

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DES SECHSTEN BANDES ERSTER TEIL
GEODÄSIE UND GEOPHYSIK

REDIGIERT VON

PH. FURTWÄNGLER IN WIEN

UND

E. WIECHERT (1899–1905) IN GÖTTINGEN



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

1906—1925

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

SECHSTER BAND:
GEODÄSIE, GEOPHYSIK
UND ASTRONOMIE

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DES SECHSTEN BANDES ERSTER TEIL
GEODÄSIE UND GEOPHYSIK

REDIGIERT VON

PH. FURTWÄNGLER IN WIEN
UND
E. WIECHERT (1899–1905) IN GÖTTINGEN



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

1906—1925

ISBN 978-3-663-18929-9 ISBN 978-3-663-19190-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-19190-2

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorrede zum sechsten Bande, 1. Teil.

Der erste Teil des VI. Bandes der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, der nunmehr abgeschlossen vorliegt, behandelt die Geodäsie und Geophysik. Er zerfällt dementsprechend in zwei Unterabteilungen: A. Geodäsie und B. Geophysik, die jede für sich paginiert sind. Um die beiden Abteilungen sofort bequem unterscheiden zu können, sind zur Paginierung der ersten Abteilung die gewöhnlichen Ziffern, für die zweite dagegen schräg stehende Ziffern verwandt.

Die erste Abteilung beginnt mit dem Artikel *Niedere Geodäsie* von *C. Reinherz* (†), an den sich ein kurzer Artikel über *Photogrammetrie* von *S. Finsterwalder* anschließt. Es folgt dann der zentrale Artikel der ersten Abteilung: *Höhere Geodäsie* von *P. Pizzetti*. Dieser behandelt zunächst die allgemeinen Grundlagen der höheren Geodäsie, sodann ihre Rechnungs- und Messungsmethoden und schließt mit einer summarischen Entwicklungsgeschichte der geodätischen Kenntnisse. Der nächste Artikel *Kartographie* von *E. Bourgeois* (übersetzt und ergänzt vom Unterzeichneten) berichtet über die in der Geodäsie und Geographie gebräuchlichen Kartenprojektionen. Den Abschluß bildet der Artikel *Nautik* von *H. Meldau*, in dem speziell die Theorie des Kompasses an Bord eiserner Schiffe ausführlich besprochen wird.

In der zweiten Abteilung konnte die ursprünglich geplante Anordnung aus Gründen redaktioneller Natur nicht völlig beibehalten werden, was aber kaum von erheblichem Nachteil sein dürfte. Der erste Artikel über die Bewegung der Hydrosphäre, der von *G. H. Darwin* (†) und *S. S. Hough* verfaßt ist, behandelt die Erscheinungen von Ebbe und Flut in weitestem Umfange und berichtet auch über Anwendungen auf Probleme der Kosmogonie. Der zweite Artikel von *F. R. Helmert* (†) betrifft die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde. Es wird das gesetzmäßige Verhalten und die Störung der Schwerkraft, die Schlüsse auf die Massenverteilung in der Erdkruste zuläßt, erörtert.

Sodann folgt der Artikel Dynamische Meteorologie von *F. M. Exner* und *W. Trabert* (†). Während der letzte die allgemeinen Grundbegriffe der Meteorologie auseinandersetzt, behandelt der erste eingehend die Dynamik der Atmosphäre. Nach einem kurzen Artikel über die atmosphärische Elektrizität von *E. v. Schweidler* schließt sich der Artikel Erdmagnetismus von *Ad. Schmidt* an. In diesem werden zunächst die Instrumente und Beobachtungsmethoden, die zur Bestimmung des erdmagnetischen Feldes dienen, besprochen, und sodann wird über die Beobachtungsergebnisse und ihre physikalische Deutung berichtet. Es folgt ein großer Artikel über Dynamische Geologie von *V. Conrad*, der eine ausführliche Darstellung der modernen Seismik gibt. Die zweite Abteilung schließt endlich mit dem Artikel Optik der Atmosphäre, in dem *W. Möbius* über Luftspiegelungen, Haloerscheinungen, Theorie des Regenbogens und verwandte Dinge berichtet.

Auf eine nähere Inhaltsangabe der einzelnen Artikel möge im Interesse der Rausersparnis verzichtet werden, was um so eher geschehen kann, als das dem Bande vorgedruckte ausführliche Inhaltsverzeichnis einen guten Überblick bietet. Es sei nur betont, daß alle Artikel vom Standpunkt der angewandten Mathematik aus geschrieben sind. Über die allgemeine mathematische Theorie, die in den verschiedenen behandelten Gebieten in Betracht kommt, muß sich der Leser aus den ersten Bänden der Encyklopädie unterrichten, wofür die nötigen Hinweise gegeben sind.

Das Register hat Herr *K. Mader* angefertigt, wofür ihm auch an dieser Stelle bestens gedankt sei. Zur Unterscheidung der beiden Abteilungen sind den Seitenzahlen die Buchstaben A und B vorgesetzt, und es sind außerdem zur Bezeichnung der Seitenzahlen für die Abteilung B ebenso wie im Text schräg stehende Ziffern benutzt.

An den Vorarbeiten für den vorliegenden Teilband hat sich außer *E. Wiechert*, von dem ein Dispositionsentwurf stammt, besonders *F. Klein* durch Gewinnung von Mitarbeitern beteiligt.

Wien, im November 1924.

Ph. Furtwängler.

Inhaltsverzeichnis zu Band VI, 1. Teil.

A. Geodäsie.

1. Niedere Geodäsie. Von C. REINHERTZ in Hannover.*)

A. Allgemeines.

	Seite
1. Aufgabe und Einteilung der Geodäsie	7
2. Die Grundgedanken des Messens an der Erdoberfläche und die Einteilung der Messungen	9
3. Übersicht der Methoden	11
4. Allgemeines über die Anwendung der Ausgleichsrechnung.	13
5. Instrumentelle Hilfsmittel	17

B. Die fundamentalen Messungen.

6. Die Längenmessung	19
7. Die Winkelmessung	22
a) Der Theodolit	22
b) Horizontalwinkelmessung	25
c) Vertikalwinkelmessung	26

C. Die Lagemessungen.

8. Die Koordinatensysteme der Lagemessungen	27
a) Allgemeines über die geodätischen Koordinatensysteme	27
b) Rechtwinklige ebene Koordinaten	29
c) Rechtwinklige sphärische Linearkoordinaten	30
d) Konforme rechtwinklige Gaußsche Koordinaten	33
e) Koordinatentransformation	34
9. Die Punktbestimmung durch Triangulierung	35
a) Allgemeines über Triangulierung	35
b) Zentrierung	36
c) Die Winkelmessungen und ihre Anordnung	37
10. Die Grundaufgaben des trigonometrischen Einschneidens im rechtwinkligen Koordinatensystem	40
a) Vorwärts- und Seitwärtseinschneiden	40
b) Rückwärtseinschneiden	41
c) Einige andere Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung	43
11. Ausgleichung von Kleintriangulierungen	47
a) Methode der vermittelnden Beobachtungen	48
b) Graphische Punktausgleichung	50
c) Methode der bedingten Beobachtungen	52
d) Die Genauigkeit der Kleintriangulierungen	53
12. Polygonzugmessung	54
a) Der Theodolitpolygonzug	55
b) Der Bussolen-(Kompaß-)zug	58
13. Einzelaufnahme	59

*) Die Angaben über den Aufenthaltsort der Verfasser beziehen sich auf die Zeit des Erscheinens der Artikel.

	Seite
14. Berechnung und Teilung der Flächen	61
a) Die Flächenberechnung	61
b) Die Flächenteilung	63
15. Das Abstecken von geraden Linien und Kreisbogen	65

D. Die Höhenmessungen.

16. Das Nivellieren	69
a) Definition des Höhenunterschiedes. Historisches	69
b) Der Nivellierapparat	70
c) Das Nivellierverfahren	71
d) Die Genauigkeit der Nivellierung	74
e) Erdmassenberechnung	75
f) Kotierte Projektion	77
17. Trigonometrische Höhenmessung	78
18. Barometrische Höhenmessung	81

E. Tachymetrische Methoden.

19. Indirekte Längenmessung (Distanzmessung)	85
a) Distanzmesser mit Distanzlatte	85
b) Distanzmesser mit Basisschiene (Basislineal)	88
20. Tachymetrische Instrumente und Aufnahmen	90
21. Die Meßtischaufnahme	92
22. Flüchtige Aufnahmen	96

(Abgeschlossen im Oktober 1905.)

2. Photogrammetrie. Von S. FINSTERWALDER in München.

1. Einleitung	99
2. Apparate	101
3. Ausmessung der Bilder	104
4. Das Rückwärtseinschneiden	107
5. Das Vorwärtseinschneiden und die Rekonstruktion der Objekte bei bekannten Standpunkten	109
6. Flüchtige Aufnahmen. Stereophotogrammetrie. Mechanismen	113

(Abgeschlossen im Oktober 1905.)

3. Höhere Geodäsie. Von P. PIZZETTI in Pisa.

I. Allgemeine Grundlagen.

1. Aufgabe der höheren Geodäsie	125
2. Lotrichtung, Schwerkraft	126
3. Beobachtungstatsachen und Sätze der Potentialtheorie	129
4. Weitere Folgerungen aus der Potentialtheorie. Theorem von G. G. Stokes	130
5. Beobachtungen zur Bestimmung des Geoids. Reduktion der Schwerkraftsmessungen	134
6. Geodätische Bestimmung des Geoids. — Referenzellipsoid	138
7. Lotabweichungen	139
8. Reduktion der beobachteten Lotrichtungen	140
9. Bessels Rotationsellipsoid	141

II. Rechnungs- und Messungsmethoden.

A. Geodätische Rechnungen auf dem Rotationsellipsoid.

10. Fundamentalformeln	142
11. Normalschnitte	146

	Seite
12. Geodätische Linien	148
13. Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimuts.	149
14. Fortsetzung. Fall kleiner Bogen	152
15. Bestimmung der Länge und des Azimuts eines geodätischen Bogens aus den geographischen Koordinaten der Endpunkte.	153
16. Geodätische Polarkoordinaten	155
17. Vergleichung der geodätischen Linie mit einem Normalschnitt	157
18. Das geodätische Dreieck	158
19. Auflösung des geodätischen Dreiecks durch Reduktion auf das ebene Dreieck. Sphäroidischer Exzeß	161
20. Sehnen und Normalschnitte	163
21. Reduktion ellipsoidischer Figuren auf sphärische durch konforme Abbildung.	164
22. Rechtwinklige geodätische oder Soldnersche Koordinaten	166
23. Übertragung der geographischen Koordinaten vermittels rechtwinkliger geodätischer	169
24. Projektionen auf die Ebene	170

B. Landesvermessung.

25. Basismessungen	173
26. Basisapparate	175
27. Winkel; ihre Reduktion auf das Ellipsoid	179
28. Triangulation	180
29. Basisnetze oder Vergrößerungsnetze	182
30. Berechnung einer Triangulation und der geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte	183
31. Ausgleichung	184
32. Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen	190
33. Genauigkeit der Basis- und Winkelmessungen.	192

C. Höhenmessung.

34. Trigonometrisches Nivellement.	194
35. Der Refraktionskoeffizient als Funktion der atmosphärischen Verhältnisse	197
36. Empirische Untersuchungen über den Refraktionskoeffizienten	199
37. Geometrisches Nivellement	200
38. Einfluß der Schwerstörungen auf Nivellements	206
39. Das Mittelwasser der Meere und der Nullpunkt für die Höhen.	207
40. Genauigkeit einer Nivellementsausgleichung.	209

D. Erdmessung.

41. Ableitung der Konstanten des Erdellipsoids aus zwei oder mehr Meridianbogen	211
42. Bestimmung von a und e durch Parallelkreisbogen	213
43. Stücke des Ellipsoids. Lotabweichungen	214
44. Fortsetzung. Bestimmung der Lotabweichungen. Ausgleichung	217
45. Fortsetzung. Angenäherte Bestimmung von Geoidstücken	220
46. Die Schwerstörungen und die Abweichungen zwischen Geoid und Ellipsoid	223

III. Summarische Entwicklungsgeschichte der geodätischen Kenntnisse.

47. Anfänge der geodätischen Messungen, bei denen die Erde als Kugel betrachtet wird.	223
48. Physikalische Untersuchungen über die Gestalt der Erde	226
49. Die wichtigsten geodätischen Messungen bis 1860	230
50. Die hauptsächlichsten Berechnungen der Konstanten des Erdellipsoids	234
51. Bestimmungen der Abplattung aus Pendelmessungen	236
52. Benutzung einiger astronomischer Daten zur Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids.	237
53. Moderne geodätische Arbeiten. Lotabweichungen	239

4. Kartographie. Von R. BOURGEOIS in Paris und PH. FURTWÄNGLER in Aachen.

	Seite
1. Einleitung	250
2. Problemstellung. Allgemeine Analyse der Verzerrungen	252
3. Perspektiven	255
4. Konische Abbildungen oder Kegelprojektionen und ihre Grenzfälle. Überblick und Einteilung	259
5. Azimutale Abbildungen	261
6. Zylindrische Abbildungen	265
a) Flächentreue zylindrische Abbildungen	266
b) Winkeltreue zylindrische Abbildungen (Mercatorprojektion)	267
c) Mittelabstandstreue zylindrische Abbildungen (Plattkarten)	269
7. Konische Abbildungen	269
a) Flächentreue konische Abbildungen	270
b) Winkeltreue konische Abbildungen	273
c) Mittelabstandstreue konische Abbildungen	274
8. Unechte Kegelprojektionen nebst Grenzfällen	275
a) Die Bonnesche Projektion	275
b) Die Sanson-Flamsteedsche Projektion	278
c) Flächentreue Projektionen, bei denen die Parallelkreise durch ein System von parallelen Geraden abgebildet werden	279
d) Die Planisphäre von Aitow und verwandte Entwürfe	280
9. Polykonische Projektionen	281
a) Die gewöhnliche polykonische Projektion	281
b) Die rechtschnittige polykonische Projektion des englischen Office	281
10. Polyederprojektion. Gradabteilungskarten	282
11. Kreisnetze	283
12. Projektion mit geringster Längenverzerrung nach Tissot	285
13. Allgemeines über die winkeltreuen Abbildungen. Projektionen von Tschebyschoff, Peirce und August	287
14. Allgemeines über die flächentreuen Abbildungen	290
15. Darstellung der Höhenverhältnisse	290
16. Kartometrie	292
17. Entwicklung des staatlichen Kartenwesens im 19. Jahrhundert	294

(Abgeschlossen im Januar 1909.)

5. Nautik. Von H. MELDAU in Bremen.

A. Terrestrische Navigation.

1. Einleitung:	
a) Allgemeines, Begrenzung des Gebietes	301
b) Erklärungen	302
2. Bestimmung des Kurses	303
a) Kompaß	303
b) Beschickung des Kompaßkurses zum wahren Kurs	303
3. Messung der Distanz	304
4. Loxodromische Schifffahrt	306
a) Fundamentalgleichungen der Besteckrechnung	306
b) Aufgaben der Besteckrechnung, rechnerische Lösung	308
5. Die loxodromische Karte	309
a) Graphische Lösung der Aufgaben der Besteckrechnung im Netz der Seekarte	309
b) Inhalt der Seekarte	310
6. Zuverlässigkeit der Besteckrechnung	310
7. Orthodromische Schifffahrt	311
a) Allgemeines	311
b) Rechnerische Lösungen	312
c) Graphische Lösungen	313
8. Küstenschifffahrt	315
a) Allgemeines	315

	Seite
b) Richtungsbestimmungen	316
c) Abstandsbestimmungen	316
d) Horizontalwinkel	318
e) Lotungen, W. Thomsons Lotmaschine	318
f) Verbindungen zweier Standlinien zur Bestimmung des Schiffsortes	319

B. Der Kompaß an Bord eiserner Schiffe.

9. Historische Einleitung	320
a) Phasen der Problemstellung	320
b) Phasen der Lösungsversuche	320
c) Airys Kompensationsvorschläge	322
d) Streit um die Kompensation	323
e) Ausgang des Streites	324
10. Magnetische Eigenschaften des Schiffeisens, Kompaßort	325
a) Fester Schiffsmagnetismus	325
b) Halbfester Schiffsmagnetismus	326
c) Flüchtiger Schiffsmagnetismus	327
d) Wahl des Kompaßortes	327
11. Beobachtungsmethoden	328
a) Zu bestimmende Größen	328
b) Ermittlung der Deviationen	328
c) Deviationskurven	329
12. Hilfsinstrumente	330
a) Messung der horizontalen Feldstärke	330
b) Typen von Deflektoren	331
c) Messung der vertikalen Feldstärke (Vertikalkraftwage)	333
13. Deviation bei aufrechtem Schiff	333
a) Allgemeines	333
b) Die Poissonschen Gleichungen	334
c) Deviationsformeln	334
d) Bestimmung der Koeffizienten	337
e) Allgemeines über die Koeffizienten	339
14. Deviation bei geneigtem Schiff	341
a) Der Krängungsfehler und seine Bestandteile	341
b) Bestimmung des Krängungskoeffizienten	343
15. Änderungen der Deviation	344
a) Änderungen mit der Breite	344
b) Änderungen durch halbfesten Magnetismus	345
c) Deviationsstörungen	346
16. Genauigkeit	347
a) Bei unmittelbarer Beobachtung	347
b) Ermittlung der Deviation aus Richtkraftmessungen	348
c) Berechnung aus den Koeffizienten	348
17. Graphische Darstellungen der Feldstärke	349
a) Allgemeines. Zweck der Darstellungen	349
b) Darstellungen mit festliegendem Meridian	350
c) Darstellungen mit festliegender Längsschiffslinie	351
d) Dromoskope	352
18. Kompass und Kompaßrosen	352
a) Geschichtliches	352
b) Nadelanordnung	353
c) Magnetisches Moment des Rosensystems, Nadelinduktion	354
d) Einstellungsvermögen	355
e) Ruhe der Kompaßrose	356
f) Trockenkompass	358
g) Fluidkompass	359
19. Kompensation der Kompass	361
a) Aufgabe der Kompensation	361
b) Kompensationsmittel	361
c) Reihenfolge der Kompensationen	363

	Seite
d) Ausführung der Kompensation	363
e) Hindernisse vollkommener Kompensation	364
f) Kompaßsysteme mit besonderen Kompensationsvorrichtungen	365
20. Kompass mit Doppelrosen	366
a) Zwei Rosen	366
b) Zwei Rosen und ein Deflektor	367
21. Bestimmung des Meridians durch die Inklinationsnadel	368
22. Fernübertragung von Kompaßangaben	368
23. Ersatz des magnetischen Kompasses durch Kreiselapparate	369
a) Gyroskope zur Festhaltung einer an ihnen eingestellten Richtung	369
b) Kreiselapparate mit eigener Richtkraft	370

(Abgeschlossen im Juli 1909.)

B. Geophysik.

6. Bewegung der Hydrosphäre. Von Sir G. H. DARWIN in Cambridge und S. S. HOUGH in Capstadt.

Einleitung	5
----------------------	---

A. Historisches.

1. Historisches	6
---------------------------	---

B. Dynamische Theorie.

2. Fluterzeugendes Potential	8
3. Gleichgewichtstheorie der Gezeiten	9
4. Entwicklung des fluterzeugenden Potentials	10
5. Korrektur der Gleichgewichtstheorie wegen der gegenseitigen Anziehung der Wassermassen	11
6. Korrektur wegen der Verteilung von Land und Wasser	12
7. Dynamische Theorie. Fundamentalgleichungen	13
8. Die Kontinuitätsgleichung	14
9. Bedingung für die freie Oberfläche	14
10. Gezeiten in Kanälen	15
11. Die Laplacesche Differentialgleichung für die Gezeiten	16
12. Gezeiten von langer Periode. Lösung durch Potenzreihenentwicklung	17
13. Gezeiten von langer Periode. Lösung durch Kugelfunktionen	19
14. Tägliche Gezeiten. Lösung von Laplace	21
15. Halbtägige Gezeiten. Lösung von Laplace	22
16. Transformation der Gleichungen von Laplace	23
17. Lösung in allgemeinen Kugelfunktionen	24

C. Praktische Anwendungen.

18. Beobachtung der Gezeiten	26
19. Seiches und Vibrationen der Seen und des Meeres	27
20. Fluterzeugende Kräfte	28
21. Lotablenkungen	29
22. Methoden zur Diskussion der wirklichen Ozeantiden	31
23. Harmonische Analyse	33
24. Meteorologische Tiden, Obertiden und kombinierte Tiden oder Seichtwassertiden	38
25. Die Resultate der harmonischen Analyse	39
26. Numerische harmonische Analyse	41

	Seite
27. Erklärung einiger gebräuchlicher Ausdrücke; Nullpunkte	44
28. Synthetische Methode für die halbtägigen Gezeiten	45
29. Synthetische Methode für die täglichen Gezeiten	48
30. Reduktion der Beobachtungen von Hoch- und Niedrigwasser	49
31. Gezeitenvorhersage. Methoden zur Aufstellung von Gezeitentafeln	50
32. Fehler der Gezeitentafeln	52
33. Karten gleicher Gezeiten	54
34. Gezeitenströmungen, Stürmer	57
35. Gezeiten in Seen und Meeresbuchten	59

D. Verschiedene Untersuchungen.

36. Bestimmung der Mondmasse mit Hilfe der Gezeiten	60
37. Elastische Tiden und die Steifigkeit der Erde	61
38. Gezeiten der Atmosphäre	66
39. Präzession und Nutation	67
40. Breitentiden oder Eulersche Tiden	68

E. Flutreibung und spekulative Astronomie.

41. Geschichtliches	68
42. Allgemeine Betrachtung der Flutreibung	71
43. Die Gezeiten eines zähen Sphäroids	72
44. Die Natur des Problems der Gezeitenreibung und seine Einteilung	73
45. Problem, wenn die Mondbahn kreisförmig, aber nicht geneigt gegen die Ekliptik ist	76
46. Problem, wenn die Mondknoten oszillieren oder ungleichförmig umlaufen	79
47. Problem, wenn die Bahn exzentrisch, aber nicht geneigt ist	80
48. Analytische Lösung für zwei Körper	82
49. Eine Spekulation über Zeit und Art der Entstehung des Mondes	82
50. Gezeitenreibung bei Vorhandensein mehrerer Satelliten	82
51. Verwandte Probleme	83

(Abgeschlossen im März 1908.)

7. Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde. Von

F. R. HELMERT in Potsdam.

1. Überblick	87
2. Die normale Schwerebeschleunigung (Formel von Clairaut)	89
3. Anmerkungen: Die maximale Erhebung des Niveausphäroids U über das Ellipsoid gleicher Achsenlängen u. a.	93
4. Zahlenwerte	94
5. Die normale Änderung der Schwerebeschleunigung g mit der Meereshöhe H . Beobachtungswerte	97
6. Die totale Schwerestörung	99
7. Zusammenhang zwischen Schwerestörung, Massenstörung und Höhenstörung der Meeresfläche	100
8. Die Reduktion der Schwerebeschleunigung aufs Meeresniveau nach Bouguer, Young und Poisson	104
9. Die Geländereduktion	106
10. Schätzung der Abweichungen N des Geoids vom Normalsphäroid	111
11. Die Schwerestörungen im Lichte der Gleichgewichtstheorie	114
12. Formeln für kreisförmige Kontinente und Inseln mit vertikalem Küstenabfall	120
13. Übersicht der Schwerestörungen: Schwerkraft auf dem Meere, Isostasie	123
14. Inselschwerkkräfte	128
15. Küstennähe auf den Kontinenten	134
16. Küstennähe auf dem Meere	141

	Seite
17. Festland, Gebirge	144
18. Horizontalverschiebungen der Ausgleichsmassen, ausgebreitete Massenanhäufungen und Defekte	152
19. Geologische und geotektonische Beziehungen. Der wahre Charakter des Gleichgewichtszustandes	154
20. Interpolationsformel für die Schwerebeschleunigung innerhalb der Kontinente	159
21. Veränderung der Schwerebeschleunigung mit der Tiefe und Beobachtungen der Schwerebeschleunigung in Bergwerken	160
22. Zusammenhang zwischen der ideellen störenden Schicht und den Lotstörungen	162
23. Methode von Baron Roland Eötvös zur Messung zweiter Differentialquotienten des Schwerepotentials	166
24. Noch einige Reduktionsweisen der Schwerebeschleunigung	172
25. Zeitliche Veränderungen der Schwerkraft	175

(Abgeschlossen im April 1910.)

8. Dynamische Meteorologie. Von FELIX M. EXNER in Innsbruck und W. TRABERT in Wien.

I. Grundbegriffe der Meteorologie.

1. Messung der meteorologischen Elemente	180
2. Bearbeitung der meteorologischen Elemente	185
3. Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe und Hebung der Flächen gleichen Druckes	187
4. Zusammensetzung der Luft	190
5. Zustandsänderungen der Luft	194
6. Ortsveränderungen der Luft	197
7. Die Strahlung	201
8. Die Wärmeverteilung auf der Erdoberfläche	204

II. Dynamik der Atmosphäre.

9. Allgemeine Ursache der Luftströmungen	207
--	-----

A. Allgemeine Zirkulation der Atmosphäre.

10. Allgemeine Bewegungsgleichungen	208
11. Konstanz der Flächengeschwindigkeit	210
12. Gürtel hohen Druckes	210
13. Druck- und Geschwindigkeitsverteilung nach W. Ferrel	212
14. Schema der allgemeinen Zirkulation	213
15. Zusammenhang der allgemeinen Zirkulation mit den Störungen in der Atmosphäre	214

B. Atmosphärische Störungen.

16. Gleichgewicht in ruhender Luft	215
17. Energiequelle der atmosphärischen Störungen nach M. Margules	216
18. Gleichgewicht bewegter Luft	218
19. Geradlinige horizontale Bewegung	219
20. Gekrümmte Luftbahnen	220
21. Kreisförmige Isobaren	221
22. Kreisförmige Zyklonen nach Oberbeck	221
23. Depressionen höherer Breiten	222
24. Assymmetrische Zyklonen nach L. de Marchi	223
25. Vertikale Bewegung	225
26. Problem der Sturmtheorie	225
27. Kalte und warme Zyklonen	225

28. Antizyklonen	Seite 226
29. Kompression und Ausbreitung einer Luftmasse nach Margules	227
30. Bewegung der Isobaren	227

C. Schwingungen der Atmosphäre.

31. Schwingungen periodisch erwärmter Luft	229
32. Freie Schwingungen der Atmosphäre	233

(Abgeschlossen im Dezember 1912.)

9. Atmosphärische Elektrizität. Von E. v. SCHWEIDLER in Innsbruck.

1. Historische Übersicht; Problemstellung	236
2. Die Quellen der Ionisierung der Atmosphäre	239
3. Der Ionisationszustand der Atmosphäre	244
4. Das elektrische Feld und die Raumladung der Atmosphäre	250
5. Die elektrischen Ströme in der Atmosphäre	255
6. Das gestörte Feld der Troposphäre	260
7. Elektrische Erscheinungen in der Stratosphäre (Polarlicht)	263

(Abgeschlossen im Juli 1915.)

10. Erdmagnetismus. Von AD. SCHMIDT in Potsdam.

1. Einleitung	267
-------------------------	-----

A. Die Bestimmung des erdmagnetischen Feldes. Instrumente und Beobachtungsmethoden.

2. Allgemeines	271
3. Die Elemente der Beobachtungsmittel und Methoden	273
4. Die ponderomotorische Einwirkung zweier Magnete aufeinander	278
5. Besondere Fälle. Gebrauchsformeln	292
6. Temperatureinfluß und Induktion	298
7. Ablenkungsbeobachtungen	304
8. Schwingungsbeobachtungen	311
9. Bestimmung der Magnetkonstanten	314
10. Variationsbeobachtungen	317
11. Richtungsmessungen	322
12. Intensitätsmessungen	325
13. Sonstige Messungen. Deviation	328

B. Das erdmagnetische Feld. Beobachtungsergebnisse und zusammenfassende Darstellungen.

14. Übersicht über die Erscheinungen	330
15. Gang der Mittelwerte. Säkularvariation. Nachstörung	332
16. Periodische Schwankungen, insbesondere die tägliche Variation	335
17. Störungen	340
18. Erdströme. Polarlicht	346
19. Die räumliche Verteilung des Feldes	351
20. Dis Gaußische Theorie	361

C. Die physikalische Natur der erdmagnetischen Erscheinungen.

21. Dauernde Magnetisierung und Säkularvariation	374
22. Periodische Schwankungen. Theorie von Schuster	381
23. Störungen und damit zusammenhängende Vorgänge	389

(Abgeschlossen im Februar 1917.)

11. Dynamische Geologie. Von V. CONRAD in Wien.

	Seite
Vorbemerkung	398

I. Erdbeben als Erreger elastischer Wellen in der Erde.

1. Einleitung	399
2. Die allgemeinen Elastizitätsgleichungen	401
3. Isotropie und Äolotropie	402
4. Fortpflanzung elastischer Wellen in der Erde	407
4a. Reflexion elastischer Wellen	412
5. Oberflächenwellen	422

II. Theorie des Erdbebenstrahls.

6. Grundproblem. Annahmen, Laufzeitkurve	438
7. Bezeichnungsweise	440
8. Die Strahlgleichung	441
9. Direkte Methode zur Lösung der Strahlgleichung	444
10. Indirekte Methoden zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung im Erdinnern	453

III. Das Seismogramm.

11. Allgemeine Charakteristik	470
12. Deutung von Einsätzen im Diagramm	473
13. Die Amplitudenfunktion (Intensitäts- und Energiebetrachtungen)	478

IV. Anhang.

14. Epizentralort und -zeit	486
15. Herdtiefe	490

(Abgeschlossen im Oktober 1922.)

12. Optik der Atmosphäre. Von W. MÖBIUS in Leipzig.

1. Einleitung	498
2. Gewöhnliche Strahlenbrechung (Refraktion)	499
3. Außergewöhnliche Strahlenbrechung („Luftspiegelungen“)	500
4. Szintillation („Funkeln“)	504
5. Die Eiskristalle in der Atmosphäre und Allgemeines über die Haloerscheinungen	505
6. Die durch Reflexion allein erzeugten Haloerscheinungen	508
7. Durchgang des Lichtes durch Prismen	509
8. Durch Brechung allein erzeugte Haloerscheinungen	511
9. Durch Mitwirkung innerer Reflexion erzeugte Haloerscheinungen	514
10. Die Regenbogentheorie (Historisches)	515
11. Die Airysche Regenbogentheorie und ihr weiterer Ausbau	516
12. Vereinfachte Berechnung des Regenbogens und der überzähligen Bögen durch Mascart	520
13. Strenge Behandlung des Regenbogenproblems durch Debye und Lord Rayleigh	521
14. Randbeugung an Teilchen verschiedener Art und Größe (Kranzerscheinungen)	522
15. Polarisationszustand, Farben und Helligkeit des klaren Himmels (Allgemeines)	524
16. Der Polarisationszustand des klaren Himmels	526
17. Die Dämmerungserscheinungen	530
18. Die Helligkeitsverteilung am klaren Himmel	534
19. Die allgemeine Tageshelle	537
20. Die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes und damit zusammenhängende Erscheinungen	539

(Abgeschlossen im März 1921.)

Übersicht

über die im vorliegenden Bande VI, 1. Teil, zusammen- gefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

I. Teilband.

A. Geodäsie.

- | | | |
|----------------|---|---|
| Heft 1. | { | 1. REINHERTZ: Niedere Geodäsie. |
| 5. IV. 1906 | { | 2. FINSTERWALDER: Photogrammetrie. |
| Heft 2. | { | 3. PIZZETTI: Höhere Geodäsie. |
| 25. VII. 1907. | { | |
| Heft 3. | { | 4. BOURGEOIS u. FURTWÄGLER: Kartographie. |
| 9. IX. 1909. | { | 5. MELDAU: Nautik. |

II. Teilband.

B. Geophysik.

- | | | |
|---------------|---|--|
| Heft 1. | { | 6. DARWIN u. HOUGH: Bewegung der Hydrosphäre. |
| 15. IX. 1908. | { | |
| Heft 2. | { | 7. HELMERT: Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde. |
| 11. X. 1910. | { | |
| Heft 3. | { | 8. EXNER u. TRABERT: Dynamische Meteorologie. |
| 6 XII. 1912. | { | |
| Heft 4. | { | 9. v. SCHWEIDLER: Atmosphärische Elektrizität. |
| 9. IV. 1918. | { | 10. SCHMIDT: Erdmagnetismus. |
| Heft 5. | { | 11. CONRAD: Dynamische Geologie. |
| 16. II. 1925. | { | 12. MÖBIUS: Optik der Atmosphäre. |
| | { | Vorrede zum sechsten Bande, 1 Teil |
| | { | Inhaltsverzeichnis zu Band VI, 1. Teil |
| | { | Register zu Band VI, 1. Teil. |

A. GEODÄSIE.

VI 1, 1. NIEDERE GEODÄSIE.

VON

C. REINHERTZ

IN HANNOVER.

Inhaltsübersicht.

A. Allgemeines.

1. Aufgabe und Einteilung der Geodäsie.
2. Die Grundgedanken des Messens an der Erdoberfläche und die Einteilung der Messungen.
3. Übersicht der Methoden.
4. Allgemeines über die Anwendung der Ausgleichsrechnung.
5. Instrumentelle Hilfsmittel.

B. Die fundamentalen Messungen.

6. Die Längenmessung.
7. Die Winkelmessung.
 - a) Der Theodolit.
 - b) Horizontalwinkelmessung.
 - c) Vertikalwinkelmessung.

C. Die Lagemessungen.

8. Die Koordinatensysteme der Lagemessungen.
 - a) Allgemeines über die geodätischen Koordinatensysteme.
 - b) Rechtwinklige ebene Koordinaten.
 - c) Rechtwinklige sphärische Koordinaten.
 - d) Konforme rechtwinklige *Gauß'sche* Koordinaten.
 - e) Koordinatentransformation.
9. Die Punktbestimmung durch Triangulierung.
 - a) Allgemeines über Triangulierung.
 - b) Zentrierung.
 - c) Die Winkelmessungen und ihre Anordnung.
10. Die Grundaufgaben des trigonometrischen Einschneidens.
 - a) Vorwärts- und Seitwärtseinschneiden.
 - b) Rückwärtseinschneiden.
 - c) Einige andere Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung.

- 11. Ausgleichung von Kleintriangulierungen.**
 a) Die Anwendung der Methode der vermittelnden Beobachtungen.
 b) Graphische Punktausgleichung.
 c) Die Anwendung der Methode der bedingten Beobachtungen.
 d) Die Genauigkeit der Kleintriangulierungen.
- 12. Polygonzugmessung.**
 a) Der Theodolitpolygonzug.
 b) Der Bussolen-(Kompaß-)Zug.
- 13. Einzelaufnahme.**
- 14. Berechnung und Teilung der Flächen.**
 a) Flächenberechnung.
 b) Flächenteilung.
- 15. Das Abstecken von geraden Linien und Kreisbogen.**

D. Die Höhenmessungen.

- 16. Das Nivellieren.**
 a) Definition des Höhenunterschiedes. Historisches.
 b) Der Nivellierapparat.
 c) Das Nivellierverfahren.
 d) Die Genauigkeit der Nivellierung.
 e) Erdmassenberechnung.
 f) Kotierte Projektion.
- 17. Trigonometrische Höhenmessung.**
- 18. Barometrische Höhenmessung.**

E. Tachymetrische Methoden.

- 19. Indirekte Längenmessung (Distanzmessung).**
 a) Distanzmesser mit Distanzlatte.
 b) Distanzmesser mit Basisschiene.
- 20. Tachymetrische Instrumente und Aufnahmen.**
- 21. Meßtischaufnahmen.**
- 22. Flüchtige Aufnahmen.**

Literatur.

A) Zeitschriften und Übersichten.

- O. Börsch*, Geodätische Literatur, auf Wunsch der Permanenten Kommission im Zentralbureau zusammengestellt, Berlin 1889.
- J. H. Gore*, A bibliography of geodesy. 2. ed. Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey 1901/1902, Washington 1903, p. 429.
- Bulletin de la société belge de géomètres, Anvers.
- Journal des géomètres-experts, Paris.
- Revue suisse de topographie et d'arpentage, Genf.
- Rivista di topografia e catastro, Firenze.
- The surveyor, London.
- Tidsskrift for Opmaalings-og-Matrikulsvaesen, Kopenhagen.
- Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, Utrecht.

La topografia moderna y el catastro, Barcelona.

Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart. Gibt jährliche Literaturübersichten.

(Zeitschr. f. Vermess.)

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien.

Die vorstehenden Zeitschriften bilden nur eine Auswahl unter den zahlreichen Fachzeitschriften, die zum Teil als Organe von Landmessenvereinen dienen. Insbesondere ist noch auf die verschiedenen ingenieurwissenschaftlichen Zeitschriften hinzuweisen, die viele geodätische Abhandlungen enthalten.

B) Lehrbücher und Monographien.

- VIII. Anweisung vom 25. Okt. 1881 für das Verfahren bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, 2. Ausgabe, Berlin 1897 (Anweisung VIII).
- IX. Anweisung vom 25. Okt. 1881 für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, 3. Ausgabe, Berlin 1904 (Anweisung IX).
- C. M. v. *Bauernfeind*, Elemente der Vermessungskunde, 2 Bände, 7. Aufl., Stuttgart 1890 (*Bauernfeind*, Vermessungskunde 1, 2).
- A. *Baule*, Lehrbuch der Vermessungskunde, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1901.
- A. *Börsch* und P. *Simon*, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von C. F. *Gauß*, Berlin 1887.
- C. *Bohn*, Die Landmessung, Berlin 1886.
- O. *Brathuhn*, Lehrbuch der praktischen Markscheidekunst, 3. Aufl., Leipzig 1902.
- F. *Brönnimann*, Die Katastervermessung, Bern 1888.
- Ch. L. *Durand-Claye*, A. *Pelletan* et Ch. *Lallemand*, Lever des plans et nivellement, Paris 1889 (*Lallemand*, Nivellement).
- G. *Eredi*, Elementi di topografia, Firenze 1894.
- L. B. *Francoeur*, Géodésie, 8. éd., Paris 1903.
- F. G. *Gauß*, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst, 2. Aufl., Halle 1893 (*F. G. Gauß*, Rechnungen der Feldmeßkunst).
- Ch. L. *Gerling*, Die Ausgleichsrechnung der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate mit ihren Anwendungen auf geodätische Aufgaben, Hamburg 1843 (*Gerling*, Ausgleichsrechnungen d. prakt. Geom.).
- W. M. *Gillespie*, A treatise on surveying. Part I. Land surveying and direct levelling; Part II. Higher surveying (revised and enlarged by C. *Staley*), London 1901.
- C. M. *Goulier*, Etudes théoriques et pratiques sur les levers topométriques et en particulier sur la tachéométrie, Paris 1892 (*Goulier*, Tachéométrie).
- G. H. L. *Hagen*, Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1. Aufl., Berlin 1837.
- E. *Hammer*, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 2. Aufl., Stuttgart 1897 (*Hammer*, Trigonometrie).
- F. *Hartner-E. Doležal*, Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie, 2 Bände, 9. Aufl., Wien 1904/5 (*Hartner-Doležal* 1, 2).
- F. R. *Helmert*, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Meßinstrumente, Leipzig 1872 (*Helmert*, Ausgleichsrechnung).

- G. Chr. K. *Hünäus*, Die geometrischen Instrumente der gesamten praktischen Geometrie, deren Theorie, Beschreibung und Gebrauch, Hannover 1864.
- N. *Jadanza*, Elementi di Geodesia, Torino 1895.
- Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen behufs Herstellung neuer Pläne für die Zwecke des Grundsteuerkatasters, 5. Aufl., Wien 1904.
- J. B. *Johnson*, The theory and practice of surveying, 15. ed., New York, London 1901.
- W. *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart. Bd. 1, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 5. Aufl., 1904; Bd. 2, Feld- und Landmessung, 6. Aufl., 1904; Bd. 3, Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung, 4. Aufl., 1896 (das Werk enthält zahlreiche Literaturangaben) (*Jordan*, Handbuch 1, 2, 3).
- W. *Jordan* und K. *Steppes*, Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882.
- O. *Koll*, Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen, 2. Aufl., Berlin 1901.
- C. *Koppe*, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie, Nordhausen 1885.
- A. *Laussedat*, Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques, Paris 1898, 1901.
- Manual of surveying instructions for the survey of the public lands of the U. S. and private land claims, issued by the commissioner of the general land office, Washington 1890.
- Moinot*, Lever de plans à la stadia, Périgueux 1865.
- M. d'*Ocagne*, Application générale de la nomographie au calcul des profils de remblai et déblai avec une instruction pratique pour la construction et le mode d'emploi des abaques à points isoplèthes, Paris 1896.
- M. d'*Ocagne*, Leçons sur la topométrie et la cubature des terrasses, Paris 1904.
- G. *Orlandi*, Tacheometria, Torino 1896.
- A. *Pelletan*, Opérations souterraines, Paris 1889.
- J. *Porro*, Traité de tachéométrie, Paris 1847.
- L. *Puissant*, Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement, 2. éd., Paris 1820.
- A. *Salmoiraghi*, Istrumenti e metodi moderni di geometria applicata, Milano 1884.
- S. *Stampfer*, Theoretische und praktische Anleitung zum Nivellieren, 1. Aufl., Wien 1845; 9. Aufl. von F. *Lorber*, Wien 1894; 10. Aufl., umgearbeitet von E. *Doležal*, Wien 1902.
- W. F. *Stanley*, Surveying and levelling instruments, 3. ed., London 1901.
- P. *Uhlich*, Lehrbuch der Markscheidkunde, Freiberg i. S. 1901.
- Chr. A. *Vogler*, Lehrbuch der praktischen Geometrie, Braunschweig. Bd. 1, Vorstudien und Feldmessen, 1885; Bd. 2, Höhemessungen, 1894 (*Vogler*, Prakt. Geom. 1, 2).
- Abbildungen geodätischer Instrumente, Berlin 1892.
- Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877.
- M. de *Vos*, Leerboek der Lagere Geodesie, Groningen 1902/04.

A. Allgemeines.

1. Aufgabe und Einteilung der Geodäsie. Die Geodäsie oder Vermessungslehre lehrt diejenigen Methoden der Messung, Rechnung und Abbildung, welche zur Bestimmung der räumlichen Verhältnisse sowohl der gesamten Erdoberfläche als auch beliebig begrenzter Teile derselben dienen. Die Aufgabe der Geodäsie lautet daher in allgemeiner Fassung: *Die Lage von Punkten der Erdoberfläche zu bestimmen und diese Bestimmung in irgend einer Weise auszudrücken, numerisch in Koordinaten und Messungsausweisen oder graphisch in Karten, Plänen, Rissen.*

Als Grundlage dient allen diesen Bestimmungen die jedem Erdort eigentümliche Richtung der Schwerkraft (Lotrichtung oder Vertikale), die instrumentell durch das Fadenlot oder die Libelle angegeben wird. Eine alle Lotrichtungen rechtwinklig durchschneidende Fläche heißt eine Niveaufläche; ihr einfachstes Beispiel ist die ruhende Meeresfläche, die man auch als „*Geoid*“ (mathematische Erdfigur) bezeichnet, indem man sie sich durch die Kontinente in geeigneter Weise fortgesetzt denkt. Die Erfahrung lehrt, daß, wie alle Niveauflächen in der Nähe der Erdoberfläche, speziell das Geoid mit großer Annäherung als *schwach abgeplattetes Rotationsellipsoid* aufgefaßt werden kann, dessen kleine Achse in die Rotationsachse der Erde fällt¹⁾.

Infolge der geringen Abplattung des Erdellipsoids kann man für Vermessungen, die sich nur auf kleine Gebiete beziehen, annehmen, daß alle Lotrichtungen des Messungsgebietes auf einer Kugeloberfläche senkrecht stehen, deren Mittelpunkt in der Erdachse liegt. Den Kugelradius wählt man am zweckmäßigsten so, daß die Kugel dasselbe Krümmungsmaß besitzt wie das Ellipsoid in dem betreffenden Gebiete, weil dann eine kleine Schale der Kugel ohne merkliche Änderung der Längen in die ellipsoidische Schale verbogen werden kann. Macht man die im vorstehenden angegebene Annahme, daß die betrachtete Niveaufläche eine Kugel sei, so tritt gegenüber dem Ellipsoid die Vereinfachung ein, daß die Vertikalebene in einem Punkte *A* der Kugel (d. h. eine durch das Lot in *A* gehende Ebene), die durch den Punkt *B* geht, identisch ist mit der Vertikalebene in *B*, die durch *A* geht, weil beide Ebenen den Kugelmittelpunkt enthalten. Zwei beliebige Punkte der Kugeloberfläche haben also eine gemeinsame Vertikalebene.

1) Näheres hierüber und die genaueren Definitionen der im vorstehenden skizzierten Begriffe findet man in dem Artikel über „Höhere Geodäsie“ VI 1, 3 (*P. Pizzetti*).

Ist das Vermessungsgebiet sehr klein, so kann man auch von der Konvergenz der Lotlinien absehen und diese als ein System von Parallelen betrachten; die Niveauflächen werden dann zu parallelen Ebenen.

Die Verschiedenartigkeit der in der Geodäsie zu behandelnden Aufgaben führt, ohne eine strenge Trennung, zu einer Teilung in verschiedene Zweige oder Arbeitsgebiete je nach dem Umfange des Vermessungsgebietes und der erstrebten Genauigkeit. Die *Erdmessung* (früher *Gradmessung*), welche die Bestimmung der mathematischen Erdgestalt zur Aufgabe hat, umfaßt als Messungsgebiet die ganze Erde. Die *Landesvermessung* legt ein bestimmtes Ellipsoid ihren Messungen zugrunde und hat die Aufgabe, auf dieser Grundlage für das gesamte Gebiet eines Staates eine einheitliche Ausmessung und Abbildung herzustellen, wobei *Grundsteuerkatastervermessung* und *topographische Geländeaufnahme* unterschieden wird. Die in Einzelfällen für die verschiedenartigsten Zwecke unternommenen Ausmessungen und Abbildungen, welche auf engbegrenzte Teile der Erdoberfläche beschränkt bleiben, rechnet man entsprechend zur *Feld- (Land-) Messung*, *Forst-Vermessung*, *Gruben-Messung (Markscheiden)*. Daneben sind noch zu nennen die *nautischen Messungen* (Küstenvermessungen) sowie die *Reiseweg-Aufnahmen (Routen, Itinerare)*, welche auch als *geographische Landmessung* bezeichnet werden.

Zur *höheren Geodäsie* rechnet man nun alle diejenigen Aufgaben, bei denen die Niveauflächen als Ellipsoide betrachtet werden müssen, zur *niedereren Geodäsie* diejenigen, bei denen man mit der Annahme von kugelförmigen oder ebenen Niveauflächen auskommt.

Über die Bedeutung des Wortes „Geodäsie“ sei angeführt, daß es ursprünglich Feld- (Acker-)einteilung bezeichnet; erst im Laufe des verfloßenen Jahrhunderts hat der Begriff allmählich die heutige Erweiterung bis zur gesamten Vermessungswissenschaft erfahren. Die Geodäsie als Feldmessung war die rechnende, angewandte Geometrie (*geometria practica*) im Gegensatz zur reinen Geometrie, d. h. der reinen Raumlehre²⁾. Die heute angewendeten Methoden fußen im wesentlichen auf den bei den ersten exakten Gradmessungen des 17. und 18. Jahrhunderts entwickelten; ihre im letzten Jahrhundert erfolgte fehlertheoretische Durchbildung verdanken sie, im Verein mit dem allgemeinen Fortschritt der exakten Wissenschaften, der Präzisionsmechanik und den gesteigerten Anforderungen an die Zuverlässigkeit

2) Als historischer Hinweis auf die erste Entwicklungsstufe genügt: M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Leipzig 1880, 1892.

geodätischer Arbeiten, vornehmlich der Einführung der Methode der kleinsten Quadrate, also dem Einflusse von *C. F. Gauß*. Obwohl die in Betracht kommenden einfachen trigonometrischen Lösungen der wesentlichsten Feldmeßaufgaben längst bekannt waren, war bis vor rund 100 Jahren das Verfahren der Feldmessung hauptsächlich ein rein graphisches, d. h. man ging unter Benutzung von Winkelkreuz (groma), Astrolabium, Bussole und Meßkette, sowie besonders auch des Meßtisches, auf unmittelbare graphische Darstellung aus und konnte sich mit den einfachsten mathematischen Hilfsmitteln begnügen. Erst mit Anfang des 19. Jahrhunderts, der Zeit des Beginnes der ersten allgemeinen Landesvermessungen, ging man unter Anwendung des Theodolits nach und nach zu zahlenmäßigen Methoden und Punktbestimmung durch Koordinaten über, welche heute den Grundton der exakt rechnenden Feldmessung bildet.

Die *Literatur* ist entsprechend den zahlreichen und verschiedenartigen Methoden, der allmählichen Ausbildung und Anwendung derselben für mannigfache Zwecke (Grundsteuerkataster, Topographie, Ingenieurbauwesen, Bergbau) eine ebenso umfangreiche wie verschiedenartige, wobei auch besonders die Verschiedenartigkeit der Entwicklung des staatlichen Vermessungswesens der verschiedenen Länder in Betracht kommt.

In der Literaturübersicht sind eine Anzahl der gebräuchlichen Lehr- und Handbücher genannt, unter denen das von *W. Jordan* die ausführlichsten Literaturangaben enthält. Eine historisch-kritische Darstellung des deutschen Vermessungswesens geben *W. Jordan* und *K. Steppes*³⁾. Von älteren Lehrbüchern möge das von *J. T. Mayer*⁴⁾ zitiert werden, das früher sehr verbreitet war und jetzt einen interessanten Vergleich des heutigen Standes der Vermessungswissenschaft mit dem zu Beginn des verflossenen Jahrhunderts, unmittelbar vor Einführung der Methode der kleinsten Quadrate, bietet.

2. Die Grundgedanken des Messens an der Erdoberfläche und die Einteilung der Messungen. Bei den Vermessungen an der Erdoberfläche wählt man eine bestimmte Niveaufläche aus, die als Berechnungs- und Abbildungsfläche (Referenzfläche, Vermessungsfläche oder Vermessungshorizont, Landeshorizont) zugrunde gelegt wird; gewöhnlich ist es diejenige Fläche, die in ihrer Fortsetzung mit der

3) Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882.

4) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, 5 Bd., 4. Aufl., Göttingen 1814—1820; ferner sei genannt *L. Puissant*, *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement*, 2. éd., Paris 1820 und *F. Proß*, *Lehrbuch der praktischen Geometrie*, Stuttgart 1838.

Meeresfläche zusammenfällt. Um diese Fläche gegen den Erdkörper festzulegen, orientiert man einen Punkt (Indifferenzpunkt) durch Bestimmung der astronomischen Breite und Länge; bestimmt man dann noch das astronomische Azimut einer Richtung auf der Fläche, so kann man die Lage aller anderen Flächenpunkte zum Erdkörper lediglich durch Messungen auf der Fläche selbst bestimmen.

Um nun einen beliebigen Punkt der Erdoberfläche festzulegen, projiziert man ihn mittels der durch ihn gehenden Lotlinie auf die Vermessungsfläche. Kennt man dann den in der Lotlinie gemessenen Abstand des Punktes von der Bezugsfläche und außerdem die Koordinaten seiner Projektion in einem beliebigen Koordinatensystem auf dieser Fläche, so ist der Punkt eindeutig festgelegt. Die Veranlassung zu der angegebenen Bevorzugung der vertikalen Richtung ist die leichte Zugänglichkeit der Schwerkraftsrichtung. Überdies sind die Vermessungen meist in vertikaler Richtung viel weniger ausgedehnt als in horizontaler, und man pflegt deshalb die gesamten Messungen in *Lagemessungen* (Bestimmung der Lage der Projektion in der Bezugsfläche) und *Höhenmessungen* (Bestimmung des Abstandes von der Bezugsfläche) einzuteilen.

Hiernach ist die Definition der wesentlichsten Bestimmungsstücke ohne weiteres gegeben. Der in der Lotlinie gemessene Abstand eines Punktes von der Normalfläche ist die „Höhe“ (H) des Punktes; fällt die Normalfläche in die Meeresniveaufläche, so erhält man die „Meereshöhe“. Die Beziehung der Normalfläche auf die Meeresniveaufläche ist gegeben, sobald an einem oder mehreren Punkten durch Pegelbeobachtungen (Mareographen) gewonnene „Mittelwasserstände“ zur Definition der Niveaufläche des Meeresspiegels eingeführt und in das geodätische Netz einbezogen sind⁵).

Zu einer kugelförmigen Normalfläche konzentrische Kugeloberflächen, welche durch die Messungspunkte an der Erdoberfläche hindurchgehen, entsprechen den „Horizontflächen“ der betreffenden Punkte; der Abstand (in den Lotlinien gemessen) dieser „Horizonte“ entspricht dem „Höhenunterschied Δh “ der betreffenden Punkte. Die *horizontale Entfernung* (s) zweier Punkte („Länge, Linie, Strecke“) ist der kür-

5) In Preußen (Deutschland) z. B. ist hierzu an einem Pfeiler der Sternwarte in Berlin ein kleiner lotrechter Maßstab angebracht, dessen mittlerer Teilstrich (Nullpunkt) nach Ableitung aus dem Landes-Präzisionsnivellement die „Höhe“ 37 m über N.N. (Normal-Null) erhalten hat, und als „Normalhöhenpunkt für das Königreich Preußen“ gilt. Andere Länder haben entsprechende Bestimmungen getroffen. Vgl. VI 1, 3, *Höhere Geodäsie*, ferner z. B. auch *Jordan*, Handbuch 2, § 114.

zeste Abstand ihrer Lotlinien, gemessen auf der angenommenen mathematischen Erdoberfläche. Die unmittelbare Verbindungslinie zweier Punkte der Erdoberfläche, welche nicht dem gleichen Horizont angehören, ist die „geneigte“ oder „schiefe“ Entfernung s_n . Der Winkel, den diese geneigte Verbindungslinie s_n zweier Punkte mit dem positiven Zweige der Lotlinie in einem Punkte bildet, ist der „Zenitwinkel“ („Zenitdistanz“) (z), der ihn zum rechten Winkel ergänzende, von der Wagerechten aus genommene, der „Höhenwinkel“ (α). Zenitwinkel werden von 0° bis 180° , Höhenwinkel von 0° bis 90° mit Vorzeichen \pm (Höhen-, Tiefenwinkel) gezählt.

Ist ein ganzes System von im Gelände bezeichneten Punkten $P_1 \dots P_n$ in Bezug auf einen Ausgangspunkt P_a zu bestimmen, so denkt man sich die Lotebenen sämtlicher Punkte in Bezug auf P_a hergestellt, was durch Drehung einer durch die Lotlinie von P_a gehenden Lotebene erreicht wird, indem das Maß der Drehung im Horizont von P_a verzeichnet oder an einem zentrisch und rechtwinklig auf die Lotlinie von P_a gesetzten Kreis („Horizontalkreis“) gemessen wird. Es ergibt sich das „Horizontal-Richtungssystem“, die „Richtungen“ $r_1 \dots r_n$. Das einfachste Horizontal-Richtungssystem ist der *Horizontalwinkel* z. B. $w_{12} = r_2 - r_1$; das Richtungssystem $r_1 \dots r_n$ kann auch durch beliebige Winkelangaben, z. B. w_{12} , $w_{13} \dots w_{1n}$ oder w_{12} , w_{23} usw. ausgedrückt werden.

„Geneigte (schiefe) Winkel“, d. h. in der Ebene des Ausgangspunktes P_a und zweier Zielpunkte P_1 und P_2 gemessene Winkel, kommen seit Einführung des Theodolits, welcher selbsttätig projiziert, kaum noch in Betracht⁶⁾.

3. Übersicht der Methoden. Einen Überblick über die wesentlichsten geodätischen Verfahren und die dazu erforderlichen Hilfsmittel gibt die nachfolgende Zusammenstellung.

Grundlegend ist:

a) Die *Absteckung gerader Linien* zwischen Punkten der Erdoberfläche und *Messung ihrer Entfernung* auf Grund einer bestimmt definierten Maßeinheit (V 1 (C. Runge)). Die Längenmessung erfolgt entweder mit einfachen Feldmeßinstrumenten oder, wenn größere Genauigkeit erreicht werden soll, mit Hilfe besonderer Apparate (Basisapparate).

b) Die *Messung von Winkeln* und zwar meistens von Horizontal-

6) Für event. „schiefe“ gemessene Winkel ist „Reduktion auf den Horizont“ erforderlich; hierzu müssen noch die Höhenwinkel von P_1 und P_2 gemessen sein.

oder Vertikalwinkeln. Als Meßinstrument dient der Theodolit oder auch untergeordnete Instrumente wie Winkelscheibe (Astrolabium) und Bussole (Kompaß) für Horizontalwinkel, Höhen- oder Neigungsmesser mit Senkel, Pendelkreis oder Libelle für Vertikalwinkel, und Sextant (Prismenkreis) für beliebige Winkel.

Aus diesen grundlegenden Messungsverfahren ergeben sich die verschiedenen zusammengesetzten Bestimmungsmethoden und zwar

für die Lagemessung:

a) *Triangulierung* (Dreiecksmessung) auf Grund von Basismessung und Theodolit-Horizontalwinkelmessung in stufenweise aufeinander gegründeten Dreieckssystemen.

b) *Polygonisierung* (polygonale Zugmessung) mit Messung von Längen und Horizontalwinkeln (Theodolit, ev. Sextant) oder von magnetischen Azimuten (Bussole) in gebrochenen Linienzügen, in der Regel auf Grund einer Triangulierung.

c) *Kleinaufnahme* durch Anwendung von Längen- und Winkelmessung bezw. Absteckung auf Grundlage von Triangulierung und Polygonisierung oder auch unabhängig davon. Hierzu gehört auch die Absteckung gerader und krummer Linien (Linien-, Tunnel-, Kurvenabsteckung).

d) *Meßtischaufnahme*, d. h. unmittelbare Übertragung der Punktlage auf die Zeichnungsfläche des Meßtisches im Anschluß an eine Triangulierung oder Polygonisierung sowie auch unabhängig davon.

Für die Höhenmessung:

a) *Nivellierung* bei Verwendung des Nivellierinstrumentes mit horizontalen oder nahe horizontalen kurzen Ziellinien und lotrechten Skalen. Hierhin gehören auch dem geometrischen Prinzip nach die hydrographischen bezw. nautischen Tiefenmessungen, wobei die Wasseroberfläche den Nivellierhorizont bildet.

b) *Trigonometrische Höhenmessung* bei Verwendung geeigneter Ziellinien und Messung von Vertikalwinkeln mit dem Theodolit in der Regel auf der Grundlage einer Horizontaltriangulierung, oder auch kurzer schiefer Linien (Meßbänder, Schnur, z. B. bei Grubenmessungen) mit Höhenbogen, Hängebogen usw.

c) *Barometrische Höhenmessung* in der Regel mit dem Federbarometer (Aneroid) für Geländeaufnahme bei bekannter Punktlage.

Neuerdings sind auch die sogenannten „*tachymetrischen Methoden*“ weiter ausgebildet worden. Charakteristisch für diese ist die Ersetzung der direkten Längenmessung durch die *indirekte Distanzmessung* und die Vereinigung der trigonometrischen Höhenmessung und der Lagemessung. Zur Verwendung kommen dabei die verschiedenartigsten

tachymetrischen Instrumente. Über die ebenfalls in diesen Abschnitt gehörige *Photogrammetrie* vergleiche man den nächsten Artikel dieses Bandes (*S. Finsterwalder*).

Auf die Ergebnisse der angeführten Messungsmethoden und deren rechnerische Auswertung durch Koordinaten und Abrisse gründet sich dann die *Abbildung der Erdoberfläche* (vgl. VI 1, 4 (*R. Bourgeois*)), bei der die mannigfachsten Zeichenhilfsmittel zur Verwendung kommen. Die Abbildung erfolgt bei ausgedehnten Gebieten mit Berücksichtigung der Erdkrümmung (Kartenprojektionen). Wird die Geländedarstellung durch Höhenschichtlinien und Bergstriche besonders berücksichtigt, so liegt eine topographische Abbildung vor; wird dagegen die exakte Darstellung aller Einzelheiten im Grundriß, vornehmlich der Eigentums- und Kulturgrenzen, angestrebt, so handelt es sich um geometrische Kartierung.

Eine weitere Verwendung finden die Messungen zur *Berechnung von Flächeninhalten* unmittelbar aus den gemessenen Zahlenwerten, aus Koordinaten oder auf Grund einer Karte mit Benutzung verschiedenartiger Hilfsmittel (Planimeter). Hierhin gehört auch die *Teilung von Grundflächen (Felderteilung)*.

4. Allgemeines über die Anwendung der Ausgleichsrechnung. Die Anordnung der Messungen ist gegründet auf die Sätze der Fehlertheorie nach der Methode der kleinsten Quadrate, die, nachdem sie von *C. F. Gauß* aufgestellt waren, sofort Eingang in die Vermessungskunde fanden. Dafür wirkten zuerst besonders *Ch. L. Gerling* und *G. H. L. Hagen*⁷⁾. Die *Gauß'sche* Originalanordnung der Ausgleichung von Kleintriangulierungspunkten ist erst neuerdings bekannt geworden⁸⁾.

Als allgemeines Fehlermaß gilt der „mittlere Fehler“; der „wahrscheinliche“ Fehler sowie der „durchschnittliche“ werden seltener gebraucht. Die Genauigkeit amtlicher Messungen bis herab zu den Kleinmessungen wird durch die auf dem „mittleren Fehler“ beruhenden „Fehlergrenzen“, deren Innehaltung vorgeschrieben ist, reguliert. Die Fehlergrenzen werden in den Vermessungsanweisungen in der Regel etwa gleich dem dreifachen Betrag des „mittleren Fehlers“ festgesetzt. Diese Annahme beruht einerseits auf der Fehlerwahrscheinlichkeit nach dem *Gauß'schen* Fehlergesetz, andererseits auf praktischen Erwägungen⁹⁾. Die mittleren Fehler werden aus besonderen Unter-

7) Vgl. *C. Reinherz*, Zeitschr. f. Vermess. 30 (1901), p. 1.

8) *Carl Friedrich Gauß' Werke*, 9. Bd., Göttingen 1903.

9) *Jordan*, Handbuch 1, Kap. V. Vgl. auch *A. Blümcke*, Zeitschr. f. Vermess. 26 (1897), p. 51, 276, 561; 27 (1898), p. 313; 30 (1901), p. 229.

suchungen und bei praktischen Vermessungen aus den gegen die Ausgleichungsergebnisse übrigbleibenden Abweichungen gewonnen. Bei den unter den verschiedenartigsten Verhältnissen auszuführenden und aus mannigfachen Elementen sich zusammensetzenden Messungen der niederen Geodäsie ist eine strenge Fehlertrennung und das Ausscheiden systematischer Fehler nicht möglich; die Reste der systematischen Fehler gehen mit zum Teil erheblichen Beträgen in die zufälligen über. Gegebenen Falls werden vorliegende Fehlerreihen nach dem *Gauß'schen* Fehlergesetz geprüft. Die Grundlage für die Berechnung der Einwirkung der unmittelbaren Beobachtungsfehler auf die daraus abgeleiteten Ergebnisse (Funktionen der Beobachtungen) bildet das allgemeine „*Fehlerfortpflanzungsgesetz*“ für die Funktion $X = f(x, y, z, \dots)$:

$$M_X = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} m_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} m_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} m_z\right)^2 \dots}$$

worin x, y, z, \dots Beobachtungsgrößen, $M_X, m_x, m_y, m_z, \dots$ die entsprechenden mittleren Fehler von X, x, y, z, \dots bedeuten. Für die einfachen linearen Beziehungen, z. B. den Fehler der Summe von unabhängigen Einzelbeobachtungen (ohne Rücksicht auf systematische Fehler) $X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ hat man

$$M_X = \pm m_x \sqrt{n},$$

sog. „*Quadratwurzelgesetz*“. Für Messungen ungleicher Genauigkeit wird der Begriff des „Gewichtes“ p verwendet, wobei die Beobachtung, der man das Gewicht 1 beilegt (*Gewichtseinheit*), passend gewählt wird. Z. B. kann bei Richtungsmessungen mit dem Theodolit genommen werden eine aus Beobachtung in zwei Fernrohrlagen gemittelte (somit von den Instrumentachsenfehlern befreite) Richtung; bei Längenmessungen kann genommen werden die Messung einer bestimmten Strecke, z. B. 100 m oder 1000 m; für Nivellierung wird z. B. angenommen die einmalige Bestimmung des Höhenunterschiedes zwischen zwei Punkten, deren horizontale Entfernung 1 km ist. Die mittleren Fehler ergeben sich aus den bei der Ausgleichung übrig bleibenden plausibelsten Fehlern; sie können unter Umständen auch aus wahren Fehlern berechnet werden, z. B. bei Längenmessungen oder bei Nivellierungen aus der Vergleichung der Hin- und Rückmessungen¹⁰⁾.

Es ist wünschenswert, daß für eine gemessene Größe immer der mittlere Fehler bestimmt wird; jedoch ist bei Genauigkeitsschätzungen

10) Z. B. *Jordan, Handbuch* 1, § 11.

zu beachten, daß in den berechneten mittleren Fehlern vielfach nur der Einfluß der *zufälligen* Beobachtungsfehler, nicht aber der der *systematischen* Fehler erscheint.

„*Grobe Fehler*“ sind bei dem umfangreichen, bei Vermessungen zu behandelnden Zahlenmaterial, bei den mit der Ausdehnung der Einzelaufnahmen zahllos werdenden, häufig unter schwierigen Verhältnissen und äußeren Störungen zu nehmenden Ablesungen, unvermeidlich. Daher ist es Grundsatz, daß jede weiter zu gebrauchende Messungszahl einwandfrei kontrolliert wird; eine einfache unkontrollierte einmalige Ablesung oder Messung z. B. eines Winkels, einer Länge usw. ist geodätisch unbrauchbar. Die somit für jede Messung erforderliche Probe kann eine unabhängige Nachmessung sein oder eine indirekte Probe, wie Abschluß auf gegebene Werte, oder Verknüpfung durch eine bekannte Beziehung, z. B. Hypotenuse für zwei Katheten, Summe der Dreieckswinkel usw. Die Lehre von der Anordnung der Messungsproben ist eine wichtige Aufgabe der Vermessungskunde.

Um das Anwachsen der Messungsfehler innerhalb möglichst enger Grenzen zu halten, wird eine systematische Gliederung der Messungen angewendet derart, daß untergeordnete Systeme („*Netze*“) in übergeordnete eingefügt werden, d. h. man „arbeitet vom Großen ins Kleine“. Dies gilt in erster Linie für die Anordnung exakter Landesvermessungen, in gleichem Sinne aber auch ebenso für räumlich eng begrenzte Aufnahmen. Bei den Landesvermessungen z. B. wird die Grundlage durch ein System von Dreiecken (Ketten und Netze) gebildet, in welche der Reihe nach untergeordnete Punktsysteme eingeschaltet werden, so daß das zu bearbeitende Gebiet zunächst mit möglichst einfach gegliederten Systemen, also mit weitmaschigen Netzen, überzogen wird, in die sich die der Natur der Sache nach immer verwickelter gestaltenden Kleinsysteme einfügen lassen. Die Hauptsysteme werden dementsprechend durch möglichst wenige, aber möglichst scharf gemessene Elemente bestimmt. Jedes nach solchen Gesichtspunkten gemessene übergeordnete System gilt für das untergeordnete als fehlerfrei. Die richtige Bemessung des Genauigkeitsverhältnisses der einander unter- bzw. übergeordneten Systeme ist eine wichtige Frage der Vermessungstechnik. Diese Systeme werden je für sich nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen, sodaß das übergeordnete System das „Soll“ für die weiteren Systeme angibt. Es handelt sich also um eine fortgesetzte Einschaltung untergeordneter Systeme in übergeordnete.

Die Ausgleichung der Hauptsysteme für umfangreiche Ver-

messungen geschieht stets nach der Methode der kleinsten Quadrate, und zwar nach „vermittelnden“ oder „bedingten“ Beobachtungen¹¹⁾; ob das eine oder andere Verfahren anzuwenden ist, wird von Fall zu Fall nach der Anordnung der gerade vorliegenden Systeme entschieden¹²⁾. Für die untergeordneten Systeme werden mit Rücksicht auf die sich mehr und mehr komplizierenden Beziehungen (Zusammenfassung von Winkel- und Längenmessungen) vielfach Näherungsausgleichungen („Fehlerverteilungsverfahren“ und „graphische“ Ausgleichungen) verwendet. Diese werden als berechtigt und zweckmäßig angesehen, wenn sie eine praktisch in Betracht kommende Erleichterung der Arbeit herbeizuführen imstande sind und die Einbuße an Strenge zulässig erscheint. Im übrigen läßt sich bei zweckmäßiger Anordnung der Rechnungen und Beiseitelassung überflüssigen Zahlenballastes die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate so einfach gestalten, daß sie für den größten Teil der in der niederen Geodäsie vorkommenden Ausgleichungen als das bequemste und zuverlässigste Interpolationsverfahren betrachtet wird, welches, wenn auch in den Gewichtsansätzen oder deren Vernachlässigung, sowie in der Anordnung der Ausgleichungssysteme eine gewisse Willkür bestehen bleibt, doch die Ausgleichung an eine streng kontrollierbare, einwandfreie Methode bindet und auf jeden Fall eine willkürfreie Fehlerberechnung für die Ausgleichungsergebnisse zuläßt. Die Fehlerberechnungen sind von wesentlichster Bedeutung für die Kritik und Ausbildung der Messungsmethoden.

Über die Literatur, die sich speziell auf die Anwendung der Ausgleichungsrechnung in der Geodäsie bezieht, sehe man die Literaturübersicht nach. Im übrigen sei auf die Angaben in dem Artikel „Ausgleichungsrechnung“, I D 2 (*J. Bauschinger*) verwiesen.

Die umfangreiche Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, besonders für die zahlreichen Punktbestimmungen der Kleintriangulierung, hat ebenso wie für die übrigen Rechnungen der niederen Geodäsie zum Gebrauch von Rechen-„Formularen“ geführt, welche für die amtlichen Arbeiten in den „Vermessungsanweisungen“ vorgeschrieben sind¹³⁾. Für die Rechen-schärfe gilt im allgemeinen, daß die Rechenunsicherheiten von niederer Ordnung als die Messungsfehler sein müssen und keine neuen Unsicherheiten in die Bestimmungen hineinbringen dürfen, daß aber

11) Vgl. I D 2 (*J. Bauschinger*), p. 768 ff.

12) Vgl. die Bemerkungen zu den einzelnen Meßmethoden.

13) Vgl. z. B. Anweisung IX der preußischen Katasterverwaltung, die vielfach als Vorbild gedient hat.

überflüssiger Zahlenballast zu vermeiden ist. Darauf gründet sich z. B. die sehr empfehlenswerte Verwendung des einfachen Rechenschiebers bei den Ausgleichsrechnungen der niederen Geodäsie¹⁴).

Ebenso wie die Anordnung der Messungen und die Rechnungen gründen sich auch die für den rationellen Gebrauch der geodätischen Instrumente maßgebenden Gesichtspunkte auf die Fehlertheorie. Der durch diese ermöglichten einwandfreien Kritik der Instrumentleistungen ist im Verein mit der Ausbildung der Präzisionsmechanik der Fortschritt in der Entwicklung der geodätischen Instrumente im letzten halben Jahrhundert in erster Linie zu verdanken. Die einzelnen Glieder (Organe), aus denen sich die Instrumente zusammensetzen, müssen in Bezug auf Leistung und Anordnung einander und dem Prinzip des Instrumentes entsprechen. Für diese Anordnung bleibt ein gewisser Spielraum, sodaß sich mannigfaltige Instrumenttypen ergeben, wobei die für ein Messungsverfahren jeweils zu erreichende und vorher bestimmte Genauigkeit sowie weitere Gesichtspunkte, z. B. schnelle und sichere Aufstellung, maßgebend sind. *Im Vermessungswesen handelt es sich nicht darum, in jedem Fall mit allen möglichen Mitteln die weitgehendste Genauigkeit zu erreichen, sondern vielmehr darum, innerhalb vorgesehener Genauigkeitsgrenzen die gesuchten Resultate mit dem geringsten Aufwand an Arbeit und Kosten zu gewinnen.* Dazu führt die Anwendung der Fehlertheorie in der geodätischen Beobachtungstechnik und die Fehlerdiskussion a priori.

5. Instrumentelle Hilfsmittel. Über die instrumentellen Hilfsmittel mögen, da ihre Darstellung nicht im Plane der Encyclopädie liegt, nur wenige Worte hier Platz finden. Die den beiden hauptsächlichsten Feldmeßinstrumenten, Theodolit und Nivellierinstrument, gemeinschaftlichen Teile sind „*Libelle*“ und „*Meßfernrohr*“.

Die Libelle. Verwendet werden „*Röhrenlibellen*“¹⁵), deren „*Empfindlichkeiten*“ oder „*Angaben*“ (d. i. zu einem Strich Ausschlag gehöriger Winkelwert) zwischen den Grenzen von rund 5" und 50" liegen, wobei 1 Strich der Libellentheilung gleich 1 Pariser Linie oder neuerdings auch gleich 2 mm genommen wird, so daß die Krümmungsradien der tonnenförmigen Schlifffläche¹⁶) etwa zwischen 80 m und 8 m betragen, bei untergeordneten und besonders Freihand-Instrumenten kommen noch

14) *Jordan*, Handbuch 1, Kap. II u. III.

15) In historischer Hinsicht (*Thévenot* 1660) sei verwiesen auf *R. Wolf*, Handbuch der Astronomie 2, Zürich 1892.

16) Zur Theorie der Libellenschlifffläche vgl. *F. R. Helmert*, Zeitschr. f. Vermess. 7 (1878), p. 185.

stärkere Krümmungen vor. „*Dosenlibellen*“ werden an größeren Instrumenten sowie zur allgemeinen Einstellung feinerer Instrumente gebraucht; die Radien der Kugelhauben liegen rund zwischen $\frac{1}{2}$ m und 2 m. Zur Bestimmung der Angaben von Röhrenlibellen und zur Prüfung des Schliffes dient der Libellenprüfer mit Mikrometerschraube (Legebrett). Die innere Fläche der Röhrenlibelle, an der die Blase spielt, ist nach allen Richtungen gekrümmt: derjenige in der Mitte der Fläche verlaufende Hauptschnitt, in dem die Krümmung am geringsten ist, enthält die *Libellenachse*, die als Tangente an den genannten Hauptschnitt im Hauptstrich der Libellenteilung definiert ist. Ist die Libellenachse der Verbindungslinie der Aufsatzpunkte der Libelle parallel, so ist diese kreuzungsfehlerfrei, was man daran erkennt, daß die Blase ihre Lage bei Drehung der Libelle um die durch die Aufsatzpunkte gehende Gerade nicht ändert. Die Libelle dient dazu, Achsen vertikal und horizontal zu stellen¹⁷⁾. Eine Achse ist vertikal, wenn eine fest mit ihr verbundene Libelle bei der Drehung um die Achse ihre Einstellung nicht ändert. Um die Horizontalität einer Achse zu prüfen, wird die Libelle auf ihr umgesetzt (d. h. um 180° gedreht); ändert sie dabei ihre Einstellung nicht, so ist unter der Voraussetzung, daß kein Kreuzungsfehler vorhanden, die Achse horizontal. Spielt bei vertikaler oder horizontaler Achse die Libelle auf den Hauptstrich ein, was für die Benutzung der Libelle nicht notwendig, aber bequem ist, so heißt sie „*berichtigt*“; in der niederen Geodäsie arbeitet man meistens mit berichtigter Libelle. Die Genauigkeit der Libelle als Lot- und Horizontierinstrument ist, abgesehen von Nebenumständen, abhängig von der Steigkraft der Blase, welche im allgemeinen mit der Größe der Blase und der Stärke der Krümmung der Schliffkurve zunimmt. Die Genauigkeit der Libellen ist von C. Reinherz¹⁸⁾ untersucht.

Das Meßfernrohr. Die an den geodätischen Instrumenten in Betracht kommenden Fernrohre sind stets *Kepler'sche* (astronomische) mit Okularen nach *Ramsden*, *Huygens* oder auch orthoskopischen Okularen. Die Vergrößerung liegt etwa zwischen den Grenzen 10—45 fach, und dementsprechend gehen die Objektivöffnungen bis zu rund 45 mm, die Brennweiten bis zu 50 cm. Das Fadenkreuz¹⁹⁾ wird meistens durch ein einfaches, sich rechtwinklig schneidendes Fadenpaar gebildet (Vertikal-, Horizontalfaden); anstatt des einfachen Vertikal-

17) *M. d'Ocagne*, Bull. astr. 1903, p. 51.

18) Zeitschr. f. Instr. 11 (1890), p. 309.

19) Als historische Notiz sei verwiesen auf *R. Wolf*, Handbuch der Astronomie 2, Zürich 1892.

zielfadens wird auch ein mit rund $1-1\frac{1}{2}$ mm scheinbarem Abstand angeordneter Zieldoppelfaden benutzt, dessen Mittellinie die Einstellenebene angibt. Bei Arbeiten im Dunkeln (im Tunnel, in der Grube beim Markscheiden) wird Beleuchtung des Fadekreuzes durch Lichtwerfer vom Objektiv aus, durch die hohle Horizontalachse oder auch vom Okular aus angewendet. Bei den Fadendistanzmessern (vgl. Nr. 19) treten die zum Mittelfaden parallelen Distanzfäden hinzu, wobei dann auch die Fernrohranordnung nach Porro (vgl. p. 86) zur Anwendung kommt. Von Wichtigkeit für die Verwendung des Meßfernrohrs ist die damit zu erzielende Ablesegenauigkeit an Skalen (Nivellier- und Distanzskalen). Darüber ist eine Untersuchung von *Reinhertz*²⁰⁾ angestellt.

Der Zielfehler der Meßfernrohre beim Einstellen auf scharf bezeichnete Ziele kann bis auf einige Zehntel Sekunden herabgebracht werden; bei Einstellung auf die bei Vermessungen verwendeten Ziele (Signale, Kirchtürme, Stäbe usw.) liegt der Fehler im allgemeinen etwa zwischen $\frac{1}{2}''$ und $3''$, wobei Durchsichtigkeit der Luft, Flimmern, Beleuchtung, Hintergrund, Form des Signales usw. neben der Leistung des Fernrohrs an sich eine erhebliche Rolle spielen, und noch zu unterscheiden ist, ob es sich um Einstellungen des Vertikal- oder Horizontalfadens (Horizontal- oder Vertikalwinkelmessung) handelt²¹⁾.

Bezüglich der weiteren Untersuchungen der verschiedenen geodätischen Instrumente, ihre „Berichtigung“ (Justierung), Bestimmung der Konstanten usw. ist zu verweisen auf die genannten geodätischen Lehr- und Handbücher²²⁾.

B. Die fundamentalen Messungen.

6. Die Längenmessung. Grundlegend für alle Lagemessungen ist die „Längenmessung“. Zur unmittelbaren Längenmessung dienen hölzerne Maßstäbe (*Meßlatten*, 3, 4, 5 m lang) mit stählernen Endflächen oder Endschnitten, oder „*Stahlmeßbänder*“ oder „*Meßdrähte*“ (10, 20, 25 bis 100 m lang). Die Maßbezeichnung ist für die Latten stets die

20) Leop. N. A. 62 (1894), p. 91; Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 593, 641; 26 (1897), p. 111, 399; *G. Kummer*, ibid. 23 (1894), p. 129; 26 (1897), p. 225, 257; *C. Wagner*, ibid. 25 (1896), p. 449.

21) *S. Stampfer*, Jahrbücher des k. k. polytechn. Inst. Wien 18 (1834), p. 211.

22) Als älteres Werk ist hinzuzufügen: *G. Chr. K. Hunäus*, Die geometrischen Instrumente, Hannover 1864. Ferner sei hingewiesen auf *Chr. A. Vogler*, Abbildungen geodätischer Instrumente, Berlin 1892; *W. F. Stanley*, Surveying and levelling instruments, London 1895; *M. d'Ocagne*, Les instruments de précision en France, Paris 1904, p. 21—31.

der Endmaße, sodaß die Mittellinie zwischen den Endflächen oder Endschnitten den Maßwert angibt; Meßbänder sind entweder als Endmaße (Meßbandstabsmittellinie) oder als Strichmaße (Anlegemarken) aufzufassen. Die Unterteilung erfolgt in m, dm, cm. Die früher sehr gebräuchliche „*Meßkette*“ (Gliederkette aus Draht) findet wegen der Veränderlichkeit der Glieder bei exakten Arbeiten keine Verwendung mehr; der „*Feldzirkel*“, ein Stab mit rechtwinklig zu seiner Längsachse angebrachten Endspitzen, sowie das „*Meßrad*“ mit Zählwerk (Hodometer) kommen nur für vereinzelt Fälle in Betracht. Der Maßwert²³⁾ der Stäbe und Bänder wird durch „*Maßvergleichung*“ mit Normalmaßen (Kontrollnormalen) bestimmt; es ist leicht, die Vergleichung auf 0,1 mm genau auszuführen. Nach vielseitigen Erfahrungen und Untersuchungen²⁴⁾ ist die Längenänderung von Holzmaßstäben abhängig von Luftfeuchtigkeit und Temperatur derart, daß für einen Stab von 1 m Länge die Längenänderungen 0,3 mm betragen können. Da bei langen Stahlbändern und Meßdrähten die Länge von der Spannung stark abhängig ist, werden für feinere Meßbandmessungen bei Vergleichung und Messung Spannungsmesser (Federdynamometer) eingeschaltet, um eine konstante Spannung zu erzielen.

Die Ausführung der Längenmessung erfordert: 1) Ausrichten der lotrechten Richtungsebene („Linie“) zwischen den Punkten, deren „Entfernung“ zu bestimmen ist; zur Bezeichnung dienen Absteckstäbe, Pfähle usw., in besonderen Fällen auch ausgespannte Schnüre. Die Aussteckung geschieht mit freiem Auge, oder mit einem Handfernrohr oder mit dem Theodolit (Abloter, Alignementsfernrohr). 2) Einrichten der einzelnen Meßlage (Meßstab, Meßband) in die ausgesteckte Richtungsebene. 3) Einrichten der einzelnen Meßlage innerhalb der Richtungsebene in vertikalem Sinne, entweder a) horizontal, oder b) geneigt, mit Ableitung der Reduktion auf horizontale Lage; die Einrichtung in die horizontale Lage geschieht entweder durch einfache Schätzung (nach Lotschnur oder Lotstab) oder mit Hilfe der Setzlibelle (Setzwage); zur Reduktion der geneigten Lage auf die horizontale wird entweder die Neigung mit der Libelle (Lattenreduktor) gemessen, oder der Vertikalwinkel parallel zur Meßlage (gleich lange Zielstäbe) mit einem Freihandhöheninstrument (Pendel- oder Libellenhöhenkreis) genommen, oder auch der Höhenunterschied h zwischen Anfangs- und

23) Vgl. V 1 (C. Runge), p. 12.

24) R. Hildebrand, Ann. Phys. Chem. 34 (1888), p. 361; H. Stadthagen, ibid. 61 (1897) p. 208; Ch. Lallemand, Verhandlgn. der 12. Konf. d. Intern. Erdmessung, Berlin 1899, Beilage C. I, p. 525 (Bericht über die Untersuchungen von C. M. Goulier).

Endpunkt der Meßlage benutzt (vgl. Abschnitt Höhenmessung). Die horizontale Lage ist danach $s_0 = s_n \cos \alpha$, oder bei Verwendung des Höhenunterschiedes

$$s_0 = \sqrt{s_n^2 - h^2} = s_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{s_n} \dots$$

Zur Ableitung der Reduktion dienen Tabellen und anderweitige Hilfsmittel. 4) Aneinanderreihung der einzelnen Meßlagen; bei unebenem Gelände und horizontaler Meßlage, der sog. „Staffelmessung“, geschieht die Aneinanderreihung durch Ablotung mit Fadenlot oder Lotstab und Libellenstab. Die „Entfernung“ zweier Punkte ergibt sich demnach durch dies Meßverfahren als die Summe der Projektionen der einzelnen Meßlagen im Messungshorizont. Um die Entfernung s aus dem Messungshorizont auf die Vermessungsfläche (Landeshorizont) zu projizieren, ist die Reduktion

$$s \left(\frac{H}{R} - \frac{H^2}{R^2} \dots \right)$$

anzubringen, wo H die Höhe des Messungshorizonts und R den Erdradius bedeutet. In der niederen Geodäsie ist diese Reduktion meistens zu vernachlässigen.

Die bei der Längenmessung entstehenden Fehler sind ihrer Natur nach teils regelmäßige, welche proportional der durchmessenen Länge fortschreiten, teils unregelmäßige, welche mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Meßlagen wachsen. Zu den ersteren gehört die Ausweichung der Meßstangen in horizontalem und vertikalem Sinne, die Durchbiegung und bei absoluten Messungen der Fehler des Maßstabs. Man hat die Abhängigkeit des Fehlers von der Länge in verschiedener Form zum Ausdruck gebracht²⁵⁾. Wenn f der regelmäßige, u der unregelmäßige Fehler ist, so hat man 1) $\sqrt{f^2 s^2 + u^2 s}$, oder je nach dem Vorherrschen der einen oder anderen Fehlerart 2) fs (prozentualer Fehler), 3) $u\sqrt{s}$ (sog. Quadratwurzelgesetz); unter Hinzunahme des Ablesefehlers a (Abrundung, Punktbezeichnung) wird die Beziehung 1) zu 1a) $\sqrt{a^2 + f^2 s^2 + u^2 s}$; man hat auch angewendet $a + fs + u\sqrt{s}$ und $a + fs$. Als Ausdruck der praktisch als erreichbar angenommenen Genauigkeit seien einige in verschiedener Form ausgesprochene „Fehlergrenzen“ der amtlichen Vermessungsanweisungen (Maximalabweichung zwischen Messungen, deren Betrag etwa dem 3- bis 4fachen mittleren Fehler entspricht) für Feldmessungen in günstigem Gelände angeführt: Preußen $0,01\sqrt{4s + 0,005 \cdot s^2}$, Württemberg $0,01\sqrt{s + 0,0005 \cdot s}$, Elsaß-Lothringen

25) *W. Jordan*, Handbuch 2, § 19.

0,006 \sqrt{s} + 0,00040 · s + 0,05, Österreich 0,005 \sqrt{s} + 0,00015 s + 0,015, wobei s in Metern zu rechnen ist. Als zulässige relative Abweichung wird etwa $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{1}{2000}$ genommen. Eine neuere Untersuchung über die Fehler der Längenmessung gibt *Reinhertz*²⁶). Bei Messung auf besonders hergerichteten Unterlagen (Eisenbahnschienen usw.) ist eine erheblich höhere Genauigkeit zu erzielen; während z. B. bei Messung kurzer Linien (einige 100 m) auf ebenen Straßen die zwischen verschiedenen Messungen derselben Linie auftretenden Abweichungen leicht innerhalb weniger cm zu halten sind, ist das bei Messung auf Schienen oder längs gespannter Schnüre für Strecken von 1000 m möglich ($\frac{1}{50000}$ bis $\frac{1}{100000}$ ist unter besonderen Umständen erreichbar). Genauigkeit ($\frac{1}{200000}$ und mehr) und Schnelligkeit vereinigt das Messungsverfahren von *Jäderin* mit Metalldrähten, dem neuerdings durch Benutzung eines gegen Temperaturänderungen fast unempfindlichen Nickelstahls (Invar) als Drahtmaterial eine besonders praktische Form gegeben ist. Die exaktesten Bestimmungen geben die zur Beschaffung der fundamentalen Längen der Triangulation dienenden Basisapparate (vgl. VI 1, 3).

7. Die Winkelmessung.

7a. Der Theodolit. Das Hauptwinkelmeßinstrument der Geodäsie ist der *Theodolit*. Über Geschichte und Etymologie vgl. *R. Wolf*²⁷) sowie die Handbücher von *Chr. Vogler* und *Jordan*²⁸) mit weiteren Literaturangaben. Der Grundgedanke des Instrumentes, welches meistens Horizontal- und Vertikalwinkel gleichzeitig, aber unabhängig voneinander zu bestimmen gestattet, läßt sich zurückverfolgen bis zur Blütezeit der Araber im 8. Jahrhundert; aber das im 15. bis 17. Jahrhundert oft in großen Dimensionen hergestellte Instrument ist erst in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts zuerst durch englische Mechaniker zum transportablen und exakten geodätischen Instrument ausgebildet worden und seit Beginn des 19. Jahrhunderts zur allgemeinen Anwendung gelangt, indem die Kreisscheibeninstrumente (Astrolabien) sowie die Positionswinkelinstrumente (vgl. p. 11) einschließlich der Reflexionsinstrumente (Sextant usw.) aus der Feldmessung verdrängt wurden.

Das Konstruktionsprinzip des Instrumentes ist unmittelbar in dem p. 11 angegebenen Grundgedanken des Messens an der Erdoberfläche

26) Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 7; 32 (1903), p. 176.

27) Handbuch der Astronomie 2, Zürich 1892, p. 48.

28) *Vogler*, Prakt. Geom. 1, p. 126 u. 361 (zur Etymologie); *Jordan*, Handbuch 2, p. 203.

enthalten, wonach die Richtungswinkel bestimmt werden durch Drehung um die Vertikale des Messungspunktes, sodaß der Theodolit als Polarkoordinateninstrument bezeichnet werden kann. Hauptachse ist die auf dem „Dreifuß“ aufgestellte „Vertikalachse“ (stehende Achse), welche mittels der Fußschrauben nach einer Libelle (p. 17) lotrecht gerichtet wird. Die vom Oberbau getragene „Horizontalachse“ („Kippachse“, liegende Achse) liefert mit der rechtwinklig mit ihr verbundenen Ziellinie des „Meßfernrohrs“ (p. 18) die in den lotrechten Richtungsebenen wirkende Projektionsvorrichtung. Diese mit Hinzunahme der Ablesezeiger wird als „Alidade“ bezeichnet. Zur Nivelierung der „Horizontalachse“ dient die Horizontalachsenlibelle oder auch die Vertikalachsenlibelle, wobei dann Prüfung auf richtige Ablotung in den Richtungsebenen erforderlich wird (Prüfung durch Projektion in zwei um 180° abstehenden Lagen der Kippachse, Durchschlagen, mit künstlichem Horizont usw.). Für das Achsensystem des Instrumentes ergibt sich demnach als Bedingung: Hauptachse vertikal, Kippachse horizontal, Zielachse des Meßfernrohrs rechtwinklig zur Kippachse (sog. Kollimation). Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so entstehen Projektionsfehler; die Abweichungen der Kippachse und der Zielachse erscheinen in doppeltem Betrage bei Einstellung eines Punktes in „zwei Lagen des Fernrohrs“, welche durch „Durchschlagen“ bzw. „Umlegen“ des Fernrohrs um die Kippachse und Drehung um die Vertikalachse um 180° hergestellt werden. Auf diese Weise können die Fehler erkannt, „berichtigt“ oder durch Messung in zwei Fernrohrlagen und Mittelbildung im Resultate beseitigt werden. Wegen der Ausführung der Prüfung und Berichtigung ist auf die in der Literaturübersicht genannten Handbücher zu verweisen. Wird der Zielachsenfehler (Kollimationsfehler) mit c , der Horizontalachsenfehler mit i , der Vertikalachsenfehler mit v bezeichnet, so sind für eine Ziellinie mit dem Höhenwinkel h die einzelnen Reduktionen $\frac{c}{\cos h}$; $i \operatorname{tg} h$; $i_v \operatorname{tg} h$, worin i_v die durch v erzeugte Horizontalachsenabweichung bedeutet. In der niederen Geodäsie wird von der Reduktion nach diesen Formeln kein Gebrauch gemacht, sondern das Instrument „berichtigt“ oder die Fehler durch „Durchschlagen“ des Fernrohrs eliminiert, nur in Ausnahmefällen kommt eine Bestimmung in Betracht, wobei dann für sehr steile Zielungen i durch eine Horizontalachsenlibelle für jede einzelne Richtung besonders zu bestimmen ist.

Der Durchmesser der Horizontalkreise (Limbus) beträgt je nach dem Zweck des Instrumentes etwa 10—26 cm (4—10 Zoll). Die Kreisteilung ist entweder die 360° -Teilung (sog. alte Teilung) oder 400° -

Teilung (sog. neue Teilung). Die für die trigonometrischen Rechnungen bequemere 400^g-Teilung hat neben der alten Teilung nach und nach an Boden gewonnen. Der Umstand, daß bei den die Grundlagen liefernden Messungen der höheren Geodäsie die „alte Teilung“ beibehalten wird, steht der Verallgemeinerung der „neuen Teilung“ entgegen. Da in der niederen Geodäsie die Winkelmessung lediglich zur Vermittlung der Kenntnis linearer Größen dient, und die gemessenen Winkel oder Richtungen nicht als ein selbständiges Ergebnis wie die Winkelkoordinaten (Polhöhe, Länge) der höheren Geodäsie und Astronomie (Nautik) zu betrachten sind, und weiterhin die Anwendung der einen oder andern Teilung nichts an Prinzip und Genauigkeit der Messungen ändert, so kann die Festsetzung der Teilungsart als eine besondere Frage der Rechentechnik behandelt werden. Bei den preußischen Katastervermessungen²⁹⁾ z. B. sind (bei Vorherrschen der alten Teilung) beide Teilungsarten nebeneinander zulässig. (Bei den Zahlenangaben dieses Referates ist nur 360^o-Teilung angewendet.) Der Kreis wird je nach dem Durchmesser in $\frac{1}{1}^0$, $\frac{1}{2}^0$, $\frac{1}{3}^0$, $\frac{1}{6}^0$ ³⁰⁾ geteilt und entsprechend der allgemeinen Richtungszählung (vgl. p. 11) rechtsläufig (Uhrzeigerbewegung) beziffert. Zur Ablesung dient: Nonius³¹⁾, Skalen- und Schraubenmikroskop, welche von der *Alhidade* getragen werden. Als *Nonius* kommt zur Erlangung gleichlaufender Bezifferung für Kreisteilung und Nonien lediglich der sog. „nachtragende“ in Betracht. Ist T ein Kreisteil, N ein Nonienteil, so ist die Angabe A des Nonius: $A = T - N = \frac{T}{n}$, wo n die Anzahl der Nonienteile (bei den angegebenen Kreisteilungen meistens 20, 30 oder 60) bedeutet. Gebräuchliche Anordnungen sind z. B. $T = \frac{1}{2}^0$, $n = 30$ oder 60, also $A = 1'$ oder $\frac{1}{2}'$; $T = \frac{1}{3}^0$, $n = 60$, $A = \frac{1}{3}'$. Das *Skalenmikroskop* gibt durch eine in der Bildebene den Bildern der Kreisteile genau entsprechende auf Glas geätzte Feinteilung unmittelbar eine weitere Einteilung in z. B. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$. Bei Kreisteilung in $\frac{1}{6}^0$ wird neuerdings meistens das *Schraubenmikroskop* angewendet. Zur Elimination der „Alhidadenexzentrizität“ werden stets zwei diametrale Ablesezeiger verwendet. Weiteres über die Anordnung, Prüfung und Berichtigung der Ablesehilfsmittel, Bestimmung der Exzentrizitäts- und Kreisteilungsfehler geben die genannten Handbücher³²⁾.

