

Technische Strömungslehre

Von

Dr.-Ing. **Bruno Eck**

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 307 Abbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1944

Technische Strömungslehre

Von

Dr.-Ing. **Bruno Eck**

Zweite, verbesserte Auflage

Mit 307 Abbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1944

ISBN 978-3-662-05457-4 ISBN 978-3-662-05502-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-05502-1

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright 1941 and 1944 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1944

Vorwort zur ersten Auflage.

Der seit einiger Zeit vergriffenen „Einführung in die technische Strömungslehre“, die in erster Linie für den Physiklehrer bestimmt war, folgt nunmehr ein tiefer gehendes Werk, das sich an Ingenieure, Studenten, die Industrie und andere Interessenten der Flugphysik wendet.

Dem Aufbau des Buches liegen folgende Gesichtspunkte zugrunde: 1. Welches ist die einfachste Form, in der die Hauptgesetze der Strömungslehre abgeleitet und dargestellt werden können? 2. Welche Ergebnisse der theoretischen und experimentellen Forschung sind in erster Linie von praktischem Nutzen? Zur Erreichung dieses Zieles wurden die mathematischen Hilfsmittel auf das unbedingt Notwendige beschränkt (Infinitesimalrechnung), durch zahlreiche Versuchs- und Zahlenbeispiele die Anwendung der Gesetze gezeigt, während Anschauungsmittel der verschiedensten Art zum besseren Verständnis schwieriger Erscheinungen herangezogen wurden.

Von einer „Technischen Strömungslehre“ wird der Ingenieur ebenso wie der Studierende vor allem eine quantitative und qualitative Beschreibung der Reibungsauswirkungen erwarten. Diese Fragen sind ausführlicher behandelt und bilden den Kernpunkt des Buches. So ist z. B. dem Ablösungsproblem, mit dem der Praktiker wohl von allen Gebieten der Strömungslehre am meisten zu tun hat, ein weiter Raum gewidmet. Da wir in diesem Zentralproblem der Strömungslehre noch sehr weitgehend auf den Versuch angewiesen sind, ist eine den Ingenieur interessierende Darstellung ohne Darlegung vieler Versuchsergebnisse und Anschauungsmittel unmöglich. Es wurde versucht, die wichtigsten physikalischen Erscheinungen in Reinkultur zu zeigen, wobei besonders typische technische Fälle als Beispiele gewählt wurden. Eine Reihe vom Verfasser entwickelter Hilfsmittel leistete dabei gute Dienste.

Während eine große Fülle von mehr mathematisch ausgerichteten Werken der Strömungslehre zur Verfügung steht, fehlte bisher eine mehr dem Techniker zusagende knappe Darstellung. Vielleicht kann das vorliegende Buch hier etwas ausgleichend wirken und gleichzeitig den weiterstrebenden Leser schonend auf weitergehende Darstellungen vorbereiten. Dazu sind im Kleindruck etwas schwierigere und zunächst nicht sehr wichtige Probleme angeschnitten, während zahlreiche Literaturangaben und ein Literaturverzeichnis am Schluß des Buches mit dem Schrifttum bekannt machen.

Von den 278 Abbildungen des Buches stammen 220 aus eigenen Versuchen und Entwürfen. Der Rest ist mit Quellenangabe entlehnt.

Der Verfasser beabsichtigt, diesem Werk eine Versuchs- und Laboratoriumstechnik der Strömungslehre folgen zu lassen, die ebenfalls in erster Linie für den Praktiker und die Industrie bestimmt ist. Die Herausgabe dieses Buches wird allerdings erst nach Kriegsende erfolgen können.

Bei der Durchsicht der Korrekturen fand ich sehr wertvolle Unterstützung bei den Herren Studienrat Fritz Friedrichs, Detmold und Studienrat Dr. phil. Kirchhoff, Köln. Für ihre Hilfe und mannigfachen Ratschläge darf ich an dieser Stelle meinen besonderen Dank zum Ausdruck bringen.

Der Verlag sorgte in vorbildlicher Weise für die Ausstattung des Buches, insbesondere bei der Herstellung des umfangreichen Bildmaterials und berücksichtigte meine zahlreichen Wünsche, was ich mit bestem Dank betonen möchte.

Köln, im Oktober 1940.

Bruno Eck.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Das Buch wurde einer eingehenden Neubearbeitung unterzogen, wobei sich eine Reihe Ergänzungen als notwendig erwiesen. An neuen Kapiteln wurden u. a. hinzugefügt: Energieaustausch in reibungsfreien Flüssigkeiten; Ablösung von Flüssigkeitsstrahlen; Näherungsberechnungen für ebene und räumlich gekrümmte Strömungen. Abbildungen und Zahlenmaterial wurden z. T. wesentlich ergänzt. Auch bei der zweiten Auflage erfolgte die Stoffauswahl und die Darstellungsmethode nach dem Gesichtspunkt, daß dem praktisch arbeitenden Ingenieur das notwendige Rüstzeug vermittelt wird, zum mindesten jedoch der Weg angedeutet wird, der zum Ziele führt.

Die Drucklegung der bereits Sommer 1942 fertiggestellten zweiten Auflage verzögerte sich infolge des Krieges.

Köln, im Februar 1944.

Bruno Eck.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Hydrostatik	1
1. Der statische Druck	1
2. Messung des Druckes	2
3. Gleichgewicht der Atmosphäre	4
II. Bewegungslehre	9
4. Vergleich mit der Bewegung fester Körper	9
5. Allgemeine Bewegungsgleichungen	14
a) Stationäre Bewegung	16
b) Nichtstationäre Bewegung	18
c) Ableitung bei veränderlicher Dichte	19
d) Unterdruck	20
e) Der Staudruck	22
f) Gasausfluß aus einem Behälter	23
g) Weitere Beispiele	23
h) Abreißen der Strömung in einem Abfallrohr	25
i) Beispiel für nichtstationäre Strömung	26
6. Kräfte senkrecht zur Strömungsrichtung	27
7. Drehung von Flüssigkeitsteilchen. Begriff der mittleren Drehung	29
8. Drehungsfreie Bewegung	31
9. Drehungsfreie Kreisbewegung	32
10. Die wirkliche Kreisströmung. (Der Wirbel)	35
11. Zirkulation	36
12. Das Potential	37
13. Energiebetrachtung	39
14. Weitere Betrachtungen über Wirbelbewegungen	40
15. Dicke des Wirbelkernes	43
16. Stellen der größten und kleinsten Geschwindigkeiten	43
17. Energieaustausch in reibungsfreien Flüssigkeiten	44
a) Energieübertragung durch in Strömungsrichtung bewegte Körper	45
b) Energieübertragung durch schräg zur Strömungsrichtung bewegte Körper	46
18. Quellen und Senken	50
a) Grundsätzliches	50
b) Überlagerungsgesetz	51
c) Zusammensetzung einer Parallelströmung mit einer Quelle	51
d) Zusammensetzung von Quelle und Senke	52
e) Doppelquelle	53
f) Überlagerung von Parallelströmung mit Quelle und Senke	54
g) Zusammensetzung von Quelle und Wirbel (Wirbelquelle)	55
h) Doppelquelle und Parallelströmung	56
i) Quellen und Senken im Raume	57
19. Graphische Konstruktion von Strömungsbildern	60

	Seite
20. Genauere Verfahren	62
a) Reibungsfreie Kreisströmung	64
b) Umströmung eines Zylinders	64
c) Umströmung einer Kugel	65
d) Strömung zwischen einer Wand und einem Zylinder	65
e) Strömung in einem gekrümmten Kanal	65
f) Strömung zwischen konzentrischen Kreisen	65
g) Praktische Schlußfolgerungen	66
21. Besonderheiten der rotationssymmetrischen Strömung	70
22. Genauere mathematische Betrachtungen	70
23. Konstruktion von Strömungsbildern mit Hilfe der Stromfunktion	72
24. Experimentelle Darstellung der reibungsfreien Strömung	74
25. Impulssatz	76
a) Ableitung	76
b) Die Kugel im schrägen Luftstrahl	78
c) Ablenkung eines Strahles durch eine Schneide	79
d) Wirkung eines Schaufelgitters	79
e) Berechnung des Stoßverlustes	82
f) Anwendung des Impulssatzes bei beliebigen freien Strömungen	84
g) Auftrieb	86
h) Impulsmomente (Flächensatz)	89
26. Reibungsfreie Strömung in offenen Rinnen	89
III. Einfluß der Reibung bei ablösungsfreien Strömungen	92
27. Innere Reibung infolge Zähigkeit	92
28. Ähnlichkeitsgesetz	96
29. Bewegungsgleichungen mit Reibungsglied	101
30. Strömungsformen	102
31. Strömungswiderstand in Röhren	105
a) Allgemeine Bemerkungen	105
b) Das glatte Rohr	106
c) Das rauhe Rohr	107
d) Geschwindigkeitsverteilung bei der Rohrströmung	110
e) Die kinetische Energie der Rohrströmung. (Korrekturglied der Bernoullischen Gleichung)	113
32. Eingehendere Betrachtung der Turbulenz	114
a) Wandturbulenz	114
b) Einfluß der Wandrauigkeit	116
c) Besondere Betrachtungen über die Rohrströmung	117
d) Glattes Rohr	118
33. Begriff der hydraulischen Glätte	118
34. Reibungsverluste in geraden Stahlrohrleitungen	121
35. Druckverlust in ruhenden Schüttungen	122
a) Versuche mit Kugelschüttungen	123
b) Versuche mit Kohle und anderen Schüttkörpern	124
36. Besondere Bemerkungen	124
37. Rohrreibungswiderstand bei pulsierender Durchflußströmung	124
38. Aufwertung	125
39. Anlaufstrecke	127
40. Strömung in geraden Röhren nicht kreisförmigen Querschnittes	130
41. Oberflächenwiderstand	131
a) Grenzschichtbetrachtungen	132
b) Impulsverfahren nach Betz	137

	Seite
42. Radscheibenreibung	139
43. Vermischung eines freien Strahles (Strahlerturbulenz)	140
44. Isotrope Turbulenz	143
45. Der Umschlag	144
a) Entstehung des Umschlages (Turbulenz)	145
b) Umschlag bei gekrümmten Flächen	145
c) Taylorsches Umschlagkriterium	146
d) Umschlag in divergenten Kanälen	147
IV. Das Ablösungsproblem	147
46. Allgemeines	147
47. Ablösung an scharfen Kanten	148
48. Ablösung in divergenten Kanälen (Diffusoren)	149
49. Ablösung in rotierenden Kanälen und bei rotierenden Körpern	158
50. Dimensionslose Erfassung des Widerstandes	160
51. Kugelströmung	161
52. Krümmer	165
53. Ablösung in Düsen	173
54. Trennung und Vereinigung von Rohrverzweigungen	178
55. Ventile und Absperrmittel	178
56. Strömungsverluste infolge scharfer Kanten; Kontraktion usw.	179
57. Unstetige Querschnittserweiterung	181
58. Unstetige Rohrverengung	182
59. Formwiderstand, Oberflächenwiderstand	182
60. Bewegung im Totwasserraum	183
61. Druckverteilung bei Kugeln und Zylindern	187
62. Beeinflussung des Widerstandes durch die Ausbildung der Vorderkante	188
63. Führt sehr starke Verzögerung immer zur Ablösung?	189
64. Widerstand von Luftschiffkörpern	190
65. Widerstand von Fahrzeugen	192
66. Ablösung von Flüssigkeitsstrahlen	193
67. Schwebende Körper	197
a) Pneumatische Förderung	198
b) Aufbereitung	198
c) Entstaubung	199
68. Zusammenstellung von Widerstandsziffern	200
69. Widerstand bei Beschleunigung eines Körpers in einer Flüssigkeit	201
70. Die Hauptgesetze der Ablösung (Zusammenstellung)	201
V. Der Tragflügel	202
71. Allgemeines	202
72. Das Polardiagramm	204
73. Entstehung der Auftriebskraft	205
74. Der unendlich lange Flügel	210
75. Druckpunkt	211
76. Der endlich lange Tragflügel	212
77. Bestätigung der Tragflügeltheorie durch den Versuch	217
78. Einfluß der Umrißform des Flügels	219
79. Polare des ganzen Flugzeuges	221
80. Mittel zur Auftriebshöhung eines Tragflügels	222
81. Druckverteilung am Tragflügel	223
82. Versuchswerte	224
83. Abreißen der Strömung, Kennzahl, Turbulenzeinflüsse	227

	Seite
VI. Hilfsmittel zur Vermeidung der Ablösung	231
84. Grenzschichtabsaugung	231
85. Mitbewegte Wand	233
86. Ausblasen von Druckluft	234
87. Leitschaufeln	235
VII. Kavitation	240
88. Allgemeines	240
89. Praktische Auswirkungen	241
90. Physikalische Ergänzungen	244
91. Erosion durch Tropfenschlag	246
VIII. Gasdynamik	247
92. Physikalische Ableitung der Schallgeschwindigkeit	247
93. Technische Ableitung der Schallgeschwindigkeit	248
94. Der Machsche Winkel	249
95. Allgemeine thermodynamische Beziehungen	251
96. Konstruktion ebener Strömungsbilder bei Überschallgeschwindigkeit	253
97. Der Verdichtungsstoß	256
98. Der X-Stoß (Kondensationsstoß)	258
99. Lavaldüsen	259
100. Rohrreibung bei Expansion der Gase im Rohr	261
101. Einfluß der Kompressibilität bei Unterschallströmungen	262
102. Tragflügeleigenschaften bei Überschallströmungen	264
IX. Strömungstechnische Messungen	266
103. Druckmeßgeräte	266
104. Messung von Druck und Geschwindigkeit in offener Strömung	269
105. Feststellung der Strömungsrichtung mit Staugeräten	275
106. Messung mit Düsen, Blenden und Venturirohren	277
107. Gefäßmessungen	283
108. Überfallmessungen	284
109. Direkt anzeigende Durchflußmesser	285
110. Im Flüssigkeitsstrom sich drehende Meßgeräte	286
Literaturverzeichnis	287
Namen- und Sachverzeichnis	289

I. Hydrostatik.

1. Der statische Druck.

Die meisten Erscheinungen der Hydrostatik lassen sich durch eine genaue Betrachtung des Begriffes „Druck“ leicht erklären. Dieser Begriff, der bei der Bewegung von Flüssigkeiten eine große Rolle spielt, sei deshalb hier etwas genauer behandelt. Wir setzen Reibungslosigkeit der Flüssigkeit voraus. Reibungslos wollen wir eine Flüssigkeit dann nennen, wenn beispielsweise auf ein würfelförmiges Teilchen nur Normalkräfte und keine Tangentialkräfte wirken (Abb. 1). In Anlehnung an die aus der Festigkeitslehre bekannten Begriffe nennen wir die Normalkraft je Flächeneinheit den Druck p ; eine Tangentialkraft dagegen, die wir ebenfalls auf die Flächeneinheit beziehen (deren Behandlung später erfolgen soll), nennen wir Schubspannung τ .

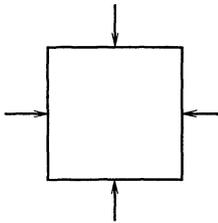


Abb. 1.

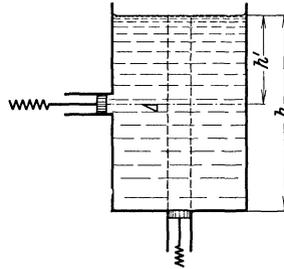


Abb. 2.

Wir betrachten ein Gefäß mit einer Flüssigkeit (Abb. 2) und wollen die Kräfte bzw. Drücke kennenlernen, die von der Flüssigkeit auf die Gefäßwand ausgeübt werden. Beginnen wir mit dem Boden. Ein etwa in ihn eingesetztes Korbchen gestattet leicht die Auswiegung der Kräfte. Die hierbei wirkende Gesamtkraft ist offensichtlich gleich dem Gewicht des Flüssigkeitszylinders über dem Kolben. Ist F die Kolbenfläche und γ das spez. Gewicht der Flüssigkeit, so ist $F \cdot p = F \cdot h \cdot \gamma$, d. h.

$$p = h \cdot \gamma. \quad (1)$$

Nun machen wir denselben Versuch an einer Seite des Gefäßes, etwa in der Höhe h' von der Oberfläche. Mit einem kleinen reibungsfreien Korbchen ist die Messung in der gleichen Weise leicht durchführbar. Bei der Berechnung kommen wir jedoch sofort in einige Verlegenheit. Eine

Gewichtsberechnung wie vorhin ist hier nicht möglich. Wohl ist in der Tiefe h' der Druck senkrecht nach unten aus Gl. (1) leicht zu ermitteln. Aber es drängt sich die Frage auf: wie ändert sich der Druck, wenn bei Beibehaltung der Tiefe die Bezugsebene ihre Richtung ändert?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir ein beliebig kleines Teilchen, dem wir aus Zweckmäßigkeitsgründen die Form eines Prismas geben, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist (Abb. 2). An der stark vergrößerten Darstellung dieses Teilchens (Abb. 3) unter-

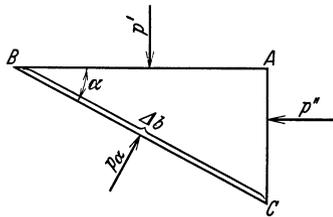


Abb. 3.

suchen wir die Gleichgewichtsbedingungen. Auf der waagerechten Seite AB ist der Druck $p' = h' \cdot \gamma$, auf den anderen Seiten AC und BC ist er unbekannt. Wir bezeichnen den Druck auf AC mit p'' und auf CB mit p_α . Die Hypotenuse des Dreiecks habe die Länge Δb . Da nur Normalkräfte vorhanden sind, ist das Gleichgewicht von drei Kräften zu untersuchen.

Die Länge des Prismas senkrecht zur Zeichenebene sei l . Kräfte auf Seite

$$\begin{aligned} AB &: p' \cdot \Delta b \cdot \cos \alpha \cdot l, \\ CB &: p_\alpha \cdot \Delta b \cdot l, \\ AC &: p'' \cdot \Delta b \cdot \sin \alpha \cdot l. \end{aligned}$$

Wir setzen die Summe der Kräfte in horizontaler und vertikaler Richtung gleich:

$$\begin{aligned} \text{senkrechte Kräfte: } & p' \cdot \Delta b \cdot l \cdot \cos \alpha = p_\alpha \cdot \Delta b \cdot l \cdot \cos \alpha, \\ \text{horizontale Kräfte: } & \underline{p'' \cdot \Delta b \cdot l \cdot \sin \alpha = p_\alpha \cdot \Delta b \cdot l \cdot \sin \alpha}; \\ \text{hieraus folgt: } & p' = p'' = p_\alpha. \end{aligned}$$

Wir finden somit den wichtigen Satz: Der Druck ist, außer vom spez. Gewicht der Flüssigkeit, nur abhängig von der Höhe, aber unabhängig von der Richtung¹ (Pascal). Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen sei als Beispiel im folgenden die Druckmessung behandelt.

2. Messung des Druckes.

Verbindet man ein Gefäß (Abb. 4) mit einer seitlichen Steigröhre, so muß in ihr aus den oben angeführten Gründen die Flüssigkeit so hoch steigen wie im Gefäß. Die Steigröhre kann also zur Feststellung des Wanddruckes benutzt werden. Da das Meßrohr nichts davon weiß, wie

¹ Bei fast allen bekannten Flüssigkeiten trifft dieser Satz zu. Sobald jedoch eine „Reibung der Ruhe“ vorhanden ist, verliert der Satz selbstverständlich seine Gültigkeit. Diese Bemerkung bedarf deshalb einer besonderen Betonung, weil es praktisch nicht unwichtige flüssigkeitsähnliche Gebilde gibt, die merkliche Schubspannungen übertragen. Hierzu gehört z. B. Kohlenstaub, überhaupt feinkörniges Material.

der Druck erzeugt wird, wird diese Messung auch bei einem geschlossenen Kessel stimmen. Befindet sich z. B. komprimierte Luft in einem Kessel (Abb. 5), so muß der von der Flüssigkeitssäule h erzeugte Druck gleich dem Kesseldruck sein. Dieser Druck ist nach Gl. (1) $p = h \cdot \gamma$. Die Meßhöhe h ändert sich also in einfacher Weise mit dem spez. Gewicht der Absperrflüssigkeit. Bei Quecksilber als Meßflüssigkeit wird somit derselbe Kesseldruck nur den 13,6ten Teil der Druckhöhe gegenüber Wasser anzeigen.

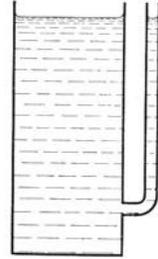


Abb. 4.

Durch Kapillarkwirkung¹ steigt eine benetzende Flüssigkeit in Wirklichkeit über die Niveauhöhe. Ist der Durchmesser des Meßrohres d , so ist die Steighöhe bei Wasser $\frac{30}{d}$ mm, bei Alkohol nur $\frac{11}{d}$ mm, bei Toluol $\frac{13}{d}$ mm. Durch Verschmutzung der Glaswand ändert sich der Wert für Wasser erheblich, sodaß Wasser selten für genaue Messungen verwendet werden kann. Wenn man nicht Alkohol oder Petroleum oder Ähnliches verwenden kann, empfiehlt es sich, dem Wasser etwas Seife zuzusetzen. Dadurch entsteht ein einwandfreier Meniskus.

Alkohol, Petroleum u. dgl. haben einen 5 bis 6 mal größeren Raumausdehnungskoeffizienten als Wasser. Bei ihrer Verwendung muß deshalb die Temperatur der Manometerflüssigkeit genau geprüft und berücksichtigt werden.

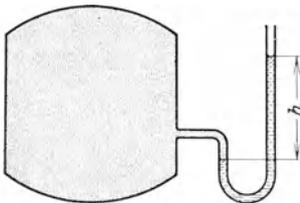


Abb. 5.

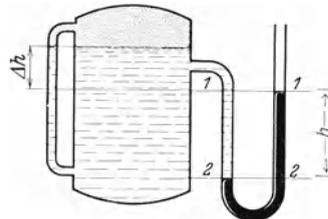


Abb. 6.

Befindet sich nun Druckwasser in dem Kessel (Abb. 6), so ist es im Interesse nicht zu großer Meßsäulen oft zweckmäßig, Quecksilber als Sperrflüssigkeit zu nehmen. Unterhalb der Linie 2—2 hält das Quecksilber sich die Waage, zwischen 1—1 und 2—2 erkennen wir in einem Schenkel die Wassersäule von der Höhe h , so daß im Schnitt 2—2 außer dem Gefäßdruck p noch der Druck $h \cdot \gamma_w$ wirkt. Der Gesamtdruck im Schnitt 2—2 ist somit $p + h \cdot \gamma_w$. Auf der anderen Seite wird dieser

¹ Der kalottenförmige Meniskus, der sich in runden Glasröhren bildet, ist für genaues Ablesen oft hinderlich. Die Linsenwirkung des runden Glases bewirkt weitere Unbequemlichkeiten. Demgegenüber bedeutet eine neue Ausführung von Birkholz & Co. in Heppenheim einen wesentlichen Fortschritt. Diese Firma stellt Manometerröhren aus Plexiglas her, die rechteckige Querschnittsform haben und eine parallaxenfreie Ablesung ermöglichen.

Druck durch die Quecksilbersäule h aufgehoben, die den Druck $h \cdot \gamma_{Hg}$ erzeugt. Das Gleichgewicht ergibt also, wenn wir mit p den Druck in der Höhe 1—1 bezeichnen,

$$\left. \begin{aligned} p + h \cdot \gamma_w &= h \cdot \gamma_{Hg}, \\ p &= h (\gamma_{Hg} - \gamma_w), \end{aligned} \right\} (2)$$

während der Druck über Wasserniveau $p - \Delta h \cdot \gamma_w$ ist.

Das Quecksilber erfährt bei dieser Messung eine scheinbare Verminderung des spez. Gewichts um das spez. Gewicht des Wassers. Statt 13,6 ist also 12,6 einzusetzen, wenn, wie bei vielen Messungen, sich auf der einen Seite Wasser über dem Quecksilber befindet.

Differenzdruckmessungen spielen bei vielen Versuchen eine wichtige Rolle. Abb. 7 zeigt eine Anordnung, wie sie z. B. zur Messung von Reibungsverlusten in Rohrleitungen verwendet wird. Man erkennt die Notwendigkeit einer

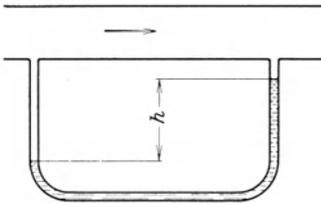


Abb. 7.

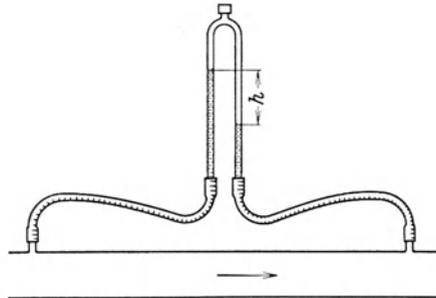


Abb. 8.

Sperrflüssigkeit von größerem spez. Gewicht, d. h. bei Luft wird Wasser oder Quecksilber, bei Wasser meist Quecksilber verwendet. Handelt es sich um Flüssigkeiten, so kann auch die Flüssigkeit selbst als Sperrflüssigkeit dienen. Abb. 8 zeigt diese Anordnung. Das U-Rohr ist einfach umgestülpt. Im oberen Teil befindet sich Luft, die z. B. mit einer Fahrradluftpumpe eingedrückt und dosiert werden kann. Wenn die zu erwartenden Druckunterschiede klein sind, wird von dieser Möglichkeit gern Gebrauch gemacht, da eine solche Messung mit Wasser 12,6mal genauere Ergebnisse zeitigt, als wenn mit Quecksilber gearbeitet wird.

Einheiten für Drücke. Außer der Bezugnahme auf 1 cm^2 , d. h. $\text{kg/cm}^2 \rightarrow \text{at}$ wird in der Strömungslehre gerne mit kg/m^2 gerechnet. Diese Angabe ist identisch mit mmWS, da eine Wassermenge von 1 m^2 Grundfläche und 1 mm Höhe gerade 1 kg wiegt:

$$\boxed{1 \text{ kg/m}^2 \rightarrow 1 \text{ mmWS}}$$

3. Gleichgewicht der Atmosphäre.

Im Hinblick auf die Bedürfnisse der Flugtechnik sollen die physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre kurz zusammengefaßt werden.

Wir stellen die Frage, wie sich Druck, Temperatur und spez. Gewicht in einer Luftsäule einstellen, die auf dem Erdboden beginnt und sich bis in die Stratosphäre erstreckt. Am Boden ist der Druck dieser Luftsäule bekanntlich der sog. Atmosphärendruck, der etwa 1 kg/cm^2 ist. Nach oben nimmt das Gewicht der Luftsäule immer mehr ab, in gleicher Weise auch der Druck. Gleichzeitig wird das spez. Volumen immer größer, da mit abnehmendem Druck bei Gasen das Volumen größer wird. In unendlich großer Höhe ist schließlich der Druck gleich Null und das spez. Volumen unendlich¹.

Die Luftsäule habe die Fläche F . In irgendeiner Höhe h über dem Boden betrachten wir ein Element von der Höhe dh (Abb. 9). Wenn der Druck auf der Oberseite p ist, muß er auf der unteren Seite größer sein, da das Gewicht der Luftsäule von der Höhe dh hinzugekommen ist, d. h.

$$dp = -dh \cdot \gamma = -\frac{dh^*}{v}, \text{ da für 1 kg Luft } \gamma = \frac{1}{v} \text{ ist. (v spez. Volumen).} \quad (3)$$

Ist die betrachtete Luftsäule seitlich wärmedicht abgeschlossen, so können Vorgänge im Innern, wenn noch Reibungsverluste ausgeschlossen werden, nur adiabatisch vor sich gehen, d. h. die Temperaturen müssen mit abnehmendem Druck kleiner werden. Eine solche Luftsäule ist in Abb. 9 dargestellt. Sie kann z. B. mit dem Schacht eines Bergwerks verglichen werden. Nur wenn adiabatische Zustandsänderung in der ganzen Luftsäule herrscht, ist Gleichgewicht vorhanden und die Luftsäule in Ruhe, wie folgende Überlegung zeigt.

Wir denken uns ein Luftteilchen von der Stelle h nach einer tieferen Stelle h' gebracht. Dem größeren Druck an der Stelle h' entsprechend wird das Teilchen verdichtet und eine Temperatursteigerung annehmen, die sich aus der Adiabate ergibt. Ist diese Temperatur nun identisch mit der Temperatur, die an dieser Stelle herrscht, so ist das spez. Gewicht des verschobenen Teilchens gleich dem an der Stelle herrschenden spez. Gewicht. Ist das nicht der Fall, so erhält das Teilchen einen Auftrieb oder einen Abtrieb, ein Gleichgewicht ist also nicht möglich. Man erkennt somit, daß nur bei adiabatischer Temperaturverteilung die Luftsäule in Ruhe bleiben kann.

Setzen wir in Gl. (3) aus der Gleichung der Adiabate

$$p \cdot v^\kappa = p_0 \cdot v_0^\kappa = C \text{ den Wert } v = \left(\frac{C}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \text{ ein, so ergibt sich } dp = -dh \frac{p^\kappa}{C^\kappa};$$

$$\text{hieraus } dh = -p^{-\frac{1}{\kappa}} \cdot \frac{1}{C^\kappa} \cdot dp.$$

Erstrecken wir die Integration vom Erdboden, d. h. von $h = 0$ bis zur Höhe h , und bezeichnen die Zustände am Erdboden mit dem Index 0, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} -h &= C^\kappa \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] = \frac{\kappa}{\kappa-1} [p \cdot v - p_0 \cdot v_0] \\ &= \frac{\kappa \cdot R}{\kappa-1} [T - T_0] = 103 [T - T_0] \text{ [m].} \end{aligned}$$

¹ Vernachlässigt wird bei der folgenden Rechnung der Einfluß der Erdrotation, sowie die Abnahme der Erdbeschleunigung g mit steigenden Höhen.

* Das (—) Zeichen kommt dadurch zustande, daß bei einem Zuwachs von h der Druck p abnimmt.

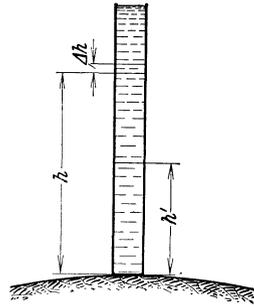


Abb. 9. Zylindrischer Ausschnitt der Atmosphäre.

Nach einigen leichten Umformungen und unter Berücksichtigung von $p_0 v_0^\kappa = C$ entsteht

$$p = p_0 \left[1 - \frac{h}{v_0 p_0} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Aus der Hauptzustandsgleichung $p \cdot v = R \cdot T$ läßt sich noch die Temperatur T_0 am Erdboden einsetzen. Hier ist $T = t^\circ$ Celsius + 273° die absolute Temperatur.

$$p = p_0 \left[1 - \frac{h}{RT_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (4)$$

Der Zusammenhang zwischen Druckverhältnis und Temperaturverhältnis ist durch die Gleichung

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = \frac{T}{T_0}$$

gegeben.

Indem wir in Gl. (4) die linke Seite auf dieselbe Benennung bringen, entsteht:

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 1 - \frac{h}{R \cdot T_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} = \frac{T}{T_0} = \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0}.$$

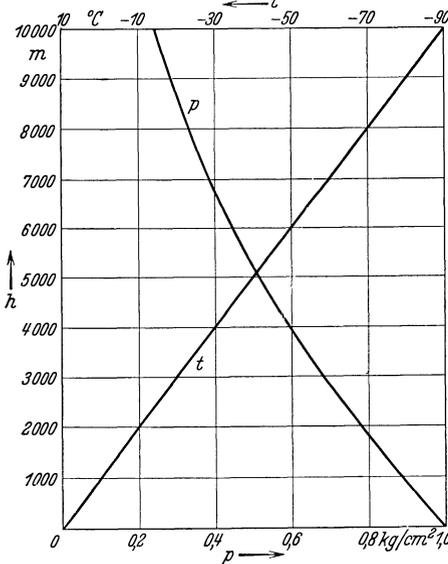


Abb. 10. Druck- und Temperaturverlauf in der Atmosphäre in Abhängigkeit von der Höhe.

Man erkennt, daß die Temperatur linear mit zunehmender Höhe abnimmt. Die prozentuale Abnahme ist leicht zu ermitteln:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{h}{RT_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa}; \quad \Delta T = \frac{h}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}. \quad (5)$$

Für einen Höhenunterschied von $h = 100$ m erhalten wir

$$\Delta T = \frac{100}{29,3} \cdot 0,286 = 0,975 \sim 1^\circ \text{C}.$$

Wir finden die Regel, daß bei adiabatischer Zustandsänderung die Temperatur für einen Höhenunterschied von je 100 m um $\sim 1^\circ \text{C}$ abnimmt.

Abb. 10 zeigt, wie nach Gl. (4) und (5) Druck und Temperatur in Abhängigkeit von der Höhe sich ändern.

Die adiabatische Zustandsänderung ist praktisch nie in der Atmosphäre vorhanden, weil die Luftmassen dauernd in Bewegung sind. Zur Berechnung der mit der Höhe veränderlichen Druckunterschiede hat es sich als zweckmäßiger erwiesen, eine

isotherme Zustandsänderung, d. h. eine konstante mittlere Temperatur, anzunehmen. Setzt man aus der Gleichung für die Isotherme $p \cdot v = p_0 \cdot v_0$ den Wert $v = \frac{p_0 \cdot v_0}{p}$ in Gl. (3) ein, so erhält man

$$dh = -v_0 \cdot p_0 \cdot \frac{dp}{p}.$$

Die Integration ergibt

$$h = v_0 \cdot p_0 \cdot \ln \frac{p_0}{p} \quad \text{oder} \quad p = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{v_0 \cdot p_0}} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{R \cdot T_0}}$$

Diese Formel wird barometrische Höhenformel genannt und oft zur Berechnung von Höhe und Druck verwendet¹.

Für den Wert $p_0 \cdot v_0 = \frac{p_0}{\gamma_0}$ kann man noch eine anschauliche Größe einsetzen. Denkt man sich den Luftdruck an der Erdoberfläche durch Luft von gleichbleibender Dichte gebildet, so erhält man die Höhe $H_0 = \frac{p_0}{\gamma_0}$ (γ_0 spez. Gewicht an der Erdoberfläche). Man bezeichnet diese Größe als die Höhe der gleichförmigen Atmosphäre. Für $t^\circ = 0$ ist $H_0 = 8026$ m.

Aus der letzten Gleichung entsteht nach einer leichten Umformung:

$$h = (18,4 + 0,067 \cdot t_m) \lg p_0/p \quad (h \text{ in km}). \quad (6)$$

Nach Everling kann das spezifische Gewicht der Luft bis etwa 10 km Höhe mit folgender Näherungsformel berechnet werden:

$$\gamma = \gamma_0 \cdot 10^{-0,046 \cdot h} \quad (h \text{ in km}).$$

Als internationale Normalatmosphäre bezeichnet man den Wert $p = 10332 \text{ kg/m}^2$ bei $t = 15^\circ \text{ C}$; das entsprechende spezifische Gewicht beträgt

$$\gamma = 1,226 \text{ kg/m}^3; \quad \varrho = \gamma/g = 0,125 = 1/8 \text{ [kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4].$$

Man legt der Normalatmosphäre gemäß DIN 5450 (genannt Cina) einen Temperaturabfall von $6,5^\circ \text{ C}$ für 1000 m Höhenunterschied zugrunde. Danach erhält man nach einer einfachen Rechnung für Druck- und Dichteverlauf folgende Formeln:

$$p/p_0 = \left(1 - \frac{6,5}{288} \cdot h\right)^{5,25} \quad \varrho/\varrho_0 = \gamma/\gamma_0 = \left(1 - \frac{6,5}{288} \cdot h\right)^{4,255}$$

h in km (gültig bis $h = 11$ km)

Die Berechnung des spezifischen Gewichtes für einen beliebigen techn. Fall geschieht nach der Gasgleichung $\gamma = p/RT$. Außer dem absoluten Druck muß somit noch die Temperatur gemessen werden.

Mittlere Jahreswerte für p , γ und t .

Höhe über dem Meer in km	Lufttemperatur ($^\circ \text{C}$)			Spezifisches Gewicht (kg/m^3)			Barometerstand (mm Hg)		
	Januar	Juli	Jahresmitte	Januar	Juli	Jahresmitte	Januar	Juli	Jahresmitte
0	0	16	8	1,28	1,23	1,25	764	761	762
2	-3	7	0	1,026	0,996	1,008	593	599	596

Der Luftdruck schwankt infolge von Wettereinflüssen um etwa 5 vH um die Mittelwerte, während das spez. Gewicht um etwa 20 vH schwanken kann.

Für meteorologische Zwecke wird eine neue Einheit, das „Millibar“ verwendet, abgekürzte Schreibweise mb).

$$1000 \text{ mb} = 750 \text{ mm Hg} = 10^6 \text{ dyn/cm}^2, \text{ d. h. } 1 \text{ mb} = \frac{3}{4} \text{ mm Hg}; \quad 1 \text{ mm Hg} = \frac{4}{3} \text{ mb}.$$

¹ Die erste Anregung zur barometrischen Höhenmessung gab bereits Pascal (1648).

Übersicht über mittlere Temperatur, relativen Luftdruck und relative Luftdichte in Abhängigkeit von der Höhe.

ρ	0,1275	0,1212	0,115	0,1033	0,0928	0,0831	0,0743	0,0414	0,00905	0,00166
h/km	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	30
t° C	10	7,5	5	0	-5	-10	-15	-40	-50	-50
p/p ₀	1	0,94	0,88	0,78	0,69	0,61	0,53	0,268	0,056	0,01
ρ/ρ_0	1	0,95	0,9	0,81	0,73	0,65	0,58	0,324	0,071	0,013
p	10 360	9750	9180	8100	7140	6280	5510	2770	580	103,6

Zusammensetzung der Luft (gültig bis etwa 20 km Höhe): 78 Raumteile Stickstoff, 21 vH Sauerstoff, 0,9 vH Argon, 0,03 vH Kohlensäure, 0,0012 vH Neon, 0,001 vH Wasserstoff und 0,0004 vH Helium.

Von etwa 20 km Höhe aufwärts nimmt der Sauerstoffgehalt um 0,3 vH für 1 km Höhe ab, bis in einer Höhe von etwa 60 km kein Sauerstoff mehr vorhanden ist.

Mit Wasserdampf gesättigte Luft enthält folgende Mengen Wasser in 1 m³:

° C	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
g Wasser je m ³	1,0	2,3	4,9	9,3	17,2	30

Bei den Anwendungen der Strömungslehre wirkt sich die Luftfeuchtigkeit so aus, daß das spez. Gewicht der Luft etwas geändert wird. Feuchte Luft ist leichter als trockene Luft. Die Unterschiede werden bei höheren Temperaturen größer und können dort einige vH betragen. Bei genauen Messungen ist dies zu beachten. Die Gaskonstante R_f des Luft-Dampf-Gemisches, mit deren Hilfe leicht das spez. Gewicht berechnet werden kann, ergibt sich aus:

$$R_f = \frac{R_{\text{trocken}}}{1 - 0,377 \cdot \varphi \frac{p_d}{p_g}}$$

φ relative Feuchtigkeit,
 p_d Sättigungsdruck des Wasserdampfes
 p_g Gesamtdruck.

Beispiel: Ein Flugzeug steigt bei einem Barometerstand von 760 mm Hg vom Boden auf und erreicht die Gipfelhöhe bei einem Druck von 290 mm Hg. Wie hoch ist das Flugzeug bei $t_m \sim 0^\circ$ gestiegen?

Nach Gl. (6) erhalten wir $h = 18,4 \cdot \lg \frac{p_0}{p} = 18,4 \cdot \lg \frac{760}{290} = 18,4 \cdot \lg 2,62$
 $h = 7,7 \text{ km} \rightarrow 7700 \text{ m.}$

Beispiel: Erwärmte Luftmassen erhalten in einer kälteren Umgebung einen Auftrieb. Die Zugwirkung eines Schornsteines ist z. B. hierauf zurückzuführen. Bei einer Höhe von 10 m soll ein Schornstein eine mittlere Abgastemperatur von 200° aufweisen. Die Gaskonstante der Abgase sei $R = 26,5$, während das spez. Gewicht der Außenluft $\gamma_L = 1,22$ sei bei einem Barometerstand von 763 mm Hg. Der durch den Schornstein erzeugte Druckunterschied ist

$$\Delta p = h \cdot \gamma_L - h \cdot \gamma_G = h (\gamma_L - \gamma_G). \quad (7)$$

Nach der Hauptgasgleichung ist

$$\gamma_G = \frac{p}{RT} = \frac{763 \cdot 13,6}{26,5 \cdot 473} = 0,827 \text{ kg/m}^3,$$

$$\Delta p = 10 (1,22 - 0,827) = 3,93 \text{ mm WS.}$$

Dieser Druck wird zur Erzeugung der Geschwindigkeitshöhe der Abgase benutzt, außerdem zur Überwindung der Reibungswiderstände.

Beispiel: Um wieviel nimmt der Atmosphärendruck bei einer Höhenänderung von 1 m ab ($\gamma = 1,25 \text{ kg/m}^3$)?

Nach Gl. (1) ist $\Delta p = h \cdot \gamma = 1 \cdot 1,25 = 1,25 \text{ mm WS}$.

Die Änderung beträgt also mehr als 1 mm WS bei 1 m Höhenänderung. Mit zwei Bunsenbrennern, die parallel aus einem Gasschlauch gespeist und möglichst klein gestellt werden, läßt sich diese Druckänderung durch Heben eines Brenners deutlich sichtbar machen.

II. Bewegungslehre.

4. Vergleich mit der Bewegung fester Körper.

In diesem Kapitel soll eine direkte Brücke zwischen der meist etwas geläufigeren Mechanik der festen Körper und der Mechanik der Flüssigkeiten geschlagen werden.

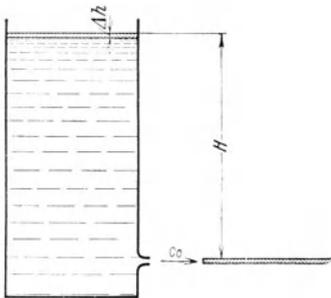


Abb. 11. Ausfluß aus einem Gefäß. Betrachtung eines kurzen Zeitelementes.

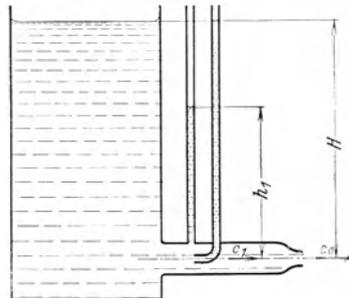


Abb. 12. Druckmessungen in dem Ausflußrohr eines Gefäßes.

Als Beispiel eignet sich besonders der Ausfluß aus einem Gefäß. Die sich zuerst aufdrängende Frage nach der Ausflußgeschwindigkeit c_0 ist mit Hilfe des Energiesatzes leicht zu beantworten (Abb. 11). Die in einem kurzen Zeitintervall ausgeflossene Wassermenge ΔV besitzt eine kinetische Energie $1/2 \cdot \Delta V \cdot \gamma/g \cdot c_0^2$. (Wir wollen dabei ebenso wie bei den folgenden Experimenten dieses Abschnittes annehmen, daß der Gefäßquerschnitt groß ist gegen den Austrittsquerschnitt. Die Geschwindigkeit im Gefäß kann dann vernachlässigt werden gegenüber der Austrittsgeschwindigkeit.) Der Wasserspiegel hat sich in dieser Zeit um den Wert Δh gesenkt. Um den früheren Zustand wieder herbeizuführen, muß die Hubarbeit $\Delta V \cdot \gamma \cdot H$ geleistet werden. Die Gleichsetzung $1/2 \Delta V \gamma/g \cdot c_0^2 = \Delta V \cdot \gamma \cdot H$ ergibt die bekannte Torricellische Ausflußformel:

$$c_0 = \sqrt{2gH}, \quad (8)$$

d. h. die Austrittsgeschwindigkeit ist dieselbe, als wenn das Wasser wie ein fester Körper die Höhe H frei durchfallen hätte. Die bekannte Regel,

daß die Fallgeschwindigkeit bei reibungsfreiem Fall unabhängig von Form und Gewicht des Körpers ist, hat hier ein Analogon: Die Austrittsgeschwindigkeit ist nur von der Höhe H und nicht vom spez. Gewicht abhängig. Auch ist die Größe des Austrittsquerschnittes für die Größe der Geschwindigkeit vollkommen gleichgültig.

Bei einem zweiten Gefäß ist zwischen Gefäß und Düse noch eine Rohrleitung von größerem Durchmesser als dem der Austrittsdüse (Abb. 12). Da wir zunächst Reibungsverluste ausschließen wollen, kann sich die Austrittsgeschwindigkeit gegenüber dem ersten Fall nicht ändern und ist infolgedessen bekannt. Die Geschwindigkeit c_1 in der Rohrleitung

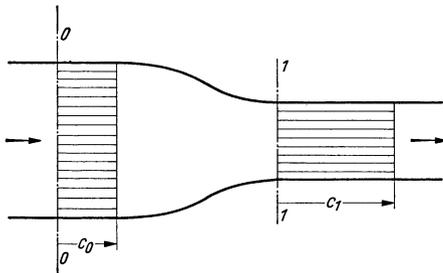


Abb. 13. Veranschaulichung der durch verschiedene Querschnitte durchströmenden gleichen Mengen.

ergibt sich aus der Stetigkeitsgleichung $c_1 \cdot f_1 = c_0 f_0$ zu $c_1 = c_0 \frac{f_0}{f_1}$. Diese Gleichung, auch Kontinuitätsgleichung genannt, sagt aus, daß das durch einen beliebigen Querschnitt in der Sekunde durchtretende Volumen konstant bleibt. Die in einer Sekunde in zwei ver-

schiedenen Querschnitten durchgeflossenen gleichen Volumina sind in Abb. 13 veranschaulicht.

Das Zwischenrohr enthalte eine Anbohrung, die mit einem offenen Steigrohr verbunden ist. Wie groß ist nun die Druckhöhe, die sich im Steigrohr einstellt? Zum besseren Verständnis lohnt es sich, diese Druckhöhe h_1 so aufzufassen, als sei in diesem Querschnitt die Flüssigkeit in der Lage, sich selbst auf die Höhe h_1 zu heben¹. Damit erhält man für die Lagenenergie je kg: $1 \cdot h_1 = h_1 \left[\frac{m \cdot kg}{kg} \right]$, d. h. $[m]$. Nach dem Energiesatz ergibt sich mit zwingender Notwendigkeit, daß der Rest $H - h_1$ sein Äquivalent in der kinetischen Energie $\frac{c_1^2}{2g} \cdot 1$ hat, so daß die Gleichung $H - h_1 = \frac{c_1^2}{2g}$ besteht. Da die Gesamtenergiehöhe H an allen Stellen konstant bleiben muß, entsteht:

$$h_1 + \frac{c_1^2}{2g} = h + \frac{c^2}{2g} = H = \text{konst.} \quad (9)$$

Die Ausrechnung nach

$$c_1 = \sqrt{2g(H - h_1)} \quad (10)$$

¹ Wenn man sich vorstellt, daß das Steigrohr etwas unter der Druckhöhe h_1 abgeschnitten ist, so wird das Wasser überlaufen und sich tatsächlich auf die Höhe h_1 heben, so daß die obige Vorstellung durchaus berechtigt ist.

zeigt, daß durch die Messung von H und h_1 die Geschwindigkeit im Rohr an der Stelle 1 unabhängig von dem vorherigen und weiteren Verlauf des Rohres bestimmbar ist.

Eine zweite Messung erfolgt durch ein Meßrohr mit einer der Strömung entgegengerichteten Öffnung. In diesem Steigrohr beobachtet man dann ein Ansteigen der Flüssigkeit bis auf die Höhe im Behälter.

Vor der Meßöffnung wird die Geschwindigkeit abgestoppt, und ihre ganze kinetische Energie wird wieder in Druckenergie verwandelt. Die sich hierbei einstellende Druckhöhe H ist die gleiche wie die Niveauhöhe des Gefäßes, vorausgesetzt, daß keine Verluste auftreten. Wir merken uns schon jetzt, daß an der untersuchten Stelle die Niveau-

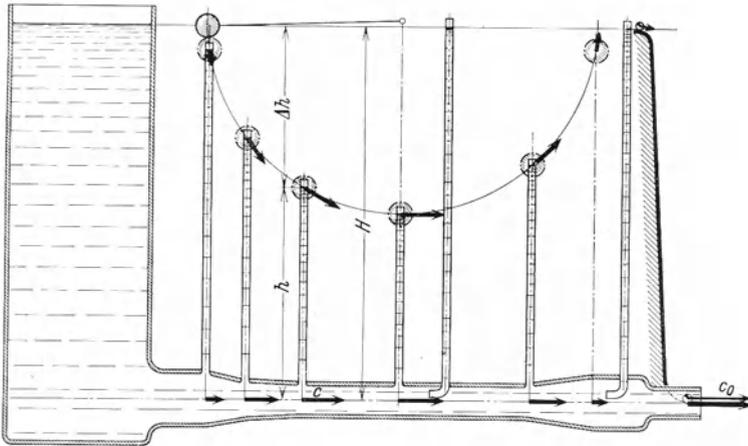


Abb. 14. Vergleich zwischen der Bewegung von Flüssigkeiten und festen Körpern.

höhe des Behälters ohne Kenntnis der Vorgeschichte bestimmt werden kann.

Wir gehen nun einen Schritt weiter. Die Ausflußleitung vor der Düse weist verschiedene Querschnittsänderungen auf. Letztere seien so gewählt, daß sich die Niveauhöhen der Steigröhren auf einem Kreisbogen befinden. Die Frage nach der Geschwindigkeit an irgendeiner Stelle ist nach obigem leicht zu beantworten. Die Differenz Δh zwischen der Niveauhöhe H des Gefäßes und der Steighöhe h stellt die Fallhöhe dar, nach deren Durchfallen das Wasser dieselbe Geschwindigkeit wie im Rohr erhalten würde. Mit Recht bezeichnet man diese Höhe auch als „Geschwindigkeitshöhe“ gemäß der Gleichung: $c^2/2g = H - h$. Die kreisförmige Begrenzung der Druckhöhen stelle gleichzeitig die Bewegungsbahn eines in Abb. 14 eingezeichneten Fadenpendels dar. Das Pendelgewicht werde von der Niveauhöhe des Gefäßes freigegeben. Bei verlustfreier Bewegung wird an irgend-

einer Stelle, wo das Pendel um Δh gefallen ist, nach dem Energiesatz die Geschwindigkeit $c = \sqrt{2g \cdot \Delta h}$ sein. Das ist aber auch die Geschwindigkeit des im Querschnitt senkrecht darunter fließenden Wassers. Man erkennt: An Stellen, die senkrecht übereinanderliegen, ist die Geschwindigkeit des Pendels und des Wassers dieselbe. Die in Abb. 14 eingezeichneten Geschwindigkeitsvektoren deuten nach Richtung und Größe diesen Sachverhalt an. Gl. (9) gestattet die rechnerische Ermittlung in jedem Querschnitt.

Der Ausfluß in der Düse sei noch summarisch verglichen mit dem Gleiten eines Körpers (Abb. 14), der reibungslos die Höhe H entlang

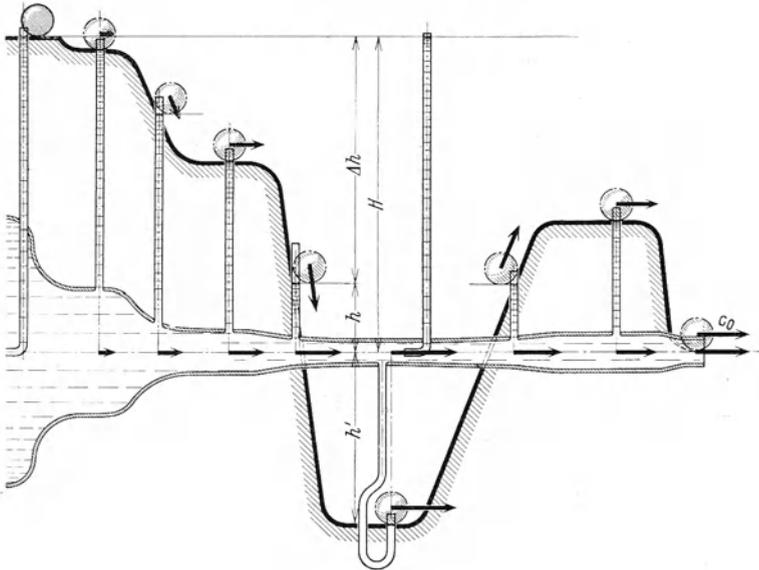


Abb. 15. Veranschaulichung des Unterdruckes durch Berg- und Talbewegung eines festen Körpers. Die Kugel hat die gleiche Geschwindigkeit wie das senkrecht darunter fließende Wasser.

gleitet. Die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers und die des Gleitstückes sind dann ebenfalls gleich $c_0 = \sqrt{2gH}$.

In einem weiteren Versuch (Abb. 15) werde nur mehr ein Rohr betrachtet. Da ein dem Strom entgegengehaltenes Staurohr nach dem oben geschilderten Verfahren genau die Niveauläche des Gefäßes darstellt, gestattet diese Messung die Feststellung der Niveauhöhe. Es leuchtet ein, daß es belanglos ist, ob der Druck nun tatsächlich durch das höher liegende Wasserniveau eines Gefäßes oder aber durch eine Pumpe oder dgl. erzeugt wird. Das Wasser besitzt hierfür kein Erinnerungsvermögen und richtet sich nur nach dem Druck. Die Leitung habe in der Mitte einen Querschnitt, der kleiner als der Austrittsquerschnitt der Düse ist. Der Querschnitt sei im übrigen so geformt, daß die Niveauhöhe der

Steigröhren eine aus Abb. 15 erkennbare Kurve durchläuft. Wie sofort auffällt, ist an der engsten Stelle der Druck negativ. Es soll versucht werden, für diese überaus wichtige Erscheinung wieder eine Stütze bei der Bewegung fester Körper zu finden. Durch die Kurve der Niveaulängen sei die Rutschbahn eines reibungsfrei gleitenden Körpers versinnbildet. Die Geschwindigkeit an irgendeiner Stelle bestimmt sich wieder nach $c = \sqrt{2g\Delta h}$. Die Endgeschwindigkeit kann somit nicht größer sein als $\sqrt{2gH}$; an der engsten Rohrstelle ist jedoch die Geschwindigkeit größer, nämlich $\sqrt{2g(H+h')}$, wo h' den Abstand der tiefsten Stelle bis zur Rohrmitte bedeutet. Bei dem anschließenden Steigen wird allerdings

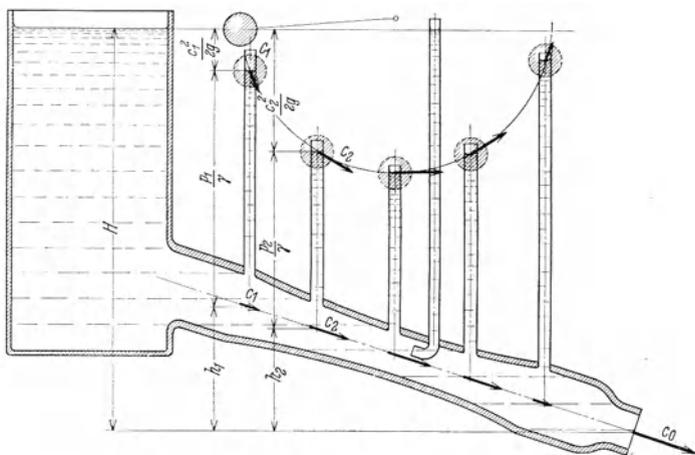


Abb. 16. Bewegung in einem schräg abfallenden Rohr wird verglichen mit einem Fadenpendel. Die Kugel hat wieder die gleiche Geschwindigkeit wie das senkrecht darunter fließende Wasser.

der Überschuß der kinetischen Energie wieder in Hubarbeit umgesetzt. Genau so verhält sich die Flüssigkeit. Das beim letzten Beispiel Gesagte gilt auch hier. Die Geschwindigkeit des Wassers und des festen Körpers stimmen genau überein. Wir finden somit: Der in einer Leitung erzeugte Unterdruck ist das genaue Seitenstück zu dem Fallen und Steigen eines festen Körpers durch ein Tal.

Schließlich soll in Abb. 16 das Abflußrohr nach unten schräg abfallen. Die Querschnittsänderung sei die gleiche wie in Abb. 14. Wir beziehen alle Höhen auf den Austrittsquerschnitt. Zunächst ist die Austrittsgeschwindigkeit wieder leicht zu bestimmen: $c_0 = \sqrt{2gH}$. Für irgendeine Zwischenstelle gilt das Gleiche wie vorher. Die Senkung der Druckhöhe gegenüber dem ursprünglichen Niveau kann wegen der angenommenen Reibungslosigkeit nur dadurch entstehen, daß die Differenz gleich der Fallhöhe ist, die zur Erzeugung der Geschwindigkeit im Rohr notwendig ist. Mit dieser Feststellung läßt sich leicht die folgende Gleichung auf-

stellen, wenn wir gleichzeitig noch gemäß Gl. (1 und 9) für die Niveauhöhen der Steigröhren die Druckhöhe p/γ einführen.

$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g} = H = \text{konst.} \quad (11)$$

Wir fassen zusammen:

1. Ein der Strömung entgegengehaltenes Staurohr zeigt einen Druckan, der identisch mit der gesamten Energiehöhe des Wassers ist.

2. Ein an der Rohrwand angebrachtes Steigrohr zeigt eine Druckhöhe an, die gleich der potentiellen Energie an dieser Stelle ist. Man spricht vom statischen Druck bzw. von der statischen Druckhöhe.

3. In einer geraden Rohrleitung kann die Geschwindigkeit festgestellt werden durch Messung des Wanddruckes und des Gesamtdruckes (durch ein dem Strom entgegengerichtetes Staurohr). Die Differenz beider Druckhöhen, auch Geschwindigkeitshöhe genannt, ist die Fallhöhe, die notwendig ist, um die Rohrgeschwindigkeit zu erzielen.

Es werde bereits hier die Vereinbarung getroffen, den Druck senkrecht zur Strömungsrichtung, d. h. den Wanddruck bei einer Rohrleitung, statischen Druck und den Druck in Richtung der Strömung Gesamtdruck zu nennen.

5. Allgemeine Bewegungsgleichungen.

Während bisher die Strömung in einer geschlossenen Rohrleitung behandelt wurde, soll jetzt der allgemeine Fall der freien Strömung vorausgesetzt werden.

Wir denken uns eine Strömung zwischen zwei parallelen Wänden und wollen die Bewegung durch Stromlinien darstellen. Darunter versteht man die Bahnen, die die einzelnen Flüssigkeitsteilchen zurücklegen. Wir denken uns solche Bahnen eingezeichnet, daß zwischen ihnen immer die gleiche Menge strömt. Setzen wir zunächst Reibungslosigkeit voraus, so können diese Bahnen durch feste, reibungsfreie Wände ersetzt werden. Auf diese Weise ergibt sich von selbst der Anschluß an die anfänglichen Ausführungen über die Strömung in einer Rohrleitung. Neu ist nur die Krümmung der Bahnen, die durch die Krümmungsradien festgelegt sein soll.

Wir grenzen ein kleines Teilchen von den Abmessungen $\Delta s, \Delta n, b'$ (b' Breite senkrecht zur Zeichenebene) ab und untersuchen das Gleichgewicht in der Bewegungsrichtung. Hierzu muß der Newtonsche Satz Kraft = Masse \times Beschleunigung angewandt werden, wobei wir annehmen, daß das Teilchen als fester Körper behandelt wird. Dies ist dann möglich, wenn innerhalb des Teilchens keine merklichen Ge-

schwindigkeitsunterschiede und Verschiebungen auftreten. Bei hinreichend kleinen Abmessungen ist diese Bedingung erfüllt und wird genau stimmen, wenn wir nachher zu unendlich kleinen Abmessungen übergehen.

In der Newtonschen Gleichung¹ ist bekanntlich die Summe aller äußeren Kräfte einzusetzen. Diese Kräfte können leicht angegeben werden.

1. Druckkräfte. Senkrecht auf alle Oberflächen des Teilchens wirkt ein statischer Druck, der in Abb. 17 angedeutet ist. Da wir annehmen müssen, daß dieser Druck entlang dem Stromfaden sich ändert, wird auf die Vorderseite des Teilchens ein anderer Druck wirken als auf die Rückseite. Der Unterschied bewirkt eine äußere Kraft. Wenn z. B. nach Abb. 17 der Druck in Strömungsrichtung abnimmt, so ist Δp negativ, und es ergibt sich eine beschleunigende Kraft: $-\Delta p \cdot \Delta n \cdot b'$ in der Strömungsrichtung, wobei das Vorzeichen dadurch festgelegt ist, daß wir die Strömungsrichtung und die Zunahme aller Größen in dieser Richtung positiv wählen. Da p eine Funktion von s ist, können wir auch schreiben $\Delta p = \frac{\partial p}{\partial s} \cdot \Delta s$.

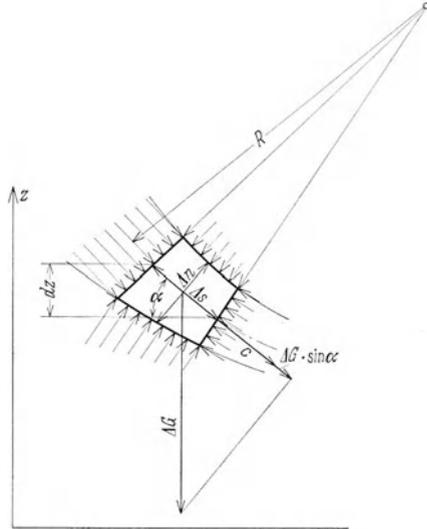


Abb. 17. Teilstück einer Strömung. Darstellung der Druckverteilung um ein kleines Teilchen.

Hiermit ergibt sich in der Strömungsrichtung folgende Druckkraft:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} \cdot \Delta s \cdot \Delta n \cdot b'.$$

2. Gewichtskomponenten. In der Stromröhre nach Abb. 17 bewegt sich das Teilchen nach unten. Zerlegen wir das Gewicht ΔG in zwei Komponenten, so erkennt man, daß die Komponente $\Delta G \cdot \sin \alpha$ in der Strömungsrichtung als äußere Kraft wirkt. Berücksichtigen wir noch $\sin \alpha = -\frac{\partial z}{\partial s}$ und $\Delta G = \Delta s \cdot \Delta n \cdot b' \cdot \gamma$, so erhalten wir als weitere äußere

¹ Vielleicht ist es nicht überflüssig, den Anfänger auf die dreifache Bedeutung des (=)-Zeichens in der Newtonschen Gleichung hinzuweisen: 1. Zahlengleichheit, 2. Dimensionsgleichheit, 3. Richtungsgleichheit. Da die Masse richtungslos ist, muß die Richtung der äußeren Kraft immer gleich der Richtung der Beschleunigung sein.

$$\text{Kraft} \quad -\Delta s \cdot \Delta n \cdot b' \cdot \gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Nunmehr können wir in die Gleichung $[P = m \cdot b]$ einsetzen, wenn wir noch die Beschleunigung $b = \frac{dc}{dt}$ und die Masse $\Delta m = \Delta s \cdot \Delta n \cdot b' \cdot \gamma/g$ berücksichtigen:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial s} \cdot \Delta s \cdot \Delta n \cdot b' - \Delta s \cdot \Delta n \cdot b' \cdot \gamma \frac{\partial z}{\partial s} &= \Delta s \cdot \Delta n \cdot b' \cdot \frac{\gamma}{g} \frac{dc}{dt} \\ -\frac{\partial p}{\partial s} - \gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\gamma}{g} \frac{dc}{dt}. \end{aligned} \quad (12)$$

Hieraus

$$\frac{dc}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{p}{\gamma} + z \right] \quad (13)$$

Die Beschleunigung bewirkt somit eine Änderung der Größe $\frac{p}{\gamma} + z$. Sind keine Höhenänderungen vorhanden, so ergibt sich

$$\frac{dc}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} \right) \quad (14)$$

3. Kräftegleichgewicht in beliebiger Richtung. Wenn man die letzten Betrachtungen für eine von der Strömungsrichtung s abweichende Richtung \bar{s} anstellt, so ergeben sich die gleichen Beziehungen. Bezeichnen wir noch mit $c_{\bar{s}}$ die Komponente der Geschwindigkeit c in der Richtung \bar{s} , so erhält man

$$\frac{dc_{\bar{s}}}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{p}{\gamma} + z \right] \quad (15)$$

Bei horizontaler Bewegung ergibt sich

$$\frac{dc_{\bar{s}}}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(\frac{p}{\gamma} \right) \quad (16)$$

Die Beschleunigung eines Flüssigkeitsteilchens in irgendeiner Richtung ist somit gleich der negativen Änderung des Ausdrucks $\frac{p}{\gamma} + z$ in dieser Richtung erweitert mit der Erdbeschleunigung. Den Ausdruck $-\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{p}{\gamma} + z \right]$ können wir auch als das Gefälle der Größe $\frac{p}{\gamma} + z$ in der betreffenden Richtung auffassen.

a) Stationäre Bewegung.

Es ist zweckmäßig, Gl. (12) für bestimmte Sonderfälle getrennt zu behandeln. Zunächst setzen wir eine stationäre Bewegung voraus. Hierunter verstehen wir eine Strömung, bei der die Geschwindigkeit an einem Ort zeitlich konstant bleibt und sich nur von Ort zu Ort ändert. Damit

ist c eine Funktion vom Weg s , so daß wir schreiben können:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\partial c}{\partial s} \cdot c.$$

Nehmen wir noch weiter eine inkompressible Flüssigkeit an, so ist γ konstant, und die Gl. (12) läßt sich leicht integrieren.

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \gamma \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial c}{\partial s} \cdot c,$$

hieraus
$$-\partial p - \gamma \partial z = \frac{\gamma}{g} c \cdot \partial c. \quad (17)$$

Die Integration ergibt $C - p - \gamma \cdot z = \frac{\gamma}{2g} c^2$

oder
$$p + \gamma \cdot z + \frac{\gamma}{2g} c^2 = P = \text{konst.}, \quad (18)$$

indem für die Konstante gemäß der Dimension ein Druck P eingesetzt wurde.

Die Division mit γ ergibt noch eine andere Form:

$$p/\gamma + z + c^2/2g = P/\gamma = H = \text{konst.} \quad (19)$$

Dies ist aber die gleiche Beziehung, die in einfacherer Weise schon S. 10 abgeleitet wurde. Nunmehr wissen wir, daß diese Beziehung allgemein, d. h. auch bei der freien Strömung, gilt. Es handelt sich um die Bernoullische Gleichung¹. Diese besagt auch, daß die Energie konstant ist. Die einfachere Ableitung in Gl. (9) entsprach der Benutzung des Energiesatzes der Mechanik.

Für den praktischen Gebrauch ist die Bezugnahme auf zwei verschiedene Strömungsquerschnitte 1 und 2 manchmal zweckmäßig.

$$p_1 + \gamma \cdot z_1 + \frac{\gamma}{2g} c_1^2 = p_2 + \gamma \cdot z_2 + \frac{\gamma}{2g} c_2^2 = P = \text{konst.}, \quad (20)$$

$$p_1/\gamma + z_1 + c_1^2/2g = p_2/\gamma + z_2 + c_2^2/2g = H = \text{konst.} \quad (21)$$

Bewegt sich die Flüssigkeit auf einer horizontalen Ebene, so ist wegen $z_1 = z_2$ folgende einfachere Form gültig:

$$p + \frac{\gamma}{2g} c^2 = P = \text{konst.} \quad (22)$$

$$p/\gamma + c^2/2g = H = \text{konst.} \quad (23)$$

¹ Bernoulli, Daniel: Hydrodynamica. Straßburg 1738. Die einfache Form der Bewegungsgleichung, „Bernoullische Gleichung“ genannt, wurde von Bernoulli 1738 gefunden. Der Begriff des Flüssigkeitsdruckes wurde ebenfalls schon von Bernoulli verwendet, aber erst von Euler (1755) in seinem ganzen Umfang erkannt. Von Euler stammen auch die allgemeineren Gleichungen, die meist „Eulersche Gleichungen“ genannt werden.

oder:
$$p_1 + \frac{\gamma}{2g} c_1^2 = p_2 + \frac{\gamma}{2g} c_2^2 \quad (24)$$

oder:
$$p_1/\gamma + c_1^2/2g = p_2/\gamma + c_2^2/2g. \quad (25)$$

Ob man mit dem Druck oder mit der Druckhöhe arbeitet, ist an und für sich gleichgültig. Bei Flüssigkeiten kann letztere unmittelbar sichtbar gemacht werden und verdient aus Gründen der Anschaulichkeit den Vorzug. Bei Gasen ist dies nicht möglich; man stellt den Druck durch Manometer fest und rechnet daher zweckmäßig mit Drücken. Aus diesen Gründen sind beide Formen der Bernoullischen Gleichung praktisch notwendig und oben zusammengestellt.

b) Nichtstationäre Strömungen.

Ändert sich an einem Ort die Geschwindigkeit noch mit der Zeit, so spricht man von einer nichtstationären Bewegung. Die Beschleunigung $\frac{dc}{dt}$ eines Teilchens unterscheidet sich dabei von der Geschwindigkeitsänderung, die an einem festen Ort beobachtet wird. Betrachten wir die Geschwindigkeitsänderung, wenn wir um den Weg ds weitergehen, so ist zu berücksichtigen, daß hierbei die Zeit sich um dt und in dieser Zeitänderung an jeder Stelle auch die Geschwindigkeit sich ändert. Es ergibt sich somit eine Orts- und eine Zeitänderung von dc nach folgender Beziehung:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial c}{\partial t} \cdot dt.$$

Hieraus
$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (26)$$

Hier bedeutet $\frac{dc}{dt}$ die absolute Beschleunigung, die ein Teilchen erfährt, während $\frac{\partial c}{\partial t}$ anzeigt, wie sich an einem festen Ort die Geschwindigkeit mit der Zeit ändert.

Durch Einsetzen in Gl. (12) entsteht:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \gamma \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\gamma}{g} \left[c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{\partial c}{\partial t} \right],$$

hieraus
$$-\partial p - \gamma \partial z = \frac{\gamma}{g} c \partial c + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds.$$

oder
$$g \frac{\partial}{\partial s} \left[z + p/\gamma + \frac{c^2}{2g} \right] + \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (27)$$

Die Integration ergibt:

$$p + \gamma \cdot z + \frac{\gamma}{2g} c^2 + \frac{\gamma}{g} \int_0^s \frac{\partial c}{\partial t} ds = \text{konst.} \quad (28)$$

¹ Zieht man auf beiden Seiten einen konstanten Druck, beispielsweise den Atmosphärendruck p_0 ab, so entsteht: $(p_1 - p_0) + \gamma/2g \cdot c_1^2 = (p_2 - p_0) + \gamma/2g \cdot c_2^2$; bezeichnet man mit $\Delta p_1 = p_1 - p_0$ und $\Delta p_2 = p_2 - p_0$ die Überdrücke über der Atmosphäre, so ergibt sich $\Delta p_1 + \gamma/2g \cdot c_1^2 = \Delta p_2 + \gamma/2g \cdot c_2^2$. In der Bernoullischen Gleichung kann also statt der absoluten Drücke auch der Druckunterschied gegenüber einem beliebigen Druck ein-

gesetzt werden. Der Index 0 bezieht sich dabei auf die Stelle, wo die Geschwindigkeit Null ist, z. B. auf den Kessel bzw. Behälter, aus dem die Strömung durch Überdruck eingeleitet wird.

Auch hier sollen noch weitere für den praktischen Gebrauch notwendige Formeln zusammengestellt werden.

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{c^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^s \frac{\partial c}{\partial t} ds = \text{konst.} \quad (29)$$

$$p_1 + \gamma \cdot z_1 + \frac{\gamma}{2g} c_1^2 + \frac{\gamma}{g} \int_0^{s_1} \frac{\partial c}{\partial t} ds = p_2 + \gamma \cdot z_2 + \frac{\gamma}{2g} c_2^2 + \frac{\gamma}{g} \int_0^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t} ds \quad (30)$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{c_1^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^{s_1} \frac{\partial c}{\partial t} ds = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{c_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t} ds \quad (31)$$

oder

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{c_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t} ds. \quad (32)$$

Der Unterschied gegenüber der stationären Strömung besteht also in dem Glied:

$$\frac{1}{g} \int_0^s \frac{\partial c}{\partial t} ds. \text{ Dieser Ausdruck berücksichtigt die Beschleunigung.}$$

Setzt man für $\frac{p_1}{\gamma} + z + \frac{c^2}{2g} = H$ ein, so ergibt sich

$$H_1 = H_2 + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds. \quad (33)$$

Das charakteristische Merkmal der nicht stationären Strömung ist somit die zeitlich sich ändernde Gesamtenergie. Das bisher als Grundlage benutzte Gesetz der konstanten Flüssigkeitsenergie gilt hier nicht mehr. Gl. (33) vereinfacht sich noch bei

Leitungen mit gleichem Querschnitt wegen $\int \frac{\partial c}{\partial t} ds = \frac{\partial c}{\partial t} \cdot s$ in

$$H_1 = H_2 + \frac{1}{g} \frac{\partial c}{\partial t} s. \quad (34)$$

c) Ableitung bei veränderlicher Dichte.

Bei Gasen ändert sich mit dem Druck die Dichte. Auch in einer Strömung treten nach der Bernoullischen Gleichung Druckänderungen auf, sodaß also ein Einfluß auf die Gesamtbewegung zu erwarten ist.

Wir können dies dadurch berücksichtigen, daß wir in Gl. (13) γ als veränderlich betrachten:

$$-\frac{\partial p}{\gamma} - \partial z = \frac{1}{g} c \partial c,$$

indem wir uns hier auf stationäre Bewegungen beschränken. (Bei gleichbleibender Höhe, d. h. $\partial z = 0$, ergibt sich $-\frac{\partial p}{\gamma} = \frac{1}{g} c \partial c$).

Die Integration ergibt:

$$\frac{c^2}{2g} + z + \int \frac{dp}{\gamma} = C = H. \quad (35)$$

Statt der Druckhöhe p/γ erhalten wir somit das Integral $\int \frac{dp}{\gamma}$, das von der thermodynamischen Zustandsänderung abhängt.

Da bei Gasen die Höhenänderungen prozentual meist keine Rolle spielen, genügt fast immer die Gleichung:

$$\frac{c^2}{2g} + \int \frac{dp}{\gamma} = H. \quad (36)$$

Hieraus entstehen noch folgende Gebrauchsformeln:

$$c_1^2/2g + \int_0^1 \frac{dp}{\gamma} = c_2^2/2g + \int_0^2 \frac{dp}{\gamma}, \quad (37)$$

oder:

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = \int_2^1 \frac{dp}{\gamma}. \quad (38)$$

Für den Idealfall der reibungslosen Strömung ist der Zusammenhang zwischen p und γ durch die Adiabate $\frac{p}{\gamma^\kappa} = \frac{p_0}{\gamma_0^\kappa}$ gegeben; denn eine innere Reibung würde eine zugeführte Wärme bedeuten, die gerade bei der Adiabate ausgeschlossen ist. Das Integral ist dann leicht auszurechnen. So ergibt sich eine abgeänderte Bernoullische Gleichung:

$$\frac{c_1^2}{2g} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{c_2^2}{2g} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\gamma_2}. \quad (39)$$

(Weitere Einzelheiten im Abschnitt: Gasdynamik.)

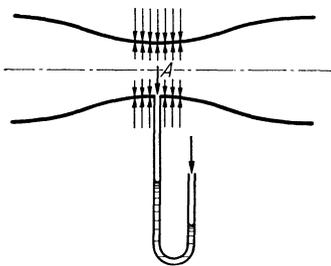


Abb. 18. Kräftespiel beim Auftreten eines Unterdruckes.

d) Unterdruck.

Obschon viele Erscheinungen rein äußerlich den Eindruck erwecken, als ob eine Flüssigkeit bzw. ein Gas eine Fläche ansaugen könnte, ist diese Auffassung bei näherer Betrachtung unrichtig. Flüssigkeiten und Gase können immer nur Druckkräfte auf eine Fläche ausüben. Saugkräfte würden Zugspannungen entsprechen, die bei Flüssigkeiten und Gasen unmöglich sind.

Tritt z. B. in einem verengten Rohr (Abb. 18) bei A ein „Unterdruck“ auf, so besagt das nur, daß die Flüssigkeit im Innern einen kleineren Druck auf die Wand ausübt als die äußere Atmosphäre.

Die praktischen Auswirkungen der Bernoullischen Gleichung sind bei vielen Problemen infolge Wirkung des Unterdruckes oft besonders ausgeprägt.

Ein Studium solcher Vorgänge ist vor allem zur Entwicklung der Anschauung dem Anfänger dringend zu empfehlen.

Bläst man z. B. nach Abb. 19 zwischen zwei Postkarten, die man vorher über einer Tischkante leicht gebogen hat, hindurch, so schlagen die Karten zusammen. In der behelfsmäßig gebildeten Düse ergibt sich am engsten Querschnitt ein kleiner Unterdruck, der voll ausreicht, um die Karten zusammenschlagen zu lassen.

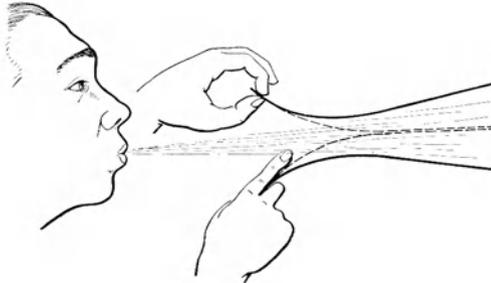


Abb. 19.

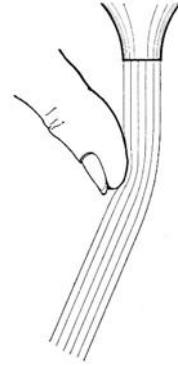


Abb. 20. Ablenkung eines frei fallenden Wasserstrahles durch gewölbte Daumenfläche.

Hält man nach Abb. 20 einen Daumen an den Wasserstrahl einer Wasserleitung, so beobachtet man deutlich, wie der Strahl angesaugt wird. Er läßt sich auf diese Weise deutlich aus seiner Richtung lenken.

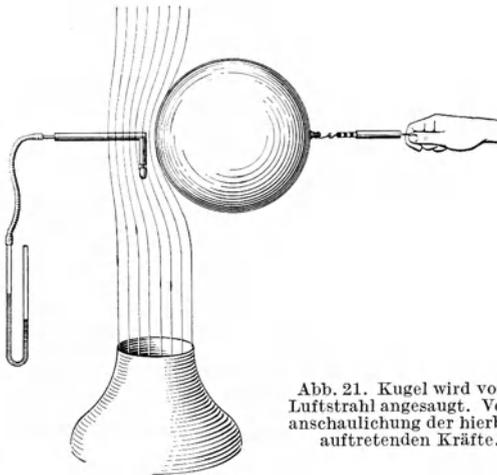


Abb. 21. Kugel wird von Luftstrahl angesaugt. Veranschaulichung der hierbei auftretenden Kräfte.

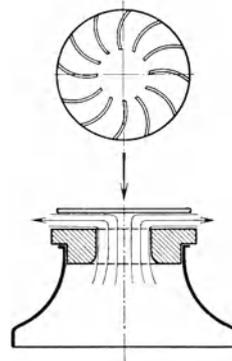


Abb. 22. Frei rotierender Turbinenläufer, bestehend aus einer Platte, auf die spiralförmig Fäden aufgeklebt sind.

Im Luftstrahl schwebende Bälle¹ zeigen recht auffällige Erscheinungen. Ein Ball wird nach Abb. 21 vom Luftstrahl angesaugt. Mit einer Federwaage lassen sich die ziemlich erheblichen Saugkräfte nachweisen. Durch eine Geschwindigkeitsmessung mit dem Prandtl-Rohr läßt sich leicht nachweisen, daß in der Nähe des

¹ Siehe auch Eck: Der freischwebende Ball, ein einfaches experimentelles Auskunftsmitel. Luftfahrt und Schule 1935, S. 59; auch Eck: Strömungslehre Bd. II.

Balles eine große Übergeschwindigkeit herrscht. Der entsprechende Unterdruck ist nach Abb. 21 ebenfalls leicht nachzuweisen.

Eine Platte wird von einem Luftstrahl angesaugt, wenn man sie einer Düse nähert (Abb. 22). Die Wirkung kommt dadurch zustande, daß im inneren Ringspalt die größte Geschwindigkeit vorhanden ist, die nach außen wegen der zunehmenden Querschnitte wieder abnehmen muß. Da außen Atmosphärendruck ist, muß also im Ringspalt Unterdruck herrschen. Die Saugkraft des Ringes wird vom Überdruck in der Mitte und dem Plattengewicht im Gleichgewicht gehalten. Die Platte schwebt merklich federnd in kurzer Entfernung über der Düse. Bei Belastung durch eine schwache Feder entstehen Schwingungen, wie sie von den Ventilen her bekannt sind. Bringt man nach Abb. 22 spiralförmige Flächen auf, so entsteht ein frei rotierender Turbinenläufer.

e) Der Staudruck.

Wenn in einer Strömung die Geschwindigkeit durch irgendein Hindernis auf Null abgestoppt wird, so entsteht an dieser Stelle eine Druckerhöhung, indem kinetische Energie in Druck umgesetzt wird. Bei den Betrachtungen von Abb. 12 ist diese Feststellung bereits getroffen worden. An einem umströmten Körper nach Abb. 23 tritt das Gleiche ein. Durch die sog. „Verzweigungsstromlinie“ wird die Strömung in zwei Hälften geteilt. Die Verzweigungsstromlinie selbst läuft auf den sog. „Staupunkt“ auf. An dieser Stelle ist die Geschwindigkeit gleich Null. Nach Gl. (20) ist $p_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} 0^2$, d. h. $p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} w_1^2$. Diesen Druckzuwachs infolge Abstoppens der Geschwindigkeit nennt man Staudruck und benutzt hierfür häufig die Bezeichnung

$$q = \frac{\rho}{2} w_1^2 = \frac{\gamma}{2g} w_1^2 \quad (40)$$

Beispiel. Wie groß ist der Druck im Staupunkt einer Bombe, die aus 3000 m Höhe auf Wasser aufschlägt?

Ohne Luftreibung ist die Aufschlaggeschwindigkeit

$$w = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3000} = 243 \text{ m/s.}$$

Mit $\gamma_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ ergibt sich

$$q = \frac{1000 \cdot 243^2}{2 \cdot 9,81} = \gamma_w \cdot h = 1000 \cdot 3000 = 3 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^2 \rightarrow 300 \text{ at.}$$

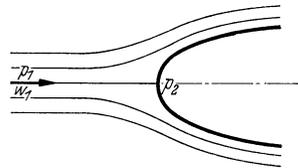


Abb. 23. Verzweigungsstromlinie und Staupunkt bei einem umströmten Körper.

Beispiel. Der London-Edinburgher Schnellzug, der ohne Halten durchfährt, ergänzt das Kesselwasser der Lokomotive, indem ein Staurohr in einen neben den Schienen befindlichen Wassergraben getaucht wird. Welchen Druck würde man bei geschlossener Leitung in dem 3,5 m über Wasserniveau befindlichen Ausflußstück feststellen bei einer Zuggeschwindigkeit von 108 km/Std. d. h. einer Geschwindigkeit von $c = \frac{108}{3,6} = 30 \text{ m/s}$.

$$\text{Nach Gl. (24 u. 40) ergibt sich } \Delta p = \frac{\gamma_w}{2g} \cdot c^2 = 3,5 \cdot \gamma_w = \frac{1000 \cdot 30^2}{2 \cdot 9,81} = 3,5 \cdot 1000,$$

$$\Delta p = 42330 \text{ kg/m}^2 \rightarrow 4,23 \text{ atü.}$$

Ließe man das Wasser senkrecht nach oben ausspritzen, so würde ohne Reibung eine Steighöhe von $\frac{c^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 9,81} = 45,8$ m erreicht werden.

f) Gasausfluß aus einem Behälter.

Strömt aus einem großen Behälter durch eine Düse ein Gas aus, so folgt die Ausflußgeschwindigkeit nach Gl. (22). $P_0 = p + \frac{\rho}{2} c^2$ [P_0 absoluter Druck im Behälter].

$$\text{Hieraus} \quad P_0 - p = \Delta p = \frac{\rho}{2} c^2; \text{ hieraus } c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}.$$

Die Gleichung gilt nur bis zu Geschwindigkeiten von etwa 100 m/s. Darüber hinaus macht sich die Zusammendrückbarkeit bemerkbar. S. 252. Für die Normalatmosphäre ist $\gamma/g = 1/8$. Damit erhalten wir die einfache Gleichung:

$$c = 4 \sqrt{\Delta p} \text{ [mm WS]}. \quad (41)$$

Fließen unter gleichen Bedingungen zwei Flüssigkeiten bzw. Gase mit den spez. Gewichten γ_1 und γ_2 aus, so verhalten sich die Zeiten, in denen gleiche Volumina ausfließen, umgekehrt wie die Ausflußgeschwindigkeiten. Hieraus folgt:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\sqrt{2g \Delta p / \gamma_2}}{\sqrt{2g \Delta p / \gamma_1}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}.$$

Die Ausflußzeiten verhalten sich somit wie die Wurzeln aus den spez. Gewichten. Diese Beziehung wird oft zur Bestimmung des spez. Gewichtes von Gasen benutzt. (Gerät von Bunsen-Schilling.)

Beispiel. Die menschliche Lunge kann bei geschlossenem Munde einen Überdruck von etwa 1300 mm WS erzeugen, während beim Blasen im Munde nur etwa 200 mm WS gemessen werden. Welche größte Blasgeschwindigkeit ergibt sich hierbei, wenn als mittlere Massendichte $\gamma/g = 1/8$ gewählt wird?

$$\text{Aus Gl. (41) folgt:} \quad c = 4 \cdot \sqrt{\Delta p} = 4 \cdot \sqrt{200} = 56,6 \text{ m/s.}$$

g) Weitere Beispiele.

Beispiel. Anordnung nach Abb. 24: $p_1 = 0,1$ atü $\rightarrow 1,1$ ata; $c_1 = 4$ m/s. Der Unterdruck an der Stelle 2 ist zu bestimmen a) für Wasser, b) für Luft als Durchflußmittel.

a) Für Wasser ist nach der Kontinuitätsgleichung:

$$c_2 = c_1 (d_1/d_2)^2 = 4 \cdot (20/14)^2 = 8,16 \text{ m/s;}$$

$$p_1 + \frac{\gamma}{2g} c_1^2 = p_2 + \frac{\gamma}{2g} c_2^2; \text{ hieraus } \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{2g} (c_2^2 - c_1^2) = \frac{1000}{2 \cdot 9,81} (8,16^2 - 4^2) \\ = 2570 \text{ mm WS; } p_2 = p_1 - \Delta p = 1,1 - 0,257 = 0,843 \text{ ata.}$$

Unterdruck $1,0 - 0,843 = 0,157$ atü bzw. 1570 mm WS.

b) Luft von 15°C

$$\gamma_{\text{Luft}} = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{11\,000}{29,3 \cdot 288} = 1,3 \text{ kg/m}^3;$$

$$\text{wie unter a)} \quad \Delta p = \frac{\gamma}{2g} (c_2^2 - c_1^2) = \frac{1,3 \cdot 50,6}{2 \cdot 9,81} = 3,35 \text{ mm WS,}$$

$$p_2 = p_1 - \Delta p = 11\,000 - 3,35 = 10\,996,65 \text{ mm WS} \rightarrow 1,0997 \text{ ata.}$$

Die Meßstelle zeigt somit bei Luft 996,65 mm WS Überdruck an.

Beispiel. Ein Tragflügel wird im Windkanal mit einer Geschwindigkeit von $c = 40 \text{ m/s}$ angeblasen (Abb. 25). An der Stelle R wird ein Unterdruck von 300 mm WS gemessen. Wie groß ist die Geschwindigkeit an dieser Stelle? $\gamma/2g = 1/16$.

$$p_1 + \frac{\gamma}{2g} \cdot c_1^2 = p_2 + \frac{\gamma}{2g} \cdot c_2^2,$$

hieraus

$$c_2 = \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + c_1^2}; \quad c_2 = \sqrt{300 \cdot 16 + 40^2} = 80 \text{ m/s}.$$

Beispiel. Das Saugrohr einer Turbine hat eine Höhe von 4 m über dem Unterwasserspiegel. Der Eintrittsdurchmesser ist 1 m , der Austrittsdurchmesser $1,4 \text{ m}$. Die Austrittsgeschwindigkeit beträgt 4 m/s . Wie groß ist der Unterdruck bei d_1 ? Abb. 26.

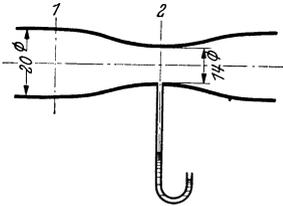


Abb. 24.

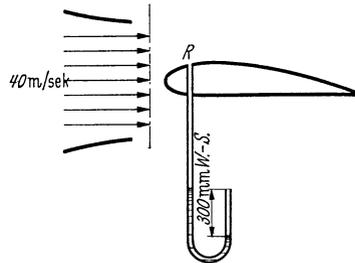


Abb. 25.

Aus der Stetigkeitsgleichung folgt:

$$c_1 = c_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 4 \left(\frac{1,4}{1} \right)^2 = 7,84 \text{ m/s}.$$

Bernoullische Gleichung, bezogen auf das untere Wasserniveau:

$$p_2 + \frac{\gamma}{2g} c_2^2 = h \cdot \gamma + p_1 + \frac{\gamma}{2g} c_1^2;$$

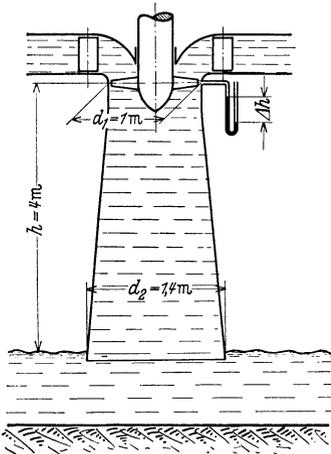


Abb. 26. Anordnung des Saugrohrs einer Kaplan-turbine.

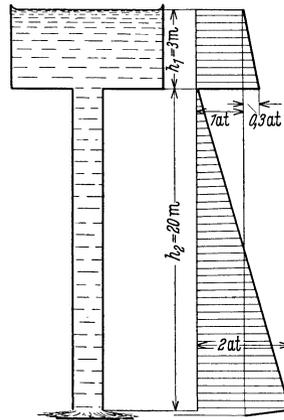


Abb. 27. Druckverteilung in einem Abfallrohr, in dem an einer Stelle das Vakuum erreicht wird.

da $p_2 = 10000 \text{ kg/m}^2$ (Atmosphärendruck), ist in dieser Gleichung alles bis auf p_1 bekannt.

$$p_1 = p_2 - h \cdot \gamma + \frac{\gamma}{2g} (c_2^2 - c_1^2);$$

$$p_1 = 10000 - 4000 + \frac{1000}{2 \cdot 9,81} (4^2 - 7,84^2) = 10000 - 4000 - 2310 = 3690 \text{ kg/m}^2$$

$$\rightarrow 0,369 \text{ at.}$$

Der Unterdruck ist somit $1 - 0,369 = 0,631 \text{ at.}$

Wenn der Durchfluß durch das Saugrohr aufhört (Abstellen der Turbine, wobei die Turbine mit Wasser gefüllt bleibt), ist $c_1 = c_2 = 0$. Es bleibt dann nur mehr der statische Unterdruck $0,4 \text{ at.}$ Beim Durchfluß tritt also eine erhebliche Vergrößerung des Unterdruckes ein.

h) Abreißen der Strömung in einem Abfallrohr.

Der physikalische Wirkungsbereich der Ausflußformel $c_0 = \sqrt{2gH}$ hat seine Grenzen. Betrachten wir z. B. nach Abb. 27 einen offenen Wasserbehälter, aus dem das Wasser durch ein senkrechtes Abfallrohr abläuft, so erkennt man zunächst, daß an der Wasseroberfläche und am Austritt der Druck gleich dem Atmosphärendruck ist. Die Austrittsgeschwindigkeit müßte gemäß Gl. (8) $c_0 = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}$ sein. Ob diese Geschwindigkeit erreicht wird, hängt nun davon ab, ob an irgendeiner Stelle Vakuum (genauer der Dampfdruck) auftritt. Diese Möglichkeit ist beim Einlauf in das Abfallrohr vorhanden. Dies ist die Stelle des kleinsten Druckes, der von da ab nach unten wieder bis zum Atmosphärendruck zunehmen muß. Für die Geschwindigkeitserzeugung an dieser Stelle steht neben dem Überdruck $h_1 \cdot \gamma$ der ganze Atmosphärendruck p_a , d. h. $p_a + h_1 \cdot \gamma$, zur Verfügung, wenn gerade das Vakuum erreicht wird. Damit wird $c_{\max} = \sqrt{2g\left(\frac{p_a}{\gamma} + h_1\right)}$. Ob diese Geschwindigkeit erreicht wird, hängt von der Länge des Abfallrohres ab. Nach S. 9 ist die Austrittsgeschwindigkeit $c_0 = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}$. Im Grenzfall sind beide Geschwindigkeiten gleich, woraus folgt

$$\sqrt{2g(h_1 + h_2)} = \sqrt{2g\left(\frac{p_a}{\gamma} + h_1\right)}, \text{ hieraus } h_2 = \frac{p_a}{\gamma} = 10 \text{ m.}$$

Das Abfallrohr wird somit bei rund 10 m Länge die größte Geschwindigkeit ergeben, die überhaupt möglich ist. Ist das Rohr länger, so reißt die Strömung ab. Hohlraumbildung ist die Folge.

Wenn jedoch, wie in Abb. 27, der Austrittsquerschnitt gedrosselt wird, kann das Abfallrohr länger sein. Auch hier gilt für die Austrittsgeschwindigkeit $c_0 = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}$; ebenfalls wird an der gefährdeten Stelle maximal $c_{\max/\text{Rohr}} = \sqrt{2g\left(\frac{p_a}{\gamma} + h_1\right)}$ möglich sein. Infolge der Austrittsverengung am Austritt ist hier jedoch $c_0 > c_{\max/\text{Rohr}}$. Der Druckverlauf ist in Abb. 27 dargestellt. Ist f_1 der Rohrquerschnitt und f_2 der Drosselquerschnitt, so ist nach der Kontinuitätsgleichung $c_{\max/\text{Rohr}} \cdot f_1 = c_0 \cdot f_2$. Wählen wir z. B. ein Abfallrohr von $h_2 = 20 \text{ m}$ und $h_1 = 3 \text{ m}$, so ergibt sich:

$$f_1 \cdot \sqrt{2g\left(\frac{p_a}{\gamma} + h_1\right)} = f_2 \cdot \sqrt{2g(h_1 + h_2)},$$

hieraus

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{\frac{p^a}{\gamma} + h_1}} = \sqrt{\frac{20 + 3}{10 + 3}} = 1,33.$$

d. h. die Grenzgeschwindigkeit wird erreicht, wenn der Rohraustritt im Verhältnis 1:1,33 verengt wird. Eine weitere Vergrößerung des Austrittsquerschnittes bringt keine Geschwindigkeitsvergrößerung mehr.

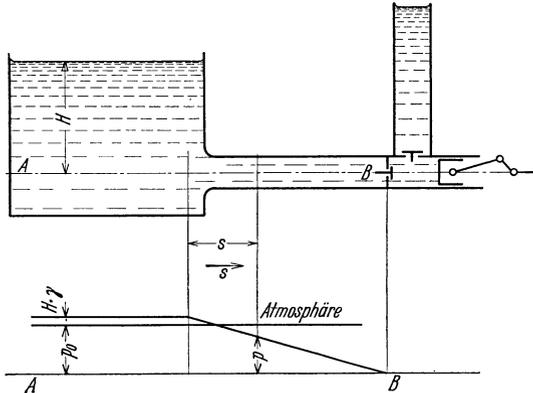


Abb. 28. Druckverteilung in einer Leitung bei nichtstationärer Strömung.

i) Beispiel für nichtstationäre Strömung.

Eine Kolbenpumpe soll nach Abb. 28 aus einem Behälter durch eine 50 m lange Leitung Wasser ansaugen. Wie ist der Druck entlang der Rohrleitung verteilt, bei welcher Umfangsgeschwindigkeit bzw. bei welcher Drehzahl tritt Vakuum in der Leitung auf, wobei die Wassersäule abreißen wird?

Wenn wir die endliche Schubstangenlänge vernachlässigen, folgt die Kolbengeschwindigkeit c bekanntlich der Funktion

$$c = r \cdot \omega \cdot \sin \omega t = u \cdot \sin \omega t \quad (u \text{ Umfangsgeschwindigkeit des Kurbelzapfens}).$$

Maßgebend ist Gl. (28)

$$P = p_0 + H \cdot \gamma = p + \frac{\gamma}{2g} c^2 + \rho \int_0^s \frac{\partial c}{\partial t} ds.$$

Da die Rohrleitung gleichbleibenden Durchmesser hat, müssen c und $\frac{\partial c}{\partial t}$ an allen Stellen zur gleichen Zeit den gleichen Wert haben. Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= u \cdot \omega \cdot \cos \omega t \quad \text{und} \quad \int_0^s \frac{\partial c}{\partial t} ds = \int_0^s u \omega \cdot \cos \omega t ds = u \cdot \omega \cdot \cos \omega t \int_0^s ds \\ &= u \cdot \omega \cdot (\cos \omega t) \cdot s. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in obige Gleichung ein, so ergibt sich für den Druck p :

$$p = p_0 + H \cdot \gamma - \frac{\gamma}{2g} u^2 \cdot \sin^2 \omega t - \frac{\gamma}{2g} u^2 \cos \omega t \cdot \frac{2s}{r}.$$

Für einen gegebenen Augenblick, d. h. $t = \text{konst.}$, ist der Druck somit eine lineare Funktion von der Länge s . Wie in Abb. 28 angedeutet, sinkt der Druck linear nach der Pumpe zu. Man erkennt leicht, daß zeitlich die größte Drucksenkung eintritt, wenn $\cos \omega t = 1$ ist. Dabei ist das Glied $\sin \omega t = 0$. Damit erhalten wir:

$$p_{\min} = p_0 + H \cdot \gamma - \frac{\gamma}{2g} u^2 \cdot \frac{2s}{r};$$

für $p_{\min} = 0$ erhalten wir

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{p_0 + H \cdot \gamma}{\frac{\gamma}{2g} \cdot 2 \frac{s}{r}}}.$$

Dies ist die größte Geschwindigkeit, die die Pumpe annehmen darf, ohne daß die Wassersäule abreißt.

Setzen wir für ein Beispiel die Zahlen $H = 4 \text{ m}$; $p_0 = 10000 \text{ kg/m}^2$; $r = 0,1 \text{ m}$ ein, so ergibt sich für den Fall, daß wir an der Kolbenpumpe Vakuum, d. h. $p = 0$, annehmen:

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{14\,000}{51 \cdot \frac{100}{0,1}}} = 0,524 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Dies entspricht einer Drehzahl von

$$n = 50,1/\text{min}.$$

Die Rohrreibung wurde bei der Berechnung vernachlässigt. Tatsächlich spielt sie hier keine Rolle. Man kann dies leicht erkennen, da die größte Beschleunigung, die für obiges Beispiel maßgebend ist, in der Totlage des Kolbens auftritt. Hier ist aber $c = 0$, sodaß die Reibung in diesem Augenblick ganz ausgeschaltet ist.

Der Vorgang kann durch Zwischenschaltung eines Windkessels gemildert werden. Dadurch wird verhindert, daß die Wassersäule bei jedem Hub ganz zur Ruhe kommt und immer wieder von neuem beschleunigt werden muß.

6. Kräfte senkrecht zur Strömungsrichtung.

Wodurch können Druckänderungen senkrecht zur Strömungsrichtung überhaupt auftreten? Offenbar nur durch Zentrifugalkräfte, die durch die Bewegung der Luftteilchen auf gekrümmten Stromlinien entstehen. Diese Zentrifugalkräfte müssen durch Druckkräfte aufgenommen werden. Man erkennt, daß deshalb der Druck in Richtung der Normalen nach außen zunehmen muß. Bewegt sich ein Massenteilchen Δm auf einem Kreise vom Radius R mit der Geschwindigkeit c , so ist die senkrecht zur Bahn auftretende Zentrifugalkraft $\frac{\Delta m \cdot c^2}{R}$ (Abb. 17). Es ist gleichgültig, ob die Masse durch einen festen Körper oder eine Flüssigkeit gebildet wird, wenn nur dafür gesorgt wird, daß ein hinreichend kleines Teilchen gewählt wird, in dem die Relativverschiebungen sehr klein sind. In unserem Falle ist $\Delta m = \frac{\gamma}{g} b' \cdot \Delta s \cdot \Delta n$. Ein Überdruck $\Delta p = \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \Delta n$ auf die Fläche $b' \cdot \Delta s$ wirkt der Zentrifugalkraft entgegen.

Die Gleichsetzung dieser Kräfte ergibt:

$$b' \cdot \Delta s \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \Delta n = \frac{\gamma}{g} b' \cdot \Delta s \cdot \Delta n \cdot \frac{c^2}{R} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\gamma}{g} \frac{c^2}{R}. \quad (42)$$

Diese Gleichung gestattet uns, die Druckänderung in der Normalrichtung auszurechnen.

Für $R = \infty$, d. h. für gerade Stromlinien, ist $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. In diesem Falle findet somit keine Druckänderung senkrecht zur Bewegungsrichtung statt. Eine Nutzenanwendung ist folgende: In einer Rohrströmung ist der Druck im Innern des Querschnittes genau so groß wie am Rande. Der Wanddruck, der leicht zu messen ist, ist somit identisch mit dem Druck im ganzen Querschnitt.

Um die allgemeine Beziehung zu erhalten, gehen wir von Gl. (15) aus und wenden diese auf die Normalrichtung n an.

$$\frac{dc_n}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{p}{\gamma} + z \right]$$

Es fragt sich nun, was hier c_n , d. h. die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zur Strömungsrichtung bedeutet. Zunächst ist unklar, wie in dieser Richtung überhaupt eine Geschwindigkeitskomponente vorhanden sein kann, da ja unsere Stromlinie gerade so definiert ist, daß in der Normalrichtung keine Bewegung auftritt! Tatsächlich ist auch $c_n = 0$, doch ist die zeitliche Änderung von c_n nicht gleich Null. Einmal ist bei gekrümmten Bewegungen eine Änderung zur Normalrichtung vorhanden, die Anlaß zu Zentrifugalkräften gibt. Rechnen wir die positive Richtung vom Krümmungsmittelpunkt aus, so wirkt eine Zentripetalbeschleunigung $-\frac{c^2}{R}$. Ist außerdem die Strömung nicht stationär, so bleibt zudem die Strömungsrichtung an einer Stelle nicht mehr konstant und kann sich u. U. dauernd ändern, so daß also außer der örtlichen Änderung der Normalgeschwindigkeit jetzt noch eine zeitliche hinzutritt. Die gesamte Beschleunigung in der Normalrichtung ist somit

$$\frac{dc_n}{dt} = \frac{\partial c_n}{\partial t} - \frac{c^2}{R}$$

Damit ergibt sich die allgemeinere Hauptgleichung

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} - \frac{c^2}{R} = -g \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{p}{\gamma} + z \right] \quad (43)$$

Für stationäre und horizontale Bewegung geht diese Gleichung in $\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\gamma}{g} \frac{c^2}{R}$ über, d. h. in die oben abgeleitete einfache Form.

Anmerkung: Bei räumlichen Bewegungen ist außer der Beschleunigung in der Strömungsrichtung und der Hauptnormalrichtung noch eine Beschleunigung

$\frac{\partial c_m}{\partial t}$ in der sog. Binormalrichtung zu beachten, die in gleicher Weise zu er-

klären ist, wie der Wert $\frac{\partial c_n}{\partial t}$ in Gl. (43), und die Anlaß zu einer weiteren Hauptgleichung in dieser Richtung gibt.

Beispiel. Die reibungsfreie Umströmung eines unendlich langen Zylinders (Abb. 29) ergibt an der Stelle 2 eine Geschwindigkeit $2c$, wenn $c = 2$ m/s die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung im Unendlichen ist¹. Um wieviel ändert sich der Druck, wenn wir von der Stelle 2 um 5 mm weiter nach Stelle 1 gehen? Gl. (42) schreiben wir als Differenzgleichung.

$$\Delta p = \Delta n \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c^2}{R}. \quad (44)$$

Hier ist $\Delta n = 5$ mm; $c = 2$ u = 4 m/s; $R = 5$ cm; $u = 2$ m/s.

¹ Der Beweis dieser Voraussetzung wird auf S. 57 folgen.

Wir setzen diese Werte in Gl. (42) ein und erhalten:

$$\Delta p = 0,005 \frac{1000}{9,81} \cdot \frac{4^2}{0,05} = 163 \text{ mm WS.}$$

Beispiel. In einem rechteckigen Krümmer (Abb. 30) soll der Druckunterschied zwischen der innern und der äußeren Krümmung berechnet werden, wenn Luft mit $c = 15 \text{ m/s}$ durchströmt.

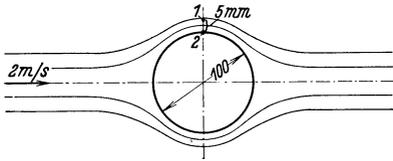


Abb. 29. Reibungsfreie Umströmung eines Zylinders.

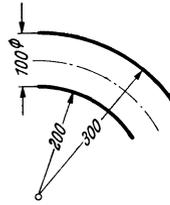


Abb. 30.

$\Delta n = 0,1 \text{ m}$, $\gamma/g = 1/8$; $R_i = 200 \text{ mm}$; $R_a = 300 \text{ mm}$. Als Krümmungsradius wird das Mittel eingesetzt:

$$R = (200 + 300)/2 = 250 \text{ mm,}$$

$$\Delta p = \Delta n \frac{\gamma}{g} \frac{c^2}{R} = \frac{0,1 \cdot 15^2}{8 \cdot 0,25} = 11,25 \text{ mm WS.}$$

Die Rechnung kann natürlich nur als Näherungsrechnung betrachtet werden. In solchen Fällen ist sie aber von großem Wert.

7. Drehung von Flüssigkeitsteilchen. Begriff der mittleren Drehung.

Bei den bisherigen Betrachtungen von Flüssigkeitsbewegungen war nur von Verschiebungen die Rede. Ebenso wie bei festen Körpern müssen wir auch nach den Gesetzmäßigkeiten von evtl. Drehbewegungen fragen.

Schon die Erfassung des Begriffes „Drehung“ bereitet bei Flüssigkeiten einige Schwierigkeiten. Denn unter dem Einfluß der Druckkräfte ändern die Teilchen dauernd ihre Gestalt, so daß also zwischen Deformation und Drehung noch unterschieden werden muß. Betrachten wir zunächst ein möglichst einfach geformtes Teilchen, z. B. ein kleines Rechteck. Wir wollen das Teilchen so orientieren, daß eine Kante mit der Strömungsrichtung bzw. mit dem Krümmungskreis der gekrümmten Stromlinie zusammenfällt (Abb. 31).

Wie kommen wir nun zu einer zahlenmäßigen Erfassung der Drehung? Zunächst wollen wir der Reihe nach die Drehung der verschiedenen Kanten des Teilchens verfolgen, dessen Mittelpunkt sich auf einem Kreis vom Radius R um den Winkel $d\alpha$ verschiebt. Die untere Kante AB bewegt sich — zumindest für kurze Elementarzeiten — auf dem Krümmungskreis der Stromlinie. Nach einer Zeit dt ist z. B. AB in die Lage $A'B'$ gekommen und hat sich dabei um den Winkel $d\alpha$ gedreht. Dem entspricht eine Winkelgeschwindigkeit $\omega' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{c}{R}$, wenn c die mittlere Bahn-

geschwindigkeit ist. Die Kante AC wird im allgemeinen ebenfalls irgend eine Drehung ausführen, die durchaus nicht mit ω' identisch zu sein braucht. Letzteres würde nur dann zutreffen, wenn das Teilchen sich wie ein fester Körper bewegen würde, d. h. in unserem Falle um den Krümmungsmittelpunkt O . Wollen wir allgemeine Deformationen nicht ausschließen, so bleibt nichts anderes übrig, als daß wir eine beliebige Kantenverdrehung $d\beta$ annehmen. Dies würde z. B. bedeuten, daß der Punkt C gegenüber A voreilt, d. h. daß in C eine größere Geschwindigkeit vorhanden ist als in A . Es wird also darauf ankommen, wie sich c normal zur Strömungsrichtung ändert.

Durch $\frac{\partial c}{\partial n}$ läßt sich diese Zu-

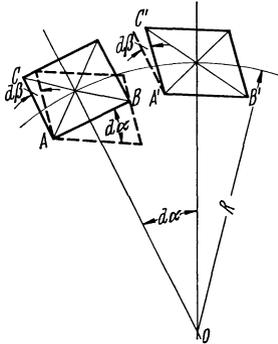


Abb. 31. Darstellung einer beliebigen Drehung eines Teilchens.

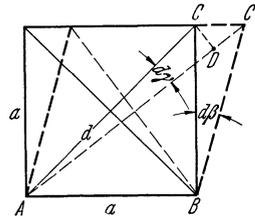


Abb. 32. Verformung eines quadratischen Teilchens.

nahme leicht ausrechnen $dc = \frac{\partial c}{\partial n} \cdot dn$. Dem entspricht eine Winkelgeschwindigkeit $\omega'' = \frac{d\beta}{dt} = \frac{dc}{dn} = \frac{\partial c}{\partial n}$.

Damit kennen wir die Winkelgeschwindigkeit von zwei aufeinander senkrecht stehenden Kanten des Teilchens. Die weitere Frage ist nun die, wie wir zu einer die Gesamtdrehung kennzeichnenden Größe kommen, z. B. zu einer mittleren Drehung des Teilchens. Dies ist schon deshalb notwendig, um präzise den Fall der Drehung Null erfassen zu können.

Nach Abb. 32 betrachten wir ein Quadrat, dessen Seitenkanten um den Winkel $d\beta$ verdreht werden, und wollen fragen, welche Drehung sich hierbei für die Diagonale ergibt. Nach Abb. 32 ergibt sich:

$$d\gamma = \frac{CD}{d} = \frac{\frac{CC'}{\sqrt{2}}}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{CC'}{a} = \frac{1}{2} d\beta.$$

Die Diagonale dreht sich somit um den halben Winkel, um den sich eine Kante dreht. Für die andere Diagonale ergibt sich entsprechendes. Charakteristisch ist hierbei, daß der Winkel, unter dem sich die Diagonalen schneiden, erhalten bleibt. Beim Quadrat bleibt somit ein rechter Winkel erhalten. Es liegt nun sehr nahe, die Drehung des bei diesen Drehungen erhaltenen Diagonalenkreuzes als

Orientierung des Teilchens zu betrachten und als mittlere Drehung die Drehung der Diagonalen anzusehen.

Wenn wir diesen Gedanken auf obige Ausführungen übertragen, so würde die Drehung ω'' zur Diagonalendrehung um $\omega'/2$ und die Drehung ω' , zur Gesamtdrehung mit $\omega''/2$ beitragen. So kommen wir zu folgender mittleren Drehung

$$\omega = \frac{\omega' + \omega''}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{c}{R} \right] \quad (45)$$

Hieraus kann sofort eine wichtige Folgerung gezogen werden. Wenn in einer Strömung keine Drehung der einzelnen Teilchen vorhanden sein soll, so muß folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{c}{R} = 0.$$

8. Drehungsfreie Bewegung.

Für die folgenden Betrachtungen setzen wir Reibungsfreiheit und stationäre Strömung voraus. Nachdem wir vorher gelernt haben, die „Drehung“ einer Flüssigkeit zahlenmäßig zu erfassen, wollen wir jetzt die Frage stellen, ob und wann unter diesen Bedingungen eine Drehung von Flüssigkeitsteilchen stattfinden kann.

Die Reibungsfreiheit gibt uns die Gewähr, daß in der ganzen Strömung keine Verluste auftreten. Ist die Strömung außerdem noch stationär, so findet auch kein Energieaustausch nach außen statt. Die Gesamtenergie H ist dann im ganzen Strömungsgebiet konstant.

Die Drehung eines kleinen Teilchens kann nur durch Tangentialkräfte eingeleitet werden. Um z. B. einen kleinen Kreiszyylinder nach Abb. 33 zu drehen, sind Schubspannungen notwendig. Solche entstehen in einer Flüssigkeit nur durch Reibung. Setzen wir Reibungsfreiheit voraus, so wirken nur Drücke normal zur Oberfläche (Abb. 33). Die Resultierende all dieser Druckkräfte geht durch den Mittelpunkt. Ein Drehmoment tritt nicht auf. Dies ist auch noch dann der Fall, wenn — wie in einer allgemeinen Strömung — die Drücke verschieden sind. Es ergibt sich wohl eine Deformation, so daß z. B. der Kreis in ein Oval verwandelt wird, das Gesamtteilchen erfährt jedoch keine Drehung. Bei dieser Deformation bleiben nach S. 30 zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen erhalten, während alle anderen Richtungen ihre Lage ändern. Diese Tatsache nimmt uns leider die Möglichkeit, ein mechanisches Modell zur Veranschaulichung des Vorganges heranzuziehen.

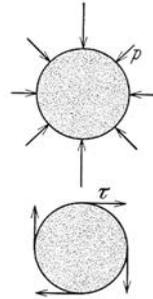


Abb. 33. Zylinder, auf den ungleiche Normalkräfte wirken (oberes Bild). Tangentialkräfte wirken auf einen Zylinder (unteres Bild).

Eine mathematische Bedingung für die Drehungsfreiheit kann aus Gl. (45) abgeleitet werden. Wenn nämlich die mittlere Drehgeschwindigkeit ω gleich Null sein soll, so ist nach S. 31 diese Bedingung nur durch

$$\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{c}{R} = 0 \quad (46)$$

zu erfüllen, eine Beziehung, aus der wir noch sehr großen Nutzen ziehen werden.

Es ist nützlich, die hier aufgeworfene Frage noch von einer anderen Seite aus zu beleuchten. Da nach obigen Erwägungen H im ganzen Strömungsgebiet konstant sein soll, muß $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ sein.

Aus Gl. (11) ergibt sich

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{g} \frac{\partial c}{\partial n} \cdot c.$$

Wir berücksichtigen

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\gamma}{g} \frac{c^2}{R}$$

und erhalten:

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{1}{g} \frac{c^2}{R} + \frac{1}{g} \frac{\partial c}{\partial n} \cdot c = \frac{c}{g} \left[\frac{c}{R} + \frac{\partial c}{\partial n} \right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} \text{ ist also nur gleich Null für } \frac{c}{R} + \frac{\partial c}{\partial n} = 0.$$

9. Drehungsfreie Kreisbewegung.

Es handelt sich um eine punktsymmetrische ebene Strömung, bei der alle Stromlinien aus Kreisen bestehen. Wir denken uns z. B. in einem zylindrischen Becken Wasser in Drehung versetzt und fragen nach der Geschwindigkeitsverteilung. Dieser wichtige Sonderfall einer gekrümmten Bewegung kann durch Gl. (46) $\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{c}{R} = 0$ sofort gelöst werden. Hier ist nämlich $dn = dr$. Der Krümmungskreis ist gleichzeitig Stromlinie. Es ergibt sich:

$$\frac{\partial c}{c} = -\frac{\partial r}{r}; \text{ hieraus } \ln c = -\ln r + C'; \ln(c \cdot r) = C'; d \cdot h. \\ c \cdot r = \text{konst.} \quad (47)$$

Für den Anfänger mag vielleicht noch die folgende elementare Ableitung von Nutzen sein, die den Vorzug einer größeren Anschaulichkeit besitzt.

Nach Abb. 34 wollen wir die Bewegung eines Teilchens beobachten, das sich zwischen zwei eng aneinanderliegenden Kreisen bewegt. Die geometrische Form der Schnittfläche, die das Teilchen mit der Zeichenebene hat, ist an und für sich gleichgültig. Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es jedoch zweckmäßig, ein Quadrat zu wählen.

Bei der Bewegung des Teilchens werden offenbar die tangentialen und radialen Begrenzungen ihre Richtung ändern. Da der Inhalt wegen der Kontinuität unverändert bleiben muß, wird aus dem Quadrat ein Parallelogramm entstehen, bzw. bei kleinen Winkeländerungen ein Rhombus. In Abb. 34 sind solche Deformationen vorgesehen, die keine Gesamtverdrehung erzeugen. Man erkennt, daß dann die Richtungen der Diagonalen erhalten bleiben. Durch $\alpha = \beta$ ist diese Bedingung zu erfüllen.

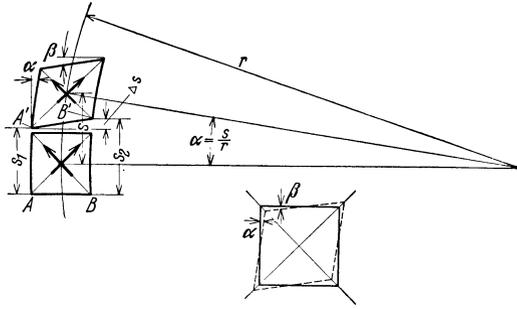


Abb. 34. Kreisbewegung eines Quadrates, dessen mittlere Drehung gleich Null ist.

