ИЗГИБАЕМОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЦЕЛОМ (IM GROSSEN).

С. Э. Кон-Фоссен.

§ 1. Введение.

Изгибанием называют такую деформацию поверхности, при которой любая кривая, проведенная на поверхности, сохраняет свою длину. Как известно, при этом остаются неизменными и углы, образованные пересекающимися кривыми на поверхности. Понятие „изгибание" имеет смысл для всех поверхностей, радиус-вектор которых обладает непрерывными первыми производными по надлежащим образом выбранным координатам. Однако при современном состоянии теории рассматривается лишь изгибание таких поверхностей, радиус-вектор которых имеет непрерывные производные первого и второго порядков по надлежащим образом выбранным координатам. При этом некоторые результаты установлены даже только для аналитических поверхностей.

Со времени Гаусса учение об изгибании является наиболее важным разделом диференциальной геометрии поверхностей. Уже сегодня отдельные относящиеся сюда результаты образуют огромное, едва обозримое множество. С течением времени из общей проблемы об изгибании поверхностей выкристаллизовались различные специальные проблемы, которые в свою очередь вызвали к жизни целые самостоятельные теории. Так, например, имеется обширная литература о поверхностях, которые получаются путем изгибания поверхностей второго порядка. И даже внутри этой специальной теории рассмотрение простейшего случая, а именно изгибания поверхности шара, или, что то же, поверхности с постоянной положительной гауссовой кривизной, приводит к многочисленным интересным и трудно получаемым результатам. Так, например, можно поставить вопрос о таких изгибаниях поверхности шара, при которых линии кривизны остаются плоскими кривыми. Все вопросы такого типа при аналитической трактовке приводят к *уравнениям.*

Уже достаточно куска бумаги или тонкого листа жести, чтобы представить себе изгибание поверхности. Выпуклый кусок жести, который может быть плотно приложен к шару, дает нам представление о любой поверхности, получающейся при изгибании поверхности шара. Однако все это имеет место при одном важном ограничении. Кусок жести имеет край (границу), и так как он может покрыть часть шара, то он составляет лишь часть поверхности, получающейся при изгибе шаровой поверхности. Все такие куски (части) обладают одним свойством, которое принципиально недоступно „диференциальной геометрии в малом". Модель показывает нам лучше любого вычисления, что определенный формат влечет за собой уже целый ряд геометрических следствий. Так, очень маленький кусок жести в некотором смысле будет более гибким, чем другой кусок, покрывающий по сравнению с первым бо́льшую часть поверхности шара. В большом куске значительные изменения формы вызовут уже сгибы или разрывы. Мы можем следующим образом математически уточнить получающееся здесь явление. Пусть на поверхности куска жести будут намечены две различные точки. Когда кусок жести наложен на шар, эти точки будут удалены друг от друга в пространстве на расстояние a. Возможно ли таким образом изогнуть кусок жести, без сгибов и разрывов, чтобы расстояние между этими точками стало равным $\frac{1}{2}a$? Аналитическая формулировка этого вопроса и родственных ему вопросов приводит уже не к уравнениям, а к *неравенствам*.

До сих пор еще не дан ответ на подобные вопросы теории изгибания поверхностей. Конечно, мы можем из известного нам множества поверхностей, получающихся путем изгибания поверхности шара, выбрать те поверхности, на которых существуют пары точек с расстоянием, составляющим $\frac{1}{2}$ или даже меньшую часть расстояния между соответствующими точками на поверхности шара. Но это нас не может удовлетворить, так как здесь мы имеем обратную постановку вопроса. Идя этим путем, мы не найдем общей зависимости между размерами заданного куска сферы и его изгибаемостью, в то время как наше наглядное восприятие и модель говорят нам, что такая зависимость существует.

Насколько не доросли еще геометрические исследования до подобного рода вопросов, показывает следующий факт. Либман (H. Liebmann), которому мы обязаны целым рядом весьма ценных открытий в теории изгибания поверхностей, в течение долгого времени считал, что кусок шаровой поверхности, покрывающий больше половины шара, не допускает изгиба без особенностей. По этому поводу он опубликовал мнимое доказательство, ошибочность которого лишь 10 лет спустя была показана Блашке (W. Blaschke). Позже сам Либман провел еще более глубокий анализ своей ошибки. Он доказал [1] [1]), что если вырезать любую сколь угодно малую дыру, то оставшаяся часть шаровой поверхности может быть изгибаема. Разумеется, здесь нет еще и речи о „степени" изгибаемости. Тем не менее этот результат нетривиален. Действительно, если поставить вопрос о возможности изгибания целой поверхности шара, то ответ будет отрицательным. *Модель шаровой поверхности, сделанная из нерастяжимого, но гибкого материала, не способна изменить свою форму без сгибов или разрывов.* В дальнейшем мы еще подробно остановимся на этом вопросе, но мы хотим уже сейчас отметить, что существует очень простой способ изгибания, если только допустить сгиб поверхности.

Рассмотрим касательную плоскость к шару и будем ее передвигать параллельно самой себе так, чтобы она отсекала все бо́льшие и бо́льшие части шара. В каждый момент движения мы будем мысленно заменять поверхность меньшего отсекаемого сегмента ее зеркальным отображением относительно плоскости. Образованные таким образом поверхности могут быть рассматриваемы как получающиеся путем изгибания шаровой поверхности. Все они (за исключением исходной шаровой поверхности) имеют круговую линию сгиба, и в процессе изгибания

[1]) Числа в квадратных скобках относятся к списку литературы в конце статьи.

данной шаровой поверхности эта линия сгиба меняет свое положение на поверхности. Этот процесс, очевидно, может быть обобщен. Его можно применить к любой поверхности, имеющей точку P с положительной гауссовой кривизной. Для этого нужно только касательную плоскость в P передвигать параллельно ей самой в ту сторону, где находится поверхность, и при этом производить все время зеркальные отображения.

Начиная с настоящего момента мы будем рассматривать только такие изгибания, которые не имеют „блуждающих" линий сгиба и, конечно, разрывов. В то же время мы будем допускать „фиксированные" линии сгиба и, в частности, будем исследовать изгибание полиэдров.

Шаровая поверхность в целом неизгибаема. Существуют ли замкнутые поверхности с непрерывной кривизной, которые в целом изгибаемы? Сегодня мы еще не знаем таких поверхностей; с другой стороны, нет никаких оснований для предположения, что все такие поверхности неизгибаемы. Во всяком случае имеется один важный частичный результат: *всякая непрерывная замкнутая поверхность с непрерывной и всюду положительной гауссовой кривизной неизгибаема в целом.* Такие поверхности[1]) мы будем называть *овалоидами.* Сформулированный нами результат будет занимать центральное место в последующих рассуждениях.

§ 2. Изгибание полиэдров с твердыми гранями. Изгибаемые замкнутые октаэдры. Понятие об изометрии, бесконечно малом изгибании, однозначной определенности и жесткости. Теорема Коши об однозначной определенности и жесткости выпуклого замкнутого полиэдра.

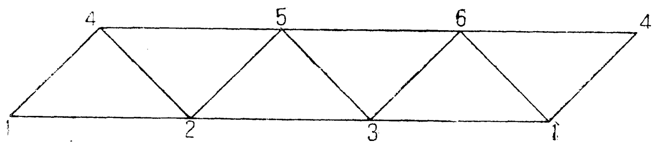
Так как кривые поверхности можно аппроксимировать с помощью полиэдров, то возникает мысль рассмотреть сначала более простое явление — аналог изгибания у полиэдров. Мы будем рассматривать такие изменения формы полиэдров, при которых изменяются углы, образованные гранями, но сами грани своей формы не меняют. Только изменения формы такого рода мы будем у полиэдров называть изгибанием. Следовательно, в качестве модели можно себе представить полиэдр из твердых пластинок, скрепленных вдоль ребер с помощью шарниров. Но при этом в одном отношении мы выйдем за пределы такой модели. Мы будем допускать, чтобы полиэдр пересекал сам себя и чтобы линия пересечения меняла свое положение на поверхности полиэдра.

Существуют ли замкнутые полиэдры, которые в этом смысле изгибаемы? Да, и притом довольно простые. Если полоску на черт. 1а, составленную из шести равнобедренных прямоугольных треугольников, надлежащим образом согнуть вдоль ребер 4 2, 2 5, 5 3, 3 6, 6 1, то можно придать этой полоске форму, указанную на черт. 1б; при этом оба ребра, обозначенные через 14, совмещаются и рассматриваются как слитые, и треугольники 1 3 6 и 1 4 6, равно как и треугольники 2 3 5 и 2 4 5, располагаются в одной плоскости и частично покрывают друг друга.

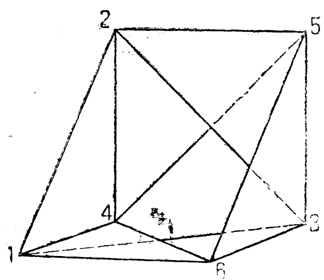
Легко убеждаемся на модели или путем аналитического исследования, что можно, не меняя положения точек 1, 6, 3, 5, передвинуть ребро 24 так, чтобы было достигнуто положение, изображенное на черт. 1в, причем 1, 4, 2 и 1, 4, 6, точно так же, как 2, 3, 5 и 3, 5, 6, расположились бы в одной и той же плоскости. Таким обра-

[1]) Можно доказать [2], что каждая такая поверхность топологически эквивалентна сфере.

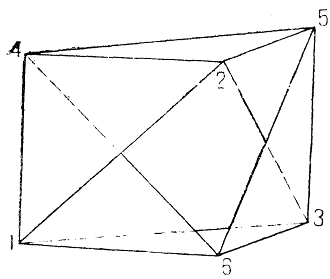
зом мы имеем дело с изгибанием полиэдра, имеющего границу, а именно, — нашей полосы со слившимися ребрами 1 4. Но эта полоса является частью замкнутого октаэдра P, который мы получим, если к шести треугольникам нашей полосы прибавим еще два равносторонних треугольника 1 2 3 и 4 5 6. Легко убедиться в том, что эти восемь треугольников соединены между собой таким же образом, как и в правильном октаэдре, и поэтому P имеет с правильным октаэдром одинаковое строение. На модели невозможно материально представить поверхность треугольников без самопересечения; но при постановке вопроса самопересечение нами не было запрещено. Изгибание нашей полосы является в то же время изгибанием октаэдра P, так как в этом изгибании прибавленные треугольники остаются конгруэнтными себе, поскольку их стороны не меняют своей длины. Между прочим, приведенный здесь изгибаемый полиэдр имеет еще такую особенность. При изгибании не все углы, образованные смежными гранями, меняются: углы при ребрах 2 4 и 3 6 все время остаются прямыми. Можно использовать это обстоятельство для того, чтобы перейти от P к другому изгибаемому полиэдру, ребра которого совпадают с ребрами полиэдра P, в то время как треугольные грани 1 2 3, 4 5 6, 1 2 4, 3 5 6 заменены другими гранями 1 3 5, 1 4 5, 2 3 6, 2 4 6.



Черт. 1а.



Черт. 1б.



Черт. 1в.

Приведенные здесь модели и некоторые другие такого же типа были найдены Брикаром (Bricard) [3]. Все они имеют самопересечения. До сегодняшнего дня не известно еще ни одного замкнутого изгибаемого полиэдра без самопересечения.

В этот вопрос важный вклад внес Коши (Cauchy), доказавший [4], что все замкнутые *выпуклые* полиэдры неизгибаемы. Результат Коши является, собственно, более общим; для уяснения этого мы должны точнее проанализировать понятие изгибания.

Изгибание является известным переходом от начального положения к конечному положению. Но соотношение между начальным и конечным положениями можно определить, совершенно не упоминая о способе этого перехода. Именно, это соотношение характеризуется тем, что исходная поверхность может быть так отображена на поверхность, получающуюся в результате изгибания, чтобы любая спрямляемая дуга кривой на первой поверхности всегда имела ту же длину, что и ее отображение[1]). Для полиэдра мы, кроме того, предполагаем, что отображение переводит грани в грани. Такое отображение мы будем называть *изометрией*. Движение в пространстве или зеркальное отображение является

1) Отсюда уже вытекает, что при этом отображении сохраняются углы.

изометрией; эти изометрии мы будем называть „тривиальными“ в отличие от остальных, — „нетривиальных“. Если между двумя поверхностями или полиэдрами имеет место изометрия (тривиальная или нетривиальная), то мы эти поверхности или полиэдры будем называть *изометричными*. Если две поверхности изометричны, то мы не можем еще утверждать, что они получаются одна из другой посредством изгибания, так как при изометрии ничего не говорится о непрерывном пространственном переходе.

Если для некоторой поверхности не существует нетривиальных изометричных поверхностей, то мы такую поверхность будем называть *однозначно определенной* (eindeutig); аналогичное определение устанавливаем для полиэдров. Неизгибаемая поверхность может не быть однозначно определенной, однако всякая однозначно определенная поверхность неизгибаема. Аналогичные утверждения имеют место для полиэдров.

Рассмотрим теперь самый процесс изгибания, и именно в момент, когда он только начинается. Будем рассматривать поверхности, получающиеся из данной поверхности F в процессе изгибания, как зависящие от некоторого параметра t, обозначающего, например, время. Пусть параметр пробегает интервал $0 \leqslant t \leqslant 1$, так что в семействе $F(t)$ наша исходная поверхность обозначена через $F(0)$. Примем сначала лишь, что $F(t)$ непрерывна относительно t и $F(0) = F$, во всем же остальном $F(t)$ — произвольное семейство поверхностей, вообще говоря, неизометричных с данной F. Тогда длина L некоторой нанесенной на F дуги кривой будет при деформации непрерывно изменяться с изменением t; пусть соответствующая кривая на $F(t)$ имеет длину $L(t)$, так что $L(0) = L$. Очевидно, что среди всех возможных деформаций изгибание характеризуется тем, что функция $L(t)$ является константой, $L(t) = L(0)$, для любой кривой на F. Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть радиус-вектор для $F(t)$, зависящий, следовательно, не только от t, но и от параметров на поверхности; пусть эти параметры на всех поверхностях семейства в соответствующих точках имеют равные значения. Тогда вектор $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{z}(t)$ обозначает скорость точки $\mathbf{x}(t)$ при деформации. В частности, векторное поле $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}$ задает поле скоростей точек поверхности F в первый момент деформации. Это поле будем называть *бесконечно малой деформацией* поверхности F. Чем характеризуются те бесконечно малые деформации, за которыми следует изгибание? Такое поле должно быть выбрано так, чтобы для любой дуги кривой на F с длиной $L = L(t)|_{t=0}$ выполнялось условие

$$\left.\frac{\partial L(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{1}$$

Позже мы этому условию придадим другую форму, в которой будет фигурировать $\mathbf{z}$ (см. § 4). Каждую бесконечно малую деформацию, удовлетворяющую условию (1), называют *бесконечно малым изгибанием* поверхности F. В частности, бесконечно малое изгибание возникает и тогда, когда F заставляют непрерывно двигаться в пространстве. Такие бесконечно малые изгибания мы называем тривиальными в отличие от нетривиальных, которые уже не могут быть рассматриваемы как начальные стадии движений. При всем этом нужно себе уяснить, что речь идет о векторных полях (полях скоростей), которые определены на F (и которые, конечно, не обязательно касательны к F). Мы называем поверхность *жесткой* (starr), если не существует нетривиальных бесконечно малых изгибаний этой поверхности; в противном случае мы будем называть поверхность нежесткой.

Совершенно аналогичные понятия мы можем ввести для полиэдров, но при этом мы с самого начала ограничиваемся рассмотрением только таких деформаций, при которых грани остаются плоскими поверхностями.

Неизгибаемая поверхность может не быть жесткой. А именно, может случиться (позже мы приведем такой пример), что некоторая поверхность допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания, но последние никак не могут быть „продолжены“ в качестве конечных непрерывных изгибаний. С другой стороны, я считаю не исключенной возможность существования жесткой и в то же время изгибаемой поверхности; это могло бы быть, если бы каждое изгибание в качестве своей начальной стадии имело поле скоростей некоторого бесконечно малого движения или поле скоростей, равных нулю. Я, однако, не знаю ни одного такого примера, и, может быть, вообще будет доказано, что такой случай невозможен. Вряд ли требует особого пояснения то, что вопрос о жесткости не является упрощением проблемы изгибания, вызванным соображениями математической техники, а имеет самостоятельное физическое значение.

Теперь мы можем так сформулировать теорему Коши: *выпуклые замкнутые полиэдры однозначно определены и жестки.* При этом, правда, однозначная определенность имеет место лишь при ограничении изометрией с *выпуклыми* полиэдрами. Уже приведенный в § 1 процесс зеркального отображения переводит известные выпуклые замкнутые полиэдры в такие полиэдры, которые нетривиально-изометричны первоначальным, но не являются выпуклыми.