29) Anweisung IX.

30) Für 400^g-Teilung kommt in Betracht $\frac{1}{1}^g$, $\frac{1}{2}^g$, $\frac{1}{6}^g$.

31) Als historische Notiz sei angeführt: R. Wolf, Handbuch der Astronomie 2, Zürich 1892, p. 33.

32) Jordan, Handbuch 2, §§ 54—62; 3, p. 43.

7b. Horizontalwinkelmessung. Die Horizontalwinkel werden am Horizontalkreis abgelesen. Die in rechtläufigem (Uhrzeiger-) Sinne nacheinander erfolgende Einstellung von Objekten P_1P_2 bzw. $P_1P_2 \dots P_n$ bei Winkel- bzw. Richtungsmessung (vgl. p. 11) ergibt in einer Fernrohrlage (I) die Richtungswerte $r_1'r_2'$ bzw. $r_1'r_2' \dots r_n'$ je als Mittel aus beiden Zeigerablesungen, bei den (in der Regel in umgekehrter Reihenfolge vorgenommenen) Einstellungen in Fernrohrlage (II) $r_1''r_2''$ bzw. $r_1''r_1'' \dots r_n''$, und als Mittel hieraus die von den erwähnten Achsen- und Exzentrizitätsfehlern befreiten Ergebnisse r_1r_2 bzw. $r_1r_2 \dots r_n$. Eine solche Richtungsreihe bezeichnet man als „Satz“ (Gyrus). Bei Wiederholung der Messung wird zur Herabminderung des Einflusses der Kreisteilungsfehler bei Ablesung an zwei diametralen Zeigern in mehreren um $\frac{360^\circ}{2s}$ voneinander abstehenden Kreisstellungen gemessen ($s =$ Anzahl der Sätze). Um die Richtungswerte verschiedener Kreislagen in einfacher Weise, zunächst für die Mittelbildung, vergleichbar zu machen, werden dieselben auf irgend eine Richtung (Anfangs-, Nullrichtung) bezogen, z. B. $r_1 - r_1 = 0 = q_1$; $r_2 - r_1 = q_2$; \dots $r_n - r_1 = q_n$. Da nun bei den Theodolitmessungen der niederen Geodäsie grundsätzlich mit (in Bezug auf Achsen-, ev. Mikroskopfehler) „berichtigtem“ Instrument gearbeitet wird, und die übrigen Fehler oder Fehlerreste durch Beobachtung in zwei Fernrohrlagen, mit Ablesung an zwei diametralen Zeigern und in symmetrisch über den Kreis verteilten Lagen, möglichst eliminiert werden, so findet eine Korrektur der einzelnen Ablesungen nach Teilungs-, Mikroskopfehlern usw. in der Regel nicht statt. Bei den Genauigkeitsvergleichen wird als Beobachtung vom Gewicht 1 (*Gewichtseinheit* p. 14) in der Regel eine in „beiden Fernrohrlagen“ in der angegebenen Weise gemessene „Richtung“ genommen. Der mittlere Fehler derselben ist bei den für die verschiedensten Zwecke konstruierten kleinen oder größeren Instrumenten verschieden; für Nonientheodolite kleinster Konstruktion kann etwa angenommen werden $\pm 15''$, für größere Mikroskoptheodolite kann er bis unter $\pm 1''$ herabgebracht werden, für Instrumente mittlerer Größe (13–15 cm Durchmesser) beträgt er, je nachdem Mikroskop- oder Nonienablesung angebracht ist, etwa $\pm 2''$ bis $\pm 6''$. Die einfachste Ableitung des mittleren Messungsfehlers für Richtungsmessungen ergibt sich aus einer Anzahl gleichartiger Satzbeobachtungen auf Grund des arithmetischen Mittels nach $m_r = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(r-1)(s-1)}}$, wenn v die „zufällige“ Abweichung gegen das arithmetische Mittel, r die Anzahl der Richtungen und s die Anzahl der Sätze bezeichnet. Die Beziehung zwischen Richtungs- und Winkelfehler ist $m_w = \pm m_r \sqrt{2}$.

Wird der Theodolit mit einem doppelten Achsensystem versehen derart, daß z. B. die Alhidadenachse in der Kreisachse und diese wieder im Unterbau drehbar und feinstellbar ist, so kann durch abwechselnde Drehung um diese Achsen eine mechanische Addition eines Winkels vorgenommen werden. Ist die Ablesung in der Anfangslage beim Zielpunkt links r_a , in der Endlage nach n Additionen r_e , so ist $w = \frac{1}{n}(r_e - r_a)$. Zur Elimination der Achsenfehler wird die Hälfte der Repetitionen in der zweiten Fernrohrlage ausgeführt. Näheres über die Anordnung des Achsensystems und die Ausführung der Messungen geben die geodätischen Handbücher. Diese Methode (zuerst Multiplikation, später *Repetition der Winkel* genannt) wurde von *Tobias Mayer* 1752 begründet und galt wegen der Herabminderung der Teilungs- und Ablesefehler lange Zeit als maßgebende Winkelmessungsmethode (z. B. wurde sie auch von *Gauß* bei seiner Gradmessung angewendet), bis sie zu gunsten der zuerst von *F. G. W. Struve* und *F. W. Bessel* ausgebildeten satzweisen Richtungsmessungsmethode mehr und mehr verlassen wurde³³). Zurzeit ist das Doppelachsensystem nur noch für kleinere und mittlere Instrumente in Benutzung und teilweise unentbehrlich. Für Präzisionsinstrumente wird (bei durchweg guter Kreisteilung) das Repetitionsachsensystem nicht mehr verwandt, weil bei der Repetition systematische, im Achsengang begründete, mechanische Einwirkungen auftreten, welche schon *Gauß'* Bedenken erregten. Wird von diesen letzteren abgesehen, so ist die Fehlerbeziehung für einen n -fach repetierten Winkel $\pm \sqrt{\frac{2}{n}(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n})}$, gegenüber der n -maligen Satz-messung $\pm \sqrt{\frac{2}{n}(\alpha^2 + \beta^2)}$, wenn α bzw. β die unabhängigen Ziel- bzw. Ablesefehler bedeuten³³).

7 c. Vertikalwinkelmessung. Der Vertikalkreis ist zentrisch auf der Kippachse des Fernrohrs angebracht, entweder fest oder auch zur Elimination von Teilungsfehlern drehbar. Erforderlich ist eine Vertikal-kreislibelle parallel zur Kreisebene, entweder in fester Verbindung mit der Hauptvertikalachse oder auf der Vertikalkreisalhidade, durch welche für jede Höhenrichtung dem Zeiger eine konstante Stellung erteilt werden kann; die Messung der einzelnen Höhenrichtungen ist also voneinander unabhängig und gegründet auf die Nivellierung des

³³ *Jordan*, Handbuch 2, § 63; 3, p. 41; *G. Friebe*, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 333; *Nippa*, ibid. 25 (1896), p. 675. Das Mitschleppen des Kreises wird durch Messen von links nach rechts und dann von rechts nach links zum Teil eliminiert.

Zeigers. Die Bezifferung des Kreises ist verschieden, entweder durchlaufend oder mit beliebiger Nullpunktlage, oder nach Zenitwinkeln oder Höhen- bzw. Tiefenwinkeln, sodaß bei wagerechter Zielung die Ablesung 90° bzw. 0° sich ergeben soll. Bei der Messung ist demnach bei scharf einspielender Vertikalkreislibelle der Horizontalfaden auf den Zielpunkt einzustellen, oder bei eingestelltem Zielpunkt die Vertikalkreislibelle abzulesen und danach die Höhenrichtung zu reduzieren.

An einem Instrument mit festem Kreis soll bei einspielender Libelle bei genau horizontaler bzw. vertikaler Ziellinie die Ablesung 0° bzw. 90° (je nach der Bezifferung) sein; die Abweichung davon ist der „Indexfehler“, welcher bei Messung einer Höhenrichtung in „beiden Fernrohrlagen“ (Kreis links und rechts) in doppeltem Betrage sich in den Ablesungen zu erkennen gibt, im Mittel beider Fernrohrlagen eliminiert ist, oder auch an Fadenkreuz, Libelle (ev. auch an jedem Zeiger je für sich) korrigiert werden kann. Der Betrag des Indexfehlers ist abhängig von der gegenseitigen Stellung von Kreisnulllinie, Ziellinie, Zeiger und Libellenachse und muß für zwei zusammengehörige Messungen in beiden Fernrohrlagen konstant sein. Bei der Anwendung auf trigonometrische Höhenmessungen kommt wohl zur Herabminderung der Kreisteilungsfehler Beobachtung in mehreren Kreisstellungen in Betracht, was bei Feinmessung stets der Fall ist; in den meisten Fällen wird aber in der niederen Geodäsie mit festem Höhenkreis in einer Kreisstellung gemessen. Bei im übrigen gut berichtigtem Instrument wird der Einfluß eines etwa noch vorhandenen Kippachsenfehlers für die Vertikalwinkelmessung ebenso wie der der Fernrohrbiegung außer acht gelassen, bzw. durch Beobachtung in beiden Fernrohrlagen als eliminiert angesehen. Der mittlere Fehler einer Vertikalwinkelmessung entspricht im allgemeinen in rein instrumenteller Hinsicht der einer Horizontalwinkelmessung mit gleicher Ablesungsgenauigkeit unter Hinzunahme des Libelleneinstellungs- bzw. Ablesungsfehlers; bei der Anwendung tritt aber hinzu der Einfluß der Refraktionsunsicherheit (vgl. p. 79).

C. Die Lagemessungen.

8. Die Koordinatensysteme der Lagemessungen.

8a. Allgemeines über die geodätischen Koordinatensysteme. Die rechnerisch erlangten Ergebnisse geodätischer Punktbestimmungen werden zahlenmäßig ausgedrückt durch die auf die mathematische Erdoberfläche (Normalnullfläche) bezogenen Koordinaten. Als Ausdruck für

die gegenseitige Lage von Punkten der Erdoberfläche bieten sich zunächst Polarkoordinaten dar, d. i. die „Entfernung“ s zweier Punkte und der „Richtungswinkel“ r , den diese Linie (Vertikalebene) mit einer bestimmten der Zählung als Ausgang dienenden Richtung (z. B. der Nullstrichrichtung eines Kreises) einschließt. Die Polarkoordinaten s und r , welche das unmittelbare Ergebnis der Längen- und Richtungsmessungen darstellen, werden dementsprechend allgemein nur als Ausdruck für die gegenseitige Lage benachbarter Punkte verwendet, nicht aber zur Lagebestimmung beliebig gelegener, zahlreicher Punkte gegen einen einzigen Ausgangspunkt (Pol). Wenn zahlreiche Punktbestimmungen auf große Stücke der Erdoberfläche (ganze Länder, Landesvermessung) ausgedehnt werden, so werden die Punktorte in „geographischen Koordinaten“ (Breite oder Polhöhe φ und Länge λ) ausgedrückt, ebenso wie bei den auf astronomischem Wege ausgeführten „Ortsbestimmungen“. Diese „geodätischen Koordinaten“ φ , λ werden aus der Triangulierung durch Vermittlung der Polarkoordinaten s , r , bezogen auf einen astronomisch orientierten Ausgangspunkt, unter Zugrundelegung der ellipsoidischen Erdfigur berechnet. (Vgl. VI 1, 3.)

Während nun für die einheitliche Darstellung der Ergebnisse einer sich über ein großes Stück des Erdellipsoides erstreckenden Triangulierung („Landestriangulierung“) und die als Gradabteilungskarten behandelten topographischen Kartenwerke jene „ellipsoidischen Winkelkoordinaten“ φ , λ unmittelbar gebraucht werden, sind dieselben nicht geeignet für die Spezialvermessungen, die Linien- und Winkelmessungen rechnerisch verbinden, z. B. die staatlichen Katastervermessungen. Für die übersichtliche Darstellung der Ergebnisse dieser Spezialvermessungen (Kleintriangulierung, Polygonisierung und Einzelaufnahme, vgl. die Nrn. 9—13) muß die Beziehung zwischen den unmittelbaren Messungen und dem Ausdruck für die Punktorte (Koordinaten), d. h. also das anzuwendende Rechnungsverfahren einfacher sein, als es das die Punktorte in Bezug auf die Erdachse angegebene System der sog. geographischen Koordinaten gestattet. Dies wird erreicht durch „Linearkoordinatensysteme“, welche gewonnen werden durch zwei auf der „mathematischen Erdoberfläche“ sich rechtwinklig schneidende Richtungslinien, „geodätische rechtwinklige Koordinaten“. Bei Voraussetzung einer ebenen Vermessungsfläche entsprechen dieselben unmittelbar den ebenen rechtwinkligen Koordinaten y , x der analytischen Geometrie, bei Rücksichtnahme auf die Krümmung der mathematischen Erdoberfläche ergeben sich daraus die rechtwinkligen „sphärischen“, bzw. „ellipsoidischen“ Linearkoordinaten. Die

Theorie der „ellipsoidischen Linearkoordinaten“ gehört zur „höheren Geodäsie“, VI 1, 3.

8 b. Rechtwinklige ebene Koordinaten. Im Vermessungswesen muß, um bei den umfangreichen Zahlenrechnungen ein eindeutiges Formelsystem zu erhalten, wenigstens für ein zusammenhängendes Vermessungswerk (Landesvermessung) eine bestimmte Richtungszählung ein für allemal festgestellt und innegehalten werden. Vollständige Übereinstimmung besteht nicht; auf Grund der wichtigsten Vermessungsanweisungen und Lehrbücher (p. 5, 6) kann jedoch als maßgebend angenommen werden, daß in der niederen

Geodäsie die Zählung von $+x$ über $+y$ im Sinne

der Uhrzeigerbewegung durchlaufend in Übereinstimmung mit der Bezifferung des Horizontalkreises des Theodolits erfolgt (Fig. 1), womit also die Quadranten-zählung (I. Quadrant zwischen $+x$ und $+y$ usw.) gegeben und bestimmt ist, daß von $+x$ aus die „Richtungen“ von 0° bis 360° durchgezählt werden. Die an sich willkürliche Auswahl

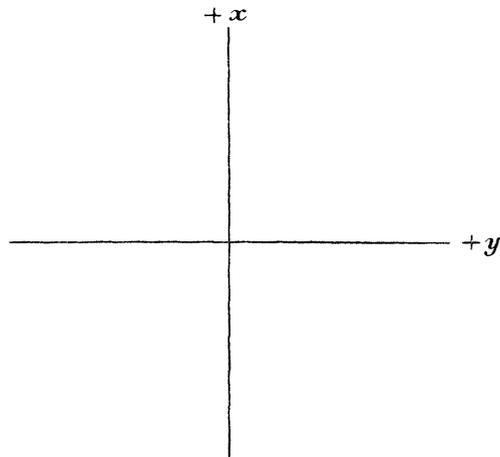


Fig. 1.

der „Haupttrichtachse“ X wird bei vereinzelt, unabhängigen Kleinaufnahmen in passender Weise, z. B. zusammenfallend mit einer Hauptmessungslinie, einer Dreiecks- oder Polygonseite, angeordnet, etwa so, daß alle Punkte des begrenzten Vermessungskomplexes in den I. Quadranten fallen. Zuweilen werden auch die Koordinaten dadurch orientiert, daß der „magnetische Meridian“ des Aufnahmegebietes die X -Achse bestimmt (mit oder ohne Berücksichtigung der magnetischen Deklination), oder daß grobe astronomische Orientierung (korrespondierende Sonnenhöhen usw.) vorgenommen wird. Erhält eine solche für sich selbständig ausgeführte Vermessung nachträglich Anschluß an ein bestehendes oder neugewonnenes Vermessungssystem, oder wird sie von vornherein auf Grund von bereits in einem gegebenen Koordinatensystem vorliegenden Punktbestimmungen ausgeführt, so ergeben diese übergeordneten Systeme die Orientierung für die Neuaufnahmen. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten y, x und den zugehörigen (gemessenen oder zu messenden) Polarkoordinaten Entfernung s , System-

oder Netzrichtungswinkel (Direktionswinkel)³⁴⁾ n sind die folgenden (Fig. 2):

$$y_2 - y_1 = \Delta y_{12} = s \sin n_{12}, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_{12} = s \cos n_{12};$$

$$s = \sqrt{\Delta y_{12}^2 + \Delta x_{12}^2}; \quad n_{12} = \arctg \frac{\Delta y_{12}}{\Delta x_{12}}; \quad n_{21} = n_{12} \pm 180^\circ.$$

Die in Betracht kommenden Aufgaben sind also: 1) Gegeben y_1, x_1 ; gemessen s_1, n_{12} ; gesucht y_2, x_2 ; 2) Umkehrung: gegeben y_1, x_1, y_2, x_2 ;

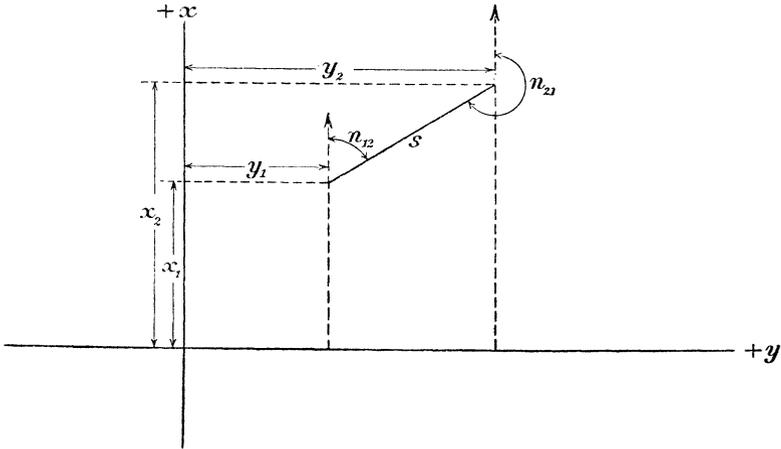


Fig. 2.

gesucht s, n_{12}, n_{21} ; 3) Ableitung der im Koordinatensystem „orientierten Richtungen“ (Netzrichtungen) n_{1n} aus den unmittelbar beobachteten Kreisablesungen am Theodoliten, den gemessenen Richtungen r oder Winkeln w . Es ist $r_{1n} + o = n_{1n}$, wozu die „Orientierung“ o zu ermitteln ist, und mindestens eine Richtung bereits orientiert sein muß, z. B. $n_{12} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $o = n_{12} - r_{12}$. Liegen mehrere Richtungen zur Orientierung vor, so entsteht eine Ausgleichungsaufgabe (vgl. p. 48). Liegt nur ein Winkel w vor, so ist z. B. $w = r_{13} - r_{12} = n_{13} - n_{12}$, womit der Winkel aus beiden Netzrichtungen, oder die eine Richtung aus der andern durch den Winkel bestimmt ist.

8c. Rechtwinklige sphärische Linearkoordinaten. Wenn Vermessungen größere Ausdehnung annehmen, so tritt (wie früher angegeben) zunächst an Stelle der „ebenen“ die „kugelförmige“ Vermessungsfläche; das „ebene Koordinatensystem“ erweitert sich zum „sphärischen“. Als

34) Für den Richtungswinkel ist bei dem preußischen Kataster die Bezeichnung *Neigung* üblich. Der auch zuweilen gebrauchte Ausdruck *Azimuth* bleibt besser dem *astronomischen Azimuth* vorbehalten. Andere Namen sind Bestimmungswinkel und Südwinkel. Vgl. *Hammer*, *Trigonometrie*, Anmerk. 67, p. 559.

Haupttrichtachse (X -Achse) dient der Meridian des passend gewählten „Koordinatennullpunktes“, womit die Orientierung des Punktsystemes gewonnen ist. Diese Orientierung erfolgt wieder aus etwa vorhandenen Bestimmungen (Koordinaten y_n, x_n) oder kann direkt nach irgend einer Methode der astronomischen Azimutbestimmung vorgenommen werden (z.B. Winkelmessung zwischen Polarstern und einer geodätischen Richtung). Entsprechend den Bezeichnungen für das ebene System sind nun die „Abszissen“ der Punkte 1 und 2 die Meridianbögen x_1 und x_2 des Nullpunktmeridians, gerechnet vom eingeführten Nullpunkt bis zum „Fußpunkt“ der Ordinaten y_1, y_2 , welche durch die rechtwinklig zu ihm stehenden (im Querschnittspol konvergierenden) „Querschnittbogen“ y_1, y_2 gebildet werden. Die Entfernung s ist der Erdbogen (Großkreisbogen) zwischen 1 und 2; die in 1 und 2 gelegten „Meridianparallelen“ bestimmen in ihrem positiven Zweige (entsprechend der $+X$ -Richtung) die Anfangsrichtung für die Zählung der „Richtungswinkel“ n_{12} bzw. n_{21} , welche der Erdbogen s mit diesen positiven Zweigen der Parallelen einschließt. In Übereinstimmung mit den oben für die Ebene gegebenen Beziehungen sind nun die für das in Frage kommende Anwendungsgebiet in der Regel hinreichenden Formeln³⁵⁾ (R = Erdradius, ϱ hier und stets im folgenden Faktor zur Verwandlung von Bogen- in Winkelmaß)

$$y_2 - y_1 = s \sin n_{12} - \frac{s^3 y_1 \cos^2 n_{12}}{2 R^2} - \frac{s^3 \sin n_{12} \cos^3 n_{12}}{6 R^2} \dots$$

$$x_2 - x_1 = s \cos n_{12} + \frac{s y_2^2 \cos n_{12}}{2 R^2} - \frac{s^3 \sin^2 n_{12} \cos n_{12}}{6 R^2} \dots$$

$$s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \left(1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 R^2} \cos^2 n_{12} \right) \dots$$

$$n_{12} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{\varrho}{6 R^2} (2 y_1 + y_2) (x_2 - x_1)$$

$$+ \frac{\varrho}{6 R^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \sin n_{12} \cos n_{12} \dots$$

$$n_{21} = n_{12} \pm 180^\circ - \frac{y_1 s \cos n_{12}}{R^2} \varrho - \frac{s^3 \sin n_{12} \cos n_{12}}{2 R^2} \varrho \dots$$

Die Vergleichung mit den Formeln des ebenen Systems läßt die sphärischen Zusatzglieder erkennen, welche die Berücksichtigung der Erdkugelkrümmung im Vergleich zur ebenen Rechnung erforderlich macht. Die Entscheidung über die Vernachlässigung der sphärischen Glieder hängt von der Genauigkeit ab, mit der die Punktabstände und Richtungswinkel durch die Rechnung wiedergegeben werden sollen.

35) Jordan, Handbuch 3, § 46.

Trägt man die Koordinaten (y, x) als ebene rechtwinklige Koordinaten auf, so erhält man eine Kartenprojektion (*Soldner'sche Projektion*³⁶⁾). Die Verzerrungen derselben wachsen hauptsächlich mit wachsendem y im Verhältnis $\frac{y^2}{2R^2}$, so daß ihr zu beiden Seiten des Nullmeridians bei den heutigen Anforderungen nur eine Ausdehnung von 30 bis 50 km gegeben werden kann. In der Meridianrichtung kann sie sich über mehrere Breitengrade erstrecken, wie die Rektifikation der Erdmeridianellipse zeigt.

Nehmen zusammenhängende Vermessungen so große Ausdehnungen an, wie die über das gesamte Gebiet eines Staates einheitlich sich erstreckenden „Katastervermessungen“, so tritt die Notwendigkeit hervor, einerseits möglichst einfache und bequeme Rechenmethoden beizubehalten, andererseits dafür zu sorgen, daß der Zusammenhang zwischen den der Natur der Sache nach getrennt und unabhängig voneinander vorzunehmenden Spezialvermessungen streng gewahrt bleibt, sodaß jeder Messungspunkt auf der zu Grunde gelegten mathematischen Erdoberfläche die ihm im Vergleich zu allen andern Punkten zukommende Lage erhält. Dazu ist als Grundlage erforderlich eine einheitliche Haupttriangulierung und im Anschluß an diese für große Staaten (z. B. Preußen) die Anordnung einer *Reihe von Einzelkoordinatensystemen*, die durch diese Triangulierung orientiert sind. Die durch die grundlegende Landes- triangulierung gelieferten ellipsoidischen Winkelkoordinaten φ, λ werden innerhalb der Einzelsysteme in ellipsoidische Linearkoordinaten y, x verwandelt, sodaß innerhalb der begrenzten Einzelsysteme je nach den Punktabständen sphärisch (mittlerer Krümmungsradius) oder eben gerechnet werden kann. Die Beziehung der Ellipsoidkoordinaten φ, λ und y, x zu einander gehört in das Gebiet der „höheren Geodäsie“. Die Anordnung der Einzelsysteme erfolgt in verschiedener Weise, entweder nach runden Werten der geographischen Koordinaten oder Verwaltungsbezirksgrenzen, wie z. B. in Preußen, wo 40 Spezialsysteme mit y bis 60 km bestehen. Anstatt einen Meridian als Hauptachse anzunehmen, kann dazu auch der Querschnittbogen des Normalpunktes genommen werden, wodurch die Bedeutung von x und y sich umkehrt. Die Methode der Punktortangabe durch rechtwinklige Koordinaten auf der gekrümmten Erdoberfläche ist aus den französischen

36) Die *Soldner'schen* Entwicklungen sind publiziert in: Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873; vgl. ferner *J. Bohmenberger*, De computandis dimensionibus trigonometricis etc., Tübingen 1826, § 15—16; *Jordan*, Handbuch 2, Kap. VII; 3, Kap. V und VII.

Messungen gegen Ende des 18. Jahrhunderts übertragen worden und dann zuerst im heutigen Sinne rationell entwickelt und zur Anwendung gekommen bei der zu Beginn des 19. Jahrhunderts in Angriff genommenen bayerischen Landesvermessung durch *Soldner*³⁶). Nach dem Vorgange Bayerns sind rechtwinklige sphärische *Soldner*'sche Koordinaten fast allgemein bei den Katastervermessungen eingeführt worden. Die Formeln sind zunächst von *J. Bohnenberger* weiter entwickelt worden und in neuerer Zeit besonders durch *Jordan*³⁶).

8d. Konforme rechtwinklige Gauß'sche Koordinaten. Bei der hannoverschen Landesvermessung hat *C. F. Gauß* (vgl. Werke, Bd. 9) das Prinzip der konformen Abbildung (für die Kartenprojektion schon früher verwendet) zum erstenmal auf geodätische Punktbestimmungen übertragen. Durch Einführung der Bedingung der Ähnlichkeit der von der gekrümmten Erdoberfläche (Kugel) auf eine ebene Berechnungsfläche abgebildeten unendlich kleinen Figuren ergeben sich, wenn wieder der Meridian des Nullpunktes als ebene Abszissenachse (Kartenmittellinie des umhüllenden Zylindermantels) angenommen wird, die Abszissen x ebenso wie bei dem *Soldner*'schen System, die ebenen Ordinaten y dagegen erscheinen im Vergleich zu den sphärischen (natürlichen) um einen von der Größe der Ordinate und der Erdkrümmung abhängenden Betrag geändert. Die Erdbogen s bilden sich zwischen den projizierten Punkten als schwach gekrümmte Linien ab; die Richtungswinkel T der Tangenten in den Anfangspunkten der Bogen weichen nur um einen geringen Betrag von den Richtungswinkeln n der geraden Verbindungslinien ab. Bezeichnet ξ die geradlinige Entfernung in der xy -Ebene und s , wie oben angegeben, die sphärische Entfernung, so gelten die Formeln³⁷):

$$x = x; y = y + \frac{y^2}{6R^2}; s = \xi \left(1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6R^2} \right) \dots$$

$$T = n + \frac{\xi}{4R^2} (y_1 + y_2) (x_2 - x_1) - \frac{\xi}{12R^2} (y_2 - y_1) (x_2 - x_1) \dots$$

Die Vergleichung der Zusatzglieder für die Strecken und Richtungswinkel mit denjenigen der *Soldner*'schen Rechnung zeigt, daß bei den *Gauß*'schen Koordinaten für die Strecken der Faktor $\cos^2 n$ wegfällt, d. h. entsprechend dem Prinzip der konformen Abbildung die Streckenverzerrung nach allen Richtungen dieselbe ist und gleich dem Maximalbetrag derselben bei den *Soldner*'schen Koordinaten für $n = 0$. Wird dies Zusatzglied nicht berücksichtigt, so ist die mittlere Streckenverzerrung bei den *Gauß*'schen Koordinaten größer; soll das Glied aber

37) *Jordan*, Handbuch 3, § 50.

berücksichtigt werden, so ist das wegen der Unabhängigkeit von der Richtung bei diesen einfacher als bei den *Soldner'schen*, da, sobald die Strecken oder $(y_2 - y_1)$ klein sind, das Glied örtlich konstant ist. Die Vergleichung der Zusatzglieder für die Richtungsreduktion zeigt, daß das erste Glied bei beiden Arten von Koordinaten klein ist, daß das zweite bei den *Soldner'schen* Koordinaten von y^2 abhängige Glied bei den *Gauß'schen* nicht vorkommt, während bei diesen das zweite Glied überhaupt nur sehr gering ist, d. h. bei der konformen Projektion ist die Vernachlässigung der Richtungsreduktion verhältnismäßig belanglos. Die Theorie der *Gauß'schen* Koordinaten für das Ellipsoid ist zuerst von O. *Schreiber*³⁸⁾ dargestellt, und später in die Berechnungsarbeiten der preußischen Landesaufnahme eingeführt worden. In letzter Zeit hat *Jordan*³⁹⁾ die Vorzüge der konformen Koordinaten besonders hervorgehoben und dieselben auch für die Einführung bei den Spezialvermessungen empfohlen. Das alte klassische *Gauß'sche* Koordinatensystem mit dem Nullpunkt Göttingen ist bei den preußischen *Katastervermessungen* aufgegeben worden. Ein konformes Koordinatensystem (Kegelprojektion) hat Mecklenburg⁴⁰⁾. Weiteres über Kartenprojektionen findet man in VI 1, 4 (*R. Bourgeois*).

8e. Koordinatentransformation. Sowohl bei Kleinmessungen, bei welchen als Richtachsen irgend welche Messungslinien gewählt wurden, als auch bei geodätischen Koordinatensystemen (hier besonders an den Systemgrenzen) tritt häufig die Aufgabe der Umwandlung von rechtwinklig ebenen Koordinaten von einem System in das andere auf. Hierbei wird statt der allgemeinen Transformationsformeln

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \eta \cos \varepsilon + \zeta \sin \varepsilon \\ x &= x_0 + \zeta \cos \varepsilon - \eta \sin \varepsilon \end{aligned}$$

häufig besser nach Koordinatenunterschieden von Punkt zu Punkt

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta \eta \cos \varepsilon + \Delta \zeta \sin \varepsilon \\ \Delta x &= \Delta \zeta \cos \varepsilon - \Delta \eta \sin \varepsilon \end{aligned}$$

gerechnet, wobei sich in den Abschlußkoordinaten eine Rechenprobe ergibt. Die Differenz der Systemrichtungen ε ist in der Regel aus in beiden Systemen gegebenen Koordinaten abzuleiten, sodaß auch diese Ableitungen in die Rechenformeln für die Transformation un-

38) Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung, Hannover 1866.

39) Zahlreiche Artikel in Zeitschr. für Vermessungswesen von 1894 bis 1899.

40) Großherzoglich Mecklenburgische Landesvermessung, V. Teil, Schwerin 1895; *Jordan*, Handbuch 3, p. 335.

mittelbar eingeführt werden. Sehr häufig (z. B. an den auf der mathematischen Erdoberfläche gleichartig orientierten Systemgrenzen, p. 32) sind die Richtungs-differenzen ε der Systeme sehr klein, sodaß die Koordinatenänderungen als Differentiale aufgefaßt und dementsprechend die Rechnungen vereinfacht werden können⁴¹).

9. Die Punktbestimmung durch Triangulierung.

9a. Allgemeines über Triangulierung. Die Aufgabe der Triangulierung ist, für ein im Gelände dauerhaft bezeichnetes System von Festpunkten („Dreieckspunkt“, „trigonom. Punkt“ oder „Station“) durch Winkelmessung mit dem Theodolit die Lage ihrer Projektionen auf die Vermessungsfläche in geodätischen Koordinaten zu bestimmen. Die Methode ist von *W. Snellius*⁴²) in der Absicht ersonnen, die zeitraubende und praktisch oft nicht durchführbare direkte Messung langer Strecken zu ersetzen und ist von ihm 1610 bei der Messung eines Meridianbogens zur Ausführung gebracht. Im Gelände werden Punkte derart ausgewählt, daß ihre Verbindungslinien ein System von Dreiecken bilden. Wenn nun in diesen Dreiecken die Winkel (oder die Richtungssysteme auf den Stationspunkten) sowie für irgend eine Linie des Systemes die Länge unmittelbar gemessen werden, und weiterhin noch das Azimut irgend einer Linie oder ihr Richtungswinkel in einem zu Grunde gelegten Koordinatensystem bekannt ist, so können für sämtliche Dreieckspunkte die Koordinaten und hieraus alle etwa erforderlichen weiteren Punktabstände, Richtungen und Winkel berechnet werden. Im Rahmen der „niedereren Geodäsie“ handelt es sich hierbei stets um Punktbestimmung im rechtwinkligen Koordinatensystem mit „ebener“ oder „sphärischer“ Rechnung (vgl. p. 29), und zwar in der Regel um „Einschaltungs-Triangulierungen“ in die als gegeben betrachteten übergeordneten Punktsysteme einer Landestriangulierung. Es kommen jedoch für kleinere Gebiete auch selbständige in sich geschlossene Kleintriangulierungsnetze vor, bei denen dann entweder für eine Linie durch besondere „Basismessung“ mit Meßplatten oder Meßband (vgl. Anordnung und Genauigkeit p. 19) mit eventueller Einfügung eines „Basisnetzes“ (vgl. VI 1, 3) das Längenmaß eingeführt, oder auch

41) Weiteres hierüber sowie über die Transformation zusammenhängender trigonometrischer Netze findet man bei *Jordan*, Handbuch 2, § 68 und *F. G. Gauß*, Rechnungen der Feldmeßkunst, Kap. V; für amtliche Rechnungen mit Formularen vgl. Anweisung IX.

42) Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, Lugduni Batavorum 1617. Historisches bei *J. D. van der Plaats*, Tijdschr. v. Kadaster en Landmeetkunde 5 (1889), p. 1 und *G. B. H. de Balbian*, *ibid.*; ferner *Jordan*, Handbuch 1, p. 453.

aus einer vorhandenen Triangulierung entnommen wird, und nur das Richtungsnetz der Neuarbeit an sich als selbständiges System aufgefaßt wird, wie das z. B. vorkommt bei Stadtvermessungen, Tunneltriangulierungen und anderen Aufgaben⁴³⁾.

Die grundlegenden Triangulierungen für die Erd- und Landesvermessung, welche sich über weite Gebiete hinziehen und Rechnung auf der ellipsoidischen Fläche erforderlich machen, rechnet man zur „höheren Geodäsie“. Man unterscheidet dementsprechend „Haupt“- , „Zwischen“- und „Klein“-Triangulierung, oder Triangulierung I., II., III. und IV. (auch V.) „Ordnung“. Durch diese bei Landesvermessungen stufenweise einander untergeordneten Systeme werden die Punktabstände (Dreiecksseiten) nach und nach von etwa 50 km und mehr bis zu einigen km, und für die Spezialvermessungen bis zu 1 km, ja $\frac{1}{2}$ km herabgeführt, wobei gleichzeitig stufenweise die Messungs- und Rechnungsmethoden eine entsprechende Modifikation erfahren, und der Übergang von der ellipsoidischen Rechnung zur ebenen Rechnung der Kleinmessungssysteme vollzogen wird.

Die zunächst bei einer Triangulierung vorzunehmenden Arbeiten sind: A) „Erkundung des Netzes“, Auswahl und sachgemäße Verteilung der Punkte im Gelände; B) dauernde Bezeichnung („Vermarkung“) der Punkte, z. B. durch einen Stein mit eingemeißeltem Kreuzschnitt mit unterirdischer Versicherung durch eine ähnliche Marke; C) Sichtbarmachung („Signalisierung“) der so bezeichneten Punkte für die Winkelmessung durch lotrecht gerichtete Stangen, Signaltafeln, Signalpyramiden. Für größere Entfernungen und besondere Verhältnisse wird auch vom Heliotrop (vgl. VI 1, 3) Gebrauch gemacht. Große Bedeutung haben als Signale die Kirchtürme, deren Helmstangen-Mittellinien als Zielpunkte in ausgiebiger Weise verwendet werden.

9 b. Zentrierung. Kann der Theodolit nicht genau über einem solchen Vermarkungsstein aufgestellt werden, oder ist, wie z. B. bei Kirchtürmen, das „Zentrum der Station“ als Instrumentstandpunkt nicht zugänglich und muß auf einem „Nebenstandpunkt“ (Galerie usw.) beobachtet werden, oder ist umgekehrt ein „Nebenzielpunkt“ erforderlich, so handelt es sich um das „Zentrieren“ der Beobachtungen, d. h. Umrechnung auf zentrale Sicht. Wird das auf dem „exzentrischen Standpunkt“ S gemessene Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n auf die Zentrallinie nach dem Zentrum C als Anfangsrichtung reduziert und mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ bezeichnet, und das entsprechende auf die gleiche Anfangsrichtung bezogene gesuchte „zentrierte System“ mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, so ist

43) Beispiele und Literatur in den Handbüchern.

$\alpha_i = \varepsilon_i + \delta_i$ (Fig. 3), worin der parallaktische Winkel δ_i über der Exzentricität $e = CS$ bei bekannter bzw. vorher zu bestimmender Entfernung s_i aus dem parallaktischen Dreieck sich ergibt. Die Zentrierung für einen Winkel ergibt sich ohne weiteres aus den Richtungsreduktionen. Die durch besondere Messungen („Zentrierungsmessungen“) zu bestimmenden Werte e und ε , sowie die Entfernung s bezeichnet man als „Zentrierungselemente“. Dieselben müssen so genau ermittelt werden, daß ihre Fehler keine in Betracht kommende Erhöhung des Beobachtungsfehlers für die Richtungen herbeiführen können. Die Messung der „Zentrierungselemente“ e und ε muß häufig „indirekt“ mit besonderen Hilfs-

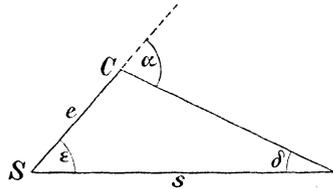


Fig. 3.

konstruktionen geschehen, wenn z. B. der Standpunkt S des Instrumentes auf der Galerie eines Kirchturmes und das Zentrum C die Helmstangenmittellinie ist. Man kann dann eine Grundlinie messen und an deren Enden die Richtungen nach C und S in bezug auf die Grundlinie (Aufgabe der unzugänglichen Entfernung, vgl. p. 43). Die Aufgabe kam schon bei *Snellius'* Triangulierung vor. Wenn irgend möglich, werden überschüssige Bestimmungen verwendet, sodaß die Zentrierung zu einer kleinen Triangulierung mit Ausgleichung wird⁴⁴⁾.

9c. Die Winkelmessungen und ihre Anordnung. Als Genauigkeitsausdruck für die Messung mit dem bei den Triangulierungen der niederen Geodäsie verwendeten Theodolit mittlerer Größe kann nach p. 25 angenommen werden (bei Anwendung der dort erwähnten fehler-tilgenden Beobachtungsmethode), daß der „mittlere Richtungsfehler im Satz“ etwa zwischen den Grenzen $\pm 2''$ bis $\pm 6''$ liegt, so daß bei der Ausführung von 3 bis 6 Sätzen der Fehler des Gesamtmittels stets innerhalb weniger Sekunden zu halten ist, wobei zu berücksichtigen ist, daß äußere Fehlerquellen (Signalstellung usw.) Fehler von gleichem, ja größerem Betrage in die Bestimmungen hineinbringen. Ist z. B. ein Zielpunkt um ± 1 cm unrichtig bezeichnet oder eingestellt worden, so ist bei einer Zielweite von 1000 m die entsprechende Richtungsunsicherheit $\pm 2''$, und wenn das Instrument gleichfalls um ± 1 cm unrichtig aufgestellt (zentriert) ist, so wird daraus $\pm 2''\sqrt{2}$. Während früher die Dreieckswinkel unabhängig je für sich gemessen wurden, wird jetzt in der Regel das für eine Punktbestimmung auf einer Station sich ergebende „Richtungssystem“ $r_1 \dots r_n$ als das ge-

44) *Jordan*, Handbuch 2, § 74, 75.

suchte betrachtet, auch wenn für die eigentliche Messung der „Winkel“ als das günstigste zu messende Richtungssystem verwendet wird. Der einfachste Fall liegt vor, wenn (vgl. p. 25) die satzweise Richtungsmessung in „vollständigen“ Sätzen ausführbar ist und das arithmetische Mittel sofort das Beobachtungsergebnis liefert. Nicht zu vermeidende Störungen und Hindernisse führen aber sehr häufig zur Anwendung „unvollständiger“ Sätze. Dies führt dann unter Beachtung möglicher Elimination der Teilungsfehler und möglichst systematischer Anordnung der Messungen zu einer Ausgleichungsaufgabe, sog. „Stationsausgleichung“. Diese erfolgt in der Regel nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen, wobei satzweise die Fehlergleichungen für die Richtungen und die „Orientierungen“ aufzustellen sind⁴⁵⁾. Bei den sich meist sehr verwickelt gestaltenden Richtungsnetzen der Einschaltungstriangulierungen wird dann auch mit Vorteil von einer bei der englischen Landesvermessung⁴⁶⁾ zuerst gebrauchten Näherungsausgleichung Anwendung gemacht.

Sind etwa die folgenden Sätze beobachtet:

Satz	Station				.
	0	A	B	C	
1	0	α_1	—	γ_1	⋮
2	0	α_2	β_2	γ_2	⋮
3	0	—	β_3	γ_3	⋮
4	0	α_4	—	γ_4	⋮
...	⋮
Mittel	0	α	β	γ	:

wobei angenommen ist, daß eine Station (0), auf die die übrigen bezogen werden, in allen Sätzen vorkommt, so bildet man zunächst die Mittel der Messungen für die einzelnen Stationen α , β , γ Dann rechnet man für jeden Satz die mittlere Abweichung gegen die Stationsmittel aus, also z. B. für Satz 1 die Abweichung $\frac{1}{2} (\alpha - \alpha_1 + \gamma - \gamma_1)$ oder für Satz 2: $\frac{1}{3} (\alpha - \alpha_2 + \beta - \beta_2 + \gamma - \gamma_2)$ usw., und fügt diese Abweichung allen Ablesungen des betreffenden Satzes hinzu. Mit den

45) Vgl. die genannten Handbücher der Vermessungskunde bzw. der Ausgleichungsrechnung, z. B. Jordan, Handbuch 1, Kap. II.

46) Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858, p. 62.

verbesserten Werten wiederholt man das ganze Verfahren, bis die Verbesserungen innerhalb der Beobachtungsfehler liegen⁴⁷⁾.

Anstatt ein Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n als Ganzes zu behandeln oder in einige mehrzählige Reihen zu zerlegen, kann bei der Beobachtung auch das kleinste Richtungssystem, d. h. der Winkel, zur Anwendung kommen, wie das bei den älteren Triangulierungen zunächst geschah und bei Anwendung des Sextanten (nautische Triangulierungen) notwendig wird. Die Zerlegung eines mehrzähligen Richtungssystems in Winkel kann in verschiedener Weise geschehen. Wird das Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n in die Winkel $w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1n}$ zerlegt, so wird der Zusammenhang lediglich durch die Anfangs- oder Nullrichtung vermittelt, welche dem trigonometrischen Netze nicht notwendig anzugehören braucht. Die einzelnen Winkel können mehrfach (wie bei Richtungsmessung in verschiedenen Kreisstellungen) oder auch nach der Repetitionsmethode gemessen werden. Wird das Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n in die aufeinanderfolgenden Winkel $w_{12}, w_{23}, \dots, w_{n1}$ zerlegt, sodaß die Bedingung auftritt $\Sigma w = 360^\circ$, so hat man für die das Richtungssystem ergebende Stationsausgleichung den einfachen Fall der Verteilung eines Abschlußfehlers („Horizontsumme“). Werden die Winkel so angeordnet, daß beliebige Kombinationen gebildet und überschüssige Bestimmungen erhalten werden, so wird das Richtungssystem nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet, wobei sowohl die Rechnung nach „vermittelnden“ als nach „bedingten“ Beobachtungen erfolgen kann. Als maßgebend für die Wahl des Rechnungsverfahrens wird meistens die Zahl der aufzulösenden Normalgleichungen angesehen; hat man n Richtungen zu bestimmen und w Winkel gemessen, so sind bei „vermittelnden Beobachtungen“ w Fehlergleichungen anzusetzen und $n - 1$ unabhängige Unbekannte zu bestimmen bzw. Normalgleichungen aufzulösen, und bei „bedingten“ Beobachtungen $w - n + 1$ Bedingungsgleichungen aufzustellen bzw. Normalgleichungen aufzulösen.

Das günstigste Verfahren der Richtungsbestimmung aus Winkelmessung ist „Winkelmessung in allen Kombinationen“, welches *O. Schreiber*⁴⁸⁾ entwickelt hat. Dies zunächst für Haupttriangulierung ausgebildete Verfahren findet neuerdings auch bei Kleintriangulierungen Anwendung. Für das Richtungssystem r_1, r_2, \dots, r_n werden durch Bildung der Kombinationen ohne Wiederholung für je zwei Richtungen

47) *Helmert*, Ausgleichsrechnung, p. 154; *Jordan*, Handbuch 1, p. 176; z. B. amtlich angewendet in Anweisung IX.

48) *Zeitschr. f. Vermess.* 7 (1878), p. 209; 8 (1879), p. 97.

die $\frac{1}{2} n (n - 1)$ Winkel gebildet. Diese Winkel w werden, wenn das Gewicht der ausgeglichenen Richtungen gleich s (entsprechend s Richtungssätzen) sein soll, $p = \frac{2s}{n}$ mal in beiden Fernrohrlagen in $\frac{180^\circ}{p}$ von einander abstehenden Kreislagen gemessen, wobei für die einzelnen Winkel die Kreisstellungen innerhalb des Intervalles $\frac{180^\circ}{p}$ so zu bestimmen sind, daß die Richtungsablesungen symmetrisch über den Kreis verteilt werden. Dazu sind um $\frac{180^\circ}{pn}$ bzw. $\frac{180^\circ}{p(n-1)}$ von einander abstehende Kreisstellungen erforderlich, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Infolge der symmetrischen Anordnung dieses Beobachtungsverfahrens gestaltet sich die Ansetzung der Fehler- und der Normalgleichungen sowie ihre Auflösung äußerst einfach. Dieses Messungsverfahren ist ein ausgezeichnetes Beispiel für rationelle Anordnung von Messungen, um mit einem Minimum an Arbeitsaufwand bei Beobachtung und Rechnung ein Maximum an Genauigkeit zu erreichen⁴⁹⁾.

10. Die Grundaufgaben des trigonometrischen Einschneidens im rechtwinkligen Koordinatensystem.

10a. Vorwärtseinschneiden und Seitwärtseinschneiden. Der einfachste Fall liegt vor, wenn zwei Punkte A und B durch Koordinaten gegeben sind und auf A und B je eine im System „orientierte Richtung“ φ und ψ besteht, durch deren Schnitt die Koordinaten des Punktes P bestimmt werden („Vorwärtseinschneiden“). Sind im Drei-

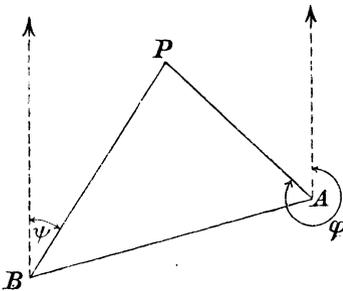


Fig. 4.

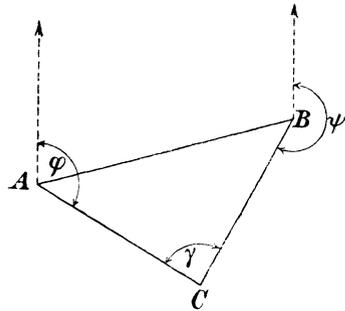


Fig. 5.

eck ABP (Fig. 4) die an der „Basis“ AB gelegenen Winkel A , B gemessen, so hat man damit sofort φ und ψ , da die Richtung AB aus den gegebenen Koordinaten von A und B zu ermitteln ist. Andern-

⁴⁹⁾ Jordan, Handbuch 1, Kap. II, IV; 3, Kap. I mit erweiterten Literaturangaben; vgl. ferner VI 1, 3.

falls ist φ und ψ aus Richtungsmessungen nach irgend welchen anderen in Koordinaten gegebenen Punkten abzuleiten, wozu die „Richtung“ (AB) nicht direkt erforderlich ist. Damit ist die Lösung gegeben, für welche, da diese Rechnungen bei Vermessungen stets wiederkehren, schematische Rechenformulare verwendet werden. Erwähnt sei noch, daß für logarithmische Rechnung die unmittelbar aus dem Dreieck durch Einführung der Basis AB sich ergebende Form geeignet ist, für die Verwendung der Rechenmaschine die analytische Ableitung aus dem Richtungsschnitt. Die Rechenmaschine kommt bei derartigen trigonometrischen Rechnungen neuerdings mehr und mehr in Anwendung⁵⁰).

In trigonometrischer Hinsicht die gleiche Aufgabe ergibt sich beim sog. „Seitwärtseinschneiden“ (Fig. 5); dabei ist A und B in Koordinaten und die orientierte Richtung φ auf A gegeben, und der Winkel γ auf C gemessen ($\psi = \varphi + \gamma$).

10b. Rückwärtseinschneiden. Gegeben sind drei Punkte, welche an einem vierten Punkte P , dessen Lage zu den drei Punkten zu bestimmen ist, in der rechtsläufigen Reihenfolge AMB erscheinen; gemessen sind auf P die Richtungen nach A, M, B z. B. durch die nebeneinander liegenden Winkel α, β (Fig. 6). Diese Vierecksaufgabe (Dreipunktproblem) ist schon von *Snellius* (1610) bei seiner ersten Triangulierung benutzt. In der Vermessungskunde wird sie nach der graphischen Lösung auf dem Meßtisch (vgl. p. 94) als „Rückwärtseinschneiden“ bezeichnet; nach einer von *Pothenot* gegebenen Lösung auch wohl unkorrekter Weise das „*Pothenot'sche Problem*“ genannt. Die Aufgabe ist oft behandelt und läßt verschiedene Lösungen zu⁵¹). Da beim Rückwärtseinschneiden lediglich durch Richtungsmessung nach drei gegebenen Punkten die Koordinaten des Standpunktes sich ergeben, so hat die Aufgabe für die Praxis der Kleintriangulierung große Bedeutung und findet weitgehende Anwendung. Eine der bei Anwendung im rechtwinkligen Koordinatensystem gebräuchlichsten Lösungen (vgl. die Lehrbücher) ist die folgende, mit Einführung eines Hilfswinkels⁵²) (Fig. 6): 1) Ableitung der Richtungswinkel (AM) und (BM),

50) *Jordan*, Handbuch 2, § 78; *O. Koll*, Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine, Halle 1903.

51) Historisches bei *G. D. E. Weyer*, Ann. d. Hydr. 10 (1882), p. 534; *J. D. van der Plaats*, Tijdschr. v. Kadaster en Landmeetkunde 5 (1889), p. 1; *Jordan*, Handbuch 2, Kap. VIII, §§ 79—84.

52) *J. C. Burckhardt*, Monatl. Korr. (v. *Zach'sche*) zur Beförd. d. Erd- und Himmelsk. 4 (1801), p. 360; *F. W. Bessel*, ibid. 27 (1813), p. 222, 566; *Delambre* in *Cagnoli-Chombré*, Trigonométrie, Paris 1808, p. 211 und Vorrede p. VIII. Historisches bei *Hammer*, Trigonometrie, p. 558 Anmerk. 58; Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 598.

sowie der Längen der Linien $AM = a$, $BM = b$ aus den Koordinaten.
 2) In den Dreiecken AMP und BMP Ableitung der unbekanntem Winkel φ und ψ bei den Punkten A bzw. B aus

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}(\varphi - \psi), \quad \psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{2}(\varphi - \psi),$$

worin $\varphi + \psi$ bekannt ist und $\varphi - \psi$ aus

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{cotg}(45^\circ + \mu) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi),$$

berechnet wird; μ ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}.$$

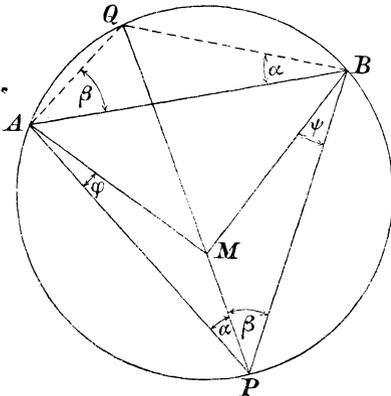


Fig. 6.

3) Danach lassen sich die übrigen Seiten und Winkel und damit die Richtungswinkel aller Linien nach P und die zugehörigen Koordinatenunterschiede (mit Probe) ableiten.

Eine andere Methode, welche zur Zeit z. B. bei der preußischen Katastervermessung (vgl. Anweisung IX) praktisch verwendet wird, gründet sich auf die von Collins⁵³⁾ gegebene Lösung. Der durch einen um ABP (Fig. 6) beschriebenen Kreis auf der Richtung MP abgeschnittene Punkt Q

(Collins' Hilfspunkt) ist seiner Lage nach im Dreieck ABQ bestimmt durch die Winkel α und β (als Peripheriewinkel über AQ bzw. BQ den gemessenen gleich), durch die er in Bezug auf die Punkte A und B „vorwärtseingeschnitten“ wird⁵⁴⁾. Damit ist der Richtungswinkel der Geraden PMQ bekannt und durch α und β die Richtungswinkel (AP) bzw. (BP) sowie die entsprechenden Entfernungen; zur numerischen Lösung dieser Ansätze kann, je nachdem Logarithmen- oder Maschinenrechnung stattfinden soll, das eine oder andere der bei „Vorwärtseinschnitten“ angegebenen Rechenverfahren verwendet werden.

Weitere Lösungen (Fig. 7) gehen von den durch AMP und BMP beschriebenen Bestimmungskreisen mit den Peripheriewinkeln α und β aus (wobei auch, wie schon von Snellius geschehen, die Kreismittelpunkte eingeführt werden können). In diesen Kreisen werden in den rechtwinkligen Dreiecken über MA bzw. MB und den beiden von

53) Lond. Phil. Trans. 6 (1671), p. 2093; 15 (1685), p. 1231.

54) Über die Verwandtschaft zwischen Vorwärts- und Rückwärtseinschnitten vgl. auch C. Runge, Zeitschr. f. Vermess. 28 (1899), p. 313.

M ausgehenden Kreisdurchmessern mit α und β (als Peripheriewinkel den gemessenen gleich) zwei Punkte A' bzw. B' „vorwärtseingeschnitten“, die eine beiden Kreisen gemeinschaftliche Sekante bestimmen, auf welcher P die Projektion von M darstellt. Auch hierbei können wieder die für logarithmische sowie die für Maschinenrechnung geeigneten Ansätze Verwendung finden⁵⁵⁾.

Die Lösungen versagen, sobald der Punkt P auf dem Kreise durch

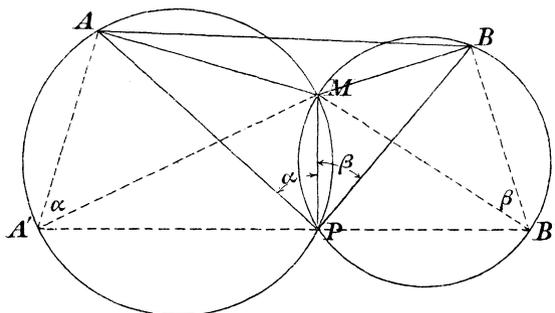


Fig. 7.

AMB liegt, sie geben unsichere Bestimmungen, wenn P diesem Kreise („gefährlicher Kreis“) nahe liegt; im Falle der ersten Lösung (p. 42) wird $\varphi + \psi \approx 180^\circ$, $\text{tg } \mu \approx 1$, im Falle der zweiten Lösung (*Collins*) bleibt die Richtung MQ unbestimmt, im Falle der dritten Lösung die Sekante $A'B'$. Wegen des weiteren über die Möglichkeit und Unmöglichkeit der Lösung, die Günstigkeit der Lage von P in Bezug auf AMB und besondere Fälle der Lösung, Praxis der Zahlenrechnung, Rechenformulare usw. muß auf die angegebene Literatur verwiesen werden.

10c. Einige andere Methoden der trigonometrischen Punkteinschaltung.

α) Aufgabe der unzugänglichen Entfernung, Aufgabe der zwei Punktepaare (*Hansen'sche Aufgabe*)⁵⁶⁾. Sind von einem Viereck $ABCD$

55) *W. G. Höckner*, Über die Einschaltung von Punkten in ein durch Koordinaten gegebenes Netz mit ausgiebiger Verwendung der Rechenmaschine, Leipzig 1891; *C. Runge*, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 204; *H. Sossna*, ebenda 25 (1896), p. 269, 471.

56) Historisches und Literatur bei *Hammer*, Trigonometrie, p. 332 Anmerk., p. 559 Anmerk. 61 und p. 562 Anmerk. 76; *Jordan*, Handbuch 2, p. 356. Über die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten vgl. man: *J. Bohnenberger-Pfleiderer*, Ebene Trigonometrie, Tübingen 1802, p. 217; *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 13 (1841), p. 165; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 603; *E. Doležal*, Berg- und Hüttenmännisches Jahrbuch (Leoben und Pribram) 1902, p. 183. Für

(Fig. 8) zwei Ecken A und B bekannt und sind außerdem vier unabhängige Winkel zwischen den vier Eckpunkten gemessen, so kann man die Lage der beiden unbekannt Ecken C und D bestimmen. Liegen die vier gemessenen Winkel $\alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \beta_4$ an der bekannten

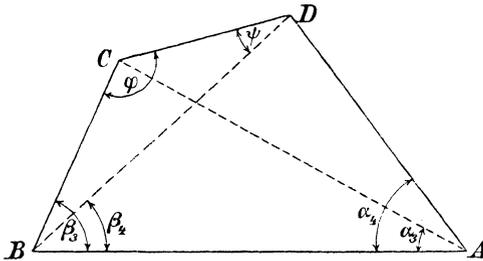


Fig. 8.

Entfernung AB und ist die Entfernung CD die Hauptunbekannte, so hat man die Aufgabe der unzugänglichen Entfernung. Hierbei handelt es sich um doppeltes Vorwärtseinschneiden und die Lösung kann daher auch nach den Formeln für Vorwärtseinschneiden erfolgen.

Liegen die gemessenen Winkel an der unbekannt Entfernung (die Aufgabe kann dann als doppeltes Rückwärtseinschneiden aufgefaßt werden), so liegt die Aufgabe der zwei Punktpaare vor (*Hansen'sche Aufgabe*). Es gibt eine Anzahl Auflösungen, die für beide Fälle gemeinsam gelten, z. B. die folgende, bei der wie beim Rückwärtseinschneiden ein Hilfswinkel eingeführt wird. Es gilt nach Fig. 8

$$\frac{CD}{AB} = \frac{\sin(\beta_3 - \beta_4) \sin \alpha_4}{\sin \varphi \sin(\beta_4 + \alpha_4)} = \frac{\sin(\beta_3 - \beta_4) \sin \alpha_3}{\sin \psi \sin(\beta_3 + \alpha_3)}, \quad \varphi + \psi = 180^\circ - (\beta_3 - \beta_4).$$

Von den unbekannt Winkeln φ und ψ ist also die Summe und das Verhältnis der Sinus bekannt. Setzt man daher:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin \alpha_3 \sin(\beta_4 + \alpha_4)}{\sin \alpha_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3)},$$

so wird

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \operatorname{cotg}(45^\circ + \mu) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi + \psi).$$

Damit sind die Winkel φ und ψ und folglich auch alle Winkel zwischen den vier Punkten bekannt. Ist nun irgend eine Entfernung zwischen den vier Punkten gegeben, so kann man offenbar jede andere mit Hilfe des Sinussatzes ausrechnen.

$\beta)$ *Der Gegenschnitt*⁵⁷⁾. Die von *Jordan* als Gegenschnitt bezeichnete Methode der Punkteinschaltung ist eine Verbindung von Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden. Gegeben sind drei Punkte

Lösung mit der Rechenmaschine vgl. *H. Sossna*, Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 361; 26 (1897), p. 649.

57) Vgl. *Jordan*, Handbuch 2, § 84, p. 363; *Hartner-Doležal* 1, p. 612; für Rechnung mit der Maschine *H. Sossna*, Zeitschr. f. Vermess. 31 (1902), p. 364, 429.

punkte beim einfachen Rückwärtseinschneiden entsprechenden Punkte P' , Q' heranziehen, deren Konstruktion aus der Figur ersichtlich ist.

Eine Abart des Rückwärtseinschneidens, bei der eine Längenmessung zwischen den Neupunkten erforderlich ist, ist von *W. Láska* ⁶⁰⁾

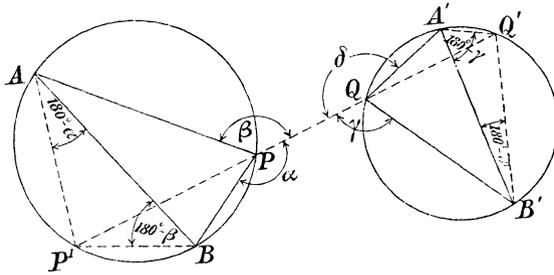


Fig. 11.

betrachtet. Gegeben sind (Fig. 12) die drei Festpunkte F_1, F_2, F_3 und auf drei Neupunkten N_1, N_2, N_3 die in der Figur bezeichneten

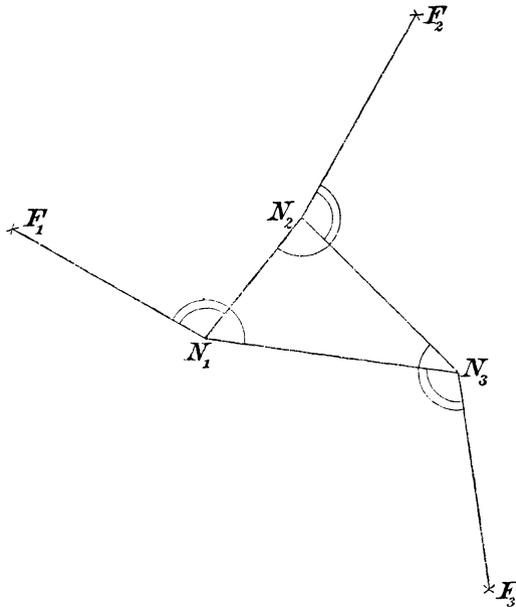


Fig. 12.

Winkel gemessen, von denen einer überschüssig ist; außerdem ist eine Seite des Dreiecks $N_1 N_2 N_3$ gemessen.

δ) *Lamber's Sechseck- und Achteckaufgabe.* Wir erwähnen noch

60) Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 565.

zwei Aufgaben von *J. H. Lambert*⁶¹⁾, obwohl sie, wenigstens für die Feld- und Landmessung, nur von geringer praktischer Bedeutung sind. Bei der Sechseckaufgabe (Fig. 13) sind entweder auf den Punkten *D, E, F* die Azimute von *A, B, C* bestimmt oder es sind die in Fig. 13 bezeichneten Winkel gemessen. Bei der Achteckaufgabe (Fig. 14) sind zwischen den acht Punkten *A, B, C, D, E, F, G, H* von den vier letzten Punkten aus die 12 in der Figur bezeichneten Winkel gemessen. Die beobachteten Winkel bestimmen die Gestalt des Sechs- resp. Achtecks. Man vgl. auch III 1, 3 (*M. Simon*).

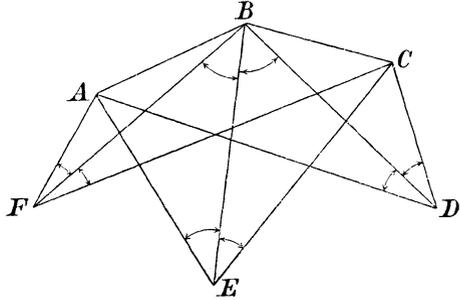


Fig. 13.

Da in der Vermessungstechnik stets überschüssige Bestimmungen notwendig sind, dienen die vorstehenden Bestimmungen hauptsächlich dazu, als Grundlage für die nachfolgende Ausgleichung „genäherte Koordinaten“ der zu berechnenden Punkte zu liefern. Die Genauigkeit der Punktbestimmung in den beim „Vorwärts“- „Seitwärts“- und „Rückwärts“-Einschneiden sich ergebenden Figuren ist von *Helmert* und *Jordan* untersucht⁶²⁾.

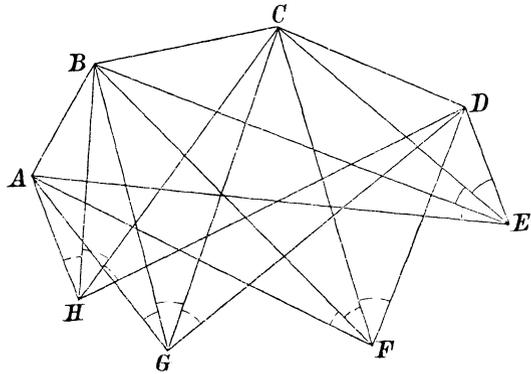


Fig. 14.

11. Ausgleichung von Kleintriangulierungen.

Die Ausgleichung der stets mit einer Anzahl überschüssiger Richtungen oder Winkel oder gegebener Punkte erfolgenden trigonome-

61) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung 1, Berlin 1765, p. 72, 77, 81, 186.

62) *Helmert*, Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 73; *Jordan*, ibid. 16 (1871), p. 397; vgl. auch *Helmert*, Ausgleichungsrechnung, p. 231; *Jordan*, Handbuch 1, 2. Aufl. 1877, Kap. III; 3. Aufl., Kap. V.

trischen Punktbestimmungen kann nach der Methode der „bedingten“ oder der „vermittelnden“ Beobachtungen (vgl. I D 2 (*J. Bauschinger*), p. 768) vorgenommen werden, und zwar sowohl für unabhängige Kleintriangulierungen mit eigener Grundlinie als für Einschaltungstriangulierungen. Die Auswahl des Verfahrens wird, wenn nicht besondere Umstände zu beachten sind, mit Rücksicht auf den schnellsten und glattesten Rechnungsgang getroffen. Bei einfach gegliederten Systemen, wobei also mit möglichst wenig Linien viele Punkte verbunden sind, ist im allgemeinen die Methode der „bedingten Beobachtungen“ günstiger, bei Systemen mit vielen überschüssigen Richtungen und wenigen Punkten die Methode der „vermittelnden Beobachtungen“; dementsprechend kommt die erstere mehr für die übergeordneten Systeme, die letztere mehr für die untergeordneten Einschaltungen in Betracht, wobei auch der übersichtlichere „Schematismus“ von Wert ist.

11a. Methode der vermittelnden Beobachtungen. (Vgl. I D 2, p. 786.) Als Unbekannte werden betrachtet die Koordinaten y, x der zu bestimmenden Punkte und bei Stationsrichtungssystemen (vgl. p. 38, 39) deren „Orientierungen“ z , sodaß also die unabhängigen Winkel bzw. die Richtungen als Funktionen der Punktkoordinaten erscheinen. Diese werden zunächst angenähert berechnet und dann ihre Verbesserungen dx, dy durch die Ausgleichung ermittelt. Als lineare Fehlergleichung ergibt sich für den vorliegenden Fall mit $\operatorname{tg} \varphi_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (worin φ_{12} die auf 1 nach 2 genommene Richtung, $y_1 x_1, y_2 x_2$ die unbekanntenen Punktkoordinaten sind):

$$v = l + a \cdot dx_1 + b \cdot dy_1 + c \cdot dx_2 + d \cdot dy_2 + dz,$$

in der dz die Orientierungsverbesserung bedeutet. Die „Richtungskoeffizienten“ a, b, c, d bestimmen sich nach der Beziehung zwischen den „Richtungsänderungen“ und den „Koordinatenänderungen“; es ist

$$d\varphi_{12} = + \frac{\sin \varphi_{12}}{s} \rho dx_1 - \frac{\cos \varphi_{12}}{s} \rho dy_1 - \frac{\sin \varphi_{12}}{s} \rho dx_2 + \frac{\cos \varphi_{12}}{s} \rho dy_2.$$

Diese Koeffizienten werden auch in der Form

$$\frac{y_2 - y_1}{s^2} \rho dx \text{ bzw. } \frac{x_2 - x_1}{s^2} \rho dy$$

gebraucht; zu ihrer Berechnung dienen verschiedene Hilfsmittel, Rechenschieber, numerische und graphische Tafeln, oder auch logarithmische Differenzen der trigonometrischen Funktionen⁶³). Ist einer der beiden

⁶³) *Jordan*, Handbuch 1, Anhang p. [8]—[17]; *O. Seiffert*, Logarithmische Hilfstafel zur Berechnung der Fehlergleichungskoeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate, Halle 1892; *J. H. Franke*, Koordinatenausgleichung

Punkte 1—2 gegeben, so fallen die entsprechenden Glieder aus; für eine Richtung am „gegebenen Standpunkt“ 1 zum „Neupunkt“ 2 (sog. „äußere Richtung“) ist

$$d\varphi_{12} = -\frac{\sin \varphi_{12}}{s} \rho dx_2 + \frac{\cos \varphi_{12}}{s} \rho dy_2;$$

für eine auf einem „Neupunkt“ 1 nach dem „gegebenen Zielpunkt“ 2 (sog. „innere Richtung“) ist

$$d\varphi_{12} = +\frac{\sin \varphi_{12}}{s} \rho dx_1 - \frac{\cos \varphi_{12}}{s} \rho dy_1;$$

für die zur „Orientierung“ von Systemen zwischen gegebenen Punkten beobachteten Richtungen fallen alle Richtungskoeffizienten fort. Die Fehlergleichungen für den Fall der Messung unabhängiger Winkel (z. B. bei Anwendung des Repetitionstheodolits) ergeben sich mit den Differenzen der zugehörigen Richtungskoeffizienten. Für jede beobachtete Richtung (bezw. Winkel) wird ihre Fehlergleichung angesetzt. Z. B. bei der Bestimmung eines Punktes durch ein System auf ihm nach gegebenen Punkten beobachteter Richtungen (Rückwärtseinschneiden) ist die Form der Fehlergleichungen

$$v = ax + by + dz + l;$$

hierin bedeuten die l die Abweichungen der beobachteten Richtungen gegen die mit „genäherten“ Koordinaten berechneten. Vielfach werden die zugehörigen Normalgleichungen gleich so gebildet, daß die Orientierungsverbesserung dz eliminiert ist. Sind n Fehlergleichungen vorhanden, so ersetzt man entweder in den Fehlergleichungen die Koeffizienten a und b durch $a - \frac{[a]}{n}$ und $b - \frac{[b]}{n}$ (reduzierte Form der Fehlergleichungen) oder, was noch zweckmäßiger ist, man fügt (nach *O. Schreiber*) die fingierte Fehlergleichung:

$$v_{n+1} = [a] dx + [b] dy$$

mit dem Gewicht $-\frac{1}{n}$ hinzu. Man braucht sich dann um dz nicht mehr zu kümmern.

Ist ein Punkt durch Richtungssysteme bestimmt, die auf mehreren gegebenen Punkten nach gegebenen und dem Neupunkte beobachtet sind (Vorwärtseinschneiden), so ist für jeden Standpunkt das System der Fehlergleichungen aufzustellen, welches dann, falls nur ein Neupunkt vorhanden ist, ebenfalls auf eine einzige Gleichung von der Form

nach Näherungsmethoden, München 1884, p. 133; *O. Eggert*, Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten, entworfen von *Fr. Kreisel*, Berlin 1903; *E. Engel*, Österr. Zeitschr. f. Vermess. 1 (1903), p. 101; Rechenschieber von *W. Voigt*, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 183

$$v = a dx + b dy + l$$

mit dem Gewicht $\frac{m}{m+1}$ reduziert werden kann, wo m die Anzahl der auf dem betreffenden Standpunkt nach gegebenen Festpunkten beobachteten Richtungen ist. Bei der Punktbestimmung durch äußere und innere Richtungen („vereintes Einschneiden“) ergeben sich demnach Fehlergleichungen beider Art. In der Praxis der Kleintriangulierung handelt es sich in der Regel nur um die Einschaltung eines einzelnen Punktes, also um zwei bzw. drei Unbekannte, y , x , bzw. z . Bei gleichzeitiger Ausgleichung mehrerer Punkte in einem geschlossenen Netz oder Netzteilen (Punktgruppen aus zwei, drei und mehr Punkten bestehend) ergeben sich dazu noch die Fehlergleichungen in der oben angeführten Form zwischen je zwei Neupunkten. Die aus den Fehlergleichungen gebildeten Normalgleichungen werden nach dem Gaußschen Verfahren (vielfach mit Benutzung der Probe nach der Summengleichung I D 2, p. 790) aufgelöst. Zur Bildung der Faktoren der Normalgleichungen und deren Auflösung ist für die meisten Aufgaben der Kleintriangulierung der Rechenschieber als ausreichend zu erachten⁶⁴). Die Ableitung des „mittleren Fehlers der Gewichtseinheit“ (Richtung oder Winkel) aus der Fehlerquadratsumme $[pvv]$ bzw. $[vv]$ nach der allgemeinen Gleichung $\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}$ (worin n die Anzahl aller eingeführten Beobachtungen, u die Anzahl der unabhängigen Unbekannten bedeutet) sowie die Ableitung der „Gewichtskoeffizienten“ (I D 2, p. 788) zur Berechnung des mittleren Fehlers der Unbekannten bildet den Schluß der Ausgleichung⁶⁴).

11b. Graphische Punktausgleichung. Statt Ausgleichung nach „vermittelnden Beobachtungen“ wird auch wohl graphische Koordinatenausgleichung in einer „fehlerzeigenden Figur“, „Schnittfigur“, angewendet. Die allgemeine Bedeutung derartiger Näherungsmethoden ist bereits p. 16 erwähnt worden. Die Aufgabe besteht darin, A) die fehlerzeigende Figur darzustellen, B) in derselben die endgültige Punktlage so zu bestimmen, daß möglichst die Quadratsumme der Richtungsverbesserungen, wie bei der Methode der kleinsten Quadrate, ein Minimum wird. Für die „Konstruktion der fehlerzeigenden Figur“ liegt der einfachste Fall vor bei der Punktbestimmung durch Vorwärtseinschneiden mittels unabhängiger „äußerer“ (p. 49) Richtungen. Wird (auf Grund genäherter Koordinaten) in der Nähe des gesuchten Punkt-

64) Über die Anordnung der Rechnungen, die Rechenschemata, besondere Hilfsmittel, die Rechenproben usw. vgl. die Lehrbücher, speziell Jordan, Handbuch 1, Kap. III.

ortes ein Wert y_0x_0 angenommen, so liefert eine von einem gegebenen Punkt ausgehende Richtung φ zwei Schnitte mit den Geraden $x = x_0$, $y = y_0$ oder ihnen naheliegenden ($\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0 - y_n}{x_0 - x_n}$), deren Verzeichnung (in großem Maßstab 1 : 1, 1 : 10) die Richtung darstellt. Wird die Richtung φ selbst im Punkt y_0x_0 mit dem Auftragkreis (Transporteur) eingetragen, so genügt ein Achsenschnitt. Es können auch die Abweichungen zwischen den „genäherten“ Richtungen und den beobachteten, $\delta = n - \varphi$ (l der Fehlergleichungen p. 48) zur Auftragung benutzt werden, indem die den δ entsprechenden Querverschiebungen $q = \frac{\delta''}{\rho''} s$ vom genäherten Punktort aus rechtwinklig zu den von hier aus gezeichneten Richtungslinien aufgetragen, oder ihre auf die Achsen y_0, x_0 bezogenen Projektionen zur Konstruktion verwendet werden. Beim „vereinten“ Einschneiden orientiert man kurzerhand die „inneren“ Richtungen durch die „äußeren“ und führt die Aufzeichnung dadurch auf das Frühere zurück. Für Rückwärtseinschnitte ist diese Konstruktion nach Orientieren der Richtungen mit Hilfe der genäherten Koordinaten nicht korrekt, jedoch praktisch anwendbar. Man kann auch die Schnittlinien als Tangenten der mit den gemessenen Winkeln sich ergebenden Kreise (Peripheriewinkel zu den gegebenen Seiten als Sehnen) darstellen⁶⁵). Eine andere Methode auf Grund von „Transformationen nach reziproken Radien“ ist von *C. Runge* mitgeteilt⁶⁶). Ein älteres Verfahren ist das von *Tulla* angegebene (sogen. badisches Ausgleichungsverfahren)⁶⁷). Die Ableitung der endgültigen Punktlage in der Schnittfigur geschieht entweder durch einfache Schätzung oder auf analytischem Wege. Die erstere, welche mit einer plausiblen mittleren Punktlage sich begnügt, ist für die praktische Anwendung als bequemes Näherungsverfahren ausreichend (p. 16). Die Aufgabe lautet: Gegeben sind in einer Ebene n Linien R ; es ist der Punkt P so zu bestimmen, daß unter Berücksichtigung der Gewichte p für die Abstände h die Bedingung $[p h h] = \text{Min.}$ erfüllt wird. Eine erste sehr elegante Lösung rührt von *H. Bertot*⁶⁸) her⁶⁹).

65) *Jordan*, Handbuch 2, § 85; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 611.

66) Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 581.

67) Vgl. *F. G. Gauß*, Rechnungen der Feldmeßkunst, p. 53 und speziell p. 60, erste Anmerk.

68) Paris C. R. 82 (1876), p. 682.

69) Man vgl. auch *C. F. Gauß*, Werke 9, p. 221. Weiteres über Bedeutung und Behandlung der Aufgabe in der niederen Geodäsie siehe bei *Jordan*, Handbuch 2, Kap. VIII, § 85, 86; *Vogler*, Prakt. Geom. 1, § 164; *F. G. Gauß*,

Einen neuen Vorschlag mit Anwendung eines dynamischen Ausgleichsprinzips macht *Fischer*⁷⁰⁾ dadurch, daß elastische, das Richtungssystem darstellende Stäbchen zur Bestimmung des die Gleichgewichtslage im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate ausdrückenden Punktes verwendet werden.

11c. Methode der bedingten Beobachtungen. Die Anwendung dieser Methode mit Korrelatengleichungen (ID 2, p. 794) auf die Triangulierungsausgleichung, von *C. F. Gauß*⁷¹⁾ begründet, erfordert zunächst die Aufstellung der unabhängigen Bedingungen, welche das Netz bietet. Hierzu sind von *C. F. Gauß* die Regeln gegeben und von *Ch. L. Gerling*⁷²⁾ mitgeteilt worden. Es kommen Bedingungen verschiedener Art in Betracht; „*Stationsbedingungen*“ (Bedingungen I. Klasse nach *Gerling*), welche sich für jede Station nach der Art der Beobachtung ergeben und bei vorher erfolgter „*Stationsausgleichung*“ (vgl. p. 38) in Wegfall kommen; „*Winkelsummenbedingungen*“ (Bedingungen II. Klasse, Polygonbedingungen), welche aus den Figuren, die das Netz darbietet, folgen, also in einfachster Form Dreiecks-, ev. Viereckssummen usw.; „*Seitenbedingungen*“ (Bedingungen III. Klasse), welche aus dem Zusammenschluß der Linienverhältnisse sich ergeben. Z. B. für ein Viereck mit einem Zentralpunkt, wobei über den Vierecksseiten mit dem Zentralpunkt als Spitze 4 Dreiecke und 6 unabhängige Bedingungen entstehen, hat für unabhängige Winkelmessung die Stationsbedingungs-gleichung des Zentralpunktes die Form $a + b + c + d = 360^\circ$, die Winkelsummenbedingung für die 4 Dreieckssummen die Form $a + b + c = 180^\circ$, die Seitenbedingung die Form (Fig. 15)

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_4}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4} = 1.$$

Nach der allgemeinen Form der Bedingungs-gleichungen

Rechnungen der Feldmeßkunst, Abschn. V; *F. R. Helmert*, Zeitschr. f. Vermess. 6 (1877), p. 53; *Genge*, Vierteljahrschrift Zürich 1886, p. 268; *M. d'Ocagne*, Paris C. R. 114 (1892), p. 1415; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 21 (1892), p. 618; *Klingatsch*, Die graphische Ausgleichung, Wien 1894; *E. Puller*, Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 553; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896), p. 611; *Weixler*, Mittel. d. militär-geograph. Inst. Wien 16 (1896), p. 143; *C. Runge*, Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 581; *Komel*, Österr. Zeitschr. f. Vermess. 1 (1903), p. 173; *Polzer*, *ibid.*, p. 205. In Österreich wird das *Horsky'sche* Diagramm benutzt, vgl. dazu *Hartner-Doležal* 1, p. 795.

70) *Fischer*, Zeitschr. f. Vermess. 28 (1899), p. 553, 655.

71) Supplementum theoriae combinationis etc., Comm. recent. Gotting. 6 (1828) = Werke 4, p. 55.

72) Ausgleichungsrechnungen d. prakt. Geom., 4. Abschnitt (sowie Beiträge zur Geographie Kurhessens, Kassel 1831/39).

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n + w_1 = 0$$

ergeben sich dementsprechend die „Koeffizienten“. Diese sind bei der logarithmisch angesetzten Seitengleichung entweder unmittelbar den Tafeln zu entnehmende logarithmische Differenzen oder nach der Formel $\frac{M}{\varrho} \cotg \alpha$ zu berechnen, da

$$\frac{d \log \sin \alpha}{\varrho d \alpha} = \frac{M}{\varrho} \cotg \alpha$$

ist, unter M den Modul der gewöhnlichen Logarithmen verstanden. Aus den aufgestellten Korrelatengleichungen

$$v = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \cdots$$

und den Normalgleichungen (I D 2, p. 795) ergeben sich die Korrelaten und damit die den Beobachtungen beizulegenden Verbesserungen⁷³⁾. Das Ergebnis der Ausgleichung sind demnach widerspruchlos sich zu einem einheitlichen System zusammensetzende Winkel bzw. Richtungen, aus denen die Koordinaten der Neupunkte auf verschiedenen Wegen in Übereinstimmung sich ergeben müssen. (Probe.) Die Fehlerberechnung gründet sich auf den mittleren Fehler der Gewichtseinheit, der bei r Bedingungen den Wert:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{r}}$$

hat. In besonderen Fällen des Netzanschlusses kommt auch die Methode der „vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen“ (I D 2, p. 792) in Betracht. Bei untergeordneten Messungen werden wohl Näherungsausgleichungen angewendet, wobei zunächst die Winkelbedingungen für sich behandelt werden und erste Winkelverbesserungen ergeben, und danach die Seitenbedingungen, welche dann zur endgültigen Verbesserung dienen⁷³⁾.

11d. Die Genauigkeit der Kleintriangulierungen wird beurteilt nach dem mittleren „Richtungs“- bzw. „Winkelfehler“, wobei zu unterscheiden ist der sich unmittelbar aus den Stationsbeobachtungen ergebende Messungsfehler und der aus der Netzausgleichung folgende (Rücksicht auf die Länge der Richtungslinien). Der letztere Fehler ist stets größer als der erstere (Anschlußzwang und Zentrierfehler usw.).

73) Über die von *C. F. Gauß* angewendete Methode gibt Bd. 9 der Werke Aufschluß. Ferner vgl. *L. Krüger*, Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen, Potsdam 1905. Weiteres über Aufstellung der Bedingungsgleichungen, Rechenschemata usw. geben die Lehrbücher, bes. *Jordan*, Handbuch 1, Kap. II.

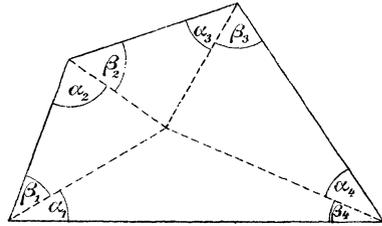


Fig. 15.

Die Genauigkeit der Kleintriangulierungen wird amtlich reguliert durch „Fehlergrenzen“ (Max.-Fehler rund der dreifache Betrag des „mittleren Fehlers“) für den nach der Netzausgleichung sich ergebenden Richtungsfehler; z. B. gilt für die preußischen Kleintriangulierungen nach Anweisung IX als Fehlergrenze für die verschiedenen Stufen 15'', 25'' (für trigonometrisch bestimmte Polygonnetzpunkte 35''), was rund $\frac{1}{10000}$ Max.-Abweichung entspricht. Der mittlere relative Längenfehler der Kleintriangulierungen der preußischen Landesaufnahme⁷⁴⁾ übersteigt nicht $\pm \frac{1}{35000}$. Einen übersichtlichen Genauigkeitsausdruck liefert auch der auf Grund des aus der Ausgleichung gefundenen Richtungsfehlers als Funktion desselben berechnete „mittlere Koordinatenfehler“, und der hiernach bzw. direkt als Funktion der ausgeglichenen Elemente gewonnene „Entfernungsfehler“⁷⁵⁾. Die Fehlerellipse (I D 2, p. 796), welche den Punktfehler in allgemeinsten Fassung gibt, wird als Fehlerausdruck nur in besonderen Fällen verwendet⁷⁶⁾, dagegen der nach $m_p = \sqrt{m_y^2 + m_x^2}$ gebildete „mittlere Punktortfehler“ oft angegeben. Auch die Dreiecksschlußfehler w , welche ein Dreiecksnetz liefert, werden als Genauigkeitsmaß verwendet, welches besonderen Wert dadurch hat, daß es vom Anschlußzwang frei ist; der „mittlere Winkelfehler“ ist bei n Dreiecksabschlüssen näherungsweise

$$m_w = \pm \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}.$$

Als Genauigkeitsangabe sei angeführt, daß für mehrere neuere Stadttriangulierungen mit zusammen 1745 Punkten und der mittleren Strahlenlänge 2,4 km der mittlere Richtungsfehler im Netz gleich $\pm 3''$, der mittlere Punktfehler gleich ± 17 mm gefunden ist. Als ein Beispiel für die mit einfachen Hilfsmitteln unter größeren Verhältnissen zu erreichende Genauigkeit kann auch eine von der preußischen Katasterverwaltung ausgeführte größere Verbindungstriangulation genannt werden⁷⁷⁾.

12. Polygonzugmessung.

Polygonisierung ist die geometrische Punktbestimmung in gebrochenen Linienzügen durch Messung der Horizontalwinkel auf den „Brechungspunkten“ („Brechungswinkel“, „Polygonwinkel“) mit dem

74) v. Schmidt, Zeitschr. f. Vermess. 23 (1894), p. 387.

75) Jordan, Handbuch 1, Kap. II, III.

76) Helmert, Ausgleichsrechnung, p. 231; Jordan, Handbuch 1, 2. Aufl., Kap. III; 3. Aufl. Kap. V.

77) C. Reinherz, Die Verbindungstriangulation zwischen der Triangulation im Kohlenrevier und dem Rhein. Dreiecksnetz, Stuttgart 1888.

Theodolit und der Entfernungen (Strecken, Polygonseiten) von Punkt zu Punkt mit Längenmeßwerkzeugen oder durch indirekte Entfernungsmessung (vgl. p. 85). Die große Bedeutung des Polygonzuges erklärt sich daraus, daß er äußerst schmiegsam ist und sich allen Verhältnissen anpassen läßt; er folgt den Straßen, Eisenbahnen, Bächen, Waldwegen, Schluchten, den Stollen im Gruben- und Tunnelbau usw. Die Polygonisierung liefert insbesondere bei den Spezialvermessungen das auf Kleintriangulierung gegründete, in rechtwinkligen Koordinaten auszudrückende Liniensystem, welches als Unterlage für die Kleinmessungen verschiedener Art erforderlich ist. Die Punktabstände können je nach der vorliegenden Aufgabe mehrere hundert Meter betragen oder aber auf ganz kurze Entfernungen herabgehen. Ein System mehrerer Züge ergibt das „Polygonnetz“, wobei die Züge die gegebenen trigonometrischen Punkte unmittelbar verbinden („Hauptzüge“) oder bereits bestimmte Polygonpunkte („Nebenzüge“ in verschiedenen Stufen). Die Vermessung einer Stadt z. B. macht in den Straßen zahlreiche Züge in verschiedenen Stufen erforderlich. Polygonzüge ohne Koordinaten- bzw. Richtungsanschluß kommen nur in ganz besonderen Fällen oder für kleine Nebenmessungen zur Anwendung; bei geschlossenen Polygonen werden stets sämtliche Bestimmungsstücke (Winkel und Seiten) ev. indirekt gemessen⁷⁸⁾. Werden nicht die Brechungswinkel mit dem Theodoliten, sondern für jede einzelne Strecke die magnetischen Azimute mit der Bussole (Kompaß) bestimmt, so entsteht der „Bussolen-(Kompaß-)zug“. Wird der Zug mit dem Tachymeter und dabei die Entfernungen durch Distanzmessung (vgl. p. 85) gewonnen, so entsteht der „tachymetrische Polygonzug“.

12a. Der Theodolitpolygonzug. Gegeben sind die Koordinaten der Abschlußpunkte P_a und P_e und auf jedem derselben mindestens ein gegebener Richtungswinkel zu einem Zielpunkt N_a bzw. N_e ; gemessen sind sämtliche Strecken s und sämtliche Brechungswinkel β (im Sinne rechtsläufiger Zählung) einschließlich der Anschlußwinkel auf P_a und P_e zwischen der anliegenden Polygonseite und N_a bzw. N_e . Für irgend eine Strecke des Zuges ergibt sich dann durch „Übertragung“ mittels der gemessenen Winkel von der je vorhergehenden Richtung aus der Richtungswinkel z. B. $n_{45} = n_{34} + \beta_4 \pm 180^\circ$ und die zugehörigen Koordinatenunterschiede sind entsprechend $\Delta y = s \sin n$, $\Delta x = s \cos n$,

78) Über die Bedeutung und Behandlung der Vielecksaufgaben vgl. *Nell*, Zeitschr. f. Vermess. 22 (1893), p. 489; *E. Puller*, ibid. 23 (1894), p. 257; vgl. auch *Hammer*, Trigonometrie § 40–43.

womit die beim Abschluß auftretenden Bedingungen sind $N_e = N_\alpha \pm z180^\circ + [\beta]$; $Y_e = Y_\alpha + [\Delta y]$, $X_e = X_\alpha + [\Delta x]$, für die bestimmte „Fehlergrenzen“ innezuhalten sind. Die Berechnung geschieht in einem geeigneten Schema mit Logarithmen, „Koordinatentafeln“ für $s \cdot \sin n$, $s \cdot \cos n$ oder der Rechenmaschine⁷⁹⁾.

Die Genauigkeit der Längenmessung ist p. 21 erwähnt, dem noch die Bemerkung zuzufügen ist, daß im System von Kleinmessungen die Genauigkeit im Polygonnetz derjenigen der nachfolgenden Linienaufnahme übergeordnet sein muß. Zur Winkelmessung dienen kleine oder mittlere Theodolite (vgl. p. 23). Von besonderer Bedeutung sind die mechanischen Fehler des Verfahrens, die Zentrierung von Theodolit und Signal (Fluchtstab, Signalscheibe, beim Markscheiden und im Tunnel Lichtsignale), weshalb bei scharfen Messungen besondere Hilfsmittel (optische Abloter, festes Lot, bei Grubenmessungen⁸⁰⁾ Steckhülsen usw.) verwendet werden. Ist e die Exzentrizität der Aufstellung des Instrumentes, e' und e'' die der Signale für einen gestreckten Winkel mit den Seiten a und b , so ist der bei quer zur Zugrichtung angesetzten Exzentrizitäten hieraus entstehende Fehler des Winkels⁸¹⁾

$$\pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{ab} e \varrho\right)^2 + \left(\frac{e'}{a} \varrho\right)^2 + \left(\frac{e''}{b} \varrho\right)^2},$$

der sich mit dem reinen Messungsfehler verbindet. Die Gleichung des mittleren Richtungsfehlers für die r te Richtung in einem abgeschlossenen Zuge von n Winkeln $M = m \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}}$ zeigt, wie der Richtungsfehler zur Zugmitte wächst. Für den auf den unmittelbaren Winkel Fehlern m beruhenden linearen Querverschiebungsfehler am Ende eines geradlinigen Zuges mit n gleichlangen Seiten s gilt

$$q = \sqrt{(nsm)^2 + ((n-1)sm)^2 + \dots + (2sm)^2 + (1 \cdot sm)^2}$$

oder $= m \sqrt{\frac{L^3}{3s}}$, welcher sich beim Richtungsabschluß entsprechend reduziert⁸¹⁾. Die erwähnten für die Theorie des Polygonzuges

79) Über Rechenhilfsmittel vgl. die Lehrbücher, z. B. *Hartner-Doležal* 1, p. 619; *Jordan*, Handbuch 2, p. 268. Daraus u. a. *C. F. Defert*, Tafeln zur Berechnung rechtwinkliger Koordinaten, Berlin 1874; *E. Lüling*, Math. Tafeln für Markscheider und Bergingenieure, 4. Aufl., Berlin 1898; *Gurden*, Traverse Tables, London 1888. Man hat ferner besondere Rechenschieber und Apparate für die Koordinatenrechnung konstruiert; vgl. z. B. *Ch. Lallemand*, Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 233 und *Hartner-Doležal* 1, p. 625, wo ein Koordinatometer nach *Friedrich* beschrieben wird.

