

HANDBIBLIOTHEK
FÜR BAUINGENIEURE
HERAUSGEGEBEN VON ROBERT OTZEN

VERMESSUNGS-
KUNDE

VON

M. NÄBAUER

Handbibliothek für Bauingenieure

Ein Hand- und Nachschlagebuch für Studium und Praxis

Herausgegeben von

Robert Otzen

Geheimer Regierungsrat,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover

- I. Teil: Hilfswissenschaften 5 Bände
- II. Teil: Eisenbahnwesen und Städtebau .. 9 Bände
- III. Teil: Wasserbau 8 Bände
- IV. Teil: Brücken- und Ingenieur-Hochbau . 4 Bände

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil: Hilfswissenschaften.

- 1. Band: **Mathematik.** Von Prof. H. E. Timerding, Braunschweig. Mit 192 Textabbildungen. VIII und 242 Seiten. 1922. Gebunden GZ. 6.4*
- 2. Band: **Mechanik.** Von Dr.-Ing. Fritz Rabbow, Hannover. Mit 237 Textabbildungen. VIII und 203 Seiten. 1922. Gebunden GZ. 6.4*
- 3. Band: **Maschinenkunde.** Von Prof. H. Weihe, Berlin-Lankwitz. Mit 445 Textabbildungen. VIII und 228 Seiten. Erscheint Anfang 1923.
- 4. Band: **Vermessungskunde.** Von Prof. Dr. Martin Näbauer, Karlsruhe. Mit 344 Textabbildungen. X und 338 Seiten. 1922. Gebunden GZ. 11*
- 5. Band: **Betriebswissenschaft.** Von Dr.-Ing. Max Mayer, Duisburg. Erscheint voraussichtlich im Jahre 1923.

II. Teil: Eisenbahnwesen und Städtebau.

- 1. Band: **Städtebau.** Von Prof. Dr.-Ing. Otto Blum, Hannover, Prof. G. Schimpff †, Aachen, und Stadtbauinspektor Dr.-Ing. W. Schmidt, Stettin. Mit 482 Textabbildungen. XII und 478 Seiten. 1921. Gebunden GZ. 15*
- 2. Band: **Linienführung und allgemeine Bahnanlage.** Von Prof. Dr.-Ing. E. Giese, Charlottenburg, Prof. Dr.-Ing. Otto Blum und Prof. Dr.-Ing. Risch, Braunschweig. Mit etwa 160 Textabbildungen. Umfang etwa 320 Seiten. Erscheint voraussichtlich im Jahre 1923.
- 3. Band: **Unterbau.** Von Prof. W. Hoyer, Hannover. Mit etwa 120 Textabbildungen. Umfang etwa 170 Seiten. Erscheint voraussichtlich Anfang 1923.
- 4. Band: **Oberbau und Gleisverbindungen.** Von Regierungs- und Baurat Bloss, Dresden. Erscheint voraussichtlich im Sommer 1923.

* Die eingesetzten Grundzahlen (GZ.) entsprechen den ungefähren Vorkriegspreisen und ergeben mit dem jeweiligen Entwertungsfaktor (Umrechnungsschlüssel) vervielfacht den Verkaufspreis. Über den zur Zeit geltenden Umrechnungsschlüssel geben alle Buchhandlungen sowie der Verlag bereitwilligst Auskunft.

5. Band: Bahnhöfe. Von Prof. Dr.-Ing. Otto Blum, Hannover, Prof. Dr.-Ing. Risch, Braunschweig, Prof. Dr.-Ing. Ammann, Karlsruhe, und Regierungs- und Baurat a. D. v. Glinski, Chemnitz. Erscheint voraussichtlich im Sommer 1923.
6. Band: Eisenbahn-Hochbauten. Von Regierungs- und Baurat Cornelius, Berlin. Mit 157 Textabbildungen. VIII und 128 Seiten. 1921. Gebunden GZ. 6.4*
7. Band: Sicherungsanlagen im Eisenbahnbetriebe. Auf Grund gemeinsamer Vorarbeit mit Prof. Dr.-Ing. M. Oder † verfaßt von Geh. Baurat Prof. Dr.-Ing. W. Cauer, Berlin; mit einem Anhang „Fernmeldeanlagen und Schranken“ von Regierungs- baurat Dr.-Ing. Fritz Gerstenberg, Berlin. Mit 484 Abbildungen im Text und auf 4 Tafeln. XVI und 459 Seiten. 1922. Gebunden GZ. 15
8. Band: Verkehr, Wirtschaft und Betrieb der Eisenbahnen. Von Oberregierungs-Baurat Dr.-Ing. Jacobi, Erfurt, Prof. Dr.-Ing. Otto Blum, Hannover, und Prof. Dr.-Ing. Risch, Braunschweig. Erscheint voraussichtlich im Jahre 1923.
9. Band: Eisenbahnen besonderer Art. Von Prof. Dr.-Ing. Ammann, Karlsruhe, und Regierungsbaumeister H. Nordmann, Steglitz. Erscheint voraussichtlich im Jahre 1923.

III. Teil: Wasserbau.

1. Band: Grundbau. Von Regierungsbaumeister a. D. O. Richter, Frankfurt a. M. Mit etwa 300 Textabbildungen. Umfang etwa 220 Seiten. Erscheint voraussichtlich im Jahre 1923.
2. Band: See- und Seehafenbau. Von Prof. H. Proetel, Aachen. Mit 292 Textabbildungen. X und 221 Seiten. 1921. Gebunden GZ. 7.5*
3. Band: Flußbau. Von Regierungs-Baurat Dr.-Ing. H. Krey, Charlottenburg.
4. Band: Kanal- und Schleusenbau. Von Regierungs-Baurat Engelhard, Oppeln. Mit 303 Textabbildungen und einer farbigen Übersichtskarte. VIII und 261 Seiten. 1921. Gebunden GZ. 8.5*
5. Band: Wasserversorgung der Städte und Siedlungen. Von Prof. O. Geißler, Hannover, und Geh. Reg.-Rat Prof. Dr.-Ing. J. Brix, Charlottenburg. Erscheint voraussichtlich Ende 1923.
6. Band: Entwässerung der Städte und Siedlungen. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr.-Ing. J. Brix, und Prof. O. Geißler, Hannover. Erscheint voraussichtlich Ende 1924.
7. Band: Kulturtechnischer Wasserbau. Von Geh. Reg.-Rat Prof. E. Krüger, Berlin. Mit 197 Textabbildungen. X und 290 Seiten. 1921. Gebunden GZ. 9.5*
8. Band: Wasserkraftanlagen. Von Dr.-Ing. Adolf Ludin, Karlsruhe. Erscheint voraussichtlich im Sommer 1923.

IV. Teil: Brücken- und Ingenieurhochbau.

1. Band: Statik. Von Prof. Dr.-Ing. Walther Kaufmann, Hannover. Mit 385 Textabbildungen. VIII und 352 Seiten. 1923.
2. Band: Holzbau. Von N. N.
3. Band: Massivbau. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Robert Otzen, Hannover. Erscheint im Frühjahr 1923.
4. Band: Eisenbau. Von Prof. Martin Grüning, Hannover. Erscheint voraussichtlich im Frühjahr 1923.

* Die eingesetzten Grundzahlen (GZ.) entsprechen den ungefähren Vorkriegspreisen und ergeben mit dem jeweiligen Entwertungsfaktor (Umrechnungsschlüssel) vervielfacht den Verkaufspreis. Über den zur Zeit geltenden Umrechnungsschlüssel geben alle Buchhandlungen sowie der Verlag bereitwilligst Auskunft.

Handbibliothek für Bauingenieure

Ein Hand- und Nachschlagebuch
für Studium und Praxis

Herausgegeben

von

Robert Otzen

Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule
zu Hannover

I. Teil. Hilfswissenschaften. 4. Band:

Vermessungskunde

von

Martin Näbauer



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1922

Vermessungskunde

Von

Martin Näbauer

Dr.-Ing., Professor an der Technischen Hochschule
zu Karlsruhe

Mit 344 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1922

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

ISBN 978-3-642-98357-3 ISBN 978-3-642-99169-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-99169-1

Copyright 1922 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1922.
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1922

Vorwort des Verfassers.

Dieses Buch, welches einen Bestandteil der von *R. Olzen* herausgegebenen Handbibliothek für Bauingenieure bildet, ist in erster Linie für den Bauingenieur geschrieben und zwar für denjenigen, der nicht nur einige Begriffe erhaschen, sondern sich ernsthaft mit der Vermessungskunde befassen will oder muß. Ist diese schon dem Inlandsbauingenieur unentbehrlich, weil er selbst Vermessungsarbeiten auszuführen oder doch vielfach zu beurteilen und weiter zu verwenden hat, so ist sie es erst recht für unsere vielen Auslandsingenieure. Ihnen steht kein Vermessungsspezialist zur Seite und sie haben in kartographisch unbekanntem Ländern manchmal recht umfangreiche Vermessungen vollkommen selbständig durchzuführen.

Eine etwas gründlichere Behandlung des Stoffes war also geboten. Immerhin mußte aber der Umfang des Buches innerhalb gewisser Grenzen bleiben; deshalb schieden die astronomisch-geographische Ortsbestimmung sowie die Routenaufnahme von vornherein aus und auch die Photogrammetrie konnte nur kurz behandelt werden. Für diese Gebiete ist aber durch gute Sonderwerke, wie z. B. das vortreffliche Hilfswerk von *v. Neumayer*¹⁾ gesorgt, so daß die Weglassung bzw. kürzere Behandlung der genannten Grenzwissenschaften wohl kaum als eine wesentliche Lücke anzusprechen ist.

Vollen Nutzen aus dem Buche wird allerdings nur derjenige Studierende ziehen, welcher es nicht als bequemen Ersatz für den Vortrag, sondern als dessen Hilfsmittel und Ergänzung betrachtet und welcher sich auch mit der praktischen Seite der Meßkunst in den vorgesehenen Übungen vertraut macht.

Der Vermessungsingenieur wird an das Buch nach mancher Richtung hin noch weitergehende Anforderungen stellen; immerhin wird er es auch in der vorliegenden Form nicht ohne allen Nutzen aus der Hand legen.

Karlsruhe i. B., im Herbst 1921.

Dr. M. Näbauer.

¹⁾ Siehe Seite 331, Fußnote 2). Bezüglich der Photogrammetrie sei noch auf das kürzlich erschienene Werkchen *Lüscher, H.*: Photogrammetrie (Aus Natur und Geisteswelt, Bd. 612), Leipzig und Berlin 1920, verwiesen.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Elemente der Fehlertheorie.	
1. Fehler und Fehlereigenschaften	3
2. Fehlermaße und Gewichte	6
3. Fehlerfortpflanzung	11
4. Das einfache arithmetische Mittel	13
5. Das allgemeine arithmetische Mittel	15
6. Beobachtungsdifferenzen	17
7. Ausgleichung von Beobachtungen, deren Summe ein Festwert ist	18
8. Allgemeines Ausgleichungsprinzip	20
II. Elemente der Instrumentenkunde.	
9. Geodätische Maßeinheiten	21
a) Längenmaße	21
b) Flächenmaße	23
c) Winkelmaße	24
10. Bestandteile geodätischer Meßinstrumente	25
a) Spiegel und Prismen	25
b) Linsen	29
c) Ablesevorrichtungen	34
11. Zielvorrichtungen	42
a) Das Diopter	42
b) Das Meßfernrohr	42
12. Die Libelle	51
a) Die Dosenlibelle	51
b) Die Röhrenlibelle	52
13. Nivellierinstrumente und Nivellierlatten	58
a) Pendelinstrumente	58
b) Hydrostatische Nivellierinstrumente	59
c) Fernrohrnivellierinstrumente mit Libelle	60
d) Nivellierlatten	65
14. Instrumente zum Abstecken fester Winkel	67
a) Diopterinstrumente	67
b) Spiegelinstrumente	69
c) Prismeninstrumente	70
d) Absteckung fester Winkel durch Schnurdreiecke	72
15. Der Theodolit	72
a) Einrichtung des Theodolits	72
b) Berichtigung des Theodolits	74
c) Gebrauch des Theodolits zur Messung von Horizontalwinkeln	81
d) Repetitionswinkelmessung	85
e) Höhenwinkelmessung	86
16. Andere Instrumente zur Messung beliebiger Horizontalwinkel	89
a) Die Winkeltrommel	89
b) Die Prismentrommel	90
c) Die Bussole	91
17. Der Meßtisch	94
a) Einrichtung des Meßtisches	94
b) Lotgabel und Kippregel	94
c) Aufstellung des Meßtisches	97
18. Neigungsmesser	98
a) Setzinstrumente	98
b) Hängeinstrumente	99
c) Zielinstrumente	100

	Seite
19. Instrumente zur direkten Längenmessung und ihr Gebrauch	100
a) Lattenmessung	101
b) Bandmessung	104
c) Meßrad, Feldzirkel und Schrittzähler	106
d) Fehler der direkten Längenmessung	107
20. Indirekte Längenmessung	111
a) Geometrischer Weg	111
b) Trigonometrischer Weg	112
c) Optische Entfernungsmessung	113
III. Aufnahmearbeiten.	
21. Allgemeines über die Horizontalaufnahme. Ebene Koordinaten	121
22. Trigonometrische Punktbestimmung	123
a) Auswahl und Versicherung der Dreieckspunkte	123
b) Einrichtungen für die Instrumentenaufstellung. Signalisierung der Dreieckspunkte	124
c) Beobachtungsverfahren	125
d) Zentrieren der Beobachtungen	130
e) Netzeinschaltung	131
f) Trigonometrische Punkteinschaltung	139
23. Theodolit-Polygonzüge	148
a) Anlage und Messung der Polygonzüge	148
b) Berechnung der Polygonzüge	150
c) Fehlerfragen	156
24. Einzelaufnahme durch rechtwinklige Naturmaßkoordinaten	162
a) Liniennetz	162
b) Einzelaufnahme	166
25. Horizontalaufnahme durch Polarkoordinaten mit dem entfernungsmessenden Theodolit	167
26. Bussolenaufnahme	168
a) Bussolenzüge	168
b) Einzelaufnahme	170
27. Meßtischaufnahme	171
a) Stationieren mit dem Meßtisch	171
b) Einzelaufnahme mit dem Meßtisch	176
28. Allgemeines über Höhengaufnahmen	178
29. Das geometrische Nivellement	179
a) Festpunkte	179
b) Durchführung und Berechnung des gewöhnlichen geometrischen Nivellements	180
c) Längen- und Querprofile	191
d) Das Feinnivellement	192
30. Trigonometrische Höhenmessung	205
31. Tachymetrisches Nivellement	212
32. Staffelmessung	216
33. Barometrische Höhenmessung	217
a) Höhenmessung mit dem Quecksilberbarometer	219
b) Höhenmessung mit dem Federbarometer	222
c) Höhenbestimmung mit dem Siedethermometer	224
d) Barometrische Höhenstufen	225
e) Genauigkeit der barometrischen Höhenmessung	228
34. Flächennivellement	229
a) Das geometrische Flächennivellement	229
b) Die halbtrigonometrische Höhenmessung	230
c) Flächenaufnahme durch Längen- und Querprofile	232
35. Die tachymetrische Geländeaufnahme	232
a) Grundlagen der Aufnahme	233
b) Die Einzelaufnahme mit verschiedenen Tachymetertheodoliten	234
c) Meßtischtachymetrie und Bussolentachymetrie	241
d) Genauigkeitsfragen	241
36. Photogrammetrie	243
a) Der Phototheodolit	243
b) Grundlage der Aufnahmen	245
c) Die Einschneidephotogrammetrie	245
d) Die Parallaxenphotogrammetrie	252

IV. Planherstellung und Flächenberechnung.

37. Allgemeines	256
38. Horizontalpläne	257
41 ¹⁾ . Höhenpläne	266
42. Abzeichnen und Vervielfältigung von Plänen	271
43. Flächenberechnung aus Naturmaßen	273
44. Flächenberechnung nach dem Plan	278
a) Flächenberechnung aus Planmaßen	278
b) Das Schätzquadrat	279
c) Flächenberechnung mit dem Planimeter	279
45. Haltgraphische Flächenberechnung	285
46. Genauigkeit der Flächenberechnung	285
a) Fehler der Flächenberechnung aus Naturmaßen	285
b) Fehler der aus Planmaßen berechneten Flächen	290
c) Genauigkeit der Flächenberechnung mit dem Planimeter	291
d) Flächenabgleichung mit Hilfe von Kontrollflächen	292

V. Absteckungsarbeiten.

47. Absteckung von Bauprofilen	294
a) Absteckung eines Längenprofils	294
b) Absteckung von Auftrags- und Abtragsprofilen	295
48. Absteckung einer Linie gleicher Neigung	296
49. Abstecken von Geraden über Tage	298
a) Einschalten der Zwischenpunkte vom Ende aus	298
b) Punkteinschaltung aus Zwischenpunkten der Geraden	299
c) Einweisen eines Zwischenpunktes durch Winkelmessung	299
d) Verlängerung einer Geraden	300
e) Absteckung einer Geraden in unübersichtlichem Gelände	301
50. Richtungsübertragungen	304
a) Absteckung einer Parallelen durch gleichlange Ordinaten	304
b) Absteckung einer Parallelen durch schiefe Längen	304
c) Absteckung einer Parallelen durch Winkelmessung	304
d) Übertragung einer beliebigen Richtung durch Winkelmessung	305
51. Absteckung einer geraden Tunnelachse	305
52. Richtungsübertragung auf einen anderen Horizont (Schachtlotung)	311
53. Kurvenabsteckung	314
a) Kreisbogennetz	314
b) Absteckung von gleichabständigen Kreispunkten durch rechtwinklige Koordinaten von der Tangente aus	316
c) Absteckung von Kreispunkten durch rechtwinklige Koordinaten von der Tangente aus mit gleichen Abszissenunterschieden	316
d) Absteckung von Kreispunkten durch rechtwinklige Koordinaten von der Sehne aus	317
e) Absteckung von Kreispunkten durch ein regelmäßiges, einbeschriebenes Polygon	318
f) Absteckung eines durch drei gegebene Punkte bestimmten Kreisbogens	320
g) Absteckung von Kreispunkten durch Polarkoordinaten	321
h) Absteckung von Kreispunkten nach der Einrückmethode	322
i) Absteckung von Kreispunkten nach der Ausrückmethode	323
k) Absteckung von Kreispunkten nach der Viertelsmethode	323
l) Absteckung der kubischen Parabel als Übergangskurve	324
m) Berechnung der Absteckungselemente eines dreifachen Korbbogens bei festliegenden Haupttangente und vorgegebenen Halbmessern	327
n) Absteckung eines dreiteiligen Korbbogens mit Übergangskurven an den beiden Außenbögen	329
54. Übersicht der vermessungstechnischen Arbeiten beim Eisenbahnbau	330
Sachregister	334

¹⁾ Die Nummern 39 und 40 fallen aus.

Abkürzungen.

- Z.V.W. . . . Zeitschrift für Vermessungswesen,
Z.B.G.V. . . . Zeitschrift des bayerischen Geometervereins,
Z.V.H.B.V. . . . Zeitschrift des Vereins der höheren bayerischen Vermessungsbeamten,
E.M.B.P.N., H. 1 (H. 2) . . . Ergänzungsmessungen zum bayerischen Präzisionsnivelliment,
Heft 1, München 1908 (Heft 2, München 1919).
Schöne, Heron *Schöne*, *Hermann*, Herons von Alexandria Vermessungslehre und
Dioptra, Leipzig 1903.
-

Berichtigungen.

- Seite 46, Zeile 3 von oben lies Innenrand statt Innenwand,
„ 76, „ 1 „ „ „ v_y statt v_u ,
„ 113, in Abb. 163a gehören zu den beiden Marken die Bezeichnungen M_1 und M_2 ,
„ 116, Zeile 5 von unten lies m_e statt m_i ,
„ 256, Textzeile 10, 11 von oben lies ausgedehnter statt ausgebehnter.
-

Einleitung.

Aufgabe der Vermessungskunde im Umfange der sog. niederen Geodäsie oder praktischen Geometrie ist die Vermessung, Berechnung und Abbildung von kleineren Teilen der Erdoberfläche in einem solchen Ausmaße, daß für die grundrißlichen Darstellungen noch die Ebene als Bezugsfläche dienen kann. Sollen dabei relative Längenverzerrungen über 1:50000 vermieden werden, so dürfen die äußersten Punkte des Aufnahmegebietes nicht mehr als 40 km von einem das Gebiet der Länge nach teilenden Großkreis abstehen.

Für die zweckmäßige Durchführung einer Vermessung muß man sich von vornherein über die anzustrebende Genauigkeit, die zu ihrer Erreichung geeignetste Methode und den notwendigen Arbeitsaufwand ungefähr im klaren sein; ferner darf man es aus Gründen der Ehrlichkeit und der Sicherheit halber nicht unterlassen, sich aus dem Verlauf der Beobachtungen und dem Verhalten der aus ihnen berechneten Ergebnisse von der wirklich erreichten Zuverlässigkeit der Endresultate ein richtiges Bild zu machen. Es ist daher notwendig, der Vermessungskunde eine kurze Fehlertheorie vorzuschicken, welche den Leser wenigstens mit der Beurteilung von Beobachtungsreihen, der Berechnung des mittleren Fehlers bei gleichen und verschiedenen Gewichten aus Beobachtungsfehlern und Beobachtungsdifferenzen, mit der Fehlerfortpflanzung in Funktionen der Beobachtungen sowie mit der zweckmäßigsten Verteilung einzelner Widersprüche gegen feste Beobachtungssummen vertraut macht.

Eine besondere Instrumentenkunde enthält die Besprechung der für Vermessungen wichtigsten Instrumente und ihres Gebrauchs, so daß zum Teil auch schon einfache Messungen auftreten. Hingegen bringen die Abschnitte über Aufnahme- und Absteckungsarbeiten die Beschreibung der Messungen einzeln und im Zusammenhang, wie sie insbesondere bei Projektierungen auftreten. Hinsichtlich der Verarbeitung von Aufnahmen ist das Wichtigste im Abschnitt über Planherstellung und Flächenberechnung enthalten.

Den Anstoß zur Entwicklung der Vermessungskunde, deren Ursprung sich im Dunkel der Zeiten verliert, gaben zweifellos praktische Bedürfnisse und die alten Kulturvölker Mesopotamiens, denen die Herstellung ausgedehnter Bewässerungsanlagen nachgerühmt wird, müssen wohl schon im Besitze einer über die ersten Anfänge hinausgewachsenen praktischen Geometrie gewesen sein. Das alte Ägypten hatte schon ein Grundstückskataster und die infolge der regelmäßig wiederkehrenden Überschwemmungen des Nils etwa verloren gegangenen Grenzen konnten wieder hergestellt werden. Ein hervorragender Zeuge für die Pflege der praktischen Geometrie in Griechenland ist *Heron* von Alexandrien, der bereits die Ausführung einer Koordinatenaufnahme samt Flächenberechnung ausführlich beschreibt. Auch die Römer hatten ihr Kataster und in den Agrimensoren eine eigene Feldmesserzunft. Eine

nennenswerte Fortbildung aber hat die Vermessungskunst weder den Römern noch den folgenden Jahrhunderten zu verdanken. In die erste Hälfte des 14. Jahrhunderts fällt das Auftreten der ersten Ablesevorrichtung, der Transversalenteilung, und erst 1631 war die Entwicklung des außerordentlich wichtigen Nonius abgeschlossen. Schon etwas früher hatte *Practorius* den Meßtisch erfunden, welcher in der Aufnahmepraxis bis tief ins vorige Jahrhundert hinein das Feld beherrschte.

Einen ungemein kräftigen Aufschwung erfuhr die Vermessungskunde durch die zu Beginn des 19. Jahrhunderts hauptsächlich in Deutschland — meist aus Steuerzwecken — einsetzenden Landesvermessungen, die vielfach noch den Meßtisch verwendeten. Infolge der mit der Bodenbewertung gestiegenen Genauigkeitsansprüche aber trat das Aufnehmen durch unmittelbar gemessene, rechtwinklige Koordinaten auf trigonometrischer Grundlage, die sog. Zahlenaufnahme oder Koordinatenmethode, immer mehr in den Vordergrund. Dieses inzwischen hochentwickelte Verfahren, ferner die größtenteils durch die Bedürfnisse des Eisenbahnbaues seit etwa 1840 bewirkte Entwicklung des geometrischen Nivellements zur genauesten Methode der Höhenmessung, die Ausbreitung der Tachymetrie, das Aufblühen der Photogrammetrie sowie der für größere und wichtigere Messungen heute überall verlangte Genauigkeitsnachweis sind charakteristisch für den gegenwärtigen Stand der Vermessungskunde¹⁾.

¹⁾ An Literatur zu diesen geschichtlichen Ausführungen sei verwiesen auf: 1. *Herodot* II, 109 und VI, 42; 2. *Hammer, E.*, Geschichte der Landmessung in Ägypten, Z.V.W. 1908, S. 377 bis 384; 3. *Borchardt, L.*, Nilmesser und Nilstandsmarken, Abh. d. K. preuß. Ak. d. W. 1906, Anhang, Abh. I, S. 1 bis 55; 4. *Cantor, M.*, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Feldmeßkunst, Leipzig 1875; 5. *Stöber, E.*, Die römischen Grundsteuervermessungen, München 1877; 6. *Jordan-Steppes*, Das deutsche Vermessungswesen, Stuttgart 1882; 7. *Roedder*, Zur Geschichte des Vermessungswesens Preußens, insbesondere Altpreußens, aus der ältesten Zeit bis in das 19. Jahrhundert, Z.V.W., Beginn 1907, S. 689, Schluß 1908, S. 195; 8. *Lührs, W.*, Ein Beitrag zur Geschichte der Transversalteilungen und des „Nonius“, Z.V.W. 1910, S. 177 ff.

I. Elemente der Fehlertheorie¹⁾.

1. Fehler und Fehlereigenschaften.

Alle in den messenden Wissenschaften ausgeführten Beobachtungen sind mit Fehlern behaftet, welche ihr Entstehen hauptsächlich den Unvollkommenheiten der Sinnesorgane, kleinen Fehlern im Bau, in der Berichtigung und Aufstellung des Instrumentes, ungünstigen atmosphärischen Verhältnissen und anderen ähnlichen Gründen verdanken. Diese Fehler verraten sich bei wiederholter Beobachtung ein und derselben Größe in den zwischen den Beobachtungen bestehenden Abweichungen. Liegen hingegen nur einmalige Beobachtungen verschiedener Größen vor, welche wie die Winkel im Dreieck einer von vornherein bekannten Bedingung streng genügen sollen, so äußern sie sich in dem Widerspruch, welchen die Beobachtungen der Erfüllung einer oder mehrerer solcher Bedingungen entgegensetzen.

Die Beobachtungsfehler lassen sich nach der Art ihrer Entstehung und Wirkung in drei Gruppen zusammenfassen, nämlich in

a) grobe Fehler, b) systematische Fehler, c) rein zufällige, unvermeidliche Fehler.

Die groben Fehler entspringen der Unachtsamkeit. Sie können bei genügender Sorgfalt von vornherein vermieden oder doch mit Hilfe von Kontrollen rechtzeitig aufgedeckt und beseitigt werden, so daß sie in der Fehlertheorie keine wesentliche Rolle spielen.

Wichtiger sind schon die systematischen Fehler, welche ihre Entstehung mehr oder weniger einseitig wirkenden Ursachen wie restigen Instrumentenfehlern oder Temperatureinflüssen von gleichartigem Charakter verdanken. Diese Art von Fehlern tritt in einer zeichnerischen Darstellung der Beobachtungen meist deutlich zutage. Die Messungen schmiegen sich nämlich in einem solchen Falle einer Kurve an, welche sehr häufig eine Gerade ist. In diesem sehr wichtigen Falle spricht man von einem linearen Verlauf des systematischen Fehlers. Liegt diese Gerade parallel zur Abszissenachse, so handelt es sich um einen gleichbleibenden Fehlereinfluß, der als konstanter Fehler bezeichnet wird.

¹⁾ Für ein tieferes Studium der Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung, sowie ihrer Anwendungen sei auf folgende Werke verwiesen: a) *Helmert, F. R.*, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1907; b) *Jordan, W.*, Handbuch der Vermessungskunde, I. Bd.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 6. Aufl., Stuttgart 1910; c) *Hegemann, E.*, Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichsrechnung, 2. Aufl., Berlin 1902; d) *Vogler, Ch. A.*, Geodätische Übungen für Landmesser und Ingenieure, II. Teil, 3. Aufl., Berlin 1913.

Ein ausführliches Literaturverzeichnis über das Gebiet der Fehlertheorie enthält *Czuber, E.*, Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen, im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, 7. Bd., Leipzig 1899.

Die systematischen Fehler können aus dem Verlaufe der Beobachtungen errechnet und zahlenmäßig berücksichtigt werden. Dieser Weg ist zwar etwas umständlich, läßt sich aber — besonders in der Astronomie — nicht immer vermeiden. Einfacher ist es, durch eine planmäßige Anordnung und Verbindung der Beobachtungen absolut genommen gleich große positive und negative Summen der systematischen Fehlereinflüsse zu erzielen, so daß das Mittel aus den Beobachtungen einen von diesen Fehlern freien Wert vorstellt. Dieses als Tilgungsmessung oder Kompensationsmessung bezeichnete Verfahren der Fehler tilgung ist besonders in der Geodäsie weit verbreitet. Ein einfaches Beispiel dafür ist die übliche Art der Horizontalwinkelmessung in zwei Fernrohrlagen, bei welcher das Hinausfallen einer größeren Anzahl von systematischen Fehlern erreicht wird. Befreit man die Beobachtungen von den groben und systematischen Fehlern, so bleiben noch die rein zufälligen, unvermeidlichen Beobachtungsfehler, mit denen man sich in der Fehlertheorie hauptsächlich zu befassen hat, übrig. Diese treten bei jedem Beobachtungsverfahren auf und sind als unvermeidlich zu betrachten. Sie können aber unter sonst gleichen Umständen durch vermehrte Sorgfalt bei flotttem Arbeitsgange verkleinert werden und üben insbesondere auf das Mittel aus mehrfach wiederholten Beobachtungen nur noch einen stark verminderten Einfluß aus.

Die zufälligen, unvermeidlichen Beobachtungsfehler sind aber nicht etwa vollständig gesetzlos; sie besitzen vielmehr eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften, unter denen besonders folgende zu nennen sind:

1. das arithmetische Mittel der algebraischen Fehlerwerte soll mit zunehmender Fehlerzahl gegen Null konvergieren;
2. die Vorzeichen sollen annähernd gleichmäßig über die Fehlerreihe verteilt sein und die Vorzeichenfolgen sollen den Vorzeichenwechseln die Wage halten;
3. kleine Fehler treten häufiger auf als große; zwischen bestimmten Grenzen soll eine bestimmte Zahl von Fehlern liegen;
4. die unter den Fehlermaßen bestehenden theoretischen Beziehungen sollen erfüllt sein.

Ehe auf diese Punkte eingegangen wird, mögen einige allgemeine Bemerkungen über die algebraische Definition des Fehlers eingeschaltet werden. Unter einem Fehler versteht der Sprachgebrauch eine Größe, welche man von der Beobachtung wegnehmen muß, um auf den verbesserten Wert zu kommen. Hingegen ist zur Erreichung des gleichen Zieles die Verbesserung zur Beobachtung hinzuzufügen. Aus praktischen Gründen zieht man das Wort Fehler, das sich auch schon in sehr vielen Zusammensetzungen fest eingebürgert hat, dem schleppenden Ausdruck Verbesserung vor und aus rechnerischen Gründen gibt man jenem heute ziemlich allgemein die sachliche Bedeutung der Verbesserung. Diesem Brauche folgend wird künftighin immer, wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt ist, unter dem Fehler eine Größe verstanden, deren Hinzutreten zur Beobachtung diese in den richtigen bzw. in einen verbesserten Wert überführt.

Sind also für eine Größe, deren wahrer Wert X ist, die fehlerhaften Beobachtungen $l_1, \dots, l_i, \dots, l_n$ gefunden worden und sind $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n$ die wahren Fehler dieser Beobachtungen, so ist

$$X = l_1 + \varepsilon_1 = \dots = l_i + \varepsilon_i = \dots = l_n + \varepsilon_n \quad \dots \dots \quad (1)$$

und

$$\varepsilon_i = X - l_i \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Bleibt der wahre Wert X unbekannt und tritt daher an seine Stelle ein Näherungswert x , so treten auch an Stelle der wahren Fehler ε_i die scheinbaren Beobachtungsfehler v_i .

Für den besonderen Fall, daß die Näherung x ein wahrscheinlichster Wert¹⁾ ist, werden die einzelnen v_i wahrscheinlichste Beobachtungsfehler. Den Gleichungen (1) und (2) entsprechen hier die Beziehungen

$$x = l_i + v_i, \quad v_i = x - l_i. \quad \dots \dots \dots (3)$$

Nach dieser Abschweifung kehren wir wieder zu den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zurück. Bezeichnet man mit $W_\epsilon + d\epsilon$ die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen ϵ und $\epsilon + d\epsilon$, so ist, wie zuerst *C. F. Gauß*²⁾ gezeigt hat,

$$W_\epsilon + d\epsilon = \varphi(\epsilon) d\epsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \epsilon^2} d\epsilon. \quad \dots \dots \dots (4)$$

Den Faktor

$$\varphi(\epsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \epsilon^2} \quad \dots \dots \dots (5)$$

bezeichnet man als das *Gaußsche Fehlergesetz*. Die in ihm enthaltene Größe h ist für die Güte der Beobachtungsreihe kennzeichnend und wird deshalb das Maß der Genauigkeit genannt. Das angegebene Fehlergesetz enthält den Fehler ϵ lediglich in der zweiten Potenz; es sind also positive und negative Fehler gleichen Absolutwertes gleich wahrscheinlich. Aus dieser Erkenntnis aber folgen leicht die unter 1) und 2) aufgezählten Fehlereigenschaften.

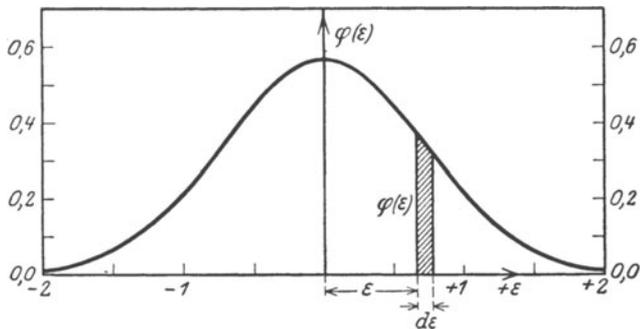


Abb. 1. Das *Gaußsche Fehlergesetz* für $h=1$.

¹⁾ Der wahrscheinlichste Wert ist ein der Wahrheit möglichst nahekommender Wert, welcher bei einer unendlich oft wiederholten Messung der gesuchten Größe in der Reihe der Beobachtungen am häufigsten auftreten würde.

²⁾ *C. F. Gauß* (1777—1855) hat sein Fehlergesetz 1794 aufgestellt, aber erst 1809 in der Theorie der Bewegung der Himmelskörper (ins Deutsche übertragen von *C. Haase*, Hannover 1865) veröffentlicht. Seine Ableitung stützt sich auf den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit (Verhältnis der dem Eintreffen eines Ereignisses günstigen Anzahl von Fällen zur Gesamtzahl aller möglichen Fälle) und auf die allgemein gebräuchliche Annahme, daß der wahrscheinlichste Wert gleich genauer, direkter Beobachtungen das einfache arithmetische Mittel sei. Die später hauptsächlich von *Bessel*, *Hagen* und *Crofton* entwickelte Theorie der Elementarfehler führt ebenfalls zum *Gaußschen Fehlergesetz*. Sie besitzt den großen Vorzug, auf die Natur der Beobachtungsfehler als zusammengesetzte Größen einzugehen und führt wieder unter Benutzung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, aber ohne Verwendung des arithmetischen Mittels zum Ziele. Voraussetzung ist bei *Crofton* (*London Phil. Trans.*, Bd. CLX (1870), S. 175 ff.) nur mehr, daß jeder Beobachtungsfehler als die algebraische Summe einer sehr großen Zahl von im Vergleich zum Gesamtfehler sehr kleinen Elementarfehlern betrachtet werden darf und daß die im allgemeinen verschieden großen Elementarfehler irgend ein gerades Fehlergesetz befolgen, d. h., daß bestimmte Absolutfehler ebenso häufig positiv wie negativ auftreten. Von dem vielgliedrigen Charakter der Beobachtungsfehler kann man sich leicht überzeugen. So setzt sich z. B. der Fehler des in üblicher Weise in zwei Fernrohrlagen gemessenen Horizontalwinkels ungerechnet einer Drehung der Unterlage aus 28 Elementarfehlern (4 Einstellfehler, 8 Ablesefehler, 8 Kreisteilungsfehler, 8 Nonienteilungsfehler) zusammen. Aber auch dann, wenn scheinbar einfache Verhältnisse vorliegen wie bei der Einschätzung der Lage eines Teilstriches in einem Felde, handelt es sich um einen physiologisch recht komplizierten Vorgang, da das Zustandekommen der Strichbilder durch die Vermittlung einer sehr großen Zahl von Sehstäben erfolgt. Jedes der bei der Bildentstehung mitwirkenden Stäbchen gibt gewissermaßen ein mit einem Fehler, dem Elementarfehler, behaftetes Urteil über die Strichlage ab.