Мы набросаем здесь доказательство Коши, одно из красивейших доказательств, какие вообще знает геометрия. Первая часть этого доказательства является рассуждением „в малом“. Пусть E — некоторый телесный угол полиэдра, E' — изометричный ему телесный угол. При соответствующем перенесении наших понятий это будет означать, что можно так непрерывно отобразить один угол на другой, что при этом грани перейдут в грани и любые два ребра угла E, ограничивающие некоторую грань, отобразятся на два ребра в E', образующие такой же угол. Пусть k будет ребро телесного угла E и w — двугранный угол при ребре k. Пусть w' обозначает соответствующий двугранный угол при ребре k' в телесном угле E'. Если $w > w'$, то мы снабдим ребро k знаком $+$ и будем называть это ребро положительным, если $w < w'$, то мы припишем ребру k знак $-$ и будем это ребро называть отрицательным, наконец, если $w = w'$, то мы оставим ребро k без всякого знака и назовем его несущественным. Очевидно, E и E' тогда и только тогда будут конгруэнтны, когда все ребра в E будут в этом смысле слова несущественными. Этот тривиальный случай мы оставляем в стороне; следовательно, мы принимаем, что существует хотя бы одно снабженное знаком ребро в E. Зададимся вопросом, каково число перемен знака при обходе вокруг E (если не принимать во внимание несущественные ребра). Коши показал, что если E и E' оба выпуклы и неконгруэнтны, то число этих перемен знака не меньше четырех. Доказательство этого предложения становится наиболее наглядным, когда мы заменяем телесный угол E его пересечением с концентрической сферой. E, E' переходят при этом в выпуклые полигоны p, p', составленные из дуг больших кругов, причем, соответствующие стороны этих полигонов имеют одинаковую длину. Углы w, w' фигурируют при вершинах полигонов p, p', так что наше распределение знаков непосредственно переносится на вершины полигона p. То обстоятельство, что при обходе p мы имеем по крайней мере четыре перемены знака, Коши доказывает индуктивно, переходя от меньшего числа сторон полигона p к большему. Мы рекомендовали бы читателю самому попытаться восстановить это доказательство или по крайней мере доказательство аналогичного предложения для плоских выпуклых замкнутых изометричных полигонов.

Фигуру, образованную двумя ребрами при вершине E, из которых одно положительно, а второе отрицательно и между которыми лежат лишь несущественные ребра, мы будем называть „характеристическим углом". Таким образом лемма Коши утверждает, что при нащих предположениях мы имеем у вершины E по крайней мере четыре характеристических угла.

Начиная с этого места доказательство Коши имеет уже чисто топологический характер. Пусть P и P' — два выпуклых изометричных полиэдра; мы должны показать, что они конгруэнтны. Для этой цели припишем ребрам полиэдра P знаки так, как было указано выше. Если P и P' конгруэнтны, то все ребра полиэдра P несущественны. Читатель сам легко покажет, что и обратное имеет место: если все ребра полиэдра P несущественны, то P и P' конгруэнтны. Итак, пусть изометрия нетривиальна, т. е. существует по крайней мере одно ребро на P, снабженное знаком. Тогда, согласно лемме Коши, на P должны существовать также характеристические углы. Мы проведем подсчет этих углов двумя способами и при этом придем к противоречию, которое и докажет теорему. Один подсчет мы проведем, исходя из вершин, второй же — исходя из граней, на которых лежат характеристические углы. При этом нам будут мешать несущественные ребра. Для того чтобы устранить это затруднение, мы будем рассматривать систему S, состоящую из всех существенных ребер полиэдра P, их концов и полей, на которые P разбивается этими ребрами и вершинами. Пусть f обозначает число полей, k — число ребер, e — число вершин в системе S. Если все ребра полиэдра P существенны, то S является просто системою всех ребер, вершин и граней выпуклого полиэдра P, и тогда по теореме Эйлера о выпуклых полиэдрах имеем:

$$f - k + e = 2.$$

Теперь мы оценим число $f - k + e = z$ в том случае, когда мы действительно должны устранить некоторые ребра из P, чтобы получить систему S. При этом заметим, что на основании леммы Коши из каждой вершины системы S исходят по крайней мере четыре ребра, принадлежащие к S. Если совокупность T всех ребер и вершин из S является связной системой, то мы можем снова применить теорему Эйлера и получим $z = 2$. Пусть теперь T распадается на две не связанные между собой системы T_1 и T_2, из которых T_1 связна; такое разложение всегда возможно, если T несвязно. Пусть f_i $(i = 1, 2)$ — число полей, на которые P разбивается *только одной* системой T_i и пусть k_i, e_i — числа ребер и вершин в системе T_i; кроме того, положим $e_i - k_i + f_i = z_i$. Теперь мы замечаем, что число ребер, исходящих из некоторой вершины системы T, не изменяется при разложении $T = T_1 + T_2$, так как T_1 и T_2 не связаны между собой. Поэтому из каждой вершины системы T_i исходят по меньшей мере два ребра, и для T_1 на основании теоремы Эйлера о полиэдрах мы получаем $z_1 = 2$. Теперь, T_1 лежит целиком в одном из полей системы T_2, поэтому $f = f_1 + f_2 - 1$, так что $z = z_1 + z_2 - 1 = z_2 + 1$. Если T_2 само еще не связно, то мы можем применить к T_2 те же рассуждения, какие мы провели относительно T. Таким образом мы находим: если T состоит из x лежащих отдельно связных компонент, то $z = x + 1$. Во всех случаях мы получаем неравенство

$$f - k + e \geqslant 2. \tag{2}$$

Переход от P к S не разрушает характеристических углов. Если через w мы обозначим общее число этих углов, то согласно лемме Коши, так как каждый такой угол принадлежит к одной и только к одной вершине, имеем

$$w \geqslant 4e. \tag{3}$$

Теперь мы подсчитаем w с помощью полей системы S. Если граница такого поля состоит из n ребер, то при любом распределении знаков мы встретим здесь не более, чем n перемен знака, т. е. число характеристических углов, принадлежащих рассматриваемому полю, не превосходит n. Если n нечетно, то число таких углов не может даже превосходить $n-1$. Если a_n будет обозначать число тех полей системы S, граница которых состоит из n ребер $(n \geqslant 3)$, то из приведенных соображений следует (так как каждое ребро принадлежит только одному полю) неравенство

$$w \leqslant 2a_3 + 4a_4 + 4a_5 + 6a_6 + \ldots \leqslant 2a_3 + \sum_{n \geqslant 4} na_n. \tag{4}$$

Для числа ребер имеем, так как каждое ребро принадлежит границе двух полей:

$$2k = \sum_{n \geqslant 3} na^n.$$

Для числа полей согласно определению имеем

$$f = \sum_{n \geqslant 3} a_n.$$

Следовательно,

$$4k - 4f = \sum_{n \geqslant 3} (2n - 4)\, a_n \geqslant 2a_3 + \sum_{n \geqslant 4} na_n,$$

ибо для $n \geqslant 4$ имеем $2n - 4 \geqslant n$. Теперь, из (4) вытекает нужная новая оценка для w, а именно

$$w \leqslant 4k - 4f. \tag{5}$$

Неравенства (5) и (3) дают искомое противоречие. Действительно, из (5) и (3) следует, что $4e - 4k + 4f \leqslant 0$, а это несовместимо с неравенством (2).

Этим доказана однозначная определенность замкнутых выпуклых полиэдров. Но с помощью несущественного изменения приведенного доказательства может быть доказана и их жесткость. В случае бесконечно малого изгибания можно совершенно аналогично предыдущему приписать ребрам знаки. Для каждого ребра мы отмечаем, увеличивается ли при бесконечно малом изгибании, уменьшается или является стационарным угол, образованный гранями, пересекающимися на данном ребре. Бесконечно малое изгибание тогда и только тогда является бесконечно малым движением, когда все ребра не получают знака. Легко видеть, что лемма Коши остается в силе и при новом способе отнесения знаков. Вторая часть доказательства остается без изменения; ведь эта часть высказывает общее положение, что никак нельзя снабдить ребра полиэдра, гомеоморфного сфере, знаками $+$ и $-$ так, чтобы вокруг каждой вершины, из которой исходят ребра со знаком, мы имели по крайней мере четыре перемены знака и чтобы по крайней мере одному ребру был приписан знак [1]).

§ 3. Гильбертово доказательство однозначной определенности шаровой поверхности.

Результат Коши стал известен в 1815 г. Тогда только зарождалась теория изгибания поверхностей с непрерывной кривизной. Лишь позже (Миндинг, 1836) возникла мысль, что предложение, аналогичное теореме Коши, должно иметь место и для овалоидов. Первый результат в этом направлении принадлежит Либману, который в 1899 г. доказал [5] однозначную определенность шаровой поверхности. Гильберт дал этому предложению особенно простое доказательство [6], которое и воспроизводится здесь.

Доказательство Гильберта опирается на элементарное положение, согласно которому всякая непрерывная функция точки на любой замкнутой поверхности в некоторой точке принимает максимальное значение. Для того чтобы в нашем случае притти к нужной нам функции, мы будем исходить из рассмотрений „в малом". Если некоторый кусок поверхности F имеет постоянную положительную гауссову кривизну K, скажем $K=1$, то либо в каждой точке поверхности F обе главные кривизны равны единице, и в этом случае F является частью сферы, либо существуют точки, в которых бóльшая из главных кривизн больше единицы, а меньшая меньше единицы.

Если во втором случае F является замкнутой поверхностью, то на F существует точка P, в которой бóльшая из главных кривизн имеет максимальное значение $k_0>1$. Тогда, в частности, P не является омбилической точкой и потому в окрестности P мы можем линии кривизны ввести в качестве параметрической сетки. После этого линейный элемент на F можно представить в форме $ds^2=A^2du^2+B^2dv^2$, причем здесь можно принять $A>0$ и $B>0$. Если $k(u, v)$ обозначает бóльшую из главных кривизн на F, то меньшая главная кривизна будет иметь значение $\frac{1}{k}$, и потому основные уравнения теории поверхностей могут быть записаны для F в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} k_v &= -\left(k-\frac{1}{k}\right)\frac{A_v}{A}, \\ \left(\frac{1}{k}\right)_u &= \left(k-\frac{1}{k}\right)\frac{B_u}{B}, \\ -\frac{1}{AB}&\left[\left(\frac{A_v}{B}\right)_v+\left(\frac{B_u}{A}\right)_u\right]=1. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Но в точке P мы имеем $k=k_0>1$, $k_u=k_v=0$, $k_{uu}\leqslant 0$, $k_{vv}\leqslant 0$. Отсюда, принимая во внимание первые два уравнения (6), получаем: в точке P $A_v=B_u=0$, $A_{vv}\geqslant 0$, $B_{uu}\geqslant 0$. Эти неравенства вместе с $A>0$ и $B>0$ несовместимы с третьим из уравнений (6).

---

[1]) Существует другое доказательство жесткости выпуклого полиэдра, данное Деном в статье „Über die Starrheit konvexer Polyeder", Mathematische Annalen, т. 77, 1915, стр. 466—473. Перевод ее появится в следующем выпуске „Успехов математических наук".

Мы видим, что законченное таким образом доказательство Гильберта не имеет ничего общего с доказательством Коши из § 2. В частности, из гильбертова доказательства однозначной определенности уже нельзя непосредственно получить и жесткость шаровой поверхности, как это имело место в доказательстве Коши.

Из доказательства Гильберта следует более общее предложение, которое заслуживает упоминания: для каждого куска поверхности с постоянной гауссовой кривизной, не являющегося частью сферы, точки с наибольшей и наименьшей главной кривизной лежат на границе этого куска.

Вероятно, с помощью этого предложения удастся вывести зависимость (о которой говорилось в § 1) между форматом куска сферы и степенью его изгибаемости.

§ 4. Диаграмма вращений для бесконечно малого изгибания. Доказательство Блашке для жесткости овалоида.

Можно было бы попробовать обобщить гильбертово доказательсто однозначной определенности шаровой поверхности на любые овалоиды. Тогда для некоторого куска поверхности F, имеющего изометричный ему кусок поверхности F', нужно было бы определить такую непрерывную функцию, которая сводилась бы к постоянной лишь в случае конгруэнтности F и F' и которая, с другой стороны, не достигала бы максимума внутри F, если F имеет положительную гауссову кривизну. Однако в этом направлении мы до сих пор не имеем никаких результатов.

Поэтому при исследовании общих овалоидов пришлось оперировать другими методами. Эти исследования к настоящему моменту ни в какой степени не являются законченными, но они уже принесли много интересных результатов.

Рассмотрим сначала бесконечно малое изгибание. Мы вернемся к определению и обозначениям, данным в § 2, и приведем (1) к нужному виду. Пусть $\mathbf{x}(\tau)$ — радиус-вектор некоторой спрямляемой кривой, лежащей на F и отнесенной к некоторому параметру τ. Тогда длина дуги задается с помощью формулы

$$L = \int \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right)^2}\, d\tau \text{ [1]}.$$

Так как мы снова считаем F начальным положением при некоторой деформации, то $\mathbf{x}(\tau)$ зависит еще от параметра деформации t. Мы делаем фундаментальное для всего дальнейшего предположение, что не только $\mathbf{x}$ имеет непрерывные первые производные по t и по некоторым параметрам u и v на поверхности, но и частные производные $\mathbf{x}_u$ и $\mathbf{x}_v$ непрерывно диференцируемы

---

[1]) В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями для операций над векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$: $\mathbf{ab}$ или $(\mathbf{ab})$ обозначает скалярное произведение, $\mathbf{a}^2$ обозначает $\mathbf{aa}$; векторное произведение мы записываем в виде $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ или $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$; далее, $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ мы записываем в виде $(\mathbf{abc})$ или $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Мы предполагаем известными простейшие правила операций с этими символами. Напомним некоторые формулы:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$
$$(\mathbf{abc}) = (\mathbf{bca}) = (\mathbf{cab}),$$
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}),$$
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

по t[1]). Тогда, как известно, также $\mathbf{x}_t = \mathbf{z}$, т. е. вектор скорости бесконечно малой деформации, имеет непрерывные производные по u, v и при этом $\mathbf{x}_{ut} = \mathbf{x}_{tu} = \mathbf{z}_u$, $\mathbf{x}_{vt} = \mathbf{x}_{tv} = \mathbf{z}_v$. При этих условиях мы можем равенству (1) придать следующую форму:

$$\int \frac{\dfrac{d\mathbf{x}}{d\tau}\,\dfrac{d\mathbf{z}}{d\tau}}{\sqrt{\left(\dfrac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right)^2}}\, d\tau = 0. \tag{7}$$

Благодаря произвольности выбора рассматриваемой кривой на F, равенство (7) может иметь место лишь тогда, когда мы потребуем для $\mathbf{z}$, чтобы

$$d\mathbf{x}\, d\mathbf{z} = 0; \tag{8}$$

при этом $d\mathbf{x}$ обозначает диференциал, взятый вдоль произвольного направления на F. Положим $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u\, du + \mathbf{x}_v\, dv$, $d\mathbf{z} = \mathbf{z}_u\, du + \mathbf{z}_v\, dv$, и, следовательно,

$$d\mathbf{x}\, d\mathbf{z} = \mathbf{x}_u\mathbf{z}_u\, du^2 + (\mathbf{x}_u\mathbf{z}_v + \mathbf{x}_v\mathbf{z}_u)\, du\, dv + \mathbf{x}_v\mathbf{z}_v\, dv^2.$$

В силу (8) эта квадратичная форма должна обращаться в нуль при любых du, dv. Таким образом мы получаем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_u\mathbf{z}_u &= 0,\\ \mathbf{x}_u\mathbf{z}_v + \mathbf{x}_v\mathbf{z}_u &= 0,\\ \mathbf{x}_v\mathbf{z}_v &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Из (9) вытекает (8), а следовательно, (7) и (1). Всякое векторное поле $\mathbf{z} = \mathbf{z}(u, v)$, для которого имеет место (9), мы будем называть *бесконечно малым изгибанием* поверхности F. Теперь мы заинтересованы в том, чтобы выделить тривиальные бесконечно малые изгибания среди прочих. Можно показать, что $\mathbf{z}$ тогда и только тогда является бесконечно малым движением, когда существуют два таких *постоянных* вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, что

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}. \tag{10}$$

Но с аналитической точки зрения этот результат неудовлетворителен. Действительно, (9) представляет собой линейную однородную систему диференциальных уравнений в частных производных для трех компонент вектора $\mathbf{z}$. В качестве тривиального решения такой системы естественно было бы ожидать только $\mathbf{z} = \mathrm{const.}$, а не выражение формы (10). По этой причине нецелесообразно определять бесконечно малое изгибание с помощью векторного поля $\mathbf{z}$, и потому ищут другие векторные поля, в которых тривиальные бесконечно малые изгибания являлись бы и в аналитическом отношении тривиальными решениями соответствующей системы диференциальных уравнений. Оказывается, что действительно существуют два таких векторных поля.

---

[1]) Таким образом мы имеем бесконечно малые изгибания среди некоторого ограниченного класса бесконечно малых деформаций. Если бы мы положили в основу более общий класс деформаций, при котором $\mathbf{z}$ только непрерывно, но не обязательно диференцируемо относительно u и v, то было бы трудно надлежащим определением выделить из этого класса бесконечно малые изгибания.