80) Vgl. die Lehrbücher der Markscheidekunde.

81) *Jordan*, Handbuch 2, § 97 und § 100—103.

wesentlichen Formeln zeigen, daß die Polygonseiten möglichst lang, oder z. B. bei gegebenem trigonometrischen Punktabstand möglichst wenig Zwischenpunkte genommen werden sollen, wobei aber andererseits zu bedenken ist, daß der Polygonzug so angelegt werden muß, daß die untergeordneten Liniennetze bequem angeschlossen werden können.

Die strenge Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate hat in praktischer Hinsicht wegen der Unsicherheit der Gewichtsverhältnisse für die Längen- und Winkelmessung Schwierigkeiten (vgl. die Lehrbücher), es finden daher in der Regel numerische oder auch graphische⁸²⁾ Näherungsverfahren Anwendung (ein einfaches, meist angewendetes Verbesserungsverfahren ist gleichmäßige Verteilung des Richtungsabschlußfehlers auf die Winkel und danach Verteilung des linearen Koordinatenabschlußfehlers je proportional den Seitenlängen). Die Aufgabe kann auch als Koordinatenumwandlung mit kleiner Achsenabweichung und Maßstabreduktion aufgefaßt werden (vgl. p. 34). Die *Genauigkeit* der Polygonzugmessung wird ausgedrückt durch den aus dem Richtungsabschlußfehler β sich ergebenden mittleren Winkelfehler $\frac{f_{\beta}}{\sqrt{n}}$, welcher unabhängig ist von der Einführung des Längenmaßes, sowie durch die Koordinatenabschlußfehler f_y, f_x , oder deren Projektion auf die Zugrichtung als „Längenfehler“ $\frac{[\Delta y]f_y + [\Delta x]f_x}{S}$ und „Querfehler“ $\frac{[\Delta x]f_y - [\Delta y]f_x}{S}$ ($S =$ Zuglänge). Hierfür sind in den Vermessungsanweisungen amtliche Fehlergrenzen festgesetzt. Zahlreiche Genauigkeitsbestimmungen⁸³⁾ haben mittlere Winkelfehler zwischen 15'' bis 5'' ergeben; in den meisten Fällen begnügt man sich mit 15'' bis 30''.

Besonders zu erwähnen bleibt noch der Anschluß von Zügen an unzugängliche Dreieckspunkte, besonders Kirchtürme, sowie die Überwindung von Geländehindernissen (Flüsse usw.). Hierzu sind trigonometrische Hilfsmessungen erforderlich, sodaß z. B. für einen Turmanschluß die fehlenden Abschlußstücke (Linien und Winkel) sich indirekt ergeben. (Vgl. die Lehrbücher.) Werden mehrere Züge zu einem an gegebene Punkte anschließenden Netz zusammengefaßt („Knotennetz“), so entsteht eine Ausgleichungsaufgabe, welche nach „vermittelnden“ oder „bedingten“ Beobachtungen behandelt werden kann, und im Fall nur ein Knotenpunkt vorliegt (der weitaus häufigste

82) Ein neueres graphisches Verfahren gibt *Klingatsch*, Zeitschr. f. Vermess. 29 (1900), p. 540 (vgl. auch 30 (1901), p. 335).

83) Zeitschr. f. Vermess., Literaturübersichten und *Jordan*, Handbuch 2, Kap. IX.

Fall), auf die Ausgleichung „direkter“ Beobachtungen (I D 2, p. 782) nach dem Prinzip des „allgemeinen arithmetischen Mittels“ führt.

12b. Der Bussolen-(Kompaß)-zug findet vielfache Anwendung bei tachymetrischen und topographischen Aufnahmen (p. 90), bei Waldvermessungen, und besonders Grubenaufnahmen (hierbei auch mit sehr kurzen Strecken, Schnüren), Routenaufnahmen und nautischen Vermessungen (mit sehr langen Strecken). Bei engbegrenzten Aufnahmen werden oft die magnetischen Meridianrichtungen unmittelbar als Abscissenachsen genommen, bei Anschluß an trigonometrische Netze die Abweichungen der magnetischen Richtungen von den trigonometrischen Abscissenrichtungen durch Beobachtung bekannter trigonometrischer Linien gefunden, bei ausgedehnten Aufnahmen ohne trigonometrischen Anschluß die absoluten magnetischen Deklinationen durch Vergleichen der magnetischen Richtungen mit bekannten oder besonders (vielfach zu dem Zweck nur genähert) bestimmten absoluten Azimuten ermittelt, oder aber auch aus den allgemeinen Deklinationsbestimmungen entnommen (z. B. *Neumayer's* Karten). Von der Berücksichtigung der täglichen Variation wird bei der Feldmessung in der Regel abgesehen, bei Grubenaufnahmen, Orientierungsmessung, beim Markscheiden je nach den Umständen darauf Rücksicht genommen, wobei dann im gegebenen Fall korrespondierende Variationsbeobachtungen in Betracht kommen. Bei Kleinaufnahmen im Felde wird der Einfluß der Variation ohnehin durch die wiederholten trigonometrischen Anschlüsse genügend eliminiert.

Die Genauigkeit der unmittelbaren magnetischen Richtungsangaben durch das Instrument schwankt bei Bussoleninstrumenten etwa zwischen einigen Minuten bis zu einigen Zehntel Grad, je nach der Einrichtung und Größe des Instrumentes, beim Freihandgebrauch ist der Fehler entsprechend größer (einige Grad)⁸⁴). Da im Kompaßzug jede Richtung unabhängig bestimmt wird, ist das Fehlergesetz ein anderes als im Theodolitzug, und zwar ist der Querfehler für einen Zug mit n gleichlangen Strecken $q = \pm m_{\alpha s} \sqrt{n}$. Der Vergleich mit der entsprechenden Fehlerformel des Theodolitzuges p. 56 zeigt, daß die Fehlerfortpflanzung im Kompaßzug erheblich günstiger ist als im Theodolitzug, und im Gegensatz zu diesem möglichst kurze Strecken, d. h. häufige Messungen verlangt; sie erklärt, daß grob erscheinende Messungen mit kleinen Bussolen, wie z. B. tachymetrische

84) Wegen der verschiedenen Einrichtung, der Einteilung (gewöhnlich in Grad, bei Grubenkompassen auch Stunden), der Prüfung der zur Anwendung kommenden Instrumente, Feldbussolen, Markscheiderbussolen vgl. die geodätischen Lehrbücher, sowie die speziellen Lehrbücher der Markscheidekunde.

Kleinzüge, Markscheidezüge mit dem „Hängezeug“ (Kreisbussole im doppelten Hängering schwebend), Itinerarzüge auf Forschungsreisen verhältnismäßig gute Resultate zu geben vermögen. Wegen Berechnung und Fehlerverteilung sowie Auftragung der Züge sehe man die Lehrbücher nach.

13. Einzelaufnahme. Bei den exakten Kleinvermessungen („Grundstückaufnahme“ sog. „Stückvermessung“) erfolgt die Aufnahme der Einzelheiten (Grenzsteine, Gebäude, Wege usw.) durch unmittelbare Längenmessung auf Grund eines Systems von stufenweise sich aufeinander stützenden und bei umfangreichen Aufnahmen („Katastervermessungen“) auf Triangulierung und Polygonisierung gegründeten Linien, dem sog. „Liniennetz“. Für die Punkte, in welchen eine untergeordnete Linie in eine übergeordnete mündet („Liniennetz-“, „Binde-“, „Klein“-Punkt) werden auf Grund der Längenmessung (p. 19) Koordinaten berechnet. Verbindet eine gerade Linie die gegebenen Punkte P_a und P_e (Fig. 16) und sind die Streckenunterschiede s_n , so rechnet man nach

$$y_n - y_{n-1} = \Delta y_n = s_n \frac{y_e - y_a}{[s]}, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n = s_n \frac{x_e - x_a}{[s]},$$

sodaß durch Ansatz der gemessenen Streckensumme $[s]$ die Fehler der Längenmessung proportional den gemessenen Strecken s_n auf die Koordinatenunterschiede verteilt werden (vgl. auch Koordinatenumformung p. 34)⁸⁵). Der Abschlußfehler muß innerhalb der für die Längenmessung festgesetzten „Fehlergrenzen“ (p. 21) bleiben. *Bei dieser Anordnung der Messungen erfolgt somit eine fortgesetzte Verteilung bzw. Ausgleichung der Messungsfehler und Beurteilung der Genauigkeit von der Triangulierung ausgehend, über die Polygonisierung bis herab zur Kleinaufnahme.* Da die Messungen der Landestriangulierungen auf die Normalnullfläche (Meeresspiegel) (p. 9) projiziert werden, ergibt demnach dies Interpolationsverfahren auch die Projektion sämtlicher Linien und der durch sie gebildeten Figuren. Zur Sicherung der Lage jeder Linie dienen besondere Messungsproben, Querlinien, Anschnitte, Verlängerungen usw., welche rechnerisch oder graphisch ausgewertet werden (z. B. Probe auf Geradlinigkeit aus den Richtungstangenten oder der Fläche des gestreckten Fehlerdreiecks). Die Methode der kleinsten Quadrate wird

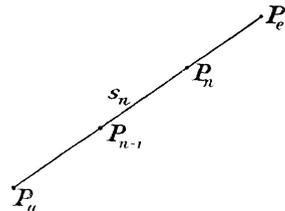


Fig. 16.

Da die Messungen der Landestriangulierungen auf die Normalnullfläche (Meeresspiegel) (p. 9) projiziert werden, ergibt demnach dies Interpolationsverfahren auch die Projektion sämtlicher Linien und der durch sie gebildeten Figuren. Zur Sicherung der Lage jeder Linie dienen besondere Messungsproben, Querlinien, Anschnitte, Verlängerungen usw., welche rechnerisch oder graphisch ausgewertet werden (z. B. Probe auf Geradlinigkeit aus den Richtungstangenten oder der Fläche des gestreckten Fehlerdreiecks). Die Methode der kleinsten Quadrate wird

⁸⁵) Anweisung IX, p. 28 und Trigonometrie, Formular 23, p. 335.

zur Ausgleichung von Linienmessungen nur selten benutzt; sie ist in Anweisung IX bei der Bestimmung wichtiger Punkte durch mehrfachen Bogenschnitt angewandt⁸⁵). Bei der Aufmessung kleiner Komplexe, bei welchen weder Anschluß an übergeordnete Systeme noch Winkelmessung stattfinden soll, wird oft ein Viereck, dessen Diagonalen gemessen sind (Diagonalenviereck), verwendet, wobei durch den Schnittpunkt sich eine Probe ergibt. Die Anordnung und Berechnung solcher Messungen ist besonders von *F. G. Gauß*⁸⁶) behandelt.

Auf ein derartiges in sich gesichertes Liniennetz gründet sich die „*Einzelaufnahme*“ entweder dadurch, daß die aufzunehmenden Punkte oder Linien (Grundstücksgrenzen, Gebäudefluchten usw.) als untergeordnete Linien in das bestehende Netz eingefügt werden, oder daß die Punkte durch Absteckung rechter Winkel auf die nahe an sie herangelegten Netzlinien projiziert werden, sog. „*Koordinatenaufnahme*“. In jedem Falle können für alle Punkte Koordinaten berechnet werden, im letzteren Falle durch Transformation der einzelnen Messungslinien mit den rechtwinklig zu ihnen aufgemessenen Abständen in das allgemeine System. (Die Koordinatenberechnung bleibt meistens auf einen Teil der wesentlichsten Punkte, Grenzen von „*Fluren*“, „*Gewannen*“ und sonstige wichtige Messungspunkte beschränkt.)

Die Instrumente zum Abstecken rechter Winkel sind das uralte „*Winkelkreuz*“ (groma, in neuerer Form als „*Winkelkopf*“, „*Winkeltrommel*“) und die Reflexionsinstrumente „*Winkelspiegel*“ und „*Winkelprisma*“. Beim „*Winkelspiegel*“, welcher aus zwei kleinen Spiegeln besteht, werden im Kreuzungspunkt doppelt reflektierter Strahlen Winkel vom doppelten Betrage des Spiegelwinkels (45°) gebildet, sodaß, wenn bei vertikalen Spiegelflächen eine direkte Zielung mit einem reflektierten Bilde in Deckung erscheint, der gewünschte Horizontalwinkel gleich einem rechten Winkel abgesteckt ist. Ein „*Winkelprisma*“ ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Glasprisma, in welchem, wie *Bauernfeind* 1851 gefunden hat, doppelt reflektierte Strahlen (an der Kathete infolge von Totalreflexion) im Kreuzungspunkt mit einer direkten Zielung einen rechten Winkel bilden⁸⁷). Diese doppelt reflektierten Strahlen sind unabhängig vom Einfallswinkel und dadurch von den einfach reflektierten zu unterscheiden⁸⁸).

86) Wegen der Ausführung der Rechnung (Logarithmen, Rechenmaschine usw.), Rechenschemata usw. vgl. die Lehrbücher, speziell *F. G. Gauß*, *Rechnungen der Feldmeßkunst*.

87) Vgl. die verschiedenen Lehrbücher der Geodäsie, besonders *Bauernfeind*, *Vermessungskunde*.

88) Es sind eine Reihe weiterer Prismen konstruiert, unter denen ein

Werden zwei „Winkelspiegel“ oder zwei sich unter 90° kreuzende Spiegel zusammengesetzt, so erhält man das „Spiegelkreuz“, ebenso das „Prismenkreuz“ (in verschiedener Form), womit gestreckte Winkel, d. h. gerade Linien abgesteckt werden können. Die Richtigkeit der Instrumente wird durch Absteckung von zwei Seiten aus geprüft, wonach Spiegelinstrumente und Prismenkreuze gegebenenfalls zu berichtigen sind. Die Genauigkeit der Absteckung beträgt rund $1'$ bis $2'$.⁸⁹⁾ Weiteres über die Instrumente und ihren Gebrauch bei Aufnahmen und zu verschiedenen Absteckungsaufgaben geben alle Lehrbücher der Geodäsie.

Die „geometrische Karte“, der „Lageplan“, ist eine entsprechend verkleinerte Darstellung des auf den Vermessungshorizont (N. N.) projizierten Punkt- bzw. Liniensystems, hergestellt auf Grund des der Berechnung zu Grunde liegenden rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Grundlage bildet das Koordinatennetz (sog. „Quadratnetz“), in welches die Koordinaten der berechneten Punkte (Dreiecks-, Polygon- und Liniennetzpunkte) eingetragen werden, womit das „Liniennetz“ konstruiert ist, welches als Unterlage für die Eintragung der weiteren (im sog. „Handriß“ oder „Feldriß“ aufgeschriebenen) Aufmessungen dient. Zum Auftragen der Koordinaten sowie der nach der „Koordinatenmethode“ aufgemessenen Punkte dient ein Auftragapparat (Koordinatograph), bestehend aus Abscissenlineal und Ordinatenschieber. Der „Maßstab“ von Spezialkarten liegt im allgemeinen zwischen $1 : 500$ bis $1 : 5000$, sehr häufig gebraucht wird $1 : 1000$ und $1 : 2000$. (Zurzeit werden die hundertteiligen Maßstabverhältnisse bevorzugt.) Der nicht zu vermeidende „Papiereingang“ wird durch Kontrollierung der Quadratnetzlinien ermittelt und danach reduziert⁹⁰⁾. Weiteres über die geometrische Kartierung geben die geodätischen Lehrbücher, für die „Grubenaufnahme“ (Grubenrisse) die Lehrbücher der Markscheidekunde.

14. Berechnung und Teilung der Flächen.

14a. Die Flächenberechnung. Die Berechnung des „Flächeninhaltes“ vermessener Flächen kann erfolgen aus den Messungszahlen, aus

fünfeitiges Prisma von *L. Prandl* erwähnt sei, *Zeitschr. f. Vermess.* 19 (1890), p. 462.

⁸⁹⁾ *F. Lorber*, *Zeitschr. f. Instr.* 8 (1888), p. 381; eine Fehlertheorie des Winkelpriemas findet man bei *Jordan*, *Handbuch* 2, p. 36.

⁹⁰⁾ Über die bei ausgedehnten Gebieten in Frage kommenden Projektionsverzerrungen sei auf *Jordan*, *Handbuch* 3, § 59 und auf VI 1, 4 (*R. Bourgeois*) verwiesen.

den Koordinaten der Eckpunkte, graphisch auf Grundlage der Karte, oder auch durch eine Verbindung von Messungszahlen und Kartenmaßen. Die Berechnung der geradlinig begrenzten Figuren geometrischer Aufnahmen gründet sich auf die einfachsten Sätze der Planimetrie, wobei auch graphische Verwandlung⁹¹⁾ von Figuren (Vielecke in Vier- bzw. Dreiecke) in Betracht kommt. Für in Koordinaten gegebene oder auch direkt nach der Koordinatenmethode aufgemessene Figuren wird z. B. (bei rechtläufiger Zählung) gebraucht

$$2F = \Sigma y_n(x_{n-1} - x_{n+1}) = \Sigma x_n(-y_{n-1} + y_{n+1});$$

zur Ausrechnung dienen in der Regel Multiplikationstafeln oder Rechenmaschinen (IF (*R. Mehmke*), p. 944); wegen Anordnung, Rechen-schemata usw. siehe die Lehrbücher. Die Ableitung der Flächen von Vielecken aus Seiten und Winkeln überhaupt (vgl. III 1, 3 (*M. Simon*)) wird selten verwendet, da, wie oben auseinander gesetzt, die Winkelmessung in der Regel nur zur Netzlegung, nicht aber zur Kleinaufnahme dient, falls das geschieht, aber ohnehin Koordinatenberechnung eintritt. Bei der Flächenermittlung nach Plänen wird für regelmäßige Figuren entweder Dreiecks- bzw. Viereckszerlegung verwendet, wobei verschiedene Hilfsmittel gebraucht werden, z. B. eine mit feinen Quadratnetzlinien versehene Glastafel, sowie eine transparente Hyperbeltafel von *Kloth*⁹²⁾. Haben die im Flächenprodukt F zu vereinigenden Faktoren a und b die mittleren Fehler m_a bzw. m_b , so ist $M_F = \pm \sqrt{(am_b)^2 + (bm_a)^2}$, woraus sich mit Rücksicht auf Messungs-, Kartenfehler usw. verschiedene Folgerungen ergeben⁹²⁾. Ein bequemes Näherungsverfahren zur Berechnung namentlich langgestreckter unregelmäßig begrenzter Figuren liefert das „Parallelenetz“ („Harfe“, „Fadenplanimeter“), womit sich die Fläche als Summe schmaler Trapezstreifen ergibt zu $F = k[p]$, (p = Trapezmittellinien mit Zirkeladdition erhalten, oder mit der oben erwähnten Glastafel abgelesen). Dies kann für gekrümmte Umfangslinien auch zur Anwendung der *Simpson'schen* Flächenformel führen. Im übrigen ist auf die Lehrbücher zu verweisen. In ausgedehntem Maße finden die „*Planimeter*“ (*Polar-, Präzisions-, Scheiben-, Kugelrollplanimeter* vgl. II A 2 (*A. Voß*), p. 128) Anwendung, deren Genauigkeit in mittlerem relativen Flächenfehler etwa zu $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{1000}$ angenommen und bei den Präzisionsinstrumenten bis zu $\frac{1}{2000}$ und sogar $\frac{1}{5000}$ gesteigert werden kann. Die Flächenberechnung bei der Vermessung

91) *E. Collignon*, Ann. des ponts et chauss. 1887, p. 9.

92) *Jordan*, Handbuch 2, Kap. III und Zeitschr. f. Vermess. 21 (1892), p. 628 (22 (1893), p. 60, 338); 32 (1903), p. 686; *J. Schnöckel*, ibid. p. 129 und 369.

zusammenhängender größerer Gebiete (ganze Gemarkungen, Fluren usw.) stellt zunächst den „Sollinhalt“ für ein Kartenblatt (Flur, Block usw.) aus den Koordinaten des das Blatt umrahmenden Liniennetzes fest, worauf die Berechnung der Einzelflächen folgt, welche auf den ermittelten „Sollbetrag“ ausgeglichen werden. Für alle diese Berechnungen sind entsprechende „Fehlergrenzen“ innezuhalten, welche gemäß der Genauigkeit der Flächenberechnung unter Berücksichtigung der Messungs- und Kartierungsfehler, des Kartenmaßstabes usw. aufgestellt sind; für die preußischen Kleinmessungen gilt z. B. nach Anweisung VIII als amtliche Fehlergrenze $0,01 \sqrt{60 F} + 0,02 F^2$ für F in qm.

14b. Die Flächenteilung. Bei der Teilung (Veränderung, Umlegung) vermessener Flächen handelt es sich darum, rechnerisch oder graphisch auf Grund eines Planes die den gerade vorliegenden praktischen Bedingungen entsprechenden Einteilungs- oder Begrenzungslinien zu bestimmen und im Anschluß an die Messungsergebnisse oder den Plan diese Linien im Gelände abzustecken, und schließlich die Richtigkeit und Genauigkeit der Absteckung zu prüfen. Das Verfahren gründet sich auf die Teilung geradlinig begrenzter einfacher Figuren, welche entweder im Plan, oder durch Koordinaten der Eckpunkte, oder durch Messungszahlen im Handriß, auch Seiten und Winkel, gegeben sein können. Die planimetrische Theorie dieser Teilungen behandeln die Lehrbücher der Elementarmathematik, die hauptsächlich technisch in Betracht kommenden Anwendungen die Lehrbücher der Geodäsie; die rechnerische Lösung auf Grund von Koordinaten ist besonders von *F. G. Gauß* entwickelt⁹³).

Die Aufgaben lassen sich im allgemeinen zurückführen auf die, von einem durch zwei sich schneidende Linien gegebenen Winkelraum (Dreiecksraum) oder einem durch drei Linien umgrenzten an einer Seite offenen Doppelwinkelraum (Vierecksraum) bestimmte Flächenstücke unter bestimmten Bedingungen abzuschneiden. Diese Bedingungen werden in der Vermessungstechnik durch verschiedenartige Umstände vorgeschrieben; die wesentlichsten mathematisch in Betracht kommenden sind: 1) Die abzusteckende Trennungslinie soll durch einen gegebenen Punkt gehen, der in den meisten Fällen auf einer der gegebenen Umgrenzungslinien liegt; 2) die Trennungslinie soll eine bestimmte Richtung haben, z. B. parallel oder

93) *F. G. Gauß*, Die Teilung der Grundstücke, 4. Aufl., Berlin 1904. Die Literatur zu zahlreichen besonderen Fällen ist in den jährlichen Literaturübersichten der Zeitschr. f. Vermess. angegeben.

rechtwinklig zu einer gegebenen Linie, in manchen Fällen zu einer der Umgrenzungslinien; 3) die durch die Trennungslinie abgeschnittenen Liniestücke der Urfigur sollen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen (sog. „Proportionalteilung“). Für die einfache Dreiecksteilung ergibt sich danach z. B. folgende Übersicht. Vom Dreieck U (Fig. 17) mit den Seiten A, B, C soll von der gegenüber A liegenden Ecke aus ein Flächenstück f durch Liniestücke b, c abgeschnitten werden, sodaß wird $\frac{b}{B} = m, \frac{c}{C} = n$, und demnach $k = \frac{f}{U} = \frac{b}{B} \cdot \frac{c}{C} = m \cdot n$. Das gibt für den Fall 1), wenn Punkt P auf C durch c gegeben ist, das gesuchte $m = \frac{k}{n}, b = mB$; für Fall 2), wenn z. B. die Trennungslinie parallel A sein soll, $m = n = \sqrt{k}$, usw. Entsprechend gestaltet sich die Vierecksteilung, wobei noch besonders hinzuweisen ist auf die auf

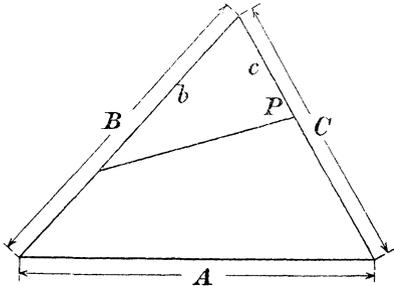


Fig. 17.

quadratische Gleichungen führende Parallel- und Proportionalteilungen, welche verschiedene Lösungen zulassen⁹⁴). Die richtige Absteckung wird schließlich durch Aufmessung und Flächenberechnung der abgesteckten Figuren innerhalb der erwähnten Fehlergrenzen sichergestellt. Im übrigen ist zu bemerken, daß in den verwickelten Fällen der Praxis sehr viel Annäherungsverfahren zur Anwendung kommen derart, daß die Bedingung für die Lage der Teilungslinie (z. B. parallel oder rechtwinklig zu einer bestimmten Linie) vorweg genau erfüllt wird und die Flächenbedingung zunächst nur genähert, sodaß dann nach erfolgter Flächenberechnung noch kleine Verschiebungen der Linie unter Berücksichtigung der Lagebedingung auszuführen bleiben, die dann auf die Absteckung eines schmalen Dreiecks, Paralleltrapezes usw. herauskommen. Derartige Annäherungsverfahren können auf Grund eines „Handrisses“ oder auch direkt im Felde vollständig rechnerisch durchgeführt werden. Die gleiche Aufgabe liegt vor bei der sog. „Grenzbegradigung“, wobei es sich darum handelt, einen gebrochenen Grenzzug bei unveränderter

Flächengröße der Figuren durch eine gerade Linie zu ersetzen. Muß

94) Über einige besondere Behandlungen vgl. Zeitschr. f. Vermess. 13 (1884), p. 277; 14 (1885), p. 289; 15 (1886), p. 465; 23 (1894), p. 321; 24 (1895), p. 80, 383; 27 (1898), p. 490; 30 (1901), p. 159; 31 (1902), p. 317, 477; 32 (1903), p. 378; 33 (1904), p. 97, 121, 124; ferner die „Allgemeinen Vermessungsnachrichten“, Liebenwerda, und andere Fachzeitschriften.

bei den Teilungen der verschiedenartige Wert der Flächen (Bonität) in Rücksicht gezogen werden, so gehen die danach bestimmten Flächenwerte in die Rechnung ein⁹⁵⁾.

15. Das Abstecken von geraden Linien und Kreisbogen. Das Abstecken (Ausrichten) von geraden Linien im Gelände (Vertikalebene) erfolgt auf kurze Entfernungen, falls nicht besondere Genauigkeit erforderlich ist, mit Fluchtstäben (Baken) nach freiem Auge oder mit Anwendung eines Handfernrohres (Feldstecher) durch „Einweisen“ oder auch mit Winkel- oder Prismenkreuz (vgl. p. 61). Bei genauen Absteckungen, langen Linien usw. wird der Theodolit oder ein besonders in der Vertikalebene richtig kippendes Fernrohr (Alignementsfernrohr) verwendet, mit festem Stand auf einem Endpunkt oder fortschreitender Standänderung von Linienpunkt zu Linienpunkt. Für sehr lange Linien werden auch indirekt Zwischenpunkte abgesteckt, indem in der Nähe der Linie ein Hilfspunkt angenommen wird, der kleine Abweichungswinkel von der Geraden mit dem Theodolit gemessen und mit Hilfe der ebenfalls bestimmten Entfernung die Verschiebung des Hilfspunktes berechnet wird. Ist eine direkte Zielung zwischen den Linienendpunkten nicht möglich, wie z. B. bei der Achsenbestimmung für große Tunnel, so wird der Absteckung eine Triangulierung zu Grunde gelegt, die den Winkel zwischen Achsenrichtung und gegebenen trigonometrischen Linien (Miren) ergibt, wonach im Tunnel mit dem Alignementsfernrohr mit fortschreitender Standänderung die Linienpunkte gewonnen werden. Die Fehlertheorie dieser Absteckungen entspricht der des gestreckten Polygonzuges (vgl. p. 56)⁹⁵⁾. Über kleine Absteckungen mit Winkelspiegel, Rechtecke, Quadratnetze, Parallelenabsteckung usw. s. die geodätischen Lehrbücher.

Das Abstecken von Kreisbogen wird beim Bau von Straßen, Kanälen, insbesondere Eisenbahnen erforderlich. Durch das Projekt ist in der Regel gegeben die Richtung zweier sich schneidender Geraden (Tangenten), welche durch einen Kreisbogen mit ebenfalls durch die Bedingungen des Projekts vorgeschriebenem Radius zu verbinden sind; seltener ist eine Tangente an einen oder mehrere Bogen zu legen. Verlangt wird, daß in kurzen Abständen Bogenpunkte im Gelände abgesteckt werden. Die Bestimmungsstücke sind demnach: die beiden

95) Beispiele für Linien- und Tunnelabsteckungen gibt *Jordan*, Handbuch 2, § 195, 205 mit weiterer Literatur, ferner *Hartner-Doležal* 2, p. 447 u. 448. Für den Gotthardtunnel z. B. *C. Koppe*, Zeitschr. f. Vermess. 2 (1873), p. 369; 5 (1876), p. 86; für den Simplontunnel *M. Rosenmund*, *ibid.* 32 (1903), p. 74.

„Tangentenrichtungen“, der von ihnen eingeschlossene Winkel, der Radius, in besonderen Fällen ein bestimmter Kurvenpunkt, oder auch zwei Punkte (Sehne). Erforderlich ist daher in der Regel zuerst Messung des Tangentenschnittwinkels mit dem Theodolit. Danach ergibt sich dann zunächst als Gerippe der weiteren Absteckungen (sog. Hauptpunkte, Hauptlinien) die durch Abmessung auf den Tangenten zu findenden Berührungspunkte (ev. deren Verbindungslinie) und durch die rechtwinkligen Abstände bzw. durch Halbierung des Schnittwinkels die Bogenmitte (Proben). Neben diesem einfachen Fall wird häufig die Absteckung weiterer Hauptlinien erforderlich, d. h. ein den Bogen einschließendes Tangentenpolygon („Zwischentangenten“ als Fortführung des einfachen Falls) oder ein eingeschriebenes „Sehnenpolygon“. Die zugehörigen Teilzentriwinkel ergeben sich entweder durch aliquote Einteilung des ganzen Zentriwinkels (bestimmt durch die Hauptberührungspunkte) oder durch Berechnung der zu bestimmten (runden) Bogen-, Tangenten-, oder Sehnenlängen gehörenden Winkel. Die Methode des Sehnenpolygons, d. h. also die Herstellung eines der Kurve eingeschriebenen Polygonzuges mit bestimmten (ev. konstanten) Brechungswinkeln und Seiten, ist die in der Regel bei der Absteckung von Kurventunneln verwendete Methode. Kann im „Tangentenschnittpunkt“ der Theodolit nicht aufgestellt werden, ist dieser Punkt überhaupt nicht herstellbar, sowie auch Längenmessung in den Tangentenrichtungen nicht ausführbar, so müssen die Bestimmungselemente auf indirektem Wege beschafft werden (z. B. sehr oft bei Kehrtunneln). Die wesentlichsten Fälle sind: Verbindung der Tangenten durch eine meßbare gerade Linie und Messung der anliegenden Winkel, wodurch das abgeschnittene Dreieck bestimmt ist, oder Einführung eines Polygonzuges (möglichst wenig Zwischenpunkte) oder endlich Triangulierung mit Ausgleichung; in solchen Fällen wird auch Berechnung der Absteckungselemente nach rechtwinkligen Koordinaten verwendet.

Auf die Absteckung des Gerippes der Hauptlinien gründet sich diejenige der „*Einzelbogenpunkte*“, welche in der einfachsten Weise durch rechtwinklige Koordinaten (sog. „*Koordinatenmethode*“) von der Tangente oder Sehne aus mit „Winkelspiegel“ usw. sich ergeben, und zwar entweder mit gleichen runden Abständen (5, 10, . . . m) auf Tangente bzw. Sehne, oder mit gleichen Bogenlängen (5, 10, . . . m).

Neben dieser unmittelbar auf die Hauptlinien gegründeten „*Koordinatenmethode*“ kommen noch einige andere Verfahren in Betracht. Eine Methode (Fig. 18) ist die der „*Peripheriewinkelstrahlen*“ aus „*festem Stand*“, wobei mit fortgesetzter Abtragung einer kon-

stanten Sehne (z. B. 20 m) die zugehörigen Zentriwinkelvielfachen von der Tangentenrichtung aus mit dem Theodolit hergestellt

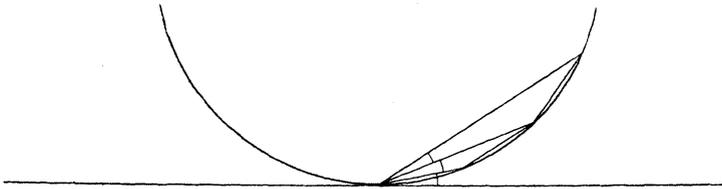


Fig. 18.

werden oder runde Winkel angetragen werden. Eine andere Methode ist (Fig. 19): Aufsuchen der Bogenpunkte mittelst der zu einer bestimmten Sehne gehörigen Peripheriewinkel bei „wanderndem

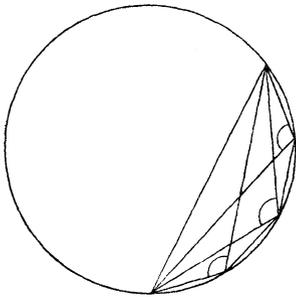


Fig. 19.

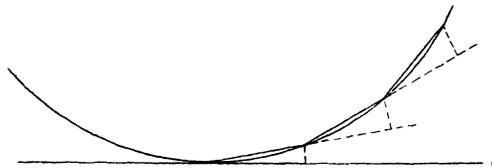


Fig. 20.

Stand“ eines diesen Winkel fassenden „Freihandreflexionsinstrumentes“, welches wie ein einstellbarer Winkelspiegel oder ein Doppelpisma nach Art des Sextanten usw. auf diesen berechneten Winkel einstellbar ist (Arkograph).

Weitere „Einrückungsverfahren“ sind die sog. Absteckung von der „verlängerten Sehne“ und von der „verlängerten Tangente“ aus, wobei ein Meßband (20 m) bequem

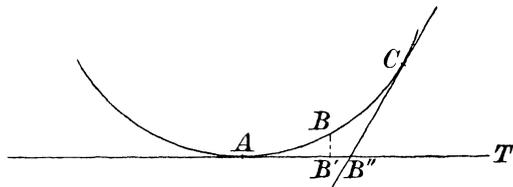


Fig. 21.

verwendbar ist. Bei ersterem (Fig. 20) wird die erste Sehne von der Tangente aus mit den hierfür (meistens für runde Bogenlängen) berechneten rechtwinkligen Koordinaten abgesteckt, diese Sehne verlängert und von ihr aus die nächste Sehne durch die auf erstere bezogenen rechtwinkligen Koordinaten abgesetzt, wonach die Arbeit

in gleicher Weise fortschreiten kann. Beim zweiten Verfahren (Fig. 21) werden in ähnlicher Weise von der Tangente AT aus in rechtwinkligen Koordinaten zwei gleichabständige Kurvenpunkte B und C berechnet und abgesteckt, sodaß die nächstfolgende im zweiten Punkt berührende Tangente durch diesen zweiten Bogenpunkt C und den Abstand des Tangentenschnittpunktes B' vom Ord

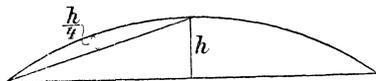


Fig. 22.

natenfußpunkt B' des ersten Bogenpunktes bestimmt ist, womit die fortgesetzte Absteckung der Tangenten mittels rechtwinkliger Bogenpunktkoordinaten ermöglicht ist. Auch die Einschaltung von Zwischenpunkten über gegebenen Sehnen durch fortgesetzte Einlegung von Zwischensehnen mittels des Pfeilhöhenviertels (sog. „Viertelsmethode“, Fig. 22) wird als Näherungsmethode für flache Bogen angewendet⁹⁶).

Ein besonderer Fall ist die Verbindung zweier Tangenten durch mehrere Kreiskurven vorgeschriebener Krümmung, sog. „Korbbogen“, welche notwendig werden, wenn den Bedingungen des Projektes nicht mit einem einzigen Bogen entsprochen werden kann. Z. B.: Gegeben die Tangentenrichtungen und auf einer Tangente der Berührungspunkt und zwei Radien, sodaß zu berechnen ist der Berührungspunkt auf der zweiten Tangente, sowie die gemeinschaftliche Tangente beider Bogen; oder gegeben die Richtungen der beiden Tangenten, ihre Berührungspunkte und ein Radius, sodaß der andere Radius und die gemeinschaftliche Tangente zu bestimmen sind. In manchen Fällen werden auch mehr als zwei Radien erforderlich, z. B. gegeben die beiden Tangentenrichtungen, die Berührungspunkte und drei Radien. Die Bogen sind bestimmt, sobald ihre Zentriwinkel berechnet sind⁹⁷). Bei der Absteckung der Eisenbahnlinien sind zwischen Geraden und Bogen zur Überleitung von der Krümmung Null zur Krümmung des Kreisbogens „Übergangskurven“ erforderlich. Die Absteckung anderer als Kreisbogen, der Kegelschnitte oder anderer Kurven, kommt bis jetzt allgemein nicht in Betracht⁹⁸). Für die praktische Durchführung der Absteckungen werden stets Hilfstabellen verwendet⁹⁹) (oft

96) Über die Anordnung der Rechnungen und Messungen sowie über weitere Aufgaben vgl. die Lehrbücher, z. B. *Jordan*, Handbuch 2, Kap. XVII und *Hartner-Doležal* 2, § 28—31.

97) *E. Puller*, Zeitschr. f. Vermess. 21 (1892), p. 519; 23 (1894), p. 257; *E. Hammer*, ibid. 29 (1900), p. 236 (vgl. Literaturübersichten).

98) *Hecht*, Hand- und Hilfsbuch zum Abstecken von Eisenbahn- und Straßenkurven mit besonderer Rücksicht auf die Verwertung der Kegelschnitte, Dresden 1893.

99) *Sarrazin* und *Oberbeck*, Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen

auch in Taschenkalendern enthalten), worin z. B. enthalten sind zum Radius 1 (bezw. 100) als Funktionen der Zentriwinkel: Tangentenlängen, Bogenlängen, Sehnenlängen, Pfeilhöhen, Scheitelabstände; ferner Kreiskoordinaten, Peripheriewinkel usw.

Wegen weiterer Literatur sei verwiesen auf die Angaben in den Lehrbüchern¹⁰⁰⁾, sowie die technischen Zeitschriften, z. B. auch die Literaturübersichten der Zeitschr. für Vermessungswesen.

Als eine besondere bei „Grubenmessungen“ vorkommende Aufgabe sei noch genannt die Übertragung oberirdisch („über Tage“) gegebener Punkte bezw. Richtungen in die Grubenräume („unter Tage“) und umgekehrt, die sogenannte „Orientierungsmessung“ mit „Schachtlotung“. Da Richtungsübertragung mit dem Kompaß (Deklinatorium, Magnetometer) nur in unmagnetischem Gebirge möglich und nicht in allen Fällen genügend genau ist, handelt es sich dann darum, zwei oder auch mehrere Punkte zu projizieren, entweder beide in kurzem Abstand in einem Schacht oder je einer in benachbarten Schächten. Hierzu dient entweder direkte Ablotung mit „Schachtloten“ (Methode der schwingenden oder der fixierten Lote) oder optische Ablotung mit Lotfernrohr; letzteres Verfahren ist jedoch wegen Undurchsichtigkeit der Luft in den Schächten vielfach unanwendbar. Nach Projektion von zwei Punkten ist die Aufgabe auf eine besondere Art trigonometrischen bezw. polygonometrischen Anschlusses (p. 57) zurückgeführt¹⁰¹⁾.

D. Höhenmessung.

16. Das Nivellieren.

16a. Definition des Höhenunterschiedes, Historisches. Die Methode der Höhenbestimmung beim sogenannten „Nivellieren“ mit Verwendung wagerechter Ziellinien und lotrechter Skalen (vgl. p. 12) folgt unmittelbar aus der für die Vertikalebene zweier Punkte gegebenen Definition. Der Abstand der als parallel zur Normalnullfläche betrachteten Horizonte zweier Punkte P_1 und P_2 (in den Lotlinien gemessen) ist der „Höheunterschied“ der Punkte mit der Definition $\Delta h_{12} = h_2 - h_1$. Diese Höhenunterschiede werden durch kurze wage-

usw., Berlin; *Knoll*, Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Straßen- und Eisenbahnen, 2. Aufl. von *Weitbrecht*, Stuttgart 1902 und andere.

100) *Jordan*, Handbuch 2, p. 842; *Hartner-Doležal* 2, p. 447.

101) Weiteres über die Schachtlotungen und Anschlußmessungen geben die Lehrbücher der Markscheidkunde; man vgl. auch „Mitteilungen aus dem Markscheidewesen“, Freiberg i. S.

rechte Ziellinien zwischen den Lotlinien einander naheliegender Punkte unmittelbar hergestellt. Schneiden diese Ziellinien an den Lotlinien in P_1 und P_2 die Stücke l_1 und l_2 ab, so ist $\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = l_1 - l_2$, oder mit Einführung des Horizontes h_i der wagerechten Ziellinie („Instrumenthorizont“) $h_i = h_1 + l_1$; $h_2 = h_i - l_2$. Hierbei ist von der Konvergenz der Lotlinien abgesehen, oder aber die Abweichung durch Anwendung gleichlanger Ziellinien als eliminiert betrachtet („Nivellieren aus der Mitte“). Der Höhenunterschied entfernter Punkte ergibt sich als die Summe der zugehörigen Einzelunterschiede

$$h_{ae} = \Delta h_{a1} + \Delta h_{12} + \dots + \Delta h_{ne}.$$

Wird die wagerechte Linie durch ein mit einer Setzwage (Bleiwage oder Setzlibelle) wagerecht zu richtendes „Richtscheid“ gebildet und an einem lotrechten Stab der Höhenunterschied entnommen, so hat man die grobe Höhenbestimmung mit dem „Staffelzeug“, angewendet z. B. bei Erdbauten (vgl. Nr. 16e). Zur Herstellung wagerechter Ziellinien mit Einwinken einer Scheibe in die wagerechte Sicht an den lotrechten Stäben l_n in P_n diente schon im Altertum die an einem Stab aufgehängte „Bleiwage“ sowie die nach dem Prinzip der kommunizierenden Röhren zwei der Wagerechten angehörende Zielpunkte darbietende „Kanalwage“¹⁰²). Nach Erfindung des „Zielfernrohres“ wurden seit Ende des 17. Jahrhunderts mehrfach Versuche gemacht, dieses zum „Fernrohrniveau“ auszubilden; erst seit Beginn des 19. Jahrhunderts wurde die heutige Form als „Nivellierinstrument“ gefunden und besonders seit der Zeit der ersten Eisenbahnbauten das heutige Nivellierverfahren mit dem Nivellierinstrument zu der exaktesten aller Höhenmessungsmethoden ausgebildet.

16b. Der Nivellierapparat besteht aus dem „Nivellierinstrument“ und den „Nivellierlatten“. Das Nivellierinstrument ist eine Verbindung von Zielfernrohr und Libelle, so daß, wenn die Blase der mit dem Fernrohr in gleicher Richtungsebene befindlichen Libelle auf den Normalpunkt einspielt, die Absehnlinie des Fernrohres horizontal gerichtet ist, oder auch kleine Abweichungen von der Horizontalen durch Ablesen der Blasenstellung in der Libellenteilung gemessen werden können. Die Art der Verbindung von Libelle und Fernrohr untereinander sowie mit dem als Träger derselben erforderlichen Unterbau (in der Regel ein „Dreifuß“ mit Stellschrauben) kann verschieden sein; das wesentlichste Unterscheidungsmerkmal ist die Art der Fernrohrlagerung und der Libellenanordnung, ob Fernrohr und

102) Über einige ältere Formen dieser Vorrichtung und weitere Literatur vgl. Vogler, Prakt. Geom. 2, § 228.

Libelle untereinander und mit dem Unterbau fest oder beweglich (umlegbar), sowie auch durch Vermittlung von Mikrometerschrauben verbunden sind, wobei für die „Fehlertilgung“ besondere Anordnungen in Betracht kommen. Hiervon ist auch die Erzielung der Bedingungen, welchen das Instrument in bezug auf seine Achsen (Libelle, Ziellinie, Ringachsen, Drehachsen) genügen muß, die sogenannte „Berichtigung“ abhängig, deren Endresultat sein muß: bei Einspielen der Libelle auf den Normalpunkt (vgl. p. 18) wagerechte Zielung. Die Anordnung der Instrumente und die entsprechenden Berichtigungsverfahren sind in den Lehrbüchern ausgiebig behandelt. Die Leistung eines Nivellierinstrumentes hängt (abgesehen von fester Aufstellung und sicherem Gang der mechanischen Teile) ab von Fernrohr und Libelle. Die Angabe der Libellen liegt bei 1 P.L. oder 2 mm-Teilung etwa zwischen 50" und 3", die Vergrößerung der Fernrohre ist 15 fach bis 45 fach; stärkere Fernrohre werden im Felde nicht verwendet. Bei sachgemäßer Zusammenstellung dieser Werte kann die Horizontierung der Absehlinie mit einem mittleren Fehler von einigen Zehntel Sekunden bis zu mehreren Sekunden erfolgen¹⁰³).

Die „Nivellierlatten“, welche die lotrechten Abschnitte l_n zu bilden haben, sind mit dem Fernrohr des Nivellierinstrumentes abzulesende Zielskalen, die je nach der erstrebten Genauigkeit (in Übereinstimmung mit der Instrumentleistung) in $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{1}$ cm oder auch $\frac{1}{2}$ dm und $\frac{1}{1}$ dm geteilt sind; es kommen auch andere Einteilungen (z. B. Doppellinien = 4 mm, auch 2 mm und 1 mm) vor. Früher wurden statt dieser Ableseskalen Latten mit einer in die Wagerechte einzuwinkenden Zielscheibe benutzt. Die Teilung ist eine „Feldeinteilung“ mit abwechselnd rot-weißen oder schwarz-weißen Intervallen oder auch eine „Strichenteilung“. Die Skalen werden in der Regel aus Holz hergestellt, neuerdings beginnen für Präzisionsarbeiten auch Versuche mit Metallskalen verschiedener Anordnung, um die mühevollen, für Feinmessungen täglich erforderlichen Vergleichen der Holzskalen mit Normalmaßen (vgl. p. 20) und nachfolgenden Reduktionen zu ersparen bzw. diese letzteren zu verschärfen. Die Latten werden mit daran befestigten Dosenlibellen lotrecht gerichtet und auf besonderen Unterlegeplatten oder in den Boden getriebenen Bolzen oder Pfählen aufgestellt, beim Markscheiden auch als Hängelatten eingerichtet.

16c. Das Nivellierverfahren. Bei der Anwendung des Nivellierverfahrens kommen stets kurze Zielweiten in Betracht. Für die fortlaufenden

103) Genauigkeitsuntersuchungen findet man bei *Jordan*, Handbuch 2, Kap. X; vgl. auch die Fußnote 20.

Höhenbestimmungen in Nivellierzügen gilt als mittlere Zielweite rund 50 m (wodurch bei Straßen, Eisenbahnen, Wasserläufen gleichzeitig in bequemer Weise Anschluß an die vorhandene Längeneinteilung, „Stationierung“, dieser Bauten gewonnen wird), so daß die Nivellierskalen in Abständen von 100 m aufgestellt werden; bei Geländeaufnahmen sind die Zielweiten wechselnd, in anderen Fällen, z. B. bei Arbeiten in Gruben unter Tage, sehr kurz. Bei gleichen Zielweiten kann der Einfluß der Erdkrümmung als eliminiert betrachtet werden, bei den ungleichen Zielweiten der Geländeaufnahme wird die Abweichung ohne weiteres vernachlässigt. Während bei einfachen Nivellierungen die beiden Skalenablesungen l_1 und l_2 bei einspielender Libelle und wagerechten Ziellinien genommen werden, wird bei Feinnivellierung meistens mit nur genähert einspielender Libelle und Ablesung der Blasenstellung mit Reduktion auf die wagerechte Zielung gearbeitet, ferner auch zur Verminderung der Skalenablesefehler die Einstellung bestimmter Skalenstellen oder Marken mittelst der Mikrometerschraube mit Reduktion nach den zugehörigen Libellenablesungen verwendet, oder auch mehrfache Einstellung bezw. Ablesung, sei es an Parallelfäden, mit Drehen des Fernrohrs oder der Libelle in verschiedenen Lagen usw.¹⁰⁴). Zur Vermeidung der Subtraktionen $l_1 - l_2$ wird auch nach dem Vorgange der preußischen Landesaufnahme die Rechnung mit dekadischen Ergänzungen, z. B.

$$+ 1,012 - 1,258 = + 1,012 + \times 8,742 = \times 9,754 (= - 0,246),$$

wo \times eine negative Einheit in seiner Stelle ausdrückt, angewendet, wozu dann in dieser Art bezifferte Skalen benutzt werden. Zur Sicherung und Verfeinerung der Skalenablesungen werden auch „Wendelatten“ mit beiderseitiger Teilung in verschiedener Anordnung, sowie doppelte „Anbindepunkte“ usw. benutzt¹⁰⁴).

Die Anwendung des Nivellierverfahrens ist eine vielseitige und verschiedenartige; es kommen in Betracht die Aufgaben der Erdmessung, der Landesvermessung und technische Arbeiten mannigfaltiger Art;

104) Eine Übersicht über die bei den verschiedenen Landesnivellierungen gebrauchten Apparate hat *v. Kalmar* gegeben, Verhandlgn. der Permanenten Komm. d. Intern. Erdm. in Genf 1893, Berlin 1894, Beilage A II. Über die französischen Instrumente und Methoden findet man näheres bei *Lallemant*, Nivellement; vgl. ferner *C. M. Goulier*, Paris C. R. 105 (1887), p. 270, 306; *M. Lévy*, ibid. 110 (1890), p. 1233. Ein kathetometrisches Nivellierinstrument ist von *Chr. A. Vogler* beschrieben, Zeitschr. f. Vermess. 31 (1902), p. 55.

105) Weiteres über solche Aufgaben siehe in den Lehrbüchern sowie für die verschiedenen bautechnischen Zwecke in dem Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Leipzig.

dementsprechend ist allgemein zu unterscheiden: Anwendung des Nivellierens in der Technik (Kleinnivellierung), deren Genauigkeit der gerade vorliegenden Aufgabe entsprechen muß, und Nivellierung für die Zwecke der Erdmessung und die Hauptssysteme der Landesvermessung, deren Ergebnis das mit größtmöglicher Genauigkeit bestimmte Landeshöhennetz ist, welches gebildet wird durch ein System von Festpunkten, „Bolzen“, „Höhenmarken“ usw., die an festen Gebäuden oder in Steinpfeilern angebracht sind. Diese letzteren Arbeiten bezeichnet man als „Präzisionsnivellierung“ oder „Nivellierung I. Ordnung“. Eine Mittelstellung zwischen diesen beiden Aufgaben des Nivellierens nehmen diejenigen Arbeiten ein, welche als Fortführung oder auch als Ersatz der etwa fehlenden Landespräzisions-Nivellierung zur Grundlegung für umfangreiche und wichtige Kleinnivellierungen zu dienen haben („Netznivellierung“, „Nivellierung II. Ordnung“). Die Nivellierungen I. und II. Ordnung bestehen lediglich aus Zügen zwischen Festpunkten, die Kleinnivellierungen dagegen aus der Verbindung der Zuginivellierung mit Geländeaufnahmen.

Bei „*Kleinnivellierungen*“ handelt es sich um die verschiedenartigen Arbeiten zu technischen Zwecken: Geländenivellierungen auf Grund eines vorhandenen Lageplanes mit nachfolgender Auszeichnung von Linien gleicher Höhe (Höhenschichtlinien, Horizontalkurven), sodann die Aufnahme von Längen- und Querschnitten, wie sie Eisenbahn-, Straßen-, Wasser-, Bergbau usw. erforderlich machen. Bei der zeichnerischen Darstellung dieser Vertikalschnitte (Höhenpläne) wird in der Regel eine entsprechende Vergrößerung der Ordinaten (Höhen) angewendet. Für die Absteckung projektierter Höhenpunkte (vgl. die vorerwähnten Bauten), ist die dem Projektpunkte für eine bestimmte, aus einem Festpunkt abgeleitete, Instrumentaufstellung entsprechende Lattenablesung $l_n = h_i - h_n$ zu erzielen. Bei der Aufnahme der Sohlenpunkte bei Gewässern wird der Wasserspiegel als Nivellierhorizont verwendet, dessen Höhenlage bzw. Schwankungen dann zu bestimmen sind (Aufnahmepegel)¹⁰⁵).

Gelegentlich kommt auch die dem Prinzip der Kanalwage (p. 70) entsprechende Schlauchkanalwage zur Anwendung. Durch eine Schlauchleitung sind zwei vertikale Glaszylinder verbunden, in denen der Wasserstand (event. durch Schwimmer) direkt an Skalen abgelesen wird. Auf dem Telegraphenberge bei Potsdam ist seitens des Preußischen Geodätischen Instituts¹⁰⁶) eine 900 m lange Röhren-

106) Veröffentlichung des Königl. Geodät. Instituts, N. F. 14; *R. Schumann*, Ergebnisse einer Untersuchung über Veränderungen von Höhenunterschieden auf dem Telegraphenberge bei Potsdam, Berlin 1904.

leitung angelegt, um durch ein hydrostatisches Nivellement eventuelle Bewegungen der Erdscholle aufzudecken.

16 d. Die Genauigkeit der Nivellierung ist einerseits abhängig von den instrumentellen Werten des Nivellierapparates (Skala, Libelle, Fernrohr), sowie der Art der Ausnützung des Apparates (Libelleneinstellung oder Ablesung, Skaleneinstellung bezw. Ablesung), andererseits von den mechanischen Fehlern des Verfahrens (Instrument-, Stativ- und Lattenaufstellung, Einsinken), sowie den äußeren Umständen (störende Einwirkung von Temperatur und Feuchtigkeit auf Instrument, Stativ und Latte) und bei den dicht über den Erdboden hinstreichenden Ziellinien besonders auch der „topographischen Refraktion“, welche zur Innehaltung kurzer Ziellinien zwingt, und der Luftwallung, welche Feinarbeiten an bestimmte Tagesstunden (Nachmittag) bindet. Wind macht das Nivellieren überhaupt unmöglich. Die aus diesen verschiedenartigen Ursachen entstehenden Fehler sind teils zufällige, teils regelmäßige, zusammenwirkend nach der allgemeinen Form wie p. 21 $\sqrt{f^2 s^2 + u^2 s}$. Zur Herabminderung (bezw. Elimination) der Fehler ist das Nivellierverfahren in mannigfacher Weise ausgebildet und verfeinert worden¹⁰⁷⁾.

Zusammenhängende Nivellierungsnetze, in denen die Züge zwischen den Netzknotenpunkten stets aus Hin- und Hernivellierung gebildet werden, werden nach der Methode der kleinsten Quadrate vielfach nach „bedingten“, jedoch auch nach „vermittelnden“ Beobachtungen (vgl. p. 16) ausgeglichen, wobei die Gewichtsbestimmung für die Züge besonderer Berücksichtigung bedarf. Die Bedingungsgleichungen (Polygon- und Anschlußbedingungen) bezw. die Fehler- und Normalgleichungen lassen sich bei derartigen Netzen unmittelbar nach den Netzskizzen anschreiben, die Rechenarbeiten gestalten sich in den meisten Fällen sehr einfach. Bei der Zusammensetzung des ein großes Staatsgebiet oder Teile eines Kontinentes, wie z. B. Westeuropa, überziehenden Netzes, wie es die Aufgaben der Erdmessung erforderlich machen, ist auf die Abplattung der Erdoberfläche und die Schwereanomalien Rücksicht zu nehmen und die dementsprechenden Korrekturen den einzelnen Zügen beizulegen (vgl. VI 1, 3). Die Genauigkeit der Nivellierung kann beurteilt werden entweder nach den Abweichungen, welche zwei Messungen für dieselben Teilstrecken ergeben, oder nach dem

107) S. Stampfer, Theoretische und praktische Anleitung zum Nivellieren, 1. Aufl., Wien 1845; 9. Aufl. F. Lorber, Wien 1894; 10. Aufl. E. Doležal, Wien 1902; ferner Jordan, Handbuch 2, Kap. X; Vogler, Prakt. Geom. 2.

Fehler, welcher bei der Zusammenstellung der Züge zum Netz (Polygonschlußfehler) oder der Netzausgleichung event. mit Anschlußbedingungen sich berechnet. Als Genauigkeitsmaß dient allgemein der mittlere Fehler der Nivellierung einer Strecke zwischen zwei Punkten, deren horizontaler Abstand 1 km beträgt, welcher also bei der Normalzielweite 50 m rund zehn Aufstellungen erforderlich macht. So spricht man vom „mittleren Kilometerfehler“ einer einmaligen oder einer doppelten Nivellierung oder der Schleifen (Polygone) des Netzes. Nach der älteren Bestimmung der europäischen Gradmessung (1867) galt eine Nivellierung als gut, wenn der „wahrscheinliche“ Kilometerfehler nicht ± 3 mm, als brauchbar, wenn er nicht ± 5 mm überschritt; diese Genauigkeit wird heute ohne besondere Schwierigkeit mit mittleren Instrumenten, bei sorgfältigem Verfahren auch für Nivellierungen II. Ordnung erzielt (und als „mittlerer“ Fehler ± 3 mm bis ± 5 mm hierfür wohl als Norm angewendet), während bei den modernen Präzisionsnivellierungen der Fehlerbetrag sich innerhalb ± 1 mm halten läßt, und selbst bei den einfachen Nivellierzügen technischer Arbeiten bei der Verwendung von in $\frac{1}{1}$ cm geteilten Latten der mittlere Fehler nicht ± 10 mm übersteigt¹⁰⁸).

16 e. Erdmassenberechnung. Im Anschluß an die vorbesprochenen technischen Messungen und Absteckungen (Nr. 15) kommt die Berechnung des Inhaltes von Erdkörpern, Dämmen, Einschnitten usw. in Betracht. Die Geländeoberfläche ist auf Grund der bei der Horizontal- und Vertikalaufnahme aufgemessenen Punkte in Flächenstücke zerlegt, welche in geradlinigen Kanten die Begrenzungsflächen eines sich der natürlichen Oberfläche anschmiegenden Polyeders darstellen. Ein einfacher Fall der Erdmassenberechnung liegt nun z. B. vor, wenn ein Quadratnetz (etwa mit 20 m Maschenweite) abgesteckt ist, für alle Netzknoten die Höhen gemessen sind, und die Erdmasse etwa bis zu einer bestimmten Horizontfläche, oder auch einer geneigten Fläche ermittelt werden soll (schief abgeschnittene Prismen mit quadratischem Grundschnitt). Treten dazu noch die Böschungen, welche die Geländeoberfläche mit der über oder unter ihr liegenden (projektierten) Fläche verbinden, ev. unter Hinzunahme von Gräben, Rampen usw., so lassen sich doch, sofern eine genügende Anzahl von Punkten gegeben ist, immer diese Erdkörper in bestimmte

108) Über die Ergebnisse von Genauigkeitsuntersuchungen vgl. Fußn. 20 und die jährlichen Literaturübersichten der Zeitschr. f. Vermess. Über die internationalen Arbeiten wird fortlaufend berichtet in den Verhandlgn. der Konf. der internationalen Erdmessung.

geometrische Körper, Prismatoide, Prismen, Pyramidenstutze usw. zerlegen und darnach im Einzelnen berechnen¹⁰⁹).

In den meisten Fällen wird jedoch besonders bei den ausgedehnten Massenbestimmungen der Damm- und Einschnittskörper beim Eisenbahn-, Straßen-, Kanalbau diese bei korrekter Einzeldurchführung sehr mühsame Zerlegung nicht ausgeführt (zumal neben anderen Umständen in praktischer Hinsicht die Auflockerung des Bodens beim Fördern und Wiederabsetzen in Betracht kommt). Eine sehr geläufige Berechnungsmethode der Erdmassen bei den erwähnten Bauwerken ist die folgende: Es werden rechtwinklig zur Längsachse, dem Längenprofil, in bestimmten Abständen s Querschnitte (Querprofile) aufgenommen (p. 73), und deren Flächeninhalte F aus den aufgezeichneten Querprofilen berechnet. Dann wird der Körperinhalt zwischen zwei aufeinanderfolgenden parallelen Querprofilen gefunden nach $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)s$; es ist also das arithmetische Mittel der Begrenzungsprofile an Stelle des Prismatoidmittelschnittes F_0 gesetzt ($\frac{1}{6}s[F_1 + F_2 + 4F_0]$). So wird auch verfahren, wenn ein Gelände durch Horizontalkurven (p. 73) dargestellt ist, indem die Erdmasse zwischen zwei benachbarten Horizontflächen aus deren Vertikalabstand und dem mittleren Flächeninhalt der von den Kurven umschlossenen Flächen gewonnen wird (bei ähnlichen Kurvenfiguren abgestutzte Kegel). Die Flächeninhaltsberechnung der Prismatoidgrundflächen, Dreiecke, Vielecke, Damm- und Einschnittprofile geschieht je nach den Umständen nach einer der p. 71 für die Flächenberechnung angegebenen Methoden, numerisch, graphisch oder mechanisch (Planimeter). Zur Vereinfachung dieser Rechnungen sind eine Reihe von Verfahren entwickelt und Tabellen berechnet; es kommen besonders graphische Methoden hierbei in Betracht¹¹⁰). Der Flächeninhalt eines Damm- oder Einschnittprofils führt auf die allgemeine Form $A + Bx + Cx^2$, worauf die graphischen Methoden, welche in I F (*R. Mehmcke*), p. 1006 ff. behandelt sind, Anwendung finden können. Im sogenannten „Profilmastab“ wird diese Form durch eine Gerade $y = A + Bx$ und eine Parabel $y = Cx^2$ auf gemeinschaftlicher Abszisse, die Fläche also linear dargestellt. Werden diese Linien als Ordinaten an den betreffenden Achsenpunkten des Längenprofils eingetragen (Abtrag oberhalb, Auftrag unterhalb der Projektlinie), so entsteht das „Flächenprofil“, dessen Fläche die Raummassen zwischen den Profilen darstellt. Auf solche

109) Als Beispiel einer besonderen Aufgabe möge hierzu zitiert sein: *Wiłski*, Zeitschr. f. Vermess. 21 (1892), p. 401; *Chr. A. Vogler*, ibid. 34 (1905), p. 169.

110) Handbuch der Ingenieurwissenschaften 1 (*G. Meyer* und *S. v. Willmann*), 1. Abt., 3. Aufl., Leipzig 1898, § 19, 4. Aufl. 1904, § 19.

Darstellungen gründet sich dann die Massenverteilung im sogenannten „Massennivellement“ mit dem „Massenprofil“, worin in jedem Profilverpunkt die algebraische Summe aller vorhergehenden Massen aufgetragen erscheint¹¹⁰⁾ 111). Auch sei an dieser Stelle hingewiesen auf einige interessante Aufgaben, welche *W. Lauthardt*¹¹²⁾ in der Theorie des kommerziellen Trassierens aufstellt.

16f. Kотиerte Projektion. Endlich sei auch hier noch hingewiesen auf die „kотиerte Projektion“, d. h. diejenige Methode der darstellenden Geometrie¹¹³⁾, welche sich auf die geometrische Karte als orthogonale Parallelprojektion in der Vermessungsgrundfläche mit jedem Geländepunkt zugeschriebener Höhenzahl (Kote) und Auszeichnung der Horizontalkurven gründet. Die Lage eines Punktes ist bestimmt durch seine Projektion und die zugefügte Kote, die Lage einer Geraden durch zwei derart gegebene Punkte, die einer Ebene durch drei Punkte oder durch Festlegung der Linie stärkster Neigung. Zur bequemen Ausführung der Konstruktionen werden die Linien nach ganzzahligen Koten eingeteilt („graduiert“). Der horizontale Abstand zweier benachbarter, der Höheneinheit entsprechender Einteilungs-(Graduierungs)-Punkte ist das „Intervall“. Zwischen dem Höhen-(Koten-)Unterschied h zweier Punkte, ihrem horizontalen Abstand s , der Neigung der Linien n und dem Intervall i bestehen demnach die Beziehungen $n : 1 = h : s = 1 : i$, womit alle bei der kотиerten Projektion vorkommenden Rechnungen ausgedrückt sind. Der „Böschungmaßstab“ einer Ebene ist eine in der Richtung des stärksten Gefälles verlaufende gradierte Gerade; die Horizontalen stehen rechtwinklig zu ihr. Bei der topographischen Fläche werden die Falllinien sowie die Horizontalen zu Kurven. Eine „Horizontalkurvenkarte“ gibt in jedem Punkt an: die Höhe des Punktes, die Richtung der Horizontalen, des stärksten Falles und den Betrag der Neigungen. Die kотиerte Projektion ermöglicht eine einfache Darstellung der Erdkörper und Böschungsschnitte bei der Anlage von Eisenbahnen, Kanälen, Wegen usw.; sie ist eingehend von *G. A. Peschka*¹¹⁴⁾ behandelt.

Bei der Darstellung der topographischen Fläche (vgl. p. 92)

111) *C. M. v. Bauernfeind*, Graphische Bestimmung der Erd- und Transportweiten, München 1856; *C. Culmann*, Graphische Statik, Zürich 1866, 2. Aufl. 1875, Kap. 2 u. 3; *F. Eickemeyer*, Massennivellement, Leipzig 1870; *J. Amsler-Laffon*, Anwendung des Integrators zur Massenberechnung, Zürich 1875; vgl. hierzu II A 2 (*A. Voß*), p. 131.

112) Theorie des Trassierens, Hannover, Heft 1, 1887; Heft 2, 1888.

113) Vgl. III 1, 11 (*E. Papperitz*).

114) Kотиerte Ebenen, Brünn 1877.

durch Bergstrichzeichnung entsprechen die „Bergstriche“ den Fallinien. Durch Auszeichnung dicht nebeneinanderliegender Fallinien wird die topographische Fläche in Elemente zerlegt, sodaß dadurch an jeder Stelle der Karte Betrag und Richtung der Neigung zum Ausdruck kommt. Zur Veranschaulichung der Flächenneigungen werden dann nach *J. G. Lehmann*¹¹⁵⁾ unter der Voraussetzung vertikal einfallenden Lichtes die einzelnen Flächenteilchen nach dem Grade ihrer Neigung durch passende Anordnung der Strichstärke mehr oder weniger weiß oder schwarz ausgezeichnet; nach „*Lehmann's Manier*“ vom Höhenwinkel $\alpha = 0^\circ$ bis zur Grenze $\alpha = 45^\circ$ in 9 Stufen nach der Beziehung-Schwarz : Weiß = $\alpha : (45^\circ - \alpha)$. In Spezialkarten (vgl. auch Nr. 20, 21) werden in der Regel nur Horizontalkurven eingetragen; Bergstrichzeichnung kommt in der Regel nur in Betracht für topographische Karten in Maßstäben etwa von 1 : 25 000 ab (vgl. VI 1, 4).

17. Trigonometrische Höhenmessung. Ist bei Annahme paralleler Lotlinien in einem Punkte P_1 in der Vertikalebene nach P_2 der Zenitwinkel z_1 oder der Höhenwinkel α_1 gemessen und die horizontale Entfernung s bekannt, so ist $h_2 = h_1 + s \operatorname{tg} \alpha_1$. Die Messung der Vertikalwinkel geschieht mit dem Höhenkreis des Theodolits (vgl. p. 26). Unter h_1 ist demnach die Höhe der Kreisachse verstanden, die entweder durch Höhenwinkelmessung nach einem gegebenen Höhenpunkt in bekannter Entfernung aus $h_1 = h_p - s \operatorname{tg} \alpha$ abzuleiten ist, oder durch unmittelbare Messung des lotrechten Abstandes i über dem Aufstellungspunkte $h_1 = h_p + i$. Ist nicht der zu bestimmende Höhenpunkt P_2 direkt angezielt, sondern ein Hilfszielpunkt, der um ein bestimmtes Maß l_2 über oder unter P_2 liegt, so wird demnach die vollständige Höhenformel $h_2 = h_1 + i \pm l_2 + s \operatorname{tg} \alpha$. Ist die Entfernung s nicht direkt meßbar, wie z. B. bei Türmen, so muß sie indirekt durch besondere Messungen, wie bei der Horizontaltriangulierung (Dreieck mit Grundlinie und anliegenden Winkeln), ermittelt werden. Wird hierbei die Grundlinie in die Vertikalebene der Aufstellungspunkte und des unzugänglichen Turmpunktes gelegt, so entfällt die Messung der Horizontalwinkel, es ergibt sich die unbekannte Entfernung aus dem Dreieck in der Vertikalebene.

Die Annahme der Parallelität der Lotlinien kann nur für sehr kurze Entfernungen beibehalten werden. Wird auf der kugelförmigen Erdoberfläche durch P_1 und P_2 eine Vertikalebene gelegt und der Abstand s der Lotlinien in der Normalnullfläche als bekannt (etwa

115) Darstellung einer neuen Theorie der Bezeichnung der schiefen Flächen im Grundriß oder der Situationszeichnung der Berge, Leipzig 1799.

aus der Horizontaltriangulierung) angesehen und wieder der Vertikalwinkel α_1 gemessen, so ist in dem durch den Schnitt der Lotlinien im Erdzentrum C gebildeten Dreieck CP_1P_2 bei bekanntem Erdradius alles zur Bestimmung des Höhenunterschiedes Δh_{12} gegeben. Die Beziehung wird wegen der Kleinheit des zugehörigen Erdzentrivinkels und der Höhen von P_1 und P_2 im Vergleich zum Erdradius R unter Einführung der Abweichung des wahren und scheinbaren Horizontes (Niveauläche und Tangentialebene), der „Horizontdepression“ $\frac{s^2}{2R}$ (Fig. 23), unmittelbar zurückgeführt auf die einfache Rechenformel bei parallelen Lotlinien, sodaß ist

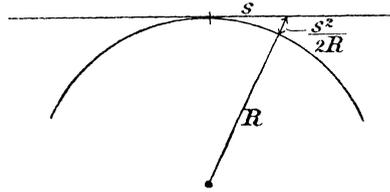


Fig. 23.

(Fig. 23), unmittelbar zurückgeführt auf die einfache Rechenformel bei parallelen Lotlinien, sodaß ist

$$h_2 = h_1 + s \operatorname{tg} \alpha + \frac{s^2}{2R},$$

wozu nun noch die „terrestrische Refraktion“ tritt (vgl. VI 2, 3 (E. v. Oppolzer)). Der Betrag der terrestrischen Refraktion wird als Funktion der sphärischen Depression durch den „Refraktionskoeffizienten“ k zum Ausdruck gebracht in der Form $-k \cdot \frac{s^2}{2R}$, sodaß in dieser Zusammenfassung die Höhenformel lautet $h_2 = h_1 + s \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2R} s^2$ (zur Rechnung dienen Tabellen¹¹⁶⁾). Es wird demnach die Lichtkurve kurzweg als flacher Kreisbogen ausgedrückt. Werden in beiden Punkten P_1 und P_2 sogenannte „gegenseitige Zenitdistanzen“ z_1 und z_2 gemessen, so gilt unter der Voraussetzung gleichmässiger Krümmung der Lichtbahn die vereinfachte Beziehung $h_2 - h_1 = s \operatorname{tg} \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$, worin der Refraktionskoeffizient nicht erscheint, und die zugehörige Gleichung $k = 1 - \frac{z_1 + z_2 - 180^\circ}{s \rho} \cdot R$, woraus (am zuverlässigsten bei gleichzeitiger gegenseitiger Beobachtung) Bestimmungen für den Refraktionskoeffizienten gewonnen werden können.

Die starke Veränderlichkeit der terrestrischen Refraktion und ihre Abhängigkeit von der Temperaturverteilung längs der Ziellinien (Besonnung usw.) ist die wesentlichste Fehlerquelle für trigonometrische Höhenmessungen. Der Fehler des als „mittlerer Refraktionskoeffizient“ benützten Wertes $k = 0,13$ (Bessel) ist rund auf $\frac{1}{4}$ seines Betrages zu schätzen, etwa mit dem Ausdruck $0,13 \pm 0,03$,

116) Jordan, Handbuch 2, Kap. XI mit ausführlichem Literaturverzeichnis, p. 592.

wodurch aber größere Abweichungen nicht berücksichtigt werden. Besondere Beobachtungen über die terrestrische Refraktion, ihre tägliche Periode usw. sind von *C. M. v. Bauernfeind*¹¹⁷⁾ angestellt; weitere Literaturangaben findet man bei *Jordan*¹¹⁶⁾. Durch diese Veränderlichkeit und die Unsicherheit der Refraktionsbestimmung ist der Genauigkeit der trigonometrischen Höhenmessung eine Grenze gesetzt, sodaß zur Zeit diese Methode hauptsächlich in Verbindung mit der Kleintriangulierung für topographische Messungen praktisch verwertet wird, während sie früher als die ausgezeichnetste und schärfste Höhenmessungsmethode betrachtet wurde; als ein Beispiel derartiger Messungen sei verwiesen auf das trigonometrische Nivellement Swinemünde-Berlin¹¹⁸⁾; einer späteren Zeit gehören z. B. an die Beobachtungen zum Anschluß von Helgoland an das Festlandnetz¹¹⁹⁾. Über die Theorie der terrestrischen Refraktion lese man die Lehrbücher von *F. R. Helmert*¹²⁰⁾ und *W. Jordan*¹¹⁶⁾ nach, die weitere Literaturangaben enthalten. Für exaktere Messungen und besondere Untersuchungen kommen für die Höhenformel noch weitere Glieder in Betracht; soll z. B. die Höhenlage der Messungspunkte in Rücksicht gezogen werden, so wird

$$h_2 - h_1 = s \left(1 + \frac{h_1 + h_2}{2R_m} \right) \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2R_m} s^2 + \frac{1-k}{2R_m} s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \dots,$$

wobei R_m der mittlere Krümmungsradius, eventuell derjenige des Ellipsoidnormalschnittes in dem betreffenden Azimut ist. Über die strenge Reduktion der trigonometrischen Höhenmessung, ihre Bedeutung für die Bestimmung der Erdfigur und den theoretischen Unterschied ihrer Ergebnisse gegenüber denen der Nivellierung vgl. VI 1, 3 (*P. Pizzetti*).

Der Fehlertilgung (vgl. p. 27) wegen werden die Vertikalwinkel stets in beiden Fernrohlagen, sowie auch in mehreren Kreislagen gemessen, bei Kleinmessungen wird meistens mit einspielender Libelle, bei schärferen Messungen mit Libellenreduktion gearbeitet. Aus der

117) Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. Drei Mitteilungen mit Nachtrag, München 1880, 1883, 1888, 1890; *H. Hartl*, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien 3 (1883).

118) *J. J. Baeyer*, Trigon. Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, Berlin 1840.

119) Veröffentl. d. Kgl. Preuß. Geodät. Institut. Zenitdistanzen zur Bestimmung der Höhenlage der Nordseeinseln Helgoland, Neuwerk und Wangeroog, Berlin 1895.

120) Mathematische und physikalische Theorien der höheren Geodäsie, Bd. 2, Leipzig 1884.

Beziehung $\Delta h = s \operatorname{tg} \alpha$ ergibt sich aus den mittleren Messungsfehlern m_s und m_α der Höhenunterschiedfehler

$$m_{\Delta h} = \pm \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha m_s)^2 + \left(\frac{s}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2},$$

für nahe wagerechte Zielung $m_{\Delta h} = \pm \frac{m_\alpha}{\rho} s$. Aus der Winkelmessungsgenauigkeit, welche je nach dem Zweck und dem verwendeten Instrument etwa ausgedrückt wird durch $m_\alpha = \pm 1''$ bis $\pm 1'$ unter Berücksichtigung der vorerwähnten Refraktionsfehler, ergibt sich ein Überblick über die Genauigkeit dieses Höhenmessungsverfahrens. Im allgemeinen wird für die technische Verwendung als genügend erachtet, wenn der mittlere Höhenunterschiedfehler etwa zwischen den Grenzen $\pm \frac{1}{2}$ dm bis ± 2 dm bleibt und dementsprechend Verfahren und Instrumente gewählt. Die Ausgleichung zusammenhängender trigonometrischer Höhennetze geschieht nach der Methode der kleinsten Quadrate, oder in einfacheren Fällen nach einem passenden Näherungsverfahren¹¹⁶).

Hier ist auch noch zu erwähnen die Höhenmessung mit Gradbogen, Pendelkreis, Libellenhöhenkreis, s. p. 20 (eventuell als Freihandinstrumente gebraucht), in Verbindung mit der geneigten Länge des Meßbandes oder der Meßschnur (Schnurzug des Markscheiders) p. 12, wobei sich der Höhenunterschied ergibt nach $h = s_n \sin \alpha$ (s_n geneigte Länge). Die Genauigkeit dieser Höhenwinkelmessung läßt sich etwa durch den mittleren Fehler $\pm 0,1^{\circ}$ bis $\pm 0,3^{\circ}$ ausdrücken. Diese Höhenmesszüge (auch wohl Schrägnivellement genannt) werden oft mit den p. 58 erwähnten Kompaßzügen verbunden.

18. Barometrische Höhenmessung. Zu topographischen Aufnahmen, besonders auch für Vorarbeiten zu Eisenbahnbauten und Erkundungsaufnahmen (Reiseaufnahmen), s. p. 96, wird in ausgiebiger Weise von der barometrischen Höhenmessung Gebrauch gemacht, wobei als Instrument lediglich das „Federbarometer“ in Betracht kommt, während Quecksilberbarometer und „Siedethermometer“ (Kochbarometer) zur Kontrolle des als „Feldinstrument“ betrachteten „Aneroides“ dienen; die zur Zeit stattfindende weitgehende Verwendung der Barometermessungen ist nur durch die Einführung dieses Instrumententypus möglich geworden¹²¹). Das wesentlichste Element der für Höhenmessung in Betracht kommenden Instrumente ist eine nahezu luftleer gepumpte, luftdicht verschlossene Büchse, gebildet durch zwei federhart gewalzte dünne Wellblechplatten,

121) L. Vidie, Paris C. R. 24 (1847), p. 975.

welche auf einen kräftigen Ring aufgelötet sind. Die Büchse ruht auf einer Grundplatte und trägt einen Zapfen, an dem eine starke Feder angreift, welche den Luftdruck balanciert. Die bei Luftdruckschwankungen sich einstellenden elastischen Biegungen des Feder-systems, rund etwa $\frac{1}{200}$ mm für 1 mm Barometerstandänderung, werden in verschiedener Weise ablesbar gemacht, wodurch sich verschiedene Konstruktionen ergeben. Am gebräuchlichsten ist mechanische Vergrößerung (etwa 500 fach) durch ein Hebelwerk mit Ablesung an einem Zeiger auf einem Zifferblatt (z. B. *Naudet*, *Bohne*). Mikrometrische Messung durch ein Schraubenmikrometer mit Fühlfeder ist angewendet von *J. Goldschmid*; die im Prinzip einfachste Methode direkter optischer mikroskopischer Ablesung (*Reitz*) hat sich praktisch bisher nicht gut bewährt. Wegen der Konstruktionseinzelheiten sei auf die Lehrbücher verwiesen¹²²⁾. Die in der Konstruktion begründeten, den unmittelbaren Instrumentablesungen beizulegenden Verbesserungen sind: 1) die „Teilungsverbesserung“, d. h. also die Umwandlung der Einteilung des betreffenden Instrumentes in die Millimeteerteilung des Quecksilberbarometers, bezogen auf einen bestimmten Anfangspunkt; 2) die „Temperaturverbesserung“, d. h. die Reduktion der mit der Temperatur veränderlichen elastischen Kraft der zu dem Federsystem verwendeten Metalle, sowie die Reduktion der Spannkraft der in der Büchse enthaltenen Luft und der in Frage kommenden thermischen Ausdehnungen auf eine Normaltemperatur (die Instrumenttemperatur wird bestimmt durch ein „inneres“ Thermometer); 3) die „Standverbesserung“ zur Beseitigung des nach Beilegung der beiden ersten Größen noch bleibenden Unterschiedes gegen den Quecksilberbarometerstand. Die Bestimmung der Korrekturen geschieht durch Vergleichen mit einem Quecksilberbarometer bei verschiedenen Temperaturen und Luftdrucken, wozu besondere Einrichtungen getroffen werden können¹²²⁾.

Die mitunter stark von linearer Form abweichenden Interpolationsgleichungen werden graphisch oder nach der Methode der kleinsten Quadrate, ev. auch durch eine Näherungsrechnung abgeleitet. Eine allgemeine Form ist¹²²⁾:

$$Q_0 = F + x + yt + z(760 - F) + y't(760 - F) + z'(760 - F)^2 + y''t^2 + \dots,$$

in der t die Temperatur, F den beobachteten Barometerstand und

¹²²⁾ *Jordan*, Handbuch 2, Kap. XII (mit weiterer Literatur). Über die verschiedenen Aneroidkonstruktionen vgl. *L. Löwenherz*, Bericht über die wiss. Instr. auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879, Berlin 1880, p. 122; *C. Koppe*, Die Aneroidbarometer von *J. Goldschmid*, Zürich 1877; *F. H. Reitz*, Zeitschr. f. Vermess. (1873), p. 363; *E. Hammer*, ibid. 76 (1887), p. 20.

x, y, z, y', z', y'' zu bestimmende Koeffizienten bedeuten. Ohne Berücksichtigung dieser Verbesserungen, welche nicht nur jeder Konstruktionsart, sondern auch jedem Instrumente eigentümlich und innerhalb gewisser Grenzen veränderlich sind, sind die Federbarometer für Höhenmessungszwecke unbrauchbar (elastische Nachwirkung¹²³). Die „Standverbesserung“ wird entweder durch Anordnung der Messungsmethode (Anschluß an Höhenfestpunkte) eliminiert oder durch Vergleichen mit Quecksilberbarometern oder Siedethermometern (letztere besonders auf Reisen geeignet) bestimmt¹²²). Es sind demnach die Federbarometer ihrer Natur nach Interpolationsinstrumente von ziemlich hoher relativer Genauigkeit ihrer Angaben, und dementsprechend beim Messungsverfahren zu verwenden.

Die Grundlage der barometrischen Höhenmessung bildet die „barometrische Höhenformel“, die, zuerst von *Laplace* 1799 aufgestellt, später mit Berechnung zugehöriger Tabellen mehrfach bearbeitet wurde, (*Biot, Gauß, Bessel, Babinet* u. a.¹²²) und in verschiedener Form gebraucht wird. Als Beispiel sei angeführt die von *W. Jordan* mit Ausscheidung der zuweilen mit aufgenommenen Instrumentreduktion (Unterschied zwischen Quecksilber- und Federbarometer, besonders in bezug auf Schwere) gegebene Formel¹²⁴):

$$h = K \log \frac{B}{b} (1 + \alpha t) \left(1 + 0,377 \frac{e}{p}\right) (1 + \beta \cos 2 \varphi) \left(1 + \frac{2H}{r}\right),$$

worin die barometrische Konstante

$$K = \frac{0,76}{\mu} \cdot \frac{13,59593}{0,00129277} \cdot \frac{1}{1,00021} = 18400$$

und t die mittlere Temperatur, e den mittleren Dunstdruck der freien Luft, p den mittleren Luftdruck und H die mittlere Höhe bedeutet.

Für örtlich begrenzte Gebiete, wie sie bei einer ausgiebigen Verwendung der barometrischen Höhengaufnahme in Betracht kommen, werden die Glieder für die Schwere nach Breite und Höhe und für die Luftfeuchtigkeit mit mittleren Werten in der barometrischen Konstanten zusammengefaßt; so lautet z. B. die von *Jordan*¹²⁴) für Mitteleuropa gegebene Formel

$$h = 18464 (1 + 0,003665 t) (\log B - \log b),$$

womit dann für den mittleren, im Meeresspiegel zutreffenden Luftdruck von 762 mm eine Tafel der Höhendifferenzen nach t von Grad zu Grad und B in $\frac{1}{10}$ mm berechnet ist¹²⁴). Eine andere für die

123) *C. Reinhardt*, Zeitschr. f. Instr. 7 (1887), p. 153, 189.

124) *W. Jordan*, Barometrische Höhentafeln, 2. Aufl., Stuttgart 1886; desgl. für Tiefland und grosse Höhen, Hannover 1896.

Höhenberechnung geeignete Form, wohl „Höhenstufe“ genannt, erhält man, wenn die Gleichung so umgewandelt wird, daß die Höhendifferenz als Funktion einer bestimmten Barometerstanddifferenz z. B. 1 mm erscheint (*Babinet* 1850); für die vereinfachte *Jordan'sche* Formel wird z. B.

$$\Delta = \frac{8019}{B} (1 + \alpha t) \quad \text{und} \quad h = \Delta (B_2 - B_1),$$

wozu Rechenschieber und anderweite Hilfsmittel (graphische Tafeln) in Betracht kommen. Diese „Höhenstufe“ kann auch direkt durch Beobachtung an gegebenen Höhenfestpunkten gefunden, $\Delta = \frac{H_2 - H_1}{B_1 - B_2}$, und danach die weiteren Höhen interpoliert werden. Weiteres über Genauigkeit der Formel (tägliche Periode), die einzelnen Glieder, Rechenmethode, verschiedene Hilfsmittel und Literatur findet man bei *Jordan*.

Zur Ausführung der barometrischen Höhenaufnahme sei nur noch erwähnt, daß den Barometerstandschwankungen Rechnung getragen wird durch fortlaufende korrespondierende Beobachtungen an „Standbarometern“, gegen welche die Ablesungen der „Feldbarometer“ reduziert werden, oder durch in möglichst kleinen Zeitabständen wiederholte Rückkehr an „Anbindepunkte“ (Schleifenaufnahme) mit Reduktion nach der Zeit, sowie durch Anschluß an gegebene „Höhenfestpunkte“. Diese letztere Methode ist die für topographische Aufnahmen geeignetste, wozu zahlreiche im Aufnahmegebiet passend verteilte nivellistisch, trigonometrisch oder tachymetrisch bestimmte Höhenfestpunkte verwendet werden. Bei sorgfältigem Verfahren lassen sich bei derartigen Aufnahmen bez. Einschaltungen auf beschränkten Gebieten (am besten mit graphischer Ausgleichung) die Geländepunkte mit einem mittleren Fehler von rund ± 1 bis 2 m anschließen.

E. Tachymetrische Methoden.

Unter „Tachymetrie“ (Schnellmessung) versteht man dasjenige Messungsverfahren, bei welchem „Lage“- und „Höhen“-Messung gleichzeitig erfolgt. Die Entfernung wird dabei indirekt durch sogenannte Distanzmessung ermittelt, da die direkten Längenmessungen verhältnismäßig viel Zeit erfordern. Verfahren und Instrumente sind mannigfacher Art und voneinander unterschieden, einerseits nach der Methode der Distanz- und Höhenmessung, andererseits nach der Bestimmung der Horizontalrichtungen mit Theodolit, Bussole oder Meßtisch; dem entsprechen die Bezeichnungen: Schnellmesser, Tachymeter (Tacheometer), Tachygraph, Tachygraphometer, Celerimeter, Omnimeter, Stadi-

meter, Euthymeter usw. Die Bezeichnung des Messungsverfahrens als Schnellmessung (Tachymetrie, Tachéometrie, Stadia surveying oder tacheometry, Celerimensura) erklärt sich aus der zweckmäßigen Vereinigung von Lage- und Höhenmessung, welche insbesondere für die technische Topographie von großer Bedeutung ist, wie denn auch die heutige Tachymetrie ihre Entwicklung wesentlich den Anforderungen, welche die geometrischen Vorarbeiten für den Eisenbahnbau stellten, verdankt.

19. Indirekte Längenmessung (Distanzmessung). Erforderlich ist ein Instrument („Distanzmesser“), welches die Länge der Ziellinie (oder deren Projektion) bis zu einem Zielpunkte durch unmittelbare Ablesung der gesuchten Entfernung selbst oder einer einfachen Funktion derselben angibt. Damit ist der Unterschied zwischen dem Prinzip der „Distanz“- (Entfernungs-)messer und den „Längenmeßwerkzeugen“ (Meßlatte, Meßband usw.) gekennzeichnet. Den speziell geodätisch in Betracht kommenden Distanzmessern liegt in der Regel eine irgendwie instrumentell hergestellte Parallaxe zu Grunde. Für die Anordnung der bestimmenden Elemente stehen verschiedene Wege offen, durch deren Kombination sich eine ganze Reihe von Konstruktionsmöglichkeiten (Erfindungen) von Distanzmessern darbieten. Für Konstruktion, Bedeutung und Verwendung der Instrumente ist in erster Linie entscheidend die Anordnung der Distanzbasis L . Wird die Distanzbasis im Zielpunkt als sog. „Distanzlatte“ (eine leicht transportable mit Teilung oder Zielmarken versehene Ziellatte) aufgestellt, so spricht man von Distanzmessern „mit Latte“; diese Anordnung wird in der Feldmessung (Tachymetrie, Topographie) für kürzere Entfernungen (d. h. bis zu einigen 100 m, stets aber innerhalb 1 km) angewendet. Zur allgemeinen Lösung des Problems für größere Entfernungen, besonders aber für militärische (artilleristische) Zwecke, wenn die Anbringung einer Distanzbasis im Ziel unmöglich ist, wird das Instrument selbst Träger der Basis (Basisschiene, Basislineal); für diese Zwecke kommen neben den parallaktischen Distanzmessern auch in Betracht die weniger brauchbaren Fernrohrbildweiten-Distanzmesser und neuerdings besonders der stereoskopische Entfernungsmesser von *Zeiß* in Jena¹²⁵).

19a. Distanzmesser mit Distanzlatte. Hierzu gehört in erster Linie der in der Feldmessung am meisten zur Anwendung kommende Fern-

125) *C. Pulfrich*, Phys. Zeitschr. 1899, p. 98. Vgl. auch Zeitschr. f. Instr. 21 (1901), p. 221 und 249; *O. Hecker*, Zeitschr. f. Vermess. 30 (1901), p. 85.

rohr-Okularfadendistanzmesser¹²⁶) mit festem Fadenabstand p in der Bildebene, der beim einfachen astronomischen Fernrohr die auf den Objektivhauptpunkt bezogene Entfernung $D = F + F \frac{L}{p}$ liefert, wenn F die Objektivbrennweite, p den Fadenabstand in der Bildebene bedeutet und L an einer geteilten Skala, die parallel p ist, abgelesen wird. Soll die Entfernung auf die Instrumentdrehachse bezogen werden, so hat man $F + c + F \cdot \frac{L}{p}$ oder allgemeiner $D = a + kL$. Das zusammengesetzte Fernrohr (*Ramsden*, *Huygens*) liefert auf gleiche Form $a + kL$ ($a =$ Additions-, $k =$ Multiplikationskonstante, in der Regel 100 oder 200) zu bringende Beziehungen, worin beim Fernrohr von *Porro*¹²⁷) durch Zwischensetzung einer Kollektivlinse bei passender Anordnung des optischen Systems a gleich Null in Bezug auf die Instrumentachse gemacht werden kann (anallaktisches Fernrohr). Ist die optische Achse des Fernrohrs geneigt und bleibt L parallel p , so gibt D die geneigte Entfernung an, welche durch Messung des Vertikalwinkels auf die horizontale reduziert werden muß; wird aber L lotrecht gestellt, was meistens geschieht, so wird die projizierte Entfernung $s = a \cos \alpha + Lk \cos^2 \alpha$, worin α der Höhenwinkel der Mittenzielung ist. Das Okular-Schraubenmikrometer, welches bei konstantem L das variable p in Schraubenwert liefert, findet seltener Verwendung (p. 92, Präzisionsmessung).

Einführung des parallaktischen Winkels ε durch Winkelbewegung eines Zielfernrohrs mit zwei aufeinander folgenden Einstellungen findet in verschiedener Form Verwendung. Zunächst kommt in Betracht bei wagerecht und rechtwinklig zur Mittenzielung eingerichtetem L die Messung von ε als Horizontalwinkel. Bei lotrechtem L wird ε als Differenz zweier Höhenwinkel gemessen; ist dann $\varepsilon = \beta - \alpha$, für die obere und untere Zielung nach L , so wird die wagerechte Entfernung $S = L \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$. In der Regel wird die Winkelbewegung durch besondere „distanzmessende“ Schrauben eingeführt, und zwar der lotrecht oder wagerecht wirkenden Tangentialschrauben bei lot-

126) Geschichtliches zum Fadendistanzmesser und zur Tachymetrie findet man bei *Goulier*, Tachéométrie, p. 5; *A. Salmoiraghi*, Istrumenti e metodi moderni di geometria applicata, Milano 1884, 2, p. 278; *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 20 (1891), p. 295 und Zeitschr. f. Inst. 12 (1892), p. 155; 17 (1897), p. 278.

127) *J. Porro*, La Tachéométrie, Paris 1858. Über die Vorteile und Nachteile des *Porroschen* Fernrohres vgl. *Vogler*, Prakt. Geom. 2, § 263, 264; *Tinter*, Zeitschr. f. Instr. 2 (1882), p. 117 u. 157; *Hensoldt*, ibid. 5 (1885), p. 413.

rechtem L .¹²⁸⁾ Bei wagerechtem L kann p unmittelbar durch das Horizontalmikrometer eines Winkelmessers ermittelt werden. Bei lotrechter Tangentialschraube und lotrechtem L ergibt sich die wagerechte Entfernung s , wenn p die Schraubenbewegung ausdrückt, und d den wagerechten Abstand des Drehpunktes von der Schraubenachse $s = L \frac{d}{p} = Lk$ (k z. B. = 100), oder bei konstantem L ist $s = \frac{k}{p}$. Bei der von *S. Stampfer* verwendeten Schraube (Sehnenschraube) wird für die Parallaxe ε eine Interpolationsformel mit wenigen Gliedern $\varepsilon'' = a''(o - u) - b''(o^2 - u^2)$ verwendet, wobei o und u die beiden Schraubenangaben, und a und b empirisch zu bestimmende Konstanten sind. Durch Einsetzen dieser Winkelgleichung ergibt sich die Distanzgleichung

$$D = \frac{L}{a'(o - u)} + L \left[-\frac{b'}{a'^2} \cdot \frac{o + u}{o - u} - a' \frac{(h - u)^2}{o - u} + a'(k - u) \right],$$

worin a' und b' die Konstanten des Instrumentes, h die Nullstellung der Schraube (horizontale Visur) bedeuten. Für horizontal angeordnete Tangentialschraube und vertikales L gilt ebenfalls die vorerwähnte Beziehung $s = Lk$ bzw. $= \frac{k}{p}$. Diese Anordnung kann bei der Kippbewegung des Theodolitfernrohrs angewendet werden, während die lotrechte Schraube sich besonders für Nivellierinstrumente eignet. Nach den hier angedeuteten Anordnungen sind eine ganze Reihe von Instrumenten konstruiert worden, auch mit automatischer Reduktion auf den Horizont, welche besonders für die Tachymetrie von Bedeutung ist¹²⁹⁾.