Die Nachrechnung an Hand der Abb. 34 ist sehr leicht. Wenn die Geschwindigkeit des Punktes A gleich c_1 und die des Punktes B gleich c_2 ist, werden in Δt sek die Wege $AA' = s_1 = c_1 \cdot \Delta t$ und $BB' = s_2 = c_2 \cdot \Delta t$ zurückgelegt. Der Unterschied ist $\Delta s = (c_2 - c_1) \Delta t = \Delta c \cdot \Delta t$. Hieraus ergibt sich die Verdrehung der radialen Kanten zu $\beta = \frac{\Delta s}{\Delta a} = \frac{\Delta c \cdot \Delta t}{\Delta a}$. Wir berücksichtigen noch $\Delta c = \frac{dc}{dr} \cdot \Delta a$ und erhalten $\beta = - \frac{dc}{dr} \cdot \Delta t$. (Das (—)-Zeichen ist notwendig, weil $\frac{dc}{dr} < 0$ ist.)

Die Drehung α der Kreistangente ist gleich der Drehung des mittleren Radius. Wenn c die Geschwindigkeit des Mittelpunktes des Teilchens ist, ergibt sich für den Weg in Δt sek: $s = c \cdot \Delta t$; mit $\alpha = \frac{s}{r}$ entsteht $\alpha = \frac{c \cdot \Delta t}{r}$

Setzen wir in $\alpha = \beta$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{c \cdot \Delta t}{r} = - \frac{dc}{dr} \cdot \Delta t; \quad \frac{dr}{r} = - \frac{dc}{c}.$$

Die Integration ergibt:

$$\ln r = - \ln c + C; \quad \ln (r \cdot c) = C$$

oder:

$$r \cdot c = r_0 \cdot c_0 = \text{konst.} \quad \text{d. h. Gl. (47)}$$

Die Geschwindigkeit ändert sich somit nach einer Hyperbel (Abb. 35). Für $r = 0$ wird die Geschwindigkeit sogar unendlich. Wir werden bald sehen, wie diese physikalische Unmöglichkeit sich regelt.

Wir können somit folgenden Satz aufstellen: In einer reibungsfreien Kreisbewegung ist H in der ganzen Strömung konstant. Die Strömung ist wirbelfrei und ändert ihre Geschwindigkeit nach dem Gesetz $r \cdot c = \text{konst.}$

Wir wollen noch die Druckverteilung dieser Bewegungsform ermitteln. Nach Gl. (25) erhält man:

$$\frac{c_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = H \quad \text{oder} \quad p = H \cdot \gamma - \frac{\gamma}{2g} c^2.$$

Setzen wir aus Gl. (47) $c = c_0 \cdot \frac{r_0}{r}$

ein, so erhalten wir $p = H \cdot \gamma - \frac{\gamma}{2g} c_0^2 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$. (48)

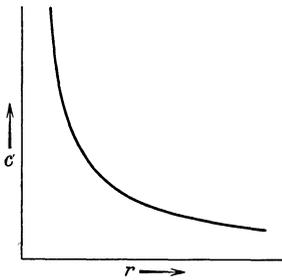


Abb. 35. Geschwindigkeitsverteilung bei reibungsfreier Drehbewegung.

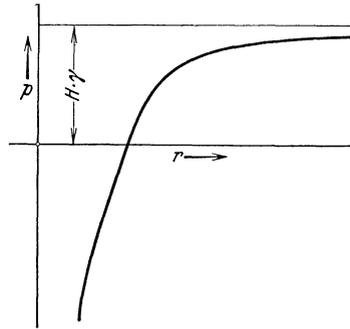


Abb. 36. Druckverlauf bei reibungsfreier Drehbewegung.

In Abb. 36 ist $p = f(r)$ aufgetragen. Für $r = 0$ wird $p = -\infty$. Wir werden so zwangsläufig zu einem negativen Druck geführt, d. h. einem Druck unter dem Vakuum. (Nicht zu verwechseln mit Unterdruck schlechthin.) Was ist hierunter zu verstehen? Der bisher behandelte Druck entsprach Druckspannungen, d. h. Normalkräften nach dem Innern des Körpers hin gerichtet, und wurde naturgemäß positiv eingesetzt. Um uns unter einem negativen Druck etwas vorstellen zu können, denken wir am besten an die Festigkeitslehre. Negativer Druck ist hier nichts anderes als Zugspannung. Dasselbe gilt auch für eine Flüssigkeit. Im allgemeinen dürfte das Flüssigkeitsgefüge vorher zerreißen und verdampfen¹.

¹ Meyer fand, daß bei destilliertem Wasser tatsächlich Zugspannungen auftreten können. Er fand maximal 34 atm. Inwieweit dies auch bei technischen Flüssigkeiten der Fall ist, kann heute noch nicht gesagt werden.

(Meyer, J.: Zur Kenntnis des negativen Druckes in Flüssigkeiten. Abh. Bunsen-Ges. Nr. 6. Halle 1911.)

Wir werden noch eine wichtige Feststellung machen. Bei der behandelten Bewegungsform nimmt die Geschwindigkeit c gemäß Gl. (47) mit $1/r$ ab. Diese Tatsache beantwortet uns gleichzeitig die Frage nach der Fernwirkung einer an einem Orte erzwungenen derartigen Drehbewegung. Wir merken uns, daß eine durch eine solche Bewegung bedingte örtliche Störung mit $1/r$ abklingt, d. h., in doppelter Entfernung vom Mittelpunkt ist die Geschwindigkeit nur halb so groß usw. Fortan wollen wir diese Bewegungsform „Potentialwirbel“ bzw. „reinen Wirbel“ nennen.

Die Beziehung $r \cdot c = \text{konst.}$ gilt auch für kleine Ausschnitte einer beliebig gekrümmten Bewegung, da ein Stück jeder stetigen Kurve immer durch den Krümmungskreis ersetzt werden kann. Auch bei räumlichen Strömungen, z. B. rotationssymmetrischen Strömungen ist das Gesetz noch gültig.

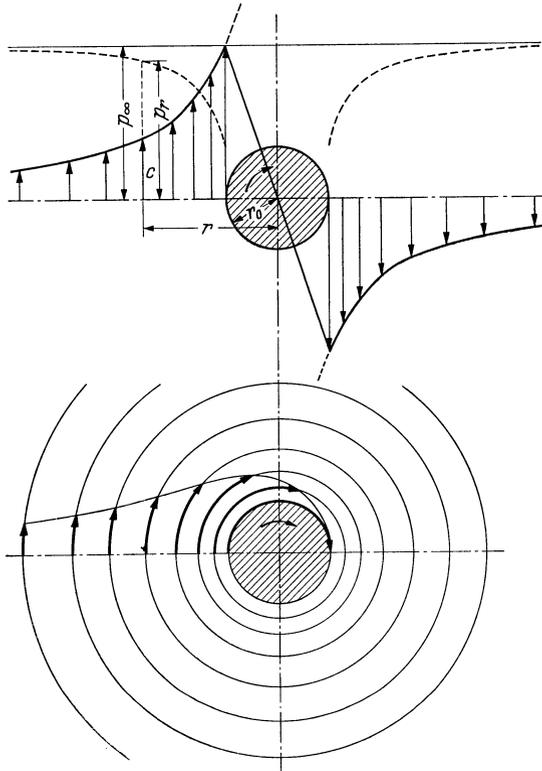


Abb. 37.

Geschwindigkeits- und Druckverlauf beim Wirbel (oberes Bild).

Darstellung der beim Wirbel zurückgelegten Wege der einzelnen Teilchen (unteres Bild).

10. Die wirkliche Kreisströmung. (Der Wirbel.)

Die Geschwindigkeitsverteilung nach dem Gesetz $r \cdot c = \text{konst.}$ stimmt

mit der Wirklichkeit sehr gut überein. Eine Abweichung zeigt sich nur in der Nähe des Kreismittelpunktes. Hier bildet sich ein sog. Wirbelkern. Hierunter versteht man einen kreisförmigen Bereich, der sich wie ein fester Körper dreht. Die innere Reibung kommt hier auch bei Flüssigkeiten mit verhältnismäßig kleiner Zähigkeit wie z. B. bei Luft und Wasser zur Geltung. Auf diese Weise umgeht die Natur die unendlich großen Geschwindigkeiten, die gemäß Gl. (47) zu erwarten sind. Die

Gesamtbewegung, die in Abb. 37 dargestellt ist, nennen wir einen Wirbel. Vom Unendlichen bis zum Kern ist demnach hyperbolische Geschwindigkeitsverteilung vorhanden und anschließend im Kern eine lineare Verteilung. Der Druck, der in Abb. 37 ebenfalls dargestellt ist, fällt gemäß Gl. (48) vom Höchstwert im Unendlichen (wo die Strömung in Ruhe ist) bis zu einem Kleinstwert im Kern. Im Kern selbst ist die Druckänderung gering.

Ein anschaulicher Einblick wird noch durch eine Betrachtung der Wege der Flüssigkeitsteilchen vermittelt. Trägt man in Richtung des Weges, d. h. der entsprechenden Kreise die in einer Sekunde zurückgelegten Wege nämlich die Geschwindigkeiten ein, so entsteht Abb. 37. Die Kurve der Pfeilspitzen deutet die durch die Wirbelbewegung entstandene Verzerrung einer radialen Strecke an.

11. Zirkulation.

Die vorhin abgeleitete mittlere Winkelgeschwindigkeit gibt über die Drehung der kleinsten Teilchen Auskunft, sodaß hiernach gewissermaßen eine punktförmige Beurteilung des Strömungsbildes möglich ist. Eine Gesamtaussage über die Drehung eines größeren Bereiches ist im Hinblick auf die praktischen Anwendungen noch notwendiger. Dies ist erst möglich durch Einführung eines neuen Begriffes, der sog. Zirkulation.

Es ist hier zweckmäßig, mit der mathematischen Definition zu beginnen und anschließend die physikalische Seite zu beleuchten.

Für eine geschlossene Kurve innerhalb einer Strömung bilden wir den Ausdruck Σ (Wegelement \times Geschwindigkeit in Richtung des Weges) = $\oint c \cdot ds$ (Zirkulation genannt). In Abb. 38 ist die Bildung des Ausdruckes veranschaulicht. In einem Kurvenpunkt wird z. B. die Geschwindigkeit c in die Richtung des Wegelementes der umschließenden Kurve projiziert und die Projektion mit ds erweitert. Für alle Wegelemente wird diese Multiplikation ausgeführt und summiert.

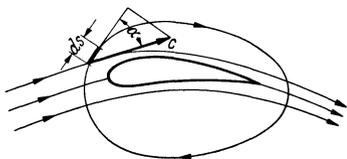


Abb. 38. Veranschaulichung des Umlaufintegrals bei der Umströmung eines Tragflügels.

Der Begriff der Zirkulation hat sich als einer der fruchtbarsten der modernen Strömungslehre erwiesen. Der praktische Nutzen dieser Definition ist so groß, daß sich auch der Anfänger damit vertraut machen sollte.

An einem einfachen Beispiel kann zunächst gezeigt werden, ob und wie die Zirkulation mit der Drehung zusammenhängt. Wir betrachten die Drehung eines festen Zylinders vom Radius r , der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Man findet sofort

$$\Gamma = r \cdot \omega \cdot 2 r \pi = 2 \omega \cdot r^2 \cdot \pi = 2 \cdot \omega \cdot F,$$

d. h., die Zirkulation ist proportional der Winkelgeschwindigkeit und der Fläche.

In der vorhin behandelten Kreisbewegung wollen wir den sektorartigen Ausschnitt mit dem Winkel $\Delta\varphi$ und den Radien r und $r + \Delta r$ untersuchen. Da an den radialen Begrenzungen die in deren Richtung fallende Geschwindigkeitskomponente gleich Null ist, tragen nur die Umfangsstücke zu der Zirkulation bei¹. Es ergibt sich:

$$\oint cds = (\text{Weg} \times \text{Geschw.}) = (\Delta r + r) \Delta\varphi \left(c + \Delta r \cdot \frac{\partial c}{\partial r} \right) - c \cdot r \cdot \Delta\varphi = \Delta\varphi \left[\Delta r \cdot c + (\Delta r)^2 \cdot \frac{\partial c}{\partial r} + r \Delta r \cdot \frac{\partial c}{\partial r} \right].$$

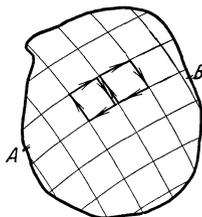


Abb. 39. Einteilung eines größeren Strömungsbereiches in quadratische Elemente.

Bei Vernachlässigung von $(\Delta r)^2 \cdot \frac{\partial c}{\partial r}$ ergibt sich

$$\oint cds = \Delta\varphi \left[\Delta r \cdot c + r \cdot \Delta r \frac{\partial c}{\partial r} \right] = \Delta s \cdot \Delta r \left[\frac{c}{r} + \frac{\partial c}{\partial r} \right] = 2 \omega \cdot \Delta F.$$

Das Ergebnis steht also in einfachem Zusammenhang mit der Fläche und der Drehung der Teilchen, d. h. mit der vorhin gewonnenen Beziehung.

Nun soll für einen größeren endlichen Bereich das Umlaufintegral gebildet werden (Abb. 39). Teilen wir diesen Bereich in kleine Rechtecke ein, so leuchtet ein, daß das Umlaufintegral des ganzen Bereiches gleich der Summe der Umlaufintegrale der kleinen Rechtecke sein muß. Da alle Beiträge zu dem inneren Maschennetz je zweimal mit verschiedenen Vorzeichen vorkommen und sich daher aufheben, erhalten wir

$$\oint cds = 2 \cdot \Sigma (\omega \cdot \Delta F) \quad (\text{Satz von Stokes}). \quad (49)$$

Ist nun in dem behandelten Gebiet keine Drehung vorhanden, d. h. $\omega = 0$, so ist auch das Umlaufintegral gleich Null.

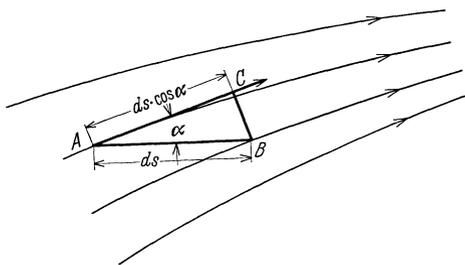


Abb 40. Darstellung der beim Potentialbegriff auftretenden Größen.

12. Das Potential.

Für den Fall, daß in einem Gebiete die Gesamtzirkulation gleich Null ist, ergeben sich wichtige mathematische Besonderheiten. Die geschlossene Kurve der Abb. 39 denken wir uns durch zwei Punkte A und B in zwei Teile geteilt, so daß wir von A aus den Punkt B auf zwei Wegen (mit den Indices 1 und 2 bezeichnet) erreichen können. Das Umlauf-

¹ Das Vorzeichen sei so festgelegt, daß alle Beiträge beim Umfahren im Uhrzeigersinn positiv gerechnet werden.

integral läßt sich dann durch die Summe zweier Streckenintegrale $1 \int_A^B + 2 \int_B^A$ ausdrücken. Bei verschwindender Gesamtzirkulation ist dann

$$1 \int_A^B = -2 \int_B^A = 2 \int_A^B.$$

Würden wir statt des unteren Weges 2 einen anderen Weg gewählt haben, so wäre das Resultat das gleiche. Dies bedeutet aber, daß der Wert $\int_A^B cds$ unabhängig vom

Wege ist. Wie dieser Wert sich je nach der Lage der Punkte A und B ändert, erkennt man leicht, wenn man nach Abb. 40 die Punkte A und B näher zusammenrücken läßt. Da AC die Strömungsrichtung ist, müssen wir gemäß der Definition der Zirkulation (S. 36) den Weg AB auf diese Richtung projizieren. So ergibt sich $ds \cdot \cos \alpha \cdot c$ als Beitrag der Strecke AB zum Wegintegral. Daraus erkennt man, daß für $\alpha = 0^\circ$, d. h. in Strömungsrichtung dieser Beitrag am größten wird, während für $\alpha = 90^\circ$ der Ausdruck gleich Null wird. Ordnen wir somit allen Punkten i

des Strömungsfeldes Zahlen Φ_i so zu, daß $\int_A^B cds = \Phi_B - \Phi_A$ ist, so erhalten wir eine

Funktion, die sich senkrecht zu der Strömungsrichtung nicht ändert. Die Linien $\Phi = \text{konst.}$ sind also Normallinien zu den Stromlinien, auch Potentiallinien genannt. Die Funktion Φ nennt man das Potential.

$$\text{Wegen} \quad d\Phi = \Phi_B - \Phi_A = ds \cdot \cos \alpha \cdot c$$

$$\text{entsteht} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = c \cdot \cos \alpha = c' \quad (50)$$

(c' Geschwindigkeit in Richtung des betrachteten Wegelementes). Daraus folgt: Die Ableitung des Potentials in irgend einer Richtung ergibt die Geschwindigkeit in dieser Richtung. Die Potentiallinien kann man sich auch als Niveaulinien denken, deren Gefälle nach irgend einer Richtung die Geschwindigkeit ergibt.

Bei homogenen reibungsfreien Flüssigkeiten ergibt sich immer Potentialströmung bei aus der Ruhe entstandenen Bewegungen. Das Hauptkennzeichen der Potentialströmung ist die Drehungsfreiheit.

Die gewonnenen Ergebnisse sollen nun auf die kreisförmige reibungsfreie Bewegung angewandt werden (Abb. 41). Die Geschwindigkeitsverteilung ist durch $c \cdot r = c_0 \cdot r_0$ nach Gl. (47) gegeben. Wir bilden das Umlaufintegral für einen geschlossenen Bereich, der aus zwei konzentrischen Kreisen von den Radien r_1 und r_2 und zwei radialen Verbindungen besteht. Auf letzteren ist $c' = 0$, sodaß diese Stücke keinen Betrag liefern.

Die Kreisstücke ergeben:

$$\int cds = 2 r_1 \pi c_1 - 2 r_2 \pi c_2 = 2 \pi (r_1 c_1 - r_2 c_2);$$

nach Gl. 47 ist aber $r_1 c_1 - r_2 c_2 = 0$, so daß $\oint cds = 0$ ist. r_1 können wir beliebig klein nehmen. Im ganzen Außenbereich ist also für die Strömung $\oint cds = 0$, wie es die reibungsfreie Strömung verlangt.

Bilden wir jedoch \oint für eine den Mittelpunkt umschließende Kurve, z. B. den Kreis, so erhalten wir $\oint = 2 \pi r c = \Gamma$. Dieser Wert bleibt auch, wenn r noch so

klein ist. Wir sind somit zu folgender Feststellung gezwungen: Die durch die Gl. (47) bedingte Strömung ist vollkommen wirbelfrei bis auf den mathematischen Mittelpunkt.

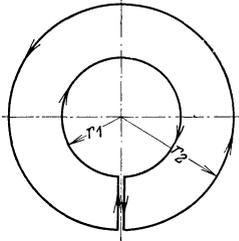


Abb. 41. Begrenzung zur Bildung des Umlaufintegrals bei der Kreisbewegung, wobei der Kreismittelpunkt ausgeschlossen ist.

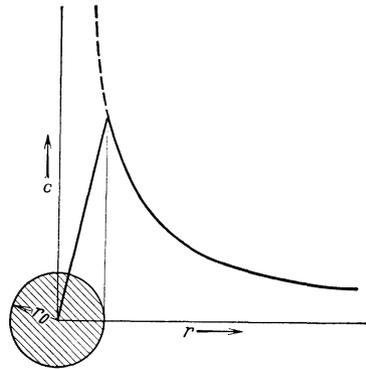


Abb. 42. Geschwindigkeitsverteilung eines Wirbels.

In Wirklichkeit bildet sich in $r = 0$ keine unendlich große Geschwindigkeit aus, sondern ein sog. Wirbelkern vom Radius r_0 (Abb. 42). Dieser Kern dreht sich wie ein fester Körper, während außerhalb r_0 sehr genau das oben gezeichnete Bild vorhanden ist. Die Geschwindigkeitsverteilung besteht somit aus einer Geraden, die bei $r = r_0$ in eine Hyperbel übergeht.

Für den Kern gilt $\omega = \frac{c_0}{r_0} = \text{konst.}$ Für die Grenzen dieses Bereiches ist das Umlaufintegral:

$$\oint c ds = 2 r_0 \pi \cdot r_0 \cdot \omega = 2 \Sigma \omega \cdot \Delta F = 2 \cdot \pi r_0^2 \cdot \omega.$$

13. Energiebetrachtung.

Um die kinetische Energie eines Potentialwirbels zu berechnen, ermitteln wir diese zunächst für einen Kreisring zwischen r und $r + dr$, der senkrecht zur Bild-

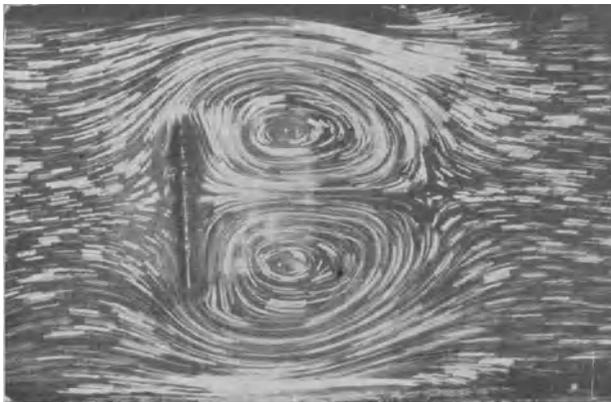


Abb. 43. Anfahrwirbel hinter einer Platte.

ebene die Breite 1 hat. Man erhält:

$$dE = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} 2 r \pi \cdot dr \cdot c^2; \quad \text{mit } c = \frac{\Gamma}{2 r \pi} \quad \text{entsteht:}$$

$$dE = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \frac{\Gamma^2}{2 \pi} \frac{dr}{r}; \quad \text{die Integration ergibt: } E = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \frac{\Gamma^2}{2 \pi} \int_1^2 \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \frac{\Gamma^2}{2 \pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Dieser Ausdruck wird unendlich für $r_2 = \infty$, aber auch für $r_1 = 0$. Hieraus folgt, daß ein Potentialwirbel, einerlei ob er endliche oder unendliche Abmessungen hat, immer eine unendliche kinetische Energie besitzt. Dies ist physikalisch unmöglich, sodaß es einen solchen Wirbel überhaupt nicht geben kann. Nun erledigt sich die Schwierigkeit in der Nähe von $r_1 = 0$ dadurch, daß sich infolge der Reibung ein Wirbelkern bildet; im Unendlichen bleibt die Schwierigkeit jedoch bestehen. Diese Tatsache steht in vollem Einklang mit der Erfahrung.

Ein einzelner Wirbel kann überhaupt nicht entstehen. Wirbel treten immer paarweise auf und zwar so, daß die Gesamtzirkulation gleich Null ist¹. Die kinetische Energie bleibt dann endlich. Hieraus folgt der Satz:

Die Gesamtzirkulation aller Wirbel in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit ist gleich Null.

Die Übereinstimmung mit dem Versuch ist vollkommen. Abb. 44 zeigt die beiden sog. „Anfahrwirbel“, die beim Anfahren entstehen. Stoppt man während des

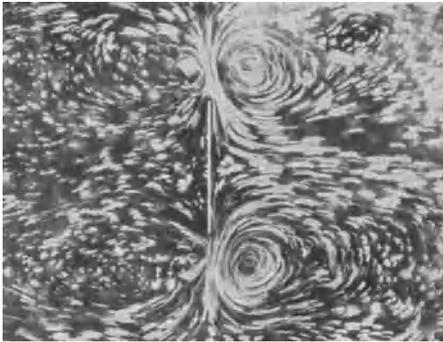


Abb. 44. Anfahrwirbel und Stoppwirbel einer Platte.

Anfahrens, so bilden sich auch auf der anderen Seite zwei Wirbel die sog. Stoppwirbel (Abb. 44).

14. Weitere Betrachtungen über Wirbelbewegungen.

Für die Beurteilung von Wirbelbewegungen ist besonders ein Satz von Thomson (Lord Kelvin) von großem Nutzen.

Bildet man die Zirkulation in einer beliebigen reibungsfreien Bewegung für eine geschlossene Kurve, die immer die gleichen Flüssigkeitsteilchen enthält, so bleibt dieser Wert zeitlich konstant.

Für die ebene Strömung soll der Satz abgeleitet werden. Wir müssen den Ausdruck $\frac{d}{dt} \oint c_{\bar{s}} d\bar{s}$ für eine geschlossene Kurve bilden. Hierbei ist $d\bar{s}$ ein Element dieser Kurve und $c_{\bar{s}}$ die Komponente der Geschwindigkeit in Richtung der Kurve. Bildet somit die Kurve mit der Strömungsrichtung den Winkel α , so ist $c_{\bar{s}} = c \cdot \cos \alpha$.

¹ Ein mechanischer Versuch veranschaulicht diese Erscheinung. Auf zwei Prandtl'sche Drehschemel stellen sich zwei Personen. Der einzelne kann sich nicht in Umdrehung bringen, ebenso wie in der reibungslosen Flüssigkeit kein Einzelwirbel entstehen kann. Stoßen die beiden sich hingegen mit der Hand ab, so drehen sie sich im entgegengesetzten Sinne. Das Abstoßen mit der Hand entspricht bei der Flüssigkeit der Schubspannungsübertragung in den Trennschichten.

Da die Integrationsgrenzen von der Zeit nicht berührt werden, können wir unter dem Integral differenzieren.

$$\frac{d}{dt} \oint c_{\bar{s}} d\bar{s} = \int \frac{d}{dt} [c_{\bar{s}} \cdot d\bar{s}] = \oint \left[d\bar{s} \frac{dc_{\bar{s}}}{dt} + c_{\bar{s}} \frac{dd\bar{s}}{dt} \right].$$

Nach Gl. (15) können wir nun setzen $\frac{dc_{\bar{s}}}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{p}{\gamma} + z \right]$. Damit wird der erste Ausdruck unter dem Integral

$$d\bar{s} \frac{dc_{\bar{s}}}{dt} = -\frac{g}{\gamma} dp - g dz.$$

Die Bedeutung von $\frac{d\bar{s}}{dt}$ ist einfach zu deuten. Da $\frac{d\bar{s}}{dt} = c\bar{s}$ ist, ergibt sich offenbar $\frac{d\bar{s}}{dt} = dc_{\bar{s}}$. Nur wenn das Teilchen festgehalten wird, ist die letzte Bedingung erfüllt. Durch Einsetzen entsteht weiter

$$\frac{d}{dt} \oint c_{\bar{s}} d\bar{s} = \oint \left[c_{\bar{s}} \cdot d\bar{s} - \frac{g}{\gamma} dp - g \cdot dz \right] = \left[\frac{c_{\bar{s}}^2}{2} - \frac{g}{\gamma} p - g \cdot z \right] \Phi$$

Da wir bei einer geschlossenen Kurve zu dem gleichen Anfangspunkt zurückkehren müssen, ergeben sich für Anfangs- und Endpunkt die gleichen Werte von c , p und z , d. h. das Gesamtintegral muß gleich Null sein. Für räumliche Betrachtungen kommt man zu dem gleichen Ergebnis. (Der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung darf nicht mit der Bernoullischen Gleichung verwechselt werden.)

Die Verwertung der Beziehung $\frac{dc_{\bar{s}}}{d\bar{s}} = -g \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[\frac{p}{\gamma} + z \right]$ zeigt, daß der Satz nur dann erfüllt ist, wenn die Bewegung durch Druck- und Gefälleänderungen entstanden ist. Eine weitere wesentliche Bedingung ist folgende: Die Gleichungen sind, wie man leicht sieht, nur dann integrierbar, wenn die Dichte nur vom Druck allein abhängt. Es muß also eine homogene Flüssigkeit gefordert werden. Bei ungleichen Erwärmungen von Luftmassen, z. B. örtlicher Wärmezufuhr, weiter bei dem Verdichtungsstoß von Überschallströmungen ist der Thomsonsche Satz nicht mehr gültig.

Aus diesem Satz können wichtige Folgerungen gezogen werden. Wenn eine Flüssigkeit anfangs in Ruhe ist, so ist bestimmt die Zirkulation gleich Null. Wird nun durch Druckkräfte eine Bewegung eingeleitet, so bleibt die Zirkulation gleich Null. Da nun bei einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit für jede beliebige geschlossene Linie die Zirkulation Null ist, also auch für eine einen festen Körper umschließende Linie, so folgt, daß für alle diese Bereiche bei Bewegung aus der Ruhe heraus die Zirkulation Null bleibt. Dies besagt nun nicht, daß keine Wirbel entstehen können. Wenn solche entstehen, muß in dem geschlossenen Bereich nur ihre Gesamtzirkulation gleich Null sein. Durch eine andere Betrachtung (S. 40) wurde bereits festgestellt, daß sich Wirbel immer paarweise bilden, was hiermit nochmals bestätigt wird. Es muß nur darauf geachtet werden, daß nach dem Thomsonschen Satz immer die gleichen Flüssigkeitsteilchen, die in dem anfangs in Ruhe befindlichen Bereich vorhanden waren, betrachtet werden. Auch macht der Satz nicht einen Widerstand eines Körpers unmöglich. Betrachten wir z. B. nach Abb. 45 im Zu-

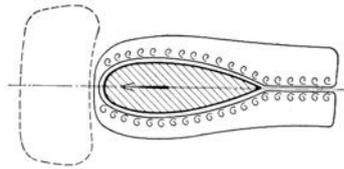


Abb. 45. Entwicklung eines zusammenhängenden Raumes bei einer Profilströmung. An der Körperoberfläche bilden sich kleine Wirbel, die den Körperwiderstand verursachen; ihre gesamte Zirkulation ist für den geschlossenen Bereich gleich Null.

stande der Ruhe einen vor einer Strebe befindlichen geschlossenen Bereich (gestrichelt), so wird sich dieser Bereich nach Einleitung der Bewegung in der angedeuteten Form um die Strebe legen. Nur hier gilt der Thomsonsche Satz. Zwischen den zusammenfließenden Teilen der zusammenhängenden Fläche, d. h. in der sog. Trennfläche hinter der Strebe hat der Thomsonsche Satz keine Gültigkeit. Endliche Schubspannungen an der Strebenoberfläche, die eine Trennfläche und einen Körperwiderstand hervorrufen, sind demnach durchaus möglich, ohne daß in dem zusammenhängenden Raum gegen den Thomsonschen Satz verstoßen wird.

Die Entstehung von Wirbeln erfolgt in der Trennfläche hinter einem Körper. Dies ist die Fläche, wo die durch den Körper getrennte Strömung wieder zusammenkommt. Selbst bei sehr kleiner Reibung wird die eine Seite andere Geschwindigkeitsänderungen erfahren als die andere (Abb. 46). In der Trennfläche kommen deshalb Flüssigkeitsschichten mit einem endlichen Geschwindigkeitsunterschied zusammen. Selbst bei sehr kleiner Reibung entsteht dann eine endliche Schubspannung. Diese Schubspannungen bewirken ein Aufrollen der Trennflächen. Die Entstehung von Wirbeln ist die Folge. Wie Prandtl zuerst gezeigt hat, entstehen fast alle Wirbel durch derartige Trennflächen.

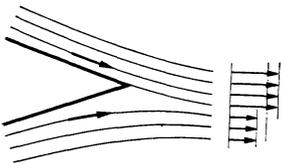


Abb. 46. Bildung einer Trennfläche hinter einem umströmten Körper.

Im engen Zusammenhange mit diesem Satz stehen die sog. „Helmholtzschen Wirbelsätze“¹, die wegen der geringeren praktischen Bedeutung hier ohne Beweis wiedergegeben werden sollen. (Helmholtz leitete die Sätze durch elektrodynamische Analogien ab. Es sei bemerkt, daß alle diese Sätze leicht aus dem Thomsonschen Satz gewonnen werden können.) Bei ihnen handelt es sich um Wirbelfäden, deren Bewegung im Raume untersucht wird. Unter Wirbelfäden versteht man den Wirbelkern, der die Teilchen enthält, die tatsächlich eine Drehung ausführen. Außerhalb des Kernes herrscht nach Früherem (S. 39) reibungsfreie Potentialbewegung.

1. Die Zirkulation um einen Wirbelfaden ist zeitlich unverändert. Die Drehung bleibt an den Teilchen haften, die bereits in Drehung waren. Da die Zirkulation für einen sich drehenden Zylinder $\Gamma = 2 \omega F$ ist, folgt, daß bei Verkleinerung von ω die Fläche sich vergrößern muß, und umgekehrt. Eine wichtige Nutzenanwendung dieser Regel findet sich bei Windkanaldüsen, überhaupt bei Düsen, die die Aufgabe haben, eine Strömung zu vergleichmäßigen. Befindet sich in der Strömung vor der Düse eine Drehung mit einer Achse parallel zur Strömungsrichtung, so wird die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung auf das n -fache vermehrt, wenn der Querschnitt auf $1/n$ tel verengt wird. Daraus folgt, daß bei solchen Anordnungen vorherige Strahldrehungen durch Gleichrichter od. dgl. weitgehend entfernt werden müssen.

2. Die Teilchen, die sich im Wirbelfaden befinden, bleiben auch dann ausschließlich in Drehung, wenn der Wirbelfaden sich fortbewegt oder seine Form ändert.

3. Ein Wirbelfaden kann in einer Flüssigkeit nirgendwo endigen. Entweder bilden sich Ringwirbel, oder die Wirbelfäden endigen an einer Wand oder an der Flüssigkeitsoberfläche, z. B. setzen sich die aus einem Tragflügel kommenden Wirbelfäden schließlich auf den Erdboden auf.

Eine Energiebetrachtung ist hier noch von Nutzen. Rechnet man die kinetische Energie eines Wirbelkernes aus, so ist diese klein im Vergleich zu der um-

¹ Helmholtz: Crelles Journal 68, 286, 1868. Bereits 1827 wurden diese Sätze von Cauchy gefunden.

gebenden Potentialbewegung. Daraus kann gefolgert werden, daß die Bewegung des Wirbels ausschließlich von der umgebenden Potentialströmung gesteuert wird.

15. Dicke des Wirbelkernes.

Über die Dicke der Wirbelkerne wissen wir rein theoretisch im allgemeinen noch sehr wenig. Für eine wichtige praktische Anwendung liegen indes genaue Messungen vor. Es handelt sich um Wirbelbewegungen in Rohren, die der Hauptströmung überlagert sind. In den Turbinensaugrohren kommen derartige Bewegungen vor. Nach Messungen von Meldau¹ bildet sich ein Kern, dessen Abmessungen nur vom Drallwinkel abhängen. Darunter versteht man den Winkel der Strömungsrichtung gegen die Rohrachse. Aus den Messungen von Meldau kann folgendes lineare Gesetz als ungefähre Anhalt abgelesen werden: $\frac{r_0}{r_a} = \frac{\alpha^0}{107}$. Dieses Gesetz gilt bis $\alpha^0 \sim 75^\circ$. Bemerkenswert ist, daß die Durchflußgeschwindigkeit nicht konstant ist, wie man meist annimmt. Im Wirbelkern geht sie beinahe bis auf Null zurück. Außerhalb des Kernes ist die Durchflußgeschwindigkeit leidlich konstant, ebenso ist dort auch das Gesetz $r \cdot c_u = \text{konst.}$ erfüllt. Mit größerem Drall ergeben sich indes immer größere Abweichungen. Beim Drallwinkel von 45° ist ungefähr die Grenze der strengeren Gültigkeit dieser Gesetze erreicht. Alle diese Beobachtungen zeigen, daß die Durchflußmenge mit größerem Drallwinkel immer mehr durch die außen liegenden Flächen strömt. Der Kern bewegt sich wie ein fester Körper und ist am Durchfluß praktisch unbeteiligt.

Ein Wirbel wirkt stark ausscheidend auf staubhaltige Gase. Diese Eigenschaft von Wirbeln bildet die Grundlage der Entstaubungstechnik, die meist mit sog. „Zyklonen“ arbeitet (s. S. 199).

16. Stellen der größten und kleinsten Geschwindigkeiten.

In einer reibungsfreien Strömung gilt folgender Satz: Die Stellen der größten und kleinsten Geschwindigkeiten sind immer an der Körperoberfläche. Das Gleiche gilt wegen der Bernoullischen Gleichung für die Drücke. Die Stellen der größten und kleinsten Drücke sind immer an der Körperoberfläche.

Für einen umströmten Zylinder wollen wir den Nachweis andeuten (s. z. B. Abb. 29). Die kleinste Geschwindigkeit ist gleich Null und wird am Staupunkt erreicht. Im Innern einer Flüssigkeit sind Staupunkte undenkbar. Mit Hilfe der Gl. (47 bzw. 46), die nebeneinanderliegende Stromlinien einander zuordnet, ist der Verlauf der Geschwindigkeiten senkrecht zur Strömung zu übersehen. Gehen wir z. B. von der Stelle 2 der Abb. 29 aus, an der die Geschwindigkeit nach S. 57 gleich $2u$ ist, so wird die Geschwindigkeit nach außen abnehmen müssen, bis im Unendlichen der Wert u erreicht wird. Betrachten wir andererseits die Stromlinien in der Nähe des Staupunktes, wo die Krümmung der Stromlinien entgegengesetzt ist, so muß die Geschwindigkeit von außen nach innen abnehmen, und zwar von u im Unendlichen bis Null im Staupunkt. Für die meisten Strömungen kann so der Nachweis sehr leicht erbracht werden. Der exakte math. Beweis soll hier übergangen werden.

Der Satz gilt nicht mehr, wenn isolierte Wirbel in der Strömung enthalten sind. Ungültig wird der Satz auch dann, wenn Körperoberflächen durch Quellen und Senken ersetzt werden, oder wenn zwei Flüssigkeitsstrahlen gegeneinander fließen.

¹ Meldau: Drallströmung im Drehhohlraum. Diss. Hannover 1935.

17. Energieaustausch in reibungsfreien Flüssigkeiten.

Bei allen bisherigen Erwägungen handelte es sich um reibungsfreie Strömungen ohne Energieaustausch. Die Größe $H = z + p/\gamma + \frac{c^2}{2g}$, die die gesamte Energie darstellt, war bei diesen Betrachtungen konstant. Nun wird sich ein wesentlicher Teil dieses Buches mit Vorgängen beschäftigen, bei denen Reibungs- und Druckverluste auftreten. Hierbei wird offensichtlich in jedem Falle die Energie H der Flüssigkeit vermindert.

Vorher interessiert jedoch die ebenso wichtige Frage, ob und wie in einer reibungsfreien Flüssigkeit ein Energieaustausch bewerkstelligt werden kann.

Zunächst läßt sich ein ziemlich trivialer Weg angeben. Eine Flüssigkeit kann z. B. in Behältern gehoben oder gesenkt werden, d. h. der Wert H wird durch Änderung der Größe z geändert. Das gleiche wird bei Kolbenpumpen und Kolbenmotoren durch die Hubarbeit der Kolben erreicht. Diese „statischen“ Methoden von Energieänderungen bilden die Grundlage der Kolbenmaschinen und sind ziemlich leicht zu übersehen. Es handelt sich um Vorgänge, die die Strömungslehre weniger interessieren als die Statik der Flüssigkeiten und deshalb hier ohne Interesse sind.

Mehr im Vordergrund steht hier die Frage, ob einer Flüssigkeit während ihrer Bewegung mit irgendwelchen Mitteln Energie zu- oder abgeführt werden kann, ohne den stetigen Durchfluß zu behindern. Es handelt sich — rein ingenieurmäßig ausgedrückt — um die Existenzfrage für sämtliche Kreiselmassen (Wasserturbinen, Dampfturbinen, Kreiselpumpen, Gebläse, Propeller, Windmühlen usw.). Bei all diesen Maschinen wird durch geeignete Bewegung von Körpern (genauer gesagt durch Schaufeln) einem stetigem Flüssigkeitsstrom Energie zu- oder abgeführt. Es wird interessieren, ob die Grundgleichungen der Strömungslehre hierauf eine Antwort erteilen.

Blicken wir zurück auf die bisher abgeleiteten Beziehungen der reibungsfreien Flüssigkeit, so finden wir nur bei einer Gleichung eine Änderung der Gesamtenergie H , nämlich bei der Grundgleichung der nichtstationären Bewegung Gl (27)

$$g \frac{\partial}{\partial s} \left[z + p/\gamma + \frac{c^2}{2g} \right] + \frac{\partial c}{\partial t} = g \cdot \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0; \text{ oder } \frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial c}{\partial t}$$

Diese Gleichung bildet den Schlüssel zur Lösung der gestellten Aufgabe. Aus der Gleichung ist zunächst zu erkennen, daß nur dann $\frac{\partial H}{\partial s} \neq 0$ ist, wenn $\frac{\partial c}{\partial t} \neq 0$ ist. Hieraus läßt sich sofort folgender Satz ableiten:

In einer reibungsfreien Flüssigkeit ist ein Energieaustausch nur möglich, wenn die Strömung nicht stationär ist.

Um die Änderung von H umfassender zu erhalten, denken wir daran, daß bei einer nichtstationären Strömung sich jede Größe (p ; c) sowohl mit der Zeit als mit dem Weg ändert. Wenn wir somit die totale zeitliche Änderung von H berechnen wollen, ist beides zu berücksichtigen. Durch den folgenden Ansatz werden wir dieser Tatsache gerecht.

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial s} \cdot ds.$$

Wir dividieren mit dt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} \cdot c.$$

Aus $H = z + p/\gamma + \frac{c^2}{2g}$ folgt $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c}{g} \frac{\partial c}{\partial t}$ (für $z = \text{konst.}$).

Setzen wir dies ein, so ergibt sich:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c}{g} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{c}{g} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p/\gamma}{\partial t}. \quad (51)$$

Die totale zeitliche Änderung von H ist somit gleich der zeitlichen Änderung der statischen Druckhöhe.

Eine Energie kann somit einer reibungsfreien Flüssigkeit nur dann entnommen oder übertragen werden, wenn der Druck sich zeitlich ändert. Mit welchen technischen Mitteln diese nichtstationäre Bewegung erzielt wird, ist der Flüssigkeit vollkommen gleichgültig. Rein kinematisch bestehen viele Möglichkeiten, praktisch ist die Auswahl indes viel kleiner, weil die wirkliche Flüssigkeit nicht reibungsfrei ist und deshalb nur solche Lösungen interessieren, die zu möglichst kleinen Verlusten führen.

Um Arbeit einer Flüssigkeit zu entnehmen oder eine solche in dieselbe zu übertragen, können z. B. in der Strömung Flächen bzw. Körper bewegt werden, auf die in ihrer Bewegungsrichtung Strömungskräfte wirken. Ist z. B. u die Geschwindigkeit eines derartigen Körpers und P die Kraft, die in der Bewegungsrichtung auf ihn wirkt, so wird bekanntlich eine Leistung $P \cdot u$ abgegeben bzw. aufgenommen, je nachdem der Körper sich entgegen oder mit der Krafrichtung bewegt.

Diese äußere summarische Betrachtung gibt uns indes keinen Einblick in den Mechanismus der Energieänderung des einzelnen Flüssigkeitsteilchens. Deshalb sollen im folgenden einige typische, einfache Beispiele betrachtet werden, die uns einen anschaulichen Einblick gestatten.

a) Energieübertragung durch in Strömungsrichtung bewegte Körper.

Ohne Änderung der Strömungsrichtung kann die Energie eines Flüssigkeitstrahles leicht geändert werden, wenn wir z. B. normal zur Bewegungsrichtung eine Platte einführen und dieselbe mit einer Ge-

schwindigkeit bewegen, die größer als die Strahlgeschwindigkeit ist. Abb.47a zeigt ein praktisches Beispiel. Ein senkrecht austretender Wasserstrahl wird durch ein rotierendes Schaufelrad angetrieben, so daß $c_2 > c_1$ ist. Durch die Schaufeln wird das Wasser von c_1 auf c_2 beschleunigt. Es handelt sich um eine Pumpe. Ist die Umfangsgeschwindigkeit kleiner als die Strahlgeschwindigkeit, so wirken die Schaufeln offenbar verzögernd. Das Rad wird angetrieben und stellt dann eine Turbine dar.

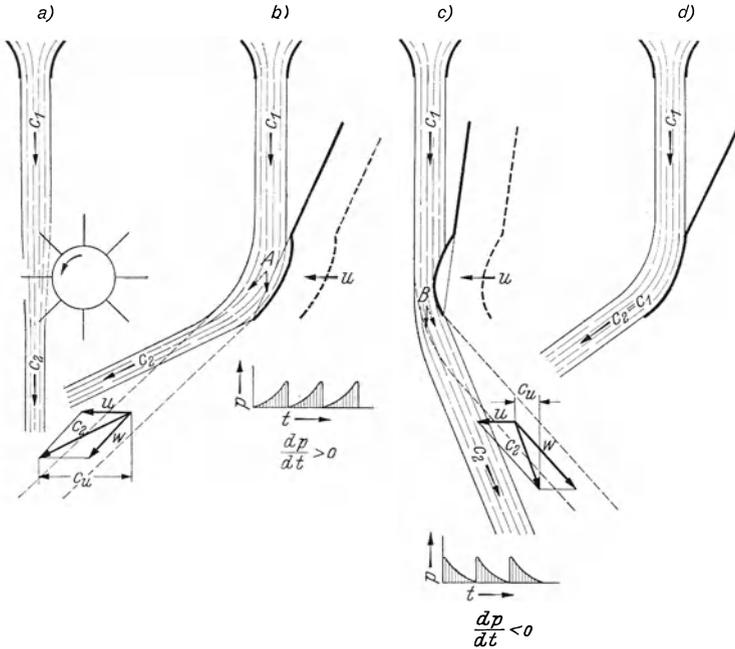


Abb. 47. Energieerhöhung eines Flüssigkeitsstrahles durch Bewegung fester Körper.

Die Energieerhöhung ist gleich der Erhöhung der kinetischen Energie. $E = 1/2 g (c_2^2 - c_1^2)$. Die periodisch in den Strahl eintretenden Schaufeln lassen klar den nichtstationären Charakter des Strömungsgebietes erkennen, in dem die Energieübertragung stattfindet. Diese prinzipiell sehr einfache Energieübertragung in Strömungsrichtung ist praktisch nur bei der Peltonturbine und verschiedenen Dampfturbinenkonstruktionen möglich. Für Pumpenkonstruktionen eignet sich diese Methode überhaupt nicht.

b) Energieübertragung durch schräg zur Strömungsrichtung bewegte Körper.

Praktisch bedeutsamer sind die Fälle, wo Körper irgendwie schräg zur Strömungsrichtung bewegt werden. In den folgenden Beispielen

soll insbesondere der einfache Fall behandelt werden, bei dem senkrecht zur Strömungsrichtung eine Körperbewegung stattfindet.

Nach der Gleichung $\frac{dH}{dt} = 1/\gamma \frac{\partial p}{\partial t}$ muß dafür gesorgt werden, daß der Wert $\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0$ ist. Eine Energieerhöhung tritt z. B. ein, wenn dauernd $\frac{\partial p}{\partial t} > 0$ ist. Wir wählen ein Ausführungsbeispiel, das mit dem Strahl einer Wasserleitung und einem Löffel ausgeführt und in allen Teilen beobachtet werden kann. In Abb. 47 b wird ein Löffel mit der hohlen Seite mit einer bestimmten Geschwindigkeit u in den Strahl eingeführt. Wenn wir im Punkt A beobachten, so wird sich dort mit dem Herannahen der Schaufel der Druck stetig erhöhen, so daß wie verlangt, $\frac{\partial p}{\partial t} > 0$ ist. Diese Druckerhöhung hängt sehr eng mit der Krümmung der Stromlinien zusammen, da bekanntlich gemäß Gl. (42) der Druck zunimmt, wenn wir uns in einem gekrümmten Kanal nach außen bewegen. Der Druck nimmt ständig zu, bis er an der Löffelwandung einen Höchstwert erreicht. Die stetig zunehmende Krümmung bewirkt im Punkte A gleichzeitig eine ständige Drehung der Strömungsrichtung, die in Abb. 47 b durch Pfeile angedeutet ist. Der nichtstationäre Charakter der Strömung ist somit deutlich sichtbar. Beim Verlassen des Löffels hat das Wasser außer der Relativgeschwindigkeit im Löffel noch dessen Geschwindigkeit u , so daß die absolute Geschwindigkeit in der ausgezogenen Richtung abgelenkt zur relativen Löffelrichtung verläuft.

Wir wollen weiter versuchen, an Hand der Gleichung $\frac{dH}{dt} = 1/\gamma \frac{\partial p}{\partial t}$ genaueren Einblick zu erhalten. Der Druck ändert sich offenbar in Richtung des bewegten Löffels, so daß für den in A feststehenden Beobachter die Druckänderung mit der Geschwindigkeit u vor sich gehen wird. Schreiben wir $\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, wo x die Bewegungsrichtung des Löffels ist, so ist über das Vorzeichen noch eine Vereinbarung zu treffen. Relativ zum Löffel nimmt offenbar der Druck ab, wenn wir uns in u -Richtung bewegen, d. h. aber $\frac{dp}{dx} < 0$. Für den feststehenden Beobachter verschiebt sich die Druckkurve mit der Geschwindigkeit u . Bei der angenommenen Druckkurve wird aber hier der Druck zunehmen. Wir müssen deshalb, weil ja die Energie zunimmt und $\frac{dH}{dt} > 0$ ist, schreiben: $\frac{dH}{dt} = -1/\gamma u \frac{dp}{dx}$.

Nach unseren Grundgleichungen kann aber das Druckgefälle in einer Richtung gleich $\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma/g \frac{dc_u}{dt}$ gesetzt werden, wo c_u die Komponente der Absolutgeschwindigkeit in der u -Richtung ist.

Setzen wir dies ein, so ergibt sich

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{g} u \cdot \frac{dc_u}{dt} \text{ hieraus } dH = \frac{u}{g} \cdot dc_u,$$

die Integration ergibt

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \frac{1}{g} \cdot u \cdot [c_{2u} - c_{1u}]. \quad (52)$$

Dies ist aber bereits die Turbinengrundgleichung. Sie besagt: die Energieerhöhung ist dem Produkt aus Geschwindigkeit der Schaufel mal der Differenz der Absolutgeschwindigkeitskomponenten in Richtung der Schaufelgeschwindigkeit verhältnismäßig.

Der einmalig durchgeschobene Löffel wird nur den Flüssigkeitsteilen eine Energie übertragen, die gerade von ihm erfaßt werden. Wollen wir eine stetige Energieerhöhung erreichen, so müßte direkt hinter dem ersten Löffel ein zweiter und weitere im steten Abstand folgen, damit alle Wasserteilchen erfaßt werden. Damit haben wir aber bereits das konstruktive Mittel angewandt, das bei fast allen Kreiselmaschinen die kinematische Grundlage bildet, nämlich ein sog. Schaufelgitter, das irgendwie schräg zur Strömungsrichtung bewegt wird.

Die zeitliche Druckzunahme für den Punkt A wird beim Überqueren der Löffelwand einen Sprung erfahren und dann von vorne beginnen. Unter der Abb. 47 b ist dieses periodische Druckbild, das durch $\frac{dp}{dt} > 0$ gekennzeichnet ist, schematisch angedeutet. Es ist somit noch das Merkmal vorhanden, daß die zeitliche Druckkurve Unstetigkeiten¹, d. h. Sprünge hat. Die Periodizität des Vorganges ist gleich u/e , wenn e die Teilung des Gitters ist. Bemerkt sei noch, daß für den mitfahrenden Beobachter die Strömung durchaus stationär ist. Wir können somit folgende Feststellung machen: Die Absolutströmung ist nicht stationär, die Relativströmung ist stationär.

Da im vorliegenden Falle nur eine Erhöhung der kinetischen Energie stattfindet, können wir die Energieerhöhung auch gleich

$$\Delta H = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$$

setzen. Dieser Ausdruck ist mit $\frac{u}{g} [c_{2u} - c_{1u}]$ identisch.

Energieentnahme. Wollen wir aus dem Wasserstrahl Energie entnehmen, so muß $\frac{dp}{dt} < 0$ sein. In Punkt B (Abb. 47 c) muß also der

¹ Wenn sich Körper in einer Flüssigkeit fortbewegen, so muß wegen des zu überwindenden Widerstandes von diesen Körpern Energie an die Flüssigkeit übertragen werden. Die Bedingung ist auch hier, daß die Absolutströmung nicht stationär ist. Die periodischen Bewegungen der Lebewesen (Flossen, Flügel usw.) lassen deutlich erkennen, daß auch die Natur dieses Problem durch nichtstationäre Strömungen löst.

Druck abnehmen, wenn sich der Energie abführende Körper nähert. Dazu drehen wir unseren Löffel herum und bewegen ihn mit der konvexen Seite zum Strahl. Wir merken sofort, daß der Löffel angesaugt¹ wird, genau so wie der auf S. 21 beschriebene Gummiball. Dies hängt wieder mit der Druckverteilung einer gekrümmten Strömung zusammen, wobei gemäß dem nichtstationären Charakter der Absolutströmung noch das Glied $\frac{\partial c_n}{\partial t}$ der Gl. (43) zu beachten ist. In Abb. 47c ist an der Stelle *B* der Druck schematisch eingezeichnet für den mit dem Löffel mitfahrenden Beobachter. Er nimmt gemäß den Erwägungen von S. 27 zu, wenn wir uns von der Krümmung wegbewegen. Für den in *B* feststehenden Beobachter wird jetzt der Druck zeitlich abnehmen, wenn der Löffel sich nähert. Es ist also so, daß eine Energieabnahme zu erwarten ist. Wir beobachten, daß der Strahl entgegen der Bewegung des Löffels abgelenkt wird. Hierbei dreht sich zeitlich die Strömungsrichtung in *B* in die punktierte Lage.

Wir haben also wieder das Kennzeichen, daß der Druck sich zeitlich ändert und gleichzeitig die Strömungsrichtung sich dauernd in der angedeuteten Richtung dreht. Am Löffelaustritt tritt der Strahl mit einer absoluten Richtung aus, die kleiner ist als der Austrittswinkel des Löffels, weil bekanntlich die Relativgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit des Löffels zusammengesetzt werden muß.

Sobald wir den Löffel plötzlich stillhalten, wird der Strahl weiter abgelenkt in die gestrichelte Richtung, ebenso wie im vorigen Beispiel die Ablenkungsrichtung in die gestrichelte Richtung, die dort kleiner ist, verschoben wird. Die rechnerische Verfolgung des letzten Beispiels ist mit dem ersten identisch, wenn das Vorzeichen von dH geändert wird. Wir erhalten hier wegen der Energieabnahme

$$dH = -\frac{u}{g} dc_u$$

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \frac{u}{g} [c_{1u} - c_{2u}]. \quad (53)$$

Folgen stetig Schaufeln hintereinander, so ergibt sich wieder die Möglichkeit einer stetigen Energieentnahme. Es handelt sich also um das schematische Bild einer Turbine. Die zeitliche Druckverteilungskurve, die unter Abb. 47c angedeutet ist, hat hier entgegengesetzten Verlauf, jedoch wiederum so, daß dauernd $\frac{dp}{dt} < 0$ ist.

Man kann noch fragen, was dann der Unterschied gegenüber der stillstehenden Schaufel ist, bei der ja auch der Strahl abgelenkt wird, etwa

¹ Der Löffel wird nur angesaugt, wenn die Gesamtströmung nach rechts abgelenkt wird. Mit wachsender Geschwindigkeit des Löffels wird schließlich, wie ein Blick auf das Geschwindigkeitsdreieck zeigt, sogar die entgegengesetzte Ablenkung erzielt.

nach Abb. 47d. Die Antwort ist folgende: Hier findet naturgemäß keine Energieübertragung statt, sondern nur eine Strahlableitung, so daß also $c_1 = c_2$ sein muß. Die Wirkung der Schaufel besteht also hier nur in einer Ablenkung der Strömung ohne jede Energieübertragung, natürlich immer unter der Voraussetzung, daß das Wasser reibungsfrei ist und keine Verluste entstehen.

Von Interesse ist noch die Frage, welche Strömungsbereiche von der Energieübertragung erfaßt werden. Die Antwort ist folgende: Die Zonen der Energieänderung gehen so weit, wie der Bereich der nichtstationären Strömung reicht.

Für weitere Ausführungen muß auf die Kreiselmassenliteratur verwiesen werden. Die vorstehenden Betrachtungen sollten lediglich den ziemlich komplizierten Mechanismus der Energieübertragung in einer reibungsfreien Flüssigkeit möglichst anschaulich und ohne technisches Beiwerk klären.

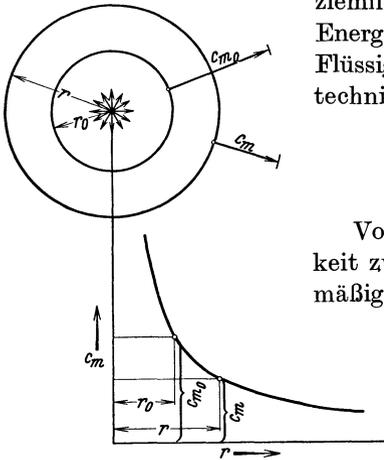


Abb. 48. Geschwindigkeitsverteilung einer Quelle.

18. Quellen und Senken.

a) Grundsätzliches.

Von einem Punkte aus ströme eine Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Platten gleichmäßig nach allen Seiten aus und verschwinde im Unendlichen. Diese Strömungsform wird treffend als Quelle bezeichnet. Verschwindet umgekehrt die von allen Seiten gleichmäßig ankommende Flüssigkeit in einem Punkte, so spricht man von einer Senke.

Die Punktsymmetrie bedingt im Raume gleiche Geschwindigkeiten auf Kugeln, in der Ebene auf Kreisen.

Die sekundlich aus dem Punkte strömende Menge Q nennen wir die Ergiebigkeit der Quelle. Die Kontinuität erfordert (ebenes Problem):

$$Q = 2 r \pi \cdot c_m = 2 \cdot r_0 \cdot \pi \cdot c_{m_0} \quad (\text{Der Abstand der beiden Platten werde gleich 1 gewählt.})$$

$$c_m = \frac{Q}{2 r \pi} = \frac{c_{m_0} \cdot r_0}{r}. \quad (54)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung (Abb. 48) ist somit mathematisch dieselbe wie bei dem Wirbel. Für die Druckverteilung gilt das Gleiche. Wieder merken wir uns, daß die durch eine Quelle verursachte Geschwindigkeit mit $1/r$ abklingt.

Es ist nützlich und zweckmäßig, diese einfachen „Idealfälle“ kennenzulernen, weil sie für verwickeltere Strömungsformen die Grundsteine bilden und eine Analyse nach dieser Richtung hin oft leicht verständliche Auskunftsmittel verschafft.

b) Überlagerungsgesetz.

Bewegungen flüssiger Massenteilchen können nach demselben Grundsatz wie bei der Bewegung fester Körper zusammengesetzt werden. Hat ein Teilchen an einer Stelle die Geschwindigkeit w_1 (Abb. 49) und infolge einer anderen Ursache eine zweite Geschwindigkeit w_2 , so erhält man durch geometrische Addition, d. h. durch den Parallelogrammsatz, die tatsächliche Geschwindigkeit $w = w_1 \hat{+} w_2$. Geht man so von Punkt zu Punkt vor, so erhält man das Geschwindigkeitsfeld der resultierenden Bewegung.

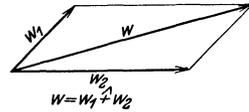


Abb. 49. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten.

c) Zusammensetzung einer Parallelströmung mit einer Quelle.

Mit Hilfe des Überlagerungsgesetzes soll untersucht werden, welche Strömung entsteht, wenn einer Parallelströmung in Richtung der negativen x -Achse mit der Geschwindigkeit u eine Quellenströmung überlagert wird. Der Quellenpunkt sei gleichzeitig Koordinatenanfangspunkt. Die Geschwindigkeitsverteilung der Quelle ist durch $c_m = \frac{Q}{2\pi x}$ gegeben. Man erkennt, daß auf der x -Achse ein Punkt vorhanden sein muß, bei dem c_m und die Geschwindigkeit der Parallelströmung u sich gerade aufheben; dort muß also Ruhe herrschen. Die Entfernung a dieses Staupunktes von der Quelle errechnet sich aus

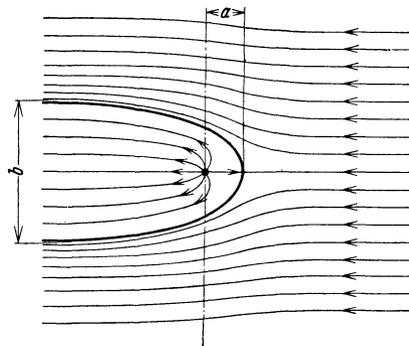


Abb. 50. Zusammensetzung von Quelle und Parallelströmung.

$$u = c_m = \frac{Q}{2\pi a} \text{ zu } a = \frac{Q}{2\pi u}.$$

Verfolgen wir auf der y -Achse die neuen Geschwindigkeitsrichtungen aus

$$\text{tg } \alpha = \frac{c_m}{u} = \frac{Q}{2\pi y u},$$

so werden diese mit wachsendem y immer kleiner und schließlich gleich Null. Die ganze Quelle wird nach links abgelenkt, bis im Unendlichen nur noch eine Parallelströmung vorhanden ist. Die von der Quelle kommende Flüssigkeit wird von einer nach hinten offenen Hohlkurve be-

grenzt. Bei Reibungsfreiheit steht nichts im Wege, diese Kurve durch eine feste Wand zu ersetzen. Man erkennt, daß so die Strömung um einen vorne stumpfen, unendlich langen Körper nach Abb. 50 bestimmt werden kann.

Auch nach Überlagerung beider Strömungen behält die Bernoullische Gleichung volle Gültigkeit. Im Unendlichen sind die Stromlinien alle parallel, also muß auch der Druck in einer zur Strömungsrichtung senkrechten Ebene nach S. 27 konstant sein. Das ist aber nur möglich, wenn die Geschwindigkeit konstant ist, d. h. der Spalt von der Breite b , der im Unendlichen für die Quelle übrig bleibt (gleichzeitig die Breite des Hohlkörpers), weist die Geschwindigkeit u auf. Damit läßt sich die

Breite berechnen: $b \cdot u = Q$; $b = Q/u$. Dieser Breite b nähert sich der Körper asymptotisch.

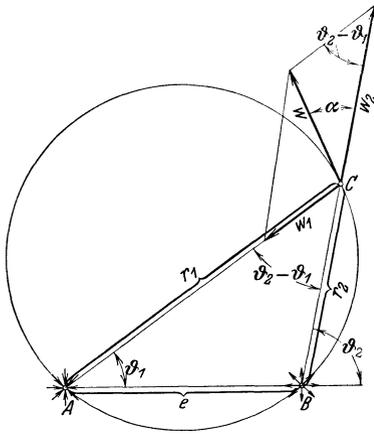


Abb. 51. Zusammensetzung von Quelle und Senke.

d) Zusammensetzung von Quelle und Senke.

In A (Abb. 51) befinde sich eine Senke und in B eine Quelle von gleicher Ergiebigkeit Q .

Für irgendeinen Punkt C , der von A die Entfernung r_1 , von B die Entfernung r_2 hat, ist die Senkengeschwindigkeit $w_1 = \frac{Q}{2r_1\pi}$, die

Quellengeschwindigkeit $w_2 = \frac{Q}{2r_2\pi}$. In Abb. 51 ist nach dem Parallelogrammsatz $w = w_1 \hat{+} w_2$ gebildet.

In Punkt C muß die Strömungsrichtung somit identisch mit der Richtung von w sein.

Die oberen Winkel beider Dreiecke sind gleich; außerdem:

$$w_2 : w_1 = \frac{Q}{2\pi r_2} : \frac{Q}{2\pi r_1} = r_1 : r_2 = AC : BC.$$

Hieraus folgt: $\triangle ABC$ ähnlich dem Geschwindigkeitsdreieck.

Somit $w : w_1 = e : r_2$;

$$w = \frac{e \cdot w_1}{r_2} = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{e}{r_1 \cdot r_2}. \quad (55)$$

Weiter folgt aus der Ähnlichkeit: $\alpha = \vartheta_1$.

Nach dem Satz vom Sehnen tangentialen Winkel folgt, daß w die Tangente an den durch ABC gelegten Kreis ist. Für jeden Punkt dieses Kreises folgt dasselbe. Die Hüllkurve aller Geschwindigkeitsvektoren ist aber nichts anderes als die Bahn des Punktes. Der Kreis ist also eine Stromlinie.

Wir finden somit: Die Stromlinien der Zusammensetzung (Quelle + Senke) werden durch ein Kreisbüschel dargestellt, das durch die Punkte *A* und *B* geht.

e) Doppelquelle.

Quelle und Senke sollen nunmehr zusammenfallen. Zunächst ist nicht einzusehen, wie ein derartiges Gebilde überhaupt eine Wirkung nach außen haben kann, da man annehmen sollte, daß die Quelle sofort in der Senke verschwindet, ohne nach außen eine Wirkung auszuüben.

Durch einen Grenzübergang wollen wir allmählich Quelle und Senke zusammenfallen lassen. Im Punkte *C* (Abb. 51) war die resultierende Geschwindigkeit nach Gl. (55)

$$w = \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{e}{r_1 \cdot r_2}.$$

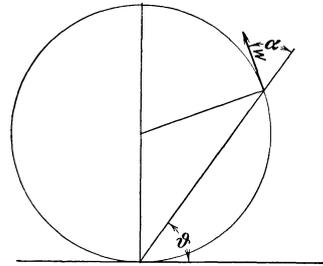


Abb. 52. Geschwindigkeitsverteilung bei einer Doppelquelle.

Wird *e* gleich Null, so wird auch *w* gleich Null. Es besteht jedoch die Möglichkeit, *Q* in demselben Maße wachsen zu lassen, wie *e* abnimmt, d. h. wir bilden

$$\lim_{\substack{Q = \infty; \\ e = 0}} Q \cdot e = Q_0 \cdot e_0$$

und sorgen dafür, daß das Produkt *Q · e* konstant und endlich bleibt. Für *w* tritt dann keine Änderung ein. *r*₁ wird gleich *r*₂, *ϑ*₁ gleich *ϑ*₂, ebenso *ϑ*₁ = *α*, d. h. die Richtung von *w* ist Kreis-tangente (Abb. 52). Die Stromlinien sind somit wieder Kreise. Das gesamte Strömungsbild wird durch zwei tangenterende Kreisbüschel dargestellt (Abb. 53). Das Produkt *Q · e = M* nennt man das Moment der Quellenkombination, während die *x*-Achse als Achse des Momentes bezeichnet wird. Die Geschwindigkeit im Ab-

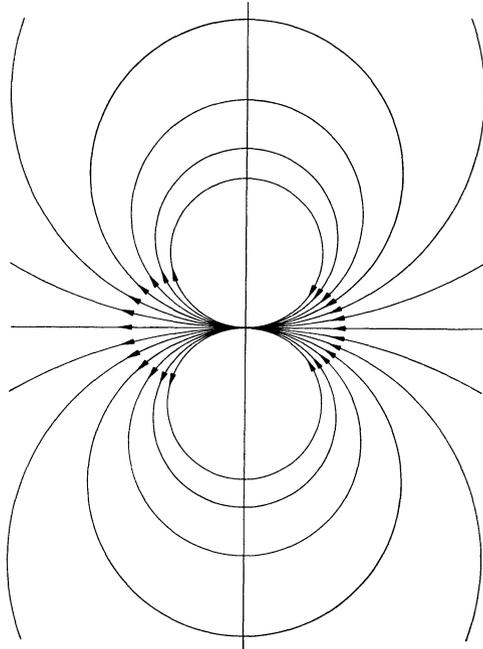


Abb. 53. Stromlinien einer Doppelquelle.

stand r ist

$$w = \frac{Q \cdot e}{2 \pi r^2} = \frac{M}{2 \pi r^2}. \quad (56)$$

Die Geschwindigkeit einer „Doppelquelle“ klingt demnach mit wachsendem r proportional $\frac{1}{r^2}$ ab. Für endlichen Abstand e der Quelle und Senke gilt in großer Entfernung dasselbe, da hier $r_1 \sim r_2$ wird.

Wir merken uns schon jetzt, daß der Einfluß einer Doppelquelle nach außen schneller verschwindet als der einer Einzelquelle oder eines Einzelwirbels.

f) Überlagerung von Parallelströmung mit Quelle und Senke.

Eine Quelle A und eine Senke B von gleicher Ergiebigkeit Q sollen mit einer Parallelströmung von der Geschwindigkeit u zusammengesetzt

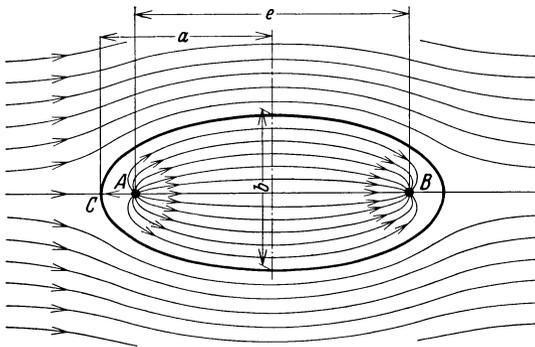


Abb. 54. Strömungsbild der Überlagerung von Parallelströmung mit Quelle und Senke.

werden. Von A nach links ist die Quellensenkengeschwindigkeit nach Gl.(55) $w = \frac{Q \cdot e}{2 \pi \cdot r_1 \cdot r_2}$ der Geschwindigkeit u entgegengerichtet; in einem Punkte C müssen sie sich aufheben, da w sich stetig ändert. Der Abstand a dieses Staupunktes vom Nullpunkte ist aus: $w = u$

$$= \frac{Q \cdot e}{2 \pi \left(a - \frac{e}{2}\right) \left(a + \frac{e}{2}\right)}$$

leicht zu errechnen:

$$a = \sqrt{\frac{Q \cdot e}{2 \pi u} + \frac{e^2}{4}}.$$

Ein zweiter Staupunkt liegt bei $+a$. Zwischen diesen Grenzen wird die Quellensenkenströmung, die sich vorher auf die ganze Ebene erstreckte, eingeengt. In der y -Richtung tritt ebenfalls eine Einengung ein. Es ergibt sich eine geschlossene ellipsenartige Kurve, innerhalb deren Quelle und Senke sich auswirken können. Ersetzt man diese Kurve durch eine feste Wand und denkt nicht mehr an die Vorgänge im Innern, so ist dadurch die Strömung um einen ellipsenartigen Körper gewonnen.

Die Breite b kann aus der Bedingung berechnet werden, daß die zwischen $y = 0$ und $y = b/2$ strömende Menge gleich $Q/2$ sein muß. Abb. 54 zeigt das Bild dieser Strömung.

g) Zusammensetzung von Quelle und Wirbel (Wirbelquelle).

In einem Punkte befinde sich eine Quelle von der Ergiebigkeit Q . Der Quellenströmung sei eine Wirbelströmung überlagert. Eine derartige Kombination nennt man Wirbelquelle. Die Quelle ergibt Radialgeschwindigkeiten, die nach Gl. (54)

$$c_m = \frac{c_{m0} \cdot r_0}{r}$$

sich ändern. Der Wirbel bedingt Umfangsgeschwindigkeiten c_u nach der Gl. (47):

$$c_u = \frac{c_{u0} \cdot r_0}{r}.$$

Auf einem Kreis vom Radius r_0 seien die durch die Quelle erzeugte Geschwindigkeit c_{m0} und die durch den Wirbel bedingte Geschwindigkeit c_{u0} bekannt. Welche neue Bewegung entsteht nun, wenn beide Bewegungsformen gleichzeitig wirken?

Auf einem beliebigen Kreis vom Radius r kennen wir die Einzelgeschwindigkeiten, die aufeinander senkrecht stehen. Die resultierende Geschwindigkeit hat nun gegen den Umfang einen Winkel α , der sich leicht berechnen läßt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c_m}{c_u} = \frac{\frac{c_{m0} \cdot r_0}{r}}{\frac{c_{u0} \cdot r_0}{r}} = \frac{c_{m0}}{c_{u0}} = C.$$

Dieser Winkel ist also konstant. Da die

Geschwindigkeitsrichtung mit der Richtung der Stromlinie identisch ist, können wir schreiben:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{r \cdot d\varphi} = \frac{c_{m0}}{c_{u0}};$$

hieraus folgt nach einer leichten Integration:

$$\ln \frac{r}{r_0} = \varphi \cdot \frac{c_{m0}}{c_{u0}}.$$

Dies ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale. Die Strö-

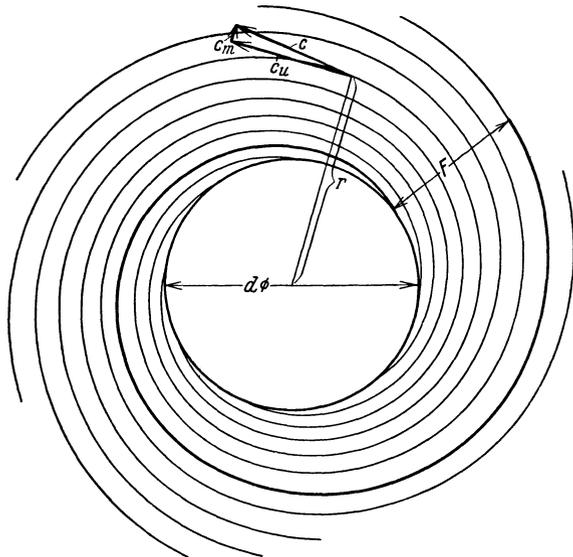


Abb. 55. Strömungsbild einer Wirbelquelle.

mung besteht also aus derartigen Spiralen, die von der Quelle nach außen verlaufen.

Abb. 55 zeigt das Bild dieser Strömung, wobei mit Rücksicht auf eine bestimmte Anwendung das Innere vom Durchmesser d freigelassen ist. Denkt man sich nämlich das Innere durch ein rotierendes Kreisrad vom Durchmesser d ausgefüllt, so ist die Außenströmung genau so, als wenn sich im Mittelpunkte eine sog. „Wirbelquelle“ befände. Bei einer reibungslosen Strömung ist es auch gestattet, eine Stromlinie durch eine feste Wand zu ersetzen. In Abb. 55 ist dies geschehen. Man erkennt die Entstehung eines sog. Spiralgehäuses¹, das in einfacher und exakter Weise gestattet, die Strömung einer Wirbelquelle in einer Rohrleitung verlustfrei zu sammeln.

h) Doppelquelle und Parallelströmung.

Eine Doppelquelle werde mit einer Parallelströmung von der Geschwindigkeit u so zusammengesetzt, daß die Momentenachse mit der Richtung von u zusammenfällt. Es ergeben sich wieder zwei symmetrisch liegende Staupunkte, die nach der S. (54)

$$u = \frac{M}{2\pi a^2}, \quad \text{d. h.} \quad a = \sqrt{\frac{M}{2\pi u}},$$

zu berechnen sind.

Wir betrachten nun einen Kreis vom Radius a (Abb. 56). Hier ist die Geschwindigkeit der Doppelquelle $w_1 = \frac{M}{2\pi a^2}$, d. h. gleich dem konstanten Wert u , ebenso wie auf anderen Kreisen um den Nullpunkt die Geschwindigkeit konstant ist. Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten an der Stelle A zeigt nach Abb. 56, daß die Richtung von w gleich der Tangente an den Kreis mit dem Radius a ist.

[$\sphericalangle MAO = \sphericalangle MOA = 90^\circ - \alpha$;
(O = Kreismittelpunkt) deshalb ist
 $\sphericalangle BAO = 90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$;
hieraus folgt, daß $\beta = \alpha$ ist und daß die Resultierende AC auf dem Radius OA senkrecht steht.]

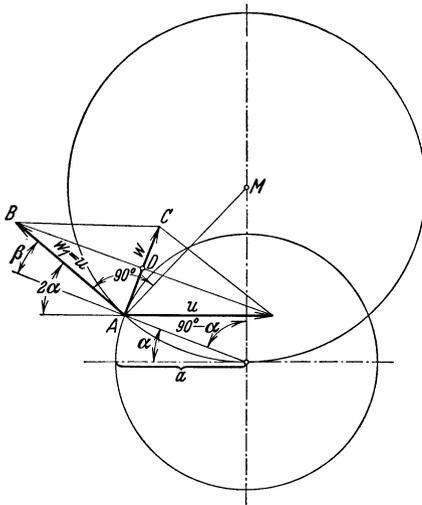


Abb. 56. Geschwindigkeitsfeld der Zusammensetzung: Parallelströmung + Doppelquelle.

¹ Eck: Ventilatoren. Berlin: Springer 1937.

Dieser Kreis ist somit die Begrenzungslinie zwischen der äußeren Strömung und der inneren Quellenströmung; letztere schließt sich vollständig in einem Kreis. Das äußere Bild gibt somit die Strömung um einen Kreiszylinder wieder, wie aus Abb. 57 ersichtlich ist.

Die Geschwindigkeitsverteilung längs der Kreiskontur ist leicht zu berechnen. Aus dem Dreieck ABD entnimmt man:

$$w = 2u \cdot \sin \alpha. \quad (57)$$

Für $\alpha = 90^\circ$ wird $w = 2u$. Dies ist die größte Geschwindigkeit, die überhaupt außerhalb des Kreises auftritt.

Nach der Bernoullischen Gleichung läßt sich auch die Druckverteilung schnell angeben. Ist p_0 der Druck der ungestörten Parallelströmung, so erhält man: $\frac{\gamma}{2g} u^2 + p_0 = \frac{\gamma}{2g} w^2 + p$,

$$p_0 - p = \frac{\gamma}{2g} [w^2 - u^2] = \frac{\gamma}{2g} u^2 [4 \sin^2 \alpha - 1] = \frac{\gamma}{2g} u^2 [1 - 2 \cos 2\alpha].$$

Führt man den Staudruck der ungestörten Parallelströmung

$$p_s = \frac{\gamma}{2g} u^2$$

ein und bezieht hierauf die Druckdifferenz, so entsteht:

$$\frac{p_0 - p}{p_s} = 1 - 2 \cos 2\alpha. \quad (58)$$

Für $\alpha = 90^\circ$ erhält man $\frac{p_0 - p}{p_s} = 3$, d. h. der größte Unterdruck ist gleich dem dreifachen Staudruck. Für $\alpha = 30^\circ$ ist $\frac{p_0 - p}{p_s} = 0$, d. h. der Druck ist dort gleich dem Druck der ungestörten Strömung.

Das Bild ist typisch für eine widerstandslose Bewegung. Die Drücke, die auf die vordere Seite des Körpers wirken, werden von den auf die hintere Seite wirkenden aufgehoben, sodaß keine Kraft in Strömungsrichtung entsteht. Am Körper beobachtet man zwei Staupunkte, die bei jeder Umströmung eines Körpers auftreten.

i) Quellen und Senken im Raume.

Wir denken uns im Raume von einem Punkte aus eine Flüssigkeitsmenge gleichmäßig nach allen Richtungen ausströmen. Es handelt sich

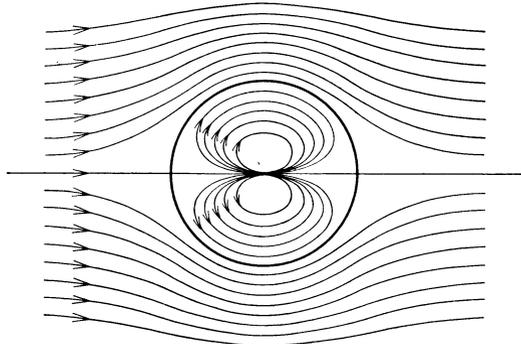


Abb. 57. Zylinderströmung, entstanden durch Überlagerung von Parallelströmung mit Doppelquelle.

um eine Strömung, die man als Raumquelle bezeichnet. Offenbar sind hierbei die Geschwindigkeiten auf Kugelflächen gleich. Ist Q die sekundlich ausströmende Menge, so ergibt sich für die Geschwindigkeit in der Entfernung r

$$c = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Die Geschwindigkeiten nehmen mit dem Quadrat der Entfernung ab. Drehen wir die Bewegungsrichtung um, so haben wir eine Raumsenke, für die Entsprechendes gilt.

Wenn wir einer Raumsenke eine Parallelströmung überlagern, so ergibt sich in ähnlicher Weise wie beim ebenen Problem ein umströmter Körper. Hier entsteht ein Rotationskörper, der nach hinten offen ist. Im Inneren dieses Körpers bleibt die abgedrängte Quellenströmung erhalten.

Die Kombination Quelle + Senke ergibt eine resultierende Geschwindigkeit $c = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \hat{+} \frac{Q}{4\pi r_2^2}$, wobei natürlich eine geometrische Addition vorgenommen werden muß. Um für diesen wichtigen praktischen Fall einen gewissen überschlägigen Einblick zu erhalten, berechnen wir die resultierende Geschwindigkeit auf der Symmetrie-Achse, d. h. der $-y$ -Achse. Ist r der Abstand eines Punktes dieser Achse von Quelle und Senke, so ergibt eine leichte Rechnung, die den Betrachtungen von Abb. 51 analog ist, eine in x -Richtung gerichtete Geschwindigkeit

$$c_x = \frac{Q \cdot e}{4\pi r^3} \quad (e \text{ Abstand von Quelle und Senke}).$$

Geht man auch hier zu einer Doppelquelle über, d. h. läßt man Quelle und Senke zusammenfallen jedoch so, daß $M = \lim_{e \rightarrow 0} Q \cdot e \neq 0$ ist, so

erhält man $c_x = \frac{M}{4\pi y^3}$. Für die x -Achse ergibt eine ebenso einfache Rechnung eine in x -Richtung gerichtete Geschwindigkeit $c_x = \frac{M}{2\pi x^3}$

Hieraus folgt, daß bei einer Doppelquelle und auch in gewisser Entfernung von der Kombination Quelle + Senke die Geschwindigkeit mit der dritten Potenz des Abstandes abnimmt. Die Fernwirkung ist also hier viel kleiner — mathematisch gesprochen von höherer Ordnung kleiner — als im ebenen Falle.

Wenn wir der Doppelquelle eine Parallelströmung überlagern, so erhalten wir die Umströmung einer Kugel. Ist a der Kugelradius, so wird das Moment M hierbei leicht durch die Tatsache mit a verknüpft, daß am vorderen Staupunkt, d. h. für $x = a$ die Geschwindigkeit gleich Null ist, d. h.

$u = c_x = \frac{M}{2\pi a^3}$. Hieraus ergibt sich für die Doppelquellengeschwindigkeit

$$c_x (y=0) = u \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^3; \quad c_x^* (x=0) = \frac{u}{2} \left(\frac{a}{y}\right)^3$$

und für die resultierende Geschwindigkeit der Kugelströmung

$$c_{x(y=0)} = u \left[1 + \left(\frac{a}{x} \right)^3 \right]; \quad c_{x(x=0)} = u \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{y} \right)^3 \right] \quad (59)$$

Für $a=y$ ergibt sich die größte Geschwindigkeit zu $c_{\max} = 1,5 u$.

Beispiel: In welcher Entfernung vor einer mit 200 m/s aufschlagenden Kugelbombe von 500 mm \varnothing ist eine „Vorankündigung“ durch erhöhten Staudruck zu merken? Als merkbaren Staudruck wollen wir dabei eine Druckerhöhung von 1 mm WS ansehen.

Wenn die Kugel sich bewegt, wird der feststehende Beobachter als Absolutbewegung nur die Doppelquelle feststellen. Der mit der Kugel fahrende Beobachter stellt als Bewegung die aus Doppelquelle und Parallelströmung resultierende Kugelumströmung fest. Wir brauchen bei der Aufgabe somit nur die Geschwindigkeit der Doppelquelle auszurechnen, die den Staudruck 1 mm WS hat.

Aus $\Delta p = 1 = \rho/2 c_x^2$
folgt $c_x = 4 \text{ m/s}$ bei $\gamma/\rho = 1/8$;
hiermit wird

$$c_x = u \left(\frac{a}{x} \right)^3$$

$$x = a \sqrt[3]{\frac{u}{c_x}} = 0,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{200}{4}} = 1,84 \text{ m},$$

d. h. in 1,84 m vor der Bombe ist erst ein Überdruck von 1 mm WS zu merken. Die hydraulische „Vorankündigung“ ist somit eine sehr schwache.

Beispiel: Die Entlüftung eines Raumes durch einen in der Wand eingebauten Lüfter kann in einiger Entfernung vom Lüfter sehr genau als Senkenströmung angesehen werden. Genau gesehen handelt es sich um eine halbe Raumsenke, indem man die Wand als reibungsfreie Stromlinie betrachtet.

Bei einem Lüfterdurchmesser von 300 mm sei im Schraubenstrahl eine Durchtrittsgeschwindigkeit von 10 m/s vorhanden, Abb. 58. In welcher Entfernung vom Lüfter ist keine Zugbelastung mehr zu spüren? Hierunter soll eine Luftbewegung von 1 m/s verstanden werden. Da auf Kugelflächen gleiche Geschwindigkeiten vorhanden sind, ergibt sich:

$$V = \frac{\pi}{4} 0,3^2 \cdot 10 = 2\pi r^2 \cdot 1; \quad r = 0,3 \cdot \sqrt{\frac{10}{8}} = 0,335 \text{ m},$$

d. h. in etwa $\frac{1}{3}$ m Entfernung vor dem Lüfter ist kaum mehr eine merkliche Luftbewegung festzustellen. Eine technisch bedeutende Erscheinung erhält damit ihre Erklärung.

Wird die Luft aus dem Freien durch irgendwelche Öffnungen angesaugt, so sind nur in unmittelbarer Nähe der Ansaugöffnung merkliche Geschwindigkeiten vorhanden. Die Geschwindigkeiten nehmen mit dem Quadrat der Entfernung von der Öffnung ab.

(Weitere Anwendung: Ein Staubsauger arbeitet nur, wenn die Düse in sehr naher Entfernung von der zu reinigenden Fläche gehalten wird. Aus größerer Entfernung läßt sich kein Staub von einer Wand absaugen!)

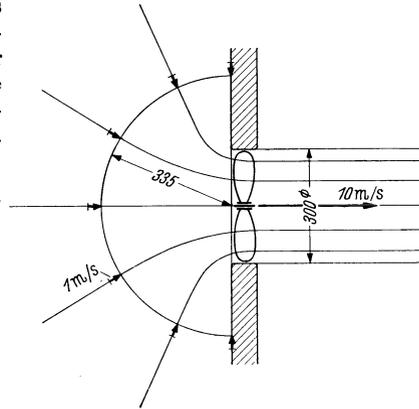


Abb. 58. Einströmen der Luft in einen Wandlüfter.

19. Graphische Konstruktion von Strömungsbildern.

Die allgemeinen Grundgleichungen geben Anhaltspunkte zur näherungsweise Konstruktion von Strömungsbildern. Im Falle der ebenen und der rotationssymmetrischen Strömung sind einfache Verfahren anwendbar, die in der Praxis oft mit Vorteil angewandt werden.

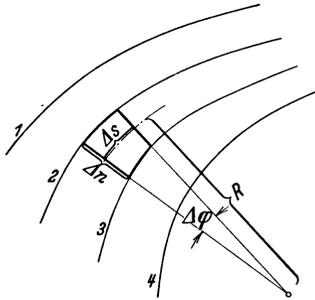


Abb. 59. Ausschnitt aus einer ebenen Strömung.

In Abb. 59 seien einige Stromlinien eingezeichnet, und zwar von der schon früher festgesetzten Besonderheit, daß die zwischen 1—2; 2—3; 3—4 in der Zeiteinheit strömenden Mengen konstant sind. Ist Δn die Breite einer solchen Stromröhre und c die Geschwindigkeit an irgend-einer Stelle, so ist die sekundlich durchströmende Menge $\Delta n \cdot c = \Delta V$. Die Krümmungsradien an den Begrenzungslinien seien R' und R'' , die Geschwindigkeiten an diesen Stellen c' und c'' . Nach Gl. (47) ist dann $R' \cdot c' = R'' \cdot c''$. Durch Erweiterung mit $\Delta\varphi$ entsteht:

$$R' \cdot \Delta\varphi \cdot c' = R'' \cdot \Delta\varphi \cdot c''.$$

Unter Berücksichtigung von $R \cdot \Delta\varphi = \Delta s$ erhält man

$$\Delta s' \cdot c' = \Delta s'' \cdot c''.$$

Die Division mit der Stetigkeitsgleichung $\Delta n' \cdot c' = \Delta n'' \cdot c''$ ergibt:

$$\frac{\Delta s'}{\Delta n'} = \frac{\Delta s''}{\Delta n''}. \quad (60)$$

Denkt man sich überall im Abstände Δs voneinander zu den Stromlinien die Normallinien gezeichnet, die man Potentiallinien nennt, so ergeben sich Rechtecke, die einander ähnlich sind. Wählt

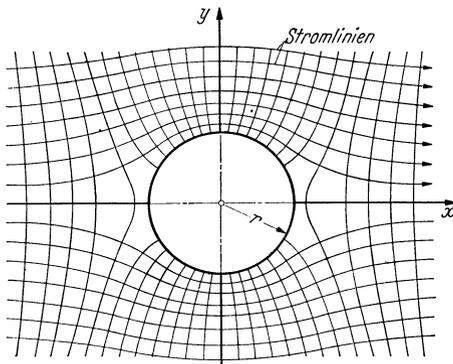


Abb. 60. Stromlinien und Potentiallinien bei der reibungsfreien Umströmung eines Zylinders.

man an einer Stelle Δs so, daß ein Quadrat entsteht, so besteht das ganze Strömungsbild aus Quadraten.

Abb. 60 zeigt dies anschaulich. Hier ist die Umströmung eines Zylinders mit Strom- und Potentiallinien dargestellt. Das ganze Bild besteht aus Quadraten. Nur in der Nähe der Stau-punkte ergeben sich Abweichungen.

Streng genommen gilt die Ableitung nur für aller kleinste Teilchen. Diese wichtige Eigenschaft der ebenen Strömung zeigt die direkte Verwandtschaft mit einer einfachen Parallelströmung. Man sagt, jede ebene Strömung sei das konforme Abbild einer Parallelströmung, und erkennt, daß es möglich sein muß, aus der einfachen Parallelströmung alle anderen ebenen Strömungen abzuleiten. Mit Hilfe der sog. konformen Abbildung¹ kann diese Aufgabe rein mathematisch gelöst werden. Es bestehen auch verschiedene mechanische Möglichkeiten zur Aufzeichnung der Stromlinien.

Nimmt man im Sinne graphischer Näherungsmethoden endlich große (nicht zu große) Quadrate, so kann man auch hier noch leidlich genau die Gültigkeit des Satzes erwarten. Im folgenden soll die Anwendbarkeit dieser Beziehung kurz erläutert werden.

Man trägt zunächst nach dem Gefühl die Stromlinien auf. Senkrecht zu ihnen zeichnet man, wieder nach dem Gefühl, eine Schar senkrechter Linien so ein, daß ungefähr Quadrate entstehen. Letzteres läßt sich leicht durch Einzeichnen von Kreisen überprüfen.

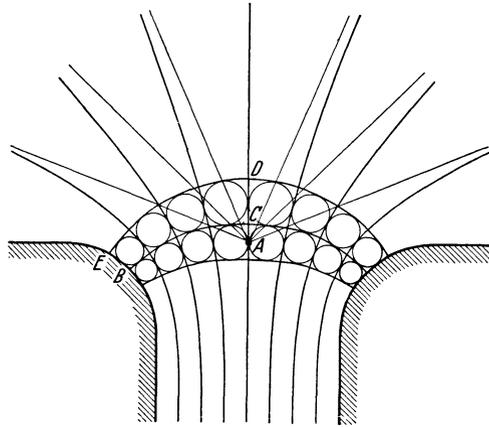


Abb. 61. Graphische Konstruktion von Strömungsbildern.

Durch Verlegen der Linien und nochmaliges Nachprüfen gelingt es dann, das Strömungsbild in erster Näherung zu entwerfen.

Im allgemeinen ist das Verfahren mühevoll und zeitraubend. Oft liegen die Dinge jedoch so, daß ungefähre Anhaltspunkte für gewisse Stromlinien bzw. die dazu Senkrechten vorliegen. An den Wandungen ist z. B. immer die Richtung der Senkrechten genau bekannt.

Abb. 61 gibt ein einfaches Beispiel für eine gute Anwendbarkeit des Verfahrens. Die Einströmung aus einem unendlich großen Raum in einen Kanal, dessen Einlauf abgerundet ist, soll untersucht werden. Im Kanal werden in genügend großem Abstand vom Einlauf alle Stromlinien gleichen Abstand haben und zu der Kanalachse parallel sein. Die ein-

¹ Als beste und leichteste Einführung in die konforme Abbildung dürfte ein Aufsatz genannt werden: Meyer, Th.: Konforme Abbildung. Z. angew. Math. Mech. 1923, S. 136. Weitere kleinere Schriften: Lewent, L.: Konforme Abbildung. Teubner 1912, sowie Bieberbach, L.: Einführung in die konforme Abbildung. Sammlung Göschen 1915.

gezeichneten sieben Stromlinien werden also sieben in gleichem Abstand eingezeichnete Parallelen zur Asymptoten haben müssen. Im weiteren Abstand vor dem Einlauf haben wir das Bild einer Senkenströmung. Ein Geradenbüschel durch den Punkt A stellt somit in weiter Ferne das Strömungsbild dar. Sieben um den Winkel $180^\circ/8$ verschiedene Geraden werden somit die Asymptoten im Außenbereich darstellen. Um für die Zwischenströmung genaueren Anhalt zu bekommen, wenden wir obiges Verfahren an. Vom Punkte B aus ziehen wir senkrecht zur Wand zunächst nach dem Gefühl BC . Die Asymptoten verbinden wir gefühlsmäßig und zeichnen den ersten Kreis bei C . Dadurch gewinnen wir einen Anhaltspunkt für DE und untersuchen die verbleibenden drei „Quadrate“ durch Kreise. Wir korrigieren so lange, bis die Kreise die Seiten berühren. Dadurch liegen die Stromlinien in diesem Bereich einigermaßen fest. Die Verbindung mit den Asymptoten ist jetzt schon bedeutend leichter. Für viele praktische Anwendungen reicht die hierdurch erzielte Genauigkeit aus.

20. Genauere Verfahren.

Alle Verfahren zur Konstruktion von Strömungsbildern gehen aus von Gl. (46) und (47), die das Gleichgewicht senkrecht zur Strömungsrichtung darstellen und die Nachbarstromlinien gleichsam miteinander verbinden. Das Verfahren von Flügel¹, das z. B.

aus der Gleichung $\frac{dc}{dn} + \frac{c}{\varrho} = 0$ besonderen Nutzen zieht, soll zunächst

kurz angedeutet werden. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$\frac{dc}{c} = -\frac{dn}{\varrho}$, so läßt sich sofort eine wichtige Schlußfolgerung ziehen. Denken

wir uns nämlich c in Abhängigkeit zu n aufgetragen, so ist $\frac{dc}{c} = \operatorname{tg} \alpha$. Wir

erhalten aus Tangente, Achse und Ordinate ein rechtwinkliges Dreieck, in dem c und ϱ Gegen- und Ankathete von α sind. Der Krümmungsradius ist somit die sog. Subtangente an die c -Kurve. Damit besitzen wir gleich eine wichtige Kontrollmöglichkeit für die Geschwindigkeitskurve. Da an den Wandungen die Krümmungsradien bekannt sind, liegen die Neigungen der Geschwindigkeitskurven fest, sobald die Geschwindigkeiten selbst bekannt sind.

Aus obiger Gleichung ergibt sich weiter $\frac{dc}{c} = -\frac{dn}{\varrho}$. Wir integrieren und erhalten

$$\ln \frac{c}{c_i} = -\int_{o_i}^{\varrho} \frac{dn}{\varrho}$$

¹ Flügel: Ein neues Verfahren der graphischen Integration, angewandt auf Strömungen. Diss. 1914. Oldenburg: s. auch Closterhalfen ZAM. 1926, S. 62.

hieraus

$$c = c_i \cdot e^{-\int \frac{dn}{\rho}} \quad \text{bzw.} \quad c_a = c_i \cdot e^{-\int \frac{dn}{\rho}}. \quad (61)$$

(Die Indices i und a beziehen sich auf die innere und äußere Berandung eines gekrümmten Kanales.)

Das Integral kann ausgewertet werden, wenn der Verlauf von ρ über n bekannt ist. Dazu kann man nun zunächst die Stromlinien nach dem Gefühl eintragen und die Krümmungsradien ρ entnehmen. $\int \frac{dn}{\rho}$ kann

dann graphisch ausgewertet werden. Die weitere Berechnung von c erfolgt rechnerisch oder noch einfacher auf logarithmischem Papier. Zur Ermittlung der Stromlinien ist noch die durchfließende Menge zu berechnen.

Es ist $Q_n = \int c \cdot b \, dn = b \cdot c_i \cdot \int e^{-\int \frac{dn}{\rho}} \cdot dn$, wo b die Breitesenkrecht zur Zeichenebene ist. $Q_n = f(n)$ gewinnt man am besten graphisch und erhält dann durch gleiche Unterteilung der n -Linie Stromlinienpunkte. Führt man das Verfahren an verschiedenen Stellen der Stromlinien aus, so ergeben sich für jede Stromlinie mehrere Punkte, die das Strömungsbild festlegen. Dieses neue Stromlinienbild kann man benutzen, um den Verlauf von ρ genauer zu ermitteln; man wird bei Wiederholung des ganzen Verfahrens genauere Resultate erzielen.

Obschon die Methode im Prinzip sehr einfach und durchsichtig zu sein scheint, ist die Durchführung, selbst bei Verwendung von logarithmischem Papier, doch sehr mühsam und zeitraubend.

Das immerhin umständliche Verfahren kann in vielen Fällen sehr vereinfacht werden. Im folgenden werden hierfür Richtlinien herausgearbeitet.

Nach der Gl. (61) ist die vorliegende Aufgabe auf die Ermittlung des Integrals $\int \frac{dn}{\rho}$ zurückgeführt. Danach muß also der Krümmungsradius bekannt sein oder zum mindesten ungefähr geschätzt werden können. Da die Kanalwandungen als gegeben zu betrachten sind, handelt es sich um die Bestimmung des Zwischenverlaufs. Solche Aufgaben bezeichnet man mathematisch als „Randwertaufgaben“.

Sowohl für ebene als für rotationssymmetrische Strömungen ergibt sich die gleiche Gleichung $c = c_i e^{-\int \frac{dn}{\rho}}$. Trotz dieser gleichen Differentialgleichung ergeben sich nicht gleiche Geschwindigkeitskurven. Denn wenn bei gleichem Kanalquerschnitt die Wandkrümmungen gleich sind, kann der Zwischenverlauf von $1/\rho$ noch verschieden sein! Tatsächlich verschieben sich bei rotationssymmetrischen Strömungen aus Gründen der Kontinuität die Stromlinien mehr nach außen (d. h. von der Rotationsachse fort). Dadurch ergeben sich andere Krümmungsradien. Die

folgenden Betrachtungen werden zeigen, in wie weit in erster Näherung wenigstens eine Gleichsetzung möglich ist.

Wir sind nun in der glücklichen Lage, für bestimmte einfache gekrümmte Strömungen alle Einzelheiten zu kennen. Aus diesen einfachen Fällen wollen wir Beobachtungsmaterial sammeln und dieses für schwierigere Fälle verwerten. Insbesondere soll der Verlauf der Geschwindigkeit und der Krümmungsradien studiert werden.

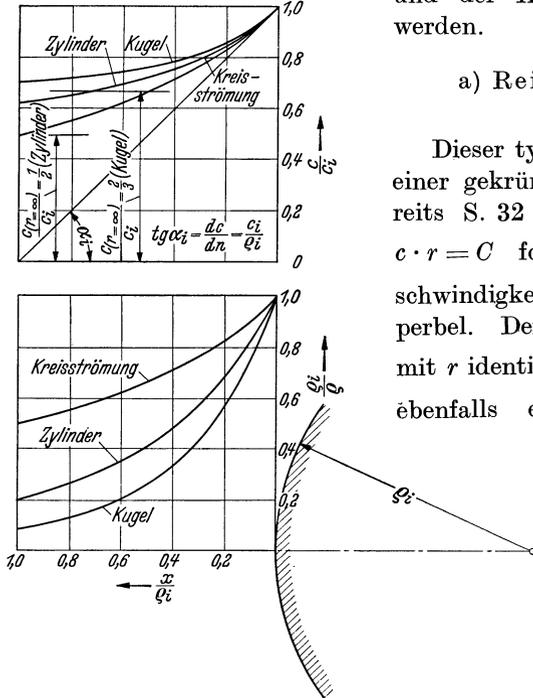


Abb. 62. Frei-Umströmung von Zylinder, Kugel, und Kreisströmung. Verlauf der Geschwindigkeiten und der Krümmungsradien der Stromlinien in Wandnähe.

a) Reibungsfreie Kreisströmung.

Dieser typische und einfachste Fall einer gekrümmten Strömung war bereits S. 32 behandelt worden. Aus $c \cdot r = C$ folgt $c = \frac{C}{r}$. Der Geschwindigkeitsverlauf ist eine Hyperbel. Der Krümmungsradius ρ ist mit r identisch, so daß $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} = f(r)$ ebenfalls eine Hyperbel darstellt.

Bilden wir $\frac{dc}{dn} = \frac{dc}{dr}$
 $= -\frac{C}{r^2}$ und $-\frac{c}{r}$
 $= -\frac{C}{r^2}$, so finden wir
 unsere Gl. (46) $\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{c}{\rho}$
 $= 0$ bestätigt. In Abbildung 62 sind c und $\frac{1}{\rho}$ aufgezeichnet.

b) Umströmung eines Zylinders.

Die Umströmung eines Zylinders war früher mit Hilfe der Quellen- und Senkenmethode behandelt worden. Wir wollen hier die Verhältnisse auf der Normallinie studieren, die an der Stelle der größten Geschwindigkeit beginnt und aus Symmetriegründen eine Gerade ist. Geschwindigkeit und Krümmung können leicht nach den Ausführungen von S. (57) berechnet werden.

$$\frac{c}{c_i} = \frac{1}{2} + \left(\frac{\rho_i}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}; \quad \frac{\rho_i}{\rho} = \frac{2}{\left(\frac{r}{\rho_i}\right)^2 + \frac{r}{\rho_i}}$$

Die Eintragung in Abb. 62 zeigt, daß die Werte unter denen der Kreis-

strömung liegen. An der Zylinderwand ergibt sich indes die gleiche Neigung wegen $\frac{dc}{dn} = -\frac{c_i}{\varrho_i}$.

c) Umströmung einer Kugel.

Die Umströmung einer Kugel ist eine der wenigen rotationssymmetrischen Strömungen, die wir exakt berechnen können, und ist deshalb besonders wertvoll. Auch diese Strömung war S. 58 mit der Quellen- und Senkenmethode behandelt worden. Danach ergibt sich:

$$\frac{c}{c_i} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\varrho_i}{r} \right)^3; \quad \frac{\varrho_i}{\varrho} = \frac{3}{2 \left(\frac{r}{\varrho_i} \right)^4 + \frac{r}{\varrho_i}}.$$

An der Kugeloberfläche ist wieder die Neigung $\frac{dc}{dn} = -\frac{c_i}{\varrho_i}$ identisch mit den beiden vorherigen Fällen. Die Geschwindigkeitskurven sind demnach wenigstens im Anfang übereinstimmend. Später ergeben sich allerdings deutliche Abweichungen, wie aus Abb. 62 zu erkennen ist.

d) Strömung zwischen einer Wand und einem Zylinder.

Nach den bisherigen Beispielen von unendlich ausgedehnten Strömungen wollen wir jetzt typische Fälle von Kanalströmungen betrachten. Zunächst studieren wir die Strömung zwischen einem Zylinder und einer ebenen Wand. Die Durchrechnung, die hier übergangen werden muß, erfolgte mit Hilfe der konformen Abbildung. Als Stromlinien ergeben sich hier Kreise, die in Abb. 63 (ausgezogen) eingetragen sind.

$$\frac{c}{c_i} = \frac{2 \varrho_i/b + 2}{2 \varrho_i/b + 1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2}; \quad \frac{\varrho_i}{\varrho} = \frac{2 \varrho_i/b \cdot \frac{x}{b}}{2 \varrho_i/b + 1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2}; \quad \frac{c_i}{c_a} = \frac{2 + b/\varrho_i}{2 + 2b/\varrho_i}.$$

Das praktisch bedeutsame Verhältnis $\frac{\text{Innengeschwindigkeit}}{\text{Außengeschwindigkeit}}$ wurde gleichfalls angegeben. In Abb. 63 sind die Ergebnisse eingetragen.

e) Strömung in einem gekrümmten Kanal.

Als Begrenzung werden hier zwei Kreise gewählt. Es ergibt sich ein gekrümmter Kanal, wie er z. B. bei Gleichdruckdampfturbinenschaufeln vorkommt. Leider ist hier bei beliebigem Verhältnis ϱ_i/ϱ_a eine explizite Formulierung nicht möglich. In Abb. 63 ist ein Beispiel $b = 0,8 \cdot \varrho_i$; $\varrho_a = 3,82 \cdot \varrho_i$ gewählt. Die Stromlinien bestehen hier wieder aus Kreisen und sind in Abb. 63 gestrichelt eingezeichnet.

f) Strömung zwischen konzentrischen Kreisen.

Dieser Fall ist mit a) vollkommen identisch, wenn man zwei Kreise durch reibungsfreie Wände ersetzt. Zum Vergleich sind die interessieren-

den Werte ebenfalls in Abb. 63 eingetragen. Die Stromlinien (strichpunktiert) sind Kreise.

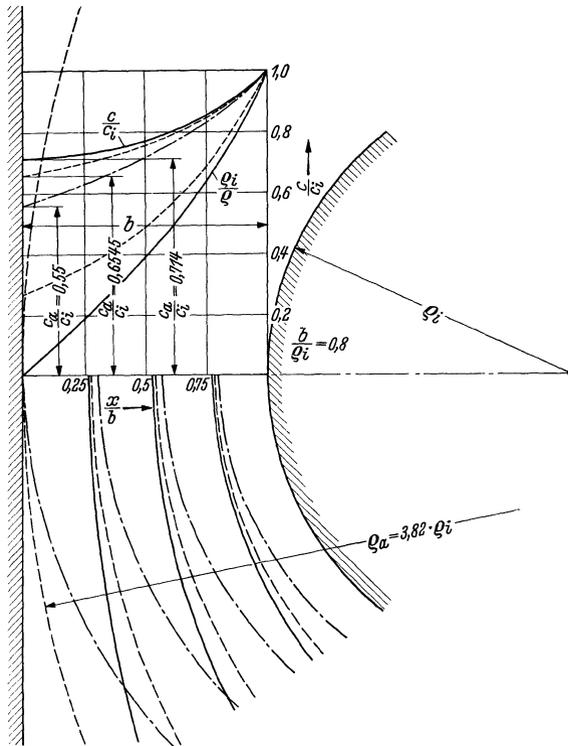


Abb. 63. Geschwindigkeits- und Krümmungsradienverlauf in verschiedenen gekrümmten Kanälen.

g) Praktische Schlußfolgerungen.

1. Sowohl bei ebener als bei rotationssymmetrischer Strömung beginnen bei gleicher Wandgeschwindigkeit die Geschwindigkeitskurven mit der gleichen Neigung $\frac{dc}{dn} = -\frac{c_i}{q_i}$. Bezeichnen wir mit x den Abstand von der Wand, so ergibt sich eine lineare 1. Näherung

$$c = c_i \left(1 \mp \frac{x}{q_i} \right) \quad (62)$$

(das positive Vorzeichen gilt dabei für konkave Krümmung). Ein Blick auf Abb. 62 zeigt, daß diese Näherung bis etwa $x/q_i \sim 0,1$ sehr genau zutrifft. Hieraus folgt:

Die Geschwindigkeitsverteilung ist bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung in erster Näherung gleich. Als zweite Näherung wollen wir für die ebene Strömung die Zylinder-

strömung und für die rotationssymmetrische Strömung die Kugelströmung annehmen. Die Entwicklung nach x/ρ_i ergibt:

$$2. \text{ Näherung: } \begin{cases} c = c_i \left[1 \pm \frac{x}{\rho_i} \pm \frac{3}{2} \left(\frac{x}{\rho_i} \right)^2 \right] & \text{eben} \\ c = c_i \left[1 \pm \frac{x}{\rho_i} \pm 2 \left(\frac{x}{\rho_i} \right)^2 \right] & \text{rotationssymmetrisch} \end{cases} \quad (63)$$

(unteres Vorzeichen für konkave Krümmung)

Hier beginnen somit die Abweichungen¹. Sie sind bei kleineren Werten von x/ρ_i immer noch sehr klein, wie ja auch die exakten Darstellungen der Abb. 62 deutlich zeigen. Wenn somit die Kanalbreite im Verhältnis zum Krümmungsradius nicht zu groß ist, wird es in technisch vielen Fällen durchaus genügen, für ebene und rotationssymmetrische Strömung gleiche Geschwindigkeitsverteilung anzunehmen.

2. Um genauere Anhaltspunkte für die Auswertung der Gleichung $c = c_i e^{-\int \frac{dn}{\rho}}$ zu erhalten, wollen wir einen Blick auf den Verlauf der reziproken Krümmungsradien werfen, d. h. $1/\rho$. Das Integral $\int \frac{dn}{\rho}$ stellt die unter der Kurve $1/\rho$ liegende Fläche dar.

Betrachten wir z. B. die Kanalströmung zwischen Zylinder und Wand nach Abb. 63, so erkennt man, daß $1/\rho$ in erster Näherung als Gerade betrachtet werden kann. Demnach ist $\int \frac{dn}{\rho}$ gleich dem Inhalt eines Dreiecks.

$$\int \frac{dn}{\rho} \sim \frac{1}{\rho_i} \frac{x}{2} \quad \text{d. h. } c = c_i \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{x}{\rho_i}}. \quad (64)$$

Die Geschwindigkeitsverteilung ist somit sofort gegeben. Für genauere Berechnungen ist die Beobachtung nützlich, daß bei allen $1/\rho$ -Kurven die Krümmung im gleichen Sinne erfolgt, so daß also vom Inhalte des Dreiecks etwas abzuziehen wäre. Am einfachsten wird dies dadurch berücksichtigt, daß man die Abweichungen von der Geraden durch eine Parabel zum Ausdruck bringt. Demnach wäre von dem Inhalt des Dreiecks bzw. Trapezes (letzteres für den Fall, daß beide Wandungen des Kanals gekrümmt sind) der Inhalt einer Parabelkuppe abzuziehen. Es mag daran erinnert werden, daß der Inhalt einer Parabelkuppe gleich $\frac{2}{3}$ des Inhalts des umschließenden Rechtecks bzw. Parallelogramms ist. Wenn somit die Abweichung der Kurve von der Geraden in der Mitte bekannt ist, ergibt sich eine elementare Berechnung.

So ist z. B. beim Kanal der Abb. 63 die Abweichung ziemlich genau $\frac{1}{5}$

¹ Diese präzise Darstellung scheint im Hinblick auf Verallgemeinerungen der vorigen Auflage geboten, die nicht aufrecht erhalten werden können.

der mittleren Höhe. Damit erhält man:

$$\int \frac{dn}{\varrho} = \frac{1}{2} \frac{x}{\varrho_i} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \frac{1}{2 \varrho_i} \cdot x = \frac{13}{30} \frac{x}{\varrho_i} \quad \text{d. h. } c = c_i \cdot e^{-\frac{13}{30} \cdot \frac{x}{\varrho_i}} .$$

damit wird für $x = b$ $\frac{c_i}{c_a} = e^{\frac{13}{30} \cdot \frac{b}{\varrho_i}} .$

Um Anhaltspunkte für die rotationssymmetrische Strömung zu erhalten, betrachten wir $1/\varrho$ bei der Kugelströmung (Abb. 62). Die Abweichungen von der Geraden, d. h. der Sehne der Kurve $1/\varrho$ sind hier bedeutend größer. Als größte Abweichung können wir hier etwa die Hälfte der mittleren Höhe in Rechnung setzen.

Damit ergibt sich: $\int \frac{dn}{\varrho} = \frac{1}{2} \frac{x}{\varrho_i} - \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{x}{2 \varrho_i} = \frac{1}{3} \frac{x}{\varrho_i} ;$

d. h. $c = c_i \cdot e^{-\frac{1}{3} \frac{x}{\varrho_i}}$ und $\frac{c_i}{c_a} = e^{\frac{1}{3} \frac{b}{\varrho_i}} .$

Wenn wir diese Erkenntnisse nun auf Querschnitte zwischen Rotationskörpern und geraden bzw. gekrümmten Außenwandungen übertragen, so ist natürlich keine absolute Genauigkeit vorhanden, jedenfalls ergeben sich Ergebnisse, die dem Ingenieur meist genügen dürften.

Wir wollen z. B. für den Fall einer Strömung zwischen einer ebenen Außenwand und einer inneren Krümmung das Verhältnis

$$\frac{\text{Innengeschwindigkeit}}{\text{Außengeschwindigkeit}}$$

zusammenstellen.

b/ϱ_i	0,2	0,5	0,8	1,0
c_i/c_a , eben.	1,09	1,242	1,414	1,527
c_i/c_a , rotationssymmetrisch	1,068	1,181	1,305	1,395

Beispiel. Abb. 64 zeigt schematisch den Schnitt durch ein Schraubengebläse. Zur Unterbringung des Antriebsmotors, aber auch aus aerodynamischen Gründen müssen solche Gebläse meist eine verhältnismäßig dicke Nabe haben. Wenn man letztere nicht sehr lang machen kann, so ergibt sich von selbst die in Abb. 64 skizzierte Formgebung. Die Luft muß dabei einen rotationssymmetrischen Stromlinienkörper umströmen und wird an der Ansatzstelle der Flügel eine Übergeschwindigkeit haben. Diese muß nun, ebenso wie der Geschwindigkeitsverlauf bis zum Außendurchmesser, beim Entwurf der Gebläseflügel bekannt sein und soll hier ermittelt werden.

Wir wollen dabei auch gleichzeitig das ebene Problem behandeln. Abb. 64 entspricht dann einer Strömung zwischen zwei parallelen Wänden im Abstände $2r_a$, die in der Mitte eine Strebe von der Formgebung der Nabe besitzen.

An den Wandungen sind die Krümmungen bekannt. Außen ist $\frac{1}{\rho_a} = \frac{1}{\infty} = 0$ und innen $\frac{1}{\rho_i}$. Für den Zwischenverlauf wählen wir zwei Parabeln mit verschiedenen Wölbungen gemäß den vorherigen Betrachtungen. In Abb. 64 sind diese Kurven eingetragen. Damit kennen wir auch die Werte c_i/c_a bei dem gewählten Verhältnis $b/\rho_i = 0,8$. Um den Vergleich zu erleichtern, wählen wir innen die gleiche Geschwindigkeit. Die Neigung der Geschwindigkeitskurve ist innen $\frac{dc}{dx} = -\frac{c_i}{\rho_i}$ und außen gleich Null. Nach Eintragung dieser Richtungen läßt sich der Zwischenverlauf leicht durch ein Kurvenlineal ziehen. Bei rotationssymmetrischer Strömung fällt die Geschwindigkeit weniger stark ab. Die Unterschiede sind nicht überwältigend.

Um die Stromlinien zu erhalten, müssen wir die durchfließende Menge ermitteln. Durch einen Kanal von der Breite dr strömt:

1. $dQ = 2\pi r \cdot dr \cdot c$;
 $Q = 2\pi \int r \cdot c \cdot dr$ (rotationssymmetrische Strömung);
2. $dQ = dr \cdot a \cdot c$;
 $Q = a \int c \cdot dr$ (ebene Strömung)

($a =$ Breite senkrecht zur Zeichenebene). Im

Falle 2 ist das Integral $\int c \cdot dr$ zu bilden. Die Geschwindigkeitskurve kann also unmittelbar integriert werden. Im Falle 1 ist zunächst der Wert $c \cdot r$ zu berechnen. Diese Kurve, die in Abb. 64 eingetragen ist, muß dann integriert werden, um Q zu ergeben. Die beiden Integrationen werden am einfachsten graphisch ausgeführt, wobei auf die Maßstäbe, d. h. auf die Konstanten 2π und b , keine Rücksicht genommen zu werden braucht. Um einen einfachen Vergleich zu ermöglichen, sind im vorliegenden Falle die Maßstäbe so gewählt, daß in beiden Fällen die gleiche Menge durchströmt. Erst an den Q -Kurven sieht man deutlich den Unterschied beider Fälle.