Der Verlauf des Gaußschen Fehlergesetzes ist für die Annahme $h = 1$ in Abb. 1 veranschaulicht, in welcher die ε als Abszissen und die zugehörigen $\varphi(\varepsilon)$ als Ordinaten aufgetragen sind. Die so entstehende Kurve ist symmetrisch zur Achse der $\varphi(\varepsilon)$ und die im Bilde schraffierte schmale Fläche ist nach (4) die Wahrscheinlichkeit $W_{\varepsilon}^{\varepsilon + d\varepsilon}$.

Unter der Häufigkeitszahl $H_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_r}$ versteht man die Zahl derjenigen Fehler, welche zwischen den Grenzen ε_i und ε_r liegen. Sie ist das Produkt

$$H_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_r} = n \cdot W_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_r} = n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_r} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon, \dots \dots \dots (6)$$

wenn n die Gesamtzahl der Beobachtungen bedeutet. Da man, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, h auf dem Umwege über den mittleren Fehler aus den Beobachtungsfehlern ableiten kann, so läßt sich die Häufigkeitszahl $H_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_r}$ wirklich zahlenmäßig berechnen. Es erweist sich als zweckmäßig, die Grenzen ε_i und ε_r in Einheiten des schon genannten mittleren Fehlers einzuführen. Da dieser auch bei Punkt 4) eine Rolle spielt, so müssen wir zunächst auf die Fehlermaße eingehen, ehe die Besprechung der unter 3) und 4) genannten Eigenschaften der rein zufälligen, unvermeidlichen Beobachtungsfehler ganz abgeschlossen wird.

2. Fehlermaße und Gewichte.

Der Wert einer Beobachtungsreihe wird durch die zugehörige Fehlerreihe erschöpfend bestimmt. Aus praktischen Gründen sucht man für diese Beurteilung nach einem kürzeren Ausdruck, welcher sich in den sog. Fehlermaßen ergibt. Davon kommen in Betracht

- 1) der mittlere Fehler m , 2) der durchschnittliche Fehler d , 3) der wahrscheinliche Fehler w ,

welche alle ganz bestimmte Mittelwerte aus den Einzelfehlern $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sind. Ihre Berechnung erfolgt nach den Beziehungen

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon \varepsilon]}{n}}, \dots \dots \dots (7)$$

$$d = \pm \frac{[|\varepsilon|]}{n}, \dots \dots \dots (8)$$

$$w = \pm \left| \varepsilon_{\frac{1}{2}(n+1)} \right| \text{ für ungerades } n, \quad \left| \varepsilon_n \right| < \pm w < \left| \varepsilon_{\frac{n}{2}+1} \right| \text{ für gerades } n, \quad (9)$$

in welchen die eckige Klammer das von *Gauß* in die Geodäsie eingeführte Summenzeichen bedeutet, während das Zeichen $||$ angibt, daß es sich um den Absolutwert der zwischen den Strichen stehenden Größe handelt. Die Vorzeichenverbindung \pm weist darauf hin, daß die Fehlermaße als mittlere Unsicherheiten der Beobachtungen aufzufassen sind; nicht aber als Größen, welche mit einem bestimmten Vorzeichen versehen, zur fehlerhaften Beobachtung hinzugefügt, deren richtigen Wert ergeben. Nach den Gleichungen (7) bis (9) ist der mittlere Fehler die Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Einzelfehler, während der durchschnittliche Fehler das arithmetische Mittel aus den Absolutwerten der wahren Beobachtungsfehler angibt. Der wahrscheinliche Fehler wird in der nach Absolutwerten geordneten Fehlerreihe ebenso oft nicht erreicht, als er überschritten wird. Also wird in einer derart geordneten Reihe bei einer ungeraden Anzahl von Be-

obachtungen das in der Mitte stehende Element der wahrscheinliche Fehler sein; für gerades n hingegen läßt er sich nicht direkt scharf angeben; er liegt in diesem Falle zwischen den beiden in der Mitte der Fehlerreihe stehenden Elementen und kann in der Regel hinreichend genau durch deren arithmetisches Mittel ersetzt werden.

Denkt man sich die Beobachtungen unendlich oft wiederholt und zugleich die Fehlergrenzen ins Unendliche erweitert, so gelangt man unter Beachtung des Umstandes, daß die Zahl der im Intervall $d\varepsilon$ liegenden Fehler diesem selbst proportional ist, auf folgende, die Fehlermaße bestimmende Integralausdrücke

$$m = \pm \left\{ 2 \int_0^{+\infty} \varepsilon^2 \cdot \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \right\}^{\frac{1}{2}}, \dots \dots \dots (10)$$

$$d = \pm 2 \int_0^{+\infty} \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon) d\varepsilon, \dots \dots \dots (11)$$

$$\frac{1}{4} = \int_0^{+w} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \dots \dots \dots (12)$$

Diese Formen haben wenig praktisches Interesse, sind aber für theoretische Untersuchungen nicht zu entbehren.

Ersetzt man in den drei letzten Gleichungen $\varphi(\varepsilon)$ durch den Ausdruck (5), so führt die nunmehr mögliche Auswertung der Integrale zu den strengen Ergebnissen

$$m = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}, \quad d = \pm \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad w = \pm \frac{0,476\ 9363\dots}{h}, \dots \dots (13)$$

nach welchen die Fehlermaße einfache Funktionen des Maßes der Genauigkeit sind. Hieraus entsteht durch Elimination von h die ebenfalls strenge Beziehung

$$m = d \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{w}{0,476\ 9363\dots \sqrt{2}}, \dots \dots \dots (14)$$

welche für praktische Zwecke durch die sehr gute Näherung

$$m = \frac{5}{4} d = \frac{3}{2} w \dots \dots \dots (15)$$

ersetzt werden kann¹⁾.

Weitaus das wichtigste Fehlermaß ist der mittlere Fehler, welcher die Genauigkeitsverhältnisse am ungünstigsten darstellt. Er wird immer berechnet, während die beiden anderen Fehlermaße nur dann bestimmt werden, wenn es sich um die eingehende Untersuchung einer Fehlerreihe handelt, wobei auch festzustellen ist, ob die durch (14) bzw. (15) bestimmten theoretischen Beziehungen zwischen den Fehlermaßen genügend erfüllt werden. Will man ausnahmsweise das Maß der Genauigkeit in Zahlen haben, so findet man es bei bekanntem m leicht aus der Beziehung

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \dots \dots \dots (16)$$

Wir müssen noch einmal auf die unter (6) stehende Häufigkeitszahl zurückkommen, indem wir an Stelle von ε_i und ε_r als Grenzen die Beträge 0 und $r \cdot m$ einführen. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeitszahlen W_0^{rm}

¹⁾ Die einfachen Beziehungen (14) bzw. (15) entsprechen dem Gaußschen Fehlergesetze. Sie lauten anders, wenn es sich, wie z. B. bei den Abrundungsfehlern, um Fehler handelt, die einem anderen Gesetze gehorchen.

dafür, daß ein Fehler zwischen 0 und dem r -fachen mittleren Fehler liegt, sind in Tab. 1 zusammengestellt. Die zugehörige Häufigkeitszahl ist

$$H_0^{rm} = n W_0^{rm} \dots \dots \dots (17)$$

Tabelle 1.

r	W_0^{rm}	r	W_0^{rm}
0,0	0,000	0,6	0,452
0,1	0,080	0,8	0,576
0,2	0,158	1,0	0,683
0,3	0,236	1,2	0,770
0,4	0,311	1,5	0,866
0,5	0,383	2,0	0,954
0,6	0,452	3,0	0,997

Ein Blick auf Tab. 1 zeigt, daß rund zwei Drittel (68,3⁰/₁₀₀) aller Fehler den mittleren Fehler nicht überschreiten sollen. Die Zahl H_{im}^{rm} der zwischen den Grenzen im und rm zu erwartenden Fehler ist als die Differenz der Häufigkeitszahlen H_0^{im} und H_0^{rm} der Ausdruck

$$H_{im}^{rm} = n (W_0^{rm} - W_0^{im}) \dots \dots \dots (18)$$

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der Maximalfehler oder Grenzfehler. Er ist offenbar die Summe der Absolutwerte aller den Beobachtungsfehler zusammensetzenden Elementarfehler. Da diese aber nicht genügend genau bekannt sind, so läßt sich der Grenzfehler auf Grund dieser Definition nicht wohl bestimmen. Sehr viel einfacher findet man ihn durch folgende Überlegung. Nach der Tabelle der Wahrscheinlichkeitszahlen ist erst unter 300 Beobachtungen eine einzige zu erwarten, deren Fehler den dreifachen mittleren Fehler erreicht. In der erdrückend großen Mehrzahl der kürzeren Beobachtungsreihen ist deshalb der größte auftretende zufällige Fehler stets kleiner als 3 m zu erhoffen. Daher setzt man heute allgemein den Maximalfehler M dem dreifachen mittleren Fehler gleich; also ist

$$M = 3 m \dots \dots \dots (19)$$

Als Erläuterung der bisherigen Ausführungen mag ein Beispiel dienen. Zur Feststellung der Länge eines 20 m-Bandes und zur Prüfung der mit ihm erreichbaren Meßgenauigkeit wurde eine vorher mit genaueren Hilfsmitteln zu $X = 507,410$ m bestimmte Länge wiederholt gemessen, wobei die in Tab. 2 unter l eingetragenen Zahlen gefunden wurden. Mit dem Werte X , welchem mit Rücksicht auf die genauere Bestimmungsart der Charakter eines wahren Wertes beigelegt werden soll, vergleichen wir zunächst die einzelnen Beobachtungen l und finden hierbei in den Differenzen $X - l = \epsilon'$ die wahren Beobachtungsfehler. Der einseitige Vorzeichenverlauf und die große algebraische Summe dieser in Spalte 3 enthaltenen Werte zeigen, daß die ϵ' offenbar keine rein zufälligen Beobachtungsfehler sind, sondern durch systematische Fehler entstellt werden. Daß dem so ist, zeigt deutlich ein Blick auf Abb. 2, in welcher die Beobachtungsnummern (Zeiten!) als Abszissen, die Werte ϵ' als Ordinaten aufgetragen sind. Die entstandene Punktreihe läßt sich genügend genau durch eine Gerade ausgleichen, welche zufällig durch den Koordinatenursprung geht. Der Grund für diesen systematischen Fehlerverlauf ist in einer von der zunehmenden Tagestemperatur herrührenden Verlängerung des Meßbandes zu suchen. Durch die ausgleichende Gerade wird, wie es in

Tabelle 2.

Nr.	l	ε'	ε	$\varepsilon \varepsilon$	$ \varepsilon $
	m	cm	cm	qcm	cm
1	507,35	+ 6,0	+ 6,0	36,0	0,0
2	38	+ 3,0	+ 2,6	6,8	0,4
3	35	+ 6,0	+ 5,4	29,2	0,6
4	44	- 3,0	- 3,6	13,0	1,0
5	31	+ 10,0	+ 7,3	53,3	1,1
6	40	+ 1,0	0,0	0,0	1,6
7	47	- 6,0	- 7,4	54,8	2,0
8	47	- 6,0	- 7,5	56,2	2,5
9	43	- 2,0	- 3,6	13,0	2,6
10	37	+ 4,0	+ 2,0	4,0	3,4
11	39	+ 2,0	- 0,4	0,2	3,6
12	39	+ 2,0	- 0,6	0,4	3,6
13	40	+ 1,0	- 1,6	2,6	4,5
14	37	+ 4,0	+ 1,1	1,2	4,9
15	48	- 7,0	- 10,2	104,0	5,4
16	41	0,0	- 3,4	11,6	6,0
17	40	+ 1,0	- 2,5	6,2	7,3
18	33	+ 8,0	+ 4,5	20,2	7,4
19	36	+ 5,0	+ 1,0	1,0	7,5
20	32	+ 9,0	+ 4,9	24,0	10,2
[+]		+ 62,0	+ 34,8		
[-]		- 24,0	- 40,8		
[±]		+ 38,0	- 6,0	437,7	75,6

Abb. 2 für die 18. Beobachtung angedeutet ist, jede Fehlerordinate ε' in einen systematischen Fehleranteil σ und den übrig bleibenden rein zufälligen Beobachtungsfehler ε zerlegt. Die der Abbildung entnommenen ε stehen in Spalte 4 der Tabelle. Ihr arithmetisches Mittel ist $- 6,0 \text{ cm} : 20 = - 0,3 \text{ cm}$,

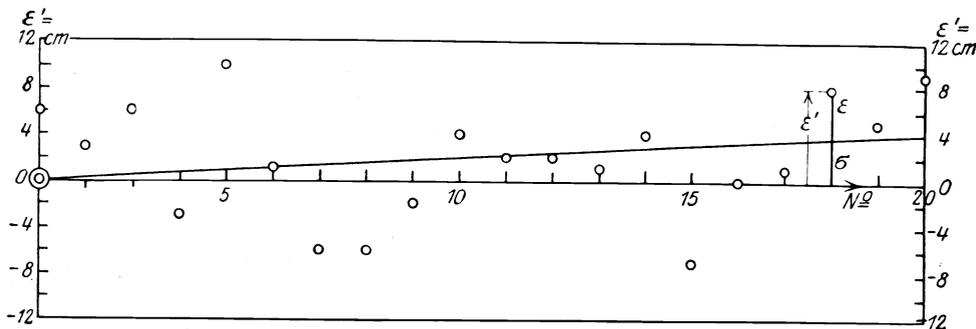


Abb. 2. Verlauf einer Fehlerreihe.

ein im Vergleich zu den Fehlern selbst verschwindend kleiner Wert¹⁾. Auch die Vorzeichenverteilung ist befriedigend. Es sind 9 positive und 10 negative Vorzeichen, während ein Fehler Null ist. Auch die Zahl der 10 Vorzeichenfolgen unterscheidet sich nur wenig von der Anzahl der 8 Vorzeichenwechsel. Nachdem die bisherige Prüfung der Fehlerreihe befriedigt, gehen wir an die Berechnung des mittleren Fehlers. Die hierzu notwendigen Quadrate $\varepsilon \varepsilon$ ent-

¹⁾ Er könnte durch eine geringe Parallelverschiebung — streng genommen durch eine Drehung und Parallelverschiebung — der ausgleichenden Geraden vollständig zum Verschwinden gebracht werden.

hält Spalte 5 der Tab. 2, ihre Summe ist 437,7 qcm. Es wird also nach (7) der mittlere Fehler der einzelnen Messung der ganzen Länge

$$m = \pm \sqrt{\frac{437,7}{20}} = \pm 4,7 \text{ cm.}$$

Der durchschnittliche Fehler ergibt sich aus den Beobachtungen mittels (8) zu $\pm 3,8$ cm. Aus den in der letzten Spalte von Tab. 2 stehenden, ihrer absoluten Größe nach geordneten Fehlerwerten folgt, daß der wahrscheinliche Fehler zwischen 3,4 und 3,6 liegt. Wir setzen ihn gleich dem Mittel dieser

Tabelle 3.

Fehlermaße	
aus der Beobachtung	nach der Theorie
$m = \pm 4,7$	
$d = \pm 3,8$	$d = \pm 3,8$
$w = \pm 3,5$	$w = \pm 3,1$

Zahlen, also $w = \pm 3,5$ cm. Mit Hilfe von (15) kann man bei bekanntem m die Werte d und w auch auf theoretischem Wege finden. Sie sind $d = \frac{4}{5} m = \pm 3,8$ cm und $w = \frac{2}{3} m = \pm 3,1$ cm. Die Zusammenstellung dieser Ergebnisse in Tab. 3 zeigt, daß die von der Theorie geforderte Beziehung zwischen den Fehlermaßen beim durchschnittlichen Fehler genau, beim wahrscheinlichen Fehler etwas weniger gut erfüllt ist.

Tabelle 4.

i	r	$i m$	$r m$	Häufigkeitszahl $H_{im}^{r m}$ aus	
				der Beobachtung	der Theorie
0	0,5	0	2,35	7	7,7
0,5	1,0	2,35	4,7	6	6,0
1,0	1,5	4,7	7,05	3	3,7
1,5	2,0	7,05	9,4	3	1,8
2,0	∞	9,4	∞	1	0,9

Zur Beurteilung der Fehlerverteilung sind mit Hilfe der Beziehung (18) die Häufigkeitszahlen berechnet und in Tab. 4 zusammengestellt worden. Sie stimmen mit den durch unmittelbares Abzählen aus den Beobachtungen gewonnenen Zahlen recht gut überein.

Der Maximalfehler endlich ist $M = 3 \cdot 4,7 = \pm 14,1$ cm und wird, wie ein Blick auf die letzte Spalte von Tab. 2 zeigt, von keinem der Einzelfehler erreicht. Alles in allem läßt sich feststellen, daß die untersuchte Fehlerreihe dem Gaußschen Fehlergesetz recht gut entspricht.

Über die Länge des Meßbandes gibt uns am einfachsten die ausgleichende Gerade in Abb. 2 Aufschluß. Da diese durch den Koordinatenursprung geht, so ist zu Beginn der Messung kein systematischer Fehler vorhanden gewesen; das Meßband besaß in diesem Zeitpunkt die Soll-Länge 20 m \pm 0,00 mm. Am Schluß der Messung wird infolge des systematischen Fehlers die Länge von 507,410 m um 4,2 cm zu klein, also muß das Meßwerkzeug um den ver-

hältnismäßigen Betrag $(20 : 507,410) \cdot 4,2 \text{ cm} = 1,65 \text{ mm}$ zu groß sein. Es war also die Meßbandlänge am Ende der Messung $20 \text{ m} + 1,65 \text{ mm}$. Ist der Ausdehnungskoeffizient des Meßbandes $1,1 \cdot 10^{-5}$ (1,1 mm auf 10 m u. 10^0), so folgt aus der errechneten Längenzunahme des Bandes von 1,65 mm eine Temperaturzunahme von $7,5^{\circ}$ während der Messung, was durchaus im Bereiche der Möglichkeit liegt.

Unter dem Gewicht p einer Beobachtung versteht man den reziproken Wert ihres mittleren Fehlerquadrates, also

$$p = \frac{1}{m^2} \dots \dots \dots (20)$$

oder auch
$$p = 2 h^2 \dots \dots \dots (21)$$

mit Rücksicht auf die Beziehung (13). Für rechnerische Zwecke faßt man den Begriff des Gewichtes etwas weiter auf und setzt $p = C : m^2$, wobei C eine für die betreffende Berechnung unveränderliche Größe bedeutet, welche so gewählt wird, daß die Rechnung mit handlichen Zahlen geführt werden kann.

Besitzen die ungleich genauen Beobachtungen $l_1, \dots, l_i, \dots, l_n$ die mittleren Fehler $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ und die Gewichte $p_1, \dots, p_i, \dots, p_n$, so besteht die fortlaufende Verhältnisgleichung

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \dots : \frac{1}{m_n^2} \dots \dots \dots (22)$$

Ferner ist allgemein

$$p_i \cdot m_i^2 = C \dots \dots \dots (23)$$

Der mittlere Fehler m_0 der Gewichtseinheit ist derjenige mittlere Fehler, welcher zum Gewicht $p_0 = 1$ gehört. Setzen wir das Wertepaar p_0, m_0 in (23) ein, so zeigt sich, daß $C = m_0^2$ ist. Hieraus folgen die viel gebrauchten Beziehungen

$$m_0 = m_i \sqrt{p_i} \text{ bzw. } m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} \dots \dots \dots (24)$$

Bei einer Fehlerberechnung aus ungleichgewichtigen Beobachtungen sind die wahren Beobachtungsfehler ε erst auf gleiches Maß der Genauigkeit, d. h. auf gleiches Gewicht zu bringen, damit man sie als zur selben, gleich sorgfältig ausgeführten Beobachtungsreihe gehörige Fehler betrachten kann. Diese Reduktion erfolgt nach dem Vorgange von (24). Es sind also die Ausdrücke

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 \sqrt{p_1}, \dots \quad \varepsilon_i' = \varepsilon_i \sqrt{p_i}, \dots \quad \varepsilon_n' = \varepsilon_n \sqrt{p_n} \dots \dots (25)$$

die auf gleiches Maß der Genauigkeit, und zwar auf das Gewicht 1 gebrachten wahren Beobachtungsfehler, welche für alle weiteren Untersuchungen an Stelle der ε treten. Nach dieser Überlegung folgt aus (7) der Ausdruck

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon' \varepsilon']}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[p \varepsilon \varepsilon']}{n}} \dots \dots \dots (26)$$

für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit.

3. Fehlerfortpflanzung.

Durch die Beobachtungsfehler werden auch alle aus den Beobachtungen abgeleiteten Größen gefälscht. Ist

$$x = f(l_1, l_2, \dots, l_n) \dots \dots \dots (27)$$

eine Funktion der Beobachtungen l_1, l_2, \dots, l_n und erfahren diese die bestimmten

Änderungen dl_1, dl_2, \dots, dl_n , so ist die Funktionsänderung dx das totale Differential

$$dx = \frac{\partial f}{\partial l_1} \cdot dl_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \cdot dl_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial l_n} \cdot dl_n \quad \dots \quad (28)$$

der Funktion. Verstehen wir unter den dl die wahren Beobachtungsfehler ε und setzen wir zur Abkürzung $\frac{\partial f}{\partial l_i} = q_i$, so folgt aus (28) nunmehr ein bestimmter Funktionsfehler

$$\xi = q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2 + \dots + q_n \varepsilon_n = [q \varepsilon] \quad \dots \quad (29)$$

Denken wir uns die Reihe der Beobachtungen etwa ν -mal wiederholt, so ergeben sich auch ν verschiedene bestimmte Funktionsfehler $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$, aus denen sich nach dem Begriff des mittleren Fehlers für das mittlere Fehlerquadrat der Funktion x der Ausdruck

$$m_x^2 = \frac{1}{\nu} \sum_1^\nu [q \varepsilon]^2 \quad \dots \quad (30)$$

ergibt. Wenn man diesen Ausdruck unter Einführung aller möglichen Vorzeichenverbindungen der ε entwickelt, so fallen alle Glieder mit $\varepsilon_i \varepsilon_k$ hinaus und es bleibt

$$m_x^2 = q_1^2 \frac{[\varepsilon_1 \varepsilon_1]}{\nu} + q_2^2 \frac{[\varepsilon_2 \varepsilon_2]}{\nu} + \dots + q_n^2 \frac{[\varepsilon_n \varepsilon_n]}{\nu} \quad \dots \quad (31)$$

Die hierin enthaltenen Quotienten sind aber die zu den Beobachtungswerten l_1, l_2, \dots, l_n gehörigen mittleren Fehlerquadrate $m_1^2, m_2^2, \dots, m_n^2$, so daß aus (31) nunmehr die Beziehung

$$m_x = \pm \sqrt{[q^2 m^2]} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 m_n^2} \quad (32)$$

folgt, welche das sog. mittlere Fehlergesetz enthält. Machen wir von dem Zusammenhange $m_i = m_0 \cdot \sqrt{p_i}$ Gebrauch, so erscheint (32) in der häufig benutzten Form

$$m_x = m_0 \sqrt{\left[\frac{q q}{p}\right]}, \quad \dots \quad (33)$$

deren unter der Wurzel stehender Ausdruck $\left[\frac{q q}{p}\right]$ als Gewichtskoeffizient der Funktion x bezeichnet wird. Bei sinngemäßer Anwendung des Gewichtsbegriffes auf die Funktion x ist nach (24)

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{p_x}}, \quad \dots \quad (34)$$

wenn p_x das Funktionsgewicht bedeutet. Ein Vergleich der zwei letzten Gleichungen zeigt, daß der Gewichtskoeffizient das reziproke Funktionsgewicht ist.

Liegen gleich genaue Beobachtungen mit demselben mittleren Fehler m_0 vor, so wird

$$m_x = m_0 \sqrt{[q q]} \quad \dots \quad (35)$$

Besonders wichtig ist der Fall einer Summe

$$x = l_1 + l_2 + \dots + l_n \quad \dots \quad (36)$$

von gleich genauen Beobachtungen. Da hier sämtliche Differentialquotienten $q=1$ sind, so wird $[q q]=n$ und

$$m_x = \pm m_0 \sqrt{n}, \quad \dots \quad (37)$$

woraus der wichtige Satz folgt, daß die mittlere Unsicherheit einer Summe von gleich genauen Beobachtungen mit der Wurzel aus der Zahl der Beobachtungen fortschreitet. Dieses Ergebnis bleibt auch bestehen, wenn die Summe negative Glieder enthält.

Ein praktisch wichtiges Beispiel mag diese Ausführungen beschließen. Zur Bestimmung der unzugänglichen Entfernung BC (siehe Abb. 3) wurden in dem Dreiecke ABC die notwendigen Bestimmungsstücke c , α und β gemessen, denen die mittleren Fehler m_c , m_α und m_β zukommen. Wie groß ist der mittlere Fehler m_a der gesuchten Entfernung $BC = a$ zu befürchten?

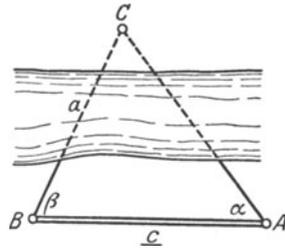


Abb. 3. Längenfehler einer Dreiecksseite.

Nach dem Sinussatz ist

$$a = c \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \dots \dots \dots (38)$$

in welchem Ausdruck c , α und β als die fehlerhaften Beobachtungen aufzufassen sind. Um auf die Differentialquotienten der Funktion nach den verschiedenen Veränderlichen zu kommen, wollen wir die Funktion, da sie Produktenbau besitzt, erst logarithmieren und dann differenzieren. Es ist

$$\log a = \log c + \log \sin \alpha - \log \sin(\alpha + \beta)$$

und

$$\begin{aligned} da &= a \left\{ \frac{dc}{c} + \operatorname{ctg} \alpha \cdot d\alpha - \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \cdot d(\alpha + \beta) \right\}, \\ &= a \left\{ \frac{dc}{c} + (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) d\alpha + \operatorname{ctg} \gamma \cdot d\beta \right\}. \dots \dots (39) \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung ist $-\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$ durch $\operatorname{ctg} \gamma$ ersetzt, da man γ als die Ergänzung der Summe $\alpha + \beta$ der beiden gemessenen Winkel auf 180° leicht ermitteln kann. Aus (39) gewinnen wir in einfachster Weise die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = a(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma), \quad \frac{\partial a}{\partial \beta} = a \operatorname{ctg} \gamma, \quad \dots (40)$$

deren Einführung in (32) auf den gesuchten mittleren Fehler

$$m_a = \pm a \sqrt{\left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \{(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) m_\alpha\}^2 + (\operatorname{ctg} \gamma \cdot m_\beta)^2} \dots (41)$$

der unzugänglichen Entfernung in allgemeiner Form führt. Die in diesem Ausdruck enthaltenen Winkelfehler m_α und m_β sind im Bogenmaß zu verstehen.

4. Das einfache arithmetische Mittel.

Der wahrscheinlichste Wert einer Anzahl gleich genauer, direkter Beobachtungen l_1, l_2, \dots, l_n der gesuchten Größe ist das einfache arithmetische Mittel aus den Beobachtungen:

$$x = \frac{[l]}{n} \dots \dots \dots (42)$$

Für die praktische Rechnung ist es meist zweckmäßig, die Beobachtungen in der Form $l_i = l_0 + \Delta l_i$ zu verwenden, wo l_0 irgend einen runden Näherungs-

wert der Beobachtungen und Δl_i den Überschuß der Beobachtung l_i über l_0 bedeutet. Wie eine sehr einfache Rechnung zeigt, wird dann

$$x = l_0 + \frac{[\Delta l]}{n} \dots \dots \dots (43)$$

Man hat bei diesem naheliegenden Verfahren den großen Vorteil, die Mittelbildung mit den kleinen Beträgen Δl vornehmen zu können.

Ein Vergleich der einzelnen Beobachtungen mit x führt nicht auf die wahren sondern auf die wahrscheinlichsten (scheinbaren) Beobachtungsfehler

$$v_i = x - l_i, \dots \dots \dots (44)$$

deren Summe stets Null sein muß, wie auch die Beobachtungen beschaffen sind. Die Beziehung

$$[v] = 0, \dots \dots \dots (45)$$

welche leicht aus (42) und (44) herzuleiten ist, besitzt also lediglich den Charakter einer Rechenprobe. Um den mittleren Fehler m_x des einfachen arithmetischen Mittels aus dem mittleren Fehler m_0 einer Einzelbeobachtung zu finden, denken wir uns (42) in der Form $x = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \dots + \frac{l_n}{n}$ angeschrieben, woraus sich die Differentialquotienten $q_1 = q_2 = \dots = q_n = \frac{1}{n}$ ergeben. Damit wird der Gewichtskoeffizient $[q q] = n(1:n)^2 = 1:n$ und hiermit finden wir aus (35)

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{n}} \dots \dots \dots (46)$$

als den mittleren Fehler des einfachen arithmetischen Mittels. Da er zur Wurzel aus der Wiederholungszahl umgekehrt proportional ist, so läßt sich die Genauigkeit des Mittels durch eine Vergrößerung der Wiederholungszahl, besonders solange n noch klein ist, steigern.

Wie ergibt sich nun, da wir die wahren Beobachtungsfehler ε im allgemeinen doch nicht kennen, der mittlere Beobachtungsfehler m_0 aus den scheinbaren Beobachtungsfehlern v ? Aus den beiden Gleichungen $\varepsilon_i = X - l_i$, $v_i = x - l_i$ folgen die Ausdrücke

$$\varepsilon_i = (X - x) + v_i \dots \dots \dots (47)$$

und

$$\varepsilon_i \varepsilon_i = (X - x)^2 + 2 v_i (X - x) + v_i v_i \dots \dots \dots (48)$$

Also wird

$$[\varepsilon \varepsilon] = n(X - x)^2 + 2 [v] (X - x) + [v v] \dots \dots \dots (49)$$

oder mit Rücksicht auf (45)

$$[\varepsilon \varepsilon] = n(X - x)^2 + [v v] \dots \dots \dots (50)$$

Dieser noch strenge Ausdruck enthält in der Differenz $(X - x)$ den wahren Fehler des arithmetischen Mittels, der immer unbekannt bleiben wird. Da es sich um eine im Vergleich zu den Beobachtungsfehlern kleine Größe handelt, welche in (50) keinen großen Einfluß ausüben kann, so ersetzen wir $X - x$ durch den mittleren Fehler m_x des arithmetischen Mittels, welcher mit dessen wahren Fehler dieselbe Größenordnung besitzt. Damit wird näherungsweise $[\varepsilon \varepsilon] = n \cdot m_x^2 + [v v]$. Nun ist nach der Definition des mittleren Fehlers $[\varepsilon \varepsilon] = n \cdot m_0^2$ und nach (46) wird $n \cdot m_x^2 = m_0^2$, so daß

$$n \cdot m_0^2 = m_0^2 + [v v] \dots \dots \dots (51)$$

oder

$$(n - 1) m_0^2 = [v v] \dots \dots \dots (52)$$

wird. Daraus aber erhalten wir unmittelbar

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \dots \dots \dots (53)$$

als Näherungsausdruck für den mittleren Fehler der einzelnen Beobachtung.

Durch die Entwicklung $[vv] = [v(x-l)] = x[v] - [lv] = 0 - [lv]$ ergibt sich für die Fehlerquadratsumme die Rechenprobe

$$[vv] = -[lv] \dots \dots \dots (54)$$

oder bequemer

$$[vv] = -[\Delta l \cdot v], \dots \dots \dots (55)$$

wenn wieder wie früher die Δl die Überschüsse der Beobachtungen l über irgend einen Wert l_0 bedeuten.

5. Das allgemeine arithmetische Mittel.

Besitzen die direkten Beobachtungen l_1, l_2, \dots, l_n einer gesuchten Größe die Gewichte p_1, p_2, \dots, p_n , so kann der wahrscheinlichste Wert x nur durch eine unter Berücksichtigung der Gewichte durchgeführte Mittelbildung gefunden werden.

Bedeutet m_0 und m_i wieder die mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 und der Beobachtung l_i , so ist nach (24)

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} \dots \dots \dots (56)$$

Ein Vergleich dieser Beziehung mit (46) zeigt, daß sich jedes l_i als einfaches arithmetisches Mittel aus p_i gleich genauen Beobachtungen $\lambda^{(i)}$, deren jede denselben mittleren Fehler m_0 besitzt, auffassen läßt. Aus diesen gleich genauen, fingierten Elementarbeobachtungen λ , deren Gesamtzahl $p_1 + p_2 + \dots + p_n = [p]$ ist, läßt sich nunmehr der wahrscheinlichste Wert x als einfaches arithmetisches Mittel x berechnen, nämlich

$$x = \frac{(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} + \lambda_3^{(1)} + \dots + \lambda_{p_1}^{(1)}) + \dots + (\lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)} + \dots + \lambda_{p_n}^{(n)})}{[p]} \dots (57)$$

Durch Multiplikation der einzelnen Zählerausdrücke mit den zugehörigen Quotienten $\frac{p_i}{p_i}$ erhält man

$$x = \frac{p_1 \frac{\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} + \lambda_3^{(1)} + \dots + \lambda_{p_1}^{(1)}}{p_1} + \dots + p_n \frac{\lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)} + \dots + \lambda_{p_n}^{(n)}}{p_n}}{[p]} \dots (58)$$

Die im Zähler stehenden Quotienten sind nun die verschiedenen gewichtigen, wirklich ausgeführten Beobachtungen l_1, \dots, l_n , so daß sich als wahrscheinlichster Wert der direkt beobachteten Größe schließlich der Ausdruck

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]} \dots \dots \dots (59)$$

ergibt, welchen man als das allgemeine arithmetische Mittel der Beobachtungen bezeichnet. Auch hier gestaltet sich die Rechnung wesentlich einfacher, wenn man nach Absonderung eines Näherungswertes l_0 die Mittelbildung wieder auf die Beobachtungsreste Δl beschränkt, den wahrscheinlichsten Wert x also nach der Formel

$$x = l_0 + \frac{[p \cdot \Delta l]}{[p]} \dots \dots \dots (60)$$

ermittelt. Der für das einfache arithmetische Mittel gültigen Kontrolle $[v] = 0$ entspricht hier die einfache Rechenprobe

$$[pv] = 0, \dots \dots \dots (61)$$

von deren Richtigkeit man sich durch Einsetzen der $v = x - l$ und weitere Entwicklung des Ausdrucks leicht überzeugen kann. Auch der mittlere Fehler m_x des allgemeinen arithmetischen Mittels läßt sich bei bekanntem m_0 leicht angeben. Dieses Mittel kann, wie wir gesehen haben, als einfaches arithmetisches Mittel aus insgesamt $[p]$ fingierten Beobachtungen λ mit dem gleichen mittleren Fehler m_0 aufgefaßt werden. Also ergibt die sinn-gemäße Anwendung von (46)

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} \dots \dots \dots (62)$$

Ein Vergleich dieses Ausdrucks mit (24) zeigt, daß $[p]$ das Gewicht des allgemeinen arithmetischen Mittels ist. Der mittlere Fehler m_0 der Gewichtseinheit läßt sich unter Benutzung von (61) und (62) auf ganz ähnlichem Wege finden wie beim einfachen arithmetischen Mittel. Es ist

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{n - 1}}, \dots \dots \dots (63)$$

Eine Rechenprobe für die richtige Ermittlung der hierin enthaltenen Fehlerquadratsumme bietet die Beziehung

$$[p v v] = - [p l v] = - [p \cdot \Delta l \cdot v]. \dots \dots \dots (64)$$

Tabelle 5.

