\circ)$$

für die Sinuskurve und $n = 2$, z. B.:

$$b_2 = \frac{1}{12} (y_1 \sin 2 \cdot 15^\circ + y_2 \sin 2 \cdot 30^\circ + y_3 \sin 2 \cdot 45^\circ + y_4 \sin 2 \cdot 60^\circ + \dots + y_{24} \sin 2 \cdot 360^\circ)$$

oder für die einzelnen Fälle allgemein:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{12} \sum_1^{24} y_r \cos n \cdot 15^\circ \cdot r \\ b_n &= \frac{1}{12} \sum_1^{24} y_r \sin n \cdot 15^\circ \cdot r \end{aligned} \right\} \text{Allgemeiner Fall}$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{6} \sum_1^{12} y_r \cos n \cdot 15^\circ \cdot r \\ b_n &= \frac{1}{6} \sum_1^{12} y_r \sin n \cdot 15^\circ \cdot r \end{aligned} \right\} \text{Sonderfall a}$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \sum_1^6 y_r \cos n \cdot 15^\circ \cdot r \\ b_n &= \frac{1}{3} \sum_1^6 y_r \sin n \cdot 15^\circ \cdot r \end{aligned} \right\} \text{Sonderfall b.}$$

Die Durchführung der Rechnungen wird bequemer, wenn man die Werte

$$\cos n \cdot 15^\circ \cdot r \quad \text{und} \quad \sin n \cdot 15^\circ \cdot r$$

in einer Tafel zusammenstellt. Da

$$\cos \varphi = -\cos(\pi - \varphi) = -\cos(\pi + \varphi) = \cos(2\pi - \varphi)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right)$$

kommen in der Zusammenstellung nur die Werte vor:

$$\pm 1,000; \quad \pm 0,966; \quad \pm 0,866; \quad \pm 0,707; \quad \pm 0,500; \quad \pm 0,259.$$

Mithin ergibt sich für die ersten drei Harmonischen:

$$\cos(n \cdot r \cdot 15^\circ) \qquad \qquad \qquad \sin(n \cdot r \cdot 15^\circ)$$

$n =$	1	2	3	$n =$	1	2	3
r				r			
1	0,966	0,866	0,707	1	0,259	0,500	0,707
2	0,866	0,500	0	2	0,500	0,866	1,000
3	0,707	0	-0,707	3	0,707	1,000	0,707
4	0,500	-0,500	-1,000	4	0,866	0,866	0
5	0,259	-0,866	-0,707	5	0,966	0,500	-0,707
6	0	-1,000	0	6	1,000	0	-1,000
7	-0,259	-0,866	0,707	7	0,966	-0,500	-0,707
8	-0,500	-0,500	1,000	8	0,866	-0,866	0
9	-0,707	0	0,707	9	0,707	-1,000	0,707
10	-0,866	0,500	0	10	0,500	-0,866	1,000
11	-0,966	0,866	-0,707	11	0,259	-0,500	0,707
12	-1,000	1,000	-1,000	12	0	0	0
13	-0,966	0,866	-0,707	13	-0,259	0,500	-0,707
14	-0,866	0,500	0	14	-0,500	0,866	-1,000
15	-0,707	0	0,707	15	-0,707	1,000	-0,707
16	-0,500	-0,500	1,000	16	-0,866	0,866	0
17	-0,259	-0,866	0,707	17	-0,966	0,500	0,707
18	0	-1,000	0	18	-1,000	0	1,000
19	0,259	-0,866	-0,707	19	-0,966	-0,500	0,707
20	0,500	-0,500	-1,000	20	-0,866	-0,866	0
21	0,707	0	-0,707	21	-0,707	-1,000	-0,707
22	0,866	0,500	0	22	-0,500	-0,866	-1,000
23	0,966	0,866	0,707	23	-0,259	-0,500	-0,707
24	1,000	1,000	1,000	24	0	0	0

Die Literatur enthält viele Methoden, die die oben angegebene, langwierige Berechnungsart ersetzen soll. Außerdem sind harmonische Analy-

satoren konstruiert worden, die auf mechanischem Wege die Zerlegung der periodischen Kurve vornehmen.

Im folgenden Abschnitt wird ein Verfahren angegeben, das die Analyse mittels Tafel ausführt.

3. Entwicklung des Tafelverfahrens.

Im vorangehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß zur Bestimmung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe Produkte zu bilden sind der Ordinaten y_r mit den Faktoren $\pm 1,000$; $\pm 0,966$; $\pm 0,866$; $\pm 0,707$; $\pm 0,500$; $\pm 0,259$. Es liegt nun nahe, die Ordinaten in die Senkrechtpalte einer Tafel einzutragen, deren Horizontalreihen die Produkte mit den oben genannten Zahlen enthalten. Trägt man in die entsprechenden Felder der Tafel die Produkte ein, die z. B. zur Bestimmung des Koeffizienten a_1 nötig sind, also:

$$+ 0,966 y_1; \quad 0,866 y_2; \quad 0,707 y_3; \quad 0,500 y_4 \text{ usw.},$$

so ergibt sich folgende Reihenfolge:

	+1,000	+0,966	+0,866	+0,707	+0,500	+0,259	0	-0,259	-0,500	-0,707	-0,866	-0,966	-1,000
1		+ 0,966 y_1											
2			+ 0,866 y_2										
3				+ 0,707 y_3									
4					+ 0,500 y_4								
5						+ 0,259 y_5	0						
6								- 0,259 y_7					
7													

Die gleiche Reihenfolge findet sich auf der im Tafelteil befindlichen Tafel A_1 . Wie leicht zu ersehen ist, ergibt sich für jeden Koeffizient eine eindeutig bestimmte Reihenfolge. Würde man die senkrechten Spalten nicht nebeneinander setzen, sondern im Verhältnis der Faktoren, so entstünden die Kurven $\sin n \cdot r \cdot 15^0$ und $\cos n \cdot r \cdot 15^0$. Damit ist nun das Verfahren gegeben. Man führt die Multiplikationen einmal aus und trägt die Produkte in eine Tafel, der Grundtafel, ein. Mit Hilfe von Schablonen oder Deckblättern, für jeden Koeffizient ein besonderes, sucht man diejenigen Produkte heraus, die zur Berechnung des Koeffizienten notwendig sind. Im vorliegenden Buch ist die Grundtafel auf durchsichtiges Papier gedruckt, die auf die Rechnungstafeln aufgelegt werden. Die auf rotem Untergrund sichtbaren Zahlen werden addiert; die derart erhaltene „Tafelsumme“ ist gleich dem 12fachen Wert des gesuchten Koeffizienten. Damit wird:

$$a_n = \frac{1}{12} \sum_1^{24} y_r \cos n \cdot 15^0 \cdot r = \frac{1}{12} A_n^{(24)}$$

$$b_n = \frac{1}{12} \sum_1^{24} y_r \sin n \cdot 15^0 \cdot r = \frac{1}{12} B_n^{(24)}$$

A_n und B_n sind Abkürzungen für die Tafelsummen, der Index gibt die Harmonische an, die über den Buchstaben eingeklammerte Zahl die obere Grenze der Summenbildung.

Für die einzelnen Fälle ergeben sich folgende Gleichungen für die Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{12} A_n^{(24)} \\ b_n &= \frac{1}{12} B_n^{(24)} \end{aligned} \right\} \text{Allgemeiner Fall}$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{6} A_n^{(12)} \\ b_n &= \frac{1}{6} B_n^{(12)} \end{aligned} \right\} \text{Sonderfall a}$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} A_n^{(6)} \\ b_n &= \frac{1}{3} B_n^{(6)} \end{aligned} \right\} \text{Sonderfall b}$$

Bei Durchführung der Berechnung erkennt man, daß bei günstiger Wahl der Einteilung der Periode z. B. $2m = 24$ zur Bestimmung der Koeffizienten nicht alle Produkte der Grundtafel nötig sind, sondern nur diejenigen, deren Felder frei sind. Dadurch wird etwa die Hälfte der Berechnungszeit für die Grundtafel erspart. Diese neue Tafel ist ein nicht geringer Fortschritt gegenüber Hermann-Lohmann¹⁾.

4. Anwendung der Tafeln.

Nachdem die mathematischen Grundlagen besprochen sind und das Verfahren entwickelt ist, sollen für die einzelnen Fälle die verschiedenen Rechenoperationen zusammengestellt werden.

Die Periode wird in 24 Teile geteilt, die Ordinaten y_1 bis y_{24} ermittelt und mit Vorzeichen in die erste mit y bezeichnete Senkrechtpalte der Grundtafel eingetragen. Mittels der Multiplikationstafeln werden die Produkte ausgerechnet und diese in die Tafel eingeschrieben; dann wird die linke Tafelhälfte mit entgegengesetztem Vorzeichen nach rechts übertragen. Nachdem die Grundtafel ausgefüllt ist, wird sie zur Bestimmung der Koeffizienten auf die entsprechende Tafel aufgelegt und die auf rotem Untergrund sichtbaren Zahlen addiert bzw. subtrahiert. Die derart erhaltenen und mit A_n und B_n bezeichneten Tafelsummen sind gleich dem 12fachen Wert der gesuchten Koeffizienten a_n und b_n ; diese werden damit:

$$a_n = \frac{A_n^{(24)}}{12}; \quad b_n = \frac{B_n^{(24)}}{12}$$

¹⁾ Vgl. Vorwort.

und das konstante Glied ergibt:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{\text{Gesamtsumme der Ordinaten}}{24} = \frac{A_0^{(24)}}{24}$$

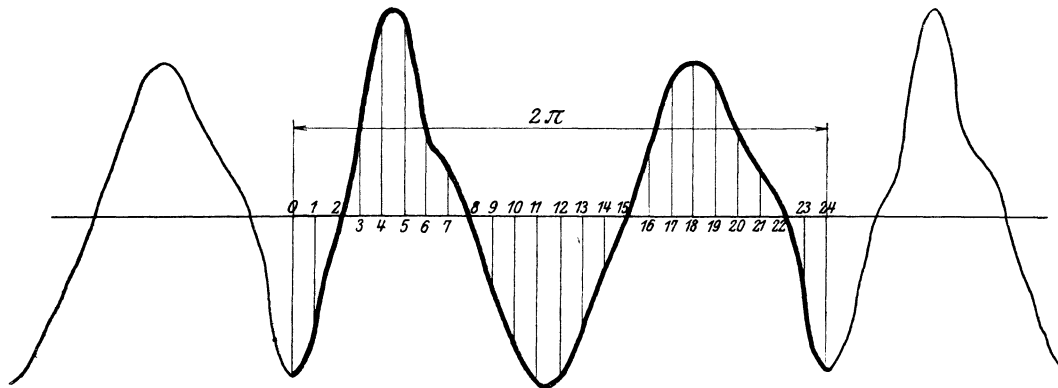


Abb. 5. Allgemeiner Fall. Die Kurve zeigt innerhalb der Periode keine Symmetrie.

Aus diesen Koeffizienten berechnen sich nach Gl. 3 die resultierenden zu:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

und die Phasenverschiebung φ aus:

$$\text{tang } \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

In diesem Fall genügt die halbe Periode in 12 gleiche Teile zu teilen und die Grundtafel bis zum Begrenzungsstrich I auszufüllen. Den Anfangs-

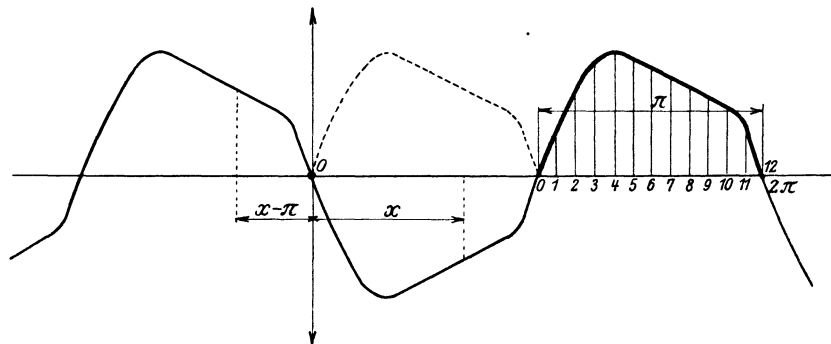


Abb. 6. Sonderfall a. Die halbe Periode ist spiegelbildgleich zur Abszissenachse.

punkt der Periode wählt man zweckmäßig so, daß er mit dem Schnittpunkt der Kurve mit der Abszissenachse zusammenfällt, damit $y_0 = y_{12} = 0$ wird. Ist die Anfangsordinate von Null verschieden, so darf nur der halbe Ordinatenwert in die Grundtafel eingetragen werden, worauf der auf dem Be-

grenzungsstrich stehende Bruch $\frac{1}{2}$ aufmerksam machen soll. Die Tafelsumme ist hier gleich dem 6fachen Wert des gesuchten Koeffizienten, wobei zu beachten ist, daß die Grundkurven gerader Ordnung verschwinden. Es ist also in diesem Sonderfall:

$$\begin{aligned} a_n' &= \frac{A_n^{(12)}}{6}; & b_n' &= \frac{B_n^{(12)}}{6} & (n \text{ ungerade}) \\ a_n' &= 0; & b_n' &= 0 & (n \text{ gerade}). \end{aligned}$$

Hier genügt die Einteilung der $\frac{1}{4}$ Periode in 6 gleiche Teile und das Eintragen der Ordinaten bis zum Begrenzungsstrich II; in die Spalte 6 wieder der halbe Ordinatenwert.

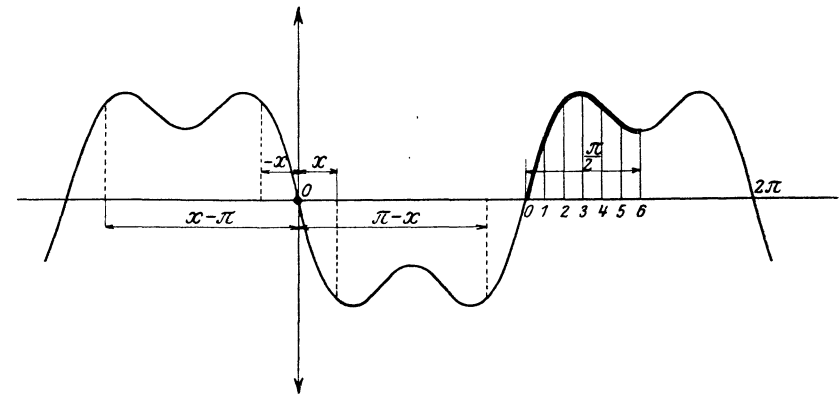


Abb. 7. Sonderfall b. Die zu zerlegende Kurve ist außerdem symmetrisch zur Ordinate $\frac{\pi}{2}$.