Um Punkte der Stromlinien zu erhalten, brauchen wir nur Q in gleiche Teile einzuteilen. In Abb. 64 sind z. B. vier Einteilungen für vier gleiche Durchflußmengen, d. h. für je $Q/4$, vorgenommen worden. Für beide Fälle ergeben sich jetzt verschiedene Punkte. Teilt man weit vor dem Nabenkörper einmal die Kreisfläche und dann den Radius in vier gleiche Teile, so erhält man weitere Punkte der Stromlinien

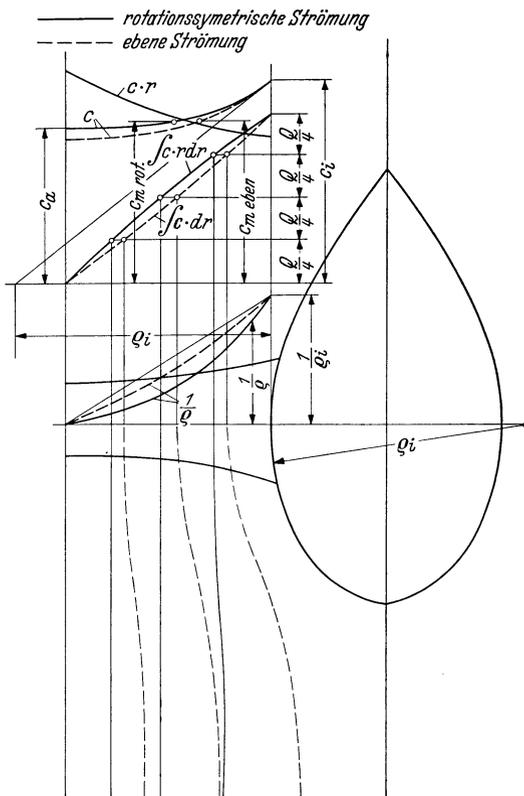


Abb. 64. Graphische Ermittlung der Meridianströmung durch ein Schraubengebläse. Behandlung des rotationssymmetrischen und des ebenen Problems.

und kann diese so mit Leichtigkeit eintragen. Beim Rotationsproblem sind außen die größeren Flächen; demzufolge drängen sich dort auch die Stromlinien mehr zusammen.

Um die mittlere Geschwindigkeit

$$c_m = \frac{Q}{(r_a - r_i) \cdot b}$$

bzw.

$$\frac{Q}{\pi (r_a^2 - r_i^2)}$$

zu erhalten, muß natürlich der Maßstab nachträglich ermittelt werden, weil Q in m^3/s bekannt sein muß. In Abb. 64 sind diese Werte eingetragen. Bei der Rotationsströmung ist der Mittelwert von der äußeren Geschwindigkeit nicht sehr verschieden, während bei der ebenen Strömung der Mittelwert mehr zwischen den Endwerten liegt.

21. Besonderheiten der rotationssymmetrischen Strömung.

Da nach dem Vorausgehenden bei der rotationssymmetrischen Strömung in erster Näherung die gleiche Geschwindigkeitsverteilung wie beim ebenen Problem vorhanden ist, gilt auch hier für zwei eng benachbarte Stromlinien $\varrho_1 c_1 = \varrho_2 c_2$. Durch Erweiterung mit $\Delta\varphi$ erhält man wegen $\varrho \cdot \Delta\varphi = \Delta x \rightarrow \Delta x_1 \cdot c_1 = \Delta x_2 \cdot c_2$. Die Kontinuitätsgleichung wird hier durch folgende Gleichung erfüllt: $\Delta y_1 \cdot 2r_1\pi \times c_1 = \Delta y_2 \cdot 2r_2 \cdot \pi \cdot c_2$ (Abb. 65). Die Division beider Gleichungen ergibt:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta y_1 \cdot r_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta y_2 \cdot r_2} = \text{konst. oder } \frac{\Delta x}{\Delta y} = r \cdot \text{Konstante.} \quad (65)$$

Die Stromlinien bilden mit den Normallinien somit Rechtecke, für die das Verhältnis der Seiten proportional dem Abstand von der Drehachse ist. Wir erinnern daran, daß bei der ebenen Strömung dieses Verhältnis konstant war und das Netz von Stromlinien und Normallinien aus Quadraten bestand.

Man kann diese Beziehung auch zur Aufzeichnung der Stromlinien benutzen. Zunächst zeichnet man nach dem Gefühl die Stromlinien und die Normallinien ein. Dann prüft man für jedes Rechteck die Zahl $\frac{\Delta x}{\Delta y \cdot r}$ und sorgt durch Verschieben der einzelnen Kurven dafür, daß diese Zahl konstant bleibt.

Das Verfahren ist allerdings sehr mühsam und leistet nicht dieselben Dienste wie bei der ebenen Strömung, sodaß im allgemeinen die graphische Methode nach S. 62 hier empfohlen werden muß. Bei der Berechnung von Turbomaschinen ergeben sich Aufgaben der erwähnten Art.

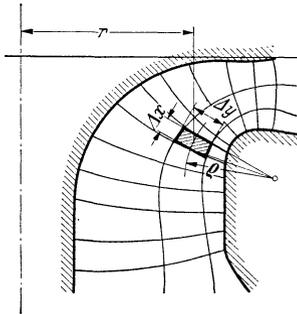


Abb. 65. Durchströmung eines Rotationshohlraumes.

ergeben sich Aufgaben der erwähnten Art.

22. Genauere mathematische Betrachtung.

Zu der Berechnung der Zentrifugalkräfte wird man einwenden können, daß bei der rotationssymmetrischen Strömung die äußere Fläche des betrachteten Teils aus geometrischen Gründen größer ist und demnach der äußere Druck auf eine größere Fläche wirkt. Die angegebene Berechnung nimmt davon anscheinend keine Notiz. Im Anschluß an eine allgemeine Betrachtung soll dies nachgeholt werden.

Im folgenden wollen wir gleich den Fall betrachten, wo die Außenfläche des betrachteten Elementes sich in der größtmöglichen Weise von der Innenfläche unterscheidet. Dazu behandeln wir eine rotationssymmetrische, d. h. eine räumliche Strömung, um einen Stromlinienkörper und wählen in der Strömung einen Bereich, in dem der Unterschied besonders auffällig ist. Der Krümmungsradius an dieser Stelle ist R , während in der Projektion der Radius r , d. h. der Abstand von der Rotationsachse, erkannt wird. Demnach wird das Teilchen von je zwei unter den Winkeln $\Delta\varphi$ und $\Delta\alpha$ ausgehenden Ebenen begrenzt, so daß eine abgeschnittene vierseitige Pyramide entsteht (Abb. 66).

Bei Betrachtung der Kräfte senkrecht zur Strömung wurde oben der Druckunterschied Δp in der Normalrichtung Δn auf die mittlere Fläche wirkend gedacht, d. h. auf $(R \cdot \Delta\varphi) (r \cdot \Delta\alpha)$. Wir wollen jetzt die Tatsache berücksichtigen, daß die Außenfläche größer als die innere Fläche ist. Es ist:

$$f = R \cdot \Delta\varphi \cdot r \cdot \Delta\alpha, \quad (\text{Fläche in der Mitte des Elementes})$$

$$f_i = \left(R - \frac{\Delta n}{2}\right) \times \Delta\varphi \left(r - \frac{\Delta n}{2} \cos \varphi\right) \Delta\alpha,$$

$$f_a = \left(R + \frac{\Delta n}{2}\right) \times \Delta\varphi \left(r + \frac{\Delta n}{2} \cos \varphi\right) \Delta\alpha.$$

Ist p_a der äußere und p_i der innere Druck, so ist die resultierende Kraftwirkung der Druckkräfte auf Außen- und Innenseite:

$$p_a \cdot f_a - p_i \cdot f_i.$$

Diese Kraft ist größer als $\Delta p \cdot f$.

Da alle vier Seitenflächen des Elementes nach dem jeweiligen Mittelpunkt hin gerichtet sind, schließen sie den Winkel $\Delta\varphi$ und $\Delta\alpha$ ein. Die Druckkräfte auf diese Seitenflächen müssen somit eine Komponente in der Normalrichtung haben. In Abb. 66 sind diese Kräfte und ihre Entstehung dargestellt. In der Normalrichtung ergeben sich demnach die Kräfte:

$$p \cdot \Delta n \cdot r \cdot \Delta\alpha \cdot \Delta\varphi \quad \text{und} \quad p \cdot \Delta n \cdot R \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\alpha \cdot \cos \varphi.$$

Somit erhalten wir folgenden Kraftüberschuß D_n in der Normalrichtung, wenn wir

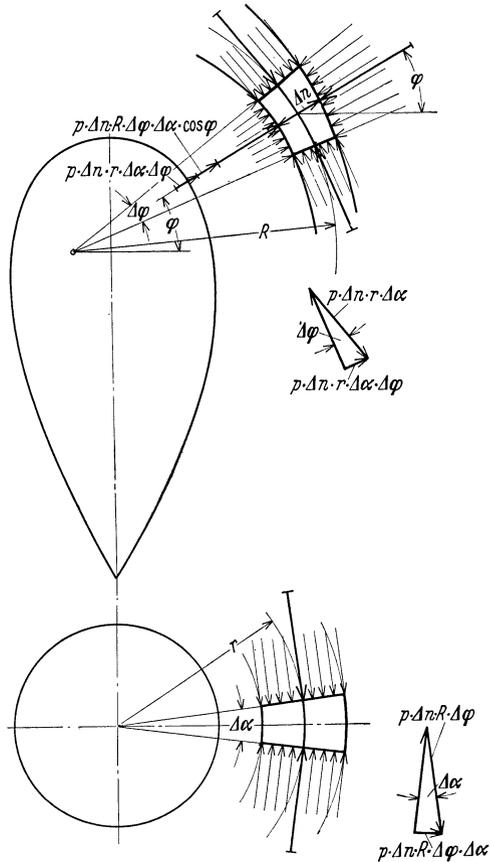


Abb. 66. Rotationssymmetrische Strömung um einen Rotationskörper. Veranschaulichung der auf ein Flüssigkeitselement wirkenden Querkräfte.

Kräfte nach dem Mittelpunkt hin positiv nennen:

$$\begin{aligned}
 D_n &= p_a \cdot f_a - p_i f_i - p \cdot \Delta n \cdot r \cdot \Delta \alpha \cdot \Delta \varphi - p \cdot \Delta n \cdot R \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \alpha \cdot \cos \varphi \\
 &= p_a \left(R + \frac{\Delta n}{2} \right) \Delta \varphi \left(r + \frac{\Delta n}{2} \cos \varphi \right) \Delta \alpha - p_i \left(R - \frac{\Delta n}{2} \right) \Delta \varphi \left(r - \frac{\Delta n}{2} \cos \varphi \right) \cdot \Delta \alpha \\
 &\quad - p \cdot \Delta n \cdot r \cdot \Delta \alpha \cdot \Delta \varphi - p \cdot \Delta n \cdot R \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \alpha \cdot \cos \varphi \\
 &= \Delta p \cdot R \cdot \Delta \varphi \cdot r \cdot \Delta \alpha + p \Delta \varphi \cdot \Delta \alpha \cdot R \cdot \Delta n \cdot \cos \varphi + p \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \alpha \cdot r \cdot \Delta n \\
 &\quad - p \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \alpha \cdot R \cdot \Delta n \cdot \cos \varphi - p \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \alpha \cdot r \cdot \Delta n = \Delta p \cdot R \cdot \Delta \varphi \cdot r \cdot \Delta \alpha \\
 &= \Delta p \cdot f.
 \end{aligned}$$

Bei der Rechnung wurde $p_a - p_i = \Delta p$, $p_a + p_i = 2p$ gesetzt, wobei höhere Glieder vernachlässigt wurden.

Das Ergebnis ist also das gleiche wie bei der früheren einfachen Berechnung. Die durch die äußere Fläche bedingte Kraftvergrößerung wird also durch die Komponenten der Seitenkräfte in Normalrichtung gerade aufgehoben.

Die weitere Rechnung ist dann mit S. 27 identisch. Insbesondere ergeben sich auch hier die Beziehungen $\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{c}{R} = 0$ und $\frac{\Delta p}{\Delta n} = \frac{\gamma}{g} \frac{c^2}{R}$. Damit können wir folgenden Satz aussprechen:

Die Geschwindigkeitsverteilung senkrecht zur Strömungsrichtung hängt von dem Verlauf der Krümmungsradien in dieser Richtung ab. Bei ebenen und räumlichen Problemen ergibt sich die gleiche Grundgleichung $\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{c}{R} = 0$.

23. Konstruktion von Strömungsbildern mit Hilfe der Stromfunktion.

Wir denken uns ein Stromlinienbild so entworfen, daß zwischen zwei Linien immer die gleiche Menge strömt. Diese sei $dQ = Q_2 - Q_1$. Ist c die Geschwindigkeit in Strömungsrichtung und dn die Breite der Stromröhre, so ist $dQ = c \cdot dn = Q_2 - Q_1$; hieraus folgt: $\frac{dQ}{dn} = c$. Die Gleichung $Q = \text{konst.}$ muß offenbar eine Stromlinie

ergeben, weil hier $\frac{dQ}{dn} = 0$ ist. Wir können uns z. B. in einem Koordinatensystem Gleichungen von der Form $Q = f(x; y)$ denken und erhalten für $Q = \text{konst.}$ eine Stromlinie. Statt Q benutzt man meist die Benennung ψ und spricht von der Stromfunktion. Schreibt man an die Stromlinien die Zahlenwerte von ψ , so kann man direkt erkennen, welche Mengen durch zwei benachbarte Stromlinien fließen. Bei Abb. 67 würde offenbar $\psi_n - \psi_{n-1} = 1$ durch jeden Querschnitt durchfließen. Es ist gleichgültig, an welcher Stelle man mit Null beginnt.

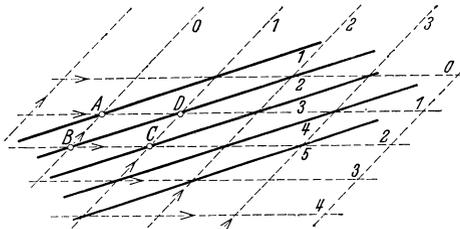


Abb. 67. Zusammensetzung zweier Parallelströmungen.

Auf S. 51 wurde gezeigt, daß man Strömungen überlagern kann. Die Stromfunktion bietet hier ein bequemes Hilfsmittel. Die Überlagerung zweier gerader Strömungen soll in Abb. 67 gezeigt werden.

Eine horizontale Bewegung wird dort von einer schrägerichteten geraden Strömung überlagert (gestrichelte Linien). Aus dem Abstand der Stromlinien erkennt man, daß die Geschwindigkeit der horizontalen Bewegung

größer ist, da die Zahlen in beiden Fällen die gleiche Bedeutung haben. Nun wollen wir dem Schnittpunkt der Geraden 2 und 3 die Zahl 5 zuschreiben, allgemein dem Schnittpunkt der Geraden a und b die Zahl $a + b$, und alle Punkte miteinander verbinden, die gleiche Ordnungszahl besitzen. So erhält man das neue Strömungsbild. Dies ist leicht zu durchschauen. Durch AB strömt z. B. die Menge 1 der Horizontalströmung, durch BC die Menge 1 der schrägen Strömung. Durch AC muß somit die Menge 2 strömen, so daß also die resultierende Strömung durch A und C Linien ergeben muß, die die Differenz 2 aufweisen. Die ausgezogenen Linien erfüllen tatsächlich diese Bedingungen. Dieses Verfahren gilt natürlich auch dann noch, wenn die beiden Strömungen gekrümmte Stromlinien aufweisen, da bei jeder Strömung ein so kleiner Ausschnitt gewählt werden kann, daß sich näherungsweise gerade Stromlinien ergeben. Man erhält somit folgende Regel:

Sollen zwei Strömungen zusammengesetzt werden, so zeichnet man für jede das Stromlinienbild und ordnet die Aufeinanderfolge der Stromlinien so an, daß die Einheit des Zahlenunterschiedes der ihnen zugerechneten Zahlen der gleichen durchströmenden Menge entspricht. Es ist gleichgültig, mit welcher Zahl man irgendwo beginnt. Dann legt man beide Strömungsbilder aufeinander und schreibt an die Schnittpunkte die Zahlen an, die der algebraischen Summe der Ordnungszahlen der beiden Schnittpunkte entsprechen. Verbindet man dann die Punkte mit gleichen Zahlen, so erhält man das Strömungsbild der kombinierten Strömung.

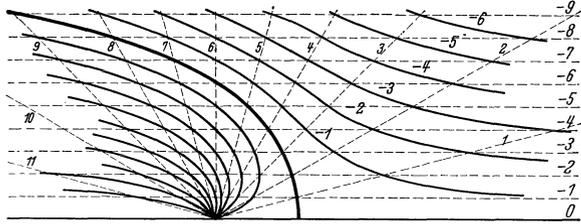


Abb. 68. Umströmung eines nach hinten offenen Hohlkörpers. Ermittlung der Stromlinien aus Quelle + Parallelströmung.

Für eine Reihe wichtiger Fälle läßt sich so in überaus einfacher Weise das Strömungsbild zeichnen. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Einzelströmungen geometrisch einfache Stromlinien besitzen.

Quelle und Parallelströmung. Beide Einzelströmungen bestehen hier aus geraden Linien. In Abb. 68 ist diese Konstruktion durchgeführt. Wir erhalten im einzelnen ganz das Bild, das bereits in Abb. 50 grundsätzlich erkannt war. Ersetzen wir die Stromlinie 0 durch eine feste Wand, so ergibt sich die parallele Anströmung eines nach hinten geöffneten Körpers. Auch die Gleichung der Stromlinien läßt sich leicht ermitteln. Aus $\frac{\partial \psi}{\partial n} = c$ erhalten wir für die Parallelströmung

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = c = \text{konst.}$; hieraus $\psi = c \cdot y$. Für die Quelle ergibt sich nach früherem (S. 38), $c = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{Q}{2 r \pi}$ (du Element in Umfangsrichtung des Kreises).

$$\psi = \int \frac{Q}{2 r \pi} du = \frac{Q \cdot u}{2 r \pi}; \text{ da } u = r \cdot \varphi \text{ ist, erhält man } \psi = \frac{Q}{2 \pi} \cdot \varphi = \frac{Q}{2 \pi} \text{ arc tg } \frac{y}{x}.$$

Dies konnte auch direkt gewonnen werden, da die Linien $\varphi = \text{konst.}$ die Stromlinien der Quelle sind.

Die Überlagerung ergibt: $\psi = \psi_1 + \psi_2 = c \cdot y + \frac{Q}{2 \pi} \text{ arc tg } \frac{y}{x}$; setzt man für ψ nacheinander Zahlenwerte 1, 2, 3, 4 ... ein, so erhält man analytisch die

Gleichungen der Stromlinien. In einem weiteren Beispiel (Abb. 69) ist die Umströmung eines Zylinders aus der Überlagerung von Doppelquelle und Parallelströmung dargestellt.

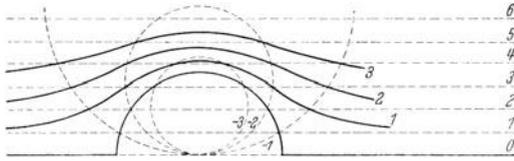


Abb. 69. Umströmung eines Kreiszyllinders, entstanden aus der Zusammensetzung von Doppelquelle und Parallelströmung.

experimentelle Methoden zur Gewinnung der reibungsfreien Strömung verwenden. Wie zuerst Hele-Shaw¹ zeigte, stellt sich rein äußerlich das Bild der reibungsfreien Strömung ein, wenn man zwischen zwei enggestellten parallelen Platten irgendwelche Körper umströmen läßt. Die Sichtbarmachung wird dabei durch Farbfäden erzielt, die vor dem Versuchskörper durch Düsen eingeführt werden. Die Strömung ist natürlich

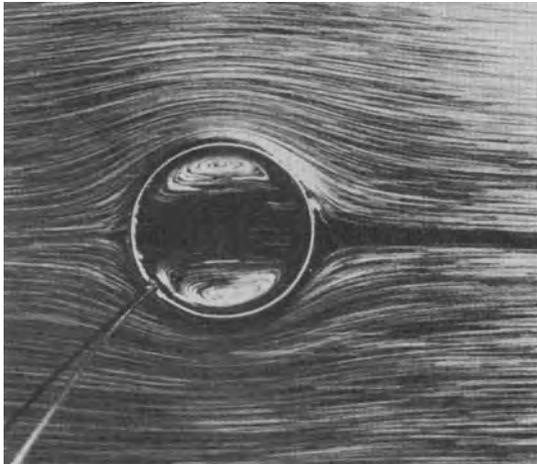


Abb. 70. Zylinderströmung mit Doppelquelle im Innern des als Versuchskörper verwendeten Drahttringes.

vollkommen laminar, so daß die Trägheitskräfte ganz vernachlässigt werden können. In diesem Falle gilt die später abgeleitete Gl. (80), die besagt, daß die Geschwindigkeit proportional dem Druckgefälle in der Richtung der Geschwindigkeit ist. Damit ergibt sich für den Druck eine ähnliche Bedeutung wie für das frühere Potential. Das ist aber entscheidend für das Auftreten der

24. Experimentelle Darstellung der reibungsfreien Strömung.

In vielen Fällen kann man mit Nutzen rein ex-

perimentelle Methoden zur Gewinnung der reibungsfreien Strömung verwenden. Wie zuerst Hele-Shaw¹ zeigte, stellt sich rein äußerlich das Bild der reibungsfreien Strömung ein, wenn man zwischen zwei enggestellten parallelen Platten irgendwelche Körper umströmen läßt. Die Sichtbarmachung wird dabei durch Farbfäden erzielt, die vor dem Versuchskörper durch Düsen eingeführt werden. Die Strömung ist natürlich vollkommen laminar, so daß die Trägheitskräfte ganz vernachlässigt werden können. In diesem Falle gilt die später abgeleitete Gl. (80), die besagt, daß die Geschwindigkeit proportional dem Druckgefälle in der Richtung der Geschwindigkeit ist. Damit ergibt sich für den Druck eine ähnliche Bedeutung wie für das frühere Potential. Das ist aber entscheidend für das Auftreten der

Bewegungsform der reibungsfreien Strömung. Stokes² wies zuerst auf diese Tatsache hin und erbrachte den strengen mathematischen Beweis.

In einfacherer Weise wird nach dem Verfasser dasselbe erreicht, wenn statt der Strömung zwischen zwei Platten eine offene, mit einer gerade

¹ Hele-Shaw: Experiments of the Nature of Surface Resistance. Inst. Nav.-Ar. 29, 145, 1892.

² Stokes, G. G.: Mathematical Proof of the Identity of the Stream Lines Obtained by Means of a Viscous Film with those of a Perfect Fluid Moving in two Dimensions. Rep. of The Brit. An. 143, 1898.

noch zusammenhängenden Flüssigkeitsschicht benetzte Platte benutzt wird (D. R. P.). Die Oberfläche wird mit Aluminiumpulver, Bärlappsaamen od. dgl. bestreut, während die Versuchskörper (einfache Draht- oder Blechstücke) langsam durch die Flüssigkeitsschicht geschleppt werden. Nach dieser Methode sind die folgenden Bilder entstanden. Die Umströmung eines Zylinders (Abb. 70) zeigt deutlich, wie die Stromlinien hinten wieder zusammenkommen und ein symmetrisches Bild ergeben. Interessant ist, daß im Innern des als Ring ausgebildeten Versuchskörpers auch die Doppelquelle entsteht. Da diese Strömung nach S. 57 durch Überlagerung einer Parallelströmung mit einer Doppelquelle entsteht, muß letztere in Reinkultur erscheinen, wenn man die Geschwindigkeit der Parallelströmung abzieht, d. h. wenn die Kamera stillsteht, während der Zylinder sich bewegt. Tatsächlich kommen hierbei die beiden Kreisbüschelder Doppelquelle zum Vorschein (Abb. 71).

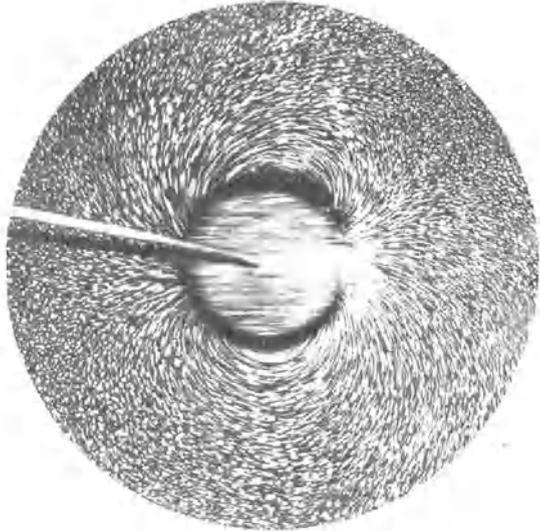


Abb. 71. Zwei Kreisbüschel (Doppelquelle) stellen die Absolutströmung der reibungsfreien Umströmung eines Kreiszyllinders dar.

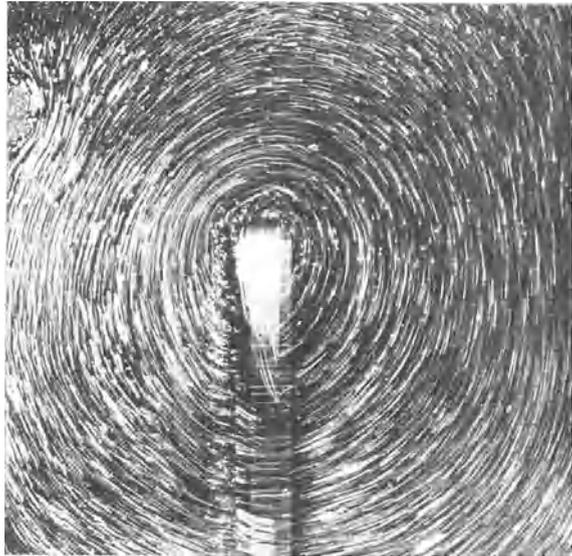


Abb. 72. Umströmung einer scharfen Zacke. Absolutstromlinien der reibungsfreien Strömung.

Diese Stromlinien nennt man die Absolutstromlinien.

Sehr eindrucksvoll ist das Umströmen einer scharfen Kante nach Abb. 72. Es findet tatsächlich die Umströmung statt, wie es nach der

reibungslosen Strömung zu erwarten ist. Beim Versuch der Abb. 72 wurde eine besonders lange Platte (d. h. Draht) verwendet, die die halbe untere Platte versperrte. Es zeigte sich, daß die Strömung der halben Platte mustergültig um die Platte ging. Auch die Umströmung einer ganzen Platte, bestehend aus einer Nadel (Abb. 73), läßt deutlich die mustergültige Umströmung beider scharfen Kanten erkennen. Im Bilde wird das Absolutstromlinienbild gezeigt. Weitere Beispiele dieser Methode finden sich im Kapitel „Tragflügel“.

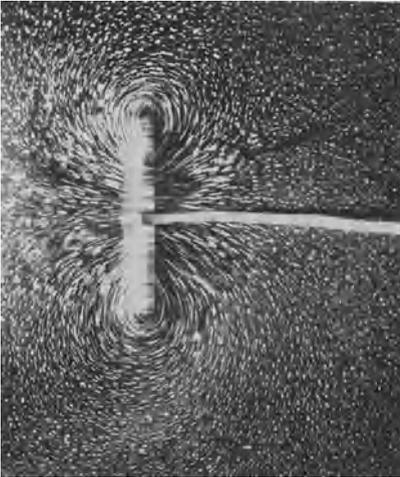


Abb. 73. Absolutstromlinie bei der Plattenströmung.

der reibungsfreien Strömung. Wenn man in einer offenen Wanne einen Versuchskörper schnell hin- und herbewegt — Bjerknes machte seine Versuche hauptsächlich mit Kugeln — so sind die Wege der Flüssigkeitsteilchen an den Körperwandungen so kurz, daß keine Ablösung eintritt. Es zeigt sich das Bild der reibungsfreien Strömung, die durch Aufstreuen von Aluminiumpulver leicht sichtbar gemacht werden kann.

Prášil² hat bereits früher ein Verfahren angegeben, daß dem des Verfassers sehr ähnlich ist. Bei einer mit einer dünnen Flüssigkeitsschicht belegten Platten wird durch Öffnungen Flüssigkeit zu- bzw. abgeführt. Auf diese Weise entstehen sehr schöne Bilder von Quellen- und Senkenströmungen. Für umströmte Körper ist das Verfahren nicht geeignet, weil es nicht gelingt, in der offenen dünnen Flüssigkeitsschicht so starke Druckunterschiede zu erzeugen, wie sie hier notwendig sind. Beim Schleppverfahren des Verfassers fallen diese Schwierigkeiten weg.

25. Impulssatz.

a) Ableitung.

Die Anwendung des Trägheitssatzes $P = m \cdot b$ in Form des sog. Impulssatzes bzw. des Schwerpunktsatzes ist aus der Mechanik der festen Körper besonders für die Fälle geläufig, wo Anfangs- und Endgeschwindigkeit bekannt sind, der Zwischenverlauf jedoch nicht übersehen werden

¹ Bjerknes: Die Kraftfelder. Braunschweig 1909.

² Prášil: Technische Hydrodynamik. Berlin: Springer 1926.

kann. Die Gleichung $P = m \frac{dw}{dt}$ wird dann in der Schreibweise $P \cdot dt = m \cdot dw$ verwandt. Die Summation vom Anfangs- bis zum Endzustand ergibt

$$\int_1^2 P dt = m (w_2 - w_1).$$

Da alle inneren Kräfte nach dem Prinzip von Aktion und Reaktion herausfallen, kann aus evtl. bekannten Zuständen an bestimmten Grenzen wertvoller Aufschluß gewonnen werden.

Die Anwendung dieses Satzes in der Strömungslehre verlangt einige kleine Umformungen.

Betrachten wir den Stromfaden einer Strömung, so ist die den Zustand charakterisierende Größe nicht irgendeine Einzelmasse, sondern die durch den Querschnitt sekundlich fließende Menge. Wir wollen anstreben, diese charakteristische Größe bei der Anwendung des Trägheitssatzes zu erhalten. Diese sei für irgendeinen Stromlinienquerschnitt q ; dann ist das in der Zeit dt einströmende Massenteilchen $m = q \cdot dt$. Hiermit lautet die Newtonsche Gleichung:

$$P = m \frac{dw}{dt} = \frac{m}{dt} \cdot dw = q \cdot dw. \quad (66)$$

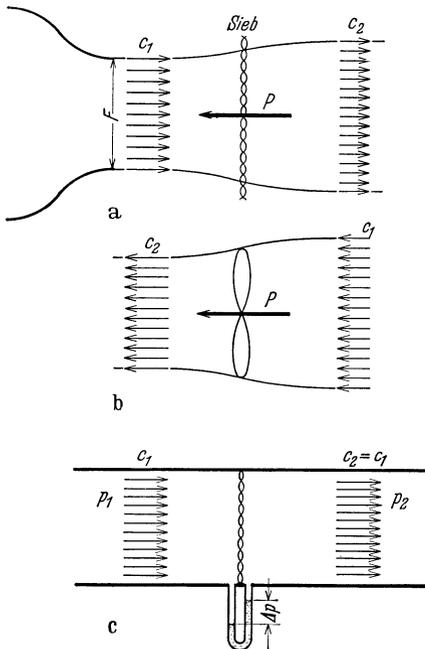


Abb. 74. Kraftwirkungen auf einen Luftstrahl:
 a) durch Sieb,
 b) durch Propeller,
 c) durch Sieb in einem Rohr.

Die Gleichung besagt, daß ein Flüssigkeitsstrom q , der infolge irgendeiner Ursache eine Geschwindigkeitsänderung dw erfährt, von einer äußeren Kraft beeinflusst wird, die die Größe $q \cdot dw$ hat. Die äußere Kraft hat die gleiche Richtung wie dw .

Relativ einfach sind die Anwendungen dieses Satzes, wenn ein einheitlicher Flüssigkeitsstrom Geschwindigkeitsänderungen erfährt. Typische Anwendungsbeispiele sollen dies zeigen.

In Abb. 74a wird der Luftstrom eines kleinen Windkanals durch ein Sieb gebremst. Dadurch wird die Luftgeschwindigkeit von c_1 auf c_2 vermindert. Gleichzeitig muß der Strahl sich aus Gründen der Kontinuität verbreitern. Die vom Sieb auf den Luftstrahl ausgeübte Kraft, d. h.

die äußere Kraft, beträgt nach dem eben abgeleiteten Satz $P = q(c_1 - c_2)$. In Abb. 74 b wird ein gleich starker Luftstrahl durch einen Propeller von c_1 auf c_2 beschleunigt. Die vom Propeller ausgeübte Kraft muß genau so groß sein wie vorhin beim Sieb, wenn Geschwindigkeiten und Luftmenge gleich sind und die Vorzeichen vertauscht werden, d. h. $P = q \cdot (c_2 - c_1)$. Hier findet eine Einschnürung des Strahles statt. Zum Unterschied ist noch drittens ein gleiches Sieb in eine Rohrleitung eingesetzt, Abb. 74 c. Hier kann aus Gründen der Kontinuität keine Geschwindigkeitsänderung stattfinden. Infolgedessen ist mit dem Impulssatz hier nichts anzufangen. Ist Δp der durch das Sieb bewirkte Druckunterschied, so wird auf das Sieb die Kraft $f \cdot \Delta p = f \cdot (p_1 - p_2)$ ausgeübt.

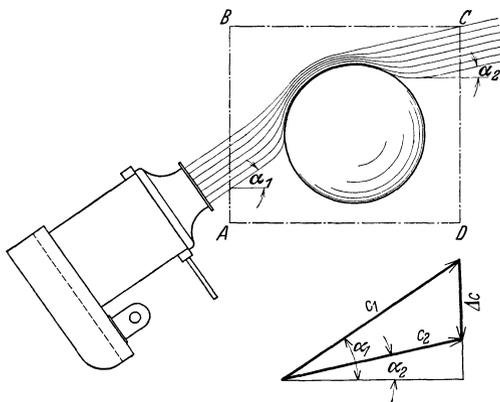


Abb. 75. Kugel schwebend im schrägen Luftstrahl. Berechnung der Strahlablenkung nach dem Impulssatz.

halten werden. Sehr schön läßt sich dieser Versuch mit einem schwenkbaren Windkanal und einem großen Gummiball ausführen. Man stellt dabei fest, daß die Kugel nach Abb. 75 im Strahl hängt. Nach dem Impulssatz ist der „Auftrieb“ leicht zu erklären.

Beispiel. Der im schrägen Luftstrahl hängende Ball übt nach Abb. 75 auf den Strahl lediglich die Kraft seines Gewichtes G aus, das senkrecht nach unten, d. h. negativ, wirkt. Somit gilt:

$$-G = q(c_2 \cdot \sin \alpha_2 - c_1 \cdot \sin \alpha_1).$$

Mit $c_1 \cos \alpha_1 = c_2 \cos \alpha_2$ wird: $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{c_1 \cdot \sin \alpha_1 - G/q}{c_1 \cdot \cos \alpha_1}$. Bei $G = 0,2 \text{ kg}$; $w = 15 \text{ m/s}$; $f_{\text{Strahl}} = \pi/4 \cdot 14^2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ und $\alpha_1 = 45^\circ$ ergibt sich ein $\alpha_2 = 19^\circ 11'$; d. h. eine Ablenkung des Strahles um $\Delta \alpha = 25^\circ 49'$.

Nach den gleichen Methoden läßt sich der Strahlendruck berechnen, der bei Ablenkung eines Strahles von einer geraden oder gebogenen Fläche ausgeübt wird. Abb. 76 zeigt drei typische Fälle, für die die Ergebnisse gleich in den Abbildungen eingetragen sind.

Etwas mehr Nachdenken erfordern schon die Fälle, in denen die Geschwindigkeitsänderung nicht in Richtung der Hauptströmung auftritt. Das folgende Beispiel macht mit einer anschaulichen Anwendung bekannt.

b) Die Kugel im schrägen Luftstrahl.

Eine Kugel kann bei geeignetem Gewicht von einem schrägen Luftstrahl in Schwebelage gehalten werden.

c) Ablenkung eines Strahles durch eine Schneide.

Ein senkrecht nach unten fließender Strahl werde mit einer scharfen Schneide leicht berührt. Man beobachtet eine plötzliche Ablenkung des Strahles um den Winkel α (Abb. 77)¹. (Anwendung: Strahlableiter der Pelton turbine und Escher-Wyß-Strahlregler²).

Sieht man genau zu, so erkennt man, daß von der Schneide etwas

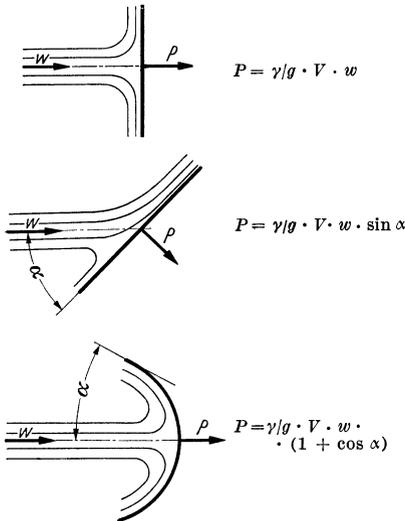


Abb. 76. Umlenkung eines freien Strahles durch Flächen. V [m³/s].

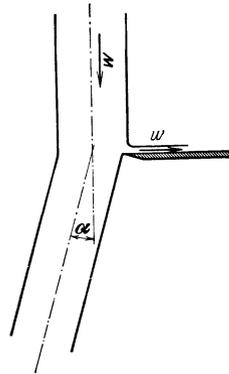


Abb. 77. Ablenkung eines Strahles durch eine scharfe Schneide.

Wasser aufgefangen und nach rechts abgelenkt wird. Hierzu ist eine nach rechts gerichtete Kraft notwendig, deren Reaktionskraft den Strahl etwas ablenkt, da die Schneide selbst keine Kraft in dieser Richtung übertragen kann. Somit sind nur innere Kräfte in der x -Richtung vorhanden, d. h. der Impuls des unter α abbiegenden Strahles in der x -Richtung muß gleich dem entgegengesetzten gleichen Impuls des durch die Schneide rechtwinklig abgelenkten Strahles sein. Es ist

$$q_1 \cdot w \cdot \sin \alpha = q_2 \cdot w,$$

wenn q_1 und q_2 die durch die Schneide getrennten Teilmengen von $q = q_1 + q_2$ sind. Der Ablenkungswinkel ergibt sich aus

$$\sin \alpha = \frac{q_2 \cdot w}{q_1 \cdot w} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{q_2}{q - q_2} = \frac{q_2}{q} \frac{1}{1 - \frac{q_2}{q}}.$$

Wird z. B. $\frac{1}{10}$ der Gesamtmenge durch die Schneide abgelenkt, so erhält man bereits einen Ablenkungswinkel von $\alpha = 6,5^\circ$.

d) Wirkung eines Schaufelgitters.

Durch ein unendlich langes Schaufelgitter werde eine von links (Abb. 78) unter dem Winkel α_1 und mit der Geschwindigkeit c_1 kommende Strömung so abgelenkt,

¹ Sehr schön läßt sich die Wirkung auch mit einem senkrecht nach oben bläsenden Windkanal zeigen. Ein im Luftstrahl freischwebender Ball weicht sofort nach der Seite aus, wenn man mit der Handkante den Luftstrahl berührt.

² Escher-Wyß: Mitteilungen 1932, Nr. 1/2, S. 19.

daß die Austrittsgeschwindigkeit c_2 den Winkel α_2 aufweist. Die Schaufelzahl sei zunächst unendlich groß, so daß α_1 und α_2 gleichzeitig mit den Schaufelwinkeln übereinstimmen (stoßfreier Ein- und Austritt vorausgesetzt). Im folgenden wollen wir die im Turbinenbau üblichen Bezeichnungen anwenden. Die Kontinuität ergibt zunächst

$$c_m = c_1 \cdot \cos \alpha_1 = c_2 \cdot \cos \alpha_2,$$

wie aus den Geschwindigkeitsdreiecken von Abb. 78 ersichtlich ist. Die Ausdehnung des Gitters senkrecht zur Zeichenebene werde mit b bezeichnet.

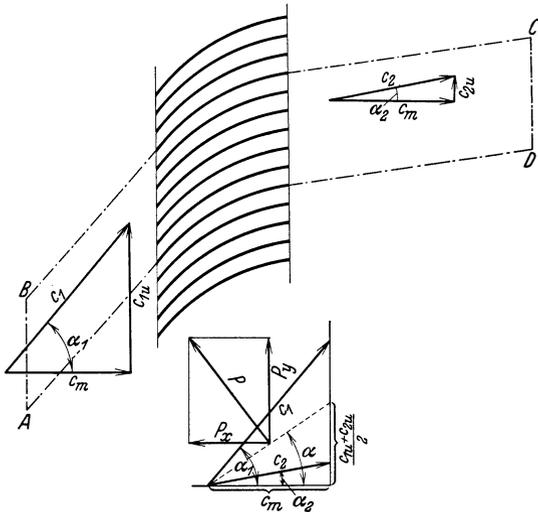


Abb. 78. Ablenkung einer Strömung durch ein Gitter mit unendlicher Schaufelzahl. Kraftwirkung auf das Gitter.

dem Gitterstück von der Länge a und der Gittertiefe b (senkrecht zur Zeichenebene) entspricht.

$$\begin{aligned} P_{ya} &= J_{CD} - J_{AB} = b \cdot a \rho c_2 \cos \alpha_2 \cdot [c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1] \\ P_{ya} &= b \cdot a \cdot \rho \cdot c_m (c_{2u} - c_{1u}), \end{aligned}$$

wo die Komponenten von c in Gitterrichtung mit c_u bezeichnet werden. Auf die Gitterlänge l ergibt sich somit

$$P_y = b \rho c_m (c_{2u} - c_{1u}). \quad (67)$$

Die Kraft in Gitterrichtung hängt somit nur von der Differenz der Geschwindigkeitskomponenten in dieser Richtung vor und hinter dem Gitter ab.

Senkrecht zum Gitter ist noch ein Druckunterschied vorhanden, der nach der Bernoullischen Gleichung leicht berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 &= p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 \\ p_1 - p_2 &= \frac{\rho}{2} (c_2^2 - c_1^2) = \frac{\rho}{2} [(c_{2m}^2 + c_{2u}^2) - (c_{1m}^2 + c_{1u}^2)] \\ &= \frac{\rho}{2} (c_{2u}^2 - c_{1u}^2) \end{aligned}$$

Für die Anwendung des Impulssatzes grenzen wir den Bereich $ABCD$ ab. BC und AD sind Stromlinien. Durch diese tritt somit kein Impuls, da keine Menge durchströmt. Der Abstand der beiden Stromlinien in Richtung der Gitterachse sei $a = AB$. Es soll der Impuls in Richtung der Gitterachse berechnet werden. Durch AB tritt der Impuls

$$J_{AB} = b \cdot a \cdot c_1 \cos \alpha_1 \cdot c_1 \times \sin \alpha_1 \cdot \rho$$

und durch CD

$$J_{CD} = b \cdot a \cdot c_2 \cos \alpha_2 \times c_2 \sin \alpha_2 \cdot \rho.$$

Die Differenz ergibt die Kraft in Gitterrichtung, die

Erweitern wir mit $b \cdot 1$, so erhalten wir dieselbe Bezugsfläche wie bei P_y :

$$P_x = b \cdot 1 (p_1 - p_2) = \frac{b \cdot \rho}{2} (c_{2u}^2 - c_{1u}^2) .$$

Um die Richtung der Resultierenden zu erhalten, bilden wir

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{b \cdot \rho \cdot c_m \cdot (c_{2u} - c_{1u})}{b \cdot \frac{\rho}{2} (c_{2u}^2 - c_{1u}^2)} = \frac{c_m}{\frac{c_{1u} + c_{2u}}{2}} = \operatorname{ctg} \alpha . \quad (68)$$

Die Konstruktion von $\frac{P_y}{P_x}$ geht aus Abb. 78 hervor. Man erkennt, daß die Resultierende senkrecht auf der Richtung von α stehen muß. Wir erhalten somit den Satz:

Wird durch ein unendlich langes Gitter die Strömungsrichtung vom Winkel α_1 nach dem Winkel α_2 abgelenkt, so übt die Flüssigkeit auf das Gitter eine Kraft aus, die senkrecht auf einer mittleren Richtung steht, die aus der Meridianschwindigkeit und aus der mittleren Komponente in Gitterrichtung gebildet wird.

Wenn wir nunmehr das Gitter auseinanderrücken, d. h. einen endlichen Abstand t zwischen den Schaufeln lassen, so werden die Schaufelwinkel α_1' und α_2' nicht mehr mit den Strömungsrichtungen α_1 und α_2 identisch sein. Sollen die früheren Winkel α_1 und α_2 erhalten bleiben, so werden dafür die Schaufelwinkel

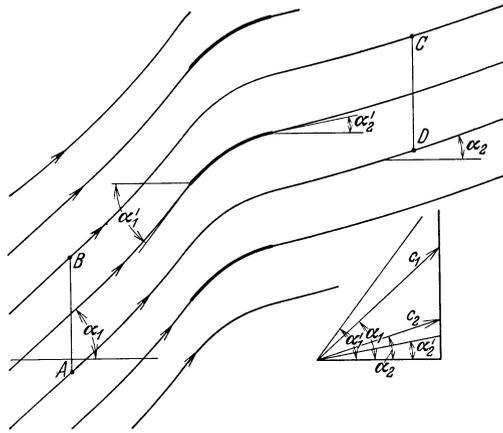


Abb. 79. Gitter mit endlicher Schaufelzahl. Veranschaulichung der charakteristischen Winkel.

aufgebogen werden müssen, d. h. $\alpha_1' > \alpha_1$ und $\alpha_2' < \alpha_2$ (Abb. 79). Man spricht hier von Winkelübertreibung, die erstmalig von Blasius¹ im Jahre 1911 durch funktionentheoretische Betrachtungen gefunden wurde. Es leuchtet ein, daß in hinreichender Entfernung vom Gitter für alle Stromfäden gleiche Winkel α_1 und α_2 vorhanden sein müssen. Dort wollen wir unsere Kontrollfläche hinlegen. Im übrigen werden wir wieder der Einfachheit halber zwei Stromlinien BC und AD nehmen, da durch sie ja kein Impuls treten kann. AB sei identisch mit der Schaufelteilung t , sodaß wir die Kraft für nur eine Schaufel durch die folgende Rechnung erhalten: (Für die genauere Konstruktion von Schaufelgittern sei u. a. auf Betz², Weinig³, sowie eine neuere Arbeit von Ackeret⁴ verwiesen.)

Wählen wir dieses t gleich dem Werte a der vorigen Rechnung, so ändert sich

¹ Blasius: Physik. Z. 1911, S. 1177—79.

² Betz: Ing.-Arch. 1939, S. 359.

³ Weinig: Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. Leipzig 1935.

⁴ Ackeret: Schweiz. Bauztg. 1942, S. 103.

an der ganzen Rechnung nichts. Es ist

$$P_{yt} = t \cdot b \cdot \varrho \cdot c_m (c_{2u} - c_{1u})$$

$$P_{xt} = t \cdot b \cdot \frac{\varrho}{2} (c_{2u}^2 - c_{1u}^2) = t \cdot b \cdot \varrho \frac{c_{1u} + c_{2u}}{2} (c_{2u} - c_{1u}).$$

Da die Ausgleichung der Stromfäden theoretisch erst im Unendlichen erzielt wird, wollen wir die mittlere Geschwindigkeit c_∞ nennen in Übereinstimmung mit den im Turbinenbau üblichen Bezeichnungen.

Der obige Satz braucht jetzt nur so abgeändert zu werden, daß als Geschwindigkeiten und Richtungen diejenigen gewählt werden, die der bereits ausgeglichenen Strömung entsprechen.

Der aufmerksame Leser wird schon gemerkt haben, daß es für die Anwendbarkeit des Impulssatzes gleichgültig ist, mit welchen Mitteln die Umlenkung von α_1 nach α_2 erfolgt. Das beschauelte Gitter sollte nur unsere Vorstellung erleichtern, in der Rechnung kommt seine konstruktive Ausbildung nicht vor. Besonders bei dem letzten Beispiel tritt dies deutlich in Erscheinung. Lediglich auf den Anfangs- und Endzustand kommt es an, nicht auf den Zwischenzustand.

Diese Bemerkungen sind von Nutzen, wenn man anschließend zu einem Gitter übergeht, das sich in Gitterrichtung mit der Geschwindigkeit u bewegt. Wenn durch dieses Gitter irgendwie erreicht wird, daß die Geschwindigkeit weit vor dem Gitter c_1 mit dem Winkel α_1 und weit hinter dem Gitter c_2 mit dem Winkel α_2 ist, so folgt für die Kraft in Gitterrichtung dasselbe wie vorhin, nämlich:

$$P_y = \varrho \cdot b \cdot c_m (c_{2u} - c_{1u}).$$

Das Gitter leistet aber jetzt eine Arbeit. Diese Leistung ist

$$L = P_y \cdot u = b \cdot \varrho \cdot c_m \cdot u (c_{2u} - c_{1u}). \quad (69)$$

Bezeichnen wir die der Flüssigkeit je kg erteilte Leistung als Druckhöhe H , so ist: $b \cdot \gamma \cdot c_m \cdot l$ das in der Sekunde durch die Breite l geförderte Gewicht und somit

$$L = H \cdot b \cdot \gamma \cdot c_m = b \cdot \varrho \cdot c_m \cdot u (c_{2u} - c_{1u}),$$

$$\text{d. h.} \quad H = \frac{1}{g} \cdot u [c_{2u} - c_{1u}]. \quad (70)$$

Dies ist bereits die Turbinengleichung für ein gerades Gitter, die S. 48 bereits auf andere Weise abgeleitet wurde. Für die Berechnung aller propellerartigen Kreisräder ist diese Gleichung ebenso wie die Behandlung des Gitters die Grundlage.

e) Berechnung des Stoßverlustes.

Durch ein unendlich langes Gitter werde eine Strömung plötzlich von der Richtung α_1 nach α_2 abgelenkt (Abb. 80). Die stoßförmige plötzliche Umlenkung bedingt Energieverluste, die mit Hilfe des Impulssatzes berechnet werden können.

Der Bereich $ABCDEF$ werde für die Impulsbetrachtung herangezogen. Da AFE und BCD Stromlinien sind, kann durch diese Grenzen kein Impuls übertragen werden. Wir berechnen die Impulsänderung in Richtung α_2 . Die Kontinuität erfordert

$$c_1 \sin \alpha_1 = c_2 \sin \alpha_2.$$

Durch die Breite $AB = b$ strömt in der Sekunde die Masse:

$$q = \varrho \cdot b \cdot c_1 \sin \alpha_1 = \varrho \cdot b \cdot c_2 \cdot \sin \alpha_2.$$

Die Impulsänderung in Richtung α_2 (hier Impulsverminderung) beträgt:

$$q \cdot (c_1 \cdot \cos \delta - c_2) = \rho b c_2 \sin \alpha_2 (c_1 \cdot \cos \delta - c_2).$$

Äußere Kräfte auf das Gitter können nur durch Änderung des Druckes erfolgen. Da die Drücke auf die Stromlinien AFE und BCD sich gegenseitig aufheben, spielen nur die Drücke auf AB und ED eine Rolle. In der zu α_2 senkrechten Richtung ergibt AB

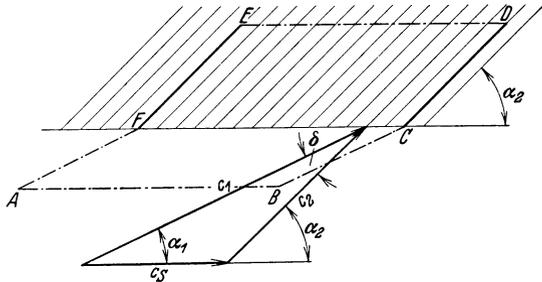


Abb. 80. Plötzliche Richtungsänderung einer Parallelströmung durch dichtstehendes Schaufelgitter.

eine Breite $b \cdot \sin \alpha_2$, so daß ein evtl. Druckunterschied Δp zwischen AB und ED eine Kraft in Richtung α_2 von der Größe $\Delta p \cdot b \cdot \sin \alpha_2$ ergibt. Wir setzen diese äußere Kraft gleich der Impulsdifferenz und erhalten

$$\rho \cdot b \cdot c_2 \cdot \sin \alpha_2 [c_1 \cdot \cos \delta - c_2] = \Delta p \cdot b \cdot \sin \alpha_2;$$

$$p_2 - p_1 = \Delta p = \rho \cdot c_2 [c_1 \cdot \cos \delta - c_2].$$

Nach dem Bernoullischen Satz, d. h. bei verlustfreiem Umsatz, würde sich ein Druckunterschied $\Delta p'$ ergeben: $\Delta p' = \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_2^2)$; somit entsteht ein Verlust von

$$\Delta p' - \Delta p = \frac{\rho}{2} c_1^2 - \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho \cdot c_2^2 - \rho \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \cos \delta;$$

$$\Delta p_{\text{Verl.}} = \frac{\rho}{2} [c_1^2 + c_2^2 - 2 c_1 c_2 \cos \delta] = \frac{\rho}{2} c_s^2. \quad (71)$$

Wir finden: Der bei plötzlicher Umlenkung auftretende Stoßverlust ist gleich der Geschwindigkeitshöhe der aus der geometrischen Differenz sich ergebenden Geschwindigkeit. Der Druckverlust ist also immer gleich der Geschwindigkeitshöhe der Geschwindigkeitsdifferenz!

Wenn die Schaufeln des Gitters eine endliche Teilung haben, findet eine so plötzliche Geschwindigkeitsabnahme, wie sie der Rechnung zu Grunde gelegt wurde, nicht mehr statt. An der Eintrittskante bildet sich eine Ablösung und eine damit verbundene Einschnürung des Strahles, die einen plötzlichen Übergang von α_1 nach α_2 verhindert. Der Verlust wird also bei endlicher Teilung kleiner sein. Man berücksichtigt dies durch einen Stoßkoeffizienten φ nach der Gleichung:

$$\Delta p_{\text{Verl.}} = \varphi \cdot \frac{\rho}{2} c_s^2. \quad (72)$$

Bei Kreiselmaschinen spielen diese Dinge eine große Rolle. Die aus

diesem Gebiet stammenden Erfahrungswerte für φ liegen je nach Teilung zwischen $0,5 \div 0,85$.

Der durch un stetige Querschnittsänderung eintretende Stoßverlust ist durch den Impulssatz ebenfalls leicht zu erfassen. Eine Düse

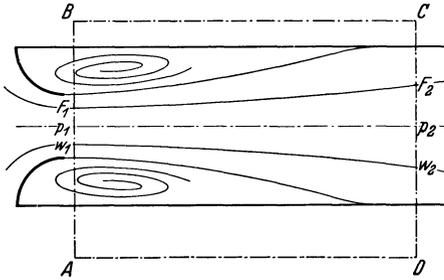


Abb. 81. Einströmung in eine Rohrleitung durch Düse.

mit dem Querschnitt F_1 sei einer Rohrleitung vom Querschnitt F_2 aufgesetzt (Abb. 81). Auf die Kontrollfläche $ABCD$ werde der Impulssatz angewandt. CD sei dort gewählt, wo die Strömung wieder den ganzen Querschnitt ausfüllt.

Aus der Stetigkeitsgleichung folgt: $\rho \cdot F_2 \cdot c_2 = \rho \cdot F_1 \cdot c_1$.

Durch AB eintretender Impuls: $(\rho \cdot F_2 \cdot c_2) \cdot c_1$.

Durch CD austretender Impuls: $(\rho F_2 c_2) \cdot c_2$.

Impulsdifferenz (hier Impulsverminderung): $\rho \cdot F_2 \cdot c_2 (c_1 - c_2)$.

Resultierende Druckkraft auf Kontrollfläche $ABCD$: $(p_2 - p_1) F_2$.

Die Gleichsetzung von Impulsdifferenz und Druckkraft ergibt:

$$\rho \cdot F_2 \cdot c_2 (c_1 - c_2) = (p_2 - p_1) F_2; \quad p_2 - p_1 = \rho \cdot c_2 (c_1 - c_2).$$

Nach dem Bernoullischen Satz würde sich bei verlustfreiem Umsatz ergeben:

$$p_2' - p_1 = \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_2^2).$$

Die Differenz beider ist der auftretende Druckverlust¹

$$\Delta p_{\text{Verl.}} = (p_2' - p_1) - (p_2 - p_1) = \frac{\rho}{2} (c_1 - c_2)^2. \quad (73)$$

Der vorhin gefundene Satz, daß für den Druckverlust die Geschwindigkeitshöhe der Geschwindigkeitsdifferenz maßgebend ist, findet somit eine nochmalige Bestätigung.

f) Anwendung des Impulssatzes bei beliebigen freien Strömungen.

Bei den behandelten Beispielen handelte es sich immer um mehr oder weniger geschlossene Flüssigkeitsströme, die die gleiche Geschwindigkeit hatten. In diesen Fällen führt die einfache Form der Gl. (66) sehr schnell zum Ziel. Viel schwieriger sind die Fälle, in denen der Impulssatz auf einen beliebigen Strömungsbereich angewendet wird, wo Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung sich von Punkt zu Punkt ändern.

¹ Vernachlässigt werden lediglich die durch Reibungsverluste zu erwartenden Schubspannungen an den Wänden BC und AD . Die Größenordnung dieses Fehlers ist sehr gering. Gegenüber den durch die Impulsberechnung sich ergebenden tatsächlichen Druckverlusten werden Unterschiede von nur $1 \div 3$ vH. festgestellt.

Da diese Anwendung kein Analogon in der Mechanik der festen Körper hat, ist eine besondere Besprechung notwendig, zumal äußerst bedeutende theoretische Betrachtungen der modernen Strömungslehre von dieser Anwendung großen Nutzen ziehen.

Wir betrachten nach Abb. 82 ein beliebiges Stück aus einer allgemeinen Strömung und grenzen für unsere Betrachtung einen rechteckigen Bereich $ABCD$ ab. Wir greifen eine Stromröhre ($1 \cdots n$) heraus und wenden auf sie den Impulssatz an. Für kleine in Abb. 82 eingezeichnete Zwischenstücke denken wir uns die Geschwindigkeitsunterschiede dw_x in der x -Richtung gebildet. Die Gesamtkraft, die auf diese Stromröhre in der x -Richtung wirkt, ergibt sich dann durch Summation der Einzelkräfte, sodaß wir zu folgender Gleichung kommen:

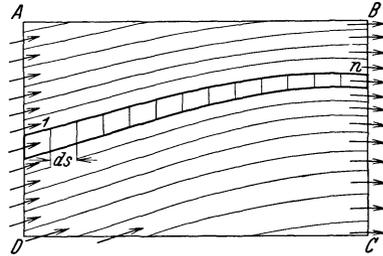


Abb. 82.
Abgrenzung eines Strömungsbereiches
zwecks Anwendung des Impulssatzes.

$$\Delta P_x = \Sigma dP_x = \Delta q (dw_{1x} + dw_{2x} + \dots)$$

$$\Delta P_x = \Delta q (w_{nx} - w_{1x}) .$$

Es bleibt nur der Geschwindigkeitsunterschied der Austrittsgeschwindigkeit w_{nx} und der Eintrittsgeschwindigkeit w_{1x} . Alle Zwischenwerte sind mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich und heben sich deshalb aus der Rechnung heraus.

Das Gleichheitszeichen bedeutet selbstverständlich auch hier wieder Richtungsgleichheit. Interessiert man sich z. B. für eine Kraft P in der x -Richtung, so sind die Unterschiede $w_2 - w_1$ ebenfalls in der x -Richtung zu rechnen.

Für jede einzelne Stromröhre können wir nun diese Betrachtung durchführen. Dadurch bekommen wir alle Einzelkräfte, die auf die Stromröhren in der x -Richtung wirken. Summieren wir alle Kräfte, so erhalten wir die x -Komponente der gesamten äußeren Kraft, die auf den Bereich $ABCD$ wirkt:

$$\begin{aligned} \Delta P_{1x} &= \Delta q_1 (w_{nx}^1 - w_{1x}^1) \\ \Delta P_{2x} &= \Delta q_2 (w_{nx}^2 - w_{1x}^2) \end{aligned}$$

$$\Delta P_{hx} = \Delta q_h (w_{nx}^h - w_{1x}^h)$$

$$\Delta P_{mx} = \Delta q_m (w_{nx}^m - w_{1x}^m)$$

$$P_x = \sum_{h=1}^n \Delta P_{hx} = \sum_{h=1}^m \Delta q_h (w_{nx}^h - w_{1x}^h) . \quad (74)$$

Bezeichnen wir nun $q \cdot w$ als Impuls, so lautet der Satz: Die Summe aller äußeren Kräfte in einer Richtung, die auf ein abgeschlossenes Gebiet wirken, ist gleich der Differenz der austretenden und der eintretenden Impulse in dieser Richtung.

Was im Innern vor sich geht, ob insbesondere Reibungskräfte vorhanden sind, ist gleichgültig. Der Satz gilt immer und besitzt deshalb eine eigene Bedeutung für die gesamte Strömungslehre.

g) Auftrieb.

Eine reibungsfreie Flüssigkeit kann keine energieverzehrenden Kräfte übertragen. Alle Kräfte in Strömungsrichtung (gewöhnlich Widerstände genannt) gehören hierzu, sind also in der reibungsfreien Flüssigkeit unmöglich.

Offen bleibt jedoch die Frage, ob Kräfte senkrecht zur Strömungsrichtung möglich sind. Da diese keine Energie verzehren, ist mit einer solchen Möglichkeit zu rechnen. Mit Hilfe des Impulssatzes kann die Frage leicht beantwortet werden.

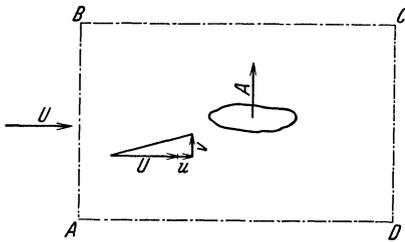


Abb. 83. Auftrieb in der reibungsfreien Strömung.

Wir setzen eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit U voraus. Ein Körper von irgendwelchen Abmessungen befinde sich in dieser Strömung (Abb. 83). In der Nähe des Körpers wird sich eine Störung der Parallelströmung bemerkbar machen. Diese werde dadurch berücksichtigt, daß ein Teilchen außer der Geschwindigkeit U noch die Zusatzgeschwindigkeiten u und v hat. Richtung und Größe der tatsächlichen Geschwindigkeit können dann aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{U + u} \quad \text{und} \quad w = \sqrt{v^2 + (U + u)^2}$$

bestimmt werden. Je mehr wir uns von dem Körper entfernen, um so mehr werden die Störungsgeschwindigkeiten u und v abnehmen. Wir wollen annehmen, daß der Körper tatsächlich eine Kraft senkrecht zur Strömungsrichtung überträgt, und untersuchen, ob und wie dies möglich ist. Für die nachfolgende Impulsberechnung werden wir einen Bereich $ABCD$ so weit vom Körper entfernt abgrenzen, daß an dieser Grenze u und v gegen U klein werden. Wir tun dies, um uns bei der Rechnung gewisse Vereinfachungen erlauben zu können. Denn bei hinreichend kleinem v wird der durch die Flächen BC und AD durchtretende Impuls vernachlässigbar klein werden. Rechnen wir dann die Differenz ΔJ des durch AB eintretenden und durch CD austretenden Impulses in der y -Richtung, so haben wir damit die Summe aller auf

$ABCD$ in y -Richtung wirkenden Kräfte. Letztere setzen sich zusammen einmal aus Druckkräften auf AD und BC , die wir summarisch zunächst mit B_p bezeichnen, sodann aus der Kraft A , die auf den Körper wirkt. Hieraus folgt die Gleichung:

$$\text{Impulsdifferenz } \Delta J = A + B_p .$$

Ein durch AB eintretendes Teilchen von der Breite dy hat den Impuls in y -Richtung $(U + u) dy \cdot v \cdot \rho$.

Der Gesamtimpuls ist somit $\rho \int_A^B (U + u) v \cdot dy$

und die Differenz $-\rho \int_A^B (U + u) v \cdot dy + \rho \int_D^C (U + u) v \cdot dy$.

Zur Berechnung der Druckkräfte $\int_A^D p \cdot dx - \int_B^C p \cdot dx = B_p$ müssen wir die Abhängigkeit des Druckes von der Geschwindigkeit nach der Bernoullischen Gleichung ausrechnen:

$$p + \frac{\rho}{2} U^2 = p' + \frac{\rho}{2} w^2; w^2 = (U + u)^2 + v^2 \sim (U + u)^2;$$

da v gegen U klein sein soll, kann v^2 gegen $(U + u)^2$ vernachlässigt werden.

$$p + \frac{\rho}{2} U^2 = p' + \frac{\rho}{2} (U + u)^2;$$

$$p' - p = \frac{\rho}{2} [U^2 - (U + u)^2] = \frac{\rho}{2} [-2uU - u^2] \sim -\rho U \cdot u ,$$

indem wieder höhere Glieder vernachlässigt werden. Wir erhalten somit den Druck p' an einer beliebigen Stelle der Grenzen der Kontrollfläche:

$$p' = p - \rho \cdot U \cdot u .$$

Wir setzen nunmehr die inzwischen ausgerechneten Werte ΔJ und B_p in Gleichung $A = \Delta J - B_p$ ein.

$$A = -\rho \int_A^B (U + u) v \cdot dy + \rho \int_D^C (U + u) v \cdot dy + \rho \int_A^D U \cdot u \cdot dx - \rho \int_B^C U \cdot u \cdot dx .$$

Die Wirkung von p auf AD und BC hebt sich als gleich und entgegengerichtet aus der Rechnung heraus. Die bei der Ausrechnung entstehenden Werte $\rho \int u \cdot v \cdot dy$ usw. können wieder vernachlässigt werden, weil $u \cdot v$ klein gegen $U \cdot u$ ist.

$$A = \rho U \left[-\int_A^B v \cdot dy - \int_C^D v \cdot dy - \int_D^A u \cdot dx - \int_B^C u \cdot dx \right];$$

$$A = -\rho \cdot U \left[\int_A^B v \cdot dy + \int_B^C u \cdot dx + \int_C^D v \cdot dy + \int_D^A u \cdot dx \right] = -\rho U \cdot \Gamma^1 .$$

¹ Das (—)-Vorzeichen bedeutet, daß Γ einen anderen Umlaufsinn haben muß, wenn A die angenommene Richtung hat. A ist die Kraft, die von außen auf den Körper ausgeübt wird. Die Flüssigkeit antwortet mit der Reaktionskraft, die natürlich die entgegengesetzte Richtung hat.

Die $[\]$ Klammer, die durch die Bezeichnung Γ ersetzt wurde, bedeutet nun, daß über die geschlossene Kurve $ABCD$ der Wert (Weg \times Geschwindigkeit) gebildet wird. Diese als Umlaufintegral oder Zirkulation schon früher eingeführte Größe ist, wie man sieht, ein Kriterium dafür, ob eine Kraft A besteht. Nur wenn $\Gamma \neq 0$, ist eine Auftriebskraft vorhanden. Aus früheren Untersuchungen wissen wir aber schon, daß die durch einen Körper bedingte Störung einer Parallelströmung in weiter Entfernung immer angenähert werden kann durch die einfachen Gebilde: Wirbel, Quelle, Doppelwirbel, Doppelquelle usw. Untersucht man diese Gebilde nach dem Ausdruck $\int w ds = \Gamma$, so ist dieser Wert nach den Ermittlungen von S. 36 nur beim Wirbel von Null verschieden.

Wir fassen zusammen:

Ein Auftrieb, d. h. eine zur Strömungsrichtung senkrechte Kraft, ist nur möglich, wenn einer Parallelströmung eine Wirbelströmung überlagert wird. Die Größe der Kraft ist:

$$A = \rho \cdot U \cdot \Gamma \cdot b, \quad (75)$$

wenn wir noch die Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene mit b bezeichnen. (Bei der obigen Rechnung wurde stillschweigend die Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene mit 1 angenommen.)

Anmerkung. Wenden wir nun den Begriff „Zirkulation“ nachträglich noch auf das Gitter (S. 81) an, so ist für eine Schaufel $\Gamma = t(c_{1u} - c_{2u})$ zu setzen. Mit der neuen Schreibweise erhalten wir

$$P_{yt} = b \cdot \rho \cdot c_m \cdot \Gamma; \quad P_{xt} = b \cdot \rho \cdot \frac{c_{1u} + c_{2u}}{2} \cdot \Gamma.$$

Die Resultierende R steht, wie wir bereits wissen, senkrecht auf der Mittelgeschwindigkeit c_∞ . Man erhält:

$$R^2 = P_{yt}^2 + P_{xt}^2 = b^2 \cdot \rho^2 \cdot \Gamma^2 \left[c_m^2 + \left(\frac{c_{1u} + c_{2u}}{2} \right)^2 \right].$$

Die $[\]$ Klammer ist aber nach Abb. 78 gleich c_∞^2 , sodaß folgende Beziehung entsteht:

$$R = b \cdot \rho \cdot \Gamma \cdot c_\infty, \quad (76)$$

d. h. der oben gefundene Satz gilt auch für das Gitter, wenn statt U die aus Austritts- und Eintrittsgeschwindigkeit gebildete Mittelgeschwindigkeit c_∞ angenommen wird.

Eine gute Kontrolle besteht noch darin, daß beim Übergang zu unendlich großer Teilung ($t = \infty$) c_1 und c_2 nach Größe und Richtung zusammenfallen, so daß dann direkt der oben behandelte Fall Gl. (75) eintritt.

In diesem Falle wird $c_{1u} = c_{2u}$, d. h. in der Formel $\Gamma = t(c_{1u} - c_{2u})$ bleibt Γ konstant, wenn auf der rechten Seite $t = \infty$ und $c_{1u} - c_{2u} = 0$ wird.

Wir merken uns schon jetzt, daß bei einem Einzelauftrieb, entstanden durch eine einzelne Schaufel, die Gesamtströmung wegen $c_{1u} = c_{2u}$ keine endliche Ablenkung erfährt.

h) Impulsmomente (Flächensatz).

In vielen Fällen arbeitet man zweckmäßig mit den Momenten der Impulskräfte. Dies ist immer dann gegeben, wenn ein Problem Rotationssymmetrie aufweist, wie z. B. bei den Kreiselmaschinen. Für das Impulsmoment ergibt sich die Beziehung: Impulsmoment = Hebelarm mal Masse mal Geschwindigkeit. Die Übertragung des Impulssatzes ergibt folgendes: Das Moment der äußeren Kräfte ist gleich dem Zuwachs des Impulsmomentes.

$$M = \Sigma(r \cdot q \cdot \Delta w_u).$$

w_u ist die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Hebelarm.

Anwendung: Kreiselmaschinen. Ist q die sekundlich durch ein Schaufelrad strömende Masse und sind c_{1u} und c_{2u} die Umfangskomponenten der Absolutgeschwindigkeit auf den Radien r_1 und r_2 , so ergibt sich

$$M = q [r_2 \cdot c_{1u} - r_1 \cdot c_{2u}] \tag{77}$$

Beispiel. Hinter einem Kreiselpumpenrad tritt das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s unter einer Neigung von 30° gegen den Umfang aus und wird in einem anschließenden Leitapparat in die radiale Richtung umgelenkt (Abb. 84). Welches Drehmoment muß vom Leitrad dabei aufgenommen werden?

$$c_m = c_1 \cdot \sin 30^\circ = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7,5 \text{ m/s}; \quad c_{1u} = c_1 \cdot \cos 30^\circ = 13 \text{ m/s};$$

$$V = \pi \cdot d \cdot b \cdot c_m = \pi \cdot 0,2 \cdot 0,02 \cdot 7,5 = 0,0941 \text{ m}^3/\text{s}; \quad q = V \cdot \frac{\gamma}{g} = 0,0941 \cdot \frac{1000}{9,81} = 9,6;$$

$$M = q [r_2 \cdot 0 - r_1 \cdot c_{1u}] = -9,6 \cdot 0,1 \cdot 13 = -12,5 \text{ m} \cdot \text{kg} \rightarrow 1250 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

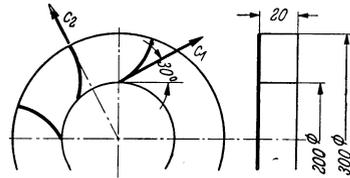


Abb. 84. Schematische Darstellung eines Leitrades.

26. Reibungsfreie Strömung in offenen Rinnen.

Bei Strömungen in offenen Rinnen kann sich das Niveau der Oberfläche in der verschiedensten Weise ändern. Durch diesen neuen Freiheitsgrad, der den bis hierher behandelten Bewegungsformen zu überlagern ist, ergeben sich eine Reihe Erscheinungen, die praktisch große Bedeutung haben.

Zunächst wollen wir beobachten. Durch eine Rinne, von bestimmtem Gefälle, ergieße sich eine Wassermenge mit großer Geschwindigkeit.

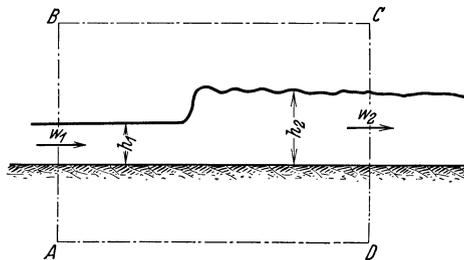


Abb. 85. Wassersprung.

Eine Strecke lang erkennt man eine glatte Strömung, bis plötzlich unter gewissen Voraussetzungen an einer Stelle die Niveauhöhe sprunghaft steigt und von da ab die Oberfläche unruhig wird. Abb. 85 zeigt eine derartige Strömung. Um diese recht sonderbare, den Flußbau sehr

interessierende Erscheinung zu erklären, wollen wir folgende Frage untersuchen:

Gegeben sei eine rechteckige Rinne mit dem Neigungswinkel α der Sohle und der seitlichen Breite b (Abb. 86). An der Stelle 1 sei die Geschwindigkeit w_1 , die Niveauhöhe über der Sohle h_1 . Gehen wir nun um Δl stromabwärts weiter bis zur Stelle 2, so soll untersucht werden, ob h_2 kleiner, größer oder gleich h_1 ist.

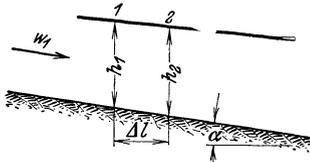


Abb. 86. Offene Rinne mit Gefälle.

Mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung kann diese Frage leicht beantwortet werden, wenn man gleichzeitig berücksichtigt, daß der Druck auf die Oberfläche unabhängig von h , mithin konstant, nämlich gleich dem Druck der Atmosphäre ist. Wir betrachten die Punkte 1 und 2 und erhalten nach Gl. (21):

$$h_1 + \Delta l \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{w_1^2}{2g} = h_2 + \frac{w_2^2}{2g};$$

$$h_2 - h_1 - \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = \Delta l \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$h_2 - h_1 - \frac{w_1 - w_2}{g} \cdot \frac{w_1 + w_2}{2} = \Delta l \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Wir führen die mittlere Geschwindigkeit $w = \frac{w_1 + w_2}{2}$ und die mittlere Höhe h ein und berücksichtigen die Kontinuitätsgleichung:

$$w_1 \cdot b \cdot h_1 = V; \quad w_2 \cdot b \cdot h_2 = V,$$

hieraus: $w_1 = \frac{V}{b \cdot h_1}$ und $w_2 = \frac{V}{b \cdot h_2}$; $w_1 - w_2 = \frac{V}{b} \left[\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right]$;

$$w_1 - w_2 = \frac{V}{b} \cdot \frac{h_2 - h_1}{h_1 \cdot h_2} \sim \frac{V}{b} \cdot \frac{h_2 - h_1}{h^2} = \frac{w}{h} (h_2 - h_1).$$

Dies wird in die Gleichung für $h_2 - h_1$ eingesetzt. Eine leichte Rechnung ergibt dann

$$\frac{h_2 - h_1}{\Delta l} \sim \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{w^2}{h \cdot g}}.$$

Das Gefälle der Wasseroberfläche $\frac{h_2 - h_1}{\Delta l}$ wird für $1 - \frac{w^2}{h \cdot g} = 0$ unendlich groß. Das ist aber gerade die Stelle des Wassersprunges. Hierfür ergibt sich die Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{g \cdot h}. \quad (78)$$

Diese für die Bewegung in offenen Flußläufen wichtige „Grenzgeschwindigkeit“ $\sqrt{g \cdot h} = c_0$ nennt man Schwallgeschwindigkeit. Die Bewegung unterhalb dieser Schwallgeschwindigkeit

keit¹ wird auch durch das Wort „Strömen“, oberhalb mit „Schießen“ gut charakterisiert.

Nach diesen Vorbereitungen werde der Wassersprung (Abb. 85) behandelt. Man erkennt, daß es sich um einen Stoßvorgang handelt und deshalb der Impulssatz die geeignete Waffe ist. Für den umgrenzten Bereich werde die Rechnung durchgeführt:

	Abschnitt AB	Abschnitt CD
Impulsdurchtritt	$\rho \cdot w_1 \cdot h_1 \cdot w_1$	$\rho \cdot w_1 \cdot h_1 \cdot w_2$
Druckkräfte ²	$\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot h_1 \cdot h_1$	$\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot h_2 \cdot h_2$

Gleichheit von Impulsdifferenz und Differenz der Druckkräfte:

$$\frac{\gamma}{g} w_1 h_1 (w_1 - w_2) = \frac{1}{2} \gamma (h_2^2 - h_1^2).$$

Hier wurde bereits die Kontinuitätsgleichung berücksichtigt:

$$w_1 h_1 = w_2 h_2.$$

Diese dient gleichzeitig dazu, w_2 durch w_1 auszudrücken.

$$w_2 = w_1 \frac{h_1}{h_2};$$

$$\frac{w_1^2}{g} \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) = \frac{1}{2} \frac{h_2^2}{h_1} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right].$$

Hieraus entsteht

$$2 \left(\frac{w_1}{c_0}\right)^2 = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1},$$

indem im Sinne der oberen Rechnung die Schwallgeschwindigkeit $c_0 = \sqrt{g \cdot h}$, eingesetzt wurde.

Hieraus folgt

$$\frac{h_2}{h_1} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \left(\frac{w_1}{c_0}\right)^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß nur dann $\frac{h_2}{h_1} > 1$ ist, wenn $w_1 > c_0 = \sqrt{g \cdot h}$.

Die äußere Ursache dieses sog. „Wassersprunges“ liegt meist in einem plötzlichen Hindernis unterhalb der Schwallbildung, z. B. durch ein Wehr. Tritt der Wassersprung nicht ein, so ist die Voraussetzung dieser Rechnung natürlich nicht mehr erfüllt. Dies ist dann der Fall, wenn das Wehr sehr niedrig ist. In diesem Falle strömt das Wasser ohne Wassersprung über das Wehr, d. h. ohne den durch die Stoßwirkung bedingten Energieverlust.

¹ Die Schwallgeschwindigkeit $\sqrt{g \cdot h}$ ist gleichzeitig identisch mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit flacher Wellen.

² Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt dadurch zustande, daß der mittlere Druck eingesetzt werden muß.

Aus meßtechnischen Gründen ist die offene Strömung über ein Wehr aus einem vorhandenen großen Teich oder dgl. sehr wichtig. An einer

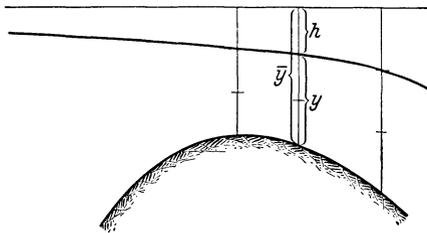


Abb. 87. Strömung einer offenen Rinne über ein Wehr.

Stelle (Abb. 87) sei die Ein-senkung des Wasserspiegels h . Die in diesem Querschnitt auf-tretende Geschwindigkeit be-rechnet sich nach früherem zu $w = \sqrt{2gh}$. Die Menge V ergibt sich aus

$$V = w \cdot y \cdot b \\ = b \sqrt{2g \cdot h} \cdot (\bar{y} - h).$$

Hält man die Niveauhöhe kon-stant und verändert h , so ergeben sich verschiedene Wassermengen. Bei einem bestimmten h ist die Menge am größten. Durch Differen-tiation $\frac{dV}{dh} = 0$ kann dieses leicht berechnet werden. Es ergibt sich

$$h = \frac{\bar{y}}{3}; \text{ d. h. } y = 2h.$$

Dieser Zustand stellt sich nun tatsächlich ein¹, sodaß aus h leicht die Geschwindigkeit und die Menge berechnet werden können, insbesondere wenn diese Untersuchung an der höchsten Stelle durchgeführt wird.

Setzt man $y = 2h$ in die Formel $\sqrt{2gh}$ ein, so entsteht $\sqrt{g \cdot y}$, d. h. in jedem Querschnitt herrscht gerade die Schwallgeschwindigkeit, die der jeweiligen Tiefe entspricht. Man erkennt, daß unterhalb des Wehres meist schießende Bewegung vorhanden ist. Ein Wassersprung führt in den meisten Fällen wieder die „strömende“ Bewegung ein.

III. Einfluß der Reibung bei ablösungsfreien Strömungen.

27. Innere Reibung infolge Zähigkeit.

Die bisher gemachte Annahme, daß Flüssigkeiten nur Normaldrücke aufnehmen, bedarf bei Betrachtung der wirklichen Flüssigkeit einer Kor-rektur. Die Vorstellung wird erleichtert, wenn wir zunächst an zäh-flüssige Medien, z. B. Teer, Glyzerin, Lava usw., denken. Die Erfahrungen des täglichen Lebens zeigen, daß diese Flüssigkeiten einer Formänderung Widerstand leisten.

Zwischen zwei unendlich großen Platten befinde sich eine derartige zähe Flüssigkeitsschicht von der Breite y (Abb. 88). Die untere Platte

¹ Jeder Körper ist bestrebt, die tiefste Lage zu erreichen, d. h. er gleitet bis zur tiefsten Stelle. Dieser Tatsache entspricht das Bestreben, möglichst viel kinetische Energie aus der Lagenenergie umzusetzen.

stehe fest, während die obere sich mit der Geschwindigkeit u nach rechts bewege. Die Erfahrung zeigt, daß diese Bewegung eine Kraft P fordert, die direkt proportional mit u wächst. Eine nähere Beobachtung läßt erkennen, daß die Flüssigkeit direkt an den Platten haftet und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit linear von 0 bis u zunimmt. Mit wachsendem u nimmt das Geschwindigkeits-

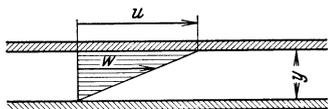


Abb. 88. Zähflüssige Strömung zwischen zwei bewegten Platten.

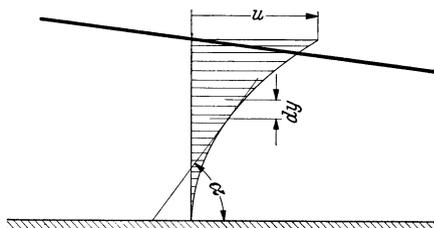


Abb. 89. Zähflüssige Strömung zwischen zwei konisch gestellten Platten. Die obere Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit u , während die untere stillsteht.

gefälle $\frac{u}{y}$ proportional zu, sodaß man auch sagen kann: Die Kraft P wächst proportional dem Geschwindigkeitsgefälle $\frac{u}{y}$. Bezeichnet man die je Flächeneinheit übertragene Kraft analog zu ähnlichen Betrachtungen in der Festigkeitslehre mit Schubspannung, so erhält man $\tau = \mu \cdot \frac{u}{y}$, indem man für den konstanten Proportionalitätsfaktor die sog. Zähigkeitsziffer μ einführt.

Hat man nun Bewegungsvorgänge, bei denen die Geschwindigkeitsverteilung aus irgendeinem Grunde nicht linear verläuft, z. B. bei Abb. 89, so begrenzt man einen so kleinen Bereich dy , daß dort die Kurve durch die Tangente an die Geschwindigkeitskurve angenähert werden kann. In der Schicht dy sind dann dieselben Verhältnisse vorhanden wie oben, wenn man noch $\frac{u}{y}$ durch $\frac{du}{dy}$ ersetzt. Die allgemeine, bereits von Newton¹ aufgestellte Formel lautet somit

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} . \tag{79}$$

Hieraus folgt die Dimension von $\mu \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \text{s} \right]$. Als Einheit der Zähigkeit im CGS-System ist 1 Poise (Poiseuille zu Ehren) $g \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ eingeführt worden.

Mit dieser Festsetzung soll die Rohrströmung untersucht werden. Auch hier wird die Flüssigkeit an der Rohrwand haften, d. h. die Geschwindigkeit ist dort gleich Null. In der Mitte wird die Geschwindigkeit am größten sein und nach der Wand zu stetig abnehmen. Aus Symmetriegründen sind auf einer zentral im Rohre liegenden Kreislinie des Quer-

¹ Newton, Isaac: Philosophiae naturalis principia mathematica. 1723.

schnittes gleiche Geschwindigkeit und gleicher Druck vorhanden. Das Geschwindigkeitsgefälle bedingt nach obigem eine Schubspannung $\tau = \mu \frac{dw}{dy}$, die z. B. auf dem Zylindermantel vom Radius r und der

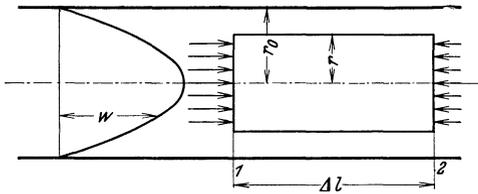


Abb. 90.

Länge Δl konstant ist (Abb. 90). Die Gesamtkraft, die der Zylinder durch die Schubspannung erfährt, ist somit $2 r \pi \cdot \Delta l \cdot \tau$. Diese Kraft ist im Gleichgewicht mit den Druckkräften, die auf die vordere und hintere Stirnfläche des Zylinders

wirken. Diese Drücke werden verschieden sein, d. h. einen Überschuß ergeben, weil in Strömungsrichtung die Drücke wegen der Reibungsverluste abnehmen müssen.

Da die Stromlinien parallel sind, müssen wir nach S. 27 annehmen, daß in einem zur Strömungsrichtung senkrechten Querschnitt der statische Druck konstant ist. Denn es ist nicht einzusehen, wie durch die Reibungserscheinungen hier eine Änderung eintreten sollte. Es genügt deshalb vollkommen, die Rechnung für einen beliebigen Radius auszuführen. Wenn auf der Strecke Δl die Druckabnahme Δp ist, so erhalten wir:

$$\Delta p \cdot r^2 \pi = - 2 r \pi \Delta l \cdot \mu \cdot \frac{dw}{dr};$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r dr = - 2 \mu \cdot dw.$$

Die Integration ergibt unter Berücksichtigung der Randbedingungen $w = 0$ für $r = r_0$:

$$w = \frac{\Delta p}{\Delta l} \frac{1}{4 \mu} (r_0^2 - r^2); \quad w_{\max} = \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot \frac{r_0^2}{4 \mu}.$$

Dieses Gesetz, bekannt unter dem Namen „Poiseuillesches Gesetz“, wurde zuerst von Hagen und zwei Jahre später von Poiseuille experimentell ermittelt (1840). Mit Rücksicht auf diesen Sachverhalt bezeichnet das neuere Schrifttum die Beziehung mit Recht als „Hagen-Poiseuillesches Gesetz“.

Die Geschwindigkeitsverteilung ist nach diesem Gesetz eine Parabel bzw. ein Rotationsparaboloid.

Durchflußmenge und mittlere Geschwindigkeit ergeben sich aus einer weiteren einfachen Rechnung:

$$V = \int_0^{r_0} w \cdot 2 r \pi dr = \frac{r_0^4 \pi}{8 \mu} \frac{\Delta p}{\Delta l} = r_0^2 \pi \left(\frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot \frac{r_0^2}{8 \mu} \right) = r_0^2 \pi \cdot w_m; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \Delta p = \frac{\Delta l \cdot w_m \cdot 8 \mu}{r_0^2} \end{array} \right\} \quad (80)$$

Durch Vergleich mit der obigen Gleichung stellt man noch fest, daß die mittlere Geschwindigkeit gleich der halben Maximalgeschwindigkeit ist:

$$w_{\max} = 2 w_m.$$

(Vgl. den geometrischen Satz: Der Inhalt eines Rotationsparaboloids ist gleich dem Inhalt eines Zylinders von gleicher Grundfläche und halber Höhe.)

Die Rechnung, die für die Länge Δl ausgeführt ist, bleibt bei anderen Längen dieselbe, sodaß für $\frac{\Delta p}{\Delta l}$ auch $\frac{p_2 - p_1}{l_2 - l_1}$ gesetzt werden kann.

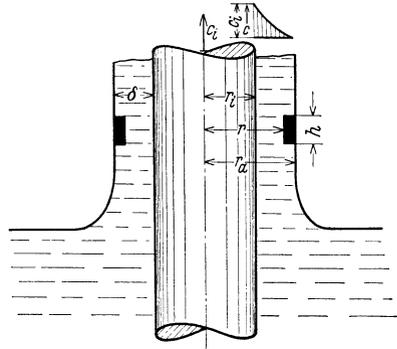


Abb. 91. Ölförderung beim Ringschmierlager. Veranschaulichung des Fördervorganges an einem Stab, der aus einem Ölbad gezogen wird.

Beispiel. Ölförderung beim Ringschmierlager. Wir betrachten nach Abb. 83 einen runden Stab, der mit der Geschwindigkeit c_i aus einem Ölbad gezogen wird. Dabei wird eine Ölschicht von der Dicke δ mit hochgerissen. Im Prinzip wird diese „Ölpumpe“ beim Ringschmierlager benutzt und verdient deshalb besonderes Interesse.

Der Ölling wird durch Schubspannungen hochgerissen, die der Gl. $\tau = \mu \frac{dc}{dr}$ gehorchen. In hinreichender Höhe über dem Ölniveau wird die Ölschicht konstante Dicke haben. Außen ist die Geschwindigkeit dann Null, und am Stabe ist sie gleich der Wandgeschwindigkeit c_i . Die Geschwindigkeitsverteilung soll berechnet werden. Wir betrachten ein ringförmiges Element von der Höhe h und der Dicke $r_a - r$. Das Gewicht $\Delta G = (r_a^2 - r^2) \pi h \cdot \gamma$ wird durch die Schubspannungen an der Innenseite $\tau \cdot 2 r \pi \cdot h$ im Gleichgewicht gehalten.

$$(r_a^2 - r^2) \pi \cdot h \cdot \gamma = \tau \cdot 2 r \pi \cdot h$$

Dabei ist $\tau = -\mu \frac{dc}{dr}$, wenn wir r als Abszisse wählen.

$$(r_a^2 - r^2) \pi \cdot h \cdot \gamma = -\mu \frac{dc}{dr} \cdot 2 r \pi \cdot h; \text{ hieraus: } \frac{r_a^2 - r^2}{r} dr = -2 \frac{\mu}{\gamma} \cdot dc.$$

Die Integration ergibt: $r_a^2 \ln r - \frac{r^2}{2} = -2 \frac{\mu}{\gamma} c + C.$

Für $r = r_i$ muß $c = c_i$ sein; damit erhalten wir

$$r_a^2 \ln \frac{r}{r_i} - \frac{r^2 - r_i^2}{2} = 2 \frac{\mu}{\gamma} [c_i - c].$$

Die Ölfilm Dicke folgt aus der Bedingung $c = 0$ für $r = r_a$:

$$r_a^2 \ln \frac{r_a}{r_i} - \frac{r_a^2 - r_i^2}{2} = 2 \frac{\mu}{\gamma} \cdot c_i.$$

Eine einfache Ausrechnung dieser Gleichung gelingt nur in dem Falle, daß die Film Dicke $\delta = r_a - r_i$ im Verhältnis zu r_i nicht zu groß ist. In diesem Falle, der bei kleineren Geschwindigkeiten zutreffen dürfte, ergibt sich für δ , wenn man $\ln \frac{r_a}{r_i}$

bis einschl. zum zweiten Glied entwickelt, die Beziehung:

$$\delta^2 = 2 \frac{\mu}{\gamma} \cdot c_i.$$

δ ändert sich somit mit der Wurzel aus der Stabgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Ölschicht zeigt Abb. 91.

28. Ähnlichkeitsgesetz.

Versuche können nicht immer unter denselben Bedingungen ausgeführt werden, wie sie bei einer praktischen Anwendung vorkommen. Die Abmessungen müssen zuweilen verkleinert werden (z. B. bei Flugzeugen), die Geschwindigkeiten aus irgendwelchen Gründen oft abweichen. Auch ist es manchmal zweckmäßig, eine andere Flüssigkeit zur Untersuchung zu verwenden, d. h. statt Luft Wasser (oder umgekehrt) zu wählen.

Bei solchen Abweichungen entsteht folgende Frage: Unter welchen Bedingungen sind die Strömungsbilder zweier umströmter geometrisch ähnlicher Körper ebenfalls geometrisch ähnlich? Ist eine solche Übereinstimmung zu erzielen, so steht zu erwarten, daß der „Modellversuch“ eine wirklichkeitstgetreue Nachbildung des Großversuches gestattet.

Rein formal kann diese Frage schnell beantwortet werden. Sie ist in dieser Sprache identisch mit der Frage, ob eine dimensionslose Zahl besteht, die den Strömungszustand wiedergibt. Die die Strömung charakterisierenden Größen (Abb. 92) sind die Geschwindigkeit im Unendlichen u , eine Hauptabmessung d , die Massendichte ρ und die Reibungsziffer μ . Ist nun eine einfache algebraische Kombination dieser Größen so durchführbar, daß eine dimensionslose Zahl entsteht?

$$u \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]; \rho = \frac{\gamma}{g} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{cm}^4} \right]; d \text{ [cm]}; \mu \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \text{s} \right]$$

Ein einfacher Versuch zeigt nun, daß nur folgende Möglichkeit besteht:

$$Re = \frac{u \cdot d \cdot \rho}{\mu} \left[\frac{\text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^2}{\text{kg} \cdot \text{cm}^4 \cdot \text{s}^2} \right]$$

d. h. dimensionslos.

Diese Zahl nennt man Reynoldssche¹ Zahl mit der Schreibweise Re .

Die außerordentliche Bedeutung, die dieser Zahl in der neueren Strömungslehre zukommt, ist durch die folgenden Beispiele veranschaulicht.

¹ Reynolds leitete diese Beziehung 1883 für die Rohrströmung ab, während bereits 1882 Helmholtz eine viel allgemeinere Darstellung des Gesetzes gegeben hatte, die Reynolds nicht bekannt war. Der eigentliche Entdecker ist somit Helmholtz.

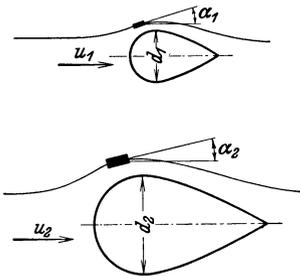


Abb. 92. Strömung um zwei geometrisch ähnliche Körper.

mungslehre zuteil wird, berechtigt zu einigen weiteren Ausführungen, um dem Anfänger diese wichtige Kennzahl von der physikalischen Seite her näherzubringen.

Die Frage nach der geometrischen Ähnlichkeit der Strömungen werde nach Abb. 92 „mikroskopisch“ untersucht. Wir betrachten zwei geometrisch ähnlich liegende Flüssigkeitsteilchen. Die Bewegungsrichtungen, d. h. die Richtungen der Stromlinien an ähnlich liegenden Stellen, seien α_1 und α_2 . Es leuchtet ein, daß bei geometrischer Ähnlichkeit der Strömungsbilder diese Winkel übereinstimmen müssen. Wodurch werden letztere bestimmt? Offensichtlich durch die an Ort und Stelle an den Teilchen angreifenden Kräfte, und zwar durch das Verhältnis dieser Kräfte. Drei kommen in Frage: Druckkräfte D , Trägheitskräfte T und Reibungskräfte R .

Zwischen diesen besteht nach dem Newtonschen Satz die Beziehung:

$$\begin{aligned} T_1 &= D_1 + R_1; \\ T_2 &= D_2 + R_2. \end{aligned}$$

Eine gleiche Strömung ist offenbar nur möglich, wenn das Verhältnis aller Kräfte gleich ist:

$$T_2 = \lambda T_1; \quad D_2 = \lambda D_1; \quad R_2 = \lambda R_1; \quad \text{hieraus} \quad \frac{T_2}{R_2} = \frac{\lambda T_1}{\lambda R_1} = \frac{T_1}{R_1}.$$

Schreiben wir obige Gleichung in der Form

$$\frac{T_1}{R_1} = \frac{D_1}{R_1} + 1, \quad \text{bzw.} \quad \frac{T_2}{R_2} = \frac{D_2}{R_2} + 1$$

und setzen die linken Seiten gleich, so ist:

$$\frac{D_1}{R_1} + 1 = \frac{D_2}{R_2} + 1, \quad \text{mithin} \quad \frac{D_1}{R_1} = \frac{D_2}{R_2}.$$

Die Bedingung ist also zu erfüllen, wenn T/R konstant ist. Es kommt demnach auf das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften an.

1. Reibungskräfte: In der Strömungsrichtung wirken infolge der Reibung Schubspannungen $\tau = \mu \frac{dw}{dn}$, und zwar an der unteren Fläche eines viereckigen Elementes $\tau \cdot \Delta s \cdot b$, an der oberen Fläche $\left(\tau + \frac{d\tau}{dn} \Delta n\right) \Delta s \cdot b$ [b Breite senkrecht zur Zeichenebene (Abb. 93)].

Da diese Schubkräfte aus Gründen des Momentengleichgewichtes entgegengerichtet sind, verbleibt eine Kraft:

$$\begin{aligned} \left(\tau + \frac{d\tau}{dn} \Delta n\right) \Delta s \cdot b - \tau \cdot \Delta s \cdot b &= \frac{d\tau}{dn} \cdot \Delta n \cdot \Delta s \cdot b \\ &= \mu \cdot \frac{d^2 w}{dn^2} \Delta n \cdot \Delta s \cdot b. \end{aligned}$$

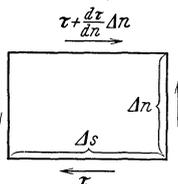


Abb. 93. Schubspannungen an einem rechteckigen Element.

2. Massenkkräfte: Diese Kräfte bestimmen sich aus der Gleichung Kraft = Masse \times Beschleunigung.

$$\Delta s \cdot \Delta n \cdot b \cdot \frac{\gamma}{g} \frac{dw}{dt} = \Delta s \cdot \Delta n \cdot b \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \Delta s \cdot \Delta n \cdot b \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{ds} \cdot w.$$

Somit erhält man das Verhältnis:

$$\frac{\Delta s \cdot \Delta n \cdot b \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{ds} \cdot w}{\mu \cdot \frac{d^2 w}{dn^2} \cdot \Delta n \cdot \Delta s \cdot b} = \frac{\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{ds} \cdot w}{\mu \frac{d^2 w}{dn^2}} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}.$$

Alle Größen an den betrachteten Stellen werden in irgendeiner Beziehung zu den charakteristischen Größen u (Geschwindigkeit der Parallelströmung im Unendlichen), d usw. stehen. Wird z. B. u doppelt so groß genommen, so wird auch w doppelt so groß sein. Zwischen allen Größen muß, wie einleuchten dürfte, eine proportionale Beziehung bestehen, die durch \sim ausgedrückt werden soll.

$$w \sim u; \quad ds \sim d; \quad dw \sim u.$$

Indem wir hiervon Gebrauch machen, ergibt sich:

$$\frac{\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{dw}{ds} \cdot w}{\mu \cdot \frac{d^2 w}{dn^2}} \sim \frac{\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{u^2}{d}}{\mu \cdot \frac{u}{d^2}} = \frac{u \cdot d}{\mu/\rho} = Re. \quad (81)$$

Damit erhalten wir dieselbe Zahl wie vorhin.

Vorbehaltlich der in dem nächsten Kapitel zu erbringenden experimentellen Bestätigung gestattet der Satz folgende wichtige Aussage:

Zwei Strömungen um (bzw. durch) geometrisch ähnliche Körper sind nur dann geometrisch ähnlich, wenn die Reynoldsschen Zahlen gleich sind. Innerhalb dieser Forderung können sich u , d und μ/ρ beliebig ändern. Man hat somit bei Versuchen die Möglichkeit, Modellgröße und Geschwindigkeit zu ändern. Es besteht sogar die Freiheit, eine andere Versuchsflüssigkeit zu nehmen, da der Wert von μ/ρ ja ebenfalls geändert werden kann, z. B. statt Luft Wasser oder Dampf, wenn nur dafür gesorgt wird, daß Re konstant bleibt.

Die immer wieder vorkommende Größe μ/ρ bezeichnet man als kinematische Zähigkeit und hat dafür den Buchstaben ν eingeführt. Meist findet man die Schreibweise: $Re = \frac{u \cdot d}{\nu}$. Dimension von ν ist $\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.

Die folgende Tabelle enthält für einige wichtige Flüssigkeiten Werte von ν . Diese ändern sich stark mit der Temperatur, und zwar so, daß ν bei Flüssigkeiten mit steigender Temperatur kleiner wird, während bei Gasen ein entgegengesetztes Verhalten bemerkt wird. Bei vollkommenen Gasen ist ν umgekehrt proportional dem Druck, während μ vom Druck unabhängig ist. Einheit 1 Stok. = 1 cm²/s.

Eine Zusammenstellung von Zahlenwerten für ν folgt anschließend. Für Luft, Wasser und Rüböl ist außerdem der ν -Verlauf in Abb. 94 in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt.

760 mm Hg	{	$t \text{ } ^\circ\text{C} \dots$	0	20	40	60	100
		Luft $\nu \dots$	0,133	0,149	0,17	0,192	0,245
		Wasser ν					
		in $[\text{cm}^2/\text{s}]$.	0,0178	0,01	0,00659	0,00476	0,00295

Werte¹ von ν für andere Stoffe bei 20° in cm^2/s :

Quecksilber 0,00117; Maschinenöl 3,82; Glycerin 6,8;
 Maschinenöl 10° = 7,34 Glycerin 3° = 33,4
 „ 50° = 0,62 „ 18° = 8,48
 „ 100° = 0,1

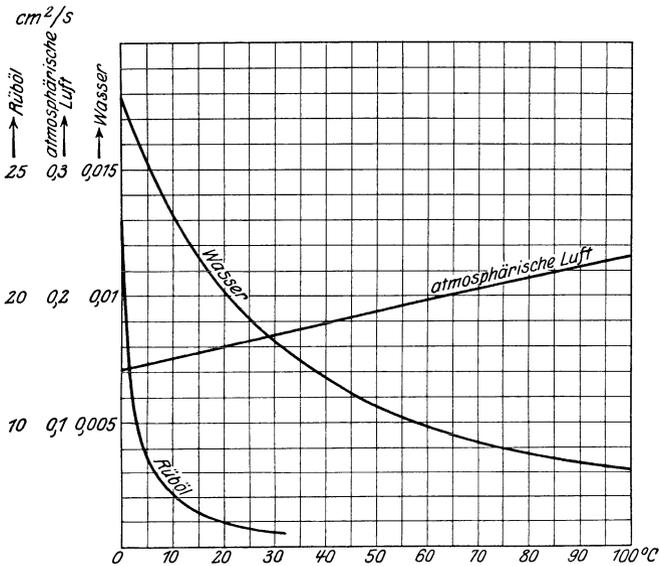


Abb. 94.

Wenn $\nu > 1$ ist, wie z. B. bei Ölen, kann die Zähigkeit schnell und zuverlässig mit dem Englerschen Zähigkeitsmesser gefunden werden. Man bestimmt die Zeit t , in der 200 cm^3 der Meßflüssigkeit aus einem genormten Gefäß (106 mm \varnothing , Ausflußrohr 2,9 mm \varnothing , 20 mm lang, Spiegel 52 mm hoch) mit unterem Ausfluß ausfließt. Ist $t_0 = 48,51$ s die gleiche Zeit für Wasser, so wird der sog. Englergrad bestimmt durch $E = t/t_0$ (vorgeschriebene Wassertemperatur 20°). Nach Mises besteht zwischen E und ν folgende Beziehung:

$$\nu = 0,0864 E - 0,08/E \text{ [cm}^2/\text{s]}.$$

¹ Eine umfassende Zusammenstellung von ν -Werten für die meisten technisch vorkommenden Gase und Flüssigkeiten befindet sich in Richter: Rohrhydraulik. Berlin: Springer, 1934.

Beim Vergleich von Luft und Wasser merke man sich, daß der ν -Wert für Luft etwa 14mal so groß wie für Wasser ist. Vergleicht man also Strömungen in Wasser und Luft, so muß bei Luft die Geschwindigkeit ~ 14 mal so groß sein wie bei Wasser.

Die Unabhängigkeit der Zähigkeitsziffer μ (nicht kinematische Zähigkeit ν !) vom Druck ist besonders bemerkenswert. Da die innere Reibung eine Folge der Zusammenstöße der Gasmoleküle ist, läßt sich auch aus der kinetischen Gastheorie μ berechnen. Maxwell gelang 1876 der Nachweis, daß bei vollkommenen Gasen μ unabhängig vom Druck ist. Das Experiment bestätigte die Voraussage. Praktisch bedeutet dies, daß z. B. die laminaren Reibungsverluste durch Drucksenkung trotz der damit verbundenen Verminderung des spez. Gewichts nicht geändert werden können. Für die Fallgeschwindigkeit kleiner Staubteilchen (s. S. 197) ergeben sich hieraus wichtige Konsequenzen.

Die Unabhängigkeit vom Druck besteht nicht mehr bei sehr hohen Drücken, insbesondere in der Nähe des kritischen Druckes. Auch bei sehr kleinen Drücken verliert das Maxwellsche Gesetz seine Gültigkeit. Sobald nämlich die sog. freie Weglänge sehr groß wird — dies ist in der Nähe des Vakuums der Fall — findet an der Wand ein tatsächliches Gleiten statt. Man konnte z. B. nachweisen, daß in der Nähe des Vakuums bei Durchströmung von Kapillaren die durchströmende Menge um ein vielfaches größer ist als nach dem Hagen-Poiseuillschen Gesetz zu erwarten wäre.

Es sei noch bemerkt, daß eine Erfindung von größter praktischer Bedeutung, nämlich die Gaedesche Molekularluftpumpe¹ auf der Maxwell'schen Erkenntnis beruht.

Die Auswirkungen des Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetzes sind für die moderne Strömungslehre von entscheidender Bedeutung. Dabei ist bemerkenswert, wie immer wieder mit Hilfe dieser grundlegenden Erkenntnis Neuland fruchtbar beackert wird, obschon bereits über ein halbes Jahrhundert seit der Entdeckung des Gesetzes vergangen ist. Vor etwa 14 Jahren war es die Düsen- und Blendenforschung, die mit verblüffendem Erfolg das Gesetz als Wegweiser benutzen konnte. Aber gerade in jüngster Vergangenheit gelang es, noch weitere praktisch bedeutsame Schlußfolgerungen zu ziehen. Welcher Wasserturbinenbauer hätte wohl vor 20 Jahren geahnt, daß man heute Wasserturbinen sehr erfolgreich mit Luft untersucht! Noch größere Überraschungen erlebte in letzter Zeit der Dampfturbinenbau. In einer klassischen Pionierarbeit ist Ackeret² und seinen Mitarbeitern der Nachweis gelungen, daß selbst Dampfturbinenversuche unter gewissen

¹ Gaede: Die Luftpumpen in Wien-Harms. Bd. IV, 3, S. 428.

² Ackeret, Keller, Salzmann: Die Verwendung von Luft als Untersuchungsmittel für Probleme des Dampfturbinenbaues. Schweiz. Bauzeitung 1934.

Umständen durch Luftversuche ersetzt werden können. Alle großen Schwierigkeiten, die das Experimentieren mit Heißdampf mit sich bringt, z. B. hohe Temperaturen, kleine Abmessungen der zu prüfenden Objekte, Kondensation, hohe Umfangsgeschwindigkeiten und nicht zuletzt die Unmöglichkeit von Einzelbeobachtungen, fallen weg. Die Dampfturbinenelemente können so groß ausgeführt werden, daß eine Abtastung aller Verlustquellen ohne Mühe möglich ist. Daß dies geradezu eine Umwälzung in der Untersuchung und Entwicklung der Dampfturbinenelemente zur Folge hat, dürfte einleuchten.

In der Flugtechnik wird statt der Reynoldsschen Zahl vielfach mit der Kennzahl $E = w \cdot t$ gearbeitet; $t =$ Flügeltiefe. Hier wird die Länge in mm und die Geschwindigkeit in m/s eingesetzt. Für 13° und 760 mm Hg gilt:

$$Re = 70 \cdot E. \quad (82)$$

Beispiel. 1. Ein Automobil soll im Windkanal untersucht werden. Die Fahrgeschwindigkeit beträgt 108 km/h \rightarrow 30 m/s. Die Wagenhöhe betrage 1,5 m. Ein vorhandener Windkanal biete die Möglichkeit, ein geometrisch ähnliches Modell von nur 1 m Höhe einzubauen. Die Anblasgeschwindigkeit ist zu bestimmen. $Re_1 = 3000 \cdot 150/v$; $Re_2 = w_2 \cdot 100/v$; mit $Re_1 = Re_2$ wird $w_2 = 30 \cdot 150/100 = 45$ m/s.

2. Das Stück einer Wasserrohrleitung mit Krümmer und Armatur soll mit Luft untersucht werden, da man vor dem Einbau mit einfachsten Mitteln den Rohrwiderstand kennen lernen will; Rohrdurchm. = 100 mm. Die Wassergeschwindigkeit sei 2,2 m/s. Mit welcher Luftgeschwindigkeit muß der Rohrstrang durchblasen werden, um ähnliche, d. h. übertragbare Verhältnisse zu erhalten?

$$Re = w_1 \cdot d_1/v_1 = w_2 \cdot d_2/v_2; 220 \cdot d/0,01 = w_2 \cdot d/0,15; w_2 = 2,2 \cdot 0,15/0,01 = 33 \text{ m/s.}$$

27. Bewegungsgleichungen mit Reibungsglied.

Bei den S. 14 aufgestellten Bewegungsgleichungen wurde die Reibung vernachlässigt. Wir können dies jetzt ergänzen, indem wir zu den in Gl. (12) summierten Kräften noch die Reibungskraft addieren. Nach der (S. 97) abgeleiteten Formel ist diese $\mu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \cdot \Delta s \cdot \Delta n \cdot b$. Indem wir diese Kraft auf der linken Seite der Gl. (12) voraufgehenden Gl. hinzufügen, erhalten wir nach Kürzung:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} - \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\gamma}{g} \frac{dc}{dt} = \frac{\gamma}{g} w \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \quad (83)$$

(für horizontale und stationäre Bewegung, wo $\frac{\partial z}{\partial s} = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ ist).

Diese Gleichung gilt, wie ausdrücklich betont werden muß, wenn die Bewegungsrichtung in der s -Richtung erfolgt und sonst nur in der n -Richtung auffällige Geschwindigkeitsunterschiede vorhanden sind.

Eine wichtige Schlußfolgerung soll aus der Gleichung gezogen werden, deren allgemeine Behandlung auf große Schwierigkeiten stößt. Wir denken uns den Fall, daß die Trägheitskräfte vernachlässigt werden können, wo also die rechte Seite $\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} \cdot w$ gleich Null ist. Dies ist bei schleichender Bewegung in der Nähe der Wand fast immer der Fall. Dann ergibt sich die Beziehung $\mu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial p}{\partial s}$. Wenn nun das Geschwindigkeitsprofil einen Wendepunkt hat, so ist bekanntlich $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$; dann

muß aber auch $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ sein. Letzteres ist aber der Fall, wenn an einer Wand ein Wechsel von Druckabfall zu Druckanstieg eintritt, d. h. bei einem Druckminimum. Wir können also sagen:

An den Stellen, wo der Druck einen Extremwert hat, hat das Geschwindigkeitsprofil bei verschwindender Trägheitswirkung einen Wendepunkt. Die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand ist ausschließlich durch das Druckgefälle in Strömungsrichtung bestimmt.

Da von Tollmien nachgewiesen werden konnte, daß solche Geschwindigkeitsprofile instabil sind und zur Ablösung führen, ist diese Feststellung von Bedeutung.

30. Strömungsformen.

Nach den Ausführungen von S. 94 erscheint insbesondere das Rohrreibungsproblem höchst einfach und durch Gl. (80) umfassend gelöst.

Leider ist jedoch die dort gemachte Grundannahme, daß die einzelnen Flüssigkeitsfäden in stetigen Kurven, den sog. Stromlinien, sich bewegen und demzufolge die Schubspannung durch $\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dn}$ bestimmt ist, nur in wenigen Fällen richtig. Die praktischen Anwendungsbeispiele dieser durch Laminarströmung oder Schichtenströmung sprachlich gut umschriebenen Bewegungsform beschränken sich auf folgende Fälle:

1. Strömung durch Kapillare; bei größeren Rohren nur für sehr kleine Geschwindigkeiten,
2. Strömung in laminarer Grenzschicht,
3. Strömung in Schwerkraftwarmwasserheizungen (teilweise!),
4. Strömung durch Filter, Gewebe usw.,
5. Grundwasserströmung,
6. Strömung im Schmierfilm eines Lagers,
7. Bewegung von Teer, Lavamassen u. dgl.

Die Laminarbewegung kann nach dem klassischen Versuch von O. Reynolds dadurch nachgewiesen werden (Abb. 95), daß der Strömung durch

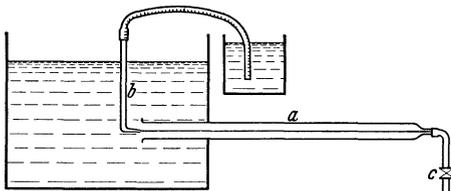


Abb. 95. Reynoldsscher Versuch.

eine Glasröhre *a* ein Farbstrahl beigemischt wird, und zwar durch eine im Einlauf befindliche Düse *b*. Stellt man mit dem Hahn *c* kleinere Geschwindigkeiten ein, so zeigt sich, daß der Farbstrahl wie mit dem Lineal gezogen auf der ganzen Rohrlänge erhalten bleibt (voll-

kommen ruhiges Wasser im Behälter ist notwendig!). Vergrößert man nun durch Öffnen des Hahnes *c* die Geschwindigkeit, so bemerkt man auf einmal, daß der Farbstrahl unruhig wird, hier und da zerflattert, um bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit ganz zu verschwinden, ein

Zeichen, daß er sich ganz mit dem Wasser vermischt hat. Beim Übergang in die neue Strömungsform sieht man gut, wie Querbewegungen auftreten, die ein wirbelartiges Aufrollen des Farbstrahles zur Folge haben. Durch ein scharfkantiges Einlaufstück, auch durch Unruhe im Vorratsbehälter, kann der Übergang beschleunigt werden. Wenn wir die so entstehende Strömungsform turbulent oder wirbelig nennen, so ist dies eine gute sprachliche Bezeichnung des Vorganges.

Es ist das große Verdienst von O. Reynolds, in einer grundlegenden Arbeit¹ dargelegt zu haben, daß der Übergang von der laminaren in die turbulente Strömung nur von der ihm zu Ehren benannten Zahl $\frac{v \cdot d}{\nu} = Re$ abhängt.

Dieses Verdienst wird auch dadurch nicht geschmälert, daß vor ihm bereits Hagen² wesentliche Eigenschaften beider Strömungsformen richtig erkannte.

Einige weitere physikalische Erscheinungen, die beim Wechsel der Strömungsform beobachtet werden, seien kurz zusammengestellt.

1. Nach dem Übergang zur turbulenten Strömungsform wächst bei der Rohrströmung der Druckverlust erheblich.

2. Ein aus einer Kapillaren austretender Strahl hat bei laminarer Strömung das Aussehen eines glatten Glasstabes³. Beim Übergang zur Turbulenz beobachtet man zunächst ein Springen des Strahles und periodischen Rückfall in Laminarität (infolge des bei Turbulenz auftretenden größeren Druckverlustes). Der endgültige turbulente Strahl ist dann wieder ruhig, zeigt aber eine gekräuselte Oberfläche.

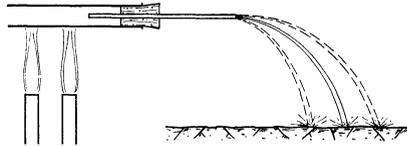


Abb. 96. Beeinflussung eines dünnen Wasserstrahles durch voraufgehende Erwärmung.

3. Ein laminarer Strahl nach 2. vergrößert seine Sprungweite, wenn das Wasser erwärmt wird, etwa durch ein vorgeschaltetes, mit Gasflamme geheiztes Kupferrohr (Abb. 96). Nach dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz ist dies leicht zu erklären, da ν mit steigender Temperatur kleiner, infolgedessen die Reibung ebenfalls vermindert wird und der Strahl deshalb weiter springt. Macht man nun denselben Versuch mit turbu-

¹ Reynolds: Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1883.

² Hagen, G.: Akad. der Wiss., S. 517., Berlin 1854.

³ Freie Strahlen können auch bei höheren Werten noch laminar sein, wenn eine vorherige Berührung mit einer Rohrwand vermieden wird. Man kann dies z. B. dadurch erreichen, daß man einen Strahl durch eine Düse aus einem Behälter austreten läßt, der vollkommen ruhiges Wasser enthält. Man erkennt hieraus, daß der Einfluß der Wandreibung für das oben gekennzeichnete Verhalten unbedingt notwendig ist.

lenter Strömung, so zeigt sich keine merkbare Änderung der Sprungweite.