Nr.	α'			v	vv	Nr.	α''			v	vv
	o	'	"	"	(") ²		o	'	"	"	(") ²
1	10	11	56	-1,0	1,0	1	10	11	56	0,0	0,0
2			52	+3,0	9,0	2			55	+1,0	1,0
3			55	0,0	0,0	3			61	-5,0	25,0
4			57	-2,0	4,0	4			53	+3,0	9,0
5			54	+1,0	1,0	5			58	-2,0	4,0
6			56	-1,0	1,0	6			56	0,0	0,0
7			55	0,0	0,0	7			54	+2,0	4,0
[+]				+4,0		8			55	+1,0	1,0
[-]				-4,0		9			58	-2,0	4,0
[±]				0,0	+16,0	10			56	0,0	0,0
						11			54	+2,0	4,0
						[+]				+9,0	
						[-]				-9,0	
						[±]				0,0	+52,0

$x_1 = 10^{\circ} 11' 55,0''$;
 $m_1 = \pm 1,6''$; $m_{x_1} = \pm 0,6''$

$x_2 = 10^{\circ} 11' 56,0''$;
 $m_2 = \pm 2,3''$; $m_{x_2} = \pm 0,7''$

Als Erläuterung der Berechnung des einfachen und des allgemeinen arithmetischen Mittels mag das folgende einfache Beispiel dienen. Zur Bestimmung des Winkels α wurden bei einer ersten Beobachtungsreihe die in Tabelle 5 enthaltenen Werte α' gefunden, aus denen der wahrscheinlichste Wert $x_1 = 10^{\circ} 11' 55,0'' \pm 0,6''$ hervorgeht, während der mittlere Fehler jeder der gleich genauen sieben Einzelbeobachtungen $m_1 = \pm 1,6''$ ist. Eine spätere Messung des gleichen Winkels mit einem anderen Instrument lieferte die in

der zweiten Hälfte von Tabelle 5 stehenden gleich genauen 11 Einzelwerte α'' , deren einfaches arithmetisches Mittel auf den wahrscheinlichsten Wert $x_2 = 10^0 11' 56,0'' \pm 0,7''$ führt. Der mittlere Fehler der einfachen Beobachtung ist hier $m_2 = \pm 2,3''$. Aus den beiden Werten x_1 und x_2 , deren Unterschied die Summe ihrer mittleren Fehler nicht erreicht, soll durch Bildung des allgemeinen arithmetischen Mittels der wahrscheinlichste Wert α des Winkels und sein mittlerer Fehler m_α abgeleitet werden. Wären beide Beobachtungsreihen mit demselben Instrument und vom gleichen Beobachter unter denselben Verhältnissen durchgeführt worden, so könnte man nach der im Anschluß an (56) erfolgten Deutung der Gewichte die Gewichte p_1 und p_2 der Größen x_1 und x_2 den zugehörigen Wiederholungszahlen 7 und 11 gleichsetzen. Da diese Voraussetzung nicht zutrifft und es sich auch nach dem Zeugnis der stark voneinander abweichenden mittleren Beobachtungsfehler m_1 und m_2 um verschiedenwertige Beobachtungsreihen handelt, müssen wir zur Gewichtsermittlung auf die mittleren Fehler von x_1 und x_2 zurückgreifen, indem wir $p_1 = C : m_{x_1}^2$ und $p_2 = C : m_{x_2}^2$ setzen. Nehmen wir die Konstante $C = 1$, so ergeben sich die in Spalte 5 der Tabelle 6 stehenden Gewichtszahlen und mit diesen findet man aus den über $x_0 = 10^0 11' 50''$ überschießenden Resten Δx das allgemeine Mittel $\alpha = 10^0 11' 50'' + (26,0'' : 4,8) = 10^0 11' 55,4''$. Die anschließende Fehlerberechnung führt auf die Fehlerquadratsumme $[p v v] = 1,17$, woraus sich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit nach (63) zu $m_0 = \pm 1,1''$ und nach (62) der mittlere Fehler m_α zu $1,1'' : \sqrt{4,8} = \pm 0,5''$ ergibt. Also ist der wahrscheinlichste Wert des gesuchten Winkels und sein mittlerer Fehler $\alpha = 10^0 11' 55,4'' \pm 0,5''$.

Tabelle 6.

Nr.	x	m_x	m_x^2	p	$p \cdot \Delta x$	v	$p v$	$p v v$
1	$10^0 11' 55,0''$	0,6	0,36	2,8	+ 14,0	+ 0,4''	+ 1,12	0,45
2	56,0	0,7	0,49	2,0	+ 12,0	- 0,6	- 1,20	0,72
[]				4,8	+ 26,0		- 0,08	1,17

6. Beobachtungsdifferenzen.

Häufig finden bei der direkten Beobachtung einer Größe Doppelbeobachtungen statt, wobei sich an Stelle eines einzelnen l_i je ein Wertepaar l_i', l_i'' ergibt. Die Unterschiede

$$d_i = l_i'' - l_i' \dots \dots \dots (65)$$

der beiden gleich genauen Elemente jeder Doppelbeobachtung werden als Beobachtungsdifferenzen bezeichnet. Sie besitzen, da der Sollbetrag Null einer jeden Differenz von vornherein feststeht, den Charakter von wahren Beobachtungsfehlern; deshalb kann die zu Elementen vom Gewicht 1 gehörige mittlere Beobachtungsdifferenz d_0 aus den Einzelwerten d_i ebenso gefunden werden, wie früher der mittlere Fehler m_0 aus den ε . Für den allgemeinen Fall, daß in den n Doppelbeobachtungen die Elemente paarweise die verschiedenen Gewichten $p_1, \dots, p_i, \dots, p_n$ besitzen, wird daher nach (26)

$$d_0 = \sqrt{\frac{[p d d]}{n}} \dots \dots \dots (66)$$

gewicht 1 soll nunmehr der mittlere Fehler m_0 einer Einzelbeobachtung l vom Gewicht 1 hergeleitet werden. Ist

$$x = l_0'' - l_0' \dots \dots \dots (67)$$

eine Differenz von solchen Beobachtungen, so führt das mittlere Fehlergesetz auf die Beziehung

$$d_0^2 = m_0^2 + m_0^2 = 2m_0^2 \dots \dots \dots (68)$$

oder

$$m_0 = \frac{d_0}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}} \dots \dots \dots (69)$$

Aus diesem mittleren Fehler der Gewichtseinheit der Einzelbeobachtung findet man leicht den mittleren Fehler μ_0 der Doppelbeobachtung

$$x_0 = \frac{1}{2}(l_0' + l_0''), \dots \dots \dots (70)$$

diese als arithmetisches Mittel zweier zusammengehöriger Einzelbeobachtungen vom Gewichte 1 aufgefaßt. Es ist nach dem mittleren Fehlergesetz

$$\mu_0 = \frac{m_0}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pdd]}{n}} \dots \dots \dots (71)$$

Noch ein Wort über die Gewichtsverhältnisse! Sind p_{d_0} , p_0 , p_{x_0} die Gewichte der Beobachtungsdifferenz d_0 , der Einzelbeobachtung l_0' bzw. l_0'' und der Doppelbeobachtung x_0 , so besteht nach dem Gewichtsbezug und den Gleichungen (69), (70) die Verhältnisgleichung

$$p_{d_0} : p_0 : p_{x_0} = \frac{1}{d_0^2} : \frac{1}{m_0^2} : \frac{1}{\mu_0^2} = \frac{1}{2m_0^2} : \frac{1}{m_0^2} : \frac{2}{m_0^2} = \frac{1}{2} : 1 : 2;$$

also ist
$$p_{d_0} = \frac{1}{2} p_0 = \frac{1}{2} \text{ und } p_{x_0} = 2 p_0 = 2. \dots \dots \dots (72)$$

Diese Erkenntnis läßt sich natürlich auch auf die in Wirklichkeit ausgeführten Beobachtungen l_i' , l_i'' vom Gewicht p_i , ihr Mittel x_i mit dem Gewicht p_{x_i} und die zugehörige Beobachtungsdifferenz d_i vom Gewichte p_{d_i} übertragen, so daß

$$p_{d_i} = \frac{1}{2} p_i, \quad p_{x_i} = 2 p_i \dots \dots \dots (73)$$

die allgemeineren Beziehungen für den Zusammenhang der hier auftretenden Gewichte sind.

7. Ausgleichung von Beobachtungen, deren Summe ein Festwert ist.

Häufig tritt die Aufgabe heran, aus direkten Beobachtungen l_1, \dots, l_n mit den Gewichten p_1, \dots, p_n die wahrscheinlichsten Werte x_1, \dots, x_n der gesuchten Größen abzuleiten, wenn deren Summe einen bestimmten Wert S ergeben muß. Die unveränderten Beobachtungen genügen dieser Bedingung noch nicht, weisen vielmehr einen Widerspruch

$$S - \sum_1^n [l_i] = w \dots \dots \dots (74)$$

auf. Zur Bestimmung von x_i dient außer der unmittelbaren Beobachtung l_i mit dem Gewicht p_i und dem mittleren Fehler $m_i = m_0 \sqrt{p_i}$ auch noch die

Ergänzung der Summe der übrigen Beobachtungen auf den Sollbetrag S , also der Ausdruck

$$y_i = S - \left[\begin{matrix} n \\ l_i \end{matrix} \right] + l_i = l_i + w \quad \dots \quad (75)$$

mit dem mittleren Fehlerquadrat

$$m_{y_i}^2 = m_0^2 \left(\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_{i-1}} + \frac{1}{p_{i+1}} + \dots + \frac{1}{p_n} \right) = m_0^2 \left(\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] - \frac{1}{p_i} \right) \quad (76)$$

und dem Gewicht

$$p_{y_i} = \frac{1}{\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] - \frac{1}{p_i}} \quad \dots \quad (77)$$

Aus l_i und y_i erhält man nun den wahrscheinlichsten Wert x_i als das allgemeine arithmetische Mittel

$$x_i = \frac{p_i l_i + p_{y_i} y_i}{p_i + p_{y_i}} = \frac{p_i l_i + \frac{l_i + w}{\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] - \frac{1}{p_i}}}{p_i + \frac{1}{\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] - \frac{1}{p_i}}} = l_i + \frac{w}{p_i \left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]} \quad \dots \quad (78)$$

Es ist also der Widerspruch w umgekehrt proportional den Gewichten auf die Beobachtungen zu verteilen.

Für die Fehlerberechnung¹⁾ gewinnt man aus den scheinbaren Beobachtungsfehlern $v_i' = x_i - l_i = \frac{1}{p_i} \frac{w}{\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]}$ und $v_i'' = x_i - y_i = \frac{1}{p} \frac{w}{\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]} - w$ mit den zuge-

hörigen Gewichten p_i und p_{y_i} die Fehlerquadratsumme $[p v v] = \frac{w^2}{\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]}$ und

hieraus den mittleren Fehler der Gewichtseinheit

$$m_0 = \pm \frac{w}{\sqrt{\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]}} \quad \dots \quad (79)$$

Da die Summe der Gewichte von l_i und y_i den Betrag $p_i + p_{y_i} = p_i \cdot \left(1 - \frac{1}{p_i \left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]} \right)$ besitzt, so folgt für den mittleren Fehler des errechneten Mittels x_i nach (62) der Ausdruck

$$m_{x_i} = \pm \frac{w}{\sqrt{\left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]}} \sqrt{\frac{1}{p_i} \left(1 - \frac{1}{p_i \left[\begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right]} \right)} \quad \dots \quad (80)$$

Für den besonderen Fall, daß es sich um lauter gleich genaue Beobachtungen vom selben Gewicht $p = 1$ handelt, trifft auf jede der n Beobachtungen

¹⁾ Eine große Zuverlässigkeit besitzt diese Art der Fehlerermittlung — wie auch die ganze Ausgleichung — nicht, da sie sich nur auf den einen Widerspruch w stützt.

dieselbe Verbesserung $w:n$; der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung und derjenige jedes wahrscheinlichsten Wertes x sind

$$m_0 = \frac{w}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad m_x = \frac{w}{n} \sqrt{n-1} = m_0 \sqrt{\frac{n-1}{n}} \dots \quad (80a)$$

8. Allgemeines Ausgleichsprinzip.

Wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gezeigt wird, ist die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen mehrerer sich nicht ausschließender Ereignisse gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse. Nach diesem Satze ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmtes Fehlersystem $\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, \dots, \epsilon_n$ eintritt oder genauer gesagt, daß je ein Element der Fehlerreihe zwischen den Grenzen ϵ_1 und $\epsilon_1 + d\epsilon, \dots, \epsilon_i$ und $\epsilon_i + d\epsilon, \dots, \epsilon_n$ und $\epsilon_n + d\epsilon$ liegt, das Produkt

$$W(\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, \dots, \epsilon_n) = \varphi(\epsilon_1) d\epsilon \cdot \varphi(\epsilon_2) d\epsilon \cdot \varphi(\epsilon_3) d\epsilon \dots \varphi(\epsilon_n) d\epsilon$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$W(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = \frac{h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_n}{\sqrt{\pi^n}} (d\epsilon)^n e^{-(h_1^2 \epsilon_1^2 + h_2^2 \epsilon_2^2 + \dots + h_n^2 \epsilon_n^2)} \dots \quad (81)$$

In diesem Ausdruck sind, sofern sich an der Genauigkeit der Beobachtungen, also auch an den h nichts ändert, lediglich die im Exponenten stehenden ϵ^2 veränderlich, während der Faktor der Potenz als ein Festwert C betrachtet werden kann. Unter Beachtung von (21) erhält also (81) die Form

$$W(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = C e^{-1/2 [p \epsilon \epsilon]} \dots \dots \dots \quad (81a)$$

Unter den unendlich vielen möglichen Fehlersystemen $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ ist eines das wahrscheinlichste, welches mit v_1, v_2, \dots, v_n bezeichnet werden soll. Man findet es leicht aus der Bedingung heraus, daß es den Ausdruck (81a) zu einem größten Werte machen muß, was dann zutrifft, wenn

$$[p v v] = \text{Min.} \dots \dots \dots \quad (82)$$

ist. Nach diesem Ergebnis muß man, um auf die wahrscheinlichsten Werte der Beobachtungen zu kommen, diese — natürlich unter Beachtung etwa vorhandener Nebenbedingungen — mit solchen Verbesserungen v versehen, daß die Summe der mit den zugehörigen Gewichten multiplizierten Quadrate dieser Verbesserungen ein kleinster Wert wird. Dieses Prinzip ist die mathematische Grundlage der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; es hat diesem Verfahren auch den Namen gegeben und auf ihm fußt die Lösung aller möglichen Formen von Ausgleichsaufgaben, welche auf die Gewinnung von wahrscheinlichsten Werten hinielen.

Der für die Genauigkeitsbeurteilung unentbehrliche mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 ist der Ausdruck

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{ü}}, \dots \dots \dots \quad (83)$$

wenn $ü$ die Zahl der überschüssigen Bestimmungsstücke bedeutet.

II. Elemente der Instrumentenkunde.¹⁾

9. Geodätische Maßeinheiten.

Unter der Messung einer Größe versteht man die Ermittlung ihres Verhältnisses zu einer anderen als Einheit (Benennung) dienenden Größe derselben Art. Durch dieses als Maßzahl bezeichnete Verhältnis im Zusammenhalt mit der Benennung ist die Größe bestimmt. In der niederen Geodäsie oder Vermessungskunde haben wir es hauptsächlich mit Längenmessungen, Flächenmessungen, Winkelmessungen und ihren Einheiten zu tun.

a) Längenmaße.

In den meisten Kulturstaaten ist heute das internationale Meter die gesetzliche Längeneinheit. Ursprünglich sollte das Meter ein sog. Naturmaß werden und nach einem Beschluß der französischen Nationalversammlung vom 30. III. 1791 der 10000000te Teil des durch Paris gehenden Erdmeridianquadranten sein. Zur Verkörperung mußte es durch die bisherige Maßeinheit, die Peru-Toise ausgedrückt werden. Der gewünschte Zusammenhang wurde aus einer von *Mechain* und *Delambre*²⁾ in der Zeit von 1792 bis 1798 auf dem Pariser Meridian zwischen Dünkirchen und Barcelona durchgeführten Breitengradmessung gefunden. Nach diesen Messungen war das Meter 443,296 Pariser Linien, deren die Toise 864 besaß. Zur Festhaltung der errechneten Meterlänge verfertigte *Lenoir* einen Platinendmaßstab mit den Querschnittsausmaßen 4 mm auf 25 mm, dessen Endflächenabstand bei 0° C. die Meterlänge darstellte. Sie wurde ebenso wie der sie verkörpernde Maßstab als das Archivmeter bezeichnet. Das Lenoirsche Urmaß hatte einige Nachteile, die sich mit der zunehmenden Verfeinerung der Messungen immer störender bemerkbar machten. Es zeigte infolge seines ungünstigen Querschnitts eine beträchtliche Durchbiegung, die Maßvergleiche nicht so genau durchzuführen wie bei einem Strichmaßstab und infolge einer unvermeidlichen Endenabnutzung schien auch die Meterlänge nicht genügend gesichert. Das in den siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts begründete internationale Maß- und Gewichts-bureau in Sévres hat daher aus einer sehr widerstandsfähigen Legierung von 90⁰/₁₀ Platin

¹⁾ Zur Entwicklung der Instrumentenkunde siehe *Repsold, J. A.*, Zur Geschichte der astronomischen Meßwerkzeuge von Purbach bis Reichenbach 1450—1830, Leipzig 1908. — Ein vorbildliches Werk über Instrumentenkunde sind *Voglers* Abbildungen geodätischer Instrumente (mit Text), Berlin 1892.

²⁾ Siehe *Delambre*, Base du système métrique decimal (3 Bände), Paris 1806, 1807, 1810.

und 10⁰/₀ Iridium ein neues Meterprototyp von der in Abb. 4 dargestellten Querschnittsform als Strichmaßstab hergestellt. Die Meterlänge ist hier durch den Abstand dargestellt, welchen bei der Temperatur des schmelzenden Eises die Mitten zweier in der neutralen Faserschicht *ab* befindlicher Endstriche besitzen. Die bei dieser äußerst widerstandsfähigen Querschnittsform noch möglichen geringen Durchbiegungen haben auf den in der neutralen Faserschicht gemessenen Strichabstand nur noch einen verschwindend kleinen Einfluß, der auch für die feinsten Messungen belanglos bleibt. Bei der gewählten Querschnittsform findet auch eine rasche Anpassung der Maßstabtemperatur an diejenige seiner Umgebung statt. Die im September 1889 in Paris zusammengetretene Generalkonferenz des internationalen Maß- und Gewichtskomitees hat das beschriebene Urmaß, dessen Länge innerhalb der Grenzen der Beobachtungsgenauigkeit genau mit derjenigen des Archivmeters übereinstimmte, als das internationale Meter angenommen. Aus dem Guß-

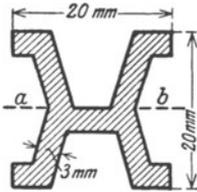


Abb. 4. Querschnitt des internationalen Meterstabs.

block des internationalen Meters wurde gleichzeitig mit diesem eine Anzahl von Kopien hergestellt, welche nach genauer Vergleichung mit dem internationalen Urmaß an die beteiligten Staaten als sog. nationale Prototype verlost wurden. Deutschland erhielt hierbei den Maßstab Nr. 18, dessen jeweilige Länge durch seine Gleichung

$$M_{18} = 1 \text{ m} - 1,0 \mu + (8,59 t + 1,70 t^2) \mu \pm 0,2 \mu \dots (84)$$

ausgedrückt wird. Hierin ist $-1,0 \mu$ ($1 \mu = 0,001 \text{ mm}$) die absolute Maßstabverbesserung, das zweite Glied gibt die Temperaturverbesserung, während das letzte Glied den mittleren Fehler der Maßstabgleichung bedeutet. Die Temperaturangaben t beziehen sich in (84) auf ein Quecksilberthermometer mit Celsiusgraden¹⁾.

Die in der Geodäsie gebräuchlichen Zusammensetzungen und Unterabteilungen des Meters sind folgende:

1 hm = 100 m (Hektometer), 1 km = 1000 m (Kilometer), 1 dm = 0,1 m (Dezimeter), 1 cm = 0,01 m (Zentimeter), 1 mm = 0,001 m (Millimeter), 1 dmm = 0,1 mm (Dezimillimeter), 1 cmm = 0,01 mm (Zentimillimeter), $1 \mu = 0,001 \text{ mm}$ (Mikron).

In manchen Fällen braucht man auch den Zusammenhang von älteren und von fremden Maßeinheiten mit dem Meter. Es bestehen folgende Beziehungen²⁾:

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ Toise} &= 6 \text{ Pariser Fuß} = 6 \cdot 12 \text{ Pariser Zoll} = 6 \cdot 12 \cdot 12 \\ & (= 864) \text{ Pariser Linien} = 1,949 \text{ 036 m,} \\ 1 \text{ preußischer (rheinländischer) Fuß} &= 12 \text{ preuß. Zoll} = 12 \cdot 12 \\ & (= 144) \text{ preuß. Linien} = 0,313 \text{ 853 5 m,} \\ 1 \text{ bayerischer Fuß} &= 12 \text{ Werkzoll} = 144 \text{ Werklinien} = 10 \text{ De-} \\ & \text{zimalzoll} = 100 \text{ Dezimallinien} = 0,291 \text{ 859 m,} \\ 1 \text{ badischer Fuß} &= 0,300 \text{ 000 m,} \\ 1 \text{ hannoverscher Fuß} &= 12 \text{ Zoll} = 144 \text{ Linien} = 0,292 \text{ 095 m,} \end{aligned} \right\} (85)$$

¹⁾ Auf die Einführung des internationalen Meters als gesetzliche Längeneinheit im Deutschen Reiche beziehen sich die Novelle zur Maß- und Gewichtsordnung v. 26. IV. 1893 sowie das Gesetz über die Maß- und Gewichtsordnung v. 30. V. 1908. Die Bezeichnung der Maße (und Gewichte) ist zuletzt durch Bundesratsbeschuß v. 14. XII. 1911 geregelt worden. Das metrische Maßsystem selbst war im Norddeutschen Bunde schon 1868 eingeführt und 1872 auf das ganze Deutsche Reich ausgedehnt worden.

²⁾ Die folgenden Beziehungen und die entsprechenden bei den Flächenmaßen sind in der Hauptsache aus *Bauernfeind*, Elemente der Vermessungskunde entnommen.

- 1 sächsischer Fuß (verschiedene Zusammensetzungen und Unterabteilungen) = 0,28319 m,
- 1 württembergischer Fuß = 10 Zoll = 100 Linien = 0,286490 m,
- 1 braunschweigischer Fuß = 0,285362 m,
- 1 Wiener Klafter = 6 Fuß = 6 · 12 Zoll = 6 · 12 · 12 Linien = 6 · 12 · 12 · 12 Punkte = 10 Feldschuh = 100 Feldzoll = 1000 Feldlinien = 1,896484 m,
- 1 englischer Yard = 3 Fuß = 3 · 12 Zoll = 3 · 12 · 12 Linien = 3 · 12 · 12 · 12 Punkte = 0,9143835 m,
- 1 russischer Fuß = 1 englischer Fuß = 0,3048 m.

(85)

Der Umstand, daß eine sehr große Zahl von gut bestimmten Kopien des internationalen Urmaßes auf die verschiedensten Teile der Erdoberfläche verteilt ist, bietet eine gewisse Gewähr gegen den Verlust der internationalen Längeneinheit. Immerhin bleibt zu bedenken, daß infolge des gemeinsamen Ursprungs der verschiedenen nationalen Prototype aus dem gleichen Gußblock auch gleichartige Veränderungen derselben zu befürchten sind, welche bei einer erneuten Vergleichung der Urmaßkopien unter sich oder mit dem internationalen Meter nur zum Teil offenbar werden. Es ist deshalb sehr zu begrüßen, daß es den Physikern gelungen ist, durch die Herstellung einer sehr scharfen Beziehung zwischen der Wellenlänge des Lichtes und der Meterlänge diese fest zu verankern. Aus den Beobachtungen amerikanischer und französischer Physiker in den letzten Jahrzehnten ergab sich mit großer Genauigkeit für ganz trockene Luft bei 760 mm Druck und + 15° des Wasserstoffthermometers die Beziehung

$$1 \text{ m} = 1\,553\,164 \lambda_r, \dots \dots \dots (86)$$

in welcher λ_r die Wellenlänge der roten Linie des Kadmiumspektrums bedeutet¹⁾.

b) Flächenmaße.

Die Flächenmaße bauen sich in einfachster Weise aus den Längenmaßen auf, indem die Flächeneinheiten die Quadrate der Längeneinheiten sind.

Die eigentliche Flächeneinheit ist das Quadratmeter, das mit 1 qm oder 1 m² bezeichnet wird. Die wichtigsten Unterabteilungen sind: 1 qdm (1 dm²) = 0,01 qm, 1 qcm (1 cm²) = 0,01 qdm und 1 qmm (1 mm²) = 0,01 qcm. Ferner sind die größeren Einheiten 1 a = 100 qm (Ar), 1 ha = 100 a (Hektar) und 1 qkm (1 km²) = 100 ha (Quadratkilometer) in Gebrauch. Es sind das die Flächen von Quadraten, deren Seitenlängen 1 m, 1 dm, 1 cm, 1 mm, 10 m, 1 hm und 1 km sind.

Einige ältere Flächenmaße sind folgende:

- 1 preußischer Morgen = 180 Quadratruten = 0,255322 ha,
- 1 bayerisches Tagwerk = 40000 Quadratfuß = 3407,27 qm,
- 1 badischer Morgen = 400 Quadratruten = 0,36 ha,
- 1 hannoverscher Morgen = 120 Quadratruten = 2621 qm,
- 1 sächsischer Acker = 2 Morgen = 300 geom. Quadratruten = 5534,23 qm,
- 1 württembergischer Morgen = 384 Quadratruten = 3151,745 qm,
- 1 österreichisches Joch = 1600 Quadratklafter = 5754,64 qm,
- 1 englischer Acre = 160 Quadratruten = 4840 Quadratyards = 4046,7 qm,
- 1 Square Mile = 640 Acres = 2,5899 qkm.

(87)

¹⁾ Siehe hierzu den Bericht von Hammer, Die Sicherung der Grundlage des Metersystems, Z.V.W. 1908, S. 45–48 und Eggert, Bestimmung der Längeneinheit durch Naturmaße? Z.V.W. 1909, S. 217–233.

c) Winkelmaße.

An Winkelmaßen sind in der Geodäsie das Gradmaß und das analytische oder Bogenmaß in Verwendung. Mit Rücksicht auf die praktisch unerläßliche Forderung, daß die Kreisteilungen nach einem vollen Umgange wieder in sich selbst zurückkehren, ist für die Messungen nur ein solches Winkelmaß brauchbar, dessen Einheit im Kreisumfang ohne Rest enthalten ist. Dies trifft leider nicht für das Bogenmaß, wohl aber für das Gradmaß zu, in welchem deshalb unsere Winkelteilungen ausschließlich ausgeführt werden.

Das ältere, heute in Deutschland noch am weitesten verbreitete Gradmaß entspricht der Sexagesimalteilung und lehnt sich auf das engste an die althergebrachte Zeiteinteilung an. Der rechte Winkel wird hier in 90° , 1° in $60'$ und $1'$ in $60''$ zerlegt. Etwaige Bruchteile von Sekunden werden in Dezimalform angegeben. Die im Bergbau früher übliche Stundenteilung der Markscheiderinstrumente ist der Sexagesimalteilung auf das engste verwandt.

Von Frankreich aus verbreitete sich im vorigen Jahrhundert die dort im Anschluß an die dezimale Unterteilung des Meters eingeführte Zentesimalteilung des Quadranten. Bei dieser Teilung wird der rechte Winkel in 100° , 1° in $100'$ und $1'$ in $100''$ geteilt, so daß man die Ablesung sofort in Form eines Dezimalbruches anschreiben kann¹⁾.

Bedeutet $\alpha^{(0)}$ und $\alpha^{(g)}$ die Maßzahlen ein und desselben Winkels in Sexagesimalteilung (alte Teilung) und Zentesimalteilung (Neuteilung), so besteht nach dem Gesagten der Zusammenhang

$$\alpha^{(0)} = \frac{9}{10} \alpha^{(g)} \quad \text{bzw.} \quad \alpha^{(g)} = \frac{10}{9} \alpha^{(0)}. \quad \dots \quad (88)$$

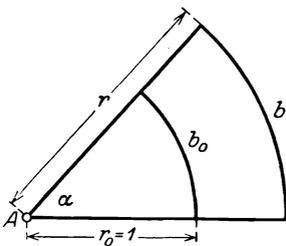


Abb. 5. Bogenmaß.

Für analytische Untersuchungen, in der Geodäsie besonders bei Fehlerberechnungen, gebraucht man das Bogenmaß $\hat{\alpha}$ eines Winkels α (Abb. 5) ist das Verhältnis eines zwischen den Winkelschenkeln konzentrisch zum Winkelscheitel A liegenden Bogens b zum zugehörigen Halbmesser r . Nimmt dieser den besonderen Wert $r_0 = 1$ an, so ist die Maßzahl des zugehörigen Bogens b_0 unmittelbar gleich $\hat{\alpha}$. Daher gilt

$$\hat{\alpha} = \frac{b}{r} = \frac{b_0}{1 m}, \quad \dots \quad (89)$$

wenn $1 m$ wieder die Längeneinheit bedeutet.

Der Zusammenhang zwischen Bogenmaß und Gradmaß folgt aus dem Umstande, daß der gestreckte Winkel im alten Gradmaß 180° , im Bogenmaß aber gleich π ist. Hieraus findet man leicht

$$\alpha^0 = \frac{180^{\circ}}{\pi} \cdot \alpha = \rho^0 \hat{\alpha}; \quad \alpha' = 60 \cdot \rho^0 \alpha = \rho' \hat{\alpha}; \quad \alpha'' = 60 \cdot \rho' \hat{\alpha} = \rho'' \hat{\alpha} \quad (90)$$

und umgekehrt
$$\hat{\alpha} = \alpha^0 : \rho^0 = \alpha' : \rho' = \alpha'' : \rho'' \quad \dots \quad (91)$$

¹⁾ Während die Sexagesimalteilung den Vorteil des engen Zusammenhanges mit der Zeit, die Zentesimalteilung die einfache Form, vielleicht auch eine etwas einfachere Berechnung der Beobachtungsergebnisse für sich hat, besitzt die zum Zwecke einer an sich sehr wünschenswerten Vereinheitlichung der Winkelteilung neuerdings vorgeschlagene dezimale Unterteilung des alten Grades keinen dieser Vorzüge in ausgesprochenem Maße.

Die Umwandlungskonstanten $\varrho^0, \varrho', \varrho''$ geben die Zahlen der Grade, bzw. der Minuten und Sekunden an, welche ein Winkel vom Bogenmaß 1 faßt. Ihre Werte sind:

$$\varrho^0 = 57,295\,78^0; \quad \varrho' = 3437,747'; \quad \varrho'' = 206\,264,8'' \quad \dots \quad (92)$$

Die entsprechende Umwandlungskonstante für Zentesimalteilung ist

$$\varrho^g = 200^g : \pi = 63,66198^g \quad \dots \quad (93)$$

10. Bestandteile geodätischer Meßinstrumente.

Unter diesen sind besonders zu nennen Spiegel und Prismen, Linsen und Ablesevorrichtungen.

a) Spiegel und Prismen.

Die Spiegel sind vor den Prismen dadurch ausgezeichnet, daß sie stets sog. farblose, d. h. von Farbenzerstreuung freie Bilder liefern. Ihre geometrische Wirkungsweise beruht auf dem bekannten Reflexionsgesetz, nach welchem der einfallende und der reflektierte Strahl (PQ und QA in Abb. 6) mit der Flächennormalen QN in einer Ebene liegen und der Reflexionswinkel $\sphericalangle NQA$ gleich dem Einfallswinkel $\sphericalangle PQN$ ist. Ist die reflektierende

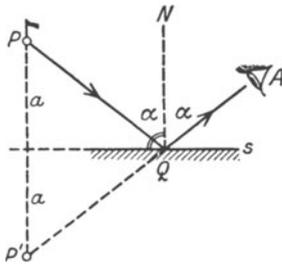


Abb. 6. Reflexion durch einen ebenen Spiegel.

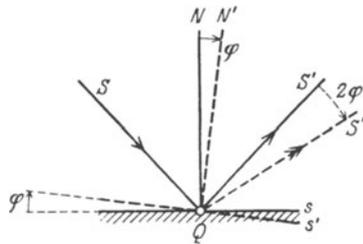


Abb. 7. Spiegeldrehung und Bildwanderung.

Fläche s ein ebener Spiegel, so liegen P und sein virtuelles Spiegelbild P' symmetrisch zur Spiegelfläche. Demnach behält bei wanderndem Auge A das Spiegelbild P' seinen Ort bei. Unmittelbar aus dem Spiegelgesetz ergibt sich folgende wichtige Erkenntnis. Dreht sich der Spiegel um eine zur Einfallsebene senkrechte Achse um den Winkel φ (Abb. 7), so dreht sich der reflektierte Strahl im gleichen Sinne um den Betrag 2φ . Ebene Spiegel führen bei horizontaler Lage durch Vertauschung von oben und unten eine einfache Bildaufrichtung und bei lotrechter Stellung durch Vertauschung von rechts und links eine einfache Seitenvertauschung herbei.

Wichtiger als die einfachen Spiegel sind in der Instrumentenkunde die Prismen, die wegen ihrer besseren Eigenschaften die eigentlichen Spiegel fast vollkommen verdrängt haben.

Abb. 8 stellt den Strahlengang im senkrechten Querschnitt eines dreiseitigen Prismas dar. Ein einfarbiger Strahl S trifft in 1 unter dem Einfallswinkel α auf die

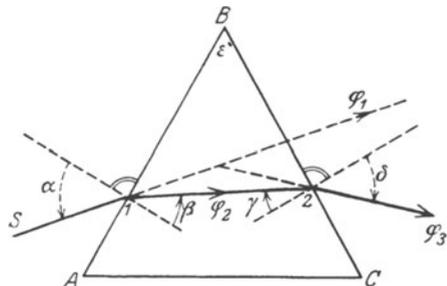


Abb. 8. Strahlengang im dreiseitigen Prisma.

winkel α auf das Prisma und wird beim Übergang in dieses unter dem Brechungswinkel β gebrochen, so daß nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz

$$\sin \alpha : \sin \beta = n \dots \dots \dots (94)$$

ist, wenn n den sog. Brechungsindex bedeutet. Er ist für den Übergang des sichtbaren Lichtes aus Luft in Kronglas 1,54 und aus Luft in Wasser 1,34. Besitzen der auftreffende und der gebrochene Strahl die gegen eine beliebige Ausgangsrichtung im Uhrzeigersinn positiv gezählten Richtungswinkel φ_1 und φ_2 , so ist die Richtungsänderung des Strahles infolge der einmaligen Brechung durch den Ausdruck

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2n} (2 \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin 2\alpha) \dots (95)$$

bestimmt. Der weitergehende Strahl verläßt schließlich in 2 das Prisma unter einem Richtungswinkel φ_3 , indem er mit dem Einfallslot den Winkel δ einschließt, welcher sich aus der Beziehung

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \varepsilon \sin \alpha \dots \dots \dots (96)$$

berechnen läßt. ε bedeutet hierin den brechenden Winkel des Prismas. Bei bekanntem δ ergibt sich die Gesamtablenkung des Strahles leicht mittels des Ausdrucks

$$\varphi_3 - \varphi_1 = \alpha + \delta - \varepsilon \dots \dots \dots (97)$$

Denkt man sich den zweiten Einfallswinkel γ wachsend bis der zugehörige Brechungswinkel $\delta = 90^\circ$ wird, so gleitet der gebrochene Strahl die Seite BC entlang und γ ist in diesem Fall in den durch $\sin \gamma_0 = 1:n$ bestimmten Inzidenzwinkel γ_0 übergegangen. Bei weiterem Wachstum von γ kann der Strahl das Prisma nicht mehr verlassen; er wird dann total reflektiert, bei welchem Vorgang infolge geringen Lichtverlustes sehr helle Spiegelbilder entstehen.