Для того чтобы их ввести наиболее наглядным образом, вернемся на один момент от бесконечно малых изгибаний к изометрии. Если P и P' — соответственные точки на изометричных поверхностях F и F', то касательные направления к F, исходящие из точки P, отображаются с сохранением углов на касательные направления к F', исходящие из точки P'. Следовательно, возможно с помощью пространственного движения (без зеркального отображения) наложить касательную плоскость к F в точке P на касательную плоскость к F' в точке P' так, чтобы соответствующие друг другу лучи совпали. Согласно общим правилам кинематики это движение можно однозначным образом разложить на вращение вокруг оси, проходящей через начало координат, и на параллельный перенос. Как вращение, так и параллельный перенос, каждое может быть задано с помощью одного вектора. Пусть $\mathbf{d}$ и $\mathbf{t}$ суть эти векторы; тогда для вектора $PP' = \mathbf{a}$, обозначая через $\mathbf{x}$ попрежнему радиус-вектор точки P, будем иметь

$$\mathbf{a} = \mathbf{t} + \mathbf{d} \cdot \left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{a} - \mathbf{t}}{2}\right). \tag{11}$$

Отсюда предельным переходом получаем аналогичную формулу для бесконечно малых изгибаний. Если мы примем, что F' получается непрерывным изгибанием из F, и заменим $\mathbf{a}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{d}$ на $\mathbf{a}\Delta t$, $\mathbf{t}\Delta t$, $\mathbf{d}\Delta t$, то $\mathbf{a}$ будет стремиться при $\Delta t \to 0$ к вектору поля $\mathbf{z}$ некоторого бесконечно малого изгибания поверхности F. Если мы еще дополнительно допустим, что $\mathbf{t}$ и $\mathbf{d}$ при $\Delta t \to 0$ также стремятся к предельным положениям $\mathbf{s}$ и $\mathbf{y}$, то получим из (11) формулу

$$\mathbf{z} = \mathbf{s} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}. \tag{12}$$

Конечно, мы можем не рассматривать предельного перехода и для бесконечно малого изгибания непосредственно задать векторные поля $\mathbf{y}$ и $\mathbf{s}$. Действительно, аналогично предыдущему мы находим, что бесконечно малое изгибание осуществляет бесконечно малое движение касательной плоскости в каждой точке поверхности, $\mathbf{y}$ обозначает угловую скорость, а $\mathbf{s}$ — скорость параллельного переноса в этом движении, если мы только примем, что ось вращения проходит через начало координат.

Бесконечно малое изгибание, характеризуемое векторами $\mathbf{y}$ и $\mathbf{s}$, относит не только точке $\mathbf{x}$, но и всем исходящим из $\mathbf{x}$ касательным направлениям, т. е. точкам поверхности, соседним с $\mathbf{x}$, скорости, заданные бесконечно малым изгибанием. Таким образом мы можем продиференцировать (12) по любому направлению, рассматривая при этом $\mathbf{s}$ и $\mathbf{y}$ как постоянные. Тогда мы получаем:

$$d\mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot d\mathbf{x} \tag{13}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{z}_u &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}_u, \\ \mathbf{z}_v &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}_v. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Если, независимо от всего предыдущего, мы имеем какое-либо векторное поле $\mathbf{y}(u, v)$ и такое векторное поле $\mathbf{z}(u, v)$, что выполняются формулы (14), то отсюда уже следует (9) и потому $\mathbf{z}$ является бесконечно малым изгибанием. Обратно, опять-таки независимо от наших кинематических соображений, из (9) следует существование векторного поля $\mathbf{y}$, удовлетворяющего уравнениям (14).

Действительно, вследствие первой и последней из формул (9) мы можем во всех случаях положить $\mathbf{z}_u = \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_u$, $\mathbf{z}_v = \mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{x}_v$. Тогда из среднего уравнения (9) следует, что $(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0$. Так как $\mathbf{x}_u$ и $\mathbf{x}_v$ линейно независимы, то отсюда вытекает существование двух таких чисел a_1 и a_2, что $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 = a_1\mathbf{x}_u + a_2\mathbf{x}_v$ или $\mathbf{y}_1 - a_1\mathbf{x}_u = \mathbf{y}_2 + a_2\mathbf{x}_v$. Если положить $\mathbf{y}_1 - a_1\mathbf{x}_u = \mathbf{y}$, то получается (14). Таким образом каждое бесконечно малое изгибание $\mathbf{z}$ действительно определяет некоторое векторное поле $\mathbf{y}$, для которого имеем место (14), и при этом из (14) следует, что $\mathbf{y}$ однозначно определяется заданием $\mathbf{z}$, а тогда из (12) уже однозначно определяется и $\mathbf{s}$.

Теперь, из (10) следует, что поля $\mathbf{y}$ и $\mathbf{s}$ действительно удовлетворяют поставленной цели. Бесконечно малое изгибание тривиально в том и только в том случае, когда $\mathbf{s}$ и $\mathbf{y}$ сводятся к *постоянным* векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из (10). До настоящего времени поле $\mathbf{s}$ очень редко привлекалось к изучению бесконечно малого изгибания (поскольку мне известно, лишь в [7] и в [8]). Между тем поле $\mathbf{y}$ уже сыграло очень важную роль, особенно в исследованиях Блашке.

Для дальнейшего нам придется сделать предположение, что векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ *дважды* непрерывно диференцируемы по u, v. Это предположение вызвано исключительно современным состоянием вычислительной техники, и нельзя сказать, что оно соответствует существу самой проблемы. Если мы, при этом предположении, продиференцируем обе части первого из уравнений (14) по v, второго — по u и затем вычтем, то найдем

$$\mathbf{y}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{y}_v \cdot \mathbf{x}_u. \tag{15}$$

Обратно, из теории диференциальных уравнений следует, что если $\mathbf{y}(u, v)$, есть векторное поле, удовлетворяющее уравнению (15), то существует векторное поле $\mathbf{z}(u, v)$, которое удовлетворяет уравнениям (14), т. е., как мы видели, представляет бесконечно малое изгибание. Этим проблема бесконечно малого изгибания полностью сведена к определению векторного поля $\mathbf{y}(u, v)$, удовлетворяющего уравнению (15).

Следуя Блашке, мы сделаем все более наглядным, откладывая все векторы $\mathbf{y}$ от некоторой определенной точки, например от начала координат. Тогда $\mathbf{y}(u, v)$ становится радиус-вектором некоторой поверхности D, которую Блашке называет „*диаграммой вращений*“ („Drehriss“) бесконечно малого изгибания $\mathbf{z}$. F отображается однозначно на D, причем это отображение дважды непрерывно диференцируемо. Уравнение (15) дает ряд замечательных свойств этого отображения. Если мы умножим обе части уравнения (15) один раз скалярно на $\mathbf{x}_u$, второй раз — скалярно на $\mathbf{x}_v$, то будем иметь

$$(\mathbf{y}_u, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0, \quad (\mathbf{y}_v, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0.$$

В силу линейной независимости векторов $\mathbf{x}_u$ и $\mathbf{x}_v$ отсюда вытекает существование четырех чисел α, β, γ, δ таких, что имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{y}_u &= \alpha\mathbf{x}_u + \beta\mathbf{x}_v, \\ \mathbf{y}_v &= \gamma\mathbf{x}_u + \delta\mathbf{x}_v. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Если эти выражения для $\mathbf{y}_u$ и $\mathbf{y}_v$ ввести в (15), то получается

$$\alpha + \delta = 0. \tag{17}$$

Форма поверхности D в первую очередь зависит от того, будут ли в рассматриваемой точке $\mathbf{y}_u$ и $\mathbf{y}_v$ линейно независимы. Если они линейно независимы, то D имеет в этой точке касательную плоскость, а из других соотношений следует (мы не будем это более подробно пояснять, так как это не важно для дальнейшего), что D тогда имеет также непрерывную кривизну в этой точке. Но согласно (16) мы имеем теперь

$$\mathbf{y}_u \cdot \mathbf{y}_v = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v. \tag{18}$$

Поэтому $\mathbf{y}_u$ и $\mathbf{y}_v$ будут линейно зависимы только тогда, когда определитель $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ равен нулю. Небольшое вычисление дает нам некоторые сведения о точках, в которых этот определитель обращается в нуль. Действительно, пусть $\mathbf{n}$ — орт нормали на F и обозначим, как обычно, числа $\mathbf{x}_u\mathbf{n}_u$, $\mathbf{x}_u\mathbf{n}_v = \mathbf{x}_v\mathbf{n}_u$ и $\mathbf{x}_v\mathbf{n}_v$, т. е. коэфициенты второй основной диференциальной формы для поверхности F, через L, M и N. Из (16) следует после скалярного умножения на $\mathbf{n}$: $\mathbf{n}\mathbf{y}_u = \mathbf{n}\mathbf{y}_v = 0$. Отсюда $\mathbf{n}_u\mathbf{y}_v = -\mathbf{n}\mathbf{y}_{uv} = \mathbf{n}_v\mathbf{y}_u$. Если мы первое из равенств (16) умножим скалярно на $\mathbf{n}_v$, второе — скалярно на $\mathbf{n}_u$ и вычтем, то в силу соотношения (17) получим

$$\beta N + 2\alpha M - \gamma L = 0. \tag{19}$$

Если мы примем, что в рассматриваемой точке F имеет положительную гауссову кривизну, $LN - M^2 > 0$, то из (19) следует, что $\Delta = 0$ лишь в случае, если $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Во всех остальных случаях $\Delta < 0$ [1]).

Позже мы подробнее остановимся на геометрическом смысле этих положений. Но сначала мы доведем до конца данное Блашке [9] поразительно короткое доказательство жесткости овалоидов, для которого мы уже собрали весь необходимый материал.

Блашке рассматривает интеграл

$$I = \int\int (\mathbf{x}\mathbf{y}_u\mathbf{y}_v)\, du\, dv,$$

распрсстраненный по поверхности F. Очевидно, что интеграл I инвариантен относительно преобразования параметров. Следовательно, I определен и тогда, когда мы не можем всюду на F взять одну и ту же систему параметров; эта трудность как раз и возникает в случае, который вскоре нас будет интересовать, а именно, когда F — овалоид. Но сначала мы допустим, что F является

---

[1]) Доказательство. Согласно (17) $\Delta = -\beta\gamma - \alpha^2$. Следовательно, если $\beta\gamma > 0$, то $\Delta < 0$. Если $\beta\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, то опять $\Delta < 0$. Если $\beta\gamma = 0$, $\alpha = 0$, то из (19) следует, так как $LN > 0$, что $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Остается показать, что $\Delta < 0$ при $\beta\gamma < 0$. Запишем (19) в форме

$$\frac{1}{2}(\gamma L - \beta N) = \alpha M.$$

Слева стоит среднее арифметическое чисел γL и $-\beta N$. Так как $\beta\gamma < 0$, $LN > 0$, то γL и $-\beta N$ имеют одинаковые знаки. Мы можем обе эти величины считать положительными, так как одновременная перемена знака у α, β, γ не меняет нашей задачи. Если мы среднее арифметическое заменим средним геометрическим и возведем в квадрат, то получим

$$-\beta\gamma LN \leqslant \alpha^2 M^2,$$

$$-\beta\gamma(LN - M^2) \leqslant (\alpha^2 + \beta\gamma) M^2 = -\Delta M^2.$$

Но левая часть последнего неравенства положительна. Следовательно, $\Delta < 0$.

односвязным окаймленным куском поверхности. Тогда согласно теореме Стокса интеграл I может быть преобразован в интеграл по контуру. А именно, из (15) следует, что

$$2\,(\mathbf{x}\mathbf{y}_u\mathbf{y}_v) = (\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{y}_v)_u - (\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{y}_u)_v,$$

а отсюда

$$I = \frac{1}{2}\oint(\mathbf{x}\mathbf{y}\,d\mathbf{y}), \tag{20}$$

где интеграл распространен по контуру, ограничивающему поверхность F.

Теперь примем, что F топологически эквивалентна сфере, являясь, например, овалоидом. Тогда мы можем с помощью простой замкнутой кривой разбить F на два односвязных куска и к каждому из них применить формулу (20). Если мы при этом на всей поверхности возьмем одну определенную ориентацию, то на обоих ее кусках контур будет проходиться в противоположных направлениях, так что в этом случае мы получим

$$I = 0\ ^{1)}. \tag{21}$$

С другой стороны, согласно (18) имеем

$$I = \int\int(\mathbf{x}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)\,\Delta\,du\,dv, \tag{22}$$

где интеграл распространен по F.

Если F — овалоид и начало координат взято внутри F, то $(\mathbf{x}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)$ имеет постоянный знак. Но мы видели, что также и Δ в этом случае не меняет знака. Поэтому для овалоидов (22) совместимо с (21) лишь тогда, когда всюду на F $\Delta = 0$. Но тогда на всей поверхности (возможно, в различных системах параметров) $\alpha = \beta = \gamma = 0$, т. е. в силу (16) и (17) $\mathbf{y}_u = \mathbf{y}_v = 0$. Таким образом $\mathbf{y}$ всюду стационарно на F, т. е. постоянно. Тогда, интегрируя уравнения (14), получаем, что $\mathbf{z}$ имеет вид (10), т. е. представляет собой бесконечно малое движение.

§ 5. Геометрические свойства диаграммы вращений. Изометричные пары поверхностей и бесконечно малое изгибание срединной поверхности.

Доказательство Блашке может показаться каким-то фокусом, если не знать его геометрической подоплеки. Мы осветим геометрические пружины этого доказательства, тем более, что при установлении однозначной определенности овалоидов нам понадобится более детальное знакомство с геометрией диаграммы вращений. В настоящем параграфе мы будем иметь дело исключительно с рассуждениями „в малом“.

Рассмотрим сначала некоторую точку на куске поверхности F, в которой при заданном бесконечно малом изгибании $\Delta \neq 0$. Относительно гауссовой кривизны в этой точке мы пока не делаем никаких предположений. Тогда, как было уже упомянуто, (18) показывает, что в соответствующей точке диаграмма вращений D имеет касательную плоскость. Но из (18) одновременно вытекает, что эта касательная плоскость параллельна касательной плоскости к F в соответствующей

[1]) Очевидно, что равенство (21) имеет место для ориентированных поверхностей, имеющих любой род.

точке. Следовательно, мы имеем теорему: там, где поверхность D имеет касательную плоскость, последняя параллельна соответствующей касательной плоскости к F [1]). Пучки направлений, принадлежащих этим параллельным плоскостям в точках касания, поставлены в соответствие с помощью аффинного преобразования (16), причем Δ является (отличным от нуля) детерминантом преобразования. Поэтому, если рассматривать обе плоскости с одной и той же стороны, то приходится различать два случая. Если $\Delta > 0$, то данное преобразование сохраняет направление обхода (ориентацию), если же $\Delta < 0$, то меняет на противоположное. Из наших результатов следует далее, что F и D в соответствующих точках имеют одно и то же гауссово сферическое отображение. Как известно, гауссова кривизна поверхности положительна или отрицательна, смотря по тому, сохраняет ли сферическое отображение направление обхода или обращает его на противоположное. Таким образом если в рассматриваемой точке гауссова кривизна поверхности F отлична от нуля, то гауссовы кривизны поверхностной F и D будут одного знака или разных знаков, смотря по тому, будет ли $\Delta > 0$ или $\Delta < 0$.

Если гауссова кривизна поверхности F положительна, то, как мы видели, из $\Delta \neq 0$ следует, что $\Delta < 0$. Тогда поверхность D имеет отрицательную гауссову кривизну.

Этот результат делает наглядной жесткость овалоидов. Если бы мы имели нетривиальное бесконечно малое изгибание некоторого овалоида F, то $\mathfrak{y}$ не было бы постоянным, т. е. не всюду было бы $\Delta = 0$. Примем на момент, что всюду на F $\Delta \neq 0$. Тогда поверхность D была бы всюду регулярной поверхностью со всюду отрицательной гауссовой кривизной. С другой стороны, D была бы замкнутой поверхностью, так как F и D непрерывно отображены друг на друга. Но здесь мы уже пришли к противоречию, ибо тогда D имела бы наивысшую точку, а в наивысшей точке поверхности гауссова кривизна всегда неотрицательна.

Для того чтобы полностью воспроизвести доказательство нашего предложения, мы, конечно, должны принять во внимание те возможные точки поверхности D, в которых $\Delta = 0$. Мы и приступаем к этому исследованию. Относительно гауссовой кривизны в этих точках мы сначала не делаем никаких предположений. Согласно (18) имеем теперь $\mathfrak{y}_u \cdot \mathfrak{y}_v = 0$. Поэтому существуют два числа a и b, не равные одновременно нулю и такие, что $a\mathfrak{y}_u + b\mathfrak{y}_v = 0$. Но это означает, что вдоль направления на F, определяемого равенством $du : dv = a : b$, имеет место $d\mathfrak{y} = 0$. Поворотом локальной системы параметров мы можем это направление сделать направлением $dv = 0$; тогда уравнения (16) принимают следующий вид:

$$\mathfrak{y}_u = 0, \quad \mathfrak{y}_v = \gamma \mathfrak{x}_u + \delta \mathfrak{x}_v.$$

Первое уравнение говорит, что в наших параметрах $\alpha = 0$. Тогда из (17) следует, что $\delta = 0$ и потому $\mathfrak{y}_v = \gamma \mathfrak{x}_u$. Умножение на $\mathfrak{n}_u$ дает: $\mathfrak{y}_v \mathfrak{n}_u = \gamma L$. С другой стороны, как мы уже видели, $\mathfrak{y}_v \mathfrak{n}_u = \mathfrak{y}_u \mathfrak{n}_v$. Так как в нашем случае $\mathfrak{y}_u = 0$,

[1]) Это явилось причиной того, что в доказательстве Блашке находит себе применение интеграл I. В самом деле, такие интегралы встречаются в созданной Минковским теории смешанных объемов, и при этом всегда в тех случаях, когда рассматриваемые два тела поставлены в соответствие друг другу с помощью параллельных касательных плоскостей. И действительно, к своему доказательству Блашке пришел через теорию Минковского.

то $\gamma L = 0$. Если теперь $\gamma \neq 0$, то имеем $L = 0$ и направление $dv = 0$ является асимптотическим. Если же $\gamma = 0$, то $\mathbf{y}_u = \mathbf{y}_v = 0$; тогда в рассматриваемой точке $\mathbf{y}$ имеет стационарное значение. Таким образом для точек, в которых $\Delta = 0$, имеет место предложение: либо $\mathbf{y}$ имеет стационарное значение, либо существует асимптотическое направление на F, вдоль которого $d\mathbf{y} = 0$.

Вторая возможность может представиться лишь тогда, когда гауссова кривизна поверхности F неположительна. В частности, тогда $\mathbf{y}$ может сохранять постоянное значение вдоль целой дуги некоторой асимптотической линии. Это находится в связи с тем, что поверхность можно так изгибать, чтобы некоторая асимптотическая линия при этом не менялась.