Die Koeffizienten werden:

$$\begin{aligned} a_n'' &= 0 & (\text{für alle } a), \\ b_n'' &= 0 & (n \text{ gerade}), \\ b_n'' &= \frac{B_n^{(6)}}{3} & (n \text{ ungerade}) \end{aligned}$$

und die Reihe lautet:

$$\varphi(x) = b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \dots$$

5. Allgemeine Bemerkungen.

a) Die Tafeln tragen die Bezeichnungen A_n und B_n , der Index gibt die Ordnung der harmonischen Kurve an. Die gleichen Bezeichnungen führen zur Abkürzung die Tafelsummen, mit dem Unterschied, daß über den Buchstaben in Klammern noch eine Zahl steht, die angibt, bis zu welcher Stelle die Grundtafel auszufüllen ist. Außerdem enthalten die Tafeln die zur Bestimmung der Koeffizienten nötigen Gleichungen, wobei $a; b$ für den all-

gemeinen, a' ; b' für den ersten und a'' ; b'' für den zweiten Sonderfall gelten. So stehen z. B. auf Tafel B_4 die Bezeichnungen:

$$b_4 = \frac{B_4^{(24)}}{12}; \quad b_4' = 0; \quad b_4'' = 0;$$

d. h. im allgemeinen Fall ist die Tafelsumme (ganze Grundtafel) durch 12 zu dividieren, um den Koeffizienten b_4 zu erhalten. In den beiden Sonderfällen verschwinden die Koeffizienten.

b) Zweckmäßig werden in die Grundtafel nur die „—“-Zeichen eingetragen, bei den positiven Werten nur die Zahl selbst. Auf diese Art dürfte ein Übersehen des Vorzeichens kaum vorkommen.

c) Zur Berechnung der Tafelsumme geht der weniger geübte Rechner am besten so vor, daß er die auf den roten Feldern sichtbaren Zahlen der Grundtafel auf ein besonderes Blatt, nach den Vorzeichen geordnet, heraus schreibt, die Zahlen mit gleichen Vorzeichen addiert und hieraus erst die Endsumme bildet. Sehr vereinfacht wird die Rechnung mittels einer Rechenmaschine, wobei die Taschenrechenmaschine „Addiator“¹⁾ gute Dienste leistet. Gut brauchbar ist auch der Additionsrechenschieber System „Korte“²⁾, der, wie die Rechenmaschine, ein abwechselndes Addieren und Subtrahieren gestattet. Bei Verwendung einer Rechenmaschine stellt man zuerst eine größere Zahl ein, die größer als die Summe der negativen Zahlen ist, also z. B. 100, 200 usw., was leicht überschlägig zu ersehen ist. Diese Zahl muß natürlich wieder von der Endsumme abgezogen werden, um die Tafelsumme zu erhalten. Beim Gebrauch des Rechenschiebers ist es notwendig, die Zahlen mit gleicher Stellenzahl zu schreiben, gegebenenfalls durch Anfügen von Nullen rechts vom Komma.

6. Besondere Anwendungsmöglichkeiten.

a) Der Rechner, dem das wechselnde Vorkommen von positiven und negativen Zahlen nicht zusagt, kann folgenden, auch von Lohmann³⁾ angegebenen Weg einschlagen. Durch Parallelverschiebung der Abszissenachse oder durch Addieren einer konstanten Zahl zu den Ordinatenwerten, erhält man nur positive Ordinaten. Damit haben alle Zahlen auf der linken Hälfte der Grundtafel ein positives bzw. kein Vorzeichen, die Zahlen auf der rechten und mit „negativ“ bezeichneten Tafelseite ein negatives Vorzeichen. Für beide Seiten wird die Addition getrennt ausgeführt und erst aus den Teilsommen die Tafelsumme ermittelt.

b) In manchen Fällen genügt die Kenntnis einer bestimmten Harmonischen. Die Berechnung ist ohne vollständige Ausarbeitung der Grundtafel möglich. Die Ordinatenwerte werden wie bisher in die Grundtafel eingetragen, dann wird diese auf die entsprechende Tafel aufgelegt und nur die Multiplikationen durchgeführt, die durch die roten Felder vorgezeichnet sind.

¹⁾ Addiator-Gesellschaft, Berlin-Steglitz, Albrechtstraße.

²⁾ Macherey, Nagel & Co. m. b. H., Düren (Rheinland).

³⁾ Vgl. Vorwort.

c) Je nach Form der zu zerlegenden periodischen Kurve oder der geforderten Genauigkeit genügen 12 Ordinatenwerte der Kurve. Diese 12 Teilpunkte werden mit geraden Zahlen 0, 2, 4 bis 24 bezeichnet und dementsprechend in die Grundtafel eingetragen. Ferner sind nur die mit $\pm 0,5 y$; $\pm 0,866 y$ und $\pm 1,000 y$ bezeichneten Vertikalspalten auszufüllen.

7. Zusammenfassung der beiden Wellen.

Für die Vereinigung der beiden Kurven zu einer einzigen mit Phasenverschiebung nach Gl. 3 ist folgendes zu beachten. Zur Berechnung der

Amplituden $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ genügen die in jedem Taschenbuch befindlichen Quadratzahlen. Aus $\tan \varphi_n$

$= \frac{a_n}{b_n}$ wird mittels der Tangens-Tafel

der Winkel ermittelt, er sei φ_n' . Dieser

Winkel kann in einem der vier Quadranten liegen, wie aus der trigonometrischen Beziehung:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi') = \operatorname{tg}(180^\circ + \varphi') \\ &= \operatorname{tg}(360^\circ - \varphi') \end{aligned}$$

ohne weiteres hervorgeht. Um die Feststellung des Quadranten zu erleichtern, dient Abb. 8, die an einem Beispiel näher erklärt werden soll.

Die Rechnung möge ergeben:

$$a_1 = +46,08, \quad b_1 = -51,20.$$

Hiermit wird:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{46,08}{51,20} = 0,900$$

und

$$\varphi' = 42^\circ.$$

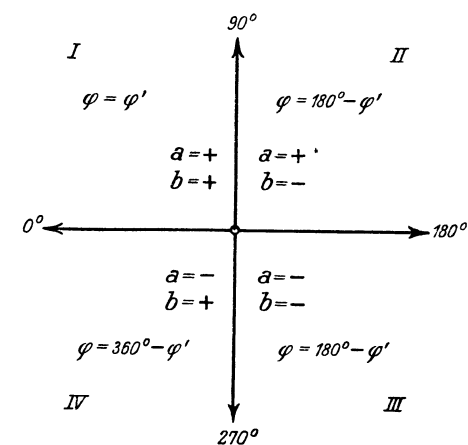


Abb. 8.

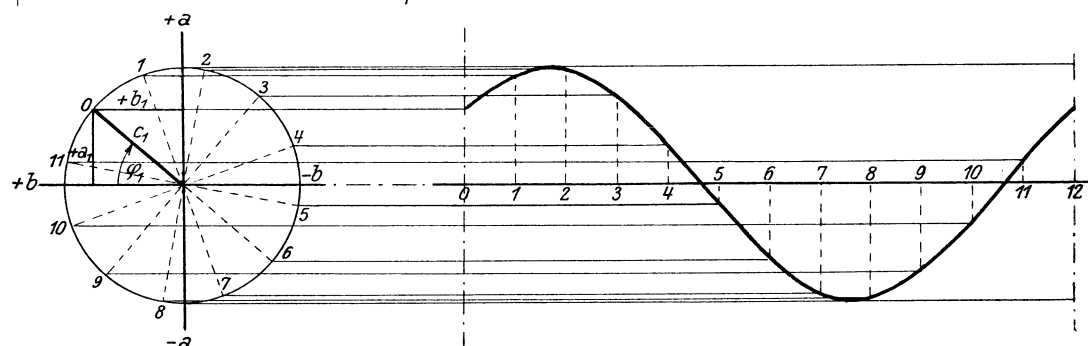


Abb. 9.

Für positives a und negatives b liegt der Winkel im 2. Quadranten und der wirkliche Wert der Phasenverschiebung ergibt sich zu:

$$\varphi = 180^\circ - \varphi' = 138^\circ.$$

Werden die harmonischen Kurven gleich aufgezeichnet, so ist die graphische Ermittlung der Amplituden c_n und die Phasenverschiebung φ_n nach Abb. 9 am zweckmäßigsten. Die Abbildung zeigt gleichzeitig das Aufzeichnen der Harmonischen und zwar für die Grundkurve.

8. Reihenfolge der auszuführenden Rechnungen.

(Gebrauchsanweisung.)

a) Allgemeiner Fall.

1. Eintragen der Ordinaten mit Vorzeichen (positives Vorzeichen weglassen, negatives einschreiben).
2. Ausführung der Multiplikationen mit Hilfe der Multiplikationstafeln.
3. Übertragen der Werte mit entgegengesetztem Vorzeichen in die mit „negativ“ bezeichnete Tafelseite.
4. Berechnung der Tafelsummen A_0, A_1, A_n, B_n durch Auflegen der durchsichtigen Grundtafel auf die entsprechenden Tafeln mit roten Rechtecken.
5. Berechnung der Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{\overset{(24)}{A_0}}{24} = \dots$$

$$a_1 = \frac{\overset{(21)}{A_1}}{12} = \dots$$

$$b_1 = \frac{\overset{(24)}{B_1}}{12} = \dots$$

$$a_2 = \frac{\overset{(21)}{A_2}}{12} = \dots \quad \text{usw.}$$

b) Sonderfall a.

1. Eintragen der Ordinaten bis Strich I; y_{12} mit dem halben Ordinatenwert.
2. Wie oben.
3. Wie oben.
4. Berechnung der Tafelsummen $A_1, B_1, A_3, B_3, A_5, B_5 \dots$
5. Berechnung der Koeffizienten:

$$a_0' = 0$$

$$a_1' = \frac{\overset{(12)}{A_1}}{6} = \dots$$

$$b_1' = \frac{\overset{(2)}{B_1}}{6} = \dots$$

$$a_2' = 0$$

$$b_2' = 0$$

$$a_3' = \frac{\overset{(12)}{A_3}}{6} = \dots \quad \text{usw.}$$

c) Sonderfall b.

1. Eintragen der Ordinaten bis Strich II; y_0 mit dem halben Wert.
2. Wie oben.
3. Wie oben.
4. Berechnung der Tafelsummen $B_1, B_3, B_5 \dots$
5. Berechnung der Koeffizienten:

$$a_0'' = 0$$

$$a_1'' = 0$$

$$b_1'' = \frac{\overset{(6)}{B_1}}{3} = \dots$$

$$a_2'' = 0$$

$$b_2'' = 0$$

$$a_3'' = 0$$

$$b_3'' = \frac{\overset{(6)}{B_3}}{3} = \dots \quad \text{usw.}$$

Weitere Auswertung.

$$a_0 = \dots$$

$$c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \dots$$

$$\text{tang } \varphi_1 = \frac{a_1}{b_1} = \dots$$

$$\varphi_1' = \dots \quad \text{Quadrant: } \dots$$

$$\varphi_1 = \dots$$

$$c_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \dots$$

$$\text{tang } \varphi_2' = \frac{a_2}{b_2} = \dots$$

$$\varphi_2' = \dots \quad \text{Quadrant: } \dots$$

$$\varphi_2 = \dots \quad \text{usw.}$$

Multiplikationstafel

1 ÷ 50

y	0,966 y	0,866 y	0,707 y	0,500 y	0,259 y
1	0,97	0,87	0,71	0,50	0,26
2	1,93	1,73	1,41	1,00	0,52
3	2,90	2,60	2,12	1,50	0,78
4	3,86	3,46	2,83	2,00	1,03
5	4,83	4,33	3,54	2,50	1,29
6	5,80	5,20	4,24	3,00	1,55
7	6,76	6,06	4,95	3,50	1,81
8	7,73	6,93	5,66	4,00	2,07
9	8,69	7,79	6,36	4,50	2,33
10	9,66	8,66	7,07	5,00	2,59
11	10,63	9,53	7,78	5,50	2,85
12	11,59	10,39	8,48	6,00	3,11
13	12,56	11,26	9,19	6,50	3,36
14	13,52	12,12	9,90	7,00	3,62
15	14,49	12,99	10,61	7,50	3,88
16	15,45	13,86	11,31	8,00	4,14
17	16,42	14,72	12,02	8,50	4,40
18	17,39	15,59	12,73	9,00	4,66
19	18,35	16,45	13,43	9,50	4,92
20	19,32	17,32	14,14	10,00	5,18
21	20,28	18,19	14,85	10,50	5,43
22	21,25	19,05	15,56	11,00	5,69
23	22,22	19,92	16,26	11,50	5,95
24	23,18	20,78	16,97	12,00	6,21
25	24,15	21,65	17,68	12,50	6,47
26	25,11	22,52	18,38	13,00	6,73
27	26,08	23,38	19,09	13,50	6,99
28	27,05	24,25	19,80	14,00	7,25
29	28,01	25,11	20,51	14,50	7,51
30	28,98	25,98	21,21	15,00	7,76
31	29,94	26,85	21,92	15,50	8,02
32	30,91	27,71	22,63	16,00	8,28
33	31,88	28,58	23,33	16,50	8,54
34	32,84	29,44	24,04	17,00	8,80
35	33,81	30,31	24,75	17,50	9,06
36	34,77	31,18	25,46	18,00	9,32
37	35,74	32,04	26,16	18,50	9,58
38	36,70	32,91	26,87	19,00	9,83
39	37,67	33,77	27,58	19,50	10,09
40	38,64	34,64	28,28	20,00	10,35
41	39,60	35,51	28,99	20,50	10,61
42	40,57	36,37	29,70	21,00	10,87
43	41,53	37,24	30,41	21,50	11,13
44	42,50	38,10	31,11	22,00	11,39
45	43,47	38,97	31,82	22,50	11,65
46	44,43	39,84	32,53	23,00	11,91
47	45,40	40,70	33,23	23,50	12,16
48	46,36	41,57	33,94	24,00	12,42
49	47,33	42,43	34,65	24,50	12,68
50	48,30	43,30	35,35	25,00	12,94

0,966
0,1 0,10
0,2 0,19
0,3 0,29
0,4 0,39
0,5 0,48
0,6 0,58
0,7 0,68
0,8 0,77
0,9 0,87

0,866
0,1 0,09
0,2 0,17
0,3 0,26
0,4 0,35
0,5 0,43
0,6 0,52
0,7 0,61
0,8 0,69
0,9 0,78

Multiplikationstafel

51 ÷ 100

y	0,966 y	0,866 y	0,707 y	0,500 y	0,259 y
51	49,26	44,17	36,06	25,50	13,20
52	50,23	45,03	36,77	26,00	13,46
53	51,19	45,89	37,48	26,50	13,72
54	52,16	46,77	38,18	27,00	13,98
55	53,13	47,63	38,89	27,50	14,23
56	54,09	48,50	39,60	28,00	14,49
57	55,06	49,36	40,30	28,50	14,75
58	56,02	50,23	41,01	29,00	15,01
59	56,99	51,10	41,71	29,50	15,27
60	57,96	51,96	42,43	30,00	15,53
61	58,92	52,83	43,13	30,50	15,79
62	59,89	53,69	43,84	31,00	16,05
63	60,85	54,56	44,55	31,50	16,31
64	61,82	55,43	45,25	32,00	16,56
65	62,78	56,29	45,96	32,50	16,82
66	63,75	57,16	46,67	33,00	17,08
67	64,72	58,02	47,38	33,50	17,34
68	65,68	58,89	48,08	34,00	17,60
69	66,65	59,76	48,79	34,50	17,86
70	67,61	60,62	49,50	35,00	18,12
71	68,58	61,49	50,20	35,50	18,38
72	69,55	62,35	50,91	36,00	18,63
73	70,51	63,22	51,62	36,50	18,89
74	71,48	64,09	52,33	37,00	19,15
75	72,44	64,95	53,03	37,50	19,41
76	73,41	65,82	53,74	38,00	19,67
77	74,38	66,68	54,45	38,50	19,93
78	75,34	67,55	55,15	39,00	20,19
79	76,31	68,42	55,86	39,50	20,45
80	77,27	69,28	56,57	40,00	20,71
81	78,24	70,15	57,28	40,50	20,96
82	79,21	71,01	57,98	41,00	21,22
83	80,17	71,88	58,69	41,50	21,48
84	81,14	72,75	59,40	42,00	21,74
85	82,10	73,61	60,10	42,50	22,00
86	83,07	74,48	60,81	43,00	22,26
87	84,04	75,34	61,52	43,50	22,52
88	85,00	76,21	62,23	44,00	22,78
89	85,97	77,08	62,93	44,50	23,03
90	86,93	77,94	63,64	45,00	23,29
91	87,90	78,81	64,35	45,50	23,55
92	88,87	79,67	65,05	46,00	23,81
93	89,83	80,54	65,76	46,50	24,07
94	90,80	81,41	66,47	47,00	24,33
95	91,76	82,27	67,17	47,50	24,59
96	92,73	83,14	67,88	48,00	24,85
97	93,69	84,00	68,59	48,50	25,10
98	94,66	84,87	69,30	49,00	25,36
99	95,63	85,74	70,00	49,50	25,62
100	96,59	86,60	70,71	50,00	25,88