Denken wir uns das Auge A im Prisma, so wird ihm ein vom Einfallspunkt Q (Abb. 9) um s entfernter Punkt P unter der größeren Entfernung $AQ + \sigma$ in P' erscheinen. Da AQ der Natur der Sache nach im Vergleich zu den Punktentfernungen verschwindend klein ist, so vernachlässigen wir es und setzen die scheinbare Entfernung des betrachteten Punktes vom Auge unmittelbar gleich σ . Dieses ist unter Beibehaltung der bisher gebrauchten Bezeichnungen

$$\sigma = \frac{s}{n} \{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha\} \dots (98)$$

Hiernach erscheint vom dichteren Medium aus der im dünneren Medium liegende Gegenstand stets in zu großer Entfernung und umgekehrt.

Sehr häufig verwendet man Prismen, deren Querschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck ist, unter Ausnutzung der totalen Reflexion als Spiegel zur Bildaufrichtung. In Abb. 10 trifft der mehrfarbige Strahl $S_{r,v}$ in 1 auf den Querschnittsschenkel AB und wird hier beim Eintritt in das Prisma in verschiedenfarbige Strahlen zerlegt, unter denen S_r (rot) und S_v (violett) die äußersten sichtbaren sein mögen. Jeder dieser Strahlen erfährt

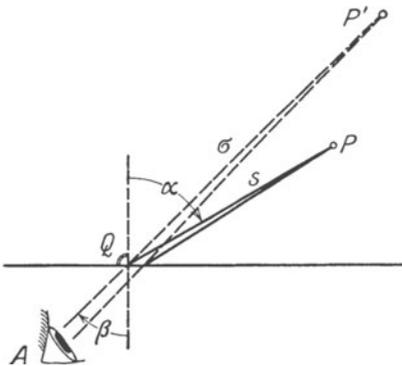


Abb. 9. Bildweite σ und Gegenstandsweite s , wenn Gegenstand und Auge in verschiedenen Medien liegen.

eine andere Brechung und geht deshalb in der Folge seinen eigenen Weg. S_r z. B. gelangt in 2_r unter einem Einfallswinkel, der größer ist als der Inzidenzwinkel, an die Grundlinie AC und wird dort total reflektiert. Bei 3_r trifft er auf den Schenkel BC und verläßt hier nach nochmaliger Brechung das Prisma. Da die Basiswinkel bei A und C einander gleich sind, und die Strahlenstücke $2_r 1$ und $2_r 3_r$ infolge der an der Grundlinie stattfindenden Reflexion mit der Grundlinie AC die gleichen Winkel einschließen, so treffen die genannten Strahlenstücke auch unter gleichen Winkeln auf die Schenkel AB und BC . Sie schließen also innerhalb und nach dem Brechungsgesetze deshalb auch außerhalb des Prismas mit dem Einfallslotte N_{rv} und N_r denselben Winkel ein. Daraus folgt aber unmittelbar, daß der eintretende Strahl S_{rv} und der austretende S_r gegen die Basis AC gleichmäßig geneigt sind.

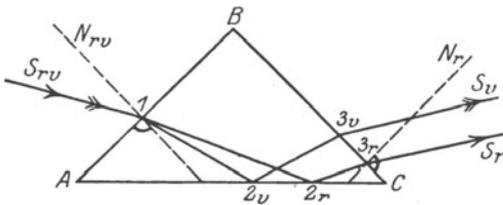


Abb. 10. Verhalten eines mehrfarbigen einmal reflektierten Strahls beim Gang durch ein gleichschenkeliges dreieckiges Prisma.

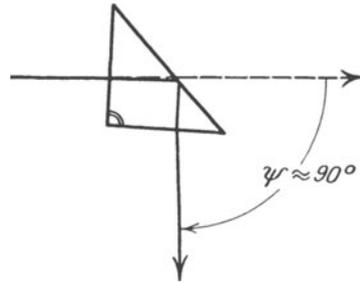


Abb. 11. Prisma zur Herbeiführung einer Strahlenablenkung von annähernd 90° durch Spiegelung.

Der ganze Vorgang kann daher seiner Endwirkung nach durch eine Spiegelung ersetzt werden, die an einer durch den Schnittpunkt von S_{rv} und S_r parallel zu AC gelegten Fläche stattfindet. Ganz entsprechendes gilt auch für den violetten Strahl S_v und für jeden anderen. Es werden deshalb alle aus dem Prisma austretenden Strahlen zueinander parallel sein und im Auge wieder in einem Punkte der Netzhaut vereinigt werden, so daß doch wieder von Farbenzerstreuung freie Bilder entstehen.

Es fragt sich noch, ob die scheinbare Bildentfernung dieselbe ist wie die Entfernung des Gegenstandes? Diese Frage ist nach Abb. 9 und Gl. (98) zu bejahen; denn während beim Eintritt des Strahles in das Prisma eine Vergrößerung der Entfernung von s auf σ stattfindet und durch die Reflexion an 2_r die Bildgröße und Bildentfernung nicht geändert wird, findet beim Strahlenaustritt in 3_r , welcher unter den gleichen Verhältnissen wie in 1, nur unter Vertauschung von Einfallswinkel und Brechungswinkel vor sich geht, wieder eine Verkleinerung der Entfernung von σ auf die ursprüngliche Entfernung s statt.

Ist der Prismenquerschnitt ein gleichschenkeliges rechtwinkliges Dreieck (Abb. 11), so erfährt ein auf die Kathetenfläche annähernd senkrecht auffallender Strahl eine Richtungsablenkung ψ von annähernd 90° . Ein Spiegelbeleg auf der Hypotenusenfläche ist nicht unbedingt notwendig, weil der Strahl die Hypotenusenfläche unter einem Einfallswinkel von ungefähr 45° trifft, welcher noch größer ist als der für Kronglas und Luft rund 42° betragende Grenzwinkel, so daß noch totale Reflexion stattfinden muß. Durch die Anbringung eines solchen Prismas vor dem Objektiv oder besser vor dem Okular kann man auch stark geneigte Sichten bei bequemer Kopfhaltung vornehmen.

Neuerdings spielen auch die vollständigen Umkehrprismen, welche sowohl eine Bildaufrichtung als auch eine Seitenvertauschung herbeiführen,

eine größere Rolle. Das in Abb. 12 dargestellte Prisma dieser Art ist das *Abbesche Prisma*¹⁾, ein sog. geradsichtiges Prisma, bei dem eintretender und austretender Hauptstrahl in einer Geraden liegen, so daß keine seitliche Bildverschiebung stattfindet. Dem Prisma, in welchem der Strahl ausschließlich vorwärts geführt wird, ist unten eine Dachfläche angeschliffen. Diese Vorkehrung bewirkt die Seitenvertauschung, während die Vertauschung von unten und oben durch den eigentlichen Prismenkörper herbeigeführt wird.

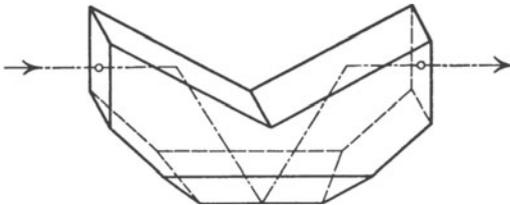


Abb. 12. Geradsichtiges vollständiges Umkehrprisma von Abbe.

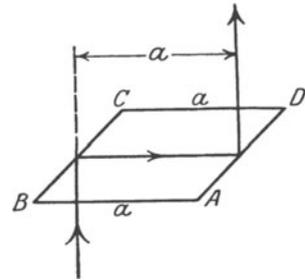


Abb. 13. Prisma zur Parallelverschiebung der Strahlen.

Ein anderes geradsichtiges vollständiges Umkehrprisma ist das *Dachprisma von Hensoldt*, welches ebenfalls nur Vorwärtsführung des Strahles aufweist²⁾.

Auch Prismen, deren Querschnitt ein Parallelogramm ist, werden in der Geodäsie verwendet, um eine parallele Verschiebung des Strahlengangs zu erreichen (Abb. 13). Ein solches Prisma verschiebt alle unter sich parallelen Strahlen, die sowohl an *BC* wie auch an *AD* total reflektiert werden, parallel und um den gleichen Betrag nach derselben Seite hin. Treffen die Strahlen, wie in Abb. 13 angenommen, senkrecht auf das Prisma, so ist das Maß der Parallelverschiebung die Länge der vom ankommenden Strahl getroffenen Querschnittsseite.

Trifft ein Strahl unter dem Einfallswinkel α (Abb. 14) auf eine planparallele Platte von der Dicke d , so ist der austretende Strahl zum auffallenden parallel und gegen diesen um den Betrag

$$q = d \sin \alpha \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right\} \dots \dots \dots (99)$$

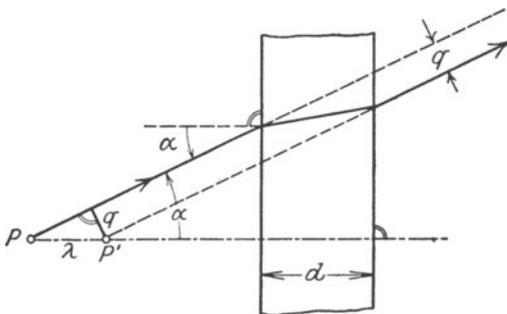


Abb. 14. Wirkung der planparallelen Platte.

seitlich verschoben. Aus (99) findet man leicht den bei kleineren Einfallswinkeln meist hinreichend genauen Näherungsausdruck

$$q \approx \frac{n-1}{n} d \cdot \alpha \dots (100)$$

Die durch Punkt *P* gehende Senkrechte zur Platte wird von der rückwärtigen Verlängerung des austretenden Strahls in einem Punkte *P'* getroffen, der um

¹⁾ Siehe *Gleichen, A.*, Die Theorie der modernen optischen Instrumente, Stuttgart 1911, Seite 152.

²⁾ Siehe *Hammer, E.*, Neues Hensoldtsches Fernrohr mit aufrechten Bildern für kleinere geodätische Instrumente, Z. V. W. 1909, Seite 247 ff.

$$\lambda = \frac{q}{\sin \alpha} = d \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right\} \dots \dots (101)$$

näher an der Platte liegt wie P . Für nicht allzu große α wird meistens die aus Gl. (100) folgende Näherung

$$\lambda \approx \frac{n-1}{n} d \dots \dots \dots (102)$$

genügen. Dieser Betrag ist von α unabhängig, so daß auch alle Nachbarstrahlen in ihrer Rückverlängerung durch denselben Punkt P' gehen und dem hinter der Platte befindlichen Auge der Punkt P um λ senkrecht gegen die Platte zu verschoben erscheint. Bei größeren Einfallswinkeln aber gilt dies nur näherungsweise. Für eine gewöhnliche Glasplatte ist der Näherungswert λ ein Geringes größer als $d:3$.

b) Linsen.

Unter Linsen im gewöhnlichen Sinne versteht man durchsichtige homogene, meist aus Glas bestehende, durch Kugelflächen begrenzte Körper. Je nachdem sie in der Mitte dicker oder dünner sind als am Rande, hat man es mit Sammellinsen oder mit Zerstreuungslinsen zu tun. Erstere sammeln das Licht oder machen doch divergente Strahlen weniger divergent; letztere verhalten sich umgekehrt. Die linke Hälfte von Abb. 15 veranschaulicht die bikonvexe, plankonvexe und konkavkonvexe Sammellinse, während rechts die bikonkave, plankonkave und konvexkonkave Zerstreuungslinse dargestellt ist.

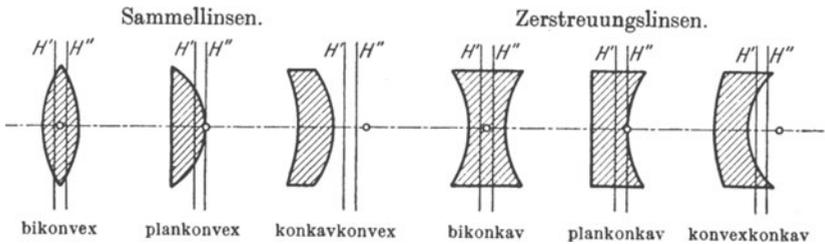


Abb. 15.

In Abb. 16 sind M' , M'' die Mittelpunkte der die Linse begrenzenden Kugelflächen.

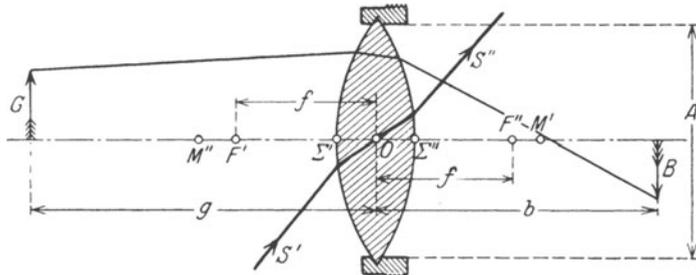


Abb. 16. Verhältnisse an der Linse für die Näherungsannahme, daß die Hauptpunkte in den optischen Mittelpunkt fallen.

Ihre Verbindungsgerade, die optische Achse der Linse, trifft diese in den Scheitelpunkten S' und S'' . A bedeutet die als Linsenöffnung bezeichnete lichte Weite der Linse. Alle durch den optischen Mittelpunkt O

gehenden Strahlen sind in ihren außerhalb der Linse liegenden Hälften S', S'' zueinander parallel. Die Linse entwerfe nun von dem um die Gegenstandsweite g von O abstehenden Gegenstand G ein dazu konjugiertes Bild B , welches von O um die Bildweite b absteht. Dann besteht zwischen g , b und der Brennweite f die grundlegende Beziehung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \text{ bzw. } (g - f)(b - f) = f^2, \dots \dots \dots (103)$$

welche man als dioptrische Hauptformel oder Abbildungsgleichung bezeichnet. f bedeutet hierin einen Festwert, nämlich die Brennweite der Linse. In der für die meisten Zwecke der geodätischen Instrumentenkunde ausreichenden einfacheren Theorie, welche von der Verwendung der Hauptpunkte absieht und nur mit dem optischen Mittelpunkt arbeitet, versteht man unter der Linsenbrennweite die unter sich gleichen Abstände des optischen Mittelpunktes von den beiden Brennpunkten F' und F'' , in welchen die von rechts bzw. von links her parallel zur optischen Achse auffallenden Strahlen je in einem Punkte der Achse gesammelt werden. Zwischen der Gegenstandsgröße G und der Bildgröße B besteht die einfache Beziehung

$$B : G = b : g \dots \dots \dots (104)$$

Die Differentiation von (103) liefert in

$$db = - \left(\frac{b}{g} \right)^2 dg \dots \dots \dots (105)$$

den wichtigen Ausdruck für die einer bestimmten Änderung dg der Gegenstandsweite entsprechende Bildweitenänderung db .

Die vorhin erwähnte einfachere Theorie reicht aber doch nicht immer aus, besonders nicht in der Photogrammetrie, wo ein großer Teil der Strahlen unter sehr beträchtlichen Winkeln gegen die optische Achse des Objektivs auftritt. In der genaueren Theorie spielen die Haupt- und Knotenpunkte eine wichtige Rolle. Die Knotenpunkte zeichnen sich dadurch aus, daß die durch sie nach zwei beliebigen konjugierten Punkten gezogenen Richtungen zueinander parallel sind. Hingegen versteht man unter den beiden Hauptebenen einer Linse diejenigen achsensenkrechten, konjugierten Ebenen, in welchen Gegenstand und Bild gleich groß und gleich gerichtet sind, so daß die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser Ebenen zur optischen Achse parallel laufen. Unter den Hauptpunkten aber, die in der Folge ebenso wie die Hauptebenen selbst mit H' und H'' bezeichnet werden sollen, versteht man die Durchstoßpunkte der optischen Achse durch die Hauptebenen. Hauptpunkte und Knotenpunkte sind getrennte Punktpaare, wenn, wie z. B. beim Auge, vor und hinter der Linse zwei verschieden brechende Medien liegen. Bei allen an geodätischen Instrumenten verwendeten Linsen aber fällt je ein Hauptpunkt in den entsprechenden Knotenpunkt, weil sich hier vor und hinter der Linse ein und dasselbe Medium befindet. In der Regel spricht man dann von den Hauptpunkten der Linse, obwohl man meistens die aus dem Begriff der Knotenpunkte folgenden Eigenschaften im Auge hat.

In Abb. 17 bedeuten F' und F'' wieder die beiden Brennpunkte, welche um die Brennweite f von den zugehörigen Hauptpunkten H' , H'' abstehen. Zu der schon früher erwähnten Eigenschaft des optischen Mittelpunktes ist noch hinzuzufügen, daß die parallelen Außenhälften eines durch O gehenden Strahles in ihren Verlängerungen durch die beiden Hauptpunkte gehen.

Ist d die Linsendicke, t der Abstand beider Hauptebenen, n der Brechungsquotient und bedeuten M' , M'' die Mittelpunkte der begrenzenden

Kugelflächen mit den Halbmessern r' und r'' , ferner h', h'' die Abstände der Hauptpunkte H', H'' von den zugehörigen Linsenscheiteln Σ', Σ'' und s', s'' die Entfernungen des optischen Mittelpunktes O von den genannten Scheitelpunkten, so sind die gegenseitigen Größenverhältnisse durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{r' r''} \right) \approx (n-1) \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right), \dots (106)$$

$$h' = \frac{r' d}{n(r' + r'') - (n-1)d} \approx \frac{r' d}{n(r' + r'')}, \dots (107)$$

$$h'' = \frac{r'' d}{n(r' + r'') - (n-1)d} \approx \frac{r'' d}{n(r' + r'')}, \dots (108)$$

$$s' = \frac{r'}{r' + r''} d, \quad s'' = \frac{r''}{r' + r''} d, \dots (109)$$

$$t = d - (h' + h'') \approx \frac{n-1}{n} d, \dots (110)$$

$$s' : s'' = h' : h'' = r' : r''. \dots (111)$$

In Abb. 17 besitzen alle diese Größen positives Vorzeichen. Für Glaslinsen, bei denen n rund 1,5 ist, findet man aus (110) für den Hauptpunktabstand $t \approx d : 3$.

Abb. 15, in welcher die Spuren der Hauptebenen mit H', H'' und die optischen Mittelpunkte durch kleine Kreise bezeichnet sind, gibt einen Überblick über die Lage der genannten Ebenen und Punkte für die wichtigsten Linsenformen.

Rechnet man g und b von den Hauptebenen aus, so bleibt die Abbildungsgleichung (103) unverändert bestehen. Es ist also der zwischen den Hauptebenen liegende Raum für die Bildkonstruktion aus den Strahlen gewissermaßen unwirksam, weshalb er und seine Dicke t als der tote Raum bezeichnet werden.

Abb. 18 veranschaulicht das Zusammenwirken zweier Einzellinsen mit den Brennweiten f' und f'' , den Hauptebenenpaaren H_1', H_1'' und H_2', H_2'' , den toten Räumen t', t'' und dem Abstand a der beiden Hauptebenen H_1'', H_2' . Die optische Wirkung der beiden Linsen läßt sich durch diejenige einer einzigen fingierten Linse ersetzen, welche die Brennpunkte F', F'' , die Äquivalentbrennweite f , den optischen Mittelpunkt O und die Hauptebenen H', H'' besitzt. Die gegenseitige Lage der genannten Gebilde ist durch die Beziehungen

$$f = \frac{f' f''}{f' + f'' - a}, \dots (112)$$

$$h' = \frac{a f'}{f' + f'' - a} = \frac{a}{f''} \cdot f, \quad h'' = \frac{a f''}{f' + f'' - a} = \frac{a}{f'} \cdot f, \dots (113)$$

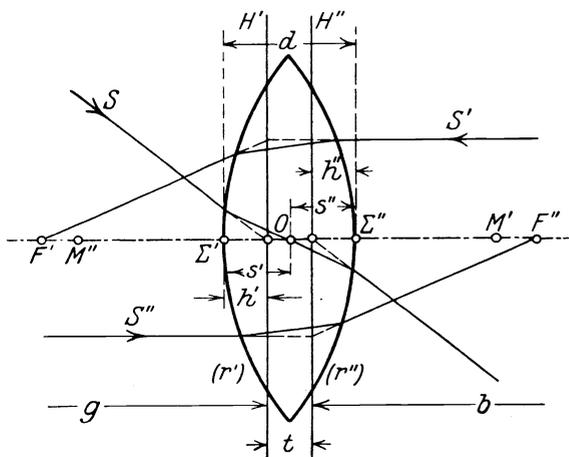


Abb. 17. Verhältnisse an der Linse für die strengere Annahme, daß die Hauptpunkte nicht in den optischen Mittelpunkt fallen.

$$\sigma' = \frac{h'}{h' + h''} a = \frac{f'}{f' + f''} a, \quad \sigma'' = \frac{h''}{h' + h''} a = \frac{f''}{f' + f''} a, \quad (114)$$

$$\sigma' : \sigma'' = h' : h'' = f' : f'', \quad \dots \dots \dots (115)$$

$$t = t' + t'' - \frac{a^2}{f' + f'' - a} = t' + t'' - \frac{a^2}{f' f''} \cdot f \quad \dots \dots \dots (116)$$

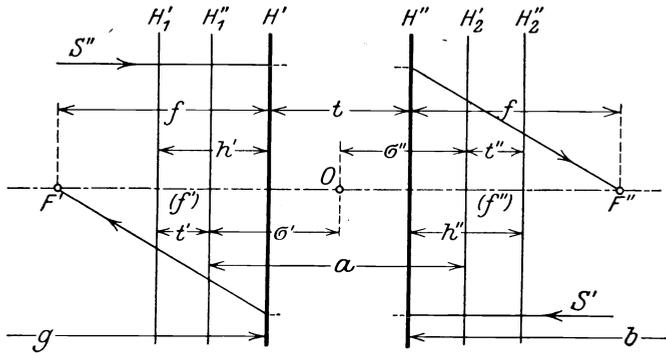


Abb. 18. Zusammenwirken zweier Einzellinsen.

vollständig bestimmt. Die Bedeutung der hierin enthaltenen Bezeichnungen wird durch die Angaben von Abb. 18, denen lauter positive Vorzeichen entsprechen, ergänzt. Auch hier gilt wieder die alte Abbildungsgleichung (103), wenn g und b von den Hauptebenen H', H'' der Äquivalentlinse aus gezählt werden. Ebenso besitzt der neue optische Mittelpunkt O die früher angegebene Eigenschaft, daß die Außenhälften aller durch ihn gehenden Strahlen je zueinander parallel sind und in ihrer Verlängerung sämtlich durch die zugehörigen Hauptpunkte H', H'' gehen.

Wird die Linsendicke vernachlässigt, so daß die beiden Hauptpunkte jeder Einzellinse, in deren optischen Mittelpunkt fallen, so bleiben die angegebenen Beziehungen bestehen. Die Gleichungen (112) bis (115) behalten für diesen Fall auch ihre äußere Form; lediglich (116) läßt sich, da bei der getroffenen Annahme t' und t'' verschwinden, in die einfachere Gestalt

$$t = - \frac{a^2}{f' + f'' - a} = - \frac{a^2}{f' f''} \cdot f \quad \dots \dots \dots (117)$$

bringen, wobei man jetzt a kurzweg als den Linsenabstand auffassen kann.

Unter den Mängeln der einfachen Linse sind besonders zu nennen die Farbenabweichung, die Kugelabweichung, der Astigmatismus und das Koma, die Bildverzerrung und die Bildwölbung.

Farbenabweichung tritt ein, wenn ein Strahl S (Abb. 19) verschiedenfarbigen Lichtes beim Durchgang durch die Linse in seine Einzelfarben zerlegt wird. Die kurzwelligen Strahlen S_v werden dabei stärker gebrochen als die langwelligen S_r . Liegt S parallel zur optischen Achse, so sind die Schnittpunkte F_r, F_v der genannten Strahlen mit der Achse die getrennten Brennpunkte der roten und violetten Strahlen, während ihr Abstand den entsprechenden Brennweitenunterschied darstellt. Die Bilder sind hier von störenden farbigen Säumen umgeben.

Ein zur optischen Achse paralleler Randstrahl S_r (Abb. 20) und ein gleichgerichteter zentraler Strahl S_z treffen nach der Brechung die Linsenachse in den getrennten Punkten F_r und F_z , welche die Brennpunkte der Randstrahlen und der Zentralstrahlen sind. Diese Erscheinung ist die

Kugelabweichung oder sphärische Aberration. Der Abstand λ beider Brennpunkte F_v und F_r ist die sphärische Längenabweichung. Hingegen ist die sphärische Querabweichung σ der achsensenkrechte Abstand des Brennpunktes

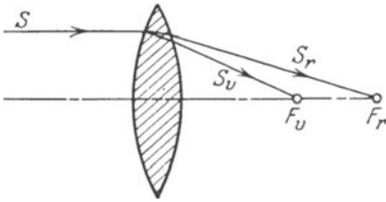


Abb. 19. Farbenabweichung.

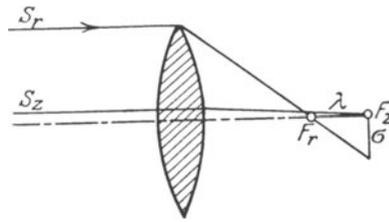


Abb. 20. Kugelabweichung.

der zentralen Strahlen von einem vor der Brechung achsenparallelen Randstrahl. Infolge der Kugelabweichung wird das Bild eines Punktes nicht wieder ein Punkt, sondern ein Scheibchen, worunter die Deutlichkeit des Bildes leidet.

Wird ein Punkt P durch zwei etwas stärker gegen die optische Achse geneigte, einem Meridianschnitt angehörige Nachbarstrahlen PA (Abb. 21) und PB abgebildet, so erscheint das Bild in einem Punkte P_m . Findet jedoch die Abbildung durch zwei in einer zum Meridian senkrechten Ebene (Sagittalebene) liegende Nachbarstrahlen statt, so fällt der Bildort in den Achsenpunkt P_s . Es entstehen also für diese extremen Lagen der Strahlenebenen zwei getrennte Bilder P_m und P_s , deren Abstand die astigmatische Differenz ist, während die Erscheinung selbst als Astigmatismus bezeichnet wird.

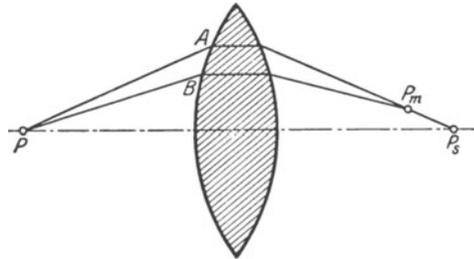


Abb. 21. Astigmatismus.

Eng mit dem Astigmatismus hängt das Koma zusammen. Wird die Abbildung nicht durch ein enges Strahlenbündel, sondern unter Ausnutzung der ganzen Linse durch unendlich viele Bündel herbeigeführt, so entstehen unendlich viele Bildpunkte P_m und P_s , so daß die Abbildung des Punktes P streng genommen durch Flächen stattfindet. Diese Flächen haben in einer Spitze (kaustische Spitze) einen Punkt gemeinsam, in dem besonders viel Strahlen zusammengefaßt werden, so daß dieser Punkt eine im Vergleich zu den übrigen Flächenpunkten hervorstechende Helligkeit besitzt und daher als eigentlicher Bildort ziemlich scharf aufgefaßt werden kann. Werden aber diese besonders wirksamen Spitzenstrahlen — etwa durch eine ungeeignete Blende — an ihrer Vereinigung gehindert, so erscheint an Stelle der scharfen Spitze ein kometenschweifartiges, mehr oder weniger verschwommenes Gebilde, das man als Koma bezeichnet.

Eine Verzeichnung oder Bildverzerrung tritt auf, wenn das Bild perspektivisch nicht richtig gezeichnet ist. Von einer Bildwölbung hingegen spricht man, wenn die Linse von einem ebenen achsensenkrechten Gebilde ein auf einer gewölbten Fläche liegendes Bild entwirft.

Diese verschiedenen Fehler, welche wegen ihres starken Wachstums mit der Strahlenneigung besonders in der Photogrammetrie lästig fallen müßten, kann man durch das Zusammenwirken mehrerer und verschiedenartiger Linsen, sowie durch die Verwendung geeigneter Blenden am richtigen Orte so weit

beheben, daß sie — besonders bei Fernrohren — praktisch vollkommen belanglos werden.

Zum Schluß dieser Ausführungen über Linsen soll noch das Zusammenwirken von planparalleler Platte und Linse gestreift werden. Denkt man sich eine planparallele Platte senkrecht zur optischen Achse des Objektivs eines Fernrohres vor dieses gebracht, so wird dadurch nach (102) und den anschließenden Ausführungen der angezielte Gegenstand scheinbar um rund ein Drittel der Plattendicke näher gerückt. Dieser im Vergleich zur Gegenstandsweite verschwindend kleinen Verringerung derselben entspricht nach (105) wegen des im allgemeinen sehr kleinen Verhältnisses $b:g$ nur eine verschwindend kleine Vergrößerung der Bildweite, die einer Messung kaum mehr zugänglich ist und daher vernachlässigt werden kann. Wird hingegen die Platte hinter dem Objektiv in den konvergenten Strahlengang eingeschoben, so wird dadurch die Bildweite um rund ein Drittel der Plattendicke vergrößert. Die Wirkung der Platte auf die Lage des Bildes ist also in beiden Fällen eine ganz verschiedene¹⁾.

c) Ablesevorrichtungen.

Als Ablesevorrichtungen kommen hauptsächlich in Betracht die Meßschraube, der Meßkeil, der einfache Zeiger, die Lupe, Transversalen, der Nonius, das Strichmikroskop, das Skalenmikroskop, das Schraubenmikroskop und das Noniusmikroskop.

Die Meßschraube oder Mikrometerschraube ist eine feingearbeitete Schraube mit geringer Ganghöhe, welche bei fester Lagerung zur genauen Messung kleiner Verschiebungen eines Schlittens, im andern Fall zur sorgfältigen Bestimmung von Dicken, Tiefen und dergleichen verwendet werden kann. Abb. 22 veranschaulicht einen Dickenmesser (Lehrschraube), dessen in einer festen Mutter M gelagerte Feinschraube S bei einer Drehung mittels des Knopfes K in ihrer Längsrichtung verschoben wird. Das Schraubende und das ihm gegenüberstehende Widerlager W sind flach gewölbt und gehärtet; die Ablesungen

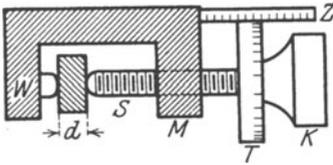


Abb. 22. Mikrometerschraube.

erfolgen mittels einer Zeigerkante Z an dem als geteilte Trommel ausgebildeten Schraubenkopf T . Zur Vermeidung ungleichen Druckes bei der Messung wird zweckmäßig eine sogenannte Fühlschraube verwendet, bei welcher der Knopf K auf der Schraubenspindel nur durch Reibung aufsitzt. Bedeutet a_0 die Trommelablesung bei anstoßender Schraube, a diejenige bei eingeschobenem Körper, so ist dessen in Schraubenganghöhen ausgedrückte Dicke $d = a - a_0$.

Der Meßkeil²⁾ (Abb. 23) ist ein mit einer Teilung versehener Keil, dessen wirksame Flächen nur schwach gegeneinander geneigt sind und welcher dazu dient, kleine Abstände zweier meist gekreuzten Schneiden oder den Abstand einer Schneide von einer dazu parallelen ebenen Fläche genau zu bestimmen. Bei einer solchen Messung wird der Keil vorsichtig bis zum

¹⁾ Für ein tieferes Eingehen auf optische Fragen sei verwiesen auf *Willner, A.*, Lehrbuch der Experimentalphysik, IV. Bd., 5. A., Leipzig 1899; *Chwolson*, Lehrbuch der Physik, II. Bd., Braunschweig 1904; *v. Kohn, M.*, Die Theorie der optischen Instrumente, Berlin 1904, sowie Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs, Berlin 1899; *Drude*, Lehrbuch der Optik, 3. A., Leipzig 1913; *Gleichen, A.*, Leitfaden der praktischen Optik, Leipzig 1906 und Die Theorie der modernen optischen Instrumente, Stuttgart 1911.

²⁾ In die Geodäsie wurde der Meßkeil durch *Reichenbach* eingeführt, welcher ihn bei seinem 1806 konstruierten Basisapparat verwendete.

Auftreten des ersten Widerstandes eingeschoben und an der Teilung die Ablesung i gefunden. Sind d_o und d_n die zu den Ablesungen o und n gehörigen, etwa mit Hilfe einer Mikrometerschraube bestimmten Keildicken, so ist offenbar

$$d = d_o + i \cdot \frac{d_n - d_o}{n} = d_o + C \cdot i \quad \dots \dots \dots (118)$$

der gesuchte Schneidenabstand. Diese Beziehung (118) nennt man die Keilgleichung.

Der mittlere Fehler einer sorgfältigen Keilmessung ist auf rund 1 mm, derjenige einer sehr guten Mikrometerschraubenmessung auf wenig mehr als 1 μ zu veranschlagen.

Der einfache Zeiger ist ein Strich, eine Kante, Spitze oder etwas ähnliches, womit diejenige Stelle der Teilung bezeichnet wird, an welcher abgelesen werden soll. Da eine Angabe auf ganze Teilungseinheiten in der Regel nicht genau genug ist, so muß die Stellung des Zeigers Z (Abb. 24) gegen die beiden ihn einfassenden Striche geschätzt werden. Bei einiger Übung läßt sich an einer guten, d. h. scharfen und übersichtlichen Teilung bis auf Zwanzigstel die Teilungseinheit schätzen¹⁾. Einfache Zeiger an geodätischen Instrumenten sind wegen der geringeren Ablesegenauigkeit nicht gerade häufig; sie werden aber z. B. an den Nadelenden mancher Bussolen angebracht.

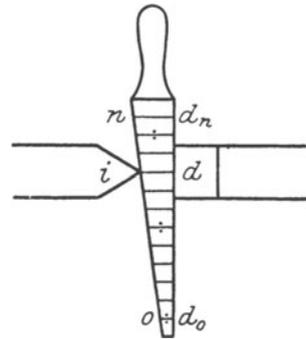


Abb. 23. Meßkeil.

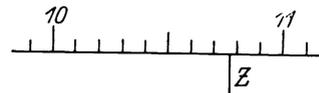


Abb. 24. Einfacher Zeiger.

Die Lupe ist eine Sammellinse mit kurzer Brennweite und dient zur Betrachtung kleiner, nahegelegener Gegenstände, welche um ein geringes innerhalb des Brennpunktes liegen müssen. Das Auge kann zwei Punkte bzw. Striche, deren scheinbarer Abstand beträchtlich unter 1' bzw. 5'' sinkt, nicht mehr voneinander trennen. Eine Annäherung zum Auge vergrößert allerdings diesen Gesichtswinkel, findet aber ihre Grenze in der deutlichen Sehweite, da sonst das Bild des Gegenstandes hinter die Netzhaut fällt und unscharf wird. Diesem Übelstand hilft die Lupe L mit der Brennweite f dadurch ab, daß sie von dem kleinen Gegenstand G mit der geringen Gegenstandsweite g (Abb. 25) in der deutlichen Sehweite w ein virtuelles, aufrechtes, stark vergrößertes Bild B entwirft, zu dem eine Bildweite b gehört. Erscheint dem in der Entfernung e von der Lupe befindlichen Auge das vergrößerte Bild unter dem Winkel α , während es unbewaffnet den in derselben Entfernung w befindlichen Gegenstand unter dem kleineren Winkel β sehen würde, so ist das Verhältnis

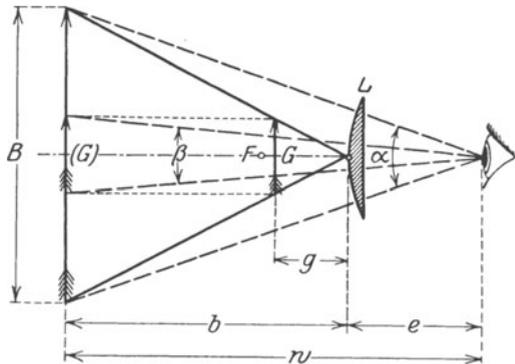


Abb. 25. Strahlengang in der einfachen Lupe.