Если F имеет положительную гауссову кривизну, то этот случай исключается, т. е. $\mathbf{y}$ имеет стационарное значение. Но тогда можно утверждать еще больше: либо $\mathbf{y}$ всюду на F имеет постоянное значение, либо в некоторой достаточно малой окрестности рассматриваемой точки нет уже других сингулярных, т. е. стационарных точек поверхности D. Иначе говоря, *при нетривиальном бесконечно малом изгибании куска поверхности с положительной гауссовой кривизной сингулярные (т. е. стационарные) точки поверхности D лежат изолированно.*

Доказательство вытекает из аналитической теории систем эллиптических диференциальных уравнений[1]), наглядное же доказательство до сегодняшнего дня неизвестно. С помощью этого результата можно уже легко довести до конца намеченное выше доказательство жесткости овалоидов. Но мы используем этот результат не для доказательства жесткости, а для доказательства однозначной определенности овалоидов, так как жесткость нами уже доказана по Блашке.

Бесконечно малое изгибание не только получается из изометричного отображения предельным переходом, но между изометрией и бесконечно малым изгибанием существует еще другая в такой же степени простая, как и поразительная связь. Пусть $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i\ (u\ v)\ (i = 1, 2)$ — радиус-векторы двух изометричных поверх-

[1]) Схема доказательства. Так как гауссова кривизна поверхности F положительна, то вторая фундаментальная форма $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ является определенной формой. Мы можем поэтому ввести изотермические параметры u и v, т. е. такие, при которых $L = N$, $M = 0$. Тогда в силу (19) $\beta = \gamma$. Условие интегрируемости для (16) принимает тогда вид

$$(\alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v)_v - (\beta \mathbf{x}_u - \alpha \mathbf{x}_v)_u = 0.$$

Если мы произведем вычисления, подставив вместо $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vv}$ их выражения из формул Гаусса, то левая часть последнего равенства станет линейной формой относительно $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$, $\mathbf{n}$ и, следовательно, коэфициенты при этих векторах должны равняться нулю. Таким образом помимо (19) мы получаем еще два диференциальных уравнения вида

$$\alpha_v - \beta_u = g\alpha + h\beta,$$
$$\alpha_u + \beta_v = k\alpha + m\beta,$$

где g, h, k, m определяются первой фундаментальной формой и непрерывно зависят от u, v. Для всех таких систем уравнений Карлеман (T. Carleman, Comptes Rendus, Paris 1933, т. 197, стр. 471—474) доказал, что общие нули функций α и β лежат изолированно, если только α и β не равны тождественно нулю. Но общие нули функций α и β как раз и дают при нашем выборе координат стационарные точки поверхности D, а других особых точек, как мы уже знаем, поверхность D не имеет.

Возможность преобразования второй фундаментальной формы к изотермичному виду обеспечена, когда L, M, N диференцируемы, т. е. когда радиус-вектор не только два раза, но и три раза диференцируем по некоторым параметрам. Вероятно, можно сэкономить одно диференцирование, если представить встречающиеся здесь условия интегрируемости в интегральной форме и несколько обобщить доказательство Карлемана, что вряд ли представит какие-либо затруднения.

ностей F_i. Мы положим $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathbf{x}$, $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=\mathbf{z}$. Если F — поверхность с радиус-вектором $\mathbf{x}$, то каждая точка поверхности F является серединою некоторого отрезка, соединяющего соответствующие точки поверхностей F_i; поэтому F называется *срединной поверхностью* (Mittenfläche) для поверхностей F_i. Теперь благодаря изометрии мы имеем

$$d\mathbf{x}_1{}^2-d\mathbf{x}_2{}^2=0,$$

что можно записать и так:

$$d(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\,d(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=0,$$

а это уравнение есть не что иное, как уравнение (8) для наших векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$. Этим самым каждая пара изометричных поверхностей определяет бесконечно малое изгибание своей срединной поверхности.

Обратно, если мы будем исходить из бесконечно малого изгибания $\mathbf{z}$ некоторой поверхности $\mathbf{x}$, то получим еще несколько больше. Действительно, положим при любом t: $\mathbf{x}_1(t)=\mathbf{x}+t\mathbf{z}$, $\mathbf{x}_2(t)=\mathbf{x}-t\mathbf{z}$, так что $\mathbf{x}_i(1)=\mathbf{x}_i$; тогда из (8) найдем

$$d\mathbf{x}_i(t)^2=d\mathbf{x}^2+t^2\,d\mathbf{z}^2\pm 2t\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{z}=d\mathbf{x}^2+t^2\,d\mathbf{z}^2.$$

Векторы $\mathbf{x}_i(t)$ являются радиус-векторами пары изометричных поверхностей не только для $t=1$, но и при любом t. Конечно, поверхности семейства $\mathbf{x}_i(t)$ при фиксированном i не изометричны друг другу. Изометрия имеет место при произвольном фиксированном t между $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$.

Возвратимся теперь к нашей конфигурации F_1, F_2, F и введем в рассмотрение, как и раньше, диаграмму вращений D с радиус-вектором $\mathbf{y}$, который определяется векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$. Что можно сказать о паре поверхностей F_i, если D есть точка, т. е. $\mathbf{y}$ постоянно? Интегрированием системы (14) тогда находим для $\mathbf{z}$ выражение (10). Но отсюда уже следует, по правилам кинематики, что поверхность F_2 получается из F_1 путем пространственного движения, которое определяется вектором параллельного переноса и угловой скоростью, фигурирующими в (10). Этот результат содержится в более общем предложении, которое нам вскоре придется использовать. Допустим, что $\mathbf{y}$, быть может и не всюду, но во всяком случае в некоторой определенной точке поверхности F с радиус-вектором $\mathbf{x}_0$ имеет стационарное значение. Тогда мы заключим из предыдущего, что F_i в соответствующей паре точек „конгруэнтны с точностью до второго порядка". Точнее формулируя: две соответствующие друг другу точки изометричных поверхностей мы называем *точками конгруэнтности*, если в соответствующих друг другу направлениях, проходящих через эти точки, нормальные кривизны совпадают. Очевидно, тогда возможно путем пространственного движения привести эти поверхности в такое взаимное положение, при котором они в этой паре точек имели бы касание второго порядка (причем соответственные направления совпали бы). Если это движение не содержит зеркального отображения, то мы эти точки конгруэнтности будем называть *точками прямой конгруэнтности*, в противном случее — *точками непрямой конгруэнтности*. Тогда нужное нам предложение гласит: пара соответствующих точек на изометричных поверхностях тогда и только тогда является точками прямой конгруэнтности, если в соответствующей точке срединой поверхности диаграмма вращений имеет стационарную точку. К доказательству этого предложения мы вернемся позже.

Из этого предложения в соединении с предыдущим вытекает: *на нетривиально-изометричных поверхностях с положительной гауссовой кривизной точки конгруэнтности лежат изолированно.* Для доказательства мы сперва заметим, что либо во всех точках конгруэнтности мы имеем прямую конгруэнтность, либо во всех — непрямую. Если мы теперь на обеих поверхностях выберем в качестве положительного направления нормали то направление, которое идет во внутрь (этого возможно сделать благодаря нашему предположению о выпуклости поверхностей), то этим самым обе поверхности будут ориентированы. Если изометричное отображение сохраняет ориентацию, то во всех точках конгруэнтности мы будем иметь прямую конгруэнтность, и наоборот, если ориентация меняется, то все эти точки будут точками непрямой конгруэнтности. Мы можем считать, что все точки конгруэнтности суть точки прямой конгруэнтности, так как в противном случае мы зеркально отобразили бы одну из поверхностей относительно какой-либо плоскости. Тогда мы приведем эти поверхности в такое взаимное расположение, чтобы они в совпавшей паре точек конгруэнтности имели касание второго порядка. Но тогда, очевидно, срединная поверхность в этой же точке имеет касание второго порядка с данными поверхностями и, следовательно, непрерывную в данной точке положительную гауссову кривизну.

Таким образом поверхность D, определяемая срединной поверхностью для F_i, не имеет в окрестности рассматриваемой точки других стационарных точек, т. е. F_i не имеют других точек конгруэнтности в этой окрестности.

Между прочим, для того чтобы иметь право применять предыдущую теорию, мы должны принять, что F_i *трижды* непрерывно диференцируемы.

Теперь мы зададимся еще вопросом, что можно сказать о нашей конфигурации F_i, F, D, если в какой-либо паре соответственных точек на F_i мы имеем тольку одну пару соответственных направлений с равными нормальными кривизнами. С помощью несложных векторных преобразований находим, что такое обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда для этих направлений $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{y}$ параллельны [1]. Из этого предложения легко получается вышеупомянутое

[1]) Рассмотрим, например, направление $dv = 0$. В этом направлении нормальные кривизны на F_i будут равны как раз тогда, когда разность $X = (\mathbf{x}_{1u}\,\mathbf{x}_{1v}\,\mathbf{x}_{1uu}) - (\mathbf{x}_{2u}\,\mathbf{x}_{2v}\,\mathbf{x}_{2uu})$ равна нулю. Подставим сюда вместо $\mathbf{x}_i$ выражения $\mathbf{x} \pm \mathbf{z}$; тогда мы найдем, что

$$\frac{1}{2} X = (\mathbf{z}_u\,\mathbf{x}_v\,\mathbf{x}_{uu}) + (\mathbf{x}_u\,\mathbf{z}_v\,\mathbf{x}_{uu}) + (\mathbf{x}_u\,\mathbf{x}_v\,\mathbf{z}_{uu}) + (\mathbf{z}_u\,\mathbf{z}_v\,\mathbf{z}_{uu}).$$

Заменим здесь $\mathbf{z}_v$ через $\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}_v$ и соберем вместе все члены, умноженные скалярно на $\mathbf{x}_v$ Тогда мы получим для X выражение вида $\frac{1}{2} X = \mathbf{a}\mathbf{x}_v$, где

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{z}_u + (\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u)\cdot\mathbf{y} + \mathbf{z}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u + (\mathbf{z}_{uu}\cdot\mathbf{z}_u)\cdot\mathbf{y}.$$

Теперь мы заменим $\mathbf{z}_u$ через $\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}_u$ и используем тождества

$$\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{d}\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{d}\mathbf{b})\,\mathbf{c},$$

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}) + \mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = 0.$$

Это дает

$$\mathbf{a} = (\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{y})\cdot\mathbf{x}_u + \mathbf{z}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u + (\mathbf{y}\mathbf{z}_{uu})\,(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}_u).$$

Если мы здесь заменим $\mathbf{z}_{uu}$ через $\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{y}_u\cdot\mathbf{x}_u$, то мы получим для $\mathbf{a}$ выражение вида $\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{x}_u$, где

$$\mathbf{b} = \mathbf{y}_u\cdot\mathbf{x}_u + (\mathbf{y}\mathbf{y}_u\,\mathbf{x}_u)\,\mathbf{y}.$$

Здесь мы можем согласно первому из равенств (16) заменить $\mathbf{y}_u$ на $\alpha\mathbf{x}_u + \beta\mathbf{x}_v$, что дает окончательно

$$\frac{1}{2} X = \mathbf{a}\mathbf{x}_v = (\mathbf{b}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v) = -\beta\,[(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)^2 + (\mathbf{y}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v)^2].$$

соответствие между точками прямой конгруэнтности на F_i и стационарными точками на D. В стационарной точке поверхности D указанное только что условие выполняется для любого направления $d\mathbf{x}$, так как нуль-вектор $d\mathbf{y}$ можно рассматривать как параллельный любому направлению. Поэтому в этом случае соответствующие направления на F_i имеют всегда равные нормальные кривизны, т. е. мы имеем дело с парой точек прямой конгруэнтности. Обратно, если мы исходим из пары точек прямой конгруэнтности на поверхностях F_i, то $d\mathbf{y}$ должно быть параллельно $d\mathbf{x}$ для каждого направления. Следовательно, в (16) $\beta = \gamma = 0$. Для направления $du : dv = 1$ требование параллельности дает $(\mathbf{y}_u + \mathbf{y}_v)(\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v) = 0$. Следовательно, в силу (16)

$$\alpha(\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v)\cdot(\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v) = 2\alpha\,\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v = 0.$$

Отсюда $\alpha = 0$, т. е. $\mathbf{y}$ имеет стационарное значение.

Здесь и в конце доказательства, приведенного в последней сноске, мы предполагали, что $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v \neq 0$, т. е. что F в рассматриваемой точке имеет касательную плоскость. Если F_i находятся в произвольном взаимном расположении, то это условие может и не выполняться; например, если F_2 получается из F_1 вращением на половину полного оборота вокруг некоторой оси a, то F есть не что иное, как кусок этой оси; указанное условие ни в одной точке не выполняется. Однако в дальнейшем нам понадобится лишь сколь угодно малая окрестность такой точки P, где поверхности F_i имеют общую пару точек с одной и той же касательной плоскостью p и, кроме того, еще так расположены, что соответственные касательные направления поверхностей F_i в (P, p) совпадают. Тогда в точке P при любых параметрах

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x},\quad \mathbf{x}_{1u} = \mathbf{x}_{2u} = \mathbf{x}_u,\quad \mathbf{x}_{1v} = \mathbf{x}_{2v} = \mathbf{x}_v.$$

Следовательно, в частности $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v \neq 0$.

§ 6. Однозначная определенность овалоидов.

В этом параграфе мы будем рассматривать исключительно такие изометричные куски поверхностей F_i, которые имеют положительную гауссову кривизну и непрерывно диференцируемы до третьего порядка включительно. Мы докажем однозначную определенность трижды непрерывно диференцируемых овалоидов [10] [1]).

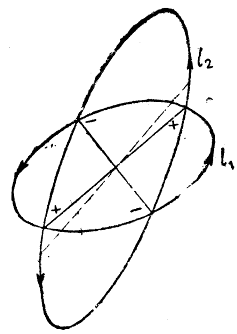
Подвергая в случае надобности F_1 или F_2 зеркальному отображению, мы можем принять, что рассматриваемая изометрия сохраняет ориентацию, если на обе поверхности F_i смотреть изнутри.

Мы будем называть некоторое направление на F_1 и соответствующее направление на F_2 *характеристическими*, если вдоль этих направлений обе поверхности F_i имеют равные нормальные кривизны. В точках конгруэнтности все направления являются характеристическими. Мы утверждаем: *через каждую*

Так как $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v \neq 0$, то выражение в квадратных скобках отлично от нуля. Таким образом X обращается в нуль одновременно с β, а равенство $\beta = 0$ согласно (16) эквивалентно параллельности $\mathbf{x}_u$ и $\mathbf{y}_u$.

[1]) В статье [10] доказана однозначная определенность только для кусочно-аналитических овалоидов. Опубликованная позже теорема Карлемана сделала возможным обобщение этого доказательства на трижды непрерывно диференцируемые овалоиды, публикуемое нами здесь впервые.

точку поверхности F_i, не являющуюся точкой конгруэнтности, всегда проходят два и только два характеристических направления. Доказательство элементарно. Положение вещей становится наиболее наглядным, если рассмотреть индикатрису Дюпена. В точке поверхности с положительной гауссовой кривизной эта индикатриса является эллипсом, площадь которого определяется гауссовой кривизной, а длина радиус-вектора дает нормальную кривизну для соответствующего направления. Индикатрисы в соответственных точках на F_i будут равновеликими эллипсами. Теперь мы так наложим друг на друга эллипсы l_i, чтобы их центры совпали и затем совместились те направления, которые находятся в соответствии при данной изометрии поверхностей F_i. Если бы при этом эллипсы совпали всеми своими точками, то мы имели бы дело с некоторой точкой конгруэнтности на F_i, а такой случай мы исключили из нашего рассмотрения. Но два несовпадающих концентрических равновеликих эллипса имеют ровно четыре точки пересечения, которые попарно симметричны относительно центра (черт. 2). Направление радиус-векторов, проведенных к точкам пересечения, и дают нам характеристические направления на F_i в рассматриваемой точке.

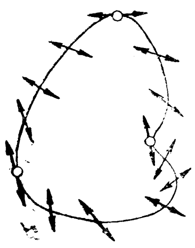


Черт. 2.

Мы можем различить между собой эти два направления с помощью следующего правила, которое имеет силу для всех точек поверхностей F_i (за исключением точек конгруэнтности). Мы устанавливаем на F_1 некоторое определенное направление обхода, которое при помощи изометрии переносится и на F_2. Если мы теперь одно из характеристических направлений слегка повернем вокруг исходной точки в положительном направлении, то нормальные кривизны поверхностей F_i вдоль нового направления уже будут отличаться друг от друга. При этом возможны два случая. Либо теперь нормальная кривизна на поверхности F_2 будет больше, чем на F_1, либо меньше. В первом случае мы будем называть характеристическое направление положительным, во втором же случае — отрицательным (черт. 2). Через каждую точку поверхностей F_i проходит одно положительное и одно отрицательное характеристическое направление.

В нашем доказательстве характеристические направления будут играть роль, аналогичную роли характеристических углов у изометричных выпуклых полиэдров в доказательстве Коши (§ 2). Между прочим, мы могли и те углы разбить на два класса, как мы это сейчас сделали с характеристическими направлениями; но в нашем случае это разбиение является только вспомогательным техническим приемом и не составляет существенной части доказательства. Теперь доказательство будет протекать совершенно аналогично тому, как это было у Коши. Мы покажем, что в силу одного топологического свойства, которое мы сейчас укажем, поле положительных (или отрицательных) характеристических направлений не может быть нанесено на овалоид. Если мы это покажем, то отсюда будет следовать, что у изометричных овалоидов все точки являются точками конгруэнтности, а это уже влечет за собой на основании известных предложений диференциальной геометрии конгруэнтность этих овалоидов.