Multiplikationstafel

101 ÷ 150

<i>y</i>	0,966 <i>y</i>	0,866 <i>y</i>	0,707 <i>y</i>	0,500 <i>y</i>	0,259 <i>y</i>
101	97,56	87,47	71,42	50,50	26,14
102	98,53	88,33	72,12	51,00	26,40
103	99,49	89,20	72,83	51,50	26,66
104	100,46	90,07	73,54	52,00	26,92
105	101,42	90,93	74,25	52,50	27,18
106	102,39	91,80	74,95	53,00	27,43
107	103,35	92,66	75,66	53,50	27,69
108	104,32	93,53	76,37	54,00	27,95
109	105,29	94,40	77,07	54,50	28,21
110	106,25	95,26	77,78	55,00	28,47
111	107,22	96,13	78,49	55,50	28,73
112	108,18	96,99	79,20	56,00	28,99
113	109,15	97,86	79,90	56,50	29,25
114	110,12	98,73	80,61	57,00	29,50
115	111,08	99,59	81,32	57,50	29,76
116	112,05	100,46	82,02	58,00	30,02
117	113,01	101,32	82,73	58,50	30,28
118	113,98	102,19	83,44	59,00	30,54
119	114,95	103,06	84,15	59,50	30,80
120	115,91	103,92	84,85	60,00	31,06
121	116,88	104,79	85,56	60,50	31,32
122	117,84	105,66	86,27	61,00	31,58
123	118,81	106,52	86,97	61,50	31,83
124	119,77	107,39	87,68	62,00	32,09
125	120,74	108,25	88,39	62,50	32,35
126	121,71	109,12	89,10	63,00	32,61
127	122,67	109,99	89,80	63,50	32,87
128	123,64	110,85	90,51	64,00	33,13
129	124,60	111,72	91,22	64,50	33,39
130	125,57	112,58	91,92	65,00	33,65
131	126,54	113,45	92,63	65,50	33,90
132	127,50	114,32	93,34	66,00	34,16
133	128,47	115,18	94,05	66,50	34,42
134	129,43	116,05	94,75	67,00	34,68
135	130,40	116,91	95,46	67,50	34,94
136	131,37	117,78	96,17	68,00	35,20
137	132,33	118,65	97,87	68,50	35,46
138	133,30	119,51	97,58	69,00	35,72
139	134,26	120,38	98,29	69,50	35,98
140	135,23	121,24	98,99	70,00	36,23
141	136,20	122,11	99,70	70,50	36,49
142	137,16	122,98	100,41	71,00	36,75
143	138,13	123,84	101,12	71,50	37,01
144	139,09	124,71	101,82	72,00	37,27
145	140,06	125,57	102,53	72,50	37,53
146	141,03	126,44	103,24	73,00	37,79
147	141,99	127,31	103,94	73,50	38,05
148	142,96	128,17	104,65	74,00	38,30
149	143,92	129,04	105,36	74,50	38,56
150	144,89	129,90	106,07	75,00	38,82

Multiplikationstafel

151 ÷ 200

<i>y</i>	0,966 <i>y</i>	0,866 <i>y</i>	0,707 <i>y</i>	0,500 <i>y</i>	0,259 <i>y</i>
151	145,85	130,77	106,77	75,50	39,08
152	146,82	131,64	107,48	76,00	39,34
153	147,79	132,50	108,19	76,50	39,60
154	148,75	133,37	108,89	77,00	39,86
155	149,72	134,23	109,60	77,50	40,12
156	150,68	135,10	110,30	78,00	40,38
157	151,65	135,97	111,02	78,50	40,63
158	152,62	136,83	111,72	79,00	40,89
159	153,58	137,70	112,43	79,50	41,15
160	154,55	138,56	113,14	80,00	41,41
161	155,51	139,43	113,84	80,50	41,67
162	156,48	140,30	114,55	81,00	41,93
163	157,45	141,16	115,26	81,50	42,19
164	158,41	142,03	115,97	82,00	42,45
165	159,38	142,89	116,67	82,50	42,70
166	160,34	143,76	117,38	83,00	42,96
167	161,31	144,63	118,09	83,50	43,22
168	162,28	145,49	118,79	84,00	43,48
169	163,24	146,36	119,50	84,50	43,74
170	164,21	147,22	120,21	85,00	44,00
171	165,17	148,09	120,92	85,50	44,26
172	166,14	148,96	121,62	86,00	44,52
173	167,11	149,82	122,33	86,50	44,78
174	168,07	150,69	123,04	87,00	45,03
175	169,04	151,55	123,74	87,50	45,29
176	170,00	152,42	124,45	88,00	45,55
177	170,97	153,29	125,16	88,50	45,81
178	171,94	154,15	125,87	89,00	46,07
179	172,90	155,02	126,57	89,50	46,33
180	173,87	155,88	127,28	90,00	46,59
181	174,83	156,75	127,99	90,50	46,85
182	175,80	157,62	128,69	91,00	47,10
183	176,76	158,48	129,40	91,50	47,36
184	177,73	159,35	130,11	92,00	47,62
185	178,70	160,22	130,81	92,50	47,88
186	179,66	161,08	131,52	93,00	48,14
187	180,63	161,95	132,23	93,50	48,40
188	181,59	162,81	132,94	94,00	48,66
189	182,56	163,68	133,64	94,50	48,92
190	183,53	164,55	134,35	95,00	49,18
191	184,49	165,41	135,06	95,50	49,43
192	185,46	166,28	135,76	96,00	49,69
193	186,42	167,14	136,47	96,50	49,95
194	187,39	168,01	137,18	97,00	50,21
195	188,36	168,88	137,89	97,50	50,47
196	189,32	169,74	138,59	98,00	50,73
197	190,29	170,61	139,30	98,50	50,99
198	191,25	171,47	140,01	99,00	51,25
199	192,22	172,34	140,71	99,50	51,50
200	193,19	173,21	141,42	100,00	51,76

0,707

0,1 0,07
0,2 0,14
0,3 0,21
0,4 0,28
0,5 0,35
0,6 0,42
0,7 0,49
0,8 0,57
0,9 0,64

0,259

0,1 0,03
0,2 0,05
0,3 0,08
0,4 0,10
0,5 0,13
0,6 0,15
0,7 0,18
0,8 0,21
0,9 0,23

Tafel: tang φ
 $\varphi = 1 \div 45^\circ$

Grad	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138
8	0,140	0,143	0,146	0,149	0,152	0,155
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,209
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246
14	0,249	0,252	0,255	0,259	0,262	0,265
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341
19	0,344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,380
21	0,384	0,387	0,390	0,394	0,397	0,401
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484
26	0,488	0,491	0,495	0,499	0,502	0,506
27	0,509	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,546	0,550
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645
33	0,649	0,653	0,658	0,662	0,666	0,670
34	0,674	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696
35	0,700	0,704	0,709	0,713	0,718	0,722
36	0,726	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749
37	0,753	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927
43	0,932	0,938	0,943	0,949	0,954	0,960
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994
45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,029

Tafel: tang φ
 $\varphi = 45 \div 90^\circ$

Grad	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,029
46	1,035	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
53	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,779	1,792
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
64	2,050	2,065	2,081	2,096	2,112	2,128
65	2,144	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,454
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,698	2,723
70	2,747	2,772	2,798	2,824	2,850	2,877
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,449
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
79	5,144	5,226	5,309	5,395	5,484	5,576
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
81	6,314	6,435	6,560	6,691	6,827	6,968
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
83	8,144	8,345	8,555	8,777	9,010	9,255
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059
85	11,430	11,826	12,250	12,706	13,197	13,727
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,170	18,075
87	19,081	20,205	21,470	22,904	24,542	26,432
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104
89	57,290	68,750	85,940	114,589	171,885	343,774
90	∞					

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr. Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

II

I $\frac{1}{2}$

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

II

I $\frac{1}{2}$

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y	
0														
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
	„positiv“							„negativ“						

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

	y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y		
	0															
	1															
	2															
	3															
	4															
	5															
II	6															
	7															
	8															
	9															
	10															
	11															
I	12															
	13															
	14															
	15															
	16															
	17															
	18															
	19															
	20															
	21															
	22															
	23															
	24															
		„positiv“								„negativ“						

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

	y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y		
	0															
	1															
	2															
	3															
	4															
	5															
II	6															
	7															
	8															
	9															
	10															
	11															
I	12															
	13															
	14															
	15															
	16															
	17															
	18															
	19															
	20															
	21															
	22															
	23															
	24															
		„positiv“								„negativ“						

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y
0													
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													
22													
23													
24													
	„positiv“						„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr. Ing. L. Zipperer.

y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y	
0														
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
	„positiv“							„negativ“						

II $\frac{1}{2}$

I $\frac{1}{2}$

II

I

Grundtafel

zur harmonischen Analyse periodischer Kurven nach Dr.-Ing. L. Zipperer.

	y	+1,000y	+0,966y	+0,866y	+0,707y	+0,500y	+0,259y	0	-0,259y	-0,500y	-0,707y	-0,866y	-0,966y	-1,000y	
	0														
	1														
	2														
	3														
	4														
	5														
II	1/2														
	6														
	7														
	8														
	9														
	10														
	11														
I	1/2														
	12														
	13														
	14														
	15														
	16														
	17														
	18														
	19														
	20														
	21														
	22														
	23														
	24														
		„positiv“							„negativ“						

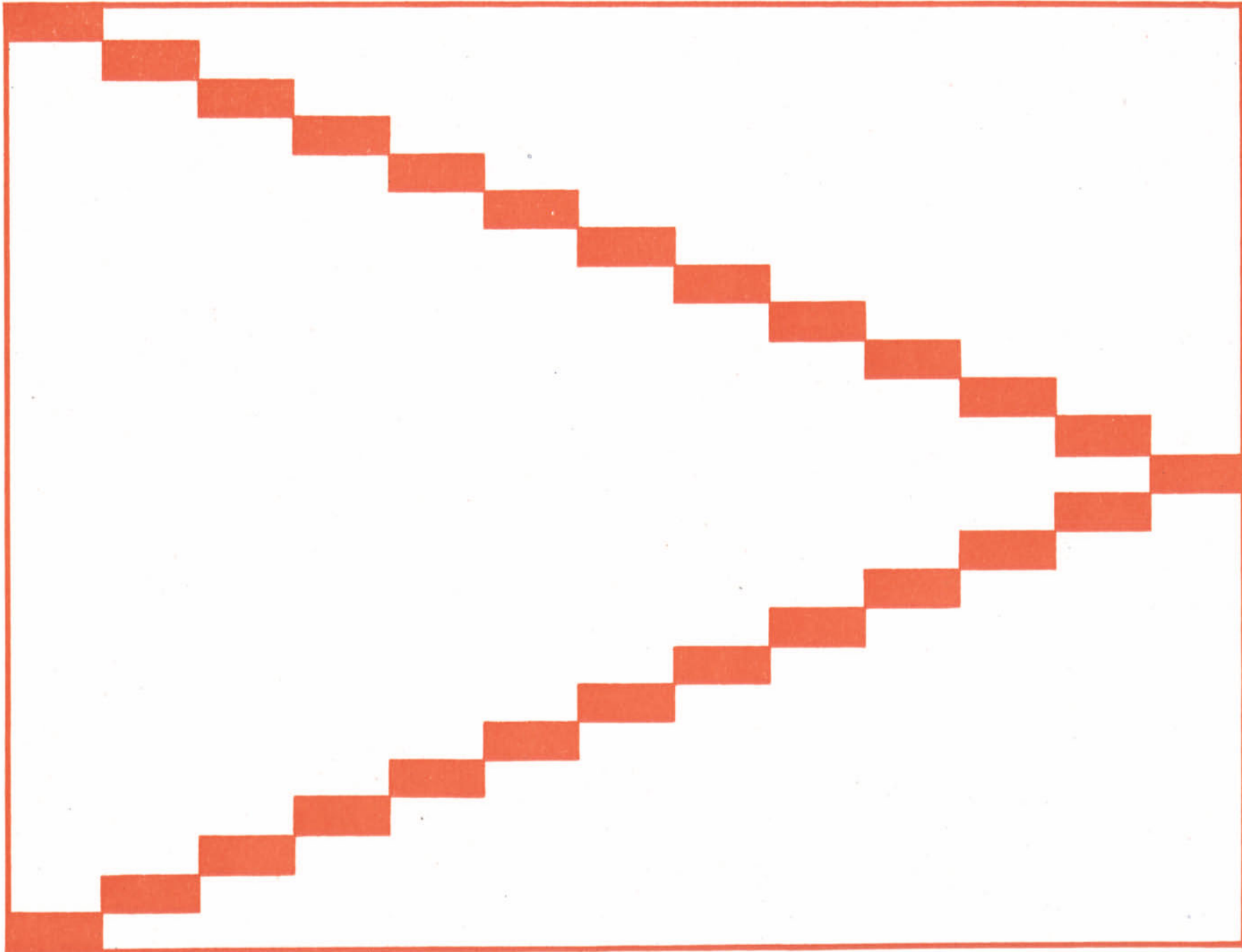
A_1

Tafel 1.

$$a_1 = \frac{A_1^{(24)}}{12}$$

$$a_1' = \frac{A_1^{(12)}}{6}$$

$$a_1'' = 0$$



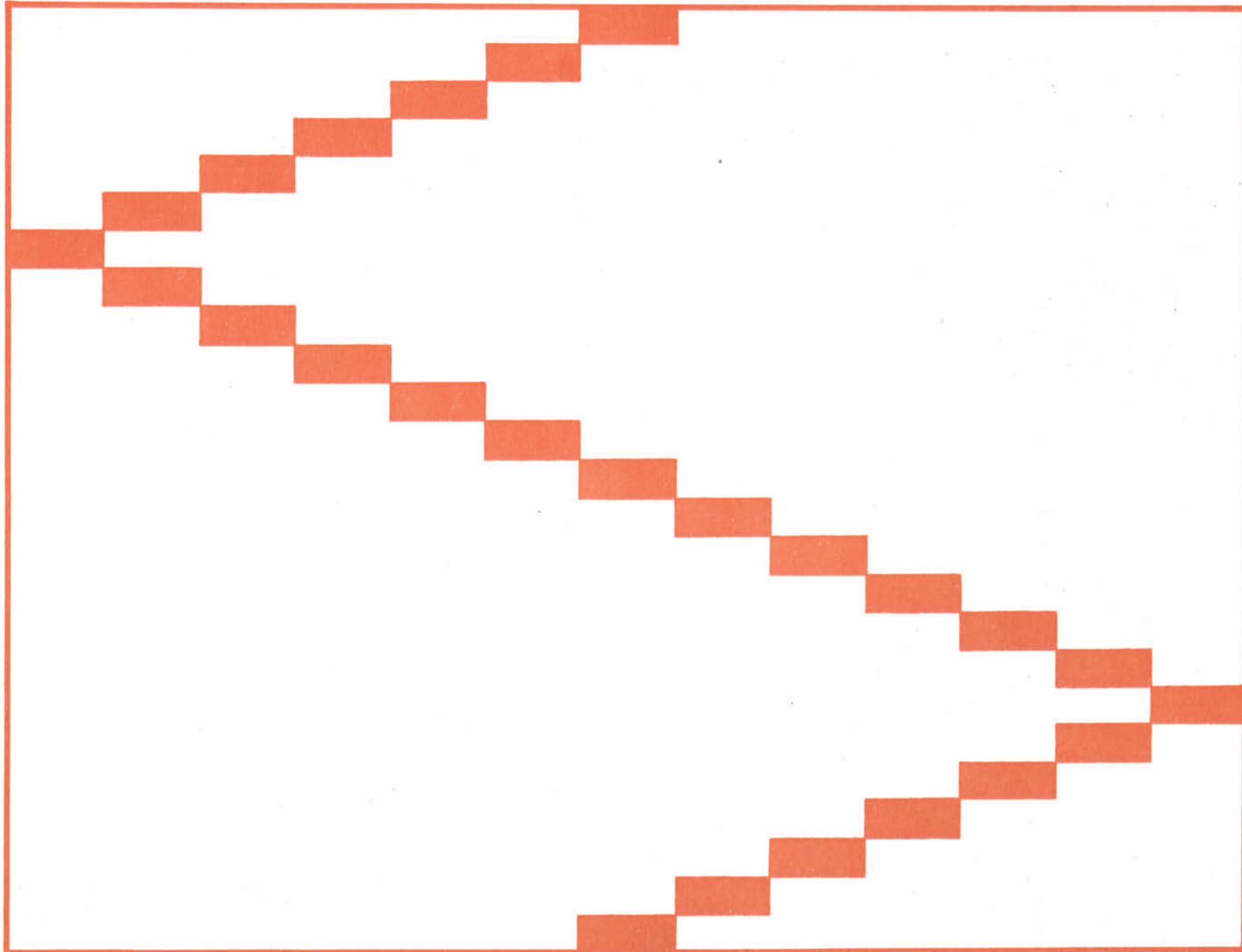
B_1

Tafel 2.