¹⁾ Näheres über Schätzungsfehler an Teilungen enthalten die Ausführungen über die Fehler der Distanzmessung.

$v = \alpha : \beta$ die Lupenvergrößerung. Unter Anwendung der dioptrischen Hauptgleichung findet man an der Hand von Abb. 25 leicht den Ausdruck

$$v = \frac{w}{f} + 1 - \frac{e}{f}. \quad \dots \dots \dots (119)$$

Ist das Auge ganz an der Lupe, so ergibt sich nach (119) der Größtwerth $v_{max} = (w : f) + 1$. Da das Auge kaum jemals weiter als um die Brennweite von der Lupe absteht, so kann man für den kleinsten Wert der Lupenvergrößerung den Quotienten $v_{min} = w : f$ nehmen.

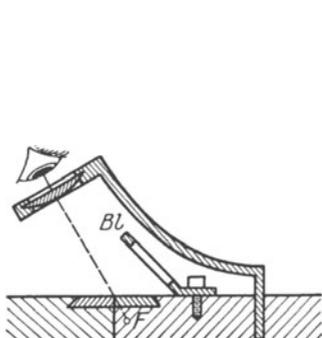


Abb. 26. Ringförmige Lupe.

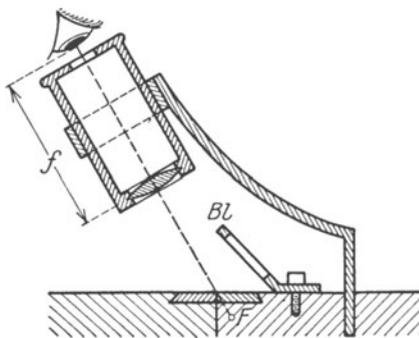


Abb. 27. Röhrenlupe.

Wird die Lupe aus freier Hand gebraucht, wie z. B. bei Bussolenablesungen, so hat man es mit einer Handlupe zu tun. Die an den Instrumenten zur Erleichterung der Ablesung befestigten Lupen sind entweder ringförmige Lupen (Abb. 26) oder Röhrenlupen (Abb. 27). Bei ersteren ist das Auge unmittelbar an der Linse, bei letzteren rund um die Brennweite hinter der Linse, so daß die Lupenvergrößerung die Extremwerte v_{max} bzw. v_{min} annimmt. Bei der Röhrenlupe, welche innen matt oder geschwärzt ist, werden die bei der ringförmigen Lupe zur Bildentstehung mitverwendeten störenden Randstrahlen abgehalten. Die Blende *Bl* dient in beiden Fällen zur Verbesserung der Beleuchtung. Außer diesen einfachen Lupen, welche als Einzellinsen mehr oder weniger mit den früher besprochenen Linsenfehlern behaftet sind, gibt es auch zusammengesetzte Lupen, bei denen diese Mängel größtenteils behoben sind. Sie dienen hauptsächlich als Okulare und sollen dort besprochen werden, kommen aber auch als sog. Mikroskoplupen mit größerem Linsenabstand als Ablesehilfsmittel an Teilungen zur Verwendung.

Die gebräuchlichen Lupenvergrößerungen gehen etwa bis zu $v = 10$.

Die Transversalen sind das älteste bekannte Hilfsmittel zur Verfeinerung von Ablesungen und wurden am Rande der geteilten Kreise aufgetragen. Mit dem Auftauchen des Nonius im 17. Jahrhundert verschwanden sie bald von den Kreisen, finden aber heute noch nach der zeichnerischen Seite hin die ausgedehnteste Verwendung bei den Transversalmaßstäben (Abb. 28), welche zum genauen Auftrag bestimmter Längen und umgekehrt zur genauen Messung von mit dem Zirkel abgegriffenen Maßen dienen. Ein solcher Transversalmaßstab wird durch einen auf Messing, Nickel, Neusilber oder auch starkes Papier aufgetragenen rechteckigen Rahmen eingefasst, welcher durch Parallele zu den Schmalseiten in Einzelrechtecke von runder Höhe — in der Abbildung 10 m — zerlegt wird. Auf den beiden Längsseiten des letzten dieser Rechtecke ist ein und dieselbe Teilung aufgetragen, deren Einheit — wie in der Abbildung — so gewählt wird, daß die

Teilung noch übersichtlich bleibt. Verbindet man nun je einen Strich der linken Teilung mit dem folgenden der rechten Teilung, so entsteht das bekannte Bild der Paralleltransversalen. Zur leichten Bestimmung des Ab-

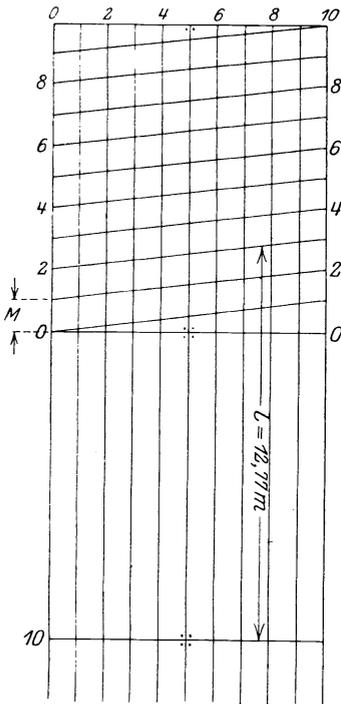


Abb. 28. Transversalmaßstab.

standes irgendeines Punktes einer solchen Transversalen von ihrem Anfangspunkt dient eine Anzahl von — in der Regel 9 — Parallelen zu den Langseiten des Rahmens. Die Abstände der Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Transversalen von den Rechteckschmalseiten nehmen von Punkt zu Punkt um je ein Zehntel der Einheit zu, und da man zwischen hinein noch bis auf einzelne Zehntel schätzen kann, so läßt sich der Abstand zweier günstig gestellter Zirkelspitzen, besonders wenn nicht nur mit dem Auge, sondern auch mit dem Gefühl beobachtet wird, bis auf einige Hundertel der Teilungseinheit bestimmen. Die in Abb. 28 eingetragene Länge z. B. ist $l = 12,77$ m im Maßstab $M = 1 : 250^1$).

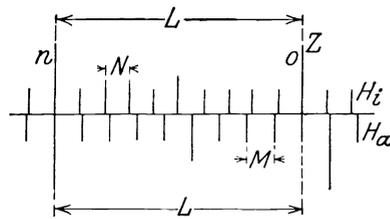


Abb. 29. Nachtragender Nonius.

Die am weitesten verbreitete und wichtigste Ablesevorrichtung an Teilungen ist zweifellos der Nonius. Er ist ein längs einer Hauptteilung H_a (Abb. 29) verschiebbarer Hilfsmaßstab H_i mit gleichmäßiger Teilung, deren Nullstrich Ablesezeiger ist und auf deren Länge von n Noniusteilen N die Zahl von $n - 1$ Maßstabteilen M trifft. Der Unterschied $M - N$ zwischen einem Maßstab- und einem Noniusteil ist die Noniusangabe a , für welche man aus der Beziehung $L = n \cdot N = (n - 1) M$ leicht den Ausdruck

$$a = \frac{M}{n} \dots \dots \dots (120)$$

findet. Viele Nonien besitzen eine kleine Überteilung die besonders für Ableseungen in der Nähe eines Striches der Hauptteilung sowie bei Genauigkeitsuntersuchungen gute Dienste leistet. Bei der Ableseung gibt man, wenn es sich etwa um eine Winkelteilung handelt, zuerst die vor dem Zeigerstrich liegende Gradzahl A_0 (Abb. 30) an, fügt dazu die i ganzen Maßstabteile M zwischen dem Gradstrich A_0 und dem Zeiger Z und sucht sodann die Deckstelle (Koinzidenzstelle) T eines Noniusstriches mit einem Striche der Haupt-

¹⁾ Nach W. Lührs, Ein Beitrag zur Geschichte der Transversalteilungen und des Nonius, Z. V. W. 1910, S. 177 ff., gebührt das Verdienst der Erfindung und ersten Anwendung der Transversalteilung *Levi ben Gerson* aus Avignon (1288—1344). Einen sehr ausgedehnten Gebrauch von dieser Ablesevorrichtung machte in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts der bekannte dänische Astronom *Tycho Brahe*, welcher alle seine Instrumente am Rande der Kreise mit Transversalen ausgestattet hatte.

teilung. Umfaßt der Abstand ZT etwa r Noniusteile und wird die gesuchte Ablesung am Zeiger mit A bezeichnet, so ist nach den Eintragungen in der Abbildung

$$A = A_0 + i \cdot M + R = A_0 + i \cdot M + r(M - N) = A_0 + i \cdot M + r \cdot a. \quad (121)$$

Da in der Abb. $M = 10'$, $n = 10$, also $a = 1'$, ferner $A_0 = 10^0$, $i = 2$ und $r = 5$ ist, so ist die Ablesung in Zahlen $A = 10^0 + 2 \cdot 10' + 5 \cdot 1' = 10^0 25'$.

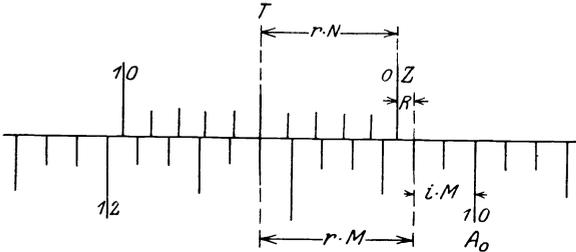


Abb. 30. Wirkungsweise des nachtragenden Nonius.

Früher stand auch der vortragende Nonius in Gebrauch, bei dem auf n Noniusteile $n + 1$ Maßstabteile treffen und dessen Bezifferung derjenigen des Hauptmaßstabes entgegenläuft.

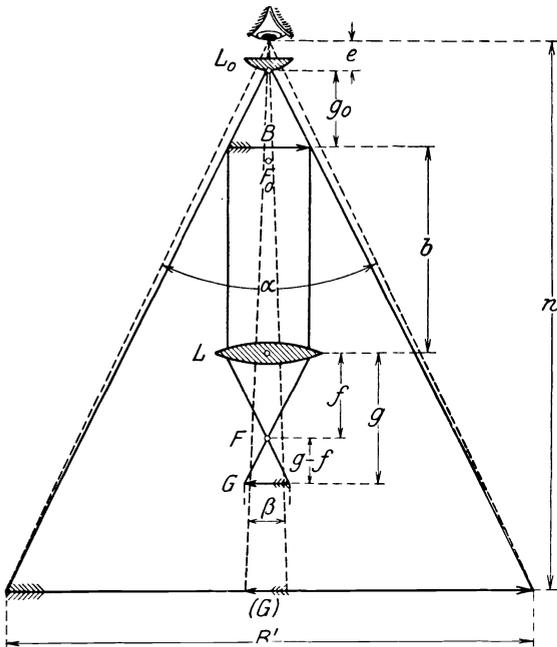


Abb. 31. Wirkungsweise des Mikroskops.

Teilung, sondern in deren Bild die abzulesende Stelle bezeichnet.

¹⁾ Zur geschichtlichen Seite dieser Ablesevorrichtung siehe die in der vorhergehenden Anmerkung genannte Studie von Lührs. Siehe auch Hammer, E., Pedro Nunes, Z. V. W. 1909, S. 177 ff. Den ersten Anstoß zur Erfindung des Nonius gab eine praktisch allerdings nicht verwendbare Erfindung des Portugiesen Nunes (1502—1578?), direkt nicht mehr meßbare Teile mit Hilfe von Koinzidenzen zu bestimmen. Das Verfahren wurde durch Curtius, besonders aber durch Clavius (1537—1612) weiter ausgebildet und schließlich durch Pierre Vernier (1580—1637?), Münzdirektor der Grafschaft Burgund, 1631 zum Abschluß gebracht. Nahezu gleichzeitig (1643) und vermutlich vollständig unabhängig von Vernier hat auch der schwedische Gelehrte Hedraeus (1608—1659) den Nonius erfunden.

Bei übersichtlichen Teilungen läßt sich die Treffstelle zwischen zwei Noniusstrichen bis auf die Hälfte oder das Drittel der Noniusangabe einschätzen. Heute verwendet man fast ausschließlich den eben besprochenen, nachtragenden Nonius, dessen Bezifferung mit derjenigen der Hauptteilung gleichgerichtet ist.

Die Leistungsfähigkeit des Nonius liegt zwischen derjenigen des Meßkeils und derjenigen einer feinen Mikrometerschraube; der mittlere Fehler der mit dem Nonius an einer guten Teilung unter Verwendung einer rund 10-fach vergrößernden Lupe ausgeführten Ablesung mag in linearem Maße ungefähr $\pm 5 \mu$ betragen¹⁾.

Während der einfache Zeiger, auch wenn eine Lupe zur Ablesung benutzt wird, stets in der Teilungsebene liegt, handelt es sich beim Strichmikroskop um einen in der Bildebene des Mikroskops liegenden einfachen Zeigerstrich, welcher nicht unmittelbar auf der

Die Wirkungsweise des Mikroskops im allgemeinen ist folgende. Ein in Wirklichkeit aus einer — oder mehreren — achromatischen Linse bestehendes Objektiv L (Abb. 31) mit der Brennweite f entwirft von einem in der Entfernung $g > f$, aber $< 2f$ befindlichen Gegenstande G ein umgekehrtes, reelles, schon ziemlich stark vergrößertes Bild B in der Bildweite b , welches vom Auge durch eine in der Regel zusammengesetzte Okularlupe L_0 mit der Brennweite f_0 betrachtet und in der deutlichen Sehweite w als umgekehrt bleibendes, stark vergrößertes, virtuelles Bild gesehen wird. Sind α und β die Winkel, unter denen das vergrößerte Bild B_0 und der nicht vergrößerte Gegenstand G in der deutlichen Sehweite erscheinen, so ist die Mikroskopvergrößerung

$$v = v' \cdot v'' = \frac{f}{g-f} \left(\frac{w}{f_0} + 1 - \frac{e}{f} \right) \dots \dots \dots (122)$$

Hierin bedeutet $v' = B:G$ die reelle Objektivvergrößerung v' , während v'' die schon früher besprochene Lupenvergrößerung ist. Die verschiedenen in der Geodäsie als Ablesevorrichtungen verwendeten Mikroskope besitzt etwa 20- bis 50-fache Vergrößerung.

Das auf Anregung des Professors *Reinhertz*¹⁾ 1902 von *Fennel* konstruierte Strichmikroskop besitzt in der Bildebene $B.E.$ einen in Abb. 32 durch ein Kreuz bezeichneten, im Gesichtsfeld (Abb. 33) unmittelbar sichtbaren Zeigerfaden Z , dessen Stellung in der Teilung bis auf ein Zehntel oder auf ein Zwanzigstel des meist $10'$ betragenden Maßstabteils geschätzt werden kann. Durch einen oben durch ein Glasplättchen abgeschlossenen Stutzen St trifft an der Ablesestelle stets lotrechtes Licht auf die im übrigen verdeckte Teilung, so daß durch eine gleichmäßig gute Beleuchtung die Schärfe der Ableseung gefördert wird. Nach den von *Reinhertz* (siehe letzte Fußnote) durchgeführten Untersuchungen ist für ein Instrument von 13 cm Kreisdurchmesser $\pm 1'$ (linear $\pm 27 \mu$) als Maximalfehler der einzelnen Ableseung zu betrachten. Die entsprechenden mittleren Fehler sind rund $20''$ bzw. 1 mm. Das Strichmikroskop dürfte daher für Längenmessungen in bezug auf Genauigkeit dem Meßkeil etwa gleichwertig sein.

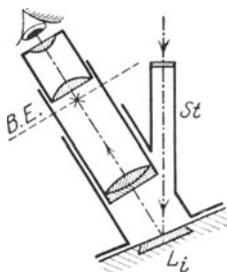


Abb. 32. Strichmikroskop (Achsenschnitt).

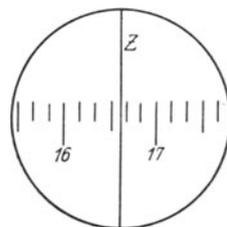


Abb. 33. Anblick im Strichmikroskop.

Das in der jetzt gebräuchlichen Form von *M. Hensoldt* 1878 erfundene Skalenmikroskop²⁾ enthält in der Bildebene des Mikroskops ein durchsichtiges Glasplättchen mit einer feinen Teilung (Abb. 34), deren Länge mit dem Bilde des Maßstabteiles M genau übereinstimmt. Enthält die Hilfsteilung, deren Nullstrich (rechter, langer Strich) zugleich der Ablesezeiger Z ist, n

¹⁾ Siehe *Reinhertz*, *Ableseung am Strichmikroskop*, Z. V. W. 1902, S. 213—214 und *Fennel*, *Fennels neue Schätzmikroskop-Theodolite*, Z. V. W. 1902, S. 214 ff.

²⁾ Schon in der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts hat *Brander*, (siehe *Friedrich, C.*, *Georg Friedrich Brander und sein Werk*, München 1909?) zu Meßzwecken Feinteilungen auf Glas in die Bildebene von Mikroskopen und Meßfernrohren gebracht. *Hensoldt* hat sein Skalenmikroskop unter dem Titel „Ein vereinfachtes Ablesemikroskop für Kreis- und Längenteilungen“ in der Z. V. W. 1879, S. 497—504 beschrieben. Die gleichzeitig entstandenen Abarten von *Hildebrand* (Kantenteilung auf einem Silberplättchen) und *Hahn* (Transversalteilung auf Glas) haben sich nicht eingebürgert.

Teile p , so ist der Wert der Teilungseinheit $p = M : n$. Fast immer ist $M = 20'$ und $n = 10$, also $p = 2''$. Die auszuführende Ablesung ist

$$A = A_0 + i \cdot M + r \cdot p, \dots \dots \dots (123)$$

wenn A_0 die vorhergehende Gradzahl, i die Anzahl der ganzen Maßstabteile zwischen A_0 und Z und r die Zahl von Einheiten der Hilfsteilung von Z bis zum vorhergehenden Strich der Hauptteilung bedeutet. Die zahlenmäßige Ablesung in Abb. 34 z. B. ist

$$A = 38^\circ + 2 \cdot 20' + 5,6 \cdot 2'' = 38^\circ 51' 12''.$$

Bei etwa 40- bis 50-facher Vergrößerung des Mikroskop ist diese die Augen etwas weniger anstrengende Ablesevorrichtung dem Nonius ungefähr gleichwertig.

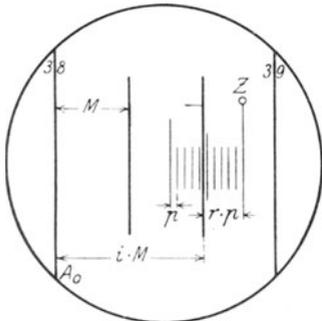


Abb. 34. Skalenmikroskop (Anblick im Gesichtsfeld).

Unter den heute gebräuchlichen geodätischen Ablesevorrichtungen ist die feinste das

Schraubenmikroskop, in dessen Bildebene ein durch Führungsstücke ff (Abb. 35) geleiteter Schlitten S durch eine in der Büchse M gelagerte Feinschraube F eine Verschiebung erfährt, welche an der geteilten

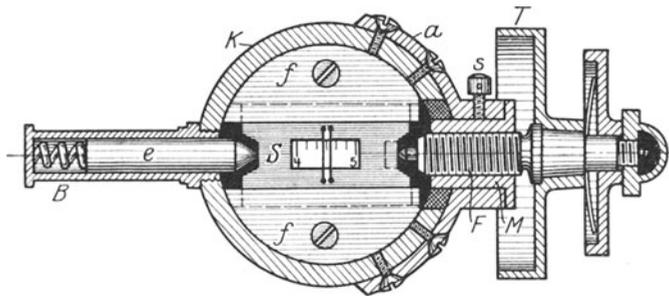


Abb. 35. Schraubenmikroskop (offener Mikroskopkasten).

Trommel T mittels eines — in der Abbildung nicht enthaltenen — Zeigers abgelesen werden kann¹⁾. Zur Vermeidung eines toten Ganges dient ein gegen den Schlitten drückender Federstift e , welcher in der mit dem Mikroskopkasten K verschraubten Federbüchse B sitzt. Auch kann der Gang der Feinmeßschraube durch ein auf die geschlitzte Mutter M drückendes Schraubchen s geregelt werden. In einem Ausschnitt des Schlittens erscheint das

bei guter Beleuchtung helle Bild der Maßstabteilung, von welchem sich ein über den Ausschnitt hinweg auf dem Schlitten aufgespannter Doppelfaden abhebt (siehe auch Abb. 36). Zeigermarke für die Ablesung ist hier die Spitze eines ins Teilungsbild hineinragenden Zahnes, welcher in fester Verbindung mit dem Führungsstück f eine feste, von der Schlittenstellung unabhängige Lage besitzt. Die Brennweite des Mikroskopobjektivs, dessen Abstand

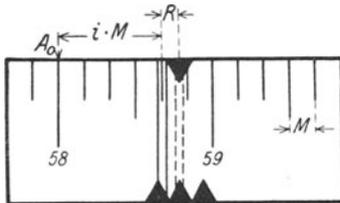


Abb. 36. Anblick des Bildes im Schraubenmikroskop.

¹⁾ Die Schraubenmikroskope sind in den Einzelheiten vielfach verschieden ausgebildet. Die hier gegebene Darstellung entspricht der *Fennelschen* Konstruktion (siehe Z. V. W. 1903, S. 574—578).

von der Teilung und die Ganghöhe der Meßschraube werden so gewählt, daß durch eine oder mehrere ganze Schraubenumdrehungen der Faden von einem Teilstrichbild bis zum nächsten verschoben wird. Bei der Ablesung wird nun der Doppelfaden, welcher in der Nullstellung (in Abb. 36 gestrichelt) die Zeigerspitze einschließt, verschoben, bis er den vorhergehenden (linken) Teilstrich einschließt. Faßt der zugehörige Trommelweg τ Trommelteile t , so ergibt das Produkt $R = \tau t$ offenbar den vom Faden überstrichenen Rest der Ablesung und die Gesamtablesung wird

$$A = A_0 + i \cdot M + \tau t, \dots \dots \dots (124)$$

wenn zwischen der letzten Gradablesung A_0 und dem Ablesezeiger noch i ganze Maßstabteile M liegen. Bei ganz scharfen Messungen wird der Faden stets auf beide den Zeiger einschließende Striche eingestellt. Ergeben sich dabei links und rechts die verschiedenen Restablesungen R_l und R_r , mit dem Mittel $a = \frac{1}{2}(R_l + R_r)$ und der Differenz $\Delta = R_l - R_r$ (Run), so tritt an Stelle von (124) der genauere Ausdruck

$$A = A_0 + i \cdot M + a + \left(\frac{M}{2} - a\right) \frac{\Delta}{M} \dots \dots \dots (125)$$

Die Leistungsfähigkeit dieser Ablesevorrichtung hängt in erster Linie von der Beschaffenheit und Lagerung der Mikrometerschraube ab¹⁾.

Schließlich ist noch das Noniusmikroskop²⁾ zu nennen, ein Mikroskop, in dessen Bildebene auf einem Glasplättchen — ähnlich wie beim Skalenmikroskop — eine feine Teilung aufgetragen ist, welche in bezug auf das Bild der Hauptteilung ein Nonius ist. Bei seiner Kürze — er faßt nur 10 Teile — kann er rasch überblickt und abgelesen werden. Nach Untersuchungen von *Hammer*, *Hohenner* und *Klempau*³⁾ scheint seine Genauigkeit etwa dieselbe zu sein, wie die eines vorzüglichen Nonius.

Alle die verschiedenen Ablesemikroskope müssen eine ganz bestimmte Stellung gegen die abzulesende Teilung einnehmen. Für das Strichmikroskop genügt es, wenn der deutlich sichtbare Zeiger in der Ebene des Teilungsbildes liegt, was beim Nichtzutreffen leicht durch ein Verschieben des ganzen Mikroskopes senkrecht zur Teilung herbeigeführt werden kann. Bei den anderen Mikroskopen aber muß auch noch das Bild der Teilungseinheit eine ganz bestimmte Länge besitzen, so daß ein etwaiger Überschuß über den Sollbetrag (Run) durch Verschiebung erst des Mikroskopobjektivs in der Objektivröhre und dann des ganzen Mikroskops in seiner Längsrichtung (Stimmen des Mikroskops) zu beseitigen ist. Der letzte Restfehler in der Abstimmung läßt sich beim Schraubenmikroskop, wie vorhin angegeben, aus den Einstellungen auf Strich links und rechts ermitteln und berücksichtigen, beim Skalenmikroskop und beim Noniusmikroskop hingegen nicht, so daß wohl schon aus diesem Grunde das Schraubenmikroskop von den andern Mikroskopen nicht überboten werden dürfte. Unbedingte Voraussetzung für die volle Ausnutzung der im Vergleich zum Nonius etwa größeren Leistungsfähigkeit der Mikroskope ist ihre möglichst stabile Verbindung mit der Unter-

¹⁾ Die Vereinigung des schon seit dem Ende des 16. Jahrhunderts bekannten Mikroskops mit der Meßschraube zum Schraubenmikroskop hat zuerst vermutlich *Ramsden* (1735—1800) durchgeführt.

²⁾ Theodolite mit Noniusmikroskopen werden seit etwa 10 Jahren von *Fennel* gebaut. Den dabei verwendeten Gedanken hat schon *Hensoldt* (siehe Z. V. W. 1879, S. 497 ff.) ausgesprochen.

³⁾ *Hammer, E. v.*, Theodolit mit Nonienmikroskopen von *A. Fennel*, Z. J. K. 1912, S. 148—154; *Hohenner, H.*, Beitrag zur Bestimmung der Ablesegenauigkeit des *Fennel*-schen Noniusmikroskops, Z. V. W. 1913, S. 484—487; *Klempau*, Über die Genauigkeit der *Fennel*-schen Theodolite mit Nonienmikroskopen, Der Landmesser 1914, S. 292—297.

lage. Sind in diesem Punkte Unzulänglichkeiten vorhanden, so ist schließlich ein guter Nonius in Verbindung mit einer hochwertigen Lupe vorzuziehen.

11. Zielvorrichtungen.

Zur Bezeichnung und Festhaltung beliebiger Richtungen im Raum dienen Ziel- oder Absehvorrichtungen, als welche hauptsächlich Diopter und Meßfernrohre in Betracht kommen.

a) Das Diopter.

Die ältere und ungenauere Zielvorrichtung ist das Diopter, dessen Hauptbestandteile zwei durch ein Lineal, eine Röhre oder ein anderes Mittel in fester Verbindung stehende Plättchen ausmachen. Der dem Auge zugewendete Okularflügel *o* (Abb. 37) enthält in der Mitte ein rundes Schauloch von etwa 1 mm Durchmesser, während der dem einzustellenden Gegenstand *P* zugewendete Objektivflügel *O* mit einem sog. Fadenkreuz aus Pferdehaaren oder feinem Draht ausgestattet ist.



Abb 37. Diopter.

Dient das Instrument lediglich zur Bezeichnung von Lotebenen, so ist wenigstens einer der beiden Flügel mit einem vertikalen Spalt versehen. Beim Gebrauch ist das Diopter so lange zu verstellen, bis — vom Schauloch aus gesehen — der Schnittpunkt des Objektivkreuzes den einzustellenden Punkt *P* deckt. In diesem Falle liegt *P* auf der durch den Schaulochmittelpunkt und den Fadenkreuzschnittpunkt bestimmten Ziellinie. Das Diopter besitzt den Vorteil eines großen Gesichtsfeldes; mißlich ist der Umstand, daß das Auge beim Einrichten den Mittelpunkt des Objektivkreuzes und den einzustellenden Gegenstand wegen ihrer sehr verschiedenen Entfernungen nicht gleichzeitig, sondern nur rasch nacheinander deutlich sehen kann. Diese Absehvorrichtung findet heute noch bei den verschiedenen Kreuzscheibenkonstruktionen Verwendung; sie tritt als sog. Sucher auch in Verbindung mit stärker vergrößernden Fernrohren auf, und ermöglicht es, den einzustellenden Punkt schnell in das kleine Gesichtsfeld des Fernrohrs zu bringen. Die Zielgenauigkeit des Diopters hängt hauptsächlich von der Schaulochöffnung, die zur Vermeidung von Beugungserscheinungen nicht unter 1 mm betragen darf, ferner von der Dicke der Objektivfäden und in geringerem Grade auch von der Länge des Instrumentes ab. Einem guten Diopter kann man einen mittleren Zielfehler von etwa $\pm 20''$ zuschreiben¹⁾.

b) Das Meßfernrohr.

Zu einer wesentlich genaueren Zielvorrichtung hat sich im Laufe der Zeit das Meßfernrohr entwickelt. Dessen ursprüngliche Gestalt ist das in seinen Hauptbestandteilen schon 1611 von *Kepler* angegebene einfache astronomische Fernrohr. Dasselbe besteht im wesentlichen aus zwei Sammel-

¹⁾ *Stampfer, S.*, (Über die Genauigkeit des Visierens bei Winkelmessungen, 18. Bd. d. Jahrbücher d. k. k. Polytechnischen Instituts in Wien, Wien 1834, S. 211 bis 236) gibt noch beträchtlich kleinere Fehler an und teilt auch eine Zusammenstellung der zweckmäßigsten Abmessungen mit.

Von Interesse ist es auch, daß *Tycho Brahe* (1546 bis 1601) die astronomischen Beobachtungen, aus denen später *Kepler* die berühmten Bewegungsgesetze der Planeten ableitete, noch mit Diopterinstrumenten ausgeführt hat.

linsen L und L_0 (optische Mittelpunkte O , O_0) mit einer großen und einer kleinen Brennweite f bzw. f_0 (Abb. 38). Die erste dieser Linsen, das dem Gegenstand zugewendete, in der Objektivröhre $O.R.$ steckende Objektiv, entwirft von einem Gegenstand in der Bildweite b ein verkleinertes, reelles,

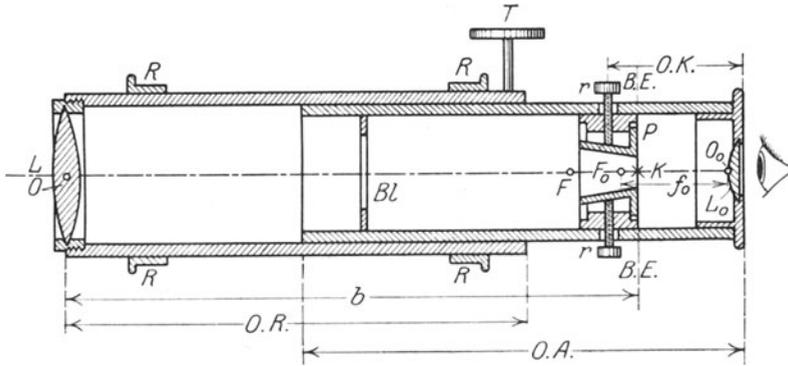


Abb. 38. Einfaches astronomisches Fernrohr (Längsschnitt).

umgekehrtes Bild, von dem das im Okularauszug $O.A.$ steckende und als Lupe wirkende Okular ein umgekehrt bleibendes, virtuelles, stark vergrößertes Bild erzeugt, welches das Auge in der deutlichen Schweite w sieht (siehe auch Abb. 39). Okularröhre und Objektivröhre stecken ineinander, sind zur Vermeidung von Reflexen innen geschwärzt und durch eine Okulartriebsschraube T ,

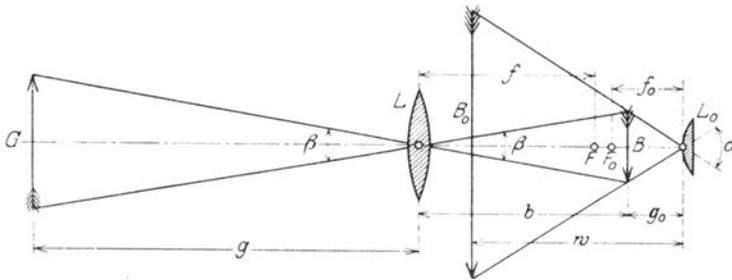


Abb. 39. Strahlengang im einfachen astronomischen Fernrohr.

in seltenen Fällen durch einen Objektivtrieb, gegeneinander verschiebbar. Fernrohre mit einer eigenen mechanischen Achse sind auch noch mit zylindrischen Ringen RR versehen. Die das Bild verschlechternden Randstrahlen werden durch die Blende Bl abgehalten, während die eigentliche Abgrenzung des Bildes die Bildfeldblende P besorgt. Der als Okularkopf $O.K.$ bezeichnete hintere Teil des Okularauszugs enthält noch die für ein Zielfernrohr unentbehrliche Fadenzkreuzeinrichtung¹⁾, welche erst der Engländer *William Gascoigne* um 1640 eingeführt hat. Auf eine in der Bildebene $B.E.$ liegende, auch als Bildfeldblende dienende Fadenzkreuzplatte P sind Spinnfäden — der Erfinder hat Pferdehaare benutzt — gespannt, deren Schnittpunkt K mit einem Punkt des Bildes B zur Deckung gebracht werden kann, so daß das Fernrohr eine ganz bestimmte Richtung erhält. Sehr alt ist schon der Ersatz der Spinnfäden durch feine, in Glas eingerissene Linien. Die Fadenzkreuzplatte sitzt

¹⁾ Siehe hierzu *Hammer, E.*, Zur Geschichte des Fadenzkreuzes, Z.V.W. 1896, S. 513 ff.

auf einem Kegelstumpf, welcher meist durch vier Richtschraubchen *rr* gefaßt wird und senkrecht zur Längsrichtung des Fernrohrs etwas verschoben werden kann. Auch eine geringe Verschiebung in der Längsrichtung ist möglich, wenn die Schraubchen durch schlitzförmige Öffnungen gehen. Gegen ein etwa feststehendes Fadenkreuz läßt sich auch das Okular verschieben, wenn es nicht durch Verschraubung, sondern mittels einer Steckhülse in der Okularröhre

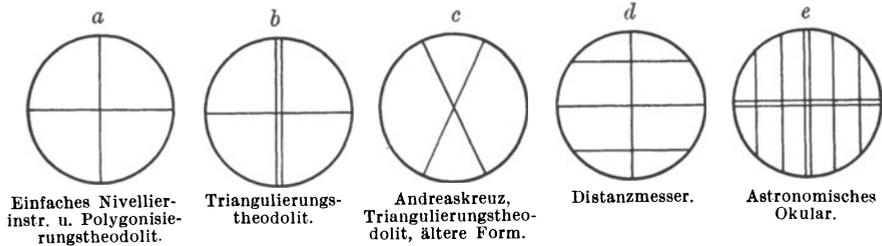


Abb. 40. Fadenkreuzformen.

befestigt ist. Abb. 40 gibt eine Zusammenstellung der wichtigsten Fadenkreuzformen. Die Größe des virtuellen Bildes B_0 (Abb. 39) läßt sich leicht durch die Gegenstandsgröße und die verschiedenen auftretenden Entfernungen ausdrücken. Nach den in der Abbildung enthaltenen ähnlichen Dreiecken ist

$$B_0 = \frac{w}{g_0} \cdot \frac{b}{g} \cdot G = \frac{w}{g} \cdot v \cdot G \dots \dots \dots (126)$$

die scheinbare Bildgröße in der deutlichen Sehweite.

Die Abkürzung $v = b : g_0$ ist, wie wir bald sehen werden, die Fernrohrvergrößerung.