У нетривиально-изометричных F_i (имеют они границу или нет) во всех случаях поле положительных характеристических направлений *непрерывно всюду*, *за исключением, быть может, изолированно лежащих особенностей в точках конгруэнтности.* Такие поля мы будем коротко называть *полями направлений.* Эти поля следует себе представлять с помощью не простых стрелок, а двойных. Так, например, черт. 3 представляет собой непрерывное поле направлений вдоль замкнутой кривой, которое не может быть рассматриваемо как непрерывное поле простых стрелок. „В малом“, конечно, можно эти направления представить и простыми стрелками.



Черт 3.

Теперь нам понадобятся некоторые элементарные топологические понятия и предложения, которые в основном идут от Пуанкаре (H. Poincaré) [11]. Мы будем себе мыслить некоторую простую замкнутую, непрерывно диференцируемую кривую C с определенным направлением обхода, расположенную на некотором ориентированном куске поверхности F, который окружает кривую наподобие замкнутой полоски. Благодаря ориентации C и F имеет смысл различать положительную и отрицательную стороны кривой C на F. Положительной мы называем ту сторону, которую указывает стрелка касательной, если ее повернуть на небольшой положительный угол в касательной плоскости. Кривую, получающуюся из C изменением направления обхода, мы назовем C'. Положительная сторона кривой C является отрицательной для C', если мы сохраняем ориентацию на F. Обратно, если сохраним направление обхода кривой C, но изменим ориентацию F на противоположную, то поменяются обозначения обеих сторон кривой C.

Пусть далее задано некоторое поле направлений R на F, не имеющее особых точек. В некоторой точке P кривой C мы укажем направление поля стрелкой (при этом из имеющихся двух возможностей мы произвольно выберем одну). Пусть w обозначает угол, образованный этой стрелкой и направленной касательной к кривой C в точке P. При этом мы касательную рассматриваем как начальную сторону угла, а стрелку — как конечную. Тогда в силу ориентированности поверхности F угол w определен с точностью до целого кратного 2π; мы выбираем произвольно одно из его значений. Полученное таким образом значение угла мы будем непрерывно продолжать, заставляя точку P двигаться в определенном направлении вдоль кривой C. В силу условия непрерывности здесь уже не будет никакого произвола. Изменение угла w при однократном обходе кривой C мы обозначим через $W\pi$. W, очевидно, — целое число. Теперь легко видеть, что W зависит от R, C и F и не зависит от P и от других произвольных элементов в нашем построении. Если мы будем считать F и R заданными, а C переменным, то мы будем писать $W=W(C)$. Между прочим, непосредственно видно, что R тогда и только тогда может быть рассматриваемо как поле простых стрелок вдоль C, когда W четно; на черт. 3 $W=-1$, если только мы ориентируем плоскость чертежа и замкнутую кривую против часовой стрелки. Если C заменить на C', то W меняет знак: $W(C')=-W(C)$. Точно так же W меняет знак, если, не изменяя C, изменить ориентацию F на противоположную. Это можно проверить на черт. 3.

Как легко показать, $W(C)$ не изменяется, если кривую C непрерывно изменять (при постоянных F и R). Действительно, с одной стороны, W могло бы только непрерывно меняться, с другой стороны, W — целое число. С помощью предельного перехода, который предоставляется читателю, мы можем теперь определить W и в том случае, когда C имеет конечное число угловых точек. Затем сколь угодно малой деформацией кривой C можно достигнуть того, чтобы направления поля R только в конечном числе точек касались C.

В этом случае мы имеем некоторый новый важный способ определения W. Пусть P — та точка на кривой C, в которой направление поля касательно к кривой. Всякую такую точку мы назовем *точкой соприкосновения*. Угол w, который мы вводим на кривой в окрестности точки P указанным ранее образом (с известным произволом), может вести себя в точке P трояким образом: при прохождении точки P по кривой C в определенном направлении угол w может возрастать в точке P, убывать, либо иметь стационарное значение. В первом случае мы называем точку соприкосновения P *положительной*, во втором — *отрицательной* и в третьем — *несущественной*. Пусть p обозначает число положительных и n — число отрицательных точек соприкосновения на C; тогда имеет место формула

$$W = p - n. \tag{23}$$

На черт. 3 имеем одну положительную и две отрицательные точки соприкосновения при прежней ориентации (против часовой стрелки). Несущественных точек соприкосновения здесь нет.

Для доказательства формулы (23) мы сперва заметим, что значение w в какой-либо точке соприкосновения всегда кратно π. Но теперь, легко убедиться в том, что W задано, если известно, как часто w проходит целые кратные π, возрастая или убывая.

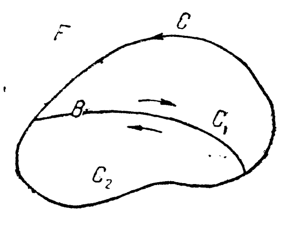
Конечно, формула (23) дает удобный способ определения W на каждой конкретной фигуре. Однако, помимо этого из формулы (23) вытекает более важное общее предложение: Если кроме F, R, C имеем аналогичную фигуру F_0, R_0, C_0, причем между этими фигурами имеет место взаимнооднозначное и в обе стороны непрерывное отображение, т. е. на языке топологии, имеет место гомеоморфизм, то $W(C) = W_0(C)$. Конечно, при определении W_0 нужно ориентацию F и C посредством гомеоморфизма перенести на F_0 и C_0. Тогда наше предложение утверждает, коротко говоря, что W является топологическим инвариантом. (Ради простоты мы вынуждены здесь принять, что гомеоморфизм непрерывно диференцируем.)

Для доказательства мы прежде всего заметим, что гомеоморфизм во всех случаях переводит точки соприкосновения в точки соприкосновения. Но можно легко показать, что положительные, отрицательные и несущественные точки соприкосновения всегда переходят в точки соприкосновения соответствующего класса; при этом приходится рассматривать положительную и отрицательную сторону кривой C на F. Таким образом наше предложение следует из (23) для того случая, когда на C лежит конечное число точек соприкосновения. В силу инвариантности числа W по отношению к непрерывным деформациям наше предложение имеет место и без этого предположения относительно C [1]).

---

[1]) Замечание для топологов. Изобразим w с помощью единичного вектора (орта) из начала координат в некоторой плоскости. При обходе кривой C конец этого орта определяет некоторое отображение окружности на самое себя, если только в качестве углового аргумента для этого орта взять не w, а $2w$. W является степенью этого отображения (Abbildungsgrad); отсюда уже следует (23) и топологическая инвариантность числа W.

Возьмем теперь поле направлений R не на замкнутой полосе, а на односвязном куске поверхности, который определенным образом ориентирован. Мы сейчас допускаем, что R имеет конечное число особых точек на F. Пусть теперь C — некоторая кривая на F, которая не проходит через эти особые точки и на которой направление обхода совпадает с ориентацией поверхности F. Соединим две точки на C с помощью простой дуги B, которая лежит целиком внутри C и не проходит через особые точки поля R. Тогда C можно рассматривать (черт. 4) как сумму двух простых и замкнутых кривых C_1, C_2, имеющих ту же ориентацию, что и F; каждая из этих кривых состоит из части C и из дуги B, причем последняя на этих кривых проходится в противоположных направлениях. При этом образование суммы следует здесь понимать так же, как и в криволинейных интегралах: ту дугу, которая в слагаемых проходится в противоположных направлениях (в нашем случае дугу B), опускают. При образовании $W(C_i)$ $(i=1, 2)$ приходится учитывать углы кривых C_i у концов дуги B. Лучше всего можно себе представить, как это происходит, если небольшими деформациями округлить C_i у вершин; очевидно $W(C_i)$ при этом не меняется. Этим путем читатель легко убедится в справедливости фомулы



Черт. 4.

$$W(C)=W(C_1)+W(C_2)+2.$$

Следует обратить внимание на то, что части, привнесенные в $W(C_i)$ дугою B, в сумме взаимно уничтожаются. Если вообще положить $V(C)=W(C)+2$, то последняя формула запишется проще:

$$V(C)=V(C_1)+V(C_2). \tag{24}$$

Таким образом для всех простых замкнутых одинаково ориентированных с F кривых, не проходящих через особые точки поля R, $V(C)$ обладает тем же аддитивным свойством, что и криволинейный интеграл.

Допустим на минуту, что внутри C на F нет особых точек поля R. Тогда $V(C)$, как и $W(C)$, не изменится, если мы будем непрерывно стягивать кривую C во внутрь к некоторой точке Q. Но тогда мы можем легко вычислить $W(C)$: направление поля R будет отличаться сколь угодно мало от направления в Q, угол между касательной к C и каким-либо фиксированным направлением на F из Q будет возрастать на величину, близкую к 2π, и мы получим

$$W(C)=-2,\quad V(C)=0\ ^{1)}.$$

Теперь мы сделаем более общее допущение, приняв, что поле R внутри C, на F имеет особые точки $P_1, \ldots, P_n$. Окружим каждую точку P_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ некоторой небольшой замкнутой кривой C_k, которая имеет ту же ориентацию, что и F, и не содержит внутри себя кроме P_k никаких других особых точек поля R; кроме того, C_k между собой и с C не имеют общих точек. Тогда на осно-

---

[1]) Для строгого обоснования этого рассуждения представляем себе, что фигура F, C, R заменена гомеоморфной фигурой, причем F переходит в плоскую область. Вследствие топологической инвариантности числа W достаточно ограничиться плоскими фигурами, где определен угол и между направлениями, не исходящими из одной точки.

вании предыдущего таким же путем, как при рассмотрении вычетов в теории функций, убеждаемся в справедливости формулы

$$V(C)=\sum_{k=1}^{n} V(C_k).$$

$V(C_k)$ зависит исключительно от поведения поля R в сколь угодно малой окрестности точки P_k на F [между прочим, следует обратить внимание на то, что $V(C_k)$ не зависит от ориентации F]. Мы назовем целое число $V(C_k)$ „индексом" точки P_k относительно R и будем писать: $V(C_k)=j(P_k)$. Тогда мы имеем формулу

$$V(C)=\sum_{k=1}^{n} j(P_k). \tag{25}$$

Мы повторяем: C — простая замкнутая кривая на куске поверхности F; C имеет ту же ориентацию, что и F; на F лежит поле направлений R, которое не имеет особых точек на C, а внутри C имеет только особые точки P_k. При этих условиях имеет место формула (25) [1]).

Теперь мы, следуя Пуанкаре [11], выведем важное следствие. Пусть F будет замкнутой поверхностью, топологически типа сферы. На F лежит поле направлений R, имеющее особые точки $P_1, \ldots, P_r$, и никаких других. Тогда мы утверждаем, что

$$\sum_{m=1}^{r} j(P_m)=+4. \tag{26}$$

Для доказательства мы начертим на F простую замкнутую направленную кривую C, которая не проходит через особые точки поля R. Как и раньше, через C' мы обозначим совпадающую с C кривую, но направленную в противоположную сторону.

C разбивает F на два односвязных куска, из которых один, F_0, имеет одинаковую ориентацию с C, а второй, F_0', — одинаковую ориентацию с C'. Применение формулы (25) к F_0 и F_0' дает

$$\sum_{m=1}^{r} j(P_m)=V(C)+V(C').$$

Но теперь,

$$V(C)+V(C')=W(C)+W(C')+4 \quad \text{и} \quad W(C')=-W(C).$$

Таким образом формула (26) доказана [2]).

Нам понадобится в дальнейшем более слабое утверждение, содержащееся в (26): на поверхности, гомеоморфной сфере, любое поле направлений должно иметь по крайней мере одну особую точку с положительным индексом [3]).

[1]) Конечно, некоторые из особых точек могут быть „устранимыми", т. е. фактически регулярными точками поля R; как мы уже видели, в таких точках индекс равен нулю. Читатель может рассматривать теорему Коши о вычетах для логарифма мероморфной функции как частный случай приводимой здесь теоремы при надлежащим образом выбранном поле направлений.

[2]) Сумма J индексов некоторого поля направлений на произвольной замкнутой ориентированной поверхности рода p определяется формулой $J=4(1-p)$, которая содержит, как частный случай, формулу (26). Читатель сможет сам легко доказать эту более общую формулу с помощью канонических разрезов.

[3]) Вот некоторые наглядные примеры особых точек для полей направлений с указанием индекса. Мы будем рассматривать поля направлений на плоскости в окрестности некоторой точки P, определяющиеся касательными к семействам кривых; для краткости мы будем говорить об индексе точки P „относительно семейства кривых". Тогда

В противоположность этому мы теперь покажем, что в поле положительных (или отрицательных) характеристических направлений на изометричных поверхностях с положительной гауссовой кривизной индекс точек конгруэнтности никогда не может быть положительным. Этим самым будет доказана однозначная определенность овалоидов.

Пусть F_i удовлетворяют условиям, поставленным в начале этого параграфа, а P_i — какая-либо пара соответствующих друг другу изолированных точек конгруэнтности на изометричных поверхностях F_i. Тогда мы прежде всего приведем эти F_i в такое положение, при котором P_i совпадают в некоторой точке P и в этой точке поверхности F_i имеют касание второго порядка. Как мы установили еще в § 5, срединная поверхность обладает тогда в точке P положительной гауссовой кривизной и диаграмма вращений имеет в некоторой окрестности точки P, быть может, за исключением самой точки P, касательные плоскости; эти касательные плоскости параллельны соответствующим касательным плоскостям поверхности F, но имеют противоположную ориентацию. Если E — общая касательная плоскость поверхностей F, F_i в P, то мы можем, кроме того, эту окрестность точки P выбрать столь малой, чтобы касательные плоскости к F нигде не были перпендикулярны к E. Так как сейчас мы имеем дело с рассуждениями „в малом“, то мы будем рассматривать фигуру только в этой окрестности точки P и ради краткости будем обозначать через F_i, F, D уже соответствующим образом уменьшенные куски поверхности.

Тогда заданное соответствие между точками поверхностей F, F_i является гомеоморфизмом, который переводит непрерывные поля направлений снова в непрерывные поля направлений. Для наших целей достаточно рассмотреть вместо поля положительных характеристических направлений соответствующее поле направлений R_0 на F; точка P относительно обоих полей должна иметь одинаковый индекс j. То же самое имеет место относительно поля направлений S_0, которое отвечает нашим полям на поверхности D. Здесь нам придется обратить внимание на то, что P является особой точкой не только поля S_0, но и самой поверхности D, так что наша теория непосредственно не применима здесь. Мы докажем наше утверждение $j \leqslant 0$ путем сравнения между собой полей R_0 и S_0, причем мы сможем воспользоваться двумя обстоятельствами, которые мы, имея как раз в виду настоящее доказательство, установили в § 5. Во-первых, отвечающие друг другу направления на R_0 и S_0 параллельны между собой, и во-вторых, соответствие между F и D обращает направление обхода на противоположное.

Так как нам придется измерять углы, то удобно превратить R_0, S_0 с помощью гомеоморфизма в плоские области. В данном случае таким гомеоморфизмом является ортогональное проектирование e на E; e осуществляет гомеоморфизм лишь в силу

$j(P) = +2$ относительно семейства прямых, проходящих через P, а также относительно семейства окружностей с центром в P. Относительно семейства парабол с фокусом в P и с одной и той же осью $j(P) = +1$. Относительно семейства окружностей, проходящих через точку P и имеющих в P заданную касательную, $j(P) = +4$. Относительно всех гипербол, имеющих центр в точке P и заданные асимптоты, $j(P) = -2$. Если рассматривать данную плоскость как комплексную числовую плоскость, то относительно линий уровня вещественной или мнимой части z^n при натуральном n: $j(P) = 2(1-n)$. Кроме того, сам читатель легко установит, что индекс $j(P)$ тогда и только тогда четен, когда в окрестности рассматриваемой точки поле направлений может быть рассматриваемо как поле „простых стрелок“.

того, что согласно нашим предположениям ни одна из касательных плоскостей к F не перпендикулярна к E. Пусть A обозначает плоский образ поверхности F при проектировании e, а поле направлений R — образ поля направлений R_0; следовательно, j будет индексом точки P относительно R.

Пусть G обозначает проекцию поверхности D на плоскость E. В окрестности каждой отличной от P точки на D проектирование e является гомеоморфизмом. Рассматриваемое для всей области D, e представляет собой однозначное и непрерывное отображение; это отображение не должно быть взаимно однозначным: одной отличной от P точке X области G могут соответствовать многие точки на D. Отсюда, так как e „в малом" взаимно однозначно в „пунктированной" области $D-P$, легко следует, что только конечное число, например n, точек X_i области D может соответствовать одной точке X и что это число n будет одним и тем же для всех точек X области G. Пусть E' — некоторая риманова поверхность над E, которая в P имеет как раз n-кратную точку разветвления. Тогда из предыдущего можно строго вывести (мы не будем здесь это подробно проводить), что если отобразить с помощью e окрестность одной из точек X_i поверхности D, на окрестность в E' некоторой точки, лежащей в E' над X, и это отображение непрерывно продолжить в D и в E', то получается гомеморфизм e' между D и некоторой частью B поверхности E', лежащей над G. Все это кажется сложнее, чем есть в действительности. Можно себе непосредственно наглядно представить гомеоморфизм e' и получающийся при этом образ B, если вообразить модель поверхности D из деформируемого материала и эту модель вдавить в плоскость E так, чтобы при этом каждая точка модели сместилась по прямой, перпендикулярной к E.