$$b_1 = \frac{{}^{(24)}B_1}{12}$$

$$b_1' = \frac{{}^{(12)}B_1}{6}$$

$$b_1'' = \frac{{}^{(6)}B_1}{3}$$



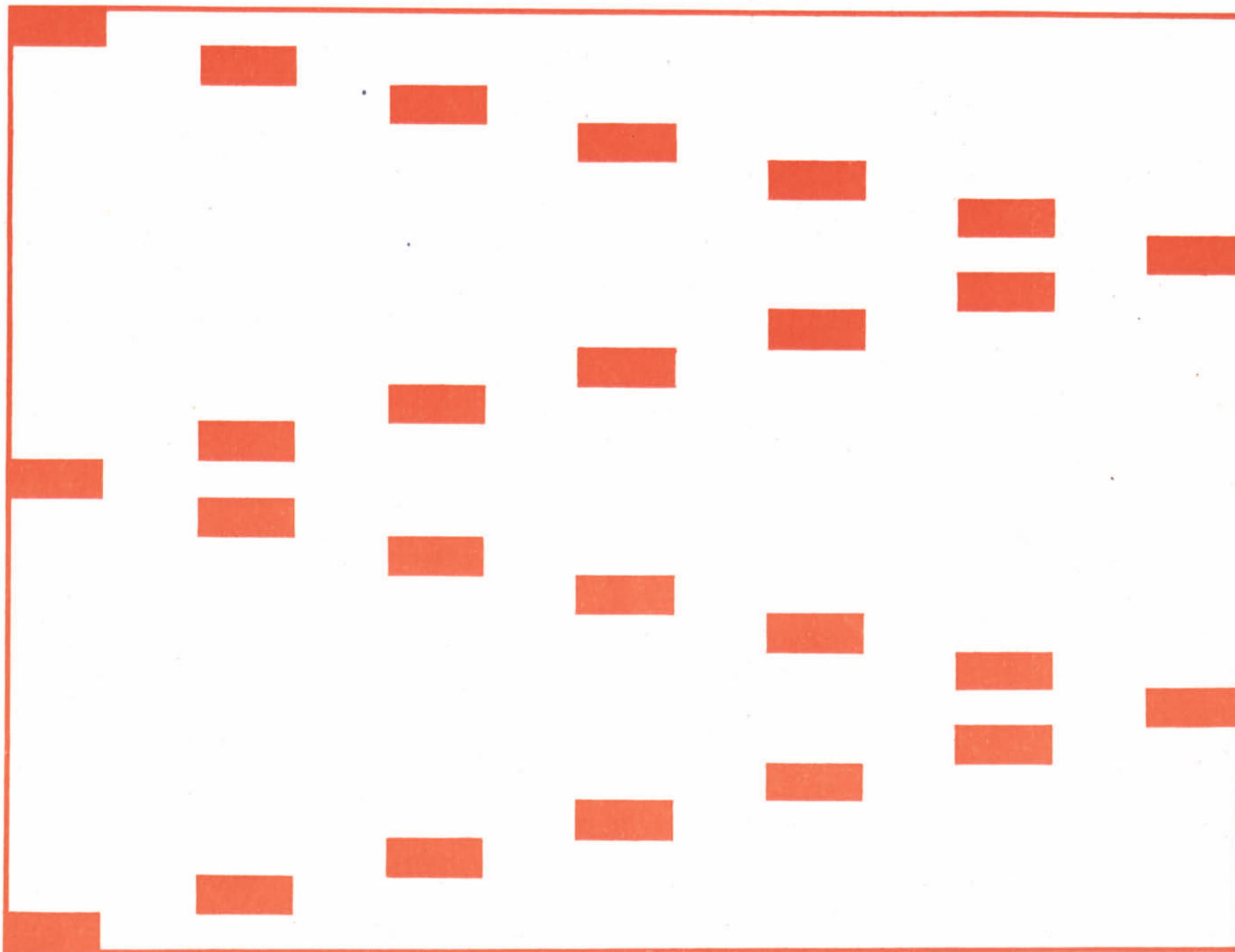
A_2

Tafel 3.

$$a_2 = \frac{A_2^{(24)}}{12}$$

$$a_2' = 0$$

$$a_2'' = 0$$



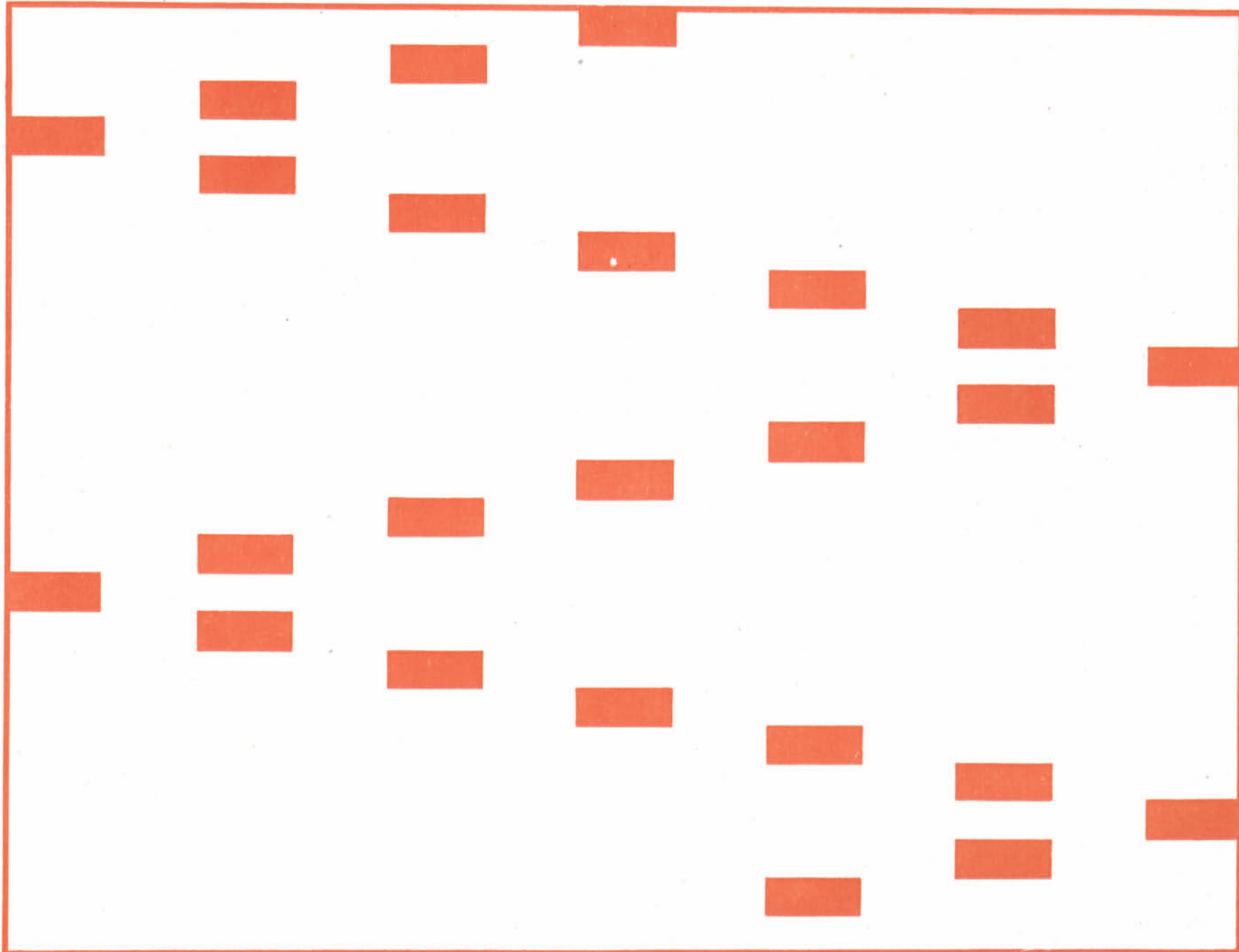
B_2

Tafel 4.

$$b_2 = \frac{B_2^{(24)}}{12}$$

$$b_2' = 0$$

$$b_2'' = 0$$



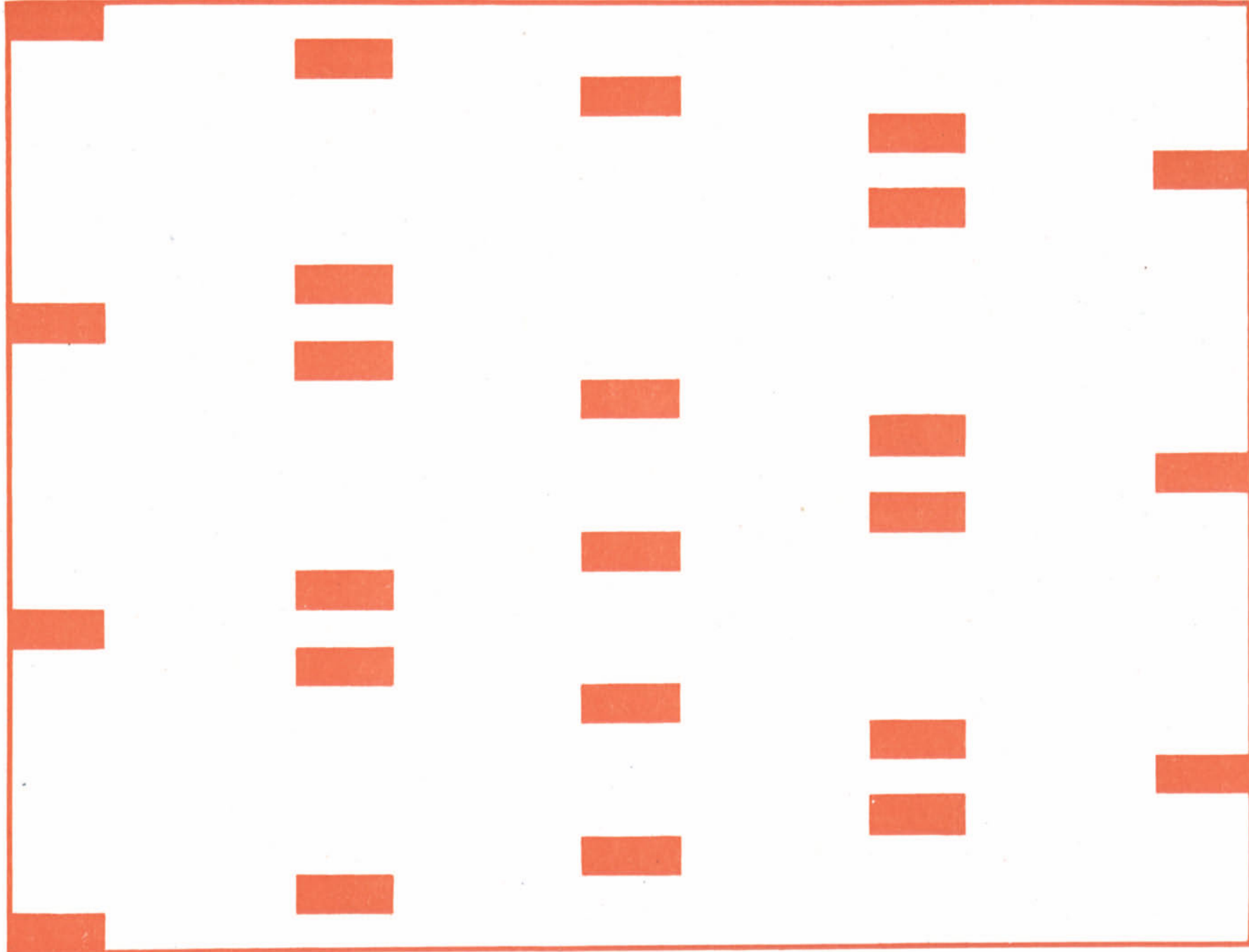
A_3

Tafel 5.

$$a_3 = \frac{A_3^{(24)}}{12}$$

$$a_3' = \frac{A_3^{(12)}}{6}$$

$$a_3'' = 0$$



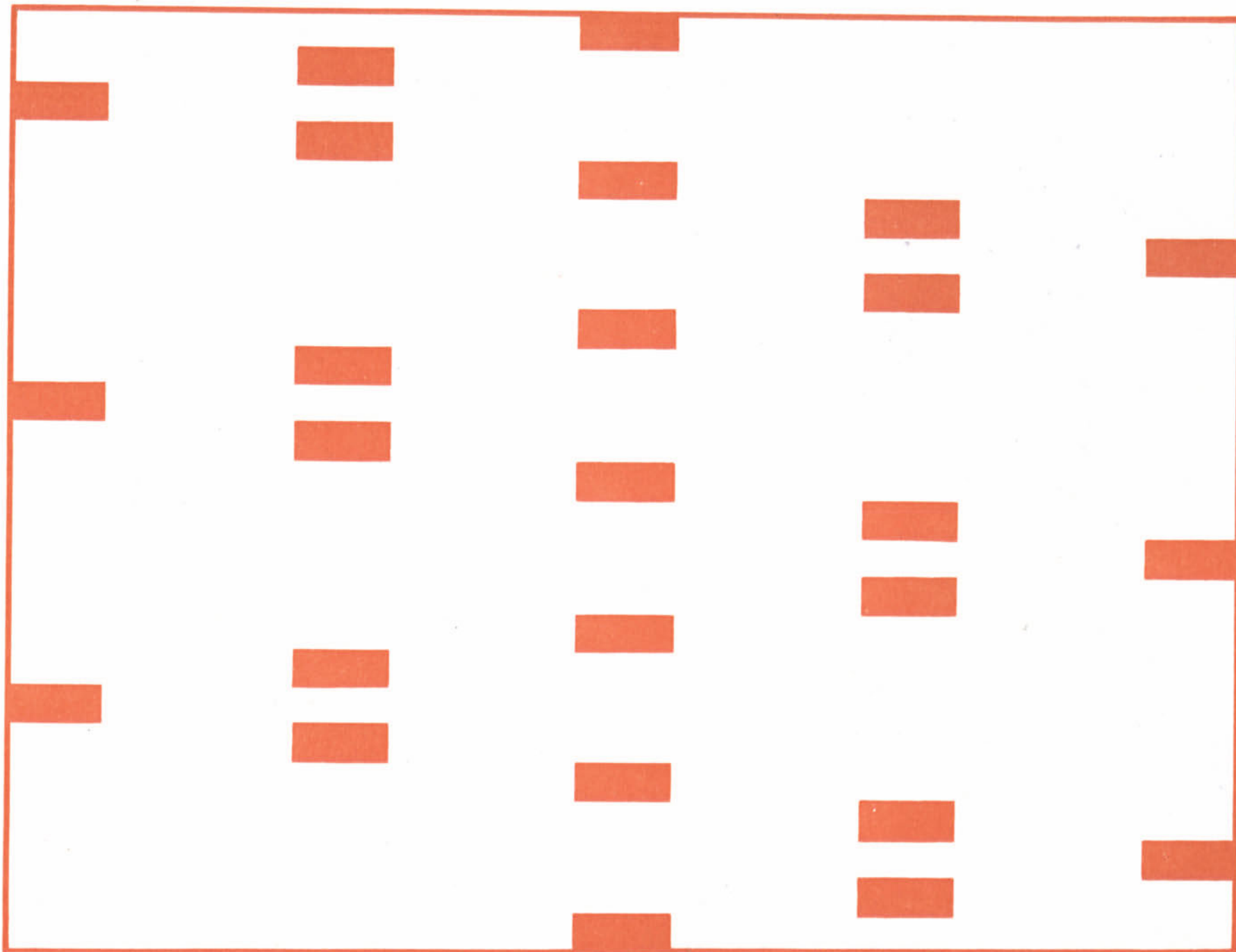
B_3

Tafel 6.