Bei der Einstellung des Fernrohrs auf einen Punkt spielen sich folgende Vorgänge ab:

1. Zur deutlichen Sichtbarmachung des Fadenkreuzes ist an dem auf hellen Hintergrund gerichteten Fernrohr durch Verschieben der Okularhülse — seltener des Fadenkreuzes — der Abstand der Okularlinse von den Fäden so zu ändern, daß diese scharf und deutlich erscheinen.
2. Ist etwa mit Hilfe eines Suchers oder durch bloße Versuche der Zielpunkt in das Gesichtsfeld des Fernrohrs gebracht, so ist durch Verstellen des ganzen Okularauszuges mittels der Triebsschraube auch die deutliche Sichtbarkeit des Zielbildes herbeizuführen. Eine scharfe Probe für das vollkommene Gelingen dieses Vorganges liegt darin, daß beim Hin- und Herbewegen des Auges vor dem Okular der Fadenkreuzschnittpunkt sich nicht mehr gegen das Bild verschieben darf, da dieses nach seiner Deutlichmachung in der Ebene des ebenfalls deutlich sichtbaren Fadenkreuzes liegen soll. Ist trotzdem eine solche Verschiebung vorhanden, so spricht man von einer Parallaxe zwischen Bild und Fadenkreuz, welche durch eine geringe Verstellung des Okularauszuges, möglicherweise auch noch durch eine kleine Verbesserung in der deutlichen Sichtbarmachung des Fadenkreuzes zu beheben ist.
3. Nunmehr kann bei angezogenen Klemmen mittels horizontal und vertikal wirkender Feinstellschrauben das Fernrohr so gedreht und geneigt werden, daß der Fadenkreuzschnittpunkt das Bild des Zielpunktes deckt. Dann ist der Punkt eingestellt, d. h. die als Zielinie bezeichnete Verbindungsgerade des Fadenkreuzschnittpunktes mit dem optischen Mittelpunkt des Objektivs geht in ihrem äußeren Teile durch den angezielten Punkt.

Für die Leistungsfähigkeit des Meßfernrohrs sind hauptsächlich maßgebend 1. die Fernrohrvergrößerung, 2. das Gesichtsfeld, 3. die Fernrohrhelligkeit, 4. die Beschaffenheit der Fernrohrbilder.

Die Fernrohrvergrößerung v ist das Verhältnis der beiden Winkel α und β , unter welchen im Fernrohr das virtuelle Bild B_0 und andererseits mit freiem Auge der Gegenstand G erblickt werden.

Sie kann an Hand von Abb. 39 z. B. aus den optischen Konstanten des Fernrohrs gefunden werden. Wegen der im Vergleich zur Gegenstandsweite g recht kleinen Fernrohrlänge dürfen wir den Scheitel des Winkels β auch in den optischen Mittelpunkt des Objektivs verlegen, ohne den Winkel merklich zu verändern. Dann ist, wenn wir B näherungsweise als Kreisbogen zum Halbmesser b bzw. g_0 auffassen,

$$v = \alpha : \beta = b : g_0. \dots \dots \dots (127)$$

Für größere Entfernungen, wie sie beim geodätischen Meßfernrohr fast immer auftreten, ist die Bildweite b nahezu gleich der Objektivbrennweite f . Ferner ist wegen der Lupenwirkung des Okulars g_0 nahezu gleich der Okularbrennweite f_0 , so daß der Quotient

$$v = f : f_0 \dots \dots \dots (128)$$

der beiden Linsenbrennweiten in einer praktischen Zwecken genügenden Annäherung die Fernrohrvergrößerung angibt.

Am einfachsten und häufigsten aber wird diese unmittelbar aus dem Sehwinkelverhältnis bestimmt, wie in Abb. 41 (teilweise Umklappung) angedeutet ist. Projiziert man das im Fernrohr gesehene Bild einer Latte von der Länge L auf die mit dem anderen, unbewaffneten Auge direkt gesehene Latte, so erscheint ein vergrößerter Lattenabschnitt (l) unter dem gleichen Gesichtswinkel α wie die ganze Lattenlänge L dem freien Auge. Diesem würde der Lattenabschnitt l unter dem kleineren Gesichtswinkel β erscheinen. Nach dem Begriff der Fernrohrvergrößerung ergibt sich mit den in die Abbildung eingetragenen Bezeichnungen

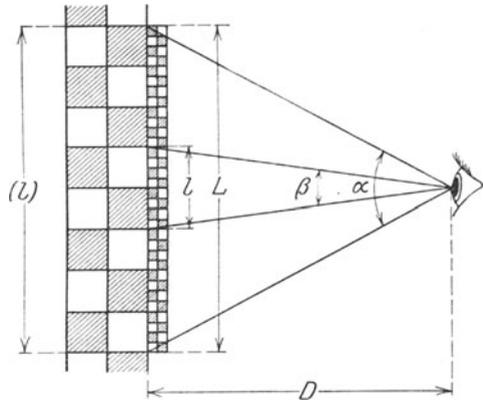


Abb. 41. Bestimmung der Fernrohrvergrößerung aus dem Sehwinkelverhältnis.

$$v = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{L}{D} : \frac{l}{D} = \frac{L}{l}, \dots \dots \dots (129)$$

wenn l und L wie Kreisbögen zum Halbmesser D behandelt werden, was bei den kleinen auftretenden Winkeln praktisch erlaubt ist.

Auch mit Hilfe des Ramsdenschen Lichtkreises kann man die Vergrößerung des Fernrohrs bestimmen. Bei Stellung des Fernrohrs auf ∞ besteht nämlich die Beziehung $A : d = f : f_0 = v$, wenn A die Objektivöffnung und d den Durchmesser des am Okular erscheinenden hellen Kreises bedeutet. Es ist also unter der Voraussetzung, daß der Ramsdensche Bildkreis der ganzen Objektivöffnung entspricht, die Vergrößerung auch gleich dem Verhältnis der Objektivöffnung zum Durchmesser des Ramsdenschen Bildkreises.

Fernrohre von mittlerer Leistungsfähigkeit besitzen eine etwa 20fache Vergrößerung.

Unter dem Gesichtsfeld γ versteht man den Öffnungswinkel des im Fernrohr auf einmal zu überblickenden Kegelraums, dessen Leitlinie und Spitze der Innenwand der Bildfeldblende P (Abb. 42) und der optische Mittelpunkt O des Objektivs sind. Bei einer Blendenöffnung d ist $\hat{\gamma} = d:b$ oder auch $\hat{\gamma} = d:f$, da man für diesen Zweck wieder die Bildweite durch die Brennweite ersetzen darf. Drückt man die Blendenöffnung durch die Form $d = k \cdot f_0$ in Einheiten der Okularbrennweite aus, so ergibt sich

$$\hat{\gamma} = k(f_0 : f) = k : v \dots \dots \dots (130)$$

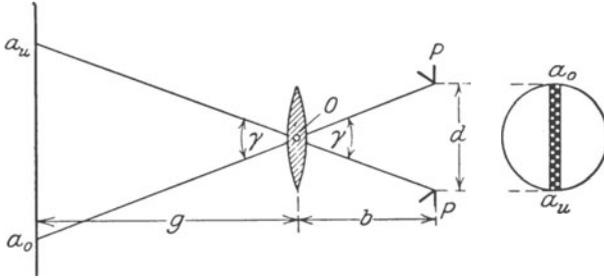


Abb. 42. Bestimmung des Fernrohrgesichtsfeldes.

Bei unveränderlicher Blendenöffnung ist daher das Gesichtsfeld zur Vergrößerung des Fernrohrs umgekehrt proportional.

Die wirkliche Bestimmung des Gesichtsfeldes erfolgt aber nicht aus den Fernrohrabmessungen, sondern zweckmäßiger auf

empirischem Wege. Richtet man das horizontale Fernrohr so auf eine in der Entfernung g befindliche lotrechte Latte, daß diese zu einem Durchmesser des Gesichtsfeldes wird, und erscheinen bei dieser Stellung a_o und a_u als Lattenablesungen am oberen und unteren Blendenrand, so ist, wie ein Blick auf Abb. 42 zeigt, das im Gradmaß ausgedrückte Gesichtsfeld

$$\gamma^0 = \varrho^0 \frac{a_u - a_o}{D} \dots \dots \dots (131)$$

Bei mittleren Instrumenten beträgt es etwa $1\frac{1}{2}^0$.

Die Fernrohrhelligkeit h ist das Verhältnis der Lichtmengen H' und H welche das Fernrohrbild und der frei gesehene Gegenstand auf die Flächeneinheit der Netzhaut senden. Man findet dafür auf ziemlich einfachem Wege den Ausdruck

$$h = \frac{H'}{H} = \frac{A^2}{O^2 v^2}, \dots \dots \dots (132)$$

wo A die Objektivöffnung, O die Pupillenöffnung und v die Fernrohrvergrößerung bedeutet. h kann durch Verkleinerung eines etwa veränderlichen O nur so lange gesteigert werden, bis das aus dem Okular austretende Licht gerade die Pupille ausfüllt. In diesem Falle ist $h_{max} = 1$, ebenso für jedes kleinere O . Der angegebene Größtwert 1 der Fernrohrhelligkeit wird in Wirklichkeit niemals erreicht, weil beim Durchgang der Strahlen durch die Linsen sowie durch Reflexion an den Linsenoberflächen immer etwas Licht verloren geht. Nach (130) und (132) ist h zu γ^2 direkt und zu v^2 indirekt proportional.

Die Fernrohrbilder sollen genügend groß und hell und im übrigen so beschaffen sein, daß sie zum Original perspektivisch richtig sind, keine störenden Farben- oder Kugelabweichung zeigen und alle wichtigen Einzelheiten deutlich erkennen lassen. Betrachtet man im Fernrohr eine scharf begrenzte schwarz-weiße Felderteilung oder andere regelmäßig begrenzte, tief-schwarze Körper auf weißem Papier, so sollen auch die Bilder deutlich, tief schwarz, unverzerrt und abgesehen etwa von einem schwachblauen Saum frei von farbigen Rändern erscheinen. Von besonderer Wichtigkeit für die

deutliche Sichtbarkeit der Einzelheiten im Bild ist das Trennungs- oder Auflösungsvermögen des Fernrohrs. Man versteht darunter das Mindestmaß des Gesichtswinkels, welches Strichdicken, Feldbreiten usw. besitzen, wenn die gut beleuchteten Striche und Felder im Fernrohr eben noch als getrennte Gebilde erscheinen. Muß man z. B. eine Nivellierlatte mit der Feldgröße t in die Entfernung g bringen, damit dieser Grenzzustand eintritt, so ist das in Sekunden ausgedrückte Trennungsvermögen

$$\tau = \varrho'' \frac{t}{g} \dots \dots \dots (133)$$

Das einfache astronomische Fernrohr mit seinen einfachen Linsen liefert nur sehr unvollkommene Bilder, deren starke Kugel- und Farbenabweichung nur durch sehr starkes Abblenden, also zu sehr auf Kosten der Helligkeit genügend vermieden werden könnte. Diese Mängel lassen sich durch die Verwendung geeignet zusammengesetzter Linsen praktisch bedeutungslos machen. Nicht die älteste, aber die wichtigste Linsenzusammenstellung ist das achromatische Objektiv, welches 1758 zuerst von *Dollond* hergestellt und am Anfange des 19. Jahrhunderts durch *Fraunhofer* wesentlich vervollkommen wurde. Es besteht aus einer dem Gegenstand zugewendeten bikonvexen Kronsglaslinse L_1 (Abb. 43) und einer anschließenden optisch

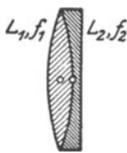


Abb. 43. Achromatisches Objektiv.

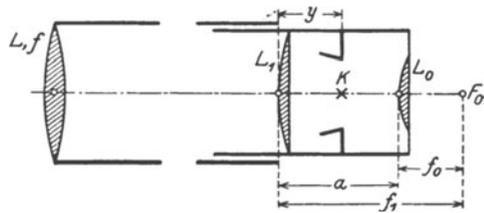


Abb. 44. Meßfernrohr mit Huygens-Okular.

dichteren Flintglaslinse L_2 , welche so ausgewählt werden, daß die Brennpunkte zweier Farben genau und die der übrigen näherungsweise damit zusammenfallen. Für Überschlagsrechnungen kann der geringe Abstand der optischen Mittelpunkte der beiden Linsen mit den Brennweiten f_1, f_2 vernachlässigt werden, so daß sich nach (112) die Ersatzbrennweite des Systems zu $\varphi = f_1 f_2 : (f_1 + f_2)$ ergibt.

Schon um 1660 ist das zusammengesetzte Okular von *Huygens* (Abb. 44) entstanden, welches aus zwei plankonvexen Linsen L_0 (Augenglas) und L_1 (Kollektiv) mit den Brennweiten f_0, f_1 und dem Abstand a besteht. Die dem Objektiv ihre gewölbten Seiten zukehrenden Linsen sollen — was nicht immer genau zutrifft — so ausgewählt werden, daß sie gemeinsamen hinteren Brennpunkt F_{01} besitzen und im übrigen das Verhältnis

$$f_0 : a : f_1 = 1 : 2 : 3 \dots \dots \dots (134)$$

besteht. Beim Zutreffen dieser Voraussetzungen halbiert die Bildebene den Linsenabstand, so daß ihr Abstand vom Kollektiv den Betrag $y = f_0$ annimmt. Vom optischen Standpunkt aus ist diese Konstruktion eigentlich als zusammengesetztes Objektiv anzusprechen, da L und L_1 zusammen das durch L_0 als Lupe betrachtete reelle Bild erzeugen. Lediglich die gleichzeitige Befestigung von L_1 und L_0 in der Okularröhre rechtfertigt die Bezeichnung „zusammengesetztes Okular“. Die Ersatzlinse für L und L_1 besitzt für die Stellung des Fernrohres auf unendlich die Brennweite $\varphi = \frac{2}{3} f$.

Um 1760 entstand das in Abb. 45 skizzierte *Ramsden*-Okular, eine aus

zwei, die gewölbten Seiten einander zukehrenden, bikonvexen Linsen L_0 (Augenglas) und L_1 (Kollektiv) zusammengesetzte Lupe, deren Bestandteile ebenfalls einen gemeinsamen hinteren Brennpunkt F_{01} haben und der Bedingung

$$f_0 : a : f_1 = 5 : 4 : 9 \dots \dots \dots (135)$$

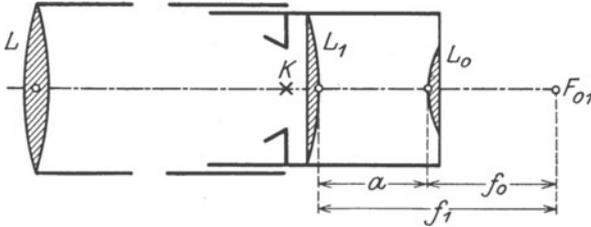


Abb. 45. Meßfernrohr mit Ramsden-Okular.

genügen sollen. Das Fadenkreuz liegt bei dieser Konstruktion sehr nahe am Kollektiv zwischen diesem und dem Objektiv. Die L_1 und L_0 ersetzende Äquivalentlinse besitzt hier die Brennweite $\varphi_0 = 0,9 f_0$. Ein Vergleich der besprochenen Okularformen zeigt, daß beim Huygens-

Okular das Fadenkreuz eine sehr geschützte Lage besitzt, während das Ramsden-Okular perspektivisch etwas bessere Bilder liefert. Über ihre Leistungsfähigkeit im Vergleich mit dem einfachen astronomischen Fernrohr unterrichtet die Zusammenstellung in Tabelle 7.

Tabelle 7.

Instrument	Vergrößerung	Gesichtsfeld	Fernrohrhelligkeit	Fernrohrverkürzung
Einfaches astronomisches Fernrohr	v	γ	h	
Huygens-Fernrohr	$v' = \frac{2}{3} v$	$\gamma' = \frac{3}{2} \gamma$	$h' = \frac{9}{4} h$	$\frac{1}{2} f_0$
Ramsden-Fernrohr	$v'' = \frac{10}{9} v$	$\gamma'' = \frac{9}{10} \gamma$	$h'' = \frac{81}{100} h$	$\frac{1}{50} f_0$

Eine um 1850 entstandene Weiterbildung des Ramsden-Okulars ist das orthoskopische Okular von *Kellner*, bei dem das Augenglas selbst eine achromatische Linse ist. Im Euriskop-Okular (*Hensoldt* 1907) ist auch noch das Ramsdensche Kollektiv ein Achromat. Diesen Okularen werden farbreinere, bis an den Gesichtsfeldrand scharfe, perspektivisch richtige Bilder und ein großes Gesichtsfeld nachgerühmt¹⁾.

Bei sehr stark geneigten Sichten kann man am einfachsten durch Verwendung eines den Strahlengang um rund 90° ablenkenden Okularprismas P , (Abb. 46) eine Beobachtung bei bequemer Kopfhaltung ermöglichen. Diese einfache Anordnung besitzt anderen gegenüber den großen Vorteil, daß der Strahlengang vor der Bildentstehung nicht gestört wird, also auch etwaige Schlifffehler des Prismas, die gegenseitige Lage zwischen Bild und Fadenkreuz nicht stören können²⁾.

¹⁾ Besondere Okulare verwendet die Firma *Zeiß* bei ihren Instrumenten (siehe z. B. *Gleichen*, Die Theorie der modernen optischen Instrumente, Stuttgart 1911, S. 145 ff.). — Eine ziemliche Fernrohrverkürzung kann durch die Verwendung eines Teleobjektivs, dessen hinterer Hauptpunkt noch beträchtlich vor die Vorderlinse des Systems fällt, erreicht werden. Neuerdings ist auch — hauptsächlich für Berichtigungszwecke — die Konstruktion von biachsialen Fernrohren wieder aufgenommen worden, nachdem *Brander* schon in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts amphidiotrische Fernrohre, d. h. Fernrohre zum Vorwärts- und Rückwärtszielen gebaut hatte (siehe *G. F. Brander*, Die neue Art, Winkel zu messen, Augsburg 1772).

²⁾ Für Messungen auf sehr verkehrsreichen Plätzen wird manchmal aus Gründen der Sicherheit ein Fernrohr mit aufrechten Bildern gewünscht. Diesen Zweck kann man durch eine nochmalige Bildumkehrung mittels eines sog. terrestrischen Okulars erreichen, welches jedcch unbequem lang ist. Einfacher gelangt man dazu durch Ein

Die Fernrohrachsen sind: 1. die Zielachse, 2. die mechanische Achse, 3. die optische Achse.

Die Zielachse oder Ziellinie verbindet den Fadenkreuzschnittpunkt mit dem optischen Mittelpunkte des Objektivs oder Objektivsystems, während die mechanische Achse durch die Mittelpunkte der beiden zylindrischen Ringe *RR* (in Abb. 38) bestimmt ist. Weniger wichtig ist die durch die optischen Mittelpunkte des Objektivs und des Okulars gehende optische Achse. Diese drei Linien sollen zusammenfallen, was dann zutrifft, wenn der Fadenkreuzschnittpunkt und die verschiedenen optischen Mittelpunkte auf der mechanischen Fernrohrachse liegen.

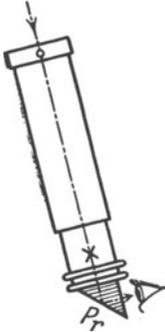


Abb. 46.
Okularprisma.

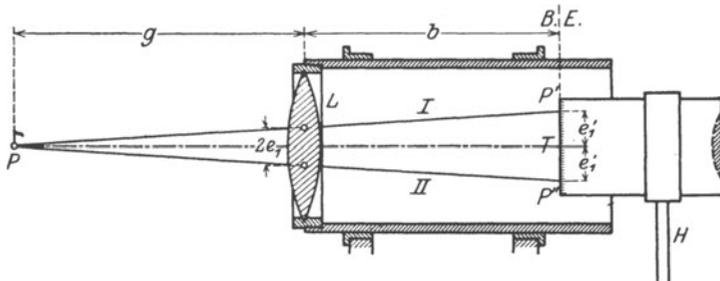


Abb. 47. Prüfung der zentrischen Lage des Objektivs.

Zur Prüfung der zentrischen Lage des Objektivs *L* (Abb. 47) steckt man etwa bei herausgenommenem Okularauszug eine in ihrer Brennebene eine feine Glasteilung *T* enthaltende Röhrenlupe so in die Objektivröhre, daß die Hilfsteilung in die Objektivbildebene *B. E.* zu liegen kommt und die Röhrenlupe unabhängig vom Fernrohr durch einen besonderen Halter *H* getragen wird. Ursprünglich wird zu einem eingestellten Punkt *P* ein Bildort *P'* gehören; nach einer halben Drehung des Fernrohrs um seine in der Abbildung durch Strichpunkte bezeichnete mechanische Achse gehört dazu ein anderer Bildpunkt *P''*, wenn eine Exzentrizität e_1 des Objektivmittelpunkts vorhanden ist. Aus dem an der Mikrometerteilung abgelesenen Abstand $P'P'' = 2e_1'$ findet man leicht den Ausdruck

$$e_1 = e_1' \frac{g}{g + b} \dots \dots \dots (136)$$

Zur Untersuchung der zentrischen Lage des Okulars kann man bei getrennt aufgestelltem Objektiv irgendeinen mit freiem Auge deutlich sichtbaren Punkt (z. B. oberes Lattenende) auf das Fernrohrbild einer Lattenteilung vor und nach der Drehung des Fernrohres um seine mechanische Achse projizieren. Ist der am Lattenbild abgelesene Abstand dieser Projektionen $2r$, so ist der Abstand des optischen Mittelpunktes der Okularlinse von der mechanischen Fernrohrachse hinreichend genau

$$e_2 = \frac{b}{g} \cdot r, \dots \dots \dots (137)$$

wenn *b* und *g* ihre bisherige Bedeutung besitzen.

schalten eines vollständig bildumkehrenden Prismas in den Strahlengang, wie es beim *Hensoldt*schen Fernrohr mit aufrechten Bildern (siehe *Hammer, E.*, *Z.V.W.* 1909, S. 247 bis 250) zutrifft. Allerdings darf man nicht übersehen, daß hier jede Lageänderung des Prismas eine Bildverschiebung gegen das feststehende Fadenkreuz zur Folge hat.

Eine geringe Linsenzentrizität hat nur einen unbedeutenden Einfluß auf die Messungen, der durch geeignete Anordnungen leicht vollständig ausgeschaltet werden kann. Man begnügt sich daher meist mit einem kurzen summarischen Prüfungsverfahren, indem man untersucht, ob bei einer Drehung des ganzen Fernrohres um seine mechanische Achse ein mit freiem Auge gesehener, ins Fernrohrbild hineinprojizierter Punkt in diesem feststeht oder wandert.

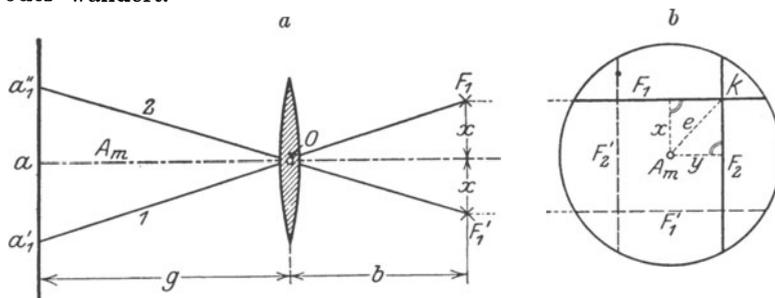


Abb. 48. Ermittlung der Fadenkreuzexzentrizität.

Die Exzentrizität e des Fadenkreuzschnittpunktes K (Abb. 48) läßt sich aus den Abständen x, y der beiden Fäden F_1, F_2 von der mechanischen Achse A_m mittels der Beziehung $e^2 = x^2 + y^2$ finden. Um die Komponente x zu gewinnen, macht man den ersten Faden F_1 zum horizontalen und liest seine Stellungen a_1' und a_1'' an einer lotrechten Teilung in der ursprünglichen 1. Fernrohrlage und nach einer Halbdrehung des Fernrohres um seine mechanische Achse in der 2. Fernrohrlage ab. Mittels der beiden in Abb. 48a enthaltenen ähnlichen Dreiecke findet man leicht

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{g} (a_1'' - a_1') \dots \dots \dots (138)$$

In ganz entsprechender Weise ergibt sich nach einer Drehung um 90° , welche F_2 zum horizontalen Faden macht, die Komponente y aus Ablesungen a_2', a_2'' . Zur Beseitigung der Fadenkreuzexzentrizität e ist jeder Faden durch Verschieben auf die Mittellage aus beiden Fadenstellungen mittels der Fadenkreuzschraubchen für sich zu zentrieren. Der Faden F_1 z. B. wäre auf die Ablesung $a = \frac{1}{2}(a_1' + a_1'')$ einzustellen. Ist die Berichtigung genügend gelungen, so darf der Fadenkreuzschnittpunkt beim Drehen des Fernrohres um seine mechanische Achse den ursprünglich eingestellten Punkt nicht verlassen.

Die Erfahrung lehrt, daß die Zielgenauigkeit unter sonst gleichen Umständen nicht nur von der Vergrößerung, sondern wesentlich auch von der Helligkeit und Schärfe des Bildes sowie der Form der Zielzeichen abhängt. Aus sehr gründlichen und umfangreichen Untersuchungen gibt Noetzli¹⁾ abweichend von den bisherigen Annahmen an, daß für einen einigermaßen geübten Beobachter unter nicht zu ungünstigen äußeren Umständen der mittlere Zielfehler

$$m = \pm 4'' : \sqrt{v} \text{ bis } m = \pm 3'' : \sqrt{v} \dots \dots \dots (139)$$

— v = Vergrößerung — gesetzt werden darf. Die günstigste scheinbare Fadenstärke ist nach ihm für gewöhnlich $50''$ bis $60''$, bei Einstellungen auf stärkere

¹⁾ Noetzli, A., Untersuchungen über die Genauigkeit des Zielens mit Fernrohren, Zürich 1915. Diese sehr lesenswerte Arbeit enthält auch noch andere für die Zielgenauigkeit wichtige Folgerungen, auf die hier nicht in allen Einzelheiten eingegangen werden kann.

Lichtquellen dagegen 100 bis 150". Dünne Einzelfäden sind meist günstiger als parallele Doppelfäden, deren Abstand für die scheinbare Zielgröße bald zu groß und bald zu klein ist. Sie könnten zweckmäßig durch zwei in der Mitte des Bildfeldes in Keilform zusammenlaufende Fäden ersetzt werden¹⁾. Die günstigste Form der Zielmarke ist ein Keil mit kleinem Öffnungswinkel²⁾.

12. Die Libelle.

Die ältesten Hilfsmittel zur Lotrechtstellung und Horizontallegung von Geraden und Ebenen sind zweifellos das Lot und die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit. Ersteres findet als Senkel noch heute ausgedehnte Anwendung, und in der Kanalwage besitzen wir auch noch ein auf dem hydrostatischen Prinzip beruhendes Instrument. Genauere Orientierungen gegen das Lot aber führt man heute ausschließlich mit Hilfe der auf dem Auftrieb beruhenden Libellen durch, die in der Form von Dosenlibellen und Röhrenlibellen Verwendung finden.

a) Die Dosenlibelle.

Die Dosenlibelle besteht in ihrer zweckmäßigsten Form aus einem einzigen zugeschmolzenen³⁾, zylindrischen Glaskörper (Abb. 49), der oben durch eine Kugelkappe abgeschlossen wird, welche — neuerdings zur Vermeidung von Parallaxe auf der Innenfläche — einen zu ihrem Mittelpunkte M konzentrischen Einstellkreis K besitzt. Die Füllflüssigkeit ist meist Weingeist, auf dem eine aus dessen Dampf bestehende Blase schwimmt, deren Durchmesser am besten 1 bis 1,5 mm unter dem des Einstellkreises bleibt. Zum Schutze der Libelle dient eine Metallfassung, die bei Instrumenten zur Horizontalstellung von Ebenen mit einer zur Tangentialebene T_m von M parallelen, ebenen Aufsatzfläche ausgestattet ist. Wird unter dieser Voraussetzung die Libelle durch Neigen der Unterlage zum Einspielen gebracht, so fällt M in den Blasenmittelpunkt, zu dem stets ein lotrechter Halbmesser gehört. Die darauf senkrecht stehende Tangentialebene T_m und die dazu parallele Aufsatzfläche AA bzw. die Oberfläche der Unterlage sind also dann horizontal. Soll die Libelle zur Lotrechtstellung einer mit ihr verbundenen Achse dienen, so muß T_m auf dieser senkrecht stehen.

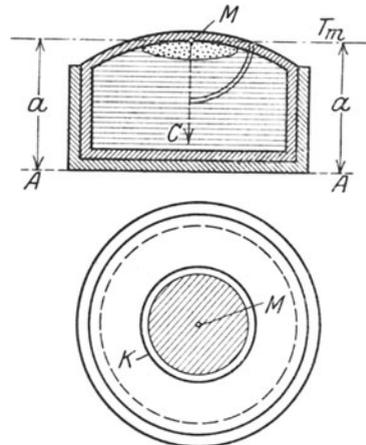


Abb. 49. Dosenlibelle im Vertikalschnitt und im Grundriß.

Die Berichtigung der Dosenlibelle, welche mit größtem Vorteil zur ersten angenäherten Orientierung gegen das Lot dient, entspricht ganz derjenigen der hernach ausführlicher zu behandelnden Röhrenlibelle. Zur Beurteilung

¹⁾ Diese Erkenntnis ist nicht neu, wie die altbekannte Fadenkreuzform des Andreas-kreuzes beweist.

²⁾ Die erste größere Messung, bei der verfeinerte Instrumente mit Fernrohren Verwendung fanden, war die von *Picard* 1669 bis 1670 ausgeführte Gradmessung.

³⁾ Zugeschmolzene Dosenlibellen, bei denen kein Auslaufen der Füllflüssigkeit und kein Eindringen der Luft zu befürchten ist, hat 1904 zuerst *Mollenkopf* in Stuttgart hergestellt; siehe Z.V.W. 1904, S. 699.

ihrer ungefähren Leistungsfähigkeit mögen die folgenden Angaben von *Samel*¹⁾ dienen. Er fand bei senkrechter Draufsicht an zugeschmolzenen Libellen

1. den mittl. Fehler einer Lotrechtstellung d. Drehachse $m = \pm (35 \pm 8,4'')$,
 2. " " " des Einspielenlassens d. Dosenlibelle $m = \pm (21 \pm 12,4'')$,
 3. d. Konvergenzwinkel zwisch. Stehachse u. Dosennorm. $Z = \pm (28 \pm 2,5'')$
- (140)

Diese Zahlen sind arithmetische Mittel aus Einzelbestimmungen an vier Dosenlibellen mit einem durchschnittlichen Krümmungshalbmesser von rund 0,8 m.

b) Die Röhrenlibelle²⁾.

Dieses feinere, auch zur Messung ganz kleiner Neigungswinkel dienende Richtmittel besteht aus einer tonnenförmig ausgeschliffenen Glasröhre, welche mit einer leicht beweglichen Flüssigkeit — meist Schwefeläther — und einer darauf schwimmenden, aus deren Dampf bestehenden Blase gefüllt ist (Abb. 50).

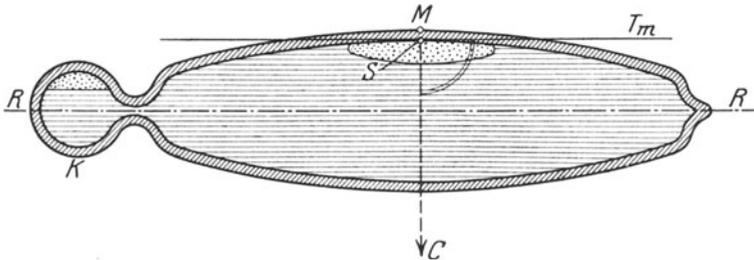


Abb. 50. Röhrenlibelle mit Kammer (Längsschnitt).

Das eine der heute stets zugeschmolzenen Enden ist manchmal als eine Kammer *K* ausgebildet, mit deren Hilfe die Blase im Hauptkörper verkürzt oder verlängert werden kann. Die Innenwand der Libelle ist ihrer Entstehung nach eine Rotationsfläche, welche durch die Drehung eines flachen Kreisbogens um eine Achse *RR*, die Rotationsachse der Libelle, entsteht. Den in Wirklichkeit von einem Kreisbogen meist etwas abweichenden Schnitt einer durch *RR* gehenden Lotebene mit der Röhreninnenwand bezeichnet man als die Schliffkurve der Libelle. Der Glaskörper trägt außen eine über der Schliffkurve hinziehende Teilung (Abb. 51), deren Mittelpunkt *M* über dem Scheitel *S* der Schliffkurve liegt. Die Teilungseinheit *a* ist meist eine Pariser Linie (1 P. L. = 2,256 mm), seltener 2 mm. Eine besondere Bedeutung besitzt die als Libellenachse bezeichnete Scheiteltangente *T_m* der Schliffkurve. Bei

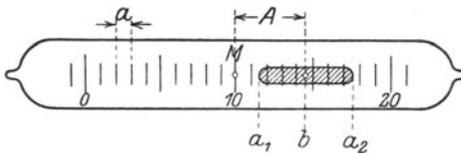


Abb. 51. Röhrenlibelle mit Teilung (Grundriß).

den Teilungsmittelpunkt symmetrisch. Es wird also der zum höchsten Punkt *S* der Schliffkurve führende Halbmesser *CS* (*C* = Mittelpunkt der Schliffkurve) lotrecht und die darauf senkrecht stehende Libellenachse *T_m*

¹⁾ *Samel*, Genauigkeit der Lotrechtstellung von Stehachsen mit Dosenlibellen aus einem einzigen Glaskörper und mit solchen älterer Form, Z. V. W. 1911, S. 149 bis 160. — Siehe auch *Haußmann, K.*, Glasdosenlibelle für Feldmeßinstrumente, Z. V. W. 1920, S. 241 bis 245.

²⁾ Die Röhrenlibelle wurde um 1661 von *Thévenot* erfunden; siehe *Müller, C.*, Zur Geschichte der Röhrenlibelle, Z. V. W. 1907, S. 673—678.

horizontal liegen. Den Ort der Blasenmitte bezeichnet man als den Blasenstand b ; er ist das arithmetische Mittel aus den Ablesungen a_1, a_2 an den Blasenenden. Hingegen ist der Libellenausschlag A der Abstand des Blasenmittelpunktes von der Mittelmarke M . Man hat demnach

$$b = \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \quad A = b - M. \quad \dots \quad (141)$$

Der Libellentheilwert p oder die Libellenangabe ist derjenige Winkel, den zwei nach benachbarten Teilstrichen führende Halbmesser (Abb. 52) einschließen; er ist in Sekunden ausgedrückt

$$p'' = \varrho'' \frac{a}{r}, \quad \dots \quad (142)$$

wenn r den Halbmesser der Schließkurve bedeutet. Bei einer Neigungsänderung α der Libelle in der Richtung ihrer Achse gelangt die Tangente T an den Blasenmittelpunkt in die Lage T' . Sie erfährt dabei eine Richtungsänderung α , der eine Änderung des Blasenstandes um w Teilungseinheiten (Blasenweg) entspricht¹⁾. Nach Abb. 52 und Gl. (142) ist die Neigungsänderung

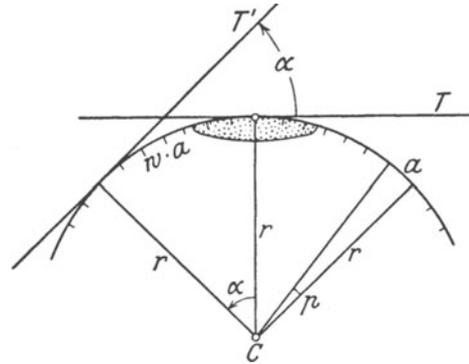


Abb. 52. Neigungsänderung und Blasenweg.

$$\alpha = \varrho'' \frac{w \cdot a}{r} = w \cdot p''. \quad \dots \quad (143)$$

Zur Bestimmung des Teilwertes verbindet man die Libelle mit einem gleichgerichteten horizontalen Fernrohr, das auf eine in der Entfernung D von der Drehachse lotrecht aufgestellte, geteilte Latte gerichtet wird. Zwei extremen Blasenständen b_1 und b_2 , zwischen denen ein Blasenweg w (Abb. 53) liegt, werden die Lattenablesungen a_1, a_2 entsprechen. Sind 1, 2 die zugehörigen Tangenten an die Blasenmittelpunkte, I und II

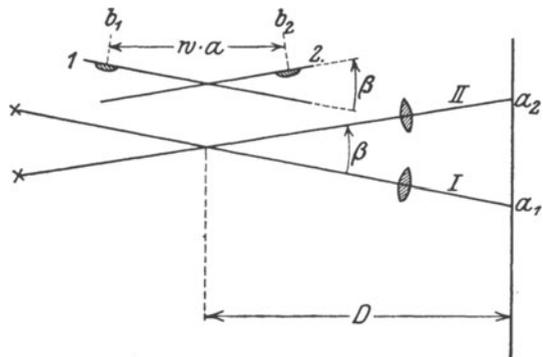


Abb. 53. Teilwertbestimmung aus Lattenablesungen.

die entsprechenden Lagen der Ziellinie, welche Linienpaare infolge einer gleichen Neigungsänderung je denselben Winkel β einschließen, so ist nach der Abbildung $\beta = \frac{\varrho''}{D}(a_2 - a_1) = w \cdot p''$; also wird der gesuchte Teilwert

$$p'' = \varrho'' \frac{a_2 - a_1}{w \cdot D} \quad \dots \quad (144)$$

¹⁾ In Wirklichkeit werden bei einer solchen Bewegung auch C und die Schließkurve verschoben. Durch eine einfache Parallelverschiebung, welche an den betrachteten Richtungen nichts ändert, kann man den verschobenen Mittelpunkt der Schließkurve wieder in seine ursprüngliche Lage bringen. Man kann daher, soweit es sich um die Richtungen handelt, von der erwähnten Verschiebung von vornherein absehen, wie es auch in Abb. 52 zur Vereinfachung geschehen ist.