4. Der Wärmeübergang wird beim Übergang zur Turbulenz erheblich gesteigert.

In einer offenen Wasserwanne, in der die Strömung durch Aufstreuen von Aluminiumpulver oder Bärlappsamen sichtbar gemacht wird, zeigt sich der Übergang besonders eindrucksvoll. Abb. 97 zeigt eine Aufnahme der Laminarströmung. Da nach dem Reynoldsschen Gesetz wegen der Konstanz von $u \cdot d$ bei größer werdenden Abmessungen die Geschwindigkeit entsprechend kleiner wird, ergeben sich bei einer Wanne so kleine

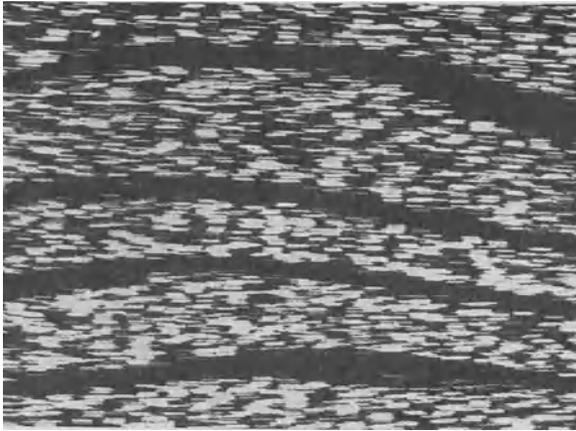


Abb. 97. Laminarströmung. Strömung in offener Wanne durch Aufstreuen von Aluminiumpulver sichtbar gemacht. Die schwarzen Streifen sind durch vorausgehende Umföhrungsschaufeln entstanden.

Geschwindigkeiten, daß man mit dem Auge kaum mehr eine Bewegung feststellen kann. Die Zeitaufnahme (Abb. 97) läßt jedoch deutlich die kleinen geraden Striche erkennen, die die Wege der Teilchen während der Belichtungszeit anzeigen. Die schwarzen Streifen sind durch stromaufwärts liegende Umkehrschaufeln entstanden. Die Tatsache, daß diese Trennung der Oberfläche erhalten bleibt, ist ein Beweis der Laminarität der Strömung (s. auch Abb. 130).

Beschleunigt man nun die Strömung, so bleibt zunächst die Strömungsform erhalten. Bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit bemerkt man ein plötzliches „Zittern“ der Oberfläche, und nun sieht man deutlich, wie die einzelnen Teilchen neben der Hauptbewegung Querbewegungen ausführen: Das Bild macht einen turbulenten Eindruck.

Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung hängt bei sonst gleichen Bedingungen nur von der Reynoldsschen Zahl ab. Als untere

Grenze kann man für die Rohrströmung $Re_{\text{krit.}} \sim 2320$ angeben. Eine umfangreiche Untersuchung des Grenzgebietes hat folgendes ergeben. Unterhalb $Re_{\text{krit.}}$ scheint selbst bei starken Störungen nur der laminare Zustand stabil zu sein, während bei vorsichtigem Experimentieren (absolute Ruhe im Vorratsbehälter, Vermeidung aller die Wirbelbildung begünstigenden Einflüsse) die laminare Strömung selbst noch bei sehr hohen Re -Werten erhalten bleiben kann. Bei guter Abrundung des Einlaufs und besonders beruhigtem Zufluß werden Re -Werte bis 40000 und höher erreicht. Die geringsten Störungen bedingen aber einen sofortigen Umschlag.

31. Strömungswiderstand in Rohren.

a) Allgemeine Bemerkungen.

Die Strömungserscheinungen in runden Rohren stehen sowohl für die Praxis wie für die wissenschaftliche Forschung im Mittelpunkt der modernen Strömungslehre. Das Rohr ist für grundlegende Messungen mannigfacher Art ein besonders geeignetes Hilfsmittel. Viele Erscheinungen, die bei anderen Strömungsproblemen äußerst verwickelt erscheinen, können beim Rohr in „Reinkultur“ beobachtet und ausgewertet werden. Die hier gewonnenen Erkenntnisse lassen sich, wie unsere Ausführungen zeigen werden, auf viele Dinge übertragen, in anderen Fällen dienen sie wenigstens als Wegweiser. Dieser Materie sei deshalb ein etwas weiterer Raum gewidmet.

Für die laminare Strömung konnten Druckverlust und Geschwindigkeitsverteilung in Gl. (80) einwandfrei berechnet werden.

Bei der turbulenten Strömung ist das ohne Zuhilfenahme von Versuchswerten nicht möglich. Während bei der laminaren Strömung der Druckverlust genau proportional der Geschwindigkeit ist, beobachtet man bei der Turbulenz durchweg eine quadratische Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Die periodischen Hin- und Herbewegungen, die sich infolge der Turbulenz der Hauptströmung überlagern, erklären dieses Verhalten bereits an Hand einer einfachen Überlegung. Wenn nämlich durch Querbewegungen Teilchen mit höherer Geschwindigkeit in ein Gebiet mit kleinerer Geschwindigkeit kommen, verlieren sie durch Stoß kinetische Energie. Da diese aber proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, leuchtet ein nämliches Verhalten für den Druckverlust ein. Hierbei entsteht eine Scheinreibung, die einen ganz anderen Charakter wie bei der laminaren Bewegung hat.

Beim Aufbau der Hauptformel für den Druckverlust werde der gleiche Weg wie auf S. 94 beschritten. Denken wir uns wieder eine Schubspannung τ an einem Flüssigkeitszylinder wirken, so erhalten wir:

$$\tau \cdot \pi \cdot d \cdot l = \Delta p \cdot \frac{\pi d^2}{4}; \quad \Delta p = \frac{l}{d} \cdot 4 \tau .$$

τ ist aber hier nicht proportional dem Geschwindigkeitsgefälle, sondern nach obigem proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit:

$$\tau \sim \frac{\gamma}{g} w^2,$$

wo aus Dimensionsgründen $\frac{\gamma}{g}$ hinzugefügt wurde. Hiermit ergibt sich:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w^2 = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot q = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w^2. \quad (84)$$

Der Proportionalitätsfaktor λ , Reibungskoeffizient genannt, ist somit eine dimensionslose Zahl. Das Problem ist damit auf die experimentelle Bestimmung von λ zurückgeführt. Es steht zu erwarten, und die Versuche bestätigen es, daß λ nur von der Reynoldsschen Zahl abhängt.

Gl. (84) wird allgemein als Grundformel für die Berechnung der Rohrreibung betrachtet. Deshalb ist es zweckmäßig, die Formel der Laminarreibung auf dieselbe Benennung zu bringen¹. Nach Gl. (80) ergibt sich:

$$\Delta p = \frac{l \cdot w \cdot 8 \mu}{r_0^2} = \frac{64 \cdot \mu \cdot g}{w \cdot d \cdot \gamma} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\gamma}{2g} w^2 = \frac{64}{\frac{w \cdot d}{\nu}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\gamma}{2g} w^2. \quad (85)$$

Es ist hier also $\lambda = \frac{64}{Re}$, d. h., wie oben erwähnt, nur abhängig von der Reynoldsschen Zahl. Dieses Gesetz hat bis $Re \sim 2300$ Gültigkeit.

b) Das glatte Rohr.

Im turbulenten Gebiet ist zunächst das glatte Rohr so eingehend untersucht worden, daß die λ -Werte mit großer Sicherheit feststehen und dieses Problem nunmehr als gelöst betrachtet werden kann.

Nach Blasius² kann bis $Re = 80000$

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (86)$$

gesetzt werden.

Umfassender ist das von Hermann³ auf Grund neuer Versuche gefundene Gesetz:

$$\lambda = 0,0054 + 0,396 \frac{1}{Re^{0,3}}. \quad (87)$$

Diese Beziehung gilt bis $Re \sim 1500000$, d. h. bei Reynoldsschen Zahlen,

¹ Für laminare Strömung zwischen zwei parallelen Wänden ergibt sich $\lambda = \frac{96}{Re} = 1,5 \cdot \frac{64}{Re}$, für quadratischen Querschnitt $\lambda = \frac{56,9}{Re} = 0,89 \cdot \frac{64}{Re}$, wobei eine Umrechnung gemäß dem hydraulischen Radius S. (130) vorgenommen worden ist. λ ändert sich somit mit der Querschnittsform.

² Mitt. Forschungsarbeit 131.

³ Schiller: Vortr. a. d. Geb. der Aerodynamik und verwandten Gebieten. Aachen 1929.

die fast alle praktischen Anwendungsbereiche umfassen. Bis $Re = 80\,000$ stimmen die Werte mit den Blasiuschen Werten überein.

Zusammenstellung einiger λ -Werte für glatte Rohre.

Re	5000	20 000	70 000	100 000	400 000	2 000 000
theoretisch . . .	0,0374	0,0259	0,0194	0,018	0,0137	0,0104
empirisch . . .	0,0381	0,0262	0,0194	0,018	0,0137	0,0105

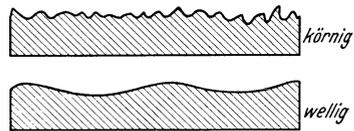
Von Stanton und Pannel¹ wurden zur Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes Versuche mit Wasser und Luft bei verschiedenen Durchmessern ausgeführt. Abb. 98 zeigt die entsprechenden λ -Werte über Re aufgetragen. Sie fallen gut in eine Kurve. Diese Versuche dürften den besten Nachweis zur Bestätigung des Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetzes bilden. Der linke Ast bezieht sich auf die laminare Bewegung. Sprunghaft steigen dann die Werte in die zweite Kurve, die die turbulente Bewegung darstellt. Denkt man sich die erste Kurve verlängert, so sieht man deutlich die Vergrößerung der λ -Werte infolge Turbulenz.

Würde man, wie es früher geschah, λ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit auftragen, so erhielte man keine Kurve, sondern einen „Sternenhimmel“. Das Reynoldssche Gesetz dürfte sich bei dieser Gelegenheit bereits dem Anfänger mit elementarer Wucht vorstellen.

c) Das rauhe Rohr.

Größere Schwierigkeiten bereitet das rauhe Rohr. Beim glatten Rohr ist als einzige charakteristische Länge der Durchmesser vorhanden, bei rauhen Rohren kommt als Länge die mittlere Wanderhebung k hinzu. Da für Vergleiche geometrisch ähnlicher Gebilde nur Verhältniszahlen ausschlaggebend sind, werden wir das Verhältnis $\frac{k}{d}$ als maßgebend für die Rauigkeit angeben müssen. Es ist zu erwarten, daß hier λ außer von Re noch von $\frac{k}{d}$ abhängig ist. Die erste dimensionsrichtige Gleichung für rauhe Rohre stammt von R. v. Mises².

Nach Hopf³ ist es möglich, zunächst einmal zwei wichtige Grenzfälle zu unterscheiden und hier grundsätzliche Unterschiede festzustellen (Abb. 99):



α) Wandrauigkeit, deren Struktur eine mehr körnige ist (Abb. 99). In

Abb. 99. Körnige und wellige Rauigkeit. Einteilung nach Hopf.

¹ Similarity of Motion in Relation to the Surface Friction of Fluids. Phil. Trans. (A) 214, 199, 1914.

² R. v. Mises, Elemente der tech. Hydrodynamik, Teubner, 1914.

³ Hopf, L.: Die Messung der hydraulischen Rauigkeit. ZAM 1923, S. 329 oder Mitt. d. Aerodynam. Instituts d. T. H. Aachen, Heft 2.

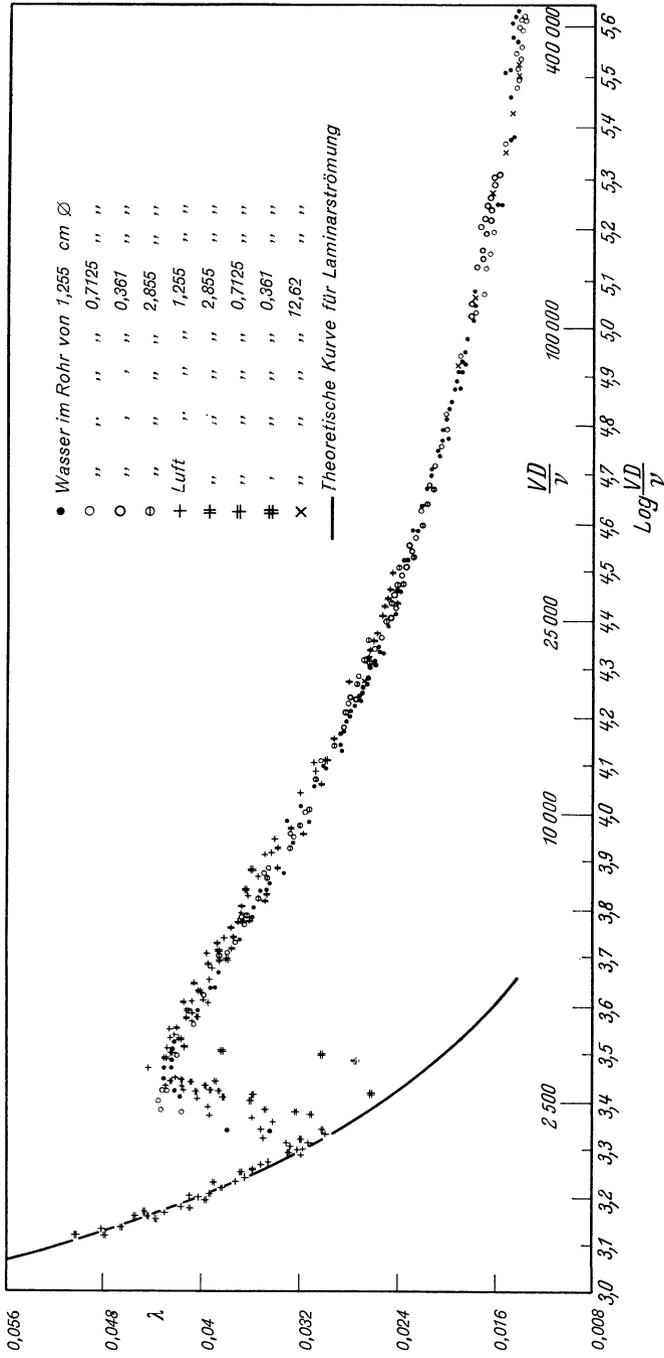


Abb. 98. Versuche von Stanton und Pannel zur Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes.

diesen Fällen ist oberhalb einer Reynoldsschen Zahl Re der Wert λ unabhängig von Re , d. h. der Druckverlust ist proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Hopf fand aus Versuchen folgendes Gesetz:

$$\lambda = 10^{-2} (k'/d)^{0,314} . \tag{88}$$

Der hier eingeführte Wert k' ist nicht gleich, sondern proportional der mittleren Wanderhebung.

Werte von k' nach Gl. (88).	k' [m]
Neues, glattes Metallrohr, asphaltiertes Blech	1,5
Neues Gußeisen, Eisenblech	2,5
Angerostetes Eisenrohr	5
Verkrustetes Eisen, rauhe Bretter	7

9) Wandrauhigkeit welliger Art. Gemeint ist eine wellenförmige, im großen und ganzen jedoch glatte Oberfläche, wie sie z. B. bei asphaltierten Rohren beobachtet wird (Abb. 99). Hier wird λ mit steigender Reynoldsscher Zahl kleiner. Nach den Beobachtungen von Hopf ist der λ -Verlauf annähernd parallel dem Verlauf des glatten Rohres. Der Ansatz

$$\lambda = \xi \cdot \lambda_0 \text{ (}\lambda_0 \text{ Widerstandsziffer des glatten Rohres)}$$

erfaßt diese Eigenschaft.

Welligkeitszahlen ξ .	
Holzrohre	1,5 bis 2
Asphaltiertes Eisenblech	1,2 „ 1,5
Bituminöse Innenisolierung der Deutschen Röhrenwerke (Kölner Messungen)	1,03 „ 1,1

Bemerkt sei, daß bei größeren Reynoldsschen Zahlen auch bei „welligen“ Rauigkeiten die λ -Werte konstant werden. Der von Hopf eingeführte Begriff der Welligkeit ist nach den neueren Ergebnissen der Turbulenzforschung stark in den Hintergrund getreten.

Grundlegend neue Erkenntnisse brachten die Versuche von Nikuradse. Bei diesen wurde die Wandrauhigkeit durch aufgeklebten Sand künstlich erzeugt. Abb. 100 zeigt diese Versuche, die bis zu sehr hohen Reynoldsschen Zahlen ausgedehnt wurden. Man erkennt, daß oberhalb bestimmter Re -Werte λ konstant ist. Für das Gebiet, wo λ unabhängig von Re , d. h. konstant, wird, hat Nikuradse¹ die Ergebnisse in folgendes Gesetz einkleiden können:

$$\lambda = \frac{1}{(2 \lg \frac{r}{k} + 1,74)^2} = \frac{1}{(2 \lg \frac{d}{k} + 1,138)^2} . \tag{89}$$

Werte nach dieser Formel.

d/k	10	40	60	100	200	500	1000
λ	0,1005	0,0529	0,0455	0,038	0,0304	0,0234	0,01965

¹ Forschungsheft 356.

Mittlere Werte k für verschiedene Materialien.

Gußeisen neu	0,5 bis 1 mm
„ angerostet.	1 „ 1,5 mm
„ verkrustet.	1,5 „ 3 mm
Zement geglättet	0,3 „ 0,8 mm
„ unbearbeitet.	1 „ 2 mm
Rauhe Bretter	1 „ 2,5 mm
Roher Bruchstein	8 „ 15 mm

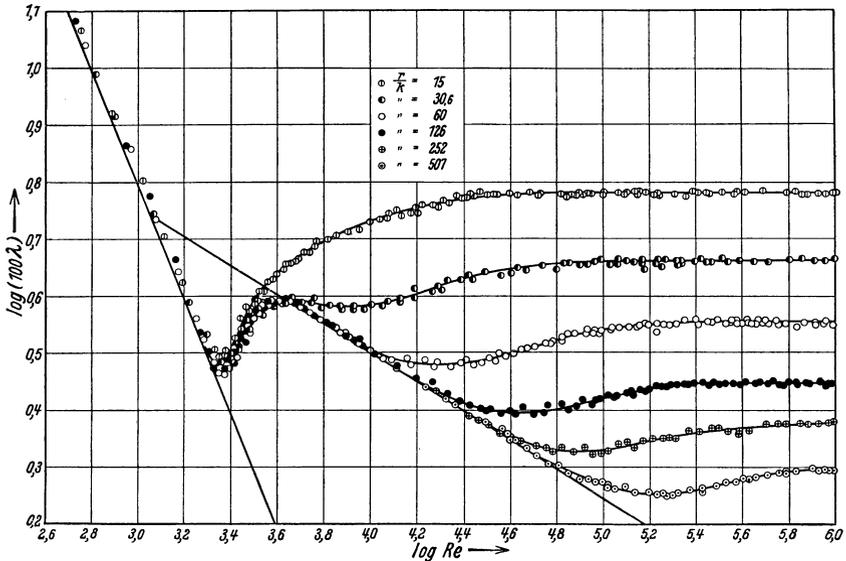


Abb. 100. Widerstandskoeffizient in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl für verschiedene Rauigkeit nach Nikuradse.

Wenn es somit möglich ist, die mittlere Wanderhebung k eines Rohres in etwa festzustellen, gelingt es nach diesen Unterlagen mit ziemlicher Sicherheit, den Rohrwiderstand vorauszuberechnen.

Die logarithmische Auftragung ist hier sehr zweckmäßig, weil dann die beiden Vergleichsmaßstäbe λ_{laminar} und λ_{Blasius} als Geraden mit der Steigung 1:1 und 1:4 erscheinen. In Abb. 100 sind beide Geraden eingetragen. Man erkennt, daß im laminaren Gebiet die Rauigkeit überhaupt keinen Einfluß hat. Die Wanderhebungen werden einfach „geschluckt“. Im turbulenten Gebiet bleiben die λ -Kurven um so länger auf der Blasiusgeraden, je kleiner die Rauigkeiten sind. Man beobachtet deutlich, daß bei jeder Rauigkeit von einer gewissen Reynoldsschen Zahl ab keine Änderung des λ -Wertes mehr eintritt.

d) Geschwindigkeitsverteilung bei der Rohrströmung.

Es ist bisher nicht gelungen, Einzelheiten der turbulenten Strömung genau zu erfassen. Unter Zuhilfenahme von Versuchswerten und

plausiblen Voraussetzungen konnten allerdings äußerst wichtige praktische Erkenntnisse abgeleitet werden.

An einem einfachen Beispiel soll dies gezeigt werden. Unter Annahme des Gesetzes von Blasius ergibt sich nach der Gl. (84) die Schubspannung der Wand aus

$$\tau \cdot \pi \cdot d \cdot l = \Delta p \cdot \frac{\pi d^2}{4}; \quad \tau = \Delta p \frac{d}{4l} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w_m^2 \cdot \frac{d}{4l} = \lambda \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w_m^2.$$

Setzen wir $\lambda_{\text{Blasius}} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$ ein, so erhalten wir

$$\tau = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{w_m \cdot d}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\gamma}{2g} w_m^2 = 0,0396 \cdot \rho^{3/4} \cdot \mu^{1/4} \cdot w_m^{7/4} \cdot d^{-1/4} \sim w_m^{7/4} \cdot d^{-1/4}$$

$$\sim w_{\text{max}}^{7/4} \cdot d^{-1/4}$$

(w_m bedeutet die mittlere Geschwindigkeit, sie wurde prop. w_{max} angenommen),

indem zunächst nur die Abhängigkeit von w und d betrachtet werde. Die zu erwartende Geschwindigkeitsverteilung wird man zunächst mit den einfachsten Funktionen anzunähern versuchen. Wir versuchen eine Potenzfunktion:

$$w = w_{\text{max}} \left(\frac{y}{r} \right)^m; \quad \text{hieraus } w_{\text{max}} = w \left(\frac{r}{y} \right)^m$$

(y bedeutet hier den Wandabstand);

hiermit wird

$$\tau \sim w^{7/4} \left(\frac{r}{y} \right)^{m \cdot 7/4} \cdot r^{-1/4} \sim w^{7/4} \cdot y^{-m \cdot 7/4} \cdot r^{m \cdot (7/4 - 1/4)}.$$

Wenn man nun nach Prandtl und v. Kármán annimmt, daß die Geschwindigkeitsverteilung in der Wandnähe nur von dem Wandabstand y und nicht vom Radius r abhängt, so bringt man dadurch die einleuchtende Tatsache zum Ausdruck, daß die Teilchen in der Wandnähe nichts davon wissen, wie groß der Rohrdurchmesser ist. Bei dieser Annahme muß aber τ unabhängig von r sein; nach der letzten Gleichung ist dies aber nur möglich, wenn der Exponent von r verschwindet.

$$m \cdot \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = 0; \quad \text{hieraus } m = \frac{1}{7}.$$

Damit wird die Geschwindigkeitsverteilung¹

$$w = w_{\text{max}} \left(\frac{y}{r} \right)^{1/7}. \quad (90)$$

Diese unter dem Namen $1/7$ -Gesetz bekannte Beziehung setzt die Gültigkeit des Blasius'schen Gesetzes voraus, das nach S. 106 nur bis $Re = 80000$ Gültigkeit hat. Die außerhalb des Gültigkeitsbereiches des Blasius-

* Für d wurde noch r eingesetzt, da es ja nur auf die Proportionalität ankommt.

¹ Das $1/7$ -Gesetz wurde von v. Kármán gefunden. Siehe z. B. v. Kármán: Über laminare und turbulente Reibung. ZAM. 1921, S. 233.

schen Gesetzes bedingten Abweichungen lassen sich nun — wie Versuche bewiesen haben — sehr gut dadurch berücksichtigen, daß man statt $1/7$ einen anderen Exponenten $1/8; 1/9$ bis $1/10$ setzt. Selbst bei rauhen Röhren kann man durch ein Potenzgesetz die Geschwindigkeitsverteilung noch gut wiedergeben, wenn in

$$w = w_{\max} \left(\frac{y}{r} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (91)$$

n kleiner gewählt wird als der jeweilige Wert des theoretisch glatten Rohres.

Der große Unterschied gegenüber dem laminaren Geschwindigkeitsprofil geht deutlich aus Abb. 101 hervor. Die Turbulenz wirkt demnach weitgehend ausgleichend.

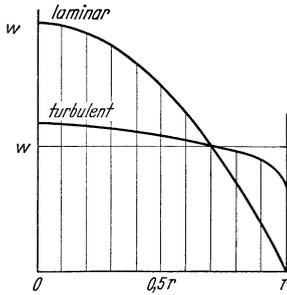


Abb. 101. Turbulente und laminare Geschwindigkeitsverteilung im Rohr.

Anmerkung. Die Brauchbarkeit des Potenzgesetzes kann leicht durch logarithmische Auftragung der Versuchspunkte nachgeprüft werden. Aus Gl. (90) entsteht:

$$\lg w = \lg w_{\max} + \frac{1}{n} \lg \left(\frac{y}{r} \right).$$

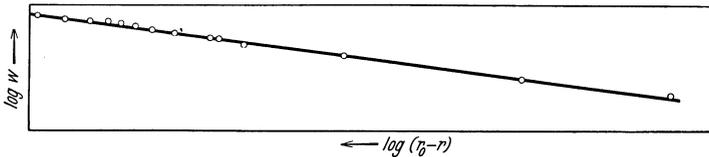


Abb. 102. Logarithmische Auftragung des Geschwindigkeitsprofils.

Es ergibt sich somit eine Gerade, deren Steigung $\frac{1}{n}$ ist. Abb. 102 zeigt nach Ver-

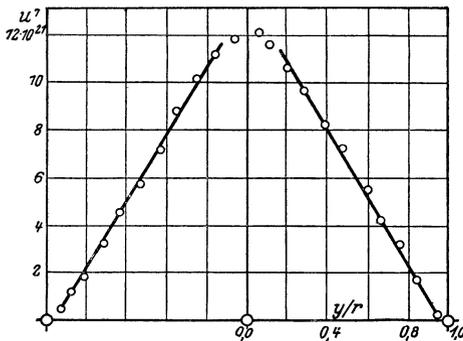


Abb. 103. Auftragung von $u^7 = f(y/r)$ nach Prandtl.

suchen des Verfassers die logarithmische Auftragung eines Geschwindigkeitsprofils. Die Versuchspunkte liegen sehr gut auf einer Geraden. Ein über r aufgetragenes Geschwindigkeitsprofil zeigt Abb. 109 S. 129.

Eine weitere leichte Nachprüfung ist möglich, wenn man nach Abb. 103 u^7 über r aufträgt. Bis auf wenige Punkte in der Mitte ergibt sich gut eine Gerade; dies ist um so bemerkenswerter, als die Voraussetzungen für das $1/7$ Gesetz eigentlich nur in Wandnähe erfüllt sind.

Das Potenzgesetz gestattet leicht, das Verhältnis der mittleren zur Höchstgeschwindigkeit auszurechnen:

$$\frac{w_m}{w_{\max}} = \beta,$$

ein Wert, der aus meßtechnischen Gründen interessiert.

Es ist:

$$w_m = \frac{1}{F} \int w \cdot dF = w_{\max} \frac{2}{\left(\frac{1}{n} + 2\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)} = w_{\max} \cdot \beta. \quad (92)$$

Für die glatte Rohrleitung gibt die folgende Tabelle die Werte n und die mittleren Reynoldsschen Zahlen wieder, bei denen das jeweilige n gilt.

Tabelle.

n	6	7	8	9	10
β	0,791	0,817	0,837	0,853	0,866
Re	nur bei rauhen Rohren	$0,45 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$0,64 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$

e) Die kinetische Energie der Rohrströmung. (Korrekturglied der Bernoullischen Gleichung.)

Die ungleiche Geschwindigkeitsverteilung einer Rohrströmung zwingt zu einer besonderen Berechnung der kinetischen Energie. Durch ein Flächenelement dF des Querschnitts strömt sekundlich das Gewicht $\Delta G = dF \cdot w \cdot \gamma$. Die kinetische Energie dieser Masse ist $\Delta E = \frac{1}{2} \frac{\Delta G}{g} w^2 = \frac{w^3}{2g} \cdot \gamma \cdot dF$. Die Gesamtenergie ergibt sich somit zu $E = \int \frac{w^3}{2g} \gamma dF$.

Würden wir, wie es zunächst nahe liegt, mit einer konstanten mittleren Geschwindigkeit w_m rechnen, so ergäbe sich $E' = \frac{F \cdot w_m^3}{2g} \cdot \gamma$. Mathematisch läßt sich beweisen, daß bei ungleicher Geschwindigkeitsverteilung stets $E > E'$ ist. Für das Verhältnis erhalten wir: $\delta = \frac{E}{E'} = \frac{\int w^3 dF}{w_m^3 \cdot F}$.

Für die praktisch wichtigsten Geschwindigkeitsverteilungen, nämlich die Parabel $w = w_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2\right]$ (laminar) und das Potenzgesetz der ausgebildeten turbulenten Rohrströmung $w = w_{\max} \left(\frac{x}{r_a}\right)^{\frac{1}{n}}$ erhalten wir, wenn wir noch das Verhältnis $\beta = \frac{w_m}{w_{\max}}$ einführen, folgendes

$$\begin{aligned} \text{Parabel } \frac{w_m}{w_{\max}} = \frac{1}{2} = \beta; \quad & \text{Potenzgesetz } \beta = \frac{2}{\left(\frac{1}{n} + 2\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)} \\ \text{Parabel } \delta = 2; \quad & \text{Potenzgesetz } \delta = \frac{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{n} + 2\right)^3}{4 \left(\frac{3}{n} + 1\right)\left(\frac{3}{n} + 2\right)}. \end{aligned}$$

n	6	7	8	9	10	Parabel
β	0,792	0,816	0,837	0,853	0,866	0,5
δ	1,078	1,065	1,048	1,039	1,029	2

Da bei der geraden Rohrströmung der statische Druck für alle Teilchen eines Querschnitts gleich ist, erhalten wir für die Gesamtenergie der Rohrströmung

$$H = p/\gamma + \frac{1}{F \cdot w_m \cdot \gamma} \int \frac{w^3}{2y} \gamma dF = p/\gamma + \delta \cdot \frac{w_m^2}{2g}. \quad (93)$$

δ bezeichnet man auch als Korrekturglied der Bernoullischen Gleichung. Wenn man somit mit dem Staudruck der mittleren Geschwindigkeit rechnet, so muß derselbe mit δ erweitert werden. Im Falle der turbulenten Rohrströmung ergeben sich Korrekturen bis zu 8%. Ist keine ausgebildete Rohrströmung vorhanden, was in der Praxis oft der Fall ist, so wird Gl. (93) am besten graphisch ausgewertet.

32. Eingehendere Betrachtung der Turbulenz.

a) Wandturbulenz.

Wie zuerst Prandtl¹ und v. Kármán gezeigt haben, ist die turbulente Bewegungsform bei plausiblen Annahmen einer gewissen rechnerischen Behandlung tatsächlich zugänglich.

Wir nehmen nach Abb. 104 an, daß das Geschwindigkeitsprofil $w = f(y)$ gegeben sei, und wollen versuchen, uns eine individuelle Vorstellung der Strömungsbewegung zu machen. Die in zwei Schichten eingezeichneten

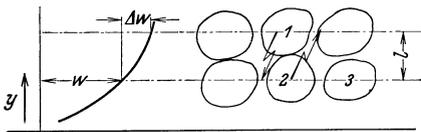


Abb. 104. Schematische Darstellung der turbulenten Bewegungsstruktur.

Flüssigkeitsballen sollen gerade so groß sein, daß ihre Form bei der Querbewegung ungefähr erhalten bleibt. Es leuchtet ein, daß für eine kleine Strecke, z. B. l , eine solche Bewegung tatsächlich möglich ist; danach dürfte

der Ballen allerdings weiter zerfallen und seine individuelle Form verlieren. Man kann fragen, wie groß im Mittel diese „freie Weglänge“ ist.

¹ Prandtl: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. d. VDI. 1933, S. 105.

An der Stelle 2 ist die mittlere Geschwindigkeit w ; an der Stelle 1:

$$w + l \frac{dw}{dy}.$$

Der Ballen von der Masse Δm wird also beim Eindringen in die Bahn 2 seine Geschwindigkeit um $l \cdot \frac{dw}{dy}$ vermindern, während umgekehrt Teilchen der Bahn 1 den entgegengesetzten Weg machen und dabei eine Geschwindigkeitszunahme $l \cdot \frac{dw}{dy}$ erfahren. Die bei der Querbewegung auftretenden Beschleunigungen und Verzögerungen bedeuten aber eine scheinbare Schubspannung in der Zwischenebene. Ihre Berechnung wäre möglich, wenn die Geschwindigkeit w_y der Querbewegung bekannt wäre. Infolge der Kontinuität wird beim Hin- und Herpendeln der Flüssigkeitsteilchen durch Trägheits- und Zähigkeitskräfte die Umgebung dauernd beeinflusst.

Durch folgende Überlegung ist wenigstens die Größenordnung von w_y zu bestimmen. Nehmen wir an, Ballen 1 sei in die Bahn 2 eingedrungen. Das Teilchen 1 nähert sich dann einem anderen Teilchen, z. B. 3 derselben Reihe, mit der Relativgeschwindigkeit $l \cdot \frac{dw}{dy}$. Dies ist aber aus Gründen der Kontinuität nur möglich, wenn das dazwischenliegende Teilchen 2 verdrängt wird und mit annähernd der gleichen Geschwindigkeit in Querrichtung in die Lücke der Reihe 1 einrückt. Man erkennt, daß w_y die Größenordnung von $l \cdot \frac{dw}{dy}$ haben muß. Wir setzen deshalb $w_y = l \cdot \frac{dw}{dy}$. Nunmehr können wir die Schubspannung nach dem Impulsatz berechnen. Durch die Fläche von der Größe l , in der die zu berechnende scheinbare Schubspannung τ wirkt, tritt die sekundliche Masse $l \cdot \rho \cdot l \cdot \frac{dw}{dy}$ hindurch; die Geschwindigkeitsverminderung in der Hauptströmungsrichtung beträgt $l \cdot \frac{dw}{dy}$. Der durchtretende Impuls je Flächeneinheit ist somit $\rho \left(l \cdot \frac{dw}{dy} \right)^2$; dieser muß aber identisch mit der äußeren Kraft sein, d. h. mit der Schubspannung, sodaß wir erhalten:

$$\tau = \rho \left(l \cdot \frac{dw}{dy} \right)^2. \quad (94)$$

So finden wir die Schubspannung τ . Gleichzeitig können wir aus dieser

¹ Nähert man sich der Wand, so spielt die Zähigkeit eine immer größere Rolle, so daß zu Gl. (94) noch das Zähigkeitsglied hinzukommt $\tau = \mu \frac{dw}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{dw}{dy} \right)^2$. In unmittelbarer Wandnähe ist schließlich nur noch laminare Bewegung vorhanden, wo die Beziehung $\tau = \mu \cdot \frac{dw}{dy}$ gilt.

Gleichung l berechnen, wenn z. B. die Schubspannung τ (etwa aus Druckverlustmessungen) und das Geschwindigkeitsprofil bekannt sind.

Der Wert $l \cdot \frac{dw}{dy}$ kann nun in jedem Falle proportional w gesetzt werden. Setzt man dies in Gl. (94) ein, so ergibt sich: $\tau \sim \rho w^2$.

Die Schubspannungen sind also bei turbulenter Bewegung im Einklang mit unseren früheren Annahmen proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Die Reibung ist bei dieser Berechnung nicht in Erscheinung getreten. Die Turbulenz als solche bedingt somit schon eine scheinbare Reibung bzw. eine Schubspannung. Dies gilt indes nur bedingt, da zur Aufrechterhaltung der Turbulenz die Wandreibung notwendig ist. Die Beobachtungen zeigen nun, daß die gleitende Reibung im Hagen-Poiseuilleschen Sinne auf ein ganz kleines Gebiet in der Wandnähe beschränkt bleibt; außerhalb der Wandnähe kann man die Flüssigkeit als praktisch reibungsfrei ansehen.

Eine kleine Anwendung soll zeigen, wie fruchtbar die Einführung des Mischungsweges l ist.

Wie wird sich z. B. der Mischungsweg l in der Nähe einer Wand ändern? An der Wand muß l gleich Null sein, während es mit zunehmendem Abstand wachsen dürfte. Die einfachste Annahme, die man machen kann, ist die, daß sich l proportional mit dem Wandabstand y ändert:

$$l = \kappa \cdot y.$$

Wir setzen dies in die Gl. (94) ein und erhalten:

$$\tau = \rho \cdot \left(\kappa \cdot y \cdot \frac{dw}{dy} \right)^2; \frac{dy}{y} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{1}{\kappa} = dw.$$

Wenn wir nun noch annehmen, daß in Wandnähe τ ungefähr konstant bleibt, so ist diese Gleichung leicht zu integrieren:

$$w = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} (\ln y + C). \quad (95)$$

Damit erhalten wir das Geschwindigkeitsprofil. Die Übereinstimmung mit dem Versuch ist sehr gut¹. Für κ findet man den Wert 0,4. Diese Gleichung hat eine weit allgemeinere Bedeutung als das früher abgeleitete Potenzgesetz. Für praktische Rechnungen ist indes meist das Potenzgesetz bequemer.

b) Einfluß der Wandrauigkeit.

Bei einer rauhen Wand wird die oben erwähnte laminare Strömung sich in der Wandnähe nicht ausbilden können. Dies bedeutet nun für die

¹ Daß für $y = 0$ der Wert $w = \infty$ wird, kommt daher, daß in unmittelbarer Wandnähe die Gleichung ihre Gültigkeit verliert, da dort laminare Strömung

Rechnung sogar eine Vereinfachung. Bei der glatten Rohrleitung hängt das Geschwindigkeitsprofil nur von dem Wandabstand y ab. Bei dem rauhen Rohr wird die mittlere Wanderhebung k noch eine Rolle spielen. Da wir im Sinne des Ähnlichkeitsgesetzes nur bei geometrisch ähnlichen Gebilden Vergleiche anstellen können, werden im Falle einer rauhen Wand bei gleichem y/k ähnliche Verhältnisse zu erwarten sein. Das heißt aber in der mathematischen Sprache, daß w nur eine Funktion von

$$\frac{y}{k} \text{ ist; somit wird } w = f\left(\frac{y}{k}\right).$$

Führt man nun mit diesem Parameter obige Rechnung aus, wobei die Konstante der Gl. (95) durch Versuche bestimmt wird, so erhält man

$$w = 2,5 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln\left(1 + \frac{30 y}{k}\right). \quad (96)$$

Durch eine Koordinatenverschiebung um $k/30$ wurde hierbei erreicht, daß für $y = 0$ auch $w = 0$ ist. Der Vergleich mit den Geschwindigkeitsprofilen bei künstlich veränderter Rauigkeit (Nikuradse) zeigt, daß sehr gute Übereinstimmung vorhanden ist.

c) Besondere Betrachtungen über die Rohrströmung.

Die bisherigen Erwägungen dieses Abschnittes gelten ganz allgemein für glatte und raue Wände. Wenn wir nun zu der Rohrströmung übergehen, ist es nützlich, eine wichtige Tatsache hervorzuheben. Wir betrachten eine Rohrströmung von großer Reynoldsscher Zahl. Die Zähigkeit an der Wand spielt dabei keine Rolle mehr. Im Innern der Strömung herrscht vollkommene Turbulenz. Wovon hängt bei einer solchen Strömung das Geschwindigkeitsprofil ab? Da dieses nach Gl. (94) mit den Mischbewegungen verknüpft ist, können wir auch fragen, wovon diese Mischbewegungen abhängen. Diese sind aber gemäß Gl. (94) nur von den Schubspannungen und damit vom Druckgefälle abhängig. Ist gleiches Druckgefälle vorhanden, so müssen somit alle Geschwindigkeitsprofile zur Deckung zu bringen sein. Es läuft auf das Gleiche hinaus, wenn man sagt, daß der Mischungsweg bei allen turbulenten Rohrströmungen nach der gleichen Funktion zunehmen muß. Die Versuche haben diese Tatsache voll bestätigt. Der Mischungsweg, dimensionslos aufgetragen, d. h. $\frac{l}{r} = f\left(\frac{y}{r}\right)$, ergibt eine parabelartige Kurve, die an der Rohrwand die Neigung 0,4 hat und in der Rohrmitte den Wert $\frac{l}{y} = 0,14$ annimmt. Damit wissen wir gleichzeitig über die Größe der Mischbewegung Bescheid: Die größte Mischbewegung, die überhaupt bei Rohren vorkommen kann, beträgt der Größenordnung nach 14 vH des Rohrhalmessers, wobei wir noch berücksichtigen müssen, daß gemäß der Definition der Gl. (94) der Mischungsweg noch einen Faktor enthält. Die universelle Form des Geschwindigkeitsprofils läßt sich aus Gl. (95) herleiten:

$$w = w_{\max} - \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot 5,75 \lg \frac{r}{y} \quad (97)$$

herrscht. Dieser Schönheitsfehler stört weiter nicht, wenn man einen sehr schmalen Bereich an der Wand von der Rechnung ausschließt.

(τ Schubspannung an der Wand). Die Gültigkeit dieser Formel kann leicht nachgeprüft werden. Trägt man nämlich $\frac{w_{\max} - w}{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}$ in Abhängigkeit von $\lg \frac{r}{y}$ auf, so ergibt sich für alle bekanntgewordenen Versuche, wie zuerst v. Kármán¹ festgestellt hat, eine einzige Kurve.

Für die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich die allgemeine Beziehung

$$\bar{w} = w_{\max} - 4,07 \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (98)$$

Die Zahl 4,07 wurde Göttinger Versuchen entnommen.

Indem wir Gl. (96) auf die Rohrmitte anwenden und aus der Grundgleichung

$$\Delta p \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} w^2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \pi d \cdot l \cdot \tau$$

die Beziehung: $\tau = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho w^2$

einsetzen, erhalten wir die allgemeine Angabe über den Widerstandskoeffizienten:

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{r}{k} + 1,74\right)^2},$$

die bereits S. 109 angegeben wurde.

d) Glattes Rohr.

Auch für das glatte Rohr ist eine ähnliche allgemeine Lösung gelungen. Man findet für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$w = v_x (5,75 \lg \frac{v_x \cdot y}{\nu} + 5,5); \quad v_x = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (99)$$

Hier ist eine neue Reynoldssche Zahl $\frac{v_x \cdot y}{\nu}$ eingesetzt worden, die physikalisch

den Vorgang beherrscht. $v_x = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ ist eine aus der Wandschubspannung gebildete Geschwindigkeit, die praktisch gleich dem Mittelwert der Mischgeschwindigkeit ist.

Für den Widerstandskoeffizienten ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \cdot \sqrt{\lambda}) - 0,8. \quad (100)$$

Es sei bemerkt, daß das Blasius'sche Gesetz, das Kármán'sche $\frac{1}{7}$ -Gesetz usw. nur Näherungsformeln dieser allgemeinen Formeln bedeuten. Da die früheren Formeln sich in mancher Hinsicht für praktische Berechnungen besser eignen, mußten diese Beziehungen vorangestellt werden.

33. Begriff der hydraulischen Glätte.

Aus den Versuchen von Nikuradse (Abb. 100) können schon wertvolle Folgerungen gezogen werden. Im laminaren Gebiet fallen alle Kurven zusammen. Die Rauigkeiten spielen also hier keine Rolle. Die

¹ v. Kármán, Th.: Mechan. Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1930, S. 58.

Wanderhöhen werden von der laminaren Schicht zugedeckt. Aber auch im turbulenten Gebiet wirken nicht alle Rauigkeiten schädlich. Denn nach Abb. 100 folgen die Kurven um so länger der Kurve für das glatte Rohr, je kleiner die Rauigkeit ist. Für eine bestimmte Rauigkeit wird also unterhalb einer bestimmten Reynoldsschen Zahl keine Abweichung von der glatten Wand mehr festzustellen sein. Der physikalische Grund für dieses Verhalten liegt darin, daß auch bei turbulenter Bewegung eine ganz dünne Wand-schicht laminar bleibt, die die Wanderhebungen praktisch glättet und für den Widerstandsmechanismus unwirksam macht. Diese Schichten werden nun nach der späterfolgenden Gl. (111) mit wachsender Reynoldsscher Zahl

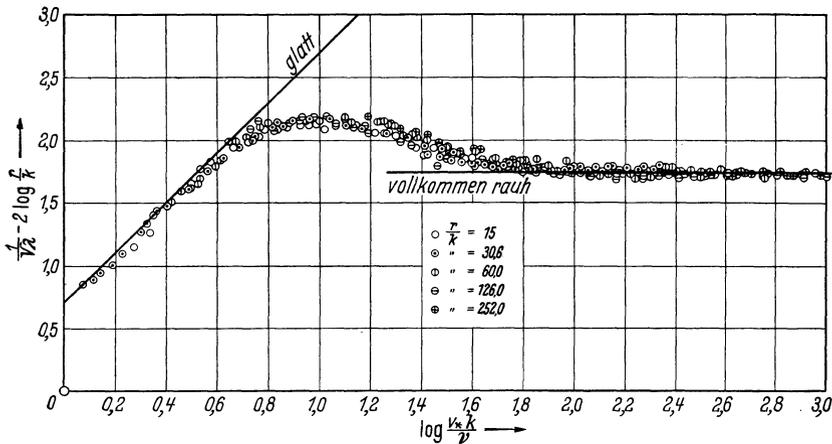


Abb. 105. Rauigkeitsfunktion nach Prandtl.

kleiner, sodaß schließlich bei großen Re -Werten nur mehr kleine Wand-erhebungen unwirksam sind, wie es auch Abb. 100 deutlich zeigt. Nach Gl. (89) muß beim rauhen Rohr der Wert $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \lg \frac{r}{k}$ konstant bleiben. Andererseits wird der Zähigkeitseinfluß einer glatten Wand, wie der Aufbau der Gl. (99) zeigt, sehr gut durch die Wandkennzahl $\frac{v_x \cdot y}{\nu}$ erfaßt. Setzen wir in dieser Kennzahl $y = k$, so wird sich leicht eine Kennzahl $\frac{v_x \cdot k}{\nu}$ angeben lassen, bei der der Rauigkeitseinfluß verschwindet. Beim vollkommen rauhen Rohr, wo die reine Turbulenz ohne Zähigkeit wirkt, ist also zu erwarten, daß $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \lg \frac{r}{k}$ unabhängig von $\frac{v_x \cdot k}{\nu}$ ist, während beim glatten Rohr eine bestimmte Abhängigkeit zu erwarten ist. Trägt man nun nach Prandtl¹ die Versuchspunkte von Nikuradse in dieser

¹ Prandtl, Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. d. VDI 1933, S. 112.

Weise auf, so ergibt sich nach Abb. 105 eine umfassende Scheidung der glatten von der rauhen Wand. Die logarithmische Auftragung stellt für alle Versuche zwei Geraden und ein Übergangsgebiet dar. Für die rauhe Wand ist tatsächlich keine Abhängigkeit von $\frac{v_x \cdot k}{\nu}$ vorhanden.

Dieses Schaubild stellt die Krönung der Prandtl-Kármán'schen Turbulenztheorie für das Rohr dar. Das ganze Rohrreibungsproblem hat damit eine umfassende Lösung erfahren.

Aus Abb. 105 erkennt man deutlich, daß unterhalb der Wandkennzahl $\lg \frac{v_x \cdot k}{\nu} \sim 0,7$ die Wand als hydraulisch glatt bezeichnet werden muß.

Es liegt nahe, dieses Ergebnis auf umströmte Körper zu übertragen. Der Rohrradius entspricht dabei der Grenzschichtdicke und c_{\max} in Rohrmitte der Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht. Auf diese Geschwindigkeit wollen wir Bezug nehmen, da sie praktisch allein bekannt ist.

$$\text{Aus } \bar{w} = w_{\max} - 4,07 v_x \text{ und } \bar{w} = v_x \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$$

$$\text{erhalten wir } w_{\max} = v_x \sqrt{\frac{8}{\lambda}} + 4,07 \cdot v_x.$$

Dann bilden wir

$$\frac{v_x \cdot k}{\nu} = \frac{w_{\max} \cdot k}{\nu} \cdot \frac{v_x}{w_{\max}} = \frac{w_{\max} \cdot k}{\nu} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{\lambda}} + 4,07}.$$

Den Wert $\frac{w_{\max} \cdot k}{\nu}$ wollen wir nach Sörensen¹ die Kornkennzahl nennen und erhalten wegen $\lg \frac{v_x \cdot k}{\nu} = 0,7$ oder $\frac{v_x \cdot k}{\nu} = 5$ die Beziehung

$$\frac{w_{\max} \cdot k}{\nu} = 5 \left[\sqrt{\frac{8}{\lambda}} + 4,07 \right]. \quad (101)$$

Die Abhängigkeit von λ wollen wir im Mittel berücksichtigen. Nach Abb. 100 schwanken die kritischen λ -Werte, d. h. die Punkte, in denen die Trennung von der Kurve der glatten Wand erfolgt, zwischen $0,02 \div 0,04$.

Damit erhalten wir für $\frac{w_{\max} \cdot k}{\nu}$ die Werte 120 und 91.

$$\text{Als mittleren Wert wollen wir } \frac{w_{\max} \cdot k}{\nu} \sim 100 \text{ betrachten.} \quad (102)$$

Unterhalb dieses Wertes ist die Wand hydraulisch glatt, oberhalb rauh. Das Resultat gilt natürlich nur für die unbeschleunigte Strömung. Weiter darf die Zahl ~ 100 nicht als absolut genau genommen werden. Bei verzögerten Strömungen ist sie kleiner, bei beschleunigten größer.

Diese Feststellungen sind von größter praktischer Bedeutung. Denn offensichtlich hat es keinen Zweck, eine Fläche genauer zu bearbeiten,

¹ Sörensen: Einfluß der Wandrauigkeit bei Strömungsmaschinen. Forsch.-Ing.-Wes. Band 8, 1932, S. 25.

als es der Kornkennzahl ~ 100 entspricht. Aus dem Aufbau der Gleichung $\frac{w_{\max} \cdot k}{\nu} = 100$ erkennt man, daß die Bearbeitung um so genauer, d. h. k um so kleiner werden muß, je größer die Geschwindigkeit ist.

Aufgeklebte Sandkörner nach Nikuradse sind die einzigen bisher eindeutig untersuchten Rauigkeiten. Es ist zu erwarten, daß bei anderen Rauigkeiten gewisse Verschiebungen auftreten. Insbesondere haben die technisch bearbeiteten Flächen einen ganz anderen Charakter. Typisch sind hierfür Oberflächen, wie sie sich bei den technisch möglichen Bearbeitungen ergeben. Abb. 106 zeigt einige Beispiele, die Sörensen nach einem Verfahren von Kiesewetter aufgenommen hat. Man erkennt daraus, daß die mittleren Wanderhebungen viel kleiner sind, als

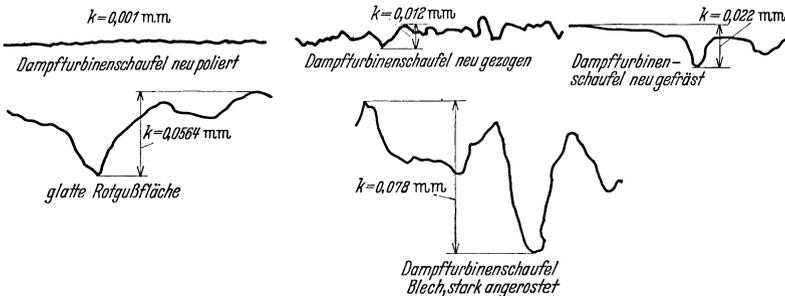


Abb. 106. Profile verschiedener bearbeiteter Oberflächen nach Sörensen

man meistens vermutet. Die Größenordnung der einzelnen Rauigkeitselemente ist stark verschieden. Dadurch wird die Grenze des hydraulisch glatten Zustandes verglichen mit einer gleichen mittleren Rauigkeit erniedrigt, während der Einfluß der Zähigkeit erhöht wird.

Beispiel. Für einen Tragflügel ergibt sich bei einer Geschwindigkeit von $540 \text{ km/std} = 150 \text{ m/s}$ unter Benutzung obiger Gleichung eine zulässige Korngröße

$$k = \frac{100 \cdot \nu}{c} = \frac{100 \cdot 0,14}{15000} = 0,00093 \text{ cm} \rightarrow \sim \frac{1}{100} \text{ mm}.$$

Man erkennt hieraus, daß bei diesen hohen Geschwindigkeiten die Ansprüche an die Oberflächenglätte sehr groß sind.

34. Reibungsverluste in geraden Stahlrohrleitungen.

Obschon durch die Versuche von Nikuradse und die Prandtl-Kármánschen Theorien ein grundlegender Einblick in das Rohrreibungsproblem gewonnen wurde, fehlen noch zwei Erkenntnisse: a) Wie können die technisch vorkommenden Rauigkeiten, deren Struktur im vorigen Abschnitt angedeutet wurde, zahlenmäßig erfaßt werden? b) Wie können genauere Angaben in dem Übergangsbereich erzielt werden, in dem nach den Versuchen von Nikuradse (s. Abb. 100) die λ -Werte von der Blasius'schen Kurve langsam in die konstanten Werte übergehen?

Der letzte Punkt ist deshalb sehr wichtig, weil leider der größte Teil unserer praktischen Anwendungen in diesem Gebiet liegt.

Für das wichtige Gebiet der Stahlrohrleitungen haben die Arbeiten von Bauer und Galavics¹ an der eid. techn. Hochschule in Zürich eine wissenschaftlich und technisch befriedigende Lösung ergeben. Es wurde nachgewiesen², daß die an einem geraden Rohr bestimmten Durchmessers ermittelten Resultate auf solche Rohre anderen Durchmessers übertragen werden können, wenn die Annahme gleicher Wandbeschaffenheit, d. h. gleiche absolute Rauigkeit und gleiche Rauigkeitsform zutreffend ist. Die Richtigkeit dieser Annahme konnte nachgewiesen werden. Ein auf der neueren Erkenntnis der turbulenten Strömung begründetes Übertragungsverfahren wurde entwickelt, das „Die Methode der Rauigkeitscharakteristik“ genannt wurde. Das unter b) erwähnte Übergangsgebiet konnte streng erfaßt werden. Das Ergebnis der sehr beachtlichen Untersuchungen konnte in folgender Formel zusammengefaßt werden, die in Abb. 107 schaubildlich dargestellt ist.

$$\lambda = \lambda_{\text{glatt}} + \frac{0,86 \cdot 10^{-3}}{d^{0,28}} \cdot \left(\lg \frac{Re/d^{1,1}}{10^{5,5}} \right)^{1,75}; \quad d \text{ in m,} \quad (103)$$

gültig für $10^{5,5} < Re/d^{1,1} < 10^{7,6}$.

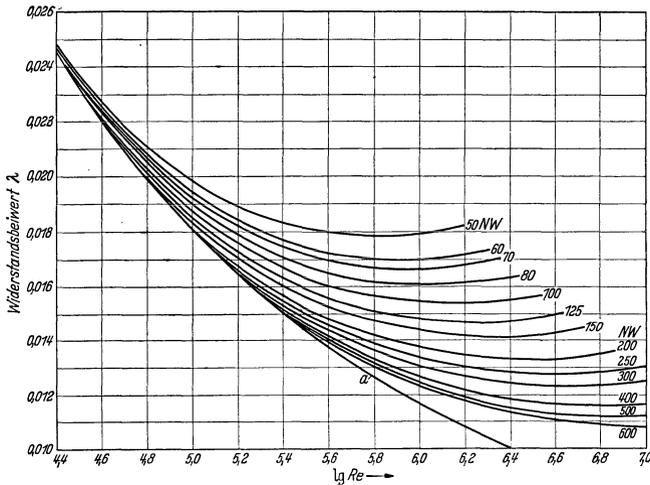


Abb. 107.

35. Druckverlust in ruhenden Schüttungen.

Die Druckverluste, die beim Durchströmen von Gasen durch geschichtete Stoffe entstehen, interessieren hauptsächlich wegen der großen Bedeutung in der Feuertechnik. Beim Durchströmen der Verbrennungsluft durch den Kohlebelag einer Rostfeuerung, beim Durchblasen der Gase durch einen Hochofen, beim Absaugen der Gase aus einem Generator usw. entstehen oft beachtliche Druckverluste, zu deren Überwindung bekanntlich beträchtliche Gebläseleistungen erforderlich sind.

¹ Galavics: Die Methode der Rauigkeitscharakteristik zur Ermittlung der Rohrreibung in geraden Stahlrohr. Fernleitungen. Nr. 12, Schweizer Arch. 1939.

² Die Züricher Untersuchungen benutzen hauptsächlich Versuche von Zimmermann (Arch. Wärmewirtsch. 21 (1940) 131) und Züricher Versuche (Selbstverlag des Fernheizkraftwerkes der ETH. Zürich 1936).

Das Problem erscheint zunächst hoffnungslos verwickelt, da außer den bei der Rohrreibung vorkommenden Kennzahlen (Reynoldsche Zahl, Rauhgigkeit) weitere hinzukommen und zwar a) die Korngestalt, b) die Kornlage zur Strömung, c) die Korngrößenverteilung, d) das Lückenvolumen, e) Wandeinfluß usw.

Während die früheren Forscher das ganze Problem mehr als Ergänzung der Filterversuche und der Durchlässigkeit des Bodens betrachteten, ist neuerdings erst eine gewisse Klärung eingetreten, nachdem Furnas¹ Untersuchungen bei höheren Reynoldschen Zahlen anstellte und seitdem man die Forschungsmethoden der modernen Strömungslehre, insbesondere die Ähnlichkeitsgesetze beachtete und unter Beachtung dieser Beziehungen systematische Versuche anstellte. Barth und Esser², Rosin³, Chilton und Colburn⁴ erreichten so bereits wertvolle Einblicke. Eine systematische Sichtung der bisherigen Erkenntnisse gelang aber erst Fehling⁵ in einer ausgezeichneten Studie. Die bemerkenswerten Ergebnisse dieser Arbeit sollen im folgenden kurz zusammengefaßt werden.

1. Versuche mit Kugelschüttungen.

Zur Erreichung grundsätzlicher Einblicke sind Versuche mit Kugelschüttungen sehr wertvoll. Die Anzahl der Parameter wird hier geringer, das Lückenvolumen ist genau bestimmbar, die Oberflächenbeschaffenheiten sind die gleichen usw.

Die Meßergebnisse können durch folgende Gleichung erfaßt werden.

$$\Delta p = \psi_k \cdot \frac{\gamma}{2g} c^2 \cdot \frac{h}{d_m} \frac{1}{V_\infty^4}.$$

ψ_k = Beiwert der Kugelströmung für Umströmung als Einzelkörper.

h = Schichthöhe der Schüttung in m.

d = Korngröße der festen Körper in m.

V_∞ = prozentuales Lückenvolumen der Schüttung in m³/m³, d. h. freier Raum in der Schüttung/Gesamtraum ohne Schüttung.

Bei endlicher Ausdehnung der Schüttung z. B. in einem zylindrischen Gefäß vom Durchmesser D ist das Lückenvolumen $V = V_\infty \left(1 + 8 \frac{d_m}{D}\right)$.

c = Gaseschwindigkeit, bezogen auf den freien Raum über bzw. unter der Schüttung in m/s.

Bemerkenswert sind folgende Folgerungen der Fehlingschen Untersuchung.

1. Der Widerstandsbeiwert ψ_k ist genau so groß wie bei der Umströmung der Einzelkugel. Gültigkeitsbereich $Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = 20 \div 300$.

2. Der Exponent des prozentualen Lückenvolumens ist für den ganzen Bereich gleich 4, unabhängig davon, ob die Schüttung locker oder dicht ist.

3. Der Widerstand ist dem Verhältnis h/d_m linear proportional.

Unter $Re=20$ scheint ψ_k vom Beiwert der Kugel abzuweichen und sich dem Beiwert der laminaren Rohrreibung zu nähern. Daraus würde folgen, daß die Durchströmung bei kleinen Re -Werten mehr dem Charakter der Kanalströmung folgt (Filter!), um später (d. h. im wichtigsten Anwendungsgebiet) mehr der Umströmung des Einzelkörpers zu folgen.

¹ Furnas, C. C.: U. S. Bureau of Mines, Bull. 307. Washington 1929.

² Barth, W. und Esser: Forschung 4 (1933) 82.

³ Rosin, P.: Trans. Inst. Chem. Eng. 15 (1937) 167.

⁴ Chilton, T. H. und A. P. Colburn: Ind. Eng. Chem. 23 (1931) 913.

⁵ Fehling, R.: Feuerungstechn. 27 (1939) 33.

2. Versuche mit Kohle und anderen Schüttkörpern.

Die Auswertung von umfangreichen Versuchen führte zu der Gleichung

$$\Delta p = \psi_k \frac{h}{d_m} \frac{\gamma}{2g} \cdot c^2 \frac{m}{V^4}, \quad (105)$$

die sich von Gl.(104) nur durch den Koeffizienten m unterscheidet. Fehling fand für Kohle $m = 2,6 \div 2,7$, ein Wert, der wahrscheinlich auch für die meisten unregelmäßigen Schüttungen gültig ist. ψ_k ist wieder der Kugelwiderstandskoeffizient.

Wichtige Folgerungen der Fehlingschen Untersuchungen.

1. Für Kohle existiert eine kritische Korngröße, unterhalb derer das Lückenvolumen und damit der Widerstand so großen statistischen Schwankungen ausgesetzt ist, daß Feinkorn unterhalb dieser Grenze wenig für ruhende Schüttungen geeignet ist. Wahrscheinlich neigen so lockere natürliche Schüttungen stark zu Kanalbildungen.

2. Oberhalb einer bestimmten Korngröße konnte im untersuchten Bereich kein nennenswerter Einfluß der Klassierung gefunden werden.

36. Besondere Bemerkungen.

Die Verbindungsstellen der Rohre, die handelsüblich in Längen von 6 bis 10 m vorhanden sind, erhöhen den Widerstand.

Bei genauen Vorausbestimmungen der Widerstände ist eine sehr genaue Bestimmung des Rohrdurchmessers d notwendig. Denn bei gleicher Durchflußmenge verhalten sich die Druckverluste wie $\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^5$, was aus dem Aufbau der Gl. (84) leicht ersehen werden kann. Ändert sich somit der Durchmesser nur um 1 vH., so ändert sich der Widerstand bereits um 5 vH.

Da bei Wasserleitungen durch Ansätze, Korrosionen usw. die Durchmesser oft merklich verkleinert werden, ergeben sich hier sehr große Widerstandsvergrößerungen, die in erster Näherung mit $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^5$ wachsen.

$\frac{d_2}{d_1}$	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,8	0,7
$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^5$	1,05	1,106	1,165	1,23	1,292	1,694	3,052	5,95

Bei überschlägigen Berechnungen genügt es meist, für λ einen Wert von 0,02 bis 0,03 anzunehmen.

37. Rohrreibungswiderstand bei pulsierender Durchflußströmung.

Wenn die Durchflußmenge zeitlich rhythmischen Änderungen unterworfen ist, ergibt sich ein größerer Widerstand, als wenn die gleiche Menge mit konstanter Mittelgeschwindigkeit durch ein Rohr befördert wird. Die durch Kolbenmaschinen angesaugten oder gedrückten Gase oder Flüssigkeiten bedingen derartige Verhältnisse, die praktisch eine große Rolle spielen.

Eine beachtliche Klärung dieser äußerst verwickelten Strömungen ist jüngst durch eine im Prandtl'schen Institut ausgeführte Arbeit von F. Schultz-Grunow erfolgt¹. Bei pulsierender Strömung treten zeitlich verzögerte Strömungen auf. Es ergab sich eine auffällige Analogie der zeitlich verzögerten Strömung

¹ Schultz-Grunow, F.: Pulsierender Durchfluß durch Rohre. Forschung A, 1940, S. 170.

mit der später beim Ablösungsproblem behandelten örtlich verzögerten Strömung. Insbesondere konnten auch ähnliche Ablösungen beobachtet werden. Vom wissenschaftlichen Standpunkt ist besonders interessant, daß der Vorgang von den gleichen Kennzahlen beherrscht wird wie die Diffusorströmung von Nikuradse.

Für den Widerstandskoeffizienten einer pulsierenden Strömung konnte Schultz-Grunow folgendes Gesetz aufstellen:

$$\lambda_P = \lambda_{\text{stat}} \cdot \varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{\int_0^T \frac{11}{c} \cdot dt}{c \cdot T} \quad (106)$$

Hierbei bedeutet λ_{stat} eine fiktive, mit dem zeitlichen Mittelwert \bar{c} gebildete Rohrwiderstandszahl, die bekannten Gesetzen entnommen werden kann (S. 110). Zur Auswertung der Formel muß der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit c bekannt sein. Für eine Zweizylinder-Viertaktmaschine berechnete z. B. Schultz-Grunow den Wert $\varepsilon = 7,3$, d. h. der Widerstand ist 7,3mal so groß, wie wenn die gleiche Menge ohne Pulsation angesaugt wird.

38. Aufwertung.

Es ist den Ingenieuren seit langem bekannt, daß bei geometrischer Vergrößerung der hydraulischen Maschinen der Wirkungsgrad etwas besser wird. Diese als „Aufwertung“ bekannte Erscheinung, die bis zu 6 vH. des Wirkungsgrades betragen kann, läßt sich einigermaßen rechnerisch verfolgen. Physikalisch hängt sie einfach damit zusammen, daß mit größerer Reynoldsscher Zahl der Widerstandskoeffizient kleiner wird. Dabei ist zunächst voranzusetzen, daß die Wände „hydraulisch“ glatt sind. Bei rauhen Wänden bleibt, wie ein Blick auf Abb. 100 zeigt, der Widerstandskoeffizient konstant, solange das Verhältnis k/d konstant bleibt.

Die Durchflußquerschnitte der hydraulischen Maschinen können letzten Endes alle als Kanalquerschnitte aufgefaßt werden, sodaß die für die Rohrleitung abgeleiteten Regeln verwendet werden können. Beschränken wir uns hier auf den Gültigkeitsbereich des Blasius'schen Gesetzes — was übrigens für viele hydraulische Maschinen zutrifft — so ist gemäß Gl. (86) $\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}$. Der durch Reibung entstehende Druckverlust beträgt dann gemäß Gl. (109)

$$\Delta p_{\text{Verl}} = \lambda \frac{l}{F} \cdot \frac{\rho}{2} c^2,$$

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}$$

wo l, F, U mittlere Werte des Durchflußkanals und c die mittlere Durchflußgeschwindigkeit sein sollen, deren genauere Bestimmung hier unwichtig ist. Andererseits kann der in der Maschine erzeugte bzw. verarbeitete Gesamtdruck durch $\Delta p = C \cdot \frac{\rho}{2} c^2$ erfaßt werden. Damit

wird der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\Delta p - \Delta p_{\text{Verl}}}{\Delta p}; \quad 1 - \eta = \frac{\Delta p_{\text{Verl}}}{\Delta p} = \lambda \frac{l}{4} \frac{F}{U} \cdot \frac{1}{C}.$$

Wird nun die Maschine geometrisch ähnlich vergrößert, so bleibt das Verhältnis $\frac{l}{4} \frac{F}{U}$ ebenso wie C konstant. Für den Vergleich ergibt sich

somit unter Berücksichtigung von Gl. (86):

$$\frac{1 - \eta_1}{1 - \eta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt[4]{\frac{Re_2}{Re_1}}. \quad (107)$$

Die Verluste ändern sich also mit der vierten Wurzel aus den Reynoldsschen Zahlen.

Genauere Aufwertungsversuche sind erstmalig von Escher-Wyss in Zürich ausgeführt worden. Die Reynoldssche Zahl wurde bei diesen Versuchen dadurch geändert, daß bei einem mit Luft betriebenen Schraubengebläse der Druck schrittweise von 1 auf 5 at erhöht wurde. $Re = \frac{c \cdot d}{\nu}$ wird also durch Änderung von $\nu = \frac{\mu \cdot g}{\gamma}$ geändert.

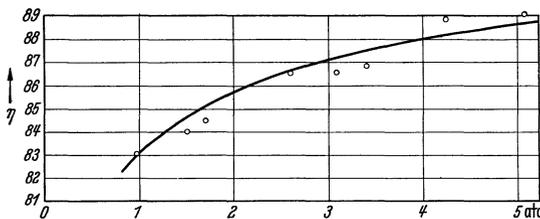


Abb. 108. Gemessene η -Werte für die Aufwertung (Punkte) verglichen mit der Aufwertungsformel zeigen, wie sich beim Luftversuch durch Druckvariation der Größenunterschied zwischen Modell und Original überbrücken läßt. (Nach Escher-Wyss.)

Dieses Verfahren hat den großen Vorteil, daß einmal nur eine Ausführung nötig ist und die Oberflächenbeschaffenheit der Wand exakt konstant bleibt. Mit dem Modell kann die gleiche Reynoldssche Zahl wie bei der Ausführung eingestellt werden. Die in Abb. 108 dargestellten Versuchsergebnisse, bei denen Re im Verhältnis 1:5 geändert wurde, gestatten nun erstmalig eine Überprüfung der eben angegebenen Aufwertungsformel. Die Kurve nach Gl. (107) ist in Abb. 108 eingetragen. Man erkennt, daß die Versuchswerte leidlich genau dieser Kurve folgen.

Die angegebene Formel gilt natürlich nur, wenn reine Reibungsverluste an glatten Wänden vorliegen und keine Ablösung auftritt. Die Ablösungsverluste bleiben meist konstant. Dies ist immer der Fall, wenn sie durch scharfe Kanten verursacht werden. In anderen Fällen ist die Durchschreitung eines kritischen Re -Wertes gemäß den S. 174 dargelegten Betrachtungen möglich. Ob solche nicht aufwertungsfähigen Verluste vorliegen, kann an der Höhe des Wirkungsgrades erkannt werden, ohne daß z. Zt. eine genaue Trennung möglich wäre. Einen Anhalt mag fol-

gende Angabe bieten. Wenn bei Turbinen der Wirkungsgrad $> 0,82$ und bei Pumpen $> 0,75$ ist, kann damit gerechnet werden, daß reine Reibungsverluste vorliegen.

Für das Modellversuchswesen ist die Frage der Aufwertung von großer Bedeutung. Sie entscheidet oft die kleinstmögliche Modellausführung, wobei sich folgende Tendenz ausprägt: Bei sehr schlechten Maschinen, z. B. bei billigen Ventilatoren, sind prozentual fast ausschließlich triviale Ablösungsverluste, d. h. nicht aufwertbare Verluste, vorhanden. Der Wirkungsgrad eines solchen Ventilators kann somit bereits am kleinsten Modell genau nachgewiesen werden. Verfasser konnte diese Auffassung durch Vergleich mit Laufrädern von 140 mm \varnothing bestätigen. Bei hochwertigen Maschinen müssen meist größere Modelle verwendet werden, da bestimmte kritische Bereiche nicht unterschritten werden dürfen. So ist z. B. eine Umrechnung nach obiger Basis sinnlos, wenn beim Modell sich eine laminare Grenzschicht ergibt und die Ausführung bereits einen Umschlag in turbulente Grenzschicht zeigt. Wegen dieser Beschränkung ist bei hochwertigen Maschinen nicht mit extrem kleinen Modellen auszukommen.

Sind die Wände nicht hydraulisch glatt, so wird der Einfluß der Wandrauigkeit nach früheren Darlegungen durch die Gleichung

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{r}{k} + 1,74\right)^2}$$

erfaßt. Sehr einfach wird die Ausrechnung, wenn in beiden Fällen gleiche Wandbeschaffenheit vorliegt, z. B. bei Verwendung einer gleichen Bearbeitung für Modell und Großausführung. In diesem Falle bleibt k konstant, während r sich proportional der Modellvergrößerung ändert. Ist z. B. beim Modell $r/k = 100$, so würde sich bei zweifacher Modellvergrößerung folgende Verringerung der Verluste ergeben:

$$\frac{1 - \eta_1}{1 - \eta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{2 \lg 100 + 1,74}{2 \lg 200 + 1,74}\right)^2 = 0,82.$$

Voraussetzung ist natürlich wieder, daß keine Ablösung eintritt.

Daß Wirkungsgradänderungen dieser Größenordnung bei hervortretender Rauigkeit tatsächlich auftreten, haben sehr deutlich Versuche von Kempf¹ ergeben, der Schiffspropeller mit aufgeklebten Sandkörnern untersuchte.

39. Anlaufstrecke.

Die bisher behandelten Widerstandskoeffizienten und Geschwindigkeitsprofile gelten für die „ausgebildete Rohrströmung“. Darunter versteht man eine Rohr-

¹ Kempf: Neuere Versuchsverfahren der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt. Z. VDI 1926, S. 836.

strömung, bei der sich das Geschwindigkeitsprofil nicht mehr ändert. Erklärlicher Weise ist dies erst ein Stück hinter dem Einlauf zu erwarten.

Handelt es sich, wie bei vielen praktischen Fällen — z. B. bei Kühlrohren — um kurze Stücke, so ist der endgültige Beharrungszustand noch nicht erreicht. Bei gut abgerundetem Einlauf wird durchweg eine konstante Geschwindigkeitsverteilung im Eintrittsquerschnitt der Rohrleitung vorhanden sein. Da an der Wand das Geschwindigkeitsgefälle dann größer ist als beim endgültigen Zustand, so sind auch die Schubspannungen größer und damit die Widerstandskoeffizienten. Abgesehen von der hierdurch bedingten Vergrößerung des Druckabfalles tritt ein weiterer Druckabfall dadurch ein, daß bei konstanter Verteilung der Geschwindigkeit die gesamte kinetische Energie kleiner ist als im ausgebildeten Zustand. Dies bedingt eine weitere Drucksenkung, die nach Bernoulli leicht berechnet werden kann.

Laminare Anlaufstrecke. Für die laminare Rohrströmung wurde bereits S. 113 das Korrekturglied, d. h. das Beschleunigungsglied der Bernoullischen Gleichung zu $\delta=2$ ermittelt, d. h. im Einlauf der Rohrströmung muß zur Beschleunigung der zuerst gleichmäßig verteilten Strömung und zur Beschleunigung infolge der anschließenden parabolischen Geschwindigkeitsverteilung ein Unterdruck eintreten von der Größe

$$2 \varrho/2 w_m^2.$$

Hinzu kommt dann noch die Reibung in der Anlaufstrecke. Die Messungen ergeben einen Gesamtwert von

$$2,16 \frac{\varrho}{2} w_m^2.$$

Als Anlaufstrecke bezeichnet man die Länge, nach der das Geschwindigkeitsprofil sich weniger als 1% vom endgültigen Zustand unterscheidet.

Ist die Länge der Anlaufstrecke x , so gilt hierfür nach Schiller¹

$$\frac{x}{d} = 0,029 Re_x, \quad (108)$$

während von Boussinesq in Übereinstimmung mit Tietjens der größere Wert $\frac{x}{d} = 0,065 Re_x$ angegeben wird. (Der Unterschied zwischen der Schillerschen und Boussinesqschen Angabe ist dadurch begründet, daß die rein theoretische Ermittlung von Schiller im Kern reibungsfreie Strömung annimmt, was am Ende der Anlaufstrecke nicht mehr ganz zutrifft. Den tatsächlichen Endwert gibt die Boussinesqsche Formel besser an.)

$$\text{Bei } Re = 1000 \text{ ist z. B. } \frac{x}{d} = 0,065 \cdot 1000 = 65,$$

d. h. erst nach 65 Durchmessern ist eine parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung vorhanden.

Für die turbulente Anlaufstrecke ergibt sich nach der Bernoullischen Gleichung ebenfalls ein Druckabfall wie oben, der jedoch wegen der volleren Geschwindigkeitsverteilung wesentlich kleiner ist. Mit $w = w_{\max} \left(\frac{y}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $w_m = \frac{49}{60} w_{\max}$ wurde dieser bereits auf S. 114 zu $\sim 0,065 \frac{\gamma}{2g} w_m^2$ berechnet, d. i. nur ein Bruchteil des Wertes bei der laminaren Strömung. Hinzu kommt

¹ Eingehende Untersuchungen über alle Fragen des laminaren Anlaufs stammen von Schiller. Ihm ist es auch gelungen, eine mit Versuchen sehr gut übereinstimmende theoretische Formel über den Druckverlust in der laminaren Anlaufstrecke zu finden. Wien-Harms: IV. 4.

bei scharfkantigem Einlauf ein durch Kontraktion bedingter Verlust. Rechnet man wieder den Druckhöhenverlust $\frac{\gamma}{2g} w_m^2$ durch die Entstehung von w_m im Einlauf hinzu, so erhält man $\sim 1,4 \frac{g}{2} w_m^2$. Eine weitere Vergrößerung kann eintreten, wenn die Flüssigkeit bereits eine drehende Bewegung hat, die bei Verengung des Querschnittes die Umfangsgeschwindigkeiten nach dem Drallsatz merklich erhöht.

Die turbulente Anlaufstrecke ist durchweg kürzer und hängt bei scharfkantigem Einlauf kaum von der Reynoldsschen Zahl ab. Bereits nach etwa 10 Durchmessern ist eine der endgültigen Kurve sehr verwandte Geschwindigkeitsverteilung vorhanden. Man kann damit rechnen, daß das endgültige Profil nach 30–40 Durchmessern mit Sicherheit erreicht wird. Abb. 109 zeigt die Geschwindigkeitsprofile für Anlaufstrecken gleich dem 40-, 65- und 100fachen des Durchmessers (nach Messungen von Nikuradse). Eine Änderung des Profiles ist hier nicht mehr vorhanden.

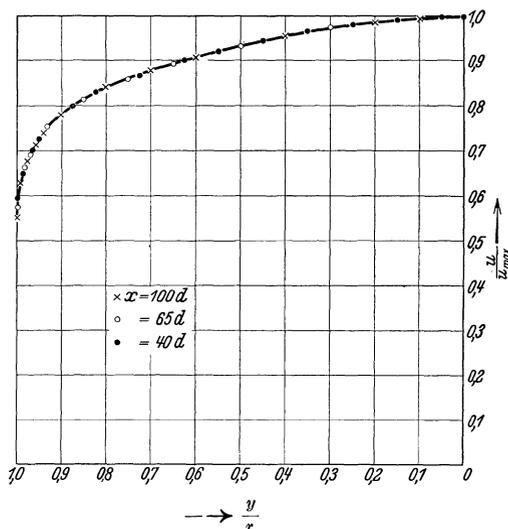


Abb. 109. Geschwindigkeitsprofile bei verschiedenen Anlaufstrecken nach Messungen von Nikuradse.

Bei abgerundetem Einlauf und hohen Reynoldsschen Zahlen haben die Einlaufverhältnisse große Ähnlichkeit mit der Grenzschichtentwicklung bei der parallel angeströmten Platte. Die Länge l der laminaren Grenzschicht ist nach S. 134 etwa $\frac{w \cdot l}{\nu} = 300000$. Durch Einführung des Rohrdurchmessers ergibt sich bei Übertragung auf das Rohr

$$\frac{w \cdot l}{\nu} = \frac{w \cdot d}{\nu} \cdot \frac{l}{d} = 300000; \quad \frac{l}{d} = \frac{300000}{\frac{w \cdot d}{\nu}} = \frac{300000}{Re}.$$

Praktisch von großer Bedeutung ist die Frage nach dem Reibungskoeffizienten λ in der Anlaufstrecke. Es ist einleuchtend, daß λ hier größer werden muß, da das Geschwindigkeitsgefälle an der Wand und damit auch die Schubspannung größer ist. Von Möbius¹ liegen Messungen vor, bei denen die Anlaufstrecke bis zu 18 Rohrdurchmessern verkürzt wurde. Hierbei wurde eine 13proz. Vergrößerung von λ gegenüber den Werten der ausgebildeten Rohrströmung festgestellt. Für noch kürzere Anlaufstrecken liegen leider noch keine Messungen vor. Gerade dieses Gebiet interessiert nun praktisch am meisten, weil z. B. die Schaufelkanäle unserer Kreiselmotoren Kanäle von etwa 3–6 Rohrdurchmessern entsprechen. Es ist mit Sicherheit anzunehmen, daß in diesem Gebiet noch eine erhebliche Steigerung von λ eintreten wird. Um einigermaßen sicher zu gehen, muß hier einstweilen mit $1,5 \cdot \lambda$ gerechnet werden.

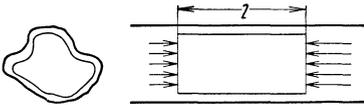
¹ Wien-Harms IV., 4, S. 92.

40. Strömung in geraden Rohren nicht kreisförmigen Querschnittes.

Bei unrundem Querschnitt, etwa nach Abb. 110, geht man genau so vor wie beim Kreis. Man betrachtet das Gleichgewicht eines Zylinders von der Länge l und dem gegebenen Querschnitt. Ist die Schubspannung an der Wand — wie zunächst angenommen wird — konstant und der Druckabfall Δp , so ergibt die Gleichgewichtsbedingung:

$$\tau \cdot U \cdot l = \Delta p \cdot F; \quad \Delta p = \tau \frac{l}{F/U}.$$

(U bedeutet hier den Umfang des betrachteten Querschnittes.) Für den Kreis ergibt die gleiche Rechnung [s. Gl. (84)]:



$$\Delta p = \tau \frac{l}{\frac{\pi d^2}{4} / \pi d} = \tau \frac{l}{d/4},$$

Abb. 110. Kräftegleichgewicht bei Rohren von unrundem Querschnitt.

d. h. führen wir für F/U eine Länge a , den sog. „hydraulischen Radius“, ein, so besteht Übereinstimmung mit der Kreisformel, wenn d durch $4a = 4F/U$ ersetzt wird.

Versuche von Schiller, Fromm und Nikuradse haben nun gezeigt, daß tatsächlich die aus der Formel für das Kreisrohr

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} w^2$$

entnommenen Werte von λ für unrunde Querschnitte verwendet werden können, wenn d durch $4 \cdot F/U$ ersetzt wird.

Bei unrunder Querschnitten wird man somit die Formel

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{4 \frac{F}{U}} \cdot \frac{\rho}{2} w^2 \quad (109)$$

verwenden, die Reynoldssche Zahl entsprechend

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{w \cdot 4 \frac{F}{U}}{\nu} \quad (110)$$

wählen und die λ -Werte des Kreisrohres einsetzen.

Für die laminare Strömung gelten diese Betrachtungen nicht!

Beispiele: 1. Es liegt ein Turbinenrohr von 300 m Länge und $d = 300$ mm \varnothing vor, dessen Wandbeschaffenheit als theoretisch glatt bezeichnet werden soll. Die Geschwindigkeit sei 2,5 m/s. Druckverlust?

$$Re = wd/\nu = 250 \cdot 30/0,01 = 750\,000.$$

Für diesen Bereich kommt das Gesetz von Hermann in Frage;

$$\lambda = 0,0054 + 0,396 \cdot 1/Re^{0,3} = 0,0054 + 0,396 \cdot 1/750\,000^{0,3} = 0,01228;$$

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{\gamma}{2g} w^2 = 0,01228 \cdot \frac{300}{0,3} \cdot \frac{1000}{2 \cdot 9,81} \cdot 2,5^2 = 3900 \text{ kg/m}^2,$$

d. h. $\Delta p = 0,39$ at.

2. Für eine Wasserleitung von 2 km Länge, 60 mm \varnothing , 18 Krümmer und 6 Schieber, soll die Pumpenleistung bei einer Geschwindigkeit von 1,5 m/s in der Rohrleitung bestimmt werden.

Bei Annahme eines asphaltierten Rohres ist nach S. 109 mit einer Welligkeitszahl $\xi = 1,5$ zu rechnen. Es wurde der obere Wert gewählt, um die rechnerisch nicht erfaßbare Widerstandserhöhung der Rohrübergangsstellen in etwa zu berücksichtigen.

$$Re = 150 \cdot 6/0,01 = 90000; \quad \lambda_{\text{Blasius}} = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0,316}{\sqrt[4]{90000}} = 0,01823,$$

somit $\lambda = \xi \cdot \lambda_0 = 1,5 \cdot 0,01823 = 0,0273$.

Für die Krümmer werde nach S. 141 mit $\zeta = 0,5$ gerechnet, für die Schieber (offen) mit $\zeta = 0,05$.

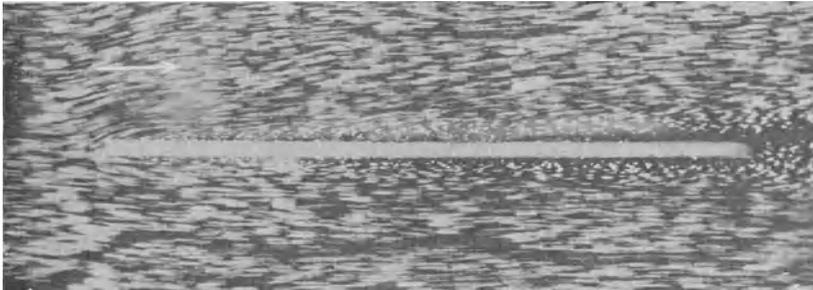


Abb. 111. Umströmung einer Platte in Längsrichtung. Die Grenzschicht ist deutlich zu erkennen.

Folgende Einzelwiderstände sind vorhanden:

$$\text{a) Rohrleitung: } \Delta p_1 = \lambda \frac{l}{d} \frac{\gamma}{2g} w^2 = 0,0273 \cdot \frac{2000}{0,06} 114,8 = 104\,600 \text{ kg/m}^2,$$

$$\text{Staudruck } q = \frac{\gamma}{2g} w^2 = \frac{1000}{2 \cdot 9,81} \cdot 1,5^2 = 114,8 \text{ mm WS},$$

$$\text{b) Krümmer: } \Delta p_2 = 18 \cdot \zeta \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w^2 = 18 \cdot 0,5 \cdot 114,8 = 1032 \text{ kg/m}^2,$$

$$\text{c) Schieber: } \Delta p_3 = 6 \cdot \zeta \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w^2 = 6 \cdot 0,05 \cdot 114,8 = 34,5 \text{ kg/m}^2,$$

$$\text{Gesamtwiderstand: } \Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 = 104\,600 + 1032 + 34,5 \\ = 105\,660 \text{ kg/m}^2 \text{ bzw. mm WS},$$

somit $\Delta h = 105,660 \text{ m}$, d. h. $\Delta p = 10,566 \text{ at}$,

$$\text{Wassermenge } V = w \cdot F = 1,5 \frac{\pi 6^2}{4} \cdot 10^{-4} = 42,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow 4,24 \cdot \text{l/s} \\ \rightarrow 4,24 \text{ kg/s};$$

theoretische Pumpenleistung $N = G \cdot \Delta h/75 = 4,24 \cdot 105,7/75 = 5,96 \text{ PS}$.

Da hier eine Kolbenpumpe in Frage kommt, kann mit einem $\eta_{\text{Pumpe}} = 0,82$ gerechnet werden. Antriebsleistung $N_e = 5,96/0,82 = 7,27 \text{ PS}$.

41. Oberflächenwiderstand.

Eine in Strömungsrichtung gebrachte Platte zeigt den Oberflächenwiderstand in Reinkultur. Die Aufnahme der Abb. 111 läßt deutlich er-

kennen, daß keine Ablösung vorhanden ist, wohl aber eine in Strömungsrichtung zunehmende Schicht an der Platte, in der die Geschwindigkeiten schnell bis auf Null abnehmen. Es ist so, daß außerhalb dieser Schicht, die man nach Prandtl Grenzschicht nennt, eine der reibungsfreien Flüssigkeit entsprechende Geschwindigkeit vorhanden ist. Hinter der Platte befindet sich eine die beiderseitige Grenzschichtdicke umfassende Schleppe, die das durch die Reibung verzögerte Material enthält.

a) Grenzschichtbetrachtungen.

Eine wichtige Feststellung ist zunächst folgende. Bei jedem umströmten Körper teilt sich die Strömung an einem bestimmten Punkt, den man Staupunkt nennt. An dieser Stelle wird die Geschwindigkeit gleich Null. Das bedeutet aber auch, daß an dieser Stelle jede turbulente Mischbewegung aufhört, selbst wenn die Gesamtströmung noch so turbulent ist. Vom Staupunkt aus erfolgt dann eine Beschleunigung längs der Verzweigungsstromlinie, die in jedem Falle nur laminar sein kann, ebenso wie die Bewegung in der Anlaufstrecke einer Rohrleitung. Es wird sich also eine laminare Grenzschicht bilden, die im weiteren Verlauf durch irgendwelche Störungen turbulent werden kann. Dieser Umschlag von der laminaren zur turbulenten Grenzschicht ist nun für das ganze Problem von sehr großer Bedeutung und beschäftigt die moderne Strömungsforschung schon im Hinblick auf den Tragflügel erheblich. In der späteren Abb. (125) ist der Vorgang schematisch dargestellt. Am Umschlagpunkt bildet sich eine Art Ablösung, jedoch so, daß die turbulente Vermischungszone, d. h. die Grenzschicht, an der Wand liegen bleibt.

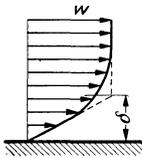


Abb. 112.
Darstellung einer
Grenzschicht.

Der Übergang der Geschwindigkeiten auf die Wandgeschwindigkeit Null ist in Abb. 112 dargestellt. Prandtl¹ zeigte zuerst, daß diese Schichten sehr klein werden, wenn es sich um Flüssigkeiten mit geringer Reibung handelt. Diese Bedingung ist z. B. bei Luft und Wasser sehr gut erfüllt. Nur innerhalb der Grenzschicht wirkt die Reibung, außerhalb herrscht eine praktisch reibungsfreie Bewegung.

Der laminare Teil der Grenzschicht ist der Rechnung zugänglich. Da hier $\tau = \mu \cdot \frac{dc}{dy}$ gilt, ist eine Integration leicht durchführbar, wenn wir in der Grenzschichtdicke eine konstante Schubspannung annehmen, was bei ebenen Platten sehr gut zutrifft. Es ergibt sich aus $dc = \frac{\tau}{\mu} \cdot dy$ durch Integration $c = \frac{\tau}{\mu} \cdot y$. Die Geschwindigkeit nimmt also

¹ Prandtl, L.: Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. d. III. Int. Math. Kongresses in Heidelberg 1904. Leipzig 1905.

linear zu. Ist δ die Grenzschichtdicke, so ist somit $\tau = \mu \cdot \frac{c}{\delta}$ (c Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht). Eine einfache Impulsbetrachtung gibt dann über den Verlauf von δ Aufschluß. Am Ende der Platte von der Länge x sei δ die Grenzschichtdicke. Durch diese Schicht strömt eine Masse prop. $b \cdot \delta \cdot \rho \cdot c$. Die Geschwindigkeitsverminderung ist proportional c , sodaß die Impulsverminderung prop. $b \cdot \delta \cdot \rho \cdot c^2$ ist. Wenn wir mit τ_m die mittlere Schubspannung der ganzen Platte bezeichnen, so ergibt sich eine Schleppkraft $\tau_m \cdot b \cdot x$. Durch Gleichsetzung entsteht:

$$\tau_m \cdot b \cdot x = b \cdot \delta \cdot \rho \cdot c^2; \text{ mit } \tau_m = \mu \cdot \frac{c}{\delta}$$

ergibt sich:

$$\mu \cdot \frac{c}{\delta} \cdot b \cdot x = b \cdot \delta \cdot \rho \cdot c^2.$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho \cdot c}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{c \cdot x}{\nu}}} = \frac{x}{\sqrt{Re_x}}; \quad Re_x = \frac{c \cdot x}{\nu}.$$

Die Grenzschichtdicke δ wächst proportional \sqrt{x} , d. h. nach einer Parabel. Gleichzeitig ergibt sich eine Reynoldssche Zahl Re_x , die als Länge die Plattentiefe x enthält. Die genaue Rechnung führt zu folgendem Ergebnis:

$$\delta_{\text{lam}} = 5,5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} = 5,5 \sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho \cdot c}}. \quad (111)$$

Den Widerstand der Platte W bezieht man auf den Staudruck $q = \frac{\rho}{2} c^2$; die Fläche der Platte ist $F = b \cdot x$. Damit ergibt sich ein Widerstandskoeffizient c_f gemäß folgender Gleichung:

$$W = c_f \cdot F \cdot q. \quad (112)$$

Im laminaren Teil ist

$$c_{f \text{ lam}} = 1,327 \frac{1}{\sqrt{Re_x}}. \quad (113)$$

Auf den turbulenten Teil der Grenzschicht läßt sich zunächst das Blasius'sche Gesetz anwenden. Innerhalb dieser Schicht gilt wieder das $1/7$ -Gesetz, sodaß in dieser Grenzschicht folgende Geschwindigkeitsverteilung vorhanden ist: $c = c_0 (y/\delta)^{1/7}$. Die Dicke der Schicht ist hier:

$$\delta_{\text{turb}} = 0,37 \cdot x \frac{1}{\sqrt[5]{Re_x}}, \quad \text{d. h. } \delta_{\text{prop}} x^{0,8} \quad (114)$$

(bei rauher Oberfläche ist $\delta_{\text{prop}} x^{0,65}$ bis $x^{0,75}$)

der Widerstandskoeffizient:

$$c_{f \text{ turb}} = 0,074 \frac{1}{\sqrt[5]{Re_x}}. \quad (115)$$

Berücksichtigt man die Tatsache, daß am Anfang laminare und später turbulente Grenzschicht vorhanden ist, so erhält man nach Prandtl, wenn man $Re = 500\,000$ als kritische Reynoldsche Zahl bis zum Umschlag betrachtet:

$$c_f = 0,074 \frac{1}{\sqrt{Re_x}} - \frac{1700}{Re_x}. \quad (116)$$

In Abb. 113 sind die drei verschiedenen c_f -Werte logarithmisch aufgetragen. Die erste Gerade stellt den Fall dar, daß nur laminare Grenzschicht vorhanden ist. In der Übergangskurve ist vorne eine laminare Schicht, während bei der oberen Geraden nur turbulente Grenzschicht vorhanden ist. Letzteres kann nach Wieselsberger dadurch erreicht werden, daß sich am Kopf einer dickeren Platte eine Abrundung befindet.

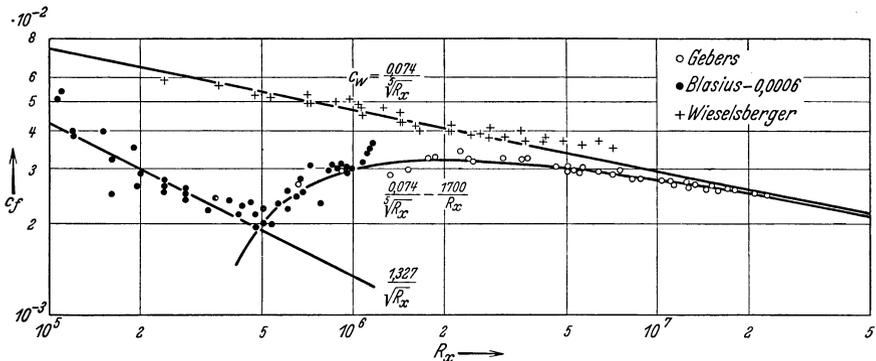


Abb. 113. Widerstandsbeiwerte glatter ebener Platten in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl (nach A. V. G. III).

Dadurch wird die laminare Schicht praktisch unterdrückt. Der Umschlag in turbulente Grenzschicht findet je nach der Strahlerturbulenz zwischen $300\,000 < Re_x < 500\,000$ statt.

Auch bei der Platte ist, ebenso wie beim Rohr, die Übertragung der neueren Turbulenztheorie geglückt. Während obige Formeln nur für den Bereich des Blasiuschen Gesetzes gelten, läßt sich nach H. Schlichting eine Interpolationsformel angeben, die im ganzen praktischen Bereich der turbulenten Strömung gilt¹:

$$c_f = \frac{0,455}{\left[\lg \left(\frac{c \cdot x}{\nu} \right) \right]^{2,58}}. \quad (117)$$

Beispiel: Eine ebene Platte von den Abmessungen $0,5 \times 2$ m soll im Windkanal einmal in Querrichtung und dann in Längsrichtung bei einer Windgeschwindigkeit von 20 m/s untersucht werden. Welche Widerstandskräfte ergeben sich in diesen

¹ Eingehendere Angaben befinden sich in Wien-Harms, außerdem in Kempf, Foerster: Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebes. Hamburg 1932.

Fällen? $\gamma/2g = 1/16$; $\nu = 0,14$. Wenn die kurze Seite in Windrichtung steht, ist $Re_1 = \frac{c \cdot x}{\nu} = \frac{2000 \cdot 50}{0,14} = 715000$. Bei der anderen Anströmung liegt eine 2 m lange Strecke im Windstrom, so daß eine viermal größere Reynoldssche Zahl entsteht. $Re_2 = 4 \cdot Re_1 = 2860000$. Wir rechnen mit Gl.(117) und finden $c_{f_1} = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} = 0,00474$; $c_{f_2} = 0,00369$.

In Gl. (112) $W = c_f \cdot q \cdot O$ ist $O = 2 \cdot 0,5 \cdot 2 = 2 \text{ m}^2$ und $q = \frac{\gamma}{2g} c^2 = \frac{20^2}{16} = 25 \text{ mm WS}$; damit erhalten wir

$$W_1 = 0,00474 \cdot 25 \cdot 2 = 0,237 \text{ kg}; W_2 = 0,00369 \cdot 25 \cdot 2 = 0,1845 \text{ kg}.$$

Es ergibt sich somit ein Unterschied von etwa 30%.

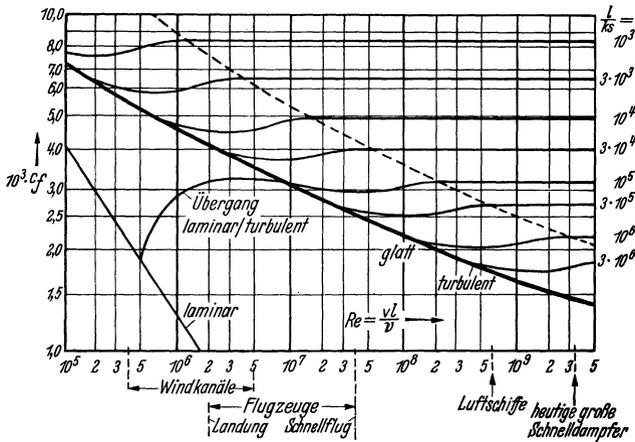


Abb. 114.

Für raue Platten sind ähnliche Überlegungen möglich wie bei rauhen Rohren. Auch hier wird im Falle der ausgebildeten Turbulenz im Bereiche höherer Reynoldsscher Zahlen der Widerstand genau proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Schlichting¹ hat die Nikuradsehen Messungen an rauhen Rohren auf raue Platten umgerechnet (Abb. 114). Man erkennt, daß vom hydraulisch-glaten Zustand ein allmählicher Übergang zum quadratischen Gesetz stattfindet. Im Übergangsbereich ist eine Platte um so länger „hydraulisch glatt“ je kleiner die relative Rauigkeit $1/k$ ist.

Im Gegensatz zur Rohrströmung wirken bei der Platte die Rauigkeiten wegen der veränderlichen Grenzschichtdicke verschieden je nach ihrer Lage in Strömungsrichtung. Es leuchtet ein, daß in der Nähe der Vorderkante auch geringe Rauigkeiten schädlich sind, während von einer bestimmten Plattenlänge ab bestimmte Rauigkeiten vollkommen

¹ Schlichting: Widerstand und Ausgleich in turbulenter Strömung. Feuertech. 1940, S. 230.

unschädlich werden. Diese Tatsachen bereiten der rein experimentellen Erfassung große Schwierigkeiten, die bisher noch nicht überwunden worden sind.

Abb. 114 kennzeichnet noch anschaulich die Lage bezeichnender technischer Anwendungen.

Der Umschlag von laminarer zu turbulenter Grenzschicht wird durch einen Versuch nach Abb. 115 gut illustriert. Eine mit Pulver bestreute Platte wurde hier in den Strahl eines Windkanals gehalten. Dabei zeigt sich, daß das Pulver zuerst am hinteren Ende der Platte weggefegt wird. Am Umschlagpunkt, wo die ersten Wirbel einsetzen, beginnt die

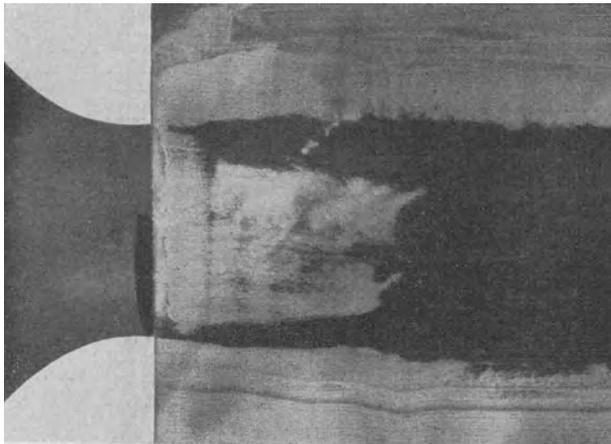


Abb. 115. Darstellung des Umschlags von laminarer in turbulente Grenzschicht bei einer ebenen Platte.

Aufwirbelung, so daß sich leicht die Lage dieses Punktes nachweisen läßt. Wenn nun die Geschwindigkeit langsam erhöht wird, rückt die Umschlagzone nach vorne. Dadurch kommt die Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl zum Ausdruck. Abb. 115 zeigt noch seitlich zwei keilförmige Zonen mit Turbulenz. Es handelt sich hier um die turbulente Vermischungszone des freien Strahles nach S. 140.

Eine wichtige praktische Lehre soll aus dem Plattenversuch noch gezogen werden. Die c_f -Werte nehmen in jedem Falle mit größerer Reynoldsscher Zahl ab. Dies hängt mit der in Plattentiefe zunehmenden Grenzschichtdicke zusammen. Denn die an Ort und Stelle übertragene Schubspannung ist um so kleiner, je größer die Grenzschichtdicke ist. Die vorderen Teile der Platte werden also am meisten zum Widerstand beitragen. Der Widerstand einer rechteckigen Platte wird dann am kleinsten, wenn die Längsseite in Strömungsrichtung liegt, wie deutlich aus dem letzten Zahlenbeispiel her-

vorging. Auf eine praktische Anwendung mag hingewiesen werden. Bei der Konstruktion einer Kaplan-Turbine, eines Schraubengebläses od. dgl. entsteht die Frage, ob das Rad mit vielen, aber kurzen, oder wenigen, jedoch tieferen Flügelblättern ausgeführt werden soll, wenn im übrigen die Gesamtflügelfläche konstant bleibt. Von seiten des reinen Flächenwiderstandes kann dazu gesagt werden, daß wenige, aber tiefe Flügel geringeren Flächenwiderstand ergeben. Dies gilt auch für Propeller, so daß also vom Standpunkt der reinen Flächenreibung aus betrachtet der Einblattpropeller den Vorzug verdient.

Aus Abb. 113 erkennt man deutlich, daß bei laminarer Grenzschicht der Widerstandskoeffizient bedeutend kleiner ist als bei turbulenter Grenzschicht. Eine laminare Schicht ist also in jedem Falle anzustreben. Durch sorgfältige glatte und spitze Ausführung des vorderen Plattenteiles kann der Umschlag weiter nach hinten verschoben werden. Schließlich läßt sich die Ausbildung der turbulenten Grenzschicht auch damit nicht mehr vermeiden.

b) Impulsverfahren nach Betz.

Macht man hinter einer Platte Staudruckmessungen, so beobachtet man eine deutliche Einbuchtung (Delle), die die Energieverminderung durch die Grenzschicht klar erkennen läßt.

Abb. 116 zeigt z. B. Messungen für eine glatte und für eine rauhe Platte, die deutlich unterschieden werden können. Betz¹ hat ein äußerst fruchtbares Verfahren ermittelt, um aus solchen Messungen den Flächenwiderstand unmittelbar, d. h. ohne Wägung zu berechnen. Dieses Verfahren hat für die Strömungsforschung eine große Bedeutung gewonnen, z. B. ermöglicht es die Bestimmung des Profilwiderstandes eines Tragflügels beim fliegenden Flugzeug. Im folgenden soll dieses Verfahren kurz beschrieben werden.

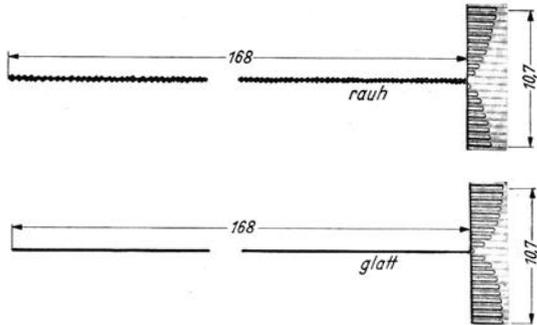


Abb. 116. Staudruckprofil hinter einer rauhen und einer glatten Platte.

Wir grenzen um den Versuchskörper nach Abb. 117 ein Rechteck von der Breite l ab und wenden auf dieses Gebiet den Impulssatz an. Vorne tritt durch l der

Impuls $\rho \cdot b \int_0^l w_1^2 dy$ ein, hinten tritt der Impuls $\rho \cdot b \int_0^l w_2^2 dy$ aus, sodaß als

Unterschied $\rho \cdot b \int_0^l (w_1^2 - w_2^2) dy$ bleibt. Durch die Seitenflächen tritt aber auch

¹ Betz: Verfahren zur direkten Ermittlung des Profilwiderstandes ZFM. 6, 42, 1925.

noch Impuls aus, weil wegen der verminderten Geschwindigkeit hinter dem Körper durch die hintere Fläche weniger austritt als vorne eintritt, was gleichbedeutend mit einer Divergenz der Stromlinien ist. Die Differenz muß aus Gründen der Kontinuität seitlich austreten. Sie nimmt folgenden Impuls in Strömungsrichtung mit:

$\rho \cdot b \cdot w_1 \int_0^l (w_1 - w_2) dy$, sodaß in Strömungsrichtung folgende Impulsverminderung stattfindet:

$$\Delta J = \rho \cdot b \int_0^l (w_1^2 - w_2^2) dy - \rho \cdot b \cdot w_1 \int_0^l (w_1 - w_2) dy .$$

An äußeren Kräften ist neben dem Widerstand noch die Druckwirkung $b \cdot \int_0^l (p_1 - p_2) dy$ zu berücksichtigen, da immerhin mit einer kleinen Verminderung des statischen Druckes zu rechnen ist. (Sehr merklich wird dieser Druckabfall bei abgerissener Strömung!) Der Satz: Äußere Kräfte = gesamte Impulsänderung ergibt damit:

$$W = b \int_0^l (p_1 - p_2) dy + \rho \cdot b \int_0^l (w_1^2 - w_2^2) dy - \rho \cdot b \cdot w_1 \int_0^l (w_1 - w_2) dy ,$$

Setzt man nun nach Gl. (18) den Gesamtdruck $P = p + \frac{\rho}{2} w^2$ ein, so erhält man

$$W = \underbrace{b \int_0^l (P_1 - P_2) dy}_H - \underbrace{\left\{ \frac{\rho}{2} \cdot b \int_0^l (w_1 - w_2)^2 dy \right\}}_K . \quad (118)$$

Das erste Glied H ist einfach die Fläche der in Abb. 116 gemessenen Delle, da die einfache Pitotrohrmessung bekanntlich immer den Gesamtdruck $P = p + \frac{\rho}{2} w^2$

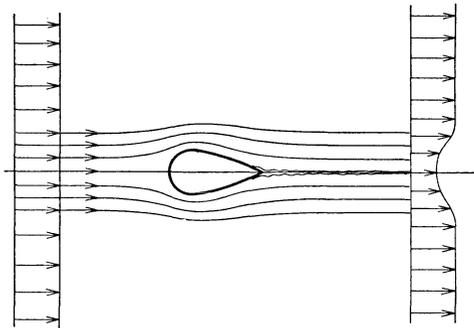


Abb. 117. Einbuchtung der Geschwindigkeitskurve hinter einem Widerstandskörper.

ergibt. Davon ist aber eine Korrektur K abzuziehen, deren Ermittlung nicht ganz einfach ist. Eine für den praktischen Gebrauch besonders geeignete Näherung dieser Korrektur ist Keller¹ gelungen. Er betrachtet das Einzelprofil als Grenzfall eines Gitters mit unendlich großem Abstand der Profile und gelangt dadurch zu einer verhältnismäßig einfachen Rechnung. Vergleiche mit Messungen zeigten weiter, daß es für die Be-

rechnung der Korrektur, die gegenüber H meist klein ist, vollkommen genügt, wenn man eine dreieckige Form der Delle annimmt. Keller

¹ Keller: Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie. Diss. Zürich 1934.

fand $\frac{K}{H} = \frac{1 - \sqrt{\gamma}}{2 + \sqrt{\gamma}}$; hierbei ist $\gamma = \frac{q^{\min}}{q}$ das Verhältnis des kleinsten Staudruckes zum Staudruck der ungestörten Strömung.

Nach dieser Formel ergeben sich folgende Zahlenwerte:

γ	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
K/H	0,017	0,036	0,058	0,081	0,108

Mit diesen Angaben sind solche Messungen sehr leicht auszuwerten.

42. Radscheibenreibung.

Wegen der Anwendung bei Kreiselmaschinen interessiert die Reibung umlaufender Scheiben. Abb. 118 zeigt schematisch die durch eine rotierende Scheibe entstandene Bewegung. An der Scheibe haftet zunächst die Flüssigkeit vollkommen fest. In einer kleinen Grenzschicht nimmt dann die Geschwindigkeit des umgebenden Mittels von der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe auf die Geschwindigkeit der Umgebung ab. Die Mitnahme der Luft durch die rotierende Scheibe bedingt Zentrifugalkräfte, durch die Luft nach außen geschleudert wird und Ringwirbel nach Abb. 118 entstehen.

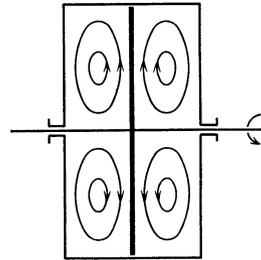


Abb. 118. Schematische Darstellung der durch die Radscheibenreibung hervorgerufenen Ringwinkel.

Für den Fall der unendlich ausgedehnten Strömung, d. h. ohne Gehäuse ist v. Kármán¹ die theoretische Berechnung des Drehmomentes bei laminarer und turbulenter Grenzschicht in guter Übereinstimmung mit Versuchswerten gelungen.

$$Re = \frac{u \cdot d}{\nu} < 5 \cdot 10^5 \quad M = 0,65 \cdot d^3 \cdot u^2 \cdot \varrho / 2 \sqrt{\frac{1}{Re}} \quad \text{laminar} \quad (119)$$

$$Re = \frac{u \cdot d}{\nu} > 5 \cdot 10^5 \quad M = 0,021 \cdot d^3 \cdot u^2 \cdot \varrho / 2 \sqrt[5]{\frac{1}{Re}} \quad \text{turbulent} \quad (120)$$

(für beide Scheibenseiten)

In jüngster Zeit erfolgte ein neuer Einblick in die physikalische Seite des Problems durch Göttinger² Versuche. Eine genaue Untersuchung des Strömungsfeldes ergab nämlich das überraschende Bild, daß an der Scheibe eine dünne Grenzschicht annähernd mit der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe rotiert. Die in dieser Schicht nach außen geschleuderten Teilchen bewegen sich in einer dünnen Schicht entlang dem Gehäuse und kehren dann zur Drehachse zurück. Der mittlere Teil nimmt an dem „Ringwirbel“ nicht teil, sondern rotiert wie ein fester Körper mit ungefähr der halben Winkelgeschwindigkeit der Scheibe. Abb. 119 zeigt diese Bewegung schematisch. Im Falle der turbulenten Grenzschicht zeigte sich nur eine geringe Abhängigkeit von der Gehäuseweite.

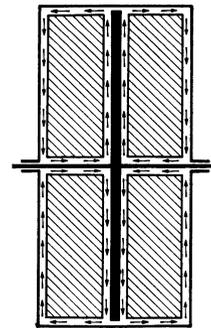


Abb. 119. Schematische Darstellung der Randschichtenbewegung infolge der Radscheibenreibung.

¹ v. Kármán: Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. 1921, S. 237.

² Schultz-Grunow: Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen. Z. angew. Math. Mech. 1935, S. 191.

Nach diesen Versuchen können folgende Formeln für die Drehmomente angegeben werden.

$$Re = \frac{u \cdot d}{\nu} < 3 \cdot 10^4; \quad M = \frac{\pi}{8} \cdot \mu \cdot u \cdot d^3/s \quad (121)$$

$$3 \cdot 10^4 < Re < 6 \cdot 10^5; \quad M = 0,472 d^3 \cdot u^2 \varrho/2 \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (122)$$

$$Re > 6 \cdot 10^5; \quad M = 0,00892 d^3 \cdot u^2 \varrho/2 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{Re}} \quad (123)$$

(für beide Scheibenseiten)

d in m; n in 1/min; u m/s; M in m · kg; s = Abstand Scheibe—Deckel.

43. Vermischung eines freien Strahles (Strahlerturbulenz).

Aus theoretischen und praktischen Gründen ist die Vermischung eines freien Strahles mit der Umgebung von großer Bedeutung.

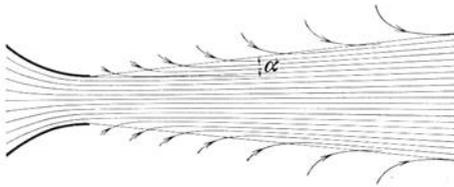


Abb. 120. Vermischung eines freien Strahles mit der Umgebung.

Tritt z. B. aus einer Windkanaldüse ein Luftstrahl mit gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung ins Freie, so tritt am Strahlrande eine Vermischung ein, die rein turbulenten Charakter hat. Ruhende Teilchen

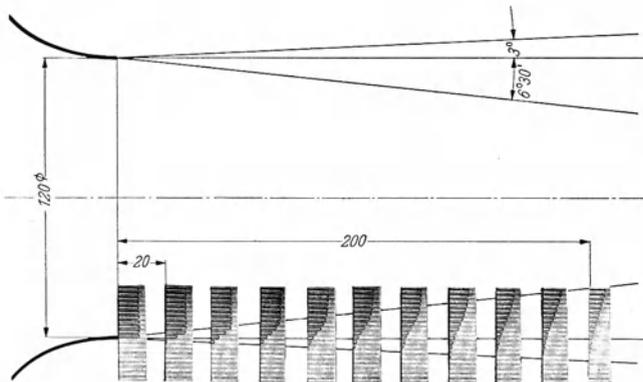


Abb. 121. Entwicklung der Staudruckprofile in der turbulenten Vermischungzone eines freien Strahles.

werden mitgerissen, etwa nach Abb. 120. Dadurch wird in einer Vermischungszone ein Geschwindigkeitsabfall nach Null erzwungen. Diese Zone wird nach innen und außen immer breiter. Die Ausbreitung der Vermischungszone erfolgt innen und außen sehr genau auf Kegel-

mänteln. Abb. 121 zeigt die Staudruckprofile¹. Die lineare Ausbreitung ist gut zu erkennen. Aus optischen Gründen hat Abb. 121 einen zu kleinen äußeren Winkel. Die genaue Untersuchung großer Windkanäle zeigt etwa das Bild der Abb. 122. In der Mitte bleibt ein Kern von gleicher Geschwindigkeit, der immer kleiner wird und schließlich verschwindet. Für Modellmessungen ist natürlich nur der innere Kern brauchbar. Der innere Winkel ist etwa 6°, der äußere rd. 8°. Der Gesamtwinkel von rd. 14° stimmt der Größenordnung nach mit dem Öffnungswinkel von Diffusoren überein. Die Übereinstimmung ist nicht zufällig. Sie zeigt deutlich, unter welchen Winkeln sich die Turbulenz ausbreiten kann.

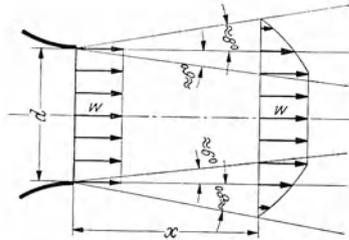


Abb. 122. Schematische Übersicht über die Strahlausweitung bei einem freien Strahl.

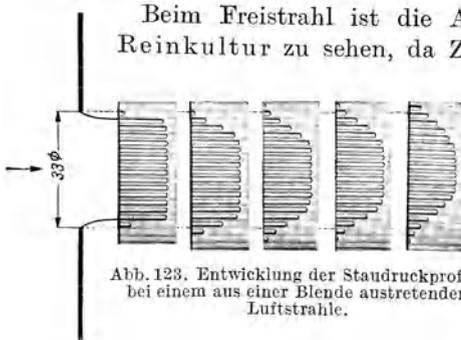


Abb. 123. Entwicklung der Staudruckprofile bei einem aus einer Blende austretenden Luftstrahl.

Beim Freistrahle ist die Ausbreitung der Turbulenz in Reinkultur zu sehen, da Zähigkeitseinflüsse von Wänden fehlen. Abb. 123 zeigt die Entwicklung der Staudruckprofile für einen aus einer Blende austretenden Luftstrahl. Trotzdem sich hier der Strahl noch kontrahiert, ist der Vorgang grundsätzlich der gleiche.

Es ergeben sich folgende Zahlenwerte:

- Durchmesser des freien Strahles $d_{ges} = d_{dü} + 0,29 x$,
 $d_{kern} = d_{dü} - 0,2 x$,
- Dicke der Vermischungszone $b = 0,245 x$ (nach Hörner²)
 $b = 0,255 x$ (nach Tollmien³),
- Vergrößerung der im Strahl geförderten Luftmenge durch

Zuströmen von der Seite
$$\Delta V = V_{Düse} 0,14 \cdot \frac{x}{d}$$

¹ Diese im folgenden mehrfach verwendete Darstellungsweise entsteht dadurch, daß dicht nebeneinanderliegende Röhrrchen an die zu untersuchende Stelle gebracht werden. Jedes Röhrrchen steht durch einen Schlauch mit einer Manometer-röhre in Verbindung, von denen 20 dicht nebeneinander liegen. Dieses Reihenmanometer wird dann fotografiert und die Fotos in maßstäblicher Größe eingeklebt. Näheres über diese Methode siehe Eck: Praktische Auswirkungen der Turbulenz, Z. physik. chem. Unterr. 1940, S. 33.