$$b_3 = \frac{{}^{(24)}B_3}{12}$$

$$b_3' = \frac{{}^{(12)}B_3}{6}$$

$$b_3'' = \frac{{}^{(6)}B_3}{3}$$



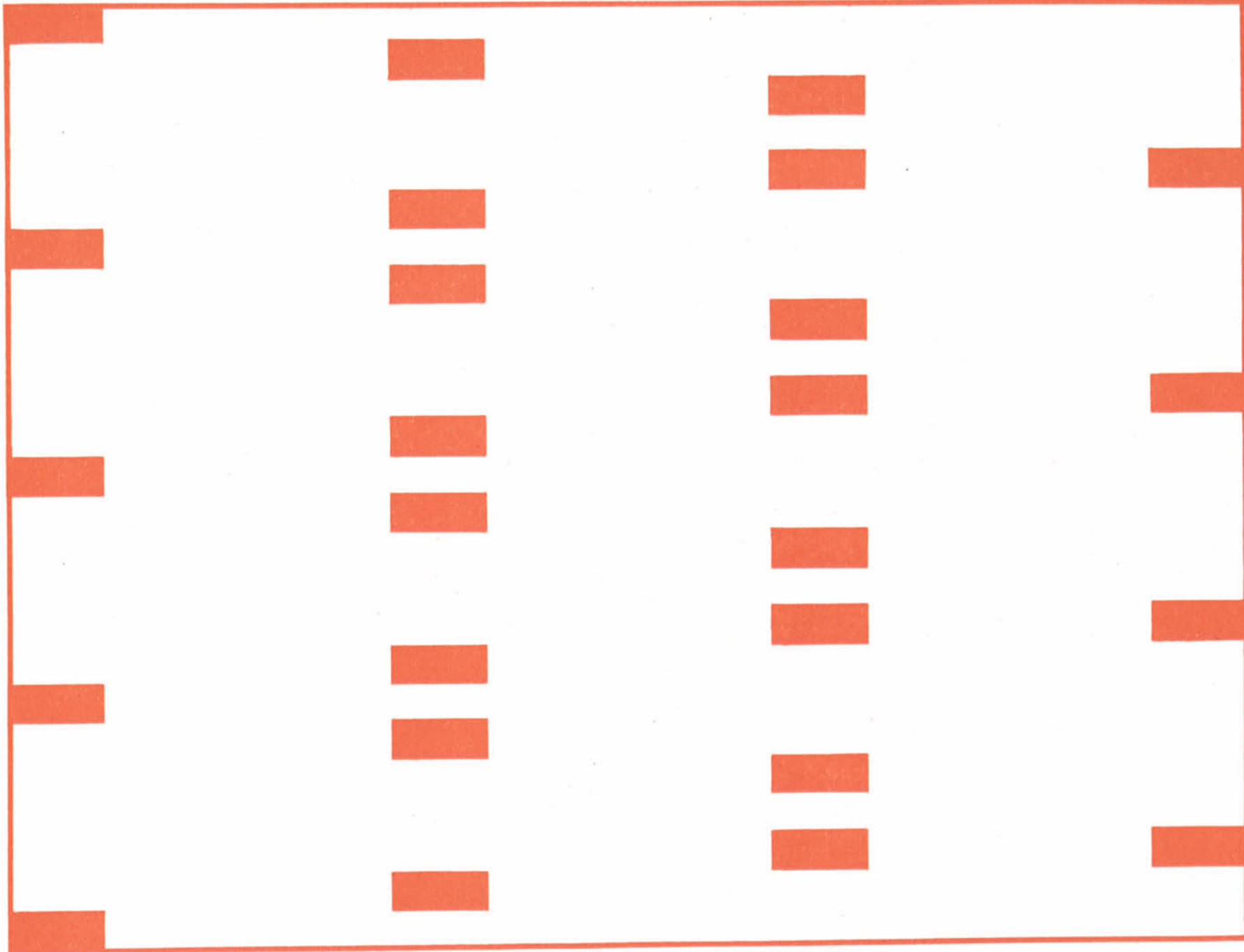
A_4

Tafel 7.

$$a_4 = \frac{A_4^{(24)}}{12}$$

$$a_4' = 0$$

$$a_4'' = 0$$



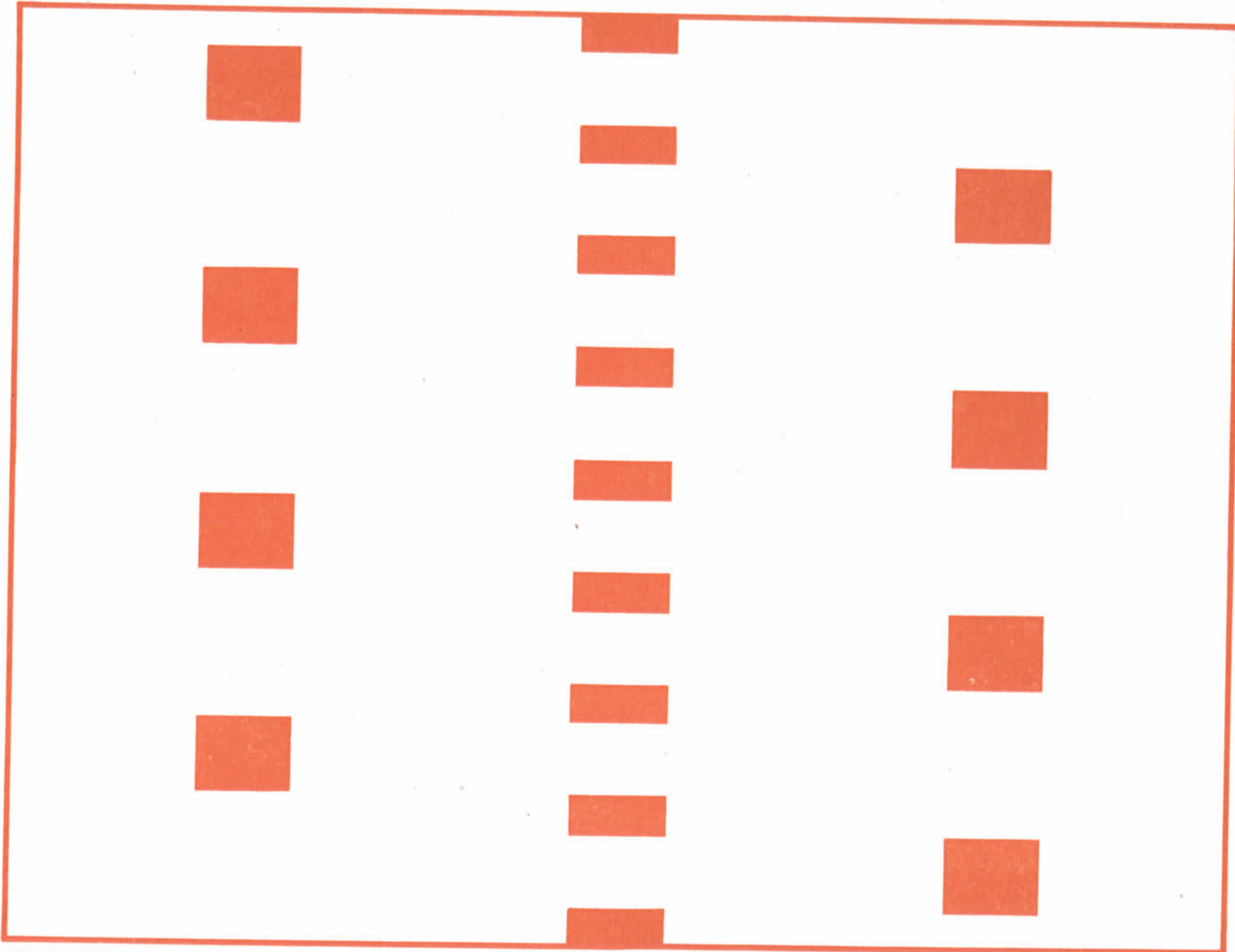
B_4

Tafel 8.

$$b_4 = \frac{B_4^{(24)}}{12}$$

$$b_4' = 0$$

$$b_4'' = 0$$



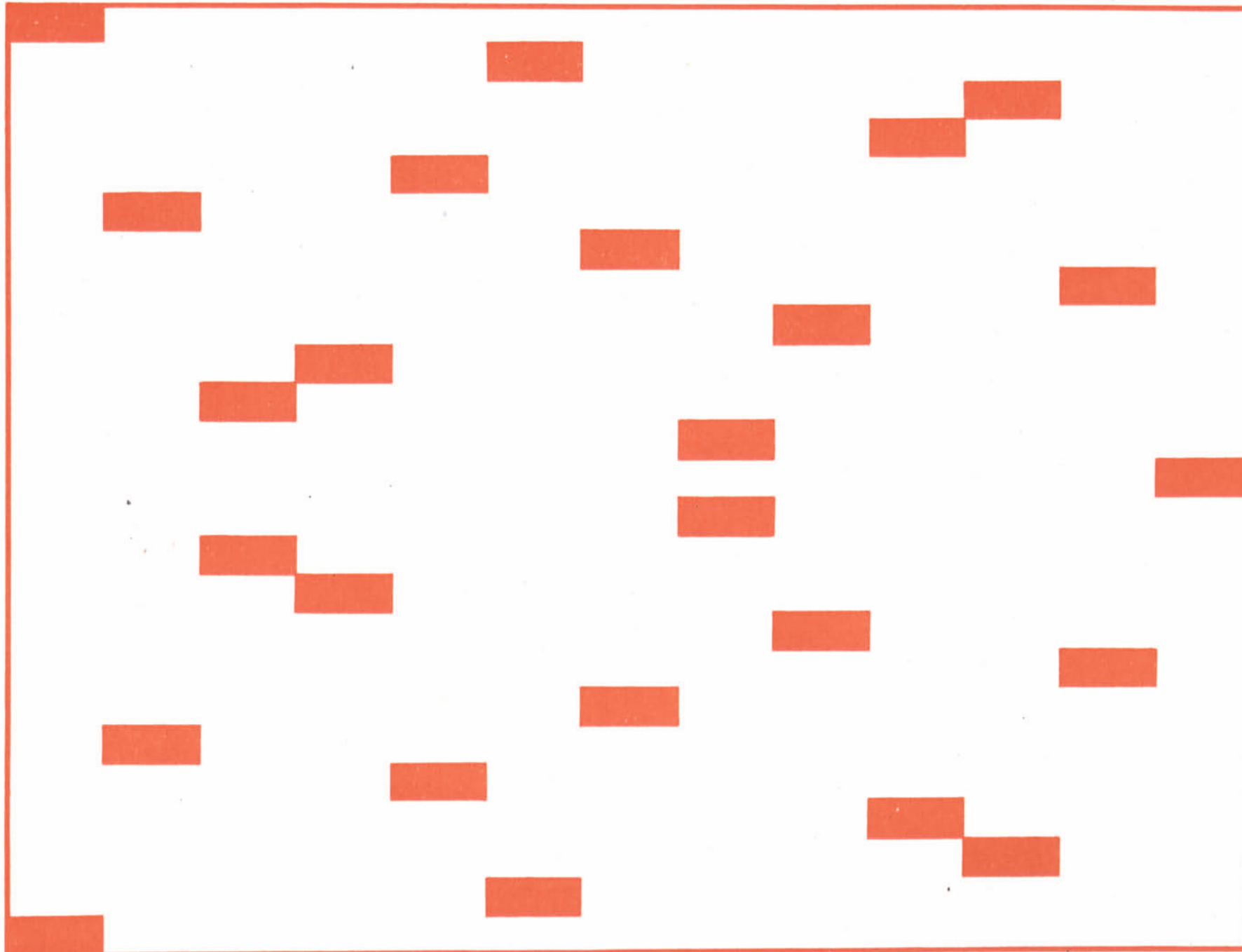
A_5

Tafel 9.

$$a_5 = \frac{A_5^{(24)}}{12}$$

$$a_5' = \frac{A_5^{(12)}}{6}$$

$$a_5'' = 0$$



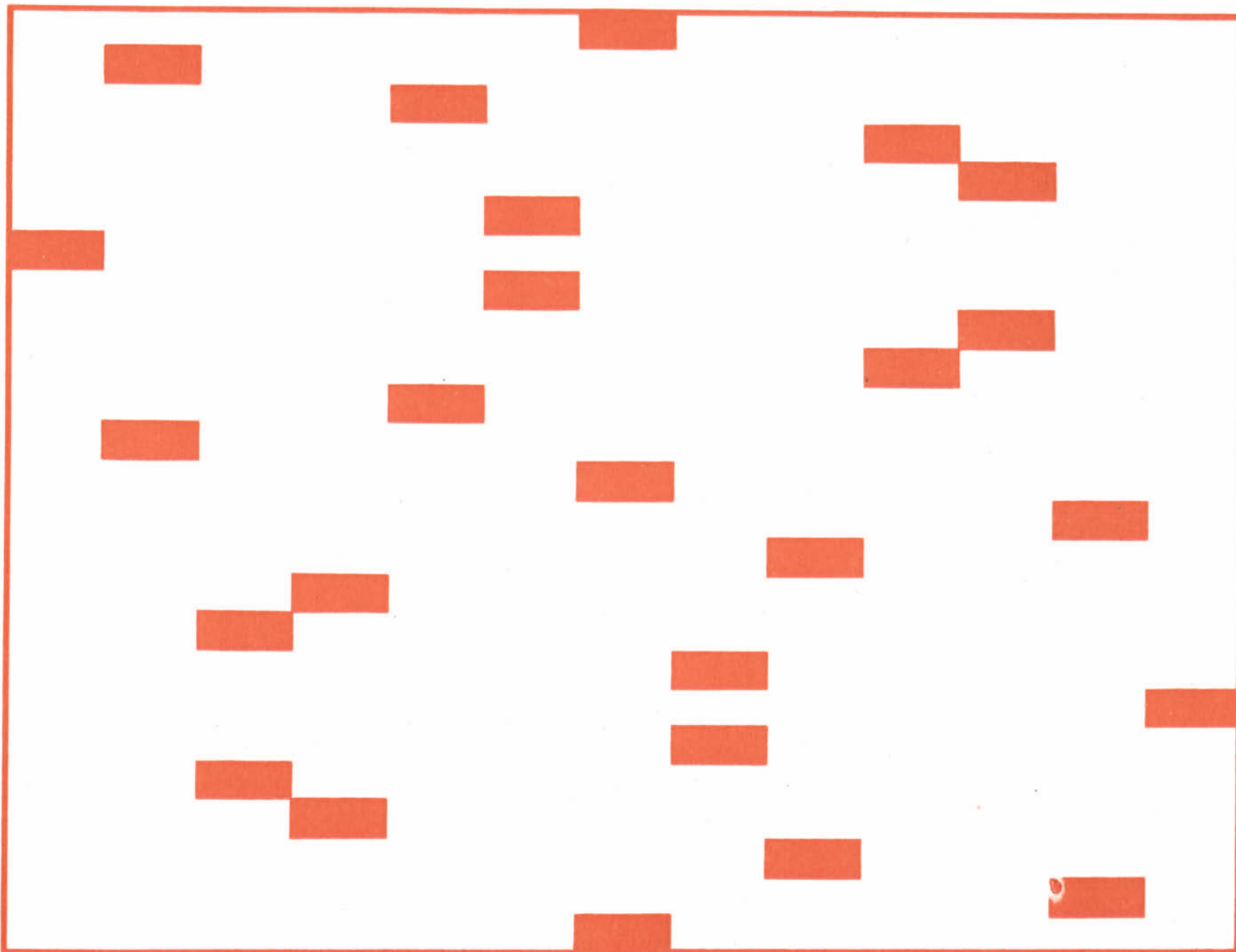
B_5

Tafel 10.