Die bisher aufgezählten, für kürzere Entfernungen bestimmten Distanzmesser: Okularfaden, Okularmikrometer, Meßschrauben und Tangentenmikrometer sind in Bezug auf die Genauigkeit der Entfernungsbestimmung im allgemeinen als einander gleichwertig zu bezeichnen. Nach der einfachen Beziehung $D = kL$ ist, abgesehen vom Fehler in k selbst, der Entfernungsfehler vom numerischen Wert von k (z. B. 100, 200) abhängig. Die Genauigkeit der Ermittlung von L hängt ab von der Genauigkeit der Skalenablesung bzw. Einstellung der Distanzlatte, welche wieder abhängig ist von der Einrichtung und Aufstellung der Skala, der Leistung (Vergrößerung) des Fernrohrs sowie der Schraubenmikrometer, der zu bestimmenden Ent-

128) Zuerst angegeben von *J. L. Hogrewe*, *Praktische Anleitung zum Nivelieren oder Wasserwägen usw.*, Hannover 1800.

129) Vgl. die nächste Nummer. Eine kurze Übersicht gibt *O. Lueger*, *Lexikon der gesamten Technik*, Stuttgart, Art. Distanzmesser; ferner *Jordan*, *Handbuch 2*, Kap. XIII u. XIV; *Hartner-Doležal*, 1, § 33—35.

fernung und der terrestrischen Refraktion. Die zahlreichen für die verschiedensten Instrumente angestellten Genauigkeitsermittlungen¹²⁹⁾ lassen sich etwa so ausdrücken:

D	100 m	200 m	500 m
$\pm m_D$	0,05—0,20 m	0,1—0,3 m	0,5—1,0 m

Eine allgemeine Beziehung für den Fehler und sein Wachsen mit der Entfernung läßt sich nicht ohne weiteres angeben. Für kleine Entfernungen, bei günstigen Verhältnissen (Refraktion, Wind), guten Instrumenten läßt sich die Genauigkeit der Distanzmessung bis zu der einer mäßig genauen¹³⁰⁾ unmittelbaren Messung mit Längenmeßwerkzeugen steigern, während sie die Genauigkeit einer verfeinerten Längenmessung allerdings nicht erreichen kann. Man unterscheidet auch hier zwischen Präzisionsdistanzmessung, welche die unmittelbare Längenmessung bei kurzen Strecken ersetzen soll, und tachymetrischer Distanzmessung (Schnellmessung). Bei dem Wettstreit zwischen der Distanz- und der Längenmessung behauptet im allgemeinen die erstere den Vorrang in Bezug auf die Schnelligkeit, die letztere in Bezug auf die Genauigkeit. Das eigentliche Gebiet dieser Art Distanzmessung ist daher die Tachymetrie und Topographie.

19 b. Distanzmesser mit Basisschiene (Basislineal)¹³¹⁾. Das Instrument selbst ist Träger der Basis (Basis-Schiene, -Lineal) und mißt oder gibt den parallaktischen Winkel ε . Die Anordnung ist dementsprechend verschieden. Ist L konstant, so wird ε durch die Abweichung zweier bei der Nullstellung (∞) parallel gerichteter Fernrohre gemessen und zwar entweder an einem geteilten Kreisbogen, oder mikrometrisch mit Okularmikrometer, oder nach dem Prinzip der Tangentenschraube oder auch in einem besonderen Falle¹³²⁾ durch ein Hebelwerk. Ist ε konstant, so sind auf der Schiene zwei Fernrohre angebracht, von denen das eine verschiebbar und mit konstantem ε zum anderen angeordnet ist; D wird an der Schiene ab-

130) Vgl. die Fehlergrenzen p. 21.

131) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von A. Schell, Wien. Ber. 75 (1877), p. 145. Die Distanzmesser mit Basisschiene sind besonders für militärische Zwecke wichtig; man vgl. in dieser Hinsicht: J. D. Marre, Des instruments pour la mesure des distances, Extr. du Mém. de l'artillerie de la marine 43, Paris 1880; V. Niesiolowski-Gawin von Niesiolówice, Mitt. über Gegenst. d. Artill. u. Geniewesens 1898, p. 827.

132) Distanzmesser von Cerebotani; vgl. dazu W. Jordan, Zeitschr. f. Vermess. 13 (1884), p. 389.

gelesen. Für beide Konstruktionen ist Bedingung feste Aufstellung und bei nicht festen Zielen gleichzeitige Visur durch zwei Beobachter. Dies wird günstiger durch *Reflexionsdistanzmesser* nach dem Prinzip des Spiegelsextanten, wodurch beide Zielungen zu einer einzigen vereinigt werden. An der Distanzbasis sind angebracht zwei Spiegel, ein fester und ein beweglicher; bei $D = \infty$ sind beide Spiegel parallel, bei Beobachtung (Fernrohr am festen Spiegel) eines endlich entfernten Gegenstandes gibt bei Deckung des reflektierten Bildes mit dem direkt gesehenen Zielpunkte der an einer Kreisteilung oder mikrometrisch zu messende Drehwinkel des beweglichen Spiegels $\frac{1}{2}\varepsilon$. Auch nach diesen Prinzipien sind eine große Zahl von Instrumenten mit Basislineal konstruiert worden, zu denen fast alljährlich einige hinzuzukommen pflegen.

Aus der einfachen Beziehung $D = L \frac{\rho}{\varepsilon}$ folgt, daß wenn L als fehlerfrei betrachtet werden kann, der mittlere zu fürchtende, allein vom Fehler m_ε des parallaktischen Winkels ε herrührende Distanzfehler ist $m_D = \frac{D^2 m_\varepsilon}{L \rho}$. Unter günstigen Verhältnissen (gute Beleuchtung, kein Flimmern) bei scharf bezeichneten Zielpunkten, absolut fest aufgestelltem (unveränderlichem, von Temperatur usw. nicht beeinflusstem) Instrument ist es möglich, die Messungsgenauigkeit für einen Winkel wie ε bei Verwendung guter Fernrohre und geeigneter Mikrometer innerhalb 1'' zu halten. Diese Grenze ist aber bei der praktischen Verwendung (nicht scharf bezeichnete, schwankende oder sich bewegende Ziele) nicht zu erreichen. Bei dioptrischer Zielung ist das Maximum der erreichbaren Zielgenauigkeit etwa 10''—15'', bei Freihandinstrumenten etwa 1'. Die theoretisch erreichbare Genauigkeit m_D wäre demnach für $L = 2m$ (die Länge der Basisschiene beträgt in der Regel etwa 1 bis 3 m) und $m_\varepsilon = \pm 1''$ die folgende:

D	50	1000	5000	10 000 m
m_D	0,6	2,4	60	240 m

Unter günstigen Verhältnissen, mit guten Instrumenten, bei scharfer Bezeichnung der Zielpunkte unternommene Genauigkeitsbestimmungen haben ergeben, daß bei der praktischen Verwendung mindestens 3 bis 5 mal größere Fehlerbeträge zu erwarten sind. Die Leistung untergeordneter Instrumente ist eine entsprechend geringere. (Hingewiesen sei noch auf den Ausdruck für den relativen Fehler

$$\frac{m_D}{D} = D \frac{m_\varepsilon}{L \rho}.$$

Erwähnt seien hier auch Distanzmeßvorrichtungen, welche eine kleine Basismessung (konstante Meßbandlänge usw.) beanspruchen. Hierzu gehört zunächst das „Distanzprisma von Bauernfeind“¹³³), welches gestattet einen Winkel abzustecken, der um einen kleinen Betrag vom rechten Winkel abweicht, also beim Abstecken dieses Winkels von beiden Enden einer Basis aus ein langgestrecktes gleichschenkliges Dreieck mit dem parallaktischen Winkel ε ergibt, der so bemessen ist, daß D ein Vielfaches (50, 100) von L ist. Hierhin gehört auch der Distanzmesser nach *Souchier*¹³⁴), ein vierseitiges Prisma (Wollastonsches Prisma), welcher Winkel von 90° und $(90^\circ + C)$ abzustecken gestattet, also über einer zu messenden Grundlinie ein langgestrecktes rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Winkeln bildet. Auch der gewöhnliche Winkelspiegel und das *Bauernfeind'sche* Winkelprisma zum Abstecken rechter Winkel können zur Distanzmessung verwendet werden, indem nach Absteckung einer Grundlinie rechtwinklig zum Zielstrahl vom Zielpunkt aus nun auch am anderen Ende der Grundlinie ein rechter Winkel gebildet wird, sodaß sich ein dem ersten Dreieck ähnliches kleines rechtwinkliges Dreieck an der Grundlinie ergibt. Der bei der Absteckung eines Winkels mit einem Prisma zu erwartende Fehler beträgt etwa $1'$, wonach sich der Entfernungsfehler a priori beurteilen läßt.

20. Tachymetrische Instrumente und Aufnahmen. Von den verschiedenartigen tachymetrischen Instrumenten, auf deren Einzelheiten hier nicht eingegangen werden kann¹³⁵), hat die größte Bedeutung der mit Vertikalkreis und festen Distanzfäden im Fernrohr ausgerüstete Theodolit, vielfach vervollständigt durch einen Richtkompaß oder eine Kreisbussole. Nach p. 86 ist hierfür bei lotrecht stehender Distanzskala die projizierte wagerechte Entfernung für das astronomische Fernrohr $S = a \cos \alpha + kL \cos^2 \alpha$, für das *Porro'sche* anallaktische Fernrohr $S = kL \cos^2 \alpha$, und bei rechtwinklig zur Ziellinie aufgestellter Distanzskala $S = (Lk + a) \cos \alpha + l_2 \sin \alpha$ ($l_2 =$ Abstand der Mittenzielung vom Skalenfußpunkt). Der Höhenunterschied Δh des Mittenzielpunktes an der Distanzskala gegen die Instrumentachse ist beim einfachen Fadendistanzmesser mit vertikaler Latte $\Delta h = Stg \alpha = a \sin \alpha + kL \sin \alpha \cos \alpha$, und beim *Porro'schen* Fernrohr $\Delta h = \frac{1}{2} kL \sin 2\alpha$; bei rechtwinklig zur Ziellinie gerichteter Skala

133) *Bauernfeind*, Vermessungskunde 1, p. 192 u. 395.

134) Archiv f. d. Artill. u. Ingen.-Offiz. d. deutsch. Reichsheeres, April 1893 und Zeitschr. f. Vermess. 24 (1895), p. 177.

135) Vgl. *Jordan*, Handbuch 2, Kap. XIV und *Hartner-Doležal* 2, § 21—27, mit weiterer Literatur; speziell sei verwiesen auf *Goulier*, Tachéométrie.

$\Delta h = kL \sin \alpha$. Wie bei der trigonometrischen Höhenmessung p. 78 kommt hierbei Instrument-, bez. Zielhöhe in Betracht, sodaß die Höhenformel z. B. lautet $h_n = h_p + i - l_z + \frac{1}{2}kL \sin 2\alpha$. Der Einfluß der Erdkrümmung und Refraktion wird bei der tachymetrischen Höhenmessung in der Regel außer acht gelassen.

Zur Ausrechnung der Entfernung und Höhenunterschiede dienen verschiedene Hilfsmittel. „*Tachymetertafeln*“, das sind Tabellen, aus denen mit den Argumenten L und α (bez. Zenitdistanz z) die gesuchten Werte S und Δh entnommen werden können¹³⁶). „*Tachymetrische Rechenschieber*“, das sind logarithmische Rechenschieber für die in Betracht kommenden Funktionen von verschiedener Konstruktion; desgleichen eine ganze Reihe von „*Tachymeterdiagrammen*“ und sonstigen Rechenhilfsmitteln¹³⁷). Erwähnt sei noch Teilung des Vertikalkreises nach Gefällprozenten, nach der Funktion $\sin \alpha \cos \alpha$ (Tachymeter von *Goulier*), sowie logarithmische Teilung (*Schell's* und *Tichy-Starke's* logarithmischer Tachymeter). Eine unmittelbare Reduktion der bei geeigneter Ziellinie bestimmten schiefen Entfernung wird in verschiedener Weise erstrebt. Es sei auf die zahlreichen italienischen Anordnungen¹³⁸) verwiesen, sowie auf die neueste Konstruktion von *Hammer-Fennel*¹³⁹), welche mittels eines im Gesichtsfeld des Fernrohrs erscheinenden Diagramms unmittelbar wagerechte Entfernung und Höhenunterschied gibt. Eine andere Art zur unmittelbaren Angabe dieser Werte ist bei den „*Schiebetachymetern*“ verwendet¹⁴⁰); es ist hierbei ein Fadendistanzmesser derart mit Schiebescalen verbunden, daß, nachdem am Fadendistanzmesser zunächst die schiefe Entfernung abgelesen und an einer Fernrohrskala in verjüngtem Maßstabe eingestellt ist, an je einem, den Naturlinien entsprechenden horizontalen und vertikalen Maßstab unmittelbar Entfernung und Höhe zur Ablesung gebracht wird.

136) *W. Jordan*, *Hilfstafeln für Tachymetrie*, 2. Aufl., Stuttgart 1899.

137) *Jordan*, *Handbuch* 2, § 176; eine kurze Übersicht gibt *O. Lueger*, *Lexikon der gesamten Technik*, Stuttgart, Art. Tachymetrie.

138) *J. Porro*, *Riv. di topogr. e cat.* 8 (1895/96), p. 139 (sthenallaktisches Fernrohr); *Baggi*, *ibid.* p. 151 u. 9 (1896/97), p. 17; *Roncagli-Urbani*, *ibid.* 8 (1895/96), p. 28, 146; *Reina*, *ibid.* 9 (1896/97), p. 65; *Roncagli*, *ibid.* p. 177 u. 10 (1897/98), p. 5; *M. Nasso*, *ibid.* 11 (1898/99), p. 145; 12 (1899/1900); p. 9; 15 (1902/03), p. 1, 18, 53, 75.

139) *E. Hammer*, *Der Hammer-Fennel'sche Tachymeter-Theodolit*, Stuttgart 1901.

140) Zuerst 1865 von *Kiefer* in Cöln angewandt; vgl. dazu *E. Puller*, *Zeitschr. f. Vermess.* 25 (1896), p. 375; 30 (1901), p. 531; 32 (1903), p. 649. Ferner ist zu nennen: *F. Kreuter*, *Patentiertes Quotier-Instrument für generelle Aufnahmen in kouiertem Terrain*, Wien 1874; *O. Fennel*, *Zeitschr. f. Vermess.* 7 (1878), p. 57.

Neben der für die Tachymetrie besonders geeigneten Fadendistanzmessung haben die übrigen in Nr. 19 ihrem Prinzip nach erwähnten Distanzmessungsmethoden eine geringere Bedeutung. „Distanzmessende Schrauben“ werden auch in Verbindung mit dem Fadendistanzmesser angeordnet, andere Konstruktionen z. B. *Eckhold's* Omnimeter, *Sanguet's* Tachymeter mit Hebelwerk usw., haben keine allgemeine Bedeutung erlangt.

Die Durchführung einer topographischen Aufnahme gründet sich in der Regel auf eine Horizontal- und Vertikaltriangulierung mit nachfolgender Polygonisierung. Ist das Instrument auf einem nach Lage und Höhe gegebenen Punkt aufgestellt, so gibt dasselbe unmittelbar Lage und Höhe der angezielten Geländepunkte an, nämlich durch Horizontal- und Vertikalrichtungen und Entfernung bez. Höhenunterschied. Das Ergebnis der Aufnahme ist schließlich ein topographischer Plan mit Höhenzahlen und Horizontalkurven, vgl. p. 73. Über die Genauigkeit der Bestimmung von Entfernung und Höhe gilt das bei Distanzmessung p. 88 und trigonometrischer Höhenmessung p. 81 Gesagte. Im allgemeinen begnügt man sich, dem Zweck der topographischen Aufnahme entsprechend, mit einer mäßigen Genauigkeit, sodaß für Zielungen bis zu einigen 100 m die gegenseitige Lage und Höhe der Punkte innerhalb einiger dm genau bestimmt wird, wobei auf die letztere ein höherer Wert gelegt wird, als auf erstere, und richtet zur Erzielung dieser für Geländeaufnahmen hinreichenden Genauigkeit Instrumente (bequeme Ablesung) und Verfahren zu möglichst rascher und glatter Feldarbeit ein. Verschärfung der Distanzmessung, welche für die topographische Geländeaufnahme nicht in Betracht kommt, sondern nur dann, wenn die Tachymetrie die exakte Linearmessung ersetzen soll, ist durch entsprechende Einrichtung der Instrumente, „Präzisionstachymeter“ und „Präzisionslatten“ (z. B. *Schell's* und *Tichy-Starke's* logarithmischer Tachymeter) zu erzielen; vgl. p. 88. Die Präzisionstachymetrie ist ebenso wie die Präzisionsnivellierung an beschränkte Arbeitszeit (günstige Witterung) und kurze Zielweite (Refraktion) gebunden. Bei den tachymetrischen Messungen ist auch zu erwähnen die Höhenaufnahme auf Grund vorhandener, durch Linearmessung gewonnener Lagepläne, wobei in unebenem Gelände anstatt des Nivellierinstrumentes (p. 73) mit Vorteil der Höhenkreis des Theodolits verwendet wird, indem die Entfernungen aus der Karte genommen werden, sodaß zu rechnen ist nach $\Delta h = stg\alpha$, wozu Rechenschieber und Diagramme als Hilfsmittel dienen.

21. Die Meßtischaufnahme. Als eine besondere Methode der tachymetrischen Messungen ist zur Zeit die „topographische Meßtisch-

aufnahme“ zu betrachten, nachdem der „Meßtisch“ bei exakten Spezialaufnahmen durch die numerischen Methoden ersetzt ist. Der „*Meßtisch*“ ist ein auf einem Stativ mittels eines theodolitähnlichen Dreifußunterbaues aufgestellter kleiner Zeichentisch, dessen mit einer Libelle horizontierte Fläche die ebene Vermessungsfläche repräsentiert. Zur Aufzeichnung der Richtungslinien dient das eine lotrechte Absehebene liefernde „*Dioptrilineal*“ (dioptrische Regel) oder die „*Fernrohrkippregel*“ (Perspektivlineal). In einfachster Form besteht diese Projektionsvorrichtung aus einem eine Säule tragenden Lineal, an der eine horizontale Kippachse gelagert ist. Diese trägt das die Vertikalebene liefernde Fernrohr, analog der Theodoliteinrichtung. Anordnung der Libellen, Bedingungen für die Achsen und Ziellinie, Prüfung und Berichtigung entspricht dem Theodolit (vgl. die Lehrbücher). Wird das Fernrohr der einfachen Kippregel mit Distanzfäden ausgerüstet, so erhält man die „*distanzmessende Kippregel*“, kommt ein Höhenkreis oder Höhenbogen mit Libelle hinzu, so erhält man die „tachymetrische Kippregel“ („Universalkippregel“). Ist der Meßtisch auf einem Messungspunkte („Station“) so aufgestellt, daß bei horizontaler Platte der zugehörige Punkt der Zeichnung genau lotrecht über dem Feldpunkte sich befindet und im Fernrohr diejenigen Zielpunkte eingestellt erscheinen, an deren Bilder die Linealkante angelegt wird, so ist er „*zentriert*“ und „*orientiert*“. Wird in dieser Weise bei genau orientiertem Tisch das Lineal scharf an den Stationspunkt angelegt und gleichzeitig der zu bestimmende Punkt mit dem Fernrohr eingestellt, so gibt die am Lineal ausgezogene Linie die Richtungslinie an; wird die Entfernung durch „Längen“- oder „Distanz“-Messung (p. 86) ermittelt und mit dem Maßstab in der entsprechenden Verjüngung eingetragen, so ist der neue Punkt bestimmt („stationiert“) und kann wieder als Meßtischstation dienen; wird das fortgesetzt, so erhält man einen graphisch bestimmten Polygonzug, vgl. p. 54.

Werden auf mindestens zwei bekannten Standpunkten A und B die Richtungslinien nach einem Neupunkt P gezogen, so hat man Punktbestimmung durch „Vorwärtseinschneiden“ (vgl. die trigonometr. Lösung p. 40); wird auf einem gegebenen Standpunkt A die Richtungslinie nach P gezogen, der Meßtisch danach nach P gebracht, hier nach $P-A$ orientiert, an B angelegt und gezielt, durch den Schnitt $A-P$ und $P-B$ der Neupunkt P bestimmt, so hat man Punktbestimmung durch „Seitwärtseinschneiden“ (vgl. p. 40). Soll ein Neupunkt dadurch bestimmt werden, daß auf ihm die Richtungslinien nach drei der Lage nach gegebenen Punkten bestimmt werden, so hat man das graphische „Rückwärtseinschneiden“ (p. 41). Die

Konstruktion kann in verschiedener Weise erfolgen. Zunächst durch Aufzeichnung des Strahlensystems (z. B. auf Pauspapier) und Orientierung desselben nach der Reihe der Bildpunkte durch Probieren; ein mechanisches Hilfsmittel hierzu ist der mit Gradscheibe und einstellbaren Armen versehene „Standfinder“. Die Bestimmung des Punktes

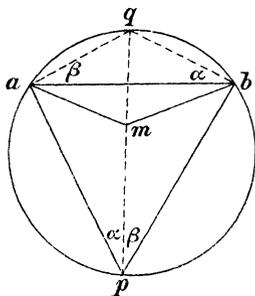


Fig. 24.

als Schnittpunkt der Bestimmungskreise durch Konstruktion derselben mittels Einstellung der Peripheriewinkel ist benutzt bei „Bauernfeind's Einschneidezirkel“¹⁴¹⁾. Zu einer direkten konstruktiven Lösung ist z. B. *Collins'* Hilfs- punkt (vgl. p. 42) geeignet. Ist amb (Fig. 24) das Bilddreieck des Naturdreiecks AMB , so wird auf dem Neupunkt P zunächst ab nach M orientiert und von a aus nach B gezielt, sodann wird ba nach M orientiert und von b aus nach A gezielt. Der Schnitt der beiden

gezogenen Richtungslinien liefert das Bild q des *Collin's*chen Hilfs- punktes und die Verbindungslinie qm einen Ort für das Bild p des Neupunktes P . Die vollständige Bestimmung von p kann dann durch Seitwärtseinschneiden erfolgen.

Größere Bedeutung als diese direkte und die mechanischen Lösungen hat für die eigentliche Meßtischpraxis die „indirekte“ Lösung. Der Meßtisch wird nach Augenmaß oder mit Hilfe einer Orientierbussole genähert orientiert und die Richtungslinien mit der Kippregel gezogen. Infolge der nur genäherten Orientierung ergibt sich statt eines Schnittpunktes das „fehlerzeigende Dreieck“, dessen Form von der gegenseitigen Lage der Punkte und dem Fehler der Orientierung abhängt. Über die Lage von p zum Fehlerdreieck hat *J. G. Lehmann*¹⁴²⁾ folgenden Satz aufgestellt:

Der Punkt p liegt innerhalb oder außerhalb des Fehlerdreiecks, jenachdem P innerhalb oder außerhalb von AMB liegt. Im letzten Falle liegen p und das Fehlerdreieck zu verschiedenen Seiten der mittleren Visur, wenn P innerhalb des durch A, M, B gehenden Kreises oder in einem Scheitelwinkel des Dreiecks sich befindet; dagegen liegen p und das Fehlerdreieck auf derselben Seite der mittleren Visur, wenn P außerhalb des durch A, M, B , gehenden Kreises

141) *C. M. v. Bauernfeind*, Münch. Abhandl. 11 (1871), p. 83; *Bauernfeind*, Vermessungskunde 2, p. 189.

142) Anleitung zum vorteilhaften und zweckmäßigen Gebrauche des Meßtisches, Dresden 1820. Vgl. ferner *F. Hartner*, Wien. Ber. 2 (1849), Novemberheft, p. 216; *Hartner-Doležal* 1, p. 891.

einer Dreiecksseite gegenüber liegt. Die Abstände des Punktes p von den durch a, b, m gezogenen Visierlinien verhalten sich wie die Entfernungen des Punktes p von den Punkten a, m, b oder des Punktes P von A, M, B .

Ein praktisch sehr brauchbares Orientierungsverfahren besteht darin, daß man zwei Fehlerdreiecke zu Hilfe nimmt. Man orientiert zunächst nach dem ersten Fehlerdreieck angenähert auf Grund des vorstehenden Satzes und überdreht dann den Tisch absichtlich, sodaß die Orientierung nach der entgegengesetzten Seite gefälscht wird. Man erhält dann ein zweites Fehlerdreieck, dessen homologe Ecken man mit denen des ersten verbindet, dadurch kommt man dem Punkt p sehr nahe. Über Möglichkeit und Günstigkeit der Lösung vgl. p. 43.

Aus der zusammenwirkenden Anwendung dieser Bestimmungsmethoden ergibt sich die Meßtischaufnahme; bei der Anwendung im großen wird eine Triangulierung zugrunde gelegt, welche auf dem Meßtisch graphisch weiter geführt wird. Über die tachymetrischen und die Höhenmessungen gilt das früher (p. 90) Gesagte; auf Grund der gewonnenen Höhenzahlen werden die Horizontalkurven entworfen. Bei einheitlich durchgeführten Landesaufnahmen wird der gewählten Projektionsart entsprechend (vgl. p. 13 und Nr. 8) eine passende Blatteinteilung angeordnet. Beispielsweise ist bei der preußischen Landesaufnahme das Staatsgebiet auf Grund der Gradeinteilung des *Bessel'schen* Ellipsoides in Abschnitte zerlegt. Der von je zwei aufeinanderfolgenden Breiten- und Längengraden umschlossene Flächenteil, eine „Gradabteilung“, wird nach der Breite in 10, nach der Länge in 6 Teile zerlegt, deren jedes ein „Meßtischblatt“ bildet, welches in seinen Eckpunkten in 1 : 25 000 aufgetragen (sog. „preußische Polyederprojektion“, vgl. VI 1, 4), auf dem Meßtisch nach Eintragung der nach Länge und Breite gegebenen Dreieckspunkte zur Feldaufnahme verwendet wird. Ein allgemeiner Ausdruck für die Genauigkeit der Meßtischaufnahme in Bezug auf die Lagemessung, welche naturgemäß wesentlich abhängig ist vom Verfahren, den gegebenen Grundlagen, dem Maßstab usw., läßt sich gewinnen durch die Angabe, daß sie derjenigen einer exakten Zeichnung entspricht, bei der der Fehler der Punktorte innerhalb $\pm 0,1$ mm bleibt, und die Richtungsgenauigkeit im günstigsten Fall etwa durch $\pm 1'$ ausgedrückt werden kann.

Der Meßtisch ist, seit er durch Prätorius in Altdorf (*mensula praetoriana*) mit Beginn des 17. Jahrhunderts allgemein bekannt wurde, bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts eines der wichtigsten geometrischen Instrumente gewesen. Für die Kartographie brachte die Ausbreitung der Meßtischaufnahme einen wesentlichen Fortschritt mit sich, indem

sie, gestützt auf die Triangulierung, den Schritt von den mit Bussole, Quadrant, Meßschnur und Schrittmaß gewonnenen Landeskrokis zu einer zusammenhängenden, systematischen Aufnahme erleichterte, welche besonders in den exakten graphischen Landesvermessungen Bayerns (1808—1837) in 1 : 5000 und Württembergs (1818—1840) in 1 : 2500 ihren Höhenpunkt erreichten¹⁴³). Nach der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ist die Meßtischaufnahme für die Spezialvermessungen, insbesondere die modernen Katastervermessungen, mehr und mehr in den Hintergrund getreten. Bei topographischen Aufnahmen (Horizontalkurvenbearbeitung p. 92) wird sie für solche Gebiete noch von Bedeutung bleiben, in denen nicht die kartographischen Ergebnisse der speziellen numerisch durchgeführten Landesvermessung, vervollständigt durch spezielle Höhenmessung, zur Herstellung der topographischen Spezialkarten zur Verfügung stehen. Der große Vorteil des Meßtisches besteht darin, daß unmittelbar nach der Natur gezeichnet wird, was die Herstellung leicht lesbarer Karten sehr fördert¹⁴⁴).

22. Flüchtige Aufnahmen. Exakte spezielle Landesvermessungen mit Anwendung der vorbesprochenen Methoden, deren Ergebnisse geometrische und topographische Spezialkarten sind, liegen zur Zeit nur für kleine Gebiete der Erdoberfläche (Westeuropa, Teile der Vereinigten Staaten, einzelne Teile außereuropäischer Staaten und einige Küsten- und Kolonialgebiete) vor; für andere Gebiete (Osteuropa, den größten Teil der Vereinigten Staaten, kleine Teile Südamerikas, Kapland, Vorderindien, Ostaustralien, Japan) bestehen zur Zeit nur generelle Aufnahmen mit trigonometrischer Grundlage, wobei die Einzelaufnahmen bis jetzt weniger speziell und exakt und nicht im Zusammenhang zur Durchführung gekommen sind; für den Rest, d. h. also den weitaus größten Teil der Erdoberfläche, beruht das vorhandene Kartenmaterial auf „Routenaufnahme“, entweder planmäßig ein zusammenhängendes Kartenbild gebend oder als Einzelergebnisse von Erkundungsreisen. Hierbei ist für die „Grundrißaufnahme“ das geodätische System ein an astronomisch bestimmte Punkte angeschlossenes System von Bussolenzügen (p. 58), meistens aufgenommen mit Freihandbussole, wobei die Entfernung aus der Marschzeit hergeleitet wird, für die „Höhenaufnahme“ barometrische Höhenmessung mit Federbarometer, kontrol-

143) *W. Jordan-K. Steppes*, Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882.

144) Für militärtopographische Meßtischaufnahmen sei genannt: Vorschrift für die topographische Abteilung der Landesaufnahme. Heft I. Das topographische Aufnehmen, Berlin 1898; *B. Schulze*, Das militärische Aufnehmen unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der kgl. preuß. Landesaufnahme, Berlin und Leipzig 1903.

liert durch Quecksilberbarometer und Siedethermometer¹⁴⁵). Neuerdings sind automatische Methoden von *Th. Ferguson* ausgebildet worden¹⁴⁶).

In historischer Hinsicht sei hier erinnert an die Wegekarten der Römer, *Itineraria Antonini, Alexandri etc.*, vornehmlich an die sogenannte *Peutinger'sche Tafel*.

Als eine besondere Methode der topographischen Messungen kommt neuerdings für bestimmte Aufgaben in Betracht die Photogrammetrie (vgl. den folgenden Art., *S. Finsterwalder*), die man in ihrer besonderen geodätischen Anordnung unter Benutzung des „Phototheodolits“ als „Phototachymetrie“ oder „Phototopographie“ bezeichnet.

145) Weiteres mit Literatur findet man bei *Jordan*, Handbuch 2, § 183; *G. Neumayer*, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, 2. Aufl., Berlin 1888; 3. Aufl., Hannover 1905. Ein durchgearbeitetes Beispiel mit Fehlerberechnung enthält: *W. Jordan*, Physische Geographie und Meteorologie der lybischen Wüste, Cassel 1876. Spezialschriften sind: *Kaltbrunner*, Manuel du voyageur, Zürich 1879 (auch deutsch von *Kollbrunner*, Zürich 1881); *Hints to travellers* edited by the Royal geogr. society, London 1883 (8. ed. 1901); *E. de Larminat*, Topographie pratique de reconnaissance et d'exploration, Paris (1905). Man vgl. ferner: *E. Hammer*, Die methodischen Fortschritte der geographischen Landmessung, Geogr. Jahrb. 22 (1899), p. 37; 25 (1902), p. 343.

146) Automatic surveying instruments and their practical uses on land and water (Introduction by *E. Hammer*), London 1904.

(Abgeschlossen im Okt. 1905.)

VI 1, 2. PHOTOGRAMMETRIE.

VON

S. FINSTERWALDER

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

1. **Einleitung.** Historisches. Innere und äußere Orientierung. Eigentliche und abgeleitete Photographien.
2. **Apparate.** Das Objektiv. Vorrichtung zur inneren Orientierung. Bestimmung von Hauptpunkt und Bildweite. Photogrammter und Phototheodolite.
3. **Ausmessung der Bilder.** Direkte Ausmessung nach *J. Porro*. Ermittlung von Winkeln aus den Koordinaten der Bildpunkte. Zusammenschließen mehrerer Bilder, die vom gleichen Standpunkt aus aufgenommen sind.
4. **Das Rückwärtseinschneiden.** Räumliches Rückwärtseinschneiden nach drei Punkten. Das räumliche Problem der 6 Punkte und das ebene Problem der 5 Punkte.
5. **Das Vorwärtseinschneiden und die Rekonstruktion der Objekte bei bekannten Standpunkten.** Höhenkontrolle. Gegnerische Kernpunkte. Möglichkeit der Rekonstruktion aus einer Anzahl von Photographien. Zeichnung eines Risses aus zwei Photographien.
6. **Flüchtige Aufnahmen. Stereophotogrammetrie. Mechanismen.**

Literatur.

Bücher.

- E. Deville*, Photographic surveying, Ottawa 1895.
- E. Doležal*, Die Anwendung der Photographie in der praktischen Meßkunst, Halle 1896 (*Doležal*, Anwend. d. Phot.).
- C. Koppe*, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889 (*Koppe*, Photogrammetrie).
- Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung, Braunschweig 1896 (*Koppe*, Wolkenmessung).
- A. Laussedat*, Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. T. II. Iconométrie et métrophotographie, Paris 1901—03 (*Laussedat*, Métrophotographie).
- G. Le Bon*, Les levers photographiques, 2 vol., Paris 1889.
- V. Legros*, Sommaire de photogrammetrie, Paris 1891.

P. Paganini, Fotogrammetria, Mailand 1901.

F. Schiffner, Die photographische Meßkunst, Halle 1892.

F. Steiner, Die Photographie im Dienste des Ingenieurs, Wien 1891 (*Steiner*, Phot.).

Monographien.

S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung 6 (1897), 2. Heft, p. 1, Leipzig 1899 (*Finsterwalder*, Grundlagen).

— Die Photogrammetrie als Hilfsmittel der Geländeaufnahme. In: *G. Neumayer*, Anleitung zu wissenschaftl. Beobachtungen auf Reisen, 3. Aufl., Hannover 1905.

G. Hauck, Neue Konstruktionen der Perspektive und Photogrammetrie (Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme), J. f. Math. 95 (1883), p. 1; 97 (1884), p. 261; 98 (1885), p. 304; 108 (1891), p. 25; 111 (1893), p. 207; 128 (1905), p. 91.

C. Pulfrich, Neue stereoskopische Methoden und Apparate, 1. Lief., Berlin 1903.

F. Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie, Leipzig und Berlin 1904.

1. Einleitung. Die Photogrammetrie (Bildmeßkunst) hat die Aufgabe, aus photographischen Bildern das dargestellte Objekt oder einzelne Abmessungen desselben zu ermitteln. Die Lösung dieser Aufgabe war durch die *Rückwärtskonstruktionen der Perspektive*¹⁾ und Methoden der Küstenaufnahme aus perspektivischen Handskizzen²⁾ vorbereitet und wurde zuerst von *A. Laussedat* (1852—59)³⁾ versuchsweise auf topographische Vermessungen angewandt. Im Anschlusse hieran beschäftigte sich *J. Porro*⁴⁾ seit 1855 mit der instrumentellen Seite. *A. Meydenbauer*⁵⁾ pflegt seit 1867 vorzugsweise die Architekturphotogrammetrie, die er zu hoher Vollendung brachte. *W. Jordan*⁶⁾ (1876) und *C. Koppe*⁷⁾ (1889) förderten das Problem vom geodätischen Standpunkt aus, *G. Hauck*⁸⁾ (1883) nach der theoretischen Seite. In großem Maßstabe wurde die Photogrammetrie zuerst praktisch verwendet in Italien von *L. P. Paganini*⁹⁾ seit 1880 und in Canada von *E. Deville*¹⁰⁾

1) *J. H. Lambert*, Freye Perspektive, Zürich 1759, 8. Abschnitt, p. 203.

2) *Beautemps-Beaupré* 1791—93, beschrieben in: Méthode pour la levée et la construction des cartes et des plans hydrographiques, Paris 1808.

3) Paris C. R. 50 (1860), p. 1127.

4) *E. Doležal*, Photogr. Correspondenz, 1902, p. 82.

5) Zeitschr. f. Bauwesen 17 (1867), p. 61.

6) Zeitschr. f. Vermess. 5 (1876), p. 1.

7) Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889.

8) J. f. Math. 95 (1883), p. 1; 97 (1884), p. 261; 98 (1885), p. 304; 108 (1891), p. 25; 111 (1893), p. 207; 128 (1905), p. 91.

9) Fotogrammetria, Mailand 1901.

10) Photographic Surveying, Ottawa 1889, 2. Aufl. 1895.

seit 1889. Mit der Ballonphotogrammetrie beschäftigt sich S. Finsterwalder seit 1890. Durch C. Pulfrich wurde seit 1900 die Stereoskopie in den Dienst der Photogrammetrie gestellt. Reiches Material zur Geschichte der photogrammetrischen Methoden und Apparate hat A. Laussedat gesammelt.

Die photographischen Bilder sind in der Regel als *ebene Perspektiven* des Objektes aufzufassen. Die Entfernung des perspektivischen Zentrums (Linsenmittelpunkts) von der bildaufnehmenden Ebene (lichtempfindlichen Schicht) heißt *Bildweite* (Distanz), der Fußpunkt der Senkrechten von ersterem auf letztere *Hauptpunkt* (Augpunkt), die Senkrechte selbst *Achse der Perspektive* (bezw. der photographischen Kamera). Die Vertikalebene durch die Achse der Perspektive wird als *Hauptvertikalebene*, ihr Schnitt mit der Bildebene als *Hauptvertikale* bezeichnet. Die Horizontalebene durch das Zentrum schneidet die Bildebene nach dem *Horizont*.

Hauptpunkt und Bildweite bilden die *innere Orientierung* einer Photographie. Zur Rekonstruktion des Objektes sind außer den Elementen der innern Orientierung der verwendeten Photographien noch Abmessungen desselben, darunter wenigstens *eine* Länge, als bekannt anzusehen. Bei den wichtigsten Objekten (Terrainflächen, Architekturen) spielt die *Vertikale* eine ausgezeichnete Rolle, und man wird deshalb die Gesamtheit der Lote, bezw. deren gemeinsamen unendlich fernen Punkt als Bestandteil des Objektes ansehen. Ebenso sollen die Punkte, von welchen die Photographien aufgenommen wurden (Standpunkte), als Bestandteile des zu ermittelnden Objektes gelten. Alle Abmessungen, welche von dem so erweiterten Objekt zur Rekonstruktion herangezogen werden, bilden die *äußere Orientierung*, z. B. Länge der Standlinie, Neigung der Achsen der Photographien, Horizont usw.

An photographischen Bildern kommen in Betracht: 1. *wirkliche* oder *eigentliche Photographien* und zwar a) solche mit bekannter innerer Orientierung, wie sie von photogrammetrischen Apparaten geliefert werden, b) nicht orientierte Photographien, wie sie von gewöhnlichen photographischen Apparaten geliefert werden, 2. *uneigentliche* oder *abgeleitete Photographien*¹¹⁾, nämlich Perspektiven wirklicher Photographien, wie sie die Reproduktionstechnik im allgemeinen liefert. Für genaue Arbeiten sind nur die Originalnegative oder davon abgeklatzte Glasdiapositive als eigentliche Photographien aufzufassen; Papierpositive, wegen der Veränderung in den Bädern, die einer homo-

11) Finsterwalder, Grundlagen, p. 8.

genen Deformation entspricht, und Vergrößerungen, die in der Regel eine kleine perspektivische Verzerrung erfahren, dagegen nur als abgeleitete.

Abgeleitete Bilder können in der Regel nicht als Schnitte des Strahlenbündels, welches das ursprüngliche Bild erzeugte, aufgefaßt werden. Dazu sind zwei Bedingungen erforderlich, die man folgendermaßen formulieren kann: Das Strahlenbüschel in der Ebene des abgeleiteten Bildes, welches von einem beliebigen Punkte nach Punkten der unendlich fernen Geraden gezogen werden kann, muß dem Büschel, das im Strahlenbündel den unendlich fernen Punkten der Bildebene entspricht, kongruent sein. Oder: den imaginären Kreispunkten des abgeleiteten Bildes müssen im Bündel Strahlen nach dem imaginären Kugelkreis entsprechen.

2. Apparate. Der wichtigste Bestandteil derselben ist das *photographische Objektiv*¹²⁾, dessen optische Achse senkrecht zur Bildebene steht und jene im Hauptpunkt trifft. Von räumlichen Objekten kann man nur dann scharfe Bilder erzielen, wenn die Bildweite klein ist gegenüber der Entfernung der nächstgelegenen Objektpunkte. Die Bildweite ist dann von der Brennweite wenig verschieden und wird in der Regel unveränderlich gleich letzterer genommen; die daraus entspringende Unschärfe kann durch Einblenden aufgehoben werden. Das Objektiv soll perspektivisch zeichnen. Ist α der Winkel eines die Blendenmitte durchsetzenden Strahles mit der Achse vor Eintritt in die Linse und h die Entfernung des von ihm erzeugten Bildpunktes vom Hauptpunkt der Photographie, so zeichnet die Linse perspektivisch, falls $h : \operatorname{tg} \alpha$ einer Konstanten (der Bildweite) gleich ist. Als Standpunkt der Aufnahme dem Objekt gegenüber hat der Punkt zu gelten, in welchem die Verlängerungen derjenigen in die Linse eintretenden Strahlen, die nach der Brechung im Vorderteil derselben die Blendenmitte durchsetzen, die Achse schneiden. Der so definierte Standpunkt und das um die Bildweite vom *Hauptpunkt* entfernte Zentrum der Perspektive fallen bei den in der Praxis meist verwendeten Objektiven nahe zusammen, nur bei den Teleobjektiven liegt ersterer am Vorderende oder innerhalb des Linsensystems, letzteres objektseits um den größeren Teil der Brennweite außerhalb. Bis auf einige Minuten genau zeichnen perspektivisch: *Teleobjektive* innerhalb $2\alpha = 25^\circ$, *Aplanate* innerhalb $2\alpha = 50^\circ$, *Kollineare*, *Orthostigmaten*, *Protare*, *Doppelanastigmaten* innerhalb $2\alpha = 60-75^\circ$, *Weit-*

12) *M. v. Rohr*, Theorie und Geschichte des photogr. Objektivs, Berlin 1899; *A. Gleichen*, Photogr. Optik, Leipzig 1905.

winkel innerhalb $2\alpha = 80-100^\circ$, der *Hypergondoppelanastigmat* bis $2\alpha = 140^\circ$. Bei großen Winkeln α werden die durch *Unebenheit* der käuflichen *Glasplatten* verursachten Fehler erheblich. Die innere Orientierung der Bilder einer Kamera verlangt eine *stabile Verbindung von Linse und lichtempfindlicher Fläche*. Auf letzterer müssen sich mindestens *zwei Marken* (meist ein rechteckiger Rahmen, eventuell mit Fadenkreuz), die mit der Kamera fest verbunden sind, abbilden. In bezug auf diese Marken wird die Lage des Hauptpunktes festgelegt.

Bestimmung des Hauptpunktes. Man schraubt die Linse ab, ersetzt die lichtempfindliche Fläche durch einen Spiegel, richtet auf diesen ein Fernrohr derart, daß sich sein Fadenkreuz mit dem Bilde seines Spiegelbildes deckt, schraubt die Linse wieder an, ersetzt den Spiegel durch eine photographische Platte und photographiert das Fadenkreuz des Fernrohres, dessen Bild dann den Hauptpunkt ergibt. Oder einfacher: Man stellt den Apparat mit der lichtempfangenden Fläche horizontal und photographiert in dieser Stellung bei enger Blende einige von der Decke herabhängende Lote, deren Bilder sich im Hauptpunkt schneiden.

Bestimmung der Bildweite. Es sei das Strahlenbüschel von einem Standpunkt nach einer Anzahl (mindestens drei) in einer Ebene mit ihm befindlicher Objektpunkte bekannt. Photographiert man dieselben von dem Standpunkte aus und legt man das bekannte Strahlenbüschel perspektivisch zur Punktreihe der Bildpunkte¹³⁾, so ist die Entfernung des Büschelmittelpunktes von der Punktreihe gleich der Entfernung des perspektivischen Zentrums von der Punktreihe, wodurch letzteres bei bekanntem Hauptpunkt bereits bestimmt ist. Bei unbekanntem Hauptpunkt photographiert man dieselben Objekte vom gleichen Standpunkt aus in anderer Lage der Kamera und erhält dann die Elemente zur Konstruktion des Hauptpunktes und der Bildweite. Die Elemente der inneren Orientierung einer vorliegenden Aufnahme können immer dann wiedergefunden werden, wenn man aus ihr die im Endlichen gelegenen Fluchtpunkte dreier bekannter (meist zueinander senkrechter) Richtungen entnehmen kann. Ein Gleiches gilt unter Voraussetzung vertikaler Bildebene, sobald auf dem Bilde die Perspektive eines wagerechten Quadrates oder Rechteckes von bekanntem Seitenverhältnis vorliegt^{13a)}. Meist

13) Rechnerisch geschieht dies nach der Methode des Rückwärtseinschneidens nach drei oder mehreren Punkten der Punktreihe. Vgl. *W. Jordan, Zeitschr. f. Vermess.* 5 (1876), p. 1; *Koppe, Photogrammetrie*, p. 39, woselbst auch die Ausgleichungsmethode behandelt ist.

13a) Die zugehörigen Methoden sind im 8. Abschnitt von *J. H. Lambert*

begnügt man sich nicht mit der inneren Orientierung, sondern nimmt noch *Horizont* und *Hauptvertikale* dazu, was am einfachsten bei horizontaler Achse (vertikaler Bildebene) gelingt. Es muß dann die Kamera mit einer Drehachse verbunden werden, die durch eine Libelle vertikal zu stellen ist. Die Vertikalstellung der Kamera wird durch Photographie zweier Lote, die als parallele Linien erscheinen müssen, kontrolliert. Zur Bestimmung des Horizontes genügt dann das Bild eines mit dem Standpunkt gleich hohen Objektes. Horizont und Hauptvertikale werden durch Marken (Fadenkreuz) fixiert. Apparate mit dieser Einrichtung, welche meist noch mit einer Vorrichtung zur Orientierung der Hauptvertikalebene (Horizontalkreis, Busssole) versehen sind, heißen *Photogrammeter*¹⁴).

Als *photogrammetrische Theodolite* (Phototheodolite) bezeichnet man Kombinationen von Photogrammeter und Theodolit. Dieselben gestatten die Bestimmung beliebig vieler Winkel der äußeren Orientierung. Die Verbindung beider kann rein äußerlich sein, doch ist fast immer die vertikale Drehachse des Theodolits und der Kamera gemeinsam. Die Achse der Kamera ist meist dauernd horizontal gestellt¹⁵), gelegentlich auch zum Neigen eingerichtet¹⁶). In anderen Fällen ist die Achse der Kamera mit jener des Theodolitfernrohres starr verbunden und beide parallel gestellt¹⁷). Dadurch, daß man das photographische Objektiv als Fernrohrobjektiv benützt, kann man auch beide Achsen zusammenfallen lassen¹⁸). Endlich hat man auch versucht, den für die photographische Aufnahme maßgebenden Standpunkt (vgl. Nr. 2, p. 101) in den Schnittpunkt der beiden Theodolit-

„Freie Perspektive“, Zürich 1759, auseinandergesetzt. Vgl. auch *F. Schilling*, Über die Anwend. der darst. Geom. insb. über die Photogrammetrie, p. 101—120.

14) Zu den besten Apparaten dieser Art gehören der Photogrammeter von *E. Deville*, *Photographic Surveying*, p. 136, jener von *Pollack*, *ibid.* p. 120 und die beiden Apparate von *Paganini*, *Fotogrammetria*, p. 189, 236, wovon letzterer mit automatischer Horizontalstellung und photogr. Registrierung des Kompasses, ähnlich dem Apparate von *Bridges Lee* [*Engineering* 2 (1897), p. 314] versehen ist. In diese Gruppe gehören auch die Apparate von *A. Meydenbauer*.

15) So bei den ersten Apparaten von *Laussedat*, *Métrophotographie*, p. 125, dem älteren Apparat von *Pollack* (vgl. *Steiner*, *Phot.*, p. 123), bei jenen des österr. militärgeogr. Institutes in Mitt. desselben 16 (1896), p. 67 und dem von *Breithaupt*, *Eders Jahrb. f. Phot.* 1900, p. 387.

16) Älterer Apparat von *Paganini*, *Fotogrammetria*, p. 28; jener von *Gustav Heyde*, *Eders Jahrb. f. Phot.* 1901, p. 357.

17) Phototheodolit von *Koppe*, *Photogrammetrie*, p. 26; *Wolkenmessung*, p. 14.

18) Zuerst eingeführt von *Paganini* 1889, *Fotogrammetria*, p. 140, dann von *Pollack*, vgl. *Zeitschr. des Österr. Ingen.- u. Arch.-Vereins* 46 (1894), p. 489.

achsen zu bringen¹⁹⁾, um volle Übereinstimmung der Scheitel der gemessenen und photographierten Winkel zu erreichen. Eine eigentümliche Kombination von Theodolit und Kamera mit horizontaler Achse hat *Finsterwalder*²⁰⁾ angegeben. Bei ihr wird das Fernrohr aus dem parallel verschieblichen photographischen Objektiv und einem um eine Horizontalachse drehbaren, nach dem perspektivischen Zentrum zielenden Okulare gebildet.

Apparate, welche Bilder auf nicht ebene Flächen entwerfen, sind der *Zylindrograph* von *Moëssard*²¹⁾, bei welchem eine um eine vertikale Drehachse bewegliche Linse sukzessive einen nahezu 180° umfassenden Teil einer mit Film bespannten *Zylinderfläche* belichtet, und der *Phototheodolit* von *J. Porro*²²⁾, der als Bildfläche eine die Linse konzentrisch umgebende, mit lichtempfindlicher Schicht präparierte kugelförmige Glaskalotte besitzt. Letzterer, sowie der photographische *Meßtisch* von *Chevalier*²³⁾ sind längst außer Gebrauch.

Das Bedürfnis, von einem Punkt aus Momentaufnahmen zu machen, welche den ganzen Aussichts-bereich des Standpunktes oder wenigstens einen sehr großen Teil desselben umfassen, hat zur Konstruktion einer Anzahl (3—7) unter festen Winkeln zusammengespaltener photogrammetrischer Apparate geführt, die für Schiffs-, Luftballon- und Drachenaufnahmen Verwendung finden sollen²⁴⁾.

3. Ausmessung der Bilder. Die vollkommenste Methode der Bildausmessung, von *J. Porro*²²⁾ erdacht und von *C. Koppe*²⁵⁾ ausgebildet, besteht im wesentlichen darin, daß man das entwickelte Negativ wieder genau an jene Stelle des Apparates bringt, die es bei der Aufnahme eingenommen hat, dasselbe dann von rückwärts beleuchtet und die aus dem Apparat durch das Objektiv austretenden Strahlen mit einem beweglichen Fernrohr, dessen Drehungen wie bei einem Theodolit an geteilten Kreisen gemessen werden können, ab sucht. Auf diese Weise eliminiert man alle Fehler, die in der mangelhaften perspektivischen Zeichnung der Linse, in der Unebenheit der

19) Beim Apparat von *A. Schell*, vgl. *Doležal*, *Anwend. d. Photogr.*, p. 47.

20) *Zeitschr. f. Instr.* 15 (1895), p. 370.

21) *Moëssard*, *Le Cylindrographe*, Paris 1889.

22) Vgl. *Doležal*, *Photogr. Correspondenz* 1902, p. 85—87.

23) Vgl. *Stein*, *Das Licht im Dienste wiss. Forschung* 2, 5. Heft; spezieller Teil VI u. VII, *Die Photogrammetrie*, bearb. von *F. Stolze*, p. 199; *Laussedat*, *Métro-photographie* 2¹, p. 27.

24) *R. Thiele*, *Eders Jahrb. f. Phot.* 17 (1903), p. 131; *Th. Scheimpflug*, *ibid.* 18 (1904), p. 193, sowie *Phot. Corresp.* 1903, p. 659 und *Illustr. aer. Mitt.* 8 (1904), p. 88.

25) *Photogrammetrie*, p. 15.

Glasplatten und in der Unkenntnis der inneren Orientierung begründet sind. In der Regel werden jedoch *Koordinaten der Bildpunkte* gemessen und aus ihnen die gewünschten Winkelgrößen berechnet. Ist r die Entfernung zweier Bildpunkte voneinander, r_1 und r_2 ihr Abstand vom Hauptpunkt und d die Bildweite, so ist der Winkel nach den Bildpunkten aus einem Dreieck mit den Seiten r , $\sqrt{r_1^2 + d^2}$, $\sqrt{r_2^2 + d^2}$ zu berechnen. Steht die *Achse der Kamera horizontal* und sind x und y die auf den Horizont und die Hauptvertikale bezogenen rechtwinkligen Koordinaten eines Bildpunktes, so berechnen sich die Azimutdifferenz α gegen die Hauptvertikalebene und die Höhenwinkel β aus den Formeln:

$$\operatorname{tg} \alpha = x : d, \quad \operatorname{tg} \beta = y \cos \alpha : d.$$

Ist die *Achse der Kamera* unter dem Winkel ω *gegen den Horizont* nach aufwärts *geneigt* (Fig. 1) und bedeuten x und y die rechtwink-

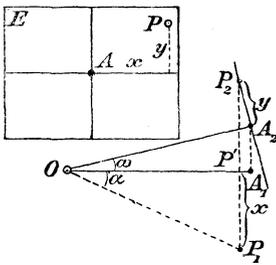


Fig. 1.

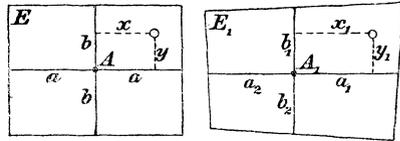


Fig. 2.

ligen Koordinaten eines Bildpunktes, bezogen auf die Hauptvertikale (y) und die Senkrechte dazu (x) durch den Hauptpunkt, so wird:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{d \cos \omega - y \sin \omega}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{d \sin \omega + y \cos \omega}{d \cos \omega - y \sin \omega} \cos \alpha$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen m und M :

$$d = m \cos M, \quad y = m \sin M, \quad \frac{y}{d} = \operatorname{tg} M,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{m \cos(\omega + M)}, \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\omega + M) \cos \alpha.$$

Statt der Berechnung von α kann man auch nebenstehende Konstruktion anwenden und β aus den Daten der Figur $\operatorname{tg} \beta = P_2 P' : O P_1$ ermitteln²⁶⁾.

Sind aus *abgeleiteten Bildern orientierter Photographien* Winkel zu entnehmen, so möge vorausgesetzt werden, daß der an der wirklichen Photographie rechtwinklige Rahmen samt Achsenkreuz mit abgebildet ist (Fig. 2). Aus den schiefwinkligen Koordinaten x_1, y_1 eines Bild-

26) Beide Methoden von *Koppe*, *Photogrammetrie*, p. 8, 9.

punktes in bezug auf das deformierte Achsenkreuz lassen sich dann die rechtwinkligen Koordinaten x, y in bezug auf das ursprüngliche Achsenkreuz und daraus schließlich die Winkel nach folgenden, aus der kollinearen Verwandtschaft beider Ebenen sich ergebenden Formeln berechnen:

$$\frac{1}{x} = \alpha + \beta \frac{y_1}{x_1} + \gamma \frac{1}{x_1}, \quad \frac{x}{y} = \alpha \frac{x_1}{y_1} + \beta + \gamma \frac{1}{y_1},$$

wobei

$$\alpha = \frac{a_1 - a_2}{a(a_2 + a_1)}, \quad \beta = \frac{a_1 a_2}{a(a_1 + a_2)} \frac{b_1 - b_2}{b_1 b_2}, \quad \gamma = \frac{2 a_1 a_2}{a(a_1 + a_2)},$$

$$x = \frac{b}{a} \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$$

ist ²⁷⁾.

Auf ähnlichem, etwas allgemeinerem Wege kann man auch aus *nichtorientierten Photographien* Winkel entnehmen, wenn die gegenseitige Lage von vier Strahlen, deren Bilder bekannt sind, gegeben ist. Für wirkliche Photographien genügen schon drei Strahlen hierfür ²⁸⁾.

Sind von einem Standpunkt aus *zwei* oder *mehrere Bilder* aufgenommen, so entsteht die Aufgabe, dieselben untereinander in Beziehung zu bringen. Sind die Orientierungsunterschiede der Achsen der Bilder bekannt, so geschieht dies ohne weiteres nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie. Sind sie unbekannt, so kann man sie ermitteln, sobald auf den verschiedenen Photographien die Bilder derselben Objekte zu finden sind. Waren die *Achsen zweier Photographien horizontal* und die innere Orientierung bekannt, so genügt ein Paar Bildpunkte; ist nur letzteres der Fall, so sind *zwei Punktpaare* nötig. Hat man es mit unorientierten wirklichen Bildern zu tun, so kann man aus der kollinearen Beziehung beider aufeinander die Schnittlinie der Bildebenen als Achse der Perspektivität ermitteln, sobald *vier Punktpaare* zu finden sind ²⁹⁾. Der Winkel, den die Bildebenen einschließen, bleibt aber noch unbestimmt. Hat man indessen *drei* solcher *Aufnahmen* von einem Standpunkte aus, so lassen sich in ähnlicher Weise die drei Schnittlinien ihrer Bildebenen finden. Hierdurch wird das Dreikant der Bildebenen und das gemeinsame perspektivische Zentrum festgelegt. Drei eigentliche Photographien von einem Standpunkt genügen also zur Ermittlung der inneren Orientierung jeder

27) *Finsterwalder*, München Ber. 30 (1900), p. 152; vgl. hierzu *W. Jordan*, Zeitschr. f. Architektur und Ingenieurwesen 44 (1898), p. 346; ein graphisches Verfahren findet sich bei *Finsterwalder*, Photogrammetrie, p. 179.

28) Vgl. Nr. 4.

29) *Finsterwalder*, München Ber. 30 (1900), p. 153 u. 157.

derselben und der gegenseitigen Stellung ihrer Achsen, falls sich auf je zweien derselben die Bildpunkte von denselben vier Objektpunkten finden.

4. Das Rückwärtseinschneiden. Da sich aus Photographien Horizontal- und Vertikalwinkel entnehmen lassen, kann man dieselben in der in der Geodäsie üblichen Weise zur Bestimmung des Standpunktes nach drei oder mehreren gegebenen Fixpunkten verwenden (*Pothenot'sche Aufgabe*)³⁰). Dieselbe Aufgabe tritt aber in der Photogrammetrie noch in der Form auf, daß in einer Photographie mit innerer Orientierung die Bilder dreier in ihrer gegenseitigen Lage bekannter Objektpunkte, die mit dem Standpunkt nicht in einer Ebene liegen, gegeben sind; man soll hieraus die Lage des Standpunktes ermitteln. Die Photographie liefert alle Elemente des Dreikantes der drei Visierstrahlen, und dieses Dreikant ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß sich die Schnittfigur mit dem Dreieck der bekannten Objektpunkte zur Deckung bringen läßt. Diese Aufgabe hat vier Lösungen, von welchen zwei zusammenfallen, falls sich der Standpunkt auf dem Kreiszyylinder befindet, der sich über dem umschriebenen Kreise des Dreiecks der bekannten Objektpunkte senkrecht zu dessen Ebene erhebt. In diesem Falle wird die Bestimmung des Standpunktes unsicher (*gefährlicher Ort*)³¹).

Ist die innere Orientierung der Photographie nicht gegeben, so sind zur Rückwärtsbestimmung des Standpunktes sechs Objektpunkte und deren Bilder nötig. Die Lösung dieser räumlichen Aufgabe wird auf das *ebene Problem der fünf Punkte*³²) zurückgeführt, welches lautet: Zu fünf Punkten einer Ebene einen sechsten so zu finden, daß die von ihm aus nach den fünf Punkten gehenden Strahlen vorgegebene Doppelverhältnisse haben. Das Problem kann als projektive Verallgemeinerung des *Pothenot'schen* Problems aufgefaßt werden. Letzteres geht aus ersterem hervor, wenn von den fünf gegebenen Punkten zwei in die imaginären Kreispunkte rücken. Das Problem der fünf Punkte wird gewöhnlich dazu verwendet, zu einer Photographie ohne innere Orientierung, welche aber bei horizontalliegender Achse aufgenommen wurde, den Standpunkt und die innere Orientie-

30) Vgl. VI 1, 1, Nr. 10 b (*C. Reinherz*).

31) *S. Finsterwalder*, Grundlagen, p. 26; *S. Finsterwalder* u. *W. Scheufele*, München Ber. 33 (1903), p. 591, wo sich auch die Ausgleichung der Fehler erörtert findet.

32) Unter diesem Namen wurde von *F. Steiner*, Phot., p. 24 das von *R. Sturm*, Math. Ann. 1 (1869), p. 532 geometrisch gelöste Problem in die Photogrammetrie eingeführt.

rung gleichzeitig zu bestimmen. Man hat dabei in der Grundrißebene der fünf gegebenen Objektpunkte den gesuchten Standpunkt so zu bestimmen, daß sich das von ihm ausgehende Büschel der fünf Strahlen nach einer Punktreihe, die mit dem Grundriß der Bildpunkte kongruent ist, schneiden läßt. Eine lineare geometrische Lösung ist folgende: Es seien $A_0B_0C_0D_0E_0$ die Grundrisse der bekannten Punkte, O_0 jener des gesuchten Punktes, $A'B'C'D'E'$ die Punktreihe, zu der das Büschel $O_0(A_0B_0C_0D_0E_0)$ projektiv sein soll. Man betrachte nun in dem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $A_0B_0C_0O_0$ jene Kegelschnitte, die durch D_0 und E_0 hindurchgehen. Von jedem kennt man außer den Grundpunkten das Doppelverhältnis ($= (A'B'C'D')$ bzw. $(A'B'C'E')$), welches $A_0B_0C_0D_0$ bzw. $A_0B_0C_0E_0$ auf dem Kegelschnitt einschließen. Hieraus kann man an jeden der beiden Kegelschnitte die Tangenten in $A_0B_0C_0$ konstruieren. Diese schneiden sich paarweise auf den Seiten des dem Kegelschnittbüschel gemeinsamen Polardreieckes, dessen Ecken außerdem auf den Verbindungslinien der bekannten drei Grundpunkte $A_0B_0C_0$ liegen. Das Polardreieck kann hieraus konstruiert und damit der unbekannte vierte Grundpunkt O_0 gefunden werden. Der durch $A_0B_0C_0D_0E_0$ gehende Kegelschnitt bildet insofern eine „gefährliche“ Kurve, als die Lösung illusorisch wird, falls O_0 auf demselben liegt³³⁾. *F. Steiner*³⁴⁾ und *Mandl*³⁵⁾ haben analytische Lösungen der Aufgabe gegeben.

Das oben erwähnte *räumliche Problem der sechs Punkte* wird folgendermaßen auf das ebene Problem der fünf Punkte zurückgeführt³⁶⁾. Der gesuchte Punkt O wird mit einem der gegebenen Punkte A verbunden und das Ebenenbüschel durch OA als Achse nach den fünf anderen gegebenen Punkten gelegt. Dieses Ebenenbüschel muß zu dem Strahlenbüschel, das vom Bildpunkt A' nach den fünf anderen Bildpunkten geht, projektiv sein. Ist P_0 der Schnitt der Achse des Ebenenbüschels mit der Grundrißebene, und projiziert man von A aus die fünf übrigen Punkte ebenfalls in die Grundrißebene, so ist das Strahlenbüschel von P_0 nach den genannten fünf Projektionen ebenfalls projektiv zum Strahlenbüschel durch A' der Bildebene, und P_0 kann somit nach dem Problem der fünf Punkte

33) Lösung von *Kinkel*, Wochenschr. d. österr. Ingen.- u. Arch.-Vereins 16 (1891), p. 292.

34) Phot., p. 28.

35) Mitt. über Gegenst. d. Artill.- u. Geniewesens 1898, p. 165. Das zugehörige Ausgleichungsproblem giebt *E. Doležal*, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 29.

36) Lösung von *E. Waelsch* in *F. Steiner*, Phot., p. 53.

gefunden werden. Die Gerade AP_0 ist ein geometrischer Ort für den Standpunkt. Weitere Örter durch die übrigen Punkte lassen sich auf gleiche Weise finden. Der Standpunkt O darf nicht auf der Raumkurve 3. Ordnung, welche durch die sechs Punkte geht, liegen, sonst wird die Konstruktion illusorisch. Die Bestimmung des Standpunktes gründet sich nur auf Doppelverhältnisse, die dem Bilde entnommen werden; sie gilt also auch für abgeleitete Bilder. Bei Verwendung letzterer ist aber das Einpassen der sechs Bildpunkte in das von dem gefundenen Standpunkt ausgehende Strahlenbündel nicht immer möglich.

5. Das Vorwärtseinschneiden und die Rekonstruktion der Objekte bei bekannten Standpunkten. Wenn nach den Methoden von Nr. 3 die Horizontalprojektionen der zu den Photographien gehörigen Strahlenbündel konstruiert und durch die mit dem photogrammetrischen Theodolit gemessenen Winkel gehörig gegeneinander orientiert sind, ergibt sich *der Grundriß der Objektpunkte* ähnlich wie bei der Meßtischaufnahme durch Schnitt entsprechender Strahlen. Die *Höhenunterschiede h der Objektpunkte* gegenüber den Standpunkten werden unter Benützung der aus dem Grundriß abgenommenen Horizontalentfernung e und dem Höhenwinkel β nach der Formel $h = e \operatorname{tg} \beta = (ey \cos \alpha) : d$ gerechnet und so die Höhe jedes Objektpunktes aus mindestens zwei Standpunkten bestimmt³⁷⁾.

Allgemeingültige Formeln, mittels welcher man bei bekannten Standpunkten und bekannter innerer und äußerer Orientierung der Aufnahmen aus den ebenen Koordinaten entsprechender Bildpunkte die räumlichen Koordinaten des zugehörigen Objektpunktes ausrechnen kann, sind mehrfach, insbesondere für Zwecke der Wolkenmessung, aufgestellt worden³⁸⁾.

Den Sinn und die Tragweite der aus der Höhenbestimmung von zwei Standpunkten aus sich ergebenden „*Höhenkontrolle*“³⁹⁾ hat *G. Hauck* durch Einführung der *gegnerischen Kernpunkte*⁴⁰⁾ klar gemacht. Zwei

37) Zur Erleichterung der hierbei nötigen Zeichnungen und Rechnungen hat *P. Paganini* verschiedene Apparate konstruiert, *Fotogrammetria*, p. 108; vgl. auch *A. v. Hübl*, *Mitt. d. militärgeogr. Inst. Wien* 18 (1898), p. 93.

38) *K. Heun*, *Zeitschr. Math. Phys.* 44 (1899), p. 18; *A. W. Sprung*, *Met. Zeitschr.* 20 (1903), p. 414.

39) Über die Höhenkontrolle und ihre Verwendung zur Abschätzung der Genauigkeit vgl. *Koppe*, *Photogrammetrie*, p. 69, sowie *Fensterwalder*, *Ergänzungshefte zur Zeitschr. d. Deutsch. u. Oesterr. Alpen-Vereins* 1 (1897), p. 38; *Zeitschr. f. Vermess.* 25 (1896), p. 225.

40) *J. f. Math.* 95 (1883), p. 11.

beliebig aufeinander bezogene Punktfelder können nämlich im allgemeinen nicht als Perspektiven eines räumlichen Objektes aufgefaßt werden. Die hierfür notwendige Bedingung erhält man, wenn man das Büschel der Ebenen betrachtet, welche durch die Verbindungslinie der beiden Standpunkte O_1 und O_2 als Achse und beliebige Objektpunkte geht. Die Achse $O_1 O_2$ schneide die Ebenen der Photographien in O_1'' und O_2' , den Bildern je eines Standpunktes vom anderen aus. Diese sind die gegnerischen Kernpunkte und Zentren zweier projektiver Strahlenbüschel, nach welchen die Bildebenen das Ebenenbüschel mit der Achse $O_1 O_2$ schneiden. Entsprechende Strahlen jener Büschel laufen nach den Bildpunkten ein und desselben Objektpunktes. Damit nun zwei Punktfelder (P', Q', R', \dots) (P'', Q'', R'', \dots) Perspektiven desselben Raumobjektes sind, müssen sich auf ihnen zwei Punkte O_2' und O_1'' so bestimmen lassen, daß die Strahlenbündel $O_2'(P', Q', R', \dots)$ und $O_1''(P'', Q'', R'', \dots)$ projektiv sind. Dazu ist die Kenntnis von 7 *zusammengehörigen Punktepaaren* nötig. Die Aufgabe hat drei Lösungen⁴¹⁾. Ist die Bedingung erfüllt, so existieren ∞^5 der Form nach verschiedene unter sich kollineare Objekte, von denen die vorgegebenen Photographien Bilder sind⁴²⁾. Um ein solches Objekt zu finden, schneide man in der ersten Bildebene das Kernstrahlenbüschel durch eine Transversale nach einer Punktreihe, suche im projektiven Kernstrahlenbüschel der zweiten Bildebene jene Transversale aus, welche nach einer kongruenten Punktreihe schneidet, stecke die beiden Bildebenen längs der beiden kongruenten Punktreihen unter beliebigem Winkel ineinander und wähle auf der Verbindungslinie beider Kernpunkte beliebig die perspektivischen Zentren O_1 und O_2 . Die Verbindungslinien $O_1 P'$ und $O_2 P''$ liegen nun in einer Ebene und schneiden sich in einem Objektpunkt.

Die Rekonstruktion des Objektes ist nach G. Hauck nur noch auf ∞^3 Weisen möglich, sobald eine dritte Photographie gegeben ist⁴³⁾. Nachdem die sechs gegnerischen Kernpunkte $O_1'' O_2'$, $O_2''' O_3''$, $O_1''' O_3'$ auf den drei Photographien gefunden sind, kann man die drei Bildebenen so legen, dass die drei Bilder $P' P'' P'''$ eines beliebigen Raumpunktes P mit dem Schnittpunkt der drei Bildebenen zusammenfallen. Die Linien, in welchen sich dabei zwei Bildebenen schneiden (Grundschnitte), sind außer durch die gewählten Bildpunkte noch durch die

41) Von dieser von M. Chasles gestellten Aufgabe hat R. Sturm, Math. Ann. 1 (1869), p. 543, eine geometrische, O. Hesse, J. f. Math. 62 (1862), p. 188 eine analytische Lösung gegeben.

42) Finsterwalder, Grundlagen, p. 11.

43) J. f. Math. 97 (1884), p. 263.

Bedingung bestimmt, daß sie je ein Paar gegnerische Kernstrahlenbündel nach kongruenten Punkten schneiden müssen. Die (nicht immer reellen) Lösungen der so gestellten Aufgabe durch zwei vorgegebene Punkte zwei Gerade so zu legen, dass zwei vorgegebene Strahlenbündel in kongruenten Punktreihen geschnitten werden, ermöglichen schließlich die Konstruktion des Dreikantes der drei Bildebenen aus seinen Seiten. Die sechs Kernpunkte liegen dann in einer Ebene, die auch die drei Standpunkte enthält. Die Strahlen von ihnen aus nach drei entsprechenden Bildpunkten schneiden sich in einem Raumpunkt. Vier wirkliche Photographien bestimmen das Objekt bis auf den Maßstab. *Finsterwalder*⁴⁴⁾ führte die Konstruktion desselben auf die Ermittlung eines Kegelschnittes zurück, der acht Raumgerade, die zu zweien durch einen Punkt gehen, trifft.

Wesentlich vereinfacht wird die *Rekonstruktion des Objektes*, sobald die *innere Orientierung* der benützten Photographien bekannt ist⁴⁵⁾. Es reichen dann bereits *zwei Bilder* aus, um das dargestellte Objekt bis auf den Maßstab zu bestimmen.

Man verschafft sich zunächst die gegnerischen Kernpunkte O_1'' und O_2' , wofür *S. Finsterwalder*⁴⁶⁾ passende Näherungsmethoden angegeben hat. Verbindet man diese Kernpunkte mit den zugehörigen Zentren O_2 und O_1 , so müssen die Verbindungslinien bei richtiger Lage der Bildebenen zur Deckung kommen. Die gegenseitige Stellung der Ebenen und Achsen der Photographien findet man durch folgende Überlegung (Fig. 3). Man ziehe in den Bildebenen die Kernstrahlen $O_2'P'$ und $O_1''P''$. Mit Hilfe der inneren Orientierung berechnet man die Winkel α_1 und α_2 , welche sie mit den Verbindungslinien $O_2'O_1$, $O_1''O_2$ einschließen, sowie die Neigungswinkel der Ebenen $P'O_2'O_1$ und $P''O_1''O_2$ gegenüber der ersten bzw. zweiten Bildebene. In dem Dreikant, das die beiden Bildebenen mit der Ebene O_1O_2P einschließen, ist nun die Seite

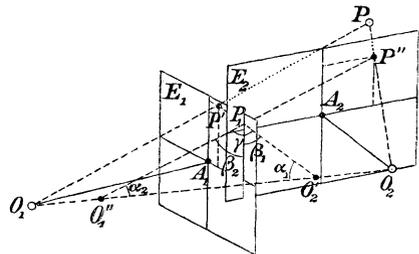


Fig. 3.

kommen. Die gegenseitige Stellung der Ebenen und Achsen der Photographien findet man durch folgende Überlegung (Fig. 3). Man ziehe in den Bildebenen die Kernstrahlen $O_2'P'$ und $O_1''P''$. Mit Hilfe der inneren Orientierung berechnet man die Winkel α_1 und α_2 , welche sie mit den Verbindungslinien $O_2'O_1$, $O_1''O_2$ einschließen, sowie die Neigungswinkel der Ebenen $P'O_2'O_1$ und $P''O_1''O_2$ gegenüber der ersten bzw. zweiten Bildebene. In dem Dreikant, das die beiden Bildebenen mit der Ebene O_1O_2P einschließen, ist nun die Seite

44) *Finsterwalder*, Grundlagen, p. 14.

45) *Ibid.* p. 15.

46) München Abhandln. 22 (1903), p. 229 u. München Ber. 33 (1903), p. 683. Ist der Kernpunkt des einen Bildes bekannt, so kann der des anderen durch eine dem Rückwärtseinschneiden entsprechende sphärische Konstruktion gefunden werden. Vgl. *S. Günther*, München Ber. 24 (1904), p. 115 und *Finsterwalder*, *ibid.* 25 (1905), p. 3.

$\gamma = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2$, sowie die anliegenden Winkel bekannt und es können die Winkel β_1 und β_2 , welche die Kernstrahlen mit der Schnittlinie der beiden Bildebenen einschließen, sowie der Winkel der letzteren gerechnet werden. Ist nun noch eine Länge, z. B. jene der Standlinie $O_1 O_2$ gegeben, so ist die gegenseitige Lage der Standpunkte und der

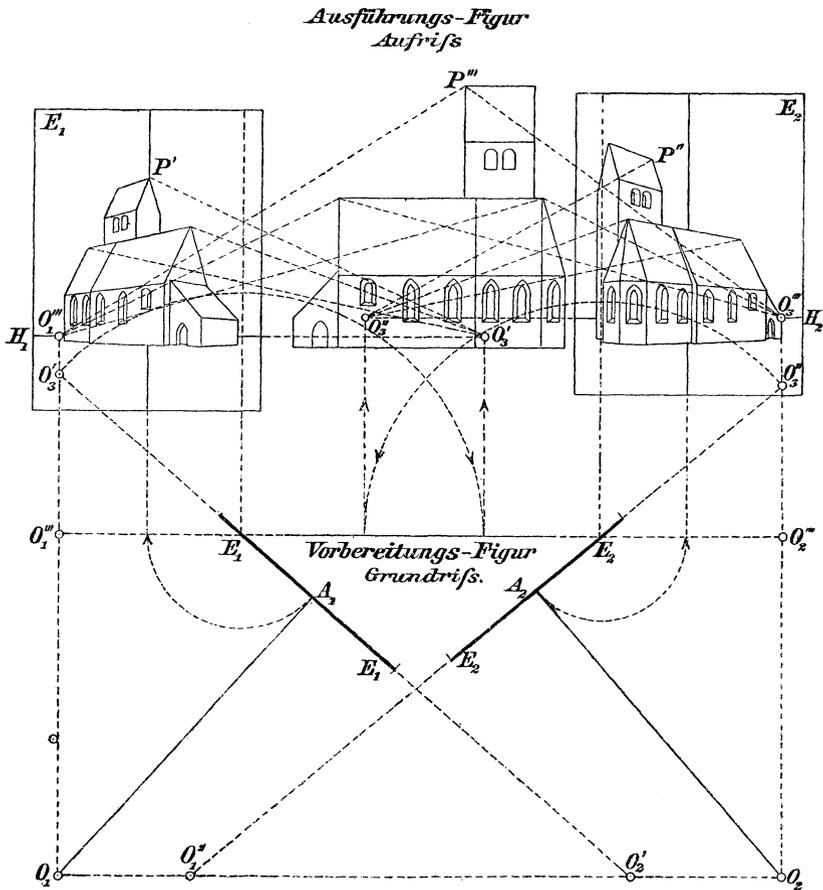


Fig. 4.

Bildebenen bestimmt und das Objekt kann punktweise konstruiert werden. Ein vollständig durchgeführtes Beispiel hat *Finsterwalder*⁴⁷⁾ gegeben. Dort sind auch die Fragen der Ausgleichsrechnung behandelt, welche sich ergeben, wenn ein photogrammetrisch der Form nach ermitteltes Objekt durch passende Wahl des Maßstabes und der

47) München Abhandlgn. 22 (1903), p. 248.

äußeren Orientierung mit einer überschüssigen Zahl von Abmessungen des wirklichen Objektes in möglichste Übereinstimmung gebracht werden soll⁴⁸⁾.

Von *G. Hauck* stammt eine *Methode, beliebige Risse, auch Zentralprojektionen des Objektes, aus zwei photographischen Bildern zu zeichnen*, welche auf die trilineare Verwandtschaft dreier Projektionen desselben Objektes gegründet ist. Zwei Perspektiven eines Punktes bestimmen (im allgemeinen linear) die dritte Perspektive desselben und diese kann, sobald man die Beziehung der drei Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel kennt, unmittelbar als Schnitt zweier Kernstrahlen gefunden werden. Ist die genannte Beziehung aus der räumlichen Konfiguration von Bildebenen und Zentren in der sogenannten „Vorbereitungsfigur“ ermittelt, so kann die weitere Konstruktion in der „Ausführungsfigur“ ausschließlich in der Ebene durchgeführt werden⁴⁹⁾. Man vergleiche das Beispiel auf S. 112 (Fig. 4), in welchem der Aufriß aus zwei Photographien mit lotrechter Bildebene bestimmt wird.

In manchen Fällen ist man schon aus *einer* Aufnahme imstande, das Objekt zu rekonstruieren; z. B. wenn das Objekt eben (Umrißlinie eines stehenden Gewässers) und die Lage des Standpunktes gegenüber der Ebene desselben bekannt ist⁵⁰⁾. Ferner, wenn das Bild außer dem Objekt auch noch eine Perspektive desselben enthält, wie z. B. bei Architekturen einen perspektivischen Grund- oder Aufriß oder den Schatten auf eine Ebene. Wenn das Objekt eine Symmetrieebene besitzt, oder samt seinem Spiegelbild aufgenommen wurde, so gelingt ebenfalls die Rekonstruktion aus einer Aufnahme, da sich das Bild der Orthogonalprojektion auf die Symmetrieebene (Spiegelsebene) durch perspektivische Halbierung der Verbindungslinien symmetrischer Punkte immer ermitteln läßt⁵¹⁾.

6. Flüchtige Aufnahmen. Stereophotogrammetrie. Mechanismen. Als flüchtige Aufnahmen bezeichnet man jene, bei welchen die photogrammetrischen Standpunkte nicht, wie es im Interesse der Genauigkeit zumeist geschieht, durch Messungen höheren Genauigkeitsgrades von vornherein festgelegt werden. Die Rekonstruktion eines Objektes aus vier wirklichen unorientierten Photographien oder aus zwei Bildern mit innerer Orientierung fallen bereits unter diesen Begriff. Für die Anwendung ist aber der Sonderfall

48) Ibid. p. 240.

49) *G. Hauck*, J. f. Math. 95 (1883), p. 23.

50) *E. Deville*, Photographic Surveying, p. 45.

51) *S. Finsterwalder*, Grundlagen, p. 18.

von erheblicher Bedeutung, bei welchem die optischen Achsen der Aufnahmen im Raume orientiert sind, sei es vollständig gegen die Lotlinie und die Himmelsrichtungen (also mittels Libelle und Bussole) oder unvollständig gegen die Lotlinie allein. Bei vollständiger Orientierung führt eine einfache lineare Konstruktion auf Grund zweier Bilder zur Rekonstruktion des Objektes samt den Standpunkten; bei ausschließlicher Orientierung der Aufnahmen gegen die Lotlinie ist zur Erreichung des Zieles die Lösung einer Gleichung sechsten Grades nötig, welche den Orientierungsunterschied beider Aufnahmen liefert⁵²⁾. Die Lösung dieser Gleichung kann durch eine einfache Näherungskonstruktion ersetzt werden. Wenn es sich um die Verarbeitung einer größeren Zahl von Aufnahmen, die verschiedenen Standpunkten zugehören, handelt, so ist es von Vorteil, sämtliche in betracht kommenden Richtungen „gnomonisch“ abzubilden, indem man durch ein festes Zentrum Parallele zu den betreffenden Richtungen zieht und ihnen die Schnittpunkte mit einer Horizontalebene entsprechen läßt. Richtungen, die in einer Ebene liegen oder einer solchen parallel sind, entsprechen dann Punkte auf einer Geraden. Auf diesem Wege ergeben sich dann graphisch die Bedingungen, denen die Richtungen der verschiedenen Standlinien entsprechen müssen, damit sie sich einem räumlichen Netz von Standpunkten zuordnen lassen⁵³⁾. Diese Konstruktionen beruhen im wesentlichen auf der Verwendung der Höhenwinkel, bzw. Höhenkontrollen. Wenn die Höhenabmessungen des Objektes zu klein sind, um eine wirksame Höhenkontrolle zu gestatten, wenn man also auf die Horizontalwinkel allein angewiesen ist, hört die Möglichkeit der Rekonstruktion des Objektes aus zwei Bildern ohne Kenntnis der Standpunkte auf. Sind die Richtungen der Achsen der Bilder bekannt, so liefert die *Lambert'sche* Aufgabe der sechs Punkte⁵⁴⁾ (drei Standpunkte und drei Objektpunkte) die Mittel zur Rekonstruktion eines ebenen Objektes aus drei Bildern. Sind auch diese unbekannt, so kann man mittels der *Lambert'schen* Aufgabe der acht Punkte⁵⁵⁾ (vier Standpunkte und vier Objektpunkte) auf Grund von vier Bildern zum Ziele gelangen. Ein ähnliches

52) *S. Finsterwalder*, München Ber. 24 (1904), p. 103. Vgl. auch *K. Fuchs*, Zeitschr. f. Vermess. 34 (1905), p. 449.

53) *S. Finsterwalder*, Verhandlg. d. dritten Mathematikerkongresses in Heidelberg, Leipzig 1905, p. 476.

54) *J. H. Lambert*, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung 1, Berlin 1765, p. 72, 77, 81.

55) Ibid. p. 185. Vgl. *J. A. Grunert*, Arch. Math. Phys. 1 (1841), p. 89 und *W. Láska*, Monatshefte Math. Phys. 12 (1901), p. 172.

Problem der acht Punkte (drei Standpunkte und fünf Objektpunkte) hat bisher noch keine Lösung gefunden.

Eine besondere Bedeutung gewinnen die gegnerischen Kernpunkte und Strahlenbüschel, sowie die auf ihnen fußenden Konstruktionen dadurch, daß sie die Möglichkeit [bieten, Kurven aus ihren Bildern zu rekonstruieren, ohne daß man imstande ist, auf diesen Bildern zusammengehörige Punkte zu erkennen⁵⁶⁾. Zieht man durch einen beliebigen Punkt des ersten Bildes der Kurve den Kernstrahl, so ist ihm der gegnerische Kernstrahl im zweiten Bilde zugeordnet. Dieser muß den zugehörigen Punkt enthalten und letzterer ist somit einer der Schnittpunkte des gegnerischen Kernstrahles mit dem zweiten Bild der Kurve. Auch in anderer Weise sind die Kernstrahlen zum Aufsuchen entsprechender Punkte nützlich⁵⁷⁾.

Eine wesentliche Vereinfachung des Aufsuchens und der Benützung der Kernpunkte tritt dann ein, wenn die Bildebenen unter sich parallel oder sogar noch zur Standlinie parallel gestellt werden⁵⁸⁾. In letzterem Falle kommen die Kernpunkte ins Unendliche zu liegen und die gegnerischen Kernstrahlenbüschel werden Parallelstrahlenbüschel. Die beiden Aufnahmen bilden dann ein Paar *Stereoskopbilder* mit einer Augendistanz gleich der Standlinie. Hierauf beruht das stereoskopische Ausmeßverfahren von *C. Pulfrich*⁵⁹⁾ oder die *Stereophotogrammetrie*. Setzen wir zur Vereinfachung den Fall lotrechter Bildebenen voraus und verschieben wir die beiden Bilder in ihrer gemeinsamen Ebene parallel derart, daß sich die Hauptpunkte decken, so liegen entsprechende Punkte beider Bilder in den Endpunkten paralleler Strecken (Parallaxen) von einer Länge p , die der Entfernung e des Objektpunktes von der Standlinie umgekehrt proportional ist ($e = (bD) : p$, wo b die Länge der Standlinie, D die gemeinsame Bildweite beider Aufnahmen ist). Bezeichnet p_x die Horizontalparallaxe, d. h. die Projektion der Strecke p auf den Horizont, so drücken sich die drei Koordinaten (X horizontal in Richtung der Basis, Y horizontal senkrecht dazu, Z lotrecht) auf den linken Standpunkt bezogen folgendermaßen aus: $Y = (bD) : p_x$,

56) *G. Hauck*, J. f. Math. 95 (1883), p. 11.

57) *A. v. Hübl*, Abhandlgn. d. geogr. Ges. in Wien 3 (1901), p. 20.

58) *Ibid.* p. 21 Anmerk. *C. Koppe* (Wolkenmessung, p. 10) hat schon das Parallelstellen der Achsen empfohlen und Formeln für die Punktbestimmung abgeleitet.

59) *Zeitschr. f. Instr.* 22 (1902), p. 229; 23 (1903), p. 43, 317; 24 (1904), p. 53, sowie gesammelt in: *Neue stereoskopische Methoden und Apparate*, 1. Lief., Berlin 1903.

$X = (xD) : p_x$, $Z = (yD) : p_x$, wobei x und y die Koordinaten des Bildpunktes auf dem linken Bild sind. Zusammengehörige Bildpunkte werden mittels des Zeiß'schen Stereokomparators nach dem Prinzip der wandernden Marke sehr leicht und genau gefunden. Die Schwierigkeit der Stereophotogrammetrie besteht in der genauen Herstellung des Parallelismus der optischen Achsen beider Aufnahmen⁶⁰). Die Versuche von *E. Deville*, an Stelle der Ausmessung stereoskopischer Bilder die direkte räumliche Konstruktion des Objektes auf optisch-mechanischem Wege zu setzen, haben in der Geodäsie keine Verwendung gefunden, dagegen scheint das Prinzip bei der Deutung chirurgischer Röntgenaufnahmen brauchbar zu sein⁶¹).

Schließlich sind noch die Versuche zu erwähnen, welche bezwecken, die photogrammetrischen Konstruktionen durch mechanische oder optische Apparate zu ersetzen. Einen theoretisch sehr vollkommenen Apparat zur mechanischen Herstellung einer dritten Perspektive aus zwei vorliegenden hat *G. Hauck*⁶²) angegeben. In die photogrammetrische Praxis ist er indessen ebensowenig übergegangen wie andere Perspektographen⁶³) einfacherer Art, welche nur eine ebene Figur perspektivisch umzeichnen. Letztere Aufgabe wird zur Zeit sicherer mittels perspektivischer Netze ausgeführt⁶⁴). Aussichtsreicher sind die neueren Versuche, optische Hilfsmittel zur Bewältigung heranzuziehen. So hat *Th. Scheimpflug*⁶⁵) ein Verfahren zur perspektivischen Umzeichnung einer ebenen Figur auf die Tatsache gegründet, daß eine vollkommene Weitwinkellinse eine beliebig gegen die optische Achse geneigte Objektebene Punkt für Punkt scharf und perspektivisch richtig in eine gewisse andere Ebene abbildet, welche man durch einen einfachen Mechanismus mit der Objektebene zwangläufig in Verbindung setzen kann.

60) *A. v. Hübl*, Mitt. d. militärgeogr. Inst. Wien 23 (1904), p. 182; 24 (1905), p. 143. In diesen Arbeiten wird insbesondere auch den notwendigen Korrekturen bei unvollkommener Parallelstellung der Achsen Rechnung getragen.

61) *E. Deville*, Trans. of the R. S. of Canada (2) 8 (1902—03), p. 63.

62) Mein persp. Apparat, Festschr. der techn. Hochschule, Berlin 1884; verbessert von *E. Brauer*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 25 (1891), p. 732.

63) *E. Deville*, Photographic Surveying, p. 77.

64) Ibid. p. 88 und *Finsterwalder*, Grundlagen, p. 5.

65) Method of distorting plane images by means of lenses or mirrors, Amerikanische Patentschrift Nr. 751347 und Apparatus for the systematic alteration of plane pictures Nr. 752596 (1904).

VI 1, 3. HÖHERE GEODÄSIE.

VON

P. PIZZETTI

IN PISA.

Inhaltsübersicht.

I. Allgemeine Grundlagen.

1. Aufgabe der höheren Geodäsie.
2. Lotrichtung, Schwerkraft.
3. Beobachtungstatsachen und Sätze der Potentialtheorie.
4. Weitere Folgerungen aus der Potentialtheorie. Theorem von *G. G. Stokes*.
5. Beobachtungen zur Bestimmung des Geoids. Reduktion der Schwerkrafts²messungen.
6. Geodätische Bestimmung des Geoids. Referenzellipsoid.
7. Lotabweichungen.
8. Reduktion der beobachteten Lotrichtungen.
9. *Bessels* Rotationsellipsoid.

II. Rechnungs- und Messungsmethoden.**A. Geodätische Rechnungen auf dem Rotationsellipsoid.**

10. Fundamentalformeln.
11. Normalschnitte.
12. Geodätische Linien.
13. Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimuts.
14. Fortsetzung. Fall kleiner Bogen.
15. Bestimmung der Länge und des Azimuts eines geodätischen Bogens aus den geographischen Koordinaten der Endpunkte.
16. Geodätische Polarkoordinaten.
17. Vergleichung der geodätischen Linie mit einem Normalschnitt.
18. Das geodätische Dreieck.
19. Auflösung des geodätischen Dreiecks durch Reduktion auf das ebene Dreieck. Sphäroidischer Exzeß.
20. Sehnen und Normalschnitte.
21. Reduktion ellipsoidischer Figuren auf sphärische durch konforme Abbildung.
22. Rechtwinklige geodätische oder *Soldnersche* Koordinaten.
23. Übertragung der geographischen Koordinaten vermittels rechtwinkliger geodätischer.
24. Projektionen auf die Ebene.

B. Landesvermessung.

- 25. Basismessungen.
- 26. Basisapparat.
- 27. Winkel; ihre Reduktion auf das Ellipsoid.
- 28. Triangulation.
- 29. Basisnetze oder Vergrößerungsnetze.
- 30. Berechnung einer Triangulation und der geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte.
- 31. Ausgleichung.
- 32. Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.
- 33. Genauigkeit der Basis- und Winkelmessungen.

C. Höhenmessung.

- 34. Trigonometrisches Nivellement.
- 35. Der Refraktionskoeffizient als Funktion der atmosphärischen Verhältnisse.
- 36. Empirische Untersuchungen über den Refraktionskoeffizienten.
- 37. Geometrisches Nivellement.
- 38. Einfluß der Schwerestörungen auf Nivellements.
- 39. Das Mittelwasser der Meere und der Nullpunkt für die Höhen.
- 40. Genauigkeit eines Nivellements. Ausgleichung.

D. Erdmessung.

- 41. Ableitung der Konstanten des Erdellipsoids aus zwei oder mehr Meridianbogen.
- 42. Bestimmung von a und e durch Parallelkreisbogen.
- 43. Stücke des Ellipsoids. Lotabweichungen.
- 44. Fortsetzung. Bestimmung der Lotabweichungen.
- 45. Fortsetzung. Angenäherte Bestimmung von Geoidstücken.
- 46. Die Schwerestörungen und die Abweichungen zwischen Geoid und Ellipsoid.

III. Summarische Entwicklungsgeschichte der geodätischen Kenntnisse.

- 47. Anfänge der geodätischen Messungen, bei denen die Erde als Kugel betrachtet wird.
- 48. Physikalische Untersuchungen über die Gestalt der Erde.
- 49. Die wichtigsten geodätischen Messungen bis 1860.
- 50. Die hauptsächlichsten Berechnungen der Erdkonstanten.
- 51. Bestimmung der Abplattung aus Pendelmessungen.
- 52. Benutzung einiger astronomischer Daten zur Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids.
- 53. Moderne geodätische Arbeiten. Lotabweichungen.

Literatur.**A. Bibliographisches.**

- O. Börsch*, Geodätische Literatur, auf Wunsch der Permanenten Kommission im Zentralbureau zusammengestellt, Berlin 1889.
- J. H. Gore*, A bibliography of geodesy. 2. ed. Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey 1901/02, Washington 1903, p 429.