Ein besonderes Hilfsmittel zur Bestimmung des Libellentheilwertes und zur eingehenden Untersuchung der Libelle ist das Legebrett oder der Libellenprüfer. Dieses Instrument ist in Abb. 54 im Aufriß skizziert und besteht im wesentlichen aus einem von zwei Füßen *FF* und einer Schraube *S*

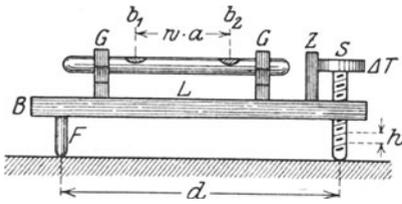


Abb. 54. Teilwertbestimmung mit dem Legebrett.

getragenen Brett *B*, welches zwei für die Aufnahme einer Libelle *L* bestimmte Gabellager *G G* trägt. An der Trommel der Schraube *S* wird mittels eines Zeigers *Z* der jeweilige Stand des Legebretts abgelesen. Einer ganzen Schraubenumdrehung entspricht eine gewisse als Konstante des Legebretts oder Sekundenwert der Schraubenganghöhe bezeichnete Neigungsänderung *t* der Längsachse des Instruments. Sie ist durch den Ausdruck

$t'' = q'' \cdot (h : d)$ bestimmt, wenn *h* die Schraubenganghöhe und *d* den Abstand der Schraube von der durch die Verbindungslinie der Fußendpunkte gebildeten Drehachse bedeutet.

Entspricht nun bei einer Drehung der Schraube um einen Trommelweg ΔT diesem ein Blasenweg *w*, so ist die vorgenommene Neigungsänderung $\beta'' = w \cdot p'' = \Delta T \cdot t''$. Hieraus aber folgt für den Teilwert der Ausdruck

$$p'' = \frac{\Delta T}{w} \cdot t'' \dots \dots \dots (145)$$

Libellen, welche auch zur Messung von kleinen Neigungswinkeln dienen, sind von Zeit zu Zeit auf den glatten Gang der Blase, sowie die Veränderlichkeit der Schliffkurve und des Teilwertes¹⁾ zu untersuchen. Liegen keine Unregelmäßigkeiten und keine Veränderungen vor, so entspricht demselben Trommelweg stets ein und derselbe Blasenweg.

Nach Reinhertz²⁾ sind die mittleren Fehler *m_s* und *m_b* für das Einspielenlassen der Libelle bzw. für den abgelesenen Blasenstand etwa

$$m_s = \pm 0,09 \sqrt{p} \quad \text{und} \quad m_b = \pm 0,20 \sqrt{p}, \dots \dots \dots (146)$$

wo *m_s*, *m_b* und *p* in Sekunden zu verstehen sind. Die für eine richtige Ausnutzung der Libelle zweckmäßigste Blasenlänge beträgt etwa ein Drittel der Röhrenlänge. Sehr viel kürzere Blasen, wie sie an heißen Tagen auftreten, sind zu träge. Dagegen sind längere Blasen, wie man sie in den kühleren Morgenstunden beobachten kann, viel zu unruhig.

Außerordentlich störend ist das Nachziehen der Blase, dessen Ursache die bei nicht ganz wasserfreier Füllung auftretenden Ausscheidungen³⁾ des Glases sind. Diese am Glase haftenden Körperchen hindern die Beweglichkeit der Blase manchmal so sehr, daß die Libelle vollständig unbrauchbar wird.

Jede Libelle besitzt teils zu ihrem Schutze, teils zur Ermöglichung einer Verbindung mit der Unterlage eine Fassung, die möglichst spannungsfrei sein soll. Häufig ist, wie in Abb. 55 angedeutet, der Glaskörper mit

¹⁾ Teilwertsänderungen sind mehrfach beobachtet worden. Sie treten hauptsächlich in Begleitung starker Temperaturänderungen auf, wenn die Libellenfassung — besonders bei eingegipsten Libellen — einen der Ausdehnung oder Zusammenziehung des Glaskörpers hinderlichen Zwang ausübt. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Frage gibt *Samel, P.*, Der Einfluß von Luftdruck und Temperatur auf die Angabe von Röhrenlibellen, *Z. V. W.* 1913, S. 569 ff.

²⁾ Mitteilungen über einige Beobachtungen an Libellen; *Z. J. K.* 1890, S. 309 ff.

³⁾ Siehe hierzu den Bericht von *L. Löwenherz*, Die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt bis Ende 1890, *Z. J. K.* 1891, S. 166, Absatz „Störungen bei Libellen“.

Hilfe einer Fadenwicklung ff in einer Röhre befestigt, welche selbst durch Richtschraubchen r, r' oder durch Richtschraubchen und Gegenfeder im lotrechten und horizontalen Sinne etwas gegen eine äußere Fassung verstellbar werden kann. Bei größeren plötzlichen Temperatursprüngen ist eine ruckweise Lageänderung des Glaskörpers gegen die Fassungsrohre oder dieser beiden gegen die äußere Fassung um so mehr zu befürchten, je verschiedener die Ausdehnungskoeffizienten dieser Körper sind. Durch sog. spannungsfreie Fassungen soll diese schädliche Erscheinung möglichst vermieden werden.

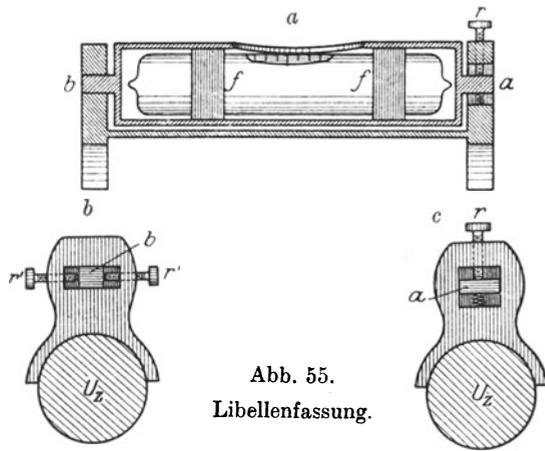


Abb. 55.
Libellenfassung.

Die Form der Röhrenlibelle wechselt mit ihrem Zweck und der Art ihrer Fassung. Im einzelnen sind zu nennen: 1. die Setz- oder Tischlibelle, 2. die Reitlibelle, 3. die Hänge- libelle, 4. die Doppelschlifflibelle, 5. die fest mit dem Instrument verbundene Libelle¹⁾

Die Setzlibelle ist eine Libelle mit ebener Bahn und dient zur Horizontalstellung von Ebenen. Vor dem Gebrauch ist ihr Neigungsfehler δ , der Winkel nämlich, welchen die Libellenachse mit der ebenen Bahn einschließt, zu beseitigen. Zu diesem Zweck bringt man die Libelle durch Neigen der Unterlage zum Einspielen, so daß die Libellenachse in Lage I (Abb. 56) horizontal liegt. Setzt man die Libelle um, so gelangt deren Achse in Lage II, welche mit Lage I den Winkel 2δ einschließt, so daß der beobachtete Blasenausschlag A dem doppelten Neigungsfehler entspricht. Zur Beseitigung des Neigungsfehlers ist der halbe Libellenausschlag durch Heben oder Senken des einen Libellenendes mit Hilfe der lotrecht wirkenden Richtschraubchen zum Verschwinden zu bringen. Der Ausschlag der berichtigten Libelle gibt unmittelbar den Neigungswinkel der Unterlage in der Libellenrichtung an.

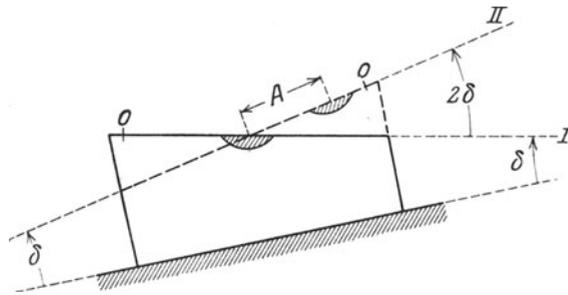


Abb. 56. Untersuchung der Setzlibelle.

Auch mit Hilfe einer nicht berichtigten Libelle kann man aus den vor und nach dem Umsetzen beobachteten Blasenständen b_1 und b_2 den Neigungswinkel α einer Unterlage U und den Neigungsfehler δ bestimmen. Ist in Abb. 56a H die Horizontale und bedeutet M wieder die Ablesung an der Mittelmarke, so sind die beiden Blasenstände offenbar die Ausdrücke

$$b_1 = M + \alpha + \delta, \quad b_2 = M - \alpha + \delta,$$

¹⁾ Der Vollständigkeit halber sei auch noch die weniger wichtige Reversions- oder Kehrlibelle genannt.

welche sofort auf die Größen

$$\alpha = \frac{1}{2}(b_1 - b_2), \quad \delta = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) - M \dots \dots (147)$$

führen. Hierbei entspricht die Richtung von U dem Sinne der Libellenbezeichnung in der ersten Lage.

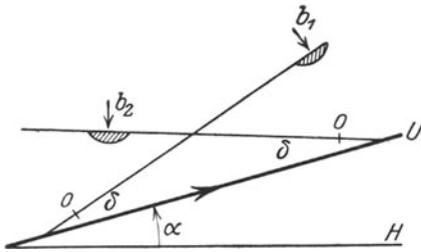


Abb. 56a. Neigungsermittlung mit nicht berichtigter Libelle.

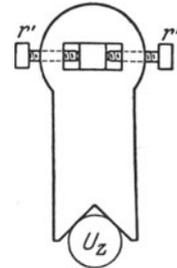


Abb. 57. Fuß einer Reitlibelle mit dachförmigem Ende.

Die Reitlibelle ist zum Aufsetzen auf eine zylindrische Achse U_x bestimmt und daher mit Füßen ausgestattet, welche entweder zylindrische oder gabelförmig ausgebildete Enden mit ebenen Ansatzflächen besitzen, wie es in den Abb. 55 und 57 veranschaulicht ist. Der Beseitigung des wie bei der Tischlibelle wegzuschaffenden Neigungsfehlers geht hier die Beseitigung des Kreuzungsfehlers voraus. Man versteht unter diesem Fehler denjenigen Winkel α (Abb. 58), welchen die Libellenachse mit der die mechanische Achse A_u der Unterlage enthaltenden Lotebene einschließt. Dreht man, nachdem die Libelle in ihrer gewöhnlichen Lage zum Einspielen gebracht ist und die Libellenachse die Lage I besitzt, die Libelle

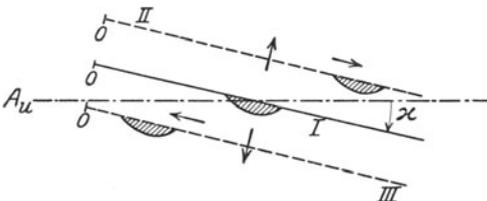


Abb. 58. Kreuzungsfehler der Libelle.

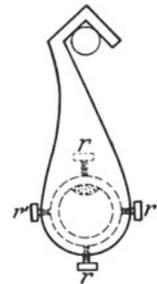


Abb. 59. Hängelibelle (Seitenansicht).

auf oder mit der zylindrischen Unterlage nach verschiedenen Seiten hin (Lage II und III der Libellenachse), so findet infolge der Kreuzung beider Achsen das eine Mal eine Senkung und Hebung, das andere Mal eine Hebung und Senkung der Libellenenden statt, so daß sich die Blase in beiden Fällen nach verschiedenen Seiten hin bewegt. Der Kreuzungsfehler kann mit Hilfe der horizontal wirkenden Richtschraubchen $r' r'$ weggebracht werden. Wird bei einem in den Lagern drehbaren Ringfernrohr auch noch das Fadenkreuz zentriert, so sind schließlich Libellenachse, mechanische Fernrohrachse und Ziellinie zueinander parallel.

Die Hängelibelle besitzt zwei meist nach verschiedenen Seiten geöffnete Haken (Abb. 59 zeigt einen derselben), mit deren Hilfe sie an einer zylindrischen Achse aufgehängt wird. Kreuzungs- und Neigungsfehler werden wie bei der Reitlibelle beseitigt.

Für die Vermessungskunde wichtiger ist die zwei Teilungen tragende Doppelschlifflibelle (Abb. 60a), deren beide Achsen T_1, T_2 zueinander parallel sein müssen¹⁾. Um die Ziellinie eines Fernrohrs ohne mechanische Achse zu den Libellenachsen parallel zu stellen, richtet man, wie in Abb. 60b angedeutet, das Fernrohr vor und nach dem Durchschlagen bei einspielender Libelle auf eine lotrechte Teilung, an welcher zu den beiden Lagen I und II der Ziellinie die Ablesungen a_1, a_2 gefunden werden, deren Mittel

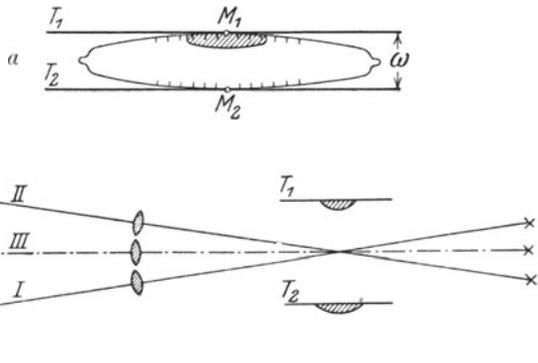


Abb. 60. Doppelschlifflibelle und ihre Berichtigung.

$$a_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

der horizontalen Lage III der Zielachse entspricht. Für die Berichtigung ist der nach Einstellung des Fernrohrs auf a_0 vorhandene Libellenausschlag mit Hilfe der Höhenrichtschraubchen der Libelle zu beseitigen. Ein etwaiger kleiner Kreuzungsfehler κ der Libellenachse mit der Ziellinie kann bei gewöhnlichen Messungen wegen seines geringen Einflusses unberücksichtigt bleiben; gegebenenfalls wäre dieser Fehler schon vor dem Neigungsfehler zu beseitigen²⁾. Die durch ihn bei einspielender Libelle verursachte geringe Neigung der Ziellinie ist, wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden soll

$$v'' = v'' \cdot \frac{\kappa^0}{\rho^0}, \dots \dots \dots (148)$$

wenn v den kleinen Winkel bedeutet, welchen die zur Libellenachse parallele Ebene durch die Ziellinie mit dem Horizont einschließt.

Bei fester Verbindung der Libelle mit dem Instrument kann die parallele Lage von Libellenachse und Ziellinie nach Andeutung von Abb. 61 dadurch geprüft werden, daß man mit dem zunächst in A stehenden Instrument bei einspie-

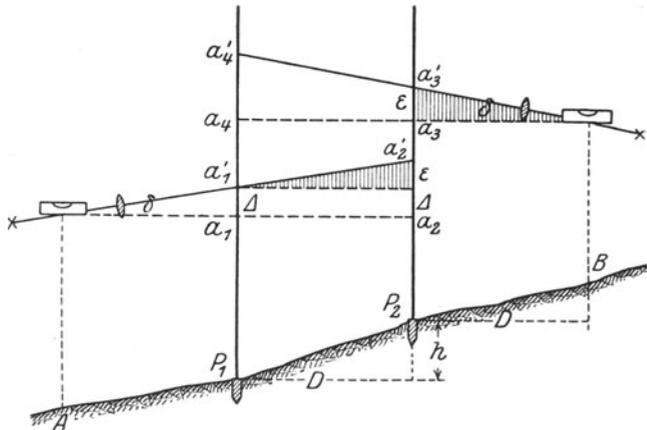


Abb. 61. Libellenberichtigung bei fester Verbindung aller Bestandteile durch Ablesungen in zwei Außenständen.

¹⁾ In Wirklichkeit schließen die beiden Libellentangenten einen kleinen Winkel ω , den Konvergenzwinkel, ein, dessen geringer Einfluß durch die Beobachtungsmethode unschädlich gemacht werden kann. Über die Größe dieses Konvergenzwinkels bei verschiedenen Libellen und seine Veränderung mit der Zeit siehe Dorn, Z.V.W. 1907, S. 359 und Müller, C., Z.V.W. 1920, S. 113.

²⁾ Siehe hierzu Helmert, Theorie der Libellenachse, Z.V.W. 1878, S. 192, ferner Vogler, Lehrbuch der Praktischen Geometrie II, Braunschweig 1894, S. 34 und Hohenner, in Z.V.W. 1912, S. 567.

lender Libelle an der nacheinander in P_1 und P_2 stehenden Latte die Ablesungen a_1', a_2' ausführt, hierauf das Instrument in einem um den Lattenabstand D über P_2 hinausliegenden Punkt B aufstellt und dort bei ein spielender Libelle an der Latte in P_2 und P_1 die Ablesungen a_3', a_4' ermittelt. Wäre kein Neigungsfehler δ vorhanden, so hätten sich die den horizontalen Sichten entsprechenden Ablesungen a_1, a_2, a_3, a_4 ergeben. Deren letzte aber läßt sich aus den fehlerhaften Ablesungen berechnen. Bei der getroffenen Anordnung sind nämlich die beiden schraffierten Dreiecke kongruent, und man findet daher über die Gleichungen

$$h = a_1 - a_2 = a_4 - a_3, \quad a_4 = a_1 - a_2 + a_3, \quad a_1 = a_1' - \Delta, \\ a_2 = a_2' - \Delta - \varepsilon, \quad a_3 = a_3' - \varepsilon$$

leicht das Ergebnis

$$a_4 = a_1' - a_2' + a_3'. \dots \dots \dots (149)$$

Zur Beseitigung des Neigungsfehlers ist bei ein spielender Libelle der Fadenkreuzkörper zu heben oder zu senken, bis die errechnete Ablesung a_4 erscheint. Bezüglich des Kreuzungsfehlers zwischen Libellenachse und Ziel linie gelten die bei der Doppelschliblibelle gemachten Ausführungen.

13. Nivellierinstrumente und Nivellierlatten.

Die verschiedenen Nivellierinstrumente beruhen auf dem Prinzip des Pendels, der kommunizierenden Röhren oder des Auftriebs.

a) Pendelinstrumente.

Bei den verschiedenen Instrumenten dieser Art, welche nur untergeordnete Bedeutung besitzen, ist eine Senkrechte zu dem durch ein Pendel verkörperten Lot die horizontale Ziellinie¹⁾. Ein solches Instrument ist unter vielen z. B. das in Abb. 62 skizzierte Pendelnivellierinstrument von *Starke* und *Kammerer*.

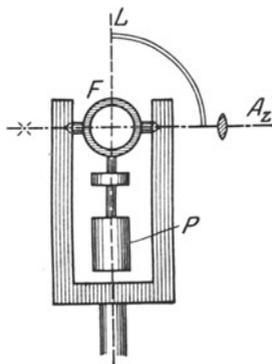


Abb. 62. Pendelnivellierinstrument von *Starke* und *Kammerer*.

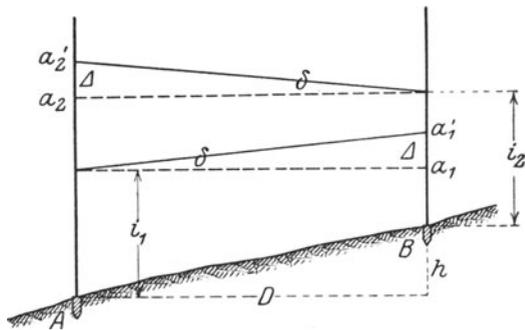


Abb. 63. Berichtigung des Pendelnivellierinstrumentes.

Kammerer, welches manchmal bei der Anlage von Waldwegen und ähnlichen Aufgaben Verwendung findet. Es besteht aus einem in einer Gabel hängenden Fernrohr F , dessen — in der Umklappung gezeichnete — Ziel linie A_z durch ein Pendel P senkrecht zum Lot L gerichtet wird. Zur

¹⁾ Die von *Picard* um 1670 gebaute Pendelwage war schon mit einem Fernrohr ausgestattet und zur Fehlertilgung zum Umhängen eingerichtet.

Prüfung der horizontalen Lage der Ziellinie kann man Gegenbeobachtungen nach Gl. (149) verwenden oder in folgender Weise verfahren. Liegt der Instrumentenhorizont in den Punkten A, B (Abb. 63) um i_1 bzw. i_2 über diesen Punkten und erhält man im Instrument an der jeweils im anderen Punkte stehenden Latte die Ablesungen a_1', a_2' , während der horizontalen Ziellinie a_1, a_2 entsprechen würde, so findet man aus der Abbildung leicht die Beziehungen

$$\Delta = \frac{1}{2}(a_1' + a_2') - \frac{1}{2}(i_1 + i_2), \quad \delta'' = \rho'' \frac{\Delta}{D}, \quad a_2 = a_2' - \Delta. \quad (150)$$

Hierin ist δ der Neigungswinkel der Ziellinie, während a_2 die durch Berichtigung herzustellende Ablesung bedeutet.

Zu den Pendelnivellierinstrumenten gehört auch die Verbindung des Schnursenkels mit einem der hernach zu beschreibenden optischen Instrumente zum Abstecken rechter Winkel. Ist z. B. in Abb. 64 P ein Bauernfeindsches Winkelprisma, so sieht das durchblickende Auge das Lot L um 90° abgelenkt. Das Lotbild L' ist also eine horizontale Absehnlinie und der Geländepunkt P_2 , auf den es hinweist, liegt um die sog. Aughöhe i über dem Standpunkt P_1 des Beobachters. Bei flüchtigen, unvermittelt herantretenden Höhenbestimmungen kann diese einfache Vorrichtung gute Dienste leisten.

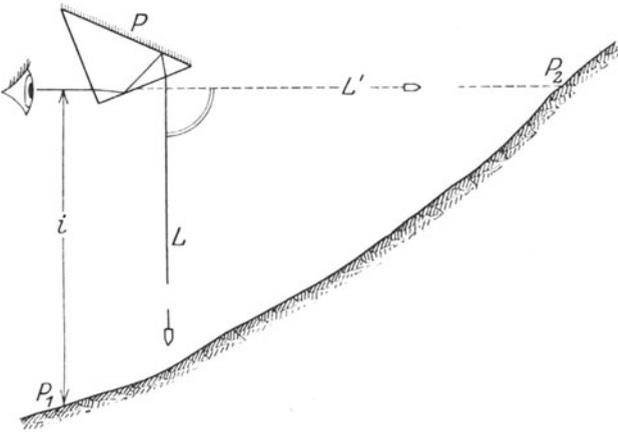


Abb. 64. Optische Horizontallegung des Lotes.

Um ein ungefähres Bild von der Leistungsfähigkeit der Pendelnivellierinstrumente zu geben, sei bemerkt, daß der mittlere Fehler des mit einem solchen Instrumente bestimmten Höhenunterschiedes zweier um 1 km entfernten Punkte auf etwa 0,5 m zu veranschlagen ist.

b) Hydrostatische Nivellierinstrumente.

Ein älteres dieser auf dem Prinzip der kommunizierenden Röhren beruhenden Instrumente ist die in Abb. 65 skizzierte offene Kanalwage¹⁾. Sie wird auf einem einfachen Stativ verwendet und besteht aus zwei 1 bis 1½ m voneinander abstehenden kommunizierenden Röhren RR , welche in offene Glaszylinder GG endigen. Das Instrument enthält meist rot gefärbtes Wasser, dessen Spiegel sich gut von der Umgebung abhebt. Da das Wasser in beiden Schenkeln gleich hoch steht, so liegt jede in den beiden Flüssigkeitsspiegeln streichende Sicht HH horizontal.

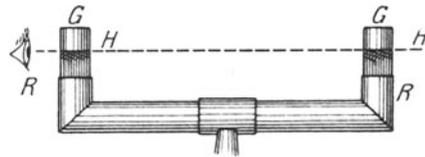


Abb. 65. Offene Kanalwage.

¹⁾ Eine Kanalwage in Verbindung mit dem Diopter als Zielvorrichtung hat schon Heron von Alexandria verwendet. Siehe hierzu *Schöne, H., Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra*, Leipzig 1903.

In neuerer Zeit hat Kahle¹⁾ die bequemer zu verwendende geschlossene Handkanalwage eingeführt. Es ist dies eine mit gefärbter Flüssigkeit etwa zur Hälfte gefüllte, allseitig geschlossene Röhre, welche die Form eines Rechtecks oder wie in Abb. 66 eines Kreises von nicht zu großen Abmessungen besitzt.

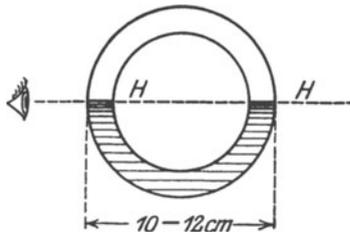


Abb. 66. Geschlossene Handkanalwage von Kahle.

Eine Kanalwage besonderer Art ist die etwa 30—40 m lange Schlauchkanalwage²⁾, mit der man auch um die Ecke herum nivellieren kann.

Kanalwagen, deren Handhabung keine besonderen Kenntnisse erfordert, werden manchmal noch im Bauhandwerk verwendet. Sie genießen den Vorzug, keiner Berichtigung zu bedürfen. In einem sehr steilen und unübersichtlichen Gelände kann wohl auch für geodätische Zwecke die Handkanalwage vorteilhaft sein, über deren Gebrauch und Leistungsfähigkeit Kahle auf Grund eigener Erfahrungen besonders in der letzten der in Anmerkung 1) zitierten Arbeiten „Über Nivellements mit geschlossener Kanalwage“ eine umfassende Darstellung gibt.

Die Fehler der hydrostatischen Nivellierinstrumente sind etwa von derselben Größenordnung wie diejenigen der Pendelnivellierinstrumente.

c) Fernrohrnivellierinstrumente mit Libelle.

Auch hier gibt es Freihandinstrumente, welche geringeren Genauigkeitsansprüchen genügen. Trotz ihrer verschiedenen Ausbildung in Einzelheiten beruhen sie alle auf dem gleichen Grundgedanken. Es wird nämlich durch Spiegelwirkung die Blase einer Libelle, deren Achse zur Fernrohrziellinie parallel ist, in das Gesichtsfeld des Fernrohres gebracht und dieses so geneigt, daß der Blasenmittelpunkt auf dem Horizontalfaden des Fadenkreuzes liegt. In dieser Stellung liegt die Ziellinie horizontal, und es wird nun in Richtung des verlängerten Horizontalfadens an dem in der anderen, helleren Gesichtsfeldhälfte erscheinenden Lattenbild abgelesen.

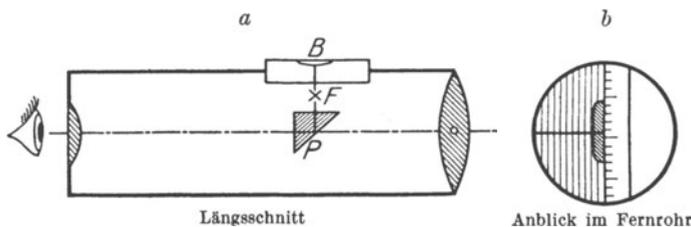


Abb. 67. Amerikanisches Freihandnivellierinstrument.

Ein neueres Instrument dieser Art ist das in Abb. 67 skizzierte amerikanische Handnivellier, bei welchem durch ein Prisma sowohl die Blase B als auch der zwischen dem Prisma und der Libelle liegende Horizontalfaden F in das Gesichtsfeld gespiegelt wird.

Alle Freihandnivelliere verschwinden aber an Bedeutung vollständig neben den verschiedenen Fernrohrnivellierinstrumenten mit Stativ und Libelle. Die Hauptbestandteile eines solchen auf einem stabilen Stativ befestigten Instrumentes sind vor allem ein gutes, stark (etwa 15—40fach) ver-

¹⁾ Siehe Kahle, P., Z. V. W. 1889, S. 183; 1892, S. 49; 1894, S. 513—537.

²⁾ Siehe Z. V. W. 1891, S. 45.

größeres Fernrohr und eine in seiner Längsrichtung angeordnete, mit dem Fernrohr fest oder lose verbundene Röhrenlibelle. Beide sind um eine Stehachse, meist auch um eine besondere Horizontalachse drehbar. An Nebenbestandteilen sind zu nennen eine Dosenlibelle, welche zur angenäherten und vielfach schon ausreichenden Lotrechtstellung der Stehachse dient, ferner eine oder zwei Feinstellschrauben. Vielfach wird das Nivellierinstrument durch Beigabe einer Distanzmessereinrichtung, eines Horizontal- und eines Höhenkreises zum sog. Feldmesseruniversal ausgebildet.

Die Röhrenlibelle, deren Teilwert sich etwa zwischen 15" und 4" bewegt, soll dem Fernrohr angepaßt sein. Um hierüber Klarheit zu gewinnen, kann man zunächst aus wiederholten Einstellungen auf denselben Zielpunkt den mittleren Fehler m_b des Blasenstandes bestimmen und hierauf umgekehrt bei wiederholter Einstellung desselben Blasenstandes aus Lattenablesungen in der für das Instrument gebräuchlichen Zielweite den mittleren Ablesefehler m_a ermitteln. Stimmen diese in derselben Maßeinheit auszudrückenden Fehler ungefähr überein, so steht die Empfindlichkeit der Libelle zur Leistungsfähigkeit des Fernrohrs im richtigen Verhältnis.

Die mannigfachen Konstruktionen der Fernrohrstativnivelliere lassen sich etwa nach der Anordnung der Hauptbestandteile (Libelle, Fernrohr und Fußgestell) gliedern, deren Verbindung 1. vollständig, 2. teilweise oder 3. gar nicht gelöst werden kann. Hiernach ist auch, wie schon vorweg bemerkt werden soll, die Berichtigung des Instruments eine verschiedene, welche der Reihe nach im allgemeinen 1. einen Stand ohne Lattenablesung, 2. einen Stand mit Lattenablesungen, 3. zwei Stände mit Lattenablesungen erfordert.

Eine bekannte Konstruktion ist das in Abb. 68 skizzierte Zapfennivellierinstrument mit in einem Rohrlager RR drehbaren Ringfernrohr und umsetzbarer Reitlibelle. Das Instrument endigt in einen konischen Zapfen Z , welcher in der Büchse des Stativkopfes St durch eine Schraube S befestigt wird. Um die als Stehachse bezeichnete Zapfenachse erfolgt die Horizontalrotation; sie kann durch eine Klemme K mit Feinbewegung F gehemmt werden. Auch eine Kippbewegung des Fernrohrs um eine besondere Horizontalachse ist möglich. Bei angezogener Klemme K' erfolgt die entsprechende Feinbewegung mittels einer Feinstellschraube F' , welcher meist der Stift eines Federhäuschens H oder auch eine Blattfeder entgegenwirkt. Mangels eines besonderen

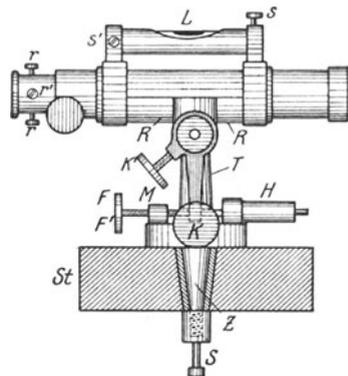


Abb. 68. Zapfennivellierinstrument (Münchener Form).

Fußgestells kann die Stehachse lediglich durch Verstellen der Stativbeine nach dem Augenmaß oder mit Hilfe einer etwa vorhandenen Dosenlibelle angenähert lotrecht gestellt werden, weshalb man auch von einem Instrument mit schiefer Stehachse spricht. Die Gleichheit der Ringdurchmesser kann bei dieser Konstruktion leicht durch Umlegen des Fernrohrs unter der Libelle — die Libellenfüße kommen dabei wieder in dieselben Rohrlagerenden — und Beobachtung der beiden Blasenstände geprüft werden. Zur Berichtigung des Instrumentes ist nach erfolgter deutlicher Sichtbarmachung des Fadenzweises 1. dieses zu zentrieren, 2. der Libellenkreuzungsfehler wegzuschaffen, 3. der Neigungsfehler der Libelle durch Umsetzen zu beseitigen.

Endigt das Instrument unten nicht in einen Zapfen, sondern in einen Dreifuß, so handelt es sich um ein Dreifußnivellierinstrument mit lösbbaren Hauptbestandteilen, dessen Stehachse nach einem bei der

Theodolitberichtigung zu besprechenden Verfahren genau lotrecht gestellt werden kann.

Abb. 69 stellt ein Nivellierinstrument der zweiten Art — mit nur teilweiser Lösbarkeit der Hauptbestandteile — vor. Die einschliffige, oben

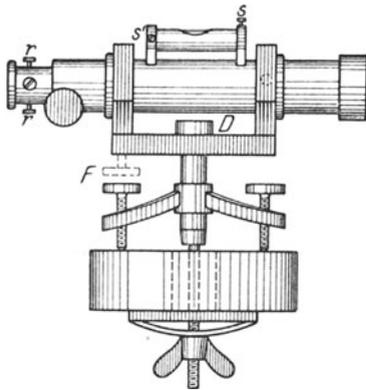


Abb. 69. Dreifußnivellierinstrument mit Ringfernrohr mit fest verbundener Libelle (Fernrohr umlegbar oder mit Doppelschlifflielle ausgestattet).

oder unten fest mit dem Ringfernrohr verbundene Libelle kann mit diesem in den Lagern gedreht und umgelegt werden, während der vielfach mit einer Dosenlibelle D versehene Fernrohrträger mittels eines Dreifußes auf dem Stativkopf ruht und in einen Schraubenansatz endigt, welcher bei der festen Verbindung des Instrumentes mit dem Stativ von unten her durch die Mutter einer Befestigungsschraube gefaßt wird. Die Berichtigung¹⁾ ist hier eine etwas andere, je nachdem zur scharfen Parallelstellung von Libellenachse und Ziellinie noch die genaue Fadenkreuzzentrierung oder aber scharfe Senkrechtstellung der Ziellinie zur genau lotrechten Stehachse verlangt wird. Im ersten Falle ist nach angenäherter Lotrechtstellung der Stehachse zunächst das Fadenkreuz zu zentrieren, der Kreuzungsfehler zu beseitigen und schließlich die

Libellenachse parallel zur Ziellinie zu machen. Um letzteres zu erreichen, bringt man die Libelle zum Einspielen und legt sie hierauf mit dem Fernrohr in den Lagern um. Die in die mechanische Fernrohrachse A_m

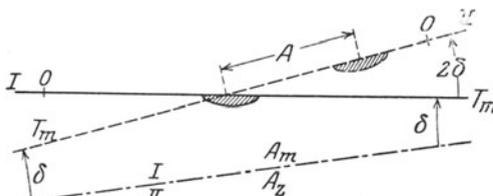


Abb. 70. Berichtigung des in Abb. 69 dargestellten Instrumentes für ein umlegbares Fernrohr unter Wahrung der scharfen Fadenkreuzzentrierung.

fallende zentrierte Ziellinie A_z (siehe Abb. 70) besitzt vor und nach diesem Vorgange dieselbe Stellung, während die Libellenachse T_m die den doppelten Neigungsfehler 2δ einschließenden Lagen I und II einnimmt. Zur Berichtigung wird die Hälfte des Ausschlages A an dem Höhenrichtschraubchen s der Libelle beseitigt. Das scharfe Einspielen-

lassen der Libelle erfolgt jeweils mittels der der Zielebene nächstliegenden Fußschraube.