Наши различные отображения дают гомеоморфизм h между A и B. Будем считать, что E, а следовательно и A, определенным образом ориентирована. Этим самым установлена ориентация на римановой поверхности E', лежащей над E, и, следовательно, на B. Тогда мы утверждаем: гомеоморфизм h вызывает на B противоположную ориентацию. Это утверждение вытекает из того, что, как было установлено в § 5, соответствующие касательные плоскости поверхностей F и D параллельны между собой, причем при этом соответствии меняется ориентация; с помощью проектирования e это дает наше утверждение.

Пусть теперь C — простая замкнутая кривая в A с непрерывной касательной, имеющая одинаковую ориентацию с A и содержащая точку P внутри себя. Пусть C'' будет образом кривой C в B при гомеоморфизме h. Пусть, наконец, x будет угол, образуемый касательной к C'' с некоторым фиксированным направлением в E. Мы утверждаем, что при однократном обходе кривой C'' этот угол возрастает на $2n\pi$, если только при измерении углов положить в основу ту ориентацию на E', которая воспроизводится гомеоморфизмом h; если мы будем исходить из ориентации A, то мы должны будем сказать, что этот угол уменьшается на $2n\pi$. Для того чтобы строго доказать это, с наглядной точки зрения почти очевидное, положение, можно с помощью функции $\sqrt[n]{z}$ отобразить риманову поверхность E' на плоскость, а все дальнейшее получается уже элементарно.

Пусть теперь S обозначает поле направлений в B, в которое гемеоморфизм h переводит поле R. Мы строим $W(C)$ в A относительно R и $W(C'')$ в B относительно S. Тогда в силу топологической инвариантности числа W всегда имеем $W(C) = W(C'')$, если только возьмем в B ориентацию, перенесенную с помощью гомеоморфизма h из A. Тот факт, что A и B лежат в одной плоскости, мы используем для того, чтобы дать способ определения числа W, вообще говоря, неосуществимый на кривых поверхностях.

Мы рассматриваем угол, образованный направлением поля R с некоторым определенным направлением в E; если $X\pi$ есть изменение этого угла при однократном обходе кривой C, или, короче говоря, — полный поворот поля R вдоль C, то имеем просто $W(C) = X - 2$. Действительно, мы, очевидно, получим $W(C)$, если из полного поворота поля R вычтем полный поворот касательной к C и разность разделим на π.

Теперь мы применим этот же прием для определения $W(C'')$. Полный поворот касательной к C'', как мы уже видели, равен $2n\pi$. Полный поворот поля S вдоль C'' есть не что иное, как $-X\pi$. Действительно, напомним, что согласно § 5 соответственные направления полей R_0 и S_0 на поверхностях F и D параллельны между собой. S и R образованы из S_0 и R_0 ортогональным проектированием, и так как при этом параллельность не нарушается, то они тоже между собой параллельны. Поэтому, если мы будем измерять полный поворот S вдоль C'' с помощью ориентации A, то должны будем получить то же самое, что и для полного поворота R вдоль C. Но при определении $W(C'')$ мы исходим как раз из противоположной ориентации, следовательно, действительно, мы должны в наших вычислениях вместо полного поворота S вдоль C'' брать $-X\pi$.

Поэтому

$$X - 2 = W(C) = W(C'') = -X - 2n.$$

Отсюда $2X = 2 - 2n$, $W(C) = -1 - n$. Но согласно определению для искомого индекса j мы имеем

$$j = V(C) = W(C) + 2.$$

Следовательно,

$$j = 1 - n \leqslant 0, \tag{27}$$

что мы и утверждаем. Этим доказана однозначная определенность овалоидов.

Мы уже упоминали о том, что существует связь между этим доказательством и доказательством Коши из § 2. Мы можем теперь продолжить эту аналогию несколько дальше. Из (27) в соединении с обобщением формулы (26), данным в сноске [2]) на стр. 57, следует, что наше поле обладает свойствами, которые хотя и осуществляются для всех поверхностей рода $\geqslant 1$, однако для поверхностей рода нуль не имеют места. В доказательстве Коши мы установили для системы всех существенных ребер неравенство $e - k + f \leqslant 0$. Это неравенство противоречило формуле Эйлера для полиэдров рода нуль, но для полиэдров более высокого рода, действительно, $e - k + f \leqslant 0$, так что здесь противоречие отпало.

Дальнейшая аналогия с доказательством Коши заключается в том, что наши рассуждения после несущественного видоизменения доказывают также и жесткость овалоидов. Действительно, при бесконечно малом изгибании куска поверхности F с положительной гауссовой кривизной непосредственно появляется поле R (которое мы получили обходным путем через изометричные F_t) со своими двумя единственно важными для нас свойствами, а именно, что только его особые точки являются стационарными точками на диаграмме вращений D и что для любого направления поля R соответствующее направление на D ему параллельно.

Можно поставить вопрос о связи этого доказательства также с гильбертовым доказательством однозначной определенности шаровой поверхности (§ 3). Формальную связь установить можно. А именно, мы можем поведение некоторой функции на поверхности задать при помощи поля направлений, касательных к линиям уровня для этой функции. Стационарные точки этой функции будут особыми точками поля, и индекс будет положителен для изолированного экстремума. Доказательство Гильберта построено на том, что определенная функция не может принимать экстремума, т. е. что соответствующее поле направлений ни в одной точке не имеет положительного индекса. Однако это поле не имеет ничего общего с полем характеристических направлений и его особые точки не являются точками конгруэнтности.

В заключение этого исследования упомянем еще об одном геометрическом свойстве поля характеристических направлений, которое особенно ярко освещает геометрию выпуклых кусков поверхностей. Мы можем это поле, как всякое достаточно непрерывное поле направлений, проинтегрировать, т. е. найти кривые, касательные к которым всюду совпадают с направлением поля в точке касания. Таким образом мы получаем семейство „положительно характеристических" и семейство „отрицательно характеристических" кривых на F_i, и F_i однолистно покрываются каждым из этих семейств. Если K_i — некоторая характеристическая кривая на F_i, то вследствие изометрии соответственные дуги на K_1 и K_2 имеют равные длины и их геодезические кривизны в соответствующих точках совпадают. Теперь определение характеристического направления говорит, что вдоль соответствующих касательных направлений на K_i совпадают и нормальные кривизны на поверхностях F_i. Но пространственная кривизна каждой кривой, лежащей на поверхности, однозначно определяется (если отвлечься от исключительных случаев) геодезической кривизной и нормальной кривизной поверхности в направлении касательной к кривой. Поэтому K_1 и K_2 не только отнесены друг к другу с помощью равенства соответствующих дуг, но они также имеют в соответственных точках равные кривизны. Что касается их формы, то эти кривые могут отличаться друг от друга только кручением.

С помощью несложного вычисления находим, что кручение кривой K_1 либо всюду больше, либо всюду меньше кручения кривой K_2 в соответствующей точке. Какой именно случай имеет место, зависит от того, принадлежат ли K_i к „положительно характеристическим" или к „отрицательно характеристическим" кривым. Величину кручения мы рассматриваем здесь со знаком (последний однозначно определяется ориентацией евклидового пространства), а не только по абсолютной величине.

Относительно пар отображенных друг на друга пространственных кривых, которые в соответствующих точках отличаются лишь кручением, уже имеются некоторые диференциально-геометрические исследования „в целом" [12]. Быть может, возможно с помощью такого рода предположений притти к неравенствам относительно „степени изгибаемости" выпуклых кусков поверхностей, о чем говорилось в § 1; быть может, отсюда снова можно получить однозначную определенность овалоидов.

§ 7. Некоторые гипотезы. Жесткость и однозначная определенность в рамках теорем о деформациях. Проблема Вейля.

Предыдущие параграфы показывают, сколь разнообразные и особенные вспомогательные средства необходимы еще сегодня, чтобы доказать предложения, обладающие такой интуитивной простотой, как жесткость и однозначная определенность овалоидов. Создается впечатление, что здесь мы еще не имеем чего-то законченного и что за всеми до сих пор примененными методами исследования скрывается какой-то еще неизвестный простой общий принцип.

Прежде всего было бы очень желательно доказать жесткость и однозначную определенность единым методом для такого общего класса поверхностей, который содержал бы в себе как овалоиды, так и замкнутые выпуклые полиэдры. Мы получим наиболее подходящее определение этого класса, если в качестве „обобщенного овалоида“ рассмотрим границу любого выпуклого множества точек в пространстве; при этом для исключения неинтересных случаев мы предположим, что рассматриваемое выпуклое множество имеет внутреннюю точку. Очевидно, что обобщенными овалоидами являются и обыкновенные овалоиды и выпуклые замкнутые полиэдры. Свойства регулярности у обобщенного овалоида могут быть существенно слабее, чем у обыкновенного; например, обобщенный овалоид может иметь ребра, вершины и конические точки. Однако можно легко показать, что любые две точки на обобщенном овалоиде имеют кратчайшую спрямляемую линию соединения на этом овалоиде. Длину этой линии мы можем ввести в качестве геодезического расстояния между взятыми точками, и тогда естественно понимать под изометрией двух обобщенных овалоидов такое отображение, при котором сохраняются геодезические расстояния. В качестве бесконечно малых изгибаний мы можем среди всех векторных полей, заданных на обобщенном овалоиде, выделить такие, которые удовлетворяют уравнению (8); левую часть уравнения (8) можно рассматривать как имеющую смысл и для обобщенных овалоидов.

Можно предполагать, что все обобщенные овалоиды являются однозначно определенными. Но во всяком случае не все они жестки. Действительно, если, например, граница некоторого обобщенного овалоида содержит плоский кусок f (как это имеет место хотя бы у полиэдров), то в качестве бесконечно малого изгибания можно взять непрерывное векторное поле, которое вне и на границе f обращается в нуль, а внутри f перпендикулярно к плоскости f. Легко видеть, что тогда выполняется (8). Следовательно, можно предполагать жесткость лишь тогда, когда либо исключают появление плоских кусков поверхности, либо ограничивают понятие о бесконечно малом изгибании.

Говоря о полиэдрах, мы с самого начала ограничили как понятие о бесконечно малом изгибании, так и понятие об изометрии. Как мы видим, это ограничение для бесконечно малого изгибания действительно необходимо, если мы хотим говорить о жесткости. Иначе обстоит дело с изометрией. Здесь это ограничение должно быть излишним и должно иметь место общее предложение: обобщенный овалоид F, который изометричен некоторому выпуклому полиэдру P, должен быть конгруэнтен P. Это во всяком случае справедливо, когда граням полиэдра P соответствуют на F куски f_i с непрерывной кривизной (т. е. куски развертывающихся поверхностей). Действительно, из выпуклости F можем заключить, что тогда ребра полиэдра P должны перейти в прямолинейные отрезки, а отсюда следует, что все f_i будут плоскими, благодаря чему мы пришли уже к случаю, разобранному в § 2.

Однозначная определенность обобщенных овалоидов была бы обеспечена, если бы оказались верными следующие две гипотезы. Для того чтобы их сформулировать, мы введем одно вспомогательное понятие. Пусть F и F' — куски обобщенных овалоидов. Может случиться, что они имеют общую внутреннюю точку P, сами лежат по одну сторону от какой-либо их общей опорной плоскости, проведенной через точку P, друг друга не пересекают, но в то же время не совпадают всеми своими точками. В этом случае мы будем говорить, что F и F' лежат один в другом при точке P.

Первая гипотеза: лежащие один в другом куски поверхностей не могут изометрично отображаться один на другой. При этом, очевидно, речь идет о некоторой гипотезе „в малом", F и F' могут быть сколь угодно малыми окрестностями точки P. Эта гипотеза может рассматриваться как обобщение того, что при нетривиальной изометрии выпуклого многогранного угла всегда существуют согласно Коши по крайней мере четыре характеристических угла, и что при нетривиальной изометрии трижды непрерывно диференцируемых кусков поверхностей с положительной гауссовой кривизной в системе характеристических направлений нет точек с положительным индексом. Действительно, из этих предложений следует, что подобные многогранные углы или куски поверхностей не могут быть приведены в такое взаимное расположение, при котором в паре совпавших соответственных точек они лежали бы один в другом.

Вторая гипотеза является некоторым высказыванием „в целом". Пусть имеем некоторый гомеоморфизм h между двумя любыми неконгруэнтными друг другу обобщенными овалоидами F_i. Тогда мы предполагаем, что можно найти на F_i пару точек P_i, соответствующих одна другой в силу h и обладающих таким свойством: всегда возможно с помощью некоторого пространственного движения привести F_i в такое взаимное расположение, при котором P_i совпадали бы в некоторой точке P и достаточно малые окрестности точек P_i на F_i, связанные между собой гомеоморфизмом h, лежали бы одна в другой при точке P.

Вторая гипотеза, повидимому, представляет бо́льшие трудности для ее исследования, чем первая. Вероятно, возможно рассматривать под аналогичным углом зрения и проблему бесконечно малого изгибания.

Если верно, что гомеоморфизм между обобщенными овалоидами не может быть изометрией, если только он не сводится к конгруэнтному отображению, то можно поставить более общий вопрос — каким образом „отклонение от изометрии" связано с „отклонением от конгруэнтности". Эту проблему можно легко уточнить.

Пусть задан гомеоморфизм h между обобщенными овалоидами F_i $(i=1, 2)$. Пусть P_i, Q_i — две пары соответствующих точек на F_i и r_i — их пространственное расстояние. h тогда и только тогда будет конгруэнцией, когда для любых пар точек $r_1 = r_2$. Для того чтобы вообще измерить „отклонение от конгруэнции", мы должны привлечь разности чисел r_i. Так как преобразование подобия в пространстве не меняет существенно нашей проблемы, то будет хорошо, если мы эти разности пронормируем, заменив их „процентным" изменением длины. Поэтому мы образуем выражение $d(P, Q) = \dfrac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$. Пусть $D = D(F_1, F_2, h)$ будет точной верхней гранью абсолютных величин чисел d, составленных для всевозможных пар точек на F_i. Тогда среди всех гомеоморфизмов конгруэнции характеризуются равенством $D=0$. Заметим, что всегда $D \leqslant 1$.

Теперь проведем еще раз все предыдущие рассуждения с той только разницей, что всюду пространственные расстояния r_i мы заменим геодезическими расстояниями s_i точек P_i и Q_i на F_i. Пусть $G=G(F_1, F_2, h)$ — верхняя грань абсолютных величин чисел $g(P, Q)=\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2}$, составленных для всевозможных пар точек на F_i. Тогда равенством $G=0$ выделяется изометрия. В общем случае $G \leqslant 1$.

Теорема об однозначной определенности обобщенных овалоидов, до сих пор не доказанная, теперь гласит: из $G=0$ следует $D=0$.

Теперь можно поставить значительно более общий вопрос: существует ли „абсолютная постоянная" c такая, что $D \leqslant cG$? В этом неравенстве, конечно, содержалась бы и теорема об однозначной определенности. К сожалению, на этот вопрос приходится дать отрицательный ответ. Можно задать ряд гомеоморфизмов между эллипсоидами, в котором G стремится к нулю, а D все время остается бóльшим некоторого положительного числа. При этом нужно брать эллипсоиды, которые стягиваются к поверхности некоторого эллипса. Еще проще обстоит дело, если исходить из некоторой линзы, которая ограничена двумя конгруэнтными шаровыми сегментами с общей круговой границей, и стягивать ее к поверхности этого круга так, чтобы траектории точек были прямыми, перпендикулярными к плоскости круга. Тогда достаточно рассмотреть гомеоморфизм, порождаемый этим стягиванием.

В этом примере фигурируют „очень плоские" овалоиды. Это можно следующим образом уточнить. Пусть a будет верхней границей радиусов всех шаров, которые заключаются внутри заданного обобщенного овалоида F. Пусть b будет нижней гранью радиусов всех шаров, которые содержат внутри себя обобщенный овалоид F, и пусть, наконец, $k=k(F)=\frac{a}{b}$. Тогда овалоиды, фигурирующие во всех примерах подобного типа, характеризуются тем, что для них $k \to 0$.

Следуя тому же ходу идей, мы выскажем следующую гипотезу: существует функция $f(x, y)$, определенная для $0 < x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, непрерывная относительно обеих переменных, причем $f(x, 0)=0$, и такая, что

$$D \leqslant f(x, \quad G) \quad \text{для} \quad k(F_1) \geqslant x \quad (x>0). \tag{28}$$

Более наглядно, но менее точно это можно сформулировать так: для всех обобщенных овалоидов с $k \geqslant x$, $x>0$, при любых гомеоморфизмах с произвольными другими обобщенными овалоидами имеет место, и притом *равномерно*, предельное соотношение

$$\lim_{G \to 0} D=0.$$

Подчеркиваем, что в (28) выполнение условия $k \geqslant x$ требуется не для обоих F_i, а только для одной из этих поверхностей.

Опыты над моделями дают нам право высказывать подобную гипотезу. Вследствие неточности наших наблюдений модель, вообще говоря, может служить для наглядной проверки неравенств, но не равенств. В нашем случае модель подтверждает не однозначную определенность овалоида, но лишь то обстоятельство, что D лежит за пределами наблюдаемости, если то же имеет место для G; это означает, что когда материал не допускает заметных растяжений, то модель не допускает заметных изменений формы.