- J. Herschel*, A bibliographical list of works relatives to pendulum operations in connection with the problem of the figure of the earth. Operations of the great trigonometrical survey of India 5 (1879), Appendix 5.
- B. A. M. Sadebeck*, Literatur der praktischen und theoretischen Gradmessungsarbeiten, Berlin 1880 (auch im Generalbericht der Europäischen Gradmessung 1880).

Man vergleiche auch die jährlichen Literaturübersichten in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart.

B. Historisches.

- J. J. Baeyer*, Über die Größe und Figur der Erde, Berlin 1861.
- J. S. Bailly*, Histoire de l'astronomie ancienne depuis son origine jusqu'à l'établissement de l'école d'Alexandrie, Paris 1781.
- , Histoire de l'astronomie moderne depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'à l'époque de 1730, Paris 1785.
- A. Börsch*, Die Grundlagen der Bestimmung der Erdgestalt, 3. intern. Math.-Kongr., Heidelberg 1904.
- J. H. Gore*, Geodesy, London 1891.
- P. S. Laplace*, Mécanique céleste, 5, livre XI, Paris 1825.
- J. B. Listing*, Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde, Göttingen 1872.
- , Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers, Göttingen 1878.
- L. Posch*, Geschichte und System der Breitengradmessungen, Freysing 1860 (Diss.).
- B. A. M. Sadebeck*, Entwicklungsgang der Gradmessungsarbeiten, Berlin 1876.
- J. Todhunter*, A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace, 2 vol., London 1873 (*Todhunter*, History 1, 2).
- A. Westphal*, Basisapparate und Basismessungen, Berlin 1885—88.
- F. X. von Zach*, Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Gotha 1800—13.
- , Correspondance astronomique, géograph., hydrograph. et statistique, Gênes 1818—26.

C. Die hauptsächlichsten Publikationsorgane staatlicher geodätischer Behörden.

- Mémorial du Dépôt général de la guerre, Paris.
- Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, Wien 1871—1906 (Mitt. mil.-geogr. Inst. Wien).
- Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858.
- Procès verbaux des séances du Comité international des poids et mesures, Paris 1875—1906.
- Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey, Washington 1845—1906 (R. C. G. S.).
- Verhandlungen der Allgemeinen Konferenzen der Europäischen Gradmessung, von 1886 ab der Internationalen Erdmessung, Berlin 1865—1906 (Int. Erdm.).
- Verhandlungen der Permanenten Kommission der Europäischen Gradmessung, Berlin 1865—1896.

Veröffentlichungen des kgl. Preußischen Geodätischen Instituts, Potsdam 1868 bis 1906.

Veröffentlichungen des Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung 1861—1906.

(Außer diesen sind die Publikationen der geodätischen Behörden von Holland, Indien, Italien, Norwegen, Rußland, Schweden, Schweiz, Spanien usw. zu nennen.)

D. Lehrbücher.

A. R. Clarke, Geodesy, Oxford 1880.

L. B. Francoeur, Géodésie, 8. Aufl., Paris 1903.

F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, 2 Bde., Leipzig 1880—84 (*Helmert*, H. G. 1, 2).

W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart. Bd. 1, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 5. Aufl. 1904; Bd. 2, Feld- und Landmessung, 6. Aufl. 1904; Bd. 3, Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung, 4. Aufl. 1896 (*Jordan*, Handbuch 1, 2, 3).

P. Pizzetti, Trattato di geodesia teoretica, Bologna 1895.

E. Pucci, Fondamenti di geodesia, vol. 2, Milano 1883—87.

L. Puissant, Traité de géodésie usw., 3. éd., Paris 1840.

E. Monographien theoretischen Charakters.

G. B. Airy, On the figure of the earth, Lond. Phil. Trans. 116 (1826).

C. C. G. Andrae, Problèmes de haute géodésie, Copenhague 1881—83.

J. J. Baeyer, Über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre, Petersb. Mém. (7) 3 (1860).

—, Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche, Berlin 1862.

—, Über den Einfluß lokaler Lotablenkungen auf das Nivellement, Astr. Nachr. 84 (1874).

C. M. v. Bauernfeind, Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmosphäre, Astr. Nachr. 67 (1866).

F. W. Bessel, Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen, Astr. Nachr. 4 (1826).

—, Bestimmung der Achsen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht, Astr. Nachr. 14 (1837).

—, Über den Einfluß der Unregelmäßigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen, Astr. Nachr. 14 (1837).

G. O. Bonnet, Mémoire sur la figure de la terre considérée comme peu différente d'une sphère, Ann. di mat. 2 (1859).

O. Börsch, Die Lotablenkung und ihr Einfluß auf ein geometrisches Nivellement, Zeitschr. f. Vermess. 4 (1875).

—, Anleitung zur Berechnung geodätischer Koordinaten, 2. Aufl., Cassel 1885.

C. Bremiker, Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1869.

H. Bruns, Die Figur der Erde, Berlin 1878.

—, Über die Umkehrung der *Besselschen* Methode der sphäroidischen Übertragung, Astr. Nachr. 97 (1880).

- E. B. Christoffel*, Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben, *J. f. Math.* 64 (1864).
- , Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke, Berlin Abh. 1868.
- A. C. Clairaut*, La théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743.
- G. De Berardinis*, Alcune formole per calcolare un arco di parallelo terrestre, Messina 1890.
- J. B. J. Delambre*, Méthode analytique pour la détermination d'un arc du méridien précédé d'un Mémoire sur le même sujet par *A. M. Legendre*, Paris 1798.
- H. A. Faye*, Réduction au niveau de la mer de la pesanteur observée à la surface de la terre (Coast and geodetical survey), par *M. G. R. Putnam*, Paris C. R. 120 (1895).
- C. F. Gauß*, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Göttingen 1827.
- , Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttingen 1844—47.
- , Werke, Bd. 9, Göttingen 1903.
- P. A. Hansen*, Geodätische Untersuchungen, Leipzig 1865.
- F. R. Helmert*, Studien über rationelle Vermessung im Gebiete der höheren Geodäsie, Leipzig 1868.
- , Zur Theorie des geometrischen Nivellierens, *Astr. Nachr.* 81 (1873).
- , Entwicklung der ersten Glieder für die Reduktion eines sphäroidischen Dreiecks auf ein sphärisches mit denselben Seiten, *Zeitschr. f. Vermess.* 18 (1889).
- , Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung, Berlin Ber. 1900 und 1901.
- H. Hergesell*, Über die Formel von *G. G. Stokes* zur Berechnung regionaler Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid, Straßburg 1891.
- K. G. J. Jacobi*, Über die Figur des Gleichgewichts, *Ann. Phys. Chem.* 33 (1834).
- , Nouvelles formules de géodésie communiquées par M. le prof. *E. Luther* à Königsberg, *Astr. Nachr.* 41 (1835).
- N. Jadanza*, Guida al calcolo delle coordinate geodetiche, Torino 1891.
- W. Jordan*, Ein Beitrag zur Theorie der terrestrischen Refraktion, *Astr. Nachr.* 88 (1876).
- , Sphäroidische Koordinatenumformung, *Zeitschr. f. Vermess.* 20 (1891).
- L. Krüger*, Zur Theorie rechtwinkliger geodätischer Koordinaten, *Zeitschr. f. Vermess.* 26 (1897).
- P. S. Laplace*, Théorie de l'attraction des sphéroides et de la figure des planètes, Paris Mém. pour 1782 (1785).
- , Mémoire sur la figure de la terre, Paris Mém. pour 1783 (1786).
- A. M. Legendre*, Recherches sur la figure des planètes, Paris Mém. pour 1784 (1787).
- , Suite des recherches sur la figure de la terre, *ibid.* 1789 (1795).
- , Analyse des triangles sur la surface d'un sphéroïde, *ibid.* 7 (1806).
- J. Liouville*, Note sur la figure d'une masse fluide homogène en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation, *J. éc. polytechn.* 14 (1834).
- , Note sur un passage de la Méc. céleste relatif à la théorie de la figure des planètes, *J. de math.* 2 (1837).
- C. Maclaurin*, A treatise on fluxions, Edinburgh 1742.
- C. O. Meyer*, De aequilibrii formis ellipsoidicis, *J. f. Math.* 24 (1842).
- E. F. A. Minding*, Über einige Grundformeln der Geodäsie, *J. f. Math.* 44 (1852).
- P. Pizzetti*, Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico, *Rend. Acc. Linc.* (5) 3 (1894).

- J. H. Pratt*, A treatise on attractions, *Laplaces* functions and the figure of the earth, London 1871.
- E. Pucci*, Sulle formole fondamentali della geodesia geoidica, Milano Ann. d. mat. (2) 14 (1886).
- B. A. M. Sadebeck*, Über den Einfluß der Lotablenkungen auf Winkelmessungen, Astr. Nachr. 90 (1877).
- Ch. M. Schols*, Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, Delft Ann. éc. polyt. 1 (1885).
- O. Schreiber*, Die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der kgl. Preußischen Landesaufnahme, Berlin 1895.
- Th. Simpson*, A mathematical dissertation on the figure of the earth, London 1743.
- A. Sonderhof*, Die geodätischen Korrekturen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel, Arch. Math. Phys. 15 (1870).
- , Ein Beitrag zu höheren Geodäsie, Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872).
- J. Stirling*, On the figure of the earth and the variation of gravity on the surface, London Phil. Trans. 39 (1735).
- G. G. Stokes*, On attractions and on Clairauts theorem, Cambr. Dubl. math. J. 4 (1849) = Papers 2, Cambridge 1883.
- , On the variation of gravity at the earth, Cambridge Phil. Trans. 8 (1849) = Papers, *ibid*.
- J. L. Tiarks*, On Mr. Dalbys method of finding the difference of longitude between two points of a geodetical line etc., Phil. Mag. (2) 4 (1828).
- A. J. Yvon Villarceau*, De l'effet des attractions locales sur les longitudes et les azimuts etc., Paris C. R. 62 (1866).
- , Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la terre, J. de math. (2) 18 (1873).
- J. Weingarten*, Allgemeine Untersuchungen über die geodätischen Linien und die vertikalen Schnitte auf krummen Oberflächen (Anhang zu *Baeyer*, Das Messen usw.), Berlin 1862.
- , Über eine geodätische Aufgabe, Astr. Nachr. 73 (1869).
- G. Zachariae*, Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Koordinaten (aus dem Dänischen übersetzt von *E. Lamp*), Berlin 1878.
- O. Zanotti-Bianco*, Il problema meccanico della terra, Torino 1880—85.

F. Monographien über die geodätischen Messungen und ihre Reduktion.

- J. J. Baeyer*, Bestimmung der Höhe von Berlin, Astr. Nachr. 14 (1837).
- , Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, Berlin 1840.
- , Über Fehlerbestimmung und Ausgleichung eines geometrischen Nivellements, Astr. Nachr. 86 (1875).
- R. Benoît et Ch. Guillaume*, Les nouveaux appareils pour la mesure des bases géodésiques, Paris 1905 (Procès verb. Comité Poids et mesures).
- F. W. Bessel* und *J. J. Baeyer*, Gradmessung in Ostpreußen und ihre Verbindung mit preußischen und russischen Dreiecksketten, Berlin 1838.
- J. C. Borda*, Expériences sur les règles qui ont servi à la mesure des bases, Paris 1810 (Anhang zu: *Méchain* et *Delambre*, Base du système métrique etc., Paris 1810).
- A. Börsch*, Über den Einfluß der Wahl verschiedener Nullrichtungen auf die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen, Astr. Nachr. 97 (1880).

- A. *Börsch* und *L. Krüger*, Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau, Heft 2, Berlin 1896.
- A. *Börsch* und *F. Kühnen*, Vergleichung der Mittelwasser der Ostsee und Nordsee, des Atlantischen Ozeans und des Mittelmeeres usw., Berlin 1891.
- O. *Börsch*, Über die Ausgleichung einer um ein Polygon gelegten geodätischen Dreieckskette, *Astr. Nachr.* 71 (1868).
- , Ausgleichungen von Präzisionsnivellements, *Zeitschr. f. Vermess.* 7 (1878).
- R. G. *Boscovich*, De expeditione ad dimetiendos duos meridiani gradus, Romae 1755.
- P. *Bouguer*, La figure de la terre déterminée par les observations de *M. M. Bouguer* et *De la Condamine* usw., Paris 1749.
- C. F. *Cassini de Thury*, La méridienne de l'Observatoire royal de Paris vérifiée dans toute l'étendue du royaume, Paris 1744.
- J. D. *Cassini de Thury*, P. F. A. *Méchain* et A. M. *Legendre*, Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et Greenwich, Paris 1791.
- A. R. *Clarke* (under the direction of Sir *H. James*), Account of the observations and calculations of the principal triangulation; and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived therefrom, London 1858.
- W. *Eimbeck*, The duplex base apparatus and directions for its use in field, R. C. G. S. 1897.
- A. *Ferrero*, Note sur la possibilité de calculer à priori les poids et la précision d'une triangulation par la simple connaissance de son canevas. *Int. Erdm.* 1880.
- A. *Fischer*, Der Einfluß der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln, Berlin 1882.
- C. F. *Gauß*, Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona, Göttingen 1828 (Werke 9).
- Ch. L. *Gerling*, Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate mit ihren Anwendungen auf geodätische Aufgaben, Hamburg 1843.
- P. A. *Hansen*, Von der Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen und in ihren Anwendungen auf die Geodäsie, Leipzig 1861.
- K. K. *Hartl*, Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung, Wien 1883.
- , Über den Zusammenhang der terrestrischen Strahlenbrechung und der meteorologischen Elemente, *Zeitschr. öst. Ges. Meteor.* 16 (1881).
- C. *Haupt*, Die Ausgleichung großer geodätischer Dreiecke, *Astr. Nachr.* 107 (1884).
- O. *Hecker*, Bestimmung der Schwerkraft auf dem atlantischen Ozean sowie in Rio de Janeiro, Lissabon und Madrid, Berlin 1903.
- F. R. *Helmert*, Lotabweichungen, Heft 1, Berlin 1886.
- , Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbes. in den Tyroler Alpen, in geodätischer und geologischer Beziehung, Berlin 1890.
- , Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau, Heft 1, Berlin 1893.
- , Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau, Berlin Ber. 1901.
- P. *Hossard*, Note sur la mesure des bases (Anhang zu *Francoeur*, Géodésie), Paris 1855.

- C. Ibañez et Saavedra Meneses*, Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la Commission de la Carte d'Espagne, Paris 1860.
- C. Ibañez et Perrier*, Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne, exécutée en 1879 etc., Paris 1886.
- E. Jäderin*, Geodätische Längenmessung mit Stahlbändern und Metalldrähten, Stockholm 1885.
- W. Jordan*, Die Grundformeln der terrestrischen Refraktion, Zeitschr. f. Vermess. 18 (1889).
- C. Koppe*, Der Basisapparat des Generals Ibañez und die Aarberger Basismessung, Zürich 1881.
- L. Krüger*, Über ein Verfahren, die Ergebnisse mehrfacher Beobachtungen eines Dreiecksnetzes miteinander zu verbinden, Astr. Nachr. 133 (1893).
- , Über den Anschluß eines sekundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz, Zeitschr. f. Vermess. 25 (1896).
- , Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen, Potsdam 1898.
- , Zur Ausgleichung von Polygonen und von Dreiecksketten und über die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler, Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902).
- F. Kühnen und R. Schumann*, Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn, Berlin 1897.
- Ch. Lallemand*, Nivellement de haute précision, Paris 1889.
- , Le niveau moyen des mers en Europe et l'unification des altitudes, Revue Scientifique 1890.
- P. L. M. de Maupertuis*, La figure de la terre déterminée par les observations faites par ordre du Roy au cercle polaire, Paris 1738.
- P. J. Méchain et J. B. Delambre*, Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque à Barcelone, 3 vol., Paris 1806—10.
- J. B. Messerschmitt*, Das schweizerische Dreiecksnetz, 9, Zürich 1901.
- E. Pechmann*, Die Abweichungen der Lotlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen und ihre Berechnung als Erfordernis einer Gradmessung, Wien Denkschr. 22 (1864).
- J. Picard*, La mesure de la terre, Paris 1671 und Paris Mém. 1720.
- Pomerantzeff*, Sur la figure du géoïde, Abhandl. der topographischen Abteilung des Generalstabes, 54, St. Pétersbourg 1897 (russisch).
- J. Porro*, Nouvel appareil destiné à la mesure des bases trigonométriques, Paris C. R. 29 (1849).
- J. H. Pratt*, On the attraction of the Himalaya mountains and of the elevated regions beyond them, upon the plumb-line in India, London Phil. Trans. 165 (1855).
- B. von Prodzynski*, Über die Aufstellung bisher noch nicht angewandter Bedingungsgleichungen bei Ausgleichungen geodätischer Dreiecksketten, Astr. Nachr. 71 (1868).
- L. Puissant*, Sur les opérations géodésiques et astronomiques qui servent de fondement à la nouvelle carte de la France, Paris Mém. 16 (1838).
- L. Puissant et E. Peytier*, Nouvelle description géométrique de la France etc., Paris 1832—53.
- V. Reina e G. Cicconetti*, Ricerche sul coefficiente di refrazione terrestre in Roma sul 1895. Mem. Soc. Italiana dei XL (3) 10 (1896).

- V. Reina*, Determinazioni astronomiche di latitudine e d'azimut eseguite lungo il meridiano di Roma, Firenze 1903.
- W. Roy*, An account of the trigon. operation, by which the distance between the meridians of the R. Observatories of Greenwich and Paris has been determined, London Phil. Trans. 80 (1790).
- G. V. Schiaparelli*, Sulla compensazione delle reti trigonom. di grande estensione, Milano Ist. Lombardo 2 (1865) e 3 (1866).
- C. A. Schott*, Description and construction of a new compensation base apparatus etc., Washington, R. C. G. S. 1882.
- , The transcontinental triangulation and the American arc of the parallel, Washington 1900.
- , The Eastern oblique arc of the U. S., and osculating spheroid, Washington 1902.
- O. Schreiber*, Über die Anordnung von Horizontal-Winkelbeobachtungen auf der Station, Zeitschr. f. Vermess. 7 (1878).
- F. M. Schwerd*, Die kleine Speierer Basis usw., Speier 1822.
- A. Secchi*, Misura della base trigonom. eseguita sulla Via Appia, Roma 1858.
- P. Simon*, Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen, Berlin 1889.
- W. Snellius van Roijen*, Erathostenes Batavus, seu de terrae ambitus vera quantitate suscitatus, Leyden 1617.
- R. von Sterneck*, Über die Änderung der Refraktionskonstanten und Störungen der Lotlinie im Gebirge, Wien 1879.
- , Untersuchungen über den Einfluß der Schwerstörungen auf die Ergebnisse des Nivellements, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien 8 (1888), 9 (1889).
- , Die Schwerkraft in den Alpen und Bestimmung ihres Wertes für Wien, ibid. 11 (1892).
- J. G. W. Struve*, Arc du méridien de 25° 20' entre le Danube et la Mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1850 etc., St. Pétersbourg 1857—60.
- A. Venturi e E. Soler*, Prime ricerche sul coefficiente di refrazione in Sicilia, Palermo 1893.
- Ch. A. Vogler*, Über Stationsbeobachtungen in symmetrischer Anordnung, Zeitschr. f. Vermess. 14 (1885).
- J. T. Walker*, India's contribution to geodesy, London Phil. Trans. 186, Part II, (1896).

I. Allgemeine Grundlagen.¹⁾

1. Aufgabe der höheren Geodäsie. Um die Ziele der höheren Geodäsie in Kürze bezeichnen zu können, definieren wir als eine Niveaufläche der Erde²⁾ eine solche Fläche, deren Normale in jedem

1) Einen großen Teil der Literaturnachweise über die fundamentalen Fragen der Geodäsie findet man in Teil III (Summarische Entwicklungsgeschichte der geodätischen Kenntnisse).

2) *C. Maclaurin* (A treatise on fluxions, Edinburgh 1742) benutzte zuerst (nach *Todhunter*, History, chapt. IX) die Bezeichnung Niveaufläche bei Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen.

Punkte mit der Vertikalen oder Lotrichtung dieses Punktes zusammenfällt. Die Hauptaufgabe der höheren Geodäsie ist dann das Studium dieser Niveauflächen und die Lösung der damit zusammenhängenden Probleme. Die praktische Geodäsie zieht aus diesen Studien insofern Nutzen, als die Niveauflächen die besten Bezugsflächen für die Vermessungsoperationen abgeben, soweit man dabei wie in der niederen Geodäsie nicht überhaupt von der Krümmung der Erdoberfläche absehen kann.

2. Lotrichtung, Schwerkraft. Überläßt man einen materiellen Punkt an der Stelle M , der in bezug auf ein mit dem starren Teil der Erde fest verbundenes Koordinatensystem keine relative Anfangsgeschwindigkeit hat, der Wirkung der Schwere, so bewegt er sich in einer Richtung MV und erhält nach der unendlich kleinen Zeit dt die Geschwindigkeit $g dt$. Die Richtung MV nennt man die Vertikale oder die Lotrichtung und g die Schwerkraftsbeschleunigung oder kurz Schwerkraft³⁾ im Punkte M . Nach den Sätzen über die relative Bewegung gilt für den Vektor \bar{g} ⁴⁾

$$(1) \quad \bar{g} = \bar{A}_a - \bar{A}_s,$$

wo \bar{A}_a den Beschleunigungsvektor der absoluten Bewegung des Punktes M und \bar{A}_s den des beweglichen Raumes (moto di strascimento) in demselben Punkte bedeutet, d. h. den Beschleunigungsvektor für den Punkt M , wenn er mit dem angenommenen Koordinatensystem fest verbunden gedacht wird. Die Beschleunigung A_a hat ihre Ursache in der Anziehungskraft der Masse der Erde und der Gestirne auf M , A_s in der täglichen Umdrehung der Erde um ihre Achse und in ihrer Translation im Raume.

Wir nehmen jetzt als Koordinatenanfangspunkt den Schwerpunkt der Erde an und als z -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Achse der täglichen Umdrehung, deren Winkelgeschwindigkeit wir ω nennen. Bezeichnen wir dann mit V das Potential der Erdmasse in bezug auf $M(x, y, z)$, mit X_i, Y_i, Z_i die Koordinaten eines punktförmig gedachten Gestirns von der Masse μ_i , mit R_i, ρ_i die Entfernungen des Gestirns vom Koordinatenanfangspunkt und von M und

3) Die einfache Anziehungskraft der Erde auf einen Massenpunkt 1 bezeichnen *P. L. M. de Maupertuis* und *A. C. Clairaut* mit *gravité*, *C. Maclaurin* mit *gravity* und *R. G. Boscovich* mit *gravitas primitiva*. Die zusammengesetzte Wirkung der Anziehungskraft der Erde und der durch die tägliche Bewegung verursachten Zentrifugalkraft bezeichnen die genannten Autoren der Reihe nach mit *pesanteur*, *gravitation* und *gravitas residua* (vgl. *Todhunter*, *History*, § 25).

4) Da in dem betrachteten Augenblicke die relative Geschwindigkeit Null ist, ist auch die sog. „zusammengesetzte Zentrifugalbeschleunigung“ gleich Null.

mit f die Gravitationskonstante, so ergeben sich als Komponenten des Vektors \bar{g} nach (1):

$$g_x = f \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x + \xi$$

$$g_y = f \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y + \eta$$

$$g_z = f \frac{\partial V}{\partial z} + \zeta,$$

wo

$$\xi = f \sum_i \mu_i \left(\frac{X_i - x}{e_i^3} - \frac{X_i}{R_i^3} \right)$$

ist und ähnliche Ausdrücke für η und ζ gelten; die Summation ist über die verschiedenen Sterne zu erstrecken.

Bei einer ersten Definition der Vertikalen, und soweit man die Figur der Erde als unveränderlich betrachtet, können die Glieder ξ , η , ζ vernachlässigt werden. Denn es ist die Länge des Vektors, dessen erste Komponente

$$f\mu \left(\frac{X-x}{e^3} - \frac{X}{R^3} \right)$$

ist, immer kleiner als

$$f\mu \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+d)^2} \right),$$

wo d die größte Entfernung des Punktes M vom Koordinatenanfangspunkt bedeutet. Die letzte Größe kann man aber angenähert durch $2f\mu \cdot \frac{d}{R^3}$ oder auch durch $\Delta g = 2g \cdot \frac{\mu}{m} \frac{d^3}{R^3}$ ersetzen, wo m die Masse der Erde bezeichnet. Für die Sonne ist $\frac{\mu}{m} = 324400$, $\frac{R}{d} > 23000$, daher $\Delta g < \frac{1}{18770000} g$; für den Mond gilt $\frac{\mu}{m} < 0,0126$, $\frac{R}{d} > 56,9$, $\Delta g < \frac{1}{7310000} g$.⁵⁾ Für die Planeten ergibt sich Δg noch viel kleiner. In Anbetracht der Beobachtungsungenauigkeit bei der Bestimmung von g sind aber solche Werte von Δg für die Geodäsie ganz ohne Bedeutung.

Wir reduzieren deshalb die Komponenten der Schwerebeschleunigung auf die Ausdrücke:

$$(2) \quad g_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

wo

$$(3) \quad W = fV + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

5) Solchen Änderungen der Größe von g entsprechen Änderungen der Lotrichtung, die nicht größer sind als $\frac{\Delta g}{g \cdot \text{arc } 1''} = 0'',028$.

ist. Auf Grund der Sätze über die Kräfte, die ein Potential (vgl. II A 7b (*H. Burkhardt* und *W. F. Meyer*)) besitzen, findet man dann, daß:

$$W = \text{konst.}$$

die Gleichung einer Niveaufläche ist und daß die Schwerkraft im Punkte M durch

$$(4) \quad g = - \frac{\partial W}{\partial n}$$

gegeben ist, wo dn ein Element der auf der Niveaufläche in M nach außen hin errichteten Normalen ist.

Wenn man von den Meeresbewegungen, die aus astronomischen oder meteorologischen Ursachen entstehen, absieht, so wird die Wasseroberfläche des Meeres zu einer Niveaufläche gehören, und wenn man noch annimmt, daß die Oberflächen der verschiedenen Meere in einer einzigen Niveaufläche liegen, so wird man diese als Bezugsfläche wählen und ihre Bestimmung als das Endziel der geodätischen Operationen ansehen können⁶⁾. Nach einer von *J. B. Listing*⁷⁾ eingeführten Bezeichnung hat man ihr den Namen Geoid gegeben. Da es aber erstens zweifelhaft ist, ob das Mittelwasser der Meere, wie es von den Pegeln aufgezeichnet wird, genügend genau mit demjenigen übereinstimmt, das sich bei Abwesenheit der störenden Ursachen einstellen würde, und zweitens, ob die Mittelwasser verschiedener Pegel derselben Niveaufläche angehören, so ist es präziser, durch Übereinkunft diejenige Niveaufläche, die durch den Stand des Mittelwassers an einem bestimmten Pegel gegeben ist, als Geoid anzusprechen⁸⁾.

6) Daß das Studium der Figur der Erde an eine Niveaufläche anknüpfen muß, ist explizite zuerst von *C. F. Gauß* ausgesprochen in „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona usw.“, Werke 9, p. 49. Stillschweigend ist man allerdings immer von diesem Gedanken ausgegangen, sobald man begonnen hatte, sich systematisch mit dem Problem der Figur der Erde zu beschäftigen. So stellt *J. Newton* in t. III, prop. XVIII der Principia, wo er das Verhältnis der polaren Halbachse eines Planeten zur äquatorrealen bestimmen will, die Bedingung auf, daß die Meere sich im Gleichgewicht befinden sollen. Man vergleiche ferner *A. C. Clairaut*, Théorie de la figure de la terre, Paris 1743, Einleitung. *F. W. Bessel* (Gradmessung in Ostpreußen, Abhandlungen 3, p. 128) definiert als *mathematische Figur der Erde* diejenige Fläche, in der die Oberflächen eines Netzes von Kanälen liegen würden, die mit dem Meere kommunizieren usw.

7) Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde, Göttingen 1873, p. 41. Man benutzt auch nach *F. W. Bessel* die Bezeichnung „mathematische Figur der Erde“ (*F. R. Helmert*, *H. Bruns* u. a.).

8) Die genannten Zweifel sind speziell ausgesprochen von *H. Bruns*, Die Figur der Erde, Berlin 1878, § 1. Die Frage der präzisen Definition des Geoids

3. Beobachtungstatsachen und Sätze der Potentialtheorie. Wir können als gegebene Tatsachen annehmen:

1) daß die physische Erdoberfläche wenig von einer Kugel verschieden ist, deren Mittelpunkt auf der Rotationsachse der Erde liegt oder daß, nachdem man einen Punkt C auf der Rotationsachse und einen Radius R geeignet gewählt hat, die Differenz zwischen R und dem Radiusvektor r von C nach einem Punkte P der Erdoberfläche eine kleine Größe im Vergleich zu R ist, genauer, daß

$$\left| \frac{R-r}{R} \right| < \frac{1}{100} \text{)}$$

ist;

2) daß das Verhältnis

$$\frac{\omega^2 R^3}{fM},$$

wo M die Masse der Erde bezeichnet, ungefähr gleich $\frac{1}{288,4}$ ist¹⁰⁾.

Folgerungen. Wenn man von den vorstehenden Daten ausgeht, so kann man beweisen, daß

1) die Richtung der Schwerkraft in einem Punkte P der Erdoberfläche oder außerhalb derselben mit dem Radiusvektor CP einen *stumpfen* Winkel bildet, wenigstens so lange dieser Radiusvektor rundgerechnet weniger als sechsmal so groß ist als der mittlere Radius R . Außerhalb der Erdoberfläche und innerhalb dieser Grenze kann man deshalb sicher sein, daß die Funktion W nach oben hin abnimmt.

2) Innerhalb der genannten Grenze sind die Niveauflächen geschlossen und schneiden je den von C ausgehenden Radius nur einmal¹¹⁾.

Sätze der Potentialtheorie. Aus den Eigenschaften der Potentialfunktionen und aus einfachen Rechnungen mit Benutzung von (2), (3), (4) findet man:

a) Die Niveauflächen $W = \text{konst.}$ sind stetige Flächen ohne Kanten und Ecken.

hängt mit der Wahl des Nullpunktes für die Höhen zusammen, worüber man Nr. 37 vergleiche.

9) Wenn man von den geographischen Beweisen absieht, so wird die annähernde Kugelgestalt der Erde noch durch verschiedene astronomische Tatsachen, speziell durch die Mondparallaxen, bewiesen.

10) *Helmert*, H. G. 2, p. 82; *J. Tisserand*, *Traité de mécanique céleste* 2, p. 91. Den Wert dieses Verhältnisses kann man aus der Theorie der Mondbewegung ableiten.

11) Daß die Niveauflächen der Erde geschlossen sind, wird gewöhnlich ohne Beweis angenommen. Der Beweis ergibt sich leicht aus den angeführten Tatsachen, vgl. *P. Pizzetti*, *Acc. Linc. Rendic.* (5) 10 (1901), p. 9 u. 35.

b) Die Richtung der Schwerkraft ändert sich stetig von einem Raumpunkt zum andern. (Diese beiden Tatsachen gelten sowohl innerhalb wie außerhalb der Erdoberfläche.)

c) Die Krümmung der Niveauflächen (d. h. die Hauptkrümmungsradien und die Richtung der Krümmungslinien) ändert sich im Innern der Erde nur dann stetig, wenn die Dichte sich stetig ändert. Erleidet diese an einer Stelle eine sprungweise Änderung, so treten auch Krümmungsdiskontinuitäten in den Niveauflächen auf¹²⁾.

d) Wenn x eine Tangente in einem Punkte P einer Niveaufläche ist und wenn man auf der Vertikalen von P einen unendlich benachbarten Punkt P_1 im Abstände dz annimmt, so bildet die Vertikale P_1V_1 von P_1 mit der Geraden x einen Winkel, dessen Kosinus bis auf Glieder zweiter Ordnung den Wert hat¹³⁾:

$$(5) \quad \cos(v_1x) = \frac{dz}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x},$$

wo die Werte von g und der Ableitung von g sich auf den Punkt P beziehen.

e) Wenn das Potential der anziehenden Masse aus irgend einem Grunde eine unendlich kleine Änderung δV erfährt, so erleidet die Niveaufläche (die einem bestimmten Werte der Funktion W entspricht) die Verschiebung $\delta h = \frac{\delta V^{14})}{g}$ (h positiv nach oben gerechnet).

4. Weitere Folgerungen aus der Potentialtheorie. Theorem von G. G. Stokes. Wenn man eine Niveaufläche S außerhalb der Erdmasse als bekannt voraussetzt und wenn die Gesamtmasse M der Erde gegeben ist, so ist die Funktion W und deshalb auch der Wert der Schwerkraft für alle Punkte auf S und außerhalb von S bestimmt¹⁵⁾. Denn macht man zwei verschiedene Annahmen V, V' über den Aus-

12) Diese diskontinuierlichen Änderungen sind berechnet von *H. Bruns*, *Figur der Erde*, § 2. Vgl. auch *Helmert*, *H. G.* 2, p. 35.

13) Diese Formel ist leicht abzuleiten nach *Bruns*, *Figur der Erde*, § 2. Vgl. auch *P. Pizzetti*, *Astr. Nachr.* 138 (1895), p. 353.

14) Dies Theorem ist von *H. Bruns* bewiesen (*Figur der Erde*, p. 20). *O. Zanotti-Bianco* (*Torino Atti* 31 (1896), p. 1022) hat bemerkt, daß die genannte Relation bereits von *J. H. Pratt* (*A treatise on attractions etc.*, 4. edit. Cambridge 1871) angegeben ist; aber die Ausführungen von *Pratt* sind kaum ein Beweis zu nennen.

15) *G. G. Stokes*, *On attractions and on Clairauts theorem*, *Cambr. and Dubl. math. J.* 4 (1849), p. 194. In der Fassung des Theorems bei *Stokes* fehlt die Bedingung, daß die gesamte Masse bekannt sein muß, und infolgedessen ist der Beweis unvollständig. Der Satz und Beweis wurden vervollständigt von *H. Poincaré* (vgl. *Tisserand*, *Méc. cél.* 2, p. 324).

druck des Potentials der Anziehungskraft der Erde, so muß die Funktion $V - V'$ sich auf S auf eine (unbekannte) Konstante C reduzieren und überdies außerhalb von S der Gleichung $\Delta = 0$ genügen. Andererseits ist $V - V'$ die Potentialfunktion der Gesamtmasse Null. Die Konstante C muß deshalb Null sein¹⁶⁾ und daher auch $V - V'$ sowohl auf S wie außerhalb von S verschwinden.

Setzt man speziell voraus, daß S ein abgeplattetes Rotationsellipsoid sei, dessen kleine Achse mit der Rotationsachse der Erde zusammenfällt, so erhält man für einen beliebigen Punkt P :

$$(6) \quad V = (M + \frac{2}{3} \pi \rho a^2 b) \frac{\arctan E}{(a^2 - b^2)^{1/2}} - \frac{2 \pi \rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{3/2}} (E - \arctan E) z^2 \\ - \frac{\pi \rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \left(\arctan E - \frac{E}{1 + E^2} \right) (x^2 + y^2).$$

Darin bedeuten x, y, z die Cartesischen Koordinaten von P , der Mittelpunkt des Ellipsoids ist Anfangspunkt des Koordinatensystems und die z -Achse fällt mit der Rotationsachse zusammen; a, a, b sind die Halbachsen des Ellipsoids. Außerdem ist gesetzt:

$$E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}}$$

unter λ die größere Wurzel der Gleichung:

$$\frac{z^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} = 1$$

verstanden. Die Größe ρ ist ferner definiert durch die Formel:

$$\frac{\omega^2}{2 \pi f \rho} = \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon^3} \arctan \varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}, \quad \text{wo } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \text{ ist.}$$

In dem praktisch wichtigen Falle, daß ε sehr klein ist, ist es zweckmäßig, die Ausdrücke für V, E und λ in Reihen zu entwickeln, wobei alle höheren Potenzen von ε als die dritte und das Produkt von ε^2 mit ω^2 vernachlässigt werden können.

Die Formeln (3) und (6) geben dann:

$$(7) \quad W = \frac{Mf}{r} + \frac{a^2 Mf}{6r^3} (3 \sin^2 \theta - 2) \left(\varepsilon^2 - \frac{a^3 \omega^2}{Mf} \right) + \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \theta}{2},$$

wenn man mit r den Radiusvektor und mit θ das Komplement der geozentrischen Breite von P bezeichnet. Mit demselben Grade der Annäherung ergibt sich für die Schwerkraft im Punkte P :^{15) 17)}

16) Beweis durch Anwendung der Formeln (16), (17) in II A 7b (*H. Burkhardt* und *W. F. Meyer*) auf die Funktion $V - V'$.

17) *Helmert*, H. G. 2, p. 75. Der vollständige Ausdruck von V für ein Ellipsoid ist 1890 von *M. Hamy* mit Hilfe *Laméscher* Funktionen gegeben [*J. de*

$$(8) \quad g = \frac{Mf}{r^2} + \frac{a^2 Mf}{6r^4} (3 \sin^2 \theta - 2) \left(\varepsilon^2 - \frac{a\omega^2}{g_a} \right) - \omega^2 r \sin^2 \theta,$$

wo g_a die Schwerkraft auf dem Äquator bezeichnet. Durch Anwendung der letzten Formel ergibt sich, indem man nacheinander $\theta = 0$ und $\theta = 90^\circ$ setzt:

$$\frac{g_b - g_a}{g_a} = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_a} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}$$

oder auch mit derselben Annäherung:

$$(9) \quad \frac{g_b - g_a}{g_a} + a = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_a}.$$

Hier bezeichnet g_b die Schwerkraft am Pol und a die Abplattung $\frac{a-b}{a}$ des Ellipsoids. Die Gleichung (9) heißt das *Clairautsche Theorem*.

Der Bruch $\frac{\omega^2 a}{g_a}$ (Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator) ist merklich identisch mit dem Ausdruck $\frac{\omega^2 R^3}{fM}$ aus Nr. 3 und hat deshalb den numerischen Wert $\frac{1}{288,4}$; wir werden ihn mit γ bezeichnen.

Mit demselben Grade der Annäherung können wir Formel (8) die Gestalt geben:

$$(8') \quad g = g_a (1 + \beta \sin^2 \varphi) = g_{45} \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi \right),$$

in der man gewöhnlich die Schwerkraft im Meeresniveau ausdrückt; φ bedeutet die geographische Breite und g_{45} die Schwerkraft unter der Breite 45° .

Die Formel (8') ist von *J. Newton*¹⁸⁾ für den Fall eines homogenen Planeten gegeben und von *A. C. Clairaut* unter der allgemeineren Voraussetzung bewiesen, daß die Dichte im Erdinnern sich in gewisser regelmäßiger Weise ändere; unter derselben Voraussetzung hat *Clairaut* auch zum ersten Male die Formel (9) bewiesen¹⁹⁾. *G. B. Airy*²⁰⁾ behauptete dann und *G. G. Stokes*²¹⁾ bewies, daß die Relation (9) ledig-

math. (4) 6 (1890), p. 69]. Ohne Benutzung jener Funktionen hat *P. Pizzetti* den expliziten Ausdruck für V (Formel (6)) entwickelt [Acc. Linc. Rend. (5) 3 (1894), p. 166]. Es ist leicht zu sehen, daß der angenäherte Wert (7) von W mit dem durch Formel (1) bei *Helmert*, H. G. 2, p. 75 gegebenen übereinstimmt, wenn man die Formeln (10), (11), (12) (p. 75) berücksichtigt. Mit derselben Annäherung stimmt unsere Gleichung (8) mit (3) bei *Helmert* überein.

18) Phil. nat. principia 3, prop. XX.

19) Théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743, 2. partie, § 49.

20) London Phil. Trans. 116 (1826), p. 562—578.

21) Vgl. Fußnote 15.

lich daraus folgt, daß die Niveaufläche im Meeresniveau ein abgeplattetes Rotationsellipsoid sei. Die Benutzung der Schwerkraftsmessungen zur Bestimmung der Abplattung ist deshalb *völlig unabhängig von der Annahme über die Verteilung der Dichte im Erdinnern*.

Setzt man voraus, daß die Niveaufläche S ein wenig von einem Ellipsoid verschieden sei und daß in jedem Punkte die Differenz Δg zwischen dem wirklichen Wert der Schwerkraft mit dem durch Formel (8') gegebenen bekannt sei, so kann man nach *Stokes* in jedem Punkte den Abstand Δn der Fläche S von dem Ellipsoid E , auf das (8') sich bezieht, ermitteln. Mißt man den genannten Abstand Δn längs des Radiusvektor vom Zentrum C des Ellipsoids nach irgendeinem Punkte P von S (oder mit derselben Annäherung längs des Lotes in P), so ergibt sich:²²⁾

$$(10) \quad \Delta n = \frac{a}{4\pi G} \int_S \Delta g \left\{ \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \lg \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right\} d\Omega,$$

wobei die Integration über S oder mit derselben Annäherung auch über eine Kugel zu erstrecken ist; $d\Omega$ bedeutet das Flächenelement auf einer Kugel um C mit dem Radius 1, Δg ist die Schwerkraftstörung im Punkte M , auf den sich das Element $d\Omega$ bezieht und ψ der Winkel, unter dem die Entfernung PM von C aus erscheint; G bezeichnet einen Mittelwert von g .

Die *Stokes'sche* Formel wird einen praktischen Wert haben, wenn von zahlreichen gleichmäßig über die Erde verteilten Orten Schwerkraftsmessungen vorliegen. *H. Hergesell*²³⁾ glaubt sogar, daß man auch aus einer beschränkten Zahl von Schwerkraftsmessungen um einen Ort herum, wenn auch nicht auf den Betrag, so doch auf das Vorzeichen der Abweichung des Geoids vom Ellipsoid an jenem Orte schließen kann.

Sowohl bei dem Beweise des *Clairaut'schen* Satzes wie bei dem der Formel (10) macht *Stokes* von der Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen²⁴⁾ Gebrauch, indem er mit den Kugelfunktionen

22) Cambridge Phil. Trans. 8 (1849), p. 672; *Helmert*, H. G. 2, p. 253.

23) Über die Formel von *G. G. Stokes* zur Berechnung regionaler Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid, Diss. Straßburg 1891 (vgl. dazu die Bemerkungen von *A. Börsch* in Fortschr. d. Math. 22 (1893), p. 1194).

24) Die Entwicklung der Potentialfunktion schreitet nach ganzen positiven Potenzen des Verhältnisses $\frac{r'}{r}$ des Radiusvektors nach dem Massenelement und nach dem „Aufpunkt“ fort. Da dies Verhältnis nicht immer kleiner als 1 ist, so

zweiter Ordnung abbricht. *Helmert*²⁵⁾ berücksichtigt auch noch Kugelfunktionen vierter Ordnung und erhält, indem er die Darstellung der Schwerkraft durch die Formel:

$$g = g_a(1 + \beta_2 \sin^2 \varphi + \beta_4 \sin^4 \varphi)$$

als gegeben ansieht, als Gleichung des Meridians der Niveaufläche die folgende Beziehung zwischen dem Radiusvektor r und der Breite φ :

$$(11) \quad r = a \{ 1 - \alpha(1 + \beta - \alpha) \sin^2 \varphi - \delta \sin^2 \varphi + (\alpha\beta - \alpha^2 + \delta) \sin^4 \varphi \},$$

wo

$$\beta = \beta_2 + \beta_4, \quad \alpha = \frac{5}{2} \gamma - \beta - \alpha \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{2}{7} \delta,$$

$$\delta = \frac{1}{3} (7 \alpha^2 - 4 \alpha \beta + \beta_4)$$

ist.

5. Beobachtungen zur Bestimmung des Geoids. Reduktion der Schwerkraftmessungen.

a) *Astronomisch-geodätische Beobachtungen.* Die Lotrichtung V eines Punktes P wird charakterisiert durch die beiden Elemente: *astronomische Breite und Länge*, von denen die erste das Komplement des Winkels ist, den die Richtung V (nach oben hin) mit der Nordrichtung der Erdachse macht und die zweite derjenige Winkel, den die durch die Vertikale parallel zur Erdachse gelegte Ebene (astronomische Meridianebene in P) mit einer festen Ebene durch die Erdachse (Nullmeridian) macht. Wir werden die Länge positiv von 0° bis 360° nach Osten rechnen; den Ort der Punkte mit der Breite Null werden wir Erdäquator nennen und allen Punkten nördlich vom Äquator positive und südlich vom Äquator negative Breite beilegen. Durch Vergleichung der Zenitrichtung mit den Richtungen nach den Gestirnen an der Himmelskugel liefert die sphärische Astronomie (vgl. VI 2, 2, *F. Cohn*) die Mittel, um für jeden Erdort Länge und Breite zu ermitteln. Es gibt noch ein drittes astronomisch-geodätisches Element, „das astronomische Azimut“, das folgendermaßen definiert ist. Ist A irgend ein von P aus sichtbarer Punkt, so heißt astronomisches Azimut des Punktes A in bezug auf P der Winkel, den die durch A

bestehen Konvergenzbedenken gegen eine solche Entwicklung (vgl. *Helmert*, H. G. 2, p. 135 und *Tisserand*, *Méc. cél.* 2, p. 317). Um solchen Bedenken aus dem Wege zu gehen, hat *Helmert* die „Methode der Kondensation“ ersonnen, von der in der nächsten Nummer die Rede sein wird. Eine Ableitung der Formel (10), die von den genannten Bedenken frei ist, hat *Pizzetti* gegeben, *Torino Acc. Atti* 31 (1896), p. 859.

25) H. G. 2, p. 77–85.

gehende Vertikalebene in P mit der Meridianebene von P bildet; es wird positiv von Norden über Osten-Süden-Westen von 0° bis 360° gerechnet.

b) *Die eigentlichen geodätischen Messungen.* Als solche kommen in Betracht:

1. der Winkel, welchen der Visierstrahl von P nach einem Punkte A mit der Lotrichtung in P bildet (*Zenitdistanz* von A in bezug auf P);

2. der Winkel BZA zwischen den Vertikalebenen in P , die durch zwei von P aus sichtbare Punkte A und B gehen (*Horizontalwinkel* zwischen den Punkten A und B von P aus oder Differenz der Azimute);

3. die Länge gewisser, im nächsten Abschnitt zu definierender Linien zwischen zwei Punkten der Erdoberfläche;

4. die Höhen der Punkte über dem Meeresniveau.

c) *Andere astronomische Daten* außer den unter a) genannten, wie die *Mondparallaxe*, die *Ungleichheiten der Mondbewegung*, die *Präzession* und *Nutation*, können nur in geringerem Grade zur Kenntnis der Erdgestalt beitragen wie die vorher angeführten; wir berichten darüber in Nr. 53.

d) *Schwerkraftsmessungen.* Indem wir wegen der Theorie des Pendels und der Messung der Schwerkraft mit demselben auf IV 7 (*Ph. Furtwängler*) verweisen, sei hier nur erwähnt, daß man die Schwerkraftsmessungen in absolute und relative Messungen einteilt. Die ersten haben den Zweck, direkt den Wert von g an einem Orte zu ermitteln und erfordern viel Zeit, Sorgfalt und komplizierte Apparate; bei den relativen Messungen will man dagegen nur die Differenz der Schwerkraftswerte für zwei Orte ermitteln, was sich in kürzerer Zeit und mit verhältnismäßig einfacheren Apparaten erreichen läßt²⁶).

Indem wir die Auseinandersetzungen über die Reduktion der eigentlichen geodätischen Messungen (welche die Hauptaufgabe der Geodäsie bilden) auf den folgenden Abschnitt verschieben, seien hier nur einige Worte über die *Reduktion der Schwerkraftsmessungen* gesagt.

Die beobachteten Schwerkraftswerte müssen reduziert werden, um sie sämtlich auf eine Niveaufläche (gewöhnlich das Meeresniveau) zu beziehen. Sei Q der Ort, an dem die Schwerkraft g_q gemessen ist, und P der Punkt, in dem die Vertikale von Q das Geoid trifft, und setzen wir für den Augenblick voraus, daß sich zwischen Q und

26) *R. v. Sterneck*, Milit.-geogr. Inst. Wien 7 (1887), p. 83; *G. Defforges*, Paris C. R. 106 (1888), p. 126, 191.

P keine Masse befindet, so kann die Differenz $g_p - g_q$ mit genügender Genauigkeit nach der Formel²⁷⁾:

$$(12) \quad g_p - g_q = \frac{2H}{R} g_q$$

berechnet werden, wo $H = PQ$ ist und R einen mittleren Erdradius bedeutet. Befindet sich zwischen A und B Masse, so hat man lange Zeit die Attraktion der gesamten Schicht von der beobachteten Schwerkraft abgezogen. Wird der Einfachheit halber das Terrain um Q als horizontal vorausgesetzt, so kann man diese Attraktion mit

$$(13) \quad \frac{3}{2} \frac{H}{R} \cdot \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot g_q$$

ansetzen, wo Θ_m die mittlere Erddichte und Θ die Dichte der Massenschicht zwischen Q und P bedeutet. Die vollständige Korrektur würde also sein²⁸⁾:

$$(14) \quad g_p - g_q = \frac{2H}{R} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\Theta}{\Theta_m} \right) g_q.$$

Will man auf die Abweichung des Terrains von der Horizontalität Rücksicht nehmen, so muß man noch die Attraktion T der Masse, die sich zwischen der horizontalen Ebene von Q und der wirklichen Erdoberfläche befindet oder dort fehlt, in (14) rechts hinzufügen. Man hat dann:

$$(14') \quad g_p - g_q = \frac{2H}{R} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\Theta}{\Theta_m} \right) g_q + T;$$

T heißt die *Reduktion auf horizontales Terrain*²⁹⁾.

Diese Reduktionsart der beobachteten Schwerkraft stützt sich auf ein Prinzip, dessen Richtigkeit die Erfahrung im allgemeinen nicht bestätigt hat, nämlich, daß die Abweichungen des Geoids von einem Ellipsoid ausschließlich der Wirkung der *sichtbaren Störungsmassen*

27) Diese Formel kann man aus (8) ableiten, vgl. *Helmert*, H. G. 2, p. 98, 166.

28) Diese Reduktionsmethode ist nach *Todhunter* (*History*, chap. XII) zuerst von *P. Bouguer* (*La figure de la terre déterminée etc. aux environs de l'équateur*, Paris 1749) angegeben. Die Formel (14) geht gewöhnlich unter dem Namen der *Th. Youngs*chen Regel, der sie ohne Beweis in *London Phil. Trans.* 109 (1819), p. 89 (*Todhunter*, *History* letztes Kapitel) gab. Vgl. auch *P. S. Laplace*, *Méc. cél.* 5, livre XI, 6.

29) *R. G. Boscovich* scheint zuerst 1755 an die Möglichkeit einer solchen Kompensation gedacht zu haben (vgl. *Todhunter*, *History*, § 476). Wegen weiterer Notizen betreffs einer solchen Idee vgl. *J. J. Saigey*, *Petite physique du globe*; *J. H. Pratt*, *London Phil. Trans.* 161 (1871), p. 335; *Clarke*, *Geodesy*, p. 351; *H. Faye*, *Paris C. R.* 90 (1880), p. 1185; 102 (1886), p. 651 und 786; 112 (1891), p. 69; *Helmert*, H. G. 2, p. 364—368; *Pucci*, *Fondamenti* 2, cap. XII.

zuzuschreiben seien, also den Massen über dem Meeresniveau und dem Massendefekt, der durch die geringere Dichte des Meerwassers im Vergleich mit den oberflächlichen Erdschichten hervorgerufen wird. In Wirklichkeit liegen die Dinge in der Mehrzahl der Fälle so, daß irgend eine Ursache (Massendefekte unter den Gebirgen und die erhöhte Dichte der Massen, die den Meeresboden bilden) die Wirkung der sichtbaren Störungsmassen zu kompensieren strebt, so dass wenigstens auf kontinentalen Stationen mit größerer Wahrscheinlichkeit die nach Formel (14) oder (14') reduzierten Schwerkraftswerte mehr von den normalen (auf dem Ellipsoid) abweichen als die nach der einfachen Formel (12) reduzierten³⁰⁾.

In jedem Falle ist es sicher, daß die nach Formel (14) oder (14') reduzierte Schwerkraft sich nicht auf das wirkliche, sondern auf ein fingiertes Geoid bezieht.

*Helmert*³¹⁾ hat vorgeschlagen, hauptsächlich um Konvergenzbedenken bei der Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen zu beseitigen³²⁾, der wirklichen Massenverteilung der Oberflächenschichten der Erde eine fingierte Massenverteilung zu substituieren, die dadurch erhalten wird, daß man auf eine Fläche S' , parallel zum Geoid in der Entfernung αR (α Abplattung), alle Masse zwischen S' und der Erdoberfläche kondensiert. *Helmert* beweist — und das ist von besonderer Wichtigkeit —, daß bei dieser Kondensation die Niveauflächen nicht merklich geändert werden³³⁾.

Auch die Änderungen der Schwerkraft bei der Kondensation sind im allgemeinen ziemlich klein, wenigstens im Innern der Kontinente³³⁾,

30) *J. L. d'Alembert* (nach *Todhunter*, *History*, § 593) gibt den Ausdruck von T für verschiedene Annahme über die Gestalt der Berge. Erschöpfende Methoden und Formeln findet man bei *Helmert*, H. G. 2, Kap. 3. Vgl. auch *R. v. Sterneck*, *Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien* 11 (1892), p. 214.

31) H. G. 2, Kap. III und IV.

32) H. G. 2, p. 155.

33) *F. R. Helmert*, *Die Schwerkraft im Hochgebirge*, Berlin 1890, p. 38. Bei kontinentalen Stationen kann man die Korrektion wegen Höhe einfach nach Formel (12) (wie in freier Luft) ausführen. *R. v. Sterneck* (*Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien* 17 (1898), p. 109) hat auf Grund von 508 Schwerkraftsmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden:

$$g_q - g_p = 0,3023 H$$

(H in m und $g_q - g_p$ in Einheiten der 5^{ten} Dezimale), was sehr nahe mit Formel (12) übereinstimmt; *H. Flaye*, [*Paris C. R.* 90 (1880), p. 1185, 1462] nimmt an, daß die äußeren kontinentalen Erhebungen und marinen Senkungen ohne Einfluß auf die Schwerkraft seien und schlägt deshalb vor, nur die Anziehung isolierter Massen, welche sich über das mittlere Niveau einer Gegend erheben, zu

sie sind etwas erheblicher für kleine Inseln und die Meeresküsten. Die Kondensationsmethode hat außer dem schon erwähnten theoretischen Vorteil noch den, daß sie die Wirkung lediglich lokaler Störungen auf die beobachteten Schwerkraftswerte herabmindert, ohne doch den allgemeinen Gang der Niveaufläche erheblich zu ändern³⁴⁾.

Wir übergangen die Probleme und Formeln, welche sich auf den Zusammenhang zwischen den Schwerkraftswerten und der Dichte der Oberflächenschichten der Erde beziehen und verweisen dieserhalb auf VI 1, 7.

6. Geodätische Bestimmung des Geoids. — Referenzellipsoid.

Die im vorigen Paragraphen aufgezählten Beobachtungsdaten genügen, um die Richtung und die räumliche Lage einer Anzahl von Vertikalen oder Normalen zum Geoid festzulegen, und diese Fläche kann dann (wenigstens für begrenzte Gebiete) mit der praktisch erreichbaren Annäherung durch die beiden Bedingungen bestimmt werden, daß sie erstens durch einen festen Punkt geht (Mittelwasser eines gewissen Pegels) und zweitens das System der beobachteten Vertikalen orthogonal schneidet. Praktisch schlägt man zur Lösung des Problems einen indirekten Weg ein, indem man zunächst eine einfache Hypothese über die allgemeine Gestalt des Geoids macht und die Fläche in dieser vereinfachten Gestalt als Referenzfläche für die geodätischen Rechnungen zugrunde legt. Indem man die Beobachtungen dieser Fläche anzupassen versucht, ergeben sich dann die systematischen Abweichungen des gesuchten Geoids von der Referenzfläche.

Als hervorragend geeignet hat sich die Annahme eines Rotationsellipsoides, dessen Rotationsachse mit der Erdachse zusammenfällt, erwiesen, eine Annahme, zu der man vor allen Dingen auf Grund hydrostatischer Erwägungen geführt wird. Auf Grund der genannten Hypothese werden wir dann im nächsten Abschnitt sehen, wie man die Konstanten des Ellipsoides in der Weise bestimmen kann, daß seine Normalen möglichst wenig von den beobachteten Vertikalen abweichen, und wie man, wenigstens für bestimmte Gegenden der Erdoberfläche, die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid ermitteln kann.

Wie die Schwerkraftsmessungen zur Kenntnis des Geoids beitragen, geht zur Genüge aus Nr. 4 hervor.

berücksichtigen, und bei Inselstationen auf hoher See nur die Masse des Inselpeilers in Rechnung zu ziehen.

34) Wegen der Reduktion der Schwerkraft auf eine gemeinsame Niveaufläche vgl. auch *F. R. Helmert*, Berlin Ber. 1902, p. 843; 1903, p. 650.

7. Lotabweichungen. Eine geodätische Bestimmung der Gestalt des Geoids kann man nur in begrenzten Gebieten der Erde ausführen, nämlich nur dort, wo es möglich ist, eine Anzahl von Punkten durch geodätische Messungen zu verbinden. Aber auch in dieser Beschränkung kann man das Problem nur durch sukzessive Annäherungen lösen. Um sich die zur Berechnung der geographischen Positionen auf dem Referenzellipsoid nötigen Daten zu verschaffen oder um die Winkel, Längen und die beobachteten astronomischen Elemente auf das Ellipsoid reduzieren zu können, muß man in erster Annäherung Ellipsoid und Geoid identifizieren. Erst wenn die Abweichungen zwischen beiden Flächen näherungsweise bekannt sind, kann man die Beobachtungsdaten mit größerer Genauigkeit auf das Ellipsoid reduzieren.

Wenn P (mit der astron. Breite λ und der astron. Länge l) ein Punkt des Geoids ist und P' seine Projektion auf das Ellipsoid, so bezeichnet man mit „totaler Lotabweichung“ (*déviation, attraction locale*)³⁵) in P den Winkel Θ , den die Vertikale v in P mit der Normalen n des Ellipsoides in P' bildet; ellipsoidische Breite φ und Länge ω heißen (entsprechend λ und l) die Winkel, welche die Richtung der Normalen n bestimmen. Die Differenzen $\lambda - \varphi$, $l - \omega$ nennt man Lotabweichungen in Breite und Länge.

Bezeichnet man mit γ den Winkel, den die Ebene $vP'n$ mit dem ellipsoidischen Meridian von P' macht (Azimut der Abweichungsebene), so hat man:

$$(15) \quad \delta\varphi = \lambda - \varphi = \Theta \cos \gamma,$$

$$(16) \quad \delta\omega = l - \omega = \Theta \sin \gamma \sec \varphi.$$

Die Korrekturen δA , $\delta \xi$, die man an dem astronomischen Azimut A und der Zenitdistanz Z eines zweiten Punktes B auf dem Geoid in bezug auf den Punkt P anbringen muß, um die analogen Größen α , ξ für das Ellipsoid zu erhalten, haben die Werte³⁶):

35) Der Ausdruck „*attraction locale*“ kommt daher, dass man zuerst und lange Zeit hindurch der Ansicht war, daß die Lotabweichungen hauptsächlich durch lokale Unregelmäßigkeiten in der Erdkruste verursacht würden. Die ersten Studien über Lotabweichungen von diesem Gesichtspunkt aus sind von *P. Bouguer* und *C. M. La Condamine* (1730) in Peru und von *N. Maskelyne* (1775) in Schottland (*Todhunter, History* 1, § 363, p. 724—727) ausgeführt. Der erste, der vermutete, daß die Lotabweichungen eher durch ausgedehnte Kontinente oder Meere hervorgerufen werden könnten als durch einzelne Berge und daß sie deshalb systematischen Charakter haben könnten, war *R. G. Boscovich* (1750), vgl. *Todhunter, History*, 1, § 472—475. Im 18. Jahrhundert wurden verschiedene geodätische Untersuchungen zum Studium der Lotabweichungen in den Alpen ausgeführt

$$(17) \quad A - \alpha = \delta A = \sin \varphi \cdot \delta \omega - \Theta \cotg \xi \sin (\gamma - \alpha),$$

$$(18) \quad Z - \xi = \delta \xi = -\cos A \cdot \delta \varphi - \sin A \cos \varphi \delta \omega.$$

In (17) ist das zweite Glied wegen der Kleinheit von $\cotg \xi$ im allgemeinen zu vernachlässigen und man hat dann

$$(17') \quad \delta A = \sin \varphi \cdot \delta \omega,$$

was von *P. S. Laplace* (*Méc. céleste*, 2, livre III, § 38) zuerst angegeben ist.

Beschränkt man sich auf die Genauigkeit, mit der (17') gilt, so haben die Lotabweichungen auf die Messung der Horizontalwinkel keinen Einfluß.

8. Reduktion der beobachteten Lotrichtungen. Bei einer endgültigen Bestimmung von Geoidteilen muß man noch eine andere theoretische Korrektur berücksichtigen. Ist A ein Beobachtungspunkt, Av die Vertikale von A , ferner A' der Punkt, in dem Av das Geoid trifft und $A'v'$ die Vertikale in A' , so müßte man zur Bestimmung des Geoids die Richtung $A'v'$ kennen, während die astronomischen Beobachtungen nur Av liefern. Der Richtungsunterschied zwischen beiden Geraden ist aber im allgemeinen nicht zu vernachlässigen, wenn nicht die Höhe $AA' = H$ des Punktes A über dem Meeresniveau sehr klein ist.

Nimmt man die Meeresoberfläche als Rotationsellipsoid an, so fällt die Länge von A mit der von A' zusammen, während die Breite λ von A um den Betrag³⁷⁾:

$$\delta \lambda = \lambda' - \lambda = -\frac{H}{5820} \sin 2\lambda \quad (H \text{ in m, } \delta \lambda \text{ in Sek.)}$$

zu korrigieren ist, um die Breite λ' von A' zu erhalten.

Aber bei einer hypothesenfreien Bestimmung des Geoids kann man den Übergang von Av auf $A'v'$ nicht in dieser Weise ausführen. Das einzige nicht willkürliche Mittel wird hier durch Schwerkräften-

36) *F. W. Bessel*, *Astr. Nachr.* 14 (1837), p. 333; *Y. Villarceau*, *J. de math.* (2) 18 (1873), p. 393; *Helmert*, *H. G.* 1, Kap. 12.

37) In dieser Gestalt wird die Korrektur von *Helmert*, *H. G.* 2, p. 98 gegeben; auch *C. F. Gauß* hat sie bereits berechnet, indem er von der *Clairaut'schen* Formel:

$$g = g_{45} \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi\right)$$

ausging. *Gauß* setzt

$$\Delta \lambda = -1070'' \cdot \frac{H}{a} \sin 2\varphi.$$

Man findet diesen Ausdruck in einem Briefe an *J. J. Baeyer*, vgl. *Astr. Nachr.* 84 (1874), p. 1.

messungen auf Grund von Formel (5) geliefert, aus der sich ergibt:

$$(18') \quad \delta\lambda = \frac{H}{ag} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial\lambda}\right), \quad \delta l = -\frac{H}{ag} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right) \sec^2 \lambda,$$

wo sich die Quotienten $\left(\frac{\partial g}{\partial\lambda}\right)$ und $\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)$ auf den Punkt A beziehen. Es ist indessen zu bemerken, daß die eben angegebenen Formeln eine stetige Änderung der zweiten Ableitung von W zwischen A und A' und deshalb auch eine stetige Dichteänderung zwischen den genannten Punkten zur Voraussetzung haben, was in Wirklichkeit im allgemeinen nicht zutrifft. Der Einfluß unvorhergesehener Dichteänderungen kann aber von derselben Größenordnung sein, wie die aus (18') resultierenden Werte von $\delta\lambda$, δl .³⁸⁾ Die Formeln (18') werden am besten benutzt, wenn man darauf verzichtet, die Gestalt der Meeresniveaufläche direkt zu bestimmen und statt dessen eine höhere Niveaufläche bestimmen will, die gänzlich außerhalb der festen Erdrinde verläuft.

*Helmert*³⁹⁾ hat gezeigt, wie man kleine Flächenstücke des Geoids bestimmen kann, ohne daß dabei die Reduktion von Länge und Breite auf das Meeresniveau nötig wird. Statt dessen braucht man einen Mittelwert g_m der Schwerkraft längs des Lotabschnitts zwischen dem Beobachtungsort und dem Geoid.

9. Bessels Rotationsellipsoid. Wir werden als Referenzfläche das von *F. W. Bessel*⁴⁰⁾ berechnete Rotationsellipsoid annehmen, dessen Konstanten folgende Werte haben:

$$\begin{aligned} \text{Halbe große Achse } a &= 6\,377\,397,16 \text{ m,} \\ \text{„ kleine „ } b &= 6\,356\,078,96 \text{ m,} \\ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} &= 0,006\,674\,372, \quad \frac{a - b}{a} = 0,003\,342\,773 = \frac{1}{299,15}. \end{aligned}$$

Die Rechnungen von *A. R. Clarke*⁴¹⁾ und die ersten Resultate der Nordamerikanischen Gradmessung scheinen allerdings bewiesen zu haben, daß es zweckmäßig ist, die große Halbachse des *Besselschen* Ellipsoides um 800 bis 900 m und die Abplattung um $\frac{1}{70}$ bis $\frac{1}{50}$ ihres Wertes zu vergrößern. Aber andererseits ist zu bedenken, daß der aus den Schwerkraftsmessungen abgeleitete Abplattungswert weit besser mit dem *Besselschen* als dem *Clarkeschen* Werte stimmt und daß auch neuere europäische Triangulierungen sich besser dem *Besselschen*

38) *P. Pizzetti*, Astr. Nachr. 138 (1895), p. 353; ferner *Helmert*, Arch. Néerl. (2) 6 (1901), p. 442.

39) Berlin Ber. 1900, p. 964; 1901, p. 958.

40) Astr. Nachr. 14 (1837), p. 333 und 19 (1842), p. 97.

41) Geodesy, p. 319; vgl. Nr. 50.

Ellipsoide anzupassen scheinen⁴²⁾. Nun genügt für die praktischen Zwecke der Geodäsie die Ersetzung des Geoids durch das *Besselsche* Ellipsoid vollkommen; für die theoretischen Studien soll es aber nur als Referenzfläche dienen, es hat also nur die Bedingung zu erfüllen, daß seine Abweichungen vom Geoid so klein sind, daß die sogenannten Differentialformeln auf sie angewandt werden können. Da das *Besselsche* Ellipsoid diese Bedingung erfüllt, kann man stets auf dasselbe Bezug nehmen⁴³⁾.

Wenn man für Näherungsrechnungen das Ellipsoid durch eine Kugel ersetzen will, so kann man als Radius:

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{6}\right) = 6370,3 \text{ km}$$

nehmen. Diese Kugel hat dann bis auf Glieder von der Ordnung e^4 in R die folgenden Größen mit dem *Besselschen* Ellipsoid gemeinsam: 1) den mittleren Krümmungsradius der Fläche (unter Krümmungsradius einer Fläche in einem Punkte das Reziproke der *Gaußschen* Krümmung verstanden), 2) den mittleren Halbmesser (die Mittelbildung erfolgt in beiden Fällen durch Integration über die Fläche), 3) die Oberfläche, 4) das Volumen⁴⁴⁾.

II. Rechnungs- und Messungsmethoden.

A. Geodätische Rechnungen auf dem Rotationsellipsoid.

10. Fundamentalformeln (Fig. 1). Es seien a und b die beiden Halbachsen des Rotationsellipsoids ($a = OE = OF$, $b = OP$), e die numerische Exzentrizität $\frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$, α die Abplattung $\frac{a-b}{a}$, φ die *geographische* Breite eines Punktes A ($90^\circ - \sphericalangle ARP$), φ' die *geozentrische* Breite ($\sphericalangle AOF$), r' der Radiusvektor OA , r der Radius des Parallelkreises (AH) durch den Punkt A und z die Entfernung von A von der Äquatorebene. Es folgt dann aus elementaren Formeln der Differentialgeometrie⁴⁵⁾:

42) Literaturangaben zu den neueren Triangulierungen in Nr. 53.

43) *F. R. Helmert*, Lotabweichungen 1, Berlin 1886, p. 3.

44) *Helmert*, H. G. 1, p. 65–68.

45) *Helmert*, H. G. 1 gibt die numerischen Werte von $\log \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ für die Werte φ von $10'$ zu $10'$. Die vollständigsten numerischen Tabellen findet man bei *Th. Albrecht*, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, 3. Aufl., Leipzig 1894. Vgl. auch *W. Jordan*, Math. und geodätische Hilfstafeln, 9. Aufl., Hannover 1895.

$$r = r' \cos \varphi' = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad z = r' \sin \varphi' = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi,$$

und hieraus durch Reihenentwicklung:

$$\varphi - \varphi' = m \sin 2\varphi - \frac{m^2}{2} \sin 4\varphi + \frac{m^3}{3} \sin 6\varphi \dots,$$

wo

$$m = \frac{e^2}{2 - e^2} \text{ ist.}$$

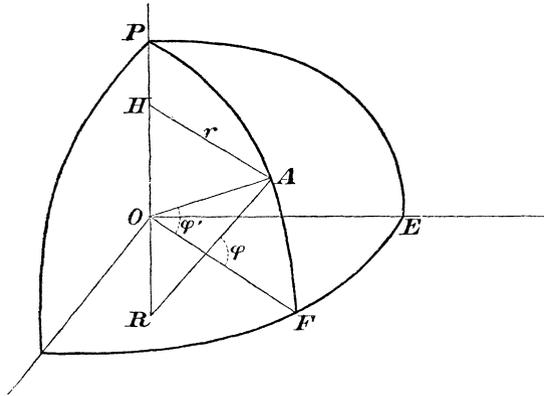


Fig. 1.

Nennt man *reduzierte Breite* den durch die Gleichung⁴⁶⁾:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 - e^2}$$

definierten Winkel u , so ist:

$$\varphi - u = n \sin 2\varphi - \frac{n^2}{2} \sin 4\varphi + \frac{n^3}{3} \sin 6\varphi \dots,$$

wo

$$n = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \text{ ist.}$$

Die Hauptkrümmungsradien in einem Punkte mit der Breite φ sind:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{Krümmungsradius im Meridian:} & \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \\ \text{Querkrümmungsradius:} & N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \end{cases}$$

⁴⁶⁾ *A. M. Legendre*, *Analyse des triangles sur la surface d'un sphéroïde*, Paris Mém. de l'Inst. 7 (1806); *C. Bremiker* (Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1869) und *Th. Albrecht*⁴⁵⁾ geben die numerischen Werte von $\log \frac{\varphi - u}{\sin 2\varphi}$.

In einem Normalschnitt im Azimut α ist der Krümmungsradius R_α gegeben durch ⁴⁷⁾:

$$(2) \quad \frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

$$= \frac{1}{\rho} - \frac{e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha}{N(1-e^2)} = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha \right).$$

Der Meridianbogen σ zwischen den Breiten φ_1 und φ_2 wird durch das Integral:

$$\sigma = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \, d\varphi = a(1-e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \, d\varphi$$

dargestellt. Auf die bequemste Weise erhält man das Integral, indem man die Funktion unter dem Integralzeichen nach dem Kosinus der Vielfachen von 2φ entwickelt⁴⁸⁾. Setzt man:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \text{ (Amplitude des Bogens),}$$

$$n = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}}, \quad p = \frac{1 + \sqrt{1-e^2}}{2}, \quad m_r = \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{r!},$$

$$A_r = m_0 m_r n^r + m_1 m_{r+1} n^{r+2} + m_2 m_{r+2} n^{r+4} + \dots,$$

so ergibt sich:

$$(3) \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^m \, d\varphi$$

$$= p^{2m} \left\{ A_0 \Delta\varphi + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{A_r}{r} \sin(r \Delta\varphi) \cos(2r\varphi_0) \right\}$$

und speziell⁴⁹⁾

⁴⁷⁾ *Helmert*, H. G. 1, p. 58; *Bremiker*⁴⁶⁾ gibt die numerischen Werte von $\log R_\alpha$ für die Werte von φ zwischen 36° und 64° von Grad zu Grad und für die Werte von α zwischen 0° und 90° von Grad zu Grad. Vgl. auch *Albrecht*⁴⁵⁾.

⁴⁸⁾ Der Gedanke einer solchen Entwicklung stammt von *A. M. Legendre* (*J. B. Delambre*, Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, précédées d'un mémoire sur le même sujet par *Legendre*, Paris, An 7, 1798–99). — *Legendre* nimmt an, daß die Meridiankurve durch die folgende Gleichung zwischen dem Radiusvektor r' und der geozentrischen Breite ψ dargestellt sei:

$$r' = R(1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi).$$

Delambre (p. 72) gibt die Entwicklung für den elliptischen Meridian; die Koeffizienten werden nach Potenzen von e^2 entwickelt. *L. Puissant* (*Traité de géodésie*, Paris 1805, 5. Aufl. 1849) gibt die Entwicklung mit Koeffizienten, die nach Potenzen von $\frac{e^2}{1-e^2}$ fortschreiten. Die im Text gegebene Entwicklung stammt von *F. W. Bessel* (*Abhandl.* 3, p. 46).

⁴⁹⁾ *Helmert* schreibt den ersten Faktor in der Gestalt: $a(1-n)(1-n^2)$.

$$(4) \quad \sigma = \frac{8a(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})^3} \left\{ \alpha_0 \Delta \varphi + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin(r \Delta \varphi) \cos(2r \varphi_0) \right\},$$

wo

$$\alpha_0 = 1 + \frac{9}{4} n^2 + \frac{225}{64} n^4 + \dots, \quad \alpha_1 = -3n - \frac{45}{8} n^3 \dots,$$

$$\alpha_2 = \frac{15}{8} n^2 + \frac{105}{32} n^4 + \dots, \quad \alpha_3 = -\frac{35}{24} n^3 \dots, \quad \alpha_4 = \frac{315}{256} n^4 + \dots$$

ist.

Die nicht angegebenen Glieder sind von der Ordnung e^{10} und deshalb stets zu vernachlässigen. Aus (4) erhält man:

$$\text{Meridianquadrant: } \frac{4a\alpha_0\pi(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})^3},$$

Länge des Meridiangrades unter der Breite φ :

$$G_\varphi = \frac{8a(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})^3} \left\{ \frac{\alpha_0\pi}{180} + \alpha_1 \sin 1^\circ \cos 2\varphi + \alpha_2 \sin 2^\circ \cos 4\varphi + \dots \right\}$$

oder bis auf Glieder der Ordnung e^4 :

$$G_\varphi = G_0 + \frac{3}{2} a e^2 \sin 1^\circ \sin^2 \varphi.$$

Eine für kleine Meridianbogen (höchstens 2°) sehr passende Entwicklung ist die von *C. G. Andrae*⁵⁰⁾

$$(5) \quad \sigma = \varrho_0 \Delta \varphi + \frac{e^2}{8} \varrho_0 \cos 2\varphi_0 (\Delta \varphi)^3 + \dots,$$

wo φ_0 der Wert von φ für die mittlere Breite φ_0 ist. In der angegebenen Entwicklung sind die Größen von der Ordnung $e^3 \cdot (\Delta \varphi)^3$, $e^2 \cdot (\Delta \varphi)^5$ vernachlässigt.

Der Parallelkreisbogen zwischen den Längengraden ω_1 , ω_2 und unter der Breite φ ist durch:

$$\theta = r(\omega_2 - \omega_1) = \frac{a(\omega_2 - \omega_1) \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

gegeben. Die Oberfläche eines ellipsoidischen Trapezes zwischen den Breiten 0° und φ und den Längengraden ω_1 , ω_2 ist⁵¹⁾:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^\varphi r \varrho d\varphi d\omega = \frac{a^2}{2} (1 - e^2) (\omega_2 - \omega_1) \left\{ \frac{\sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2e} \cdot \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right\} \\ &= a^2 (1 - e^2) (\omega_2 - \omega_1) \sin \varphi \left\{ 1 + \sum_2^\infty \frac{n}{2n-1} e^{2n-2} \sin^{2n-2} \varphi \right\}. \end{aligned}$$

50) Problèmes de haute géodésie, 2. cah., p. 3. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, sind die Winkel immer im Bogenmaß oder analytischem Maß zu rechnen.

51) Vgl. z. B. *Helmert*, H. G. 1, p. 61.

11. Normalschnitte. Es seien $A(\varphi_1, \omega_1)$ und $B(\varphi, \omega)$ zwei Ellipsoidpunkte; \overline{AB} sei der Normalschnitt in A , der durch B geht, und \overline{BA} der Normalschnitt in B , der durch A geht (reziproker Normalschnitt). Das Azimut A von \overline{AB} in A ist dann durch die Formel:

$$(6) \quad \cotg A = \frac{\cos \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi (1 - e^2 \gamma) - \sin \varphi_1 \cos(\omega - \omega_1)}{\sin(\omega - \omega_1)}$$

gegeben, wo

$$\gamma = 1 - \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

ist. Wir nehmen nun auf der Normalen in B ein Segment $BB' = h$ an, das so klein ist, daß man die Größen $e^2 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2$, $e^4 \cdot \frac{h}{a}$, ... vernachlässigen kann. Nennt man dann A' das Azimut von B' in bezug auf A , so hat man annähernd:

$$\cotg A' - \cotg A = e^2 \cdot \frac{\gamma h}{a} \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_1 \operatorname{cosec}(\omega - \omega_1).$$

Ist die Entfernung s zwischen den Punkten A und B so klein, daß das Produkt $e^2 \cdot \frac{hs}{a}$ zu vernachlässigen ist, so folgt aus der vorstehenden Formel⁵²⁾:

$$(6') \quad A - A' = \frac{e^2 h}{2a} \cos^2 \varphi_1 \sin 2A;$$

diese Gleichung gibt die Reduktion eines beobachteten Azimuts wegen der Höhe des Beobachtungsortes.

Theorem von Dalby. Es sei A das Azimut des Normalschnitts \overline{AB} in A und B das Azimut des Normalschnitts \overline{BA} in B . Man betrachte dann auf einer Kugel vom Radius 1 das sphärische Dreieck $P_1 A_1 B_1$, dessen Seiten $P_1 A_1$, $P_1 B_1$ resp. gleich $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$, $\frac{\pi}{2} - \varphi$ sind und dessen Winkel in P_1 gleich $\omega - \omega_1$ ist. Betrachtet man dann die Bogen $P_1 A_1$, $P_1 B_1$ als sphärische Meridiane und sind A_1 , B_1 die Azimute von B_1 bezüglich A_1 und von A_1 bezüglich B_1 (in derselben Weise wie für das Ellipsoid gerechnet), so hat man bis auf Größen von der Ordnung $e^4 \cdot \frac{s^3}{a^3}$ ($s = AB$):⁵³⁾

52) H. James and A. R. Clarke, Ordnance trigonometrical survey. — Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived therefrom, London 1858, p. 231; Helmert, H. G. 1, p. 190 gibt einen genaueren Ausdruck für $A - A'$. Die genannte Reduktion ist schon von C. F. Gauß angewandt worden, vgl Werke 9, p. 95 und p. 320—321 (Brief an Olbers vom 14. Mai 1826).

53) W. Roy, London Phil. Trans. 80 (1790), p. 111. Dort ist der geometrische Beweis der von J. Dalby angegebenen Formel (7) mitgeteilt und gezeigt, wie sie

$$(7) \quad A - B = A_1 - B_1$$

oder mit größerer Annäherung:

$$A - B = A_1 - B_1 + \frac{e^4}{4} \sin(\omega - \omega_1) \sin^2(\varphi - \varphi_1) \cos^4 \varphi_0 \sin \varphi_0,$$

wenn $\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \varphi_0$ gesetzt wird.

Die Differenz zwischen den beiden Seiten von (7) beträgt bis zu Entfernungen von 1200 km einige tausendstel Sekunden; sie ist im allgemeinen zu vernachlässigen.

Aus (6) und dem analogen Ausdruck für B findet man durch geeignete Entwicklungen:

$$(8) \quad \frac{A+B}{2} = \frac{A_1+B_1}{2} + \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\cos \varphi \cos \varphi_1 \sin 2a' \sec^2 \frac{\sigma'}{2}}{1 - e^2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 a')} + T_6,$$

wenn man $\frac{A_1+B_1-\pi}{2} = a'$ setzt und mit σ' den sphärischen Bogen A_1B_1 bezeichnet; T_6 ist eine kleine Größe von der Ordnung $e^4 \cdot \frac{s^2}{a^2}$ und e^6 . Die Formeln (7), (8) liefern das bequemste Mittel zur Berechnung der reziproken Azimute A, B , wenn die geographischen Koordinaten der beiden Punkte gegeben sind. Die sphärischen Azimute A_1, B_1 erhält man mit Hilfe der *Delambreschen* Gleichungen aus dem sphärischen Dreieck $P_1A_1B_1$. — Es sei noch die Formel für die Länge K der Sehne AB hinzugefügt⁵⁴):

$$(9) \quad \log K = \log \left(2 R \sin \frac{\sigma'}{2} \right) + \frac{1}{8} M \{ 3e^4 \cos^4 \varphi_m \sin^2 2a' + e^2 (\Delta \varphi)^2 (\cos 2\varphi - 2 \sin^2 a') + \dots \},$$

wo R der Krümmungsradius des Normalschnittes in der Breite $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}$ und im Azimut a' ist. Die Formeln (7), (8), (9) bilden die Grundlage für diejenigen geodätischen Rechnungsmethoden, die sich auf die Benutzung der Sehnen und der astronomischen Azimute stützen⁵⁵).

zur Berechnung der Längendifferenz dienen kann, wenn die astronomischen Azimute und die Breiten zweier Punkte gegeben sind. Vgl. in dieser Hinsicht *J. L. Tiarks*, Phil. Mag. 4 (1828), p. 364. Genaue Beweise von (8) findet man bei *Helmert*, H. G. 1, p. 150 (dort wird e^6 noch berücksichtigt) und bei *Pucci*, Fondamenti 2, p. 178.

54) *Helmert*, H. G. 1, p. 144—158.

55) Wegen weiterer Untersuchungen über die Normalschnitte vgl. *J. J. Baeyer*, Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche, Berlin 1862 (Gleichung des Normalschnittes in seiner Ebene, Achsen, Exzentrizität), *Bremiker*⁴⁶) (Winkel des

12. Geodätische Linien. Unter der geodätischen Linie zwischen zwei Punkten A und B einer Fläche versteht man die kürzeste Verbindungslinie auf der Fläche zwischen den beiden Punkten. — Es seien nun $A(\varphi, \omega)$, $B(\varphi + d\varphi, \omega + d\omega)$ zwei unendlich benachbarte Punkte auf dem Rotationsellipsoid, r der Radius des Parallelkreises durch A , ferner ds die Länge und α das Azimut des Elementes AB in A . Aus elementaren Überlegungen der Differentialgeometrie folgt dann:

$$(9') \quad \rho d\varphi = \cos \alpha ds, \quad r d\omega = \sin \alpha ds, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\rho} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}$$

und, wenn man mit $r + dr$ den Radius des Parallelkreises durch B bezeichnet:

$$(10) \quad \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -\sin \varphi \cos \alpha.$$

Aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linien für eine beliebige Rotationsfläche, deren Achse als z -Achse eines Cartesischen Koordinatensystems genommen wird, folgt:

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = \text{konst.}$$

und hieraus

$$(11) \quad r \sin \alpha = c \quad (c \text{ Konstante}),$$

wie ein Satz von *Clairaut*⁵⁶⁾ ausspricht.

Differentiiert man (11) und beachtet (10), so ergibt sich:

$$(12) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin \varphi \cdot \sin \alpha}{r} = \sin \varphi \cdot \frac{d\omega}{ds}.$$

Die Relation $d\alpha = \sin \varphi \cdot d\omega$ gilt in Wirklichkeit für eine geodätische Linie auf einer beliebigen Fläche⁵⁷⁾, wenn die *astronomische* Bedeutung von ω , φ , α unverändert bleibt.

Eliminiert man α aus (9') und (11), so bekommt man:

$$(13) \quad d\omega = \pm \frac{c \rho d\varphi}{r \sqrt{r^2 - c^2}}, \quad ds = \pm \frac{r \rho d\varphi}{\sqrt{r^2 - c^2}}$$

(das Zeichen \pm gilt, wenn α im ersten oder vierten Quadranten liegt).

Sehndreiecks, Übertragung der geographischen Koordinaten vermittelt der Sehnen usw.).

56) Nach *Todhunter*, *History* 1, § 160 kommt diese Formel zum erstenmal vor bei *Clairaut*, *Détermin. géométrique de la perpendiculaire à la méridienne* (*Mém. Paris 1733*). Der Gedanke, die geodätischen Linien bei den geodätischen Rechnungen zu benutzen, wurde auch von *L. Euler* ausgesprochen (*Todhunter*, *History*, *chapt. XV*).

57) Vgl. *Bessel*⁵⁶⁾.

Der Krümmungsradius in einem Punkte einer geodätischen Linie folgt aus (2). Eliminiert man α aus (2) und (11), so folgt:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{e^2 e^2}{\alpha^2} \right)$$

oder: Längs einer geodätischen Linie ändert sich R_α proportional mit ρ (Satz von *Ch. Gudermann*)⁵⁸). Man erhält endlich:

$$\frac{1}{R_\alpha} \cdot \frac{dR_\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{ds} = \frac{3}{2} \frac{e^2}{\rho} \frac{\sin 2\varphi \cos \alpha}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

13. Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimuts (Fig. 2). Gegeben sind die geographischen Koordinaten φ_1, ω_1 von A und das Azimut α_1 und die Länge s der geodätischen Linie AB ; gesucht die geographischen Koordinaten φ, ω von B und das Azimut der geodätischen Linie AB in B (mit α werde das Azimut der Verlängerung von AB über B hinaus bezeichnet; das sogenannte reziproke Azimut zu α_1 ist $\alpha \pm 180^\circ$). Man löst das Problem, indem man (13) durch Reihenentwicklung integriert. Die folgende Methode stammt in ihrer speziellen Form von *Bessel*⁵⁹). Führt man die durch die Gleichungen:

$$(14') \quad \operatorname{tg} u_1 = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi_1,$$

$$(14'') \quad \operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi$$

definierten reduzierten Breiten ein, so kann man (11) die Gestalt geben:

$$(15) \quad \cos u \sin \alpha = \cos u_1 \sin \alpha_1$$

und aus (13) wird:

$$(16) \quad \begin{cases} ds = \pm \frac{\alpha \cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - \cos^2 u_1 \cos^2 \alpha_1}} du, \\ d\omega = \pm \frac{\cos u_1 \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \cos^2 u_1 \cos^2 \alpha_1}} du. \end{cases}$$

58) J. f. Math. 43 (1852), p. 284.

59) Die Methode verdankt man im wesentlichen *Legendre*⁴⁶), der den Gedanken hatte, die geodätische Linie auf dem Ellipsoid mit der auf der Kugel zu vergleichen. *F. W. Bessel* gab für die numerische Rechnung bequeme Formeln (Abh. 3, p. 5). *Helmert*, H. G. 1, p. 226 gibt die Formel (18') nach γ aufgelöst.

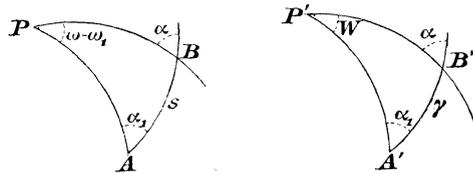


Fig. 2.

Man betrachtet nun auf einer Kugel vom Radius 1 das Dreieck $P'A'B'$, dessen Seiten $P'A'$, $P'B'$ resp. gleich $\frac{\pi}{2} - u_1$, $\frac{\pi}{2} - u$ sind und dessen Winkel A' , B' mit den Winkeln A , B des ellipsoidischen Dreiecks übereinstimmen (was wegen (15) möglich ist). Bezeichnet man den Winkel bei P' mit W , die Seite $A'B'$ mit γ , so geben die Gleichungen (16), verglichen mit den entsprechenden Formeln für die Kugel:

$$(17) \quad ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\gamma,$$

$$(18) \quad d\omega = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} dW.$$

Setzt man

$$(19) \quad \cotg M = \text{ctg } u_1 \cos \alpha_1,$$

so hat man

$$(20) \quad \sin u = \sin u_1 \sin (M + \gamma) \text{ cosec } M$$

und erhält, indem man hiermit $\cos u$ aus (17) eliminiert und mit Hilfe der Entwicklung (3) integriert:

$$(18') \quad \gamma = \frac{s}{a\sqrt{1-e^2}} \cdot \beta_0 + \beta_1 \sin \gamma \cos (2M + \gamma) + \beta_2 \sin 4\gamma \cos (4M + 2\gamma) + \dots,$$

wo die β in folgender Weise zu berechnen sind. Man setze:

$$(19') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e \sin u_1}{\sqrt{1 - e^2} \sin M} = \text{tg } E, \\ A_0 = 1 + \frac{1}{4} \text{tg}^4 \frac{E}{2} + \frac{1}{64} \text{tg}^8 \frac{E}{2} + \dots, \\ A_1 = -\frac{1}{2} \text{tg}^2 \frac{E}{2} + \frac{1}{16} \text{tg}^6 \frac{E}{2} + \dots, \\ A_2 = -\frac{1}{8} \text{tg}^4 \frac{E}{2} + \frac{1}{32} \text{tg}^8 \frac{E}{2} + \dots, \quad A_3 = -\frac{1}{16} \text{tg}^6 \frac{E}{2} + \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

und hat dann:

$$(20') \quad \beta_0 = \frac{\cos E}{A_0 \cos^2 \frac{E}{2} \text{ arc } 1''}, \quad \beta_n = \frac{-2A_n}{n A_0 \text{ arc } 1''}.$$

Der Winkel γ in (18') wird dann in Sekunden erhalten.

Die Formeln (14'), (19), (19'), (20'), (18'), (20), (14''), (15) dienen zur Bestimmung von φ und α . Zur Berechnung der Länge substituieren wir näherungsweise für (12) die folgende Gleichung:

$$d\omega = dW - \frac{e^2}{2} \cos u_1 \sin \alpha_1 \left(1 - \frac{3}{4} e^2 \cos^2 u\right)^{-1/2} d\gamma,$$

die sich von (12) nur durch Glieder der Ordnung e^8 unterscheidet⁶⁰).

60) Der auf diese Weise bei der Berechnung von ω begangene Fehler ist

Indem man dann in analoger Weise wie vorher integriert und setzt:

$$\operatorname{tg} E' = \frac{\sin u_1}{\sin M} \sqrt{\frac{3e^2}{4-3e^2}}, \quad P = \frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \left(\frac{\cos E'}{\cos^2 \frac{E'}{2}} \right)^{2/3},$$

$$\beta_0' = \frac{P \cdot \operatorname{arc} 1''}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^4 \frac{E'}{2} + \dots \right\},$$

$$\beta_1' = P \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{E'}{2} + \frac{2}{27} \operatorname{tg}^6 \frac{E'}{2} + \dots \right\}, \quad \beta_2' = P \left\{ \frac{1}{9} \operatorname{tg}^4 \frac{E'}{2} + \dots \right\},$$

erhält man:

$$\begin{aligned} \omega - \omega_1 = W - \frac{e^2 \sin u_1 \sin \alpha_1}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}e^2}} \{ \beta_0' \gamma + \beta_1' \sin \gamma \cos (2M + \gamma) \\ + \beta_2' \sin 2\gamma \cos (4M + 2\gamma) + \dots \}. \end{aligned}$$

Den Winkel W erhält man aus dem sphärischen Dreieck $P A' B$. *Bessel* hat numerische Tabellen für die Logarithmen von $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_0', \beta_1'$ gegeben, die nach den Argumenten $\log \operatorname{tg} E, \log \operatorname{tg} E'$ fortschreiten⁶¹⁾.

Da das Problem auf diese Weise auf die Auflösung eines sphärischen Dreiecks zurückgeführt ist, wird es zweckmäßig sein, einige der hierzu geeignetsten Formeln anzugeben.

Die *Delambreschen* Gleichungen liefern:

$$\cos \left(45^\circ + \frac{u}{2} \right) \sin \frac{\alpha + W}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2} \cos \left(45^\circ + \frac{u_1 - \gamma}{2} \right),$$

$$\cos \left(45^\circ + \frac{u}{2} \right) \cos \frac{\alpha + W}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \left(45^\circ + \frac{u_1 + \gamma}{2} \right),$$

$$\sin \left(45^\circ + \frac{u}{2} \right) \sin \frac{\alpha - W}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \left(45^\circ + \frac{u_1 - \gamma}{2} \right),$$

$$\sin \left(45^\circ + \frac{u}{2} \right) \cos \frac{\alpha - W}{2} = \cos \frac{\alpha_1}{2} \sin \left(45^\circ + \frac{u_1 + \gamma}{2} \right).$$

Nach *Gauß*⁶²⁾ führt man die Berechnung von u, α, W am bequemsten mit den Formeln aus:

$$\operatorname{tg} s = \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma,$$

$$\operatorname{tg} W = \operatorname{tg} \alpha_1 \sin s \sec (u_1 + s),$$

$$\operatorname{tg} t = \sin \alpha_1 \sin \gamma \operatorname{tg} (u_1 + s),$$

$$\sin \tau = \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin s,$$

$$\sin \sigma = \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \frac{W}{2} \cos (u_1 + s),$$

$$u = u_1 + s - \sigma,$$

$$\alpha = \alpha_1 + t - \tau.$$

kleiner als $\frac{1}{384} e^8 \gamma$ und deshalb kleiner als 0'',000007 für eine geodätische Linie, die einmal um die ganze Erde herumgeht ($\gamma = 2\pi$). Genauere Entwicklungen siehe bei *Bessel*⁶³⁾.

61) Vgl. auch *Albrecht*⁴⁵⁾.

62) Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttingen 1844, p. 30 = Werke 4, p. 259. Unsere Formeln unterscheiden sich ein wenig von den *Gaußschen*, weil das Azimut anders gerechnet wird.