² Hörner: Untersuchung eines Windkanals, Diss. Braunschweig 1933.

³ Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, ZAM 1926, S. 468.

Verminderung der kinetischen Energie im freien

$$\text{Strahl} \quad \Delta L = 0,08 \frac{x}{d} \cdot L_{\text{Düse}},$$

($L_{\text{Düse}}$ = kinetische Energie am Düsenaustritt).

Im Innern des Strahles ist infolge der Vermischungsvorgänge an der Strahloberfläche ein Überdruck von $\frac{1}{2}$ vH. des Staudruckes des Strahles vorhanden.

Es ist ein besonders schönes Ergebnis der Prandtlischen Turbulenztheorie, daß die theoretische Berechnung dieses Falles geglückt und durch den Versuch voll bestätigt wurde¹. Die Annahme, daß der Mischungsweg in der Vermischungszone jeweils konstant und proportional der jeweiligen Breite ist, führte zum Ziele. Dabei wurde lediglich das Verhältnis Mischungsweg : Breite der Vermischungszone aus den Versuchen entnommen.

Von praktischem Interesse ist noch folgende Frage: Wie groß ist der Verlust des gleich langen Rohrstückes?

Ein Rohrstück würde nach S. 106 folgenden Leistungsverlust haben:

$$\Delta L_{\text{Rohr}} = V \cdot \Delta p = V \cdot \frac{x}{d} \lambda \cdot \frac{\rho}{2} w^2 = \left(V \cdot \rho \frac{w^2}{2} \right) \frac{x}{d} \cdot \lambda = L_{\text{Rohr}} \cdot \frac{x}{d} \cdot \lambda.$$

Das Verhältnis ergibt $\frac{\Delta L}{\Delta L_{\text{Rohr}}} = \frac{0,08}{\lambda}$. Da es sich beim Vergleich um Anlaufstrecken handelt, wollen wir ein sehr hohes λ , etwa 0,04, einsetzen. Somit ergibt sich $\frac{\Delta L}{\Delta L_{\text{Rohr}}} = \frac{0,08}{0,04} = 2$.

Man sieht, daß es sich lohnt, einen Strahl durch Wände einzudecken! Als Beispiel mag auf den aus einem Kreiselpumpen- oder Gebläserad austretenden Strahl hingewiesen werden. Seitliche Führungswände sind hier unbedingt zu empfehlen.

Des weiteren sei auf den schädlichen Einfluß eines offenen Fensters in einem schnellfahrenden Automobil hingewiesen. Durch Modellversuche konnte die Widerstandsvermehrung, die hierdurch eintritt, deutlich nachgewiesen werden.

Im Zusammenhang mit dem freiausblasenden Strahl sei noch auf eine praktisch wichtige Erscheinung aufmerksam gemacht. Es handelt sich um den Unterschied zwischen Ausblasen und Ansaugen aus einem Raum, ein Problem, das insbesondere bei der Belüftung von Räumen interessiert. Sehr kraß mag der Unterschied durch folgendes Experiment veranschaulicht werden. Man versuche einmal, den aus dem Munde ausgeblasenen Zigarettenrauch wieder einzusaugen. Es wird nicht gelingen. Beim Ansaugen werden die Luftteilchen von allen Seiten einströmen, wie es etwa bei dem Beispiel (Abb. 61) dargestellt ist. Eine Zugbelastung tritt

¹ Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, ZAM 1926, S. 468.

nie ein. Im Gegensatz dazu ergibt sich beim Ausblasen ein gerichteter Strahl, und nur die im Strahl befindlichen Luftteilchen besitzen erhöhte Energie. Durch Diffusoren kann die große Strahlggeschwindigkeit, die Störungen durch Luftzug bewirkt, zwar verringert werden, doch wird ein so zugfreier Betrieb wie beim Ansaugen nie erreicht. Deshalb arbeitet die Lüftungstechnik meist mit Saugbetrieb.

Eine wichtige praktische Verwendung findet die von einem freien Strahl erreichte Vermischung und Energieübertragung an die von außen zuströmenden Flüssigkeitsteilchen in den sog. Strahlapparaten. Auf diese Weise ergeben sich sehr einfache „Pumpen“, die zwar im Wirkungsgrad schlecht, dafür aber an Einfachheit nicht überboten werden können. Neue Untersuchungen über die hierbei auftretenden Verhältnisse stammen von Flügel¹

Strahlerweiterung durch Siebe. Während bei beschleunigten Strömungen beliebige Verengungen möglich sind, können leider nur mäßige Grade von Verzögerungen erreicht werden. Die möglichen Querschnittserweiterungen sind durch die Winkel, unter

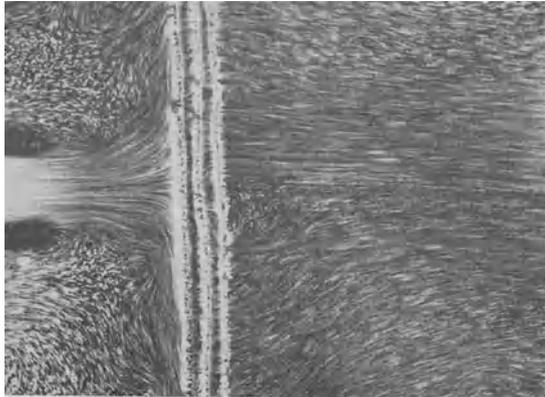


Abb. 124. Strömungserweiterung durch Sieb.

denen sich die turbulente Vermischung entwickelt, begrenzt. Werte von 10 — 14° sind hier allenfalls erreichbar. Sind stärkere Querschnittserweiterungen nötig, so kann dies durch Siebe erreicht werden. Abb. 124 zeigt die Strömung eines Strahles, in den hintereinander drei Siebe gestellt sind. Man erkennt, daß die Strömung sich sofort auf den etwa vierfachen Querschnitt verbreitet. Die Strömung wird um so gleichmäßiger, je mehr Siebe verwendet werden. Mehrere weitmaschige Siebe wirken besser als ein sehr engmaschiges Sieb. Es ist klar, daß diese plötzliche Verzögerung nur durch große Energieverluste erkauft wird.

44. Isotrope Turbulenz.

Turbulente Bewegungen sind auch möglich, ohne daß eine Wandreibung dazu Veranlassung gibt. Im Freistrahle eines Windkanales ist z. B. je nach der Vorgeschichte des Strahles eine mehr oder weniger turbulente Strömung vorhanden. Gemeint ist hier die Strömung im

¹ Flügel: Berechnung von Strahlapparaten. VDI-Forsch.-Heft 395.

gesunden Kern des Strahles, nicht etwa die turbulente Randschicht, die wir mit „Strahl­turbulenz“ bezeichnet haben.

Da es sich hier um Strömungen mit gleicher Mittelgeschwindigkeit handelt, wo also $\frac{du}{dy} = 0$ ist, kann der Prandtl'sche Turbulenzansatz (S. 115) nichts nützen. Die hauptsächlich von Taylor entwickelte statistische Turbulenztheorie (s. Fußnote S. 146) hat hier beachtenswerte Erfolge erzielt.

Die Hauptkennzeichen dieser turbulenten Bewegungsform sind folgende:

a) Wegen Fehlens ausgezeichneter Richtungen sind die Schwankungsgeschwindigkeiten nach allen Richtungen gleich, die Bewegung ist „isotrop“.

b) Bei isotroper Turbulenz sind neben Re nur zwei weitere die Turbulenz kennzeichnende Größen vorhanden: 1. der Turbulenzgrad u/U (u mittlere Schwankungsgeschwindigkeit, U Mittelgeschwindigkeit); 2. die Größe L der Turbulenz, eine Größe die in etwa der mittleren Weglänge gleich ist und als Funktion der Maschenweite des die Turbulenz erzeugenden Siebes angesehen werden kann.

45. Der Umschlag.

Unter „Umschlag“ versteht man nach heutigem Sprachgebrauch das Umschlagen der laminaren in die turbulente Strömungsform, ein Vorgang der uns zuerst bei der Rohrströmung begegnet ist. Bei der Plattenströmung ergab sich ein ähnlicher Vorgang in der Grenzschicht, über den bereits vorher (S. 136) ausführlicher berichtet wurde. U. a. wurde hier festgestellt, daß sich bei jedem umströmten Körper vom vorderen Stau­punkt aus eine laminare Grenzschicht bildet, die je nach den Umständen in eine turbulente umschlagen kann. Dieser Vorgang ist für die gesamte Strömungslehre von so entscheidender Bedeutung, daß eine kurze Zusammenfassung der hierbei auftretenden Erscheinungen nützlich erscheint.

Abb. 125 zeigt die Grenzschichtentwicklung einer Plattenströmung, bei der der Umschlag besonders deutlich ohne störende Nebeneinflüsse vorhanden ist. An der Umschlagstelle findet, wie die Abb. 125 schematisch zeigt, eine Verwirbelung der vorherigen laminaren Grenzschicht statt. Gleichzeitig wird die Grenzschicht dicker. Dabei bleibt an der Platte trotzdem eine hauchdünne laminare Schicht erhalten, so daß also in jedem Falle unmittelbar an der Wand laminare Bewegung vorhanden ist. Dies erleichtert — zunächst rein anschaulich — das Erkennen der auftretenden Schubspannungen. Nach Gl. (79) $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$ hängt τ dann nur von dem Geschwindigkeitsanstieg an der Wand ab. Dieser Anstieg

ist, wie Abb. 125 zeigt, in der vorderen laminaren Grenzschicht bedeutend kleiner als in der turbulenten Schicht, trotzdem bei letzterer die Grenzschicht dicker ist. Es folgt also die Regel:

Die laminare Grenzschicht ergibt bedeutend kleinere Wandreibung als die turbulente.

a) Entstehung des Umschlags (Turbulenz). Wenn auch heute noch keine vollbefriedigende Erklärung für die Entstehung der Turbulenz angegeben werden kann, so sind doch einige interessante Feststellungen möglich.

Tollmien¹ konnte z. B. nachweisen, daß laminare Grenzschichten instabil, d. h. turbulent werden, wenn das Geschwindigkeitsprofil einen

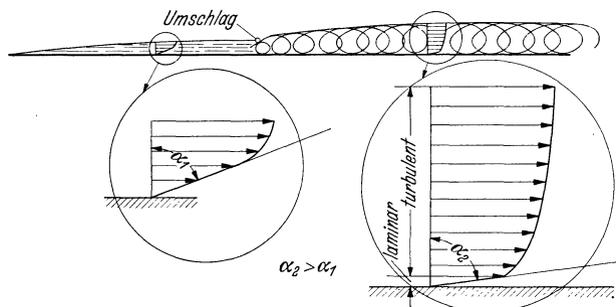


Abb. 125. Schematische Darstellung des Umschlags bei der Plattenströmung.

Wendepunkt besitzt, sofern ein hinreichender Wert der Grenzschichtkennzahl $\frac{\varepsilon \cdot \delta}{\nu}$ vorliegt. Es scheint, daß Grenzschichten mit dieser Geschwindigkeitsverteilung sich ähnlich wie Trennschichten in viele kleine Wirbel auflösen (nicht zu verwechseln mit Ablösung!).

b) Umschlag bei gekrümmten Flächen. Von Görtler² stammt die Übertragung der Tollmianschen Theorie auf gekrümmte Flächen. Danach findet ein Umschlag statt, wenn $u'' + \frac{1}{R} u'$ ein Minimum hat, eine Bedingung, die für $R = \infty$ wieder in obige Bedingung $u'' = 0$ übergeht. Diese Untersuchungen interessieren mit Rücksicht auf umströmte Körper, z. B. Zylinder, Kugeln, Tragflügel usw. Da solche Umströmungen immer mit Druckzuwachs bzw. mit Druckabfall verbunden sind, geben sie gleichzeitig Aufschluß über den Einfluß der äußeren Druckverteilung, die bei der Plattenströmung konstant ist.

Die Görtlersche Bedingung bedeutet, daß bei konvexen Wänden der Umschlag vor, bei konkaven jedoch hinter dem Minimum des von der

¹ Tollmien: Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Gött. Nachr. Math., Physik Kl. I 1 (1935) 79.

² Görtler: Über den Einfluß der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. 1940, S. 138.

äußeren Strömung eingeprägten Druckes stattfindet. (Siehe z. B. die Zylinderströmung, S. 184, bei der die Ablösung, die hier mit dem Umschlag identisch ist, bei 80° stattfindet.) Daraus folgt, daß konvexe Wände anfachend und konkave Wände stabilisierend wirken, wobei jedoch betont werden muß, daß der Krümmungseinfluß verhältnismäßig gering ist. Görtler¹ fand weiter, daß bei konkaven Wänden oberhalb bestimmter Kennzahlen die laminare Grenzschicht in Wirbel umschlägt, deren Achse parallel zur Hautströmung verläuft. Eine ähnliche Instabilität der laminaren Grenzschicht tritt auch ein zwischen zwei konzentrischen Zylindern, wenn der innere Zylinder rotiert und der äußere ruht. Wirbel mit der Achse parallel zur Drehrichtung, die abwechselnd rechts und links drehen, treten hier auf. Taylor² konnte diese Erscheinung experimentell und theoretisch klären. Wenn umgekehrt der äußere Zylinder sich dreht und der innere ruht, ist die Laminarbewegung stabil.

c) Taylorsches Umschlagkriterium. Die Lage des Umschlagpunktes wird außer von den vorgenannten Bedingungen noch durch die Turbulenz der äußeren Strömung beeinflusst. Mit größer werdender äußerer Turbulenz wird die laminare Anlaufstrecke kürzer. Von Taylor³ stammt die wohl wahrscheinlichste Erklärung dieses Vorganges. Taylor nimmt an, daß die Druckschwankungen, die die äußere turbulente Strömung der Grenzschicht aufträgt, für die Lage des Umschlages verantwortlich ist. Diese Druckschwankungen sind leicht erkennbar, wenn man z. B. die Erzeugung der Turbulenz durch Turbulenzdrähte (S. 229) betrachtet. Die Umströmung dieser dünnen Drähte liegt bei Reynold'schen Zahlen, bei denen Kármán-Wirbel auftreten. Die hierbei periodisch sich ablösenden Wirbel erzeugen ziemlich starke Druckschwankungen, die auch noch in einiger Entfernung wirksam sind. Für die Kugel hat z. B. Taylor nach einer hierauf aufgebauten Theorie in guter Übereinstimmung mit Versuchen den Umschlag vorausberechnen können. Ist D der Kugeldurchmesser, L die Maschenweite des Turbulenzgitters, U die mittlere Geschwindigkeit und u die mittlere Geschwindigkeitsschwankung, so liegen alle Meßpunkte bei verschiedenen Kugeln, Gittern und Turbulenzgraden auf einer einzigen Kurve, wenn man die kritische Re -Zahl (d. h. die Re -Zahl für $c_w = 0,3$) über $\frac{u}{U} \left(\frac{D}{L} \right)^{1/5}$ aufträgt. Es sei bemerkt, daß die Schwankungen u neuerdings durch besondere Hitzdrahtmeßmethoden, die hauptsächlich von Dryden⁴ entwickelt wurden, fest-

¹ Görtler: Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschicht an konkaven Wänden. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Physik Kl. 1940.

² Taylor, G. I.: Phil. Trans. (A) 223 (1923) S. 317.

³ Taylor, G. I.: Some recent Developments in the Study of Turbulence Proc. V. Intern. Congr. for Appl. Mechanics, Cambridge 1938, S. 294.

⁴ Dryden, H. L.: NACA-Report Nr. 320, 342, 448, 581 (1929—1936).

gestellt werden können. Diese beachtenswerten Erfolge der hauptsächlich in England und Amerika ausgebildeten statistischen Turbulenztheorie bilden eine bedeutende Verfeinerung der bisherigen empirischen Feststellung der Turbulenz durch die kritische Kugelkennzahl (S. 161) und stellen auch ein gutes Hilfsmittel für genaue experimentelle Methoden dar.

d) Umschlag in divergenten Kanälen. Bei störungsfreiem Zulauf, z. B. Einlauf aus einem großen Behälter, bildet sich auch in einem erweiterten Kanal (Diffusor) eine laminare Grenzschicht aus. Pohlhausen¹ hat den theoretischen Nachweis erbracht, daß bis zu einem gewissen Maß solche laminare Grenzschichten einen Druckanstieg mitmachen. Nach dieser Rechnung tritt Instabilität, d. h. Umschlag dann ein, wenn eine Querschnittserweiterung von 1,214:1 vorhanden ist. Neuere Versuche von Polzin², auf die später noch eingegangen wird, scheinen diese Angaben zu bestätigen. Neuerdings glaubt auch Ackeret³ eine Bestätigung der Pohlhausenschen Ergebnisse festgestellt zu haben. Bemerkenswert ist, daß die kritische Querschnittserweiterung unabhängig vom Erweiterungswinkel ist.

Wahrscheinlich muß der Zulauf außerordentlich geglättet sein, wenn die laminare Grenzschicht so lange erhalten bleibt. Das bisherige Versuchsmaterial reicht noch nicht aus, um eine überzeugende Bestätigung der Pohlhausenschen Theorie aussprechen zu können.

IV. Das Ablösungsproblem.

46. Allgemeines.

Unter bestimmten Bedingungen löst sich eine Strömung von einer Wand ab. Zwischen beiden bildet sich ein von Wirbeln durchsetzter Raum, ein sog. Totwassergebiet, das die Ursache der größten Verluste ist, die wir bei Strömungen kennen.

Die Vermeidung solcher Ablösungen ist deshalb von großer praktischer Bedeutung und bildet für den Ingenieur meist die Hauptaufgabe, die er bei strömungstechnischen Fragen zu erledigen hat.

In fast allen Fällen lassen sich Ablösungen durch konstruktive Maßnahmen vermeiden. Die Hauptschwierigkeit beruht in der Auffindung solcher Stellen. Einerseits bietet die Potentialtheorie wohl einige Hilfe bei der Auffindung besonders gefährdeter Stellen; nur in wenigen Fällen werden aber diese theoretischen Hilfsmittel praktisch anwendbar sein,

¹ Pohlhausen: Z. angew. Math. Mech. 1921, S. 252.

² Polzin: Ing.-Arch. 1940, S. 361.

³ Ackeret: Schweiz. Bauztg. 1942, S. 103.

weil sie sich auf einfache geometrische Formen beschränken müssen und insbesondere bei verzögerten Kanalströmungen wegen der Nichtberücksichtigung der Reibung und der Turbulenzwirkung ganz versagen, kurz, mehr mathematische Bedeutung haben.

Gute Kenntnis der Beobachtungsmittel und genaues Studium besonders typischer Ablösungen wird man im Augenblick noch immer dem Ingenieur an die Hand geben müssen, wenn man ihm nicht Steine statt Brot reichen will. Wie außerordentlich schwierig die Dinge liegen, geht z. B. daraus hervor, daß es oft jahrelanger Forschungsarbeit bedurfte, um bestimmte Ablösungen in ihrer ganzen Tragweite zu erkennen. Es ist nicht zuviel gesagt, wenn man bei manchen Ablösungen sogar von einer historischen Entwicklung spricht (vgl. z. B.

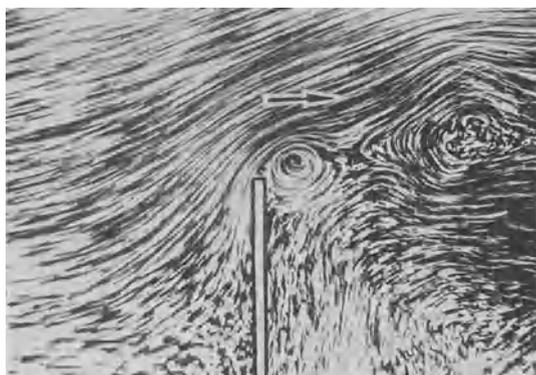


Abb. 126. Umströmung einer senkrecht angestellten Platte.

Kugelablösung, VDI-Normaldüse, Rückströmung der Grenzschicht eines Leitringes in das Laufrad usw.).

Die folgenden Ausführungen über dieses Problem sind in der Hauptsache nach dem Gesichtspunkte des praktischen Nutzens und der Zweckmäßigkeit ausgerichtet.

47. Ablösung an scharfen Kanten.

An jeder scharfen Kante löst sich die Strömung ab. Der Anfang dieser Ablösung ist bei Beginn der Bewegung gut zu erkennen. Zunächst ist die Strömung bestrebt, um die scharfe Kante herumzuströmen, wie es Abb. 72 für die reibungslose Strömung zeigt. Die Verzögerung ist indes hinter der Kante so groß, daß die Ablösung sofort in Form eines Wirbels einsetzt, der die Strömung aufrollt und u. U. weit ablenkt. Es bildet sich dann eine sog. Diskontinuitätslinie, die ein mehr oder weniger großes Totwassergebiet von der aktiven Strömung trennt. Abb. 126 zeigt den Vorgang bei einer Platte. Man erkennt, daß die Strömung weit ausbiegt und die scharfe Kante sozusagen von selbst abrundet. Die Grenze zwischen Totwasser und Strömung ist von deutlich erkennbaren Wirbeln durchsetzt, die dem Totwasser eine Sekundärbewegung vermitteln.

Wenn man zwischen Totwassergebiet und Strömung eine scharfe Grenze annimmt und das Totwasser als bewegungslos voraussetzt, läßt sich in vielen Fällen die Kontraktionslinie berechnen. Beim Austritt von

Wasserstrahlen in Luft ist diese Bedingung gut erfüllt. Die von Helmholtz¹ stammende Theorie der Diskontinuitätsflächen führt dann zu guten Ergebnissen. Sonst bildet sich keine scharfe Grenze, sondern eine turbulente Vermischungszone. Die Theorie nutzt in diesen Fällen leider sehr wenig. Abb. 245 a, b, c lassen deutlich die turbulente Vermischungsschicht bei scharfkantiger Ablösung erkennen.

Die Ablösung durch scharfe Kanten zeigt eine eigentümliche Wirkung der Flüssigkeitsreibung. Der zu Beginn der Bewegung auftretende Wirbel entsteht durch die Reibungswirkung. Ist dieser Wirbel weggeschwommen und die Diskontinuitätslinie voll ausgebildet, so ist zur Aufrechterhaltung der Ablösung keine Reibung mehr notwendig. Widerstände entstehen dann, wie bei der senkrecht angeströmten Platte, fast ausschließlich durch Normaldrücke. Man bezeichnet einen solchen Widerstand auch als Formwiderstand (s. S. 182).

48. Ablösung in divergenten Kanälen (Diffusoren).

Konisch auseinanderliegende Wände sollen die Strömung begrenzen. Dieser Fall der verzögerten Strömung ist der einfachste. Hier liegt das meiste Versuchsmaterial vor; die theoretische Erkenntnis ist gleichfalls am tiefsten vorgedrungen.

Betrachten wir in einem solchen konischen Kanal, den man auch Diffusor nennt, zwei Schnitte 1...1 und 2...2. Ohne Reibungsverluste würde zwischen diesen Schnitten ein Druckanstieg nach Bernoulli erfolgen, gemäß $\Delta p = \frac{\rho}{2} (w_2^2 - w_1^2)$. Da die Stromlinien gerade sind, herrscht im Schnitt 1 und 2 überall der gleiche Druck. Der Druckanstieg erfolgt somit durch Einbuße an kinetischer Energie. Wenn z. B. in 1...1 ein bestimmtes Geschwindigkeitsprofil nach Abb. 127 vorhanden ist, kann das neue Profil leicht ermittelt werden. Für jeden Punkt bilden wir ein

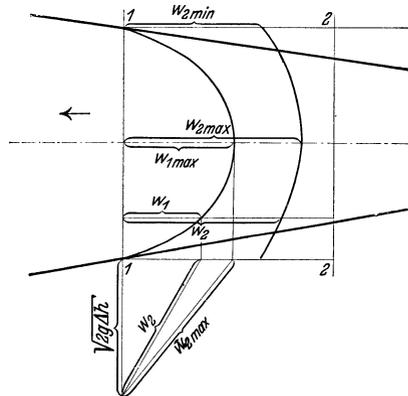


Abb. 127.
Veränderung des Geschwindigkeitsprofils bei beschleunigter und verzögerter Strömung. Graphische Ermittlung.

das neue Profil leicht ermittelt werden. Für jeden Punkt bilden wir ein rechtwinkliges Dreieck mit w_1 und $\sqrt{2 g \Delta h} = \sqrt{2 g \frac{\Delta p}{\gamma}}$ als Kathete. Die Hypotenuse ist dann w_2 . Die in Abb. 127 durchgeführte Konstruktion, die für beide Strömungsrichtungen gilt, zeigt, daß durch Verzögerung

¹ Ostwalds Klassiker Nr. 79.

das Geschwindigkeitsprofil spitzer wird, eine Regel, die allgemein gilt, auch in ihrer Umkehrung: Durch Beschleunigung wird das

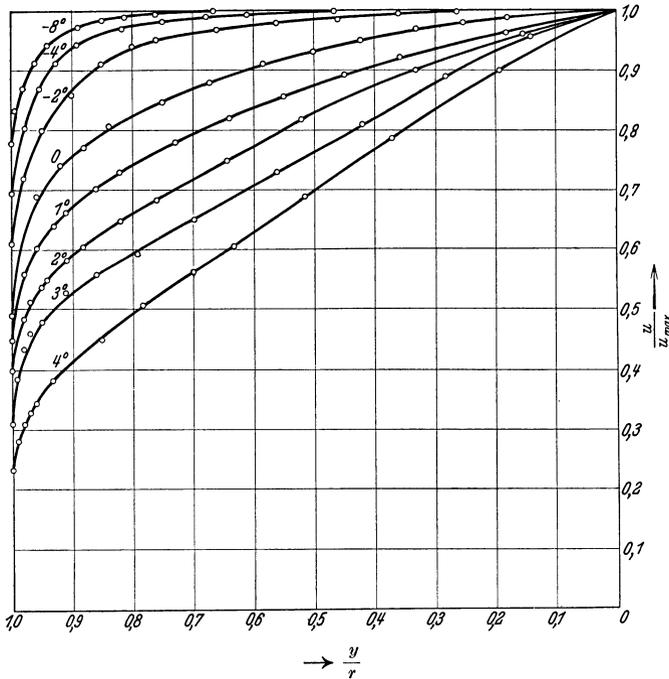


Abb. 128. Geschwindigkeitsverteilung in erweiterten und verengten Kanälen nach Nikuradse.

Geschwindigkeitsprofil völliger. Abb. 128 zeigt Messungen von Nikuradse, die diese Regel gut bestätigen.

Schwierigkeiten müssen sich an den Wandungen ergeben. Denn an einer Stelle des Geschwindigkeitsprofils wird schließlich der Fall eintreten, daß

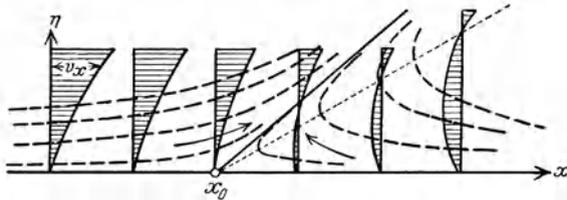


Abb. 129. Schematische Darstellung der Vorgänge an einer Ablösungsstelle.

die kinetische Energie gerade genügt, um den Druckanstieg Δp zu erreichen. Das Teilchen wird zur Ruhe kommen im Gegensatz zu einer beschleunigten Strömung, bei der ein evtl. zur Ruhe gelangtes Teilchen durch den folgenden Druckabfall wieder angetrieben wird. Die noch

näher der Wand liegenden Teilchen sind hierzu nicht mehr in der Lage, sie werden zurückgedrängt werden. Den ganzen Vorgang nennt man Ablösung. An einer bestimmten Stelle setzt sie ein. Dort sammelt sich das zur Ruhe gekommene Material und drängt die ganze Strömung von der Wand ab. Abb. 129 veranschaulicht schematisch den Ablösungsvorgang an der Stelle x_0 . Die eingezeichneten Geschwindigkeitskurven lassen erkennen, daß an der Ablösungsstelle $\frac{du}{dy} = 0$ ist. Den Ablösungspunkt x_0 kennzeichnet man am besten als Grenze zwischen Vor- und Rückströmung. Die zwischen der neuen Strömungsgrenze und der Wand beobachteten Wirbelbewegungen sind die Hauptverlustquellen.

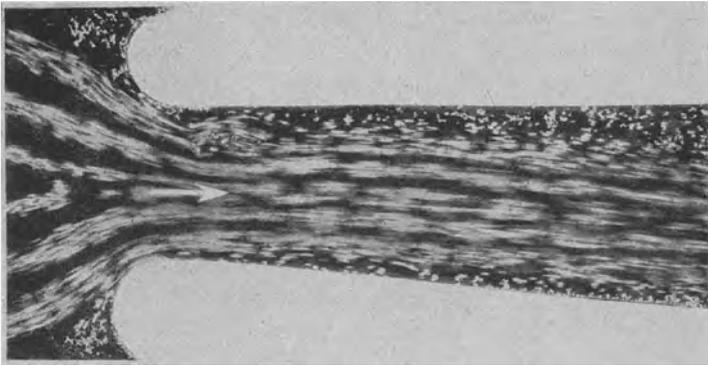
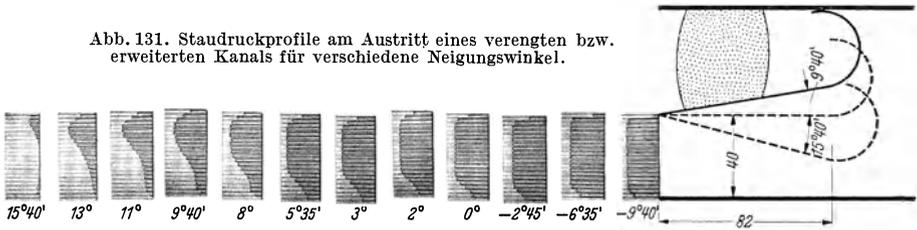


Abb. 130. Laminare Strömung in einem schwach erweiterten Kanal. Strömung reißt ab.

Wie ist nun überhaupt ein Anliegen der Strömung bei Verzögerung möglich (denn durch die Wandreibung wird sich ja in allen Fällen ein gegen Null abfallendes Geschwindigkeitsprofil ergeben)? Die Schleppwirkung der Reibung gemäß dem Ansatz $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$ könnte einige Hilfe bringen und die zur Ruhe gekommenen Teilchen wieder mitnehmen. Diese Wirkung ist aber sehr gering. In der sog. laminaren Strömung tritt diese Schleppwirkung in Reinkultur auf. Immerhin ist nach den theoretischen Untersuchungen von Pohlhausen (S. 147) eine Verzögerung bis zu einer etwa 20proz. Querschnittserweiterung möglich. Es ist aber zu vermuten, daß schon bei kleinen Störungen der vorausgehenden Strömung ein nennenswertes Anliegen der laminaren Grenzschicht nicht mehr erreicht wird. Dies zeigt auch der Versuch der Abb. 130, wo schon eine kleine Störung am Kanalbeginn zu einem Abreißen der laminaren Gesamtströmung führt. Im allgemeinen ist daran festzuhalten, daß die laminare Strömung schon bei sehr mäßigen Verzögerungen, praktisch beim Druckminimum bereits abreißt.

Nur der Turbulenz verdanken wir die Möglichkeit einer praktisch verwertbaren Verzögerung. Die der Hauptströmung überlagerten Querbewegungen bringen Teilchen aus den Gebieten höherer Geschwindigkeit in die Wandzone und wirken dort beschleunigend, während umgekehrt die „müden“ Wandteilchen in Kanalmitte kommen und Energie erhalten. Dieser Impulsaustausch wirkt nun, wie wir schon bei der Rohrströmung gesehen haben, wie eine starke Schubspannung. Ist genügend Zeit zum

Abb. 131. Staudruckprofile am Austritt eines verengten bzw. erweiterten Kanals für verschiedene Neigungswinkel.



Austausch vorhanden, so ist zu erwarten, daß eine Ablösung verhindert wird. Genügend Zeit wird aber dann vorhanden sein, wenn der Erweiterungswinkel des Kanals nicht zu groß ist. Werden bestimmte Winkel, etwa $8\text{--}12^\circ$ überschritten, so kann auch die Turbulenz die Ablösung nicht verhindern. Einen guten Überblick gibt Abb. 131. Am Ende eines verstellbaren Diffusors sind nach der bereits früher beschriebenen Methode die Staudruckprofile für verschiedene Winkel von $-9^\circ 40'$ bis $15^\circ 40'$ aufgenommen. Man erkennt, daß die Energieverteilung um so gleichmäßiger wird, je stärker die Beschleunigung ist. Mit beginnender Ver-

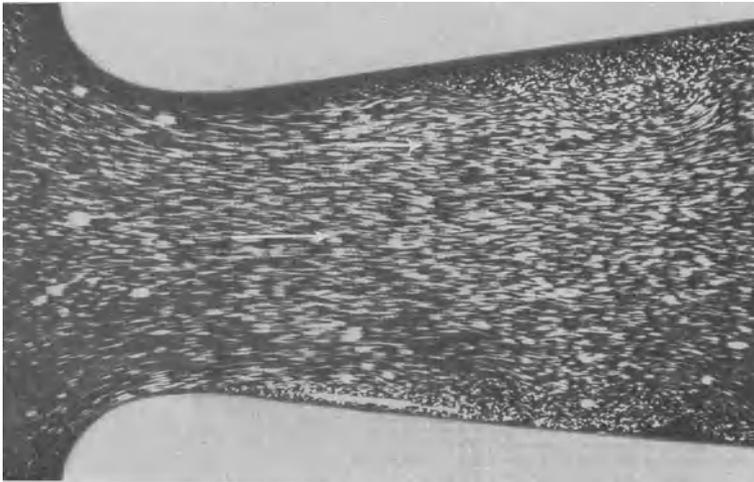


Abb. 132. Verzögerte Strömung. Erweiterungswinkel 13° . Strömung liegt gerade noch an.

zögerung wird die Grenzschicht immer dicker. Die Energie wird gleichsam von der Randzone nach der Mitte verlegt. Die Ablösung tritt hier bei etwa $11^\circ \div 13^\circ$ ein. Sie erfolgt an der unteren geraden Fläche, während die Strömung an der oberen gekrümmten Fläche anliegt, eine Erscheinung, die fast immer zu beobachten ist. Im Strömungsbild ist der Vorgang ebenfalls sehr deutlich zu erkennen. Abb. 132 zeigt eine Diffusor-

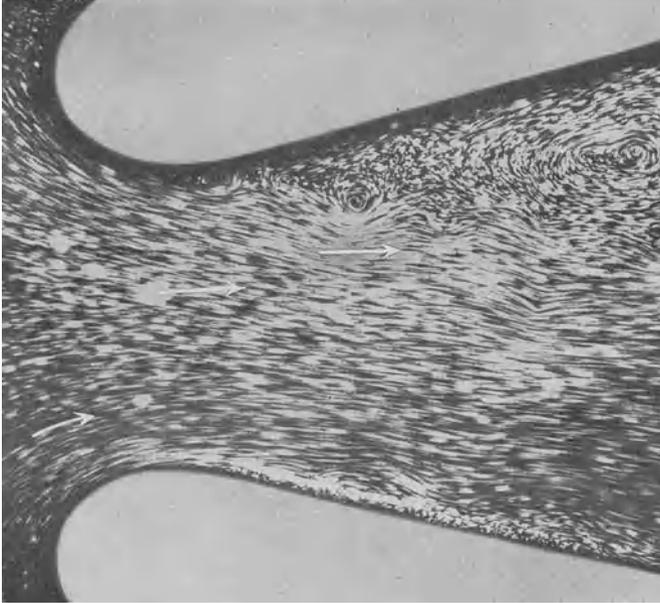


Abb. 133. Abgerissene Strömung. Erweiterungswinkel 28° .

strömung von 13° , bei der die Strömung gerade noch anliegt. Bei einem Erweiterungswinkel von 28° (Abb. 133) ist die Ablösung besonders deutlich zu erkennen.

Für den wichtigen Sonderfall des ebenen, geraden Diffusors liegen folgende Forschungsergebnisse vor:

a) Da nach S. 102 Geschwindigkeitsprofile eine große Rolle spielen, wird man der Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Wandabstand Aufmerksamkeit schenken müssen. Es zeigt sich (Dönch¹, Nikuradse²), daß bei der verzögerten turbulenten Strömung folgendes Gesetz vorhanden ist

$$u = C \cdot y^{\frac{1}{n}};$$

$$n = 7 \text{ für } Re < \sim 80000;$$

$$n = 8 \div 9 \div 10 \text{ für } Re > 80000.$$

¹ Dönch: Forschungsarbeiten, Heft 282.

² Nikuradse: Forschungsarbeiten, Heft 289.

Dies ist aber das gleiche Gesetz wie bei der unbeschleunigten Rohrströmung. Man erkennt, daß trotz verschiedener äußerer Bedingungen gewisse einheitliche Gesetzmäßigkeiten die Turbulenz beherrschen.

Eine weitere Übereinstimmung ergibt sich beim Mischungsweg. Trägt man ebenso wie beim Rohr den Mischungsweg l/r dimensionslos in Abhängigkeit von y/r auf, so ergibt sich praktisch die gleiche Kurve wie beim Rohre (S. 117). Aus den Geschwindigkeitskurven lassen sich weiter die Schubspannungen mit Hilfe der Gl. (94) nachrechnen. Während sich beim Rohr gemäß der Formel $\tau = \frac{1}{2} \frac{r}{l} \cdot \Delta p$ an der Wand die größte Schubspannung ergibt, die von da ab bis zur Mitte linear bis Null abnimmt, besteht bei der gerade noch anliegenden Diffusorströmung die größte Schubspannung in etwa $\frac{1}{4}$ Radius von der Wand und nimmt nach der Wand zu auf Null ab, sodaß die bald folgende Ablösung auch als Folge einer zu kleinen Schubspannung bzw. Schleppwirkung gedeutet werden kann. Mit Hilfe der Schubspannung kann man physikalisch noch den Koeffizienten untersuchen, der der Zähigkeitsziffer im laminaren Gebiet gemäß der Gleichung $\frac{\tau}{\rho} = \nu \cdot \frac{du}{dy}$ entspricht. Definiert man auch im turbulenten Gebiet eine ähnliche Größe $\frac{\tau}{\rho} = \varepsilon \cdot \frac{du}{dy}$, wo ε die Austauschgröße genannt wird, die offensichtlich mit dem Mischungsweg zusammenhängt, so macht man folgende Feststellungen. Bei der turbulenten Rohrströmung ist ε an der Wand gleich Null, steigt schnell zu einem Maximum, das sich dann bis zur Rohrmitte bis zu einem bestimmten Wert leicht senkt. Die gerade noch anliegende Diffusorströmung hat prinzipiell den gleichen Verlauf, jedoch mit dem Unterschied, daß ε etwa zwei- bis dreimal so groß ist. Kurz vor dem Abreißen wird so die größte Austauschgröße erreicht, die in einer Strömung überhaupt möglich ist.

b) Nach Früherem ist einleuchtend, daß die Reynoldssche Zahl, die das Verhältnis der Trägheits- zu den Reibungskräften angibt, bei der Ablösung eine Rolle spielt. Außerdem wird aber auch der Erweiterungswinkel des Diffusors α von Bedeutung sein, sodaß augenscheinlich der Ablösungsvorgang eine Funktion von α und Re ist. Durch Näherungsbetrachtungen¹ ist es gelungen, diese Abhängigkeit für den Sonderfall des ebenen Diffusors zu finden. Danach sind bei geraden Diffusoren ähnliche Vorgänge zu erwarten, wenn die Zahl $\alpha \cdot \sqrt[4]{Re}$ den gleichen Wert hat. Die Untersuchungen stützen sich auf Beobachtungsmaterial bis $Re \sim 200\,000$ und haben deshalb zunächst nur hier strenge Gültigkeit.

d) Kurz vor der Ablösung wird der größtmögliche Druckanstieg zu erwarten sein. Um diese sehr wichtige Größe von der jeweiligen Ge-

¹ Siehe die Arbeit von Nikuradse S. 153.

schwindigkeit und anderen Größen unabhängig zu machen, muß der Druckanstieg irgendwie dimensionslos gemacht werden. Das geschieht dadurch, daß man durch einen anderen Druckabfall dividiert, der physikalisch mit dem Problem zu tun hat. Die durch das $1/7$ - bzw. $1/8$ -Gesetz entdeckte Verwandtschaft mit dem Rohrreibungsproblem lenkt die Aufmerksamkeit auf den Druckabfall infolge Rohrreibung, z. B. für $Re < 80000$, auf das Gesetz von Blasius. Es hat sich gezeigt, daß man statt des Rohrdurchmessers eine Länge δ einsetzen muß, die leicht verständlich gemacht werden kann. Bestünde die Höchstgeschwindigkeit, statt nur in Profilmitte, im ganzen Querschnitt, so würde für die gleiche Menge ein schmalerer Kanal genügen, der an beiden Seiten um δ kleiner wäre. Man nennt δ die Verdrängungsbreite. So entsteht ein dimensionslöser Druckanstieg:

$$\Gamma = \frac{dp}{dx} \frac{\delta^{5/4}}{w^{1/4} \cdot \rho \cdot v^{1/4}}. \quad (124)$$

Trägt man nun aus den bisherigen Versuchsergebnissen $\Gamma = f(\alpha \sqrt[4]{Re})$ auf, so zeigt sich das überraschende Ergebnis, daß alle Versuche auf einer Kurve liegen. Der beschleunigte Teil ist weniger von Interesse als die Verzögerung. Hier ergibt sich ein $\Gamma_{\max} = 0,105$, d. h. ein größter Druckanstieg bei dem Werte $\alpha \cdot \sqrt[4]{Re} = 150$, ein äußerst bemerkenswertes und wichtiges Resultat. Da man es bei den meisten früheren Diffusormessungen versäumte, die Geschwindigkeitsprofile zu bestimmen, waren bisher leider erst wenige Versuche in dieser Richtung auswertbar. Weitere Bestätigungen bleiben somit noch abzuwarten, ebenso wie die Erweiterung über das Blasius'sche Gesetz hinaus in einer so allgemeinen Darstellung wie beim Rohr noch fehlt.

c) Eine neuere Arbeit von Polzin¹ beschäftigt sich sehr eingehend mit den Ablösungsvorgängen der Diffusorströmung. Ein ebener Diffusor mit verstellbaren Wänden wird hier untersucht. Leider fehlen Angaben über die erreichten Wirkungsgrade. Die sehr beachtlichen Ergebnisse dieser Arbeit sind folgende:

a) Ein Diffusor kann auch bei kleinen Erweiterungswinkeln nicht beliebig lang sein. Das Querschnittsverhältnis F_2/F_1 (d. h. Austrittsquerschnitt zu Eintrittsquerschnitt) darf bei einem Diffusor eine bestimmte Grenze nicht überschreiten, wenn Ablösungen vermieden werden sollen. Danach ergibt sich bei genügender Länge schließlich bei jedem Diffusor eine Ablösung.

b) Es ist zu unterscheiden zwischen dem ersten Beginn einer vorübergehenden, wechselnden Wandablösung, die schon sehr früh einsetzt², und der ununterbrochen anhaltenden Ablösung, die weiter stromabwärts einsetzt. Im Zwischengebiet werden die sich bildenden Wirbel durchweg weggespült. Mit steigender Reynoldsscher Zahl wandert der Punkt der vollendeten Ablösung stromaufwärts.

c) Der erste Beginn der vorübergehend wechselnden Wandablösung findet bei

¹ Polzin: Strömungsuntersuchungen an einem ebenem Diffusor. Ing.-Arch. 1940, S. 361.

² Umschlag.

einer Querschnittserweiterung statt, die praktisch mit dem theoretischen Ergebnis von Pohlhausen $F_2/F_1 = 1,214$ übereinstimmt und kaum von dem Öffnungswinkel α abhängt. Das Gebiet der ununterbrochen anhaltenden Ablösung ist stark vom Öffnungswinkel abhängig. Aus den Versuchsergebnissen von Polzin läßt sich für den Bereich von 6° bis 14° folgende Näherungsformel für die Grenze ableiten:

$$F_2/F_1 = 3,63 - 0,123 \cdot \alpha^\circ.$$

Zahlenmaterial. Eine wichtige Folgerung aus dieser Erkenntnis ist die, daß der Öffnungswinkel α mit wachsenden Reynoldsschen Zahlen kleiner werden muß. Beschränken wir uns zunächst auf den Bereich der *Re*-Zahlen, in denen dieser Zusammenhang durch Versuche bestätigt ist, so gelten folgende Zahlen für den ebenen Diffusor:

<i>Re</i>	50 000	100 000	150 000	200 000
α Öffnungswinkel	10	8,42	7,6	6,7

Weitere Versuchangaben über Diffusoren. Eingehende Versuche über kegelige Diffusoren stammen von Andres¹. Er untersuchte u. a., bei welchen Winkeln der Gesamtverlust am kleinsten ist. Dieser setzt sich aus Reibungsverlusten und Ablösungsverlusten zusammen. Die reine Wandreibung läßt sich experimentell leicht von den Verzögerungsverlusten trennen, indem man bei umgekehrter Strömungsrichtung, d. h. bei beschleunigter Strömung, die Verluste feststellt. Nach diesen Untersuchungen scheint bei kleiner Wandreibung ($\lambda \sim 0,02$) ein Winkel von $\alpha = 7^\circ$ und bei rauher Wand ($\lambda = 0,04$) ein solcher von 9° der Bestwert zu sein.

Ein Vergleich² verschiedener Rechteck- und Kreisdiffusoren zeigte einen Höchstwert des Wirkungsgrades im Bereich zwischen $6-10^\circ$.

Nach Thoma³ werden auch bei Verwendung einer Stoßplatte nach Abb. 134 mit Abrundung der Diffusoraustrittskante gute Ergebnisse erzielt. Die günstigsten Verhältnisse liegen bei $R/d = 0,85$ und $D = 4$ bis $5 d$. Eine Abrundung ohne Stoßplatte ist schädlich. Der beste Wirkungsgrad wurde bei $8,5^\circ$ erreicht.

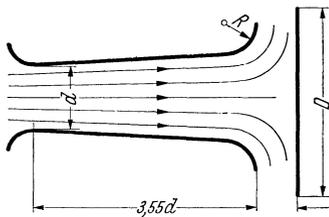


Abb. 134. Diffusor mit Stoßplatte.

Bei sehr starker Turbulenz scheint eine Vergrößerung des Winkels zweckmäßig zu sein. So fand Vüllers⁴ bei Diffusoren, die als Ausblaseschlot von

¹ Andres: Forschung. Ing.-Wes. Heft 76.

² Patterson, C. N.: Aircraft Engng. 1938, S. 267.

³ Thoma: Mitt. hydraul. Inst. TH München 1931, Heft 4.

⁴ Vüllers: Z. VDI 1933, S. 847.

Ventilatoren untersucht wurden, einen besten Erweiterungswinkel von 11 bis 13°. Auch Rotation des Strahles und unmittelbarer Einlauf ohne Anlaufstrecke bringen Vorteile, wie überhaupt alle Maßnahmen, die die kinetische Energie der Randschichten erhöhen, erklärlicherweise von Nutzen sind. Die beste Energieausnutzung scheint dann erreicht zu werden, wenn man den Diffusor gerade bis an die Grenze der Ablösung erweitert. Den Wirkungsgrad von Diffusoren definiert man zweckmäßig nach folgender Formel:

$$\eta = \frac{\text{statischer Druckunterschied}}{\frac{\rho}{2} [c_1^2 - c_2^2]} \quad (125)$$

Bei guten Ausführungen kann man mit Werten von 0,8÷0,9 rechnen, während bei weniger sorgfältiger Ausbildung Werte von 0,7÷0,8 zugrunde gelegt werden müssen.

Die Verluste und der Energieumsatz in Diffusoren sind in dem Versuch der Abb. 135 veranschaulicht. Hier ist ein geschlossener Versuchskanal¹ an die Düse eines kleinen Windkanals angeschlossen. Die untere Begrenzungswand besitzt 20 Öffnungen, die an Glasröhren angeschlossen sind. Diese münden in ein gemeinsames Rohr, das durch einen Schlauch mit einer Tubusflasche verbunden ist. So entsteht ein Reihenmanometer, das die Druckverteilung längs des Diffusors deutlich zeigt. Die Nulllinie ist durch einen Faden dargestellt. Die verstellbare Zunge des Diffusors ist so eingestellt, daß an der engsten Stelle gerade der größte Unterdruck entsteht. Dieser Unterdruck, der bei 11,5° am größten war, wird durch Verzögerung der Geschwindigkeit stetig verringert, sodaß am Austritt des Kanals der Atmosphärendruck erreicht wird. Am Eintritt des Kanals beobachtet man einen Überdruck, der die gesamten Strömungsverluste der Strecke darstellt. Nach der Definition des Wirkungsgrades kann auf diese Weise η leicht nach Gl.(100) festgestellt werden. Es ergibt sich ein Wert von 0,863.

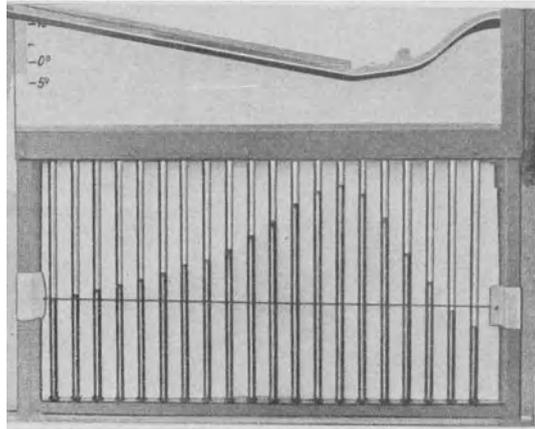


Abb. 135. Darstellung der Druckverteilung in einem Diffusor durch Reihenmanometer.

Bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit müssen die Erweiterungswinkel u. U. erheblich verkleinert werden. Näheres hierüber im Kapitel „Gasdynamik“.

Bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit müssen die Erweiterungswinkel u. U. erheblich verkleinert werden. Näheres hierüber im Kapitel „Gasdynamik“.

¹ Eck: Versuchsmöglichkeiten in einer geschlossenen Versuchsstrecke, Luftfahrt und Schule, 1936, S. 259, oder Eck: Strömungslehre Bd. II.

Diffusoren mit wechselnden Querschnittsformen. Die besonders im Maschinenbau vorkommenden erweiterten Kanäle müssen vielfach aus konstruktiven Gründen in der Querschnittsform wechseln. Ein anfänglich runder Querschnitt wird z. B. zu einem rechteckigen erweitert. Hier entsteht die Frage, wie die zulässige Erweiterung bestimmt wird. Folgendes Verfahren kann hier empfohlen werden. Man trägt in Abhängigkeit vom mittleren Stromfaden die Querschnitte auf, rechnet dann die jeweiligen Durchmesser von inhaltsgleichen Kreisen aus und trägt diese Durchmesser über dem mittleren Stromfaden maßstäblich auf. Man prüft dann die Neigungswinkel dieses runden Ersatzdiffusors und sorgt dafür, daß die Erweiterungswinkel die üblichen Werte nicht überschreiten.

Während beim Diffusor immerhin noch gewisse praktisch brauchbare Zahlenangaben möglich sind, ist dies für allgemeinere Formgebungen, insbesondere für umströmte Körper, nicht in dem gleichen Maße möglich. Wir können wohl einige sehr bedeutsame allgemeine Richtlinien aufstellen; im einzelnen bleiben wir hier z. Zt. noch auf den Versuch angewiesen. Eine Zusammenstellung des Beobachtungsmaterials wichtiger geometrischer Formen kann deshalb der Praktiker nicht entbehren.

Während die Diffusorströmung das Ablösungsproblem für durchströmte Körper veranschaulicht, wollen wir für umströmte Körper die Kugel als typisches Beispiel wählen und anschließend eine Zusammenstellung wichtiger Einzelprobleme bringen.

49. Ablösung in rotierenden Kanälen und bei rotierenden Körpern.

Die Ergebnisse der Diffusorforschung können nicht auf rotierende Kanäle übertragen werden. Die Strömungskanäle der Kreiselmotoren bilden ein praktisch wichtiges Beispiel hierfür. Der Hauptunterschied gegenüber ruhenden Kanälen besteht in der Einwirkung der Corioliskraft, die senkrecht zur Relativbewegung wirkt, und der Zentrifugalkraft¹, die senkrecht zur Umfangsbewegung wirkt. Hierdurch ändern sich die Druckverhältnisse erheblich. Dabei muß aber betont werden, daß die Zentrifugalkraft nicht etwa, wie vielfach irrtümlich angenommen wird, eine direkte Ablösungsursache ist, da sie ja auf ruhende und bewegte Teilchen in gleicher Weise wirkt. Entscheidend ist immer der Geschwindigkeitsverlauf, der allerdings durch Zentrifugal- und Corioliskräfte entscheidend beeinflusst werden kann. Die außerordentlichen Beobachtungsschwierigkeiten haben die Erforschung dieses Gebietes sehr erschwert. Tatsächlich reicht das vorliegende Beobachtungsmaterial, insbesondere bei Radialmaschinen, bei weitem nicht aus, um eindeutige Gesetzmäßigkeiten aufstellen zu können. Neuerdings versucht man,

¹ Für die reibungsfreie Strömung eines gleichförmig rotierenden Systems läßt sich die allgemeine Bewegungsgleichung der Relativströmung leicht aus den früheren Beziehungen von S. 16 ableiten. Diese Bewegung würde z. B. ein mit dem rotierenden System mitfahrender Beobachter feststellen können. Wir denken uns z. B. die Kanalströmung der früheren Abb. 17 um eine z-Achse senkrechte Achse rotieren. Bezeichnen wir den senkrechten Abstand von dieser Achse mit r und die Geschwindigkeit mit w (die frühere Bezeichnung c wird für die Absolutgeschwindigkeiten verwendet), so kommt zu den Kräften der Gl. (13) nur die in Strömungsrichtung wirkende Komponente der Zentrifugalkraft. (Die Corioliskraft wirkt senkrecht zur Bewegung und scheidet deshalb bei dieser Betrachtung aus). Aus Gl. (13)

durch Strömungsaufnahmen¹, die von einer mit dem System rotierenden Kamera gemacht werden, einen Einblick zu gewinnen. Durch solche Aufnahmen wird allerdings nur die Strömung im Hauptmeridianschnitt des Rades erfaßt. Senkrecht zu der Bildebene sind aus früher angegebenen Gründen noch starke Sekundärströmungen zu erwarten, die sich der Strömung noch überlagern. Ablösungen und Sekundärströmungen von uns bis jetzt noch unbekanntes Gesetzmäßigkeiten beeinflussen jedenfalls derartige Strömungen sehr stark. Dies ist auch der Grund dafür, daß die lange Zeit durchgeführten Bemühungen, mit potentialtheoretischen Methoden ähnliche billige Erfolge wie bei der praktisch ablösungsfreien Tragflächenströmung zu erringen, vollkommen gescheitert sind. Besonders charakteristisch ist bei rotierenden Diffusoren, daß die Ablösungsstellen sich mit der Durchflußgeschwindigkeit erheblich ändern².

Bei Axialmaschinen ist kürzlich durch einige aufschlußreiche Arbeiten ein gewisser Einblick gewonnen worden. In einer interessanten Arbeit zeigt z. B. Ruden³, daß bei Axialgebläsen die nabennahen Partien des Flügels auf der Saugseite eine starke Ablenkung der Strömung nach außen zeigen, eine Beobachtung, die durch eine Arbeit von Gutsche⁴ nochmals bestätigt wurde. Hierbei handelt es sich wohl-gemerkt um die nicht abgerissenen Teile der Strömung. Über diese Erkenntnis hinaus gelang dann Gutsche in der eben zitierten Arbeit ein interessanter Einblick in den Ablösungsmechanismus. Gutsche versah seine Versuchspropeller vor dem Versuch mit Ölfarbtropfen. Nach dem Versuch entstanden dann Bilder, die deutlich den ganzen Strömungsverlauf und die Ausbildung der Ablösungen erkennen ließen. Man erkennt z. B. aus diesen Bildern, daß auf der Saugseite die abgelöste Strömung durch die Zentrifugalkräfte beinahe senkrecht nach außen abgelenkt wird. Die Fliehkräfte wirken dabei wie eine Grenzschichtabsaugung, indem durch ihre Wirkung die Ablösung gegenüber dem nicht rotierenden Flügel merklich nach hinten verschoben wird. Das Bild bestätigt auch die Beobachtung Rudens, daß die gesunde Strömung der Saugseite in der Nabengegend stark nach außen gedrängt wird. Die Druckseite, an der keine Ablösung beobachtet wird, zeigt bessere Übereinstimmung mit dem nicht rotierenden Flügel. Interessant ist, daß die Druck-

wird dann
$$\frac{dw}{dt} = -g \frac{\partial}{\partial s} [p/\gamma + z] + r w^2 \cdot \cos \alpha$$

Setzt man $\frac{dr}{ds} = \cos \alpha$ und $\frac{dc}{dt} = c \cdot \frac{\partial c}{\partial s}$, so entsteht

$$c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} = -g \frac{\partial}{\partial s} [p/\gamma + z] + r w^2 \frac{dr}{ds}.$$

Nach Kürzung von ∂s ist die Integration leicht durchführbar.

$$p + \gamma \cdot z + \frac{\gamma}{2g} w^2 - \frac{\gamma}{2g} u^2 = \text{konst.} \quad [u = r \cdot w] \quad (126)$$

Gegenüber der Bernoullischen Gleichung ist also noch das Glied $\frac{\gamma}{2g} u^2$ abzuziehen.

¹ Frietsch, E.: Wirbelbildung und Kräftewirkung an umlaufenden Kreisrad-schaufeln. VDI-Forschungs-Heft 384.

² Grünagel, Eugen: Flüssigkeitsbewegung in umlaufenden Radialrädern. VDI-Forschungs-Heft 405.

³ Ruden: Untersuchungen über einstufige Axialgebläse. Lufo (14) 1937, S. 325.

⁴ Gutsche: Versuche an umlaufenden Flügelschnitten mit abgerissener Strömung. Mitt. d. Preuß. Versuchsanstalt f. Wasser-, Erd- u. Schiffbau. Berlin, Heft 3, 1940.

verteilungskurve der unterkritischen Strömung, bei der die Strömung ganz abgelöst ist, sich bei der Rotation derjenigen der überkritischen Strömung merklich nähert, so daß der auf S. 229 besprochene Einfluß der Kennzahl hier zurücktritt.

Über die beobachtete Wirkung der Zentrifugalkraft sei noch betont, daß sich bei reibungsfreier achsensymmetrischer Potentialströmung ein der Fliehkraftbeschleunigung entgegengerichtetes gleich großes Druckgefälle bildet. Ein solches kann im Totwassergebiet nur im geringen Umfange entstehen, wodurch die nach außen gerichtete Bewegung der abgelösten Teilchen zu erklären ist.

50. Dimensionslose Erfassung des Widerstandes.

Ebenso wie beim Rohrwiderstand ist es auch bei der Erfassung des Widerstandes von umströmten Körpern zweckmäßig, dimensionslose Koeffizienten einzuführen. Dadurch wird eine Übertragung der Versuchsergebnisse auf beliebige Verhältnisse sehr erleichtert. Gleichzeitig machen wir mit Koeffizienten bekannt, die bei der weiteren Behandlung des Ablösungsproblems nicht entbehrt werden können. Durch folgende

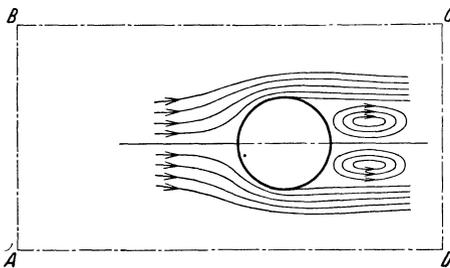


Abb. 136. Schematische Darstellung der Zylinderströmung.

Überlegung soll dieses Ziel erreicht werden.

Wir betrachten z. B. einen Zylinder nach Abb. 136, bei dem auf der hinteren Seite die Strömung abgerissen ist. Im Totwasserraum herrscht ungefähr der Druck der benachbarten Stromlinien. Diese haben aber entsprechend der Über-

geschwindigkeit (s. S. 57) einen kleinen Druck, sodaß eine Kraft in Strömungsrichtung offensichtlich ist. Es leuchtet ein, daß diese Kraft um so größer ist, je mehr Fläche der Körper in Strömungsrichtung versperrt. Diese Schattenfläche F des Körpers wird somit den Widerstand sehr beeinflussen. Lassen wir nun in Gedanken den Staudruck $\frac{\rho}{2}w^2$ auf diese Fläche wirken, so erhalten wir eine Kraft $P = F \cdot \frac{\rho}{2}w^2$, die dann entstehen würde, wenn alle Flüssigkeitsteilchen vor der Schattenfläche auf Null abgebremst wären. Der Widerstand wird sicherlich von dieser Kraft verschieden sein, es ist aber zu erwarten, daß er von gleicher Größenordnung ist. Indem man beide Kräfte vergleicht, kommt man leicht zu einem Widerstandskoeffizienten c :

$$W = c \cdot \frac{\rho}{2} w^2 \cdot F . \quad (127)$$

Damit ist die Bestimmung des Widerstandes auf die Ermittlung von c zurückgeführt. Diese Formel, die bereits von Newton stammt, kann

auch leicht durch eine Impulsbetrachtung der Fläche $ABCD$ der Abb. 136 gewonnen werden.

Wir wollen nach Abb. 136 irgendeinen Widerstandskörper betrachten und annehmen, daß hinter ihm (im Totwasser) die Geschwindigkeit gleich Null ist. Die Impulsänderung in Strömungsrichtung beträgt dann $\sim \frac{\gamma}{g} \cdot F \cdot w \cdot w$, wo F die Schattenfläche des Körpers ist. Diese muß gleich der auftretenden Kraft, d. h. gleich dem Widerstand W sein, wenn wir in erster Näherung von Druckänderungen in den Grenzlinien AB bzw. CD absehen. Notwendig ist die Voraussetzung, daß die Grenzen sehr weit weg liegen, sodaß der Impulstransport durch BC und AD vernachlässigt werden kann. Wir erhalten so:

$$\frac{\gamma}{g} F \cdot w^2 \sim W = c \cdot \frac{\gamma}{2g} w^2 \cdot F.$$

Die jeweilige Eigentümlichkeit des Körpers wird somit durch einen dimensionslosen Faktor c zum Ausdruck gebracht. Es ist anzunehmen, daß sich c , ebenso wie beim Rohre der λ -Wert, mit der Reynoldsschen Zahl ändert.

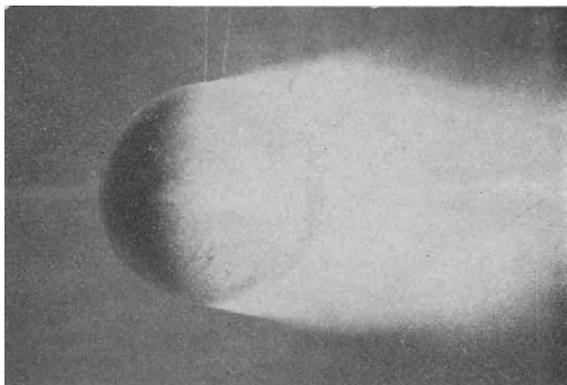


Abb. 137. Kugelströmung unterkritisch nach Prandtl.

51. Kugelströmung.

Aus historischen und praktischen Gründen verdient die Kugelströmung eine eingehende Betrachtung. Die Kugel stellte seit jeher ein dankbares Beobachtungsobjekt dar und war ein willkommener Begleiter bei der Entwicklung der modernen Strömungslehre.

Vor 38 Jahren beschäftigten sich gleichzeitig Prandtl und Eiffel (Paris) mit Kugelmessungen. Trotz genauer Messungen stellte Eiffel einen Widerstandskoeffizienten $c = 0,176$ und Prandtl einen Wert $0,44$ fest, d. h. den 2,5fachen Wert. Die Klärung dieses Widerspruchs wirkte nun ungemein befruchtend auf die Weiterentwicklung der Strömungslehre. Prandtl stellte nämlich fest, daß bei seiner Kugel die Strömung an der seitlich weitesten Stelle, d. h. bei etwa 90° abriß. Wurde nun ein Draht etwas vorher aufgelegt, so blieb die Strömung noch weiter hinten anliegen und ergab die gleichen Widerstandsziffern wie bei Eiffel. Abb. 137 und 138 zeigen diese beiden klassischen Auf-

nahmen, bei denen die Strömung mit Rauch sichtbar gemacht wurde. Der Grund für dieses unterschiedliche Verhalten liegt in folgendem: In Abb. 137 ist die Grenzschicht laminar. Auf der hinteren Seite der Kugel wäre nun eine Verzögerung dieser Schicht notwendig. Wir

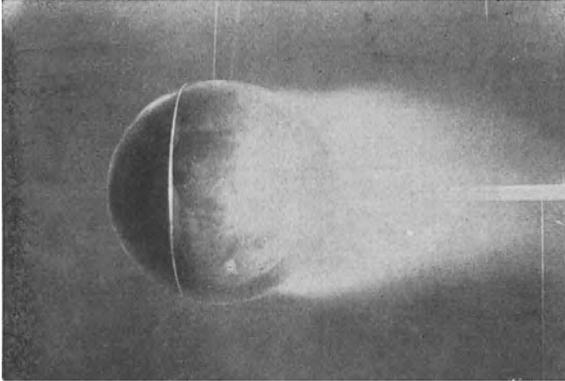


Abb. 138. Kugelströmung überkritisch nach Prandtl. Vorzeitiger Umschlag ist durch Drahtreif erzwungen.

hörten auf S. 151 daß dies nicht geht. Die Strömung reißt ab. Der Draht der Abb. 138 macht nun die Grenzschicht turbulent. Vom Diffusor (S. 149) wissen wir, daß solche Schichten in der Lage sind, etwas gegen den Druck anzuströmen. Da hinter dem Meridiankreis die Stromlinien zunächst nur mäßig erweitert sind, besteht durchaus die Möglichkeit, daß die turbulente Grenzschicht die Verzögerung mitmacht, wie es auch Abbildung 138 zeigt. Schließlich wird aber die Erweiterung der Stromlinie zu stark, und die Strömung reißt auch hier ab. Abb. 139 veranschaulicht den Vorgang schematisch. Wesentlich für den ganzen Vorgang ist also die Frage, unter welchen Bedingungen die Grenzschicht turbulent wird. Von der Rohrströmung wissen wir nun, daß dies von der Reynoldsschen Zahl abhängt, und zwar so, daß dort eine untere *Re*-Zahl existiert, unterhalb deren auch bei größten Störungen sich immer wieder laminare Strömung einstellt. Durch Ausschaltung von Störungen läßt sich die obere Grenze sehr weit hinaufsetzen, ohne daß wir dort eine scharfe Grenze angeben können. Bei der Kugel liegen tatsächlich ähnliche Verhältnisse vor. Maßgebend für den Umschlag ist einmal die Reynoldssche Zahl, sodann der Charakter der Gesamtströmung. Letztere kann wirbelig (turbulent) oder laminar sein. Dazwischen sind alle Zwischenstadien vorhanden. Der von einem Gebläse erzeugte Luftstrom ist z. B. meist sehr turbulent. Schleppen wir hingegen eine Kugel durch ruhende Luft, so liegt offenbar laminare Gesamtströmung vor.

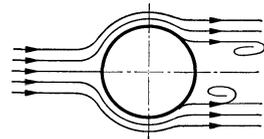


Abb. 139. Schematische Darstellung der überkritischen Kugelströmung.

Die Ergebnisse der sich über 38 Jahre erstreckenden Kugelforschung seien kurz zusammengefaßt:

a) Der Umschlag von laminarer in turbulente Grenzschicht kann nur im Bereiche der Reynoldsschen Zahl $1,7 \cdot 10^5 < Re < 4,05 \cdot 10^5$ stattfinden. Dabei ist $Re = \frac{c \cdot d}{\nu}$ (d Kugeldurchmesser).

b) Ist der Gesamtstrahl vollkommen turbulent, so findet der Umschlag bei etwa $1,5 \cdot 10^5$ statt. Bei vollkommen laminarer Strömung liegt die Grenze bei $4,05 \cdot 10^5$. Dazwischen kann durch künstlich erzeugte Turbulenz, z. B. den Drahtreifen nach Abb. 138, der Umschlag vorverlegt werden. Dies gilt aber nur für den Bereich $1,7 \cdot 10^5 < Re < 4,05 \cdot 10^5$. Unterhalb dieses Bereiches nützt ein Drahtreif od. dgl. nichts, oberhalb ist er nicht mehr nötig, weil die Grenzschicht dann von selbst turbulent wird.

c) Die Druckverteilung offenbart sehr deutlich die Wirkung der beiden Strömungsformen. Von den späteren diesbezüglichen Untersuchungen (S. 187) sei hier nur folgende auffällige Erscheinung erwähnt. Unterkritisch ergibt sich hinten ein Unterdruck, überkritisch ein Überdruck.

d) Kurz nach dem Umschlag ist $c = 0,09$ und steigt dann schließlich bei sehr hohen Re -Werten auf $0,176$ an.

e) Der Umschlag im kritischen Bereich hängt von der Turbulenz der Gesamtströmung ab; die Re -Zahl des Umschlages hat sich als bisher bestes und einfachstes Mittel erwiesen, um die Turbulenz eines Strahles zahlenmäßig zu erfassen. Man vergleicht die Re -Zahlen, bei denen c gerade den Wert $0,3$ erreicht, und stellt diese Zahl ins Verhältnis zu der Re -Zahl bei laminarem Umschlag. Den Wert $\frac{Re_{lam\ 0,3}}{Re_{0,3}}$ bezeichnet man als Turbulenzgrad eines Strahles.

f) Die Bewegung eines Körpers durch das Luftmeer, z. B. Bewegung eines Flugzeuges, muß als laminar betrachtet werden. Selbst bei böigem Wetter ergeben Schleppversuche mit Flugzeugen für die Kugel ein $Re_{krit} \sim 3,9 \cdot 10^5$, während bei ruhiger Luft $4,05 \cdot 10^5$ erreicht wird.

g) Unterhalb $Re = 10^3$ ist wieder eine andere Strömungsform vorhanden. Die Wirbelbildung hinter der Kugel kommt hier allmählich zum Stillstand, sodaß sich auch im Totwasserraum laminare Strömung auswirkt. Der Widerstand ist hier proportional der Geschwindigkeit. Demnach steigt c an.

Stokes¹ hat eine Lösung für sehr kleine Re -Werte gefunden. $W = 3\pi\mu \cdot d \cdot w$ (d Kugeldurchmesser). Mit der Schreibweise der Gl. 127 ergibt sich ein $c = 24/Re$. Von Oseen stammt eine weiter reichende

¹ Stokes, G. G.: Camer. Phil. Trans. Bd. 8, 1845 und Bd. 9, 1851.

Lösung $W = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{16} Re \right]$. Diese Formeln, die in ihrem Geltungsbereich bis etwa $Re = 2$ gut mit Versuchen im Einklang stehen, spielen bei den Problemen der Aufbereitung und Entstaubung eine große Rolle. — Abb. 140 gibt einen Überblick über alle Bereiche.

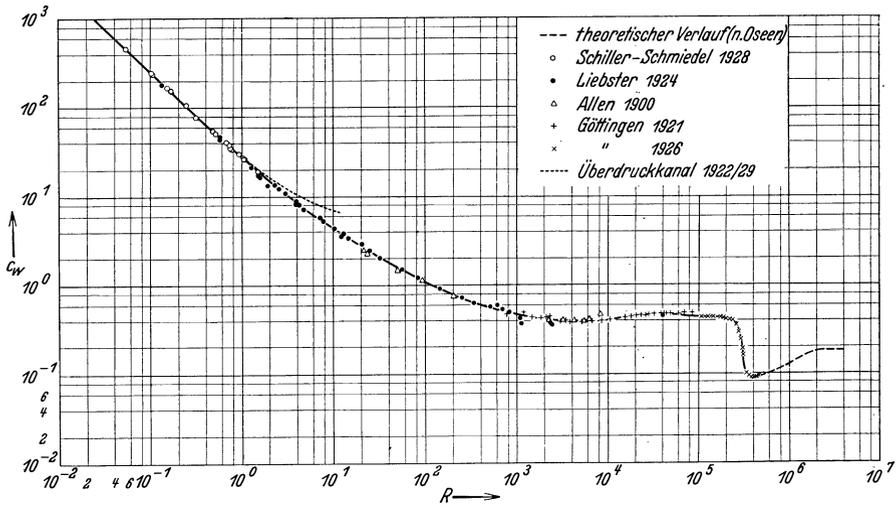


Abb. 140. Kugelwiderstandsbeiwert in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl. Gesamter durch Messungen erreichter Bereich der Reynoldsschen Zahlen (nach Muttray).

Für das Modellversuchswesen sind die Ergebnisse der Kugelforschung von einschneidender Bedeutung gewesen. Während man eine Zeitlang bei der Übertragung der Modellversuche das Hauptaugenmerk auf gleiche Reynoldssche Zahlen legte, weiß man heute, daß auch der Turbulenzgrad gleich sein muß. Der Turbulenzunterschied zwischen der freien Atmosphäre und unseren Windkanälen führte in vielen Fällen, z. B. bei der Bestimmung von Auftriebsmaximum, Profilwiderstand usw., zu großen Diskrepanzen, sodaß man heute auf einen möglichst laminaren Strahl der Windkanäle größte Sorgfalt verwendet. Hat man einen laminaren Strahl, so ist umgekehrt die Erzeugung irgendeiner Turbulenz sehr leicht. Es genügt, in einiger Entfernung einen Draht

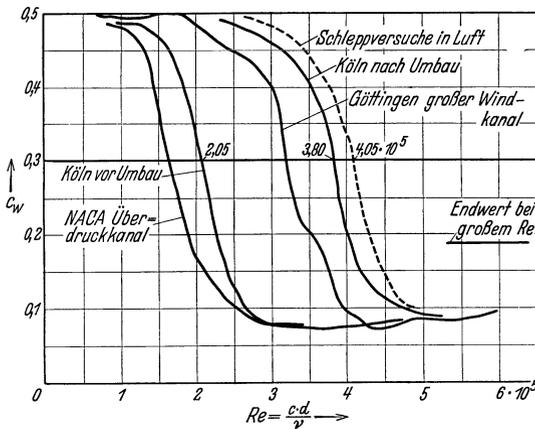


Abb. 141. Verlauf der Widerstandsbeiwerte der Kugel im kritischen Gebiet für verschiedene Windkanäle.

verwendet. Hat man einen laminaren Strahl, so ist umgekehrt die Erzeugung irgendeiner Turbulenz sehr leicht. Es genügt, in einiger Entfernung einen Draht

verwendet. Hat man einen laminaren Strahl, so ist umgekehrt die Erzeugung irgendeiner Turbulenz sehr leicht. Es genügt, in einiger Entfernung einen Draht

oder ein Drahtgitter anzubringen, um eine wünschenswerte Turbulenz zu erzeugen. Das Ideal eines Windkanals wird somit bei vollkommen laminarem Strahl erreicht.

Abb. 141 zeigt Messungen am Kölner Windkanal. Dieser hatte zunächst eine sehr große Turbulenz, $Re_{krit.} = 2,05 \cdot 10^5$. Im Zusammenhang mit einer besonderen Aufgabe (Profilmessungen bei kleinen Re -Zahlen) lag hier die Notwendigkeit vor, den Strahl so laminar zu machen, wie es überhaupt möglich war. Aus verschiedenen Gründen war für diese Aufgabe die Forderung noch dringender als bei den Aufgaben unserer größten Windkanäle. Nach den Umbauten, die von F. W. Schmitz im Laboratorium des Verfassers durchgeführt wurden, wurde ein guter laminarer Strahl erreicht. Abb. 141 zeigt die Kugelkennlinie nach dem Umbau, wo ein $Re_{krit.} = 3,8 \cdot 10^5$ erreicht wurde. Zum Vergleich sind Kurven bekannter Kanäle eingetragen.

Die Herstellung von Windkanälen mit laminarem Strahl wurde bereits vorher in Amerika und England¹ sehr gepflegt, wo auch beachtliche Erfolge erzielt wurden.

52. Krümmer.

Die allgemeinen Erkenntnisse nach S. 27 über gekrümmte Bewegungen gestatten einen leichten Einblick in die Strömungsverhältnisse bei Krümmern. Die bei der gekrümmten Bewegung auftretenden Zentrifugalkräfte müssen von den außen fließenden Teilchen aufgenommen werden, sodaß der Druck nach außen wachsen muß. In roher Näherung beträgt nach Gl. (42) der Druckzuwachs $\Delta p = b \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{c_m^2}{R}$, wo c_m die mittlere Geschwindigkeit, R der mittlere Krümmungsradius und b die Tiefe des Krümmers bedeuten. Ist z. B. $\frac{R}{b} = 2$, wie es bei handelsüblichen Krümmern oft der Fall ist, so ist $\Delta p = \frac{\gamma}{2g} \cdot c_m^2$; das ist aber ein Druckunterschied von der Größenordnung des Staudruckes. Nach der Bernoullischen Gleichung stellen sich entsprechende Geschwindigkeitsunterschiede ein, sodaß an der inneren Krümmung die größte und außen die kleinste Geschwindigkeit vorhanden ist. (Roh betrachtet, ändert sich die Geschwindigkeit nach der Gl. (47) $R \cdot c = \text{konst.}$) Verfolgen wir die Strömung vom Einlauf an, so wird bis zum Scheitel innen eine Beschleunigung, außen eine Verzögerung eintreten. Vom Scheitel bis zum Auslauf ist es umgekehrt. An der Außenseite ist die Verzögerung nun bedeutend geringer als an der Innenseite kurz hinter der Krümmung, da der Weg an der Außenwand bedeutend länger ist. Tatsächlich löst sich auch, wie Abb. 142 deutlich erkennen läßt, unmittelbar hinter der inneren Krümmung die Strömung meist ab. Die Verzögerung an der Außenseite ist aus der Abb. 142 ebenfalls zu erkennen; man sieht deutlich, daß sie für die Gesamtbewegung keine sehr nachteiligen Folgen hat. Das Staudruckprofil nach Abb. 143 hinter einem

¹ Levis, George W.: Some modern methods of research in the problems of flight. J. Roy. aeron. Soc. 1939, S. 771—802.

Krümmen von quadratischem Querschnitt zeigt noch mehr. Die Energieverminderung infolge Ablösung auf einem großen Bereich des Quer-

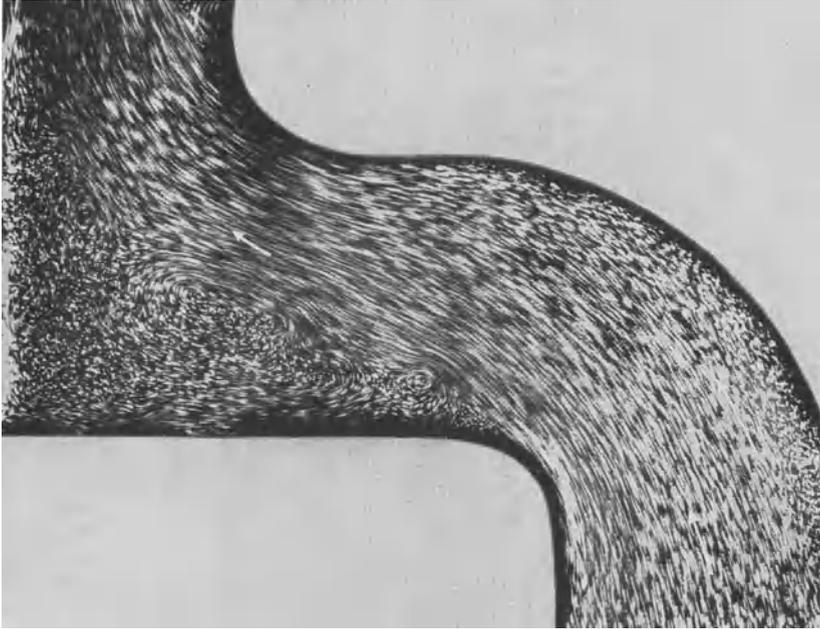


Abb. 142. Krümmenströmung. Abreißen der Strömung hinter der inneren Abrundung.

schnittes läßt deutlich die schädlichen Folgen der durch die Krümmung erzeugten Ablösung erkennen. Es leuchtet ein, daß die Verluste durch

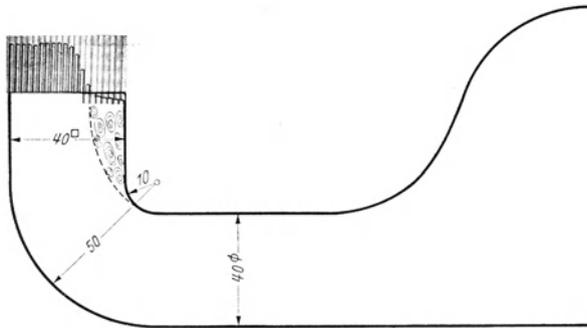


Abb. 143. Staudruckprofil am Austritt eines Krümmers. Ablösungszone ist deutlich erkennbar.

eine bessere Abrundung gemildert werden können. Diese wirkt so, daß einmal die Übergeschwindigkeiten kleiner werden und dann der

für die Verzögerung zur Verfügung stehende Weg vergrößert wird. Die Ablösungsgefahr wird dadurch geringer und schließlich ganz vermieden.

Ohne eine räumliche Betrachtung kommen wir bei Krümmern nicht aus. Denn gerade hier ist Gelegenheit, mit einer wichtigen Bewegungsform bekanntzumachen, die mit dem Namen „Sekundärströmung“ bezeichnet wird. Man versteht darunter Nebenbewegungen, die der Hauptströmung überlagert sind und oft beachtliche Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Hauptströmung erzeugen können. Ursache und Ablauf dieser Sekundärbewegung können schematisch leicht erklärt werden, während eine befriedigende rechnerische Verfolgung bisher noch nicht gelungen ist.

An der inneren Krümmung ist die Geschwindigkeit am größten und nimmt nach außen ab. Nun wird die voraufgehende Rohrströmung im allgemeinen die an der Wand fließenden Teilchen wegen der Reibung nur mit verminderter Energie in den Krümmer schicken, sodaß diese jetzt auch im Krümmer kleinere Geschwindigkeiten besitzen als die benachbarten in der Mitte des Krümmers. Infolgedessen sind die durch die gekrümmte Bewegung entstehenden Zentrifugalkräfte in der Mitte größer als an den Seitenwänden. Die Folge ist, daß die mittleren Teilchen nach außen

drängen, was aber aus Gründen der Kontinuität nur möglich ist, wenn an den Seitenwänden eine umgekehrte Bewegung einsetzt. Es entsteht ein Doppelwirbel nach Abb. 144, der sich der Hauptströmung überlagert. Die resultierende Bewegung ist in Abb. 144 rechts angedeutet. Man erkennt: Zum Entstehen

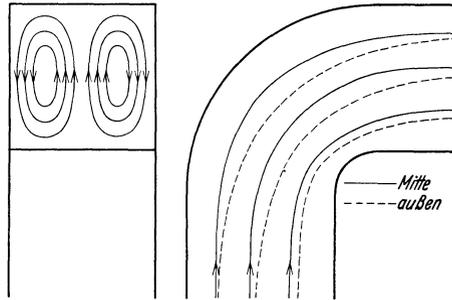


Abb. 144. Schematische Darstellung der Sekundärwirbel in einem Krümmer.

einer solchen Sekundärbewegung sind notwendig eine gekrümmte Bewegung und Geschwindigkeitsunterschiede von der Wand bis zur Mitte. Da letztere bei verzögerter Strömung am größten sind, läßt sich mit Bestimmtheit folgender Satz aufstellen:

Jede gekrümmte, verzögerte Bewegung erzeugt eine Sekundärströmung.

Bei verschiedenen technischen Anwendungen von großer praktischer Bedeutung ist diese Sekundärströmung erst in jüngster Zeit klar erkannt worden (Spiralgehäuse von Pumpen¹, glatte Leitringe von Pumpen²).

¹ Kranz: Strömung in Spiralgehäusen. Forschungsheft 370.

² Schrader: Messungen an Leitschaufeln von Kreiselpumpen. Diss. Braunschweig 1939.

Die Sekundärströmungen führen hier zu Bewegungen, die bisher ungeklärte Erscheinungen nunmehr gut erkennen lassen. Die klare Hervorhebung des Satzes ist deshalb durchaus angebracht.

Die Verlustquellen eines Krümmers können nunmehr leicht angegeben werden: 1. Ablösungsverluste an der inneren Krümmung,

2. Reibungsverluste, 3. Verluste durch Sekundärströmungen.

Die Krümmerverluste nach 1. können stark vermindert werden, wenn die Ablösungen verringert werden. Zwei Maßnahmen führen hier zum Erfolg: a) möglichst großer innerer Krümmungsradius,

b) Beschleunigung der Hauptströmung.

Mit größerem Krümmungsradius wächst die Krümmerlänge und damit auch die Reibung, sodaß schließlich eine Vergrößerung des Krümmungsradius die Verluste vergrößert. Bei einem bestimmten Verhältnis r_i/d (Abb. 145) wird ein Minimum zu erwarten sein. Bei Kreisquerschnitten ist $r_i/d = 7$ bis 8 der Bestwert. Nippert¹ stellte fest, daß für $r_i/d < 3$ die Ablösungsverluste und für $r_i/d > 3$ Reibungsverluste und Verluste durch Sekundärströmung maßgebend sind.

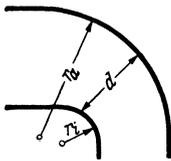


Abb. 145.

Die Krümmerverluste vergleicht man zweckmäßig mit dem Staudruck der mittleren Rohrgeschwindigkeit. Dies führt zu einem Verlustkoeffizienten

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\gamma}{2g} c_m^2 \tag{128}$$

Für Krümmer mit Kreisquerschnitt ergeben sich folgende ζ -Werte:

r_i/d	1	2	4	6	10
ζ	0,51	0,3	0,23	0,18	0,2

Bei vielen technischen Aufgaben ist die Ausführung der Bestwerte aus irgendwelchen Gründen nicht möglich. Oft ist auch der Krümmerverlust prozentual so belanglos, daß technologische Gesichtspunkte die Formgebung bestimmen. Für solche Fälle genügen handelsübliche Formen.

Werte handelsüblicher Formstücke für Warmwasserheizungen nach Brabbee².

$d^{(mm)}$	14	20	25	34	39	49	
ζ	1,7	1,7	1,3	1,1	1,0	0,83	Knie 90°, Kehle scharfkantig, außen abgerundet. d Durchmesser des einzuschneidenden geraden Rohrstückes.
ζ	1,2	1,1	0,86	0,53	0,42	0,51	

¹ Nippert: Forschungsheft 320.

² Rietschel, H.: Leitfaden der Heiz- und Lüftungstechnik. Berlin: Springer.

Bei Krümmern, deren Umlenkung $\delta < 90^\circ$ ist, kann in erster Annäherung $\Delta p = \frac{\delta^0}{90} \cdot \zeta \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot c^2$ gesetzt werden. Genauer ist eine Formel von Weisbach:

$$\zeta = \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2 \sin^4 \frac{\delta}{2}.$$

Die folgende Tabelle enthält Versuchswerte für glatte und raue Kniestücke.

Scharfkantige Kniestücke nach Abb. 146 (Thoma).

δ°	10	15	22,5	30	45	60	90
ζ glatt	0,034	0,042	0,066	0,13	0,236	0,471	1,129
ζ rau	0,044	0,062	0,154	0,165	0,32	0,684	1,265

Während bei Rohrleitungen der Krümmen mit Kreisquerschnitt eine beherrschende Rolle spielt, ist bei den meisten Problemen des Maschinenbaues die Rechteckform viel wichtiger. Die z. B. durch Schaufeln der Dampfturbinen und anderer Turbomaschinen gebildeten Krümmenformen sind rechteckig. Die hier auftretenden Verluste sind von viel größerer Bedeutung als die Verluste von Rohrleitungsarmaturen. Es ist deshalb sehr zu begrüßen, daß das Danziger Institut von Prof. Flügel die Untersuchung dieser

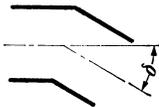


Abb. 146.

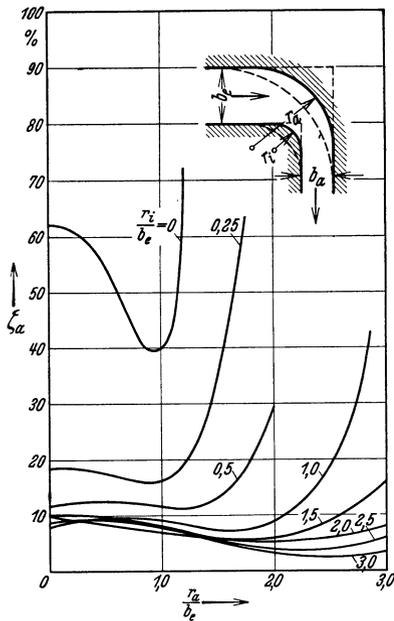


Abb. 147. Druckverlustziffern in düsenförmigen Krümmern, deren Austrittsquerschnitt halb so groß ist wie der Eintrittsquerschnitt, nach N i p p e r t.

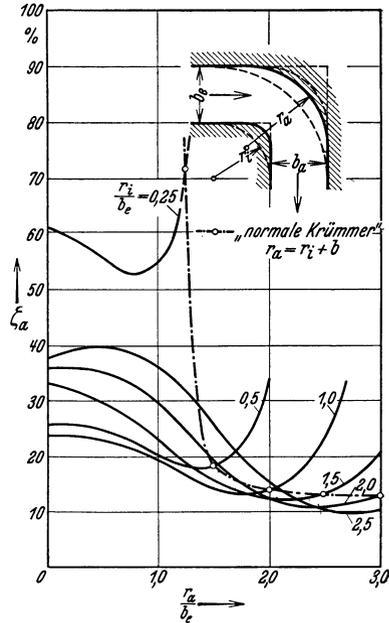


Abb. 148. Druckverlustziffern in rechteckigen Krümmern von gleichem Ein- und Austrittsquerschnitt.

Formen besonders gepflegt und wertvolle Ergebnisse erzielt hat. Die Hauptergebnisse mögen hier angeführt werden.

Abb. 147 und 148 zeigen die Verlustkoeffizienten für Krümmer nach Nippert¹, deren Austrittsquerschnitt halb so groß wie der Eintrittsquerschnitt ist, sowie für Krümmer mit gleichem Ein- und Austrittsquerschnitt. Innen- und Außenradius sind variiert. Die Verlustkoeffizienten ζ_a beziehen sich auf den Staudruck der Austrittsgeschwindigkeit, d. h. auf die jeweils vorhandene größte Geschwindigkeit. Man erkennt deutlich den Vorteil einer Beschleunigung. Der kleinste Wert von ζ_a ist in Abb. 147 nur 0,03; der Verlust ist somit nicht viel größer als bei einer normalen Düse. Bei gleichbleibendem Querschnitt wird hingegen $\zeta_a = 0,1$ nicht unterschritten.

Für jeden Innenradius gibt es einen günstigsten Außenradius. Dieses Optimum ist um so ausgeprägter und damit praktisch um so wichtiger, je kleiner der Innenradius ist, bis schließlich bei scharfer Innenkante, d. h. $\frac{r_i}{b_e} = 0$, der Außenradius sehr genau gewählt werden muß, wenn größere

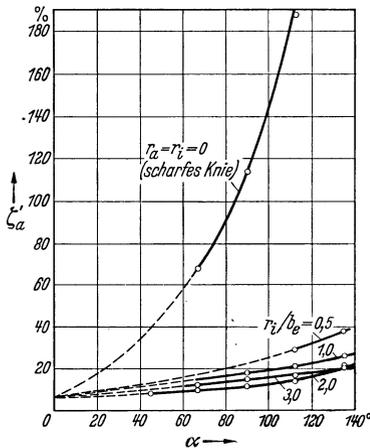


Abb. 149. Verlustziffern für Krümmer in Abhängigkeit vom Umlenkwinkel, nach Spalding.

Verluste vermieden werden sollen. In Abb. 148 ist noch der „normale“ Krümmer mit gleichbleibendem Querschnitt im Scheitel eingetragen (strichpunktierte Linie). Es fällt auf, daß nicht dieser Krümmer die geringsten Verluste aufweist. Das Minimum liegt bei einem kleineren Außenradius. Dies bedeutet aber eine Vergrößerung des Scheitelquerschnittes. Daraus folgt: Bei Krümmern mit gleichem Ein- und Austrittsquerschnitt ist eine gewisse Querschnittserweiterung im Scheitel von Nutzen.

¹ Nippert: Forschungs-Heft 320.

² Spalding: Versuche über den Strömungsverlust in gekrümmten Leitungen. Z. VDI 1933 S. 143.

Praktisch ist wichtig, daß gegenüber dem scharfen Knie durch eine Abrundung, $r_i/b = 0,5$, die Hauptverluste bereits vermieden werden. Bei der Umlenkung in ein radiales Laufrad genügen ähnliche Abrundungen, wie eine Untersuchung des Verfassers¹ gezeigt hat.

Einbau von Leitschaufeln. Scharfe Umführungen können durch Leitschaufeln nach Abb. 150 einem guten Krümmer ungefähr gleichwertig gemacht werden. Die Wirkung solcher Leitschaufeln kann dadurch erklärt werden, daß die bei der gekrümmten Bewegung auftretenden Zentrifugalkräfte durch die Leitschaufeln aufgenommen werden. In der Gleichung

$$\Delta p = \Delta n \cdot \frac{\gamma}{g} \frac{c^2}{R}$$

wird also Δn kleiner; damit wird auch Δp kleiner, und gleichzeitig ergeben sich geringere Übergeschwindigkeiten. Die Ablösungsgefahr wird dadurch bedeutend gemildert. Bei dem Bau von Windkanälen wurden solche Leitschaufeln wohl erstmalig von Prandtl angewandt, während eine erste Vorstufe bereits in den Grätings von Krell¹ zu suchen ist. Prandtl gibt für diese Leitschaufeln ein $\zeta \sim 0,12$ an. In

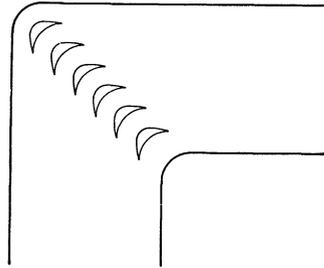


Abb. 150. Verbesserung eines rechtwinkligen Krümmers durch Unterteilung.

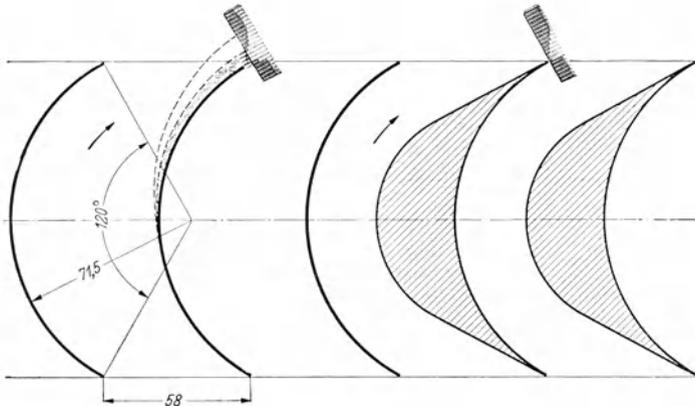


Abb. 151. Staudruckprofile hinter einem Gitter mit Kreisbogenschaukeln und profilierten Schaukeln.

¹ Eck: Neue Berechnungsgrundlagen für Ventilatoren radialer Bauart. Schweiz. Bauzeitung. 1938.

² Die Leitschaufeln in der jetzt bekannten Form wurden von Prandtl für die Konstruktion der Umlenkungen von Windkanälen angegeben. Krell hatte bereits früher (Die Erprobung von Ventilatoren und Versuche über den Luftwiderstand von Panzergrätings, Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 1906 Bd. 7, S. 408) Leitschaufeln angegeben, die unter 45° in einen Krümmer eingebaut waren, sog. „Panzergrätings“, und an Modellen die Wirkung vorgeführt. Die Unterteilung durch eine Leitschaufel wurde bereits von Meissner als vorteilhaft erkannt Hydraulik 1876.

Bereiche vor. Wie kürzliche Versuche des Verfassers zeigten, sind die in diesem Bereich möglichen Gewinne meist nicht lohnend. Bedeutend

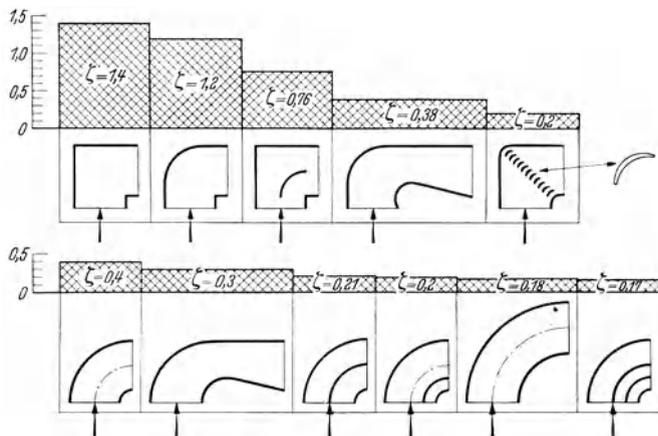


Abb. 153. Verbesserung von Krümmern durch verschiedene Gestaltung und Einbauten nach Biolleg. Versuchswerte für $Re \sim 300\ 000$.

besser ist hier der Weg, daß man das zu erwartende Totwassergebiet irgendwie mit Material ausfüllt.

Nach Flügel¹ (s. auch S. 238) können durch sog. unterteilte Leitschaufeln nach Abb. 154 gute Erfolge erzielt werden. Es genügt danach, die Schaufeln in der Nähe der scharfen Umführungen unterteilt auszuführen. Auch diese Konstruktion hat größere praktische Verwertung in vielen Gebieten des Maschinenbaues gefunden. Weitere Beispiele dieser Möglichkeiten zeigen Abb. 245; 246; 247.

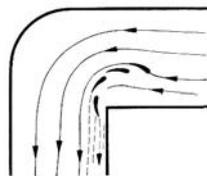


Abb. 154. Unterteilte Leitschaufeln nach Flügel.

53. Ablösung bei Düsen.

Bei der Strömung durch Düsen ergeben sich Beispiele von Ablösungen, die besonders aufschlußreich sind. Die Entwicklung dieses Problems ist besonders geeignet, mit der Arbeitsweise und den Aufgaben der Praxis vertraut zu machen.

Bemerkenswert ist zunächst der sog. Eckwirbel². Die Wandstromlinie biegt in eine Ecke ein. In der Ecke ist die Geschwindigkeit Null, so-

¹ Frey, Forschung A 1933, S. 67.

² Man könnte einwenden, daß der Eckwirbel durch Ausfüllen der Ecke mit Material bzw. Abrunden leicht vermieden werden könnte. Dies ist durchaus richtig, praktisch entsteht jedoch der Nachteil, daß der statische Druck vor der Düse an einer Stelle gemessen werden müßte, an der eine Wandgeschwindigkeit herrscht. Damit würde diese Meßstelle sehr empfindlich gegenüber kleinen Herstellungsfehlern gemäß den S. 275 gemachten Feststellungen. Schwerwiegender ist jedoch

daß an der Wand eine erhebliche Verzögerung stattfindet. Ist die Grenzschichtenergie gering, so wird eine Ablösung stattfinden. Nach Abb. 155 bildet sich dann ein sog. „Eckwirbel“. Bei einer langen vorgeschalteten Rohrleitung ist dies immer der Fall, während bei einem kurzen Einlauf, wo die Geschwindigkeit noch gleichmäßig über den Radius verteilt ist, der Eckwirbel gar nicht oder nur schwach zur Ausbildung kommt. Für die Druckmessung in der Ecke, wie sie bei Düsenmessungen benötigt wird, ist die Wirkung des Eckwirbels von Bedeutung. Ohne Eckwirbel wird in der Ecke der Gesamtdruck $P = p + \frac{\rho}{2} c^2$ gemessen. Ist ein Eckwirbel vorhanden, so wird in dem Zwickel kaum mehr als p gemessen.

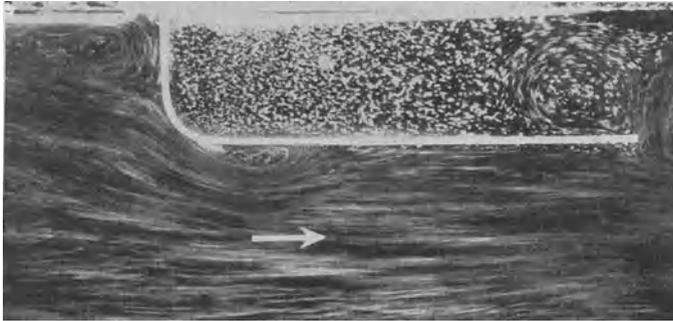


Abb. 155. Düsenströmung mit Eckwirbel und Ablösung hinter Krümmung. $R_D \sim 14\,000$.

$\frac{\rho}{2} c^2$ geht durch den Wirbel fast ganz verloren. Diese Erscheinung erklärt die Wichtigkeit der bei Düsenmessungen vorgeschriebenen störungsfreien Rohrlängen. Hinter dem Eckwirbel stößt die Strömung wieder auf die Düsenwand, sodaß notwendig an dieser Stelle ein Staupunkt vorhanden sein muß. Sehr interessant ist nun die historische Entwicklung des Düsenproblems. 1912 wurde von Prandtl die VDI-Normaldüse entworfen, und zwar für ein bestimmtes Verhältnis: $\frac{\text{Düsenquerschnitt}}{\text{Rohrquerschnitt}} = 0,4$.

Bei der Formgebung war der Gesichtspunkt maßgebend, daß an der Düsenwand keine Ablösung vorhanden sein sollte. Infolge der Zentrifugalkräfte herrscht an der Düsenwand ein kleinerer Druck als in Düsenmitte und deshalb auch eine größere Geschwindigkeit. Je nach der

die Empfindlichkeit einer solchen Meßstelle gegen Verschmutzungen. Denn je nachdem wie sich z. B. ein kleines Staubteilchen festsetzt, kann sich ein zusätzlicher Über- oder Unterdruck ergeben. Alle diese Einflüsse verschwinden, wenn man die Meßstelle an eine Stelle legt, wo — wie in der Ecke — die Geschwindigkeit gleich Null ist. Meßgeräte von so allgemeiner Bedeutung, wie die Normdüsen, müssen unbedingt narrensicher sein.

Größe der Krümmungsradien kann an einer Stelle der Düsenwand der Druck kleiner sein als der Enddruck. Dann wird auf einem Teil der Düsenwand die Strömung verzögert, und eine Ablösung ist wahrscheinlich. Bei der Normaldüse wurde nun die Krümmung so gewählt, daß eine solche Verzögerung vermieden wurde. Abb. 156 zeigt die Strömung durch eine derartige Düse bei einer solchen Reynoldsschen Zahl, wie sie durchweg bei technischen Anwendungen vorkommen. So hohe *Re*-Zahlen in offener Wasserströmung wurden durch große Abmessungen erreicht (Rohrdurchmesser 1 m). Man erkennt in Abb. 156 deutlich, daß die Strömung einwandfrei anliegt. An der Wand ist klar eine laminare

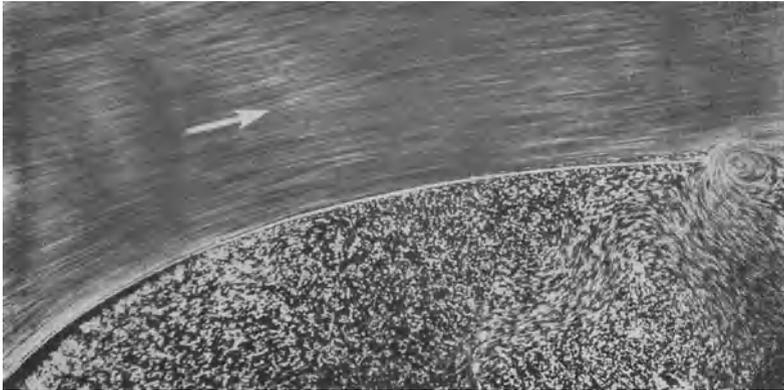


Abb. 156. Strömung durch VDI-Düse 1912. Keine Ablösung, laminare Grenzschicht, deren Dicke sich mit Re_D ändert. $Re_D \sim 140\,000$.

Grenzschicht zu erkennen, deren Dicke langsam bis zum Düsenaustritt zunimmt.

Die VDI-Normaldüse erfüllte die immer mehr gesteigerten Anforderungen nach höherer Meßgenauigkeit bald nicht mehr. Denn die Hauptsache, nämlich Konstanz der Düsenkoeffizienten (s. S. 279), wurde in keinem Gebiet der Reynoldsschen Zahlen erreicht. Der Grund dafür ist heute leicht anzugeben. Eine Ablösung findet nicht statt, aber die dünne laminare Grenzschicht, die in Abb. 156 deutlich zu erkennen ist, ändert mit der Reynoldsschen Zahl ihre Dicke. Gl. (111) offenbarte bereits diese Abhängigkeit. Mit größerem *Re* wird die Grenzschicht dünner, damit wird aber auch der wirksame Durchflußquerschnitt größer, sodaß der Düsenkoeffizient sich stetig mit *Re* ändern muß. Gerade dieses Verhalten stand aber der Normalisierung der Düsenmessungen hindernd im Wege.

Witte¹ zeigte dann im Jahre 1928, daß man zum Ziele kommt, wenn

¹ Witte: Durchflußbeiwerte der I. G. Meßmündungen für Wasser, Öl, Dampf

man genau die entgegengesetzten Prinzipien aufstellt wie bei der Düse 1912. Er wies nach, daß eine sehr scharf gekrümmte Düse mit zylindrischem Auslaufstück oberhalb bestimmter Reynoldsscher Zahlen genau konstante Düsenkoeffizienten ergibt. Diese in der Düsenforschung revolutionierend wirkende Entdeckung von Witte stellte sehr bald die ganze Düsenmessung auf eine neue Basis. Ihre Bedeutung geht daraus hervor, daß sehr bald in Deutschland eine Normalisierung der Düsenmessung erfolgen konnte, die schließlich die Grundlage einer internationalen Normalisierung bildete.

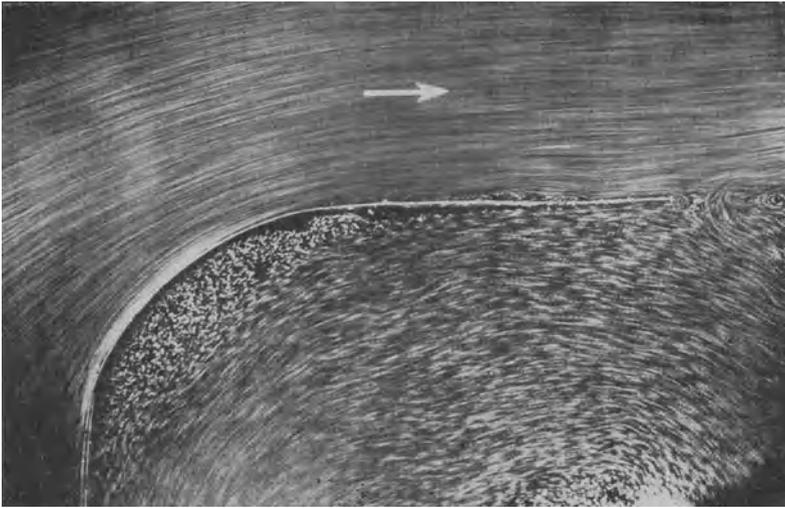


Abb. 157. Strömung durch I-G-Düse, überkritisch $R_D \sim 140\,000$. Ablösung der Strömung und Wiedieranliegen im zylindrischen Auslauf.

Abb. 157 und 158 zeigen, was in der sog. „I-G-Düse“ von Witte vor sich geht. Auch bei diesen Aufnahmen wurden so große Abmessungen gewählt, daß die tatsächlichen Reynoldsschen Zahlen erreicht wurden. Im unterkritischen Gebiet¹, d. i. das Gebiet, in dem auch die I-G-Düse keinen konstanten Düsenkoeffizienten besitzt, findet folgendes statt. Vom Staupunkt aus Abb. 158 bildet sich eine laminare Grenzschicht, die sich an der scharfen Krümmung ablöst und dann später wellig und turbulent wird. Die weitere Strömung bleibt abgerissen. Im

u. Gas. Z. VDI 1928, 42, sowie Witte: Die Durchflußzahlen von Düsen und Stauwänden, Techn. Mech. u. Thermodyn. 1930, S. 34.

¹ Bereits vor Witte wurde verschiedentlich festgestellt, daß Düsen mit zylindrischem Stück zwei erheblich verschiedene Koeffizienten haben können, ohne daß es jedoch gelang, diese Erscheinung grundlegend zu klären; vgl. Thoma und Reichel: Anormale Strömung in Meßdüsen. Hydraulische Probleme 1926. VDI-Verlag.

überkritischen Gebiet findet zunächst die gleiche laminare Ablösung statt. Der abgelöste Strahl wird aber viel schneller turbulent, und die Trägheitskräfte bringen schließlich kurz vor dem Düsenende den Strahl wieder zum Anliegen. Ein bestimmtes zylindrisches Stück ist somit notwendig. So würde in Abb. 158 ein längeres zylindrisches Stück den Strahl ebenfalls wieder zum Anliegen bringen. Je größer die Trägheitskräfte, d. h. je größer die Reynoldssche Zahl ist, um so schneller wird der Strahl wieder anliegen. Da bei Abb. 157 der Düsenquerschnitt immer gleichmäßig ausgefüllt ist, leuchtet die Konstanz der Düsenkoeffizienten ein. Abb. 157 und 158 offenbaren so den physikalischen Kern

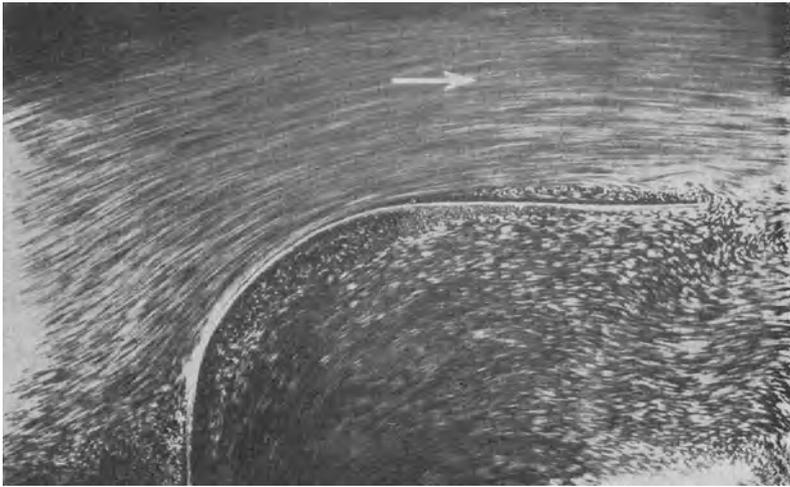


Abb. 158. Unterkritische Strömung durch I-G-Düse $RD \sim 55\,000$. Strömung löst sich ab und füllt Endquerschnitt nicht aus.

der neu gefundenen Düseneigenschaften. Durch Einführung von gefärbten Flüssigkeitsstrahlen in Wasser hat Jordan¹ ebenfalls diese Grenzschichtbeobachtungen an Düsen und Blenden durchführen können.

Daß man bei kleineren Reynoldsschen Zahlen durch ein hinreichend langes Stück die Strömung wieder zum Anliegen bringen kann, zeigt Abb. 155, die bei $R_D \sim 14\,000$ aufgenommen wurde. Das zylindrische Stück ist hier offenbar schon zu lang, denn bis zum Düsenaustritt hat sich bereits wieder eine laminare Grenzschicht gebildet, die aus den oben genannten Gründen nachteilig wirkt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß für den zylindrischen Ansatz sowohl eine untere wie eine obere Grenze besteht, zwischen denen Konstanz der Düsenkoeffizienten erreicht wird.

¹ Jordan: Einige Strömungsbeobachtungen an Meßdrosseln. Forschung A, 1939, S. 88.

Zwei Wirbel beherrschen demnach das Düsenproblem: 1. der Eckwirbel und 2. die Ablösung hinter der Abrundung. In Abb. 155 sind beide Wirbel deutlich zu erkennen.

54. Trennung und Vereinigung von Rohrverzweigungen.

Durch Trennung und Vereinigung erleidet jeder Teilstrom einen Druckverlust. Bezieht man die Verluste auf den Staudruck der vereinigten Ströme, so wird

$$\Delta p_a = \zeta_a \frac{\rho}{2} v^2 = \text{Verlust der abgezweigten Flüssigkeit,}$$

$$\Delta p_d = \zeta_d \frac{\rho}{2} v^2 = \text{Verlust der weiter geradeaus strömenden Flüssigkeit.}$$

Die wenigen vorliegenden Versuche wurden von Thoma¹ ausgeführt und beziehen

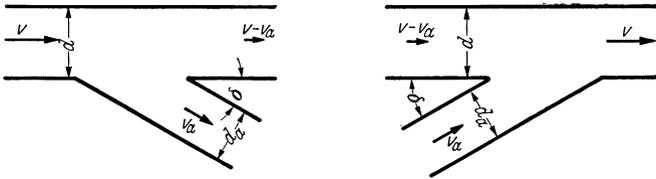


Abb. 159.

sich auf bestimmte Anordnungen. Die Verluste sind abhängig von dem Prozentsatz der abgezweigten Menge. Die folgenden Angaben gelten für scharfkantige Ausführungen. Die Versuche zeigten, daß durch Abrundung oder durch einen Konus eine merkliche Verringerung der Verluste eintrat.

Q_a = abgetrennte Wassermenge, Q = Wassermenge vor der Trennung.

	Q_a/Q	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	} $\delta = 90^\circ$
Trennung	ζ_a	0,96	0,88	0,89	0,96	1,10	1,29	
								} $d = d_a$
	ζ_d	0,05	-0,08	-0,04	0,07	0,21	0,35	
Vereinigung	ζ_a	-1,04	-0,4	0,1	0,47	0,73	0,92	} $d = d_a$
	ζ_d	0,06	0,18	0,3	0,4	0,5	0,6	
	Q_a/Q	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	} $\delta = 45^\circ$
Trennung	ζ_a	0,9	0,66	0,47	0,33	0,29	0,35	
								} $d = d_a$
	ζ_d	0,04	-0,06	-0,04	0,07	0,20	0,33	
Vereinigung	ζ_a	-0,9	-0,37	0	0,22	0,37	0,38	} Trennung u. Vereinigung gemäß Abb. 159.
	ζ_d	0,05	0,17	0,18	0,05	-0,20	-0,57	

55. Ventile und Absperrmittel.

Bezeichnungen nach Abb. 160.

Der Verlust wird meist auf den Staudruck der Geschwindigkeit w im Ventilsitz bezogen (ζ), oder auf die Geschwindigkeit w_1 des jeweilig kleinsten Durchflußquerschnitts (ζ_1).

$$\text{Verlust } \Delta p = \zeta \frac{\rho}{2} w^2 = \zeta_1 \frac{\rho}{2} w_1^2. \quad (129)$$

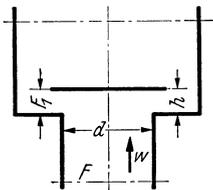


Abb. 160.

¹ Thoma: Mitt. hydraul. Inst. T. H. München.

F_1/F (F_1 kleinster Durchflußquerschnitt)	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Tellerventil mit oberer Führung . . . ζ_1	1,2	1,6	2,0	2,5	3,0
Tellerventil m. Rippenführung i. Sitz . ζ_1	2,3	2,8	3,5	4,3	5,2

Durch diffusorartigen Ansatz am Ventilteller gelingt es nach Schrenk¹, den Durchflußwiderstand auf $1/7$ bis $1/8$ zu vermindern. Ebenfalls fand Schrenk, daß in einem Tellerventil bei kleiner Hubhöhe, etwa zwischen

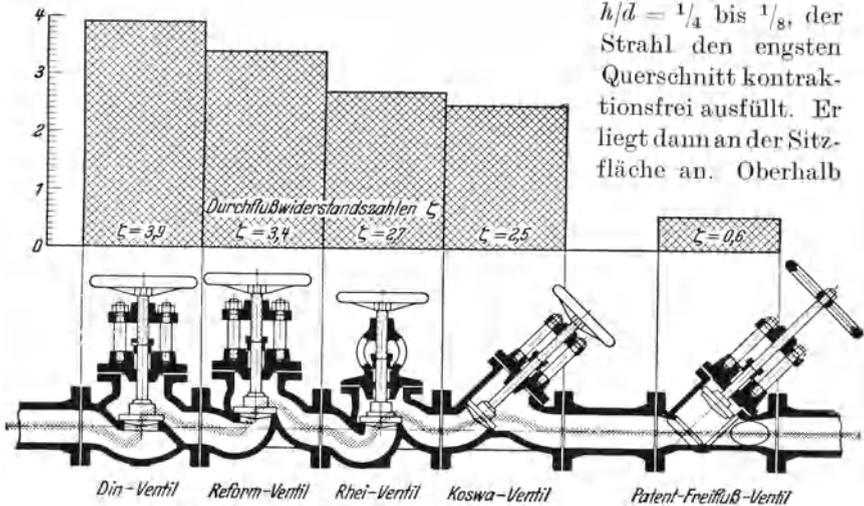


Abb. 161. Darstellung von Ventilwiderstandszahlen nach Pfeleiderer.

gewisser Grenzhubhöhen springt der Strahl ab und zeigt eine scharfe Kontraktion. Theoretische Untersuchungen von Eck² bestätigen dieses Verhalten.