Гипотеза (28) имеет то преимущество, что достаточно ее доказать для полиэдров, как отсюда уже будет следовать, что она верна вообще. Действительно, любой обобщенный овалоид F можно аппроксимировать с любой точностью при помощи вписанных в него выпуклых замкнутых полиэдров. Если длины всех ребер у аппроксимирующих полиэдров P_n неограниченно убывают, то очевидно, что $k(P_n)$ стремится в $k(F)$. Если имеет место гомеоморфизм h между F и некоторым другим обобщенным овалоидом F', то этим самым каждое P_n определяет некоторый полиэдр P_n', который гомеоморфен с P_n и вписан в F'. Ребра полиэдра P_n' также неограниченно убывают с возрастанием n и $k(P_n')$ стремится к $k(F')$. Как легко видеть, также $D(P_n, P_n', h)$ стремится к $D(F, F', h)$ и $G(P_n, P_n', h)$ стремится к $G(F, F', h)$. Поэтому, применяя формулу (28) ко всем P_n, P_n', мы отсюда уже получаем эту же формулу для F, F'.

Кроме того, заметим, что для полиэдров можно взять несколько более простые определения для D и G. В качестве D можно взять максимум абсолютной величины выражений $d(P, Q)$, составленных для всевозможных пар вершин. Пусть G будет максимумом абсолютных величин всех тех $g(P, Q)$, которые составлены для пар вершин, являющихся концами одного и того же ребра; вместо общих геодезических расстояний здесь приходится иметь дело только с длинами ребер. Таким образом проверка справедливости формулы (28) сводится к некоторой проблеме элементарной геометрии.

Наконец, теперь уже само собой напрашивается перейти от гомеоморфизмов к бесконечно малым деформациям и в выражениях d, g, из которых мы исходим, заменить разность производными.

Если только (28) верно, то предельным переходом мы получаем из него аналогичное равенство для бесконечно малых деформаций. Однако, вообще говоря, мыслимо, что вопрос о бесконечно малых деформациях легче поддается решению, чем гипотеза (28). Эта проблема должна быть наиболее легкой для бесконечно малых деформаций поверхностей вращения (см. § 8).

Теперь мы хотим познакомить читателя с совершенно иным подходом к проблеме жесткости овалоидов. Вернемся к предположениям о регулярности, сделанным в § 5 и 6, иными словами, к трижды диференцируемым овалоидам. Тогда предположение об однозначной определенности этих поверхностей можно рассматривать как теорему о единственности решений некоторых диференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Пусть O — точка внутри овалоида F. Введем сферические координаты r, w, ϑ с центром в O. Линейный элемент пространства тогда запишется так:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (dw^2 + \sin^2 w \, d\vartheta^2).$$

Поэтому при $r \neq 0$ мы можем написать

$$\frac{ds^2 - dr^2}{r^2} = dw^2 + \sin^2 w \, d\vartheta^2. \tag{29}$$

(29) представляет собой не что иное, как проекцию некоторого линейного элемента, не проходящего через O, на сферу единичного радиуса с центром в O, причем здесь имеется в виду центральная проекция из O. Подвергнем, в частности, этому центральному проектированию нашу поверхность F. Так как O лежит внутри F, то при этом F отобразится без особенностей. Пусть, в некоторых локальных параметрах, $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ будет линейным элементом поверхности F, и пусть $r = r(u, v)$ будет радиус-вектор переменной точки на F в выбранных координатах. Тогда, если положить

$$r_u = p, \quad r_v = q, \quad e - p^2 = r^2 e', \quad f - pq = r^2 f', \quad g - q^2 = r^2 g',$$

то левая часть равенства (29) принимает вид

$$\frac{ds^2 - dr^2}{r^2} = e'\,du^2 + 2f'\,du\,dv + g'\,dv^2. \tag{30}$$

Для получения этого нужно лишь вместо ds^2 взять линейный элемент поверхности F, а dr заменить на $p\,du + q\,dv$. Теперь правая часть формулы (30) равна левой части формулы (29), т. е. равна линейному элементу единичной сферы (а именно, линейному элементу центральной проекции поверхности F из O на единичную сферу). Поэтому, если мы образуем гауссову кривизну $K(e', f', g')$ для линейного элемента, стоящего в правой части (30), то

$$K(e', f', g') = 1. \tag{31}$$

$K(e', f', g')$ является хорошо известной рациональной функцией от e', f', g' и производных от этих величин по u и v до второго порядка включительно. В этом выражении мы должны заменить e', f', g' через $\frac{e - p^2}{r^2}$ и т. д. Можно было ожидать, что при этом в K появятся производные третьего порядка от r по u, v. Однако оказывается, что эти члены взаимно уничтожаются и (31) принимает форму

$$A(\rho\tau - \sigma^2) + B\rho + C\sigma + D\tau + E = 0. \tag{32}$$

Здесь положено $r_{uu} = \rho$, $r_{uv} = \sigma$, $r_{vv} = \tau$ и A, B, C, D, E суть полиномы относительно r, p, q, e, f, g и производных от e, f, g по u, v до второго порядка включительно.

Уравнение (32) является диференциальным уравнением типа Монжа-Ампера для неизвестной функции $r(u, v)$, и это диференциальное уравнение вполне определяется заданием e, f, g, т. е. заданием линейного элемента нашей поверхности F.

Примененный здесь элегантный прием, исходящий от Дарбу [13], приводит нас теперь обратно к нахождению поверхности F с линейным элементом $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$, если только известен какой-нибудь интеграл $r(u, v)$ уравнения (32). Именно, оказывается, что неизвестные еще сферические координаты $w(u, v)$ и $\vartheta(u, v)$ получаются из (29) интегрированием обыкновенных диференциальных уравнений (типа Рикатти), если в левую часть равенства (29) подставить вместо ds^2 заданный линейный элемент с коэфициентами e, f, g, а вместо r — интеграл $r(u, v)$ уравнения (32). Заданием $r(u, v)$ поверхность определяется в пространстве с точностью до вращения вокруг оси, проходящей через O.

Здесь мы все время имели рассуждения „в малом“, которые, конечно, остаются в силе для линейных элементов (e, f, g) с неположительной гауссовой кривизной. По своей природе уравнение (32) инвариантно относительно замены u, v новыми параметрами с соответствующим преобразованием величин e, f, g. Если мы будем пользоваться такого рода преобразованиями, то в случае, когда исходная поверхность F является овалоидом, мы сможем сказать, что $r(u, v)$ определяется диференциальным уравнением (32) типа Монжа-Ампера „на всей единичной сфере“. Мы найдем все изометричные с F овалоиды, если разыщем все интегралы r уравнения (32), не имеющие особенностей.

Целый класс таких интегралов мы найдем, подвергая F параллельным переносам. Совсем не так просто будет рассмотреть все получающиеся при этом преобразования для r, если не становиться на геометрическую точку зрения, а исходить из (32). Во всяком случае, два интеграла уравнения (32) мы будем рассматривать как эквивалентные, т. е. как несущественно различные, когда эти интегралы приводят к конгруэнтным поверхностям.

Теперь мы можем сформулировать теорему об однозначной определенности овалоидов следующим образом: Если составить уравнение (32) для некоторого овалоида, то все те интегралы этого уравнения, которые регулярны на всей единичной сфере, эквивалентны между собой.

Само собой напрашивается, наряду с однозначной определенностью, задаться вопросом вообще о существовании интеграла, который не имел бы на сфере особенностей. При этом должен быть несколько изменен исходный пункт наших рассуждений. Мы будем теперь считать заданным не овалоид F в евклидовом пространстве, а некоторое абстрактное двумерное риманово многообразие M топологического типа сферы. Пусть на M будет задана риманова метрика при помощи линейного элемента с коэфициентами e, f, g, причем, естественно, мы допускаем преобразование параметров. Пусть гауссова кривизна линейного элемента на M будет всюду положительна, а e, f, g — дважды непрерывно диференцируемы относительно u, v. В качестве „параметрического многообразия“ мы можем мыслить себе некоторую сферу, подобно тому, как при исследованиях „в малом“ мы говорили о „плоскости параметров“. Теперь мы рассматриваем (32) как уравнение на параметрической сфере и спрашиваем: существует ли на всей параметрической сфере интеграл уравнения (32), не имеющий особенностей? Это эквивалентно следующему геометрическому вопросу: существует ли реализация для M в виде некоторой поверхности F в евклидовом пространстве, не имеющей особенностей? Что такая поверхность должна быть овалоидом, — очевидно.

Последний сформулированный нами вопрос был поставлен Вейлем [14]. Вейль не мог полностью на него ответить. Он смог, однако, дать ответ, и притом положительный, в том частном случае, когда метрика на M достаточно мало отличается от метрики на сфере [1]).

Из последних работ Леви (H. Lewy [16]) можно заключить, что уже близится полное решение проблемы Вейля. Леви использует возможность исследования урав-

[1]) Одна аналогичная проблема разрешается с помощью известной теоремы Минковского. Пусть для всех точек P единичной сферы E определена всюду положительная и непрерывная функция точки $K(P)$. Ищется овалоид F со следующим свойством: F должен отображаться при помощи параллельных нормалей на E; если P является образом некоторой точки Q на F, то овалоид F должен иметь в точке Q гауссову кривизну $K(P)$. Минковский показал [15], что такой овалоид F всегда существует, если $K(P)$ удовлетворяет некоторому необходимому тривиальному интегральному условию, и что F однозначно определяется с точностью до параллельного переноса.

нения (32) и его интегралов при комплексных значениях независимых переменных u и v. Оказывается, что это имеет смысл и тогда, когда e, f, g не предполагаются аналитическими функциями относительно u, v.

Если же вообще проблему реализации риманова многообразия в евклидовом пространстве рассматривать в комплексной области, то выявляется своеобразная связь между нашими проблемами и проблемами вещественной диференциальной геометрии „в целом".

Вернемся на минуту к простейшему овалоиду, именно, к сфере. Она является аналитическим образом, следовательно, вещественную сферу K_r (как и всякую другую поверхность второго порядка) можно непосредственно дополнить до некоторой фигуры K в комплексном евклидовом пространстве E_k, которая будет замкнутой в E_k и не будет там иметь особенностей. Однако и проблему изометрии мы можем также поставить в E_k вместо того, чтобы ограничиваться, как мы это делали раньше, вещественным евклидовым пространством E_r. В частности, мы можем искать все замкнутые в E_k поверхности F без особенностей, которые изометричны с K, но не конгруэнтны ей (причем конгруэнтность теперь следует определять при помощи комплексных ортогональных преобразований). Тогда согласно теореме Гильберта, изложенной в § 3, поверхность F не может содержать в себе поверхность из E_r [1]), так как помимо сфер в E_r нет никаких других поверхностей с постоянной положительной гауссовой кривизной, не имеющих особенностей.

Может быть, теорема об однозначной определенности сферы имеет место и в комплексной области, т. е. вообще не существует поверхности F с требуемыми свойствами. Если это допущение правильно, то оно имеет место и для сфер с любым комплексным радиусом, в частности, для сфер с чисто мнимым радиусом. Но в этом случае мы имеем реализацию гиперболической метрики на поверхности в E_k, и это дало бы теорему: Сферы с чисто мнимым радиусом являются единственными замкнутыми реализациями гиперболической метрики в E_k, не имеющими особенностей в E_k.

Это предложение напоминает теорему Гильберта, согласно которой в вещественном евклидовом пространстве нельзя реализовать „в целом" гиперболическую метрику, т. е. не существует замкнутой в E_r поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной, которая не имела бы в E_r особенностей. Однако теорема Гильберта не вытекает непосредственно из нашего предложения, так как последнее не исключает возможности существования в E_k поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной, которая хотя и имела бы особенности

---

1) Мы напомним некоторые элементарные соотношения между фигурами комплексного и вещественного пространства. Две точки из E_k называются *сопряженными*, если соответствующие координаты обеих точек являются комплексно сопряженными числами. Некоторое точечное множество M' из E_k называется сопряженным для точечного множества M из того же E_k, если M' состоит из всех тех точек, которые сопряжены точкам из M. Тогда, между прочим, и M будет сопряженным для M'. Множество M называется *вещественным*, если оно совпадает со своим M'. Если при этом M состоит только из одной точки, то эта точка является вещественной в обычном смысле слова, т. е. есть точка из E_r. Но вообще вещественное множество может не иметь ни одной вещественной точки. Так, например, поверхность $x^2+y^2+z^2=0$ — вещественная поверхность, не имеющая вещественных точек. В общем случае вещественные точки некоторой поверхности F из E_k образуют кривую. Для того чтобы F имело с E_r не только общую кривую, но и общую поверхность, необходимо, чтобы F была вещественной в указанном смысле слова, т. е. $F=F'$.

в E_k, но вещественные точки которой образовывали бы замкнутую поверхность в E_r без особенностей. Для того чтобы из наших более общих рассуждений вытекала теорема Гильберта, необходимо было бы иметь теорему, в силу которой среди поверхностей в E_k, изометричных комплексной сфере, нет ни одной, содержащей в себе замкнутую поверхность из E_r без особенностей. Этим путем была бы установлена связь между двумя как будто совершенно различными теоремами Гильберта относительно поверхностей с положительной и поверхностей с отрицательной гауссовой кривизной в вещественном пространстве.

Быть может, стоит осмелиться эти уже сами по себе довольно гипотетичные высказывания представить еще в более общей форме и перенести их со сферы на любой овалоид. Тогда нужно было бы овалоид дополнить до некоторой поверхности в E_k и относительно множества поверхностей, которые изометричны, но не конгруэнтны этой поверхности, высказать предположение, аналогичное высказанному в случае сферы (ср. это с рассуждениями в § 8 относительно поверхностей, изометричных параболоиду вращения). Отсюда недалеко до предположения, которое безрезультатно занимало уже многих математиков, состоящего в том, что, повидимому, в E_r не существует замкнутых поверхностей без особенностей, у которых гауссова кривизна K удовлетворяла бы на всей поверхности неравенству $K \leqslant -1$. Очевидно, что это предположение стоит в таком же отношении к теореме Гильберта о поверхностях с постоянной отрицательной гауссовой кривизной, в каком предложение об однозначной определенности овалоидов находится к теореме об однозначной определенности сфер.

§ 8. Окаймленные поверхности, невыпуклые поверхности, неограниченные поверхности.

В § 7 мы считали вероятным, что результаты §§ 2—6 останутся в силе, если несколько ослабить требования *непрерывности* для рассматриваемых поверхностей. В противоположность этому мы ставим теперь вопрос, нельзя ли частично обойтись без двух действительно геометрических свойств, которыми должны были обладать наши поверхности, а именно без замкнутости и без всюду положительности гауссовой кривизны.

Сначала мы займемся вопросом, в какой степени важна замкнутость, и будем при этом исходить из простейшего случая, а именно случая сферы. В § 1 мы уже упоминали об относящемся сюда результате Либмана [1]: сколь бы малую дыру ни вырезать в сфере, полученная при этом поверхность допускает непрерывное изгибание.

Рембс [17] доказал еще более тонкое предложение: если на сфере сделать разрез вдоль сколь угодно малой дуги (например вдоль дуги большого круга), то полученная при этом поверхность уже будет допускать непрерывное изгибание. Поверхности, получающиеся при изгибании у Рембса, регулярны всюду за исключением концов разреза. Эти концы переходят в конические точки A, B на поверхностях, получающихся в процессе изгибания, причем эти поверхности в окрестностях точек A и B имеют самопересечение.

В процессе изгибания расстояние между точками A и B у Рембса все увеличивается. Эти точки стремятся к некоторым предельным положениям, пространственное расстояние между которыми равно первоначальному сферическому расстоянию точек A и B. При приближении к этому предельному положению ка берег разреза все чаще наворачивается вокруг прямолинейного отрезка AB. Пример Рембса является весьма поучительным.

Если из сферы удалить только одну точку, то уже получается нежесткая поверхность. Это легко следует из результатов Либмана и Рембса. Поскольку мне известно, до сих пор не выяснено, допускает ли конечное число раз „пунктированная“ сфера (т. е. сфера, из которой удалено конечное число точек) непрерывные изгибания. Во всяком случае, дважды пунктированная сфера является неоднозначно определенной, если только выделенные точки не будут диаметрально противоположными. Для такой сферы существует изометрическая „веретенообразная“ поверхность вращения с постоянной положительной кривизной, которую при изометрии мы должны считать дважды покрытой [18].

До сих пор на любые овалоиды удалось перенести только один из приведенных результатов: каждый овалоид становится нежестким, если из него вырезать любую (сколь угодно малую) дыру [19]. Отсюда благодаря связи между изометрией и бесконечно малым изгибанием (см. § 5) тотчас же вытекает, что существуют пары нетривиально-изометричных кусков поверхностей с положительной непостоянной гауссовой кривизной и со сколь угодно малой границей, у которых гауссово сферическое отображение оставляет непокрытым сколь угодно малый кусок сферы. Можно предположить, что в действительности имеет место более тонкое предложение: при разрезе вдоль сколь угодно малой дуги любой овалоид превращается в поверхность, допускающую непрерывные изгибания.

В противоположность этому я предполагаю, что конечное число раз пунктированный овалоид не допускает непрерывных изгибаний. Вероятно, имеет место даже более общая теорема „в малом“, именно что пунктированный конечное число раз кусок поверхности с положительной гауссовой кривизной не допускает никаких других непрерывных изгибаний, кроме тех, которые допускает непунктированный кусок поверхности, из которого он получился. Другими словами: вероятно, при изгибании куска поверхности с положительной гауссовой кривизной не могут получаться поверхности с изолированной особой точкой. В этом направлении получен один частичный результат [20]. Для поверхностей с неположительной гауссовой кривизной нет никаких оснований для такого предположения. Исследование этого вопроса представляет известный интерес для физики. Устойчивость выпуклого куска жести не пострадает, если этот кусок жести проткнуть иглой; наоборот, если проткнуть иглой кусок жести, имеющий седлообразную форму, то его прочность от этого понизится.