Sind u_1 , u , W gegeben und sucht man α , α_1 , γ , so geben die *Delambreschen* Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} &= \sin \frac{W}{2} \cos \frac{u + u_1}{2}, & \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha_1}{2} &= \sin \frac{W}{2} \sin \frac{u + u_1}{2}, \\ \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} &= \cos \frac{W}{2} \sin \frac{u - u_1}{2}, & \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \alpha_1}{2} &= \cos \frac{W}{2} \cos \frac{u - u_1}{2}. \end{aligned}$$

14. Fortsetzung. Fall kleiner Bogen. Betrachtet man φ , ω , α als Funktionen des Bogens s und entwickelt diese Funktionen nach *Maclaurin*, so erhält man mit Berücksichtigung von (9), (10), (12):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \frac{s}{\varrho_1} \cos \alpha_1 - \frac{s^2}{2\varrho_1 N_1} \operatorname{tg} \varphi_1 \sin^2 \alpha_1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{s^2}{2\varrho_1 N_1} \\ &\quad \cdot \sin 2\varphi \cos^2 \alpha_1 - \frac{s^3}{6\varrho_1 N_1^2} \cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_1) + \dots, \\ \omega &= \omega_1 + \frac{s}{N_1} \frac{\sin \alpha_1}{\cos \varphi_1} + \frac{s^2}{N_1^2} \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\cos \varphi_1} \\ &\quad + \frac{s^3}{3N_1^3} \frac{\sin \alpha_1}{\cos \varphi_1} \{ (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi_1) \cos^2 \alpha_1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \sin^2 \alpha_1 \} + \dots, \\ \alpha &= \alpha_1 + \frac{s}{N_1} \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{s^2}{2N_1^2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1) \\ &\quad + \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \frac{s^2}{2N_1^2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos^2 \varphi_1 + \dots. \end{aligned}$$

Es sind dabei in dem Ausdruck für φ und für ω Glieder mit $e^2 s^3$ und s^4 , in dem von α Glieder mit s^3 vernachlässigt; ϱ_1 , N_1 sind die Werte von ϱ , N aus (1) für die Breite φ_1 .⁶³⁾

*Gauß*⁶⁴⁾ hat mit Hilfe der konformen Abbildung, die wir in Nr. 21 behandeln werden, Formeln für die Übertragung der geographischen Koordinaten abgeleitet, die die *mittlere* Breite und das *mittlere* Azimut enthalten; außerdem hat er noch eine direkte Ableitung derselben Formeln gegeben. *O. Schreiber*^{64a)} hat die *Gauß*-schen Formeln so abgeändert, daß alles indirekte Rechnen vermieden wird.

63) Entwicklungen dieser Art sind von *Legendre* gegeben (Paris Mém. Acad. pour 1787 (1789), p. 352). *Legendre* berücksichtigt Glieder mit $e^4 s$, $e^2 s^2$, s^3 . Die im Texte gegebenen Entwicklungen sind genügend genau, so lange s nicht 100 km übersteigt. Für weitere Annäherungen vgl. *Helmert*, H. G. 1, p. 298, wo die vernachlässigten Glieder von der Ordnung $e^2 s^4$ und s^6 sind, oder *N. Jandanza* (Guida al calcolo delle coordinate geodetiche, Torino 1891), der Glieder von der Ordnung $e^2 s^5$ und s^6 vernachlässigt.

64) Vgl. Zitat in Fußnote 62, II. Abt.

64a) Rechnungsvorschriften f. d. trig. Abt. d. Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Koordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten, Berlin 1878.

*Andrae*⁶⁵⁾ hat das Problem dadurch gelöst, daß er die geodätische Linie BF durch B senkrecht zum Meridian von A konstruiert, das Dreieck BAF auflöst und die Breite von F berechnet. Zwei einfache Entwicklungen geben die Differenzen zwischen den Koordinaten von B und F . — Die *Andraesche* Lösung ist nicht wesentlich von der verschieden, die rechtwinklige geodätische Koordinaten benutzt (vgl. Nr. 23).

Die Lösung von *K. G. J. Jacobi* stützt sich auf elliptische Funktionen⁶⁶⁾. *P. A. Hansen*⁶⁷⁾ hat eine Methode angegeben, die sich von der des vorigen Paragraphen nur dadurch unterscheidet, daß er als Anfangspunkt der Bogen auf dem Ellipsoid und der Kugel den Punkt wählt, in dem die geodätische Linie AB einen Meridian rechtwinklig schneidet.

Die Differenz der Azimute $\alpha_1 - \alpha$ nennt man gewöhnlich *Meridiankonvergenz*⁶⁸⁾.

15. Bestimmung der Länge und des Azimuts eines geodätischen Bogens aus den geographischen Koordinaten der Endpunkte. Das vorstehende Problem, das die Umkehrung der in den vorhergehenden Nummern behandelten Aufgabe ist, löst man durch sukzessive Annäherungen. Es möge auf die folgenden Lösungen hingewiesen sein: für Bogen von beliebiger Länge: 1. Umkehrung der *Legendre-Besselschen* Methode⁶⁹⁾ (Nr. 13); 2. Lösung von *Hansen*⁷⁰⁾ (benutzt

65) Vgl. Zitat in Fußnote 50, 2. cahier.

66) *E. Luther*, Astr. Nachr. 41 (1855), p. 209 und 42 (1856), p. 337; *J. f. Math.* 53 (1857), p. 342; *C. Winterberg*, Astr. Nachr. 89 (1877), p. 103, 113 und 91 (1878), p. 113.

67) *Geodätische Untersuchungen*, Leipzig 1865, Erster Abschnitt. Man sehe auch wegen der Übertragung der geographischen Koordinaten die Lösung von *J. J. Baeyer*⁶⁵⁾, der die Gleichung (13) transformiert, indem er den Radius r des Parallelkreises als Variable einführt, dann nach Potenzen von e^2 entwickelt, integriert und φ durch sukzessive Annäherung berechnet.

68) In diesem Sinne wird der Ausdruck gewöhnlich in den Lehrbüchern gebraucht (*Francoeur, Jordan, Pucci, Puissant* usw.). *Gauß* legt ihm einen anderen Sinn bei. In der konformen Abbildung der Hannoverschen Landesvermessung (vgl. Nr. 24) nennt er Meridiankonvergenz den Winkel, den der Meridian in B mit der Parallelen macht, die man in B zu der den Anfangsmeridian repräsentierenden Geraden ziehen kann. *Helmert* (H. G. 1, p. 426) und *Clarke* (*Geodesy*, p. 272) brauchen den genannten Ausdruck nur in dem Falle, daß die geodätische Linie AB den Meridian in A rechtwinklig schneidet. Die *beschränktere* Definition stimmt mit derjenigen von *Gauß* überein, wenn man die Abplattung der Erde vernachlässigt. Vgl. *Jordan*, *Handbuch der Vermessungskunde* 3, p. 464—65.

69) *Helmert*, H. G. 1, p. 247.

die Beziehung zwischen der geodätischen Linie und den Normal-schnitten); 3. Benutzung der elliptischen Funktionen⁷¹⁾;

für Bogen von begrenzter Länge: 1. Lösung auf Grund der konformen Abbildung von *Gauß* (vgl. Nr. 21); 2. Umkehrung der Entwicklungen von *Legendre* (Nr. 14), indem als Anfangspunkt der Mittelpunkt des Bogens angenommen wird⁷²⁾; 3. Lösung mit Hilfe des Theorems von *J. Dalby*⁷³⁾. Durch Anwendung des genannten Theorems und unter Benutzung der Formel (27) der nächsten Nummer kann man die Differenz $\alpha_1 - \alpha$ berechnen. Mit Hilfe der Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha_1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \alpha_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{u - u_1}{2} \operatorname{tg} \frac{u + u_1}{2},$$

die man aus (15) ableitet, bekommt man dann α und α_1 . Ist α_1 bekannt, so findet man nach Nr. 13 ohne Schwierigkeit γ und s ; 4. Formeln von *Ch. M. Schols*⁷⁴⁾, die die astronomischen Azimute und die Sehnen benutzen; 5. Formeln von *W. Jordan*^{74a)}. Wie bei der Umkehrung der *Legendre-Besselschen* Methode wird zunächst die in Nr. 13 erwähnte Hilfskugel benutzt. Dann aber entwickelt *Jordan* aus (18) den sphärischen Längenunterschied W in eine Reihe nach Potenzen von ω und ebenso aus (17) γ in eine Reihe nach Potenzen von s . Durch Einführung der Mittelbreite erhält man $\frac{W}{\omega}$ und $\frac{\gamma}{s}$ als Funktionen der ellipsoidischen Längen- und Breitenunterschiede. Indem man nun zunächst W berechnet (das sich bei einem Breiten- und Längenunterschied von je 10° unter Beschränkung auf die Glieder bis zur 3. Ordnung noch bis auf etwa 0,001 genau ergibt), kann man dann das Kugeldreieck $A'P'B'$ auflösen. Die Winkel A' und B' sind gleich den ellipsoidischen Azimuten; aus γ wird s berechnet; 6. Formeln von *Helmert*⁷⁵⁾, die aus denen von *Gauß*⁶²⁾ abgeleitet sind, in denen die mittlere Breite und das mittlere Azimut auftreten. Im *Gaußschen* Nachlasse haben sich allgemein für Rotationsflächen geltende Formeln gefunden, aus denen sich die *Helmertsche* Umkehrung sofort ergibt^{75a)}.

70) Vgl. Zitat in Fußnote 67, 2. Abschnitt.

71) *G. H. Halphen*, Fonctions elliptiques, 2^e éd., Paris 1888, p. 286; vgl. auch *G. Ciscato*, Venet. Ist. Atti (7) 3 (1892), p. 1087.

72) *J. Guarducci*, Sopra due problemi di trigonometria sferoidia, Torino 1882; *Pucci*, Fondamenti 2, p. 168.

73) *H. Bruns*, Astr. Nachr. 97 (1880), p. 73; *Pucci*, Fondamenti 2, p. 177.

74) *Ch. M. Schols*, Arch. néerland. 17 (1882), p. 101; *Helmert*, Zeitschr. f. Vermess. 11 (1882), p. 555 und 589; *Th. Albrecht*, Astr. Nachr. 96 (1880), p. 209.

74a) Zeitschr. f. Vermess. 12 (1883), p. 65.

75) Lotabweichungen, Heft 1, Berlin 1886.

75a) Werke 9, p. 89.

Die *Helmertschen* Formeln mögen schließlich angegeben werden, da sie eine bequeme Lösung des Problems liefern.

Wir bezeichnen das reziproke Azimut von α_1 mit α_2 , so daß $\alpha_2 = \alpha \pm 180^\circ$. Setzt man dann:

$$\begin{aligned} t &= \alpha_2 - \alpha_1 \pm 180^\circ, & T &= \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1 \pm 180^\circ), \\ B &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, & b &= \varphi_2 - \varphi_1, \\ l &= \omega_2 - \omega_1, & m &= l \sin B, \\ n &= l \cos B, & W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \end{aligned}$$

so bekommt man (indem man als Einheit die 7. Dezimale des Logarithmus nimmt)

$$\begin{aligned} \log t &= \log \left(m \sec \frac{b}{2} \right) + [3]n^2 + [6]b^2, \\ \log (s \sin T) &= \log (n[1]) - km^2 + [7]b^2, \\ \log (s \cos T) &= \log \left(b[2] \cos \frac{l}{2} \right) + [5]n^2 + [8]b^2. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten [] haben die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} [1] &= \frac{a}{W} \arccos 1'', & [2] &= \frac{a(1-e^2)}{W^2} \arccos 1'', \\ [3] &= k \cdot \frac{2W^2}{1-e^2}, & [5] &= k \left(1 - \frac{2e^2}{1-e^2} \cos^2 B \right), \\ [6] &= k \cdot \frac{2e^2}{W^2} \cos^2 B, & [7] &= k \frac{(1-e^2)(1-10e^2 \sin^2 B)}{W^4}, \\ [8] &= \frac{3e^2 k}{W^4} \left\{ \cos 2B + e^2 \sin^2 B (4 - 3 \sin^2 B) \right\}, \end{aligned}$$

$$\log k = 4,6287228 - 10.$$

16. Geodätische Polarkoordinaten. Wenn man die Punkte einer Fläche auf ein System von orthogonalen Koordinaten α, σ bezieht und wenn die Linien $\alpha = \text{konst.}$ geodätische Linien sind, so kann man dem Linienelement die Gestalt geben:

$$(21) \quad ds = \sqrt{d\sigma^2 + Gd\alpha^2}.$$

Der Winkel θ , den das Element ds mit der Linie $\alpha = \text{konst.}$, natürlich im Sinne wachsender σ , bildet, ist durch die beiden Relationen definiert:

$$(21') \quad \cos \theta = \frac{d\sigma}{ds}, \quad \sin \theta = \sqrt{G} \cdot \frac{d\alpha}{ds}.$$

Der geodätische Bogen s , der von einem festen Punkte zu einem beliebigen Punkte mit den Koordinaten σ, α geht, genügt den partiellen Differentialgleichungen:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial s}{\partial \alpha}, \quad \cos \theta = \frac{\partial s}{\partial \sigma}, \quad d\theta = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \sigma} d\alpha.$$

Der Koeffizient G ist mit der absoluten Krümmung k der Fläche im Punkte (α, σ) durch die Gleichung verbunden⁷⁶⁾:

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial \sigma^2} + k \sqrt{G} = 0.$$

In der Geodäsie ist speziell die Benutzung der *geodätischen Polarkoordinaten* von Vorteil. Nennt man den Winkel, den eine von dem festen Punkte O ausgehende geodätische Linie OA mit einer festen Richtung in der Tangentialebene von O macht, α und σ den Bogen OA , so ergibt sich, wenn man beachtet, daß für $\sigma = 0$ auch $\sqrt{G} = 0$ und $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \sigma} = 1$ ist, durch Entwicklung nach *Maclaurin*, indem man \sqrt{G} als Funktion von σ betrachtet und (23) beachtet:

$$(24) \quad \sqrt{G} = \sigma - \frac{k}{6} \sigma^3 - \frac{\sigma^4}{12} \left(\frac{\partial k}{\partial \sigma} \right)_0 - \frac{\sigma^5}{120} \left(3 \frac{\partial^2 k}{\partial \sigma^2} - k^2 \right)_0 + \dots$$

Speziell für das Rotationsellipsoid wird ($k = \frac{1}{\rho N}$):

$$(25) \quad \sqrt{G} = \sigma - \frac{\sigma^3}{6 \rho_0 N_0} + \frac{e^2 \sigma^4}{6} \cdot \frac{\sin 2 \varphi_0 \cos \alpha}{N_0^2 \rho_0 (1 - e^2)} + \dots,$$

wo φ_0 die Breite von O bedeutet.

*Helmert*⁷⁷⁾ hat (23) integriert mit Vernachlässigung von Größen der Ordnung e^4 ; er erhält:

$$(25') \quad \begin{aligned} \sqrt{G} &= a \sqrt{\rho N} \sin \frac{\sigma}{a \sqrt{\rho N}} \\ &+ \frac{a c_1}{4} \left(-\frac{\sigma}{a} \sin \frac{\sigma}{a} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\sigma}{a} + \frac{1}{4} \cos \frac{\sigma}{a} \right) \\ &+ \frac{a c_2}{4} \left(\frac{3}{2} \cos \frac{\sigma}{a} - \frac{1}{8} \sin \frac{3\sigma}{a} - \frac{9}{8} \sin \frac{\sigma}{a} \right), \end{aligned}$$

wo

$$c_1 = -e^2 \sin 2\varphi_0 \cos \alpha \quad \text{und} \quad c_2 = 2e^2 (\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha).$$

Vernachlässigt man Größen von der Ordnung $e^2 \left(\frac{\sigma}{a} \right)^5$, so hat man:

$$(25'') \quad \sqrt{G} = \sqrt{\rho_0 N_0} \sin \frac{\sigma}{\rho_0 N_0} + \frac{e^2 \sigma^4 \sin 2 \varphi_0 \cos \alpha}{6 a^3}.$$

*E. B. Christoffel*⁷⁸⁾ hat \sqrt{G} die „reduzierte Länge“ des Bogens σ genannt und gezeigt, daß diese Größe ungeändert bleibt, wenn man die Endpunkte O, A des Bogens vertauscht, indem man A als Anfangspunkt, O als Endpunkt annimmt.

76) *C. F. Gauß*, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Göttingen 1828, Art. 19 = Werke 4, p. 217.

77) H. G. 1, p. 278.

78) Über die allgemeine Theorie des geodätischen Dreiecks, Berlin Abh. 1868.

17. Vergleichung der geodätischen Linie mit einem Normalschnitt. Es sei A ein Flächenpunkt, R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien in A und AB ein geodätischer Bogen von der Länge σ , der in A den Winkel α mit dem zum Radius R_1 gehörigen Normalschnitt bildet. Ist dann x, y, z ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x - und y -Achse mit den Haupttangente in A zusammenfallen, so erhält man für die Koordinaten x, y, z des Punktes B , wenn man sie als Funktionen von σ betrachtet, durch Entwicklung nach *Maclaurin*⁷⁹⁾:

$$(26) \quad \begin{aligned} x &= \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^3 \cos \alpha}{6 R_1 R_\alpha} + \dots, \\ y &= \sigma \sin \alpha - \frac{\sigma^3 \sin \alpha}{6 R_2 R_\alpha} + \dots, \\ z &= \pm \frac{\sigma^2}{2 R_\alpha}, \end{aligned}$$

wo R_α der Krümmungsradius der geodätischen Linie in A ist. Nennt man den Winkel, den der Normalschnitt \overline{AB} mit der x -Achse macht, A (in demselben Sinne wie α gezählt) und beachtet, daß dieser Winkel durch die Relation $y = x \operatorname{tg} A$ definiert ist, so folgt aus (26) bis auf Glieder der Ordnung σ^4 :

$$A - \alpha = \frac{\sigma^2}{12 R_\alpha} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2A,$$

ein angenäherter Ausdruck für die Abweichung der geodätischen Linie im Punkte A von dem Normalschnitt \overline{AB} . Für das Rotationsellipsoid ergibt sich speziell:

$$(27) \quad A - \alpha = \frac{e^2 \sigma^2}{12 a^2} \cos^2 \varphi \sin 2A,$$

wenn man die Glieder $e^4 \sigma^2$ und $e^2 \sigma^4$ vernachlässigt.

Die stärkste lineare Abweichung zwischen beiden Linien ist annähernd:

$$(28) \quad \delta = \frac{e^2 \sigma^3}{18 \sqrt{3} a^2} \cos^2 \varphi \sin 2A.$$

Die Längendifferenz zwischen den Bogen s, σ des Normalschnittes und der geodätischen Linie findet man durch Integration von (21),

79) Diese Entwicklungen gehen unter dem Namen von *J. Weingarten*, der sie 1862 in einer Note zu einer Abhandlung von *Baeyer*⁵⁵⁾ entwickelt hat. Dieselben Entwicklungen findet man aber schon in einer Note von *V. A. Puiseux* zu: *G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie*, Ausgabe von *J. Liouville*, 1851. Man findet sie auch bei *E. F. Minding*, *J. f. Math.* 44 (1852), p. 66. Ebenso waren sie schon *C. F. Gauß* bekannt, Werke 9, p. 94. Wegen weiterer Glieder der Reihenentwicklung (26) vgl. *Weingarten*.

indem man $d\alpha$ durch $d\sigma$ mittelst (27) ausdrückt und für \sqrt{G} den angenäherten Wert (25) setzt; man erhält:

$$(29) \quad s - \sigma = \frac{e^4 \sigma^5}{90 a^4} \cos^4 \varphi \sin^2 A \cos^3 A + \dots$$

Setzt man

$$\sigma = 100 \text{ km in (27), so folgt } A - \alpha < 0',014,$$

$$\sigma = 20 \text{ km in (28), so folgt } \delta < 0,000042 \text{ m, } s - \sigma < 0,0024 \cdot 10^{-10} \text{ m,}$$

$$\sigma = 1000 \text{ km in (29), so folgt } s - \sigma < 0,000075 \text{ m.}$$

Die Differenz (27) zwischen dem Azimut des Normalschnitts und der geodätischen Linie ist im *allgemeinen* gegenüber den Beobachtungsfehlern zu vernachlässigen; die Abweichung δ und die Differenz $s - \sigma$ sind bei direkten Messungen *immer* zu vernachlässigen.

Der Ausdruck von $A - \alpha$ für Bogen von beliebiger Länge ist schon von *Bessel*⁸⁰⁾ angegeben, der von seiner in Nr. 13 gegebenen sphärischen Darstellung und von dem in Nr. 11 angeführten Ausdruck für das Azimut des Normalschnitts ausgeht. Man erhält bis auf Glieder der Ordnung e^4 :

$$A - \alpha = \frac{e^2}{4} \left(1 - \frac{s}{a} \cotg \frac{s}{a} \right) \cos^2 u_1 \sin 2\alpha - \frac{e^2}{2} \left(\tg \frac{s}{a} - \frac{s}{a} \right) \sin 2u_1 \sin \alpha,$$

wo u_1 die reduzierte Breite von A ist.

*C. G. Andrae*⁸¹⁾ hat zum Vergleich der geodätischen Linie mit dem Normalschnitt auch von Reihenentwicklungen der Cartesischen Koordinaten Gebrauch gemacht, hat aber als x -Achse die Tangente an die geodätische Linie in A genommen.

Es folgt aus den Rechnungen von *Andrae*, daß mit derselben Annäherung, mit der (27) gilt, der Winkel, den die geodätische Linie AB im Punkte A mit dem Normalschnitt \overline{AB} bildet, die Hälfte von demjenigen ist, den sie mit dem reziproken Normalschnitt \overline{BA} bildet.

18. Das geodätische Dreieck. Der Ausdruck (24) für \sqrt{G} (Nr. 16) zeigt, daß ein begrenztes Stück R einer Fläche um einen Punkt O herum, so lange die Glieder von der Ordnung σ^4 gegenüber σ vernachlässigt werden können, als ein Stück einer Kugel aufgefaßt werden kann, deren Radius gleich dem geometrischen Mittel $\sqrt{R_1 R_2}$ der Hauptkrümmungsradien in O ist. Für das Erdellipsoid kann man zu dem Gebiet R die Umgegend von O bis zu einer Entfernung von

80) Abhandlgn. 3, p. 1 und 29; siehe auch *Baeyer*⁵⁵⁾ [Korrektion in Astr. Nachr. 60 (1863), p. 133].

81) Vgl. *Andrae*⁵⁹⁾, 1. cahier, p. 5 ff.; siehe auch *J. De Berardinis*, Torino Mem. (2) 36 (1885), p. 159.

200 km rechnen, da der prozentuale Fehler von (25), bei der angegebenen Vernachlässigung, kleiner als $\frac{e^2 \sigma^3}{6 \alpha^3}$ oder $\frac{1}{29 \cdot 10^6}$ für $\sigma = 200$ km ist. — Innerhalb eines solchen Gebietes kann deshalb ein geodätisches Dreieck nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie berechnet werden, indem man als Kugelradius das geometrische Mittel der Hauptkrümmungsradien im Zentrum des Gebietes R nimmt oder allgemeiner in einem Punkte, der von den Ecken des Dreiecks nicht mehr als 200 km entfernt ist.

Wir kommen jetzt zu weiteren Annäherungen.

Die verschiedenen Methoden zur näherungsweise Auflösung eines geodätischen Dreiecks lassen sich zum größten Teil aus der schon erwähnten Abhandlung von Gauß⁷⁶⁾ ableiten. Gauß⁸²⁾ nimmt ein System rechtwinkliger geodätischer Koordinaten (σ, α) an; die Linie $\sigma = 0$ und die Linien $\alpha = \text{konst.}$ sind geodätische, der Parameter α mißt den Bogen der Linie $\sigma = 0$ von einem willkürlichen Anfangspunkte aus. Betrachtet man ein rechtwinkliges geodätisches Dreieck, das die Punkte $(0, 0)$ $(0, \alpha)$ (σ, α) zu Ecken und σ, s, α zu gegenüberliegenden Seiten hat und nennt den Winkel (s, σ) θ , so entwickelt Gauß die Größen $s \cos \theta$, $s \sin \theta$, s^2 in Reihen nach Potenzen von σ und α , so daß sie den Differentialgleichungen:

$$(30) \quad s \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{\partial s^2}{\partial \theta}, \quad s \sin \theta = \frac{1}{2 \sqrt{G}} \cdot \frac{\partial s^2}{\partial \alpha}, \quad G = \left(G \cdot \frac{\partial s}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial \alpha} \right)^2,$$

die aus (22) folgen, genügen. Nimmt man \sqrt{G} in eine Reihe:

$$\sqrt{G} = 1 + f_0 \sigma^2 + f_1 \alpha \sigma^2 + \dots + g_0 \sigma^3 + g_1 \alpha \sigma^3 + \dots + h \sigma^4 + \dots$$

entwickelt an, so lassen sich die Entwicklungskoeffizienten von $s \cos \theta$, $s \sin \theta$ und s^2 durch die f, g, h, \dots ausdrücken. Gauß betrachtet dann ein beliebiges geodätisches Dreieck als Summe oder Differenz zweier rechtwinkliger Dreiecke und bestimmt die Differenzen zwischen den Winkeln A, B, C dieses Dreiecks und den Winkeln A^*, B^*, C^* eines ebenen Dreiecks mit denselben Seiten; diese Differenzen ergeben sich als Funktionen der f, g, h, \dots . Eliminiert man drei dieser Koeffizienten durch Einführung der Krümmungen k_a, k_b, k_c in den drei Ecken, die mit dem Ausdruck von \sqrt{G} durch (23) zusammenhängen, und vernachlässigt kleine Größen vierter Ordnung in bezug auf die Seiten, so ergibt sich:

$$(31) \quad A - A^* = \frac{S}{12} (2k_a + k_b + k_c)$$

82) Die von uns mit $s, \sigma, \alpha, \theta, G$ bezeichneten Größen nennt Gauß r, p, q, ψ, n^2 .

und analoge Ausdrücke für $B - B^*$, $C - C^*$; S ist der Inhalt des ebenen Dreiecks.

*Hansen*⁸³⁾ hat die Methode von *Gauß* weiter entwickelt, indem er sich geodätischer Polarkoordinaten bediente. Er erhält die Differenzen zwischen den Winkeln des geodätischen Dreiecks und denen des sphärischen Dreiecks mit denselben Seiten bis auf Glieder vierter Ordnung einschließlich und wendet die Resultate vermittelt einer sehr komplizierten Rechnung auf das Rotationsellipsoid an, indem er Glieder von der Ordnung $e^2 s^6$, $e^4 s^4$ vernachlässigt. Aber die Entwicklungen *Hansens* enthalten Größen, die von der Gestalt $z = \varphi(x, y)$ der Flächengleichung in Cartesischen Koordinaten abhängen, was die Rechnung unnötig kompliziert, da die Beziehungen zwischen den sechs Stücken eines geodätischen Dreiecks von der speziellen Gestalt, die die Fläche durch Verbiegung annehmen kann, unabhängig sind und nur von der Form des Linienelements der Fläche abhängen.

Unter Vermeidung dieser Komplikation hat *J. Weingarten*⁸⁴⁾ in einfacher Weise für eine beliebige Fläche und bis auf Glieder vierter Ordnung einschließlich die Differenzen $A - A^*$, $B - B^*$, $C - C^*$ ermittelt, indem er die Krümmungen und die Werte des *Differentialparameters erster Ordnung von k (Inflektent)* in den drei Ecken einführt. Er hat seine Formeln auch auf das Rotationsellipsoid mit derselben Annäherung wie *Hansen*⁸⁵⁾ angewandt.

Auf einfachere Weise erhält man den Vergleich zwischen den Winkeln des geodätischen Dreiecks und denen eines ebenen Dreiecks mit denselben Seiten, wenn man Polarkoordinaten benutzt und nach *G. Darboux*⁸⁶⁾ die Differentialgleichung:

$$(32) \quad G \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial \alpha} \right)^2 = G$$

nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten zu integrieren versucht. *Darboux* betrachtet das Dreieck, das den Koordinatenanfangspunkt und die Punkte (σ_0, α_0) (σ, α) zu Ecken und s, σ, σ_0 zu Seiten hat und setzt auf Grund einfacher geometrischer Überlegungen:

$$(33) \quad s^2 = \sigma^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma\sigma_0 \cos(\alpha - \alpha_0) - \sigma^2\sigma_0^2 \sin^2(\alpha - \alpha_0) P,$$

wo P eine Entwicklung nach Potenzen von σ_0, σ ist, deren Koeffi-

83) Vgl. Zitat in Fußnote 67, III. Abschnitt.

84) Astr. Nachr. 73 (1869), p. 65; 75 (1870), p. 91.

85) Einen analytischen und numerischen Vergleich der Formeln von *Hansen* und *Weingarten* findet man bei *Helmert*, H. G. 1, p. 375—386.

86) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris 1890, 3, livre VI, chap. VIII.

zienten als Funktionen von α , α_0 mittelst (32) zu bestimmen sind. Für G führt man die Entwicklung (24) ein. Nach Bestimmung der ersten drei Glieder von P und durch Vergleich von (33) mit dem Kosinussatz: $s^2 = \sigma_0^2 + \sigma^2 - 2\sigma\sigma_0 \cos A^*$ der ebenen Trigonometrie findet man leicht die Differenz $\alpha - \alpha_0 - A^*$ oder Formel (31) von *Gauß*. *Darboux* treibt dann die Annäherung bis zu den Größen vierter Ordnung einschließlich, indem er die Krümmungen in den Seitenmitten einführt.

Nennt man die Winkel des sphärischen Dreiecks, das die gleichen Seiten wie das geodätische hat und auf einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{k}}$ liegt, wo $k = \frac{1}{3}(k_a + k_b + k_c)$, A' , B' , C' , so hat man mit derselben Genauigkeit wie in (31):

$$(34) \quad A - A' = \frac{S}{36}(2k_a - k_b - k_c)$$

und analog $B - B'$, $C - C'$. Beschränkt man sich auf den speziellen Fall des Rotationsellipsoids, so hat *Bessel*⁸⁷⁾ ohne Beweis die Ausdrücke für $A - A'$, usw. bis auf Glieder $e^2 s^4$ oder mit entsprechender Annäherung wie (34) gegeben.

*Helmert*⁸⁸⁾ hat eine vollständige Entwicklung der sphäroidischen Trigonometrie für den Fall des Rotationsellipsoides auf Grund der Differentialformeln von *E. B. Christoffel*⁸⁹⁾ gegeben, welche die unendlich kleinen Änderungen der Stücke eines geodätischen Dreiecks bei einer infinitesimalen Verlängerung oder Drehung einer Seite liefern. Für \sqrt{G} setzt *Helmert* die Entwicklung (25''). Die *Helmertsche* Methode unterscheidet sich in ihren Grundlagen nicht von der *Hansenschen*, aber sie bietet im Vergleich mit dieser den Vorteil größerer Einfachheit und überdies enthalten die in dem Ausdruck für \sqrt{G} vernachlässigten Terme sämtlich e^2 als Faktor und sind deshalb sehr klein, auch wenn die Dreiecksseiten ziemlich lang sind⁹⁰⁾.

19. Auflösung des geodätischen Dreiecks durch Reduktion auf das ebene Dreieck. Sphäroidischer Exzeß. *Legendre*⁹¹⁾ verdankt man die Idee, zur Berechnung des sphärischen Dreiecks das ebene

87) *Astr. Nachr.* 1 (1822), p. 85 = *Abh.* 3, p. 3

88) *H. G.* 1, Kap. VIII.

89) *Über die allgemeine Theorie des geodät. Dreiecks*, Berlin *Abh.* 1868.

90) *Über das Problem der geodätischen Dreiecke* vgl. auch: *H. James* und *A. R. Clarke*⁵²⁾, p. 240 ff.; *J. J. Baeyer*, *Astr. Nachr.* 61 (1864), p. 225; *Helmert*, *Zeitschr. f. Vermess.* 18 (1889), p. 257.

91) *Paris Mém. Acad. pour 1787 (1789)*, p. 352 oder auch *Delambre*⁴⁸⁾, *Note III.*

Dreieck mit denselben Seiten zu benutzen. Er hat bewiesen, daß bis auf Größen vierter Ordnung die Differenzen $A' - A^*$, usw. (A', B', C' sphärische, A^*, B^*, C^* ebene Winkel) durch die Formeln:

$$(35) \quad A' - A^* = B' - B^* = C' - C^* = \frac{S}{3R^2}$$

gegeben sind, wo S der Inhalt des ebenen Dreiecks und R der Kugelradius ist. Treibt man die Annäherung weiter, so erhält man bis auf Glieder sechster Ordnung:

$$A' - A^* = \frac{S}{3R^2} \left(1 + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{120R^2} \right)$$

und analog für $B' - B^*$, $C' - C^*$. Hieraus und mit Hilfe von (34) erhält man bis auf Glieder mit s^6 und e^2s^4 , wenn

$$R = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k_a + k_b + k_c}}$$

gesetzt wird⁹²⁾:

$$(36) \quad A - A^* = \frac{S}{12} \left(2k_a + k_b + k_c + \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{30} k^2 \right).$$

Diese Annäherung genügt in praxi immer.

Meistens ist es sogar schon ausreichend, das geodätische Dreieck durch ein sphärisches zu ersetzen, indem man als Kugelradius $\frac{1}{\sqrt{k}}$ annimmt und vom sphärischen Dreieck zum ebenen mit Hilfe der einfachen Formeln (35) übergeht. Man vernachlässigt dann in den Ausdrücken für die Winkel Glieder mit s^4 und e^2s^3 , was bei Seiten unter 127 km Länge nicht mehr als 0'',0001 bzw. 0'',0005 ausmacht⁹³⁾. Mit dieser Genauigkeit wird *der sphäroidische Exzeß*

$$\Delta = A + B + C - 180^\circ$$

des geodätischen Dreiecks in Sekunden durch die Formel:

$$\Delta = \frac{kS}{\text{arc } 1''}$$

gegeben und man hat:

$$A - A^* = B - B^* = C - C^* = \frac{\Delta}{3}.$$

Wir wollen die durch diese einfachen Formeln erhaltene Annäherung als *übliche Annäherung* bezeichnen. Mit derselben Genauigkeit kann man für k den Wert $\frac{1}{\rho N}$ der Krümmung unter der Breite φ_0

92) Bis auf die Bezeichnung stimmen diese Ausdrücke mit *Helmert*, H. G. 1, p. 359, Formel (6) überein.

93) *Helmert*, H. G. 1, p. 96 u. 361.

des *mittleren Parallels*⁹⁴⁾ des Dreiecks nehmen. — Den Exzeß Δ kann man durch folgende Formeln berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{S}{\varrho N \operatorname{arc} 1''} = \frac{b \cdot c \sin A^*}{2 \varrho N \operatorname{arc} 1''} = \frac{c^2 \sin A^* \sin B^*}{2 \varrho N \sin(A^* + B^*) \operatorname{arc} 1''} \\ &= \frac{c^2 \sin A^* \sin(A^* + C^*)}{2 \varrho N \sin C^* \operatorname{arc} 1''} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\varrho N \operatorname{arc} 1''},\end{aligned}$$

wo $p = \frac{a+b+c}{2}$ ist. Man ändert den Grad der Annäherung nicht, wenn man in diesen Ausdrücken A^* , B^* , C^* durch A , B , C ersetzt. Soll Δ mit derjenigen Genauigkeit berechnet werden, die (36) entspricht, so ist zu setzen:

$$\Delta = \frac{Sk}{\operatorname{arc} 1''} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24} k \right).$$

20. Sehnen und Normalschnitte. Sowohl bei der Übertragung der Koordinaten und des Azimuts wie bei der Auflösung der geodätischen Dreiecke ist die Benutzung der geodätischen Linien natürlich nicht unumgänglich notwendig. Man kann auch die Sehnen oder Normalschnitte benutzen. So löst *Delambre*⁹⁵⁾ das Problem der Übertragung der geographischen Koordinaten, wenn die Sehne und das astronomische Azimut (oder Azimut des Normalschnitts) gegeben sind. *C. Bremiker*⁹⁶⁾ löst dasselbe Problem mit größerer Annäherung und behandelt auch die Aufgabe, die Länge der Sehne und das astronomische Azimut zu bestimmen, wenn die geographischen Koordinaten der Endpunkte gegeben sind. Wir haben in Nr. 11 die auf dies Problem bezüglichen Formeln von *Helmert* gegeben. *Bremiker* gibt auch Methoden zur Berechnung der Dreiecke mit Hilfe der Sehendreiecke, deren Winkel er aus den Horizontalwinkeln berechnet. *Helmert*⁹⁷⁾ hat bemerkt, daß man bequem die *Sehnen* benutzen kann, ohne die Winkel zwischen den Sehnen in die Rechnung einzuführen, da zwischen den Sehnen a' , b' , c' und den Horizontalwinkeln einfache Relationen von

94) Wenn die Seiten nicht länger als 120 km sind, so hat ein Fehler von zwei Einheiten der fünften Stelle des Logarithmus auf Δ keinen größeren Einfluß als $0'',0015$. Andererseits ist die Änderung von $\log \frac{1}{\varrho N}$ nicht größer als $0'',00011$, wenn φ sich um 1° ändert. Es genügt deshalb, die Mittelbreite bis auf $10'$ genau zu berechnen, um in $\frac{\Delta}{3}$ sicher keinen größeren Fehler als $0'',0005$ zu erhalten.

95) Vgl. Zitat in Fußn. 48, p. 77f.

96) Vgl. Zitat in Fußn. 46, § 6 u. f.

97) H. G. 1, p. 105, 190. Wegen der Übertragung der geographischen Koordinaten unter Benutzung der Sehnen vgl. *ibid.*, p. 142; es interessieren besonders die Formeln für den Fall kleiner Entfernungen.

genügender Annäherung bestehen. Es verdient in dieser Beziehung für den Fall eines sphärischen Dreiecks die Sinusformel von *J. A. Grunert*⁹⁸⁾ erwähnt zu werden, die bezüglich der Seiten bis auf Glieder vierter Ordnung ausschließlich genau ist:

$$a' : b' : c' = \sin \left(A - \frac{\Delta}{4} \right) : \sin \left(B - \frac{\Delta}{4} \right) : \sin \left(C - \frac{\Delta}{4} \right).$$

*Helmert*⁹⁹⁾ hat eine analoge Formel für das Rotationsellipsoid aufgestellt, indem er auch noch die kleinen Größen vierter Ordnung und die Exzentrizität e berücksichtigte.

Berechnungen aus der sphäroidischen Trigonometrie mit Hilfe der astronomischen Azimute und der Normalschnitte findet man bei *James und Clarke*¹⁰⁰⁾. Die Normalschnitte haben indes den Nachteil, für jedes Punktpaar doppelt vorhanden zu sein und weniger einfache Rechnungen zu liefern als die geodätischen Linien.

21. Reduktion ellipsoidischer Figuren auf sphärische durch konforme Abbildung. *Gauß*¹⁰¹⁾ hat von den Hauptproblemen der höheren Geodäsie eine Auflösung gegeben, die sich auf eine konforme Abbildung des Rotationsellipsoids auf die Kugel stützt. Die Parallelkreise und Meridiane des Ellipsoids entsprechen den Parallelkreisen und Meridianen auf der Kugel nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \Omega &= \alpha \omega, \\ (37) \quad \operatorname{tg} \frac{V}{2} &= k \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)^\alpha \left(\frac{1 + e \cos v}{1 - e \cos v} \right)^{\frac{\alpha e}{2}}, \quad (\alpha, k \text{ Konstante}), \end{aligned}$$

ω ist die Länge, v das Komplement der Breite $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$ für einen Ellipsoidpunkt, Ω, V sind die analogen Größen für den entsprechenden Kugelpunkt. Der lineare Modul oder das Verhältnis zwischen einem Linienelement auf der Kugel und dem entsprechenden auf dem Ellipsoid ist:

$$(38) \quad m = \frac{\alpha R \sin V (1 - e^2 \cos^2 v)}{a \sin v},$$

wenn R den Kugelradius und a den Äquatorradius des Ellipsoids bezeichnet. Die Größen R, α, k sind so zu bestimmen, daß auf einem ausgewählten Parallel mit der Breite P (Normalbreite)

98) Arch. Math. Phys. 25 (1855), p. 197; bezüglich des Sehnendreiecks vgl. auch *A Nagel*, Zeitschr. Math. Phys. 1 (1856), p. 257.

99) H. G. 1, p. 197.

100) Vgl. Zitat in Fußn. 52, p. 232f.

101) Vgl. Zitat in Fußn. 62. In dieser Hinsicht siehe auch: *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 20 (1881), p. 609 u. 641.

$$(39) \quad m = 1, \quad \frac{\partial m}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 m}{\partial v^2} = 0$$

Bezeichnet man die P entsprechende sphärische Breite mit Q , so lauten die Bedingungen:

$$R = \frac{\alpha \cos P}{\alpha \cos Q \sqrt{1 - e^2 \sin^2 P}}, \quad \alpha \sin Q = \sin P,$$

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2 \cos^4 P}{1 - e^2}, \quad k = \frac{\operatorname{tg}^\alpha \left(45^\circ + \frac{P}{2}\right)}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{Q}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P}\right)^{\frac{\alpha e}{2}}.$$

Aus den ersten dreien ergibt sich durch Elimination von α , P :

$$R = \frac{\alpha \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 P},$$

d. h. der Kugelradius ist das geometrische Mittel der Hauptkrümmungsradien unter der Breite P . Wenn man eine ellipsoidische Zone betrachtet, die nur wenig von dem Parallel abweicht, und mit s die größte Entfernung eines Zonenpunktes vom Parallel bezeichnet, so können die Ellipsoidbogen innerhalb jenes Gebietes den entsprechenden auf der Kugel mit einem relativen Fehler von der Ordnung $e^2 \cdot \frac{s^3}{a^3}$ gleichgesetzt werden. In dieser Annäherung können daher die ellipsoidischen Dreiecke als sphärische aufgelöst werden, was die Resultate der Nr. 18 bestätigt.

Zur Übertragung der geographischen Koordinaten von einem Punkte $A(v, \omega)$ nach einem anderen $B(v', \omega')$ bei gegebenem geodätischem Bogen $AB = s$ und Azimut t in A , verfährt man so:

1) Man berechnet aus (37) das dem ellipsoidischen v entsprechende sphärische V ;

2) man löst ein sphärisches Dreieck aus zwei Seiten $\left(V, \frac{s}{R}\right)$ und dem eingeschlossenen Winkel t auf und berechnet dadurch das v' entsprechende V' und die sphärische Längendifferenz Ω' ;

3) aus (37) leitet man v' und $\omega - \omega' = \frac{\Omega}{\alpha}$ ab. Bei dem Übergang von den ellipsoidischen Breiten zu den sphärischen ist es zweckmäßig, an Stelle von (37) Reihenentwicklungen zu benutzen. Ist $P + p$ die Breite eines Ellipsoidpunktes und $Q + q$ die Breite des entsprechenden Kugelpunktes, so findet man durch Entwicklung von (37):

$$q = p \frac{h}{\cos \theta} + \frac{3}{2} \frac{e^2 h}{\cos^3 \theta} s p^2 + \frac{e^2 h}{6 \cos^5 \theta} (3e^2 - 3s^2 + 12e^2 c^2 s^2 + 3e^2 s^4) p^3 + \dots$$

Durch Umkehrung der Reihe ergibt sich:

$$p = \frac{q}{h} \cos \theta - \frac{3 e^2 c s q^2}{2 h^2} + \frac{e^2 q^3}{2 h^3 \cos \theta} (-c^2 + s^2 + 5 e^2 c^2 s^2 - e^2 s^4) + \dots,$$

wenn für den Augenblick gesetzt wird:

$$s = \sin P, \quad c = \cos P, \quad h = \sqrt{1 - e^2}, \quad e \sin P = \sin \theta.$$

Gauß hat die Annäherung noch weiter getrieben. — Will man Größen von der Ordnung $e^2 \frac{s^3}{a^3}$, wo s den Bogen bedeutet, berücksichtigen, so kann der Bogen $A'C'B'$ auf der Kugel, der dem geodätischen Bogen AB auf dem Ellipsoid entspricht, nicht mit dem Bogen des größten Kreises $A'C''B'$ identifiziert werden, und an den Azimuten der geodätischen Linie AB muß man gewisse Korrekturen ψ_1, ψ_2 anbringen, um die Azimute t'_1, t'_2 des Bogens $A'C'B'$ abzuleiten. Setzt man:

$$\text{arc}(AB) = S, \quad k = \frac{1}{2} \frac{d \log m}{dV} = -\frac{1}{2} \frac{d \log m}{d(Q+q)},$$

so ergibt sich¹⁰²⁾:

$$t_1 - t'_1 = \psi_1 = \frac{S}{3A} (-k_2 \sin \alpha_2 + 2k_1 \sin \alpha_1),$$

$$t_2 - t'_2 = \psi_2 = \frac{S}{3A} (-k_1 \sin \alpha_1 + 2k_2 \sin \alpha_2),$$

bis auf Größen der Ordnung $e^2 s^4$. Mit derselben Annäherung erhält man für das Verhältnis von S zum Bogen $S' = A'C'B'$ des größten Kreises:

$$\frac{S}{S'} = \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}}.$$

k_1, m_1 sind die Werte von k, m im Punkte A , k_2, m_2 im Punkte B . Weitergehende Formeln sind von *O. Schreiber* entwickelt worden^{102a)}.

22. Rechtwinklige geodätische oder Soldnersche Koordinaten¹⁰³⁾.

Von besonderem Interesse sowohl für theoretische Zwecke wie für die praktische Geodäsie ist die Bestimmung der Ellipsoidpunkte durch das

102) Bei dem Vergleich dieser Formeln mit denen von *Gauß* beachte man, daß *Gauß* das Azimut von Süden statt von Norden aus rechnet. Die von *Gauß* mit L bezeichnete Größe ist bei uns $\frac{S'}{a}$.

102a) Die konforme Doppelprojektion usw., Berlin 1897.

103) In der Karte von Frankreich, die von *C. F. Cassini de Thury* und seinem Sohne ausgeführt ist (vollendet 1815), sind die ebenen rechtwinkligen Koordinaten genau gleich den hier definierten rechtwinkligen geodätischen Koordinaten, wobei das Observatorium von Paris als Anfangspunkt genommen ist. Der rationelle Gebrauch dieser Koordinaten zu geodätischen Rechnungen wurde von *J. v. Soldner* 1809 für die bayerische Landesvermessung eingeführt (vgl. *C. v. Orff* und *C. M. v. Bauernfeind*, Die Bayer. Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grund-

folgende System geodätischer Koordinaten. Für einen beliebigen Punkt A (Fig. 3) nennen wir die Länge der geodätischen Linie AA' , die von A senkrecht zu einem Hauptmeridian gezogen ist, Y und den Bogen dieses Meridians zwischen A' und einem festen Punkte O (Anfangspunkt der Koordinaten) X . Wir werden Y positiv vom Meridian nach Osten und X positiv nach Norden rechnen.

Sind die geodätischen Polarkoordinaten des Punktes A in bezug auf O : s, α_1 , so erhält man die Koordinaten X_1, Y_1 von A in der üblichen Annäherung (Nr. 19) aus dem geodätischen Dreieck $AA'O$,¹⁰⁴ dessen sphärischer Exzeß aus der Gleichung:

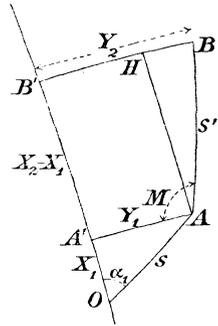


Fig. 3.

$$3 \varepsilon = \frac{s^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2 \varrho_1 N_1 \text{ arc } 1''}$$

folgt (ϱ_1, N_1 sind die Werte von ϱ, N für O). Man bekommt:

$$(40) \quad X_1 = s \cos(\alpha_1 - 2\varepsilon), \quad Y_1 = s \sin(\alpha_1 - \varepsilon).$$

Für die umgekehrte Rechnung hat man mit derselben Genauigkeit:

$$3 \varepsilon = \frac{X_1 Y_1}{2 \varrho_1 N_1 \text{ arc } 1''}, \quad s \sin \alpha_1 = Y_1 \left(1 + \frac{X_1^2}{6 \varrho_1 N_1}\right),$$

$$s \cos \alpha_1 = X_1 \left(1 - \frac{Y_1^2}{3 \varrho_1 N_1}\right).$$

Der Winkel des Dreiecks $A'AO$ in A ist $90^\circ - \alpha_1 + 3\varepsilon$.

Es sei jetzt die Länge s' des geodätischen Bogens AB und der Winkel $A'AB = M$ gegeben; gesucht sind die Koordinaten X_2, Y_2 von B . Macht man auf BB' (Ordinate von B) $B'H = A'A = Y_1$, so bekommt man aus dem Viereck $AA'B'H$, wenn man den sphäroidischen Exzeß mit E bezeichnet, in der üblichen Annäherung:

lage, München 1873) und unabhängig von ihm von *J. Bohnerberger* bei der württemberg. Landesvermessung (De computandis dimensionibus trigonometricis etc. Tübingen 1826, deutsch bearbeitet von *E. Hammer*, Stuttgart 1885).

104) Die hier befolgte Methode stammt von *G. Zachariae*, Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Koordinaten, Berlin 1878, und von *N. Jadanza*⁶³). *O. Schreiber* hat Formeln für geodätische Koordinaten im II. Teile der Hauptdreiecke der K. Preuß. Landstriangulation, Berlin 1874, p. 605 gegeben. Ihre Entwicklung findet sich bei *W. Jordan* und *K. Steppes*, Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882; Bd. 1, Höhere Geodäsie und Topographie des deutschen Reiches von *W. Jordan*, p. 103. Vgl. ferner *O. Börsch*, Anleitung zur Berechnung geodät. Koordinaten, Kassel 1885; *W. Jordan*, Zeitschr. f. Vermess. 20 (1891), p. 213; *L. Krüger*, ibid. 26 (1897), p. 441.

$$\sphericalangle(A'AH) = \sphericalangle(AHB') = 90^\circ + \frac{E}{2},$$

$$(AH) = (A'B) - \frac{\text{arc } 1''}{2} E (AA') \quad (E \text{ in Sekunden}).$$

Aus dem Dreieck ABH findet man dann, wenn sein sphäroidischer Exzeß mit $3 \varepsilon_1$ bezeichnet wird:

$$3 \varepsilon_1 = - \frac{s'^2 \sin M \cos M}{2 \varrho N \text{ arc } 1''}, \quad (\varrho, N \text{ beziehen sich auf } A),$$

$$X_2 - X_1 = s' \sin(M - E - 2 \varepsilon_1) + \frac{\text{arc } 1''}{2} E Y_1$$

$$Y_2 - Y_1 = - s' \cos\left(M - \frac{E}{2} - \varepsilon_1\right).$$

Den Exzeß E kann man nach der Formel berechnen:

$$E = \frac{Y_1 s' \sin M}{\varrho N \text{ arc } 1''}.$$

Zur Ausführung der umgekehrten Rechnung (gegeben X_1, Y_1, X_2, Y_2 , gesucht s', M) setzen wir:

$$X_2 - X_1 = \Delta X, \quad Y_2 - Y_1 = \Delta Y$$

und erhalten dann:

$$E = \frac{Y_1 \Delta X}{\varrho N \text{ arc } 1''}, \quad 3 \varepsilon_1 = \frac{\Delta X \Delta Y}{2 \varrho N \text{ arc } 1''},$$

$$- s' \cos M = \Delta Y + \frac{\text{arc } 1''}{2} (E + 2 \varepsilon_1) \Delta X,$$

$$s' \sin M = \Delta X - \text{arc } 1'' (E + 2 \varepsilon_1) \Delta Y - \frac{\text{arc } 1''}{2} E Y_1.$$

Auf direkterem Wege löst *Helmert*¹⁰⁵⁾ die Probleme für die rechtwinkligen geodätischen Koordinaten, indem er von den Differentialgleichungen (analog mit (21) in Nr. 16)¹⁰⁶⁾:

$$(42) \quad s \cos a = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial(s^2)}{\partial X}, \quad s \sin a = \frac{1}{2} \frac{\partial(s^2)}{\partial Y}$$

ausgeht, denen der geodätische Bogen s genügt, der einen festen Punkt $A(X_1 Y_1)$ mit einem beliebigen Punkt (XY) verbindet; a ist der Winkel, den das Element ds im Punkte B mit der Kurve $Y = \text{konst.}$, natürlich im Sinne der wachsenden X , macht (*Richtungswinkel*), und G der Koeffizient im Ausdruck für das Linienelement:

$$ds = \sqrt{dY^2 + G dX^2}.$$

105) H. G. 1, p. 412–420.

106) Diese Gleichungen erhält man am einfachsten auf geometrischem Wege, wenn man den Satz berücksichtigt, daß das eine Ende eines geodätischen Bogens von konstanter Länge, das um das andere Ende rotiert, eine zum Bogen selbst rechtwinklige Linie erzeugt.

Indem man (42) nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten integriert, erhält man für $s \cos a$, $s \sin a$ Reihen nach Potenzen von $X - X_1$, $Y - Y_1$. Durch Umkehrung der Reihen lassen sich $X - X_1$, $Y - Y_1$ durch s und a ausdrücken. Die *Helmertschen* Formeln gehen bis zu Gliedern mit s^5 und $e^2 s^4$ einschließlich.

23. Übertragung der geographischen Koordinaten vermittelt rechtwinkliger geodätischer. Das in Nr. 13 und 14 behandelte Problem kann man auch mit Hülfe der rechtwinkligen geodätischen Koordinaten $X_1 Y_1$ des Punktes B in bezug auf A als Anfangspunkt lösen; denn nach Berechnung von XY kann man die Breite von F (Fig. 4), des Fußpunktes der geodätischen Linie, die durch B senkrecht zum Meridian von A geht, finden und hierauf die geographischen Koordinaten von F nach B übertragen. Wir geben die *Helmertschen* Formeln¹⁰⁷⁾ unter Benutzung der in der Figur angegebenen Bezeichnungen, wo BP der Meridian von B und BP' die durch B gehende Linie $Y = \text{konst.}$ ist. Der Winkel $PBP' = t$ ist die *Meridiankonvergenz* zwischen F' und B (Nr. 13).

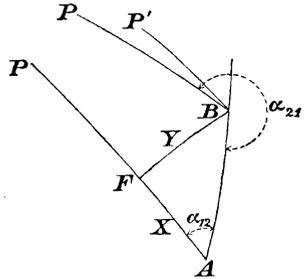


Fig. 4.

Setzt man:

$$u = s \cos \alpha_{12}, \quad v = s \sin \alpha_{12},$$

so hat man

$$\begin{aligned} \log X &= \log u + \frac{1}{3} \frac{Mv^2}{a^2(1-e^2)} W_0^4 \\ \log Y &= \log v - \frac{1}{6} \frac{Mu^2}{a^2(1-e^2)} W_0^4 \end{aligned} \quad (M = 0,4342945 \dots),$$

$$\log (F - \varphi_1) = \log \left(\frac{X}{\rho_m \text{arc } 1''} \right) - \frac{Me^2}{8} \left(\frac{X}{\rho_m} \right)^2 \cos(\varphi_1 + F)$$

($F - \varphi_1$ in Sekunden),

$$\eta = \frac{Y}{N \text{ arc } 1''}, \quad \text{tg } \omega_{12} = \text{tg } \eta \cdot \sec F,$$

$$\sin (F - \varphi_2) = \sin \eta \text{tg } F \text{tg } \frac{\omega_{12}}{2} \cdot \frac{W^2}{1-e^2};$$

107) H. G. 1, p. 456. Dort ist aber die X -Achse positiv nach Süden, die Y -Achse positiv nach Westen und das Azimut von Süden aus gerechnet. *O. Schreibers* (Rechnungsvorschriften für die Trigon. Abt. der Landesaufnahme, Berlin 1878) hat das Problem der sphäroidischen Übertragung nach demselben Prinzip gelöst. Seine Formeln sind etwas weitläufiger, vermeiden aber indirektes Rechnen. In den *Albrechtschen* Tafeln⁴⁵⁾ findet man numerische Tabellen zum Gebrauch der *Schreiberschen* Formeln.

φ_1, F, φ_2 sind die Breiten von A, F, B ; ω_{12} ist die Längendifferenz zwischen B und A , W_0 der Wert von $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ für die Breite $\varphi_1 + \frac{2}{3}(F - \varphi_1)$ [in erster Annäherung findet man F aus: $\log(F - \varphi_1)'' = \log u + 8,511$]; ρ_m ist der Krümmungsradius im Meridian unter der Breite $\frac{1}{2}(F + \varphi_1)$, W der Wert von $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ für die Breite $F - \frac{2}{3}(F - \varphi_2)$, $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 F}}$. Den Winkel t findet man aus der Formel:

$$\operatorname{tg} t = \sin \eta \operatorname{tg} F$$

und das Azimut α_{21} von BA in B ist gegeben durch:

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} \pm 180^\circ + t - \frac{XYW_0^4}{2a^2(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''}.$$

Die in diesen Formeln vernachlässigten Größen sind von der Ordnung s^5 und $e^2 s^4$ in bezug auf X, Y , von der Ordnung $e^4 s^3, e^2 s^5$ bei $F - \varphi_1, e^2 s^4$ bei $F - \varphi_2, e^2 s^5$ bei $\omega_{12}, e^2 s^3$ und s^4 bei dem Azimut α_{21} . Für $s = 300$ km sind diese Fehler kleiner als $0'',0002$ in $\varphi_1 - F, 0'',0004$ in $F - \varphi_2, 0'',0003$ in ω_{12} und $0'',014$ in α_{21} (vgl. *Helmert*, H. G. 1, p. 452—454).

24. Projektionen auf die Ebene. Wir haben in Nr. 21 auseinandergesetzt, wie *Gauß* mit Hülfe einer konformen Abbildung die Probleme der sphäroidischen Trigonometrie auf die der sphärischen zurückgeführt hat. In analoger Weise (und mit größerem Nutzen für die Anwendungen in der praktischen Geodäsie) kann man Projektionen auf die Ebene benutzen, um die geodätischen Rechnungen auf solche der ebenen Trigonometrie zurückzuführen¹⁰⁸). Es seien einige Haupt-systeme dieser Projektionen genannt.

Projektion von Soldner. Die Cartesischen Koordinaten eines Punktes der Ebene werden den rechtwinkligen geodätischen Koordinaten des entsprechenden Punktes auf dem Ellipsoid gleich gemacht¹⁰⁹).

*Konforme Kegelprojektion*¹¹⁰), bei der die Meridiane durch ein Strahlenbüschel und die Parallelkreise durch konzentrische Kreise ab-

108) Eine vollständige Behandlung der ebenen Projektionen findet man bei *Jordan*, Handbuch 3, p. 255—291 und 404—487; Bemerkungen dazu von *A. Börsch* in Fortschr. der Mathem. 27 (1896), p. 785. Man sehe auch *C. F. Gauß* Werke 9, p. 137 und vergleiche im übrigen VI 1, 4 (*R. Bourgeois*).

109) Vgl. Fußnote 103.

110) Diese Projektion ist von *F. Paschen* bei der mecklenburg. Landesvermessung benutzt, vgl. *W. Jordan*, Großherzogl. Mecklenb. Landesverm., 5. Teil, Schwerin 1895. Für die geodätischen Rechnungen in der Äquatortend ist die *Merkatorprojektion* von *Ch. M. Schols* vorgeschlagen und studiert [Delft J. éc. polyt. 1 (1885), p. 1].

gebildet werden. Entspricht dem Flächenpunkte φ , ω ein Punkt in der Ebene mit den Polarkoordinaten R , θ , so ist

$$R = k \Phi, \quad \theta = k\omega,$$

wo

$$\Phi = \cotg^h \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{eh}{2}} \quad (h, k \text{ Konstanten}).$$

Wenn man eine Erdzone mit der Mittelbreite φ_0 abbilden will, so sind die passendsten Werte der Konstanten:

$$h = \sin \varphi_0, \quad k = \frac{r_0}{\Phi_0 \sin \varphi_0};$$

Φ_0 , r_0 sind die Werte von Φ , r (Radius des Parallelkreises) für die Breite φ_0 . — Die Theorie dieser Projektion ist vollständig analog der sphärischen Abbildung von *Gauß* (Nr. 21).

*Konforme Projektion von Gauß*¹¹¹⁾, bei der der Hauptmeridian durch eine Gerade dargestellt wird und die Bogen dieses Meridians den entsprechenden Strecken in der Ebene gleich sind (längentreue Abbildung des Hauptmeridians). Setzt man:

$$q = \int_0^\varphi \frac{r}{r} d\varphi = \log \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right],$$

so kann man das Linienelement der Fläche in der Gestalt

$$ds = r \sqrt{dq^2 + d\omega^2}$$

ansetzen und jede konforme Abbildung auf die Ebene wird durch eine Relation der Form:

$$X + iY = f(q + i\omega) \quad (i = \sqrt{-1})$$

vermittelt. Wenn die X -Achse den Hauptmeridian darstellt, so muß sich für $\omega = 0$ die Gleichung $X = \sigma$ ergeben, wo σ den Meridianbogen zwischen dem Äquator und der Breite φ bedeutet. Dies bestimmt die Gestalt der Funktion f und für kleine Werte ω erhält man durch Reihenentwicklung:

$$X = \sigma + \frac{\omega^2}{2} N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\omega^4}{24} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots,$$

$$Y = \omega N \cos \varphi + \frac{\omega^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \dots,$$

111) Diese Projektion ist von *Gauß* für die Rechnungen der Hannoverschen Gradmessung und ihrer Fortsetzung nach Jever (1821–1825) sowie für die Hannoversche Landesvermessung (1828–1844) benutzt. Die Theorie ist von *O. Schreiber* auseinandergesetzt, Theorie der Projektionsmethode in der Hannov. Landesvermess., Hannover 1866. Die in *Gauß* Nachlaß gefundenen Formeln sind Werke 9, p. 141–204 von *L. Krüger* zusammengestellt; vgl. dazu auch den Briefwechsel mit *Schumacher*, *ibid.*, p. 205–218.

wo zur Abkürzung:

$$t = \operatorname{tg} \varphi, \quad \eta^2 = \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2}$$

gesetzt ist. Um die umgekehrten Formeln hinzuschreiben, bezeichnen wir mit φ_1 die Breite des Parallelkreises, der vom Äquator den Abstand X hat. Man hat dann mit derselben Genauigkeit:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{Y^2}{2 e_1 N_1} t_1 + \frac{Y^4}{24 e_1 N_1^3} (5 + 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2 - 4 \eta_1^4) + \dots$$

$$\omega = \frac{Y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{Y^3}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) + \dots,$$

wo e_1, N_1, η_1, t_1 sich auf die Breite φ_1 beziehen. — Das Verhältnis zwischen einem geodätischen Bogen $AB = s$ und der Strecke $A'B' = S$ (Fig. 5) in der Ebene, die die A und B entsprechenden Punkte verbindet, ist bis auf Größen der Ordnung $e^2 s^3$ und s^4

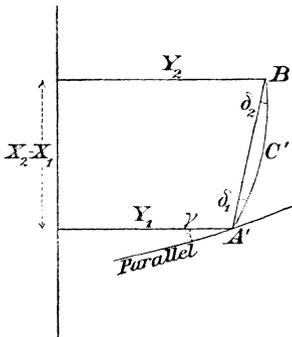


Fig. 5.

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{1}{6 e_1 N_1} (Y_1^2 + Y_1 Y_2 + Y_2^2) + \dots$$

Die Winkel, welche das ebene Bild $A'C'B'$ der geodätischen Linie AB mit der Strecke $A'B'$ macht, sind mit derselben Genauigkeit:

$$\delta_1 = \frac{(X_2 - X_1)(2 Y_1 + Y_2)}{6 e_1 N_1},$$

$$\delta_2 = \frac{(X_2 - X_1)(2 Y_2 + Y_1)}{6 e_1 N_1}.$$

Der Bogen $A'C'B'$ kehrt immer die konkave Seite zur X -Achse, was als Regel zur Bestimmung der Vorzeichen von δ_1, δ_2 dient. Die Ordinate Y_1 macht mit dem Bilde des Parallels im Punkte (X_1, Y_1) einen Winkel:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{Y_1}{N_1} t_1 - \frac{Y_1^3}{3 N_1^3} t_1 (1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2 \eta_1^4) + \dots \\ &= \omega \sin \varphi + \frac{\omega^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) + \dots, \end{aligned}$$

dies sind die fundamentalen Formeln der konformen Projektion von *Gauß*. Wegen weiterer Entwicklungen vgl. man *Schreiber*¹¹¹⁾ und *Jordan*, Handbuch 3. In neuerer Zeit hat die *Gaußsche* Projektion bei der Landesvermessung von Frankreich durch *Ch. Lallemand* Verwendung gefunden; man beabsichtigt Frankreich in 7 Meridianstreifen von je 2° Breite zu teilen^{111a)}.

In der Praxis hat sich die „konforme Doppelprojektion“, die von *O. Schreiber* bei der preußischen Landesaufnahme eingeführt ist, als

111a) Zeitschr. f. Vermess. 28 (1899), p. 42, 138.

sehr zweckmäßig erwiesen. Man erhält sie durch 1) eine konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel nach *Gauß* (Nr. 21) und 2) eine konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene, bei der ein Mittelmeridian längentreu abgebildet wird^{111b)}.

B. Landesvermessung.

25. Basismessungen. Um die gegenseitige Lage von Punkten auf der Erde zu bestimmen, muß man wenigstens die Länge einer Strecke direkt messen; eine solche gemessene Strecke nennt man *Basis*. Die Einrichtung der Basis, d. h. der Linie AB , längs der die Träger der Meßstangen aufgestellt werden, erfolgt durch Aufstellung eines Alignementsfernrohrs (d. h. eines um eine horizontale Achse drehbaren Fernrohrs) in einem Ende A , mit dessen Hilfe man auf dem Boden die Punkte des Vertikalschnitts \overline{AB} festlegen kann; umgekehrt kann man von B aus den Vertikalschnitt \overline{BA} festlegen. Endlich kann man auch durch sukzessive Aufstellung des Instruments in Zwischenpunkten P zwischen A und B diese Punkte P so bestimmen, daß die Azimutdifferenzen zwischen den Vertikalschnitten \overline{PA} , \overline{PB} 180° betragen. Man erhält in diesem Falle die sog. *Feldlinie*¹¹²⁾ (*course d'alignement*), die als Ort der Punkte definiert werden kann, in denen die Normalen von den Punkten der Geraden AB aus auf die Fläche diese schneiden. Eine solche Linie berührt die Normalschnitte \overline{AB} und \overline{BA} in A und B resp.¹¹³⁾, und ihre Abweichungen von diesen sind von derselben Ordnung wie die zwischen den geodätischen Linien und den Normalschnitten (Nr. 17), d. h. in praxi völlig zu vernachlässigen¹¹⁴⁾.

Bei dem Gesagten ist stillschweigend vorausgesetzt, daß die Einrichtung der Basislinie auf dem Ellipsoid erfolgt. In Wirklichkeit geht sie aber auf der physischen Erdoberfläche vor sich und die Abweichung dieser vom Referenzellipsoid ist nicht zu vernachlässigen¹¹⁵⁾.

111b) O. *Schreiber*, Die konforme Doppelprojektion der Trigonometrie, Abt. der Kgl. Preuß. Landesaufnahme, Berlin 1897; Zeitschr. f. Vermess. 28 (1899), p. 491, 593; 29 (1900), p. 257, 289.

112) Über die Feldlinie vgl. *James* und *Clarke*⁵²⁾, p. 237; *Bremiker*⁴⁶⁾, p. 62—67; *Helmert*, H. G. 1, p. 400.

113) Über den Vergleich der Feldlinie mit den Normalschnitten vgl. *Clarke*, Geodesy, p. 113—116 und *Pizzetti*, Giorn. di mat. 21 (1882), p. 1.

114) Für eine Basis von 10 km Länge beträgt die größte lineare Abweichung zwischen den beiden Normalschnitten nicht mehr als 0,005 mm, während man bei der Einflechtung auch mit einem sehr guten Alignementsfernrohr seitliche Abweichungen von mehreren Millimetern für eine Stangenlage kaum vermeiden kann.

115) Wegen der Reduktion einer Basis auf eine gegebene Niveaufäche vgl.

Es sei ANB (Fig. 6) die Basislinie; fällt man dann von A, B Normalen auf das Ellipsoid bis A', B' , so ist aus der gemessenen

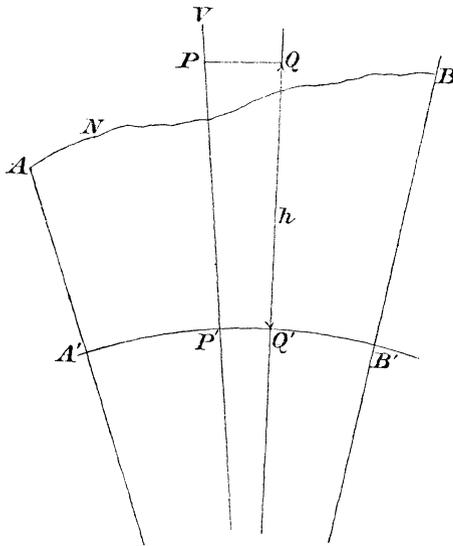


Fig. 6.

Länge ANB die Länge der geodätischen Linie oder des Vertikalschnitts $A'B'$ abzuleiten. Der Winkel zwischen den beiden Vertikalebene $AA'B, AA'B'$ (Nr. 11) ist so klein, daß sie, was die Einrichtung und Messung der Basis angeht, als identisch betrachtet werden können. Mit dieser Annäherung kann die Projektion $P'Q'$ einer Stangenlage PQ auf das Ellipsoid als ein Element von $A'B'$ betrachtet werden. Die beiden Normalen PP', QQ' bilden einen so kleinen Winkel miteinander, daß der Bogen $P'Q'$ mit dem Bogen des oskulierenden Kreises in P' identifiziert werden kann. Aus dem Dreieck PCQ (C ist der Krümmungsmittelpunkt von P' auf $A'B'$) erhält man dann:

$$P'Q' = \frac{R}{R+h} b \cos i,$$

wo $b = PQ$, h die Höhe QQ' der Stange über dem Ellipsoid und $i = 90^\circ - \sphericalangle VPQ$ ihre Neigung gegen den Horizont ist; R ist der Krümmungsradius von $A'B'$ in P' . Bis auf zu vernachlässigende Größen wird deshalb die Länge von $A'B'$:

$$(44) \quad L = \Sigma(P'Q') = \Sigma b - \frac{1}{2} \Sigma b i^2 - \Sigma \frac{b h}{R}.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2} \Sigma b i^2$ heißt *Reduktion auf den Horizont*¹¹⁶⁾ (die Neigung i wird an einer mit der Meßstange verbundenen Libelle ab-

Helmert, H. G. 1, p. 487 und *E. Pucci*, Sulla teoria delle base geodetiche, Neapel 1880. Es ist mir nicht bekannt, wann zum ersten Mal die Reduktion einer Basis auf das Meeresniveau ausgeführt ist. — *Lacondamine* und *Bouguer* haben diese Reduktion bei dem Peruanischen Bogen angebracht (siehe *Todhunter*, History, § 358).

¹¹⁶⁾ Diese Korrektur scheint zuerst von *Bouguer* bei der Basis von Quito eingeführt zu sein (*Gore*, Geodesy, p. 99).

gelesen) und $\Sigma \frac{b h}{R}$ Reduktion auf das Meeresniveau. Diese kann mit genügender Genauigkeit auch in der Gestalt: $L \frac{H_m}{R_0}$ geschrieben werden, wo R_0 der Krümmungsradius von $A'B'$ in A' ¹¹⁷⁾ und H_m die mittlere Höhe der Basis über dem Meere ¹¹⁸⁾ ist, die durch ein geometrisches Nivellement bestimmt wird. Es ist nicht notwendig, daß das Nivellement die Höhe jeder Stangenlage gibt, es genügt das Mittel aus den Höhen einer Anzahl passend verteilter Stangenlagen oder sogar der Enden A, B . Ein Fehler von 64 cm in H_m würde $\frac{1}{10^7}$ von L ausmachen.

26. Basisapparate ¹¹⁹⁾. Bei den metallischen Basisapparaten, die heutzutage fast ausschließlich benutzt werden, muß man die Änderung der Stangenlänge mit der Temperatur berücksichtigen. Wird diese direkt mit einem Quecksilberthermometer gemessen, so erhält man die Stangenlänge bei der Temperatur t^0 durch die Formel:

$$b = b_0(1 + \beta t),$$

wo b_0 die Stangenlänge bei 0^0 und β der Ausdehnungskoeffizient ¹²⁰⁾ ist. Aber meistens verzichtet man auf die direkte Messung der Temperatur und stellt nach dem Prinzip des *Metallthermometers von Borda* ¹²¹⁾

117) Der Krümmungsradius in einem Punkte P' von $A'B'$ unterscheidet sich von R_0 sehr nahe um:

$$s \left(\frac{dR}{ds} \right)_0 = \frac{3}{2} \frac{e^2 s}{\rho} R_0 \sin 2\varphi \cos \alpha$$

(Nr. 12), wo $s = \text{arc}(A'P')$. Für $s = 10$ km ist diese Differenz kleiner als $0,000016 R_0$, d. h. wenn man in dem letzten Gliede von (44) R_0 für R setzt, so begeht man einen prozentualen Fehler, der kleiner ist als $0,000016 \frac{H}{R_0}$ (oder kleiner als $\frac{1}{200 \cdot 10^6}$ für $H = 2000$ m).

118) Genau genommen müßte man die Höhe der Stangen über dem Referenzellipsoid benutzen, aber in erster Annäherung identifizieren wir dies mit dem Geoid (Nr. 7).

119) Vgl. *A. Westphal*, Zeitschr. f. Instr. 5 (1885), p. 257, 333, 373, 420; 8 (1888), p. 189 und 337.

120) Das Thermometerquecksilber muß in möglichst direkter Berührung mit dem Stangenmetall sein. Deshalb bringt man in der Stangenoberfläche Hohlräume an, die mit Quecksilber oder Eisenfeilspänen gefüllt werden; in diese tauchen die Thermometerkugeln ein.

121) *J. C. Borda*, Expériences sur les règles qui ont servi à la mesure des bases (Anhang zu: *Delambre*, Base du système métrique etc., Paris 1806—1810). Neuerdings sind Zweifel an der Genauigkeit der bimetalischen Apparate aufgetaucht, weil die beiden Stangen verschiedene Trägheit gegenüber Temperaturänderungen besitzen. Vgl. *O. Schreiber*, Zeitschr. f. Vermess. 11 (1882), p. 1; *A. Fischer*, Astr. Nachr. 103 (1882), p. 33.

den Apparat aus zwei Stangen von verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten, die an einem Ende verbunden sind, her (Fig. 7). Die Länge b einer der beiden Stangen ist dann eine lineare Funktion der Differenz k der Längen beider (Angabe des Metallthermometers), deren Konstanten durch Vergleich der Stangen mit einem Prototyp bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen sind.



Fig. 7.

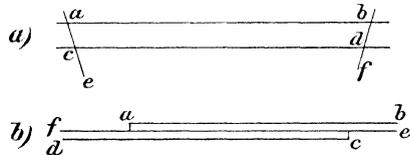


Fig. 8.

Man hat auch *Kompensationsapparate* konstruiert, bei denen zwei Metallstangen mit verschiedenem Ausdehnungskoeffizienten so verbunden sind, daß zwei bestimmte Punkte eine von der Temperatur unabhängige Entfernung besitzen. Die beiden benutzten Apparatypen sind in Fig. 8 schematisch dargestellt. Bei dem ersten (englischer Apparat von *Th. Colby*) gehen die Querstäbe ace und bdf (Fig. 8 a) in Scharnieren und die Entfernungen ce und df sind so gewählt, daß die Strecke ef von der Temperatur unabhängig ist. In Fig. 8 b (nord-amerikanischer Apparat von *C. A. Schott*) sind ab und cd zwei gleich lange Stäbe aus gleichem Material und fe ein Stab aus anderem Material, der mit den beiden ersten bei a und c resp. verbunden ist. Das Verhältnis $ab : ac$ läßt sich so wählen, daß die Entfernung bd konstant ist.

Die Basismessung selbst wurde ursprünglich so ausgeführt, daß die Stangen unmittelbar aneinander geschoben wurden; die Länge der Stange wurde dann durch die Entfernung der beiden Endflächen oder Kanten definiert (*Endmaß*). Später hat man diese Methode verbessert, indem ein kleiner Zwischenraum zwischen den Stangen gelassen wurde, der mit Hilfe eines Keils (*Bessel*) oder Fühlhebels (*F. G. W. Struve*) oder Schiebers (*J. C. Borda*) (slide-contact, *linguetta*) bestimmt wurde, wie Fig. 9 zeigt. Neuerdings ist das dritte System noch durch Anbringung von Feder und Schraube verbessert worden.

Der erste, der Striche auf den Maßstäben anbrachte und ihre Länge durch Entfernung der Striche definierte (*Strichmaß*), war *R. G. Boscovich*¹²²⁾ (Basis auf der Via Appia und bei Rimini, 1751). Er schob dann die Maßstäbe mit kleinem Zwischenraum aneinander (Fig. 10) und

122) Vgl. *A. Westphal*, Zeitschr. f. Instr. 5 (1885), p. 333.

bestimmte die Entfernung ab' mit Hilfe des Zirkels und einer geteilten Skala. *G. B. Beccaria* in Turin¹²³⁾ (1774) und die Mailänder Astronomen (Basis von Somma, 1788) legten die Maßstäbe so, wie es Fig. 11 zeigt (Seitenkontakt). Bei dem Apparate von *Colby* wurde

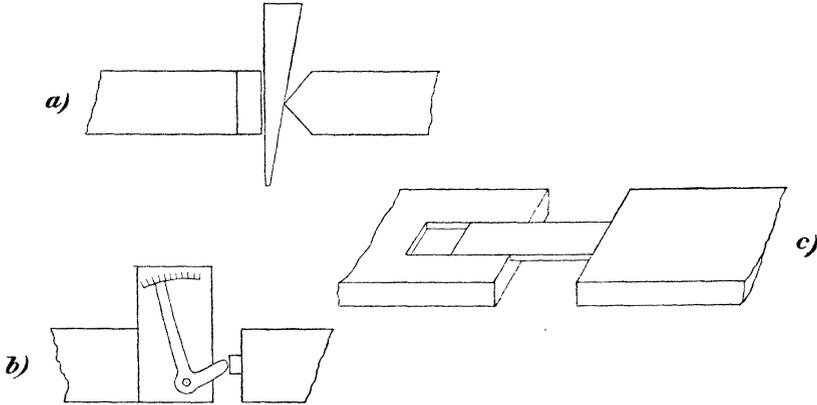


Fig. 9.

ebenfalls ein kleiner Zwischenraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stangenlagen gelassen, der mit Hilfe eines Systems von zwei Mikroskopen mit vertikalen Achsen gemessen wurde. Die Nachteile der



Fig. 10.

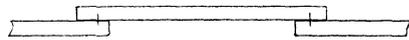


Fig. 11.

direkten oder indirekten Berührung der Stangen werden am besten vermieden bei dem modernen *optischen System*, das kurz folgendes ist (Fig. 12): Eine *einzig*e Meßstange trägt an jedem Ende eine Teilung,

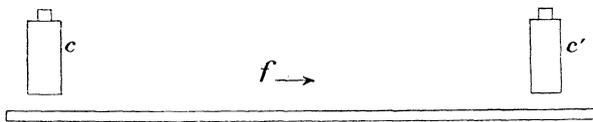


Fig. 12.

auf die, wenn die Stange in der Basis liegt, zwei Mikroskope mit vertikalen Achsen gerichtet werden. Die Mikroskope werden fest auf Böcken, die von denen für die Stange unabhängig sind, aufgestellt, und die mit Hilfe der Stange ermittelte *Entfernung ihrer Achsen*

123) *Ibid.*, p. 336.

bildet ein Element b der Basis (Formel (44)). Indem man dann das Mikroskop c und die Stange im Sinne des Pfeils vorwärts bewegt, mißt man von c' aus ein neues Element der Basis usw. Mit der Erfindung dieser Methode sind die Namen *J. Porro*, *F. R. Haßler*, *J. F. d'Aubuisson* verknüpft; wem die Priorität zukommt, ist nicht sicher¹²⁴).

Geschichtlich sei noch bemerkt, daß anfangs Holzstäbe, z. T. mit metallenen Einsätzen benutzt wurden; *Cassini II.* benutzte zum ersten Mal eiserne Stäbe¹²⁵). Wir lassen hier die Namen einer Anzahl von Basisapparaten mit den zugehörigen Literaturnachweisen folgen (die in Klammern beigesetzten Namen geben mit den Apparaten gemessene Basen an): Apparat von *J. Ramsden*¹²⁶) (Hunslow-Heath in England, 1784); *Borda*¹²⁷) (Melun und Perpignan, 1798—99); *G. von Reichenbach*¹²⁸) (Nürnberg und Speyer, 1807 und 1819); *Th. Colby*¹²⁹) (*Lough-Foyle* in Irland, 1827); *Bessel*¹³⁰) (Königsberg, 1834, und die meisten deutschen und italienischen, außerdem belgische, eine schwedische und eine dänische Basis); *Struve*¹³¹) (Rußland von 1827 an); *J. Porro*, modifiziert von *A. Secchi*¹³²) (Via Appia, 1854—55); *Porro*, modifiziert von *P. Hossard*¹³³) (Algier, 1854—67); *C. Ibañez*, konstruiert von *Brunner*¹³⁴) (Madrid, 1858); *Preuß. geodät. Institut*¹³⁵), dem vorigen fast gleich, (Strehlen, 1879, Berlin, 1880, Bonn, 1892); *Ibañez* vereinfacht¹³⁶) (Spanien, 1865—79, Schweiz, 1880—81); *Repsold-Com-*

124) *E. Hammer*, Zeitschr. f. Vermess. 20 (1891), p. 446; *C. Daviso*, Riv. di topografia 9 (1896), p. 49.

125) *A. Westphal*, Zeitschr. f. Instr. 1885, p. 265.

126) *W. Roy*, London Phil. Trans. 15 (1785), p. 385.

127) Vgl. *Delambre et Méchain* in Fußnote 121.

128) *C. M. von Bauernfeind* und *C. von Orff*, Die Bayerische Landesvermessung, München 1873.

129) *James and Clarke*⁵²), p. 200 ff.

130) *F. W. Bessel* und *J. J. Baeyer*, Gradmessung in Ostpreußen usw., Berlin 1838 (*Bessels* Abhandlgn. 3).

131) *F. G. W. Struve*, Arc du méridien de 25°20' entre le Danube et la mer glaciale mesuré depuis 1816 jusqu'en 1850, sous la direction de *Tenner*, *Selander*, *Hansteen* und *F. G. W. Struve*, St. Pétersbourg 1857—60.

132) *A. Secchi*, Misura della base trigonometrica della Via Appia, Rom 1858.

133) *P. Hossard*, Note sur la mesure des bases (in *L. Francoeur*, Géodésie, 4. éd., Paris 1865).

134) *C. Ibañez et Saavedra*, Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la commission de la carte d'Espagne (Traduction par *A. Laussedat*, Paris 1860).

135) Generalbericht der Europ. Gradmessung 1878—79. Vgl. auch *F. Kühnen* und *R. Schumann*, Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn, Berlin 1897. In dieser Abhandlung findet man einen interessanten Vergleich zwischen den Basisapparaten von *Bessel* und *Brunner*.

*stock*¹³⁷) (Chicago, 1877); *Schott*¹³⁸) (Yolo und Los Angeles in Kalifornien); *Eimbeck*¹³⁹) „Duplex“ (Salt-Lake, 1896)¹⁴⁰); *Woodward*¹⁴¹) in Eis (Holton, 1890).

Wir nennen endlich noch den *Jäderinschen* Apparat¹⁴²), der zwei Drähte von 25 m (oder 50 m) Länge, einen aus Phosphorbronze und einen aus Stahl, enthält, die durch eine Federwage oder durch ein System von Gewichten gespannt werden. Der Apparat ist neuerdings unter Verwendung von Nickelstahldrähten abgeändert worden und scheint in dieser Form eine große Zukunft zu haben¹⁴³).

27. Winkel; ihre Reduktion auf das Ellipsoid. Auf die Messung der Horizontalwinkel gehen wir hier nicht ein, sondern verweisen, soweit ihre Darstellung überhaupt in den Rahmen der Encyclopädie gehört, auf den Artikel über „Niedere Geodäsie“ (VI 1, 1 (*C. Reinherz*)). — Es sei hier nur bemerkt, daß die Kreisablesung an den Winkelmeßinstrumenten bei den Aufgaben der höheren Geodäsie heutzutage immer mit Hilfe von Mikroskopen erfolgt¹⁴⁴).

Ist an einem Beobachtungsort A' der Horizontalwinkel \mathfrak{W}' zwischen B' und C' oder die Differenz der astronomischen Azimute von B' und C' in bezug auf A' gemessen (vgl. Nr. 5), so muß man daraus den Winkel \mathfrak{W} zwischen den geodätischen Linien AB und AC auf

136) Zeitschr. f. Instr. 1885, p. 173. Vgl. auch *C. Koppe*, Der Basisapparat des Generals *Ibañez* und die Aarberger Basismessung, Zürich 1881.

137) *Jordan*, Handbuch 3, p. 90—93.

138) *C. A. Schott*, Description and construction of a new compensation base-apparatus, R. C. G. S. 1882, App. 7. Vgl. auch Zeitschr. f. Inst. 1885, p. 315.

139) *W. Eimbeck*, The duplex base-apparatus etc., R. C. G. S. 1897, App. 11.

140) Das Prinzip des Metallthermometers wird hier nicht auf die einzelne Stangenlage, sondern auf die ganze Basis angewandt (wie in dem später erwähnten *Jäderinschen* Apparate); die Differenz der Messungen mit zwei Metallen dient zur Elimination der Temperatur.

141) *S. Woodward*, On the measurement of the Holton Base etc., R. C. G. S. 1892, App. 8, Teil 2.

142) *E. Jäderin*, Svenska Akad. 9 (1895), Anhang, p. 57; vgl. auch Int. Erdm. 1898, p. 277. Wichtige Versuche über die Verwendung von Nickelstahldräht (Invar) zur Basismessung sind im Internationalen Bureau für Maße und Gewichte in Breteuil gemacht. Vgl. *R. Benoît et Ch. Guillaume*, Les nouveaux appareils pour la mesure des bases géodésiques, Paris 1905. Über neuere Versuche zur Basismessung vgl. auch Int. Erdm. 1903, I. T., p. 186; II. T., p. 84, 90, 293; ferner *A. L. Baldwin*, R. C. G. S. 1901, App. Nr. 3.

143) Um nicht zu sehr auf technische Details bei Basismessungen einzugehen, sprechen wir nicht weiter von der Einflechtung, der Fixierung der Basisenden usw. Über viele Einzelheiten findet man bei *Kühnen* und *Schumann*¹³⁵) Auskunft.

144) Nach *Gore*, Geodesy, p. 139 ist das Mikroskop zur Kreisablesung zum ersten Male von *J. Ramsden* (ungefähr 1787) benutzt.

dem Ellipsoid berechnen¹⁴⁵⁾. Die Punkte A, B, C sind die Schnittpunkte der Vertikalen von A', B', C' mit dem Ellipsoid. — Berücksichtigt man die Formeln (6') in Nr. 11 und (27) in Nr. 17, so ergibt sich:

$$(45) \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}' + \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{2a \operatorname{arc} 1''} \{ h_c \sin 2A_c - h_b \sin 2A_b \} \\ - \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{12a^2 \operatorname{arc} 1''} \{ s_c^2 \sin 2A_c - s_b^2 \sin 2A_b \},$$

wenn h_b, h_c, A_b, A_c die Höhen resp. die Azimute von B und C, s_b, s_c die Entfernungen AB, AC bedeuten. Der zweite Teil dieser Korrektion ist fast immer zu vernachlässigen, der erste wird nur dann merklich, wenn die Meereshöhe der Beobachtungspunkte 500 m übersteigt¹⁴⁶⁾.

28. Triangulation. Einen Punkt B mit einem anderen A geodätisch verbinden heißt: diejenigen geodätischen Messungen ausführen, die notwendig sind, um aus den gegebenen Koordinaten von A (ellipsoidische Länge und Breite) und der Meridianrichtung in A die Koordinaten von B und die Meridianrichtung in B zu bestimmen. Um

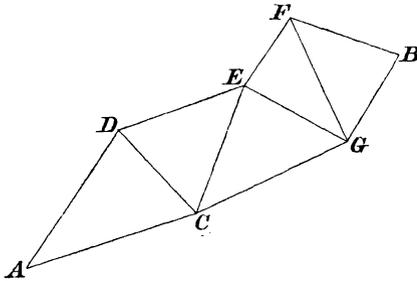


Fig. 13.

die direkte Messung der Entfernung AB zu umgehen, die nur für zehn bis zwanzig Kilometer praktisch ausführbar ist¹⁴⁷⁾, hat *Willebrord Snellius van Roijen* um 1615 die Methode der *Triangulation* erfunden und angewandt. Man wählt bei dieser Methode in der Gegend zwischen A und B eine Anzahl wohl definierter Punkte C, D, E, \dots

(die wir der Einfachheit halber auf dem Ellipsoid gelegen annehmen) und denkt sie sich durch geodätische Linien in der Weise verbunden, daß sie eine *Dreieckskette*

145) Bezüglich der Reduktion der beobachteten Winkel auf das Ellipsoid vgl. u. a. *A. Sonderhof*, Arch. Math. Phys. (*Grunerts Archiv*) 51 (1870), p. 20 und 42.

146) Man müßte noch zweierlei berücksichtigen: 1. die Lotabweichung in A' oder die Abweichung der Ellipsoidnormale von der Lotrichtung in A' ; 2. die Tatsache, daß die Vertikalen von A und A' nicht zusammenfallen. Es ist aber in Nr. 7 gezeigt, daß die Abweichung des Ellipsoids vom Geoid ohne merklichen Einfluß auf die Messung der Horizontalwinkel ist; um so mehr ist der Einfluß der Verschiedenheit der Vertikalen von A und A' zu vernachlässigen.

147) Die längste in neuerer Zeit gemessene Basis ist 14,6 km lang (*Madridjos*); im allgemeinen sind die Basislinien nicht über 10 km lang. Nach *Jordan*, Handbuch 3, p. 103 ist die mittlere Länge der gemessenen Basislinien 6 km.

bilden (Fig. 13). Man mißt nun *eine Seite* und eine genügende Anzahl von Winkeln, um von dem Dreieck aus, dem die gemessene Seite angehört, sämtliche Dreiecke nacheinander auflösen zu können; die Punkte A, C, D, \dots, B sind dann geodätisch unter sich verbunden. Kann man in verschiedener Weise von A nach B übergehen, so nennt man die Gesamtheit der Dreiecke ein *Netz*.

Bei der Auswahl der Dreieckspunkte spielen vor allen Dingen praktische Erwägungen, die sich auf die örtlichen Verhältnisse beziehen, eine Rolle; indessen sind auch einige theoretische Forderungen in bezug auf die beste Gestalt und Dimension der Dreiecke so weit als möglich zu berücksichtigen. Das Problem der besten Gestalt der Dreiecke, d. h. derjenigen Gestalt, bei der die Winkelmeßfehler den geringsten Einfluß auf die geodätische Verbindung haben, kann man nicht allgemein lösen; man kann nur in speziellen Fällen und mit vielen Beschränkungen Lösungen geben¹⁴⁸). Ohne hier auf detaillierte Rechnungen, die von geringer theoretischer und praktischer Bedeutung sind, einzugehen, beschränken wir uns auf die Bemerkung, daß in einem Dreieck, in dem eine Seite und zwei Winkel bekannt sind, der Einfluß der Winkelfehler auf die beiden anderen Seiten (relativ zu diesen Seiten) ungefähr den Kotangenten der gemessenen Winkel proportional ist. Ein kleiner Winkel bedeutet deshalb, wenn er zur Seitenübertragung notwendig ist, eine schwache Stelle in einem Netze und ist darum in einem solchen Falle möglichst zu vermeiden. Von diesem Gesichtspunkt aus ist es vorteilhaft, sich nicht allzusehr von der Gestalt gleichseitiger Dreiecke zu entfernen.

Was die Größe der Dreiecke betrifft, so würde es einerseits zweckmäßig sein, die Netze erster Ordnung aus möglichst wenigen Dreiecken aufzubauen, damit eine möglichst geringe Zahl von beobachteten Winkeln in die Rechnung eingeht; aber andererseits muß man beachten, daß der mittlere Fehler der Winkelmessungen mit der Entfernung der Dreieckspunkte wächst. Speziell kommt hier die sogenannte *Lateralrefraktion* zur Geltung, d. h. die azimutale Ablenkung, welche die Sehstrahlen durch die atmosphärische Refraktion erleiden¹⁵⁰).

*F. Pfaff*¹⁵¹) in Erlangen hat während eines Jahres eine Reihe

148) Rechnungen dieser Art findet man bei *Jordan*, Handbuch 3, § 19, 20 und *Pucci*, Fondamenti 2, cap. VII.

150) Historische Notizen s. bei *A. Fischer*, Der Einfluß der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln, Berlin 1882; *Jordan*, Handbuch 3, p. 135—141.

151) *A. Fischer*¹⁵⁰); die von *C. M. von Bauernfeind* (Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion, 1. Mitteilung, München 1880) ange-

von Winkelmessungen ausgeführt, indem er die Horizontalwinkel zwischen zwei in einer Entfernung von 11 und 19 km gelegenen Punkten und einer benachbarten Mire beobachtete; die gemessenen Winkel ändern sich periodisch und die größte Abweichung beträgt resp. 19" und 18".

A. Fischer hat nach dem Beispiel von W. Struve¹⁵²) das Problem der Änderung des Einflusses der Lateralrefraktion mit der Länge der Visuren praktisch dadurch zu lösen versucht¹⁵³), daß er die Schlußfehler der Dreiecke des „Rheinischen Netzes“ mit der mittleren Länge der Dreiecksseiten verglich. Er kommt zu dem Schluß¹⁵⁴), daß die Entfernung des Objektes an sich nur geringen Einfluß auf die Lateralrefraktion hat. Hiernach und nach anderen statistischen Zusammenstellungen Fischers scheint der Schluß erlaubt, daß die langen Visierstrahlen (länger als 100 km) in bezug auf Genauigkeit¹⁵⁵) keine merklichen Nachteile haben, wenn der Beobachter für das Einschneiden günstige Luft- und Beleuchtungsverhältnisse wählt.