Abb. 161 zeigt die ζ -Werte für einige handelsübliche Ventilkonstruktionen. Guter Schieber ganz offen: $\zeta = 0,05$.

56. Strömungsverluste infolge scharfer Kanten, Kontraktion usw.

Eine häufige Verlustquelle sind scharfe Kanten. Der Einfluß auf das Strömungsfeld ist, wie die folgende Betrachtung zeigt, zudem erheblich. Betrachten wir etwa einen Querschnitt, der durch eine scharfe Schneide (Abb. 162) plötzlich verengt wird (Labyrinth-Dichtung). Die Strömung kann den engsten Quer-

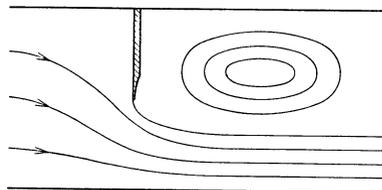


Abb. 162. Kontraktion bei einer scharfen Schneide.

¹ VDI-Forsch.-Heft 272.
² Eck: Z. angew. Math. Mech. 1923.

schnitt nicht einmal ausfüllen, weil an der scharfen Kante eine Stromlinie um 90° umbiegen müßte. Dieses scharfe Umbiegen wäre aber identisch mit einer Kurvenbewegung bei unendlich kleinem Krümmungsradius, was bei endlicher Geschwindigkeit wiederum unendlich große Zentrifugalkräfte zur Folge hätte. Die Strömung weicht in einem

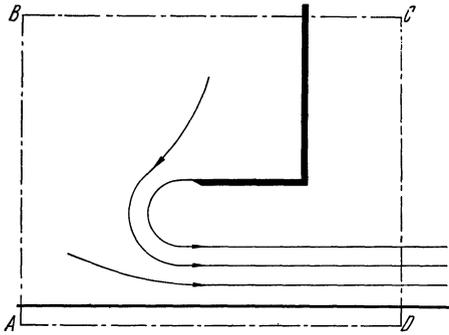


Abb. 163. Kontraktion beim Bordaschen Mundstück.

Bogen aus und füllt statt des Querschnittes F_2 einen kleineren Querschnitt $\alpha \cdot F_2$ aus. Wenn man α Kontraktionskoeffizient nennt, umschreibt man gleichzeitig den Vorgang sehr gut.

Die exakte Berechnung von α ist in einigen Fällen gelungen. Tritt ein unendlich breiter Strahl aus einem unendlich großen Gefäß aus, so ist z. B. $\alpha = \frac{\pi}{\pi + 2}$.

Die größte Kontraktion erreicht man durch die Anordnung nach Abb. 163 (Bordasches Mundstück). Die Kontraktionszahl wollen wir nach dem Impulssatz berechnen. Wir wenden den Satz auf das Gebiet $ABCD$ an und bestimmen die Impulse in der Strömungsrichtung. Unter der Annahme, daß der Rohrquerschnitt gegen F_2 groß ist, sodaß die Rohrgeschwindigkeit gegen w_2 vernachlässigt werden kann, erhalten wir als Impulsdifferenz

$$\frac{\gamma}{g} F_2 \cdot \alpha \cdot w_2^2.$$

Dieser Wert muß gleich der durch den Druckabfall Δp bewirkten Kraft sein:

$$\Delta p \cdot F_2 = \frac{\gamma}{g} F_2 \cdot \alpha \cdot w_2^2.$$

Berücksichtigen wir noch, daß

$$w_2^2 = 2g \frac{\Delta p}{\gamma}$$

ist, so ergibt sich

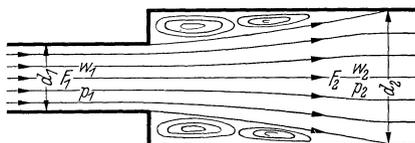
$$\Delta p \cdot F_2 = \frac{\gamma}{g} \cdot F_2 \cdot \alpha \cdot 2g \frac{\Delta p}{\gamma},$$

$$\text{d. h. } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Nun tritt der eigentliche Verlust erst ein, wenn der kontrahierte Strahl sich wieder dem großen Querschnitt anpassen muß. Diese plötzliche Verzögerung, die bereits bei sorgfältig erweiterten Düsen verlustreich ist, verursacht starke Wirbelverluste.

57. Unstetige Querschnittserweiterung.

Es entsteht ein Stoßverlust, der nach dem Impulssatz in guter Übereinstimmung mit Meßresultaten berechnet werden kann (s. S. 84) (Abb. 164); $\Delta p_{\text{Verl}} = \frac{\rho}{2} \cdot (w_1 - w_2)^2$ (nicht zu verwechseln mit der Bernoullischen Gleichung!) Nach der Bernoullischen Gleichung, d. h. ohne Verlust, würde eine Druckerhöhung $\Delta p' = \frac{\rho}{2} \cdot (w_1^2 - w_2^2)$ eintreten, so daß die tatsächlich gemessene Druckerhöhung den Wert hat:



$$\Delta p' - \Delta p_{\text{Verl}} = \rho w_2 [w_1 - w_2].$$

Die Strömung legt sich nach der Einschnürung erst allmählich wieder an. Nach etwa achtfachem Durchmesser des Rohres ist der Energieumsatz ziemlich abgeschlossen.

Abb. 164. Schematische Darstellung der Strömung bei unstetiger Querschnittserweiterung.

Den Druckumsatz¹ in der Erweiterung kann man durch einen Wirkungsgrad erfassen nach der Formel:

$$\eta = 1 - \frac{\text{Druckverlust}}{\text{Druckumsatz nach Bernoulli}}.$$

F_1/F_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
η	0,182	0,333	0,462	0,571	0,667	0,75	0,824	0,889	0,947

Beispiel: Ein Wasserrohr von 100 mm \varnothing wird durch einen Bolzen von 30 mm \varnothing teilweise versperrt. Welcher Druckverlust entsteht hierdurch bei einer Geschwindigkeit von 4 m/s im Hauptquerschnitt? (Abb. 165).

Engster Querschnitt:

$$f_1 \sim \frac{\pi D^2}{4} - d \cdot l = 78,5 - 3 \cdot 10 = 48,5 \text{ cm}^2; f_2 = 78,5 \text{ cm}^2.$$

Nach der Kontinuitätsgleichung ist:

$$w_1 = w_2 \frac{f_2}{f_1} = 4 \frac{78,5}{48,5} = 6,47 \text{ m/s}.$$

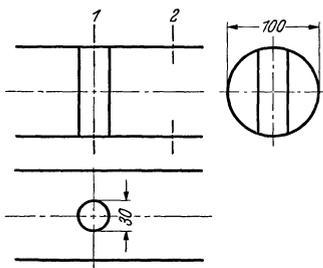


Abb. 165.

$$\begin{aligned} \text{Druckverlust} &= \frac{\gamma}{2g} [w_1 - w_2]^2 = \frac{1000}{2 \cdot 9,81} [6,47 - 4]^2 = \frac{1000 \cdot 2,47^2}{2 \cdot 9,81} \\ &= 311 \text{ mm WS.} \end{aligned}$$

¹ Interessant ist, daß nach Hofmann der Verlust erheblich größer wird, wenn die Erweiterung nicht plötzlich, wie bei Abb. 164, sondern in einem konischen Übergangsstück von $\sim 70^\circ$ stattfindet.

58. Unstetige Rohrverengung.

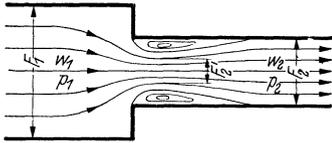


Abb. 166. Schematische Darstellung der Strömung bei unstetiger Querschnittsverengung.

An der scharfen Kante entsteht eine Einschnürung der Strömung nach Abb. 166. Ist die Kontraktionszahl $\alpha = \frac{F'_2}{F_2}$ bekannt, so ist der Verlust

$$\Delta p_{Verl} = \frac{\rho}{2} (w_2 - w_2')^2.$$

Mit $w_2' \cdot \alpha = w_2$ entsteht:

$$\Delta p_{Verl} = \frac{\rho}{2} w_2^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2, \tag{130}$$

sodaß bei Einführung von $\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2$ der Verlust auf den Staudruck der Geschwindigkeit des ausgefüllten Querschnitts bezogen wird.

ζ	α	
0,41 bis 0,314	0,61 bis 0,64	scharfe Kante
0,221 ,, 0,0625	0,68 ,, 0,8	Kante etwas gebrochen
0,0125	0,9	Abrundung mit kleinem Krümmungsradius
0,0001	0,99	bei sehr großer und glatter Abrundung

Wenn die Zuflußgeschwindigkeit steigt, d.h. wenn F_2/F_1 größer wird, bildet sich die Kontraktion nicht mehr so stark aus. Folgende Werte können dann zugrunde gelegt werden:

F_2/F_1	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,00
α	0,6	0,61	0,62	0,65	0,7	0,77	1,00

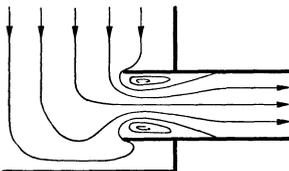


Abb. 167.

Rohranschluß nach Abb. 167: Die Einschnürung und damit der Verlust ist hier größer.

$$\alpha = 0,5; \zeta = 1 \text{ bei scharfer Kante.}$$

59. Formwiderstand, Oberflächenwiderstand.

Während bei durchströmten Körpern die Strömungsverluste in Form des Druckverlustes interessieren, der z. B. bei einer Leitung festgestellt wird, will man bei umströmten Körpern die Widerstandskraft wissen, die auf den Körper wirkt. Dieser Widerstand wird zweckmäßig in zwei Teile zerlegt.

Unter Formwiderstand versteht man die in Strömungsrichtung wirkende resultierende Kraft aller Normaldrücke, die auf den Körper

wirken. Sie ergeben dann eine Resultierende in Strömungsrichtung, wenn durch Ablösungen Totwassergebiete entstanden sind und dadurch die bei reibungsfreier Strömung vorhandene Drucksymmetrie verlorengeht. Die Reibung ist hier nur die indirekte Ursache des Widerstandes. Denn nach vollzogener Ablösung können wir uns ruhig eine reibungslose Strömung vorstellen, ohne daß der Widerstand geändert wird. Die Strömung gegen die quergestellte Platte Abb. 126 zeigt den Formwiderstand in Reinkultur.

Unter Oberflächenwiderstand versteht man die in Strömungsrichtung wirkende resultierende Kraft aller Schubspannungen, die auf die Körperoberfläche wirken. Es handelt sich um einen reinen Reibungswiderstand. Die in Strömungsrichtung gestellte Platte (Abb. 111) zeigt diesen Oberflächenwiderstand in Reinkultur.

Im allgemeinen wirken Formwiderstand und Oberflächenwiderstand zusammen. Die experimentelle Trennung gelingt dadurch, daß man von dem im Windkanal gemessenen Gesamtwiderstand den Formwiderstand abzieht. Letzterer wird dadurch gewonnen, daß durch Anbohrungen die Druckverteilung um den Körper gemessen und die resultierende Druckkraft in Strömungsrichtung danach ausgerechnet wird. Für die Kugel und für den Zylinder werden auf S. 187 diese Druckverteilungen besprochen werden.

Der Formwiderstand läßt sich durch konstruktive Maßnahmen weitgehend verringern. Der Oberflächenwiderstand ist — sofern die Flächen schon hydraulisch glatt sind — nur dadurch zu verringern, daß man den Umschlag in turbulente Grenzschicht verhindert oder gegebenenfalls nach hinten verschiebt.

Folgende Feststellung verdient noch hervorgehoben zu werden:

- a) Der Formwiderstand ist am kleinsten bei turbulenter Grenzschicht;
- b) Der Oberflächenwiderstand ist am kleinsten bei laminarer Grenzschicht.

60. Bewegung im Totwasserraum.

Das Gebiet der abgerissenen Strömung, meist Totwasserraum genannt, bedarf noch einer besonderen Betrachtung. Die Flüssigkeit ist hier durchaus nicht in Ruhe, sondern befindet sich meist in mehr oder weniger deutlich erkennbarer Drehbewegung. Besonders charakteristisch ist die Strömung hinter einem Zylinder bei kleinen Reynoldsschen Zahlen. Verfolgen wir einmal die Strömung vom Beginn der Bewegung an. Im ersten Augenblick ist die Flüssigkeit bestrebt, die Bewegungsform der reibungsfreien Strömung anzunehmen. Es ist eine gewisse Zeit notwendig, bis sich überhaupt eine Grenzschicht ausbilden kann. Beim Zylinder kann man sagen, daß ein Teilchen erst etwa $\frac{1}{4}$ Umfang durch-

laufen haben muß. Nach einem solchen Weg wird ja erst das Anströmen gegen den Druck erforderlich. Nach diesem Weg kann sich infolge der

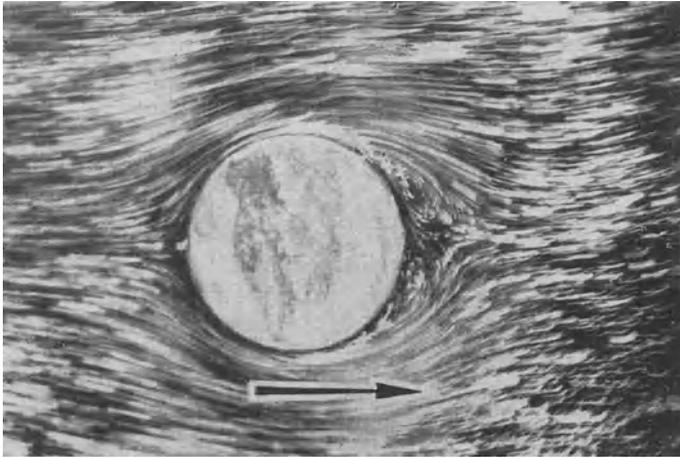


Abb. 168. Zylinderströmung im ersten Augenblick der Bewegung.

Wandreibung erst ein Energieverlust eines Teilchens nachteilig bemerkbar machen. Es tritt dann Stillstand, Rückströmung und Ablösung ein.

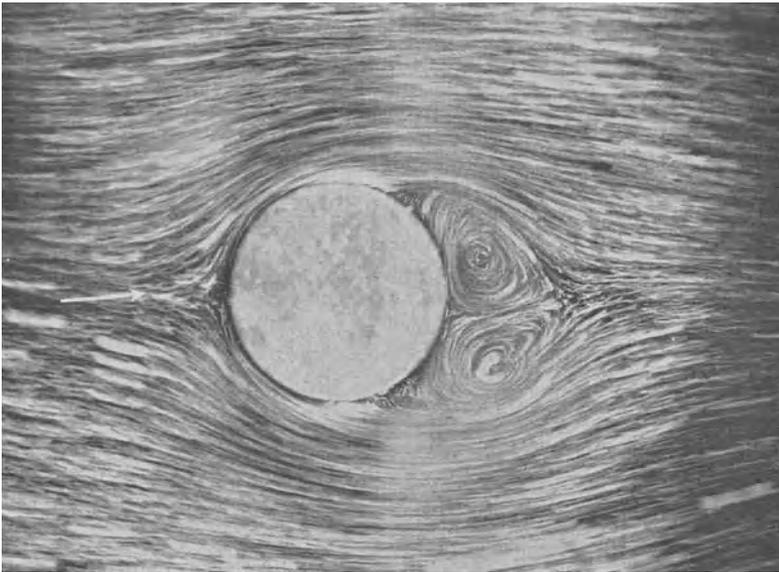


Abb. 169. Weiteres Stadium. Die beiden Anfahrwirbel sind bereits zu erkennen.

Abb. 168 zeigt eine Aufnahme, die kurz nach dem „Start“ gemacht wurde. Man erkennt, daß die Strömung durchweg noch hinten geschlossen ist. Einige Teilchen strömen aber bereits zurück und werden



Abb. 170. Endgültiger Zustand. Periodische Bildung von Wirbeln.

nun unter Wirbelbildung die Strömung aufrollen. Abb.169 zeigt, wie die beiden Wirbel an Ausdehnung gewonnen haben. Bei weiterem Anwachsen werden sie von der Hauptströmung weggedrängt. Man sagt, die Anfahrwirbel schwimmen weg. Darauf tritt ein periodisches Ab-

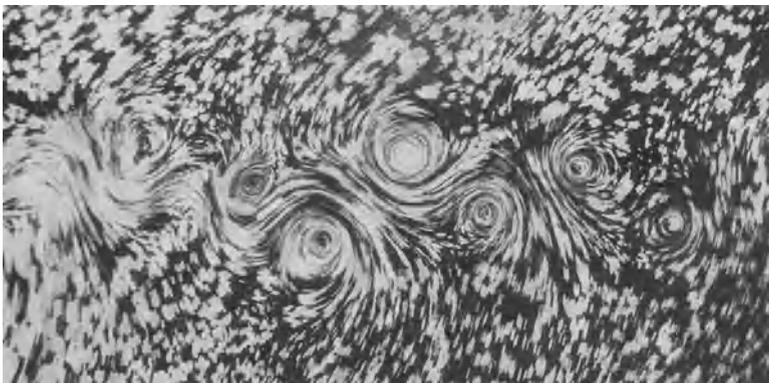


Abb. 171. Kármánsche Wirbelstraße.

lösen von Wirbeln ein, und es entsteht Abb. 170. In genau geordneter Zickzackform schwimmen die Wirbel nach hinten ab. Abb. 171 zeigt die als Kármánsche Wirbelstraße bekannte Anordnung. v. Kármán¹ ist der Nachweis gelungen, daß diese Wirbelanordnung nur dann stabil sein kann, wenn das Verhältnis $\frac{\text{Teilung}}{\text{Abstand}} = 0,283$ ist. Dies stimmt mit den Versuchen gut überein.

Interessant ist, daß in dem Augenblick, wo sich ein Wirbel ausbildet, ein gleich großer, aber entgegengesetzt drehender Wirbel um den Zylinder übrigbleibt, was auch aus den Ausführungen von S. 40 folgen muß. Dies bedingt aber, wie beim Magnuseffekt, eine Querkraft, die ihre Richtung im Takte der abgehenden Wirbel ändert. Verfasser bringt diese Kraft

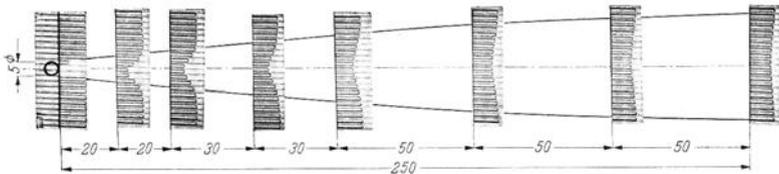


Abb. 172. Ausbreitung der turbulenten Vermischungszone hinter einem dünnen Zylinder.

dadurch anschaulich zur Darstellung, daß er in einer Strömungswanne einen Zylinder, der als Pendel aufgehängt wird, rhythmisch sich hin und herbewegen läßt. Sorgt man für Resonanz² zwischen Ablösungsgeschwindigkeit der Wirbel und Schwingungszahl des Pendels, so erhält man besonders große Ausschläge.

Kármán-Wirbel entstehen hinter allen Widerstandskörpern. Diese geordnete Wirbelform hört auf, wenn die laminare Grenzschicht in die turbulente umschlägt. Auch nach unten gibt es eine Grenze, wo die Kármán-Wirbel aufhören. Dies ist bei etwa $Re = 70$ der Fall. Bei noch kleineren Kennwerten geht die Struktur dieser Wirbel allmählich, wie die schönen Ölversuche von Homann³ gezeigt haben, in eine wellenförmige Linie über, bis schließlich bei $Re = 30$ hinter dem Totwasserraum nur mehr ein gerader Trennungstreifen zu sehen ist.

Das Totwassergebiet bleibt ein weites Stück hinter dem Körper wirk-

¹ v. Kármán: Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse 1911, S. 509; 1912, S. 547 und Rubach: Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Phys. Z. 1912, S. 49.

² Auf diese Resonanzerscheinung wurde vom Verfasser bereits früher hingewiesen. Eck: Z. techn. Physik 1930, Heft 12 und Strömungslehre an Hand von Strömungsbildern. Köln: Selbstverlag Gonski. Neuerdings wurde dieser Effekt im Institut von Thoma eingehender untersucht. — Meier-Windhorst: Flatterschwingungen von Zylindern im gleichmäßigen Flüssigkeitsstrom. Mitt. Hydr. Inst. München, Heft 9.

³ Homann: Forschung 7 (1936) 1.

sam. Obschon sich der Wirbelraum nach einer Länge von $4 \div 6$ Körperdurchmessern schließt, ist in der Trennschicht eine starke Energieverminderung festzustellen. Dies zeigt deutlich Abb. 172. Hier wurden hinter einem Zylinder in verschiedenen Abständen die Staudruckprofile aufgenommen. Die Einbuchtung der Staudruckkurve wird langsam breiter

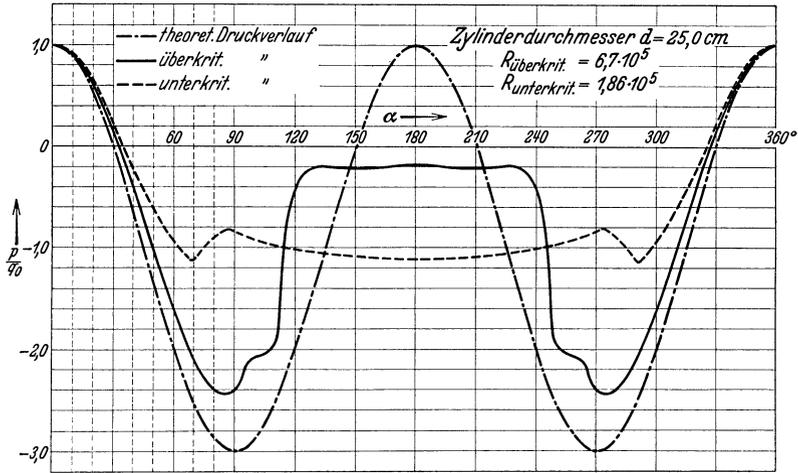


Abb. 173. Druckverteilung um einen Zylinder (nach Flachsbart).

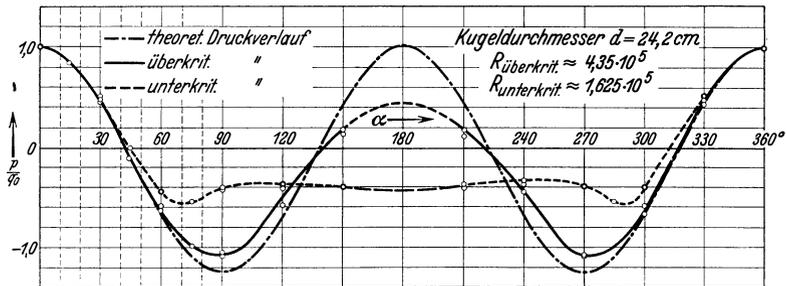


Abb. 174. Druckverteilung um eine Kugel (nach Flachsbart).

und klingt sehr langsam ab. Noch in einer Entfernung von $50 d$ ist die Einbuchtung sehr deutlich zu erkennen. Dieses Beispiel zeigt sehr deutlich die Wirkung eines „Turbulenzdrahtes“, von dem später Gebrauch gemacht wird (S. 229).

61. Druckverteilung bei Kugeln und Zylindern.

Für zwei wichtige Formen, Kugel und Zylinder, ist in Abb. 173 und 174 noch die Druckverteilung über dem abgewickelten Umfang aufgetragen. Eingetragen sind die Druckverteilung der reibungslosen Flüssigkeit, die Druckverteilung im unterkritischen und die im überkritischen Gebiet. Für die Kugel sind die gleichen Drücke

außerdem noch in Abb. 175 normal zur Oberfläche aufgetragen, eine Darstellung, die zur Ermittlung und zur Veranschaulichung des Formwiderstandes zweckmäßig ist.

Die Kugel hat im überkritischen Gebiet auf der Hinterseite noch einen kleinen Überdruck, während im unterkritischen Gebiet ein Unterdruck vorhanden ist. Dieser Druckwechsel gestattet eine sehr bequeme Feststellung der kritischen Kennzahl. Beim Zylinder ist auf der Hinterseite immer ein Unterdruck, der allerdings im überkritischen Gebiet sehr klein ist.

Beim Zylinder und bei der Kugel sind die Ablösungspunkte fast an der gleichen Stelle, nämlich unterkritisch bei etwa 80° , überkritisch bei etwa $110^\circ \div 120^\circ$.

Bemerkenswert ist noch, daß der theoretisch größte Unterdruck beim Zylinder etwa dreimal so groß ist wie bei der Kugel.

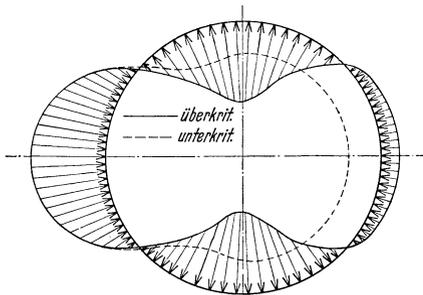


Abb. 175. Druckverteilung um eine Kugel mit Auftragung der Drücke normal zur Oberfläche.

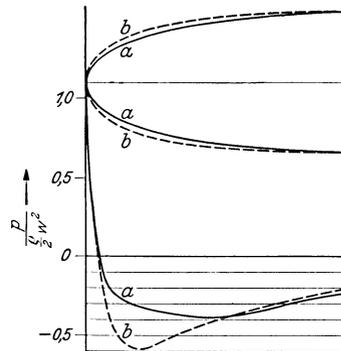


Abb. 176. Druckverteilung für zwei verschiedene Ausbildungen einer Profilnase

62. Beeinflussung des Widerstandes durch Ausbildung der Vorderkante.

Die Widerstandsangaben für verschiedene Körper (S. 200) lassen deutlich erkennen, daß ein möglichst schlanker Abflußkörper den Widerstand sehr günstig beeinflusst; trotzdem ist die Ausbildung der Vorderkante von nicht geringerer Bedeutung. Bei der Umströmung eines Körpers bildet sich nämlich in der Nähe der vorderen Abrundung ein Druckminimum und damit eine Stelle größter Geschwindigkeit aus. Je größer diese Geschwindigkeit ist, um so stärker ist somit auch die folgende Verzögerung. Die Ablösungsgefahr steigt. Durch zweckmäßige Formgebung der Vorderkante kann dieses Minimum weitgehend beeinflusst werden.

Auf Veranlassung des Verfassers wurde diese Frage von Pötter¹ potentialtheoretisch untersucht. Abb. 176 zeigt ein dieser Arbeit entnommenes Beispiel für zwei Formen *a* und *b* der Abrundung. Die mehr spitze Form *a* verkleinert das Maximum des Unterdrucks. Diese Gesichtspunkte sind nicht allein bei Widerstandskörpern, sondern auch bei der Gestaltung der Schaufeleintrittskanten von Turbomaschinen (Kavitation!) zu beachten.

¹ Pötter: Über den Einfluß des Kopfes von Schaufelprofilen bei Kreisrädern auf die Kavitation. Diss. Aachen 1927.

63. Führt sehr starke Verzögerung immer zur Ablösung?

Man ist geneigt, zunächst diese Frage zu bejahen. Tatsächlich ist es nicht immer der Fall, wie folgendes Beispiel zeigen wird.

Wenn wir die bisherigen Ausführungen aufmerksam verfolgen, so können wir für das Zustandekommen einer Ablösung zwei Bedingungen angeben:

1. Verzögerung mit dynamischem Druckzuwachs¹,
2. Wandreibung.

Fehlt eine dieser Voraussetzungen, so entsteht keine Ablösung. Die Bedingung 2 fehlt z. B. am Staupunkt. In jeder Verzweigungs-

stromlinie findet bis zum Staupunkt eine Verzögerung statt. Je nach der Formgebung des Körpers kann diese Verzögerung sehr groß sein. Abb. 177 zeigt deutlich, daß die starke

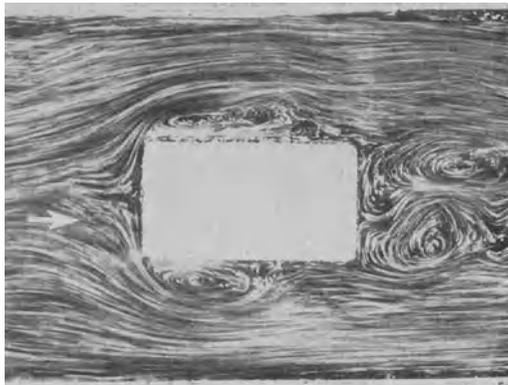


Abb. 177. Umströmung eines Widerstandskörpers zur Veranschaulichung der Staupunktströmung.

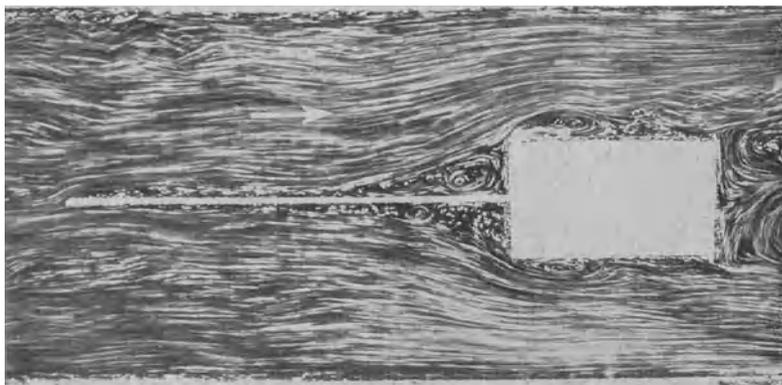


Abb. 178. Durch Einsetzen einer Wand in die Verzweigungsstromlinie entsteht eine Ablösung und infolge geringerer Ausweitung der Stromlinien eine Widerstandsverminderung.

¹ Nicht bei jedem Druckzuwachs findet eine Ablösung statt. Fließt z. B. Wasser in einem Rohr von gleichem Querschnitt senkrecht nach unten, so ist u. U. in Strömungsrichtung ein starker Druckzuwachs vorhanden, der keinerlei Anlaß zur Ablösung gibt. Spricht man somit von der Ablösungsgefahr durch Druckzuwachs, so muß stets dabei bemerkt werden, daß nur dynamischer, kein statischer Druckzuwachs Ablösungsgefahr bedingt.

Verzögerung vor dem Staupunkt keine schädlichen Folgen hat. Sobald aber Bedingung 2 noch erfüllt ist, muß eine Ablösung entstehen. Stellen wir z. B. nach Abb. 178 in die Verzweigungsstromlinie eine feste Wand, so haben wir sofort eine deutliche Ablösung. Gleichzeitig wird durch die Wandreibung die Geschwindigkeit in der Verzweigungsstromlinie stark abgebremst. Die Umströmung der Stirnkanten ergibt so kleinere Zentrifugalkräfte und Kontraktionen. Der Unterschied gegen Abb. 177 ist offensichtlich. Ein kleinerer Widerstand ist die Folge. Wir haben also hier die Erscheinung, daß durch eine widerstandsvermehrnde Maßnahme der Gesamtwiderstand erheblich vermindert wird.

Ähnliche Ablösungen entstehen, wenn z. B. ein Flügelprofil an einer Wand angesetzt wird. Der Ansatz eines Tragflügels am Rumpf oder der Ansatz eines Schraubenflügels auf der Nabe sind praktische Beispiele dafür. Ablösungen lassen sich hier nur vermeiden, wenn die Verzögerung vor dem Staupunkt gemildert wird. Ebenso wird durch die Seitenwand die Ablösungstendenz auf der Saugseite stark vergrößert, eine Erscheinung, die dem Aerodynamiker unter dem Namen „Diffusoreffekt“ bekannt ist. Allgemein spricht man auch von „gegenseitiger Beeinflussung“ von Widerstandskörpern. Abhilfe bringen im vorliegenden Falle Übergänge nach Abb. 179. Die Erkenntnis dieses Vorganges ergab z. B. beim Flugzeug eine beachtliche Widerstandsverminderung. Da bei vielen anderen praktischen Anwendungen, insbesondere des Maschinenbaues, diese Tatsache heute noch nicht voll erkannt und gewürdigt wird, dürfte eine Betonung dieser Erscheinung nicht überflüssig sein.

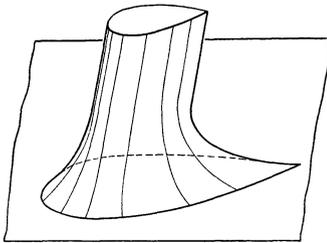


Abb. 179. Beim Aufsetzen eines Profils auf eine Wand sind Übergänge nötig.

Abhilfe bringen im vorliegenden Falle Übergänge nach Abb. 179. Die Erkenntnis dieses Vorganges ergab z. B. beim Flugzeug eine beachtliche Widerstandsverminderung. Da bei vielen anderen praktischen Anwendungen, insbesondere des Maschinenbaues, diese Tatsache heute noch nicht voll erkannt und gewürdigt wird, dürfte eine Betonung dieser Erscheinung nicht überflüssig sein.

64. Widerstand von Luftschiffkörpern.

Bei einem Luftschiffkörper läßt sich mit der auf S. 50 angedeuteten Quellen-Senken-Methode die Druckverteilung sehr genau vorausberechnen. Vorausgesetzt ist natürlich, daß keine Ablösung vorhanden und der Oberflächenwiderstand vernachlässigbar klein ist, was durch ein schlankes hinteres Ende mit Sicherheit erreicht werden kann.

Fuhrmann¹ hat zum ersten Male derartige Ermittlungen durchgeführt. Abb. 180 zeigt, wie Rechnung und Versuch gut in Einklang stehen. v. Kármán² ist auch die Erweiterung der Quellen-senkenmethode auf die quergerichtete Anströmung eines Rotationskörpers gelungen.

¹ Fuhrmann, Georg: Diss. Göttingen 1912.

² v. Kármán, Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern, Abh. a. d. aerodyn. Inst. d. T. H. Aachen, Heft 7, Berlin 1927.

Bei Beurteilung des Widerstandskoeffizienten nach der Formel

$$W = c \cdot q \cdot F$$

entsteht bei Luftschiffen ein schiefes Bild. Der Schattenquerschnitt, auch Spantquerschnitt genannt, interessiert beim Luftschiff weniger. Die Fragestellung ist

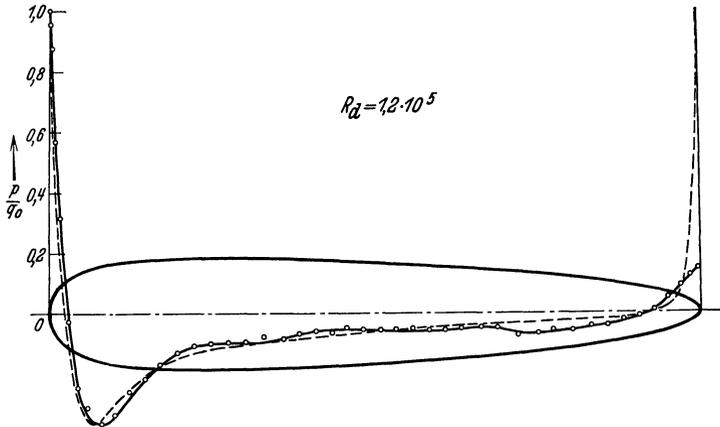


Abb. 180. Druckverteilung (berechnet und gemessen) an einem Luftschiffkörper (nach Fuhrmann).

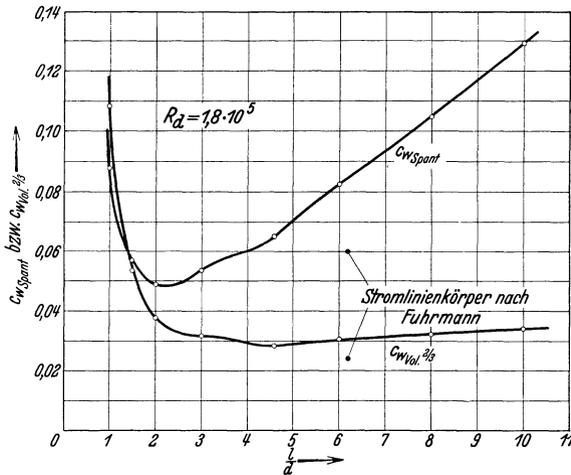


Abb. 181. Widerstandsbeiwerte von Stromlinienkörpern in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad nach amerikanischen Messungen.

hier folgende. Bei einem gegebenem Volumen V , d. h. bei gegebener Tragfähigkeit soll ein möglichst kleiner Widerstand vorhanden sein. Es ist deshalb zweckmäßig, in die Widerstandsformel eine Fläche einzusetzen, die aus V abgeleitet wird. Man wählt meist die Seitenfläche eines Würfels, der denselben Inhalt wie V hat. Diese ist gleich $F = V^{2/3}$; so ergeben sich zwei Widerstandskoeffizienten:

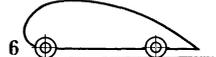
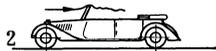
$$W = c_w \text{ spant} \cdot F \cdot q, \tag{131}$$

$$W = c_w \text{ vol}^{2/3} \cdot V^{2/3} \cdot q. \tag{132}$$

Für den konstruktiven Aufbau ist noch die Verhältnisgröße

$$\frac{\text{Länge}}{\text{größter Durchmesser}} = \frac{l}{d}$$

maßgebend. In Abhängigkeit von diesem sog. Schlankheitsgrad ist in Abb. 181 für eine Reihe amerikanischer Luftschiffmodelle $c_{w \text{ spant}}$ und $c_w \text{ vol}^{2/3}$ aufgetragen.



7 *Volkswagen* $c = 0,43.$

8 BMW Motorrad $c = 0,67$
(mit Fahrer ist der Widerstand 2,7 mal größer)

9 Lastwagen $c = 0,75 \div 0,87$

10 Panzerwagen $c = 0,65 \div 0,83$

Abb. 182.

Das Optimum liegt bei etwa $\frac{l}{d} = 4 \div 5$. Bei gegebener Spantfläche ist hingegen bei $\frac{l}{d} = 2 \div 3$ das Optimum vorhanden. (Ähnliche Fragestellungen treten bei der Formgebung von Fliegerbomben auf.)

65. Widerstand von Fahrzeugen.

Bei den ständig steigenden Geschwindigkeiten der Fahrzeuge spielt der Luftwiderstand eine immer größere Rolle. Bis zu Geschwindigkeiten von rd. 70 km/h ist der Anteil des Luftwiderstandes im Verhältnis zu den anderen Widerständen gering. Bei Geschwindigkeiten über 100 km/h ist der Einfluß so groß, daß die Formgebung dieser Wagen durch die Forderung nach kleinstem Luftwiderstand entscheidend beeinflusst wird. Der Leistungsaufwand wächst mit der dritten Potenz der Geschwindigkeit, während

der Widerstand wieder mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst.

$$L = W \cdot w; \quad W = c \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w^2 \cdot F. \quad (133)$$

F ist die sog. „Spantfläche“ des Wagens, worunter man das projizierte Umrißprofil des Wagens in Fahrtrichtung versteht.

Abb. 182 zeigt anschaulich, was durch zweckentsprechende Formgebung erreicht werden kann.

Beispiel: Ein Wagen nach 3. (Abb. 182) fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h. Die Schattenfläche, hier meist mit „Spantfläche“ bezeichnet, betrage 2 m². Es ist $c = 0,517$. Die Motorleistung in PS ist zu berechnen. $\gamma/g = 1/8$.

$$w = 100/3,6 = 27,8 \text{ m/s};$$

$$W = c \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w^2 \cdot F = 0,517 \cdot 27,8^2/16 \cdot 2 = 49,9 \text{ kg};$$

$$N = w \cdot W/75 = 27,8 \cdot 49,9/75 = 18,5 \text{ PS}.$$

66. Ablösung von Flüssigkeitsstrahlen.

Wenn Körper von nicht zu breiten Flüssigkeitsstrahlen umströmt werden, ist die Ablösungstendenz bedeutend geringer als in einer weit ausgedehnten Strömung. Wird z. B. eine Kugel von einem Luftstrahl angeblasen, dessen Durchmesser noch kleiner als der Kugeldurchmesser ist, so schließt sich die Strömung hinter der Kugel ziemlich vollständig. Abb. 183 veranschaulicht einen solchen Versuch, bei dem der Strömungsverlauf durch Staudruckprofile dargestellt ist. Die relativ schwache Ablösung beginnt hier erst bei einem Winkel von $\sim 135^\circ$. Die Strömung ist

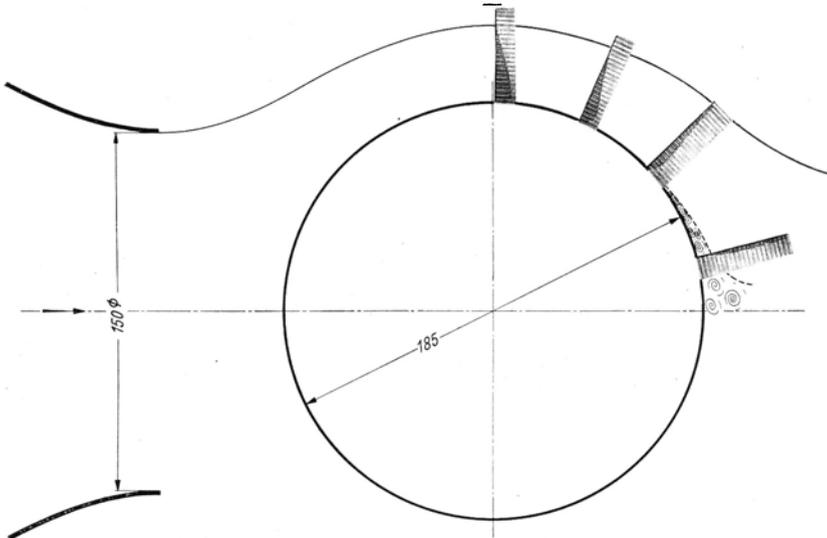


Abb. 183. Umströmung einer Kugel. Grenzschichten hinter dem größten Kugeldurchmesser.

überkritisch und bleibt in diesem Zustand bis etwa $Re = 100000$. Bei der vollumströmten Kugel konnte dieser Zustand nach S. 64 nur bis etwa $Re = 170000$ aufrecht erhalten werden. Die überraschenden Versuche mit frei schwebenden Gummibällen¹ finden durch diese Erscheinung ihre Erklärung. Verwendet man nämlich im gleichen Luftstrahl kleinere Kugeln, z. B. Tischtennisbälle, so lassen sich dieselben kaum im Luftstrahl halten. Erst wenn man auch hier zu entsprechend kleineren Luftstrahlen übergeht, gelingen die Experimente.

Am Beispiel der Kugel soll der Grund für die geringe Ablösungstendenz durch eine einfache Rechnung nachgewiesen werden. In Abb. 183 ist im größten Meridianquerschnitt der Kugel eine Strahlweite von etwa 27 mm vorhanden. An der Kugeloberfläche entsteht nach Früherem (S. 27) ein Unterdruck dadurch, daß die Zentrifugalkräfte des ge-

¹ Eck: Einführung in die technische Strömungslehre, Bd. II.

krümmten Strahles durch den Druckanstieg senkrecht zur Strömungsrichtung aufgenommen werden müssen. Bei der im unendlich breiten Luftstrahl umströmten Kugel würde für Abb. 183 in 27 mm Entfernung von der Kugel nach Gl. (59) eine Geschwindigkeit von 17,25 m/s vorhanden sein, während die größte Geschwindigkeit an der Kugeloberfläche $1,5 \cdot c = 1,5 \cdot 14 = 21$ m/s wäre. Demnach würde sich in Strahltiefe der statische Druck um $\Delta p = \gamma/2 g [c_2^2 - c_1^2] = 1/16 [21^2 - 17,25^2] = 9$ mm WS ändern. Andererseits ist der größte Unterdruck gegenüber der Parallelströmung $1,25 \gamma/2 g c^2 = 1,25/16 \cdot 14^2 = 15,32$ mm WS. Da nun beim

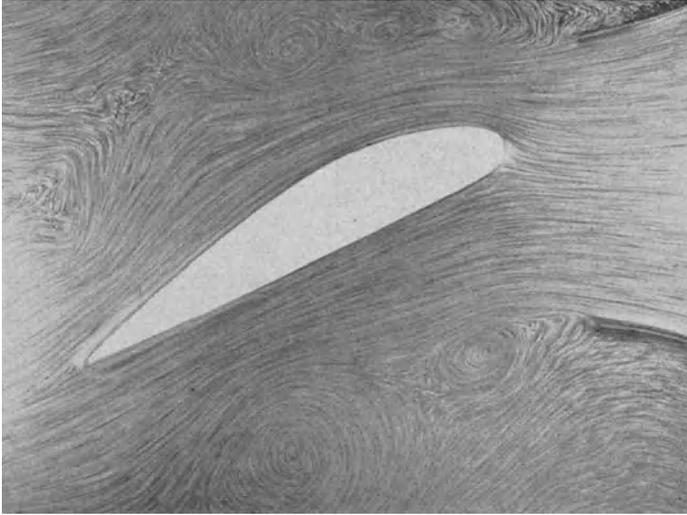


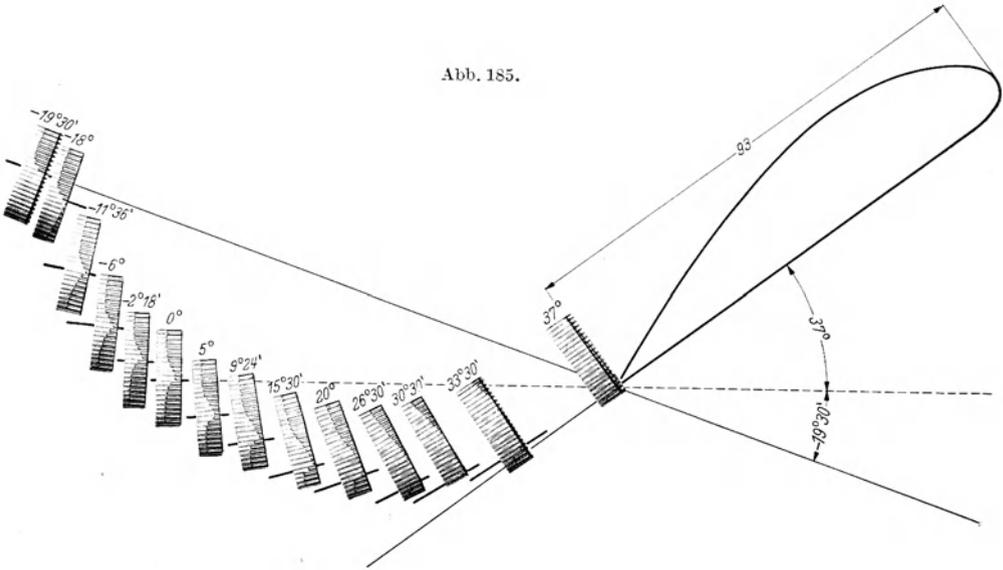
Abb. 184. Ablenkung eines Strahles durch einen Tragflügel. Trotz großen Anstellwinkels reißt Strömung nicht ab.

Versuch der Abb. 183 am Rande des Strahles bereits der Außendruck erreicht ist, ergibt sich nur ein Unterdruck von 9 mm WS gegenüber 15,32 bei der weit umströmten Kugel. Auf der Hinterseite der Kugel muß aber dieser Unterdruck durch Verzögerung wieder ausgeglichen werden. Die Ablösungsgefahr ist aber um so geringer, je geringer die Verzögerung ist, so daß diese Gefahr mit dünneren Strahlen kleiner werden muß. (Wird der Strahl durch turbulente Vermischung mit der Außenluft nicht abgebremst, z. B. bei in Luft austretenden Wasserstrahlen, so kann ein Strahl um sehr weite Krümmungen geführt werden. Die auf dem Springbrunnen tanzende Glaskugel bietet ein Beispiel hierfür.)

Charakteristisch ist auch die Umströmung von Tragflächen durch schmale Strahlen. Abb. 184 zeigt eine solche Strömung, die dadurch entstanden ist, daß ein stark angestellter Tragflügel in den durch eine Düse verengten Strahl einer offenen Wasserrinne gestellt wurde. Trotz

des Anstellwinkels von 26° liegt die Strömung noch sauber an; der ganze Strahl wird in die Richtung des Tragflügels abgelenkt. Beim Arbeiten

Abb. 185.



mit kleinen Demonstrationswindkanälen, wo relativ große Tragflügel verwendet werden müssen, trat diese Erscheinung besonders auffällig in

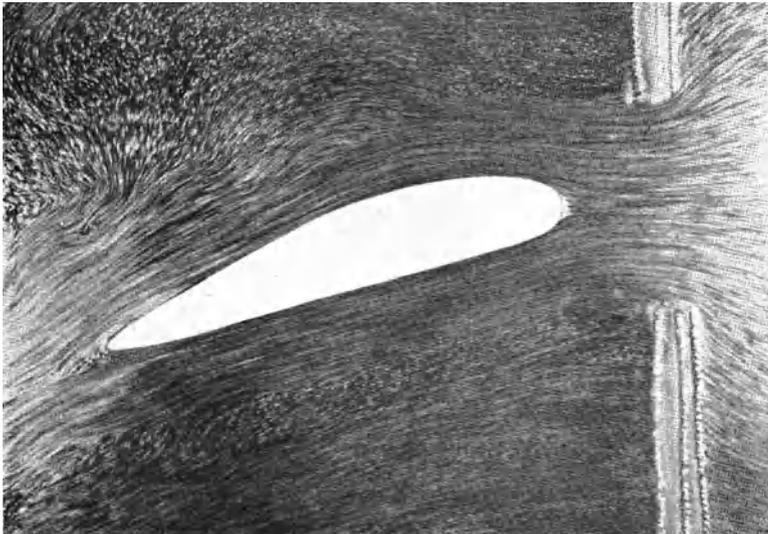


Abb. 186. Stark angestellter Tragflügel in einer Strömung, deren Energie im mittleren Bereich durch äußere Siebe stark erhöht ist. Strömung bleibt anliegen.

Erscheinung. Abb. 185 zeigt für den interessierenden Anstellwinkelbereich die Staudruckprofile hinter einem Tragflügel, der in einem kleinen

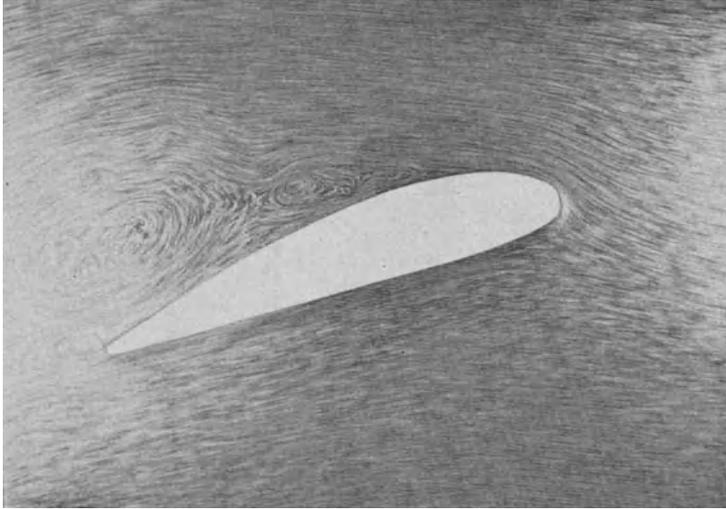
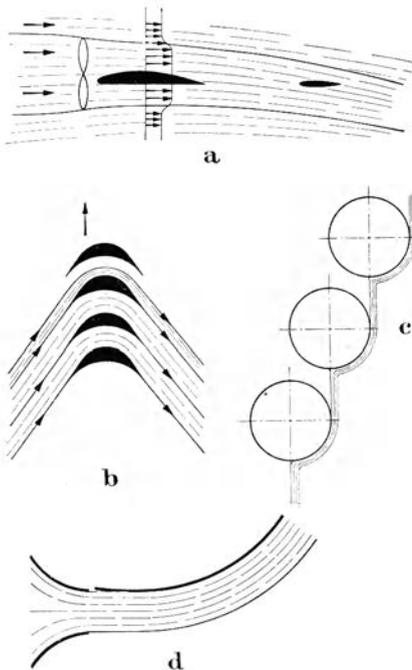


Abb. 187. Tragflügel in derselben Lage wie bei Abb. 186, jedoch ohne Siebe. Strömung reißt ab.



Eckschen Demonstrationswindkanal von 150 mm Strahldurchmesser untersucht wurde. Man erkennt daraus, daß die Strömung in dem Winkelbereich -12 bis $+20^\circ$ anliegt. Der gleiche Flügel ergibt im großen Windkanal bedeutend kleineren Winkelbereich.

Die geringe Ablösungstendenz wird auch dann noch beobachtet, wenn in einer Strömung ein Teilausschnitt erhöhte Energie be-

Abb. 188.

- a) Schematische Darstellung der Geschwindigkeitserhöhung durch den Propellerstrahl in der Umgebung des Tragflügels.
- b) Schematische Darstellung der Strömung in einem teilweise gefüllten Kanal einer Gleichdruckdampfturbine. In dem teilweise gefüllten Schaufelkanal bleibt Strahl am Schaufelrücken anliegen.
- c) Ablauf des Kondensats bei versetzter Anordnung der Kondensatorrohre.
- d) Ablenkung eines Strahles durch gewölbte Fläche.

sitzt. Der Propellerstrahl¹ des fliegenden Flugzeugs ist ein Beispiel dafür (Abb. 188 a). In ihm liegt ein Teil der Tragfläche und evtl. auch das Leitwerk. Die Wirkung dieses Strahles insbesondere auf die Stabilität der Maschine ist bekanntlich von fundamentaler Bedeutung und ihre Beherrschung gehört mit zu den schwierigsten Aufgaben des Aerodynamikers. Um diesen Effekt grundsätzlich zu veranschaulichen, wurden in einem Wasserkanal durch Siebe ähnliche Energieverhältnisse wie beim Propellerstrahl erzeugt. Stellt man einen stark angestellten Tragflügel in den mit erhöhter Geschwindigkeit strömenden Teil der Strömung, so zeigt sich keine Ablösung (Abb. 186). Nach Wegnahme der Siebe ergibt sich für die gleiche Anstellung sofort eine starke Ablösung (Abb. 187).

Weitere praktische Beispiele dieses noch wenig untersuchten Effektes zeigt Abb. 188.

67. Schwebende Körper.

Wenn ein Körper in Luft, Gas oder in einer Flüssigkeit frei fällt, wird er so lange beschleunigt, bis der Flüssigkeitswiderstand genau gleich den entgegengerichteten Kräften ist. Entgegen wirkt das um den Auftrieb verminderte Gewicht des Körpers. Die dann erreichte Fallgeschwindigkeit bleibt konstant. Bläst man umgekehrt den gleichen Körper mit der gleichen Geschwindigkeit aufwärts an, so wird er stillstehen, d. h. schweben. Man nennt diese Geschwindigkeit deshalb auch Schwebegeschwindigkeit.

Da bei den diesbezüglichen Anwendungen alle nur denkbaren Körperformen vorkommen, ist es zweckmäßig, sich dadurch einen prinzipiellen Einblick zu verschaffen, daß man eine mittlere Form betrachtet. Hierzu eignet sich vorzüglich die Kugel.

Bei Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes, d. h. $Re > 1000$, ist $W = c \frac{\gamma_2}{2g} w_s^2 \cdot F$, während das um den Auftrieb verminderte Gewicht $G' = \frac{\pi d^3}{6} [\gamma_1 - \gamma_2]$ ist.

Aus der Gleichgewichtsbedingung $W = G'$ erhält man dann leicht die Schwebegeschwindigkeit

$$w_s = \sqrt{\frac{4}{3} d \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2} \frac{g}{c}} = \left[\sqrt{\frac{4}{3} d \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{g}{c}} \right], \text{ d. h. } w_s \text{ prop. } \sqrt{d}. \quad (134)$$

Der Ausdruck gilt für den Fall, daß der Auftrieb keine Rolle spielt, z. B. beim Fall fester Körperteilchen in Luft oder in Gasen. Im laminaren Widerstandsbereich gilt die Stocksche (bzw. die Oseensche) Formel $W = 3\pi\mu w_s \cdot d$. Danach ergeben sich folgende Schwebegeschwindig-

¹ Die Steuerflächen im Strahl der Schiffsschrauben können aus dem gleichen Grunde sehr weit ablösungsfrei verstellt werden. Auch bei der Zweitluftzuführung zu Feuerungen ergeben sich Strahlen von veränderter Energie.

keiten:
$$w_s = \frac{1}{18} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\mu} d^2 = \left[\frac{1}{18} \frac{\gamma_1}{\mu} d^2 \right], \text{ d. h. } w_s \text{ prop. } d^2. \quad (135)$$

Hieraus folgt, daß im turbulenten Bereich w_s proportional \sqrt{d} und im laminaren Gebiet w_s proportional d^2 ist. Im letzteren Falle, dem praktisch bedeutsamsten, ist die Empfindlichkeit auf Korngrößenunterschiede bedeutend größer: eine Sichtung ist hier, d. h. bei kleinen Staubteilchen, also viel leichter durchzuführen als im turbulenten Bereich. Von den zahlreichen Anwendungen seien nur die Hauptgruppen angegeben. Da sich große Industriegruppen mit den folgenden Anwendungen beschäftigen, dürfte ein kurzer Hinweis gerechtfertigt sein.

a) Pneumatische Förderung, Bergeversatz usw.

Man kann Körperteilchen, z. B. Kohlenstaub, Getreide, Stroh, ja selbst Erde, größere Steine, normale Kohle usw. durch Druckluftleitungen blasen, wenn die

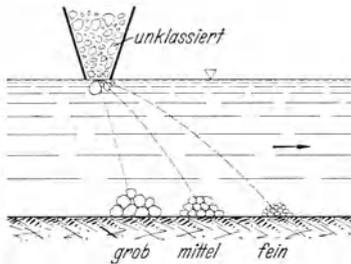


Abb. 189. Schematische Darstellung der Schichtung von Schüttmaterial im fließenden Strom.

Luftgeschwindigkeit um ein bestimmtes Maß die Schwebegeschwindigkeit dieser Körper übersteigt. Hierdurch ergeben sich viele bedeutsame Methoden zum Transport von Massengütern. Nach Gasterstädt¹, der diese Vorgänge zum ersten Male wissenschaftlich untersuchte, ist das Verhältnis der Relativgeschwindigkeit, d. h. der Differenz der Körpergeschwindigkeit und der Luftgeschwindigkeit zur Schwebegeschwindigkeit, eine lineare Funktion der Luftgeschwindigkeit. Der Druckabfall in den Leitungen ist erheblich größer als bei reiner Luft. Gasterstädt fand weiter, daß das

Verhältnis: Druckabfall für Luft mit Material/Druckabfall für reine Luft, eine lineare Funktion des Mischverhältnisses Fördergut/Luftgemenge ist. Bemerkenswert ist ferner, daß die Teilchen bei der pneumatischen Förderung sich in starker Rotation befinden (eine Art Autorotation). Für Weizenkörner wurde z. B. eine Drehzahl von 10000—15000 min gemessen.

b) Aufbereitung.

Die verschiedenen Fallgeschwindigkeiten verschieden großer Körper bieten die Möglichkeit, Material in einem strömenden Medium nach Korngröße zu ordnen. Wird z. B. nach Abb. 189 in einen langsam fließenden Wasserstrom Kohle eingefüllt, so werden die großen Stücke gemäß ihrer größeren Fall- bzw. Schwebegeschwindigkeit zuerst am Boden anlangen, nachher kommen dann feinkörnigere Stücke, so daß auf dem Boden, wo durch Vorrichtungen das Material stetig abgeschöpft wird, das ganze Material gut sortiert vorliegt.

Liegt Material ungefähr gleicher Korngröße, aber verschiedenen spezifischen Gewichtes vor, z. B. eine Mischung von Erz und Erde, so werden die Teilchen mit größerem spezifischen Gewicht größere Fallgeschwindigkeit haben als die leichteren Teilchen trotz sonst gleicher Größe. Durch das Verfahren der Abb. 189 kann also das Erz von der Erde getrennt werden. Ein großer Teil der Erzaufbereitung beruht auf ähnlichen Verfahren.

¹ Gasterstädt: Die experimentelle Untersuchung des pneumatischen Fördervorganges. Forschungsheft 265. Berlin: VDI-Verlag.

c) Entstaubung.

Die Aufgabe, aus Luft, Gasen, Abgasen usw. anfälligen Staub zu entfernen, ist aus industriellen und auch aus hygienischen Gründen heute zu einer industriellen Aufgabe allerersten Ranges geworden. Eines der Hauptmittel zur Entfernung des Staubes ist der sog. Zyklon¹. Es handelt sich hierbei, wie die schematische Skizze (Abb. 190) zeigt, um eine Wirbelsenke. Tangential wird staubhaltige Luft bzw. das Gas eingeblasen und durch einen zentral angeordneten zylindrischen Trichter abgesaugt, der ungefähr die Größe des Wirbelkernes (s. S. 39) hat. Die bei dieser Wirbelströmung auftretenden Zentrifugalkräfte drängen die Staubteilchen an die Wand; dort verlangsamen sie infolge der Wandreibung ihre Geschwindigkeit, fallen dann an der Wand nach unten und werden dort in einem Behälter gesammelt. Die Teilchen werden um so leichter nach außen geschleudert, je größer die Schwebegeschwindigkeit ist, so daß also, wie leicht verständlich ist, die Entfernung der größeren Staubteilchen leichter ist als der kleineren. Bemerkte sei noch, daß der Wirbelsenke des Zyklons sich noch nach den grundlegenden Versuchen von van Tongern² Sekundärströmungen überlagern, deren Beachtung bei hohen Entstaubungsforderungen sehr wesentlich ist.

Die Staubtechnik arbeitet, sofern man Rohstaub und hohe Temperaturen mit einschließt, bei Reynoldsschen Zahlen bis etwa 100. Das schwierige und wichtigste Gebiet der feinen Entstaubung umfaßt sogar nur Staubteilchen von mehreren μ Durchmesser bei Reynoldsschen Zahlen bis 8. Hier spielt fast ausschließlich die laminare Widerstandsformel gemäß Gl. (135) eine Rolle. Der grundsätzliche Unterschied zwischen dem quadratischen und dem laminaren Widerstandsgesetz ist hier sehr bedeutsam. Bei quadratischem Gesetz ist die entscheidende Größe: die Schwebegeschwindigkeit vom spezifischen Gewicht des umgebenden Mittels abhängig. Letztere kann vermindert, d. h. die Schwebegeschwindigkeit vergrößert werden, durch Verminderung des Druckes, d. h. Vorteil der Vakuumentstaubung bei größeren Teilchen, oder durch Erhöhung der Temperatur (Entstauben unmittelbar hinter der Feuerung des Kessels wäre der Entstaubung größerer Teilchen sehr dienlich). Für kleine Staubteilchen, für die das laminare Widerstandsgesetz gilt, d. h. für praktisch die meisten Aufgaben, sind solche Maßnahmen wirkungslos, da die Schwebegeschwindigkeit nicht von γ_2 , sondern von μ abhängt. Dieser Wert hängt aber nach früherem nicht vom Druck ab, während mit der Temperatur sogar eine starke Steigerung stattfindet. Dies bedeutet aber, daß sich kalte Gase leichter entstauben lassen als heiße.

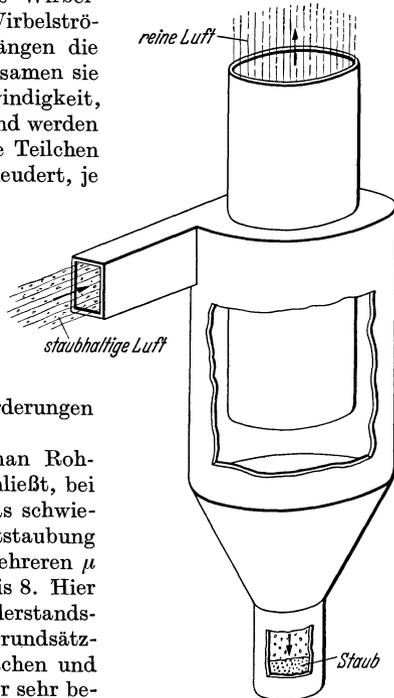


Abb. 190. Schematische Darstellung eines Zyklons.

¹ Der Zyklon ist eine Erfindung der Firma Knickerbocker Company in Jackson (USA.) und wurde gegen Ende der 80er Jahre in Deutschland eingeführt.

² Der Flugstaubabscheider, System van Tongern. Arch. Wärmewirtsch. 1934, S. 243.

68. Zusammenstellung von Widerstandsziffern.

Körperform	c
Halbkugel ohne Boden	0,34
Halbkugel mit Boden	0,4
Halbkugel ohne Boden	1,33
Halbkugel mit Boden	1,17
Kreisplatte	1,11
Prisma $\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$	0,91
Prisma $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$	1,53
Kreisring $\frac{d}{D} = 0,5$	1,22
Kegel ohne Boden	0,34
Kegel ohne Boden	0,51
Platte $\frac{a}{b} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 10 \\ 18 \\ \infty \end{cases}$	$\begin{cases} 1,10 \\ 1,15 \\ 1,19 \\ 1,29 \\ 1,40 \\ 2,01 \end{cases}$
Walze $\frac{L}{d} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,91 \\ 0,85 \\ 0,87 \\ 0,99 \end{cases}$
2 Kreisplatten Abstand l $\frac{L}{d} = \begin{cases} 1 \\ 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 0,93 \\ 0,78 \\ 1,04 \\ 1,52 \end{cases}$

Abb. 191. Widerstandsziffern für kennzahlunempfindliche Körperformen.

Widerstandsziffern sind unabhängig von der Reynoldsschen Zahl.

Bei der zweiten Gruppe (Abb. 192) wird der Ablösungspunkt mit der Reynoldsschen Zahl wandern. Bei allen stetig abgerundeten Körpern ist dies der Fall. Abb. 193 zeigt den Verlauf der c-Werte für die Kugel und für zwei Ellipsoide.

Grundsätzlich lassen sich die Körperformen in zwei Gruppen einteilen. Bei der ersten Gruppe liegt der Ablösungspunkt fest (Abb. 191). Dies ist immer der Fall, wenn der Körper an der Ablösungsstelle scharfkantig begrenzt ist. Der Umschlag in turbulente Grenzschicht kann hier keinen Vorteil bringen. Die

Körperform (82)	Re	c
Kugel	$> Re = 1,5 \cdot 10^5 \div 4,05 \cdot 10^5$ $< Re = 1,5 \cdot 10^5 \div 4,05 \cdot 10^5$	$0,09 \div 0,18$ 0,47
Ellipsoid 1-0,75	$< Re = 5 \cdot 10^5$ $> Re = 5 \cdot 10^5$	0,6 0,21
Ellipsoid 1-1,80	$> Re = 10^5$ unter 10^5 stetiger Übergang zu größeren c-Werten	0,09
Streben $\frac{t}{d} = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \end{cases}$	$Re > 10^5$	$\begin{cases} 0,2 \\ 0,1 \\ 0,06 \\ 0,083 \\ 0,094 \end{cases}$
Zylinder $\frac{L}{d} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \\ 40 \\ \infty \end{cases}$	unterkritischer Wert etwa $Re \sim 9 \cdot 10^4$ $Re > 5 \cdot 10^5$	$\begin{cases} 0,63 \\ 0,68 \\ 0,74 \\ 0,82 \\ 0,98 \\ 1,2 \\ 0,85 \end{cases}$
Schräg angeblasener Zylinder	Neigung gegen senkrechte Richtung $\begin{matrix} 0^\circ & \dots & 1,0 \cdot c_0^\circ \\ 30^\circ & \dots & 0,7 \cdot \text{,,} \\ 60^\circ & \dots & 0,2 \cdot \text{,,} \end{matrix}$	

Abb. 192. Widerstandsziffern für kennzahlempfindliche Körperformen

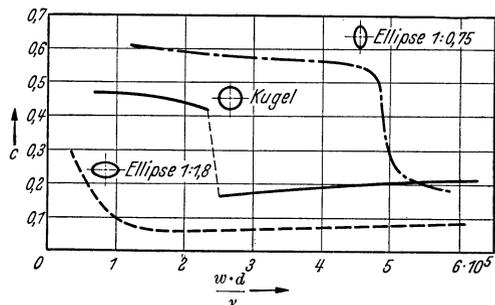


Abb. 193. Kritische Übergangsbereiche für verschieden gekrümmte Körper.

¹ Über Widerstandsbeiwerte von handelsüblichen Runddrahtsieben bis $Re = 1000$,

Man erkennt daraus, daß die kritische Reynoldssche Zahl mit größerer Krümmung größer wird. Ist r der Krümmungsradius an der Ablösungsstelle und w die Geschwindigkeit an der Ablösungsstelle, so ist der Umschlag bei $Re = \frac{w \cdot r}{\nu} = 6 \cdot 10^4$ bis $15 \cdot 10^4$ zu erwarten, je nach der Turbulenz des Strahles.

69. Widerstand bei Beschleunigung eines Körpers in einer Flüssigkeit.

Bei Beschleunigung eines Körpers tritt zu dem Widerstand ein Beschleunigungswiderstand hinzu, der dazu dient, die kinetische Energie der Flüssigkeit zu erhöhen. Dieser Widerstand wird dadurch zweckmäßig erfaßt, daß man die Masse des Körpers um einen gewissen Betrag, den man scheinbare Masse nennt, vergrößert denkt. Als Beispiel sei die Kugel angeführt, für die eine exakte Rechnung durchführbar ist. Hier ist die scheinbare Masse gleich der halben von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsmasse.

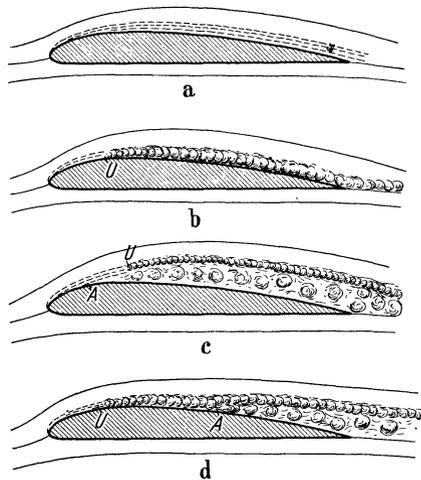


Abb. 194. Schematische Darstellung der Grenzschichtentwicklung und Ablösung auf der Saugseite eines Flügels.

U = Umschlag; A = Ablösung.

70. Die Hauptgesetze der Ablösung (Zusammenstellung).

Einige wichtige Regeln lassen sich aus dem bisherigen folgern:

a) An einer scharfen Kante löst sich die Strömung ab. Zwischen aktiver Strömung und Totwasserraum bildet sich eine turbulente Vermischungszone.

b) Bei jedem umströmten, stetig gekrümmten Körper bildet sich vom Staupunkt aus eine laminare Grenzschicht.

c) Bei einer bestimmten Reynoldsschen Zahl, für die sich ebenso wie beim Rohr nur eine untere Grenze angeben läßt, wird diese Grenzschicht turbulent.

a) anliegende laminare Grenzschicht.
 b) laminare Grenzschicht schlägt in turbulente um, die anliegen bleibt.
 c) laminare Grenzschicht löst sich ab; der abgelöste Strahl wird bei U turbulent und bleibt abgelöst.
 d) laminare Grenzschicht schlägt um bei U , turbulente Grenzschicht bleibt anliegen bis A , von da ab Ablösung.

auch Anordnungen von mehreren Sieben hintereinander. Eckert und Pflüger: Lufo 1941, S. 142. Über den Widerstand von Seidengasfiltern, Runddraht- und Blechstreifensieben mit quadratischen Maschen. Flachsbar: Ergeb. d. AVG., IV. Lieferung, S. 112.

d) Findet kein Umschlag statt, wie z. B. bei kleineren Reynolds'schen Zahlen, so wird sich die Strömung meist von der Wand ablösen, wenn die reibungslose Strömung einen Druckanstieg, d. h. eine Verzögerung bedingt. Der abgelöste laminare Strahl wird nach kurzer Strecke turbulent und verursacht Wirbel.

e) Ist ein Umschlag in turbulente Grenzschicht erfolgt, so ist ein mäßiger Druckanstieg möglich, ebenso wie beim Diffusor. Konstruktiv maßgebend ist, daß die turbulente Vermischungsschicht Berührung mit der Wand behält; nur dann wird eine Ablösung vermieden. Theoretisch liegen einige interessante Rechnungen von Gruschwitz¹ und Buri² vor, die das Schicksal der turbulenten Grenzschicht zu verfolgen gestatten. Die rein praktische Möglichkeit dieser Verfahren ist z. Zt. noch nicht derart, daß sie dem Praktiker empfohlen werden können. Für Laboratoriumsarbeiten leisten diese Verfahren indes schon wertvolle Dienste.

f) Für das Zustandekommen einer Ablösung sind zwei Bedingungen notwendig und hinreichend:

- a) eine Verzögerung mit dynamischem Druckzuwachs,
- b) Wandreibung.

g) Schematisch sind die verschiedenen Ablösungsmöglichkeiten in Abb. 194 am Beispiel eines Tragflügels dargestellt.

V. Der Tragflügel.

71. Allgemeines.

Um die Verständigung zu erleichtern, soll der Leser zunächst mit den beim Tragflügel üblichen und praktisch normalisierten Bezeichnungen vertraut gemacht werden.

Auch hier ist es wiederum nützlich, alle Kräfte durch dimensionslose Koeffizienten auszudrücken. Dazu muß eine hydraulisch entstandene Kraft gesucht werden, die mit den Abmessungen des Tragflügels und mit seiner Bewegung in eindeutiger Beziehung steht. Um eine Kraft zu erhalten, muß ein Produkt: Druck \times Fläche gebildet werden. Als Bezugsfläche wählt man beim Tragflügel die tragende Fläche $F = b \cdot t$, die dadurch entsteht, daß man den Flügel auf eine ebene Fläche legt und hierauf projiziert. (Im Gegensatz dazu wurde bekanntlich bei den Widerstandskörpern die Schattenfläche in Strömungsrichtung als Bezugsfläche gewählt.) Bei einer Anblasegeschwindigkeit w , bzw. bei der gleichen Geschwindigkeit des Flügels, ist der Staudruck $q = \frac{\rho}{2} \cdot w^2$ der einzige

¹ Gruschwitz, E.: Die turbulente Reibungsschicht bei Druckabfall und Druckanstieg. Diss. Göttingen 1931.

² Buri, A.: Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung. Diss. Zürich 1931.

Druck, der physikalisch mit w zusammenhängt. So entsteht eine Kraft $q \cdot F$, die zwar nicht vorhanden, aber leicht vorstellbar ist. Mit dieser Kraft vergleicht man die tatsächlichen Kräfte, Auftrieb und Widerstand, und gelangt so zu den Koeffizienten c_a und c_w :

$$A = c_a \cdot q \cdot F; \quad W = c_w \cdot q \cdot F; \quad R = c_r \cdot q \cdot F. \quad (136)$$

Die Luftkraft R wurde dabei schon in zwei Komponenten, Auftrieb A und Widerstand W , zerlegt, deren Definition nach früherem klar sein dürfte. Daneben ist noch eine Zerlegung der Luftkraft in Richtung der Flügelsehne und senkrecht dazu für verschiedene Zwecke angebracht (Abb. 195).

$$N = c_n \cdot q \cdot F; \quad T = c_t \cdot q \cdot F. \quad (137)$$

Momentenbeiwert. Je nach den Bewegungsmöglichkeiten des Flügels haben die Luftkräfte das Bestreben, den Flügel zu drehen. Das Drehmoment der Luftkräfte hängt von dem Angriffspunkt der Resultierenden ab. In Abb. 195 ist dies der Punkt D , den man auch Druckpunkt nennt. Beziehen wir das Moment auf den vorderen Punkt C , so ergibt sich

$$M_c = s \cdot N = s \cdot c_n \cdot q \cdot F.$$

Denkt man sich das gleiche Moment durch eine am hinteren Ende wirkende Kraft $c_m \cdot q \cdot F$ gebildet, so wird

$$M_c = t \cdot c_m \cdot q \cdot F = s \cdot c_n \cdot q \cdot F. \quad (138)$$

Die Zahl c_m nennt man den Momentenbeiwert, der nach folgender Gleichung in einfacher Weise den Abstand s des Druckpunktes von C bestimmt: $s = t \cdot \frac{c_m}{c_n}$. Da in erster Näherung $A \sim N$ ist, schreibt man meist:

$$s = t \cdot \frac{c_m}{c_a}. \quad (139)$$

Unabhängig vom Seitenverhältnis und der Wahl des Profiles ist die Funktion $c_m = f(c_a)$ eine Gerade mit der Steigung 1:4. Somit erhalten wir die allgemeine Beziehung $c_m = c_{m0} + c_a/4$; c_{m0} ist dabei der Momentenbeiwert für $c_a = 0$, d. h. für verschwindenden Auftrieb.

Im folgenden sind die nunmehr verständlichen Bezeichnungen zusammengestellt:

- F Flügelfläche
- t Tiefe des Flügels gem. Abb. 195
- b Spannweite des Flügels
- $\frac{t}{b} = \frac{F}{b^2}$ Seitenverhältnis
- $A = \frac{b}{t} = \frac{b^2}{F}$ Flügelstreckung

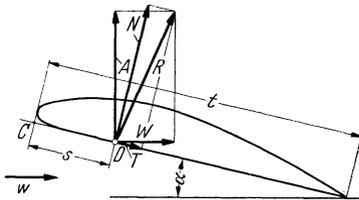


Abb. 195. Maß- und Kräftebezeichnungen beim Tragbügel.

- α Anstellwinkel gegenüber der Profiltangente
- w Anblasegeschwindigkeit
- A Auftrieb in kg
- W Widerstand in kg
- ϵ Gleitwinkel
- s Entfernung des Druckpunktes von der Profiltangente

$$c_a = \frac{A}{q \cdot \bar{F}} \text{ Auftriebskoeffizient}$$

$$c_{w0} \text{ Profilwiderstandskoeffizient}$$

$$c_w = \frac{W}{q \cdot \bar{F}} \text{ Widerstandskoeffizient}$$

$$c_n = \frac{N}{q \cdot \bar{F}} \text{ Beiwert der Normalkraft}$$

$$c_t = \frac{T}{q \cdot \bar{F}} \text{ Beiwert der Tangentialkraft}$$

$$c_r = \frac{R}{q \cdot \bar{F}} \text{ Beiwert der Resultierenden den}$$

$$c_m = \frac{M}{t \cdot q \cdot \bar{F}} \text{ Momentenbeiwert}$$

$$q = \frac{\rho}{2} w^2 \text{ Staudruck}$$

$$c_{wi} \text{ induzierter Widerstandskoeffizient}$$

$$C_a = 100 \cdot c_a; \quad C_w = 100 \cdot c_w$$

Eine leichte Rechnung ergibt noch folgende Beziehungen:

$$c_n = c_a \cdot \cos \alpha + c_w \cdot \sin \alpha; \quad c_r = \sqrt{c_a^2 + c_w^2} = \sqrt{c_n^2 + c_t^2};$$

$$c_t = -c_a \cdot \sin \alpha + c_w \cdot \cos \alpha.$$

72. Das Polardiagramm.

Trägt man in einem Schaubild $A = f(W)$ auf, so erhält man nach Abb. 196 die resultierende Luftkraft R durch Verbindung eines Kurvenpunktes mit dem Nullpunkt. Dieses bereits von Otto Lilienthal eingeführte Verfahren wird meist zur Darstellung der Versuchsergebnisse benutzt und hat sich als sehr zweckmäßig erwiesen. So ist z. B. der Winkel ε zwischen R und A gleichbedeutend mit dem Gleitwinkel. Hierunter versteht man den Winkel, unter dem ein Flugzeug bei abgestelltem Motor zu Boden gleitet. In diesem Falle besteht das in Abb. 197 dargestellte Kräftegleichgewicht nur aus drei Kräften: Gewicht = Auftrieb \uparrow Widerstand.

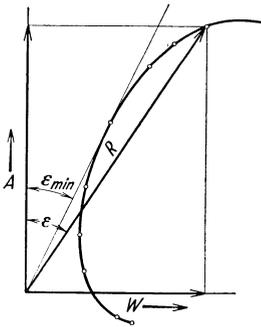


Abb. 196. Polardiagramm nach Lilienthal.

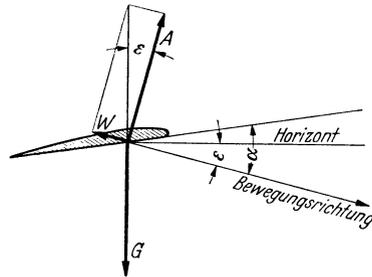


Abb. 197. Kräftegleichgewicht beim Gleitflug.

Da der Flügel sich in Richtung des Widerstandes bewegt, erkennt man leicht, daß der Gleitwinkel gleich dem Winkel zwischen Auftrieb und Resultierender ist. Legt man an die Polare vom Nullpunkt aus eine Tangente, so erhält man insbesondere den Punkt des kleinsten Gleitwinkels ε_{\min} .

Ein einfacher Versuch soll zunächst über Verlauf und Größenordnung der Kräfte unterrichten. Ein Tragflügel hängt nach Abb. 198 an einem Stiel, der in einer Spiralfeder kardanisch gelagert ist. Wirkt auf den

Flügel eine Kraft, z. B. durch Anblasen mit einem kleinen Windkanal, so wird der Flügel sich in Richtung dieser Kraft verstellen, und zwar um ein Stück, das der Kraft proportional ist. Die ganze kardanische Federlagerung, die vollkommen reibungslos wirkt, kann um beliebige Winkel verdreht werden, wodurch gleichzeitig der Anstellwinkel des Flügels verstellbar wird. Bei dieser Drehung wird der Haltearm des Flügels, bzw. die zur Vergrößerung des Ausschlags angebrachte Verlängerung, immer in Richtung der Resultierenden ausschlagen.

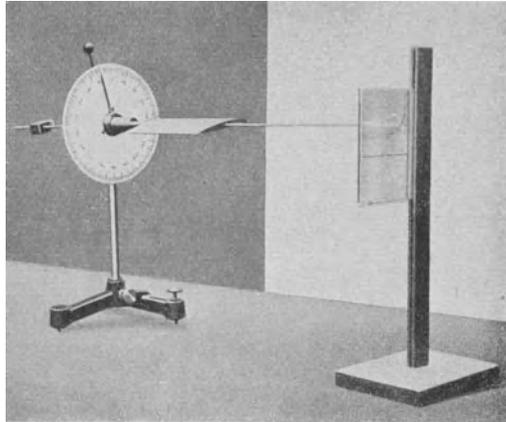


Abb. 198. Polarschreiber nach Eck zur Veranschaulichung der Tragflügelkräfte.

Der Endpunkt der Haltestange beschreibt also eine Kurve, die mit der Polare identisch sein muß. Abb. 199 zeigt eine solche Polare, die durch eine an der Haltestange befestigte Feder selbsttätig aufgeschrieben wurde. Diese maßstäblich und direkt aufgenommene Polare läßt bereits die Haupt-eigenschaften eines Tragflügels erkennen, die wir im folgenden genauer studieren werden. So erkennt man ein parabelartiges Stück, bei dem der Auftrieb im Verhältnis zum Widerstand besonders groß ist. Beim größten Auftrieb ergibt sich ein plötzliches Abweichen von der Parabel. Unter großen erkennbaren Schwankungen wird jetzt der Widerstand schnell größer, während der Auftrieb nicht mehr ansteigt. Wir werden später sehen, daß dieses Verhalten durch das Abreißen der Strömung bedingt ist. Der unter der W -Linie liegende Ast der Kurve bedeutet Abtrieb. Der Höchstwert ist hier auffallend kleiner als beim Auftrieb.

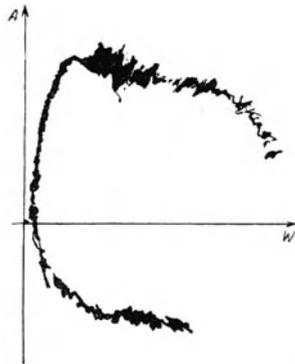


Abb. 199. Originalaufnahme einer Polaren nach Abb. 198.

73. Entstehung der Auftriebskraft.

Wie der Versuch der Abb. 198 bereits zeigte, entsteht beim Tragflügel für bestimmte Anstellwinkel eine Auftriebskraft, die im Verhältnis zum Widerstand groß

ist; anders ausgedrückt: Es ergibt sich eine Resultierende, die auf der Anblasrichtung nahezu senkrecht steht. Die physikalischen Ursachen dieser zunächst auffallenden Eigenschaft wollen wir genauer untersuchen.

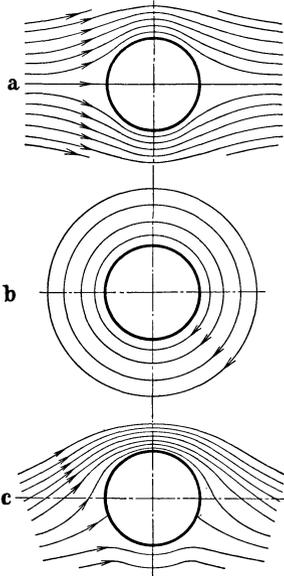


Abb. 200. Zylinderströmung. a Parallelströmung, b Zirkulationsströmung, c Parallelströmung mit Zirkulation.

Zunächst ist vom Standpunkte des Impulssatzes eine wichtige Feststellung möglich. Ein Auftrieb ist danach notwendigerweise mit einer Ablenkung der Luft nach unten verbunden. Wird z. B. sekundlich die Luftmasse q mit der Geschwindigkeit v nach unten geschleudert, so ist nach dem Impulssatz dazu eine Kraft $q \cdot v$ notwendig. Es ist dabei gleichgültig, ob die abgeschleuderten Massen aus festen Körpern (wie beim Rückdruck eines Gewehres) oder aus Luft bestehen. Die Schwierigkeit besteht beim Tragflügel nun darin, daß wir zunächst weder die abgelenkte Luftmasse noch ihre Abwärtsgeschwindigkeit kennen. Zudem haben die Luftteilchen evtl. noch verschiedene Abwärtsgeschwindigkeiten, sodaß sich eine schwierige Integrationsaufgabe ergibt. So verschafft uns der Impulssatz in dieser Form zunächst nur einen qualitativen Einblick in den Mechanismus der Kräfte.

Mit Hilfe der früher bereits eingeführten Zirkulation ist schon ein genauere Einblick möglich. Danach ist ein Auftrieb nur möglich, wenn um den tragenden Körper eine Zirkulation und gleichzeitig eine parallele Anströmung mit der Geschwindigkeit w vorhanden ist s. (S. 88). Man erhält:

$$A = \rho \cdot w \cdot \Gamma \cdot b$$

Vergleichen wir diese Beziehung mit der Koeffi-

zientengleichung $A = c_a \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2 \cdot t \cdot b$, so erhalten wir $\Gamma = \frac{c_a}{2} \cdot w \cdot t$.



Abb. 201. Strömungsbild beim Magnuseffekt.

Abb. 200 zeigt die reine Zirkulationsströmung um einen Zylinder (b), für den gleichen Zylinder die Parallelströmung (a) sowie die Kombination beider Strömungen (c), die angeblich einen Querdruck, d. h. Auftrieb, erzeugen soll. Schon die Symmetrieverhältnisse des letzten Bildes lassen erkennen, daß eine auf der Parallelströmung senkrecht stehende Kraft auftreten muß. Oberhalb des Zylinders erkennt man nämlich an den eng liegenden

Stromlinien eine größere Geschwindigkeit, was nach Bernoulli einen kleineren Druck bedeutet; unterhalb des Zylinders ist das Gegenteil der Fall. Die Auftriebskraft ist somit offensichtlich. Durch Rotation eines Zylinders in einer Pa-

rallelströmung kann diese Strömung ziemlich genau verwirklicht werden (Magnus-Effekt), indem durch die Rotation eine Zirkulation in der angedeuteten Richtung erzwungen wird. In Abb. 201 ist eine solche Strömung dadurch entstanden, daß ein Zylinder an einem Faden als Pendel in einen Wasserkanal gebracht wurde. Läßt man den aufgedrillten Faden ablaufen, so weicht der Zylinder senkrecht zur Strömung aus und zeigt das bekannte Strömungsbild des Magnus-Effektes.

Der Tragflügel besitzt nun eine Querschnittsform, die den zum Auftrieb notwendigen Zirkulationswirbel von selbst entstehen läßt. Die hintere scharfe Kante wirkt dabei entscheidend mit. In einer Parallelströmung ist beim Tragflügel zunächst eine auftrieblose Strömung nach Abb. 202a vorhanden, bei der eine Umströmung der hinteren Kante stattfindet. Die Zirkulationsströmung zeigt Abb. 202 b. Durch Zusammensetzen beider Bewegungen entsteht bei passend gewählter Zirkulation das untere Bild, Abb. 202 c, wo die Strömung an der hinteren Kante glatt abfließt.

Wie beim Magnus-Effekt erkennen wir auch beim Tragflügel eine Übergeschwindigkeit über dem Tragflügel und eine verminderte Geschwindigkeit unter ihm; daraus ergeben sich nach Bernoulli Unter- und Überdrücke in Richtung des Auftriebes. Die Geschwindigkeitsänderungen zeigen übrigens sofort die Anwesenheit einer Zirkulation. Wenn im Mittel über dem Flügel eine Geschwindigkeit $w + \Delta w$ und unter ihm eine solche von $w - \Delta w$ vorhanden ist, so ist Δw offenbar die Geschwindigkeit der Zirkulation. Vernachlässigen wir für diese Überschlagsrechnung die Tragflügeldicke, so erhalten wir $\Gamma = \Delta w \cdot t - (-\Delta w \cdot t) = 2 \cdot \Delta w \cdot t$.

Durch Vergleich mit den Werten von S. 203 erhalten wir

$$\Gamma = \frac{c_a}{2} \cdot w \cdot t = 2 \Delta w \cdot t; \Delta w = w \frac{c_a}{4}.$$

Da bei normalen Flügeln als größter Wert $c_a \sim 1,2$ erreicht wird, erhalten wir

$$\Delta w = w \cdot \frac{1,2}{4} = 0,3 \cdot w, \text{ d. h. im Mittel}$$

sind Geschwindigkeitsänderungen von 30 vH der Anströmgeschwindigkeit notwendig, um den Höchstauftrieb zu erzeugen. Hierbei ist natürlich die größte Übergeschwindigkeit bedeutend höher, wie auch Abb. 202c zeigt.

Die Entstehung der Zirkulation kann leicht erklärt werden. Die Umströmung der scharfen Hinterkante, die sich bei reibungsloser Strömung einstellt, bewirkt ein Aufrollen der Strömung mit einer Trennfläche. Es bildet sich ein Wirbel, der schnell wegschwimmt. Nun wissen wir von früheren Betrachtungen her, daß die Gesamtzirkulation gleich Null sein muß. Dies ist aber nur möglich, wenn noch ein entgegengesetzt drehender Wirbel vorhanden ist. Ist der sog. Anfahrwirbel wegeschwommen, so bleibt die mit dem Wirbel behaftete Parallelströmung bestehen. An der Hinterkante fließt dann die Strömung glatt ab.

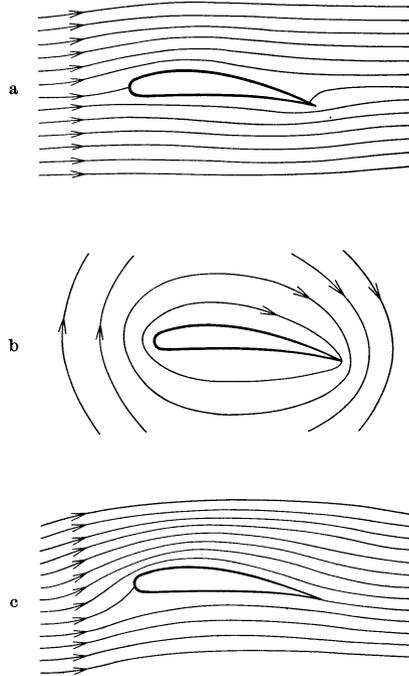


Abb. 202. Tragflächenströmung. Parallelströmung ohne Zirkulation; Zirkulationsströmung; Parallelströmung mit Zirkulation bei glattem Abfluß.

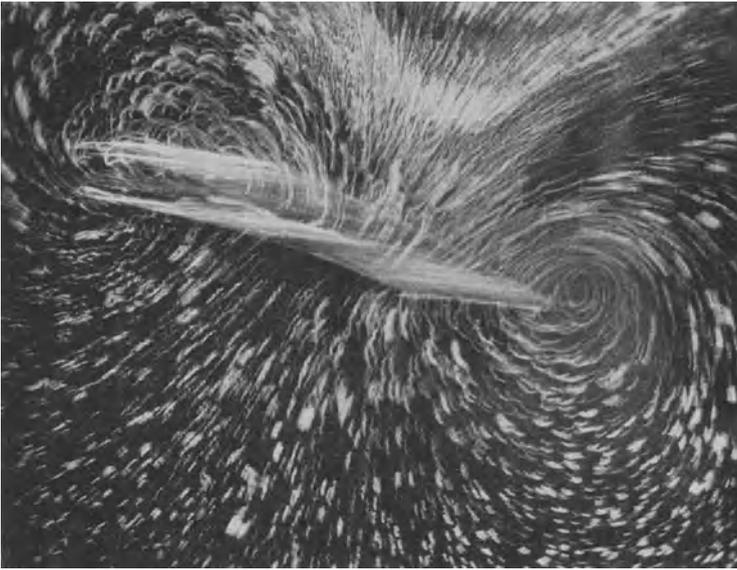


Abb. 203. Strömungsbild kurz nach dem Start. Der Zirkulationswirbel und der Anfahrwirbel sind deutlich zu erkennen.

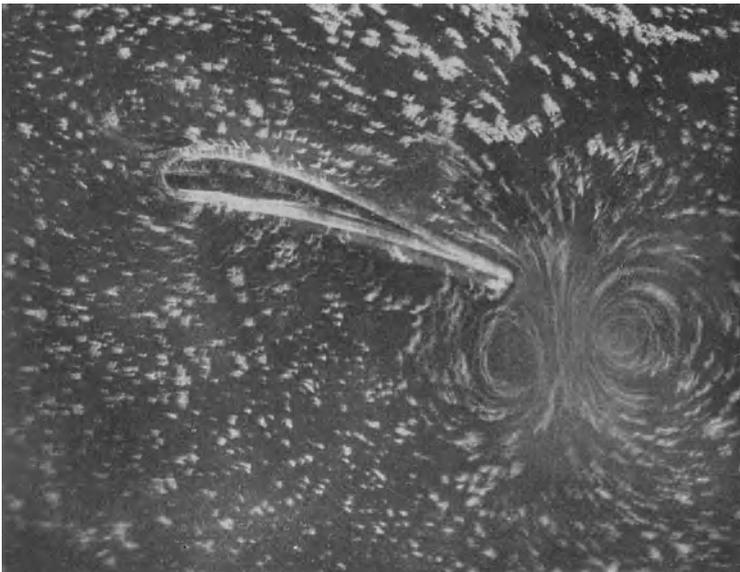


Abb. 204. Kurz nach dem Start wurde der Tragflügel gestoppt. Der Zirkulationswirbel hat sich wieder vom Tragflügel gelöst und schwimmt mit dem Anfahrwirbel zusammen weg.

Die Bestätigung durch den Versuch ist sehr eindrucksvoll. Die Aufnahme der Abb. 203 ist in der Weise entstanden, daß bei stillstehender Kamera der Flügel vom Ruhezustand aus bewegt wurde. Man erkennt die Entstehung des Anfahrwirbels sowie eines zweiten Wirbels um den Tragflügel. Der Weg des Tragflügels während der Belichtungszeit ist deutlich zu erkennen. Hält man nach kurzem Start den Tragflügel plötzlich still, so löst sich auch der Zirkulationswirbel vom Tragflügel und schwimmt mit dem Anfahrwirbel weg (Abb. 204). Schematisch ist der Vorgang in Abb. 205 dargestellt.

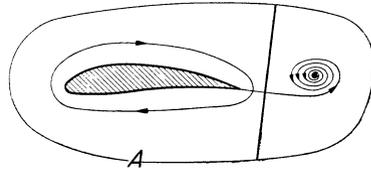


Abb. 205. Schematische Darstellung der beiden Anfahrwinkel.

Interessant ist auch die Verfolgung dieser Vorgänge in der reibungslosen Strömung nach S. 74. Wir erhalten hier auch die beiden Wirbel nach Abb. 206; dieser Zustand bleibt aber hier erhalten, und das Strömungsbild um den Tragflügel (Kamera bewegt sich mit Tragflügel) zeigt tatsächlich ein Umströmen

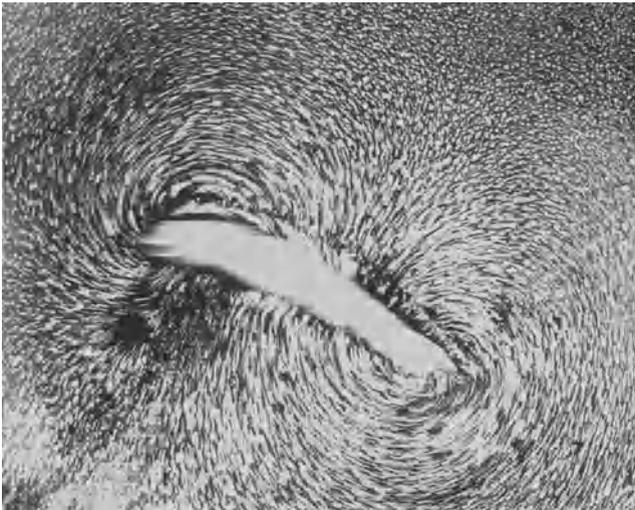


Abb. 206. Absolutstromlinienbild bei der reibungslosen Tragflächenströmung.

der Hinterkante (Abb. 202a, 207), wie es nach Abb. 292a auch zu erwarten ist. Diese reibungslose Strömung ergibt wohl ein Drehmoment, jedoch keine Auftriebskraft.

Aus der Gl. $A = \rho \cdot F \cdot w \cdot b$ folgt, daß wir den Tragflügel auch als einen tragenden Wirbelfaden bezeichnen können, eine Vorstellung, die in vielfacher Hinsicht sehr fruchtbar ist. Da nach S. 32 die von einem Wirbelfaden bedingten Geschwindigkeiten umgekehrt prop. der Entfernung vom Wirbelzentrum abnehmen, erhalten wir eine sehr wichtige Aussage für die Störung der Parallelströmung, die durch die Anwesenheit eines Tragflügels bedingt ist. Wir stellen fest: Die durch den Tragflügel entstehenden Störungen der Parallelströmung klingen mit $1/r$ ab. In weiter Entfernung sieht die Strömung genau



Abb. 207. Reibungsfreie Umströmung eines Tragflügels.

so aus, als wenn der Tragflügel durch einen Einzelwirbel ersetzt wäre. Für später kommende Anwendungen merken wir uns noch eine andere Ausdrucksweise derselben Tatsache: Die Fernwirkung eines Tragflügels ist verhältnismäßig stark, da sie umgekehrt prop. der ersten Potenz der Entfernung abnimmt.

74. Der unendlich lange Flügel.

Der unendlich lange Flügel ist theoretisch in einer reibungsfreien Strömung erfaßbar. Dieser Fall bildet eine wichtige Vergleichsbasis und besitzt wegen der Anwendungen bei Kreiselmaschinen auch praktische Bedeutung. Es ergibt sich:

a) Ebene Platte: $c_{a\infty} = 2\pi \cdot \sin \alpha \sim 2\pi\alpha$;

b) Kreisbogenplatte nach Abb. 208:

$$c_{a\infty} = 2\pi \sin \left(\alpha + \frac{\beta'}{2} \right) \sim 2\pi \left(\alpha + \frac{\beta'}{2} \right) = 2\pi \left(\alpha + \frac{2f}{t} \right) = 2\pi \left(\alpha + \frac{t}{4R} \right)$$

(R Krümmungsradius des Kreisbogens nach Abb. 208);

c) gebogene Platte mit den Winkeln ψ und φ nach Abb. 209.

$$c_{a\infty} = 2\pi \sin \left(\alpha + \frac{3}{8} \cdot \varphi + \frac{1}{8} \cdot \psi \right) \sim 2\pi \left(\alpha + \frac{3}{8}\varphi + \frac{1}{8}\psi \right)$$

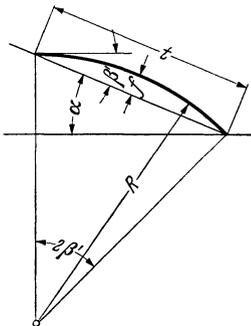


Abb. 208. Bezeichnungen beim Kreisbogenprofil.

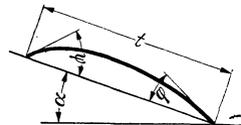


Abb. 209.

(Hier wurde $\sin \alpha \sim \alpha$ gesetzt, da nur kleinere Winkel praktische Bedeutung haben.)

Durch die Reibung wird physikalisch die Zirkulation verkleinert. Man trägt dem Rechnung durch einen Profilverwirkungsgrad η_P nach folgender Gleichung: $c_{a\infty} = 2 \pi \eta_P \left(\alpha + \frac{t}{4R} \right)$ (Kreisbogenplatte). In den Gleichungen wird also 2π durch $2 \pi \cdot \eta_P$ ersetzt.

η_P ändert sich mit der Profildicke. Bei der Kreisbogenplatte ist $\eta_P = 0,93$ und ändert sich dann ungefähr linear mit der Profildicke, um bei 20 vH Dicke den Wert 0,85 zu erreichen. Führen wir noch für $\beta'/2$ bzw. $t/4R$ den Wert α_0 ein, so erhalten wir

$$c_a = 2 \pi \cdot \eta_P \cdot (\alpha + \alpha_0); \quad (140)$$

— α_0 ist dabei der Anstellwinkel, bei dem der Auftrieb gleich Null wird.

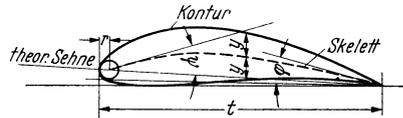


Abb. 210. Geometrische Erfassung eines Profils.

Bei einem beliebigen Profil (Abb. 210) kommt man durch folgende Betrachtung zu einer näherungsweisen Ermittlung der Profileigenschaften. Zunächst bestimmt man das Skelett des Profils, indem man tangierende Kreise einzeichnet und die Mittelpunkte verbindet. Die Endwinkel des Skelettes ψ und φ haben dann die gleiche Bedeutung wie beim Kreisbogenprofil. In beiden Fällen ergeben sich praktisch die gleichen Kurven $c_a = f(\alpha)$. Die c_{w-} und $c_{a\max}$ -Werte werden allerdings merklich durch die Dicke und den Kurvenverlauf beeinflusst.

75. Druckpunkt.

Bei den meisten Profilen wandert der Druckpunkt D nach vorne, wenn der Anstellwinkel zunimmt, und umgekehrt. Ändert D seine Lage nicht, so spricht man von einem druckpunktfesten Profil. In diesem Falle ist $c_{m0} = 0$.

Gerade Platten und symmetrische Profile: $c_m = c_a/4$. (Der Druckpunkt liegt hierbei genau in $1/4$ Tiefe hinter der Vorderkante.)

Kreisbogenprofile: $c_{m0} = \pi \cdot \beta'/4$,

Gewölbte Profile: $c_{m0} = \frac{\pi}{32} [\psi + 7 \varphi]$.

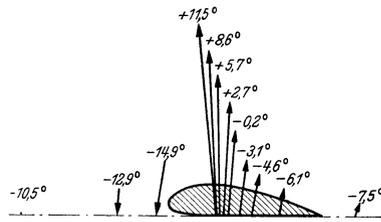


Abb. 211. Lage und Größe der Luftkräfte bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Abb. 211 zeigt die Druckpunkte, sowie Größe und Richtung der Luftkraftresultierenden bei verschiedenen Anstellwinkeln für das Göttinger Profil 382. Man erkennt, wie mit steigendem Anstellwinkel die Luftkraft nach vorne rückt, eine Eigenschaft, die die Profile instabil macht. Bei negativen Anstellwinkeln wandert der Druckpunkt schnell

ins Unendliche, während gleichzeitig die Normalkraft auf Null fällt. So ergibt sich für den Auftrieb Null ein kopplastiges Moment, auf das später noch verwiesen werden soll.

76. Der endlich lange Tragflügel¹.

Bei endlicher Spannweite müssen an den Tragflügelenden Störungen auftreten. Der Unterdruck auf der Oberseite und der Überdruck auf der Unterseite müssen sich irgendwie ausgleichen. Dieser Ausgleich bedingt eine Umströmung der Tragflächenenden. Zusammen mit der Parallelströmung ergibt sich eine spiraling nach hinten gehende Bewegung, die wir notwendigerweise als Wirbelbewegung bezeichnen müssen. Schematisch ist dieser Vorgang in Abb. 212 dargestellt. Die an den Tragflügelenden abgehenden Wirbel bezeichnet man als Randwirbel.

Durch die Umströmung wird der Auftrieb offenbar vermindert, und zwar um so mehr, je tiefer der Flügel im Verhältnis zur Spannweite ist.

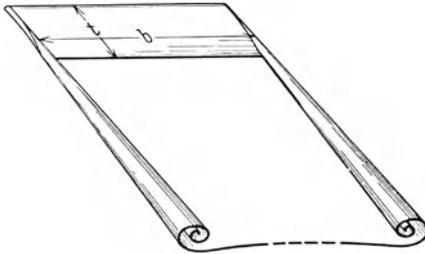


Abb. 212. Schematische Darstellung der Randwirbel.

Aber auch der Widerstand des Flügels muß größer werden; denn die in den abgehenden Wirbeln enthaltene kinetische Energie, die verlorengeht, muß irgendwie durch Widerstandsarbeit bezahlt werden.

Um einen ungefähren Einblick in diese Vorgänge zu erhalten, denken wir uns den ganzen Tragflügel durch einen Wirbelfaden ersetzt. Nun kann nach S. 42 ein Wirbelfaden niemals in einer Flüssigkeit enden. Es ist nicht anders möglich, als daß er an den Enden des Tragflügels nach hinten weiterläuft, um schließlich irgendwo auf dem Erdboden aufzusetzen. Die seitlichen Fortsetzungen dieses Wirbels sind offenbar identisch mit den durch das Umströmen der Tragflügelenden bewirkten Wirbeln.

Durch die nach hinten abgehenden Wirbel (das ganze Wirbelsystem wird mit Hufeisenwirbel bezeichnet) entsteht nun eine Störung des Geschwindigkeitsfeldes, die näherungsweise ermittelt werden soll.

Ein Einzelwirbel erzeugt an der Stelle r_1 eine Umfangsgeschwindigkeit, d. h. hier eine Abwärtsgeschwindigkeit, von der Größe

$$v_{1r} = \frac{\Gamma}{2 r_1 \pi}.$$

¹ Die Berechnung des endlich langen Flügels, die zur Ermittlung des induzierten Widerstandes führt, wurde 1914/15 gleichzeitig und unabhängig von Prandtl in Deutschland und von Lanchester in England erstmalig durchgeführt.

Das zweite Wirbelende bewirkt ebenfalls eine Abwärtsgeschwindigkeit (Abb. 213): $v_{2r} = \frac{\Gamma}{2r_2 \pi}$.

Die tatsächliche Störung an dieser Stelle ist durch die Summe beider Geschwindigkeiten gegeben:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right].$$

Die ausgezogene Kurve Abb. 213 stellt diese Summe dar. Damit kennen wir die durch die beiden abgehenden Wirbel bedingten „induzierten“ Geschwindigkeiten am Flügel, allerdings unter der Voraussetzung, daß die Wirbel beiderseitig ins Unendliche gehen. Da sie einseitig aufhören, ist, wie leicht ersichtlich, nur die Hälfte einzusetzen, sodaß in der Mitte des Flügels eine Abwärtsgeschwindigkeit von folgender Größe vorhanden ist:

$$\frac{v}{2} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\frac{b}{2} \cdot \pi} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\frac{b}{2} \cdot \pi} = \frac{\Gamma}{\pi \cdot b} = \frac{A}{\pi \rho b^2 \cdot w}.$$

Setzen wir diese mit der Geschwindigkeit der Parallelströmung w zusammen, so ergibt sich eine resultierende Anströmgeschwindigkeit, die gegenüber der ursprünglichen Richtung um einen Winkel $\Delta\alpha$ geneigt ist:

$$\Delta\alpha = \frac{v/2}{w}.$$

Damit erfährt aber auch der Auftrieb bei der immer noch vorausgesetzten reibungsfreien Flüssigkeit eine Neigung, da er ja immer senkrecht auf der jeweiligen tatsächlichen Anströmrichtung stehen muß. Der Auftrieb erhält somit eine Komponente in Bewe-

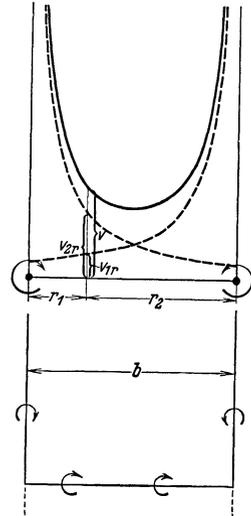


Abb. 213. Geschwindigkeitsfeld der Randwirbel.

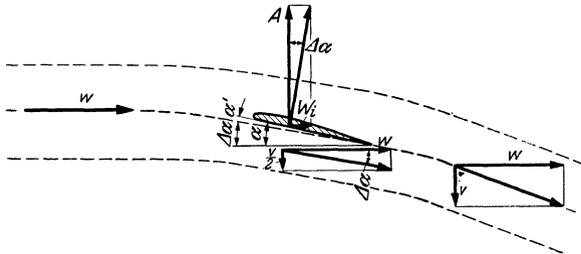


Abb. 214. Entstehung des induzierten Widerstandes.

gungsrichtung, die gemäß Abb. 214 als Widerstand zu buchen ist:

$$W_i = A \frac{v/2}{w} = \frac{w \rho \cdot \Gamma \cdot b}{w} \cdot \frac{\Gamma}{\pi \cdot b} = \frac{\rho \Gamma^2}{\pi};$$

setzen wir noch

$$\Gamma = \frac{A}{w \cdot \varrho \cdot b},$$

so erhalten wir $W_i = \varrho \frac{A^2}{\pi w^2 \cdot \varrho^2 \cdot b^2} = \frac{A^2}{\pi w^2 \cdot \varrho \cdot b^2}.$

Der so gefundene induzierte Widerstand wächst also mit dem Quadrat des Auftriebes, sodaß $A = f(W_i)$ eine Parabel darstellen müßte. In der Tat sind die durch den Versuch ermittelten Kurven, wie schon der Versuch Abb. 199 erkennen ließ, von ähnlicher Gestalt. Der berechnete Widerstand ist offenbar noch zu klein, da wir ja nur die kleinere Abwärtsgeschwindigkeit in Flügelmitte berücksichtigt haben.

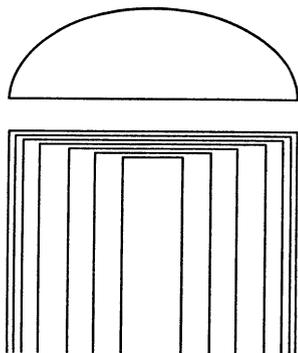


Abb. 215.
Elliptische Auftriebsverteilung mit
stetig abgehenden Wirbeln.

Nach Abb. 213 würde v an den Flügelen theoretisch unendlich groß. (Nach den Ausführungen von S. 43 wissen wir, daß sich in Wirbelmitte ein Kern ausbildet.) Umgangen wird diese Schwierigkeit mathematisch dadurch, daß man stetig über der Flügelbreite verteilte Wirbel nach hinten austreten läßt, wie es in Abb. 215 angedeutet ist. Wie Prandtl¹ zuerst gezeigt hat, läßt sich sogar eine konstante Abwärtsgeschwindigkeit erreichen, wenn die Zirkulation elliptisch verteilt ist. Diese Abwärtsgeschwindigkeit hat den Wert $\frac{2}{\pi} \frac{\Gamma}{b}$, ist also doppelt so

groß wie die vorhin berechnete. Damit wird auch der induzierte Widerstand entsprechend anders:

$$W_i = 2 \frac{A^2}{\pi w^2 \cdot \varrho b^2}. \quad (141)$$

Es läßt sich nun nachweisen, daß bei der elliptischen Zirkulationsverteilung, die mit einer elliptischen Auftriebsverteilung identisch ist, der induzierte Widerstand am kleinsten wird. Deshalb wird man diesen Fall immer dann anstreben, wenn, wie z. B. bei Segelflugzeugen, der induzierte Widerstand eine entscheidende Rolle spielt. Durch elliptische Grundrißform des Flügels oder durch Verwindung läßt sich dieser Fall verhältnismäßig leicht konstruktiv verwirklichen.

Zu einem dimensionslosen Koeffizienten kommen wir leicht durch folgende Rechnung:

$$W_i = 2 \frac{A^2}{\pi w^2 \cdot \varrho \cdot b^2} = \frac{2 c_a^2 \cdot F^2 \cdot \frac{1}{4} w^4 \cdot \varrho^2}{\pi \cdot w^2 \cdot \varrho \cdot b^2} = c_{wi} \cdot \frac{\varrho}{2} w^2 \cdot F; \quad (142)$$

¹ Prandtl, L.: Tragflügeltheorie. 1. u. 2. Mitt. Nachr. v. d. kgl. Ges. d. Wiss. 1918, S. 451; 1919, S. 107.

hieraus:

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \frac{F}{b^2} \quad (143)$$

Die Funktion $c_{wi} = f(c_a)$ ist somit auch eine Parabel. Bei rechteckigem Flügel ergibt sich $F = b \cdot t$, d. h.

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \frac{t}{b} \quad (144)$$

Der induzierte Widerstand ist somit direkt prop. t/b , dem sog. Seitenverhältnis. Den reziproken Wert $b/t = \Lambda$ nennt man die Flügelstreckung. Aus der Formel ist ersichtlich, daß der induzierte Widerstand sehr stark durch das Seitenverhältnis beeinflußt werden kann.

Wenn wir bei den weiteren Darstellungen statt der Kräfte immer die betreffenden Koeffizienten wählen, so tritt damit keine Änderung der Kurven ein, da ja jede Größe durch $q \cdot F$, d. h. durch einen konstanten Wert, dividiert wird. Abb. 216 zeigt eine Versuchspolare für das Seitenverhältnis 1:5. Zum Vergleich ist daneben die theoretische Parabel $c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi} \frac{1}{5}$ eingetragen. Die wirkliche Kurve unterscheidet sich von dieser praktisch nur durch eine Parallelverschiebung. Der ungefähr konstante Widerstand, der noch hinzukommt, ist der Oberflächenwiderstand. Bezeichnen wir diesen, auch Profilwiderstand¹ genannt, mit c_{wo} , so ist der Gesamtwiderstand

$$c_w = c_{wo} + \frac{c_a^2 \cdot F}{\pi b^2} \quad (145)$$

Vergleichen wir zwei geometrisch ähnliche Profile, die verschiedene Seitenverhältnisse haben, so läßt sich der Widerstand des einen Flügels

¹ Ein Vergleich mit dem reinen Flächenwiderstand nach S. 134 ist leicht durchführbar. Die Koeffizienten c_f , die sich auf die Oberfläche beziehen, müssen verdoppelt werden, da die Tragflächenbeiwerte sich auf die Tragfläche, d. h. auf die halbe Oberfläche, beziehen. c_f ist der Größenordnung nach 0,005, sodaß für c_{wo} der Wert $2 \cdot 0,005 \sim 0,01$ zu erwarten wäre, was mit den Angaben nach Abb. 216 übereinstimmt, wenn man sich auf Punkte mit kleinerem Auftrieb beschränkt.