$$b_5 = \frac{{}^{(24)}B_5}{12}$$

$$b_5' = \frac{{}^{(18)}B_5}{6}$$

$$b_5'' = \frac{{}^{(6)}B_5}{3}$$



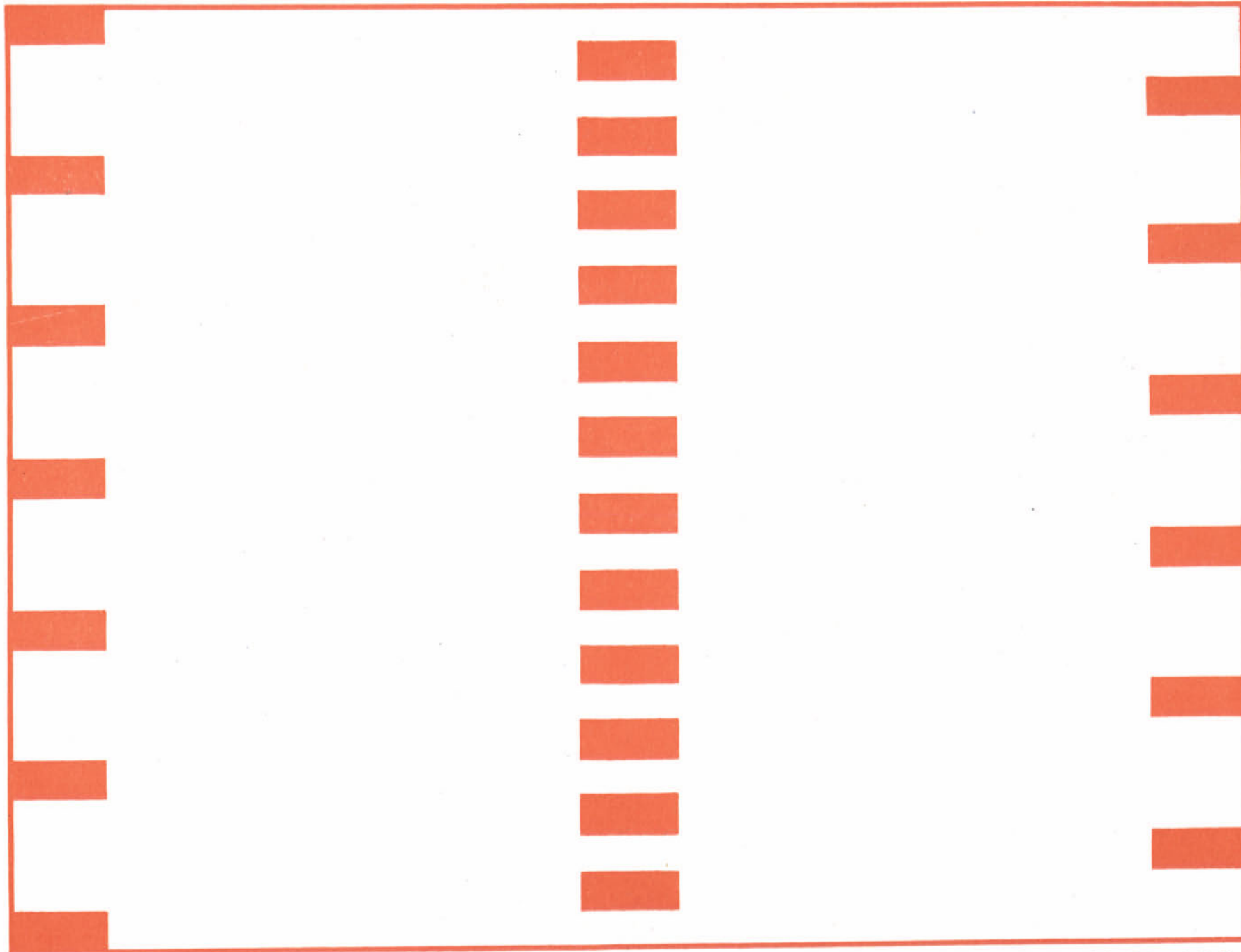
A_6

Tafel 11.

$$a_6 = \frac{A_6^{(94)}}{12}$$

$$a_6' = 0$$

$$a_6'' = 0$$



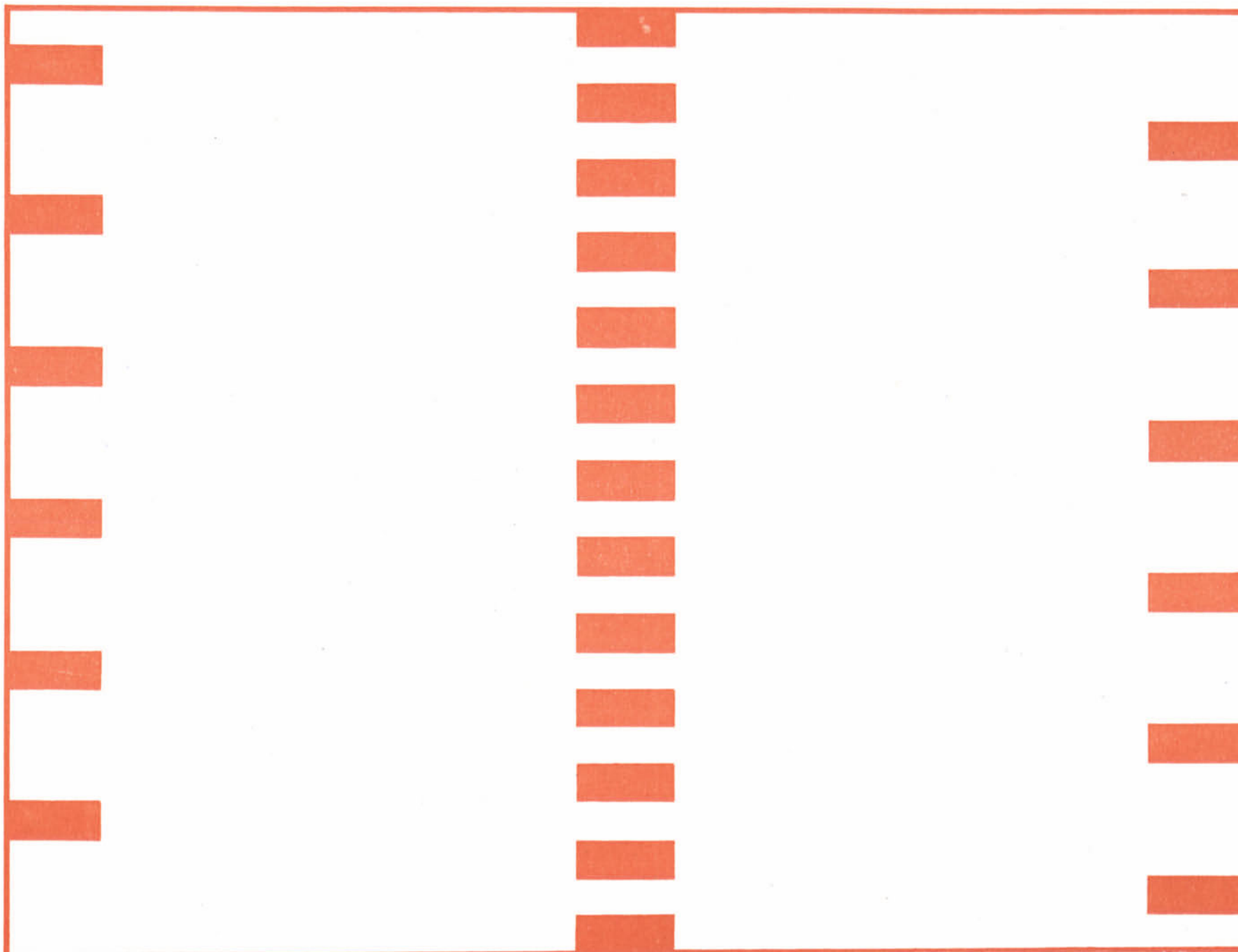
B_6

Tafel 12.

$$b_6 = \frac{B_6^{(24)}}{12}$$

$$b_6' = 0$$

$$b_6'' = 0$$



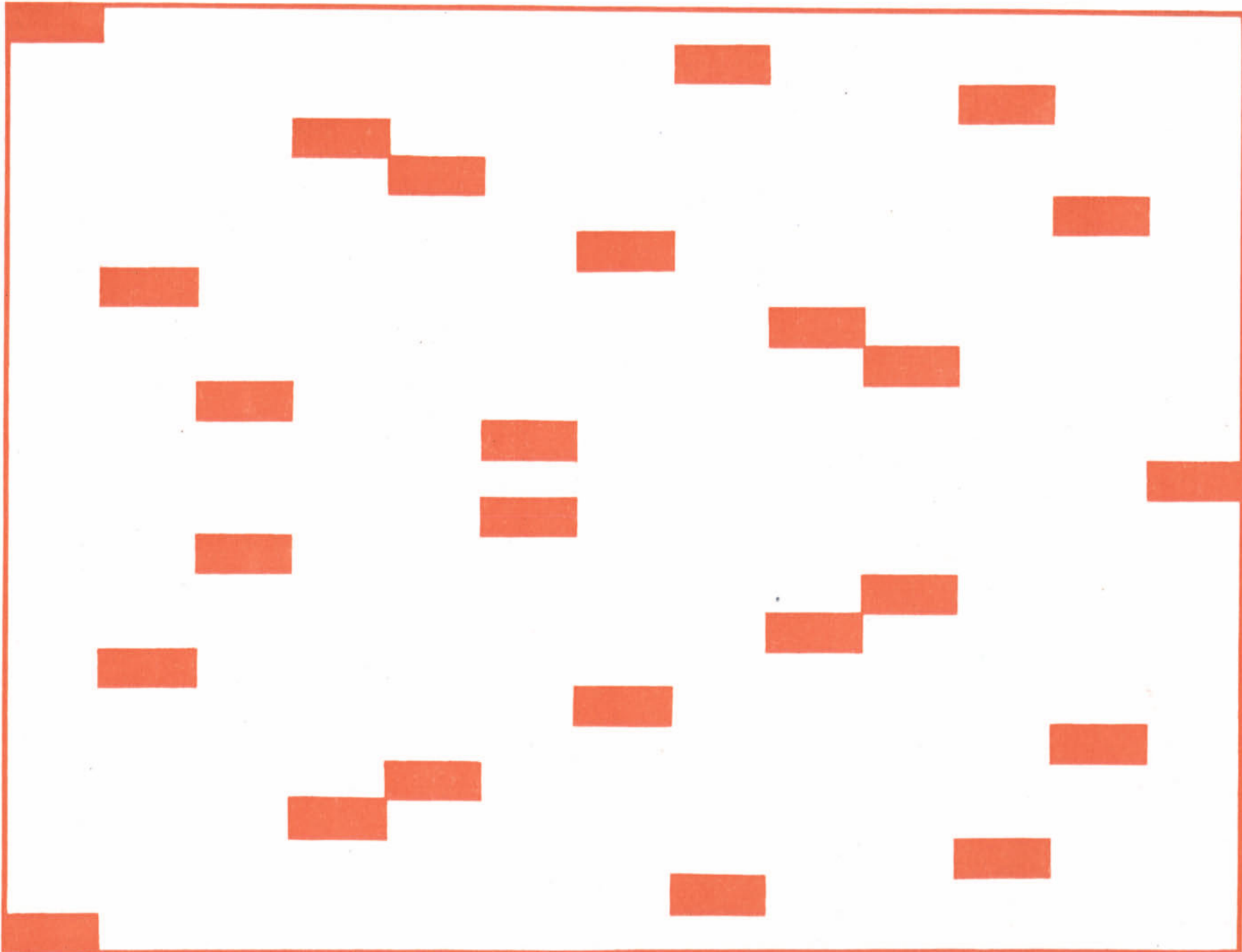
A_7

Tafel 13.

$$a_7 = \frac{A_7^{(24)}}{12}$$

$$a_7' = \frac{A_7^{(12)}}{6}$$

$$a_7'' = 0$$



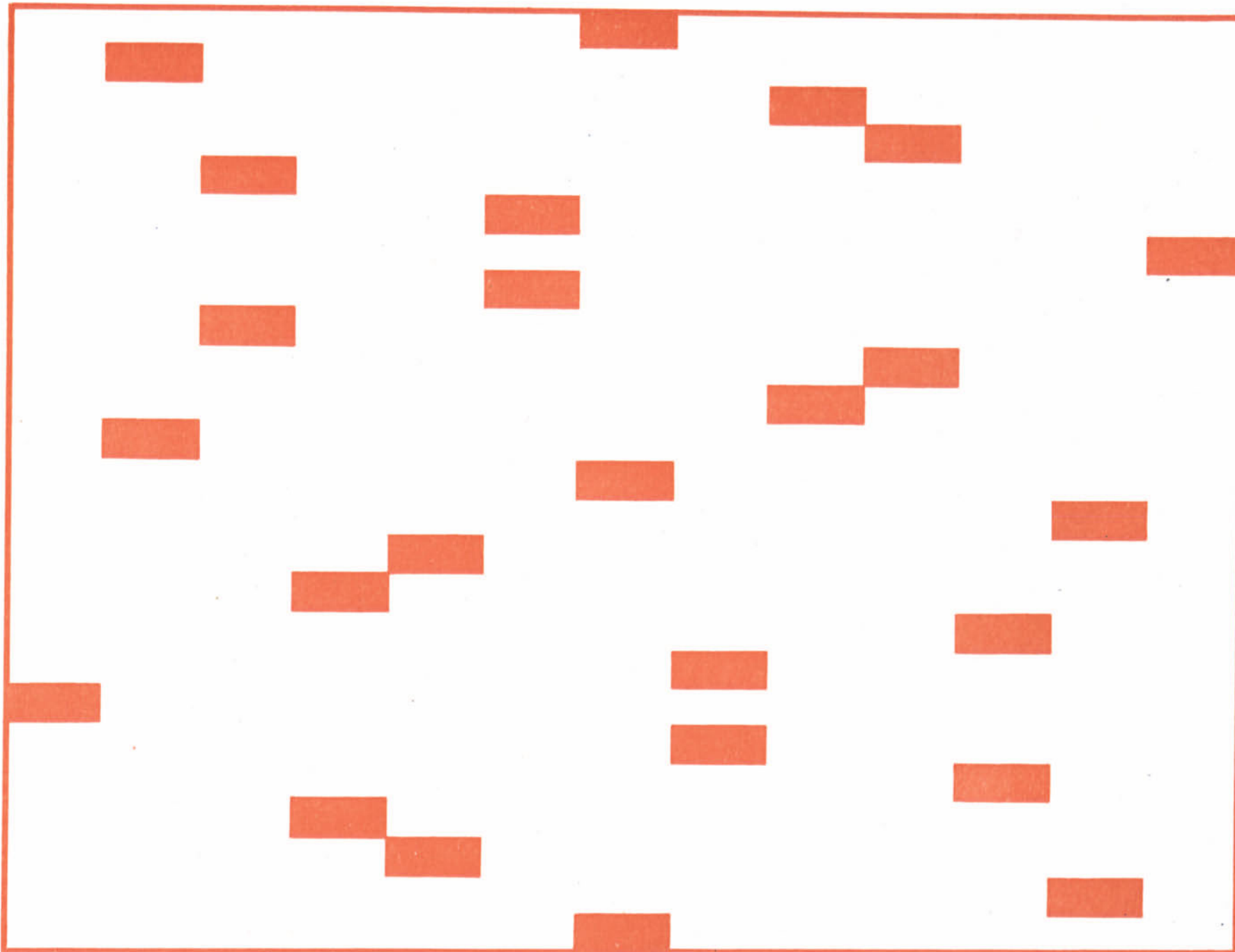
B_7

Tafel 14.