При рассмотрении обобщенных овалоидов в § 7 мы уже отмечали, что они могут содержать плоские куски. Бесконечно малые изгибания подобного рода поверхностей впервые исследовал Либман [1] в том частном случае, когда речь идет о поверхностях вращения. Значительно более общий результат в этом направлении был получен Рембсом [21]. Рембс рассматривает обобщенные овалоиды F, обладающие следующими свойствами: 1) F имеет всюду непрерывную кривизну; 2) на F лежит конечное число плоских кусков f_i; 3) каждый кусок f_i ограничен простой замкнутой кривой с всюду отличной от нуля кривизной, причем эти граничные кривые не имеют общих точек; 4) если F' — поверхность, получающаяся из F после удаления внутренности каждого куска f_i, тогда во всех внутренних точках F' гауссова кривизна должна быть положительной (конечно, на границе F' гауссова кривизна должна равняться нулю).

В § 7 мы уже показали, что для F существуют бесконечно малые изгибания, не являющиеся тривиальными только внутри f_i. Рембс же доказывает, что вообще не существует никаких других бесконечно малых изгибаний для F. Другими словами: поверхность F' жестка. При этом, как и в § 4, допускаются к рассмотрению лишь такие бесконечно малые изгибания, которые обладают дважды непрерывно диференцируемой диаграммой вращений. Доказательство Рембса опирается на определение знаков у интегралов, подобных рассмотренному в § 4 интегралу $\oint(\mathbf{x}\,\mathbf{y}\; d\mathbf{y})$.

Центральный момент этого доказательства, как и доказательства Блашке, состоит в том, что диаграмма вращений для бесконечно малого изгибания поверхности F не может иметь опорной плоскости, если только она не сводится для всех точек на поверхности F' к одной точке.

Результат Рембса можно применить и к замкнутым поверхностям, которые по своему топологическому типу отличны от сферы. Так, например, рассмотрим простую замкнутую плоскую аналитическую кривую с необращающейся нигде в нуль кривизной. Эту кривую k будем вращать вокруг некоторой прямой g, которая лежит в плоскости кривой k, но не пересекает k. Тогда мы получим некоторую аналитическую поверхность вращения F того же топологического типа, что и тор. Для удобства выражения примем, что ось вращения расположена вертикально. Тогда наивысшие и наинизшие точки поверхности F образуют две параллели b_i ($i=1, 2$), плоскости которых касаются поверхности F вдоль b_i. Этими кругами F разобьется на две части. Одна часть, F', имеет во всех точках положительную гауссову кривизну, в то время как внутри другой части F'' гауссова кривизна всюду отрицательна. Конечно, на b_i гауссова кривизна равна нулю. Очевидно, F' удовлетворяет условиям теоремы Рембса, и, следовательно, является жесткой (впрочем, это как раз есть тот частный случай теоремы Рембса, который был доказан Либманом). Нетривиальное бесконечно малое изгибание всей поверхности F может быть нетривиальным только на F''. Но из предположенной аналитичности поверхности легко заключить, что это невозможно. Таким образом F является жесткой, и этим самым мы имеем первый пример замкнутой поверхности, топологически отличной от сферы и вместе с тем жесткой.

Теперь мы рассмотрим некоторый класс сколь угодно узких полосок поверхности, которым, например, принадлежит окрестность любой точки b_i на F. Пусть b — простая замкнутая аналитическая кривая со всюду отличной от нуля кривизной, лежащая в некоторой плоскости e. Пусть S — сколь угодно узкая замкнутая аналитическая полоска поверхности, содержащая b внутри себя, лежащая целиком по одну сторону от e и не имеющая с e никаких других общих точек помимо b. Пусть из двух полосок, на которые b разбивает S, одна, S', имеет во всех внутренних точках положительную гауссову кривизну, в то время, как во всех внутренних точках второй части, S'', гауссова кривизна отрицательна. Следуя Рембсу и Либману мы будем полоску поверхности S называть *плоским желобом* (Rinne); S' мы назовем положительным, а S'' — отрицательным *полужелобом*.

И вот, мы обязаны Рембсу следующим неожиданным результатом [22]: всякий плоский желоб, даже полужелоб, неизгибаем. Наиболее неожиданным и поразительным является то, что здесь мы имеем дело со сколь угодно узкой полоской поверхности, в то время как можно было ожидать, что поверхности могут быть неизгибаемыми только „в большом“. Мы имеем здесь как бы граничный случай между геометрией „в большом“ и геометрией „в малом“. Желоб может быть сколь угодно узким, но в то же время он должен полностью содержать в себе замкнутую кривую.

Следует обратить внимание, что утверждается только неизгибаемость, но не жесткость желоба S. И действительно, существуют нежесткие желобы; можно явно задать нетривиальные бесконечно малые изгибания для S, если b есть окружность. Для того чтобы глубже вникнуть в результат Рембса, следует вернуться к рассуждениям из § 2, которые привели нас к требованию (1) для бесконечно малых изгибаний. Если мы имеем семейство поверхностей, получающихся в процессе изгибания некоторой поверхности F, и если в этом семействе существует не только первая, но и вторая непрерывная производная по параметру семейства t, то помимо (1) будет выполняться также соотношение $\left.\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0$. Класс всех деформаций, удовлетворяющих последнему соотношению и соотношению (1), приводит к определению „бесконечно малых изгибаний второго порядка“ [1]). И вот, Рембс доказывает, что S не имеет бесконечно малых изгибаний второго порядка. То же имеет место даже для S' и S''. Вероятно, результат Рембса можно обобщить на неаналитический случай.

Теперь мы переходим к вопросу, который в известном смысле противоположен предыдущим: существуют ли вообще нежесткие замкнутые поверхности, которые не содержат плоских кусков? Можно показать, что такие поверхности существуют, при этом все до сих пор известные такие поверхности суть поверхности вращения [24]. Попутно заметим: существование нежесткой замкнутой поверхности обеспечивает уже существование замкнутых неоднозначно определенных поверхностей. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно повторить построение из § 5, где F является срединной поверхностью для множества пар нетривиально изометричных поверхностей F_i. Так как F замкнуто, то и F_i, будучи гомеоморфны F, также будут замкнуты. Можно легко показать, что все эти F_i не имеют особенностей.

Что касается нежестких замкнутых поверхностей вращения, то в известном смысле можно сказать, что они так же плотно распределены в совокупности всех поверхностей вращения, как рациональные числа среди вещественных. Каждую поверхность вращения F можно вложить в некоторое семейство $F(t)$ соосных с F поверхностей вращения, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $F(0) = F$, так, что выполняются следующие условия: 1) в интервале $(0, 1)$ существует всюду плотная последовательность значений t_i таких, что $F(t_i)$ — нежесткая поверхность; 2) при $t \to 0$ точки и касательные плоскости поверхностей $F(t)$ стремятся к точкам и касательным плоскостям поверхности F.

Замкнутая поверхность вращения всегда гомеоморфна либо сфере, либо тору. Если F гомеоморфна сфере, то на семейство $F(t)$ можно наложить еще третье условие: задав произвольно две сколь угодно близкие параллели на F, можно так устроить, что вне зоны, ограниченной этими параллелями, все $F(t)$ совпадают с F. Если F — овалоид, то это можно наглядно представить так: можно F

---

[1]) Аналогично этому, как уже заметил Дарбу [22], [23], можно определить бесконечно малое изгибание любого порядка.

сделать нежесткой поверхностью, если сколь угодно узкую и сколь угодно плоскую полоску вдоль какой-либо параллели вдавить вовнутрь.

При деформациях, охватывающих только часть меридиана, нельзя ожидать, что одна из поверхностей $F(t)$ будет аналитической. Однако можно легко задать нежесткие поверхности вращения, гомеоморфные сфере, и при этом аналитические; для этого достаточно исходить от аналитической поверхности вращения F, гомеоморфной сфере, которая, не будучи овалоидом, имеет зону с отрицательной гауссовой кривизной. Тогда в качестве $F(t)$ можно просто выбрать поверхности, параллельные F.

Поверхности вращения особенно подходят для исследования наших вопросов благодаря тому, что они определяются своим меридианом, т. е. функцией от одной переменной. Рассмотрение меридианов, которые только кусочно-непрерывны и имеют кусочно-непрерывную кривизну, не вызывает никаких затруднений. Вопросы, поставленные в § 7, наверное нетрудно разрешить для того случая, когда обобщенный овалоид является поверхностью вращения.

Пример. Мы исходим из рассмотрения двух прямолинейных отрезков AB и BC, которые в точках A и C образуют с прямой AC острые углы. Будем ломаную ABC вращать вокруг AC; полученная при этом поверхность F, состоящая из двух конусов вращения, будет обобщенным овалоидом. Теория обыкновенных овалоидов по двум причинам неприменима к F: во-первых, F имеет две конические точки и одно круговое ребро, а, во-вторых, в регулярных точках гауссова кривизна не положительна, а всюду равна нулю. Однако без труда можно показать, что F — жесткая поверхность. Вообще жесткими являются все поверхности вращения, меридиан которых кусочно-непрерывен, кусочно-диференцируем и имеет кусочно-непрерывную кривизну, если только эти поверхности являются обобщенными овалоидами и не имеют плоских частей.

До сих пор мы рассматривали только поверхности, расположенные в ограниченной части пространства. В заключение мы хотим бегло рассмотреть изгибание неограниченных поверхностей. В качестве примера возьмем параболоид вращения F. Можно легко задать нетривиальные бесконечно малые изгибания поверхности F, которые нигде на F не имеют особенностей. Таким образом F не является жесткой. Если рассмотрим F как срединную поверхность для пар изометричных поверхностей F_i (см. § 5), то придем к существованию неограниченных в пространстве замкнутых поверхностей без особенностей с необращающейся всюду в нуль гауссовой кривизной, являющихся неоднозначно определенными.

Отсюда, однако, не нужно делать заключения, что среди этих поверхностей имеются и поверхности с всюду положительной гауссовой кривизной. Правда, согласно § 5 можно так устроить, что на сколь угодно большой, но ограниченной части поверхности F_i последняя с любой точностью будет аппроксимироваться параболоидом F и, следовательно, в этой части F_i будет иметь положительную гауссову кривизну. Однако во всех известных мне примерах дело обстоит так, что отклонение от F при удалении в бесконечность становится как угодно велико и потому F_i имеет точки с отрицательной гауссовой кривизной. Таким образом остается открытой следующая проблема: все ли неграниченные замкнутые поверхности с всюду положительной гауссовой кривизной являются однозначно определенными? Существуют ли вообще среди них однозначно определенные поверхности? Допускают ли некоторые из них (а, может быть, и все они) непрерывное изгибание?

Сам параболоид вращения особенно подходит для исследования подобного рода вопросов. Действительно, параболоид вращения является до сих пор единственной поверхностью, для которой мы можем явно задать все поверхности, получающиеся в процессе изгибания. Удобно, а кроме того и само по себе интересно, не ограничиваться поверхностями вещественного пространства E_r, а рассматривать параболоид F как поверхность в комплексном пространстве E_k и принимать во внимание все поверхности в E_k, изометричные с F. Одновременно это дает некоторый добавочный материал к тем вопросам, которые были намечены в конце § 7. Радиус-вектор каждой такой поверхности можно найти по Дарбу [25] с помощью формулы

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{y}(u) \cdot \mathbf{z}(v) + \int_{v_0}^{v} \mathbf{z}(s) \cdot \mathbf{z}'(s)\, ds - \int_{u_0}^{u} \mathbf{y}(s) \cdot \mathbf{y}'(s)\, ds. \tag{33}$$

Здесь u и v являются комплексными параметрами поверхности, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ — векторы, компоненты которых являются аналитическими функциями параметра t, далее $\mathbf{y}'(t) = \frac{d\mathbf{y}}{dt}$, $\mathbf{z}'(t) = \frac{d\mathbf{z}}{dt}$ и, наконец, главное: для всех t выполняется условие $\mathbf{y}(t)^2 = \mathbf{z}(t)^2 = i$. Рассматриваемые как радиус-векторы, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ задают кривые на сфере с радиусом $\sqrt{i}$. Если все эти условия выполнены, то поверхность с радиус-вектором $\mathbf{x}(u, v)$, определяемым формулой (33), всегда наложима на параболоид $x^2 + y^2 + 8z = 0$. Однако не нужно себе представлять, что изометрия задается с помощью сопоставления равных значений параметров u, v, более того, сетка u, v состоит из асимптотических линий поверхности, а последние, вообще говоря, не соответствуют друг другу при изометрии.

Существуют ли среди поверхностей (33) такие, которые не имеют в E_k особенностей, замкнуты и не конгруэнтны параболоиду? Такие поверхности действительно существуют. Примером может служить поверхность

$$2(2x + 2iy - 1)^3 + 8z(x + iy - 1) - 5x - 3iy = 0. \tag{34}$$

Эта поверхность имеет с E_r только общую кривую. Мне неизвестно, имеется ли среди поверхностей (33) такая поверхность, которая не имеет особенностей в E_r, содержит в себе замкнутую поверхность из E_r и не является параболоидом. Таким образом не выяснено, является ли параболоид в смысле вещественной геометрии однозначно определенной поверхностью или нет.

Между прочим, особенности поверхностей (33) помимо особенностей компонент векторов $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ порождаются еще нулями детерминанта

$$D(u, v) = [\mathbf{y}'(u),\ \mathbf{z}'(v),\ \mathbf{y}(u) + \mathbf{z}(v)].$$

Для поверхности (34) D является константой, отличной от нуля.

Мне кажется заслуживающим внимания одно замечание относительно цилиндрических поверхностей, которым я обязан студенту Ленинградского университета Вилкицкому. Рассмотрим некоторый цилиндр Z, который в сечении с плоскостью, перпендикулярной его образующим, дает простую замкнутую кривую b. Без дальнейших пояснений очевидно, что можно так непрерывно изогнуть цилиндр Z, чтобы кривая b перешла в любую замкнутую плоскую кривую той же длины, например в окружность, тогда как Z остался бы цилиндром и образующие перешли бы в образующие. Можно показать, что этим исчерпываются все изгибания „в целом" цилиндра Z без особенностей, даже все те изгибания, которые не имеют особенностей на одном из „полуцилиндров", на которые цилиндр разбивается кривой b. Существует простое и наглядное доказательство этого предложения, которое опирается только на элементы теории развертывающихся поверхностей.

Мы не хотим лишить читателя удовольствия самостоятельно найти это доказательство.

Список цитированной литературы.

[1] H. Liebmann, Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung, Sitzungsberichte der bayrischen Akademie der Wissenschaften (сокращенно „Münchener Berichte"), 1919, стр. 267—291.

[2] H. Hopf und W. Rinow, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Commentarii Math. Helvetici, т. 3, 1931, стр. 209—224.

S. Cohn-Vossen, Singularitäten konvexer Flächen, Math. Annalen, т. 97, 1927, стр. 377—386.

[3] R. Bricard, Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé, Journal de Math., (5), т. 3, 1897, стр. 113—148.

A. Kokotsakis, Über bewegliche Polyeder, Math. Annalen, т. 107, 1932, стр. 628—647.

[4] A. Cauchy, Sur les polygones et les polyèdres. Second Mémoire. Journal École Polytechn., т. 9, 1813, стр. 87 и сл. Oeuvres complètes (2), т. 1 (Paris 1905), стр. 26—38.

[5] H. Liebmann, Eine neue Eigenschaft der Kugel, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (сокращенно „Göttinger Nachrichten"), 1899, стр. 44—55.

[6] D. Hilbert, Über Flächen konstanter Gaußscher Krümmung; см. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7-е издание, Leipzig und Berlin 1930, Anhang V.

[7] См. [21].

[8] R. Sauer, Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen, Math. Annalen, т. 111, 1935, стр. 71—82.

[9] W. Blaschke, Die Starrheit der Eiflächen, Math. Zeitschrift, т. 9, 1921, стр. 14 —146.

[10] S. Cohn-Vossen, Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen, Göttinger Nachrichten, 1927, стр. 125—134.

[11] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation differentielle, Journal de Math., (3), т. 7, 1881, стр. 375—422.

[12] W. Blaschke, Ungleichheiten von H. Schwarz und A. Schur über Raumkurven mit vorgeschriebener Krümmung, Abhandlungen des math. Seminars in Hamburg, т. 1, 1921, стр. 49—53.

[13] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 1894, т. 3, стр. 253—262.

[14] H. Weyl, Über die Bestimmung einer geschlossenen, konvexen Fläche durch ihr Linienelement, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, т. 61, 1915, стр. 40—72.

[15] H. Minkowski, Volumen und Oberfläche, Math. Annalen, т. 57, 1903, стр. 447—495, Ges. Abhandlungen, т. 2, стр. 230—276.

[16] H. Lewy, A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations, Transactions of the American math. society, т. 37, 1935, стр. 417—434.

[17] E. Rembs, Ennepersche Flächen konstanter positiver Krümmung und Hazzidakis'sche Transformation, Jahresber. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, т. 39, 1930, стр. 278—283.

[18]. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig, 1916; L. Bieberbach, Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1932, стр. 104.

[19] Süß, Jap. Journ. Math., т. 4, 1924, стр. 203—204.

[20] S. Cohn-Vossen, Die parabolische Kurve, Math. Annalen, т. 99, 1928, стр. 273—308. См. в особенности § 14.

[21] E. Rembs, Unverbiegbare offene Flächen, Sitzungsberichte preuß. Akad. d Wissensch., 1930, стр. 123—133.

[22] E. Rembs, Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen, Math. Zeitschrift, т. 36, 1932, стр. 110—121.

[23] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris 1896, т. 4, стр. 1, 2.

[24] S. Cohn-Vossen, Unstarre geschlossene Flächen, Math. Annalen, т. 102, 1929, стр. 10—29.

[25] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris 1894, т. 3, стр. 370—374.