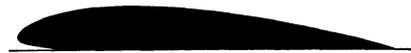
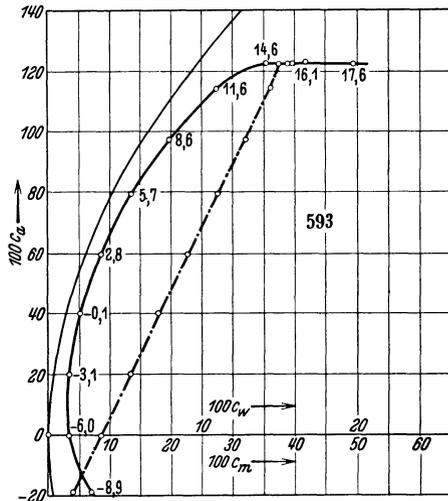


Abb. 216. Polare eines Tragflügels nach Göttinger Messungen.

berechnen, wenn er für den anderen bekannt ist, gemäß folgender Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} c_{w1} &= c_{w0} + \frac{c_a^2 \cdot F_1}{\pi b_1^3} \\ c_{w2} &= c_{w0} + \frac{c_a^2 \cdot F_2}{\pi b_2^3} \end{aligned} \right\} c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi} \left[\frac{F_2}{b_2^2} - \frac{F_1}{b_1^2} \right]. \quad (146)$$

Da der induzierte Widerstand durch eine Änderung des Anstellwinkels entsteht, muß dieser ebenfalls korrigiert werden. Die Korrektur beträgt:

$$\Delta\alpha = \frac{v/2}{w_i} = \frac{W_i}{A} = \frac{c_{wi}}{c_a} = \frac{c_a \cdot F}{\pi b^2}. \quad (147)$$

Hiermit erhalten wir als tatsächlichen Anstellwinkel:

$$\alpha_1 = \alpha_\infty + \frac{c_a}{\pi} \frac{F_1}{b_1^2}; \quad \alpha_2 = \alpha_\infty + \frac{c_a}{\pi} \frac{F_2}{b_2^2},$$

wo α_∞ der Anstellwinkel des unendlich langen Flügels ist. Beim Übergang zu einem anderen Seitenverhältnis ergibt sich folgende Winkeländerung:

$$\Delta\alpha' = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{c_a}{\pi} \left[\frac{F_2}{b_2^2} - \frac{F_1}{b_1^2} \right]. \quad (148)$$

Für unendliches Seitenverhältnis ergab sich für $c_a = f(\alpha)$ eine Gerade, gemäß der Gl. (140) $c_a = 2\pi\eta_P(\alpha + \alpha_0)$. Die Umrechnung auf endliches Seitenverhältnis ergibt nach einer einfachen Rechnung

$$c_a = \frac{2\pi\eta_P(\alpha + \alpha_0)}{1 + 2\eta_P \cdot \frac{t}{b}}. \quad (149)$$

Hieraus erhält man die Neigung $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ der c_a : α -Linie, die für Stabilitätsrechnungen von Bedeutung ist, zu

$$\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = \frac{2\pi\eta_P}{1 + 2\eta_P \cdot \frac{t}{b}}. \quad (150)$$

Gehen wir bei gleichem Anstellwinkel zu einem anderen Seitenverhältnis über, so ergeben sich folgende Änderungen der Auftriebsbeiwerte:

$$c_{a2} - c_{a1} = 2\pi\eta_P \cdot (\alpha + \alpha_0) \cdot \left[\frac{1}{1 + 2\eta_P \cdot \frac{t_2}{b_2}} - \frac{1}{1 + 2\eta_P \cdot \frac{t_1}{b_1}} \right]. \quad (151)$$

Die Widerstandsbeiwerte ändern sich dabei um

$$c_{w2} - c_{w1} = 4\pi\eta_P^2 (\alpha + \alpha_0)^2 \left[\frac{\frac{t_2}{b_2}}{\left(1 + 2\eta_P \cdot \frac{t_2}{b_2}\right)^2} - \frac{\frac{t_1}{b_1}}{\left(1 + 2\eta_P \cdot \frac{t_1}{b_1}\right)^2} \right]. \quad (152)$$

Kombiniert man noch Gl. (149) mit Gl. (144), so entsteht die Gleichung

$$c_{wi} = c_a (\alpha + \alpha_0) - \frac{c_a^2}{2\pi \cdot \eta_P}. \quad (153)$$

Aus dieser Beziehung ersieht man, wie sich c_{wi} und c_a ändern, wenn der Anstellwinkel konstant bleibt. Das Seitenverhältnis wird dabei geändert. Dieser Zusammenhang, auf den Verfasser¹ kürzlich hingewiesen hat,

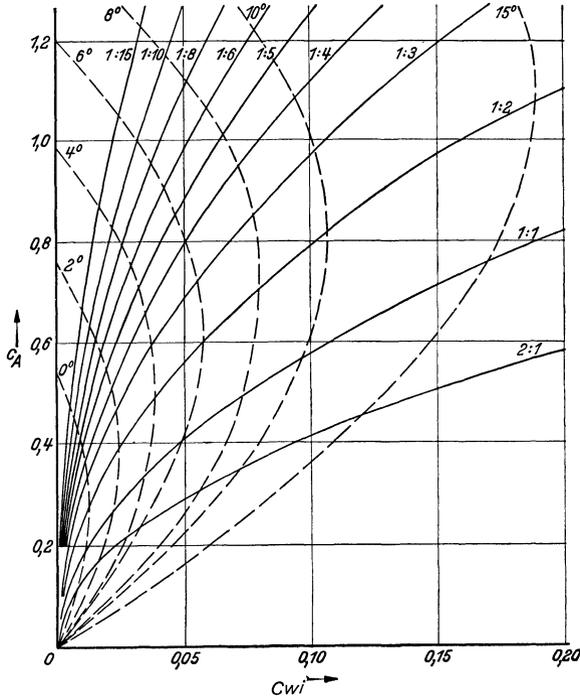


Abb. 217. Darstellung der zwei Parabelscharen im Polardiagramm. a) konstantes Seitenverhältnis (ausgezogen). b) konstanter Anstellwinkel (gestrichelt).

ergibt Parabeln; damit erhält man im Polardiagramm zwei Scharen von Parabeln, die durch t/b -konst. und $\alpha = \text{konst.}$ gekennzeichnet sind (Abb. 217).

77. Bestätigung der Tragflügeltheorie durch den Versuch.

Die vorhin zusammengestellten Formeln werden durch die Versuchsergebnisse voll bestätigt. Abb. 218 zeigt $c_a = f(\alpha)$ für mehrere Tragflügel, die gleiches Profil, aber verschiedene Seitenverhältnisse haben. Die Umrechnung aller Flügel auf das Seitenverhältnis 1:5, die in Abb. 219 durchgeführt ist, läßt erkennen, daß alle Punkte in eine Gerade fallen.

¹ Eck: Beitrag zur Tragflügeltheorie. Ingenieurarchiv 1936, S. 203.

Mit den Polaren ist in Abb. 220 u. 221 die gleiche Umrechnung durchgeführt worden. Auch hier ergibt sich mustergültig eine einzige Polare (Abb. 220). Das Zusammenfallen aller Versuchspunkte in eine Kurve ist eine der schönsten Bestätigungen der Tragflügeltheorie. Aus Abb. 218 erkennt man, daß bei den Versuchen fast gleiche Anstellwinkel eingestellt wurden. Damit besitzen wir die Möglichkeit,

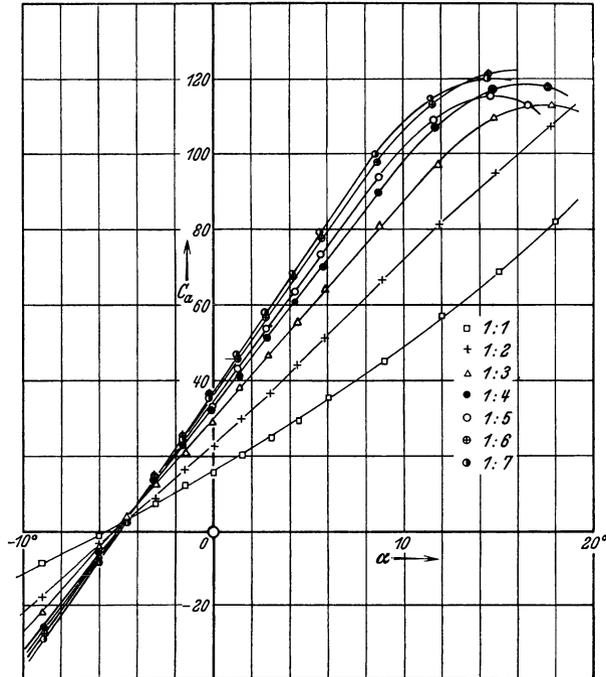


Abb. 218. $c_a = f(\alpha)$ für verschiedene Seitenverhältnisse bei gleichem Profil.
(Göttinger Messungen nach Wieselsberger.)

auch die Beziehung gemäß Gl. (153) nachzuprüfen. In Abb. 221 sind die Parabeln $t/b = \text{konst.}$ eingetragen. Auch hier fallen die Versuchspunkte leidlich in Parabeln; kleinere Abweichungen sind bei dieser Eintragung zu erwarten, da der Profilwiderstand nicht genau konstant ist.

Beispiele: 1. Wie groß ist der Gesamtwiderstand eines Flügels von den Ausmaßen $t \cdot b = 2 \cdot 13 = 26 \text{ m}^2$, der bei einer Geschwindigkeit von 216 km/h einen Gesamtauftrieb von 2930 kg erzeugen soll?

$$w = 216/3,6 = 60 \text{ m/s}; \text{ Staudruck } q = \frac{\rho}{2} w^2 = \frac{3600}{16} = 225 \text{ kg/m}^2;$$

$$c_a = \frac{A}{q \cdot F} = \frac{2930}{225 \cdot 26} = 0,5.$$

Aus Abb. 229 findet man bei $c_a = 0,5$ den Wert $c_{w0} = 0,015$.

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \frac{t}{b} = \frac{0,5^2 \cdot 2}{\pi \cdot 13} = 0,01223; c_w = c_{w0} + c_{wi} = 0,015 + 0,01223 = 0,02723;$$

$$W = c_w \cdot F \cdot q = 0,0273 \cdot 26 \cdot 225 = 159,4 \text{ kg.}$$

Beispiel 2. Ein Flügel von 30 m^2 Gesamtfläche und einem Seitenverhältnis $1 : 5$ fliegt bei $c_a = 0,3$ mit einer Geschwindigkeit von 320 km/h . Profil Nr. 447. Um wieviel kg würde sich der Widerstand verringern, wenn das Seitenverhältnis bei gleicher Gesamtfläche auf $1 : 6$ verbessert würde?

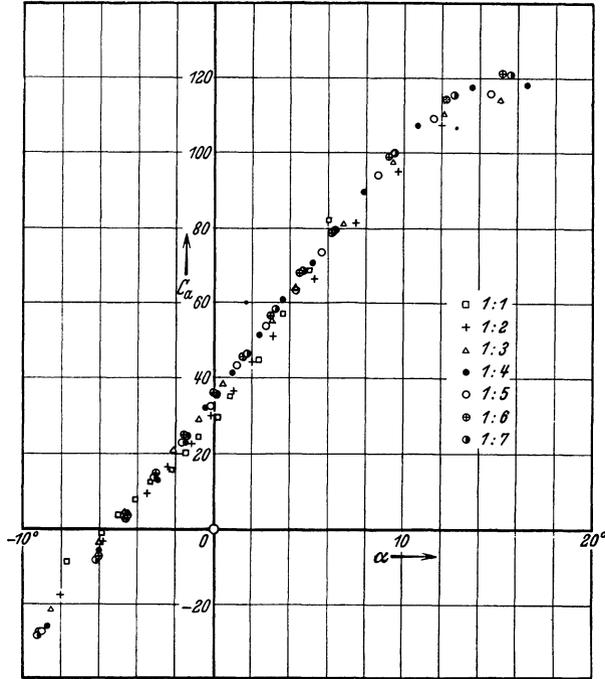


Abb. 219. Umrechnung der Versuchswerte nach Abb. 194 auf das Seitenverhältnis $1 : 5$ nach Wieselsberger.

Eine Widerstandsverringern tritt nur beim induzierten Widerstand ein:

$$\Delta c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi} \left[\frac{t_2}{b_2} - \frac{t_1}{b_1} \right] = \frac{0,3^2}{\pi} [1/5 - 1/6] = 0,000956; w = \frac{320}{3,6} = 89 \text{ m/s.}$$

$$\text{Widerstandsverringern } \Delta W = \Delta c_{wi} \cdot \frac{\rho}{2} w^2 F = \frac{0,000956 \cdot 89^2 \cdot 30}{16} = 14,2 \text{ kg.}$$

$$\text{Ersparte Antriebsleistung } N = \Delta W \cdot \frac{w}{75} = \frac{14,2 \cdot 89}{75} = 16,85 \text{ PS.}$$

78. Einfluß der Umrißform des Flügels.

Die vorhin angegebenen Regeln haben streng genommen nur Gültigkeit, wenn bei gegebenem Gesamtauftrieb der induzierte Widerstand am kleinsten ist. Dies ist dann der Fall, wenn der Auftrieb elliptisch über die Flügelbreite verteilt ist.

Erreicht wird dies z. B. dadurch, daß man dem Flügel eine elliptische Grundrißform gibt, wenn gleichzeitig die Flügelschnitte geometrisch ähnlich sind und ihre Sehnen alle in einer Ebene liegen. Bei anderen Grundrißformen kann die elliptische Auftriebsverteilung auch durch verschiedene Anstellwinkel der einzelnen Flügelquerschnitte verwirklicht werden (Verwindung), doch wird in diesem Falle nur bei einem Anstellwinkel des Gesamtflügels die Bedingung erfüllt.

Aus Herstellungsgründen interessiert am meisten die rechteckige, dreieckige und trapezförmige Grundrißform. Das Dreieck und das Rechteck sind am ungün-

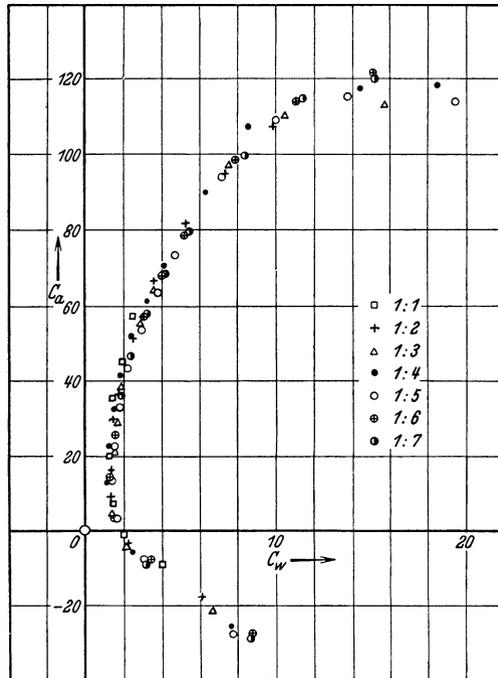


Abb. 220. Umrechnung der Polaren mit verschiedenen Seitenverhältnissen auf das Seitenverhältnis 1 : 5 nach Wieselsberger.

stigsten. Für die meist verwendete Trapezform liegen genauere Untersuchungen vor¹.

Die kleinsten Werte für den induzierten Widerstand werden erreicht für $t_a/t_i = 0,3$ bis $0,4$ (t_a = Tiefe des Flügels am äußeren Ende; t_i = Tiefe des Flügels am Rumpf). Berücksichtigt man die durch die Grundrißform bedingte Vergrößerung des induzierten Widerstandes durch $c_{wi} = \varphi \cdot c_{wi\text{ellipt}}$ ($c_{wi\text{ellipt}}$ Widerstandsbeiwert bei elliptischer Auftriebsverteilung), so liegt φ bei den günstigsten Trapezformen zwischen 1,01 und 1,035 (die erste Zahl bezieht sich auf das Seitenverhältnis 1 : 5, die letztere auf das Seitenverhältnis 1 : 20). Die Verschlechterung beträgt somit nur $1 \div 3,5$ vH.

Da die Flügel meist mit rechteckiger Grundrißform im Windkanal untersucht werden, somit keine elliptische Auftriebsverteilung vorhanden ist, so ergeben sich

¹ Hueber: Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1933 S. 271.

bei Verwendung der Formeln nach S. 215 kleine Fehler. Bei der am meisten interessierenden Umrechnung des Seitenverhältnisses 1:5 auf 1:∞ lauten nach Weinig¹ die genauen Formeln:

$$c_{w\infty} = c_w(1:5) - 1,04 c_a^2 \cdot \frac{t}{\pi \cdot b}; \quad \alpha_\infty = \alpha(1:5) - 0,855 c_a \cdot \frac{t}{\pi \cdot b}$$

$$\alpha_\infty^\circ = \alpha^\circ(1:5) - c_a \cdot 3,1 \left(\text{für } \frac{t}{b} = 1:5 \right).$$

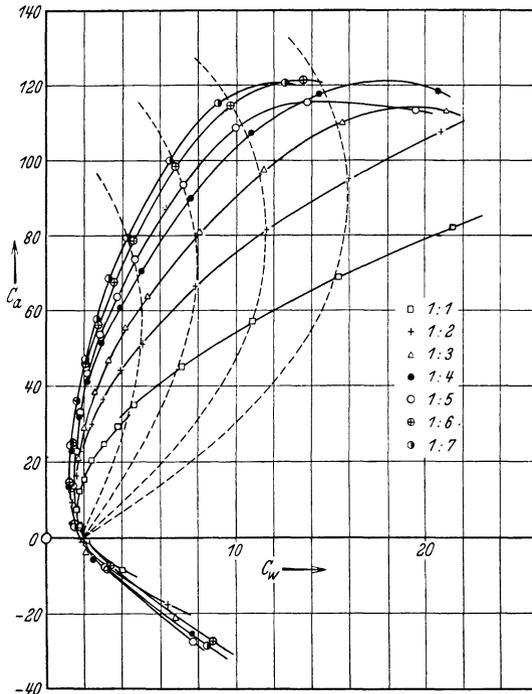


Abb. 221. Polaren für gleiche Profile bei verschiedenen Seitenverhältnissen. Parabeln $\alpha = \text{konst.}$

79. Polare des ganzen Flugzeuges.

Die Polare des Tragflügels ist nicht identisch mit der Polaren des ganzen Flugzeuges. Zu dem Widerstand des Flügels treten noch die Einzelwiderstände der übrigen Teile (z. B. Rumpf, Motor, Leitwerk usw.). Je nach ihrer Lage zur Flugrichtung ergeben diese Teile durchweg folgende Widerstandsbeiwerte:

Streben und Drähte	0,1 bis 0,2
Profildrähte	0,3 „ 0,4
Sporn mit Gleitschuh	0,3 „ 0,35
Stirnkühler	0,5 „ 0,68
Sternmotor	0,15 „ 0,7
Rumpf	0,12 „ 0,2.

¹ Weinig: Z. VDI 1936 S. 299.

Da bei der Polaren alle Widerstandsbeiwerte auf die tragende Flügel-
fläche F bezogen werden, sind die ursprünglichen Widerstandsbeiwerte c
nach der Formel $c_w = c \cdot f/F$ umzurechnen. Hinzu kommt noch eine
evtl. gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Teile, die z. B. bei Rumpf
und Flügel sehr groß sein kann.

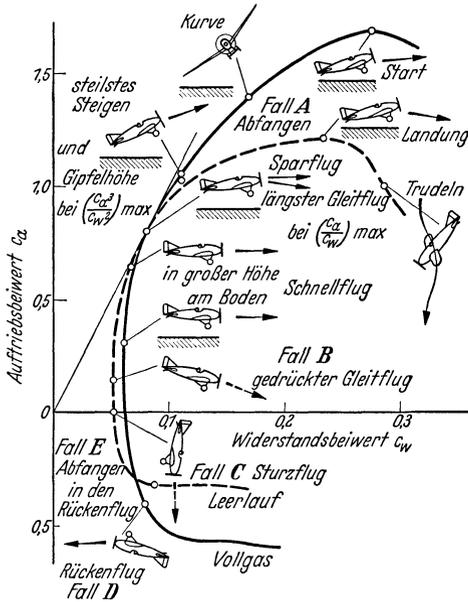


Abb. 222. Vollgas- und Leerlauf-Polare eines Flugzeugs mit
eingezeichneten Flugzeuglagen und Beanspruchungsfällen
nach Junkers A.G.

Bei einem modernen
Schnellverkehrsflugzeug
ergeben sich etwa folgende
Anteile des Widerstandes
für die verschiedenen Teile:

Tragflügel	55 vH.
Rumpf und Motor . . .	18 „
Leitwerk	15 „
Kühler	7 „
Armaturen, Antenne usw.	5 „

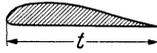
Eine weitere Änderung er-
gibt sich beim Flugzeug
durch die Wirkung der
Luftschraube. Die im Luft-
strahl liegenden Teile des
Tragflügels stehen unter
höherer Geschwindigkeit
und ergeben deshalb einen
größeren Auftrieb und grö-
ßeren Widerstand. Diese
Einflüsse sind z. T. recht

beträchtlich (auch für die Stabilität sind diese Einflüsse von sehr großer
Bedeutung). Dies zeigt sehr deutlich Abb. 222, die die Polare bei Vollgas
und bei Leerlauf zeigt. $c_{a\ max}$ steigt bei Vollgas danach nicht unwesent-
lich, eine Eigenschaft, die dem Start sehr zugute kommt. Im Diagramm
sind alle die Punkte anschaulich hervorgehoben, die in verschiedenen
Fluglagen Verwendung finden.

80. Mittel zur Auftriebserhöhung eines Tragflügels.

Um bei den heutigen hohen Fluggeschwindigkeiten gefahrlose Lande-
geschwindigkeiten zu erreichen (d. h. < 100 km/h), ist beim Start und
bei der Landung eine wesentliche Auftriebserhöhung nötig. Um z. B.
mit einem Flugzeug von 400 km/h Geschwindigkeit eine Landegeschwin-
digkeit von 100 km/h zu erreichen, sind c_a -Werte von etwa 3,5 nötig. Da
die normalen Profile jedoch nur Werte von 1,3 bis 1,4 ergeben, sind beson-
dere Hilfsmittel zur Auftriebserhöhung notwendig. Bewährt haben sich
Schlitzflügel, Landeklappen und nach hinten herauschiebbare

Hilfsflügel. Abb. 223 zeigt eine Zusammenstellung der heute verwendeten Hilfsmittel mit den zugehörigen Zahlenangaben. Die physikalische Wirkung dieser Hilfsmittel wird auf S. (231) näher besprochen werden.

Bezeichnung	Anordnung	α°	β°	c_{\max}
Grundprofil		15	—	1,4
Einfache Landeklappen		12	45	1,95
Spreizklappen		14	60	2,2
Lachmann-Handley-Page Schlitzflügel		28	—	1,65
Spaltklappen nach Handley-Page		12	45	2,0
Schlitzflügel mit Spaltklappen		19	45	2,3
Junkers-Doppelflügel		13	40	2,5
Fowler-Flügel		29	40	3,35

α° Anstellwinkel des Ausgangsprofils, β° Ausschlag der Klappen.

Abb. 223. Verschiedene Mittel zur Auftriebserhöhung. (Zusammenstellung nach Pröll, Dubbel, Bd. II.)

81. Druckverteilung am Tragflügel.

Die Saugwirkung ist beim Tragflügel bedeutend größer als die Druckwirkung. Während letztere maximal den Staudruck $q = \frac{\rho}{2} w^2$ erreichen kann, ist der Unterdruck kurz vor dem Anstellwinkel des Abreißens bei-

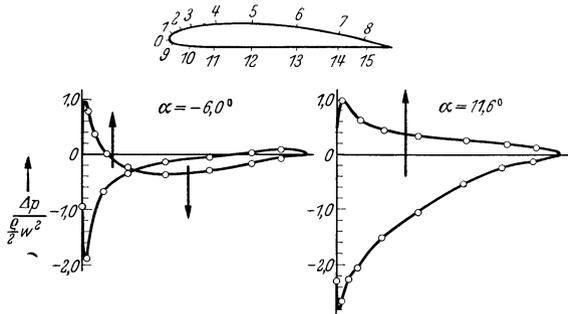


Abb. 224. Druckverteilung für zwei verschiedene Anstellwinkel nach Göttinger Messungen.

nahe gleich dem dreifachen Staudruck. Dies bedeutet, daß an der Stelle des größten Unterdruckes die Luftgeschwindigkeit doppelt so groß ist wie die Fluggeschwindigkeit (wichtig für saubere und glatte Gestaltung dieses Tragflächenteiles). Abb. 224 zeigt die Druckverteilung

für Profil 389 bei $11,6^\circ$ und -6° Anstellwinkel (im letzteren Falle ist der Auftrieb gleich Null; Sturzflug). Aus der Druckverteilung erkennt man für diesen Fall ein großes Kräftepaar (in Abb. 224 angedeutet), das den Flügel sehr stark auf Torsion beansprucht. Die Druckverteilung ist in üblicher Weise über der Flügelsehne aufgetragen. Für $11,6^\circ$ ist in Abb. 225 die gleiche Druckverteilung normal zur Oberfläche dargestellt.

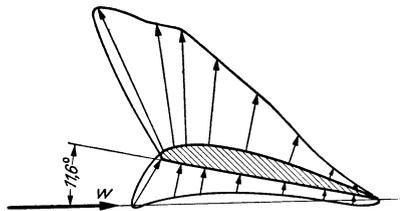


Abb. 225. Druckverteilung um einen Flügel. (Drücke sind normal zur Oberfläche aufgetragen.)

man für diesen Fall ein großes Kräftepaar (in Abb. 224 angedeutet), das den Flügel sehr stark auf Torsion beansprucht. Die Druckverteilung ist in üblicher Weise über der Flügelsehne aufgetragen. Für $11,6^\circ$ ist in Abb. 225 die gleiche Druckverteilung normal zur Oberfläche dargestellt.

82. Versuchswerte.

Eine kurze Übersicht soll zeigen, wie die Tragflügeleigenschaften von der Profilform abhängen. In die Mannigfaltigkeit der Formen läßt sich durch Einführung markanter geometrischer Eigenschaften eine gewisse Ordnung bringen. Zeichnen wir zunächst nach S. 211), Abb. 210 in ein

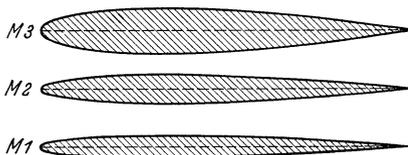
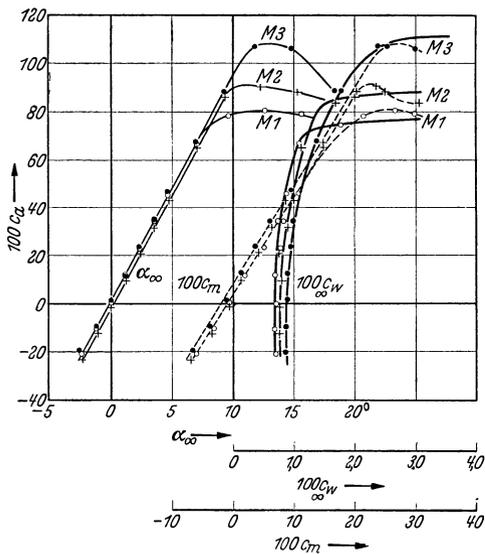


Abb. 226. Symmetrische Profile verschiedener Dicke und gleicher Wölbung. Seitenverhältnis $1 : \infty$.

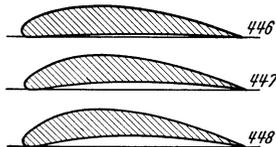
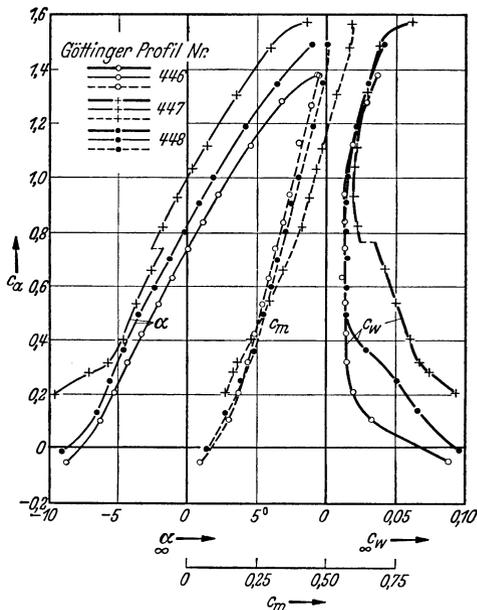


Abb. 227. Profile gleicher Dicke mit verschiedener Wölbung. ($1 : \infty$).

Profil tangierende Kreise, so erhält man eine sog. Skelettklinie, die die Krümmung des Profils veranschaulicht. Durch die Endwinkel φ und ψ ist diese Kurve in erster Linie festgelegt. Das Verhältnis d/t ist ein Maß für die Profildicke, die meist in \sqrt{H} der Flügeltiefe angegeben wird. Krümmung und Profildicke sind die hervorstechendsten geometrischen Profileigenschaften, und in der Tat läßt sich angeben, wie durch Variation dieser Größen

die Profileigenschaften wesentlich geändert werden. Dazu betrachten wir einmal Profile, bei denen bei gleicher Krümmung die Dicke verändert ist, dann solche, die bei gleicher Dicke verschiedene Wölbung haben (Abbildungen 226 u. 227). Des weiteren wollen wir Profile betrachten, die nach Abb. 228 u. 229 hinten leicht aufgeschwungen sind¹. Diese Maßnahme ist von besonderer Bedeutung, weil dadurch druckpunktteste Profile entstehen.

Zu der gewählten Darstellung sei noch folgendes bemerkt. Es sind durchweg die Versuchswerte für unendliches Seitenverhältnis aufgetragen. Diese Darstellung enthält nicht den induzierten Widerstand, der nach S. 215 jederzeit leicht berechnet werden kann. In den Kurven ist also nur der Profilwiderstand enthalten, sodaß die wahren Profileigenschaften in Reinkultur hervortreten. Diese neuerdings bevorzugte Darstellungsweise, die m. W. zuerst von Junkers angewandt wurde, gestattet ein unmittelbares Ablesen aller bei praktischen Anwendungen notwendigen Größen. Die Abb. 230 zeigt uns noch die

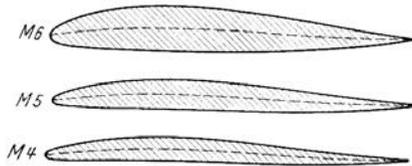
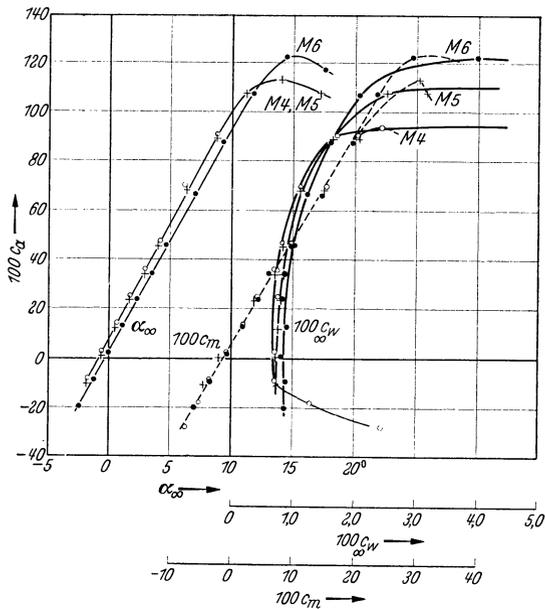


Abb. 228. Druckfeste Profile verschiedener Dicke. (1:∞). (Hinten aufgeschwungen.)

Die Abb. 226, 227, 228 stammen aus: Lippisch: Flügelprofile, ihre Eigenschaften und ihre Auswahl. Flugsport 1930.

¹ Die Abb. 226, 227, 228 stammen aus: Lippisch: Flügelprofile, ihre Eigenschaften und ihre Auswahl. Flugsport 1930.

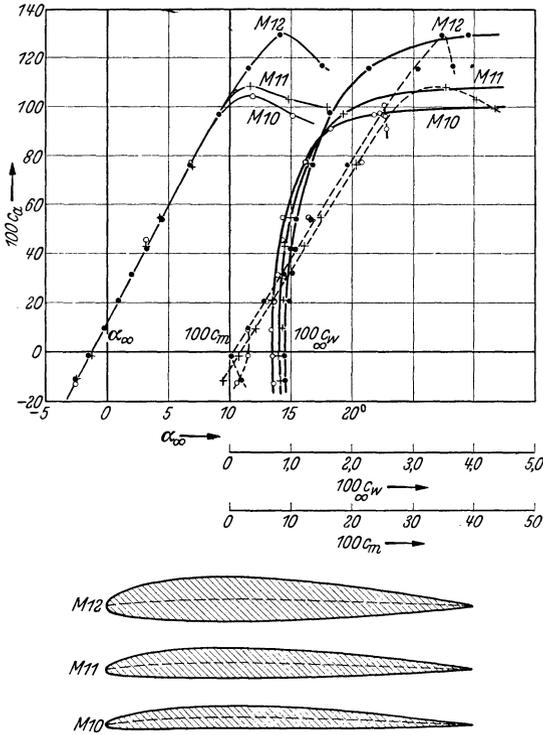


Abb. 229. Profile gleicher Dicke und Wölbung wie in Abb. 111, jedoch weniger aufgeschwungen. (1:∞).

Polaren für Kreisbogenprofile für ein Seitenverhältnis 1:5, eine Darstellungsweise, die bisher meist gewählt wurde. Bei $f=0,05t$ ergibt sich hier der beste Gleitwinkel.

Folgende auffällige Eigenschaften können aus den Versuchsergebnissen direkt abgelesen werden:

1. Bei gleicher Wölbung, d. h. bei gleichem Skelett, steigt das Auftriebsmaximum mit größerer Dicke. Der Profilwiderstand wird mit kleinerer Dicke kleiner.

2. Bei gleicher Dicke steigt das Auftriebsmaximum mit steigender Wölbung. Im gleichen Sinne steigt der Profilwiderstand.

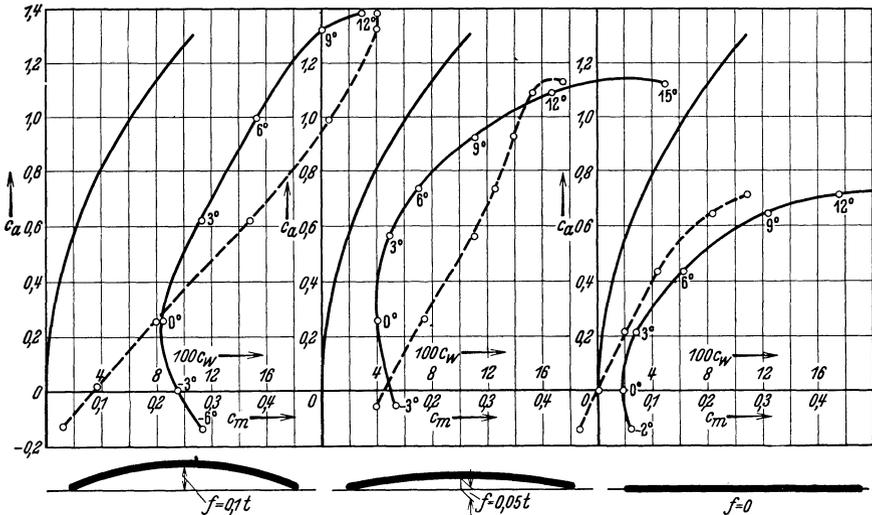


Abb. 230. Kreisbogenprofile und ebene Platte (1:5) nach Göttinger Messungen.

3. Ein Profil kann durch eine S-förmige Aufbiegung des Skeletts druckpunktfest gemacht werden. Mit wachsender Dicke muß der S-Schwung kleiner gemacht werden.

4. Wird ein Profil durch S-Schwung druckpunktfest gemacht, so sinkt das Auftriebsmaximum, während gleichzeitig der Profilwiderstand steigt.

83. Abreißen der Strömung, Kennzahl, Turbulenzeinflüsse.

Wie bereits mehrfach erwähnt, reißt die Tragflügelströmung bei Überschreitung gewisser Anstellwinkel an der Saugseite ab. Abb. 231 zeigt eine solche abgerissene Strömung, die deutlich erkennen läßt, daß

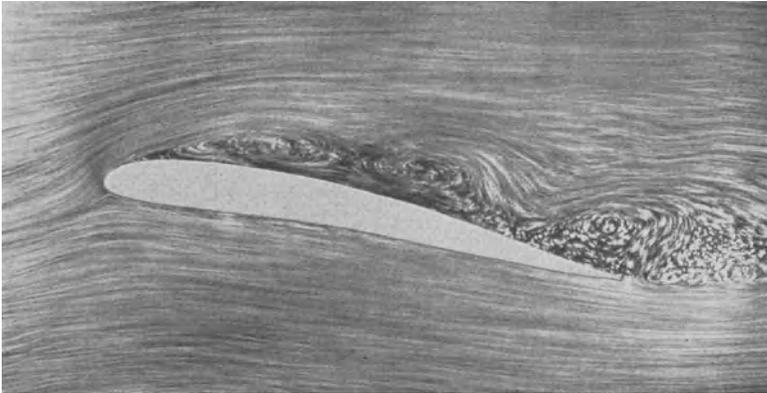


Abb. 231. Abgerissene Tragflächenströmung.

die ganze Saugseite dadurch in ein Totwassergebiet verwandelt ist. Abb. 232 zeigt die gesunde Tragflächenströmung.

Beim Abreißen der Tragflächenströmung ändern sich die Tragflügel-eigenschaften erheblich. Aus den bisher angeführten Versuchsergebnissen ist dies deutlich ersichtlich. Insbesondere gelten die abgeleiteten Formeln, z. B. die des induzierten Widerstandes, nur für die nicht abgerissene Strömung.

Die Ablösung der Strömung von der Saugseite ist nun ein Vorgang, der nach unseren bisherigen Ausführungen über diesen Gegenstand sehr empfindlich von verschiedenen Umständen abhängt. Insbesondere spielen, wie es z. B. deutlich bei der Kugel zu beobachten war, die Reynolds'sche Zahl sowie die Strahl-turbulenz eine große Rolle. Beide beeinflussen die Grenzschicht und bestimmen den evtl. Umschlag von laminarer zu turbulenter Grenzschicht. Der Charakter der Grenzschicht bestimmt die Größe des Profilwiderstandes, während die Ablösung dem praktisch so wichtigen Auftriebsmaximum bestimmte Grenzen setzt. Wenn z. B. die

Grenzschicht in die turbulente Form umschlägt — dieser Umschlag findet bei modernen Flugzeugen zwischen 0,1 und 0,3 t statt — ändern sich sowohl der Profilwiderstand als auch das Auftriebmaximum erheblich. Diese Änderungen, die beim Übertragen der Windkanalversuche auf die mit viel größerer Reynoldsscher Zahl fliegenden Flugzeuge beobachtet wurden, bilden seit den letzten Jahren ein Hauptthema der aerodynamischen Forschung.

Laminarprofile. Aus den Betrachtungen über die Plattenreibung (S. 131) und den Umschlag (S. 144) wissen wir schon, daß bei laminarer Grenzschicht die Oberflächenreibung am kleinsten wird. Bei Ausfüh-

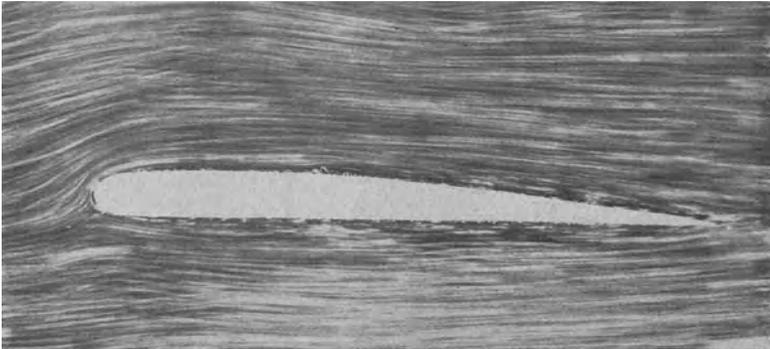


Abb. 232. Anliegende (gesunde) Tragflächenströmung.

runge, bei denen nun der reine Flächenwiderstand sehr wichtig ist, z. B. bei modernen Schnellflugzeugen, spielen diese Dinge eine sehr große Rolle. Wenn es z. B. gelänge, die Grenzschicht zu stabilisieren, d. h. laminar zu erhalten, würde eine ziemliche Vergrößerung der Fluggeschwindigkeit möglich sein. Zur Zeit wird emsig an diesen Dingen gearbeitet. Nach einem Vorschlag von Kramer¹ läßt sich z. B. Stabilisierung erreichen, indem man kurz über der Fläche in Strömungsrichtung Drähte spannt. Diese Drähte, deren Umströmung im Falle turbulenter Vermischung in jedem Falle laminar ist, wirken dämpfend auf die Entstehung der Turbulenz. Nach Ackeret² kann auch durch Absaugen der Grenzschicht eine gewisse Stabilisierung erreicht werden.

Praktisch wichtiger sind indes die Versuche, durch eine geeignete Formgebung des Profils den Umschlagpunkt möglichst weit nach hinten zu verschieben. Dadurch gelingt es wenigstens, einen großen Teil der Oberfläche durch laminare Grenzschicht einzudecken. Möglichst dünne

¹ DRP. 669 897.

² Ras, M. und J. Ackeret: Über die Verhinderung der Grenzschicht-Turbulenz durch Absaugung. *Helv. phys. Acta* 14 (1941) 323.

Profile, geeignete Ausbildung der Vorderkante und Verschiebung der dicksten Stelle nach hinten zu, wodurch das Geschwindigkeitsmaximum nach hinten verschoben wird, sind die hauptsächlichsten konstruktiven Maßnahmen, mit den sog. „Laminarprofile“ erhalten werden.

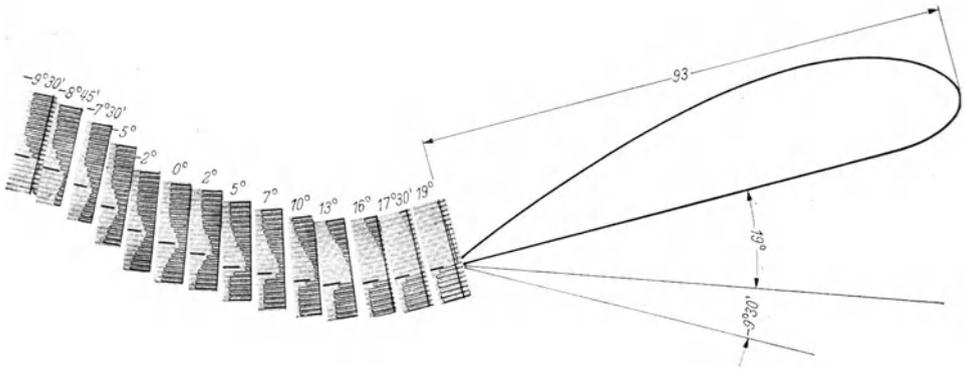


Abb. 233. Grenzschichtprofile an der Hinterkante eines Tragflügels (19° bis $-9,5^\circ$) im turbulenten Luftstrahl. Turbulenzdraht von 1 mm \varnothing in 0,5 m Entfernung vor dem Flügel.

Nach amerikanischen Forschungen ist es gelungen, bis zu Kennwerten von $Re = 3 \cdot 10^6$ laminare Grenzschicht zu erhalten. Beim Profil LB 24 konnte der Umschlagpunkt z. B. bis auf 85% Tiefe von der Vorderkante verlegt werden. Mit wachsendem Re rückte er dann langsam nach vorne.

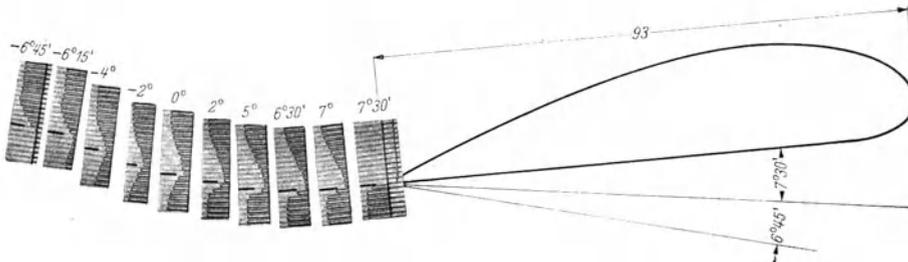


Abb. 234. Grenzschichtprofile im laminaren Strahl. ($-6^\circ 45'$ bis $7^\circ 30'$).

Die erreichte Widerstandsverminderung kann mit 70 v.H. angegeben werden.

Bei kleineren Reynoldsschen Zahlen kommt man schließlich in ein Gebiet, in dem die ganze Grenzschicht laminar ist. Dieses Gebiet selbst interessiert nicht für den praktischen Flug, wohl aber für den Modellflug, für kleine Schraubengebläse und für Modellversuche an Schiffsschrauben, weshalb man bisher diesem Gebiet, abgesehen von einer Arbeit von Gutsche¹, wenig Aufmerksamkeit geschenkt hat. Im Laboratorium des Verfassers wurden solche Messungen von F. W. Schmitz

¹ Gutsche, F.: Kennwerteeinflüsse bei Schiffsschrauben-Modellversuchen. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft Berlin. Bd. 37 (1936) S. 277.

ausgeführt, wobei der Windkanal vorher fast vollkommen laminar gemacht worden war, um eine Übertragung auf den Modellflug zu ermöglichen. Da die laminare Grenzschicht nach früherem keinen nennenswerten Druckanstieg mitmachen kann, ist zu erwarten, daß die Strömung schon sehr früh abreißt; andererseits läßt sich nach dem Vorgang an der Kugel in einem gewissen kritischen Bereich der Reynoldsschen Zahlen wahrscheinlich durch kleine Störungen der Umschlag zur turbulenten Grenzschicht erzwingen. Beim Modellflug ist nun gerade dieser kritische Bereich vorhanden, so daß man auf die Größenordnung dieses Einflusses neugierig sein wird. Abb. 233 und 234 zeigen Aufnahmen des Verfassers, aus denen das wesentliche hervorgeht. Bei diesen Versuchen wurden in ähnlicher Weise wie bei früheren Abbildungen die Staudruckprofile unmittelbar hinter der Flügelkante für verschiedene Anstellwinkel aufgenommen und die fotografierten Manometeraufnahmen maßstäblich hinter dem Flügel aufgeklebt. Die Grenzschichtdicke ist somit maßstäblich abzulesen. Abb. 234 zeigt die Aufnahme im laminaren Strahl. Bereits bei $7^{\circ}30'$ reißt die Strömung ab. Hält man nun in einiger Entfernung vom Flügel — in der Nähe der Verzweigungsstromlinie — einen dünnen Draht, so wird die Grenzschicht sofort turbulent. Der Unterschied ist erheblich. Die Strömung reißt erst bei 16° ab (Abb. 233). Während bei laminarer Grenzschicht nur ein gesunder Anstellwinkelbereich von $14^{\circ}75'$ vorhanden ist, ergibt sich bei turbulenter Grenzschicht ein solcher von $25^{\circ}30'$. Ebenso wie bei der Kugel wird unterhalb einer gewissen Reynoldsschen Zahl der Turbulenzdraht keinen Umschlag mehr herbeiführen, während oberhalb einer kritischen Zahl die turbulente Grenzschicht sich auch ohne den Turbulenzdraht einstellt.

Für das Abreißen der Strömung kann niemals ein genauer Winkel angegeben werden. Bei langsamer Vergrößerung des Anstellwinkels bleibt die Strömung länger anliegen, als wenn man bei abgerissener Strömung vorsichtig den Anstellwinkel verkleinert. Diese „Hysteresiserscheinung“¹ ist der Grund für die sog. „Flügel-schwingungen“, die u. U. sehr gefährlich werden können.

Wie außerordentlich empfindlich gerade der Vorgang des Abreißen ist, zeigt u. a. folgender Versuch. Wenn man sehr vorsichtig mit dem Anstellwinkel bis auf einige Minuten an den Punkt des Abreißen herangeht, so genügt oft eine Handbewegung außerhalb des Windkanals oder ein starker Pfiff, um die Ablösung herbeizuführen.

Die Haupteinflüsse von Reynoldsscher Zahl und Turbulenz sollen im folgenden kurz zusammengestellt werden²:

a) überkritisch $Re = 10^5 \div 10^7$:

1. Die aerodynamisch günstigste (10^7 höchster derzeitiger Meßwert) Profildicke liegt zwischen 11 und 14 vH. der Flügeltiefe.
2. Bei allen dünnen und mitteldicken (schwachgewölbten) Profilen steigt $c_{a\max}$ mit der Kennzahl merklich an und zwar von durch-

¹ Studer: Experimentelle Untersuchungen über Flügelschwingungen. Mitt. aus dem Institut für Aerodynamik. E. T. H. Zürich No. 4/5.

² Insbesondere sei verwiesen auf: Jakobs, Eastman N, and Albert Sherman: Airfoil section characteristic as affected by variations of the Reynolds number. Nat. Advis. Comm. Aeronautics. Rep. Nr. 586 (1937) 1—41.

schnittlich 1,2 bei $Re=10^5$ auf durchschnittlich 1,7 bei $Re=10^7$ (bei hochgewölbten *Pr.* Absinken von $c_{a\max}$).

3. Der Auftriebsanstieg $d c_a / d \alpha$ ändert sich zwischen 10^5 und 10^6 merklich; zwischen 10^6 und 10^7 nicht mehr; desgl. der Nullauftriebswinkel.
 4. Der Profilwiderstand läuft durchschnittlich 40 vH. oberhalb des reinen Oberflächenwiderstandes.
 5. Durch Ausschlag einer Landeklappen tritt im wesentlichen über der Kennzahl eine Parallelverschiebung zu größeren $c_{a\max}$ -Werten ein. Profile mit Klappen gewinnen also auch an $c_{a\max}$ bei zunehmender Kennzahl. Es werden bei $Re=10^7$ Werte von $c_{a\max}=2,8$ erreicht.
 6. Auch bei einem Profil mit Schlitzflügel steigt $c_{a\max}$ mit der Kennzahl stark an, etwa von 1,4 bei 10^5 auf 2,1 bei 10^7 . Der Profilwiderstand bei kleinen c_a -Werten ist stark veränderlich.
- b) unterkritisch $Re < 10^5$:
1. $c_{a\max}$ sinkt bis auf 0,3—0,4 je nach dem Profil und der Turbulenz des Strahles.
 2. Der untere kritische Wert für Tragflügelprofile liegt bei etwa 60 000 bis 80 000 (große Strahl-turbulenz), während der obere kritische Wert, der bei vollkommen laminaren Strahl erreicht wird, etwa bei 120 000 bis 160 000 liegt. In diesem Übergangsbereich kann durch scharfe Vorderkante oder Turbulenzdraht, der vor dem Flügel gespannt wird, der Übergang vorzeitig erzwungen werden.
 3. Der Profilwiderstand steigt an.
 4. Die Gleitzahl steigt bis auf den 3,5fachen Wert.
 5. Die gewölbte Platte zeigt bereits um 20 000 an überkritische Strömung. Bis zu 100 000 ist die gewölbte Platte den Profilen überlegen.

VI. Hilfsmittel zur Vermeidung der Ablösung.

In vielen Fällen können Hilfsmittel angegeben werden, mit denen die Ablösung wirksam bekämpft werden kann. Praktisch ist diese Möglichkeit von großer Bedeutung. Es gelingt in vielen Fällen, schlechte Strömungsquerschnitte oder schlechte Widerstandskörper durch einfache Zusatzarmaturen merklich zu verbessern. Obschon manche der hier besprochenen Maßnahmen mehr wissenschaftliche Bedeutung haben, ist eine kurze Zusammenfassung der bekanntgewordenen Hilfsmittel auch für den Praktiker sehr wertvoll.

84. Grenzschichtabsaugung.

Ist eine Diffusorströmung zu sehr erweitert, so reißt die Strömung ab. Der durch Wandreibung entstehende Energieverlust der wand-

nahen Schichten befähigt dieselben nicht mehr, Geschwindigkeitsenergie in Druck umzusetzen. Schafft man nun die ermüdeten Teilchen

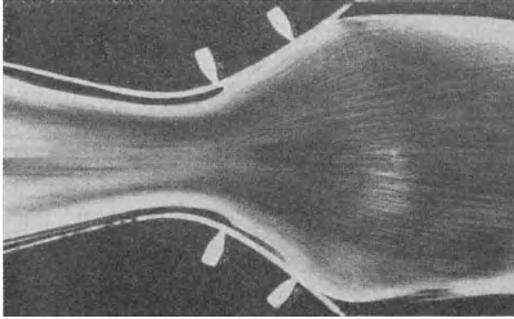


Abb. 235. Stark erweiterte Düse mit Ablösung nach Prandtl. Strömung schießt durch.

an und ergibt einen ziemlich verlustfreien Rechnung und Versuch gezeigt haben, ist

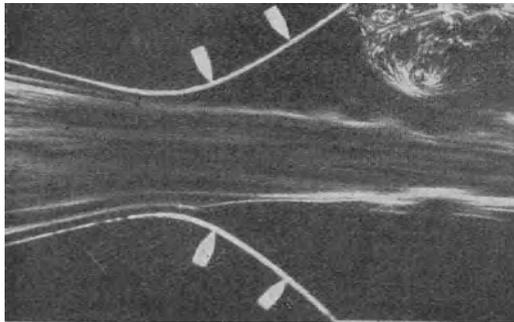


Abb. 236. Stark erweiterte Düse mit Absaugung der Grenzschicht nach Prandtl.

Wegschaffen der Grenzschicht das Geschwindigkeitsgefälle (und damit die Wandreibung) erheblich steigern.

Durch Absaugen der Grenzschicht läßt sich das Abreißen der Tragflächenströmung selbst bei großem Anstellwinkel verhindern¹. Es ergeben sich dabei Auftriebskräfte, die vier- bis fünfmal so groß sind wie die Maximalkräfte eines normalen Flügels. Abb. 237 veranschaulicht einen solchen Versuch, bei dem durch einen 1,5 mm breiten Schlitz die Luft

in irgendeiner Weise weg, so ist eine Besserung zu erwarten. In der Tat gelingt es, durch Absaugung die Grenzschicht zu beseitigen und so neue Schichten an die Wand zu legen, die größere Geschwindigkeiten haben. Abb. 236 zeigt die abgerissene Strömung und Abb. 235 die Wirkung der Absaugung. Die Strömung liegt tatsächlich wieder Umsatz in Druck. Wie die zum Absaugen notwendige Pumparbeit gegenüber dem Energieumsatz in der Düse prozentual klein. Bei Tragflügeln, Kugeln usw. hat man mit Erfolg von dieser Maßnahme Gebrauch machen können. Zwecklos wäre es dagegen, einen Diffusor, bei dem die Strömung gerade noch anliegt, hiermit verbessern zu wollen. Im Gegenteil würde man hier durch

¹ Schrenk: Versuche mit einem Absaugeflügel. Gött. Erg. Bd. 4 S. 74.

nach dem Innern des Flügels durch einen Staubsauger abgesaugt wurde. Die Staudruckprofile an der Hinterkante zeigen den Fall mit und ohne Absaugung. Ohne Absaugung ergibt sich eine breite Ablösungszone, die durch Absaugen ganz zum Verschwinden gebracht wird. Bemerkenswert war, daß nach Abstellen des Staubsaugers die Strömung nicht sofort abriß, sondern in etwa $5 \div 7$ sec ging das Staudruckprofil stetig in das der abgerissenen Strömung über.

Die Wirkung der Absaugung ist durch das Wegschaffen der Grenzschicht nicht vollständig zu erklären. Wenn z. B. durch Absaugen die vollkommene Umströmung eines Zylinders bewirkt wird, ist zu berück-

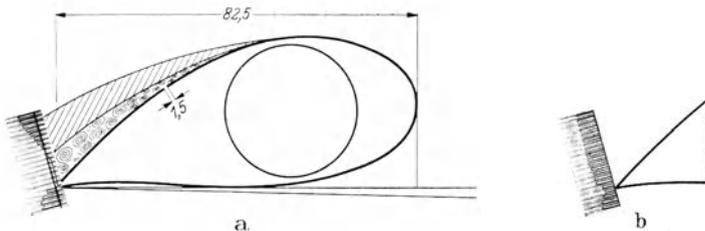


Abb. 237. Staudruckprofil an der Hinterkante eines dicken Profils.
a) ohne Grenzschichtabsaugung. b) mit Grenzschichtabsaugung.

sichtigen, daß durch das Absaugen ein Unterdruck erzeugt wird, der sich der Strömung überlagert. Dieser künstlich erzeugte Unterdruck ist aber bei der Umströmung nach früherem (S. 57) notwendig. Die Absaugestelle wirkt hier wie eine Senke, die nach den Überlegungen von S. 50 einen starken Unterdruck erzeugt.

Der Effekt des Absaugens kann also zwei Ursachen haben:

1. reine Grenzschichtabsaugung,
2. Senkenwirkung.

Die Fernwirkung einer Senke ist nach früheren Feststellungen sehr stark. Die hierdurch überlagerten Geschwindigkeiten nehmen erst mit $1/r$ ab. In vielen Fällen ist es nicht leicht, zu unterscheiden, welcher Anteil der Wirkung auf das Konto der Senkenwirkung bzw. der Grenzschichtabsaugung kommt.

85. Mitbewegte Wand.

Eine „triviale“ Methode zur Verhinderung der Ablösung besteht darin, daß man die Wände in Strömungsrichtung mitlaufen läßt und so die Ursache der Grenzschichtbildung überhaupt vermeidet. Der folgende Versuch des Verfassers zeigt dies besonders eindrucksvoll. Ein durch zwei Walzen verengter Kanal ergibt nach Abb. 238 eine Ablösung am engsten Querschnitt. Läßt man die Walzen in Strömungsrichtung rotieren, so legt sich die Strömung wieder mustergültig an (Abb. 239). Der Magnuseffekt (Abb. 201) ist ein weiteres Beispiel.

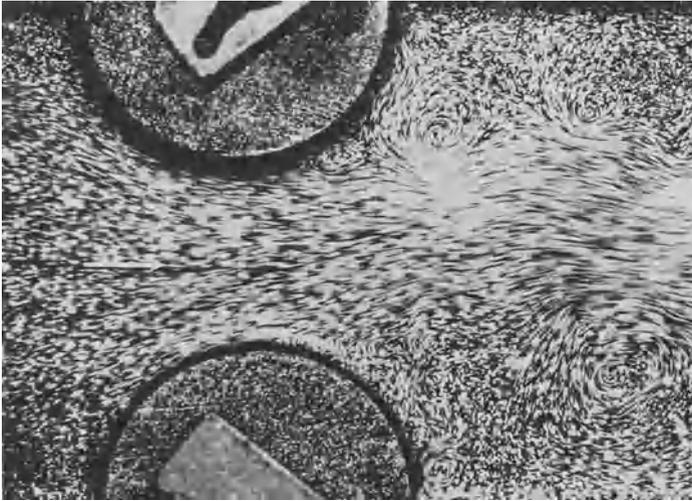


Abb. 238. In einem durch Walzen verengten Kanal löst sich die Strömung ab.



Abb. 239. Walzen drehen sich in Richtung der Strömung. Strömung liegt überall an.

86. Ausblasen von Druckluft.

Gewissermaßen das Gegenstück zur Grenzschichtablösung ist der Antrieb der Grenzschicht durch Einblasen von frischer Flüssigkeit. Beim Tragflügel hat man mit Erfolg ein Anliegen der Strömung bei größeren Anstellwinkeln erreichen können, indem Frischluft mit einem Gebläse

an der Saugseite eingeblasen wurde¹, wobei allerdings wesentlich größere Luftmengen als beim Absaugen nötig sind (Abb. 240). Auch hier ist es zwecklos, im Bereiche kleiner Anstellwinkel (wo also die Strömung sowieso anliegt) eine Verbesserung erwarten zu wollen.



Abb. 240. Blasflügel. Abreißen der Strömung wird verhindert durch Einblasen von Frischluft auf die Saugseiten.

87. Leitschaukeln.

Große praktische Bedeutung haben Leitschaukeln und Hilfsleitwerke gewonnen, die in mannigfacher Weise zur Korrektur von schlechten Strömungen Verwendung gefunden haben.

Historisch beginnt die Entwicklung dieser Leitschaukeln mit den Panzergrätings von Krell (S. 171). Die Weiterentwicklung durch Prandtl brachte noch heute brauchbare Formen für Krümmer (S. 171).

Bei umströmtem Körper setzt die Entwicklung mit den Hilfsflügeln von Lachmann² und Handley-Page³ ein. Diese haben zum ersten Male beim Tragflügel hiervon Gebrauch gemacht. Es zeigt sich, daß ein

kleiner Hilfsflügel nach Abb. 241 die Strömung selbst bei großen Anstellwinkeln zum Anliegen bringen kann. Dabei wird die am Hilfsflügel entstehende Grenzschicht in die offene Strömung geschafft und damit unwirksam gemacht. Wichtig ist, daß der zwischen Flügel und Hilfsflügel liegende Spalt düsenförmig verengt wird. Abb. 242 zeigt

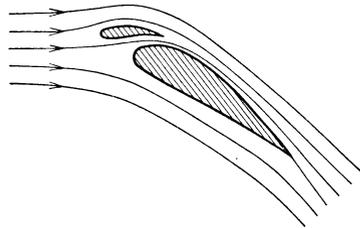


Abb. 241. Tragflügel mit Hilfsflügel nach Lachmann und Handley-Page.

eine solche Tragflächenströmung, bei der durch einen Hilfsflügel die Ablösung bei einem großen Anstellwinkel fast ganz unterbunden ist. Die Wirkung des Spaltflügels läßt sich als Belüftung der oberen Seite auffassen. Durch den Spalt kommt frisches Material auf die obere Seite und wirkt dort, ähnlich wie das Einblasen von Druckluft, antreibend auf die Grenzschicht.

Die Wirkung von Hilfsflügeln kann auch anders erklärt werden, wenn man sich den Hilfsflügel als kleinen Tragflügel vorstellt. Die von einer Tragfläche erzwungene Strömung wurde (S. 207) als Überlagerung eines Wirbels mit einer Parallelströmung aufgefaßt. In welchem Grade also ein Hilfstragflügel eine Fernbeeinflussung der Strömung bewirkt, hängt von dem Geschwindigkeitsfeld seines Wirbels ab. Diese Geschwin-

¹ Seewald: Die Erhöhung des Auftriebs durch Ausblasen von Druckluft an der Saugseite eines Tragflügels. ZFM. 1927, S. 350.

² Lachmann: Das unterteilte Flächenprofil. ZFM. 1921, S. 164.

³ Handley-Page: Vortrag i. d. Roy. Aeron. Soc. 17. Febr. 1921.

digkeiten nehmen umgekehrt proportional mit dem Radius ab, genau so wie bei der oben behandelten Senke. Dies ist die stärkste Fern-

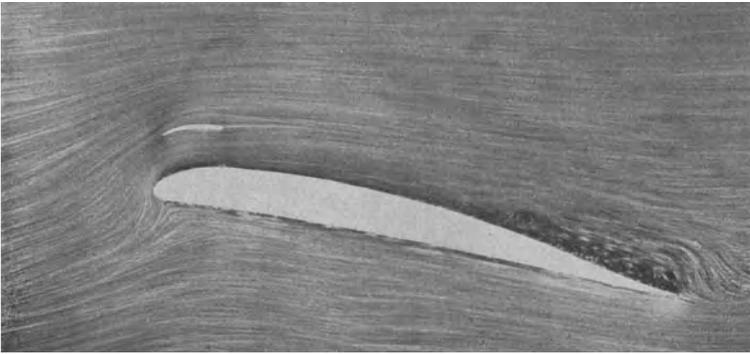


Abb. 242. Durch Hilfsflügel wird die Strömung fast ganz zum Anliegen gebracht.

wirkung, die strömungstechnisch überhaupt erzielt werden kann. Diese Zirkulationsströmung um den Hilfsflügel wirkt nun so, daß



Abb. 243. Strömung um eine senkrecht angestellte Platte.

im Spalt die Geschwindigkeit verkleinert, über dem Hilfsflügel aber vergrößert wird. Der Hilfsflügel reißt also gewaltsam die Strömung in den Wirbelraum des Hauptflügels.

Townend¹ benutzte diesen Gedanken, um durch einen kreisförmig gebogenen Hilfsflügel den Stirnwiderstand von Sternmotoren herabzusetzen, eine Ausführung, die in mannigfachen Formen sehr große

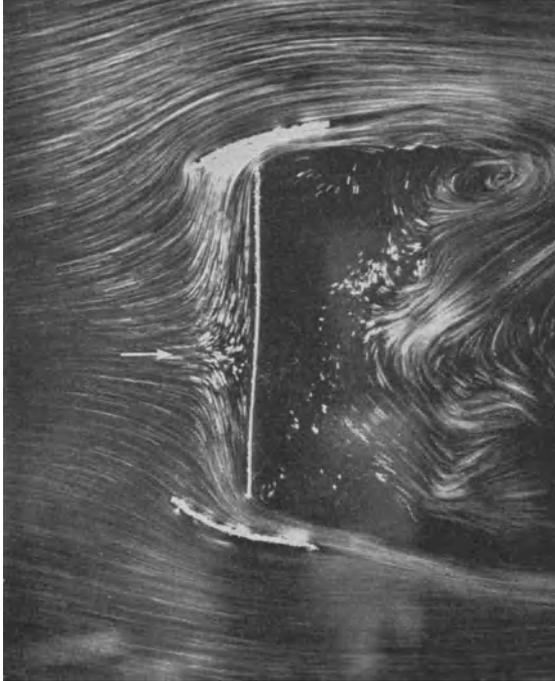


Abb. 244. Hilfsflügel verhindern das weite Ausweichen der Strömung und verringern den Widerstand um etwa 50 v. H.

praktische Bedeutung gewonnen hat. An einer einfachen Platte soll die Wirkung nach Versuchen des Verfassers demonstriert werden. Abb. 243 zeigt die gewöhnliche Plattenströmung. Die Platte wurde mit Endscheiben versehen und im Kölner Windkanal untersucht. Es ergab sich ein Widerstand von 450 g. Im Wasserkanal wurden dann, wie Abb. 244 zeigt, zwei Hilfsflügel so eingestellt, daß die Strömung um die Hilfsflügel wirbelfrei war. Die Nachmessung im Windkanal ergab bei der gleichen Geschwindigkeit einen Widerstand von 240 g, d. h. eine Widerstandsverminderung von ~ 47 vH.

¹ Townend, H.: The Townend Ring, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. XXXIV. Oct. 1930.

Eine andere Darstellungsform des gleichen Vorganges zeigt Abb. 245. Das Staudruckprofil, das in dem aus der Abb. 245 erkennbaren Abstand hinter der Platte aufgenommen wurde, zeigt deutlich die Zone der turbulenten Vermischung. Trotz der abgehenden Wirbel ergeben sich konstante Mittelwerte für den Staudruck und scharfe Grenzen für die Vermischungszone, die schraffiert eingezeichnet ist. Im Totwassergebiet erkennt man deutlich einen Unterdruck, der die Ursache für den Plattenwiderstand ist. Durch eine geeignete Leitschaufel (Abb. 245 b u. c) läßt sich diese Strömung sehr verbessern. Unter gleichzeitiger Beobachtung der Staudruckkurve kann man die Leitschaufel leicht so einstellen, daß die Ablösungszone möglichst klein ist. Abb. 245 c zeigt diese Lage. Der

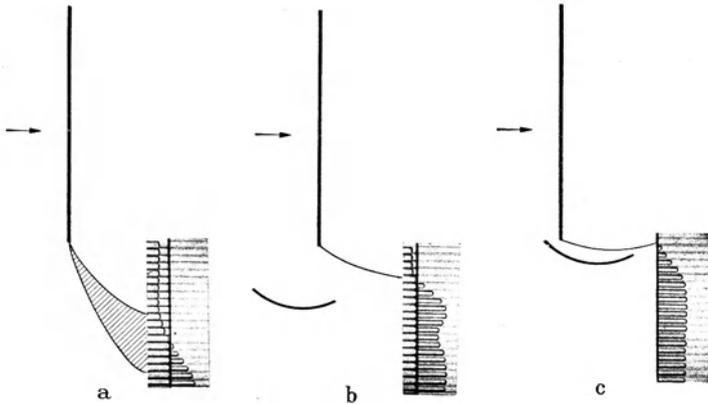


Abb. 245. Staudruckprofile hinter einer ebenen Platte.
a) Platte ohne Leitschaufel. b) Platte mit falsch eingestellter Leitschaufel.
c) Platte mit richtig eingestellter Leitschaufel.

Unterdruck hinter der Platte ist ganz verschwunden. Abb. 245 b zeigt eine andere Stellung, bei der dies noch nicht erreicht ist. In der Staudruckkurve erkennt man eine zweite Delle, die von der Leitschaufel herrührt, und die ihre verlustbringende falsche Stellung andeutet.

Die Einstellung ist mit Hilfe des Düsenkammes beinahe noch einfacher und überzeugender möglich als mit Hilfe von Strömungsbildern. Insbesondere gibt die gleichzeitige Anzeige des etwaigen Unterdruckes, die bei Strömungsbildern nicht möglich ist, die direkte Gewähr für eine mögliche Widerstandsverringern.

Unterteilte Leitschaufeln nach Flügel. Flügel¹ ist noch einen Schritt weitergegangen und hat unterteilte Hilfsflügel benutzt,

¹ Flügel: Ergebnisse aus dem Strömungsinstitut der Technischen Hochschule Danzig. Jb. Schiffbautechn. Ges. 1930, S. 87. In dieser Arbeit wird erstmalig über diese sehr interessante Erweiterung der Anwendung von Leitschaufeln berichtet. Prof. Flügel hat diese Arbeiten in seinem Institut ausführen lassen und ihre Durchführung überwacht und geleitet. Trotz dieses eindeutigen Sachverhaltes

um bei allen Widerstandskörpern, die Ablösung zeigen, den Widerstand weitgehend zu verringern. Abb. 246 zeigt, wie durch zwei kleine Hilfsflügel der „Stirnwiderstand“ eines Körpers vermindert werden kann. Die obere Seite läßt deutlich erkennen, wie beim Weglassen der Hilfsflügel starke Wirbelbildung entsteht. In Abb. 247 ist die hintere Ablösung korrigiert. Bei mehreren Schaufeln gelingt es tatsächlich, die Strömung fast ganz wieder zum Anliegen zu bringen. Auch

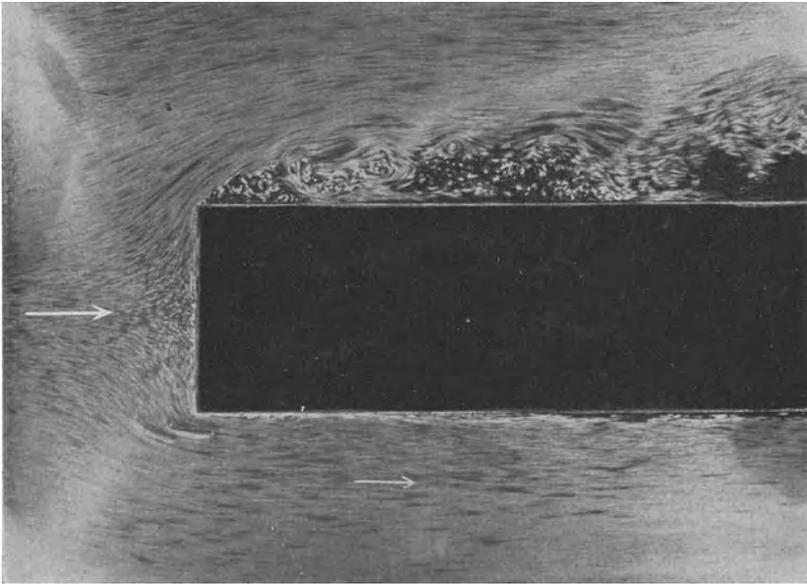


Abb. 246. Verringerung des Stirnwiderstandes durch Hilfsflügel nach Flügel.

hier gilt das oben Gesagte: Liegt bei einem Körper die Strömung schon an, oder angenähert an, so ist auch durch Hilfsflügel keine Verbesserung

werden diese Leitschaufelanordnungen in letzter Zeit im Zusammenhang mit industriellen Anwendungen oft mit anderen Namen versehen, was dadurch zu erklären ist, daß die Patenterteilung dieser Erfindung auf andere Namen lautet. Wenn auch Prof. Flügel großzügigerweise die geschäftliche Ausnutzung — die Patentanmeldung erfolgte ohne sein Wissen — anderen überlassen hat, so erscheint es dem Verfasser doch als selbstverständliches Gebot fairer wissenschaftlicher Berichterstattung, die Anordnung mit dem alleinigen Namen „Flügel“ zu bezeichnen. — Weitere Veröffentlichungen über Flügel'sche Leitschaufeln:

Frey: *Forschung*, 1934, S. 105.

Frey u. Söhle: *Schiffbau*, 1934, S. 49.

Bachmann, *Z. d. VDI.*, 1935, S. 1034.

Zimmermann, *Archiv f. Wärmewirtschaft*, 1942, S. 77.

(Siehe auch die Bemerkungen zu diesem Thema auf S. 173 dieses Buches.)

zu erzielen. Im Gegenteil wird dann bei Verwendung von Hilfsflügeln eine Verschlechterung eintreten.

Wir fassen zusammen: Durch die hier erwähnten Hilfsmittel läßt sich eine um so größere Widerstandsverminderung erzielen, je ungünstiger der Körper ohne die Hilfsmittel ist.

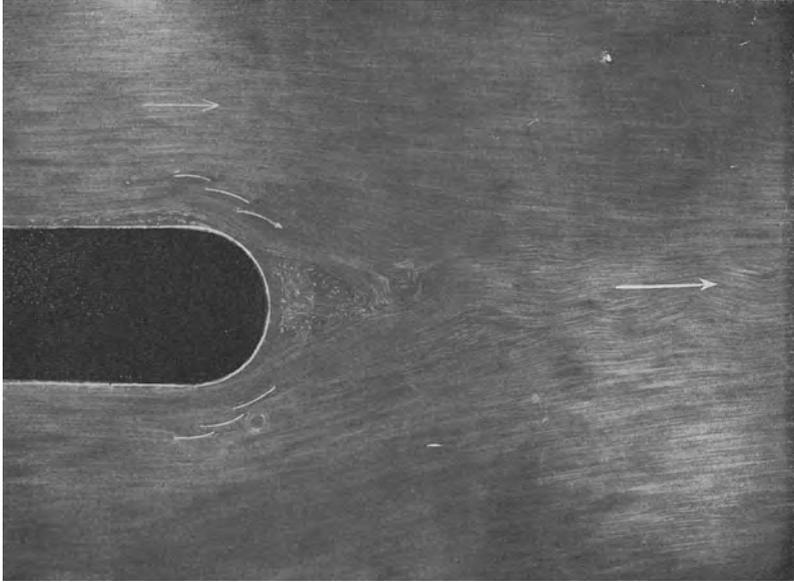


Abb. 247. Verbesserung des Totwasserraumes bei stumpfen Widerstandskörpern nach Flügel.

Praktische Bedeutung haben diese Mittel, wenn z. B. aus konstruktiven oder sonstigen Gründen kein Platz vorhanden ist, um lange Abflußkörper zu bauen, oder wenn sich aus irgendwelchen Gründen scharfe Kanten nicht vermeiden lassen (z. B. beim Sternmotor).

VII. Kavitation.

88. Allgemeines.

Es ist bekannt, daß Wasser bei einem bestimmten äußeren Druck verdampft. Dieser sog. Dampfdruck hängt nur von der Temperatur ab und wird mit kleinerer Temperatur kleiner. Während bei der normalen Atmosphäre eine Temperatur von $\sim 100^\circ \text{C}$ notwendig ist, um die Verdampfung einzuleiten, muß bei 15° der Druck auf 174 kg/m^2 , d. h. 174 mm WS , gesenkt werden, ehe Verdampfung eintritt.

An dieser Erscheinung ändert sich nichts, wenn das Wasser gleichzeitig in Bewegung ist. Sobald also das Wasser in der Strömung Stellen

passiert, wo der Druck gleich oder kleiner als der Dampfdruck ist, sind Ausscheidungen von Wasserdampf zu erwarten. Es bilden sich an diesen Stellen mit Wasserdampf gefüllte Hohlräume, die ein ganz merkwürdiges Verhalten zeigen. Den Vorgang selbst nennt man *Kavitation*. Er läßt sich folgendermaßen kurz beschreiben. An den Stellen, die Dampfdruck erreichen, beginnen Wasserdampfausscheidungen. Es bildet sich ein mit Wasserdampf gefüllter Hohlraum, der örtlich scharf begrenzt ist. Ebenso plötzlich, wie sich die Wasserdampfblasen bilden, verschwinden sie auch wieder auf einer fast scharfen Grenze. Außerhalb dieses Raumes geht die Strömung so weiter, wie es der reibungslosen Strömung entspricht. Dort, wo die Blasen zusammenstürzen, beobachtet man nun meist sehr starke Anfrassungen des Materials, denen selbst unsere besten Bronzen und Stähle nicht gewachsen sind. Infolge dieser schädlichen Wirkungen war man überhaupt erst gezwungen, sich mit der Kavitation zu beschäftigen, einem Gebiet, das bis dahin in der Physik vollkommen vernachlässigt worden war. Bei der Vergrößerung der Schnellläufigkeit der hydraulischen Maschinen, insbesondere der Schiffspropeller und der Kaplanturbinen, machte man diese Beobachtungen und stand zunächst den Problemen ziemlich ratlos gegenüber. Es schien damals, daß die Kavitation der Schnellläufigkeit unserer hydraulischen Maschinen eine nicht überschreitbare Grenze setzte. Der seit dieser Zeit — seit etwa 25 Jahren — einsetzenden Kavitationsforschung ist es inzwischen nun gelungen, diese Grenzen immer mehr heraufzusetzen und den Kavitationsvorgang — wenigstens von der praktischen Seite her — zu beherrschen.

89. Praktische Auswirkungen.

Wir betrachten eine reibungsfreie Strömung, für die die Bernoullische Gleichung $P_0 = p + \frac{\rho}{2} c^2$ gilt. An irgendeiner Stelle wird Kavitation dann einsetzen, wenn der statische Druck p gleich dem Dampfdruck p_a wird. Daraus ergibt sich bei gegebenem Gesamtdruck P_0 eine ganz bestimmte Höchstgeschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{P_0 - p_a}{\frac{\rho}{2}}}$.

Es handelt sich um die größten Geschwindigkeiten, die in der Strömung eintreten können, denn eine weitere Senkung des Druckes ist physikalisch unmöglich. Wenn wir also wissen wollen, wo Kavitation zu erwarten ist, so brauchen wir nur zu fragen, wo die Stellen der größten Geschwindigkeiten sind. Darauf läßt sich nun nach unseren früheren Betrachtungen eine einwandfreie Antwort erteilen. Zunächst gilt die Beziehung, daß in einer wirbelfreien Strömung die größte Geschwindigkeit immer an der Wand zu finden ist (S. 43). Bei der Umströmung von Profilen, Schaufeln u. dgl. sind diese Stellen bekannt.

Mit einfachen Rechnungen kann der Vorgang dimensionsmäßig verfolgt werden. Ist z. B. p_∞ der statische Druck in einiger Entfernung vor dem Profil, wo kein Profileinfluß mehr festzustellen ist, und p_d der Dampfdruck, so kann der Druck offenbar nur um $p_\infty - p_d$ erniedrigt werden, ehe Kavitation eintritt. Ist c_∞ die Anströmgeschwindigkeit und c_{\max} die größte Geschwindigkeit, so gilt nach Bernoulli

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2} [c_{\max}^2 - c_\infty^2].$$

Da bei gleichen Verhältnissen, d. h. bei geometrisch ähnlichen Profilen und gleichen Anstellwinkeln, c_{\max} immer prop. c_∞ ist, können wir schreiben:

$$\frac{\rho}{2} [c_{\max}^2 - c_\infty^2] = \lambda \cdot \frac{\rho}{2} c_\infty^2 = \lambda \cdot q. \quad (154)$$

Dabei ist λ ein Maß für die am Profil auftretende Übergeschwindigkeit. Durch die Profilausbildung kann λ merklich beeinflußt werden. Abb. 176 zeigte ein Beispiel dafür.

So ergibt sich folgende Beziehung: $p = p_\infty - \lambda \cdot q$. Setzt man für p den Dampfdruck p_d , so erhält man: $p_\infty = p_d + \lambda \cdot q$, d. h. eine lineare Beziehung zwischen dem Druck p_∞ der ungestörten Strömung und dem Staudruck q .

Durch Versuche ist diese Beziehung, d. h. die lineare Abhängigkeit, auch bei der Kavitation bestätigt worden. Dabei muß natürlich darauf geachtet werden, daß immer derselbe Zustand der Kavitation, d. h. Beginn bzw. vollausgebildete Kavitation, eingestellt wird. Darüber hinaus haben dann die Versuche von Ackeret¹ gezeigt, daß selbst bei weit fortgeschrittener Kavitation, z. B. bei gleichzeitig abgerissener Strömung, diese Beziehung gewahrt bleibt. Beispielsweise ergab sich für ein bestimmtes Profil bei einem bestimmten Anstellwinkel für den Beginn der Kavitation der Wert $\lambda = 0,62$, während bei Ablösung $\lambda = 0,46$ war. Diese Spanne ist praktisch sehr wichtig, weil erst mit der Ablösung größere Strömungsverluste eintreten, während vorher eine leichte Aufbesserung des Wirkungsgrades beobachtet wurde, was wahrscheinlich mit der kleineren Wandreibung der Kavitationszone zusammenhängt.

Allgemein läßt sich sagen, daß die Kavitationsgefahr mit größeren Anstellwinkeln und dickeren Profilen steigt. Die möglichen Konstruktionsempfehlungen sind ziemlich dieselben wie bei Überschallströmungen.

¹ Ackeret: Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Kavitation, Techn. Mechanik und Thermodynamik 1930, S. 1. Siehe auch Ackeret: Kavitation und Korrosion, Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebs. Hamburg 1932.

Auch im Inneren einer Flüssigkeit kann Kavitation auftreten. Bei isolierten Wirbeln ist dies oft der Fall, weil im Wirbelkern außerordentlich kleine Drücke auftreten können. Praktisch sind derartige Fälle hinter der Nabe einer Kaplan turbine vorhanden, wo sich nach den Beobachtungen meist ein Wirbelschlauch bildet. Auch die Randwirbel, die an den Schaufelenden abgehen, können den Anlaß zu diesen Erscheinungen bilden.

Für Wasserturbinen hat sich eine von Thoma¹ eingeführte Kennzahl σ sehr bewährt. Folgende Überlegung führt zu dieser Zahl. Ist H_a die barometrische Saughöhe (d. h. Luftdruck abzüglich Dampfdruck) und H_s die am Laufrad vorhandene statische Saughöhe, so würde ohne Strömung der statische Druck $H_a - H_s$ an den Schaufeln vorhanden sein (s. Zahlenbeispiel auf S. 24). Ist c_{\max} die größte Geschwindigkeit, die an irgendeiner Stelle der Schaufeln auftritt, so muß sich nach der Bernoullischen Gleichung der Druck dort weiter um $\frac{\rho}{2} c_{\max}^2$ senken. Es ist einleuchtend, daß dieser Wert von dem Gesamtgefälle H , im übrigen natürlich sehr von der Bauart abhängt. Dies kann durch die Gleichung $\frac{\rho}{2} c_{\max}^2 = \sigma \cdot H$ zum Ausdruck gebracht werden. Die Druckreserve gegen Kavitation ist dann offenbar $H_a - H_s - \sigma \cdot H$. Im Grenzfall wird diese Reserve gleich Null. Hierbei ist dann

$$\sigma = \frac{H_a - H_s}{H} . \quad (155)$$

Das Versuchsmaterial hat gezeigt, daß die Kavitationsgefahr tatsächlich nur vom Koeffizienten σ abhängt. So ist z. B. bei Propellern bis herunter zu $\sigma = 0,2$ ein kavitationssicherer Betrieb möglich. Für jede Bauart kann deshalb ein Wert von σ angegeben werden, bei dem mit Sicherheit keine Kavitation eintritt. Ungefähre Grenzwerte gibt die folgende Tabelle an.

n_s	100	200	300	400	600	800
σ	0,04	0,13	0,32	0,6	0,8	1,0

Die unteren Werte der spezifischen Drehzahl² n_s werden bei Francis turbinen erreicht, während die größeren für Kaplan turbine³ maßgebend sind.

¹ Z. VDI 1925, S. 329.

² Die spezifische Drehzahl n_s ist ein Zahlenwert, der die Schnellläufigkeit von Turbomaschinen, insbesondere von Wasserturbinen, zum Ausdruck bringt, s. z. B. Kaplan-Lechner: Turbinen-Schnellläufer, München, Oldenbourg, 1931.

³ Bei Kaplan turbine ist es nunmehr gelungen, Gefälle bis zu 50 m kavitationssicher zu beherrschen. Die Schnellläufigkeit spielt bei den Wasserturbinen eine so große Rolle, weil bei den Riesenabmessungen dieser Maschinen schnell-

90. Physikalische Ergänzungen.

Die charakteristischen physikalischen Vorgänge bei der Kavitation können sehr schön an einem divergenten Kanal studiert werden (Abb. 248).

Ohne Kavitation ergibt sich die Druckverteilung $A-B$ gemäß der Bernoullischen Gleichung unter Berücksichtigung des Druckverlustes $\Delta p'$. Der Druckunterschied Δp von A bis zum engsten Querschnitt ist

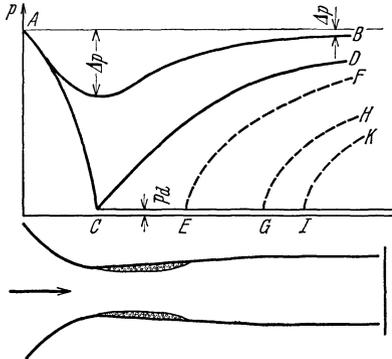


Abb. 248. Druckverteilung in einem Diffusor vor und nach Einsetzen der Kavitation.

bekanntlich ein Maß für die durchströmende Menge. Beim Venturirohr (S. 282) wird hiervon Gebrauch gemacht. Wird der Gegendruck erniedrigt, so steigt Δp und damit die Durchflußmenge. Dies geht aber nur solange, bis bei C der Dampfdruck erreicht wird. Die dann entstehende Druckkurve ACD hat grundsätzlich noch denselben Charakter wie vorher. Wird der Gegendruck nun noch ein klein wenig unterschritten, so beginnt die Blasenbildung. Es zeigt sich nun, daß im Gebiete der Blasen-

bildung, d. h. zwischen C und E , der Druck konstant bleibt. Bei E verschwinden die Dampfblasen dann plötzlich, und der Druck steigt nach der Kurve EF weiter an. Von E ab ist der Querschnitt wieder voll ausgefüllt. Die Strömungsverluste, die hierbei auftreten, sind meist noch geringer als ohne Kavitation. Bei weiterer Senkung des Gegendruckes wird dann die Blasenzone immer größer, bis sie schließlich von G ab sich nicht mehr schließt und eine Ablösung der Strömung veranlaßt. Das Totwasser führt dann das Blasenmisch fort. Von jetzt an treten größere Verluste auf. Mit Einsetzen der Kavitation bleibt der Druck bei C konstant. Somit bleibt auch die Durchflußmenge konstant. Die Analogie mit der Lavaldüse (S. 259) ist beinahe vollständig. Auch dort kann bei Erreichung einer bestimmten Geschwindigkeit, nämlich der Schallgeschwindigkeit, die Durchflußmenge nicht mehr gesteigert werden.

Wenn die Kavitation nicht zur Ablösung führt, verschwindet die Blasenzone ziemlich plötzlich. An dieser Stelle (Punkt E) findet dann ein Drucksprung statt, der große Ähnlichkeit mit dem Verdichtungsstoß bei Überschallströmung hat. Schematisch ist dieser Vorgang in einem Rohre leicht zu verfolgen. Ein Blasenmisch, das von links ankommt, wird auf einer kurzen Strecke, die die Größenordnung von 5—20 mm

laufende Maschinen kleinere Abmessungen ergeben, wodurch die Kosten wesentlich erniedrigt werden. Außerdem wird durch die Schnellläufer das Gebiet der kleinen Gefälle praktisch ausnutzbar.

hat, verdichtet, sodaß der Wasserdampf kondensiert wird und anschließend nur mehr eine homogene Wasserströmung zu sehen ist. Wegen der damit verbundenen Volumverringerung nimmt die Geschwindigkeit plötzlich ab, während der Druck ebenso plötzlich ansteigt. Auch beim Wasserschwall (S. 89) haben wir eine ähnliche Erscheinung kennengelernt.

Die bei der Kavitation beobachteten Anfressungen entstehen an der Kondensationszone der Dampfblasen. Die mit großer Geschwindigkeit an den Wandungen vorbeikommenden Blasen stürzen dort plötzlich zusammen. Hierbei entstehen große, örtlich eng begrenzte Drücke, die nach den z. Zt. herrschenden Anschauungen zur Zerstörung des Materials auf rein mechanische Weise führen müssen. Früher nahm man an, daß die bei Kavitation aus dem Wasser ausscheidenden freien Gase starke chemische Einwirkungen hervorrufen müßten. Die Versuche haben diese Anschauungen ziemlich eindeutig widerlegt.

Über die inneren Ursachen des Materialzusammenbruchs herrscht nach wie vor noch keine Klarheit. Während die Strömungsfachleute wohl örtliche Drücke von ~ 200 at nachweisen konnten, verlangen auf der anderen Seite die Materialfachleute wesentlich höhere Drücke (etwa zehnmal so hohe), um eine Zerstörung erklären zu können.

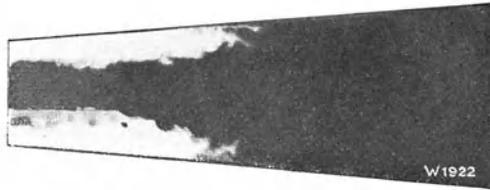


Abb. 249. Kavitation in einem Diffusor nach Escher-Wyss.

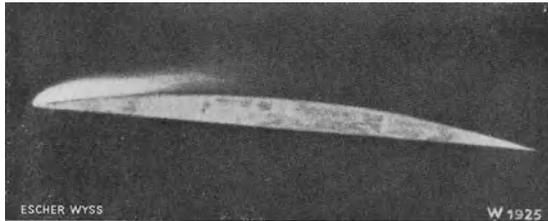


Abb. 250. Kavitationszone an der Vorderkante eines Tragflügels (Escher-Wyss).

Abb. 249 zeigt eine Aufnahme der typischen Kavitationserscheinung in einer Düse. Man erkennt deutlich das plötzliche Verschwinden der Blasen. Ein Tragflügel (Abb. 250) zeigt an der Saugseite prinzipiell das gleiche Bild. Die Strömung schließt sich hinter der Kavitationszone wieder. Mit weiterer Drucksenkung wird der Blasenraum immer größer,

bis schließlich bei Abb. 251 die Strömung abreißt und das Blasengemisch mit wegschwimmt.

Die Anfressungen durch Kavitation zeigen eine schwammige Struktur, wie sie etwa bei sich auflösendem Zucker beobachtet wird. Abb. 252

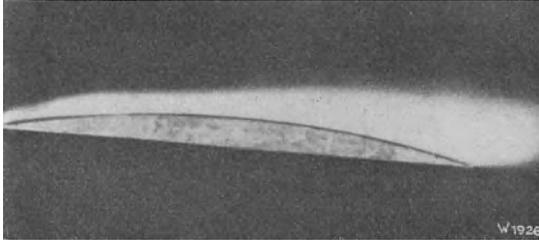


Abb. 251. Vollausgebildete Kavitation auf der Saugseite eines Tragflügels mit abgerissener Strömung (Escher-Wyss).

zeigt ein solches Stück. Ein Schnitt durch das gleiche Stück läßt die Auflösung des Materials noch besser erkennen.

Die Widerstandsfähigkeit der verschiedenen Baustoffe gegen Kavitation ist ungefähr durch folgende Reihenfolge gekennzeichnet: Rotguß,

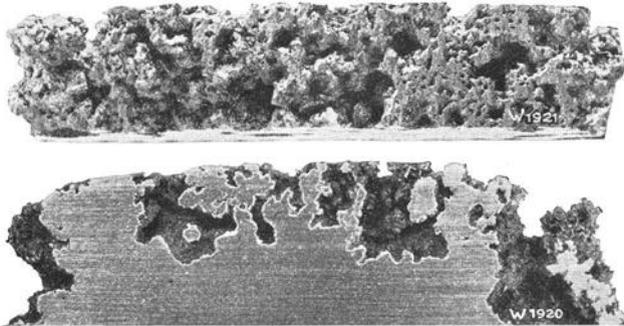


Abb. 252. Ansicht und Schnitt eines durch Kavitation angefressenen Stückes (Escher-Wyss).

Molybdän-Stahlguß, Zinnbronze, Sondermessing, Aluminiumbronze, Stahlguß 45 kg/mm², SM-Stahl weich, Sinoydguß, 2% Nickelstahl.

Versuche, durch Politur, Emaillieren od. dgl. die Kavitation zu verhindern, Maßnahmen, die bei Dauerbeanspruchungen bekanntlich zu Erfolgen geführt haben, sind hier erfolglos geblieben.

91. Erosion durch Tropfenschlag.

Wenn Wassertropfen mit großer Geschwindigkeit auf einen Baustoff treffen, zeigen sich Anfressungen, die den durch Kavitation erzeugten Korrosionen sehr ähnlich sind. Im Naßdampfgebiet von Dampfturbinen sowie bei Peltonturbinen

spielen diese Erscheinungen eine wichtige Rolle. Von Haller¹ sind diese Vorgänge genauer untersucht worden. Es zeigte sich eine deutliche Übereinstimmung zwischen dem Verhalten der Baustoffe bei Tropfenschlag und dem bei Kavitation. Die Rangordnung der verschiedenen Metalle ist ziemlich die gleiche.

VIII. Gasdynamik.

92. Physikalische Ableitung der Schallgeschwindigkeit.

In einer Röhre von der Länge l und der Fläche f soll ein Kolben plötzlich um ein kleines Stück dx verschoben werden (Abb. 253). Wir beobachten, daß ein am anderen Ende befindlicher Kolben nicht sofort folgt,

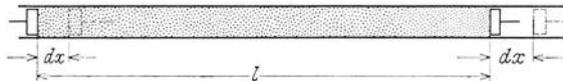


Abb. 253.

sondern erst nach einer gewissen Zeit t in Bewegung kommt. Die durch den ersten Kolben erzeugte Druckstörung wird demnach mit einer endlichen Geschwindigkeit $a = l/t$ fortschreiten. Je elastischer das Medium ist, mit dem die Röhre ausgefüllt ist, um so langsamer geht nach den Beobachtungen der Vorgang vor sich. In einem Gase sind somit viel langsamere Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu erwarten als etwa in einem Metallstab, während schließlich ein unelastischer Stab die Druckstörung ohne Verzögerung weiterleiten würde.

Der Kolben übt einen Druck dp aus und komprimiert die Gassäule um ein Stückchen dx . Nach der Zeit t wird auch der Endkolben sich um das gleiche Stück dx verschieben, sodaß die ganze Gasmasse dann eine gewisse Geschwindigkeit besitzt, die wir w nennen wollen. Sie ist natürlich bedeutend kleiner, entsprechend den Wegen dx und l , die den beiden Geschwindigkeiten zugeordnet sind. Das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten kann deshalb leicht angegeben werden: $\frac{w}{a} = \frac{dx}{l}$, hieraus $w = \frac{dx}{l} \cdot a$. Der Geschwindigkeitserhöhung der Gassäule von 0 auf w entspricht eine mittlere Beschleunigung $b = \frac{w}{t}$. Mit $t = \frac{l}{a}$ ergibt sich $b = \frac{w \cdot a}{l}$, und nach Einsetzen von w entsteht: $b = \frac{a^2 \cdot dx}{l^2}$.

Auf die Gassäule wirkt die Kraft $dp \cdot f$. Wenden wir den Satz $P = m \cdot b$ an, so erhalten wir:

$$dp \cdot f = f \cdot l \cdot \rho \cdot b = f \cdot l \cdot \rho \cdot a^2 \cdot \frac{dx}{l^2},$$

hieraus $dp = \frac{a^2 \cdot \rho \cdot dx}{l}$.

¹ Haller: Untersuchungen über die durch Kavitation hervorgerufenen Korrosionen. Schweiz. Bauztg. 1933.

Der Wert $\frac{\rho \cdot dx}{l}$ hat eine anschauliche Bedeutung. Kurz bevor der Endkolben sich in Bewegung setzt, ist die ganze Gassäule verdichtet. Die Massendichte hat sich um einen Betrag $d\rho$ geändert. Man erkennt leicht den Zusammenhang $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dx}{l}$; $d\rho = \frac{\rho \cdot dx}{l}$.

Damit erhält man: $dp = a^2 \cdot d\rho$.

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (156)$$

Den Wert a nennt man die Schallgeschwindigkeit.

93. Technische Ableitung der Schallgeschwindigkeit.

Der Ingenieur kommt mit der Schallgeschwindigkeit meist bei den Problemen des Dampfturbinenbaues in Berührung. Bei der Berechnung der Lavaldüsen ergibt sich die Schallgeschwindigkeit aus folgender Betrachtung.

In einer Düse expandiert ein Gas bei gleichzeitiger Beschleunigung. Wir betrachten hierzu die bereits früher abgeleitete Gl. (17) $dp = -\rho \cdot c \cdot dc$. Weiter stellen wir die Kontinuitätsgleichung auf: $G/g = f \cdot c \cdot \rho = \text{konst.}$ Hieraus können wir den jeweiligen Querschnitt f der Düse berechnen $f = \frac{G/g}{c \cdot \rho}$.

Die Änderung von f wird durch den Nenner $c \cdot \rho$ bestimmt. Da die Dichteänderungen zunächst gering sind, ist c im Anfang entscheidend, d. h. wegen des Anwachsens von c bzw. $c \cdot \rho$ wird f kleiner, wie wir es in ähnlicher Weise bei inkompressiblen Medien kennen. Bei größeren Druckänderungen macht sich aber schließlich immer mehr die Verminderung der Dichte bemerkbar. Diese wird schließlich viel mehr sinken, als die Geschwindigkeit c anwächst, sodaß das Produkt $c \cdot \rho$ nun kleiner wird. Das bedeutet aber ein Anwachsen des Querschnittes.

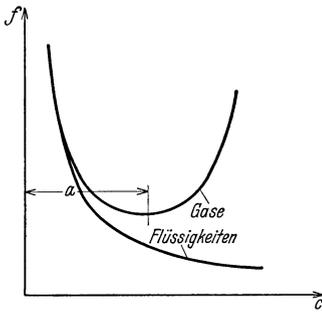


Abb. 254. Querschnittsverlauf einer Düse bei Flüssigkeiten und Gasen.

Tatsächlich müssen solche Düsen von einer gewissen Stelle an im Querschnitt größer werden, was zuerst von Laval festgestellt worden ist. Abb. 254 zeigt f in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit c . Bei inkompressiblen Medien, d. h. bei Flüssigkeiten, ergibt sich für die Querschnittsabnahme eine gleichzeitige Hyperbel, während bei kompressiblen Stoffen, d. h. bei Gasen, der Querschnitt bei $c = a$ das charakteristische Minimum aufweist. Das Maximum von $c \cdot \rho$ kann leicht festgestellt werden:

$$\frac{d(c \cdot \rho)}{dp} = \frac{\partial c}{\partial p} \cdot \rho + \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot c = 0.$$

Durch Einsetzen von $\frac{\partial c}{\partial p} = -\frac{1}{\rho c}$ gemäß Gl. (17) ergibt sich:

$$-\frac{1}{c} + \frac{\partial \rho}{\partial p} c = 0, \text{ hieraus } c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = a.$$

Im engsten Querschnitt herrscht also Schallgeschwindigkeit. Diese rechnerisch sehr einfache Ableitung hat den Nachteil, daß der physikalische Charakter der Schallgeschwindigkeit nicht deutlich zum Ausdruck kommt, weshalb im Rahmen dieser Abhandlung auf die andere Ableitung nicht verzichtet werden konnte.

94. Der Machsche Winkel.

Wir wissen jetzt, daß sich Druckstörungen in einem Medium nur mit Schallgeschwindigkeit fortbewegen können. Bewegt sich nun ein Gas schneller oder, was das Gleiche ist, bewegt sich ein Körper schneller als die Schallgeschwindigkeit, so treten bemerkenswerte Erscheinungen auf.

Die z. B. bei der Umströmung eines Körpers auftretenden Druckunterschiede machen sich nach unseren früheren Ausführungen in der ganzen Strömung bemerkbar. So läßt z. B. das Stromlinienbild die Anwesenheit eines umströmten Körpers bereits in weiter Entfernung vor und hinter dem Körper erkennen. Ein sich bewegendes Modell meldet so seine Ankunft schon lange vorher an. Wir wissen jetzt, daß diese Anmeldung mit der Schallgeschwindigkeit vor sich geht. Bewegt sich jedoch der Körper schneller, so fällt diese Voranmeldung weg.

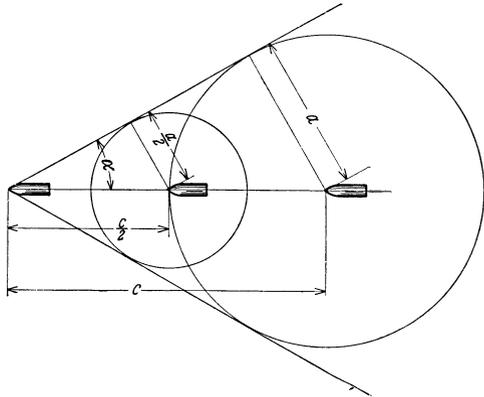


Abb. 255. Veranschaulichung der Druckstörungen, die von einem mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Geschoss ausgehen.

An einem Geschoss, dessen Eigengeschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit sein soll, wollen wir diese Vorgänge studieren. Wir betrachten nach Abb. 255 die Bewegung während einer Sekunde, so daß der zurückgelegte Weg gleich der Geschwindigkeit c ist. Von der Geschossspitze aus werden sich die Druckstörungen nach allen Seiten gleichmäßig mit der Schallgeschwindigkeit a ausbreiten, sodaß diese Störungen nach einer Sekunde auf einem Kreise bzw. einer Kugel vom Radius a zu finden sind. Die Druckstörungen, die z. B. eine halbe Sekunde später von der Spitze ausgehen, werden nach der nächsten hal-

ben Sekunde auf einem Kreise vom Radius $a/2$ zu finden sein, während das Geschöß selbst am Ende der Sekunde den Weg c zurückgelegt hat. Man erkennt, daß die Störungen sich auf einer Geraden ausbreiten, die die Tangente an alle vorgenannten Kreise ist. Der Winkel ist durch $a/c = \sin \alpha$ festgelegt. Im Raume schreitet also die Störung auf einem Kegelmantel

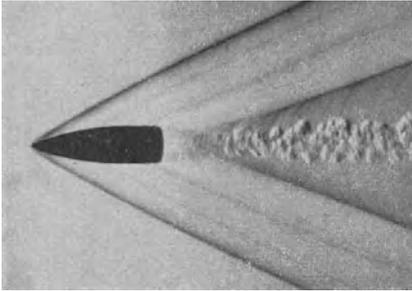


Abb. 256. Schlierenaufnahme eines Infanteriegeschosses nach Cranz.

mit dem Winkel 2α fort. α wird der Machsche Winkel genannt. Dieser wird bei den weiteren Betrachtungen eine wichtige Rolle spielen. So ist z. B. einleuchtend, daß bei Kenntnis dieses Winkels die Geschwindigkeit c des Körpers ohne weiteres bestimmbar ist, sofern die Schallgeschwindigkeit a bekannt ist. Der Vorgang ändert sich nicht, wenn das Geschöß stillsteht und die Luft mit der Geschwindigkeit c das

Geschöß anströmt. Es bilden sich dann ebenfalls zwei Wellen unter dem Winkel 2α , und zwar so, daß die Winkelhalbierende dieser Wellen identisch mit der Anströmrichtung ist. Der Quotient $\frac{c}{a}$ wird auch Machsche Kennzahl genannt.

Genau gilt dieser Satz nur, wenn es sich um kleine Druckänderungen handelt. Nur dann gilt nämlich die Ableitung der sog. „Schallgeschwindigkeit“. Bei größeren Drucksprüngen, wie sie z. B. bei Explosionen vorkommen, ist dieses Gesetz nicht mehr gültig. Wir beschränken uns hier auf die Bemerkung, daß in diesen Fällen weit größere Ausbreitungsgeschwindigkeiten vorkommen.

Die Druckstörungen auf dem Machschen Kegel können optisch sehr genau bestimmt werden. Druckänderungen entsprechen bei Gasen Dichteänderungen. Bei Änderung der Dichte ändert sich bekanntlich der Lichtbrechungskoeffizient. Nach der Töplerschen Schlierenmethode¹ (1864) können diese Dichteänderungen sehr schön sichtbar gemacht werden. Abb. 256 zeigt ein solches Schlierenbild für ein Infanteriegeschöß. Der Machsche Winkel ist hierbei gut sichtbar und ermöglicht die Bestimmung der Geschößgeschwindigkeit.

Aus diesen Betrachtungen folgern wir:

Bei Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit breitet sich jede Störung unter dem Machschen Winkel aus. Unter Störung ist hierbei jede Druckerhöhung oder -erniedrigung

¹ Eine eingehende Beschreibung dieser optischen Methode befindet sich in: Schardin, H.: Das Töplersche Schlierenverfahren, Forschungsheft 367, 1934.

zu verstehen. Die Strömungsrichtung ist identisch mit der Winkelhalbierenden der Machschen Wellen.

Es mag noch hinzugefügt werden, daß die Druckwellen beim Auftreffen auf eine Wand ebenso reflektiert werden wie Wasserwellen u. dgl.

Die bei Überschallströmungen auftretenden Wellenbilder haben äußerlich große Ähnlichkeit mit den Wasserwellen von Wildbächen. Auch dort ist die Druckverteilung unausgeglichen, und es ergeben sich in der Tat in vielen Fällen gleiche Bilder. Preiswerk¹ hat diese Analogie eingehend untersucht.

95. Allgemeine thermodynamische Beziehungen.

Es ist nützlich, einige Formeln zusammenzustellen, die bei Strömungen mit Überschallgeschwindigkeiten häufig praktische Verwendung finden.

Wenden wir z. B. Gl. (38) $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = \int_2^1 \frac{dp}{\gamma}$ für den Fall an, daß $c_1 = 0$ ist, d. h. für das Ausströmen aus einem Druckkessel, so ergibt die Integration für den reibungslosen Fall und die Adiabate die bekannte Gleichung von Saint Venant Wantzel (1839)

$$c = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \quad (157)$$

Der Index 0 bezieht sich hier auf den Kessel, während die ohne Index verwendeten Bezeichnungen sich auf einen beliebigen Querschnitt in der Düse beziehen.

Die Geschwindigkeit kann nicht unbegrenzt wachsen. Die Grenze der Expansion ist das Vakuum. Hierbei ergibt sich aus Gl. (157)

$$c_{\max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (158)$$

Gehen wir vom Atmosphärendruck und 15° aus, so ergibt sich eine Höchstgeschwindigkeit von 757 m/s.

Der Übergang zu den einfachen, früher abgeleiteten Gleichungen bei inkompressiblen Medien ergibt sich leicht, wenn wir unter der Wurzel nach kleinen Druckunterschieden entwickeln. Man erhält dann $c = \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}$.

Für die Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ können unter Benutzung der allgemeinen thermodynamischen Beziehungen leicht bequeme Gebrauchsformeln abgeleitet werden. Unter Benutzung der Adiabatangleichung und der Hauptgasgleichung erhält man folgende Formeln:

$$a = \sqrt{g \cdot \kappa \cdot p \cdot v} = \sqrt{g \cdot \kappa \cdot RT} = \sqrt{2g \cdot RT_0 \frac{\kappa}{\kappa+1}} = \sqrt{2g \cdot p_0 \cdot v_0 \frac{\kappa}{\kappa+1}}; \quad (158a)$$

für Luft ist $a = 18,3 \sqrt{T_0}$ m/s (T_0 Temperatur im Kessel!).

¹ Preiswerk, E.: Anwendung gasdynamischer Methoden auf Wasserströmungen mit freien Oberflächen. Mitt. Inst. Aerodyn. Zürich 1938, Nr. 7.

Die Schallgeschwindigkeit ist somit keine Konstante. Sie ändert sich mit der Temperatur, der Dichte und dem Druck. Bemerkenswert ist das Verhalten im Vakuum. Dort ist $T = 0$, d. h. die Schallgeschwindigkeit muß dort gleich Null werden. Einige Zahlenwerte enthält die folgende Tabelle:

t_0 °C	—50	—20	0	15	50	100
$\frac{a}{m/s}$	272	292	303	310,6	327	354

Für das kritische Druckverhältnis beim Ausfließen aus einem Kessel ergibt sich aus Gl. (157).

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (159)$$

Bei Luft mit $k = 1,4$ ist $p_0/p = 1,893 = 1/0,5283$. Das kritische Temperaturverhältnis ist: $\frac{T_0}{T} = \frac{\kappa + 1}{2}$; für Luft ergibt sich: $\frac{T_0}{T} = 1,2$.

Für das viel verwendete Verhältnis c/a , die sog. Machsche Zahl, erhält man aus Gl. (156) und Gl. 157).

$$\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right]}. \quad (160)$$

Von großem Interesse ist noch der Staudruck, der sich im Staupunkt vor jedem umströmten Körper ergibt. Aus Gl. (157) erhalten wir für den Staupunkt

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} c^2 \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\frac{p_0}{p} - 1}{\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1} = \frac{\rho}{2} c^2 \cdot \varepsilon. \quad (161)$$

Der Staudruck ist danach größer als der früher verwendete Ausdruck $\frac{\rho}{2} c^2$. Die folgende Tabelle enthält einige Werte, die insbesondere zeigen, welche Fehler begangen werden, wenn bei größeren Geschwindigkeiten mit der einfachen Formel gerechnet wird.

Die Ausrechnung ergibt für den hier in Betracht kommenden Fall der Adiabate bei $p = 1 \text{ ata}$; $\rho = \frac{1}{8}$; $\kappa = 1,4$:

p_0/p	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
ε	1,035	1,07	1,1	1,133	1,16	1,189	1,22	1,25	1,28
c	124,3	173,1	209	238	262	284	303	320	336

Nach Walchner¹ kann bei einem kleinem, normgerechten Prandtlstaurohr bei gerader und bis zu 10° Schräganblasung bei Machschen Zahlen bis 0,95 mit der Formel der zweiten Näherung

$$p_1 - p_2 = \varrho/2 c^2 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right] \quad (161a)$$

eine Genauigkeit von 1% Größenordnung erreicht werden.

Die Ausführungen über den Staudruck gelten nur für Geschwindigkeiten, die unterhalb der Schallgeschwindigkeit liegen. Bei größeren Geschwindigkeiten wird durch den Verdichtungsstoß (s. S. 256) der Vorgang wesentlich modifiziert.

96. Konstruktion ebener Strömungsbilder bei Überschallgeschwindigkeit.

Für die ebene Potentialströmung, bei der in parallelen Ebenen immer das gleiche Strömungsbild vorhanden ist, lassen sich sehr präzise Angaben im Falle der Überschallströmung machen.

Wir denken uns ein Gas vom Drucke p_0 und der Dichte ϱ_0 aus einem Kessel durch eine düsenförmige Leitung ausströmen. Gl. 157 gibt dann nach früherem die Geschwindigkeit für jeden Querschnitt in Abhängigkeit vom Druckverhältnis p_0/p an. Wir schreiben diese Gleichung in folgender Form:

$$c^2 = \frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\varrho} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right] = \frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\varrho} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - \frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p}{\varrho}.$$

Berücksichtigen wir $a^2 = \kappa \cdot \frac{p}{\varrho}$ gem. Gl. 158a, so erhalten wir nach einigen leichten Umformungen unter Berücksichtigung des Adiabatengesetzes:

$$c^2 = c_{\max}^2 - a^2 \frac{2}{\kappa - 1}. \quad (162)$$

Die Geschwindigkeit c hängt also fest mit der jeweiligen Schallgeschwindigkeit zusammen. Mit größerem c wird a kleiner, bis schließlich bei der größten Geschwindigkeit c_{\max} die Schallgeschwindigkeit gleich Null wird (Ausströmen in das Vakuum).

Wenn wir nun in einem Polardiagramm die Geschwindigkeit c so darstellen, daß der Winkel zur u -Achse den Machschen Winkel bildet, so ist wegen $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ die Ordinate a immer die jeweilige Schallgeschwindigkeit, und $c^2 = u^2 + a^2$, (Abb. 257a). Mit Gl. (162) ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_{\max}^2 - a^2 \frac{2}{\kappa - 1} &= u^2 + a^2, \\ c_{\max}^2 &= u^2 + a^2 \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}. \end{aligned} \quad (163)$$

Die c -Kurve stellt also eine Ellipse dar mit dem Achsenverhältnis $\sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}$. In Abb. 257a ist die Ellipse mit den zugehörigen Größen eingetragen. Der kleine Kreis hat den Radius a_{\max} , während $c_{\max} = a \cdot \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}$ den Radius des großen Kreises

¹ Walchner, O.: Über den Einfluß der Kompressibilität auf die Druckanzeige eines Prandtlrohres bei Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit. Jb. dtsh. Luftf.-Forschg. 1 (1938) Flugwerk 578—582.

darstellt. Nach Gl. 157 ist jeder Geschwindigkeit ein bestimmtes Druckverhältnis zugeordnet. Hieraus läßt sich der Druck, der bei irgendeiner Geschwindigkeit

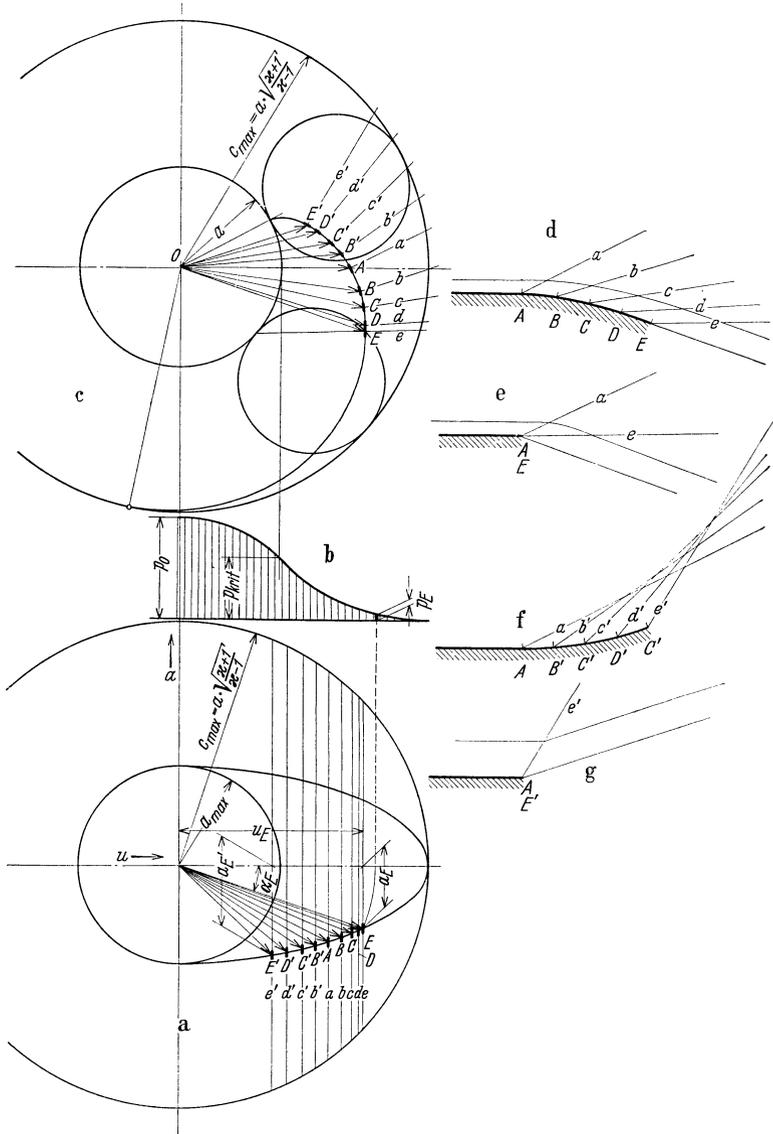


Abb. 257. Konstruktion von Strömungsbildern mit Überschallgeschwindigkeit nach dem Verfahren von Prandtl-Busemann.

herrscht, leicht berechnen. Über der Ellipse ist in Abb. 257b diese Druckkurve eingezeichnet. Aus den Hilfslinien für α_E ist die Zuordnung zu erkennen. Die Druckkurve beginnt mit einer Parabel und hat bei Erreichung der Schallgeschwindigkeit

einen Wendepunkt, um sich dann mit anderer Krümmung dem Vakuum (d. h. $p = 0$) zu nähern.

Mit Gl. (163) und Abb. 257 a kennen wir den Machschen Winkel α , der bei einer bestimmten Geschwindigkeit zu erwarten ist. Die Machschen Störwellen stellen aber Druckunterschiede dar, die gemäß früheren Überlegungen Anlaß zu Geschwindigkeitsänderungen geben. Die Richtung dieser Geschwindigkeitsänderungen, d. i. der Beschleunigungen, muß aber in Richtung der Druckunterschiede fallen, d. h. immer senkrecht zu den Machschen Wellen. Damit können wir angeben, in welcher Richtung sich bei einer bestimmten Überschallgeschwindigkeit die Geschwindigkeiten ändern. In Abb. 257 a bedeutet definitionsgemäß die u -Achse die Richtung des Machschen Winkels. Die dazu senkrechte Richtung ist somit identisch mit der Richtung der Geschwindigkeitsänderungen. Für eine Reihe weiter unten benutzter Geschwindigkeiten sind in Abb. 257 a kleine Geschwindigkeitsänderungen eingezeichnet (kurze, senkrechte Striche). In Verlängerung dieser kurzen Stücke sind die Sehnen des großen Kreises eingezeichnet. Durch die Ellipse werden diese Sehnen bekanntlich im Verhältnis der beiden Halbachsen geteilt. Zieht man nun alle Sehnen von einem Punkte des großen Kreises strahlenförmig bis zur gegenüberliegenden Kreiskontur, so werden alle Ellipsenpunkte durch zwei Kreise dargestellt, die den kleinen und großen Ellipsenkreis berühren. In Abb. 257 c ist ein solcher Kreis eingetragen. Wenn man nun den neuen Kreis auf dem kleinen Kreis abrollt, so bewegen sich die Geschwindigkeitsänderungen auf einer Epizykloide. Die kleinen Geschwindigkeitsänderungen für die Punkte E bis E' sind mitübertragen. Die Endpunkte der Geschwindigkeiten c müssen somit auf dieser Zykloide liegen, sodaß wir nunmehr die Richtung jeder Geschwindigkeit in der Ebene kennen. Auch die Richtungen der Machschen Winkel sind damit bekannt. Dazu brauchen wir nur die senkrechten Richtungen der Abb. 257 a auf Abb. 257 c zu übertragen. Die Linien $e' d' c' b' a b c d e$ stellen diese Richtungen dar.