$$b_7 = \frac{{}^{(24)}B_7}{12}$$

$$b_7' = \frac{{}^{(12)}B_7}{6}$$

$$b_7'' = \frac{{}^{(6)}B_7}{3}$$



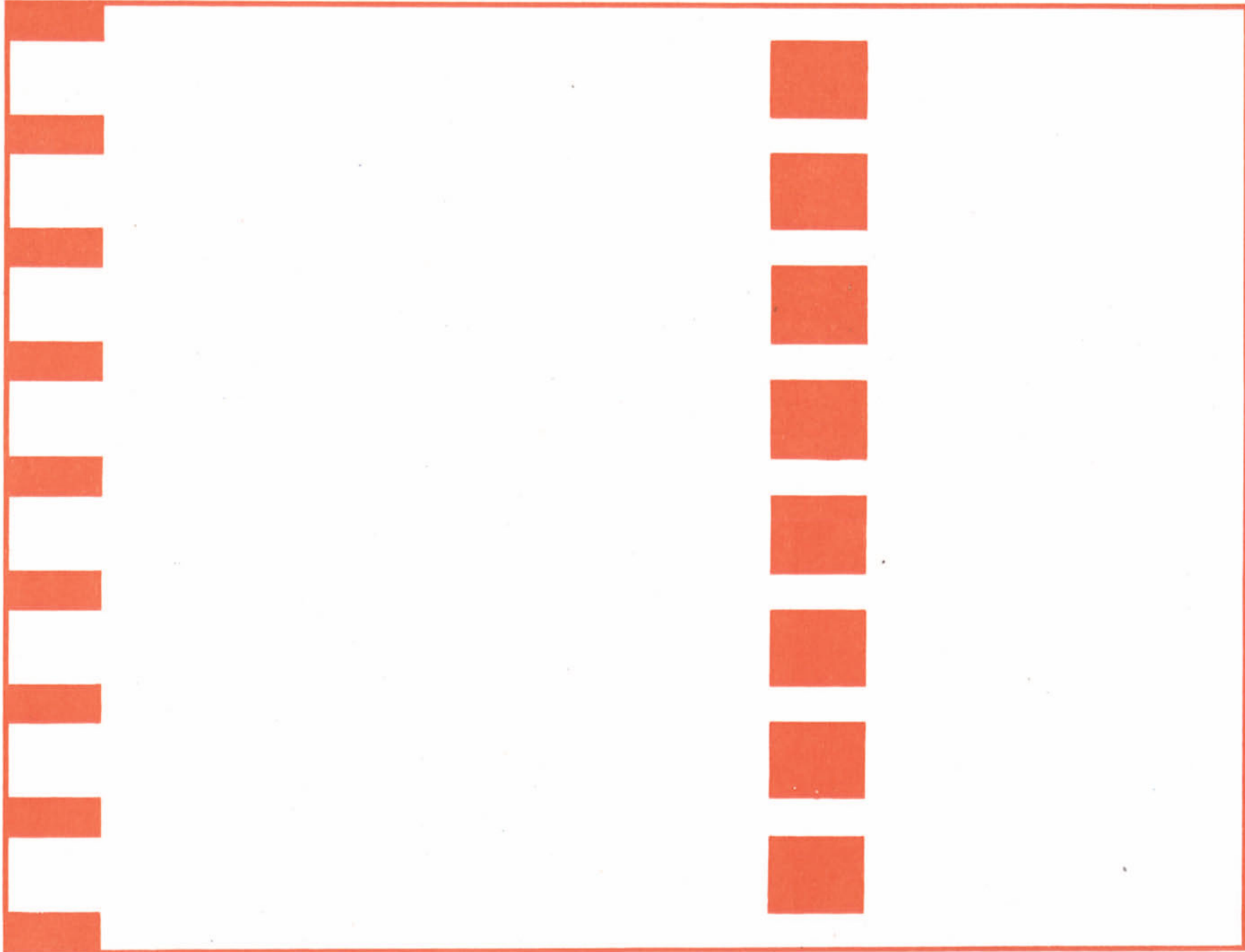
A_8

Tafel 15.

$$a_8 = \frac{A_8^{(24)}}{12}$$

$$a_8' = 0$$

$$a_8'' = 0$$



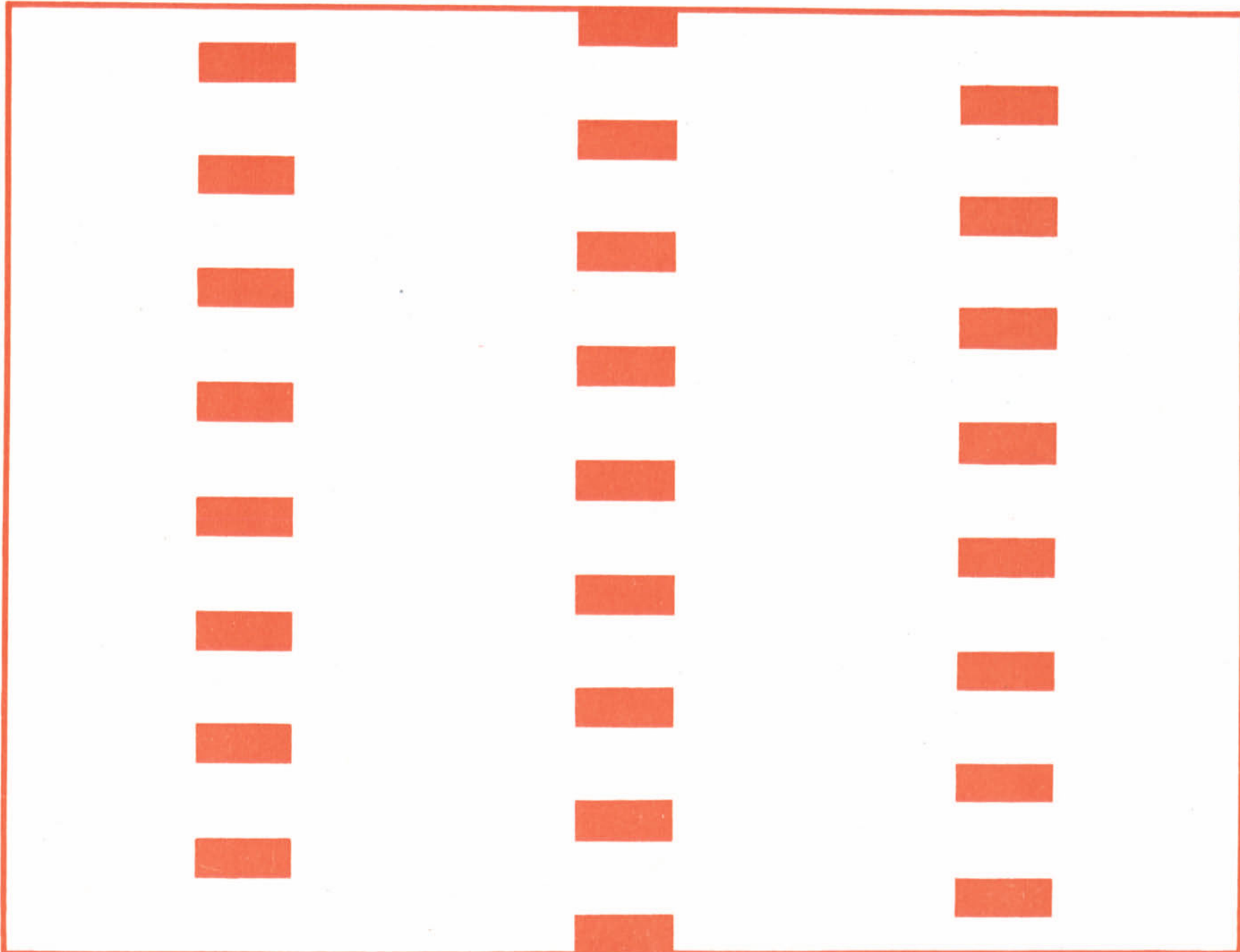
B_8

Tafel 16.

$$b_8 = \frac{B_8^{(24)}}{12}$$

$$b_8' = 0$$

$$b_8'' = 0$$

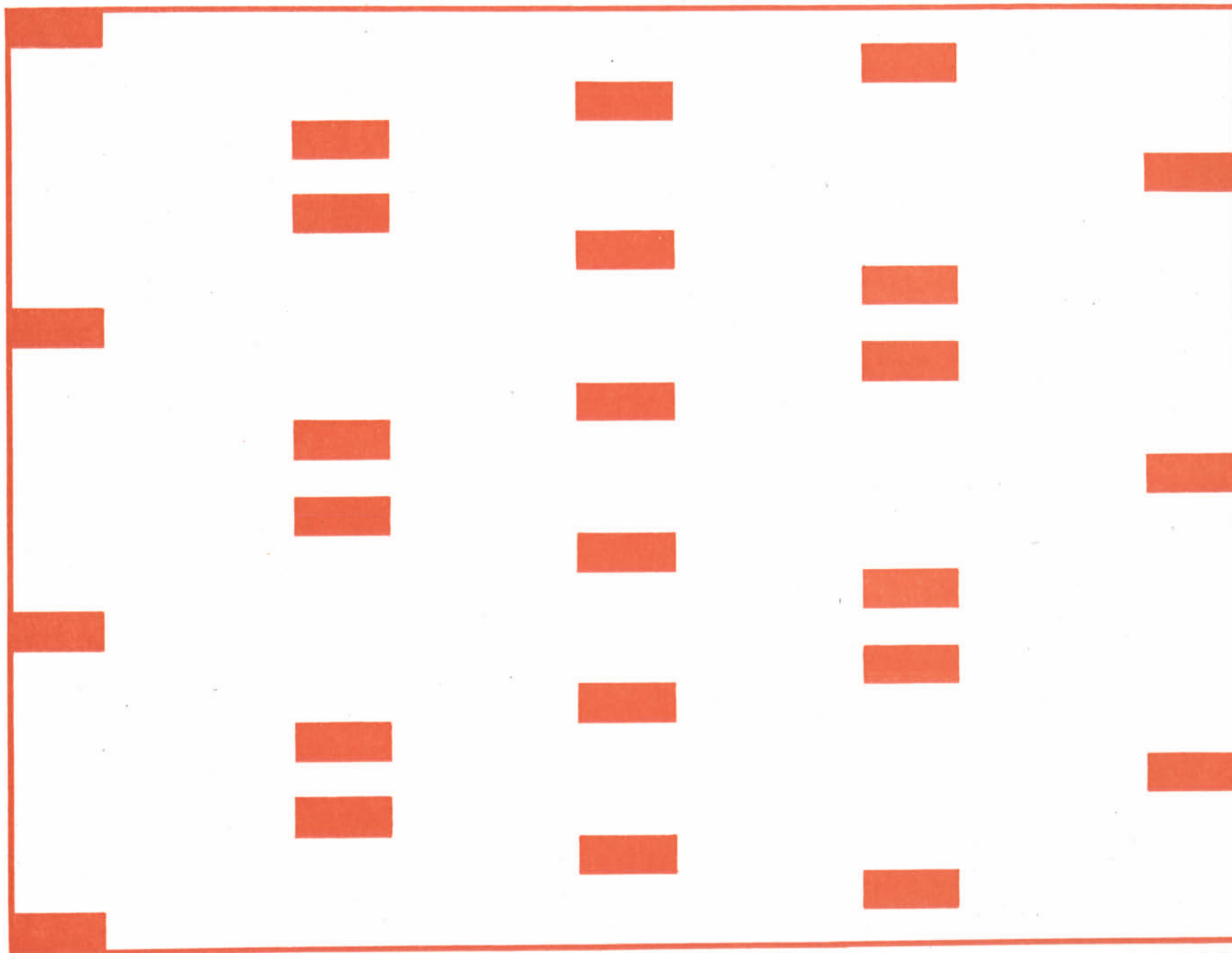


$$a_9 = \frac{A_9^{(24)}}{12}$$

$$A_9$$
$$a_9' = \frac{A_9^{(12)}}{6}$$

Tafel 17.

$$a_9'' = 0$$



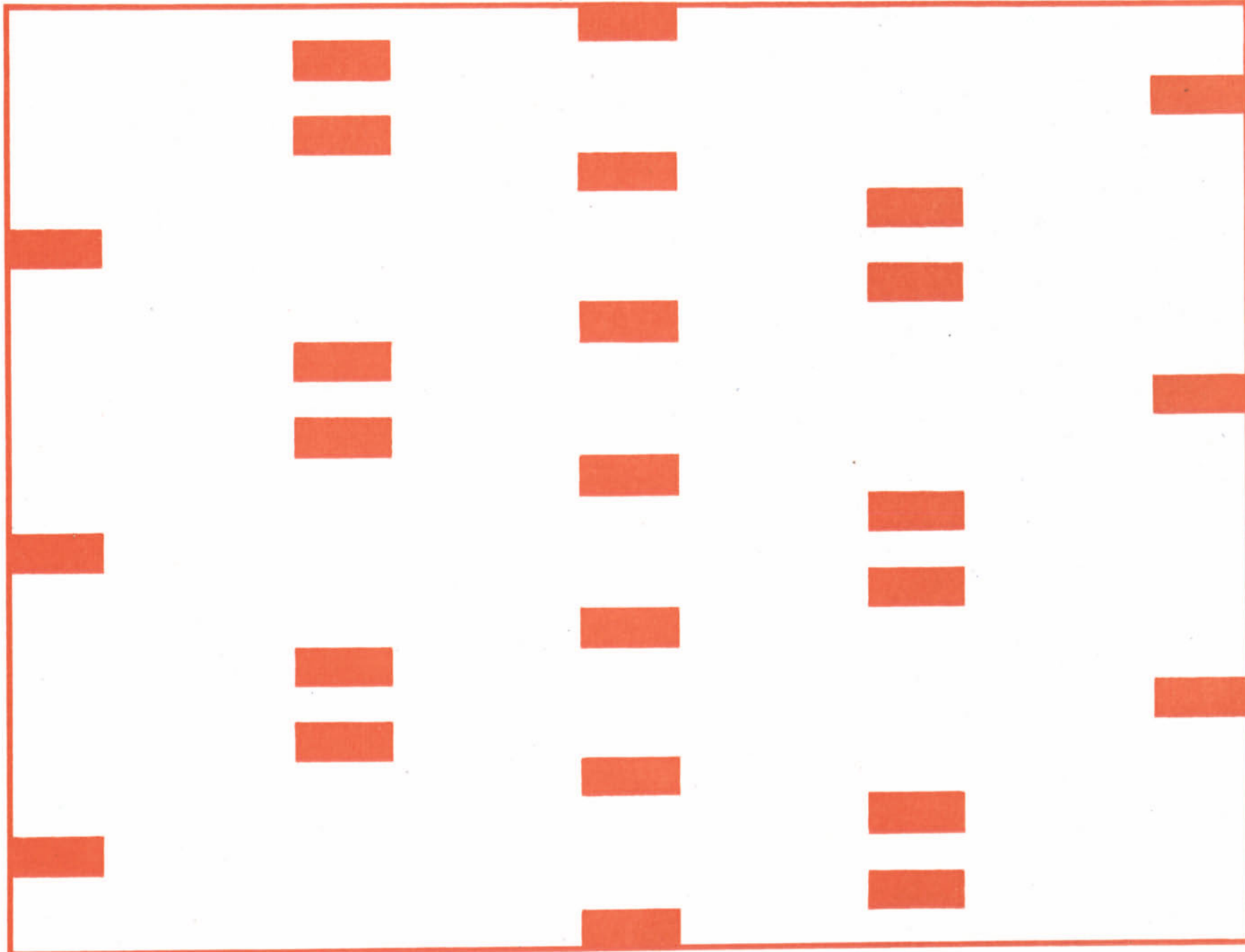
B_9

Tafel 18.