29. Basisnetze oder Vergrößerungsnetze. Das im vorstehenden über die Gestalt der geodätischen Dreiecke Gesagte gilt nicht für diejenigen Netzteile, die zur Vergrößerung der Basis bis zur Länge der gewöhnlichen Dreiecksseiten dienen. Da die Basen selten länger als 10 km und die Dreiecksseiten im allgemeinen länger als 30 km bis zu 100 km hin sind, so muß zunächst ein Dreieckssystem mit wachsenden Seiten an die Basis angeschlossen werden. Der gewöhnlichste Typus der Basisnetze ist der *rhombische* (Fig. 14a). Nach Helmert¹⁵⁶)

stellten Beobachtungen haben nicht mit Sicherheit einen Einfluß der Lateralrefraktion erkennen lassen.

152) Astr. Nachr. 7 (1829), p. 389.

153) Eine theoretische Untersuchung muß sich immer mit der Annahme begnügen, daß die Atmosphäre aus homogenen, durch regelmäßige Flächen (etwa konzentrische Ellipsoide) getrennten Schichten bestehe. Solche Untersuchungen führen zu unmerklichen Resultaten; vgl. *Sonderhof*¹⁴⁵); *Helmert*, H. G. 2, p. 564—565; *Pizzetti*, Torino Acc. Atti 25 (1889), p. 101. In Wirklichkeit ist die Verteilung der Luftschichten in der Nähe des Bodens weit davon entfernt, sich durch eine einfache mathematische Formel darstellen zu lassen.

154) *Fischer*¹⁵⁰), p. 40.

155) Der Grund, daß der Einfluß der Lateralrefraktion nicht sehr mit der Entfernung wächst, scheint darin zu liegen, daß die Gesichtslinien nach sehr entfernten Objekten meistens hoch über dem Boden hinwegziehen und infolgedessen durch gleichmäßig gelagerte Luftschichten hindurchgehen, welche eine seitliche Verschiebung des Lichtstrahls nicht bewirken; vgl. auch *W. Struve*, Gradmessung in den Ostseeprovinzen Rußlands 1, Dorpat 1831, p. 149; *Jordan*, Handbuch 1, p. 550.

156) Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 163.

bekommt man in bezug auf Genauigkeit die günstigste Entwicklung, wenn die Diagonale jedes Rhombus ca. 1,5 mal so groß als die des vorhergehenden ist.

Ein anderer Typus von Basisnetzen (Gitternetz, Fig. 14b) ist der, bei dem die Basis vermittelst eines Systems von annähernd gleichseitigen Dreiecken verlängert wird. Nach *Jordan*¹⁵⁷⁾ erfordert das zweite System eine größere Arbeit an Winkelmessungen, ist aber auch genauer als das rhombische.

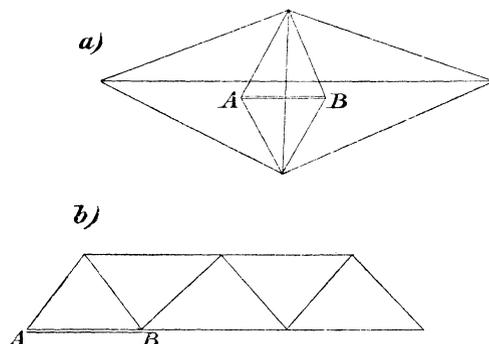


Fig. 14.

30. Berechnung einer Triangulation und der geographischen Koordinaten der Dreieckspunkte. Für eine erste angenäherte Berechnung eines Dreiecksnetzes kann man von allen Korrekturen absehen¹⁵⁸⁾ und die Dreiecke als ebene berechnen. Diese Rechnung liefert angenäherte Werte der Dreiecksseiten. Setzt man dann, wie es notwendig ist, die Breite eines Dreieckspunktes und das Azimut einer Dreiecksseite als bekannt voraus, so kann man rohe Werte für die Breiten sämtlicher Dreieckspunkte und die Azimute der Seiten ermitteln. Am einfachsten verschafft man sich eine angenäherte graphische Darstellung des Netzes. Man bekommt so die notwendigen Daten, um die Korrektionsglieder und die sphäroidischen Exzesse für die einzelnen Dreiecke berechnen zu können.

Nachdem dies erledigt ist, kann man zur *Ausgleichung des Netzes nach der Methode der kleinsten Quadrate* (I D 2, *J. Bauschinger*) übergehen, d. h. zur Berechnung der im Sinne dieser Methode besten Werte der Winkel, die sich aus den Beobachtungen unter Berücksichtigung der geometrischen Bedingungen des Netzes ergeben. Davon wird im folgenden Paragraphen die Rede sein.

Sind die Dreiecksseiten definitiv berechnet, so hat es keine Schwierigkeit mehr, vom Punkte *A* aus, in dem die Koordinaten und

157) Handbuch 3, p. 121.

158) Solche Korrekturen sind z. B. durch die Formel (45) gegeben. Ferner kommt die Reduktion der gemessenen Winkel auf das Zentrum der Station oder des Signals (Zentrierung) in Betracht, wegen der wir auf die niedere Geodäsie verweisen.

das Azimut einer Seite bekannt sind, die geographischen Koordinaten (in bezug auf das Referenzellipsoid) der übrigen Dreieckspunkte zu berechnen. In der Tat, betrachtet man das Polygon $ADEFB\dots$, (Fig. 13) dessen Seiten sämtlich Netzseiten sind, so kann man nach den Methoden von Nr. 13 und 14 die Koordinaten von D und das Azimut von DA in D berechnen; fügt man zu diesem den Winkel ADE (im Sinne der rechtsläufigen Drehung von DA nach DE gezählt) hinzu, so erhält man das Azimut von DE in D usw. Man kann so die Koordinaten und das Azimut schrittweise übertragen.

Wenn man nicht die Koordinaten eines jeden Dreieckspunktes gebraucht, kann man auch anders verfahren. Wenn z. B. die Koordinaten von D und E nicht berechnet zu werden brauchen, so kann man die Dreiecke ADE , AEF auflösen, Seite AF und $\sphericalangle DAF$ berechnen und so direkt die geographischen Koordinaten und das Azimut von A nach F übertragen.

Man kann auch auf das Polygon $ADEF\dots$ die Methoden von Nr. 22 anwenden und die Soldnerschen Koordinaten der verschiedenen Dreieckspunkte berechnen, mit deren Hilfe man dann die geographischen Koordinaten ableitet.

31. Ausgleichung. Die Horizontalwinkelmessungen, die auf jeder Station ausgeführt sind, werden zunächst für sich ausgeglichen (*Stationsausgleichung*), d. h. es werden die plausibelsten Werte der Winkel (oder Richtungen) ermittelt, wenn man die auf einer Station ausgeführten Beobachtungen für sich betrachtet. Die so erhaltenen Werte müssen dann der *Netzausgleichung* unterworfen werden, um die Bedingungsgleichungen, welche die Winkel der verschiedenen Stationen verknüpfen, zu befriedigen. Die Ausgleichung geschieht nach der Methode der *vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen*¹⁵⁹).

Über die Ausgleichung selbst sei noch folgendes bemerkt:

a) *Stationsausgleichung.* Gegenwärtig betrachtet man als beste Methode zur Erledigung einer geodätischen Station die *Winkelmessung in allen Kombinationen*¹⁶⁰, d. h. man mißt für sich sämtliche Winkel,

159) Das allgemeine Problem der vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen wurde in seinen Hauptteilen (mit Ausnahme der Berechnung des mittleren Fehlers) von *Bessel*¹⁵⁹) gelöst. Die Anwendungen auf die Geodäsie wurden vollständig von *C. G. Andrae* (Den Danske Gradmaaling 1, Kopenhagen 1867) und *P. A. Hansen* [Leipzig Abhandlgn. 13 (1865), p. 573] behandelt.

160) In die Praxis ist diese Methode von General *Schreiber* eingeführt worden, dem es außerdem gelang, die Winkelmessungen so auf verschiedene Kreisstände zu verteilen, daß die Mittel möglichst frei von Teilungsfehlern des

die zwei beliebig von der Station ausgehende Richtungen miteinander bilden. Nennt man die Richtungen 1, 2, 3, ..., s , so sind

$$(12)(13) \dots (1s)(23)(24) \dots (2s)(34) \dots (3s) \dots (s-1, s)$$

die $\frac{s(s-1)}{2}$ für sich und mit gleicher Genauigkeit zu messenden Winkel. Bezeichnet man mit $\{1t\}$ den ausgeglichenen Wert des Winkels zwischen den Richtungen 1 und t , so ist:

$$\{1t\} = \frac{1}{s} \{ (11) - (t1) + (12) - (t2) + (13) - (t3) + \dots + (1s) - (ts) \},$$

wobei

$$(rr) = 0, \quad (rt) = - (tr)$$

ist.

Die Gewichtskoeffizienten sind:

$$[\alpha\alpha] = \frac{2}{s}, \quad [\alpha\beta] = [\alpha\gamma] = \dots = 0,$$

$$[\beta\beta] = \frac{2}{s}, \quad [\beta\gamma] = 0, \text{ usw.}$$

Den mittleren Fehler der Gewichtseinheit kann man nach der Formel:

$$m = \sqrt{\frac{2[vv]}{(s-1)(s-2)}}$$

berechnen, wo v die Verbesserungen der $\frac{s(s-1)}{2}$ gemessenen Winkel sind.

Hansen nimmt an Stelle der Winkel die Richtungen¹⁶¹⁾ als Unbekannte an, d. h. die Winkel, welche die Gesichtslinien mit einer willkürlich fixierten Richtung auf jeder Station bilden. Nennt man $[1], [2], \dots, [s]$ die ausgeglichenen Werte der Richtungen, so ist:

$$[r] = -\frac{1}{s} \{ (r1) + (r2) + \dots + (rs) \}$$

und die Gewichtskoeffizienten sind:

Kreises erhalten werden. Vgl. *O. Schreiber*, Die Kgl. Preussische Landestriangulation, 2. Teil, Berlin 1874; *Zeitschr. f. Vermess.* 7 (1878), p. 209 und 8 (1879), p. 97. Er sagt, daß nach der Erfahrung die größere Schnelligkeit, welche die Methode der Beobachtung von Sätzen bietet, illusorisch ist und daß bei gleicher Mühe die Methode der Winkelbeobachtungen genauer ist. Vgl. auch *P. A. Hansen*, Fortgesetzte geodät. Untersuchungen, Leipzig 1868—69; *Jordan*, Handbuch 1, p. 259 ff.; *N. Jadanza*, Torino Acc. Atti 33 (1898), p. 883; mit Verbesserung *ibid.* 34 (1899), p. 698; *C. Bremiker*, Astr. Nachr. 89 (1877), p. 65; *L. D. Bache*, R. C. G. S. 1854, App. 33.

161) Wegen des Vergleichs von Winkel- und Richtungsmessungen s. auch *Jordan*, Handbuch 1, p. 230 u. 276.

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{s}, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & \frac{1}{s}, & 0, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Wenn man an Stelle der Winkelbeobachtungen die Methode der *Satzbeobachtungen* befolgt, so geht die Stationsausgleichung anders vor sich. — Bei einer bestimmten Stellung des Horizontalkreises schneidet man nacheinander die Punkte 1, 2, ..., s ein und liest die entsprechenden Kreisstellungen l_1, l_2, \dots, l_s ab; man hat so einen Beobachtungssatz erhalten. Bezeichnet man mit k den Winkel, den die Richtung 1 mit der der Ablesung 0^0 entsprechenden Richtung macht und mit X, Y, Z, \dots die Winkel, welche die Richtungen 2, 3, 4, ... mit 1 bilden, so hat man die Fehlergleichungen:

$$k - l_1 = v_1, \quad k + X - l_2 = v_2, \quad k + Y - l_3 = v_3 \text{ usw.}$$

Jeder neue Satz mit einer neuen Limbusstellung gibt ein neues System analoger Gleichungen, in denen an Stelle von k eine neue Unbekannte k' auftritt. So liefern r Sätze sr Gleichungen (wenn jeder Satz vollständig ist, was im allgemeinen nicht zutrifft) zwischen $r + s - 1$ Unbekannten, aus denen man mit Hilfe der Normalgleichungen die Werte X, Y, Z, \dots und die Gewichtskoeffizienten ableitet. Diese Methode stammt von *Bessel*¹⁶²⁾.

b) *Netzausgleichung*. Wieviel Bedingungsgleichungen bestehen zwischen den Elementen eines Netzes? Um die *relative* Lage von n Punkten auf einer Fläche zu bestimmen, muß man $2n - 3$ Stücke (Entfernungen oder Winkel, *eine* Entfernung mindestens) messen; jedes weitere gemessene Stück läßt sich als Funktion dieser $2n - 3$ Stücke darstellen und liefert so eine Bedingungsgleichung. Sind B Basislinien und M Winkel in einem Netz von n Punkten gemessen, so ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen deshalb:

$$(48) \quad M + B - 2n + 3.$$

Man teilt diese Bedingungsgleichungen in drei Kategorien¹⁶³⁾:

162) Gradmessung in Ostpreußen, Abhandl. 3, p. 89. Wegen der Ausgleichung von Sätzen vgl. auch *James and Clarke*⁵²⁾, p. 62; *Ch. A. Vogler*, Zeitschr. f. Vermess. 14 (1885), p. 49; *F. R. Helmert*, *ibid.*, p. 263.

163) Die Zahl der Polygon- und Seitengleichungen ist von *C. F. Gauß* bestimmt; vgl. die Briefe an *Gerling* vom 5. Juni 1838 und 14. Nov. 1838, Werke 9, p. 323; s. a. p. 297. Die bezüglichen Formeln von *Gauß* sind von *Ch. L. Gerling* publiziert und bewiesen in: Die Ausgleichsrechnungen der praktischen Geometrie, Hamburg 1843. *Gauß* macht keinen Unterschied zwischen

1. *Winkelgleichungen*; diese sagen aus, daß die Winkelsumme eines geodätischen Polygons von r Seiten gleich $2(r-2)R$ ist, vermehrt um den sphäroidischen Exzeß. Ist die Zahl der Stationen n' und l' die Zahl der von beiden Seiten beobachteten Linien, so ist die Zahl der Winkelgleichungen:

$$(49) \quad l' - n' + 1.$$

2. *Seitengleichungen*. Um n Punkte miteinander zu verbinden, muß man außer einer direkten Längenmessung die relativen Richtungen von $2n - 3$ Linien zwischen diesen Punkten bestimmen; die Richtung jeder anderen Linie, die zwei von diesen Punkten verbindet, ist dann bestimmt. Wenn deshalb die Richtungen von l Linien beachtet sind, so hat man

$$(50) \quad l - 2n + 3$$

Bedingungsgleichungen, die man Seitengleichungen nennt.

3. *Basisgleichungen*¹⁶⁴). Da eine Basismessung genügt, so ergeben sich, wenn B Basislinien gemessen sind:

$$(51) \quad B - 1$$

Bedingungsgleichungen, die *Basisgleichungen* heißen.

Man verifiziert leicht, daß die Summe von (49), (50), (51) gleich (48) ist, da $M = l + l' - n'$.

Die Aufstellung der Winkel- und Basisgleichungen bietet keine Schwierigkeit. — Bei den Seitengleichungen kann man drei Typen unterscheiden:

1. *Viereck mit seinen beiden Diagonalen*. Man hat (Fig. 15a):

$$(52) \quad \begin{aligned} & \sin(CBA) \sin(DCA) \sin(ADB) \\ & = \sin(ACB) \sin(ADC) \sin(DBA). \end{aligned}$$

Nennt man l_1, l_2, \dots, l_6 die beobachteten Werte der sechs in der vorstehenden Formel auftretenden Winkel und (1), (2), (3), \dots , (6) die unbekanntenen Korrekturen (in Sekunden), so kann man Gleichung

den nur von einer und den von beiden Seiten beobachteten Linien; *Jordan*, Handbuch 1, gibt die Formeln mit Berücksichtigung dieses Unterschiedes. Vgl. auch *James and Clarke*⁵²), p. 277f.; *F. R. Helmert*, Die Ausgleichsrechnung usw., Leipzig 1872, p. 325; *B. v. Prodzynski*, Astr. Nachr. 75 (1869), p. 81.

164) Um die Rechnungen nicht zu komplizieren, geht man bei der Ausgleichung eines Netzes gewöhnlich von einer Basis aus, ohne die Basisgleichungen zu berücksichtigen. Eine angenäherte Methode, um dann den Grundlinienanschlüssen Rechnung zu tragen, ist angegeben und angewandt in: *A. Börsch* und *L. Krüger*, Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite 2, Berlin 1896, p. 21—30.

(52) (mit Vernachlässigung der Quadrate der Korrekturen) schreiben:

$$(1)\Delta_1 + (2)\Delta_2 + (3)\Delta_3 - (4)\Delta_4 - (5)\Delta_5 - (6)\Delta_6 + W = 0,$$

wo

$$W = \log \sin l_1 + \log \sin l_2 + \log \sin l_3 \\ - \log \sin l_4 - \log \sin l_5 - \log \sin l_6$$

ist und Δ_r die Änderung von $\log \sin l_r$ bei der Änderung von l_r um 1'' bedeutet. Sind in einem Viereck mit den Diagonalen je zwei Winkel an allen 4 Ecken gemessen, so kann man der Seitengleichung

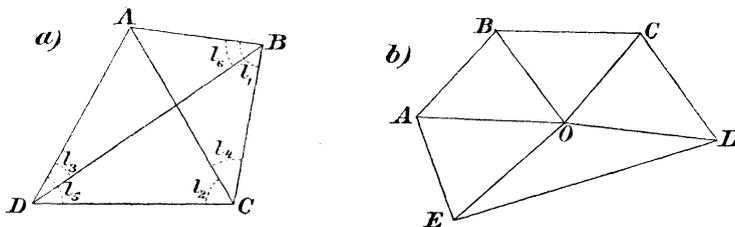


Fig. 15.

4 gleichberechtigte Formen geben. Für die Rechnung ist es am vorteilhaftesten, bei der Aufstellung der Seitengleichung diejenige Ecke des Vierecks auszuzeichnen, der die größte Dreiecksfläche gegenüber liegt^{164 a)}.

2. Geschlossenes von einem Punkte projiziertes Polygon (Zentral-system) (Fig. 15b). Man hat im System der Dreiecke OAB , OBC , ..., OEA die Gleichung:

$$\sin OBA \sin OCB \sin ODC \sin OED \sin OAE \\ = \sin BAO \sin CBO \sin DCO \sin EDO \sin AEO,$$

die man in ähnlicher Weise wie (52) transformieren kann¹⁶⁵⁾.

3. Außer diesen beiden gewöhnlichen Fällen von Bedingungsgleichungen hat man noch einen weniger einfachen Fall, der bei der Betrachtung eines Netzes, das sich um ein geschlossenes Polygon hinzieht (Fig. 16) (*Kranzsystem*)¹⁶⁶⁾, auftritt. — Wir nennen ein Netz,

164*) G. Zachariae, Die geodätischen Hauptpunkte usw., Berlin 1878, p. 152; Jordan, Handbuch 1, p. 299; C. F. Gauß, Werke 9, p. 245, 249, 325.

165) Bei dieser und der Formel des vorhergehenden Falles nimmt man an, daß die Winkel bereits um $\frac{1}{8}$ des sphäroidischen Exzesses korrigiert seien. Strengere Formeln, bei denen die Krümmungsdifferenz in den drei Eckpunkten des Dreiecks berücksichtigt wird, sind von C. H. Kummell gegeben [Astr. Nachr. 89 (1877), p. 49].

166) Die Bedingungsgleichungen für ein Kranzsystem sind bereits von C. F. Gauß aufgestellt, wie aus seinem Nachlaß hervorgeht, Werke 9, p. 320

in dem nur Seitengleichungen des ersten oder zweiten Typus auftreten, ein *gewöhnliches* Netz. Deformiert man ein solches Netz in der Weise, daß zwei äußere Dreieckspunkte mit zwei anderen zusammenfallen, so entsteht ein Kranzsystem. Die Zahl der Linien im deformierten Netz ist um 1 geringer als im ursprünglichen Netz, die Zahl der Dreieckspunkte um 2. Erinnert man sich an (48) und (50), so sieht man, daß im Kranzsystem, wenn die Zahl der gemessenen Stücke unverändert bleibt, vier Bedingungsgleichungen mehr als im gewöhnlichen Netz auftreten; von diesen sind drei Seitengleichungen und eine Winkelgleichung.

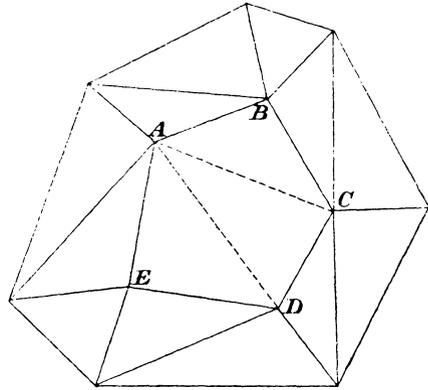


Fig. 16.

Die letzte bezieht sich auf die Winkelsumme in dem inneren Polygon $ABCDE$. Um die anderen drei zu erhalten, stellt *C. F. Gauß* erstens die Bedingung auf, daß die Länge einer Netzseite, wenn man durch das Netz hindurch rechnet, sich unverändert ergibt, und zweitens die Bedingungen, daß die Koordinaten eines Netzpunktes denselben Wert erhalten, wenn man auf irgend einem von den Seiten des Kranzsystems gebildeten Linienzuge zu ihm zurückkehrt.

Bezüglich der Netzausgleichung ist noch der folgende Satz von *O. Schreiber* erwähnenswert¹⁶⁷⁾: Wenn in einem Dreiecksnetze mit

—339 (s. a. die Bemerkungen von *L. Krüger* dazu). Der Publikationszeit nach stammt die erste Methode zur Ausgleichung der Kranzsysteme von *B. v. Prodzynski*, *Astr. Nachr.* 71 (1868), p. 145. Ferner hat *O. Börsch*, *Astr. Nachr.* 71 (1868), p. 266, eine Methode angegeben. Ein anderer Weg zur Behandlung des Problems ist von *O. Schreiber* eingeschlagen, der rechtwinklige geodätische Koordinaten benutzte (*Kgl. Preuß. Landestriangulation, Hauptdreiecke*, 1. Teil, Berlin 1870). Vgl. auch *L. Krüger*, *Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen*, Potsdam 1898, p. 29—30.

167) *O. Schreiber*, *Zeitschr. f. Vermess.* 11 (1882), p. 129. Es sei n die Zahl der Unbekannten und r die Zahl der Bedingungsgleichungen. Das Theorem von *Schreiber* läuft dann in Wirklichkeit auf die Beschränkung der Beobachtung auf die $n - r$ unumgänglich notwendigen Unbekannten hinaus, d. h. auf die Abschaffung der Ausgleichung. Aber es ist zu bemerken, daß zur Bestimmung einer Funktion F die eine oder andere Wahl der zu messenden Unbekannten keineswegs gleichgültig ist. Wählt man die $n - r$ Unbekannten beliebig, was auf $\binom{n}{r}$ verschiedene Arten möglich ist, so wird der mittlere Fehler von F im

Bedingungsgleichungen eine Seite mit möglichst großem Gewicht, bei konstanter Summe $[p]$ der Winkelmessungsgewichte p_1, p_2, \dots bestimmt werden soll, so ist unter den hierzu möglichen Verteilungen der Gewichte p_1, p_2, \dots jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte p wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung jener einen Seite unumgänglich nötigen Winkel beträgt, während die übrigen Gewichte p alle gleich Null zu setzen sind.

32. Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. *Helmert*¹⁶⁸⁾ hat zur Ausgleichung einer Triangulation eine andere speziell für große Netze zweckmäßige Methode angegeben. Er nimmt an, daß mit Hilfe der unkorrigierten Triangulationsdaten provisorische Werte für die Längen und Breiten der Dreieckspunkte und die Azimute der Dreiecksseiten berechnet seien, und führt dann die Verbesserungen dieser Größen als Unbekannte ein.

Wenn die Enden i und k eines geodätischen Bogens die infinitesimalen Änderungen $\delta\varphi_i, \delta\varphi_k$ in Breite und $\delta\omega_i, \delta\omega_k$ in Länge erleiden, so erfährt das Azimut α_{ik} der geodätischen Linie im Punkte i die Änderung¹⁶⁹⁾:

$$(53) \quad \delta\alpha_{ik} = \frac{a}{m_{ik}} \left\{ -\frac{1-e^2}{W_i^3} \left(\frac{dm}{ds} \right)_{ki} \sin\alpha_{ik} \delta\varphi_i - \frac{1-e^2}{W_k^3} \sin\alpha_{ki} \delta\varphi_k \right. \\ \left. + (\delta\omega_i - \delta\omega_k) \frac{\cos\varphi_k}{W_k} \cos\alpha_{ki} \right\}, \\ (W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}),$$

wo m_{ik} die reduzierte Länge des Bogens (ik) nach *Christoffel* (Nr. 16) ist.

Es sei nun $\bar{\alpha}_{ik}$ das provisorisch berechnete Azimut der Richtung (ik) im Punkte i , ferner u_i der Orientierungsfehler der Beobachtungen einer Station (bei Beobachtungen mehrerer Sätze auf einer Station

allgemeinen beträchtlich größer sein, als wenn man die Beobachtungen auf sämtliche Unbekannte verteilt und ausgleicht. Über die Regeln für eine geeignete Auswahl, die praktisch zu großen Komplikationen führt, vgl. *Jordan*, Handbuch 1, p. 144. Aber auch unabhängig von dieser Schwierigkeit ist zu beachten, daß ein System von Winkelmessungen im allgemeinen nicht zur Bestimmung einer, sondern mehrerer Funktionen dient. Eine für die Bestimmung einer Funktion passende Wahl der Unbekannten wird dann aber im allgemeinen für die anderen Funktionen nicht passen. Es wird daher trotz des Satzes von *Schreiber* im allgemeinen die Messung überschüssiger Größen und nachfolgende Ausgleichung von Nutzen sein. Allgemeinere Untersuchungen hierüber findet man bei *H. Bruns*, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, Leipzig 1886.

168) H. G. 1, p. 495—512.

169) *Helmert*, H. G. 1, p. 282. Man erhält diese Formel aus den Differentialformeln von *E. B. Christoffel* (vgl. Ende von Nr. 18).

ist für jeden Satz ein besonderes u einzuführen). Bezeichnet man dann mit l_{ik} den beobachteten Wert der Richtung (ik) und mit v_{ik} die plausibelste Verbesserung, so ergibt sich die Fehlergleichung:

$$(54) \quad \bar{\alpha}_{ik} + \delta\alpha_{ik} = l_{ik} + u_i + v_{ik},$$

in der man für $\delta\alpha_{ik}$ den Wert (53) zu substituieren hat. Diese und analoge Gleichungen für die übrigen Richtungen der Station i und für die anderen Stationen werden nach der Methode der *vermittelnden Beobachtungen* behandelt. Ist n die Zahl der Dreieckspunkte, n' die Zahl der Stationen, so hat man:

$n' - 1$ Unbekannte u und $2(n - 1)$ Unbekannte $\delta\varphi$, $\delta\omega$, zusammen also $n' + 2n - 3$ Unbekannte (da man auf der Ausgangsstation $\delta\varphi = \delta\omega = u = 0$ annehmen kann).

Jede gemessene Basis liefert eine Gleichung:

$$\bar{s}_{ik} - s_{ik} + \alpha \left\{ \frac{1 - e^2}{W_i^3} \cos \alpha_{ik} \delta\varphi_i + \frac{1 - e^2}{W_k^3} \cos \alpha_{ki} \delta\varphi_k + (\delta\omega_i - \delta\omega_k) \frac{\cos \varphi_k}{W_k} \sin \alpha_{ki} \right\} = 0,$$

in der \bar{s}_{ik} die mit den provisorischen Werten $\bar{\varphi}_i$, $\bar{\varphi}_k$, $\bar{\omega}_i$, $\bar{\omega}_k$ berechnete Länge des Bogens (ik) bedeutet. Die vorstehende Gleichung wird wegen der geringen Messungsfehler der Basismessungen nicht als Fehlergleichung, sondern als Bedingungsgleichung (rechte Seite Null) behandelt; die Basismessungen werden also streng befriedigt.

Nimmt man B Basislinien und R Richtungen als gemessen an (und wie üblich die Koordinaten und das astronomische Azimut in einem Punkte als bekannt), so hat man $R + B$ Gleichungen und folglich

$$R + B - (n' + 2n - 3)$$

Bedingungen, was mit (48) stimmt, da $M = R - n'$ ist¹⁷⁰⁾.

170) Ausser den bereits zitierten Werken vgl. über Netzausgleichung noch: *A. M. Nell*, *Schleiermachers Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetze*, Z. f. Vermess. 10 (1881), p. 1 und 109 (ehe die Normalgleichungen gebildet werden, werden aus den Korrelatengleichungen soviel Korrelaten eliminiert als Winkelgleichungen vorhanden sind); Z. f. Vermess. 12 (1883), p. 313; *C. Haupt*, *Astr. Nachr.* 109 (1884), p. 7; *P. Simon*, *Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse usw.* Berlin 1889; *L. Krüger*, *Astr. Nachr.* 133 (1893), p. 153; *F. R. Helmert*, *ibid.* 134 (1894), p. 281 und in: *Die Europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite*, Heft 1, Berlin 1893, p. 33—50; *L. Krüger*, *Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen*, Potsdam 1898; *Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen*, Potsdam 1905; *Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze*, Potsdam 1906.

33. Genauigkeit der Basis- und Winkelmessungen. Wir werden hier einige summarische Notizen und Literaturnachweise über die Genauigkeit der Triangulationen geben.

Basismessungen. Den zusammengesetzten mittleren Fehler bei der Messung einer Basis von der Länge l km kann man durch

$$\sqrt{A^2 l^2 + B^2 l}$$

darstellen, wo A der mittlere *systematische* und B der mittlere *zufällige* Fehler (für 1 km) ist. Der mittlere Fehler A hängt hauptsächlich von den benutzten Instrumenten¹⁷¹⁾ und von den Mängeln der Vergleichen der Stange mit dem Normalmaß ab. Um B zu bestimmen, teile man die Basis in n Abschnitte von der Länge l_1, l_2, \dots, l_n und messe jeden Abschnitt zweimal. Sind d_1, d_2, \dots, d_n die Differenzen zwischen den Hin- und Rückmessungen, so kann man setzen¹⁷²⁾:

$$B = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum \frac{d^2}{l}}.$$

Der eigene Fehler der Basismessung ist aber immer viel kleiner als der, der aus dem Vergrößerungsnetz entspringt (Nr. 29), so daß es nach *A. Ferrero*¹⁷³⁾ zweckmäßig ist, den mittleren Fehler der *berechneten Basis* anzugeben, d. h. der ersten Seite im Dreiecksnetz erster Ordnung, die mit Hilfe des Vergrößerungsnetzes aus der gemessenen Basis abgeleitet ist. Der mittlere Fehler der *berechneten Basis* liegt im allgemeinen zwischen $\frac{1}{200\,000}$ und $\frac{1}{100\,000}$ und ist vier- bis fünfmal so groß wie der mittlere Fehler der direkten Messung¹⁷⁴⁾.

Winkelmessungen. Eine erste Genauigkeitsschätzung für die Winkelmessungen gewinnt man aus den *mittleren Fehlern der Stationsausgleichungen*. Dabei bleiben aber gewisse systematische Fehler (wie z. B. Lateralrefraktion), die man durch Vergleich der auf den verschiedenen Stationen gemessenen Winkel erhält, verborgen. Deshalb leitet man auf die einfachste Weise den mittleren Winkelfehler nach der *Ferreroschen Formel*¹⁷⁵⁾

$$(A) \quad m = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{3n}}$$

ab, wo n die Zahl der Dreiecke, in denen alle drei Winkel gemessen sind, bedeutet und $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ihre *Schlußfehler*. Die Formel (A)

171) Bezüglich der Fehler bei Basismessungen vgl. *Kühnen* und *Schumann*¹⁸⁵⁾.

172) S. z. B. *Jordan*, Handbuch 2, p. 55.

173) Intern. Erdm. 1892, Rapport sur les triangulations, p. 7.

174) Intern. Erdm. 1898, Rapport sur les triangulations, p. XXVI—XXXV; 1903, II. Teil, p. 294.

175) Intern. Erdm. 1887.

berücksichtigt die Netzbedingungen nicht und ist deshalb nur als Näherungsformel aufzufassen; sie empfiehlt sich aber durch ihre Einfachheit¹⁷⁶). *L. Krüger*^{176a}) hat sich mit einem Vergleich der Formel (A) und der aus der Ausgleichung hervorgehenden in folgenden Fällen beschäftigt:

- a) Zentralsystem (vgl. Nr. 31) mit unabhängigen Winkelbeobachtungen der drei Winkel eines jeden Dreiecks.
- b) Zwei Zentralsysteme, die durch zwei gemeinsame Dreiecke zusammenhängen, mit Winkelbeobachtungen.
- c) Einfache Kette mit unabhängigen Richtungsbeobachtungen.
- d) Fälle a) und b) mit unabhängigen Richtungsbeobachtungen von gleichem Gewicht.
- e) Polygon, in dem die Richtungen aller Seiten und Diagonalen beobachtet sind (Richtungsbeobachtungen von gleichem Gewicht).
- f) Doppelkette, die von einer Reihe vollständiger Vierecke gebildet ist.

Aus den beigebrachten Beispielen geht hervor, daß in den meisten Fällen die Formel (A) einen zu kleinen mittleren Fehler liefert. Nur im Falle e), wenn man nur die *Winkelgleichungen* berücksichtigt, führt die Ausgleichung zu demselben Wert von m wie (A).

Man kann im Mittel m gleich 1" setzen. Die beste Bestimmung des mittleren Winkelfehlers erhält man aus der gesamten Ausgleichung des Netzes und der Stationen¹⁷⁷); der auf diese Weise gefundene mittlere Fehler ist im allgemeinen etwas größer als aus Formel (A) folgt.

Genauigkeit der geodätischen Verbindung. Ein Mittel zur Schätzung des Einflusses der Winkelfehler auf die geodätische Verbindung besteht in dem Vergleich zweier direkt gemessener Basislinien, die durch eine Triangulation verbunden sind. Sind b_1, b_2 die gemessenen Längen der durch n Dreiecke verbundenen Basislinien und nennt man

$$A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$$

geeignete gewählte Winkel, so müßte man haben:

$$(55) \quad \log b_2 - \log b_1 = \sum \log \sin A_r - \sum \log \sin B_r.$$

Wir nennen nun die beobachtete Differenz zwischen den beiden Seiten von (55), wobei A_r, B_r die aus der Netzausgleichung abgeleiteten Werte sind, kurz Mißstimmigkeit der beiden Basislinien. Diese kann

176) Vgl. die Tabelle der nach Formel (A) berechneten mittleren Fehler für die verschiedenen Triangulationen in Intern. Erdm. 1898, Rapport sur les triangulations, p. VI.

176*) Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 157.

177) Intern. Erdm. 1898, Rapport sur les triangulations, p. XIII.

1) von den Fehlern der Basismessung selbst, 2) von den Fehlern in den Vergrößerungsnetzen und 3) von den Fehlern des Verbindungsnetzes verursacht werden. Im folgenden sind einige Mißstimmigkeiten von Basispaaren in Einheiten der siebenten Dezimale des Logarithmus zusammengestellt¹⁷⁸⁾.

	δ	M		δ	M
Ostende—Lommel	+ 32	\pm 46	Berlin—Königsberg	— 23	\pm 32
Lommel—Bonn	+ 38	\pm 31	Königsberg—Strehlen	— 23	\pm 35
Bonn—Göttingen	— 12	\pm 14	Strehlen—Czenstochau	+ 4	\pm 34

δ ist die beobachtete Mißstimmigkeit und M die a priori aus den mittleren Fehlern der berechneten Basislinien gefundene mittlere Mißstimmigkeit; in M gehen die Fehler des Verbindungsnetzes also nicht ein. Daß δ größtenteils kleiner als M herauskommt, ist wohl Zufall¹⁷⁹⁾; aber es beweist doch, daß in den betrachteten Beispielen das Verbindungsnetz die Ungenauigkeit der geodätischen Verbindung kaum vergrößert¹⁸⁰⁾.

Es ist bis jetzt nicht möglich, numerisch den Genauigkeitsgrad einer geodätischen Verbindung anzugeben. Nur soviel kann man sagen, daß 1) die Hauptfehlerquelle das Vergrößerungsnetz ist und daß 2) der aus dem Verbindungsnetz herrührende Fehler kleiner ist als man ihn nach den aus der Netzausgleichung resultierenden mittleren Fehlern erwarten sollte¹⁸¹⁾. Diese Ausgleichung trägt deshalb wahrscheinlich zur Elimination gewisser systematischer Fehler bei, deren Wirkung sich in den Widersprüchen der Bedingungsgleichungen zeigt.

C. Höhenmessung.

34. Trigonometrisches Nivellement. Es mögen A und B (Fig. 17) zwei Punkte der Erdoberfläche sein, h_a und h_b ihre Höhen über dem Referenzellipsoid. Die Differenz $h_b - h_a$ kann dann annäherungsweise mit Hilfe der Messung einer oder der beiden scheinbaren Zenitdistanzen ξ_1 , ξ_2 bestimmt werden. Die durch B gehende Normalebene in A möge die Ellipsoidoberfläche längs $A'B'$ schneiden;

178) Ibid. Tableau II und III. Man bemerke, daß 10 Einheiten der siebenten Stelle des Logarithmus ungefähr einem prozentualen Fehler von $\frac{1}{494\,000}$ entsprechen.

179) Ganz anders ist es bei der russischen Triangulation, wo M noch nicht ± 50 erreicht, während die beobachtete Mißstimmigkeit bis zu 2609 Einheiten geht.

180) Das folgt in anderer Weise auch aus den Rechnungen von *Helmert*¹⁷⁰⁾, p. 244.

181) Intern. Erdm. 1898, Rapport sur les triangulations, Tableau III.

Setzt man $r_1 \Gamma = s_1 =$ der horizontalen Entfernung¹⁸²⁾ zwischen A und B im Niveau des Punktes A gemessen, so wird:

$$(58) \quad \begin{aligned} h_b - h_a &= s_1 \cotg \xi_1 + \frac{s_1 \Gamma}{2} \left\{ \cotg^2 \xi_1 + \frac{1 - n_1}{\sin^2 \xi_1} \right\} \\ &+ \frac{s_1 \Gamma^2}{6} \cdot \frac{\cotg \xi_1}{\sin^2 \xi_1} \left\{ \cos^2 \xi_1 + (1 - n_1)(5 - 2n_1) - n_1' r_1 \right\}. \end{aligned}$$

Vernachlässigt man hierin die Glieder dritter Ordnung und das (meistens zu vernachlässigende) Glied

$$\frac{s_1 \Gamma}{2} \cotg^2 \xi_1,$$

so reduziert sich diese Entwicklung auf die einfache Form

$$(58') \quad h_b - h_a = s_1 \cotg \left(\xi_1 - \frac{1 - n_1}{2r_1} s_1 \right),$$

oder auch, wenn man beachtet, daß ξ_1 in praxi wenig verschieden von 90° ist:

$$(58'') \quad h_b - h_a = s_1 \cotg \xi_1 + \frac{1 - n_1}{2r_1} s_1^2.$$

Diese Formeln¹⁸³⁾ werden gewöhnlich bei dem trigonometrischen Nivellement gebraucht.

Man sieht leicht, daß man zu derselben Formel gelangen würde, wenn man den Visierstrahl als geradlinig voraussetzt und die Zenithdistanz in A gleich $\xi_1 + \frac{n}{2} \Gamma$, wenn man also annimmt, daß der Lichtstrahl in A den Winkel $\frac{n}{2} \Gamma$ mit der Sehne AB bildet.

Betrachtet man i als Funktion von γ und entwickelt nach *Taylor*, so ergibt sich:

$$(59) \quad 180^\circ - \xi_2 = \xi_1 + \Gamma(n_1 - 1) + \frac{\Gamma^2}{2} n_1' r_1 \cotg \xi_1 + \dots$$

Wenn man in (58) die Glieder dritter Ordnung vernachlässigt, was darauf hinausläuft, daß man die Kurve AB durch den Berührungskreis in A oder B ersetzt, so kann man auch in (59) die Glieder mit Γ^2 vernachlässigen, und es ergibt sich

$$(60) \quad n_1 \Gamma = 180^\circ - \xi_1 - \xi_2 + \Gamma,$$

182) *Helmert* (H. G. 2, p. 555) gibt die Entwicklung bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschl. Vergl. auch: *Pucci*, Fondamenti, cap. VI.

183) Abgesehen von kleinen Unterschieden in der Form, findet man Formel (58'') bei *Laplace*, Méc. céleste, 4, p. 279. Für die Größe n_1 ist dort ihr Ausdruck als Funktion der meteorologischen Daten gesetzt. Dieselbe Formel findet man in alten und neuen Lehrbüchern der Geodäsie, z. B. *L. Puissant*, Traité de géodésie 1, chap. XX.

35. Der Refraktionskoeffizient als Funktion d. atmosphärischen Verhältnisse. 197

womit gezeigt ist, daß $n\Gamma$ in dieser Annäherung die totale Refraktion DEB ist. Die Größe n (das Verhältnis zwischen der totalen Refraktion und der Winkelgröße des Erdbogens $A'B$) nennt man den *Refraktionskoeffizienten*.

Die Formel (60) zeigt, wie n_1 zu berechnen ist, wenn die beiden gegenseitigen Zenitdistanzen ξ_1, ξ_2 gemessen sind. In diesem Falle¹⁸⁴) kann man indessen die Niveaudifferenz bequemer ohne die Berechnung von n_1 erhalten. Denn setzt man $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EBA = \Delta$, so ergibt sich aus dem Dreieck ACB :

$$\xi_1 + \xi_2 + 2\Delta = 180^\circ + \Gamma,$$

$$h_b - h_a = \frac{2r_1 \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}} = s_1 \operatorname{tg} \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} + \frac{s_1^2}{2r_1} \operatorname{tg}^2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}.$$

Da der Refraktionskoeffizient mit den atmosphärischen Verhältnissen sich ändert, müssen die beiden gegenseitigen Zenitdistanzen gleichzeitig gemessen werden. Die aus den klassischen Arbeiten über Höhenmessung abgeleiteten Werte des Koeffizienten n sind¹⁸⁵):

(1736) <i>P. L. M. de Maupertuis</i> (Lapland)	$n = 0,1053$
(1751) <i>T. Mayer</i> (Frankreich)	1250
(1792) <i>J. B. J. Delambre</i> (ebenda)	1678
(1821—25) <i>C. F. Gauß</i> (Hannover)	1306
(1831) <i>F. G. W. Struve</i> (Russ. Ostseeprovinzen)	1237
(1834) <i>F. W. Bessel</i> (Ostproußen)	1370
(1849) <i>J. J. Baeyer</i> (Küstenvermessung)	1300
(1858) <i>H. James</i> und <i>A. R. Clarke</i> (England)	1587
(1870—75) Preußische Landesaufnahme	1180

Mittel 0,1322

Wenn man die Annäherung, die Formel (60) entspricht, nicht für genügend hält, so muß man die Glieder berücksichtigen, die von den Ableitungen n', n'', \dots von n abhängen. Man vergleiche in dieser Beziehung die Arbeiten von *Jordan* und *Helmert*¹⁸⁶).

35. Der Refraktionskoeffizient als Funktion der atmosphärischen Verhältnisse. Man verdankt *J. J. Baeyer*¹⁸⁷) den Gedanken, daß

184) *J. B. J. Delambre*, Méthodes analytiques, p. 98 ff.

185) *Jordan*, Handbuch 2, p. 509.

186) *W. Jordan*, Astr. Nachr. 88 (1876), p. 99 oder Handbuch 2, p. 537.

187) Astr. Nachr. 14 (1837), p. 65; 17 (1840), p. 205; Trigonometrisches Nivellement zwischen Swinemünde und Berlin, Berlin 1840; Petersb. Mém. Akad. (7) 3 (1860), Nr. 5. In der letzten Abhandlung gibt *Baeyer* die Resultate einer

die Refraktion um Mittag kleiner ist als am Morgen und Abend, weil um Mittag die Abnahme der Temperatur mit der Höhe eine größere ist und darum die Verminderung der Luftdichte bei wachsender Höhe eine geringere.

Baeyer setzt $n = \alpha b$, wo b der absolute Wert der Zeit, von Mittag aus gerechnet, ist, der als Bruch des halbtägigen Sonnenbogens auszudrücken ist; α ist eine Konstante, der *Baeyer* auf Grund seiner eigenen Beobachtungen den Wert 0,2132 gibt. Eine solche Formel hat den Nachteil, daß die Refraktion um Mittag Null wird; es ist indessen immerhin das Verdienst von *Baeyer*, die Abhängigkeit des n von der Tageszeit erkannt zu haben.

Das Gesetz der Veränderung der atmosphärischen Dichte mit der Höhe ist bekannt, wenn zwischen zweien der vier Größen Θ (Dichte), p (Druck), ϑ (Temperatur) und t (Höhe) eine empirische oder hypothetische Relation angenommen wird (außer derjenigen, welche die Gesetze von *Boyle* und *Gay-Lussac* liefern). Wird nun Θ als bekannte Funktion von t ausgedrückt und wird die eine der beiden folgenden Beziehungen:

$$v - 1 = c\Theta, \quad v^2 - 1 = 2c\Theta, \quad (c = 0,000293),$$

die in der astronomischen Theorie gebraucht werden, benutzt, so hat man v und deshalb n als Funktion von t und den meteorologischen Daten ausgedrückt.

*Bauernfeind*¹⁸⁸⁾ hat zwischen dem Druck p und der absoluten Temperatur $T = 273 + \vartheta$ die Beziehung

$$\frac{p'}{p} = \left(\frac{T'}{T}\right)^6$$

angenommen, und für die Dichte die Formel

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^5$$

abgeleitet, wo die Höhe h des Punktes in der Weise zu berechnen ist, daß man im Meeresniveau $h_0 = 51400$ m hat. In geeigneter Weise hat sich *Jordan*¹⁸⁹⁾, ohne eine willkürliche Formel für die Konstitution der Atmosphäre einzuführen, damit begnügt, n mit Hilfe des Druckes, der Temperatur und der Wärmeabnahme auszudrücken,

Beobachtungsserie von reziproken Zenitdistanzen für die verschiedenen Tagesstunden zwischen Kupferkuhle und Brocken (Entfernung 48 km, Niveauunterschied 971 m).

188) *C. M. von Bauernfeind*, Astr. Nachr. 67 (1866), p. 33. Kritische Notizen zur Theorie von *Bauernfeind* findet man in *Helmert*, H. G. 2, p. 587.

189) Zit. v. 186, oder Handb. 2, p. 536.

wobei er findet¹⁹⁰⁾

$$(63) \quad n = 0,2325 \frac{B}{760} \left(\frac{273}{T}\right)^2 (1 - 29,39 x),$$

wo B der Druck in mm ist, T die absolute Temperatur, x die Wärmeabnahme in Graden für 1 m Höhe [im Mittel nach *J. Hann*¹⁹¹⁾ $x = 0,0057$].

36. Empirische Untersuchungen über den Refraktionskoeffizienten. Außer den erwähnten Beobachtungen von *Baeyer* sind die Beobachtungen von *Bauernfeind*¹⁹²⁾ in Bayern zu nennen zur Bestimmung der täglichen Variation der Zenitdistanzen zwischen zwei Punktpaaren. Die von *Baeyer* beobachtete tägliche Periode hat sich dabei gut bestätigt.

*Hartl*¹⁹³⁾ hat später auf Grund der Beobachtungsergebnisse, die in sechs Gegenden Deutschlands und der russischen Ostseeprovinzen gefunden sind, die folgende Tabelle über den Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten n und der Tageszeit b , letztere, wie schon erwähnt, als Bruch des täglichen Sonnenbogens ausgedrückt, aufgestellt.

$b = 0,0$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	$1,0$
$n = 0,10$	$0,10$	$0,11$	$0,11$	$0,12$	$0,13$	$0,13$	$0,15$	$0,16$	$0,17$	$0,19$

Nimmt man zwischen n und b eine Relation $n = x + yb^2$ an, so bestimmt er die Werte von x und y für jedes der sechs Nivellementsnetze und erhält im Mittel

$$n = 0,1041 + 0,0840 b^2.$$

Indem er dann in (63) die aus dieser Formel erhaltenen Werte für n einführt, sucht *Hartl* die den verschiedenen Tageszeiten entsprechenden Werte der Wärmeabnahme abzuleiten und vergleicht sie mit den aus den Luftballonbeobachtungen *Glaisiers* folgenden Werten. Der Vergleich ist einigermäßen befriedigend.

190) *Laplace* (*Méc. cél.* 4, p. 279) hat zum ersten Mal den Refraktionskoeffizienten als Funktion der meteorologischen Daten gegeben, indem er für die Konstitution der Atmosphäre dieselbe Formel anwandte, die von ihm auch zur Berechnung der astronomischen Refraktion benutzt worden war. Vgl. *Fearnley* in der Beilage VII zum Generalbericht der Europ. Gradmessung, 1883.

191) *Handbuch der Klimatologie* 1, p. 241, 2. Aufl., Stuttgart 1897.

192) *Ergebnisse aus Beob. der terrestrischen Refraktion*, München 1880—90. Vgl. die Diskussion dieser Beobachtungen bei *Jordan*, *Handb.* 2, p. 539, und in *O. Eggert*, *Vergleichungen der Ergebnisse des geometr. und trigonometrischen Nivellements* usw., Diss. Berlin 1898.

193) *H. Hartl*, *Mitt. mil.-geogr. Institut Wien* 1883, p. 110—136 und in der *Zeitschr. d. österr. Gesellsch. für Meteorologie* 16 (1881), p. 12. *Hartl* hat auch den mittleren Refraktionskoeffizienten mit der mittleren Höhe h des Visierstrahles über dem Meeresniveau in Beziehung zu setzen gesucht, vgl. *Mitt. mil.-geogr. Institut Wien* 4 (1884), p. 15.

V. Reina und G. Cicconetti¹⁹⁴) haben zwischen Rom und Monte-Cavo (Entfernung 30 km, Höhenunterschied 900 m) eine Beobachtungsreihe von gegenseitigen Zenitdistanzen an 11 Tagen ausgeführt, und haben eine Tabelle für den Zusammenhang zwischen n und b gegeben. Der Gang der Zahlen ist regelmäßig, aber nicht symmetrisch zum Mittag (n variiert am Nachmittag weniger stark).

Reina hat auch vermitteltst der Formel von Jordan die Werte von n berechnet, indem er die Wärmeabnahme aus gleichzeitigen Thermometerbeobachtungen auf beiden Stationen bestimmte. Die beobachteten Koeffizienten n ergeben sich im allgemeinen kleiner als die nach (63) berechneten; aber die Differenzen übersteigen (von wenigen Ausnahmen abgesehen) nicht 0,02, was als eine gute Bestätigung der Jordanschen Theorie angesehen werden kann.

Abschließend kann man sagen, daß der sogenannte Refraktionskoeffizient eine nicht gut bestimmte Größe ist, und zwar aus zwei Gründen: 1) weil er von der Schnelligkeit der Wärmeabnahme mit der Höhe abhängt, die sehr veränderlich ist mit der Tageszeit, mit der Örtlichkeit und mit der Beschaffenheit des Bodens, über den der Visierstrahl hingeht, und 2) weil die Definition dieses Koeffizienten, wenn man ihn als unabhängig von der Entfernung betrachtet, nur in den Fällen gilt, in denen die Formel (58'') als genügend genau betrachtet werden kann¹⁹⁵).

Bei kleinen Entfernungen hat übrigens die Unsicherheit im Werte von n wenig Einfluß auf die Berechnung der Höhendifferenz, wie aus einer instruktiven Tabelle Jordans (Handbuch 2, p. 542) hervorgeht. So ändert sich bei einer Entfernung von 5 km, wenn n zwischen 0,10 und 0,16 variiert, die berechnete Höhendifferenz um nicht mehr als 11 cm; bei einer Entfernung von 10 km beträgt die entsprechende Änderung 47 cm¹⁹⁶).

37. Geometrisches Nivellement. Wenn man von der größeren Präzision sowohl bezüglich der Instrumente als der Messungen ab-

194) Mem. Soc. Ital. XL (3) 10 (1896), p. 14; Rezension von Jordan in Zeitschr. f. Verm. 26 (1897), p. 17. Siehe ferner A. Venturi und E. Soler, Prime ricerche sul coeff. di refrazione in Sicilia, Palermo 1893; ferner A. Venturi und Loperfido in Riv. topog. e catasto 10 (1897), p. 10; C. A. Schott, R. C. G. S. 26 (1883), App. Nr. 12.

195) Versuche, eine Beziehung zwischen den Koeffizienten n und der Entfernung der beiden Stationen aufzustellen, sind von E. Pucci gemacht: Sulla livellaz. trig., Firenze 1879; vgl. auch M. Dietze in Zeitschr. f. Vermess. 13 (1884), p. 245.

196) In demselben Kap. von Jordan findet man auch ausgedehnte Literaturnachweise zu diesem Gegenstand.

sieht, so unterscheidet sich die Beobachtungsmethode des geometrischen Nivellements nicht in der höheren und niederen Geodäsie. Wir werden uns deshalb darauf beschränken, den Umstand, der die Berechnung des Präzisionsnivellements von der der topographischen Nivellements unterscheidet, zu behandeln, nämlich die Berücksichtigung der Abweichung der Niveauflächen vom Parallelismus¹⁹⁷⁾.

Es mögen A und B (Fig. 18) zwei Punkte der Erdoberfläche sein, S_a und S_b die zugehörigen Niveauflächen und S_0 die Niveaunullfläche, auf die die Höhen bezogen werden. So lange diese Flächen als parallel betrachtet werden, hat die Definition des Höhenunterschiedes zwischen A und B keine Schwierigkeit; aber wenn man auf ihre Abweichung vom Parallelismus Rücksicht nimmt, so ergibt sich die Höhendifferenz verschieden, je nachdem man sie definiert 1) als das Stück

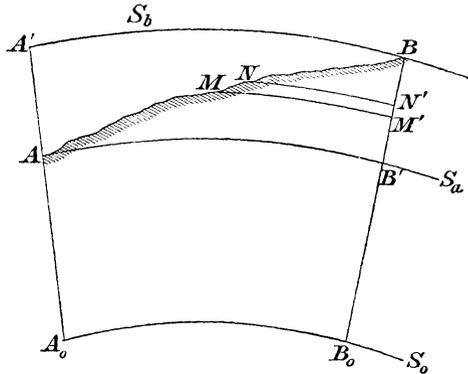


Fig. 18.

197) Nach *S. Günther* (Handb. d. math. Geographie, Stuttgart 1890) verdankt man *W. Fuchs* (1843) den ersten Gedanken, den Nichtparallelismus der Niveauflächen bei der Berechnung der Nivellements in Rechnung zu ziehen. Die Anwendung der Potentialtheorie auf diesen Gegenstand wurde zum ersten Male (nach *Bruns*) von *Th. Wand* (Prinzipien der math. Physik und Potentialtheorie, 1871) angegeben. *Th. Wittstein* [Astr. Nachr. 81 (1873), p. 292] und *G. Zachariae* [ibid. 80 (1873), p. 305] berechneten, indem sie von einer ungenügenden Voraussetzung über die Krümmung der Lotlinien ausgingen, die sphäroidische orthometrische Korrektur. Der letztere verbesserte dann die eigentliche Formel [ibid. 82 (1873), p. 73], indem er die Formel von *Gauß* benutzte (vgl. Fußn. 37). *Helmert* [Astr. Nachr. 81 (1873), p. 297] führte die „reduzierte Niveaudifferenz“ ein (welche später von *Lallemand* „dynamische“ genannt wurde), indem er zeigte, daß es bei diesen Rechnungen zweckmäßiger sei, die Werte der Schwerkraft einzuführen anstatt die Krümmung der Lotlinien zu benutzen. *J. J. Baeyer* [ibid. 84 (1874), p. 1] handelt von den Wirkungen der Krümmung der Lotlinien (nach *Gauß*) und der lokalen Lotabweichungen auf die trigon. und geom. Nivellements. Eine zusammenfassende Darstellung der orthometrischen und dynamischen Theorie findet man bei *E. Czuber*, Techn. Blätt. Prag 23 (1891), p. 86, 152. Ferner sei verwiesen auf *R. v. Sterneck* in den Mitt. mil.-geogr. Inst. Wien 8 (1888), p. 69; *F. R. Helmert*, Die Schwerkraft im Hochgebirge, Berlin 1890; *C. M. Goulier* in Paris C. R. 105 (1887), p. 270; *Ch. L. Durand-Claye*, *A. Pelletan* et *Ch. Lallemand*, Lever des plans et nivellement, III. partie par *Ch. Lallemand*, Paris 1889.

AA' der Vertikalen von A zwischen S_a und S_b , oder 2) als das Stück BB' der Vertikalen von B zwischen S_a und S_b oder endlich 3) als die Differenz $BB_0 - AA_0$ zwischen den Höhen der Punkte B und A in bezug auf die Fläche S_0 . Es macht sich noch eine andere Schwierigkeit hier geltend. Wenn man, um die Ideen zu fixieren, die zweite Definition annimmt, d. h. die Niveaudifferenz zwischen A und B gleich BB' setzt, und man im Gelände zwischen A und B eine Reihe von Punkten P_1, P_2, \dots, P_n einschaltet, die so dicht liegen, daß der Höhenunterschied zwischen aufeinander folgenden Punkten direkt mit einem Nivellierinstrument bestimmt werden kann, so ist die Summe der sukzessiven Höhenunterschiede δz (zwischen P_1 und A, P_2 und P_1, \dots, B und P_n) im allgemeinen nicht gleich dem gesamten Unterschiede BB' , wie man es in der niederen Geodäsie annimmt, und diese Summe wird sich auch verschieden ergeben, je nach dem Wege $AP_1P_2 \dots P_nB$, den das Nivellement einschlägt. Noch mehr, wenn man ein geschlossenes Polygon $AP_1P_2 \dots P_nA$ betrachtet, so ist die Summe der Höhenunterschiede je zweier aufeinander folgender Punkte im allgemeinen nicht Null, sondern hat einen nicht immer zu vernachlässigenden Wert (*theoretischer Schlußfehler* des Nivellementspolygons). Man hat zwei Wege, um diese Schwierigkeit zu überwinden.

1) Die *orthometrische Theorie*. Man definiert als Höhenunterschied zwischen A und B das Stück BB' der Vertikalen in B , das zwischen B und S_a liegt, und sucht die Korrektion, die man an der Summe der sukzessiven Höhenunterschiede zwischen den Punkten P_1 und A, P_2 und P_1, \dots, B und P_n anbringen muß; man nennt sie die *orthometrische Korrektion*.

2. Die *dynamische Theorie*. Man sucht die Differenz zwischen den Werten W_b und W_a des Erdpotentials (2) für S_b und S_a zu ermitteln; diese Differenz, geteilt durch die mittlere Schwere G (für 45° Breite und im Meeresniveau) liefert den sogenannten dynamischen Höhenunterschied zwischen B und A . — Der angegebene Gedankengang stammt von *F. R. Helmert*¹⁹⁸). Das Verhältnis $(W_a - W_0) : G$, wo W_0 den Wert von W auf S_0 bedeutet, nennt man dynamische Kote des Punktes A . Die an der Summe der δz anzubringende Korrektion, um die oben erwähnte Differenz $(W_b - W_a) : G$ zu erhalten, nennt man die *dynamische Korrektion*¹⁹⁹).

Es seien (Fig. 19) M und N zwei aufeinander folgende Punkte

198) Vgl. Fußn. 197.

199) Vgl. das in Fußn. 197 (Ende ders.) zitierte Werk von *Lallemand*.

einer Nivellementsschleife. Das Nivellierinstrument sei in der Linie MN aufgestellt, in der Mitte zwischen den Vertikalen MM_1 und NN_1 und es seien $z_1 = MM_1$, $z_2 = NN_1$ die Lattenablesungen; es sei ferner M_2N_2 die durch das Zentrum des Fadennetzes des Fernrohrs gehende Niveaufläche; $d_1 = M_1M_2$, $d_2 = N_1N_2$ seien die Depressionen dieser Niveaufläche unter dem Visierstrahl M_1N_1 . Sind

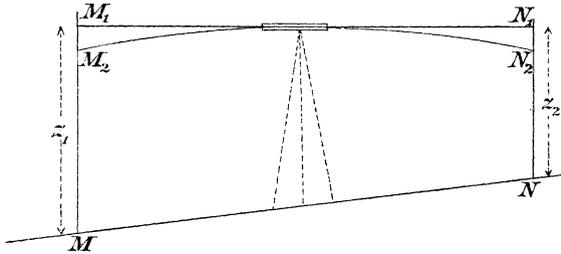


Fig. 19.

dann W , W_m , W_n die Werte des Erdpotentials in M_2 (und N_2), M und N , g_1 und g_2 die Werte der Schwerebeschleunigung in M und N und behandelt man die Abschnitte MM_2 und NN_2 als unendlich klein, so ergibt sich

$$W_n - W_m = (z_2 - d_2)g_2 - (z_1 - d_1)g_1.$$

Die beiden Depressionen können als merklich gleich angesehen werden²⁰⁰⁾, und man kann auch das Produkt der Depression und der Differenz $g_1 - g_2$ vernachlässigen, so daß die vorhergehende Formel in die folgende übergeht:

$$W_n - W_m = (z_2 - z_1) \frac{g_1 + g_2}{2} + (g_2 - g_1) \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Vernachlässigt man auch noch den zweiten Term der rechten Seite²⁰¹⁾ und setzt

200) Daß diese Hypothese allgemein zulässig ist, wenn das Nivellierinstrument in der mittleren Entfernung zwischen den Vertikalen von M und N aufgestellt wird, ist von *Helmert* (H. G. 2, p. 503–511, 539) bewiesen. Mit dem Einfluß der Differenz der beiden Depressionen in Folge der Gestalt der Niveauflächen beschäftigt sich *J. A. Oudemans* [Astr. Nachr. 83 (1876), p. 22]. Mit dem Einfluß der normalen Refraktion beschäftigt sich *Lallemand* in dem in Fußn. 197 zitierten Werke, p. 396.

201) Vgl. *Helmert*, H. G. 2, p. 503. Setzt man $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 3$ m, so liefert die Gesamtheit der Ausdrücke, die $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)(g_2 - g_1)$ entsprechen, zu einem Nivellement, das sich über einen ganzen Meridianquadranten erstreckt, einen Bei-

$$\frac{1}{2}(g_1 + g_2) = g, \quad z_1 - z_2 = \delta z,$$

so erhält man

$$(64) \quad W_n - W_m = -g\delta z.$$

Wenn man mit $\delta z'$ den Abstand der beiden Punkte $M'N'$ (Fig. 18), in denen die durch M und N gehenden Niveauflächen die Vertikale von B treffen, bezeichnet, so ergibt sich nach (64) und nach der analogen Formel für $M'N'$:

$$(65) \quad \delta z' = \frac{g}{g'} \delta z,$$

wo g' die mittlere Schwere für den Abschnitt $M'N'$ bedeutet.

Die dynamische und orthometrische Theorie gründen sich bezüglich auf die Formeln (64) und (65).

Orthometrische Theorie. Nimmt man an, daß die Schwerkraft der theoretischen Formel²⁰²⁾

$$(66) \quad g = G(1 - \beta \cos 2\varphi)(1 - kH) \quad (k = \frac{2}{R}, \quad \beta = 0,00265)$$

folgt, wo H die Meereshöhe und R den mittleren Erdradius bedeutet, so kann man das Verhältnis $\frac{g}{g'}$ in (65) in folgender Weise schreiben:

$$\frac{g}{g'} = 1 + 0,0053 \frac{\sin(\varphi + \varphi_b) \sin(\varphi - \varphi_b)}{1 - 0,00265 \cos 2\varphi_b},$$

wo φ , φ_b die Breiten von N und B bedeuten. Hieraus ergibt sich mit genügender Annäherung, wenn man die mittlere Breite zwischen A und B mit φ_m bezeichnet, für die Niveaudifferenz (BB') der Ausdruck:

$$(67) \quad (BB') = \sum (\delta z) - \frac{0,0053 \sin(\varphi_m + \varphi_b)}{1 - 0,00265 \cos 2\varphi_b} \cdot \sum_A^B (\varphi_b - \varphi) \delta z.$$

Will man dann die Höhe (BB_0) = H_B des Punktes B über S_0 haben, so muss man zu (BB') die Größe $H_A + (B'B_0) - (AA_0)$ (vgl. Fig. 18) hinzufügen, welche näherungsweise durch

$$(68) \quad H_A - 0,0053 \frac{\sin(\varphi_a + \varphi_b) \sin(\varphi_b - \varphi_a)}{1 - 0,00265 \cos 2\varphi_b} \cdot H_A$$

ausgedrückt wird.

Die Summe (67) + (68) gibt die gesuchte Höhe H_B des Punktes B ; dies ist in Kürze das Verfahren von *Helmert* (H. G. 2, p. 505). *Lallemand* in dem (Fußn. 197 Ende) zitierten Werke, p. 366, gibt die

trag von 16 mm (die Schwereänderung als normal vorausgesetzt.) Setzt man $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) = 2$ m, so würde bei einer Messung im Gebirge der entsprechende Beitrag ca. 3 mm sein, wenn der Höhenunterschied 8000 m beträgt.

202) Vgl. Nr. 4 und 5.

Formel ein wenig verschieden²⁰³):

$$(69) \quad H_B = H_A + \sum (\delta z) - 0,0053 \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} H \sin 2\varphi d\varphi,$$

wo H und φ die Höhe und Breite irgend eines Punktes des Nivellementsuges sind²⁰⁴).

Dynamische Theorie. Wir nennen Δ_{AB} die schon definierte dynamische Niveaudifferenz. Wir haben dann, indem wir auf kleine Niveauunterschiede δz die Differentialformel $dW = -g\delta z$ anwenden:

$$(70) \quad \Delta_{AB} = \frac{1}{G}(W_A - W_B) = \frac{1}{G} \sum_A^B g\delta z = \sum \delta z + \frac{1}{G} \sum (g - G)\delta z.$$

Die letzte Summe ist die dynamische Korrektur, welche man auf Grund von (66) in folgender Form schreiben kann:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2,$$

wo

$$\eta_1 = -\beta \int_A^B \cos 2\varphi \delta z$$

und

$$\eta_2 = -k \int_A^B H \delta z \text{ oder angenähert } \eta_2 = -\frac{k}{2} (H_A + H_B) (H_B - H_A)$$

(η_1 heißt dyn. Breiten-, η_2 dyn. Höhenkorrektur).

Fall eines geschlossenen Polygons $AP_1P_2 \dots P_nA$. Die linke Seite von (70) ist 0, und man hat deshalb

$$(71) \quad \sum \delta z = - \sum \frac{g - G}{G} \delta z.$$

Die letzte Summe (in welcher man für G einen konstanten Wert g_0 setzen kann) ist der *theoretische Schlußfehler* des Polygons. Nimmt

203) Das letzte Glied stellt die sogenannte „orthometrische“ Korrektur dar (ein von *C. M. Goulier* eingeführter Name, siehe Zit. der Fußn. 197, Ende ders.).

204) Um Gleichung (69) mit (67) und (68) zu vergleichen, muß man 1) in der letzteren die Einheit an Stelle von $(1 - 0,00265 \cos 2\varphi_b)$ setzen; 2) näherungs-

weise die Summe durch ein Integral ersetzen und 3) beachten, daß $\int_A^B H \cdot \sin 2\varphi d\varphi$ durch partielle Integration

$$= -\frac{1}{2} H_A (\cos 2\varphi_b - \cos 2\varphi_a) - \frac{1}{2} \int_A^B (\cos 2\varphi_b - \cos 2\varphi) dH$$

oder näherungsweise

$$= -\frac{1}{2} H_A (\cos 2\varphi_b - \cos 2\varphi_a) + \sin(\varphi_m + \varphi_b) \int_A^B (\varphi_b - \varphi) dH$$

ist.

man den normalen Ausdruck (66) für die Schwere an und beachtet, daß das von kH abhängende Glied in der Summe verschwindet, so ergibt sich der folgende angenäherte Ausdruck für den Schlußfehler²⁰⁵⁾:

$$\sum \delta z = \beta \sin 2\varphi_m \sum H \Delta \varphi.$$

38. Einfluß der Schwerestörungen auf Nivellements. Wir haben bisher die Schwerkraft unter der Voraussetzung berücksichtigt, daß sie durch Formel (66) dargestellt sei, wobei indessen zu beachten ist, daß die *Schwerestörungen* einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Nivellements haben. *Helmert*²⁰⁶⁾ hat eine Nivellements-schleife in den Tiroler Alpen (Innsbruck, Brenner, Brixen, Bozen, Innsbruck), längs der in 37 Punkten von *R. v. Sterneck* die relative Schwere bestimmt war, daraufhin geprüft und hat gefunden, daß der wirkliche theoretische Schlußfehler auf Grund der beobachteten Schwerkraftswerte nach Formel (71) berechnet — 0,024 m²⁰⁷⁾ beträgt, während der mit der normalen Schwere berechnete Schlußfehler (sphäroidischer Schlußfehler) — 0,007 m beträgt. Der sphäroidische Schlußfehler kann also unter Umständen nur ein kleiner Bruchteil des wichtigen theoretischen Schlußfehlers sein. Der Einfluß der wirklichen Schwereänderungen auf die Berechnung der Niveaudifferenzen²⁰⁸⁾ ist sehr schwer auszuwerten, besonders wenn es sich um größere Niveaudifferenzen handelt. In der Tat würde eine solche Rechnung die Kenntnis der wirklichen Schwerewerte [g' in Formel (65)] in verschiedenen Punkten eines vertikalen Abschnitts im Inneren der Erde erfordern und die Annahmen, die man in dieser Hinsicht machen kann, sind immer etwas willkürlich. Es wird deshalb, auch wenn längs der Nivellementslinien relative Schweremessungen ausgeführt sind, bei großen Niveaudifferenzen immerhin eine beträchtliche Unsicherheit bestehen bleiben²⁰⁹⁾.

205) *Helmert*, Die Schwerkraft im Hochgebirge, p. 20.

206) *Ibid.* p. 19 und Tafel II.

207) Der mittlere Fehler dieses Resultes ist von *Helmert* zu $\pm 0,013$ m ausgerechnet worden, indem er die zufälligen Fehler der Schwerkraftsmessungen und die zufälligen Änderungen berücksichtigt, denen die Schwerkraft von Ort zu Ort unterworfen ist.

208) Eine theoretische Untersuchung über den Einfluß der Schwereänderungen auf die Resultate der Nivellements unter der Voraussetzung, daß diese Störungen auf Grund der Attraktion der sichtbaren Massen sich berechnen lassen, ist von *Helmert* (H. G. 2, p. 517—533) angestellt.

209) Für ein Nivellement von der Nordsee bis zum Adriatischen Meere durch die Alpen hindurch findet *Helmert* (Die Schwerkraft im Hochgebirge, p. 26—29), daß die Differenz zwischen der wirklichen und der sphäroidischen

39. Das Mittelwasser der Meere und der Nullpunkt für die Höhen. Die Höhen der Nivellementsbolzen beziehen sich in den verschiedenen Ländern auf einen mehr oder weniger willkürlich angenommenen Nullpunkt. Größtenteils dient zu diesem Zweck das Mittelwasser eines bestimmten Pegels. In seiner einfachsten Gestalt ist ein Pegel ein mit Skala versehener Apparat, der in jedem Augenblick die Höhe der Wasseroberfläche über einem bestimmten Nullpunkt angibt. Das Mittel aus den während mehrerer Jahre stündlich abgelesenen Werten der Wasserhöhe kann, wenigstens für den Zeitraum eines Jahrhunderts, als konstant angesehen werden. Die auf ein solches Mittel bezogenen Höhen nennt man kurz Meereshöhen.

Gehören nun die Mittelwasser der verschiedenen Pegel alle derselben Niveaufläche an, oder bestehen systematische Unterschiede zwischen den Höhen der verschiedenen Meere? Die Antwort auf diese Frage hat praktische Wichtigkeit, insofern es sich um die Übereinstimmung der Nivellements der verschiedenen Länder handelt, die sich auf verschiedene Pegel beziehen; sie hat auch theoretisches Interesse, insofern mit ihr die Definition des Geoids verknüpft ist, die wir in Nr. 2 angenommen haben.

Die Frage ist bis jetzt nicht gelöst, und es haben sich, wenigstens in bezug auf die europäischen Meere, in den letzten Jahren die Ansichten geändert. Bis 1890 schien es nach den Messungen, daß zwischen dem Atlantischen Ozean und dem Mittelmeer, zwischen diesem und der Nord- und Ostsee beträchtliche Niveauunterschiede (bis zu 1,10 m) beständen. Die wachsende Genauigkeit der Nivellements und die strengere Berechnung²¹⁰⁾ und Ausgleichung der Resultate hat diese Differenzen zum Teil verschwinden lassen, zum Teil beträchtlich vermindert.

*Ch. Lallemand*²¹¹⁾ (1890) hat, indem er sich speziell auf die Resultate der neuen französischen Nivellements stützt, zuerst den Gedanken ausgesprochen, daß die erwähnten Differenzen ihre Ursache zum größten Teil in Beobachtungsfehlern haben. Wir geben aus der *Lallemand*-schen Tabelle einige Zahlen an, wobei zu bemerken ist, daß seine Daten

orthometrischen Korrektion höchstens ein paar Zentimeter betragen kann. Dagegen findet er bei der Bestimmung der Höhe des Stülfer Jochs, indem er eine spezielle Hypothese über die Schwereänderung mit der Höhe einführt, eine Differenz von ca. 30 cm zwischen der wirklichen und der sphäroidischen Korrektion.

210) So würde z. B. die orthometrische Korrektion den Höhenunterschied zwischen den Nord- und Südküsten von Zentraleuropa um 15 cm vermindern (Verh. der Intern. Erdm. 1891, p. 150).

211) *Revue scientifique* 46 (1890), p. 1—6 und *Int. Erdm.* 1890, p. 181—187.

noch nicht die definitiven waren; wir fügen deshalb in der letzten Kolumne die durch die Rechnungen des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung, die wir gleich noch erwähnen werden, gelieferten Zahlen bei.

Mittlere Meereshöhe einiger Häfen in bezug auf Marseille (in cm):

	Nach den alten Beobachtungen:	Rechnung von <i>Lallemand</i>	Rechnung des Zentralbureaus
Triest	42	2	8
Cette	11	3	3
Brest	110	7	13
Cherbourg	90	9	17
Amsterdam	74	—1	17
Swinemünde	86	—2	27

Auf Grund dieser Rechnungen spricht *Lallemand* den folgenden Satz aus: „L'ancienne hypothèse de l'uniformité de niveau des mers, primitivement admise d'après les lois de la mécanique des fluides, puis abandonnée sur la foi de mesures inexactes, paraît en voie de se réhabiliter dans l'ensemble et abstraction faite peut-être de quelque anomalie locale“²¹²).

Die schon erwähnten Resultate des Zentralbureaus²¹³), die auf der Ausgleichung von 48 Polygonen in Zentral- und Westeuropa beruhen, bestätigen im allgemeinen das Vorhergehende. Die erwähnten Differenzen verschwinden zwar nicht, aber sie werden von der Ordnung der Beobachtungsfehler. So findet man z. B. eine mittlere Depression von 13 cm des Mittelmeeres und des Adriatischen Meeres gegenüber der Nord- und Ostsee und dem Ärmelkanal, aber der mittlere Fehler dieser Niveaudifferenz ist 18 cm vor und 9 cm nach der Ausgleichung²¹⁴).

Außerdem führen verschiedene Rechnungen zu verschiedenen Resultaten. Aus drei Ausgleichungen des Zentralbureaus und einer von *Lallemand* ergibt sich die Höhe der nördlichen Meere über der der südlichen:

212) Derselbe Gedanke wurde (1890) von *A. von Kalmár* wenigstens in bezug auf die europäischen Meere ausgesprochen (Int. Erdm. 1890, p. 102—103); vgl. ferner *Bouquet de la Gryes* Bericht in Int. Erdm. 1898, p. 363.

213) *A. Börsch* und *F. Kühnen*, Vergleichung der Mittelwasser der Ostsee und Nordsee usw., Berlin 1891.

214) *Helmert* in Int. Erdm. 1891, p. 251. Neuere Bestätigungen hat man in den Resultaten der neuen französischen Nivellements und der russischen längs der Ostsee (Int. Erdm. 1898, p. 153—154 und p. 412—431). Vgl. ferner den Artikel von *A. Börsch* in Int. Erdm. 1892, p. 547.

I. Ausgleichung	13,4	cm
II. „	26,5	cm
III. „	4,6	cm
<i>Lallemand</i> „	2,0	cm.

Diese Resultate sind zu verschieden, als daß man einem unter ihnen genügendes Vertrauen schenken könnte²¹⁵⁾.

Bedenkt man, mit welcher Unsicherheit die erwähnten Niveaudifferenzen sich ergeben, so verbietet jedenfalls nichts, sie als rein lokale Erscheinungen aufzufassen, weil man Unterschiede von derselben Größenordnung zwischen Pegeln derselben Küste findet, die nur wenig von einander entfernt sind (z. B. 22 cm zwischen Ostende und Boulogne, 29 cm zwischen Biarritz und Sables d'Olonne, 13 cm zwischen Pola und Fiume²¹⁶⁾).

Die Frage nach dem internationalen Nullpunkt für die Höhen, die wir hier erwähnen müssen, obgleich sie von mehr technischem als theoretischem Charakter ist, ist um 1864 aufgeworfen worden und bis heute noch nicht definitiv entschieden²¹⁷⁾.

40. Genauigkeit einer Nivellementsausgleichung. Wenn man, wie es üblich ist, ein Nivellement mit konstanter oder ungefähr konstanter Zielweite ausführt, so ist der mittlere Fehler eines Höhenunterschiedes der Quadratwurzel aus der Entfernung proportional²¹⁸⁾:

$$(72) \quad m = \mu_1 \cdot \sqrt{L}.$$

Nimmt man L in km an, so nennt man μ_1 den mittleren Kilometerfehler eines einfachen Nivellements. Abgesehen von anderen Umständen hängt μ_1 von der Zielweite s ab. Wenn der mittlere Fehler M einer einfachen Stationsbeobachtung (Rückblick—Vorblick) proportional mit s angenommen wird, so ergibt sich μ_1 proportional mit \sqrt{s} und daher hat man²¹⁹⁾

$$(72') \quad m = k \cdot \sqrt{L \cdot s}.$$

215) Vgl. Zit. der Fußn. 213, p. 89.

216) Int. Erdm. 1892, p. 551.

217) Eine zusammenfassende Geschichte dieser Diskussionen findet man in einem Artikel von *Ch. Lallemand* in Int. Erdm. 1893, p. 124. Vgl. auch den diesbezüglichen Meinungsaustausch in den Sitzungen der Int. Erdm. 1891, p. 44, 94; 1892, p. 53—57 und 113—117.

218) Vgl. den Art. von *O. Börsch* in der Zeitsch. f. Verm. 7 (1878), p. 455 und 495. Die Formel (72) wird meistens gebraucht. Indessen hat *O. Börsch* [Astr. Nachr. 96 (1880), p. 33 und 81] versucht, m als Funktion von L durch einen komplizierteren Ausdruck darzustellen.

219) *Jordan*, Handb 2, p. 466 ff. *O. Börsch* (Fußn. 218, erstes Zitat) hat auf Grund des Präzisionsnivellements der Elbe untersucht, welche der drei Formeln

Die Konstante μ_1 in Formel (72) kann man in der Weise bestimmen, daß man die Nivellementsline in mehrere Abschnitte abteilt und die Höhenunterschiede jedes Abschnitts hin und zurück misst. Sind $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ die Längen der verschiedenen Abschnitte, $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ die Differenzen der Doppelmessungen, so kann man μ_1 nach der Formel berechnen²²⁰):

$$(73) \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum \frac{d^2}{l}}.$$

Der mittlere Kilometerfehler eines Doppelnivellements ist dann

$$(74) \quad \mu = \frac{\mu_1}{\sqrt{2}}.$$

Hat man n geschlossene Polygone, von denen jedes doppelt nivelliert ist, und sind w_1, w_2, \dots, w_n die Schlußfehler der Polygone, so kann man μ in folgender Weise berechnen.

$$(75) \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{n} \sum \frac{w^2}{l}},$$

wo l_1, l_2, \dots, l_n die Längen der verschiedenen Polygone sind. Man vergleiche in dem Bericht über das Präzisionsnivellement in Europa von v. Kalmár²²¹) die numerischen Werte von μ für die Nivellements der verschiedenen Staaten; sie variieren etwa von 0,1 bis 5 mm. — Aus 48 Polygonen der erwähnten *Vergleichung der Mittelwasser*²²²) ergibt sich μ aus den Polygonschlußfehlern zu 4,42 mm und aus der allgemeinen Ausgleichung zu 4,48 mm. Für das nivellement général de la France²²³) (1897—1898) ist $\mu = 2,45$ mm.

Die Ausgleichung eines Nivellementsnetzes kann auf zwei Arten erfolgen:

$$M = h, \quad M = h\sqrt{s}, \quad M = hs$$

(h konstant) am meisten geeignet ist, die Beziehung zwischen M und s auszudrücken und hat sich für die zweite der drei Formeln entschieden. Danach würde sich $m = h\sqrt{L}$ ergeben, d. h. der mittlere Kilometerfehler würde unabhängig von der Zielweite s sein. In Wirklichkeit hängt m stark von der lokalen Bodenbeschaffenheit und andern Umständen ab, die man theoretisch nicht in Rechnung ziehen kann.

220) J. J. Baeyer in Astr. Nachr. 86 (1875), p. 177. Allgemeinere Formeln für den Fall, daß die verschiedenen Züge beliebig oft gemessen sind, gibt O. Börsch in seinem am Anf. der Fußn. 218 zit. Aufsatz.

221) Int. Erdm. 1895, II. T., p. 31 ff.

222) ibid. p. 75—76.

223) Bericht von Ch. Lallemand in Int. Erdm. 1898. Die Zahl 2,45 ist von uns mit Hilfe der Formel (75) berechnet auf Grund der Angaben der Kolonnen 2, 7 und 8 in der Tabelle p. 419 des genannten Berichtes.

1) Es seien $1, 2, \dots, n$ die Seiten des Netzes und es sei allgemein (r) die dynamische Höhendifferenz der beiden Endpunkte von r , wobei ein bestimmter Durchlaufungssinn als positiver von vornherein festgesetzt wird. Das geschlossene Polygon a, b, c, \dots, p gibt den Schlußfehler

$$\pm(a) \pm(b) \pm \dots \pm(p) = W,$$

wo man für eine bestimmte Seite das Zeichen $+$ oder $-$ zu nehmen hat, je nachdem die Seite, wenn das Polygon im Sinne a, b, c, \dots, p durchlaufen wird, im positiven oder negativen Sinne durchlaufen wird. Bezeichnet man mit $[a], [b], \dots, [p]$ die an den beobachteten Höhenunterschieden anzubringenden Korrekturen, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\pm[a] \pm[b] \pm \dots \pm[p] + W = 0.$$

Die Zahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl der voneinander unabhängigen geschlossenen Polygone im Netz; das Gewicht jeder Beobachtung (r) ist umgekehrt proportional der Länge der Seite r . Ein solches System von Bedingungsgleichungen kann entweder nach der Methode der bedingten oder der vermittelnden Beobachtungen behandelt werden²²⁴).

2) Die Ausgleichung eines Nivellementsnetzes kann auch nach der Methode der *vermittelnden Beobachtungen* erfolgen, ohne daß man die Polygonegleichungen benutzt. Es seien F_0, F_1, \dots, F_q diejenigen Netzpunkte, in denen mehr als zwei Seiten zusammenstoßen und es sei $H_{r,s}$ die beobachtete Höhendifferenz zwischen zwei Punkten F_r, F_s , die direkt durch eine Nivellementslinie verbunden sind. Bezeichnet man die Höhe des Punktes F_r über dem Niveau des Punktes F_0 mit x_r , so ergibt sich die Fehlergleichung

$$x_r - x_s - H_{r,s} = v_{r,s}.$$

Wenn die Punkte F durch L Linien verbunden sind, so wird man L Fehlergleichungen der angegebenen Art haben, aus denen man die plausibelsten Werte der x ableiten kann.

D. Erdmessung.

41. Ableitung der Konstanten des Erdellipsoids aus zwei oder mehr Meridianbogen²²⁵. Wenn man von vornherein das Geoid als Rotationsellipsoid annimmt, so genügen zwei Messungen von

224) Es ist die erste oder die zweite dieser Methoden passend, je nachdem die Anzahl der Polygone $\leq \frac{n}{2}$.

225) Die elementaren Formeln für die Ableitung von a und e aus Erdbogen

Meridianbogen in verschiedenen Breiten theoretisch zur Bestimmung der Konstanten a und e dieses Ellipsoids. Zur Berechnung des Meridianbogens zwischen den beiden Endpunkten einer Triangulation, die sich längs eines Meridians erstreckt, kann man in folgender

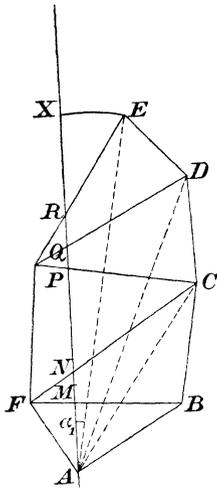


Fig. 20.

Weise verfahren. Ausgehend vom Punkte A (Figur 20), in welchem die astronomische Breite und das Azimut als bekannt vorausgesetzt werden, kann man durch Auflösung der Dreiecke ABM , MFN , \dots die Stücke AM , MN , \dots QR des Meridianbogens berechnen. Legt man dann durch den Endpunkt E des Netzes die geodätische Linie EX senkrecht zum Meridian von A und löst das Dreieck REX auf, so bekommt man den ganzen Bogen AX . Ist die Breite φ des Punktes E astronomisch bestimmt, so erhält man die des Punktes X mit genügender Annäherung aus der Formel

$$\varphi_X = \varphi + \frac{1}{2} \frac{S^2 \tan \varphi}{N \varrho \text{ arc } 1''},$$

wo $S = (EX)$ ist. Man hat so die Länge eines Meridianbogens zwischen zwei Punkten von bekannter Breite. Es ist dies die Methode von *A. M. Legendre*²²⁶).

Oder man verfährt auf folgende Weise. Durch Berechnung der Dreiecke ABC , ACD , ADE , \dots bekommt man die Länge s und das Azimut α_1 der geodätischen Linie, welche die Endpunkte der Triangulation verbindet und aus diesen Elementen kann man leicht den Meridianbogen zwischen den Breitenkreisen von A und E erhalten. Damit diese Rechnung soweit als möglich unabhängig von den benutzten provisorischen Werten von a und e ausfällt, ist es zweckmäßig, auch in dem Endpunkt E das astronomische Azimut zu bestimmen; die Länge des Meridianbogens σ ist dann durch die Formel von *Bessel*²²⁷) gegeben:

(Meridian- und Parallelbogen) findet man in: *P. L. M. de Maupertuis*, La figure de la terre, Paris 1738, p. 127; *R. G. Boscovich*, De litteraria expeditione per pontificiam ditionem, 5, Romae 1755; *J. L. d'Alembert*, Recherches sur différents points du système du monde 2, Paris 1754. Wegen der neueren Untersuchungen und speziellen Wege der bis heute ausgeführten numerischen Rechnungen vgl. *J. B. Listing*, Über unsere jetzige Kenntnis der Größe und Figur der Erde, Göttingen 1872.

226) *J. B. J. Delambre*, Méthodes analytiques etc., p. 3.

227) *F. W. Bessel* in Astr. Nachr. 14 (1837), p. 338; vgl. auch *Helmert*, H. G.,

$$(76) \quad \sigma = \frac{s \cos \alpha}{\cos \frac{\Delta \alpha}{2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 \sin^2 \alpha}{12 a^2} [1 + e^2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2)] + \dots \right\},$$

wo $\alpha = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 - 180^\circ)$, $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 - 180^\circ$ ist und α_1, α_2 die reziproken Azimute des Bogens s bedeuten und φ_1, φ_2 die Breiten der Endpunkte.

Nach Berechnung von σ kann man mit genügender Genauigkeit (wenn der Bogen nicht mehr als 2° Amplitude hat, vgl. Nr. 10) schreiben:

$$(77) \quad \sigma = \varrho (\varphi_2 - \varphi_1) \text{ arc } 1'',$$

wo

$$(78) \quad \varrho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \varphi = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

ist und die Breitendifferenz in Sekunden auszudrücken ist.

Die Formeln (77) und (78) liefern eine Gleichung zwischen a, e und Beobachtungsgrößen. Wenn man wie gewöhnlich mehr als zwei Meridianbogen zur Verfügung hat, wird man die Methode der kleinsten Quadrate in folgender Weise anwenden. Es seien a_0, e_0 Näherungswerte von a, e , mit denen der vorläufige Wert ϱ' von ϱ in Formel (78) berechnet ist. Wir setzen dann

$$a = a_0 + \delta a, \quad e^2 = e_0^2 + \delta(e^2)$$

und nennen v_1, v_2 die Verbesserungen der astronomischen Bestimmung von φ_1, φ_2 . Die Formeln (77), (78) geben dann die Fehlergleichung:

$$(79) \quad \frac{\sigma}{\text{arc } 1''} \left\{ \frac{1}{\varrho} - \frac{\delta a}{a^2} + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \frac{\delta(e^2)}{a} \right\} - \varphi_2 + \varphi_1 = v_2 - v_1,$$

in der die Glieder mit $e^2 \delta a, e^2 \delta e$ (228) vernachlässigt sind. Die Fehlergleichungen werden dann mit Hilfe der Bedingung $[v^2] = \text{Minimum}$ aufgelöst.

42. Bestimmung von a und e durch Parallelkreisbogen. Wenn die Triangulation längs eines Parallelkreisbogens erfolgt ist, und wenn in den Endpunkten A und B die astronomischen Azimute und die Längendifferenz $\Delta \omega$ beobachtet ist, so kann man, unter ΘN den Parallelkreisbogen in der Mittelbreite $\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, zwischen den Meridianen von A und B verstanden, für Θ die folgende Formel aufstellen:

1, p. 304—308. Andere Methoden für die Berechnung von σ haben *F. G. W. Struve* und *J. J. Baeyer* gegeben. Vgl. *N. Jadanza*, *Metodi per la misura di un arco di meridiano*, Firenze 1881.

228) Genauere Formeln findet man in einem Aufsatz von *F. W. Bessel*, *Abhdlg.* 3, p. 41.

$$(80) \left\{ \begin{array}{l} \vartheta = \Delta \omega \cos \varphi = \frac{s}{N} \sin \alpha \left\{ 1 - \frac{s^2}{24 N^2} (1 - \sec^2 \varphi \sin^2 \alpha) \right\} \\ \left(N = \text{Querkrümmungsradius für die Mittelbreite} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right), \end{array} \right.$$

wo s die Länge der geodätischen Linie AB bedeutet und die übrigen Buchstaben dieselbe Bedeutung haben bezüglich der Punkte A und B wie in der vorigen Nr. Die Formel (80) gibt eine Beziehung zwischen gemessenen Größen und den Unbekannten a , e^2 .²²⁹⁾

43. Stücke des Ellipsoids. Lotabweichungen. Das Problem, aus einem System von Erdbogen die plausibelsten Werte von a und e abzuleiten, hat an Wichtigkeit verloren, seitdem die Geodäten sich überzeugt haben, daß die Resultate der verschiedenen Gradmessungen nicht mit genügender Genauigkeit einem einzigen Ellipsoid angepaßt werden können. Gibt man einmal zu, daß systematische Unterschiede zwischen dem Geoid und dem Ellipsoid vorhanden sind, so hat die Ausgleichung der Resultate von unabhängigen Gradmessungen keinen anderen Zweck, als für a und e Mittelwerte a_m und e_m zwischen den Werten $(a_1, e_1), (a_2, e_2), \dots$ zu liefern, die sich auf die verschiedenen Ellipsoide E_1, E_2, \dots beziehen, welche sich jeweils den verschiedenen Gradmessungen am besten anpassen. Aber dies ist nicht gleichbedeutend mit der Bestimmung eines Ellipsoids, das am besten den gesamten Gradmessungen entspricht. Denn so lange diese nicht untereinander verbunden sind, haben wir keine Kenntnis bezüglich der Lage, welche die verschiedenen Ellipsoidstücke E_1, E_2, \dots zueinander haben, und deshalb haben wir keine Garantie, daß das mittlere Ellipsoid (a_m, e_m) nicht nur bezüglich der Krümmung seiner Teile, sondern auch bezüglich seiner Lage zum Erdkörper sich sämtlichen studierten Teilen des Geoids anpasse.

Da die Ermittlung der absoluten Abweichungen des Geoids von einem einzigen Ellipsoid bis jetzt nicht möglich ist, müssen wir uns darauf beschränken, einzeln jede Erdgegend zu untersuchen, die mit geodätisch und astronomisch untereinander verbundenen Triangulationen überdeckt ist, indem wir die Dimensionen und die Lage eines Ellipsoids^{229a)} zu bestimmen suchen, welches sich möglichst gut den Daten dieser Triangulationen anpaßt, und die Abweichungen er-

229) Siehe: *N. Jadanza* in Torino Atti Accad. 19 (1887), p. 990; *G. de Berardinis*, Alcune formole per calcolare un arco di parallelo terrestre, Messina 1890.

229a) Schon zu Beginn des vorigen Jahrhunderts beschäftigte sich *W. Lambton* mit der Bestimmung eines lokalen Ellipsoids, das am besten geeignet wäre, die Resultate der englischen Messungen darzustellen [An account of the measurement of an arc of the meridian etc., Asiatic Researches 8 (1805), p. 137].

mitteln, welche in der betreffenden Gegend das Geoid vom Ellipsoid aufweist.