Dieser einfache Zusammenhang, der von Prandtl und Busemann¹ entdeckt wurde, gestattet nun in der Tat, Überschallströmungen zu zeichnen. Einige Beispiele sollen die Anwendung erläutern.

Zunächst soll eine beschleunigte Strömung betrachtet werden. Entlang einer ebenen Wand soll nach Abb. 257 d eine Strömung mit Überschallgeschwindigkeit ankommen, die von A ab entlang einer gekrümmten Wand expandieren soll. Von A bis E ist somit eine beschleunigte Strömung vorhanden. In der Charakteristik ist OA die Geschwindigkeit der Parallelströmung. Die Geschwindigkeit in B wird dadurch erhalten, daß wir in B die Tangente ziehen und diese Richtung in die Charakteristik übertragen. Es ergibt sich OB , sodaß der zugehörige Machsche Winkel durch den Fahrstrahl b gebildet wird, während in A diese Richtung durch a dargestellt wird. Auch diese Richtungen werden in die Strömung übertragen. Der Anlaß zu den Machschen Wellen bildet einfach die Druckänderung in A , B usw. So läßt sich für beliebig viele Punkte die jeweilige Machsche Welle eintragen, wie es in Abb. 257 d von A bis E geschehen ist. Was kann nun aus diesem Bilde gefolgert werden? Alle Stromlinien kommen gerade an und werden erst beim Auftreffen auf den Strahl a abgelenkt. Von da ab findet eine stetige Ablenkung statt, bis schließlich die Stromlinie bei e gerade austritt. Eine Stromlinie ist in der Abb. 257 d eingetragen. Die Bedeutung der Machschen Wellen ist somit klar. Nur innerhalb der von diesen Wellen gebildeten Sektoren erfährt die Strömung eine Ablenkung. Ganz im Gegensatz zu den Unterschallströ-

¹ Prandtl, L. und A. Busemann: Näherungsverfahren zur zeichnerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit. Stodola Festschrift. Zürich 1929.

mungen finden also hier unstetige Richtungsänderungen statt, die plötzlich auf einer Linie beginnen. Sobald somit die Machschen Winkel bekannt sind, läßt sich die Strömung genau konstruieren.

Wenn nun in Abb. 257e die Krümmung AB fehlt, d. h. in eine scharfe Ecke zusammenschumpft, so findet grundsätzlich das Gleiche statt. Voraussetzung ist natürlich, daß das Druckverhältnis dasselbe bleibt. Es ergibt sich hier ein Sektor αe , in dem die Umlenkung stattfindet. Für die dort eingezeichnete Stromlinie gilt grundsätzlich das Gleiche wie vorhin. Es handelt sich um die sog. „Prandtl'sche Ecke“, die für viele Anwendungen eine anschauliche Vergleichsbasis bildet.

Wenn nach Abb. 257f die Wand nach oben gekrümmt ist, findet eine Kompression, d. h. eine Verzögerung, statt. Konstruiert man jetzt nach der gleichen Regel die Störungswellen ($\alpha b' c' d' e'$), so laufen diese zusammen, während bei Expansion eine Divergenz eintritt. An einigen Punkten schneiden sich jetzt die Wellen. Da die einzelnen Wellen kleine Druckänderungen bedeuten, findet bei ihrem Schnitt eine Addition solcher Druckänderungen statt. Dies bedeutet aber notwendigerweise einen endlichen Drucksprung. Derartige Drucksprünge finden nun, genau wie es die Theorie voraussagt, auch tatsächlich statt. Man spricht von Verdichtungsstößen, die bei Überschallströmungen eine sehr wichtige Rolle spielen. Von Riemann stammt die theoretische Voraussage, Stodola erbrachte die experimentelle Bestätigung.

Die Kompressionswellen, die bei Abb. 257f sich in einem engen Bereich zu einem Verdichtungsstoß treffen, fallen alle zusammen, wenn nach Abb. 257g die Wand plötzlich unter einem Winkel abgelenkt wird oder, was das Gleiche bedeutet, wenn bei einer freien Ecke AE die gleiche Ablenkung dadurch erzwungen wird, daß in dem freien Raum der gleiche Druck herrscht wie bei Abb. 257f. Es ergibt sich hier ein Verdichtungsstoß auf einer Linie. Die Strömung wird an dieser Stelle plötzlich abgelenkt, wie z. B. eine in Abb. 257g eingezeichnete Stromlinie zeigt. Kaum ein anderes Beispiel kennzeichnet deutlicher den Unterschied zwischen Unter- und Überschallströmung.

Für alle Beispiele kann der Druckverlauf sehr leicht aus der in Abb. 257b enthaltenen Druckkurve entnommen werden.

97. Der Verdichtungsstoß.

Die vorhin festgestellten Verdichtungsstöße sind in der Tat ein charakteristisches Merkmal für Überschallströmungen, sodaß dieser Vorgang eingehender erläutert werden muß. Die Strömung in einer geraden Rohrleitung nach Abb. 258 ist dazu besonders geeignet. Wenn hier eine Strömung mit Überschallgeschwindigkeit vorhanden ist, kann plötzlich an einer Stelle $A-B$ die Geschwindigkeit sich von c_1 auf c_2 in einem Verdichtungsstoß verzögern. Bei diesem Stoß wächst der Druck von p_1 auf p_2 . Die theoretische Untersuchung dieses Vorganges nach dem Impulssatz zeigt nun, daß hierbei immer die Überschallströmung in eine Unterschall-

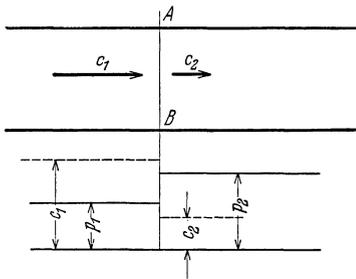


Abb. 258. Verdichtungsstoß in einer Rohrleitung.

strömung übergeht, gemäß der Beziehung:

$$c_1 \cdot c_2 = a^2.$$

Der Vorgang hat große Ähnlichkeit mit dem Schwall S. 89, sowie mit dem Zusammensturz der Kondensationsblasen bei der Kavitation S. 244. In gleicher Weise ergibt sich ein Stoßverlust. In der Sprache der Thermodynamik bedeutet dies eine Entropievermehrung. Ein Verdünnungsstoß ist nicht möglich, da er zu einer Entropieverminderung führen würde.

Außer bei Leitungen und Düsen findet immer bei der Umströmung eines stumpfen Hindernisses ein Verdichtungsstoß statt. Aus dem Überschneiden der Störungswellen kann dies in gleicher Weise wie aus Abb. 257f geschlossen werden. Betrachten wir z. B. nach Abb. 259 die Umströmung einer Profilmase, so bildet sich der Verdichtungsstoß in einer Kopfwelle aus, die in einem kleinen Abstand vor dem Profil zu finden ist. Die auf den Staupunkt *A* aufstoßende Verzweigungsstromlinie erfährt damit ein merkwürdiges Schicksal. Bis zur Kopfwelle ist Druck und Geschwindigkeit in der ganzen Strömung konstant. An der Kopfwelle steigt der Druck sprunghaft, und anschließend bis zum Staupunkt stetig. Für die Geschwindigkeit gilt ein umgekehrtes Verhalten. Infolge des Stoßverlustes¹ ist der Staudruck, d. h. der Druck bei *A*, geringer als bei adiabatischer Verdichtung. Dies ist der Grund, weshalb Gl. (161) nur bis zur Schallgeschwindigkeit Gültigkeit besitzt.

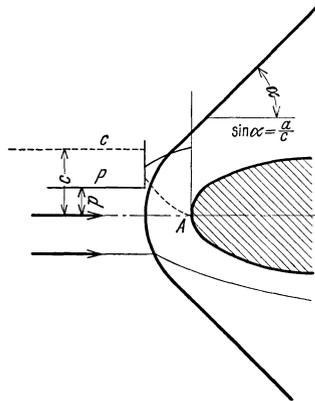


Abb. 259. Veranschaulichung des Verdichtungsstoßes vor einer Profilmase.

Der an der Kopfwelle eintretende Überdruck legt sich je nach der Ausbildung des Profils in breiter Front auf die Profilmase und verursacht einen Widerstand, der selbst bei reibungsloser Bewegung eintritt. Zu dem Flächen- und Formwiderstand kommt somit ein zusätzlicher Widerstand, der mit dem Wellenwiderstand eines Schiffes vergleichbar ist.

Die Kopfwelle geht stetig in den Machschen Winkel über. Eine grundsätzliche Änderung erfährt das Bild, wenn die Nase spitz ausgebildet ist. Die Kopfwelle hebt sich dann nur unwesentlich vom Staupunkt ab, und ihre Druckwirkung wird mehr auf die Seitenflächen des Profils

Die Kopfwelle geht stetig in den Machschen Winkel über. Eine grundsätzliche Änderung erfährt das Bild, wenn die Nase spitz ausgebildet ist. Die Kopfwelle hebt sich dann nur unwesentlich vom Staupunkt ab, und ihre Druckwirkung wird mehr auf die Seitenflächen des Profils

¹ Beim Verdichtungsstoß wird $\frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}$ in Wärme umgesetzt. Diese örtliche Wärmezufuhr stört die Homogenität des Mediums, weshalb hier der Thomsonsche Satz nicht mehr gültig ist.

übertragen, sodaß in Strömungsrichtung nur kleinere Komponenten verbleiben. Daraus folgt, daß bei Überschallströmungen die Körper vorne spitz ausgeführt werden müssen. Damit ist z. B. einleuchtend, welch großen Fortschritt die Einführung des Spitzgeschosses brachte.

Die äußere Übereinstimmung mit dem Wellenwiderstand von Schiffen ist vollkommen. Denn auch hier ist es selbstverständliche Gewohnheit, den Bug eines Schiffes spitz auszuführen.

Zwischen Kopfwelle und Staupunkt vermindert sich die Geschwindigkeit bis auf Null. Dies ist tatsächlich der einzige Fall, wo bei Überschallströmungen Unterschallgeschwindigkeit vorkommt.

Die Widerstandsbeiwerte für geschoßartige Körper (Abb. 260) zeigen sehr deutlich den Einfluß der Schallgeschwindigkeit. In der Nähe der

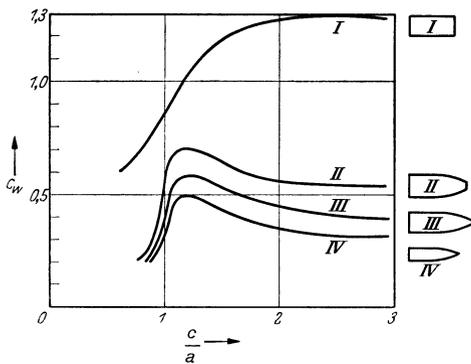


Abb. 260. Widerstandsbeiwerte für verschiedene Geschoßformen bei Überschallgeschwindigkeit.

Schallgeschwindigkeit steigen die Beiwerte sprunghaft; zu dem Flächen- und Formwiderstand kommt jetzt der Wellenwiderstand hinzu. Nachher senken sich die Werte wieder und scheinen einen konstanten Wert anzustreben. Dies kommt daher, weil der Sog hinter dem Geschoß mit Erreichen des Vakuums seine Grenze findet und auch die Wellenform sich ändert.

98. Der X-Stoß (Kondensationsstoß).

Wenn feuchte Luft oder Wasserdampf durch eine Lavaldüse strömt, zeigt sich hinter dem engsten Querschnitt infolge der Abkühlung, die bei adiabatischer Expansion hier mehr als 50° beträgt, eine sprunghaft auftretende Kondensation. Diese tritt immer in zwei sich wie ein X schneidenden Verdichtungsstößen ein, eine Erscheinung, auf die zuerst Wieselsberger¹ aufmerksam gemacht hat. Wegen des äußeren Aussehens wurde vorgeschlagen, von einem „X-Stoß“ zu sprechen. Es handelt sich um einen Verdichtungsstoß mit Drosselverlust bei gleichzeitiger Verringerung der Machschen Zahl. Um den hierbei auftretenden Energieverlust zu veranschaulichen, mag darauf hingewiesen werden, daß bei 50% relativer Feuchtigkeit ein Drosselverlust von etwa 15–21% entsteht. Für verschiedene Anwendungen (z. B. Überschallwindkanäle) macht sich zudem noch ein unangenehmer schädlicher Einfluß auf die Geschwindigkeitsverteilung bemerkbar, weshalb hier tunlichst mit künstlich getrockneter Luft gearbeitet wird.

Beim X-Stoß wird Energie zugeführt, nämlich die bei der Kondensation frei-

¹ Hermann, R.: Der Kondensationsstoß in Überschallwindkanälen. Luft-Forschg. 1942, S. 201.

werdende Wärmemenge. Im Gegensatz zu den sonstigen Verdichtungsstößen führt der Kondensationsstoß von Überschallgeschwindigkeit durch Druckerhöhung wieder zu Überschallgeschwindigkeit. Neuere theoretische Betrachtungen über diesen Vorgang stammen von Oswatitsch¹.

99. Lavaldüsen.

Düsen, die bis zu einem Querschnitt verengt und dann erweitert sind, nennt man nach dem Erfinder Lavaldüsen. Bei der Durchströmung solcher Düsen werden fast alle Merkmale beobachtet, die für eine Überschallströmung typisch sind.

Da durch jeden Querschnitt der Düse dieselbe Menge strömen muß, gilt nach der Kontinuitätsgleichung $f = \frac{G}{c \cdot \gamma}$ und für 1 kg/s durchströmende Menge für einen beliebigen Querschnitt:

$$f = \frac{1}{c \cdot \gamma} = \frac{1}{c \cdot \rho \cdot g}.$$

Aus Gl. (157) erhält man nach einer leichten Umformung:

$$c \cdot \rho = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} p_0 \cdot \rho_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}} \right]} = \varphi \left(\frac{p}{p_0} \right).$$

Für ein Beispiel ist in Abb. 261 die Fläche f in Abhängigkeit vom Druck aufgetragen. Der Anfangsdruck ist hierbei 30000 kg/m², die Temperatur 30° C. Für den kritischen Druck ergibt sich, wie bereits früher (S. 248) abgeleitet, ein Minimum des Querschnittes, in dem Schallgeschwindigkeit herrscht. Zu einer weiteren Beschleunigung ist eine Erweiterung notwendig. Faßt man die Düsenströmung als Strömung durch eine Stromröhre irgendeiner allgemeinen reibungsfreien Bewegung auf, so läßt sich folgende allgemeine Regel aufstellen:

Bei Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit kann eine Beschleunigung nur durch Querschnittserweiterung erreicht werden. Auch die Umkehrung gilt, wie schon aus Abb. 257 hervorging. Eine Verzögerung kann bei Überschallströmungen nur durch Querschnittsverengung erreicht werden.

Das Verhalten ist also genau umgekehrt wie bei Unterschallströmungen.

Veranschaulicht werden diese Unterschiede am besten, wenn man

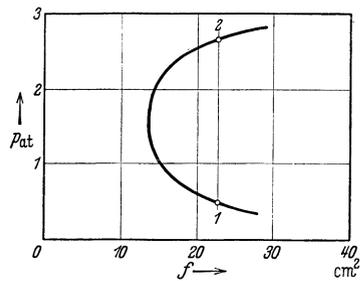


Abb. 261. Druck- und Querschnittsverlauf für eine erweiterte Düse.

¹ Oswatitsch, Kl.: Kondensationserscheinungen in Überschalldüsen. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942) Nr. 1.

nach Abb. 262 die Druckverteilung längs einer Lavaldüse betrachtet. Wir wollen hier das Druckverhältnis stetig vom unterkritischen bis zum überkritischen Wert ändern. Bevor wir im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht haben, hat die einfache Form der Bernoullischen Gleichung bzw. Gl. (36), die die Dichteänderung mitberücksichtigt, Gültigkeit. Der Druck nimmt bis zum engsten Querschnitt ab und steigt im erweiterten Teil wieder auf den ursprünglichen Wert abzüglich des Reibungsverlustes (Kurve I in Abb. 262).

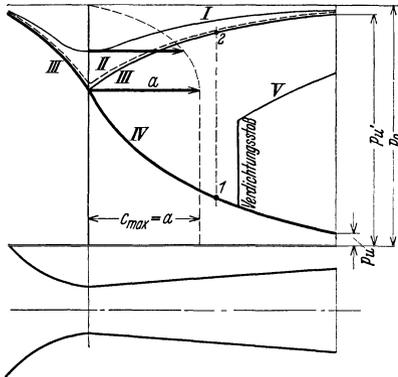


Abb. 262. Gesamtüberblick über den Druckverlauf und die Geschwindigkeit der engsten Stelle in einer Lavaldüse bei unter- und überkritischen Druckverhältnissen.

Die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt steigt nach früher abgeleiteten Formeln mit wachsendem Druckverhältnis. In Abb. 262 ist diese Geschwindigkeit durch eine gestrichelte Kurve angedeutet. Mit der Geschwindigkeit steigt natürlich auch die durchfließende Menge. Dieses Verhalten bleibt bestehen, bis wir im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht haben. Kurz vorher haben wir den Verlauf II. Sobald nun die Schallgeschwindigkeit im engsten

Querschnitt erreicht wird, muß nach obiger Ableitung die Geschwindigkeit im erweiterten Teil zunehmen, der Druck abnehmen. Es ergibt sich der Druckverlauf IV. Merkwürdig ist, daß beim Übergang von III nach IV der Enddruck sprunghaft von p_u' auf p_u sinkt. Tatsächlich können sich jedoch im erweiterten Teil zwei Drücke einstellen. Denn sowohl die Kurve III wie IV kann sich beim Erreichen der Schallgeschwindigkeit einstellen. In einem Querschnitt kann damit sowohl der Punkt 1 wie 2 erreicht werden. In Wirklichkeit stellen sich diese Drücke auch ein, wenn das kritische Druckverhältnis etwas über- oder unterschritten wird. Diese Tatsache steht auch im Einklang mit Abb. 261, wo sich für einen Querschnitt zwei verschiedene mögliche Drücke ergaben.

Liegt der Enddruck zwischen p_u und p_u' , so findet nach den Beobachtungen und der Theorie ein Verdichtungsstoß statt. An einer Stelle des erweiterten Kanals springt der Druck dann plötzlich auf eine bestimmte Höhe und nähert sich dann stetig einem Enddruck, s. Kurve V.

Im engsten Querschnitt kann keine höhere als die Schallgeschwindigkeit erreicht werden. Die Geschwindigkeitskurve bleibt von da ab konstant. Es ist also nicht möglich, mehr als eine bestimmte Menge durch die Düse durchzudrücken. Eine Vergrößerung des Druckverhältnisses nützt dann nichts mehr.

100. Rohrreibung bei Expansion der Gase im Rohr.

Bei langen Gasleitungen ist der Druckabfall oft so groß, daß eine merkliche Expansion eintritt. Mit kleiner werdendem Druck wird das spezifische Volumen eines Gases größer, sodaß in der Strömungsrichtung die Geschwindigkeit immer größer wird. Bei Gasfernleitungen, den Druckluftleitungen der Bergwerke usw. ist dies z. B. der Fall. Der Druck im Rohr nimmt hier um mehrere Atmosphären ab.

Für den wichtigen Fall, daß die Gastemperatur konstant bleibt, d. h. für die Isotherme, wollen wir die Rechnung durchführen.

Die Rohrreibungsformel können wir jetzt nur für ein kleines Rohrstück von der Länge dx anwenden, weil hier keine merkliche Druckänderung auftritt.

$$dp = \lambda \frac{dx}{d} \cdot \frac{\gamma}{2g} c^2.$$

Berücksichtigen wir die Kontinuitätsgleichung $c \cdot \gamma = c_1 \cdot \gamma_1$ und das Gesetz der Isotherme $p/\gamma = p_1/\gamma_1$, so erhalten wir

$$\frac{\gamma_1}{p_1} \cdot p dp = \frac{\lambda}{d} \frac{c_1^2 \gamma_1^2}{2g} dx.$$

Die Integration zwischen zwei Stellen 1. und 2. ergibt:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\gamma_1}{2g} c_1^2 \frac{p_1}{p_1 + p_2}. \quad (164)$$

Gegenüber dem bisherigen Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit ergibt sich somit eine Vergrößerung des Druckabfalles um den Faktor

$$\frac{p_1}{\frac{p_1 + p_2}{2}}.$$

Umfangreiche Versuche¹, die an Gasfernleitungen durchgeführt wurden, ergaben, daß für λ die gleichen Formeln verwendet werden können, die wir bereits kennengelernt haben. Als guter Mittelwert für Gasfernleitungen wird $\lambda = 0,02$ empfohlen.

Die explizite Ausrechnung der Gl. (164) nach Δp ist leicht durchführbar und ergibt

$$\Delta p = p_1 \left[1 - \sqrt{1 - 2 \lambda \frac{\gamma_1}{p_1} \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2g}} \right]. \quad (165)$$

Bei adiabatischer Expansion, ein Fall, der bei kürzeren Leitungen gelegentlich vorkommt, läßt sich die Rechnung ebenfalls durchführen. Es sei hier auf Richter² verwiesen.

Die Rechnungen gelten bis in die Nähe der Schallgeschwindigkeit. Ohne weiteres ist es nicht möglich, in einer Leitung von gleichem Querschnitt eine Strömung mit Schallgeschwindigkeit zu erhalten. Dazu ist eine vorgeschaltete Lavaldüse notwendig. In diesen Fällen springt die Strömung meist schon nach kurzen Rohrlängen durch einen Verdichtungsstoß in Unterschallströmung um. Von Frössel³ wurden diese Verhältnisse untersucht. Er fand u. a., daß die λ -Werte für Unter- und Überschallströmung nicht verschieden sind von den Werten bei volumbeständigen Flüssigkeiten.

Es sei noch bemerkt, daß bei der rechnerischen Ermittlung des Reibungswider-

¹ Gesammelte Berichte aus Betrieb und Forschung der Ruhrgas-A.-G. (Selbstverlag).

² Richter: Rohrhydraulik, S. 62. Berlin: Springer 1934.

³ Frössel: Forschung 7 (1936) 75.

standes in einigen Fällen wegen der großen Beschleunigung in den Rohren das Beschleunigungsglied der Bewegungsgleichungen nicht vernachlässigt werden kann. Bei kurzen Rohrstücken und hoher Geschwindigkeit ergeben sich solche Fälle, über die bei Richter¹ Näheres zu finden ist.

101. Einfluß der Kompressibilität bei Unterschallströmungen.

Bei Geschwindigkeiten über 150 m/s macht sich bereits der Einfluß der Kompressibilität bemerkbar; z. B. weicht nach S. 252 bei $c = 170$ m/s der Staudruck schon um 7 vH von dem Wert $\frac{\rho}{2} c^2$ ab. Mit Rücksicht auf

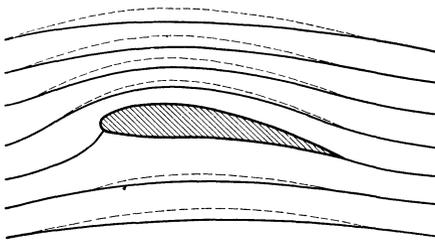


Abb. 263. Stromlinienverlauf bei der Umströmung eines Tragflügels für kompressible (gestrichelt) und inkompressible Medien.

die zahlreichen technischen Anwendungen, die für solche Geschwindigkeiten vorliegen, ist die Frage von Interesse, wie wenigstens in erster Näherung eine Berücksichtigung möglich ist.

Ein einfacher qualitativer Einblick ist bei der Tragflügelströmung möglich (Abb. 263). Die ausgezogenen Stromlinien

sollen für die inkompressible Strömung gelten. Was wird nun geschehen, wenn der Flügel unter dem gleichen Anstellwinkel mit einem kompressiblen Gas angeblasen wird? Unter dem Tragflügel ist Überdruck. Das Gas wird zusammengedrückt und benötigt jetzt einen kleineren Querschnitt. Die neuen Stromlinien (gestrichelt) werden also im Überdruckgebiet zusammengedrückt; umgekehrt wird auf der Saugseite das Gas sich ausdehnen und die Breite der Stromlinien vergrößern, gemäß den gestrichelten Linien der Abb. 263. Das Gesamtbild erfährt somit eine Änderung in dem Sinne, daß die Stromlinien stärker gekrümmt sind. Es läuft auf das Gleiche hinaus, wenn man bei inkompressiblen Strömungen dem Profil eine stärkere Wölbung gibt.

Von Prandtl stammt eine Berechnung dieses Falles, die allerdings nur dann strenge Gültigkeit hat, wenn die in der Strömung auftretenden Übergeschwindigkeiten klein gegen die Hauptbewegung sind.

Danach sind die Auftriebsbeiwerte und die Profileigenschaften gleich,

wenn die Profildicke und der Anstellwinkel um den Faktor $\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$ geringer werden gegenüber den Werten bei inkompressibler Strömung.

Beispiel. Ein Tragflügel von 10% Dicke soll bei einer Geschwindigkeit von 200 m/s verwendet werden. Um wieviel muß die Dicke verringert werden, wenn die

¹ Richter: Rohrhydraulik. S. 62. Berlin: Springer 1934.

gleichen Profileigenschaften erwartet werden?

$$\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{200}{310}\right)^2} = 0,765,$$

d. h. das Profil muß um 23,5 vH dünner werden bei entsprechender Verminderung des Anstellwinkels.

Von großem praktischen Interesse ist noch die Betrachtung der verzögerten Strömung. Ein Diffusor muß so gebaut werden, daß die Strömung nicht abreißt. Ein kompressibles Gas wird nun im Diffusor verdichtet und benötigt weniger Querschnitt als ein inkompressibles Medium. Unter Beibehaltung der Erweiterung würde also die Strömung ab-

reißen. Die notwendige Verengung ist wieder $\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$. Es ergibt

sich somit folgende wichtige Regel: Bei höheren Geschwindigkeiten ist der zulässige Erweiterungswinkel um so kleiner, je mehr sich die Geschwindigkeit der Schallgeschwindigkeit nähert, bis schließlich, bei Erreichung der Schallgeschwindigkeit, eine Erweiterung zu keiner Verzögerung mehr führt und bei noch höheren Geschwindigkeiten eine Verengung zur Erzielung einer Verzögerung nötig ist. Für den Erweiterungswinkel α' ergibt sich somit folgendes Gesetz:

$$\alpha' = \alpha \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}, \quad (166)$$

wo α der zulässige Erweiterungswinkel für inkompressible Strömung ist.

Bei den Leitkanälen von Turbokompressoren und Aufladern spielt diese Erkenntnis eine große Rolle. Die notwendigen Verkleinerungen des Diffusorwinkels sind, wie die nachstehende Tabelle zeigt, bei größerer Geschwindigkeit erheblich.

c m/s	100	150	200	250	275	310
$\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$	0,947	0,875	0,765	0,593	0,462	0
α' bei $\alpha = 8^\circ$	7,57	7	6,12	4,75	3,7	0

Der beschleunigte Teil einer Überschallströmung, wie er z. B. im erweiterten Teil einer Lavaldüse zu finden ist, hat in ähnlicher Weise nur geringe Ablösungsneigung, genau wie die beschleunigte Unterschallströmung. Selbst wenn man die Erweiterung plötzlich ausführt, z. B. durch verschiedene Treppen, bilden sich nur kleine Ablösungszonen aus, die auf die Gesamtströmung wenig Einfluß haben. Untersuchungen von Busemann¹ haben dies sehr deutlich gezeigt.

¹ Busemann: Gasdynamik in Wien-Harms IV, 1 S. 405, Abb. 32.

102. Tragflügeleigenschaften bei Überschallströmungen.

Nach den bisherigen Untersuchungen können wir bereits vermuten, daß Profile bei Überschallströmungen am besten vorne und hinten zugeschärft werden.

Für solche Profile, die zudem vernachlässigbar dünn sind, hat Ackeret¹ eine neue Berechnungsgrundlage aufstellen können, die als Grundlage die Umströmung der Ecke benutzt. Bemerkenswert ist, daß bei Tragflügeln, wie bei allen umströmten Körpern, selbst bei Reibungslosigkeit durch die Verdichtungsstöße ein Widerstand auftritt, der sein Äquivalent in der Entropievermehrung durch die Verdichtungsstöße findet.

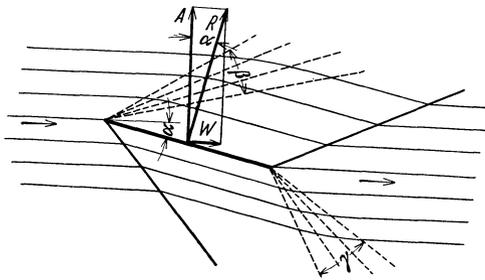


Abb. 264.
Strömungsbild und Kräfte bei der schrägen Anströmung einer ebenen Platte mit Überschallgeschwindigkeit.

An einer ebenen, schräg angestellten Platte kann das grundsätzliche Verhalten eines Tragflügels leicht verfolgt werden, ein Idealfall, der deshalb besonders wichtig ist, weil bei Überschallströmungen dünne scharfe Profile besser sind als dickere abgerundete. Die Eintrittskante (Abb. 264) zwingt die obere Strömung — entsprechend unseren früheren Überlegungen auf S. 254 — zu einer Expansion im Winkelraum β . Danach ist die obere Strömung in Plattenrichtung umgelenkt und bleibt in dieser Richtung, bis durch den von der Hinterkante ausgehenden Verdichtungsstoß eine weitere Umlenkung in die anfängliche Richtung erfolgt. Auf der Unterseite haben wir auf einer Wellenlinie, entsprechend Abb. 264, einen Verdichtungsstoß und unetige Umlenkung in Plattenrichtung. An der Hinterkante erfolgt wieder eine Umlenkung in die ursprüngliche Richtung im Winkelraum γ . Hier wird also eine Expansion stattfinden. Man erkennt, daß an der Hinterkante, ebenso wie an der Vorderkante, ein endlicher Drucksprung vorhanden ist, der jeweils auf der einen Seite zu Verdünnungswellen, auf der anderen zu Verdichtungsstößen Anlaß gibt.

Die Geschwindigkeit ist auf der ganzen oberen und unteren Seite konstant. Das Gleiche gilt natürlich auch für den Druck. Die resultierende Luftkraft greift somit in der Mitte der Platte an und steht senkrecht darauf. Daraus folgt für die Gleitzahl

$$\varepsilon = \alpha = \frac{W}{A}. \quad (167)$$

In Wirklichkeit ist wegen der vernachlässigten Reibung W größer, so daß wir folgendes feststellen:

¹ Ackeret: ZFM 1925, S. 72.

Die Gleitzahl eines Profils bei Überschallströmung ist immer größer als der Tangens des Anstellwinkels.

Bei den Profilen mit endlicher Dicke kann man ebenfalls das auf S. 253 entwickelte Verfahren anwenden. Abb. 265 zeigt z. B. das Schlierenbild eines symmetrischen Profils, das sich sehr genau mit der theoretischen Konstruktion deckt.

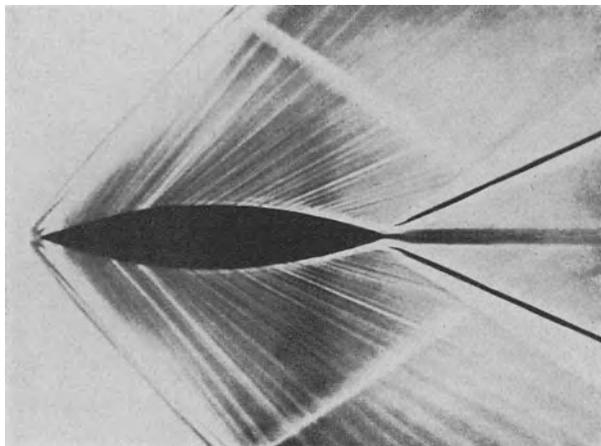


Abb. 265. Schlierenbild bei der Umströmung eines symmetrischen Profils nach Busemann.

Der große Unterschied gegenüber der Unterschallströmung geht sehr gut auch aus den Meßergebnissen hervor. Abb. 266 enthält Messungen bei 1,47facher Schallgeschwindigkeit von Busemann¹. Ein verkleideter Zylinder wird einmal von vorne und dann von hinten angeströmt. Man erkennt, daß der mit der Spitze vorausbewegte Körper beinahe den halben Widerstand hat wie der umgekehrt bewegte Körper. Es ist deshalb durchaus richtig, wenn man sagt, daß ein normaler Tragflügel sich bei Überschallströmung besser nach rückwärts bewegt! Die für Unterschallströmung aufgebaute Tragflügeltheorie (z. B. induzierter Widerstand, Berechnung der Beeinflussung von Doppeldeckern usw.) verliert hier ihre Bedeutung.

Nach Busemann² existiert bei zwei Profilen endlicher Dicke eine solche Doppeldeckeranordnung, daß die auf beide Flügel wirkende Gesamtkraft in ebener reibungsloser Strömung gleich oder nur wenig größer ist als bei einer dünnen Platte. Dies kommt dadurch zustande, daß bei dieser Anordnung die zwischen den Profilen verlaufenden Wellen sich gerade aufheben.

¹ Busemann: Forschung 4, S. 87.

² Busemann, A.: Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit. Luft-Forschg. 1935, S. 210.

Bereits vor Erreichung der Schallgeschwindigkeit ändern sich die Profileigenschaften. Abb. 267 zeigt die Polaren für Machsche Zahlen von 0,5 bis 0,8. Bei 0,5 ist noch ziemlich genau die normale Polare vorhanden.

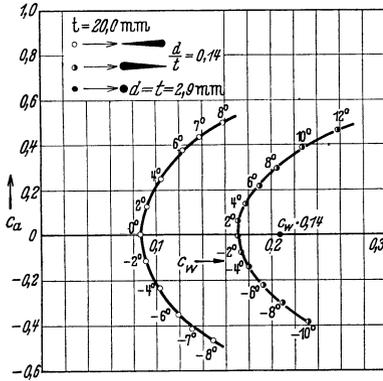


Abb. 266. Polaren bei 1,47-facher Schallgeschwindigkeit von unkleideten profilierten Zylindern, nach Busemann.

Dann beginnen aber sehr schnell die Abweichungen, die sich besonders

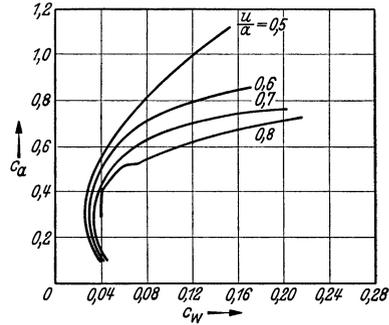


Abb. 267. Polaren bei verschiedenen Machschen Zahlen.

durch einen starken Abfall von $c_{a \max}$ ausprägen. Auch der Profilwiderstand wird größer. Am schwierigsten sind die Fälle zu übersehen, wo nur einige Stellen des Profils Überschallgeschwindigkeit aufweisen. Eine schlagartige Vergrößerung des Widerstandes ist die Folge. Die derzeitige Hauptsorge der Aerodynamik besteht in der Auffindung von Formen, bei denen solche schädlichen Zonen vermieden werden. Diese Aufgabe ist beinahe identisch mit der Vermeidung von Kavitationsstellen bei Wasserturbinen.

Für weitere Betrachtungen sei auf die Literatur¹ verwiesen.

IX. Strömungstechnische Messungen.

103. Druckmeßgeräte.

Als selbständiges Meßgerät spielt außer dem einfachen U-Rohr das Mikromanometer eine große Rolle. Indem man einen Schenkel des U-Rohres als Flasche ausbildet, vermeidet man das Ablesen an zwei Stellen. Ist die Querschnittsfläche der Flasche F und die des Meßrohres f , so wird bei einer Anzeige h im Meßrohr der Wasserspiegel in der Flasche um Δh sinken. Die Gleichheit der verdrängten Mengen ergibt die Gleichung:

$$F \cdot \Delta h = f \cdot h; \text{ hieraus } \Delta h = \frac{f}{F} \cdot h.$$

Bei einem Durchmesser Verhältnis von Meßrohr zu Flasche von 1:31,6 ist $\frac{f}{F}$ bereits $\frac{1}{1000}$, so daß Δh meist vernachlässigt werden kann.

¹ Busemann: Gasdynamik. Wien-Harms 1931.

Durch Schrägstellen des Meßrohres vergrößert man, wie eine einfache Rechnung zeigt, bei einer Druckhöhe h die Meßlänge s im Verhältnis $1:\sin \alpha$. Vergrößerungen im Verhältnis $1:10$ sind ohne besondere Vorkehrungen noch ausführbar.

Abb. 268 zeigt hierfür eine einfache und billige Konstruktion¹. Eine auf einer Skala befestigte Glasröhre ist um einen Punkt drehbar und in verschiedenen Winkelstellungen einstellbar. Die Glasröhre ist durch einen Schlauch mit einer Flasche verbunden. Diese kann durch eine auf Abb. 268 nicht erkennbare Schraube gehoben und gesenkt werden. Eine schnelle und einfache Einstellung des Nullpunktes ist so möglich. Wegen der schlechten Meniskusbildung von Wasser sind solche Instrumente grundsätzlich nur mit Alkohol, Petroleum oder dgl. verwendbar. Das spez. Gewicht der Sperrflüssigkeit muß durch Aräometer laufend genau bestimmt werden. Wegen der Temperaturempfindlichkeit von Alkohol muß auch während des Versuches die Temperatur gemessen werden.

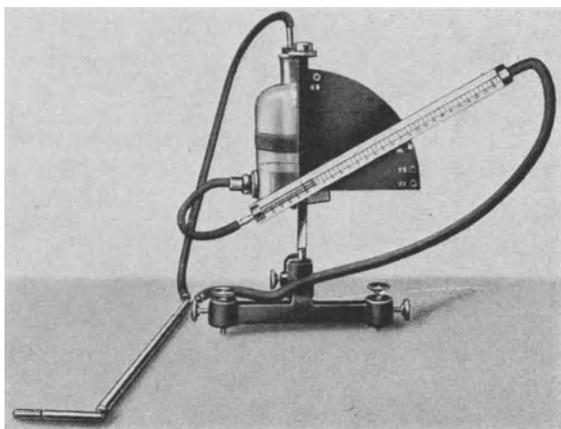


Abb. 268. Einfaches Mikromanometer nach Eck.

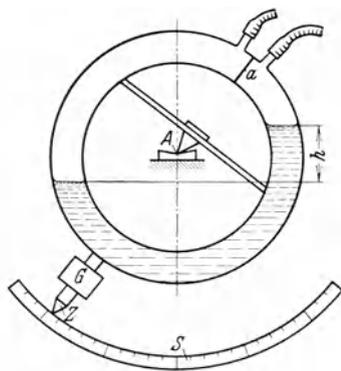


Abb. 269. Ringwaage.

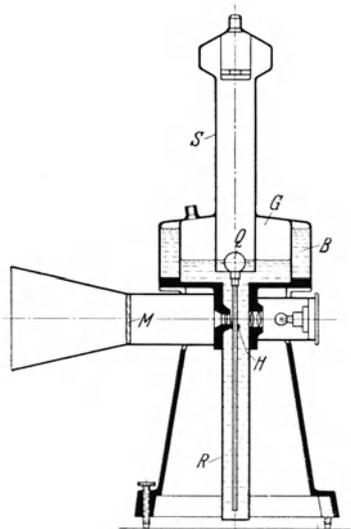


Abb. 270. Mikromanometer nach Betz.

Ein weiteres empfindliches Gerät zur Druckmessung, das sich für industrielle Zwecke sehr eignet, ist die Ringwaage, Abb. 269. Ein innen hohler Ring hat bei a

¹ Hersteller: Koch, Werkstätten GmbH für Feinmechanik. [Köln-N.]

eine Trennwand; links und rechts davon befinden sich Anschlüsse für sehr biegsame Schläuche, die den zu messenden Differenzdruck übertragen. Im unteren Teil des Ringes befindet sich Wasser oder eine andere Flüssigkeit, sodaß zwei getrennte Lufträume vorhanden sind. Im Mittelpunkt A liegt das Ganze auf einer Schneide auf, sodaß im Zusammenhang mit dem Gewicht G ein Pendel entsteht. Ist nun auf einer Seite der Druck größer, so steigt auf der anderen Seite das Wasser, während auf der entgegengesetzten der Wasserspiegel sinkt. Das Mehrgewicht auf einer Seite bedingt einen Ausschlag der Waage, der erst dann zur Ruhe kommt, wenn das Gegenmoment von G gleich dem Moment der hochgehobenen Wassersäule ist. Die Flüssigkeit, deren Menge unwesentlich ist, wirkt also sozusagen als Kolben. Ein Zeiger Z zeigt an einer Skala den Druck an. Diese Instrumente, die wegen der unmittelbaren Anzeige sehr beliebt sind, lassen sich noch für Drücke von wenigen mm WS ausbilden.

Das Standard-Instrument für feinere Messungen bildet heute das Mikromanometer nach Betz, Abb. 270. Hier wird die Lage des Wasserspiegels nicht durch Beobachtung des Meniskus, sondern durch einen kleinen Schwimmer, an dem eine Meßskala hängt, gemessen. Das Bild der Skala wird optisch auf eine Mattscheibe projiziert und vergrößert und gibt ein weithin sichtbares Bild. $\frac{1}{10}$ mm WS kann dabei mit dem bloßen Auge abgelesen werden. Dieses Instrument, das durch Ackeret¹ noch verbessert wurde, ist nicht zu verwechseln mit den in der Industrie bekannten Schwimmerinstrumenten, bei denen die Bewegung eines großen Schwimmers mechanisch auf einen Zeiger übertragen wird. Hierbei wird der

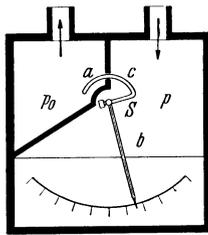


Abb. 271. Manometer für kleinste Drücke nach Reichardt.

Schwimmer relativ zum Wasser immer etwas ein- oder austauschen je nach den vom Zeigerwerk übertragenen Kräften und durch die nie ganz reine Oberfläche unterschiedliche Randwirkungen der Kapillarkräfte verursachen. Die Genauigkeit solcher Instrumente ist sehr begrenzt.

Offenbar kann als Vorläufer des Betzschen Instrumentes ein bereits länger bekanntes von Debro (Düsseldorf) betrachtet werden, das sich nur dadurch von der Betzschen Konstruktion unterscheidet, daß die Skala oberhalb des Schwimmers ist, also aus dem Wasser herausragt. Bei diesem ebenfalls sehr brauchbaren Instrument erfolgt die Ablesung durch Einstelllupe. Diese beiden Konstruktionen stellen eine bedeutende Verbesserung gegenüber den Instrumenten dar, bei denen der Meniskus unmittelbar abgelesen wird.

Für kleinste Drücke ist jüngst von Reichardt in der Göttinger Versuchsanstalt ein grundlegend neues Gerät entwickelt worden. Der Überdruck wirkt danach auf einen kleinen Ringkolben ac (Abb. 271), der durch einen Torsionsdraht gehalten und gefedert wird. Der Kolben arbeitet mit wenig Spiel, sodaß eine vollkommen reibungslose Bewegung erfolgt. Durch das Kolbenspiel geht etwas Leckluft verloren. Dieser Nachteil ist indes, wie sich gezeigt hat, nicht sehr erheblich, wenn eine weite Schlauchleitung von bestimmter Länge verwendet und eine Eichung vorgenommen wird. Das Gerät mißt noch Drücke von 10^{-6} mm WS und dürfte das empfindlichste praktisch brauchbare Mikromanometer darstellen, das heute existiert. Luftgeschwindigkeiten von wenigen cm/s sind noch meßbar. Dieser Geschwindigkeitsbereich, der bisher nur von Hitzdrahtinstrumenten beherrscht wurde, kann damit auch mit Staudruckmessungen bearbeitet werden, was einen erheblichen praktischen Vorteil bedeutet.

¹ Ackeret: Das Institut für Aerodynamik an der ETH Zürich. Im Sonderdruck der Schweiz. Bauzeitung „Das Maschinenlaboratorium der Eidgen. Techn. Hochschule Zürich“.

Schwenkbares Vielfachmanometer. Um gleichzeitig die Druckverteilung über einen größeren Bereich, sei es z. B. Staudruckmessungen in der Strömung nach Art der Abb. 245 oder die Druckverteilung über der Oberfläche eines Körpers z. B. eines Tragflügels zu bestimmen, werden Vielfachmanometer verwendet. Dabei sind die Manometerrohre unten an eine gemeinsame Flasche angeschlossen, während die oberen Enden durch Gummischläuche mit den Meßstellen verbunden sind. Abb. 272 zeigt ein vom Verfasser entwickeltes geschütztes Gerät, das schwenkbar ist und in beliebige kleine Neigungen eingestellt werden kann. Hierdurch gelingt auch dann

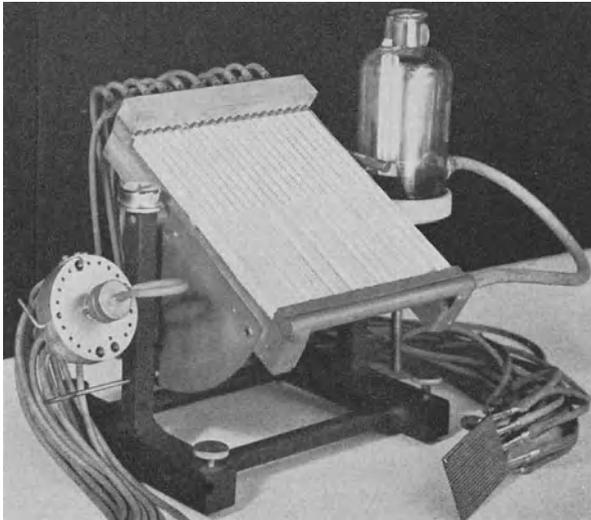


Abb. 272. Schwenkbares Vielfachmanometer nach Eck.

noch die sichere Aufnahme der Druckverteilung, wenn es sich um kleine Drücke handelt. Die Druckverteilung wird entweder fotografiert oder nach Aufspannen von Ozalidpauspapier direkt beleuchtet. Man kann auch leicht Pauspapier aufspannen und bei geeigneter Beleuchtung von hinten die Meßpunkte von Hand aus eintragen.

Das Gerät hat noch auf der linken Seite einen abschaltbaren Wähler. Dabei werden die hinteren Meßstüben dieses Wählers mit den oberen Enden der Manometerrohre verbunden und die vorne zentral angebrachte Tülle mit einem verschiebbaren Pitotrohr verbunden. Auf diese Weise kann man die Meßpunkte einer dünnen Grenzschicht von z. B. 2 mm mit einem verschiebbaren Meßrohr der Reihe nach durch gleichzeitiges Drehen des Wählers einstellen und erhält eine nach dem Versuch stehengebliebene Druckverteilungskurve, die dann bequem irgendwie übertragen werden kann.

104. Messung von Druck und Geschwindigkeit in offener Strömung.

An einem praktischen Beispiel sollen die Hauptgesichtspunkte, die sich bei strömungstechnischen Messungen ergeben, herausgeschält werden.

Aufgabe. Gegeben ein Tragflügel, der unter irgendeinem Anstellwinkel angeströmt wird (Abb. 273). Im Punkte *A* sollen Geschwindigkeit, statischer und dynamischer Druck, sowie die Strömungsrichtung festgestellt werden. Mit welchen Mitteln ist dies möglich?

Am einfachsten läßt sich die Strömungsrichtung bestimmen. Ein dünner Wollfaden, an einem Draht befestigt, zeigt sehr gut die Richtung an. Auch ein kleines Windfähnchen, bestehend aus einem Rechteck, das in $\frac{1}{4}$ Tiefe von der Vorderkante drehbar gelagert ist, leistet gute Dienste.

Druckmessungen sind schon schwieriger. Der Druck, den ein offenes Meßrohr (Pitotrohr) anzeigt, ändert sich mit dem Winkel, den die Meßöffnung mit der Strömungsrichtung bildet. Aus früheren Erwägungen, die

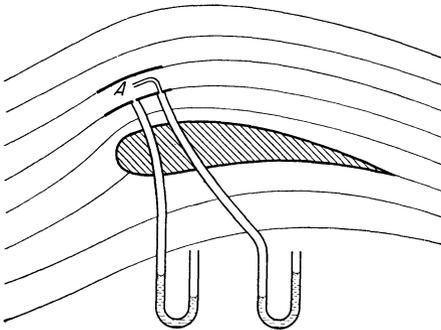


Abb. 273. Messen von Druck, Geschwindigkeit usw. im freien Strömungsfelde.

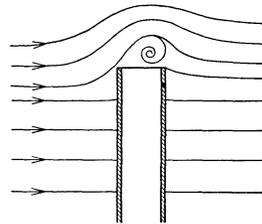


Abb. 274. Umströmung eines zylindrischen Rohres.

wir bei der Rohrströmung angestellt haben (S. 9), wissen wir, daß der Gesamtdruck erhalten wird, wenn die Meßöffnung dem Strom entgegengerichtet ist. Dies trifft auch bei der freien Strömung zu. Bei bekannter Strömungsrichtung kann also sehr leicht die Gesamtenergie, d. h. die Konstante der Bernoullischen Gleichung, bestimmt werden. Es sei bemerkt, daß diese Messung sehr genau ist.

Bei sehr kleinen Meßdüsen, wie sie z. B. bei Grenzschichtuntersuchungen für Geschwindigkeitsmessungen verwendet werden, muß allerdings darauf geachtet werden, daß die Wandstärke sehr dünn ist und dann möglichst konisch nach hinten zunimmt, um örtliche Beeinflussungen des Geschwindigkeitsfeldes in Wandnähe zu vermeiden.

Schwieriger ist schon die Messung des statischen Druckes. Der Anfänger neigt dazu, die eben verwendete Meßdüse um 90° zu drehen und die sich dann ergebende Anzeige als statischen Druck anzusehen. Sieht man sich diesen Fall nach Abb. 274 genauer an, so erkennt man, daß bei der Umströmung der Meßöffnung eine Ablösung entsteht, die einen starken Unterdruck von der Größenordnung des Staudruckes ergibt und zwar unabhängig von der absoluten Größe des Meßröhrchens.

Am leichtesten gewinnt man einen Überblick, wenn man, wie in Abb. 273, die Stromlinien einzeichnet und im Sinne früherer Überlegungen die Stromröhre als Kanal mit reibungsfreien Wänden ansieht. Bei der Rohrströmung ergibt sich der statische Druck aus einer Druckmessung durch Wandbohrung. Tatsächlich läßt sich auch hier nichts anderes machen. Eine Wand ist nun nicht vorhanden, sie muß erst künstlich geschaffen werden. Da die Stromlinie gekrümmt ist, muß diese Wand genau so gekrümmt sein. In Abb. 273 ist das Meßinstrument, das so entsteht, eingezeichnet. Einfacher ist die Messung am Körper selbst. Hier genügt selbstverständlich eine einfache Bohrung.

Nun ist es erklärlicherweise unmöglich, für alle möglichen Krümmungen solche Druckmeßinstrumente anzufertigen (etwa nach Abb. 273). Tatsächlich wird diese Messung nur bei geradlinigen Strömungen verwendet. Das Instrument besteht dann aus einer Kreisplatte mit einer Bohrung in der Mitte. An einem kleinen Röhrchen wird der Druck gemessen (Abb. 275). Als Sersche Scheibe ist dieses Instrument bekannt geworden. Nachteilig ist, daß es gegen Richtungsänderung sehr empfindlich ist. Dies dürfte einleuchten, wenn man sich die runde Scheibe als Tragflügel vorstellt. Will man das Instrument bei gekrümmten Strömungen verwenden, so muß die Kreisplatte so klein sein, daß ein Stück Kurve dadurch ersetzt wird.

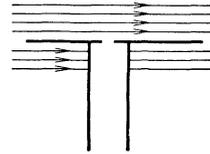


Abb. 275.
Sersche Scheibe.

Die für die Druckmessung notwendigen künstlichen Wände kann man sich noch auf andere Weise bilden. Man bringt ein rundes, vorne

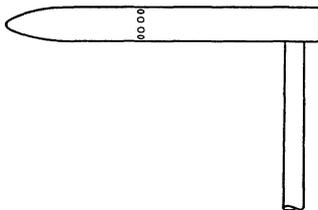


Abb. 276. Drucksonde.

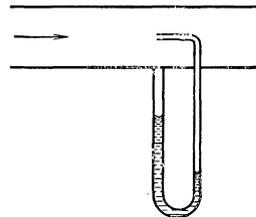


Abb. 277. Geschwindigkeitsmessungen in einem Rohre.

gut abgerundetes Rohr genau in Strömungsrichtung (sog. Sonde). In einiger Entfernung von der Vorderkante bringt man ringsum kleine Bohrungen oder einen Ringschlitz an (Abb. 276). Im Innern stellt sich dann der statische Druck der Strömung ein. Wichtig ist, daß die Bohrungen nicht zu weit vorne liegen, weil dort, wie z. B. die Druckverteilungskurve des Luftschiffkörpers zeigt, ein von der vorderen Bugform abhängiger Unterdruck entsteht.

Um die Geschwindigkeit zu messen, müssen wir genau so vorgehen wie beim Rohr (Abb. 277). Wir messen den Gesamtdruck wie oben, sowie den statischen Druck, indem wir uns z. B. ein der Stromröhre genau angepaßtes Rohr anfertigen, an dem durch Anbohrung der statische Druck gemessen wird. Die Differenz beider Drücke ist nach Gl. (10) gleich der Fallhöhe, die zur Geschwindigkeitserzeugung notwendig wäre. Nach der Formel

$$w = \sqrt{2g \Delta h},$$

kann somit die Geschwindigkeit berechnet werden. Nach Abb. 277 kann der Differenzdruck auch unmittelbar gemessen werden. Die Bernoullische Gleichung ergibt die Bestätigung des vorhin Gesagten.

Gesamtdruck $p + \frac{\gamma}{2g} w^2$, statischer Druck p , Differenzdruck (Staudruck) = Gesamtdruck — statischem Druck, d. h. $\frac{\gamma}{2g} w^2 = \Delta p$, also

$$w = \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}.$$

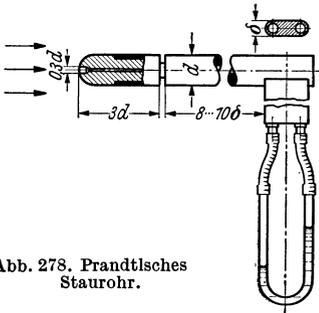


Abb. 278. Prandtlisches Staurohr.

Bei der Normalatmosphäre ist $\gamma/g = \frac{1}{8}$; damit ergibt sich als guter Mittelwert die bekannte Formel

$$w = 4 \sqrt{\Delta p} \text{ [mm WS]}.$$

Die Schaffung einer künstlichen Berandung der Stromlinie ist praktisch natürlich unbrauchbar. Eine Verbindung von

Drucksonde mit Pitotrohr vermeidet geschickt alle Schwierigkeiten. Diese von Prandtl angegebene Anordnung (Abb. 278) hat vorne eine Bohrung zur Messung des Gesamtdruckes und einen seitlichen Ringschlitz zum Messen des statischen Druckes. Getrennte Leitungen führen den Druck nach außen. Das Instrument hat den Vorzug, daß bei einer Richtungsänderung von etwa 16° der angegebene Staudruck, d. h. der Differenzdruck, sich kaum ändert. Abb. 279 zeigt die Winkelempfindlichkeit

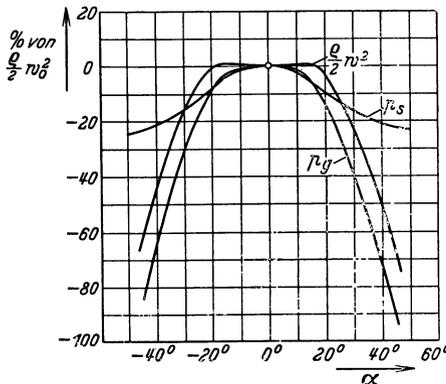


Abb. 279. Einfluß der Schiefstellung gegenüber der Strömungsrichtung beim Prandtlischen Staurohr, beim Pitotrohr und bei der Drucksonde.

für die verschiedenen Druckmessungen des Instrumentes. Man sieht, daß der statische Druck allein sich schneller ändert; die Gesamtdruck-

messung ist schon etwas unempfindlicher, während die Kombination, d. h. die Differenzdruckmessung, erfreulicherweise auf ein weites Stück konstant bleibt.

Das Prandtl'sche Staurohr ist so gebaut, daß der angezeigte Differenzdruck genau gleich dem Staudruck $\frac{\gamma}{2g} w^2$ ist. Eine Eichung ist somit nicht erforderlich. In zwei Fällen ergeben sich Abweichungen, sodaß mit einem Beiwert β gemäß $\Delta p = \beta \cdot \frac{\gamma}{2g} w^2$ gerechnet werden muß.

a) Bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen, wie sie praktisch z. B. bei Ölmessungen vorkommen, wird der Staudruck durch Zähigkeitseinflüsse erhöht. Die unter der Bezeichnung „Barkersche Korrektur“¹ bekannte Berichtigung genügt der Gleichung $\beta = 1 + \frac{3}{Re}$.

b) Bei starker Turbulenz zeigt das Prandtl'sche Staurohr falsch an. Messungen in der turbulenten Vermischungszone² haben z. B. einen Unterdruck von 15 vH des Staudruckes ergeben, während nach S. 142 im Strahl sogar ein kleiner Überdruck von $\frac{1}{2}$ vH des Staudruckes herrschen müßte. Diese Messung ist nicht reell. Der gemessene Unterdruck entsteht an der Sonde dadurch, daß infolge der Turbulenz die Anströmrichtung der Luft sich periodisch ändert. Bei schräger Anblasung ergibt aber ein solcher Sondenkörper einen örtlichen Unterdruck, der mit dem Druck der Strömung nichts zu tun hat. Besonders haben die Versuche von Edler v. Bohl³ die große Empfindlichkeit gewöhnlicher Drucksonden gegenüber der Turbulenz gezeigt. Förthmann hat für solche Messungen eine neue Drucksonde entwickelt, die gegenüber diesen Schwankungen unempfindlich ist und den wahren Druck anzeigt. Nach Förthmann² kann mit einer Sonde nach Abb. 280 der statische Druck in stark turbulenten Strömungen richtig gemessen werden. Allgemein kann man sagen, daß bei stark turbulenter Strömung größte Vorsicht bei der Messung des statischen Druckes geboten ist.

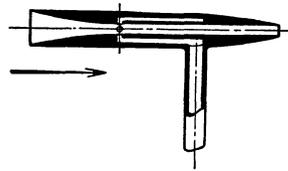


Abb. 280. Drucksonde für turbulente Strömungen nach Förthmann.

Auch durch starke Geschwindigkeitsschwankungen in Strömungsrichtung, die bei stark turbulenter Strömung immer vorhanden sind, können Meßfehler entstehen. Ist \bar{u} der Mittelwert der Geschwindigkeit und u' die augenblickliche Abweichung vom Mittelwert, d. h. die

¹ Barker, Proc. Roy. Soc. London, A. Vol. 101, 1922,

² Förthmann: Über turbulente Strahlausbreitung. Ingenieurarchiv 1934, S. 42.

³ Edler v. Bohl, Das Verhalten paralleler Strahlen, Ingenieurarchiv 1940, S. 295.

jeweilige Geschwindigkeit $u = \bar{u} + u'$, so tritt in der Zeit dt durch die Flächeneinheit der Impuls $\rho \cdot u^2 \cdot dt$. Hiervon muß nun der zeitliche Mittelwert gebildet werden für eine längere Zeit T

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho u^2 dt.$$

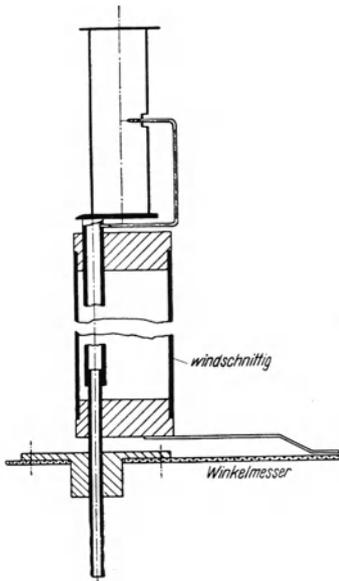
Bei der Einsetzung von $u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u} \cdot u' + u'^2$ ist nun zu berücksichtigen, daß der Wert $2\bar{u} \cdot u'$ über eine längere Zeit gebildet, fortfällt, da ja \bar{u} der Mittelwert ist, nicht aber der Ausdruck $u \cdot u'$. Der einströmende Impuls ist somit

$$(\rho u^2)_{\text{Mittelwert}} = \rho \cdot \bar{u}^2 + (\rho u'^2)_{\text{Mittelwert}}.$$

Stellt man nun den Staudruck durch ein Pitotrohr fest, so stellt sich bei sinusförmiger Schwankung ein mittlerer Staudruck $\rho/2 \left(\bar{u}^2 + \frac{1}{2} u'^2 \right)$ ein, der somit um $\rho/4 u'^2$ größer ist als der Staudruck $\rho/2 \bar{u}^2$ der mittleren Geschwindigkeit.

Turbulenzsonde nach Cordes.

Von Cordes¹ stammt eine Sonde, mit der einerseits eine verhältnismäßig einfache Angabe des Turbulenzgrades möglich und andererseits auch eine nach einem besonderen Verfahren entwickelte Druckbestimmung möglich ist. Das Gerät (Abb. 281) reagiert lediglich auf die turbulenten Schwankungen in einer Richtung. Dazu ist vorne ein schmales Fenster (9 mm hoch, 1,8 mm breit) vorhanden, durch welches Luft in einen Zylinder strömt. Eine hintere Ausflußöffnung (3,7 mm hoch, 9,5 mm Sehnenbreite) enthält eine ins Innere führende Pitotrohr, welches von der Eintrittsöffnung 9 mm



entfernt ist. Der durch das vordere Fenster eintretende Strahl wird nun um so schärfer begrenzt sein, je geringer die Schwankungen sind; um so größer ist dann auch der von dem Pitotrohr angezeigte Druck. Umgekehrt wird mit wachsender Schwankung der Strahl verbreitert und die Pitotrohranzeige kleiner. Bei Drehung des Gerätes werden die Staudruckdellen mit wachsender Turbulenz breiter, so daß aus dem Maximum und dem Verlauf dieser Kurven leicht auf die Turbulenz des Strahles geschlossen werden kann. Wie man eine drehbare Sonde mit nur einer Meßöffnung zur Anzeige der Turbulenz verwenden kann, hat v. Bohl² gezeigt.

¹ Cordes: Statische Druckmessung in turbulenten Strömungen. Ing.-Arch. 1939, S. 245.

² Bohl, J. G. v.: Ing.-Arch. 1940, S. 295.

Einfluß der Bohrung auf Druckmessungen. Es war seit langem bekannt, daß der durch Anbohrung einer Wand gemessene Druck nicht genau dem Wanddruck entspricht. Durch die Öffnung entstehen kleine lokale Störungen und Druckänderungen, die dann mitgemessen werden. Nach Fuhrmann¹ ergibt sich bei Öffnungen von $\frac{1}{2} \div 1$ mm ein Unterdruck von 1 vH des Staudruckes, sodaß der gemessene Druck $p = p_0 - \frac{\gamma}{2g} w^2 \cdot 0,01$ ist. Eingehendere Untersuchungen der jüngsten Zeit stammen von Hermann². Untersucht wurden verschiedene Durchmesser, verschiedene Abrundungen der Bohrung und außerdem der Einfluß der Reynoldsschen Zahl. Danach steigt die Druckanzeige mit zunehmendem Lochdurchmesser und zunehmender Reynoldsscher Zahl. Versenkung und Abrundung heben ebenfalls die Druckanzeige. Die besten Ergebnisse zeigten Bohrungen von $1 \div 2$ mm \varnothing . Es genügt nicht, den Bohrgrat zu entfernen. Die Bohrstelle muß auch noch geglättet werden. Im besten Bereich stellt Hermann nur $\frac{1}{100}$ des Staudruckes als Unterdruck fest, während bei Bohrungen über 2 mm \varnothing nicht ein Unterdruck, sondern ein Überdruck von schließlich 1,5 vH des Staudruckes festgestellt wurde.

Bei rauen Wänden sind nach Polzin³ die Meßfehler im Mittel nicht größer als bei glatten Wänden. Eine einzelne Rauigkeit vor der Bohrung erzeugt erhöhte Saugwirkung, während eine Rauigkeit hinter der Bohrung starken Überdruck erzeugt. Durchschnittlich ist auch bei rauen Wänden und bester Gestaltung der Bohrung mit einer Saugwirkung von etwa 1 vH. des Staudrucks zu rechnen.

105. Feststellung der Strömungsrichtung mit Staugeräten.

Abb. 279 zeigte, daß das Pitotrohr wie auch das Prandtl'sche Staurohr gegen kleine Richtungsänderungen vollkommen unempfindlich sind. Eine genaue Richtungsfeststellung ist mit diesen Instrumenten deshalb unmöglich.

Sehen wir uns nun die Druckverteilung um eine Kugel an (Abb. 173 u. 174). Am vorderen Staupunkt ist ein Maximum des Druckes vorhanden. Die größte Druckänderung ist hingegen

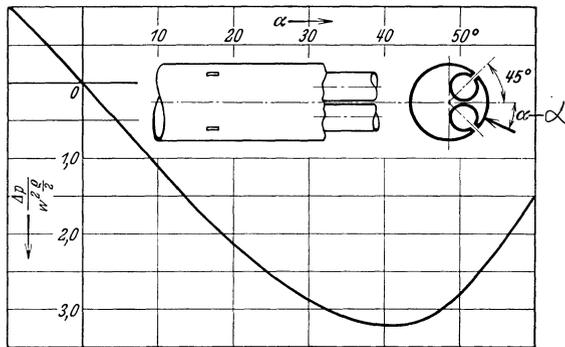


Abb. 282. Feststellung der Strömungsrichtung durch Zylinder, der zwei um 90° verschiedene Öffnungen aufweist. Empfindlichkeit in Abhängigkeit von α .

¹ Fuhrmann: Diss. Göttingen 1912.

² Hermann: Diss. Leipzig 1930.

³ Polzin: Zur Messung des statischen Druckes an rauen Wänden. Ing.-Arch. 1939, S. 326.

bei etwa 45° . Ist an dieser Stelle eine Meßöffnung vorhanden, so wird bei Drehung der Kugel ein Manometer die größte Änderung geben. Denken wir uns nun eine zweite Messung an der unteren Hälfte (ebenfalls unter 45°), so wird die Differenzdruckmessung den Ausschlag Null ergeben. Sobald jedoch eine kleine Drehung nach der einen oder anderen

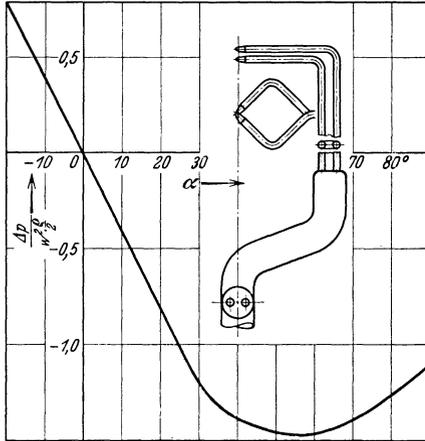


Abb. 283. Feststellung der Strömungsrichtung durch 2 auf einen Punkt hinweisende um 90° verschobene Pitotrohre. Empfindlichkeit in Abhängigkeit von α .

dreht so lange, bis das Differenzdruckmanometer Null anzeigt¹.

Statt eines Zylinders kann man auch zwei Pitotrohre nehmen, die unter 90° – 100° mit ihren Öffnungen auf einen Punkt hinweisen (Abb. 283).

Beider räumlichen Strömung nimmt man nach Taylor eine Kugel (Abb. 284) mit vier Meßöffnungen unter 45° . Statt der Kugel können auch hier

Abb. 284. Taylorsche Kugel zur räumlichen Bestimmung der Strömungsrichtung.

Richtung eintritt, erhalten wir sofort eine erhebliche Druckanzeige. Es ist, wie man sich leicht nach Abb. 173 u. 174 überlegen kann, der größte Druckunterschied, der bei Drehung einer Kugel bzw. eines Zylinders überhaupt feststellbar ist. Auf dieser Erscheinung beruhen fast alle Richtungsanzeiger.

Abb. 282 zeigt ein solches Meßinstrument, bei dem ein Zylinder die Grundform bildet. Die beigegebene Kurve läßt erkennen, wie die Anzeige bei Richtungsänderung zunimmt. Die Handhabung des Instrumentes ist sehr einfach. Man

analog der Abb. 283 vier Pitotrohre genommen werden, die zu je zweien in zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen angeordnet sind.

Um die Eigenstörung durch die Meßkugel möglichst klein zu halten, wurden von Oesterlen² Staukugeln von nur 3 mm Außendurchmesser entwickelt.

¹ Ohne Drehen des Instrumentes kann auch aus der Manometeranzeige der Winkel der Strömung ermittelt werden.

² Strauss: Eine Kugelsonde mit kleinem Durchmesser für Druck- und Geschwindigkeitsmessung. Z. VDI 1938, S. 52.

Sehr bequem läßt sich die Strömungsrichtung bestimmen mit der Fünfloch-Staukugel nach van der Hegge Zijnen¹. Die Staukugel (Abb. 285) ist um ihren zur ungefähren Strömungsrichtung senkrechten Schaft drehbar. Durch Drehung um den Winkel, der an einer oberen Skala abgelesen werden kann, wird die senkrechte Bezugsebene in Strömungsrichtung eingestellt. Dies ist dann der Fall, wenn die Drücke in 4 und 5 gleich sind. Außerdem werden die Drücke in 1, 2, 3 und 4 abgelesen, mit denen unter Benutzung von Eichkurven der Anströmwinkel bestimmt werden kann.

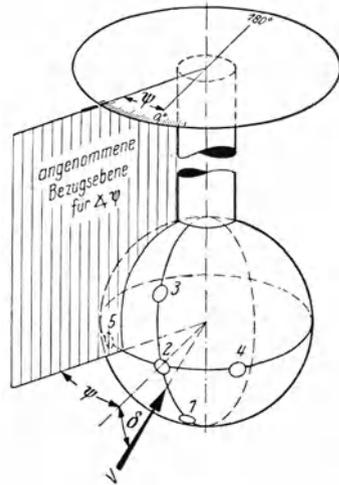


Abb. 285.

106. Messung mit Düsen, Blenden und Venturirohren.

Die größte praktische Bedeutung haben Meßmethoden gewonnen, die mit einer Verengung der Rohrleitung arbeiten. Ist z. B. nach Abb. 286 der Rohrquerschnitt F_1 durch eine Düse auf F_2 verengt, so läßt sich leicht zeigen, daß der Druckunterschied vor und hinter der Verengung in einem einfachen Zusammenhang mit der Geschwindigkeit in der Düse steht. Nachdem die Flüssigkeit die Düse verlassen hat, behält der Strahl zunächst seine Breite, sodaß der statische Druck des Strahles in dem Düsenwinkel am Rohr gemessen werden kann. Erst allmählich vermischt sich der Strahl mit der Umgebung und füllt den Querschnitt wieder aus. Für die Messung wesentlich ist nur der be-

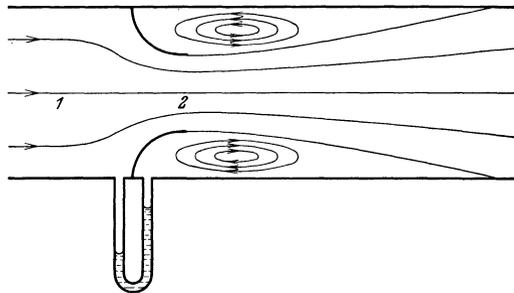


Abb. 286. Messung der Durchflußmenge durch eine Düse.

beschleunigte Teil dieser Bewegung, d. h. die Strömung aus dem Rohr bis zum engsten Querschnitt. Da bei guten Abrundungen die beschleunigte Bewegung fast verlustlos ist, mindestens jedoch ohne größere Ablösung vor sich geht, kann nach der Bernoullischen Gleichung

¹ Hegge Zijnen, B. G. van der: Improved Instrument for the Simultaneous Determination of the Fluids. Proc. Acad. Amsterd. 32 (1932) Nr. 5.

chung gerechnet werden. Für die Stelle 1 (vor der Düse) und 2 (engster Querschnitt) schreiben wir die Bernoullische Gleichung an:

$$p_1 + \frac{\gamma}{2g} w_1^2 = p_2 + \frac{\gamma}{2g} w_2^2.$$

Mit Hilfe der Stetigkeitsgleichung $F_1 \cdot w_1 = F_2 \cdot w_2$ erhalten wir nach einigen leichten Umformungen, wenn wir gleichzeitig $p_1 - p_2 = \Delta p$ setzen,

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}} \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}. \quad (168)$$

Aus dem Druckunterschied Δp , der leicht meßbar ist, läßt sich in der Tat die Geschwindigkeit w_2 berechnen. Die Durchflußmenge ergibt sich dann aus $V = F_2 \cdot w_2$.

Prinzipiell dieselbe Wirkung hat die Blende (Abb. 287), eine Platte, die durch ein scharfkantig begrenztes, kreisförmiges Loch die Flüssigkeit drosselt. Die scharfe Kante bewirkt, wie schon bei anderen Beispielen gezeigt werden konnte, eine starke Kontraktion. Der wirksame Querschnitt ist deshalb kleiner als F_2 . Diese Verkleinerung bringt man durch eine Zahl μ , den sog. „Kontraktionskoeffizienten“, zum Ausdruck. Es ist

$$F_2' = \mu F_2.$$

Im Vergleich zur Düse ist auch bei der Rechnung keine Änderung vorhanden, wenn F_2 durch $\mu \cdot F_2$ ersetzt wird. Die nicht vorhandene Abrundung bei der Blende verschafft sich die Flüssigkeit, wie man erkennt, selbst. Man erhält

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2 \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}} \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}. \quad (169)$$

Da diese beiden Meßmethoden die wichtigsten sind, die im Maschinenbau vorkommen, hat eine umfangreiche Forschung sich mit diesen Dingen beschäftigt. Nach genauer Untersuchung sind alle Einzelheiten der Messung¹ genau festgelegt und normalisiert worden.

* Die Rechnung setzt konstante Geschwindigkeitsverteilung in Düse und Rohr voraus. Dies ist jedoch sehr selten der Fall. Verfasser konnte nachweisen (Ing.-Arch V, 4, 1934), daß hierdurch ein Fehler entsteht, der bei genaueren Berechnungen berücksichtigt werden muß. Diese Ungenauigkeiten werden nach den Normen durch eine festgelegte Toleranz praktisch in Rechnung gezogen.

¹ Regeln für die Durchflußmenge mit genormten Düsen und Blenden. Berlin: VDI-Verlag.

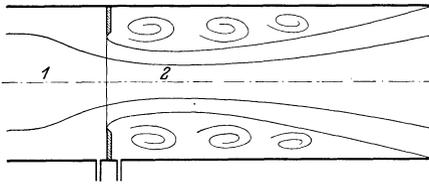


Abb. 287. Schematische Darstellung des Strömungsverlaufs bei einer Blende.

stück von etwa 10 ÷ 20 Durchmessern vor und hinter der Meßstelle. Bemerkte sei noch, daß bei kleinen Durchmessern ($d < 50$ mm) die Normen

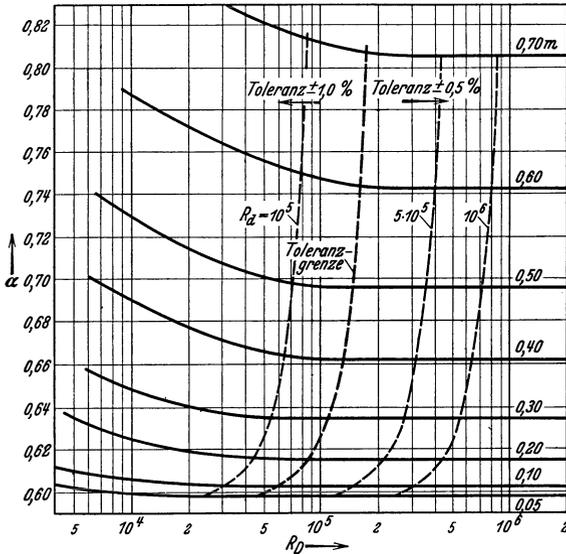


Abb. 291. Durchflußzahlen α für Blenden in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl bei verschiedenen Öffnungsverhältnissen nach VDI-Regeln

nicht mehr anwendbar sind. Ohne besondere Eichung sind hier Düsen und Blenden nicht zu verwerten, da dann die Rohrreibung und andere Einflüsse sich sehr störend bemerkbar machen.

Abb. 292 zeigt den Vermischungsvorgang hinter einer Düse. In verschiedenen Abständen hinter der Düse sind Staudruckprofile aufgenommen, die genau erkennen lassen, wie weit die aktive Strömung reicht. Da im Rohre selbst solche Versuche wegen der Eigenstörung durch den Düsenkamm nicht vorgenommen werden können, wurde eine verschiebbare Düse in bestimmten Abständen zum Rohrende festgeklemmt und dann am Rohrende das Staudruckprofil aufgenommen.

Man erkennt aus den Aufnahmen, daß sich die Strömung bereits nach 150 mm, d. h. 4 Durchmessern wieder an die Wand anlegt. Der Inhalt der über der Nulllinie

liegenden Staudruckkurve zeigt die jeweils vorhandene Energie an. So erkennt man — Vergleich des ersten mit dem letzten Profil — daß der Vorgang mit einem erheblichen Energieverlust verbunden ist. Der äußere Erweiterungswinkel der Vermischung beträgt $3,5^\circ$ und stimmt daher leidlich mit Abb. 121 überein. Vor der Düse ist noch das Staudruckprofil der turbulenten Rohrströmung, d. h. ohne Düse angegeben.

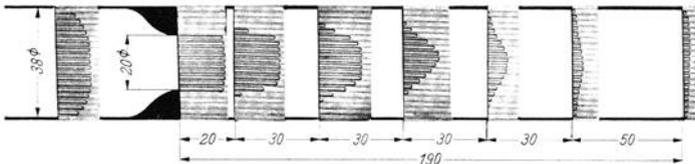


Abb. 292.

Die hinter der Verengung auftretenden Verluste lassen sich nach dem Impulsatz berechnen. Der Ansatz hierzu ist bereits auf S. 84 aufgestellt worden. Bei plötzlicher Verzögerung der Geschwindigkeit von w_2 auf w_1 tritt ein Druckverlust von

$$\Delta p = \frac{\gamma}{2g} (w_2 - w_1)^2$$

auf.

Von Interesse ist der prozentuale Verlust, bezogen auf den Differenzdruck, auch Wirkdruck erfassen. Wir erfassen dieses Verhältnis zweckmäßig durch einen Wirkungsgrad:

$$1 - \eta = \frac{\frac{\gamma}{2g} (w_2 - w_1)^2}{\frac{\gamma}{2g} (w_2^2 - w_1^2)}$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung

$$F_1 \cdot w_1 = F_2 w_2$$

und unter Berücksichtigung von

$$m = \frac{F_2}{F_1}$$

gewinnen wir nach einigen leichten Umformungen

$$\eta = 2 \frac{m}{m + 1}$$

Abb. 293 zeigt $\eta = f(m)$. Man sieht, daß im Bereich üblicher Öffnungsverhältnisse $m = 0,2 \div 0,5$ die Verluste 70 ÷ 30 vH. betragen.

Da beim Entwurf einer Meßstelle meist die Rohrleitung und die mittlere Geschwindigkeit gegeben sind, wird man sich oft beim Entwurf schon fragen müssen, was die Meßstelle an Druckverlust kostet, wenn man die Verluste mit dem Staudruck $\frac{\gamma}{2g} w_1^2$ der Rohrleitung vergleicht. Dies wird durch die Vergleichszahl

$$\varepsilon = \frac{(w_2 - w_1)^2}{w_1^2} = \left(\frac{1 - m}{m} \right)^2$$

dargestellt. Auch die Frage, das Wievielfache des Staudruckes der Wirkdruck in Abhängigkeit von m ausmacht, ist sehr wichtig. Die Verhältniszahl

$$\vartheta = \frac{\frac{\gamma}{2g} (w_2^2 - w_1^2)}{\frac{\gamma}{2g} w_1^2} = \frac{1}{m^2} - 1$$

drückt dies aus. Abb. 293 zeigt sowohl ϑ als ε in Abhängigkeit von m .

Genaue Untersuchungen für Normdüsen und Normblenden in Einlauf und Auslauf ohne vor- bzw. nachgeschaltetes Rohrstück wurden von Stach¹ ausgeführt. Es wurde festgestellt, daß die Durchflußzahlen für Düsen und Blenden im Einlauf oberhalb der Reynoldsen Zahl $0,55 \cdot 10^5$ konstant sind und unabhängig vom Öffnungsdurchmesser den konstanten Wert $\alpha_{\text{Düse}} = 0,99$ und $\alpha_{\text{Blende}} = 0,6$ haben.

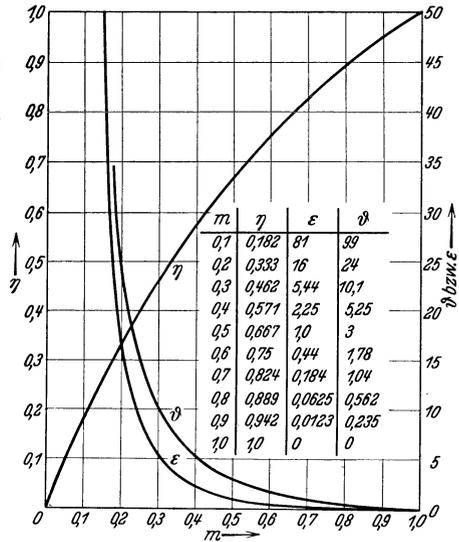


Abb. 293. Verluste, Wirkungsgrad und Wirkdruck von Düsen und Blenden in Abhängigkeit vom Öffnungsverhältnis m .

¹ Stach: Die Beiwerte von Normdüsen und Normblenden im Einlauf und Auslauf. Z. VDI 1934 S. 187.

Bei Verwendung im Auslauf liegen die Beiwerte oberhalb der Toleranzgrenze, bei Düsen etwas unterhalb und bei Blenden mit $m > 0,25$ etwas oberhalb der aus den „Regeln“ bekannten α -Werte.

Normblenden sind für alle Rohrdurchmesser > 50 mm verwendbar.

Die Grenzwerte von R_D , die die Verwendbarkeit von Düsen und Blenden angeben, hängen vom Öffnungsverhältnis m ab. Bei $m = 0,05$ ergibt sich ein Wert 20000 für die Blende und 70000 für die Düse. Bei $m = 0,65$ ergibt sich 260000 für die Blende und 200000 für die Düse.

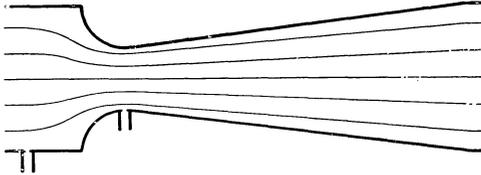


Abb. 294. Venturirohr.

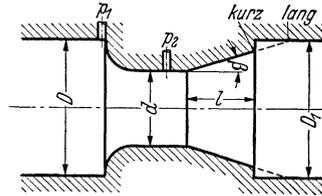


Abb. 295. Kurz-Venturirohr.

Das Venturirohr. Die bei Düsen und Blenden auftretenden Strömungsverluste können durch einen diffusorartigen Ansatz erheblich vermindert werden. So entsteht das Venturirohr (Abb. 294). Meist begnügt man sich mit kurzen Ansatzstücken, in der Praxis unter der Bezeichnung „Kurz-Venturirohre“ bekannt (Abb. 295). Seit langem sind umfangreiche

Untersuchungen im Gange, um auch hier eine Normung durchzuführen. Hier die Ergebnisse dieser vorläufigen Untersuchungen:

Der günstigste Öffnungswinkel des Kegels (doppelter Diffusorwinkel) liegt je nach dem

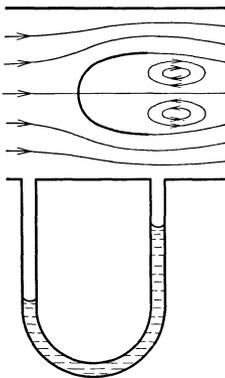


Abb. 296. Verdrängungsdüse.

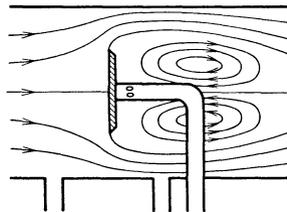


Abb. 297. Verdrängungsstauplatte.

Öffnungsverhältnis und der Diffusorlänge zwischen 12° und 22° . Eine Diffusorlänge $l = 1,4$ bis $1,5$ des Durchmessers genügt, um gute Energieumsetzung zu erzielen.

Die vorgenannten Meßmethoden werden ungenau, wenn das Öffnungsverhältnis groß wird. Es leuchtet ein, daß sich dann die Wandreibung bemerkbar macht. Die auftretenden Reibungsverluste sind allerdings von geringer Bedeutung. Wichtig ist, daß die Kontraktion bei der Blende durch den indirekten Einfluß der Reibung bei größeren Öffnungsverhältnissen unkontrollierbare Werte annimmt. Denn

die infolge der Wandreibung unterschiedlich beeinflusste Grenzschicht, deren Geschwindigkeit für die Ausbildung der Kontraktion wesentlich ist, wird sich prozentual um so mehr bemerkbar machen, je mehr sich die Blende dem Rohrdurchmesser nähert. Die Regeln empfehlen daher eine Verwendung der Blende nur bis $m = 0,7$.

Diesem Mangel wird durch die Anordnungen nach Abb. 296, 297 und 298 abgeholfen. Sie stellen gewissermaßen die Negativlösung der vorherigen Instrumente dar, die als Behelfsmeßgeräte leicht verwendet werden können. Man erkennt, daß bei der Kreisplatte die Kontraktion durch die Wandreibung nicht beeinflusst werden kann. Sie liegt immer in gesunder Strömung.

Die Messung kann direkt an der Rohrwand vorgenommen werden, oder aber, wie in Abb. 297 angedeutet, durch eine Druckmessung unmittelbar hinter dem Körper.

Der Ersatz des Venturirohres gestattet in höchst einfacher Weise, in einer glatten Rohrleitung eine gute verlustarme Meßstelle zu schaffen. In bezug auf den Wirkungsgrad ist kaum ein Nachteil gegenüber dem Venturirohr vorhanden. Abb. 298 zeigt für eine Ausführung die gemessene Druckverteilung und die nach der Bernoullischen Gleichung berechnete. Der Wirkungsgrad war 0,79. Ein handelsübliches Venturirohr, das dieselben Querschnittsabmessungen hatte, ergab den Wert 0,8.

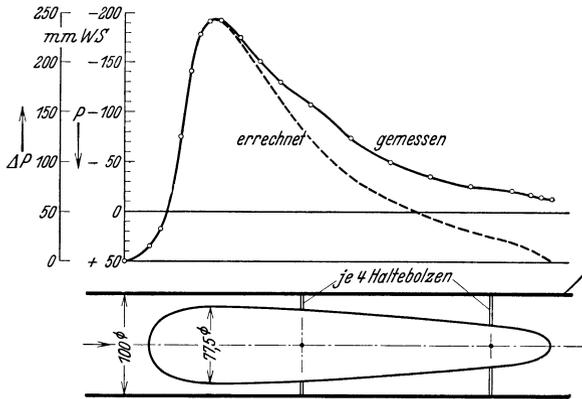


Abb. 298. Verdrängungsventurirohr mit Druckverteilungskurve.

107. Gefäßmessungen.

Für $b = \infty$ ist nach Kirchhoff: $\mu = \frac{\pi}{\pi + 2}$ (Abb. 299).

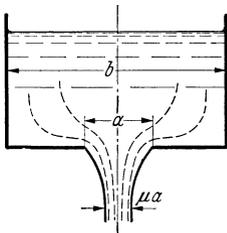


Abb. 299.

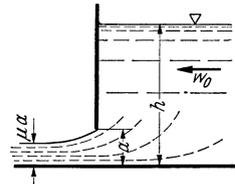


Abb. 300. Grundablaß.

μ -Werte für verschiedene Werte a/b nach Mises:

a/b	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Ausfluß in Wasser .	0,611	0,612	0,616	0,622	0,633	0,644
Ausfluß in Luft . . .	0,611	0,613	0,621	0,633	0,653	0,681

Der Ausfluß in Luft oder in Wasser ist wegen des Einflusses der Oberflächenspannung etwas verschieden.

Grundablaß nach Abb. 300. Theoretisch ist bei hinreichender seitlicher Erstreckung b mit einer Kontraktionszahl $\mu = 0,61$ bis $0,62$ zu rechnen. Koch¹ stellte den Wert $\mu = 0,6$ fest. Messungen von Keutner² ergaben im eingeschnürten Strahl eine konstante Geschwindigkeit von der Größe:

$$w = \sqrt{2g \left(h + \frac{w_0^2}{2g} - \mu a \right)};$$

$$\text{sekundliche Ausflußmenge } V = \mu \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g \left(h + \frac{w_0^2}{2g} - \mu \cdot a \right)}.$$

108. Überfallmessungen.

Bei großen Wassermengen und kleinen Gefällen, z. B. Turbinenkanälen, Kanälen, Flußläufen usw., kommt man mit den vorherigen Methoden nicht mehr aus. Am geeignetsten ist hier der Überfall. Durch ein Wehr, bestehend aus einer scharfkantigen Platte, wird z. B. das Wasser angestaut und aus der Stauhöhe h die Menge berechnet (Abb. 301).

Für das abgerundete Wehr war festgestellt worden (S. 92), daß an der höchsten Stelle des Wehres die Niveauhöhe $\frac{2}{3}$ der ursprünglichen ist. Dieser Querschnitt $\frac{2}{3} b \cdot h$ verringert sich hier nun noch durch Kontraktion auf $\mu \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot h$.

Bei freiem Abfluß ist die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$, sodaß die Menge leicht ermittelt werden kann³.

$$Q = \mu \frac{2}{3} b \cdot h \cdot \sqrt{2gh}. \quad (171)$$

Die ursprüngliche Niveauhöhe muß also genau gemessen werden. Spitzen, Pegel und ähnliche Hilfsmittel sind hierzu ausgebildet worden.

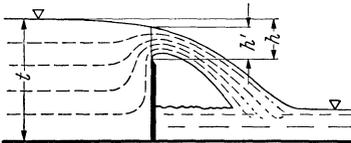


Abb. 301. Darstellung einer Überfallmessung.

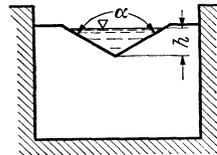


Abb. 302. Thomson-Überfall.

Thomson-Überfall nach Abb. 302.

$$V = \mu \cdot \frac{8}{15} \cdot \text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot h^2 \sqrt{2gh}; \quad \mu = 0,5926. \quad (172)$$

Rechteckiger Überfall ohne Seitenkontraktion nach Abb. 303a.

Nach Schweizer Normen ist:

$$\mu = 0,615 \left(1 + \frac{1}{1000h + 1,6} \right) \left[1 + 0,5 \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right]. \quad (173)$$

Die Formel gilt für: $H - h \geq 0,3 \text{ m}$; $\frac{h}{H - h} \leq 1$ und $0,025 \text{ m} \leq h \leq 0,8 \text{ m}$.

¹ Koch-Carstangen: Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften. Berlin 1926.

² Keutner: Bautechn. 1929, S. 575.

³ Wichtig ist eine gute Belüftung der unteren Strahlseite.

Rehbock¹ führt die Ersatzhöhe $h_e = h + 0,0011$ m ein, sowie eine neue Grundgleichung: $V = \mu \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{2g \cdot h_e}$.

Hier wird $\mu = 0,6035 + 0,0813 \frac{h_e}{H - h}$.

Rechteckiger Überfall mit Seitenkontraktion nach Abb. 303b.

Nach Frese gilt:

$$\mu = \left(0,5755 + \frac{0,017}{h + 0,18} - \frac{0,075}{b + 1,2} \right) \times \left[1 + \left(0,25 \left(\frac{b}{B} \right)^2 + 0,025 + \frac{0,0375}{\left(\frac{h}{H} \right)^2 + 0,02} \right) \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right]. \quad (174)$$

Nach Schweizer Normen gilt:

$$\mu = \left[0,578 + 0,037 \left(\frac{b}{B} \right)^2 + \frac{3,615 - 3 \left(\frac{b}{B} \right)^2}{1000 h + 1,6} \right] \cdot \left[1 + 0,5 \left(\frac{b}{B} \right)^4 \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right]. \quad (175)$$

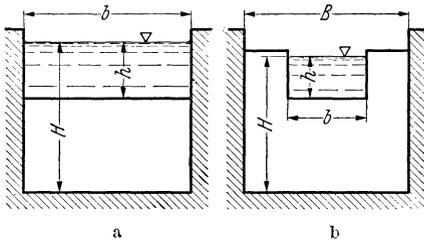


Abb. 303.

109. Direkt anzeigende Durchflußmesser.

Bei den folgenden Meßmethoden wird der Widerstand eines Körpers benutzt, um Geschwindigkeit und Menge zu bestimmen.

Der Bayer-Siemens-Messer besteht aus einem konischen Rohrstück, in dem eine scharfkantige Kreisplatte gehoben wird (Abb. 304). Je nach der Durchflußmenge stellt sich eine verschiedene Höhe ein. Die Verschiebung der Platte wird durch einen Stift nach außen geführt und zeigt dort unmittelbar die Menge an. Der Flüssigkeitswiderstand muß immer genau gleich dem Gewicht der Platte sein. Aus dieser Gleichgewichtsbedingung

$$W = c \cdot \frac{\gamma}{2g} \cdot w^2 \cdot F = G = \text{konst.}$$

folgt, daß dann auch w konstant sein muß. Nehmen wir konstante Kontraktionszahl an, so wird, da w konstant bleibt, die Durchflußmenge sich mit der freien Fläche ändern, d. h. mit dem Hub linear steigen. Da die Widerstandsformel im Rohr nun nicht genau gilt und außerdem die

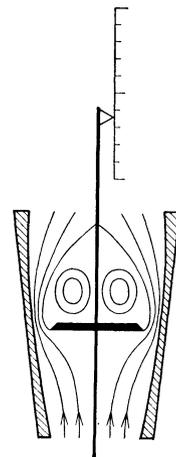


Abb. 304.
Bayer-Siemens
Schwimmer-Messer.

¹ Rehbock: Wassermessung mit scharfkantigen Überfallwehren.

Kontraktion etwas veränderlich ist, findet man bei konischer Röhre kein genaues lineares Verhalten. Bei dem Bayer-Siemens-Messer wird trotzdem genaues lineares Verhalten dadurch erreicht, daß der Konus eine schwach gewölbte, empirisch bestimmte Kurve erhält, wie aus Abb. 304 erkennbar ist.

Die lineare Abhängigkeit der Menge von der Anzeige ist ein großer Vorteil dieses Instrumentes gegenüber den Staugeräten. Da bei letzteren die Manometeranzeige mit dem Quadrat der Durchflußmenge sich ändert, wird beim Messen einer kleinen Menge, z. B. $\frac{1}{10}$ der Normalmenge, die Anzeige nur $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$ der normalen Anzeige sein, während beim Bayer-Siemens-Messer bei $\frac{1}{10}$ der Menge die Anzeige genau $\frac{1}{10}$ des normalen Hubes ist. Man erkennt, daß bei großen Meßbereichen diese Instrumente unschätzbare Vorteile besitzen.

Prinzipiell dieselbe Wirkung hat der Rota-Messer. In einer schwach konisch erweiterten Glasröhre befindet sich ein freischwebender leichter Rotationskörper nach Abb. 365. Schräge Schlitz

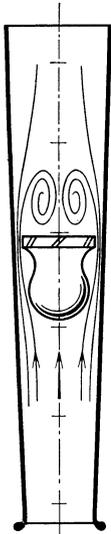


Abb. 305.
Rota-Messer.

am Umfang bringen den Meßkörper in Umdrehung und sorgen so für Stabilisierung. Auf der Glasröhre eingätzte Striche zeigen direkt die Menge an. Auf genau lineares Verhalten wird hier aus begrifflichen Gründen verzichtet, sodaß jeder Teilstrich vorher genau durch Eichung gefunden werden muß. Der Rota-Messer beherrscht hauptsächlich das Gebiet kleinster Luft- und Gasmenge, sind doch noch Ausführungen bei Durchflußmengen von nur wenigen Litern Gas je Stunde möglich.

Wegen der direkten Ablesemöglichkeit und ihrer einfachen Handhabung sind die auf diesen Grundlagen beruhenden Instrumente in der Industrie sehr beliebt.

110. Im Flüssigkeitsstrom sich drehende Meßgeräte.

Bei kleinen Geschwindigkeiten versagen die Staugeräte, abgesehen von dem neuen Gerät von Reichardt (S. 268), vollkommen, da die Drücke zu klein werden. Bei z. B. 1 m/s Luftgeschwindigkeit ist der Staudruck nur

$$q = \frac{\gamma}{2g} w^2 = \frac{1}{16} \text{ mm WS.}$$

Im Flüssigkeitsstrom sich drehende Flügel u. dgl. eignen sich sehr gut zur Überbrückung dieses Bereiches, wenn das Meßinstrument größere Abmessungen haben darf. Das Anemometer benutzt die verschiedenen Widerstände, die eine offene Halbkugel erfährt, je nach der Richtung, in

der die Halbkugel angeströmt wird. Die Anordnung nach Abb. 306 wird infolgedessen ein Drehmoment erhalten. Es stellt sich bei einer Windgeschwindigkeit w eine Umfangsgeschwindigkeit u ein mit einem konstanten Verhältnis w/u . Die Umdrehzahlen in einer bestimmten Zeit werden gestoppt, und nach einer Eichkurve wird die Geschwindigkeit bestimmt. Geschwindigkeiten von 1 m/s sind hiermit noch meßbar.

Für Wasser hat sich der Ottische Flügel gut bewährt (Abb. 307). Ein Flügelrädchen, das sich mit Hilfe einer „Windfahne“ frei in Strömungsrichtung einstellen kann, überträgt seine Umdrehungen auf einen kleinen

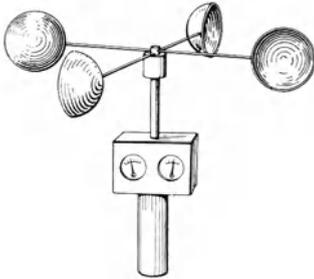


Abb. 306. Anemometer.

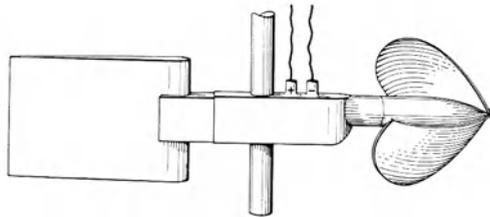


Abb. 307. Ottischer Flügel.

Schneckentrieb bei einem Übersetzungsverhältnis 1:40. Nach einer Umdrehung des Schneckenrades schließt ein elektrischer Kontakt eine Klingelleitung, ein Lichtsignal usw. Mit der Stoppuhr wird die Zeit für eine Anzahl Signalpunkte gemessen. Ist n die Drehzahl in der Sekunde und w die Wassergeschwindigkeit, so ergeben sich lineare Eichkurven:

$$w = C_1 + n \cdot C_2.$$

Für die Ausmessung von Flußläufen, Turbinenkanälen usw. ist der Ottische Flügel das Haupthilfsmittel. Geschwindigkeiten von etwa 10 cm/s können noch gemessen werden.

Literaturverzeichnis.

- Auerbach-Hort, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. V, Mechanik der Flüssigkeiten. Bd. VI, Mechanik der Gase und Dämpfe. J. A. Barth, Leipzig 1928.
- Betz: Mechanik flüssiger und luftförmiger Körper in Taschenbuch Hütte, I. Band. Bjerknæs, V, mit Bjerknæs, J., Solberg, H. und Bergeron, Physikalische Hydrodynamik, Springer, 1933.
- Durand, Aerodynamic Theory, 6 Bände. Springer, Berlin 1934.
- Eberhardt, C., Einführung in die theoretische Aerodynamik. R. Oldenbourg, München 1927.
- Eck: Strömungslehre in Taschenbuch Dubbel.
- Forchheimer, Ph., Hydraulik, 3. Aufl. B. G. Teubner, Leipzig 1930.
- Fuchs-Hopf-Weinig, Aerodynamik, 3 Bände. Springer, Berlin 1934/40.
- Geiger-Scheel, Handbuch der Physik, Bd. VII, Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Springer, Berlin 1927.

- Gilles-Hopf-Kármán, Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandten Gebieten. Springer, Berlin 1930.
- Glauert, H., Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie, übersetzt aus dem Englischen von H. Holl. Springer, Berlin 1929.
- Goldstein, S., Modern Developments in Fluid Dynamics, 2 Bände, Oxford, 1938.
- Grammel: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Vieweg & Sohn 1917.
- Hermann-Burbach, Strömungswiderstand und Wärmeübergang in Röhren. Akadem. Verlagsges., Leipzig 1930.
- Hydraulische Probleme. Vorträge auf der VDI-Tagung zu Göttingen 1925, VDI-Verlag, Berlin, 1926.
- v. Kármán-Levi-Civita, Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik. Springer, Berlin 1924.
- Kaufmann, W., Angewandte Hydromechanik, 2 Bände. Springer, Berlin 1934.
- Lamb, H., Lehrbuch der Hydrodynamik, aus dem Englischen übersetzt von E. Helly, mit Zusätzen von R. v. Mises., B. G. Teubner, Leipzig 1931.
- Mises, v.: Elemente der technischen Hydrodynamik. Teubner 1914.
- Müller, W., Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. Akadem. Verlagsges. Leipzig 1932.
- Müller, W., Mathematische Strömungslehre. Julius Springer, Berlin 1928.
- Oseen, Neue Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Akadem. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1927.
- Petrow, Reynolds, Sommerfeld, Michell, Abhandlungen über die Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung, herausgeg. von Hopf. Akadem. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1927.
- Prandtl, L., Abriß der Strömungslehre, 3. Aufl. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1935.
- Prandtl-Betz, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Springer, Berlin 1927.
- Prandtl-Betz, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, bisher 4 Lieferungen. R. Oldenbourg, München.
- Prandtl-Tietjens, Hydro- und Aeromechanik, 2 Bände. Springer, Berlin 1931.
- Prásil, Technische Hydrodynamik, 2. Auflage. Springer, Berlin 1926.
- Richter, Rohrhydraulik. Springer, Berlin 1934.
- Schiller, L., Drei Klassiker der Strömungslehre, Hagen, Poiseuille, Hagenbach. Akadem. Verlagsges., Leipzig 1927.
- Schmidt, H., Aerodynamik des Fluges, de Gruyter, Berlin 1929.
- Verhandlungen der Internationalen Mechanikerkongresse Delft (1924); Zürich (1926); Stockholm (1930); Cambridge, England (1934); und Cambridge, Mass., USA. (1938).
- Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, v. Schiller, Hydrodynamik und Aerodynamik, Akadem. Verlagsges., Leipzig 1930.
- Forschungsergebnisse des Aerodynamischen Instituts der TH. Aachen, des Hydraulischen Instituts der TH. München, des Instituts für Aerodynamik der ETH. Zürich u. a. m.
- Zentralblatt der Mechanik, kurze laufende Berichterstattung über alle Arbeiten der Strömungslehre aus der ganzen Weltliteratur.

Namen- und Sachverzeichnis.

- Ablösung 147.
 Ablösung bei Überschallströmung 263.
 Ablösung von Flüssigkeitsstrahlen 193.
 Ablösungsproblem 147.
 Ablösungsstelle 161.
 Ablösungsverluste 186.
 Abreißen der Strömung 147.
 Absaugung der Grenzschicht 232.
 Absolutströmung 74, 75, 76.
 Abspermmittel 178.
 Ackeret 100, 172, 228, 242, 264, 268.
 Adiabate 5, 20, 251.
 Ähnlichkeitsgesetz 96.
 Andres 156.
 Anfahrwirbel 39, 208.
 Anfressungen 246.
 Anlaufstrecke 127.
 Anemometer 287.
 Atmosphäre (Gleichgewicht) 4.
 Aufbereitung 198.
 Auftrieb 86, 205.
 Auftriebserhöhung 223.
 Aufwertung 125.
 Ausbildung der Vorderkante eines Profils 188.
 Ausblasen von Druckluft 234.
 Ausflußgeschwindigkeit 9.
 Autorotation 198.
- Ballversuche** 21, 78.
 Barker 273.
 Barth 123.
 Bayer-Siemens-Messer 285.
 Bergeversatz 198.
 Bernoulli 17.
 Bernoullische Gleichung 14, 17.
 Betz 137, 267.
 Bewegungsgleichungen 14.
 — mit Reibungsglied 101.
 Bewegungslehre 9.
 Bieberbach 61.
 Biolley, A. 172.
 Bjerknæs 59, 76.
 Blasengemisch (Kavitation) 245.
- Blasius 81, 106.
 Blende 279.
 Bohl 275.
 Bordasches Mundstück 180.
 Boussinesq 128.
 Brabbee 168.
 Bunsen-Schilling 23.
 Buri 202.
 Busemann 255, 263, 265, 266.
- Carstangen 284.
 Cauchy 42.
 Chilton 123.
 Closterhalfen 62.
 Colbum 123.
 Cranz 256.
- Dampfdruck** 24, 241.
 Dampfturbinenversuche 100.
 Debro 268.
 Deformationen eines Teilchens 30.
 Differenzdruckmessung 4.
 Diffusoreffekt 190.
 Diffusoren 149, 260, 263.
 Diskontinuitätslinie 148.
 divergente Kanäle (s. Diffusoren).
 Dönch 153.
 Doppelquelle 52, 74.
 Doppelwirbel 167.
 Drall 43.
 Drehung eines Teilchens 29.
 drehungsfreie Kreisbewegung 32.
 Druckenergie 11.
 Druckhöhe 11.
 Druckkräfte 15.
 Druckluftleitungen 261.
 Druckpunkt 203.
 druckpunktfeste Profile 225.
 Drucksonde 217, 273, 274.
 Drucksprung 89, 256.
 Druckverteilung bei Kugeln und Zylindern 187.
 Dryden, H. 146.
 Düsenablösung 173.

- Düsenkoeffizient 175, 279.
 Düsenmessungen 277.
 Durchflußmesser 285.
- E**astman 230.
 Eckwirbel 173.
 Edler v. Bohl 273.
 Eiffel 161.
 Einheiten für Drücke 4.
 Einschnürung eines Strahles 77, 83.
 Energieaustausch in reibungsfreien Flüssigkeiten 43.
 Englerscher Zähigkeitsmesser 99.
 Erosion 246.
 Erweiterungswinkel von Aufladerleitkanälen 263.
 Escher Wyss 79, 126, 245, 246.
 Esser 123.
 Euler 17.
 Everling 7.
 Expansion von Gasen in Rohren 261.
- Feuchtigkeitsgehalt der Luft 8.
 Felling 123.
 Flächensatz 89.
 Flachsbart 187.
 Flügel 62, 173, 239.
 Flügelschwingungen 230.
 Flüssigkeitsstrahlen, Ablösung 193.
 Förthmann 273.
 Formwiderstand 149, 182.
 freie Weglänge 96.
 freier Strahl 114.
 Frey 173, 239.
 Frietsch, E. 159.
 Fuhrmann 190.
- G**aede 100.
 Galavics 122.
 Gasausfluß 23.
 Gasfernleitung 261.
 Gasterstädt 198.
 gegenseitige Beeinflussung 190.
 General-Electric-Company 172.
 Gesamtdruck 14.
 geschichtete Stoffe 122.
 Geschwindigkeitshöhe 11, 83.
 Geschwindigkeitsverteilung in Rohren 110.
 Gewichtskomponente von Flüssigkeiten 15.
 glattes Rohr 106.
 Gleitwinkel 203, 204, 265.
- Gleitzahl 204, 265.
 Görtler 146.
 Graphische Konstruktion von Strömungsbildern 60, 253.
 Grätings 171.
 Grenzgeschwindigkeit 90.
 Grenzschiicht 131.
 Grenzschiichtablösung 232.
 Grünagel, E. 159.
 Gruschwitz 202, 232.
 Gutsche 159, 229.
- H**agen 103.
 Haller 247.
 Handley-Page 223, 235.
 Hegge Zijnen, B. 277.
 Hele-Shaw 74.
 Helmholtz 42, 96, 149.
 Hermann 106, 275.
 Hilfsflügel 235.
 Höhenformel 7.
 Höhenmessung, barometrische 7.
 Hörner 141.
 Hofmann 181.
 Homann 186.
 Hopf 107, 109.
 Hueber 220.
 Hufeisenwirbel 212.
 hydraulische Glätte 118.
 hydraulischer Radius 130.
 Hydrostatik 1.
 Hysteresiserscheinung 230.
- I**mpulsmoment 89.
 Impulssatz 76.
 Impulsverfahren (Betz) 137.
 induzierter Widerstand 214.
- I**sotrope Turbulenz 143.
- J**akobs 230.
 Jordan 177.
 Junkers A.G. 222.
- K**apillarwirkung 3.
 Kaplan 243.
 v. Kármán 111, 114, 139, 190.
 Kármánsche Wirbelstraße 185.
 Kavitation 240.
 Keller 100.
 Kempf 127.
 Keutner 284.
 Kiesewetter 121.

- kinematische Zähigkeit 98.
 Kirchhoff 283.
 Kniestücke 169.
 Koch 284.
 — G. m. b. H. 267.
 Kompressibilität 262.
 Kondensationszone 245.
 konforme Abbildung 61.
 Kontinuitätsgleichung 10.
 Kontraktion 179.
 Kornkennzahl 120.
 Korrektur des Geschwindigkeitsgliedes 113.
 Kramer 228.
 Kranz 167.
 Krell 171, 235.
 Kröber 172.
 Krümmer 165.
 Kugelströmung 161.

 Labyrinth-Dichtung 179.
 Lachmann 223, 235.
 laminare Anlaufstrecke 128.
 — Grenzschicht 131, 175, 227.
 Laminarströmung 93.
 Laminarprofile 228.
 Landeklappen 223.
 Lanchester 212.
 Lavaldüse 259.
 Lechner 243.
 Leitrad 89.
 Leitschaufeln 173, 238.
 Lewent 61.
 Lilienthal 204.
 Lippisch 225.
 Luftdichte 8.
 Luftschiffkörper 191.

 Machscher Winkel 249.
 Magnuseffekt 186, 206.
 Maxwell 100.
 Meier-Windhorst 186.
 Meissner 171.
 Meldau, E. 43.
 Meridianströmung 69.
 Messung des Druckes 2.
 Meyer, I. 34.
 —, Th. 61.
 Mikromanometer 267, 268.
 Millibar 7.
 Mischgeschwindigkeit 118.
 Mischungsweg 117.
 Mises 99, 107, 283.

 Möbius 129.
 Moment einer Doppelquelle 53.
 Momentenbeiwert 203.
 Muttray 164.

 Newton 93, 160.
 nichtstationäre Strömung 18, 44, 124.
 Nikuradse 153.
 Nippert 170.
 Normalatmosphäre 7.
 Normaldüse 175, 279.

Oberflächenwiderstand 131.
 Oesterlen 276.
 Ölförderung beim Ringschmierlager 95.
 Oseen 163.
 Ottscher Flügel 287.

Pannel 107.
 Parallelströmung 51, 54.
 Pascal 2, 7.
 Patterson 156.
 periodische Bildung von Wirbeln 185.
 Pfeleiderer 179.
 Plattenströmung 131.
 pneumatische Förderung 198.
 Pötter 188.
 Pohlhausen 147, 151.
 Poiseuille 93.
 Polardiagramm 204.
 Polarschreiber 205.
 Polzin 155.
 Potential 37.
 Potentiallinien 37, 60.
 Potentialströmung 37.
 Potentialwirbel 35.
 Potenzgesetze 112.
 Prandtl 111, 114, 132, 161, 171, 174,
 214, 232, 255, 272.
 Prandtl'sches Staurohr 233.
 Prâsil 76.
 Preiswerk 251.
 Pröll 223.
 profilierte Leitschaufeln 171.
 Propeller 77.
 pulsierende Durchflußströmung 124.

Quelle 50.
 Querbewegungen 114.
 Querschnittserweiterung 181.

Radscheibenreibung 139.
 Randwirbel 212.

- Ras, M. 228.
 rauhes Rohr 107.
 Rauigkeit 107.
 Reibung bei ablösungsfreien Strömungen 92.
 reibungsfreie Strömung 74.
 Reibungskoeffizient 106.
 Rehbock 285.
 Reichardt 268.
 Reichel 176.
 Reihenmanometer 272.
 Reynolds 103.
 Richter 99.
 Rietschel 168.
 Ringschmierlager 95.
 Ringwaage 267.
 Rohrreibung bei Expansion der Gase 261.
 Rosin 123.
 Rotationsströmung 159.
 Rota-Messer 286.
 rotierende Kanäle 159.
 Rohrverzweigungen 178.
 Rubach 186.
 Ruden 159.
 Rückströmung 151.
 Ruhrgas A. G. 261.
- Salzmann 100.
 Saugrohr der Kaplanturbine 24.
 Schallgeschwindigkeit 247.
 Scharin 250.
 scharfe Kanten 148.
 Schattenfläche 160, 192.
 Schaufelgitter 81.
 Schichtenströmung 102.
 Schiller 106, 128.
 Schlichting 135.
 Schlierenaufnahmen 250.
 Schlitzflügel 223, 235.
 Schrader 167.
 Schraubengebläse 69.
 Schrenk 179, 232.
 Schultz-Grunow 124, 139.
 Schwallgeschwindigkeit 91.
 Schwebegeschwindigkeit 197.
 schwebende Körper 197.
 Seewald 235.
 Sekundärströmung 167.
 Senke 50.
 Sersche Scheibe 271.
 Sieb (Strömung durch) 77, 193, 195.
 Sörensen 120.
 Spalding 170.
- Spaltflügel 223, 235.
 Spiralgehäuse 55.
 Stach 281.
 Stahlrohre (Widerstand) 122.
 Stanton 107.
 stationäre Strömung 16.
 statische Druckhöhe 14.
 statischer Druck 14.
 Staudruck 22.
 Staudruckprofile 137, 229, 233.
 Staupunkt 22.
 Stetigkeitsgleichung 10.
 Stokes 37, 74, 163.
 Stoppwirbel 40.
 Stoßkoeffizient 83.
 Stoßverlust 82.
 Strahlablenkung 78, 79, 193.
 Strahlregler 78.
 Strauß 276.
 Strömungsformen 102.
 Strömungswiderstand in Rohren 105.
 Stromlinien 14, 51, 60.
 Stromlinienkörper 191.
 Stromfunktion 72.
 Studer 230.
- Taylor 146, 276.
 Temperaturempfindlichkeit von Flüssigkeiten 3.
 Thoma 156, 176, 243.
 Thomson 40.
 Thomson-Überfall 284.
 Tietjens 128.
 Töppler 250.
 Tollmien 102, 141, 145.
 Townend 237.
 Totwassergebiet 183.
 Tragflügel 202.
 Tragflügeleigenschaften bei Überschallströmungen 264.
 Trägheitskräfte 98.
 Trennfläche 42.
 Tropfenschlag 246.
 Turbinenhauptgleichung 48.
 turbulente Anlaufstrecke 128.
 — Grenzschicht 131, 145.
 — Vermischung 105, 114, 145.
 Turbulenz 103, 114, 143, 152.
 Turbulenzdraht 186, 229.
 Turbulenzgrad 163.
- Überfallmessungen** 284.
Übergeschwindigkeit 68, 188.

- Überlagerungsgesetz 51.
 Umlaufintegral 37, 38, 88.
 Umschlag 144.
 Unterdruck 12, 20.

 Vakuum 24, 251.
 van Tongern 199.
 Ventile 178.
 Venturirohr 282.
 Verdichtungsstoß 256.
 Verdrängungsdüse 282.
 Verdrängungsstauplatte 282.
 Verdrängungsventurirohr 283.
 Vermischung eines freien Strahles 140.
 Vermischungszone 140.
 Verzweigungsstromlinie 22.
 Vüllers 156.

 Wärmeübergang 104.
 Walchner 253.
 Wandkennzahl 120.
 Wandrauhigkeit 116, 121.
 Wassersprung 89.
 Weinig 81.
 Weisbach 169.

 Wellenwiderstand 257.
 Welligkeitszahlen 109.
 wellige Rauigkeit 109.
 Widerstand von Geschossen
 258.
 — von Fahrzeugen 192.
 Widerstandsziffern 200.
 Wieselberger 134, 218.
 Windkanal 164.
 Windkanaldüse 140.
 Winkelübertreibung 81.
 Wirbel 35, 40.
 Wirbelfaden 42.
 Wirbelkern 43.
 Wirbelquelle 55.
 Witte 175, 279.

 Zähigkeitsziffer 93.
 Zentrifugalkraft 27, 158.
 Zimmermann 122.
 Zirkulationswirbel 207.
 Zirkulation 36, 88.
 Zugwirkung eines Schornsteins 8.
 Zyklon 199.
 Zylinderströmung 29, 57, 187.