$$b_9 = \frac{B_9^{(34)}}{12}$$

$$b_9' = \frac{B_9^{(19)}}{6}$$

$$b_9'' = \frac{B_9^{(6)}}{3}$$



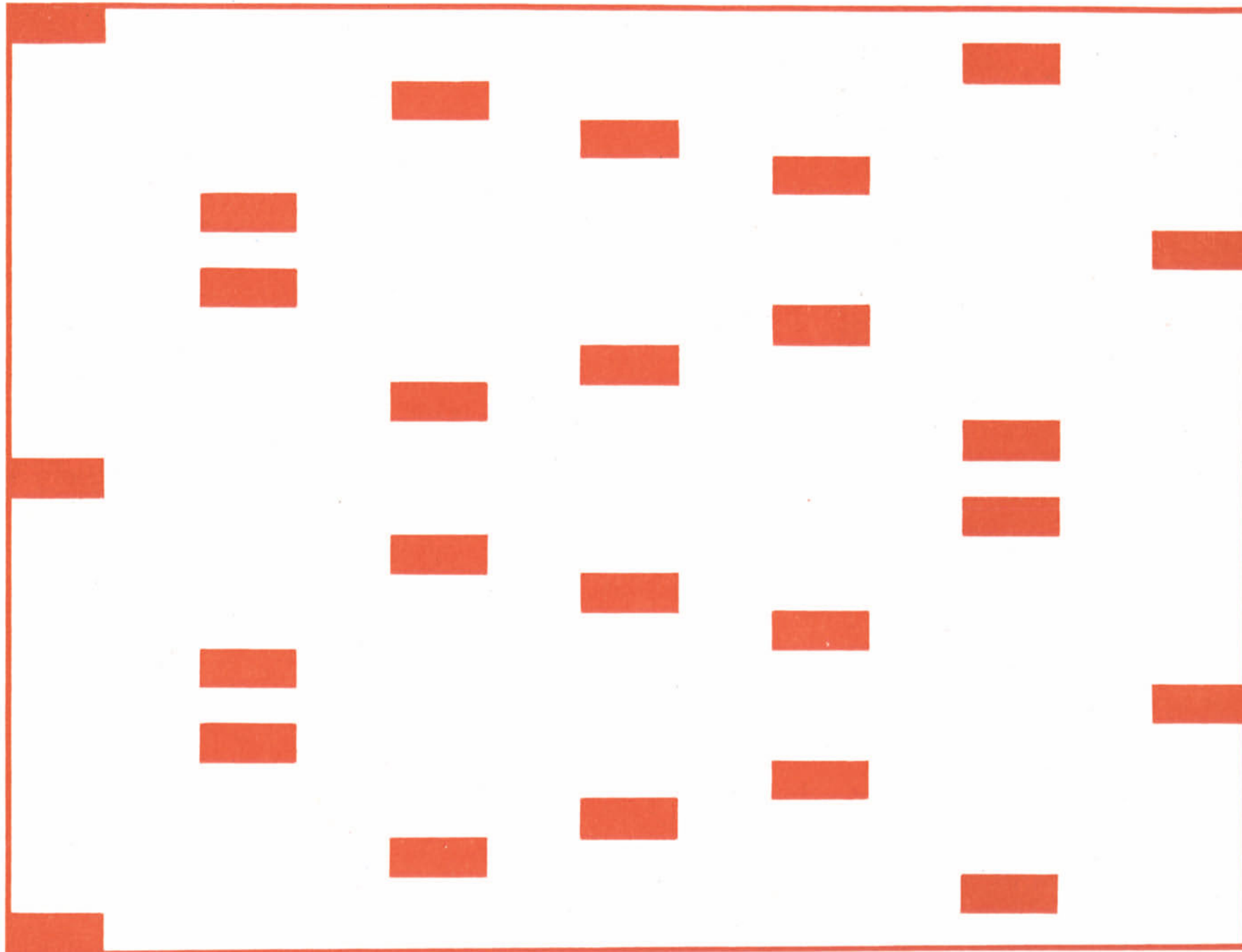
A_{10}

Tafel 19.

$$a_{10} = \frac{A_{10}^{(84)}}{12}$$

$$a_{10}' = 0$$

$$a_{10}'' = 0$$



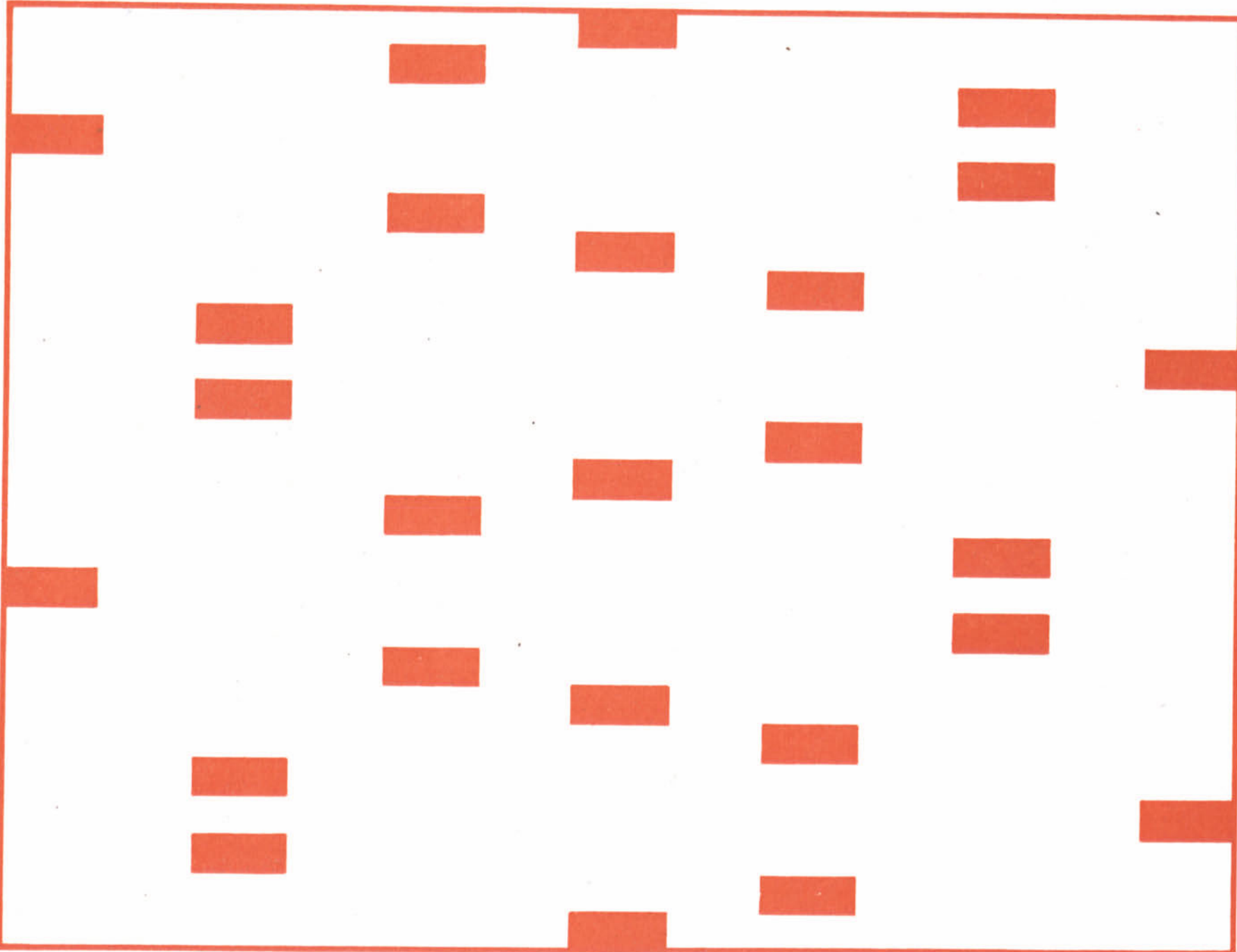
B_{10}

Tafel 20.

$$b_{10} = \frac{B_{10}^{(24)}}{12}$$

$$b_{10}' = 0$$

$$b_{10}'' = 0$$



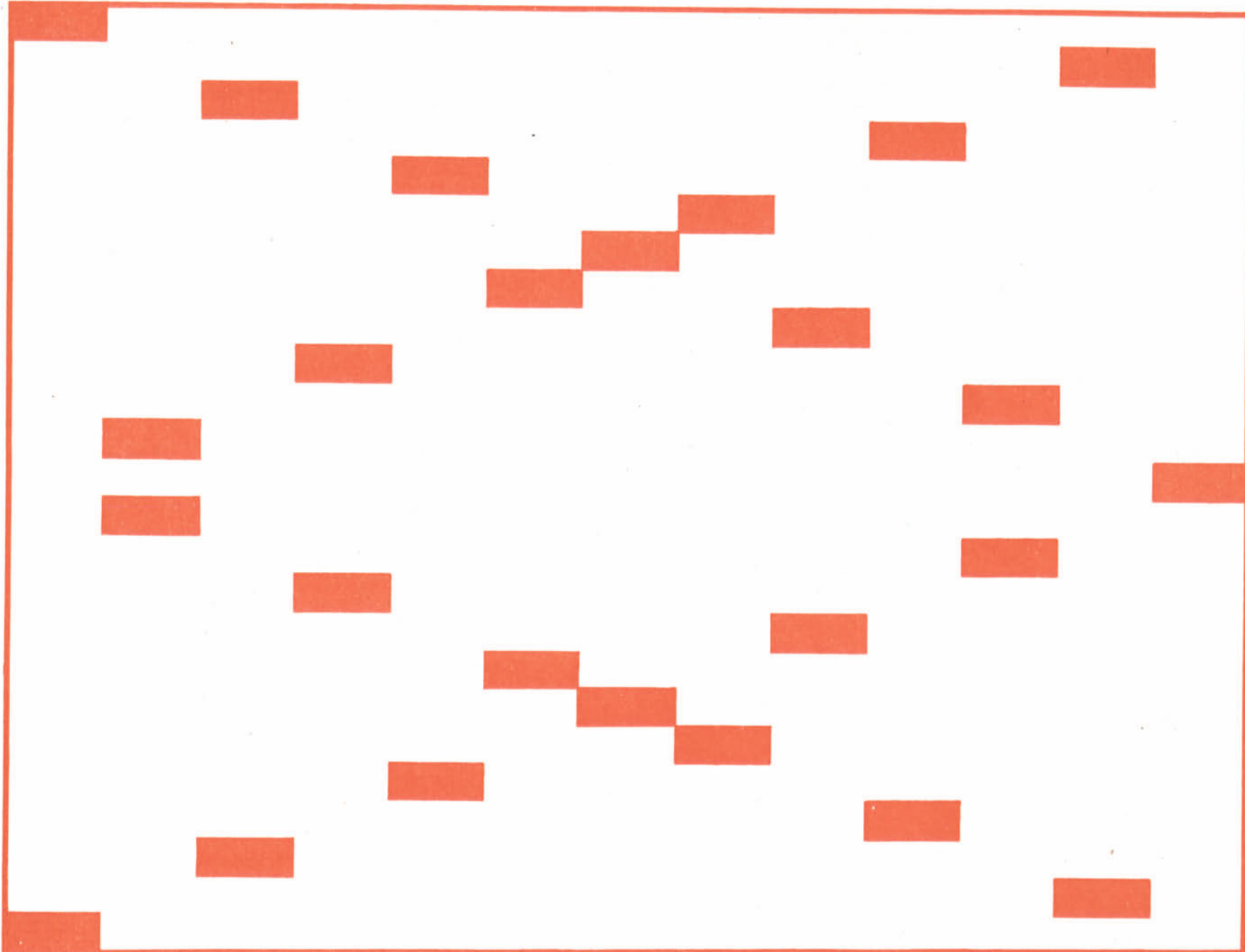
A_{11}

Tafel 21.

$$a_{11} = \frac{A_{11}^{(24)}}{12}$$

$$a_{11}' = \frac{A_{11}^{(19)}}{6}$$

$$a_{11}'' = 0$$



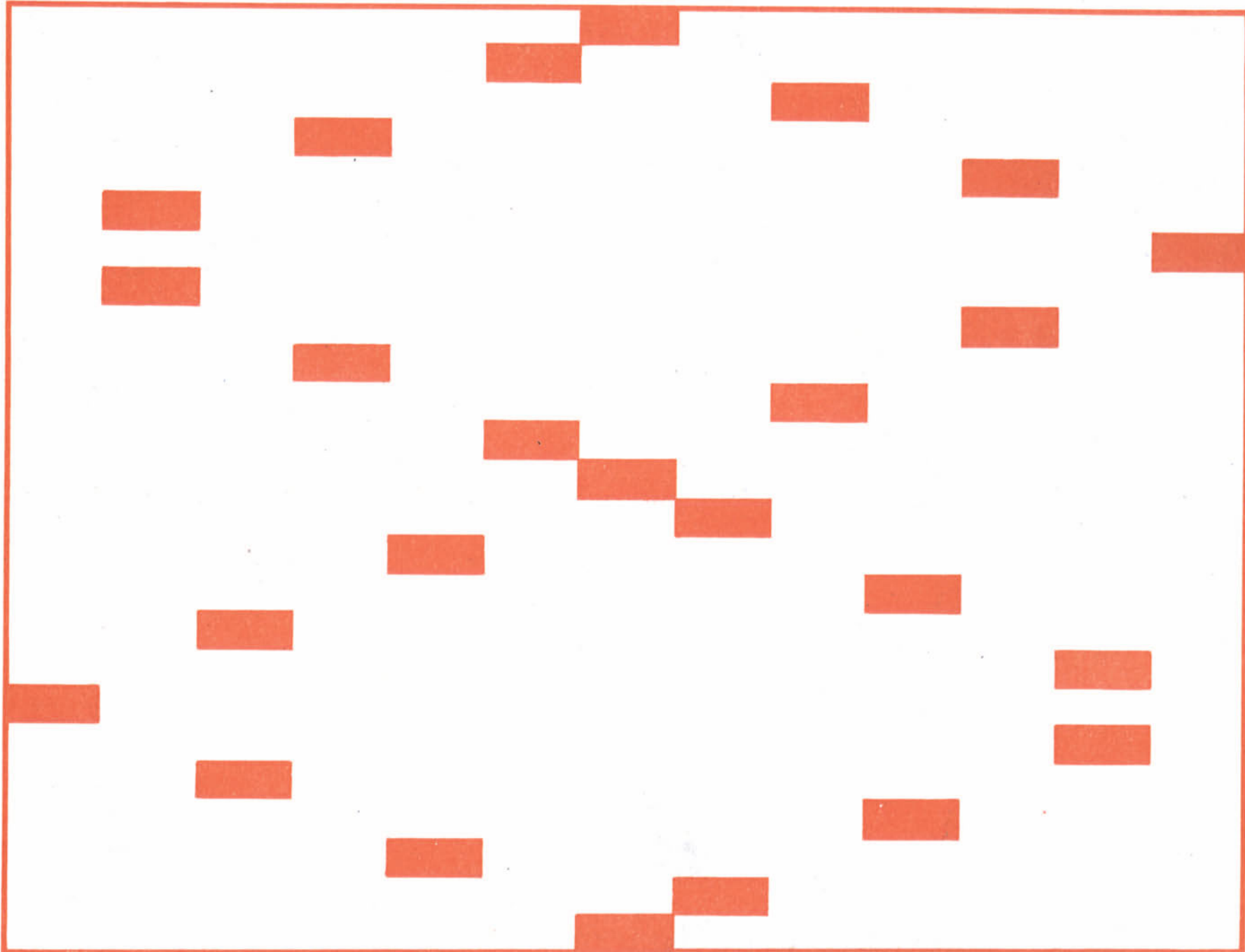
B_{11}

Tafel 22.

$$b_{11} = \frac{^{(34)}B_{11}}{12}$$

$$b_{11}' = \frac{^{(12)}B_{11}}{6}$$

$$b_{11}'' = \frac{^{(6)}B_{11}}{3}$$



Berichtigung.

Textteil:

Auf Seite 7, linke Spalte, 2. Z. v. u. ist der ganze Satz: „Ist die Anfangsordinate Bruch $\frac{1}{2}$ aufmerksam machen soll“;
auf Seite 7, rechte Spalte, 9. Z. v. o. das Wort „wieder“
zu streichen.

Grundtafel:

Der Bruch $\frac{1}{2}$ auf dem mit I bezeichneten Strich (Ordinate 12) ist zu streichen bzw. auszuradiieren.

Tafel 7:

In der letzten senkrechten Spalte ($-1,000 y$) sind die roten Rechtecke jeweils um eine Spalte zu tief gesetzt; ihre richtige Lage ist: 3, 9, 15, 21.

Es empfiehlt sich die falsch liegenden Rechtecke durch Schraffur zu kennzeichnen und mit Rotstift ein Rechteck darüber anzulegen.

Zipperer, Tafeln.