Die Bestimmung eines Ellipsoidstückes verbindet sich unter diesem Gesichtspunkt mit der Bestimmung der Lotabweichungen²³⁰⁾ und ebenso mit dem Problem der Ausgleichung verschiedener, miteinander verbundener Triangulationen. Wir wollen hier in Kürze die Methode und die Formeln von *Helmert* angeben²³¹⁾. Es mögen i, k zwei geodätisch miteinander verbundene Punkte sein. In bezug auf ein vorläufiges Ellipsoid E_0 (z. B. das *Besselsche*) mögen $\bar{B}_i, \bar{L}_i, \bar{B}_k, \bar{L}_k$ angenommene Werte²³²⁾ für die geodätischen Längen und Breiten der Punkte i und k sein. Indem man von diesen Daten ausgeht und die Elemente a, e des Ellipsoids E_0 benutzt, berechnet man (Nr. 15) vorläufige, aber streng zu $\bar{B}_i, \bar{L}_i, \bar{B}_k, \bar{L}_k$ gehörige Werte der Länge \bar{S}_{ik} und der Azimute $\bar{T}_{ik}, \bar{T}_{ki}$ der geodätischen Linie ik in ihren Endpunkten. Es seien dann weiter:

$$\bar{B} + dB, \bar{L} + dL, \bar{T} + dT, \bar{S} + dS$$

die analogen Größen für das gesuchte, sich am besten anschließende Ellipsoid E . Die Relationen zwischen den Differenzen dB, dL, dS, dT erhält man dann (abgesehen von kleinen Größen 2. Ordnung), indem man die Formeln, welche zur Übertragung der geographischen Koordinaten und des Azimutes dienen, differentiiert und dabei die Breite, die Länge und das Anfangsazimut B_i, L_i, T_{ik} und die Größen a und e als Veränderliche ansieht²³³⁾.

Bezeichnet man mit a die Abplattung $1 - \sqrt{1 - e^2}$ und mit $da, \delta a$ die Korrekturen von a, a , wenn man vom Ellipsoid E_0 zu E übergeht, so ergeben sich Relationen folgender Art:

230) Der Gedanke, die Lotabw. an den beiden Enden eines geodätischen Bogens mit den wahrscheinlichsten Verbesserungen der Konstanten a und e des Ellipsoids in Einklang zu bringen, ist von *Bessel* analytisch entwickelt, *Astr. Nachr.* 14 (1837), p. 269, §§ 8 und 9; vgl. auch *C. G. Andrae*, *Problèmes de haute géodésie*, 3^e cah.

231) Lotabw. Heft 1, Berlin 1886. Wegen der weiteren Behandlung des Problems vgl. *Helmert*, *H. G.* 1, p. 533—562. Vgl. ferner: Die Europ. Längengradmessung in 52 Grad usw., Heft 1 und 2, 1893—96; *L. Krüger*, *Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen*, Potsdam 1898; *A. Börsch* und *L. Krüger*, *Lotabweichungen*, Heft 2, Berlin 1902; *A. Börsch*, *Lotabweichungen*, Heft 3, Berlin 1906.

232) Diese vorläufigen Werte können innerhalb gewisser Grenzen noch beliebig angenommen werden; wenn sie sich ändern, ändern sich \bar{S}, \bar{T} und die Schlußformeln (83) bleiben dieselben.

233) Diese Beziehungen sind von *Helmert* in *H. G.* 1, p. 282—294 angegeben, indem er die reduzierte Länge von *E. B. Christoffel* benutzte.

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} -dB_k = p_1 dB_i + p_3 dS_{ik} + p_4 dT_{ik} + p_5 \frac{da}{a} + p_6 da, \\ -\cos B_k dL_k = -\cos B_k dL_i + q_1 dB_i + q_3 dS_{ik} + q_4 dT_{ik} \\ \quad + q_5 \frac{da}{a} + q_6 da \\ -\cotg B_k dT_{ik} = r_1 dB_i + r_3 dS_{ik} + r_4 dT_{ik} + r_5 \frac{da}{a} + r_6 da. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir mit B', L', T' die Koordinaten und die astronomisch bestimmten Azimute, mit $\delta B', \delta L', \delta T'$ die Fehler dieser Bestimmungen; ferner mit $\xi_i, \lambda_i, \xi_k, \lambda_k$ die Lotabweichungen in Breite und Länge der Punkte i resp. k , bezogen auf das Ellipsoid E_0 , so haben wir

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{B}_i + dB_i = B'_i + \delta B'_i - \xi_i, \\ \bar{L}_i + dL_i = L'_i + \delta L'_i - \lambda_i, \\ \bar{T}_{ik} + dT_{ik} = T'_{ik} + \delta T'_{ik} - \lambda_i \sin B_i, \end{array} \right.$$

und drei andere von entsprechender Bauart für den Punkt k .

Wir nennen dann S'_{ik} die Länge der Seite ik , die direkt durch Triangulation gefunden ist, $\delta S'_{ik}$ die entsprechende Korrektur, so daß

$$S'_{ik} + \delta S'_{ik} = \bar{S}_{ik} + dS_{ik}.$$

Vermittelt dieser letzten Gleichung und (82) eliminieren wir die dB, dL, dT, dS aus (81). Auf diese Weise kommen wir zu den drei Gleichungen:

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_k = B'_k - \bar{B}_k + \delta B'_k + p_1 (B'_i - \bar{B}_i + \delta B'_i - \xi_i) - p_2 \lambda_i \\ \quad + p_3 (S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + \delta S'_{ik}) + p_4 (T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + \delta T'_{ik}) \\ \quad + p_5 \frac{da}{a} + p_6 da, \\ \lambda_k = L'_k - \bar{L}_k + \delta L'_k - \delta L'_i \\ \quad + q_1 (B'_i - \bar{B}_i + \delta B'_i - \xi_i) - q_2 \lambda_i + q_3 (S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + \delta S'_{ik}) \\ \quad + q_4 (T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + \delta T'_{ik}) + q_5 \frac{da}{a} + q_6 da, \\ \lambda_k = \operatorname{cosec} B_k (T'_{ki} - \bar{T}_{ki} + \delta T'_{ki}) + r_1 (B'_i - \bar{B}_i + \delta B'_i - \xi_i) - r_2 \lambda_i \\ \quad + r_3 (S'_{ik} - \bar{S}_{ik} + \delta S'_{ik}) + r_4 (T'_{ik} - \bar{T}_{ik} + \delta T'_{ik}) \\ \quad + r_5 \frac{da}{a} + r_6 da. \end{array} \right.$$

Für die Koeffizienten dieser Gleichungen gibt Helmert²³⁴⁾ die folgenden Näherungswerte an.

234) Lotabweichungen, Heft 1, p. 10, 11, 13. Für die Koeffizienten mit den Indizes 1 bis 5 sind die vernachlässigten Größen von der 4. Ordnung bezüglich e und $\frac{\bar{S}}{a}$, für die Koeffizienten mit dem Index 6 von 3. Ordnung.

Setzt man

$$l = L_k - L_i, \quad b = B_k - B_i, \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}, \quad B = \frac{B_i + B_k}{2},$$

so wird:

$$p_1 = -\frac{W_k^3}{W_i^3} \cos l, \quad q_1 = -\frac{(1 - e^2) W_k}{W_i^3} \sin l \operatorname{tg} B_k,$$

$$r_1 = -\frac{\sin l}{\sin B_k \cos B_k} (1 - e^2 \sin^2 B \cos^2 B),$$

$$p_2 = p_4 \sin B_i, \quad q_2 = q_4 \sin B_i - 1, \quad r_2 = r_4 \sin B_i,$$

$$p_3 = W_k^3 \frac{\cos T_{ki}}{a(1 - e^2) \operatorname{arc} 1''}, \quad q_3 = r_3 = \frac{W_k \sin T_{ki}}{a \cdot \operatorname{arc} 1''} \sec B_k,$$

$$p_4 = -\frac{W_k^3 \sin T_{ki}}{a(1 - e^2)} m, \quad q_4 = \frac{W_k}{a} \cos T_{ki} \sec B_k m,$$

$$r_4 = q_4 - \frac{dm}{dS} \cdot \frac{1}{\sin B_k},$$

$$p_5 = -p_3 S_{ik}, \quad q_5 = r_5 = -q_3 S_{ik},$$

$$p_6 = -2b + \left(3b - \frac{l^2}{2} \sin B \cos B \operatorname{arc} 1''\right) \sin^2 B,$$

$$q_6 = l \sin^2 B_i \cos B_i \sec B_k, \quad r_6 = q_6 - b l \frac{\cos^3 B}{\sin B} \operatorname{arc} 1''.$$

m ist die reduzierte Länge des Bogens S_{ik} und zwar gilt mit genügender Annäherung:

$$\log \frac{m}{S} = -\frac{MS^2}{6a^2}, \quad \log \left(\frac{dm}{dS}\right) = -\frac{MS^2}{2a^2}, \quad M = 0,43429.$$

44. Fortsetzung. Bestimmung der Lotabweichungen. Ausgleichung. Es sei eine Gegend der Erde mit Triangulationen überdeckt, die in einem oder mehreren Punkten zusammenhängen. Die Triangulationen seien an unabhängige Basismessungen angeschlossen und jede für sich ausgeglichen²³⁵). Betrachten wir zunächst nur die *astronomischen Punkte*, so wird es unter diesen einige geben, in denen sowohl die Länge wie das astronomische Azimut bestimmt sind; diese nennen wir *Laplacesche Punkte*. In anderen Punkten wird außer der Breite entweder nur das Azimut oder nur die Länge bestimmt sein. Wir gehen nun von einem Zentralpunkt aus und ziehen Polygone, die durch die astronomischen Punkte hindurch zu den ent-

²³⁵) Wir werden nur voraussetzen, daß, wenn zwei Triangulationen eine Seite gemeinsam haben, die Länge der Dreiecksseiten derart geändert wird, daß ein event. Unterschied zwischen den beiden Werten der Seiten, die aus den beiden Triangulationen erhalten sind, beseitigt wird. Vgl. *Helmert*, Lotabw. § 3.

fernten Punkten hinführen. (Es kann vorkommen, daß ein und derselbe Punkt mit dem Zentralpunkt durch mehrere Polygonzüge verbunden ist.) Für jede Polygonseite schreiben wir dann die Gleichungen vom Typus (83); es ist klar, daß diese sich in der Weise kombinieren lassen, daß man Gleichungen erhält, in denen die ξ, λ irgend eines Punktes k auftreten und solche für den Zentralpunkt 1.²³⁶⁾ Die Lotabweichungen in Länge ergeben sich für die *Laplaceschen* Punkte aus (83) auf zwei Arten, aber der Vergleich zwischen dem astronomischen Azimut und dem aus der Triangulation abgeleiteten ist für Punkte, die vom Zentralpunkt weit entfernt sind, bedeutend ungenauer, als der Vergleich der Längen. Es ist deshalb zweckmäßig (wenigstens für eine erste Annäherung), nur die Längen zur Bestimmung der λ zu benutzen und sich der Azimute nur bei der Ausgleichung zu bedienen. Dies läuft darauf hinaus, daß man die Verbesserungen $\delta L'$ der astronomischen Längen gleich Null setzt. Es bleiben dann (abgesehen von den Verbesserungen $\delta B'$, welche offenbar nicht von den entsprechenden ξ getrennt werden können) in den Gleichungen (83) die Verbesserungen $\delta S'_{ik}$ und $\delta T'_{ik}$. Jede der Verbesserungen δT kann als Summe zweier Verbesserungen $u_i + v_{ik}$ betrachtet werden, von denen die erste (die für alle vom Punkte i ausgehenden Richtungen die gleiche ist) die Verbesserung der astronomischen Orientierung ist, während die zweite die Verbesserung der geodätischen Bestimmung der Richtung ik ist. Die Ausgleichung kann man dann auf Grund der Minimumsbedingung:

$$\sum \frac{(\delta S)^2}{m^2 S} + \sum \frac{u^2}{m_u^2} + \sum \frac{v^2}{m_v^2} = \text{Minimum}$$

ausführen, wo m der mittlere Kilometerfehler der geodätischen Bestimmung von S , m_u der mittlere Fehler der astronomischen Azimutbestimmung, m_v der einer geodätischen Richtungsbestimmung ist. — Die Bedingungsgleichungen können so in folgender Weise erhalten werden:

1) für jeden *Laplaceschen* Punkt liefert die Elimination von λ zwischen der zweiten und dritten Relation (83) eine Gleichung (erweiterte *Laplacesche* Gleichung);

2) für jedes geschlossene Polygon, das sich ergibt, wenn zwei Punkte i, k durch zwei verschiedene Polygonzüge (irk), (isk) verbunden sind, hat man drei Gleichungen, welche ausdrücken, daß die Werte

236) Indem man ξ_i, λ_i in den Gleichungen (83) bezüglich der Seite ik und den analogen bezüglich der Seite $1i$ eliminiert, hat man drei Gleichungen zwischen $\xi_1, \lambda_1, \xi_k, \lambda_k$.

ξ_k, λ_k des Punktes k aus (83) sich in derselben Weise ergeben, wenn man (irk) oder wenn man (isk) durchläuft, oder, was dasselbe ist: man erhält zwei Gleichungen, indem man die Identität der Werte von ξ_k, λ_k für die beiden Wege aus den ersten beiden Gleichungen (83) ausdrückt. Die dritte ergibt sich aus den *Laplaceschen* Gleichungen für die beiden Wege. In Wirklichkeit ist diese Gleichung nichts anderes als die Polygonwinkelgleichung (vgl. Netzausgleichung in Nr. 31) für das Polygon ($irksi$)²³⁷). Wenn man deshalb A *Laplacesche* Punkte hat, die mit einem *Laplaceschen* Zentralpunkt verbunden sind, und p geschlossene Polygone, so ergeben sich im ganzen $A + 3p$ Bedingungsgleichungen. Die praktischen Regeln für die numerische Aufstellung der Bedingungsgleichungen und für die Annahme der mittleren Fehler m, m_u, m_v können hier nicht auseinandergesetzt werden; wir verweisen in dieser Beziehung auf die genannten Arbeiten von *Helmert* und *A. Börsch* und *L. Krüger*, wo zahlreiche Beispiele zur Illustration der Theorie vorhanden sind²³⁸). Als Resultat der Ausgleichung ergeben sich schließlich die Lotabweichungen der verschiedenen Punkte mit Ausnahme des Zentralpunktes als lineare Funktionen (mit numerisch bekannten Koeffizienten) der Größen:

$$\xi_1, \lambda_1, \frac{da}{a}, da$$

(vgl. *Helmert*, Lotabw., Heft 1, § 31), wenn man absieht von den Fehlern $\delta B', \delta L'$ der astronomischen Längen- und Breitenbestimmung. Setzt man der Bequemlichkeit wegen η_i anstelle von $\lambda_i \cos B_i$, so ergeben sich Beziehungen folgender Art:

$$(84) \quad \begin{cases} \xi_i = a_i \xi_1 + b_i \eta_1 + c_i \frac{da}{a} + d_i da + l_i, \\ \eta_i = a'_i \xi_1 + b'_i \eta_1 + c'_i \frac{da}{a} + d'_i da + l'_i, \end{cases}$$

wo $a, b, \dots, a', b', \dots$ bekannte Zahlenwerte haben.

Will man ein Ellipsoid bestimmen, das sich demjenigen Teile der Erdoberfläche, auf dem sich die Triangulationen erstrecken, anschließt, so kann man als Bedingung nehmen²³⁹):

$$(85) \quad \Sigma(\xi^2 + \eta^2) = \text{Minim.},$$

237) Die sogenannte *Laplacesche* Gleichung ist nichts anderes als die Winkelgleichung für das Dreieck, welches den Nordpol und die beiden Punkte i und k zu Ecken hat.

238) *Helmert*, Lotabw., Heft 1, §§ 22—26; *A. Börsch* und *L. Krüger*, Die europ. Gradm. usw. Heft 2, Kap. 5, §§ 4—8.

239) Es ist klar, daß man dabei die verschiedene Genauigkeit, mit der ξ und η bestimmt sind, nicht berücksichtigt. Diese können nicht einfach wie

wodurch das Problem auf die Formeln der Methode der kleinsten Quadrate zurückgeführt ist. Die Fehlergleichungen sind die Gleichungen (84), zu denen man hinzufügen muß:

$$\xi_1 = \xi_1, \quad \eta_1 = \eta_1.$$

45. Fortsetzung. Angenäherte Bestimmung von Geoidstücken. Bestimmt man die Komponenten ξ, η der Lotabweichung für eine große Zahl von Punkten, so kann man dadurch näherungsweise eine Niveaufläche in der betrachteten Gegend konstruieren. Wir betrachten eine Reihe von Punkten, die ungefähr längs einer geodätischen Linie l liegen; für einen beliebigen Punkt derselben P_i seien ξ_i, η_i die Werte von ξ, η . Ist α_i das Azimut von l in P_i , so ist die Komponente der Lotabweichung in der Richtung l und im Punkte P_i ²⁴⁰⁾:

$$(86) \quad \gamma_i = \xi_i \cos \alpha_i + \eta_i \sin \alpha_i.$$

Nennen wir H_i, H_k die Erhebungen des Geoids über dem Ellipsoid in den Punkten P_i, P_k , so hat man mit genügender Genauigkeit:

$$(87) \quad H_k - H_i = \int_i^k \gamma \, dl,$$

wo dl ein Element der Linie l ist. Die Integration kann man näherungsweise durch mechanische Quadratur ausführen, indem man die Entfernungen l als Abszissen und die durch (86) gegebenen Werte γ als Ordinaten nimmt. Man muß natürlich den Wert von H in einem Punkte kennen, oder a priori annehmen. Die Frage hängt mit der *Reduktion der Basislinien auf das Meeresniveau* zusammen (Nr. 25). Die Basislinien müßten streng genommen auf das Referenzellipsoid reduziert werden, während wir sie auf das Meeresniveau reduzieren, was darauf hinausläuft, willkürlich in einem bestimmten Punkte des Triangulationsgebietes $H = 0$ zu setzen. Solange man indessen nur begrenzte Gebiete der Erde betrachtet, interessieren nur die relativen Werte der Höhen, und es kann deshalb die Willkür bei der Wahl des Nullpunktes für die Höhen nicht als ein Mangel der oben angegebenen Methode angesehen werden.

Beobachtungsfehler behandelt werden; die Formel (85) muß deshalb nur für den Ausdruck eines konventionellen Verfahrens angesehen werden, um dasjenige Ellipsoid zu bestimmen, das sich in der betrachteten Gegend dem Geoid am besten anschließt.

240) Man findet dies leicht aus den Entwicklungen in Nr. 7. Die Grundlage für das analytische Studium des Geoids wurde von *Bessel* geliefert (vgl. Zit. unter Fußn. 228).

Wenn die Werte von H für verschiedene Serien von Punkten in verschiedenen Richtungen²⁴¹⁾ bestimmt sind, so kann man die Gestalt und Lage des Geoids zum Ellipsoid in der betrachteten Gegend graphisch nach topographischer Methode oder mit Hilfe von Niveau-kurven ($H = \text{konst.}$), wie man sie in der niederen Geodäsie zur Darstellung der Höhenverhältnisse benutzt, darstellen²⁴²⁾.

Man kann auch analytische Hilfsmittel zur Bestimmung des Geoids, wenigstens in der betrachteten Gegend, heranziehen. Setzt man in einem Punkte P :

$$H = A_1 \Delta_\varphi + A_2 \Delta_\omega + B_1 \Delta_\varphi^2 + 2B_2 \Delta_\varphi \Delta_\omega + B_3 \Delta_\omega^2 + \dots,$$
 wo $\Delta_\varphi, \Delta_\omega$ die Breiten- und Längendifferenzen zwischen dem Punkt P und dem Zentralpunkte mit $H = 0$ sind, so ergibt sich mit genügender Genauigkeit:

$$(88) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{e} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{1}{e} (A_1 + 2B_1 \Delta_\varphi + 2B_2 \Delta_\omega + \dots), \\ \eta &= \frac{1}{N \cos \varphi} \frac{\partial H}{\partial \omega} = \frac{1}{N \cos \varphi} (A_2 + 2B_2 \Delta_\varphi + 2B_3 \Delta_\omega + \dots) \end{aligned}$$

(ϱ, N Hauptkrümmungsradien in P)^{242a)}.

Wendet man diese Relationen auf Punkte an, in denen ξ, η bestimmt sind, so können sie zur Bestimmung einer gewissen Zahl der Koeffizienten A, B dienen. Man benutzt auch trigonometrische Entwicklungen²⁴³⁾:

$$H = b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots,$$

wo

241) Es ist natürlich notwendig, daß eine Linie vorhanden ist, welche alle anderen kreuzt, damit man alle H von einem einzigen Ausgangspunkte ($H=0$) ableiten kann.

242) Als Beispiel einer Bestimmung von Profilen oder von ebenen Schnitten des Geoids vgl. bei *Helmert* (H. G. 1, p. 568) die Bestimmung eines Meridianprofils in der Harzgegend; ferner vgl. *Int. Erdm.* 1888, p. 19 (und die beigegebene Karte). Die topographische Darstellung des Geoids ist von *C. G. Andrae* (Problèmes de haute géodésie, 3^{me} cahier, p. 53) für die Gegend des Harzes und des Thüringer Waldes auf Grund der Lotstörungen ξ und unter Annahme einer willkürlichen Hypothese bezüglich der Werte λ längs eines Parallels versucht worden. *Pomerantzeff* hat eine solche Darstellung für das Gebiet zwischen den Flüssen Kara- und Syr-Darja in Zentralasien (zw. den Br. $40^\circ 15'$ und $41^\circ 15'$ und d. L. $39^\circ 30'$ und $42^\circ 25'$ östl. von Pulkowa) angegeben. Die Abhandlung von *Pomerantzeff* findet sich in russischer Sprache in den *Denkschr. der Milit.-topogr. Abteilg. des Generalstabs, St. Petersburg 1897*, p. 76; ein Auszug aus ihr in: *Bull. astr.* 14 (1897), p. 479. Bezüglich der Bestimmung begrenzter Teile des Geoids vgl. *Helmert*, *Zit. der Fußnote 39*, ferner die Zitate zu Nr. 53.

242*) Beispiel hierzu *James and Clarke*⁵²⁾.

243) *Bessel*, *Zit. der Fußn.* 228, § 10.

$$b_i = b_{i0} + b_{i1} \sin y + b_{i2} \sin 2y + \dots,$$

$$a_i = a_{i0} + a_{i1} \sin y + a_{i2} \sin 2y + \dots$$

ist, und wo x, y geeignet gewählte Vielfache der $\Delta_\varphi, \Delta_\omega$ sind. Aber im allgemeinen ist zu erwarten, daß diese analytischen Hilfsmittel keine besseren Resultate liefern als die oben erwähnte topographische Methode. Die lokalen Geoidstörungen sind zu sehr mit den geologischen Oberflächenverhältnissen der Erdkruste verknüpft, als daß man hoffen könnte, daß sich die Änderungen von H in einer nur einigermaßen ausgedehnten Gegend genügend durch eine einfache Formel darstellen ließen.

A. J. Yvon Villarceau²⁴⁴) hat vorgeschlagen, die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid durch ein doppeltes Nivellement, ein trigonometrisches und ein geometrisches, zu bestimmen; das erste gibt die Höhen der Punkte in bezug auf das Ellipsoid, das zweite in bezug auf das Geoid. Die Methode hat augenblicklich gar keine praktische Bedeutung wegen der großen Ungenauigkeit der trigonometrischen Nivellementsergebnisse, die durch die Refraktion verursacht wird. Außerdem ist zu bemerken, daß die in die Rechnung eingeführten Zenitdistanzen auf das Ellipsoid und nicht auf das Geoid bezogen sind, und deshalb ist an die beobachteten Zenitdistanzen die in Nr. 7 angegebene Korrektion anzubringen, wozu bereits eine wenigstens angenäherte Kenntnis der Lotabweichungen notwendig ist.

Von theoretischem Interesse ist auch die Methode von E. B. Christoffel²⁴⁵) zur Bestimmung einer Fläche, wenn die Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte gegeben sind.

Von den theoretischen Untersuchungen über das Geoid nennen wir noch das Theorem von Villarceau²⁴⁶), das die geometrische Bedingung ausdrückt, der ein orthogonales Strahlensystem genügen muß; in unserer Bezeichnungsweise kann man es schreiben:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{\partial(\eta \cos \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Diese Bedingung müßte man berücksichtigen, wenn man die ξ, η nach Potenzen von $\Delta_\varphi, \Delta_\omega$ entwickeln wollte. Aber sie ist schon mit genügender Annäherung berücksichtigt, wenn man bei der Bestimmung der ξ, η die in Nr. 43, 44, angegebenen Methoden anwendet, oder

244) J. de math. 18 (1873), p. 393.

245) J. f. Math. 64 (1864), p. 193; V. Reina [Rom. Accad. Lincei (5) 2 (1893), p. 287] hat eine Methode zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien angegeben.

246) Vgl. Fußnote 244, p. 412.

wenn man von einem analytischen Ausdruck für H , wie oben angegeben ist, ausgeht²⁴⁷).

46. Die Schwerestörungen und die Abweichungen zwischen Geoid und Ellipsoid. Wie die Schwerkräftsmessungen, wenn sie sich auf die ganze Erdoberfläche erstrecken, zur Bestimmung der Abweichungen H dienen können, haben wir schon in Nr. 4 bei Gelegenheit der Formel von *Stokes* erwähnt; aber eine solche Formel kann augenblicklich noch nicht mit Sicherheit angewandt werden. Bestimmungen von H durch lokale Schwerestörungen sind unmöglich, wenn man nicht a priori Voraussetzungen über die geologischen Verhältnisse der Oberflächenschichten der Erde macht, da die Schwerestörung in jedem Punkte sowohl von dem lokalen Werte von H als auch von lokalen Unregelmäßigkeiten in der Konstitution der Erdrinde abhängt²⁴⁸). Daß diese Unregelmäßigkeiten durchaus nicht zu vernachlässigen sind, kann heutzutage als sicher bewiesen angenommen werden. Indessen sei in dieser Beziehung, was den Zusammenhang zwischen der Schwerkraft und der Erddichte betrifft, auf die Geophysik verwiesen.

III. Summarische Entwicklungsgeschichte der geodätischen Kenntnisse.

47. Anfänge der geodätischen Messungen, bei denen die Erde als Kugel betrachtet wird. — Die Kugelgestalt der Erde wurde von den alten Griechen (*Aristoteles*, *Archimedes*, *Pythagoras*) aus rein metaphysischen Gründen angenommen und vor ihnen noch von den Chaldäern (vgl. *Bailly*, *Astron. ancienne*). Der erste Versuch, den Erdumfang wirklich auszumessen, ist, soweit wir sichere Nachrichten haben, von *Eratosthenes* aus Cyrene (geb. 276 v. Chr.) unternommen worden. Dieser bestimmte durch Meridianbeobachtungen der Sonne den Breitenunterschied zwischen Alexandria und Syene in Ägypten zu $7^{\circ} 30'$; indem er dann die Entfernung der beiden Orte nach der Marschdauer zu 5000 Stadien ermittelte, fand er den Erdumfang $E = 2\,500\,000$ Stadien. *Posidonius* (geb. 135 v. Chr.) leitete aus dem Bogen Rhodus-Alexandria, dessen Breitendifferenz er mit Hilfe der

247) Bezüglich der geodätischen Rechnungen auf einer Oberfläche, die sich wenig vom Ellipsoid unterscheidet, vgl. *P. S. Laplace*, *Méc. cél.* 2, 3. Buch, § 38; *Bessel*²²⁸); *L. Puissant*, *Traité de géodésie*; *E. F. Minding*, *J. f. Math.* 44 (1852), p. 66; *James and Clarke*, *Ordn. trigon. survey etc.*, p. 609 ff.; *O. Bonnet*, *Ann. di mat.* 2 (1859), p. 46, 113, 180; *E. Pucci*, *Ann. di mat.* (2) 14 (1886), p. 199.

248) *Helmert*, *H. G.* 2, p. 261, Formel (10).

Höhen von Kanopus bestimmte, $E = 2\,400\,000$ Stadien ab. Das von beiden benutzte Stadion ist sehr wahrscheinlich das olympische, dessen Länge von *Ukert* zu 570 Pariser Fuß²⁴⁹⁾ (entsprechend 185 m) bestimmt ist. Es würde deshalb nach *Eratosthenes* der Erdquadrant sich zu 11 562 km, nach *Posidonius* zu 11 100 km ergeben. Über diese Messungen des *Eratosthenes* und des *Posidonius* hat uns *Kleomedes*²⁵⁰⁾ Nachrichten hinterlassen. Eine Messung eines Meridianbogens von 2 Grad mit Hilfe von Stäben wurde von den Arabern im Jahre 827 auf Befehl des Khalifen Almamun in der Ebene von Sandjar in Mesopotamien ausgeführt. Das Messungsergebnis ist in arabischen Ellen angegeben. Setzt man eine Elle²⁵¹⁾ = 0,540 m, so erhält man den Erdquadranten $Q = 11\,016$ km.

Von der Zeit der Griechen bis 1525 liegt keine Nachricht über irgend eine in Europa ausgeführte Messung vor²⁵²⁾. In diesem Jahre maß *Fernel*, ein französischer Arzt, die Entfernung Paris-Amiens, indem er die Anzahl der Umläufe eines Wagenrades zählte, und erhielt $Q = 10\,011$ km, wobei er die Breitendifferenz durch Sonnenbeobachtungen bestimmte.

Die modernen geodätischen Operationen wurden von *Willebrord Snellius* (1580—1626) eingeleitet, der zum ersten Mal sich der Triangulation bediente²⁵³⁾. Er berechnete den Meridianbogen zwischen den Breitenkreisen von Alkmaar und Bergen-op-Zoom in Holland (Amplitude ca. $1^{\circ} 11'$) durch eine Kette von 33 Dreiecken, indem er die Winkel mit Hilfe eines geteilten Halbkreises von ungefähr $3\frac{1}{2}$ Fuß Durchmesser maß. Die Basis von ca. 1230 m Länge wurde zweimal mit einer Kette und dann mit einem Holzstab gemessen; die Breiten der beiden Endpunkte wurden mit einem Quadranten von $5\frac{1}{2}$ Fuß Durchmesser bestimmt. Nachdem *Snellius* ein astronomisches Azimut

249) *L. Posch*, Breitengradmessungen, p. 26. Vgl. darin auch den Anhang: Über die französische Stadienhypothese.

250) *De motu circulari corporum coelestium*, Leipzig 1891, lib. I, cap. X. *Kleomedes* spricht noch von einer anderen Messung, die von *Posidonius* ausgeführt wurde, aber *J. S. Bailly* (*Astron. moderne*, p. 163) bezweifelt ihre Echtheit.

251) Die Länge der arabischen Elle wurde auf Grund hydrometrischer Messungen am Nil bei Kairo bestimmt (*Jordan*, Handbuch 3, p. 4).

252) Bezüglich der Anschauungen, die im Mittelalter über die Gestalt der Erde Geltung hatten, vgl. *Bailly*, *Astron. ancienne*; *Gore*, *Geodesy*; ferner *G. Marinelli*, *La geografia e i padri della Chiesa*, Roma 1882 (aus dem Italienischen übersetzt, Leipzig 1884); *S. Günther*, *Studien zur Geschichte der math. und phys. Geographie*, Halle 1877.

253) *W. Snellius van Roijen*, *Eratosthenes Batavus, seu de terrae ambitus quantitate vera suscitatus*, Lugduni Batavorum 1617.

in Leiden gemessen hatte, erhielt er die Länge des Meridianbogens, indem er eine Reihe von Dreiecksseiten auf den Meridian projizierte und dabei *wie in der Ebene rechnete*. Die Messungen wurden 1622 von *Snellius* wiederholt, und die neuen von *Musschenbroek*²⁵⁴⁾ veröffentlichten Resultate ergaben $Q = 10\,004$ km.

Es sind dann die beiden folgenden Messungen zu erwähnen: Bogen von London bis York, von *R. Norwood* direkt mit der Kette gemessen (1635); Bogen bei Modena, im Jahre 1645 von *G. B. Riccioli* und *F. M. Grimaldi*²⁵⁵⁾ durch eine Triangulation gemessen. Die Amplitude des Bogens wurde durch Beobachtung reziproker Zenitdistanzen erhalten, eine Methode, die zweifellos sehr bequem wäre, wenn nicht die Unsicherheit der atmosphärischen Refraktion die Resultate fast illusorisch machte²⁵⁶⁾.

Auf Betreiben *Ludwigs XIV.* beschäftigte sich die französische Akademie in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts mit dem Studium der Erdgestalt und beauftragte *J. Picard*, in Frankreich den Bogen zwischen Amiens und Malvoisine (36 km südlich von Paris) zu messen. *Picard*²⁵⁷⁾ bildete eine Kette von 13 Dreiecken, indem er von einer Basis von 5622 Toisen ausging, die in der Nähe des Südens gemessen war. Eine Kontrollbasis von 3900 Toisen wurde bei Amiens²⁵⁸⁾ gemessen. Die Breiten wurden in Malvoisine, in Amiens und in Sourdon (bei Amiens) bestimmt. Auf diese Weise wurden zwei Meridianbogen erhalten: Malvoisine-Sourdon (Ampl. $1^{\circ}12'$) und Malvoisine-Amiens ($1^{\circ}23'$), aus denen im Mittel die Länge eines Grades zu 57060 Toisen folgte.

Bei diesen Messungen wurden zum ersten Mal die Winkel mit Hilfe eines Fernrohrs mit Fadenkreuz gemessen²⁵⁹⁾ und zum ersten Mal

254) *Physicae, experimentales et geometricae dissertationes*, Leyden 1729.

255) *F. X. von Zach*, *Corresp. astron.* 2 (1819), p. 115.

256) *F. Maurolico* schlägt 1543 vor, den Erddurchmesser aus der Länge der Tangente abzuleiten, die von einem Punkte in bekannter Höhe an die sichtbare Erdkugel gezogen ist; *T. W. Wright* (ungef. 1595) führte in England eine Messung aus, die sich auf eine etwas verschiedene Methode gründet, indem er nämlich die Horizontaldepression eines Punktes von bekannter Höhe beobachtete (vgl. *O. Zanotti-Bianco*, *Sopra una vecchia e poco nota misura del semidiametro terrestre*, Turin 1894).

257) *J. Picard*, *La mesure de la terre*, Paris 1671; später aufgenommen in: *Paris Mém. Acad.* 1718 (1720), 2^e partie, p. 1.

258) Mit Unrecht schreibt man der peruanischen Expedition von 1735 das Verdienst zu, zum ersten Mal eine Kontrollbasis gemessen zu haben.

259) Der Quadrant von *Picard* war in Wirklichkeit mit 2 Fernrohren versehen, von denen das eine gegen das andere *beweglich* war wie bei den späteren *Repetitionsinstrumenten* von *J. C. Borda*.

zur Messung der Grundlinien vier Maßstäbe (*Endmaße*) benutzt. Dem sphärischen Exzeß wurde keine Rechnung getragen, indem die Dreiecke als eben behandelt wurden.

Die Fortsetzung der *Picardschen* Messungen durch ganz Frankreich von Dunkerque bis Collioure wurde nacheinander von *J. D. Cassini*, *J. Cassini* (Sohn des Vorhergehenden), *Ph. de Lahire*, *G. F. Maraldi*, *C. A. Couplet* und *J. M. de Chazelles* von 1683 bis 1718 ausgeführt und lieferte einen Meridianbogen von ungefähr $8\frac{1}{3}^{\circ}$.²⁶⁰) Es ergab sich aus diesen Messungen die folgende Länge für einen Meridiangrad:

Aus dem Südbogen	$1^{\circ} = 57\,098$	Toisen
aus dem Bogen Paris-Amiens	$1^{\circ} = 57\,060$	„
aus dem Nordbogen	$1^{\circ} = 56\,960$	„

Die Grادلängen schienen also nach Norden abzunehmen. Dies veranlaßte die französischen Astronomen zu der Annahme, daß die Erde sich nach den Polen zu verlängere. So wurde die Abplattung der Erde durch die Resultate ungenauer geodätischer Beobachtungen in Zweifel gezogen²⁶¹).

48. Physikalische Untersuchungen über die Gestalt der Erde²⁶². Wichtige Einwürfe gegen die Kugelgestalt der Erde waren schon vom *mechanischen* Standpunkte aus erhoben worden. *J. Richer* beobachtete in Cayenne (5° nördl. Br.) im Jahre 1672, daß das Pendel einer Uhr, welche von Frankreich nach dort transportiert war, langsamer als in Paris schwang und daß es um $1\frac{1}{4}$ Pariser Linie verkürzt werden mußte, um normalen Gang zu erhalten; die Schwere nahm also mit der Breite ab²⁶³). *J. Newton* und *Ch. Huygens* behaupteten, daß die

260) *J. Cassini*, *Traité de la grandeur de la terre et de sa figure*, Paris Mém. Acad. 1718 (1720), p. 1. Die Messungen wurden von *C. F. Cassini de Thury* und *N. L. de Lacaille* (1739–40) wiederholt. Vgl. *C. F. Cassini de Thury*, Paris Mém. Acad. 1740 (1742), p. 276.

261) Nach *Todhunter*, *History* § 76 erscheint die Hypothese des verlängerten Erdsphäroids, aus Gradmessungen abgeleitet, zum ersten Male bei *J. Eisen Schmidt*, *Diatriba de figura telluris*, Straßburg 1691. *J. Cassini* stellte diese Hypothese auf in: *De la figure de la terre*, Paris Mém. Acad. 1713 (1739), p. 187. Auch die Messungen von Parallelkreisbogen durch *J.* und *C. F. Cassini* (1733–35) schienen die Verlängerung der Erde an den Polen zu bestätigen (*Todhunter*, *History* §§ 215, 224, 226).

262) Wir beschränken uns darauf, einige mathematisch-physikalische Untersuchungen anzuführen, die mit dem Problem der Erdgestalt in direkter Beziehung stehen. Vgl. dazu: *Todhunter*, *History* und *O. Zanotti-Bianco*, *Il problema meccanico della figura della terra*, Turin 1880–85.

263) Bezüglich weiterer Pendelbeobachtungen in jener Zeit vgl. *Todhunter*, *History* 1, Kap. 3.

Zentrifugalkraft nicht genüge, um die beobachtete Verminderung zu erklären und daß man deshalb der Erde eine sphäroidische Gestalt mit Abplattung an den Polen zuschreiben müsse. In den Prop. 18 und 19 des dritten Buches der „Principia“²⁶⁴) von *Newton*, die seine Theorie der Erdgestalt auf Grund der allgemeinen Anziehung enthalten, stellt er sich die Aufgabe, zu berechnen, wieviel der flüssige Teil der Erde am Äquator höher sein müsse als an den Polen, damit die Meere im Gleichgewichte seien (Prop. 18). Von diesem Gesichtspunkte aus denkt er sich zwei Kanäle, welche von der Oberfläche zum Erdmittelpunkt gehen, der eine längs eines Äquatorradius, der andere längs einer polaren Halbachse, und stellt dann unter der Voraussetzung, daß die Erde homogen sei und ellipsoidische Gestalt habe, die Bedingung auf, daß das Gesamtgewicht der beiden Kanäle dasselbe sei. In moderner Sprache kann man den Gedankengang *Newtons* so wiedergeben: Die Anziehung eines homogenen Rotationsellipsoids von der Abplattung ε auf das eine Ende der kleinen Achse steht zur Anziehung auf einen Äquatorpunkt²⁶⁵) in dem Verhältnis $(1 + \frac{\varepsilon}{5}) : 1$ und deshalb verhält sich die Schwere am Pol zu der am Äquator wie $(1 + \frac{\varepsilon}{5}) : (1 - \frac{1}{289})$, wobei $\frac{1}{289}$ das Verhältnis zwischen der Zentrifugalkraft und der Schwere am Äquator ausdrückt.

Wenn man sich den polaren und den äquatorialen Radius in die gleiche Anzahl gleicher Teile zerlegt denkt, so ist das Verhältnis der Schwerkraft in zwei entsprechenden Punkten dasselbe, weil für zwei ähnliche homogene Ellipsoide die Anziehungen auf homologe Punkte sich wie die linearen Dimensionen verhalten und weil andererseits die Zentrifugalkraft der Entfernung vom Mittelpunkte proportional ist. Deshalb verhalten sich die totalen Drucke der beiden Kanäle auf ihren Schnittpunkt wie $(1 + \frac{\varepsilon}{5}) : (1 - \frac{1}{289}) \cdot (1 + \varepsilon)$. Damit dieses Verhältnis = 1 sei, muß $\varepsilon = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{289} = \text{ca. } \frac{1}{230}$ sein²⁶⁶). In Prop. 20 berechnet *Newton* das Gesetz für die Änderung der Schwerkraft vom Pol zum Äquator unter der Bedingung, daß man $gr = \text{konst.}$ habe,

264) Prop. 18 lautet: Axes planetarum diametris quae ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse. Prop. 19: Invenire proportionem axis planetae ad diametros eisdem perpendiculares.

265) Die höheren Potenzen von ε außer der ersten sind vernachlässigt.

266) *Newton* (Principia, liber III, prop. 20) behauptet zu unrecht, daß die Abplattung, wenn die Erddichte nach innen wachse, größer sein müsse als im Falle einer homogenen Erde. *A. C. Clairaut* hat auf den Fehler *Newtons* aufmerksam gemacht (De la figure de la terre etc. Paris 1743, 2. Teil, §§ 35 u. 50).

wenn g die Schwerkraft am Ende des Halbmessers r bedeutet. Aus dieser Bedingung, die theoretisch ungenügend ist, leitet er ein wenigstens bis auf Größen zweiter Ordnung richtiges Resultat ab, nämlich $g = g_0(1 + \varepsilon \cdot \sin^2 \varphi)$, eine Näherungsformel, durch welche die Schwerkraft unter der Annahme eines homogenen Ellipsoides ausgedrückt ist. *Ch. Huygens*²⁶⁷⁾ fand unter der Voraussetzung, daß die Anziehungskraft nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet sei, die Abplattung zu $\frac{1}{578}$. Er benutzt bei seinen Überlegungen zwei Kanäle, von denen der eine äquatorial, der andere beliebig gelegen ist, und nimmt an, daß die Anziehungskraft konstant sei, bemerkt aber dann, daß man zu demselben Gesetze gelange, wenn man annähme, sie ändere sich dem *Newtonschen* Gesetze entsprechend.

A. C. Clairaut hat gezeigt, daß die Rechnung von *Huygens* darauf hinauslief, die Erdmasse im Mittelpunkt sich kondensiert zu denken.

Newton hat *a priori* das Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur angenommen, *J. Stirling*²⁶⁸⁾ dagegen ging lediglich von einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse aus. Er stellte als Gleichgewichtsbedingung die Forderung auf, daß die Resultante der Anziehungskraft und der Zentrifugalkraft in Punkten der freien Oberfläche normal zu ihr stehen müsse²⁶⁹⁾, und bewies so, daß in erster Annäherung das abgeplattete Rotationsellipsoid in der Tat Gleichgewichtsfigur sein kann²⁷⁰⁾. Ferner bestimmte er das Verhältnis zwischen der Abplattung und der Winkelgeschwindigkeit.

*C. Mac Laurin*²⁷¹⁾ konnte auf Grund seiner Entdeckungen über die Anziehung von Ellipsoiden die genaue Beziehung zwischen der Exzentrizität und der Rotationsgeschwindigkeit für eine homogene rotierende Flüssigkeitsmasse feststellen. *T. Simpson*²⁷²⁾ zeigte dann, daß für jede gegebene Winkelgeschwindigkeit nicht nur ein, sondern zwei Rotationsellipsoide den Gleichgewichtsbedingungen genügen²⁷³⁾.

267) *Traité de la lumière avec un discours sur la cause de la pesanteur*, Leyden 1690.

268) On the figure of the earth and the variation of gravity on the surface, Lond. Phil. Trans. 39 (1735), p. 98.

269) *Huygens* hatte eben dieses Prinzip aufgestellt, zog es aber dann vor, die Methode der Kanäle zu benutzen.

270) *Clairaut* bewies dasselbe unabhängig von *Stirling*, Lond. Phil. Trans. 40 (1737), p. 19.

271) *A treatise on fluxions etc.*, London 1742.

272) *A mathematical dissertation on the figure of the earth*, London 1743.

273) Dasselbe wurde von *J. L. d'Alembert* bewiesen (*Opusc. math.* 46), der in allgemeinerer Weise zeigte, daß eins der beiden Ellipsoide instabil ist. *P. S. Laplace* (*Méc. céleste* liv. 3, chap. 3) bewies, daß in Wirklichkeit nicht mehr als

*Clairaut*²⁷⁴⁾ studierte außer dem Fall eines homogenen Planeten auch den eines solchen, der aus festen, homogenen, von Kugelschalen wenig abweichenden Schichten von verschiedener Dichte zusammengesetzt und von einer homogenen Flüssigkeit umgeben ist. Ferner betrachtete er einen flüssigen Planeten, der von homogenen, annähernd sphärischen Schichten von verschiedener Dichte gebildet wird. Für beide Fälle zeigte er, daß das Ellipsoid Gleichgewichtsfigur sein *kann* und gab die Differentialgleichung an, welche die Änderung der Elliptizität der verschiedenen Schichten bestimmt, wenn das Gesetz der Änderung der Dichte bekannt ist. In der Abhandlung „An inquiry concerning the figure of such planets etc.“ stellte er zum ersten Male das berühmte *Clairautsche* Theorem auf (vgl. 4, § 5 dieser Abhandlung)²⁷⁵⁾.

*A. M. Legendre*²⁷⁶⁾ zeigte durch Benutzung der von ihm erfundenen Koeffizienten P_n (Kugelfunktionen), daß die *einzig*e Gleichgewichtsfigur für eine homogene, um eine Achse rotierende Flüssigkeitsmasse das Rotationsellipsoid ist, wenn man annimmt, daß die Oberfläche wenig von einer Kugel verschieden ist. Aber der Beweis von *Legendre* setzt *a priori* voraus, daß die Oberfläche eine Rotationsfläche ist; diese willkürliche Beschränkung wurde von *P. S. Laplace*²⁷⁷⁾ aufgehoben. Es ist indes zu

zwei Rotationsellipsoide als Gleichgewichtsfiguren existieren können und daß diese Ellipsoide reell sind, falls die Größe $v = \frac{\omega^2}{2k\pi\rho} < 0,2246$ (ω = Winkelgeschwindigkeit, ρ = Dichte, k = Attraktionskonstante). Schließlich behauptete *K. G. J. Jacobi* (Ann. Phys. Chem. 33 (1834), p. 229), daß auch ein Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen Gleichgewichtsfigur sein kann und daß die dritte Achse und die Winkelgeschw. bestimmt sind, wenn man zwei Achsen willkürlich annimmt. *J. Liouville* (J. écol. polyt. 23 (1834), p. 289) gab den Beweis dafür und *C. O. Meyer* (J. f. Math. 24 (1842), p. 44) zeigte, daß für jeden gegebenen Wert der Winkelgeschwindigkeit außer den beiden bekannten Rotationsellipsoiden als Gleichgewichtsfigur ein einziges dreiachsiges Ellipsoid existiert, wenn das Verhältnis v kleiner als 0,1871 ist. Im Falle der Erde ist $v = 0,0023$ und die drei Achsen des *Jacobischen* Ellipsoides stehen im Verhältnis 1 : 1,02 : 19,57, wobei die kleinste Achse die Rotationsachse ist. Vgl. auch *Liouville*, J. de math. 16 (1851), p. 241.

274) Théorie de la figure de la terre etc., Paris 1743.

275) London Phil. Trans. 40 (1738), p. 277. In Wirklichkeit gibt der Satz von *Clairaut* eine Beziehung zwischen dem relativen Anwachsen der Schwere vom Äquator zum Pol, der wahren Abplattung und derjenigen Abplattung, welche der Hypothese einer homogenen Erde entsprechen würde. Setzt man für die letztere $\frac{5}{4}$ des Verhältnisses zwischen Schwerkraft und Zentrifugalkraft, so hat man den Satz von *Clairaut* in der bekannten Form.

276) Paris Mém. Acad. 1784 (1787), p. 370. Nach *Todhunter* geht diese Abhandlung der von *Laplace* von 1782 voraus.

277) Paris Mém. Acad. 1782 (1785), p. 113; vgl. auch Méc. céle., t. 2, livr. 3,

bemerken, daß die Rechnung von *Legendre* sich nicht wie die von *Laplace* auf Glieder beschränkt, welche die erste Potenz der Abplattung enthalten. *Legendre*²⁷⁸) dehnte dann den Beweis auf den Fall eines festen Planeten aus, der aus homogenen, *ähnlichen* Schichten zusammengesetzt ist und auf den eines flüssigen, aus ellipsoidischen Schichten aufgebauten Planeten. *Laplace* bewies in der *Méc. cél.*²⁷⁹), daß das Rotationsellipsoid in zwei Fällen Gleichgewichtsfigur ist:

1. für einen homogenen,
2. für einen flüssigen, nicht homogenen Planeten, wenn die Dichte von innen nach außen abnimmt und die Flächen gleicher Dichte wenig von Kugeln sich unterscheiden²⁸⁰).

49. Die wichtigsten geodätischen Messungen bis 1860. Nach dieser Abschweifung wenden wir uns jetzt dazu, die hauptsächlichsten Gradmessungen aufzuzählen.

Die Resultate der französischen Messungen, die von *J. Cassini* von 1716 bis 1733 veröffentlicht wurden, und die theoretischen Untersuchungen von *Newton* teilten die wissenschaftliche Welt in zwei Lager, von denen das eine für ein verlängertes, das andere für ein abgeplattetes Ellipsoid eintrat²⁸¹). Die Frage wurde auf Veranlassung der französischen Akademie durch eine geodätische Doppelexpedition nach Peru und Lappland gelöst. *P. L. M. Maupertuis*²⁸²), *A. C. Clairaut* und andere maßen in Lappland (1736—37) den Meridianbogen zwischen Kittis und Torneå (Ampl. ca. 57,5'), während *P. Bouguer*, *C. M. de la Condamine* und *L. Godin*²⁸³) in der Gegend der heutigen Republik Ecuador den Bogen zwischen Cotchesqui und Tarqui (Ampl. 3° 7') maßen (1735—41). Wertvolle Fortschritte bei diesen Messungen waren:

chap. 4. Zu denselben Resultaten im Falle einer rotierenden Flüssigkeitsmasse gelangten auch *J. L. d'Alembert* und *J. Ivory*, aber auf unbefriedigendem Wege (vgl. *Todhunter*, *History* §§ 75, 1422, 1430).

278) *Paris Mém. Acad.* 1789 (1795), p. 372.

279) Vol. 2, livre 3, chap. 4.

280) Für den ersten Fall gab *Laplace* außer dem Beweise mit Hilfe der Kugelfunktionen noch einen anderen, wenig befriedigenden, welcher dann von *J. Liouville* und *S. D. Poisson* so umgeformt wurde, daß er einwandfrei war (*J. de math.* 2 (1837), p. 286).

281) Über die Geschichte dieses Streites vgl. *Todhunter*, *History* 1, cap. 3, 4, 7.

282) *P. L. M. Maupertuis*, *La figure de la terre déterminée par les observations au cercle polaire*, Amsterdam 1738.

283) *P. Bouguer*, *La figure de la terre dét. par les observ. aux environs de l'équateur*, Paris 1749; *C. M. de La Condamine*, *Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral*, Paris 1751.

der Gebrauch von Mikrometern für die Ablesung der Kreisteilungen, eine genauere Kenntnis der Sternpositionen und eine größere Genauigkeit bei den Basismessungen. Die beiden Expeditionen stellten die Abplattung der Erde außer Zweifel, obgleich der aus ihren Messungen abgeleitete Abplattungswert²⁸⁴⁾ $= \frac{1}{215}$ ziemlich stark von dem wirklichen abweicht.

Wir erwähnen dann in Italien ausgeführte Messungen, wo *R. G. Boscovich* und *C. A. Lemaire* einen Bogen zwischen Rom und Rimini²⁸⁵⁾ (1751—53), *G. B. Beccaria*²⁸⁶⁾ einen solchen zwischen Mondovi und Andrate (in der Nähe von Ivrea) (1762—64), mailändische Astronomen in der Lombardei maßen (1788). Später wurden die Triangulationen von Piemont und der Lombardei zugleich mit den französischen (1821—23) und denen des Kirchenstaates in Angriff genommen und im Osten bis nach Dalmatien und im Süden bis nach Genua ausgedehnt²⁸⁷⁾.

*Lacaille*²⁸⁸⁾ maß 1750 einen Meridianbogen von ca. 1° 13' Ampl. am Kap der guten Hoffnung (die Messung wurde erweitert und revidiert von *Maclear* 1836—48). — *Ch. Mason* und *J. Dixon*²⁸⁹⁾ maßen in den Vereinigten Staaten von Nordamerika direkt (ohne Triangulierung) im Jahre 1764 einen Bogen von 1° 29' längs der Grenze zwischen Maryland und Delaware. Eine systematische Aufnahme der Atlantischen Küste in den Vereinigten Staaten wurde 1816 von *F. R. Hassler* begonnen.

Im Jahre 1790 schlug *Talleyrand* der gesetzgebenden Versammlung vor, daß ein Maßstabprototyp²⁹⁰⁾ studiert würde, welches aus der

284) *La Condamine*, Zitat der vorigen Fußnote, p. 260.

285) *C. A. Lemaire* und *R. G. Boscovich*, *De litterariae expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus, Romae 1755.*

286) *Beccaria*, *Gradus Taurinensis, Aug. Taurinorum 1774.*

287) *J. Reggio*, *De mensione basis habita anno 1788 etc., Effem. astr. di Milano 1794; F. Carlini, G. A. A. Plana und Campana, Opérations géodésiques et astr. pour la mesure d'un arc du parallèle moyen en Piemont et Savoye, Milan 1825.* Wegen anderer italienischer Gradmessungen vgl. man *v. Zach*, *Corr. astr.* 1 (1818), p. 17; 2 (1819), p. 240.

288) *N. L. de Lacaille*, *Journal historique du voyage fait au Cap de Bonne Espérance, Paris 1763; vgl. auch Paris Acad. Mém. pour 1751 (1755), p. 398; T. Maclear, Verification and extension of Lacailles arc of the meridian at the Cap of G. H., London 1866.*

289) *Lond. Phil. Trans.* 58 (1768), p. 270.

290) Der Gedanke, als Einheit des Längenmaßes einen aliquoten Teil des Meridians zu benutzen und der, das Sekundenpendel als Prototyp zu nehmen, scheinen von *G. Mouton* (1660) ausgegangen zu sein (vgl. *Gore*, *Geodesy*, p. 47).

Länge des Sekundenpendels abzuleiten sei. Eine aus *J. C. Borda*, *J. L. Lagrange*, *P. S. Laplace*, *G. Monge* und *M. de Condorcet* bestehende Kommission beschäftigte sich mit dem Vorschlage und zog als Längeneinheit den 10 000 000^{sten} Teil des Meridianquadranten vor²⁹¹), dessen Länge aus der eines Meridiangrades unter 45° Breite abgeleitet werden sollte²⁹²). Sie beauftragte dann *J. B. J. Delambre* und *P. F. A. Méchain*, einen Bogen von ungefähr $9\frac{1}{2}^{\circ}$, von Dünkirchen bis Barcelona, zu messen. Umgeben von vielen Schwierigkeiten, die durch die französische Revolution verursacht wurden, führten die beiden Astronomen von 1792 bis 1798 die angegebene Messung aus²⁹³), indem sie die Triangulationen auf zwei Grundlinien aufbauten (Melun bei Paris und Perpignan). Sie benutzten für die Basismessungen den bimetalischen Apparat von *J. C. Borda* und für die Winkelmessungen den Repetitionstheodoliten von *E. Lenoir*²⁹⁴). Die Kommission, welche die Ergebnisse dieser Messung mit denen der peruanischen Expedition kombinierte, fand für die Abplattung den Wert $\frac{1}{334}$ und setzte die Länge des Meters zu 443,296 Pariser Linien fest²⁹⁵). Im Jahre 1803 wurde *Méchain* beauftragt, den französischen Bogen bis zu den Balearen zu verlängern. Diese Messungen wurden dann von 1807—08 von *J. B. Biot* und *D. F. J. Arago* berechnet, die auch zahlreiche Schwerekräftsmessungen in Spanien, Frankreich und Schottland ausführten²⁹⁶).

In England waren bereits seit Mitte des Jahrhunderts Vermessungsarbeiten unter General *Roy* im Gange, als 1783 *C. F. Cassini*

J. Picard konstruierte einige Jahre nachher (vgl. *Gore*, Geodesy, p. 53) ein Sekundenpendel, das er „rayon astronomique“ nannte und dessen 4. Teil er als Längeneinheit vorschlug. *J. Cassini* (1718) empfahl als Längeneinheit den 10 000 000^{sten} Teil des Erdradius.

291) Paris Mém. Acad. pour 1788 (1798), p. 7; das Datum des Berichtes ist in Wirklichkeit der 19. März 1791.

292) Der Meridiangrad unter 45° Breite unterscheidet sich sehr wenig von dem 90. Teile des Quadranten; die Differenz kann auch mit einem angenäherten Abplattungswert genügend genau berechnet werden.

293) *Méchain et Delambre*, Base du système métrique décimal ou mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelona, Paris 1806—10. Es interessiert besonders in historischer Beziehung der „discours préliminaire“.

294) Der erste Theodolit mit vollständigem Kreise ist 1770 von *J. Ramsden*, und der erste Repetitionstheodolit 1785 von *J. C. Borda* gebaut worden (*Gore*, Geodesy, p. 139).

295) Zitat von Fußnote 294, p. 94.

296) *Biot et Arago*, Recueil d'observations géodésiques et astron. et phys. etc., Paris 1821; vgl. ferner: *L. Puissant*, Paris Mém. Acad. 14 (1833), p. 1 (veröffentlicht 1838).

de Thury die geodätische Verbindung der beiden Observatorien von Greenwich und Paris vorschlug, die von ihm 1787—90 ausgeführt wurde²⁹⁷). In den Jahren 1800—02 maß *W. Mudge* den Bogen von Dunnose ($50^{\circ} 37'$ n. Br.) bis Clifton ($53^{\circ} 27'$ n. Br.). Die gesamte Zwischentriangulation von Dunnose bis Saxavord (Shetlands-Inseln) wurde unter der Leitung von *H. James* in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wiederholt und die Resultate 1858 publiziert²⁹⁸). Besonders erwähnenswert sind die von den Engländern in Ostindien ausgeführten Arbeiten; *W. Lambton* von 1800—1823 und *G. Everest* von 1823—1842 beendigten den großen Meridianbogen von 21° , welcher vom Kap Comorin bis zum Himalaya reicht. Danach wurde unter der Leitung von *Waugt* und nach ihm von *J. T. Walker* eine große Triangulation längs vier Meridianen und drei Parallelkreisen ausgeführt. Die Hauptketten der Triangulation hatten eine Länge von ca. 17 300 km²⁹⁹).

In Preußen wurde die Triangulation im Jahre 1805 begonnen. Ein Parallelkreisbogen Seeberg-Dünkirchen wurde 1817 von *F. F. K. v. Müffling* berechnet; 1820 begann *C. F. Gauß* die Verbindung von Göttingen mit Altona (Ampl. $2^{\circ} 1'$), wobei er das *Heliotrop* benutzte und die Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate ausglich³⁰⁰).

Etwas vor *Gauß* wurde eine Gradmessung von $1^{\circ} 32'$ Ausdehnung von *H. C. Schumacher*³⁰¹) im Süden Schleswig-Holsteins ausgeführt. Gegen die Mitte des Jahrhunderts wurde die dänische Triangulation von *C. G. Andrae* erweitert und berechnet³⁰²). Im Jahre 1820 zeigte *J. M. Schwerd*³⁰³) auf praktischem Wege durch eine kleine Triangulation in der Pfalz bei Speier, wie man in zweckmäßiger Weise kleine Grundlinien benutzen kann.

Im Jahre 1831 wurden von *Bessel* und *Baeyer* die klassischen Arbeiten in Ostpreußen begonnen³⁰⁴). Bei ihnen wurde die Methode der Richtungsmessung von *F. G. W. Struve* und der bekannte Basisapparat von *Bessel* benutzt.

297) *W. Roy*, Lond. Phil. Trans. 80 (1790), p. 111.

298) *H. James* and *A. R. Clarke*, Ordnance trig. survey etc., London 1858.

299) *J. T. Walker*, Account of the operations of the great trigon. survey of India, Dehra-Dun 1870—83, 1—9. Eine gute Übersicht der Resultate dieser Arbeiten findet man in *Walker*, Lond. Phil. Trans. 186 (1895), p. 745.

300) *Gauß*, Werke 9, p. 5.

301) *v. Zachs* Corresp. astr. 1 (1818), p. 266.

302) *C. G. Andrae*, Den Danske Gradmaaling, Kopenhagen 1867—78.

303) *J. M. Schwerd*, Die kleine Speierer Basis usw., Speier 1822.

304) *F. W. Bessel* und *J. J. Baeyer*, Gradmessung in Ostpreußen und ihre Verbindung mit preußischen und russischen Dreiecksketten, Berlin 1838 (= *Bessel*, Abh. 3).

Auf der skandinavischen Halbinsel wiederholte und erweiterte *J. Svanberg*³⁰⁵) im Jahre 1801 die Triangulation von *P. L. M. de Maupertuis*. In Rußland begannen systematische Vermessungsarbeiten im Jahre 1726 unter der Leitung von *J. N. Delisle*, der von *Peter dem Großen* berufen war. Der große russisch-skandinavische Bogen³⁰⁶) von der Donaumündung bis zum Eismeer (Hammerfest) von ca. 25° 20' Ampl. wurde von 1816—50 gemessen; zum größten Teile unter der Leitung von *F. G. W. Struve* und *C. Tenner*, auf der norwegischen Seite unter *Hansteen* und *Selander*. Die Triangulation besteht aus 259 Dreiecken und stützt sich auf zehn Grundlinien. Im Jahre 1860 wurde in Rußland die Messung des großen Parallelkreisbogens unter 52° Breite begonnen. Ein Parallelkreisbogen in der Breite von 45° wurde 1811 von den Franzosen begonnen und in der Folge mit den Arbeiten in Piemont und in der Lombardei verbunden, so daß ein durchgehender Bogen von der Mündung der Gironde bis nach Fiume entstand³⁰⁷).

50. Die hauptsächlichsten Berechnungen der Konstanten des Erdellipsoids. *J. B. Listing*³⁰⁸) hat die numerischen Resultate der hauptsächlichsten Berechnungen der Konstanten des Erdellipsoids, die von 1800 bis auf seine Zeit ausgeführt waren, zusammengestellt. Er gibt die Resultate von *J. B. J. Delambre*³⁰⁹) (1810), *H. J. Walbeck* (1819; die Rechnung stützt sich auf die Methode der kleinsten Quadrate³¹⁰), *J. K. E. Schmidt* (1830), *G. B. Airy* (1830), *F. W. Bessel* (1841), *G. Everest*

305) Vgl. *Gore*, Geodesy, p. 168.

306) *F. G. W. Struve*, Arc du méridien de 25° 20' entre le Danube et la Mer glaciale mesuré depuis 1816 jusqu'en 1850 etc., St. Pétersbourg 1857—60.

307) *Carlini*, *Plana* usw. siehe Fußnote 287. Vgl. ferner: *L. Puissant*, Nouvelle description géométrique de la France, Paris 1832.

308) Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde, Göttingen 1873.

309) Base du système métrique 3, p. 135.

310) Man kann nicht sagen, daß die Rechnung von *Walbeck* den ersten Versuch gebildet hätte, die Gradmessungen rationell zur Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids zu kombinieren. *R. G. Boscovich* hat schon Ende 1760 (*De recentissimis graduum dimensionibus etc. in Philosophia recentior, Romae 1760*) vorgeschlagen, die genannten Konstanten unter folgenden Bedingungen zu berechnen: 1) die Summe der *positiven* Fehler in den Längen der gemessenen Grade soll gleich der Summe der *negativen* Fehler sein und 2) jede der beiden Summen soll möglichst klein sein. *P. S. Laplace* (*Méc. cél.* 3, § 40 u. 41) wendete dasselbe Prinzip zur Berechnung der Meridianellipse an. Was die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids betrifft, so scheint der erste Versuch von *A. M. Legendre* ausgegangen zu sein, vgl. *Nouvelles méthodes pour la détermination de l'orbite des comètes*, Paris 1806, p. 76.

(1847), *H. James* und *A. R. Clarke* (1858). *Bessel* benutzte den peruanischen, den ersten und zweiten Meridianbogen in Ostindien, den französischen, englischen, hannoverschen, dänischen, preußischen, russischen und schwedischen Bogen (Summe der Amplituden der Meridianbogen $50^{\circ} 34'$, Zahl der beobachteten Breiten 38). *James* und *Clarke* benutzten neun Meridianbogen: den englischen mit $10^{\circ} 56'$ Ausdehnung (mit Einschluß der Verbindung mit Frankreich), den französisch-spanischen (von Formentera bis Dünkirchen), den russisch-skandinavischen, zwei indische Bogen, den peruanischen, den preußischen, hannoverschen und dänischen (Summe der Amplituden $78^{\circ} 36'$, Anzahl der astronomischen Stationen 67). Bei einer ersten Rechnung benutzte *Clarke* einen *nicht elliptischen* Meridian³¹¹), dessen Krümmungsradius als Funktion der Breite φ er durch die Formel³¹²) darstellte:

$$\varphi = A + 2B \cos 2\varphi + 2C \cos 4\varphi.$$

Bei einer zweiten Rechnung setzte er den Meridian elliptisch voraus³¹³).

*T. F. v. Schubert*³¹⁴) hat 1859 zum ersten Male die Rechnung unter Voraussetzung eines dreiachsigen Ellipsoids ausgeführt; die Abplattungen der beiden Hauptmeridiane ergaben sich zu 1 : 292,109 und 1 : 302,004. *Clarke* hat 1866 die Rechnung ebenfalls für ein dreiachsiges Ellipsoid durchgeführt. *Ph. Fischer* leitete 1868 die Abplattung nur aus Schwerekräftmessungen ab und die große Achse aus dem englisch-französischen Bogen. Von neueren Rechnungen auf Grund der Hypothese des Rotationsellipsoides sind die von *A. R. Clarke*³¹⁵) (1880), *A. Bonsdorff*³¹⁶) (1890) und *A. Shdanow*³¹⁷) (1894) zu nennen.

311) Schon *N. Bowditch* hat 1832 in einer Note zur Übersetzung der *Méc. cél.* von *Laplace* (Boston 1832) die Berechnung eines nicht elliptischen Meridians versucht. *M. G. v. Paucker* (vgl. *Helmert*, H. G. 1, p. 17, 18) führte eine analoge Rechnung durch, indem er für den Krümmungsradius die Formel

$$\varrho = a(1 + \alpha \sin^2 \varphi + \beta \sin^4 \varphi + \gamma \sin^6 \varphi + \delta \sin^8 \varphi)$$

annahm.

312) *Ordnance trigon. survey*, p. 765.

313) *Ibid.*, p. 771.

314) *Petersb. Mém. Acad.* 1 (1859), p. 32. Wegen theoretischer Rechnungen bezüglich des dreiachsigen Ellipsoids vgl. auch *Clarke*, *Geodesy*, p. 305; *A. Sonderhof*, *Zeitschr. Math. Phys.* 17 (1872), p. 89, 177; *H. Levet*, *Paris C. R.* 76 (1873), p. 410, 700.

315) *Geodesy*, p. 319.

316) *Jahrb. d. Astron. u. Geophys.* 1 (1890).

317) *Ibid.* 5 (1894).

*E. Fergola*³¹⁸⁾ hat 1874—75 ein Rotationsellipsoid unter der Voraussetzung bestimmt, daß die Achse der täglichen Umdrehung durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehe, aber nicht mit der Figurenachse zusammenfalle. Indessen verbessert die Einführung einer solchen Hypothese die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung nicht wesentlich, und die mittleren Fehler in der Bestimmung der beiden Koordinaten, welche die Lage des Rotationspols bezüglich des Pols der Figurenachse festlegen, sind so beträchtlich, daß man eine wirkliche Verschiedenheit der beiden Achsen nicht als erwiesen ansehen kann³¹⁹⁾.

Am meisten benutzt werden das *Besselsche* und das *Clarkesche* Ellipsoid von 1880, deren Konstanten zum Vergleich hier nebeneinander gestellt seien:

	<i>Besselsches</i> Ellipsoid	<i>Clarkesches</i> Ellipsoid (1880)
Halbe große Achse	6 377 397 m	6 378 180 m
Reziproke Abplattung	299,153	293,465
Meridianquadrant	10 000 856 m	10 001 871 m

51. Bestimmung der Abplattung aus Pendelmessungen. *Jér. de Lalande*³²⁰⁾ leitete 1785 unter Benutzung des *Clairautschen* Theorems die Abplattung aus den bis dahin bekannten Schwerkraftsmessungen zu $\frac{1}{320}$ ab. Aus einer Tabelle von *W. Harkness*³²¹⁾ leiten wir die folgenden Ausdrücke für die Länge des Sekundenpendels (in Metern) ab, die sich aus den hauptsächlichsten bis dahin bekannten Rechnungen ergeben. Hinzugefügt sind die Werte der reziproken Abplattung $\frac{1}{a}$, welche aus der Anwendung des *Clairautschen* Theorems folgen.

<i>Laplace</i> (1799)	$L = 0,990631 + 0,005637 \sin \varphi$		$\frac{1}{a} = 336$
<i>Mathieu</i> (1816)	0743	5466	317
<i>Biot</i> (1821)	0880	5340	305
<i>Sabine</i> (1825)	0977	5142	287
<i>Saigez</i> (1827)	1026	5072	282
<i>Pontécoulant</i> (1829)	0555	5679	341
<i>Airy</i> (1830)	1017	5087	283
<i>Poisson</i> (1833)	0941	5142	287
<i>Unferdinger</i> (1869)	0970	5185	291
<i>Helmert</i> (1884)	0918	5262	297,8

318) Napoli Acc. sci. fis. mat. 6 (1875), n° 10; 7 (1878), n° 7.

319) Ibid., p. 25 u. 26.

320) Paris Mém. Acad. pour 1785 (1788), p. 1.

321) The solar parallax and its related constants, Washington 1891, p. 8.

Auf Grund von ungefähr 1400 Schwerkräftsmessungen gibt *Helmert*³²²⁾ in einer seiner neuesten Publikationen für die normale Schwerkräft die folgende Formel (in cm) an:

$$\gamma = 978,046 (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^4 \varphi),$$

woraus mit Hilfe der in Nr. 4 erwähnten Formeln, welche die Kugelfunktionen vierter Ordnung berück-sichtigen, $a = 1 : 298,3$ folgt.

*Iwanoff*³²³⁾ leitete aus den Resultaten von 300 Schwerkräftsmessungen für die Länge des Sekundenpendels folgende Formel (in cm) ab:

$$l = 99,0997 + 0,5240 \sin^2 \varphi - 0,0016 (\sin \varphi' - \frac{5}{3} \sin^3 \varphi'),$$

wo φ' die geozentrische Breite bedeutet. Der entsprechende Wert von a ist $1 : 296,6$.³²⁴⁾

52. Benutzung einiger astronomischer Daten zur Berechnung der Konstanten des Erdellipsoids. a) *Ableitung der Abplattung aus der Mondparallaxe.* Die Differenz zwischen den geozentrischen Positionen des Mondes, die sich aus der Mondtheorie ergeben, und den an einem Erdorte beobachteten Positionen, oder mit anderen Worten die Mondparallaxe in Rektaszension und Deklination, sind einfache Funktionen des Verhältnisses der Mondentfernung zum äquatorialen Radius a und der Exzentrizität e . Solche Parallaxenbestimmungen können deshalb zur Kenntnis von e beitragen. Wir nennen in dieser Beziehung die Namen: *E. Manfredi*³²⁵⁾, *P. Bouguer*³²⁶⁾, *Jér. de Lalande*³²⁷⁾, *J. A. Euler*³²⁸⁾, *A. Cagnoli*³²⁹⁾. *Laplace* handelt davon auch in dem 3. Buche der *Méc. cél.* Indessen entspricht die Genauigkeit der erwähnten Methode nicht den Anforderungen der modernen Geodäsie.

b) *Ableitung der äquatorialen Halbachse a aus Messungen der Mondparallaxe und der Schwerkräft.* Zwischen der mittleren Schwere g , dem mittleren Erdradius R , der mittleren äquatorialen Mondparallaxe p und der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω der Mond-

322) Berlin Ber. 1901, p. 328. Der Koeffizient $-0,000007$ von $\sin^4 \varphi$ ist nicht aus den Schwerkräftbeobachtungen abgeleitet, sondern von *E. Wiechert* und *G. H. Darwin* auf Grund spezieller Annahmen über die Dichte des Erdinneren berechnet.

323) Bulletin Acad. St. Pétersbourg 8 (1898), p. 219.

324) Zitat in Fußn. 323, p. 8.

325) Mém. Acad. Paris pour 1734 (1736), p. 1.

326) Mém. Acad. Paris pour 1751 (1755), p. 64.

327) Mém. Acad. Paris pour 1752 (1756), p. 78.

328) München Abh. 5 (1763), p. 197.

329) Verona Mem. di mat. Soc. Ital. 6 (1792), p. 227.

bewegung besteht näherungsweise folgende Beziehung³³⁰) (aus der elementaren Theorie der Planetenbewegung abgeleitet):

$$(A) \quad R = g \left(1 + \mu \right) \frac{\sin^3 p}{\omega^2},$$

wo μ das Verhältnis zwischen Mond- und Erdmasse ist. *J. H. Lambert*³³¹) kam auf den Gedanken, die Mondparallaxe vermittels dieser Formel abzuleiten, indem er R und g als bekannt voraussetzte, und *Laplace* führte die Rechnung aus (*Méc. cél.* 1). *Helmert* schlug vor, indem er an Stelle von (A) eine genauere Formel setzte, bei der die Exzentrizität der Erd- und Mondbahn berücksichtigt ist, umgekehrt die äquatoriale Halbachse a aus beobachteten Werten von g und p abzuleiten. Er fand³³²)

$a = 6\,378\,830$, die Abplattung zu $1 : 299,15$ vorausgesetzt.

$a = 6\,381\,460$, „ „ „ $1 : 289,76$ „

c) Die Ungleichheiten der Mondbewegung in Breite und Länge sind a priori auszurechnen, wenn der Ausdruck des *Erdpotentials* für Punkte außerhalb der Erde bekannt ist. Wenn diese Ungleichheiten beobachtet sind, so liefern sie deshalb ihrerseits ebenso wie die Schwerkraftsmessungen ein Mittel zur Bestimmung der Erdabplattung. Überdies ist diese Methode unabhängig³³³) von jeder Hypothese über die Änderung der Dichte im Innern der Erde. — *Helmert*³³⁴) leitete aus einer Diskussion der *Hansenschen* Arbeiten die Abplattung zu $1 : 297,8 \pm 2,2$ ab.

d) Die Erscheinungen der *Präzession* und *Nutation* sind, wie bereits erwähnt, geeignet, numerische Daten für die Berechnung der Abplattung zu liefern. Aber die theoretische Auswertung dieser Erscheinung erfordert außer der Kenntnis des Erdpotentials für äußere Punkte auch die des Trägheitsradius der Erdmasse in bezug auf die Rotationsachse. Die Benutzung der Präzession und Nutation zur Berechnung der Abplattung kann deshalb nicht gänzlich auf eine besondere Hypothese über die innere Erddichte verzichten. Man kann indessen beweisen, daß die beobachteten Werte der Präzession und

330) *Helmert*, Höhere Geodäsie 2, p. 461.

331) Vgl. *Seidel*, Astron. Nachr. 50 (1859), p. 261.

332) *Helmert*, Höhere Geod. 2, p. 465.

333) Diese Unabhängigkeit wurde von *Stokes* hervorgehoben (*On attractions and on Clairaut's theorem*, Cambridge 1849). Die Zitate der hauptsächlichsten Arbeiten, die sich auf die Berechnung der Mondungleichheiten beziehen, findet man in dem in Fußn. 321 zit. Werke, p. 101.

334) Höhere Geod. 2, p. 473.

Nutation notwendig zu einer kleineren Abplattung als $\frac{1}{297,3}$ führen, wenn man annimmt, daß die Erddichte beständig von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte hin wächst³³⁵).

e) *W. Harkness*³³⁶) bemerkt, indem er eine genaue Diskussion der numerischen Werte verschiedener terrestrischer und astronomischer Konstanten vornahm, daß zwischen zwölf von ihnen sieben Bedingungsgleichungen aufgestellt werden können, die man benutzen kann, um in geeigneter Weise die beobachteten Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate zu verbessern. Unter diesen Konstanten befindet sich die Abplattung, für welche aus der Rechnung von *Harkness* der Wert von $1 : (300 \pm 3)$ folgt.

53. Moderne geodätische Arbeiten. Lotabweichungen. Im Jahre 1861 publizierte *J. J. Baeyer* eine Abhandlung, welche den Zweck verfolgte, für den Gedanken einer *geodätischen Vereinigung* der Staaten Mitteleuropas Stimmung zu machen. Er setzte den augenscheinlichen Nutzen auseinander, den das Studium der Krümmung des zentralen Meridians von Europa haben würde, und schlug daher vor, durch Meridian- und Parallelkreisbogen eine Zone von 12° Länge mit dem Mittelmeridian Berlin und den Parallelkreisen von Christiania und Palermo als Grenzen geodätisch zu studieren. *Baeyer* brachte seine Gedanken schließlich in einem bestimmten Vorschlag³³⁷) zum Ausdruck, den er dem preußischen Kriegsministerium einreichte und der von der preußischen Regierung durch Kabinettsorder vom 20. Januar 1861 angenommen wurde. 15 Staaten traten der Vereinigung bei, die „*Mitteleuropäische Gradmessung*“ genannt wurde; der erste Generalbericht wurde 1862 veröffentlicht, und 1864 fand die erste allgemeine Konferenz statt. 1867 wurde der Name der Vereinigung in „*Europäische Gradmessung*“ und schließlich 1886 in „*Internationale Erdmessung*“ umgewandelt. Eine Erneuerung dieser Vereinigung mit teilweiser Neuordnung fand 1895 statt; gegenwärtig sind folgende Staaten an

335) Vgl. *Tisserand*, *Mécanique céleste* 2, p. 224. Solche Untersuchungen verdankt man *H. Poincaré*.

336) Vgl. Zitat der Fußnote 321, p. 121—133. Die 12 der Rechnung von *Harkness* zugrunde gelegten Konstanten sind: die mittlere Mond- und Sonnenparallaxe, die Erdabplattung, das Verhältnis der Erdmasse zu der der Sonne, das Verhältnis der Mondmasse zu der der Erde, die Mondgeschwindigkeit, die Aberrationskonstante, die vom Licht gebrauchte Zeit, um die mittlere Entfernung Sonne—Erde zu durchlaufen (aus der Beobachtung der Jupitertrabanten abgeleitet), die Konstanten der Präzession und Nutation, die beiden Ungleichheiten der Mondbewegung.

337) Vgl.: Zur Entstehungsgeschichte der Europäischen Gradmessung (im Generalbericht der Mitteleurop. Gradmessung 1862).

ihr beteiligt: Argentinien, Belgien, Dänemark, Deutschland, Frankreich, Griechenland, Großbritannien, Italien, Japan, Mexiko, Niederlande, Norwegen, Österreich, Rumänien, Rußland, Schweden, Schweiz, Portugal, Spanien, Ungarn, Vereinigte Staaten von Nordamerika. Die Vereinigung verfolgt hauptsächlich folgende Ziele: darauf hinzuwirken, daß die geodätischen Arbeiten soweit als möglich nach übereinstimmenden Regeln ausgeführt werden; die Resultate der einzelnen Arbeiten in einer Hand zu sammeln, damit sie einer zusammenfassenden Diskussion unterworfen werden können; spezielle Studien, welche die Geodäsie interessieren, zu begünstigen, und durch Vermittlung der bestehenden Kommissionen sowie durch Anweisung der Mittel diejenigen Untersuchungen von allgemeinerem Interesse zu fördern, welche die Mitarbeit verschiedener Staaten erfordern. Die wichtigste dieser internationalen Untersuchungen ist augenblicklich die über die Veränderlichkeit der Breite oder die Polhöenschwankungen. Über diesen Gegenstand werden wir hier nicht sprechen, obgleich er von großer Bedeutung in der theoretischen Geodäsie ist, weil in der Geophysik davon die Rede sein wird.

Gegenwärtig ist Europa fast ganz mit Triangulationen überdeckt³³⁸), die zum Teil gänzlich erneuert worden sind. Außer dem schon erwähnten großen russisch-skandinavischen Bogen und den in Österreich, Dalmatien und Griechenland ausgeführten Arbeiten haben wir: den mitteleuropäischen Bogen, der von den Lofoten bis nach Malta in einer Ausdehnung von ca. 33° reicht; den englisch-französisch-spanisch-algerischen Bogen³³⁹) von den Shetlands-Inseln bis nach Laghouat in Algier (ca. 27° Ampl.); den Parallelkreisbogen in 52° Breite vom atlantischen Ozean bis Orsk (Sibirien); den Parallelkreisbogen in $47\frac{1}{2}^{\circ}$ Breite vom Atlantischen Ozean bis Astrachan. Das zusammenhängende Netz, das sich durch Italien, Frankreich, Spanien, Algier und Sizilien hinzieht, umgibt fast den ganzen westlichen Teil des mittelländischen Meeres. Die Russen und Schweden haben auf Spitzbergen zwischen $76,7^{\circ}$ und $81,7^{\circ}$ Breite geodätische und astronomische Arbeiten ausgeführt³⁴⁰).

338) Vgl. die Karte von Europa, welche dem Rapport sur les triangulations in Intern. Erdm. 1903, II. T., p. 292 beigegeben ist.

339) Die geodätisch-astronomische Verbindung von Spanien mit Algier und die von Malta mit Sizilien hat für die europäischen Arbeiten eine besondere Bedeutung wegen der ungewöhnlichen Länge der Sichten. Vgl. *J. Perrier et C. Ibañez*, Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne, Paris 1880 und R. Comm. geod. italiana, Collegamento delle isole Maltesi colla Sicilia, Firenze 1902.

340) Int. Erdm. 1900, I. T., p. 159; 1903, II. T., p. 127.

In den Vereinigten Staaten von Nordamerika haben wir hauptsächlich die Triangulation längs des 39. Parallels vom atlantischen bis zum pazifischen Ozean³⁴¹) und den schiefen Bogen längs der atlantischen Küste von der Grenze Kanadas bis New Orleans³⁴²). Man mißt dort auch einen zentralen Meridianbogen³⁴³) (längs 98° östl. L. von Greenwich), dessen Verlängerung durch Mexiko³⁴⁴) bis zum pazifischen Ozean ebenfalls in Angriff genommen ist. — In Australien ist seit längeren Jahren die Triangulation von Victoria vollendet und die von New South Wales so gut wie vollendet³⁴⁵); in Japan ist die Triangulation der Hauptinsel vollständig³⁴⁶). Wichtige geodätische Arbeiten sind an der Westküste von Sumatra ausgeführt³⁴⁷). — In Südafrika ist außer den verschiedenen Dreiecksnetzen in der Kapkolonie und dem benachbarten Deutsch-Südwestafrika eine Triangulation längs des Meridians in 30° östl. L. im Gange, welche die Kapkolonie mit den bereits bestehenden Netzen in Natal verbinden und bis zum Tanganjika-See durchgehen soll³⁴⁸). Man hofft, in nicht zu ferner Zeit durch Rhodesien, der Küste des Tanganjika entlang, durch Uganda bis zum Nil hin eine Dreieckskette legen zu können, die dann vom Kap bis Kairo reichen würde. — Der sogenannte peruanische Bogen wird mit 6° Amplitude neu gemessen von der Nordgrenze Ecuadors am pazifischen Ozean bis zur Nordgrenze Perus³⁴⁹). Die große Indische Triangulation³⁵⁰) hat jetzt schon eine Ausdehnung von 22° in Breite und 25° in Länge, und soll durch einen Meridian- und einen Parallelbogen in Birma fortgesetzt werden.

Bezüglich der Schwerkraftsmessungen, von denen im Jahre 1903 etwa 1900, über ganz Europa und die Küsten eines großen Teils der übrigen Erdteile verteilt, vorhanden waren, verweisen wir auf die

341) *A. Schott*, The transcontinental triangulation and the American arc of the parallel, Washington 1900 (R. C. G. S., Special public. Nr. 4).

342) *A. Schott*, The eastern oblique arc of the U. S. and osculating spheroid, Washington 1902 (R. C. G. S., Special public. Nr. 7).

343) *Int. Erdm.* 1903, I. T., p. 185.

344) *Int. Erdm.* 1903, I. T., p. 141.

345) *Int. Erdm.* 1903, II. T., p. 242.

346) *Int. Erdm.* 1895, II. T., p. 287; 1900, I. T., p. 215.

347) *Int. Erdm.* 1903, I. T., p. 155.

348) Vgl. die Karte in *Int. Erdm.* 1903, II. T., p. 292.

349) *H. Poincaré*, *Ann. du Bur. d. longitudes* 1901 und *Int. Erdm.* 1903, II. T., p. 113.

350) *J. T. Walker*, *London Phil. Trans.* 186 (1895), p. 199; *Int. Erdm.* 1903, II. T., p. 219, 228.

Berichte von *Helmert* und *E. Borrass*³⁵¹). Besondere Erwähnung verdienen die Schwerkraftsmessungen auf dem atlantischen Ozean³⁵²).

Die Schwerkraftsmessungen zusammen mit astronomisch-geodätischen Bestimmungen führen zu einem Abplattungswert, der nur wenig von dem *Besselschen* verschieden ist, so daß von diesem Gesichtspunkt aus das *Besselsche* dem *Clarkeschen* Ellipsoid vorzuziehen wäre. Die Frage nach dem best anschließenden Ellipsoid steht indessen, wie bereits früher (vgl. Nr. 43) hervorgehoben ist, nicht mehr im Mittelpunkt des geodätischen Interesses, weil man nicht alle Gradmessungen durch ein Ellipsoid befriedigend darzustellen vermag. Man strebt vielmehr heute danach, die Krümmungsverhältnisse der Niveauflächen in den von den Gradmessungen bedeckten Gebieten zu erforschen, was durch Berechnung der Lotabweichungen gegen ein in gewissen Grenzen willkürlich zu wählendes Referenzellipsoid geschieht.

Ein Verzeichnis der bis 1887 bekannten Lotabweichungen gibt *Helmert* in den Verhandlungen der Internationalen Erdmessung von 1887. Fortgesetzt ist dasselbe 1889, 1892 und 1895 von *Helmert* und 1898 und 1903 von *A. Börsch*. Wir machen in den folgenden Fußnoten einige Literaturangaben bezüglich der Untersuchungen über Lotabweichungen in den Ländern: Deutschland³⁵³), Österreich-Ungarn³⁵⁴), Frankreich³⁵⁵), Großbritannien³⁵⁶), Italien³⁵⁷), Schweiz³⁵⁸), Englisch-

351) Int. Erdm. 1900, II. T., p. 139; 1903, II. T., p. 133.

352) Int. Erdm. 1903, II. T., p. 15 und *O. Hecker*, Bestimmung der Schwerkraft auf dem atlantischen Ozean, sowie in Rio de Janeiro, Lissabon und Madrid, Veröffentl. d. preuß. Geod. Inst., Berlin 1903.

353) Int. Erdm. 1887, p. 16; 1898, p. 258; 1903, II. T., p. 400. Ferner die Veröffentlichungen d. preuß. Geod. Inst.: Lotabweichungen, Heft 1, 1886; Heft 2, 1902; Polhöhenbestimmungen aus dem Jahre 1886 usw., 1889; Das Märkisch-Thüringische Dreiecksnetz, 1889; Lotabweichungen in der Umgebung von Berlin, 1889; Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen usw., 1896; Bestimmung von Azimuten im Harzgebirge, 1898; Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft in der Nähe des Berliner Meridians, 1902. *E. Hammer*, Astronom. Nivellement durch Württemberg usw., Stuttgart 1902.

354) Int. Erdm. 1903, II. T., p. 404; Die Ergebnisse der Triangulierung des milit.-geogr. Inst., Wien 1901/02; *J. Netuschill*, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien, 21 (1902), p. 44.

355) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 14; 1898, p. 263; 1903, II. T., p. 411; Mémorial du dépôt général de la guerre 12 (1902).

356) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 11.

357) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 26; 1898, p. 262; 1903, II. T., p. 409; *P. L. Cattolica*, Differenza di longitudine tra Livorno e Genova, Genova 1899; *G. Ciscato*, Astr. Nachr. 149 (1899), p. 385; *V. Reina*, Rend. Acc. Linc. (5) 9 (1900), p. 189; 10 (1901), p. 284, 346; 11 (1902), p. 431; *V. Reina*, Determ. astron. di

Indien³⁵⁹), Südafrika³⁶⁰), Vereinigte Staaten von Nordamerika³⁶¹), Rußland³⁶²), Schweden³⁶³), Norwegen³⁶⁴), Dänemark³⁶⁵), Australien³⁶⁶), Java³⁶⁷) und den Sandwich-Inseln³⁶⁸).

latitud. e d'azimut lungo il meridiano di Roma, Firenze 1903; *A. Riccò*, Rend. Acc. Linc. (5) 7 (1898), p. 11; *A. Riccò*, *T. Zona*, *G. Saija*, Mem. Soc. Spettroscopisti 28 (1899), p. 12; *A. Venturi*, Rend. Acc. Linc. (5) 6 (1897), p. 327; *A. Venturi*, Azimut di Monte Alfano etc., Palermo 1892; *R. v. Sterneck*, Mitt. milit.-geogr. Inst. Wien. 11 (1892), p. 212.

358) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 25; 1895, II. T., p. 181; 1898, p. 260; 1903, II. T., p. 406; *J. Messerschmitt*, Das Schweizerische Dreiecksnetz 6 (1894), 8 (1898), 9 (1901), Zürich; *A. Beck*, Astr. Nachr. 159 (1902), p. 133; 163 (1903), p. 190.

359) Int. Erdm. 1892, p. 516; 1898, p. 273; 1903, p. 415; *J. T. Walker*, London Phil. Trans. 186 (1895), p. 770; *S. G. Burrard*, The attraction of the Himalaya M. upon the plumbline, Dehra-Dun 1901.

360) Int. Erdm. 1895, II. T., p. 188; 1898, p. 270; *D. Gill*, Report of the geod. survey of South-Africa, 1, Capetown 1895, 2, Capetown 1901.

361) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 38; 1895, II. T., p. 185; 1903, I. T., p. 208; II. T., p. 424; *Ch. A. Schott*, R. C. G. S. 1869, p. 113 und Fußn. 341 u. 342).

362) Int. Erdm. 1887, Beilage A, p. 35; 1893, p. 183; 1895, II. T., p. 184; 1898, p. 265; 1903, II. T., p. 412; *K. G. Schweizer*, Moscou Bull. Soc. Nat. 37 (1864), p. 96; *J. A. Iweronow*, Mém. Topogr. Abt. d. Generalstabs, Petersburg 51 (1894), p. 324; *Lebedeff*, ibid. 48 (1896), p. 1; *Pomerantzeff*, ibid. 54 (1897), p. 75; *Venukoff*, Paris C. R. 123 (1896), p. 40.

363) Int. Erdm. 1892, p. 620; 1898, p. 263; *P. G. Rosén*, Die astr.-geodät. Arbeiten der Topogr. Abt. des Schwed. Generalstabes, 2, Stockholm 1903.

364) Int. Erdm. 1895, II. T., p. 183 u. 184.

365) Int. Erdm. 1887, p. 17, 27; 1903, II. T., p. 412; Den Danske Gradmaaling 3 (1878), 4 (1886), Kopenhagen.

366) Int. Erdm. 1903, II. T., p. 419; *T. F. Furber*, The trigon. survey of New South Wales, Sydney 1898.

367) Int. Erdm. 1903, II. T., p. 421; *J. A. C. Oudemans*, Die Triangulation von Java, Haag 1900.

368) Int. Erdm. 1895, II. T., p. 186; *E. D. Preston*, R. C. G. S. 1888, app. 14; 1893, app. 12.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Einführung in die Geodäsie

von

Dr. O. Eggert,

Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig.

Mit 237 Figuren im Text. [X u. 437 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 10.—

Aus dem Vorwort: Den Anlaß zur Herausgabe des vorliegenden Buches gaben Vorlesungen, die der Verfasser im Jahre 1904 an der Universität Berlin hielt, und deren Veröffentlichung der Verlagsbuchhandlung wünschenswert erschien. Auf Grund seiner jetzigen Lehrtätigkeit hielt es der Verfasser jedoch für zweckmäßig, den Inhalt über den Rahmen der früheren Vorlesungen hinausgehen zu lassen und auch einen kurzen Abriß der Ausgleichsrechnung hinzuzufügen, um einzelne Messungsmethoden gründlicher behandeln zu können. Da der Umfang des Buches dennoch in engen Grenzen bleiben sollte, so wurde von den üblichen Methoden und Hilfsmitteln nur eine Auswahl zur Darstellung gebracht, die sich indessen auf fast alle Gebiete der niederen Geodäsie erstreckt. Dabei konnte der Besprechung der Instrumente mit wenigen Ausnahmen die hiesige geodätische Sammlung zugrunde gelegt werden. Für weitere Studien wurden den einzelnen Kapiteln Literaturnachweise beigelegt, in denen aber nur spezielle Lehrbücher genannt sind.

Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie
der Meßinstrumente von

F. R. Helmert,

Direktor des Königlich Preussischen Geodätischen Instituts und Zentralbureaus
der internationalen Erdmessung.

Zweite Auflage. [XVIII u. 578 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 16.—

Die Entwicklungen sind mit Absicht in den ersten Abschnitten etwas breit gehalten, ebenso ist die Kenntnis der Determinantentheorie nicht vorausgesetzt. Die weniger entwickelten Lösungen sind nicht übergangen, um den vereinzelt Anwendungen zu entsprechen, für welche ein Studium der eleganten und meist rationelleren Lösungen nicht am Platze ist. Von Wichtigkeit erschien es, die Untersuchung der plausibelsten Beobachtungsfehler mehr zu betonen. Die Unterscheidung wahrer und plausibler Fehler ist allenthalben möglichst streng durchgeführt und demgemäß auch bei der Untersuchung des Verteilungsgesetzes der plausibelsten Fehler zur Vergleichung nicht ein wahrer Fehler benutzt (etwa der mittlere oder wahrscheinliche), sondern ebenfalls ein plausibelster Fehler.

Um recht ersichtlich zu machen, welcher erhebliche Unterschied zwischen zwei Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate stattfinden kann bezüglich der Bedeutung der Resultate, ist auch die Anwendung derselben zu interpolatorischen Zwecken mit aufgenommen.