Falls die Ziellinie genau senkrecht zur Stehachse gestellt werden soll, so ist diese scharf lotrecht zu stellen und hierauf bei einspielender Libelle in der Gebrauchslage die Ziellinie horizontal zu legen. Um dies zu erreichen, liest man an einer lotrechten Latte vor und nach einer Halbdrehung des Fernrohrs um seine mechanische Achse in der Lage I (Abb. 71) die Beträge a_1', a_1'' ab, legt das Fernrohr in den Lagern um und dreht das Instrument um die lotrechte Stehachse, bis das Fernrohr wieder auf die Latte gerichtet ist. Die nunmehr vor und nach einer Halbdrehung des Fernrohrs um seine mechanische Achse in der Stellung II erscheinenden Ablesungen sind a_2', a_2'' . Da die Drehung des Instruments um eine lotrechte Achse erfolgt ist, so liegt

¹⁾ Von dem meist äußerst geringen, beim Nivellieren aus der Mitte vollkommen belanglosen Unterschiede der Ringdurchmesser, welcher etwa mittels zweier Hilfsfernrohre durch sog. Fadenkreuzkollimation festgestellt werden könnte, soll hier abgesehen werden.

die mechanische Achse in den Stellungen *I* und *II* symmetrisch zum Horizont *HH*. Andererseits sind diese Stellungen Symmetrieachsen für die Lagen *I'*, *I''* bzw. *II'*, *II''* der Ziellinie vor und nach jeder Halbdrehung. Also liegen auch die Ablesungen paarweise symmetrisch zum Horizont, und deren arithmetisches Mittel

$$a_0 = \frac{1}{4}(a_1' + a_1'' + a_2' + a_2'') \dots \dots \dots (151)$$

ist die einer horizontalen Lage der Ziellinie entsprechende Ablesung, welche in der Gebrauchslage des Fernrohrs bei einspielender Libelle durch Verstellen des Fadenkreuzes herzustellen ist.

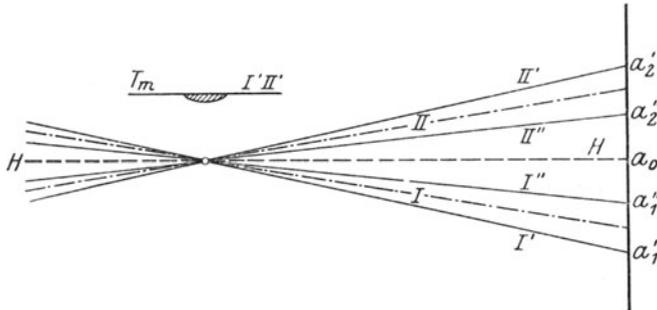


Abb. 71. Berichtigung des in Abb 69 dargestellten Instrumentes mit Doppelschlifflibelle unter Erhaltung einer genau lotrechten Umdrehungsachse.

Eine gleichzeitige scharfe Fadenkreuzzentrierung und Senkrechtstellung der Ziellinie zur Stehachse ist nur zu erreichen, wenn die gleichzeitige Neigung von Fernrohr und Libelle nicht mehr durch eine der Fußschrauben, sondern durch eine besondere, in Abb. 69 gestrichelt angedeutete Höhenfeinstellschraube *F* vorgenommen wird, oder wenn es möglich ist, das eine Ringlager durch Richtschrauben etwas zu heben oder zu senken.

Ist in Abb. 69 das Ringfernrohr drehbar, aber nicht umlegbar und besitzt es eine Doppelschlifflibelle, so ist erst das Fadenkreuz zu zentrieren, der Kreuzungsfehler zu beseitigen und hierauf vor und nach einer Halbdrehung des Fernrohrs um seine mechanische Achse bei jeweils einspielender Libelle an einer lotrechten Latte abzulesen. Nach Abb. 60, welche auch auf diesen Fall paßt, ist das arithmetische Mittel a_0 beider Ablesungen a_1, a_2 die einer horizontalen Ziellinie entsprechende Ablesung. Der bei ihrer Einstellung erscheinende Libellenausschlag ist mittels der Libellenrichtschrauben zu beseitigen.

Eine scharfe Senkrechtstellung der zentrierten Ziellinie zur Stehachse ist auch hier nur unter den vorher getroffenen Voraussetzungen möglich.

Das in Abb. 72 skizzierte Instrument ist ein Dreifußnivellierinstrument mit einem drehbaren und umlegbaren Ringfernrohr sowie mit einer fest mit dem Fernrohrträger verbundenen Libelle. Zur Berichtigung ist das Fadenkreuz zu zentrieren, die Stehachse genau lotrecht, die Libellenachse horizontal zu stellen und hierauf vor und nach dem Umlegen des Fernrohrs an ein und derselben Latte abzulesen. Das Mittel a_0 (Abb. 73) aus den beiden Ablesungen a_1, a_2 entspricht wieder der horizontalen Ziellinie. Diese Einstellung a_0 kann entweder durch Heben oder

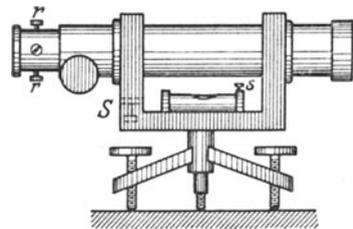


Abb. 72. Dreifußnivellierinstrument mit drehbarem und umlegbarem Ringfernrohr; Libelle fest mit dem Fernrohrträger verbunden.

Senken des einen Lagerbockes mittels einer in Abb. 72 gestrichelt angedeuteten Lagerschraube *S* erfolgen oder sie kann mangels einer solchen Schraube durch Verschieben des Fadenskreuzes im vertikalen Sinne erzielt werden; allerdings nur auf Kosten der Zentrierung, so daß immer nur in der gleichen Fernrohrstellung beobachtet werden darf.

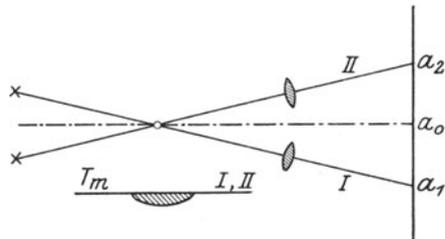


Abb. 73. Berichtigung des in Abb. 72 dargestellten Instrumentes.

Manche Vorteile sind dem von *Wild*¹⁾ konstruierten Nivellierinstrument der Firma Zeiß eigen. Bei einem durch zweckmäßige Abmessungen erreichten geringen Gewicht besitzt es ein mit sehr guter Optik ausgestattetes Fernrohr von konstanter Länge. Infolge des einen staubdichteren Abschluß

ermöglichenden festen Abstandes des Okulars *L*₀ (Abb. 74) vom Objektiv *L* muß die scharfe Einstellung des Bildes durch Verschieben einer besonderen

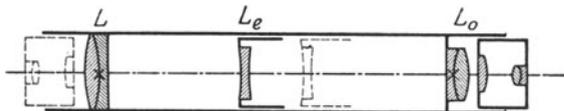


Abb. 74. Das Wildsche Nivellierfernrohr der Firma Zeiß.

Einstelllinse *L*_e vorgenommen werden. Der Hauptvorteil dieser schwach konkaven Einstelllinse besteht darin, daß ihrer Querverschiebung *e* (Abb. 75) eine

sehr viel kleinere Bildverschiebung *e'* entspricht. Nach Fig. 75, in welcher *L*_e' die von der Bildebene um *y* abstehende, um *e* seitlich verschobene Einstelllinse mit dem einen Brennpunkt *F*_e und der Brennweite *f*_e, ferner *P* und *P'* die richtige und die um *e'* fehlerhafte Lage des Bildpunktes bedeuten, ergibt sich aus den beiden ähnlichen, schraffierten Dreiecken $e' = e \cdot (y : f_e)$. Da der Quotient $y : f_e$ etwa ein Fünftel beträgt, so ist — gleich sorgfältige Arbeit vorausgesetzt — bei dieser Konstruktion der einer Querverschiebung der Einstell-

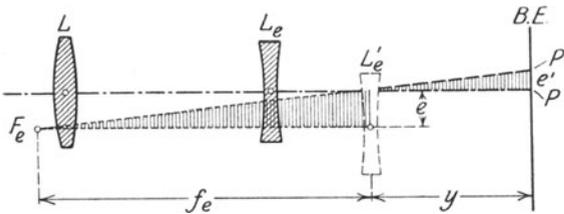


Abb. 75. Querverschiebung der Einstell-Linse und des Bildes beim Wildschen Nivellierfernrohr.

linse entsprechende lineare Ablesefehler nur rund der fünfte Teil des Fehlers, welcher aus einer gleich großen Querverschiebung des Okularauszugs bzw. des Fadenskreuzes folgt. Das Fernrohr, welches an Stelle eines Fadenskreuzes

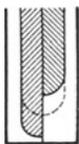


Abb. 76. Bild der Libellenblase am Wildschen Nivellierfernrohr.

in die Linsenoberflächen eingeritzte Strichkreuze besitzt, kann zwecks Durchführung einer bequemen Berichtigung durch Umstecken des hinteren Okularteils vor das Objektiv zum Rückwärtszielen²⁾ eingerichtet werden. Die vom Okular aus durch ein besonderes Prismensystem zu beobachtende Blase einer Doppelschlifflibelle erscheint in zwei Längshälften gespalten (Abb. 76), die bei einspielender Libelle sich zum vollen Blasenbild vereinigen. Die Berichtigung erfolgt mit Hilfe von vier Ablesungen *a*₁, *a*₂, *a*₃, *a*₄, welche man beim Vorwärts- und Rückwärtszielen je bei einspielender

¹⁾ *Wild, H.*, Neue Nivellierinstrumente; Z. J. K. 1909, S. 329–344.

²⁾ Siehe Anmerkung 1), Seite 48.

Libelle links und rechts an einer im gleichen Punkte bleibenden lotrechten Latte abliest. Das arithmetische Mittel

$$a = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \dots \dots \dots (152)$$

in dem der Einfluß sowohl einer Achsenkonvergenz der Doppelschifflibelle als auch des Libellenneigungsfehlers verschwindet, entspricht der horizontalen Ziellinie. Man wird also in der durch Vorwärtsvisur bei Libelle links gekennzeichneten Gebrauchslage durch Neigen des Fernrohrs die Einstellung a herbeiführen und hierauf durch Verschieben des Prismensystems die nunmehr ausschlagende Libelle wieder zum Einspielen bringen.

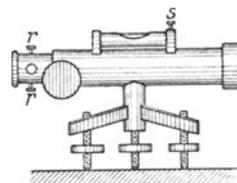


Abb. 77. Dreifußnivellierinstrument mit durchwegs fest verbundenen Bestandteilen (Norddeutsche Form).

Ein Dreifuß-Nivellierinstrument, dessen sämtliche Bestandteile fest miteinander verbunden sind, ist in Abb. 77 skizziert. Zur Berichtigung wird erst die Stehachse lotrecht und gleichzeitig die Libellenachse horizontal gestellt. Hierauf erfolgt nach (149) aus den in zwei Aufstellungen erhaltenen Lattenablesungen die Ermittlung der einer horizontalen Ziellinie entsprechenden Einstellung a_4 , welche durch Verstellen des Fadenskreuzes mittels der Richtschraubchen rr herbeigeführt wird.

d) Nivellierlatten.

Die Nivellierlatten, welche 3 bis 4 m lang und in untergeordneten Fällen zum Zusammenklappen eingerichtet sind, bestehen aus trockenem,



Abb. 78. Querschnitte von Nivellierlatten.

geradfaserigem Tannenholz und sind zum Schutze gegen den Einfluß der wechselnden Feuchtigkeit mit einem dichten Ölfarbanstrich überzogen, während die Stirnseiten der Latte durch Metallkappen gegen Beschädigungen geschützt sind. Der Lattenquerschnitt ist entweder ein Rechteck von etwa 3 cm auf 10 cm (Abb. 78) oder zur größeren Versteifung von einfach T-förmiger, doppelt T-förmiger oder auch kastenförmiger Gestalt. Eine fast verschwundene Lattenform ist die Schiebelatte¹⁾. Sie ist (Abb. 79) mit einer gleitenden Zielscheibe versehen, deren Höhenlage meist mit Hilfe einer über eine Rolle R geführten Zugschnur so lange geändert wird, bis der Zielscheibenmittelpunkt auf der horizontalen Ziellinie liegt. In dieser Stellung wird nicht etwa vom Instrumente aus, sondern am Lattenstandort die Höhenlage der Zielscheibe an einer auf der Rückseite der Latte befindlichen Teilung abgelesen. Die heute fast ausschließlich gebräuchlichen Latten sind zum Selbstablesen vom Instrumente aus bestimmte, sog. sprechende

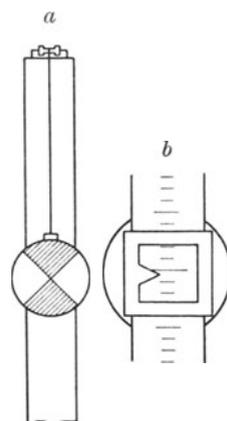


Abb. 79. Schiebelatte.

¹⁾ Schon *Heron von Alexandria* hat in seiner *Dioptra* (Hérons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, Ausgabe *Schöne*, Leipzig 1903, S. 201 ff.) eine Schiebelatte beschrieben.

Latten¹⁾ deren Teilungen möglichst übersichtlich sein müssen, um auf größere Entfernungen hin deutlich sichtbar zu bleiben. Verwendung finden Strichteilungen und Felderteilungen (Abb. 80), manchmal auch Teilungen mit keilförmigen Strichen. Die Bezifferung gibt fast immer Dezimeter an und die umgekehrten Ziffern stehen entweder neben dem zugehörigen Teilungsstriche oder in dem Felde, welches sie bezeichnen. Abb. 80 a zeigt eine einfache, stets

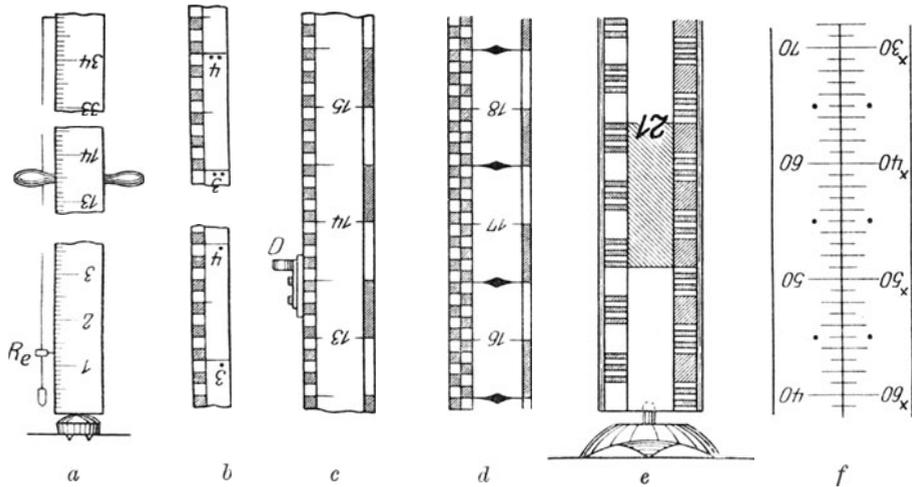


Abb. 80. Latten zum Selbstablesen.

eine starke Fernrohrvergrößerung erfordernde Strichteilung, Abb. 80b und c zwei einreihige Felderteilungen, deren erste zur Meterbezeichnung Punkte verwendet, während die andere mit einer Halbdezimeterübersicht ausgestattet ist. Sehr viel vorteilhafter als einreihige Felderteilungen, bei denen sehr häufig am schwarzen Faden im schwarzen Felde abzulesen ist, sind doppelreihige Felderteilungen (Abb. 80d), die stets eine Ablesung im weißen Felde ermöglichen. Abb. 80e zeigt die Teilung einer *Seibt-Latte*, deren Teilfeldbreite 4 mm beträgt, während die zwischen den getrennten Feldeihen stehende Bezifferung Doppeldezimeter angibt. Auf der Rückseite der Latte befindet sich dieselbe Teilung, nur mit entgegengesetzter Bezifferung, so daß die Summe zweier zusammengehöriger Ablesungen an beiden Teilungen dieser Wendelatte stets ein Festwert ist. Sie ist für die Einstellung des Horizontalfadens auf die Teilfeldmitte bestimmt, während bei der in Abb. 80f skizzierten Strichteilung der Preußischen Landesaufnahme je ein Teilstrich in die Mitte zwischen den zwei Horizontalfäden des Instrumentes eingestellt wird. Das Teilungsintervall ist hier 0,5 cm, während die Bezifferung mit gegenüberstehender dekadischer Ergänzung in Halbdezimetern gehalten ist.

Beim Gebrauch wird die Latte auf eine fest in den Boden getretene Unterlagsplatte gesetzt, welche entweder, wie in Abb. 80a, in eine Kugelhaube oder, wie in Abb. 80e, in einen Zapfen endigt, der in eine Höhlung des Lattenschuhes eingreift. Die Lotrechtstellung der an Griffen zu haltenden Latte wird entweder nach dem Augenmaße, mit Hilfe eines in einem Einstellring spielenden Senkels (Abb. 80a) oder mittels einer Dosenlibelle (Abb. 80c) aus freier Hand oder unter Verwendung einer Verspreizung durch

¹⁾ Nachdem *Fraunhofer* durch seine optischen Leistungen die Vorbedingungen für die Anwendung sprechender Latten geschaffen hatte, machte sich um ihre Einführung *Reichenbach* sehr verdient.

Stäbe bzw. durch ein Lattenstativ vorgenommen. Die meist zum Anschrauben eingerichtete Dosenlibelle ist nach ihrer Befestigung an der Latte darauf hin zu prüfen, ob sie bei lotrecht gestellter Teilungskante einspielt. Die Genauigkeit der Lotrechtstellung der Latte geht aus den in Tabelle 8 enthaltenen mittleren Aufstellungsfehlern hervor. Die Zahlen *Lorbers* enthalten den Gesamtaufstellungsfehler der Latte und beziehen sich auf ungünstige äußere Verhältnisse, während *Hohenners* Angaben sich auf günstige Verhältnisse beziehen und nur die eine Komponente des Aufstellungsfehlers angeben. Sie mögen unter ungünstigen Verhältnissen auf das Doppelte bis Fünffache anwachsen. *Samel*¹⁾ fand den mittleren Gesamtaufstellungsfehler einer mit Dosenlibelle versehenen 3 m langen Latte zu $\pm 6,6'$.

Tabelle 8.

Autor	Art der Lotrechtstellung				Nachweis
	Augenmaß	Senkel	Dosenlibelle	Dosenlibelle u. Verspreizung	
Lorber	$\pm 2^{\circ} 20'$	$\pm 1^{\circ} 20'$	$\pm 0^{\circ} 25'$	$\pm 0^{\circ} 5'$	Z. J. K. 1886, S. 377
Hohenner	$\pm 22,2'$	$\pm 12,2'$	$\pm 5,2'$	$\pm 1,2'$	Z. B. G. V. 1911, S. 271

14. Instrumente zum Abstecken fester Winkel.

Bei der Einzelaufnahme spielt besonders die Absteckung rechter Winkel eine große Rolle. Sie, wie auch die Absteckung anderer fester Winkel kann durch Diopterinstrumente, Spiegelinstrumente, Prismeninstrumente oder durch Schnurdreiecke erfolgen.

a) Diopterinstrumente.

Unter den verschiedenen, stets auf einem Stock gebrauchten Instrumenten dieser Art sind das Winkelkreuz, die Kreuzscheibe und die verschiedenen Winkelköpfe zu nennen. Das Winkelkreuz²⁾ besteht aus zwei fest verbundenen, senkrecht zueinander gestellten Dioptern und die Kreuzscheibe ist nichts anderes als ein zur Erzielung größerer Widerstandsfähigkeit auf einer kräftigen Grundplatte befestigtes Winkelkreuz. Diese älteren Hilfsmittel besitzen nur ein geringes vertikales Gesichtsfeld und sind fast ganz von den verschiedenen Winkelköpfen (Kegelkreuzscheibe, Kugelwinkelkopf, prismatischer Winkelkopf, Zylinderwinkelkopf), insbesondere durch die im folgenden allein beschriebene Kegelkreuzscheibe verdrängt worden. Sie besteht, wie Abb. 81 zeigt, aus einem auf einer kräftigen Grundplatte *G* befestigten hohlen Kegelstumpf, in dessen Mantel vier gleichabständige, in besondere Schaulöcher endigende Schlitz angebracht sind. Diese bilden zwei Diopter mit zueinander senkrechten Zielebenen, deren jede das ziemlich große, von den äußersten Lagen A_z' und A_z'' der Ziellinie begrenzte,

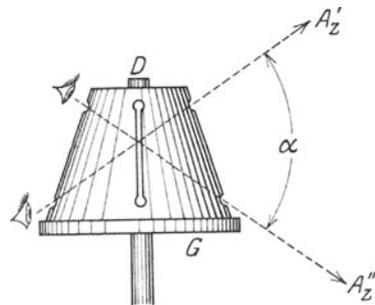


Abb. 81. Kegelkreuzscheibe.

¹⁾ Z. V. W. 1914, S. 606—608.

²⁾ Hierher gehört auch die Groma der römischen Feldmesser. Eine bei Ausgrabungen am Limes aufgefundene Groma ist in der Z. V. W. 1903, S. 419 abgebildet.

vertikale Gesichtsfeld α besitzt. Zur Ermöglichung einer etwas genaueren Lotrechtstellung der zusammenfallenden Kegel- und Stabachse ist mit dem Instrument eine Dosenlibelle D verbunden.

Soll zur Geraden AB , genauer gesagt zur Horizontalprojektion der die Punkte AB verbindenden Strecke, eine Senkrechte AC (Abb. 82) errichtet werden, so stellt man die Kegelkreuzscheibe lotrecht in A auf, dreht sie, bis B in der einen Diopterzielebene eingestellt ist, und weist hierauf in der anderen, zur ersten senkrechten Zielebene einen Punkt C ein. Soll umgekehrt der Fußpunkt F einer durch C gehenden Senkrechten zu AB gefunden werden, so errichtet man erst in einem geschätzten Näherungsort F' des Fußpunktes eine Senkrechte zu AB . Entsprechend dem Abstände des Punktes C von der Zielebene wird die Lage von F' verbessert und der geschilderte Vorgang so lange wiederholt, bis schließlich C genau in der zweiten Diopterzielebene liegt. Die Kreuzscheibe steht in diesem Falle im

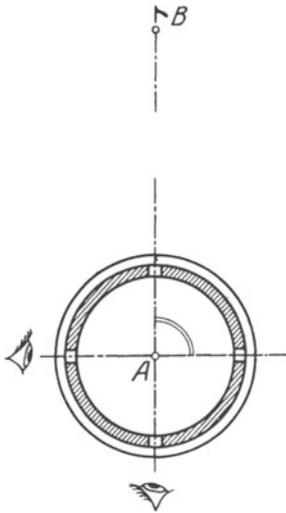


Abb. 82. Gebrauch der Kegelkreuzscheibe zum Abstecken rechter Winkel.

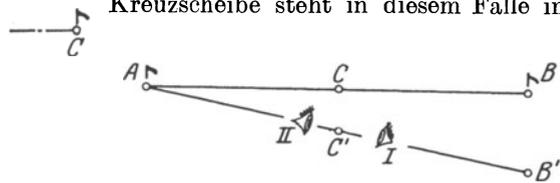


Abb. 83. Abstecken eines gestreckten Winkels mit der Kegelkreuzscheibe.

Fußpunkt F . Ist etwa ein Punkt C (Abb. 83) in die Gerade AB einzuschalten, d. h. ein gestreckter Winkel abzustecken, so richtet man bei Stellung I des Auges die in einem Näherungsort C' aufgestellte Kegelkreuzscheibe rückwärts auf Punkt A ein und sieht dann in der Augenstellung II vorwärts in derselben Zielebene, welche jedoch auf einen neben B liegenden fehlerhaften Ort B' hinweist. Aus dem etwa in Stabdicken zu schätzenden Abstände BB' und der Lage des Aufstellungspunktes gegen A und B kann man die notwendige Versetzung CC' leicht abschätzen und nun bei verbesserter Aufstellung den Vorgang einige Male wiederholen, bis die Punkte B' und B nicht mehr getrennt wahrgenommen werden.

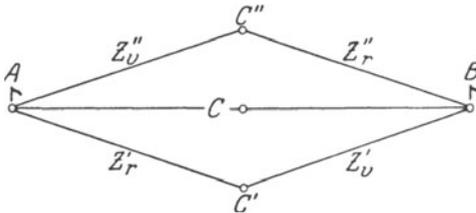


Abb. 84. Untersuchung der Kegelkreuzscheibe auf das Zusammenfallen der vorwärts und rückwärts gerichteten Ziellinien.

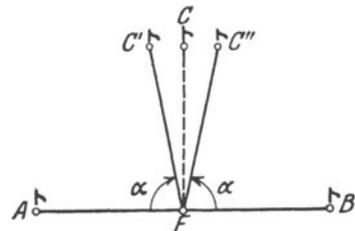


Abb. 85. Untersuchung der Kegelkreuzscheibe auf die rechtwinklige Stellung der Diopterzielebenen.

Vor dem Gebrauch des Instruments ist zu prüfen, ob die vorwärts und rückwärts gerichtete Ziellinie zusammenfallen sowie ob die beiden Diopterzielebenen zueinander senkrecht stehen. Ersteres trifft zu, wenn die gegenüberliegenden Spalten in einer Ebene und die Mittelpunkte der Schaulöcher auf den Mittellinien der Spalten liegen. Eine Abweichung hiervon hat zur

Folge, daß beim Einrichten eines Zwischenpunktes C in der Geraden AB die rückwärts und vorwärts gerichteten Ziellinien die Lagen Z_r', Z_v' bzw. Z_r'', Z_v'' (Abb. 84) besitzen, wenn die Absteckung vor und nach einer Drehung des Instruments um 180° erfolgt. Es ergeben sich also an Stelle von C zwei verschiedene Punkte C', C'' . Zur Prüfung der senkrechten Lage der beiden Zielebenen wird man etwa in einem einer Geraden AB (Abb. 85) angehörenden Punkte F von beiden Seiten her einen vermeintlich rechten Winkel, in Wirklichkeit einen Winkel α abtragen. Kommt man hierbei auf zwei verschiedene Punkte C', C'' , so ist der von beiden Diopterzielebenen eingefasste Winkel α von einem rechten verschieden.

Besitzt die Kegelkreuzscheibe noch ein zweites, gegen das erste um 45° verdrehtes Paar von senkrechten Diopterzielebenen, so kann sie auch zum Abstecken von 45° -Winkeln verwendet werden.

b) Spiegelinstrumente.

Hier ist vor allem der zur Absteckung rechter Winkel bestimmte 45° -Winkelspiegel¹⁾ (Abb. 86) zu nennen, welcher aus zwei einen 45° -Winkel einschließenden Spiegeln s_1, s_2 besteht, die in einem mit Griff versehenen Gehäuse unter zwei Ausschnitten f_1, f_2 befestigt sind. Trifft ein zur Spiegel-

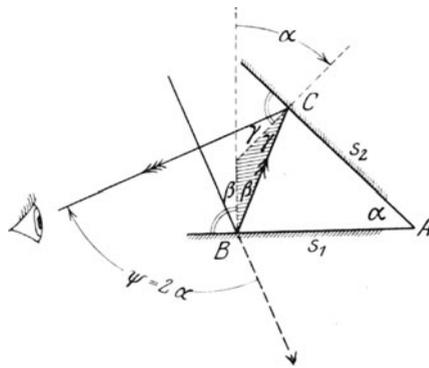
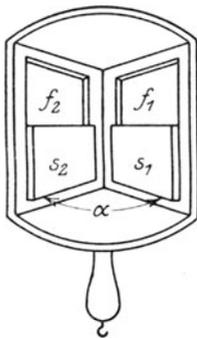


Abb. 86. Einfacher Winkelspiegel. Abb. 87. Strahlengang im einfachen Winkelspiegel.

schnittkante senkrechter Strahl in B und C unter den Winkeln β und γ auf die beiden Spiegel s_1 und s_2 (Abb. 87), so ist die Gesamtdrehung ψ , welche der austretende Strahl gegen den eintretenden erfahren hat $-2(90^\circ - \beta) - 2(90^\circ - \gamma) = 2(\beta + \gamma)$. Nun ist $\beta + \gamma$ als Winkel zwischen den beiden Einfallsloten dem Öffnungswinkel α des Winkelspiegels gleich, so daß die infolge zweimaliger Reflexion verursachte Gesamtablenkung $\psi = 2\alpha$, also für $\alpha = 45^\circ$ $\psi = 90^\circ$ wird. Um nun z. B. den Fußpunkt C (Abb. 88) einer zur Geraden AB Senkrechten durch D zu finden, sucht man zunächst im Instrument, dessen Spiegelschnittkante lotrecht liegen soll, die bei einer Drehung des Spiegels um das Lot unbeweglichen, zweimal reflektierten Bilder der Punkte A, B .

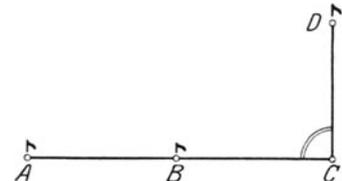


Abb. 88. Abstecken rechter Winkel mit dem Winkelspiegel.

Hat man diese durch eine Bewegung senkrecht zu AB zur Deckung und damit den Spiegel in die Lotebene durch AB gebracht, so bewegt man

¹⁾ Der Winkelspiegel hat sich aus dem wahrscheinlich von *Newton* erfundenen Spiegelsextanten entwickelt.

sich noch so weit nach rechts oder links, bis sich diese zusammenfallenden Bilder mit dem durch eines der Fenster direkt gesehenen Punkte D deckt. Dann befindet sich das Instrument im gesuchten Fußpunkt C . Die Untersuchung des Winkelspiegels erfolgt ganz nach den an Abb. 85 angeschlossenen Ausführungen. Eine zur Berichtigung etwa notwendige Änderung des Öffnungswinkels α kann durch geringes Verstellen des einen Spiegels

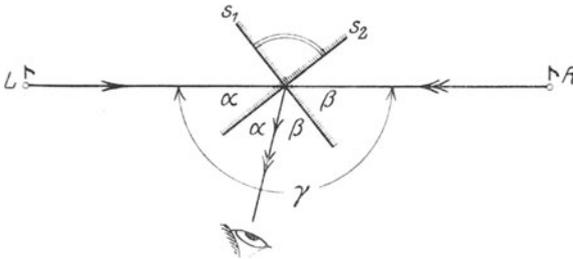


Abb. 89. Abstecken gestreckter Winkel mit dem *Berlinschen* Spiegelkreuz.

mittels Richtschraubchen erreicht werden. Zum Abstecken von gestreckten Winkeln dient das aus zwei aufeinander senkrechten Spiegeln s_1, s_2 (Abb. 89) bestehende Spiegelkreuz von *Berlin*. Bewegt man sich mit diesem Instrument vorwärts oder rückwärts, bis die einmal reflektierten, also beweglichen Bilder zweier Punkte L, R (Abb. 89) sich decken, so liegt der Spiegel in der Lotebene durch L und R ; denn nach der Abbildung ist der in diesem Falle von den auffallenden Strahlen eingeschlossene Winkel

$$\gamma = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

c) Prismeninstrumente.

Zu den wichtigsten Instrumenten dieser Art gehört das 1851 von *Bauernfeind* erfundene symmetrische Winkelprisma, dessen Querschnitt ein gleichschenkeliges rechtwinkliges Dreieck ist (Abb. 90). Es beruht auf dem optischen Satze, daß die Richtungsablenkung ψ (Abb. 91) eines im Prismenquerschnitt ABC liegenden, im Prisma zweimal reflektierten sowie beim Ein- und Austritt je einmal gebrochenen Strahles konstant, und zwar gleich dem Winkel A ist,

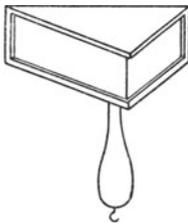


Abb. 90. Winkelprisma von *Bauernfeind*.

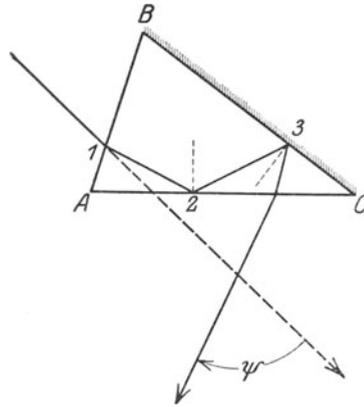


Abb. 91. Strahlengang im Winkelprisma.

wenn dieser dem Winkel $2C$ gleich ist. Da im symmetrischen *Bauernfeindschen* Prisma $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $\sphericalangle C = 45^\circ$ beträgt, so ist hier die Richtungsablenkung ein rechter Winkel.

Das Prisma von *Goulier*, dessen Querschnitt Abb. 92 zeigt, wirkt genau wie ein 45° -Winkelspiegel und verursacht daher innerhalb des Prismas eine Strahlenablenkung von 90° . Der eintretende und der austretende Strahl

sind gegen die anstoßenden Strahlenstücke, welche mit den Prismenflächen dieselben Winkel einschließen, um ein und denselben Betrag im gleichen Sinne gedreht, so daß die Richtungsablenkung von 90° auch für die äußeren Strahlen erhalten bleibt. Dieses Prisma hat zwei gewöhnliche Reflexionen, das *Bauernfeindsche* hingegen eine totale und eine gewöhnliche. Das *Gouliersche* Prisma hat den Vorteil, daß der Scheitel des abgesteckten rechten Winkels ins Prisma hineinfällt.

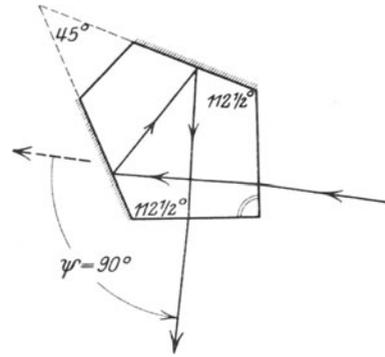
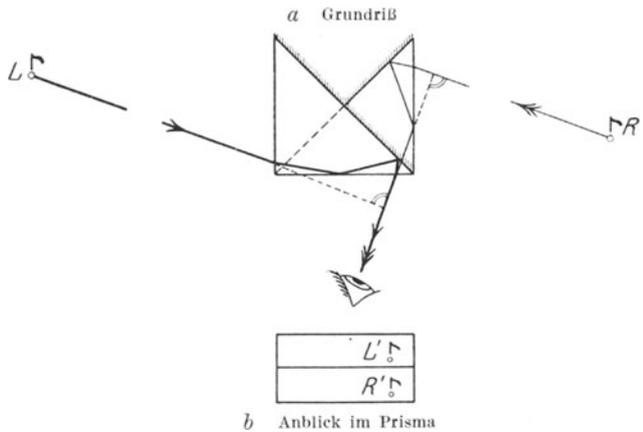


Abb. 92. Winkelprisma von Goulier.

Zum Abstecken von 180° -Winkeln dient das in Abb. 93 skizzierte *Bauernfeindsche* Prismenkreuz, in dem zwei symmetrische übereinander liegende *Bauernfeindsche* Prismen so verbunden sind, daß zwei Kathetenflächen in einer Ebene liegen, während die Hypotenusenflächen aufeinander senkrecht stehen. Das lotrecht zu haltende Prisma liegt auf der geraden Verbindungslinie zweier Punkte L, R , wenn deren Bilder L', R' übereinander liegen. Die vorhin angegebene gegenseitige Stellung beider Prismen braucht, mit Ausnahme der parallelen Lage der Prismenkanten, nur näherungsweise zuzutreffen. Sie muß jedoch scharf eingehalten sein, wenn, wie beim Spiegelkreuz von *Berlin*, die beweglichen Bilder Verwendung finden.

Abb. 93. Prismenkreuz von *Bauernfeind*.

Spiegel und Prismen besitzen vor den Diopterinstrumenten den großen Vorzug der Handlichkeit. Prismen haben in der Regel die kleinsten Ausmaße, und sie sind im Gegensatz zum Winkelspiegel ohne jede weitere

Berichtigung stets brauchbar, wenn sie bei der ersten Untersuchung richtig befunden worden sind; auch sind die Prismenbilder meist etwas heller als die Spiegelbilder. Ein Nachteil der Spiegel und Prismen ist der Mangel vertikaler Zielebenen. Im hügeligen Gelände erscheinen Bild und direkt gesehener Gegenstand häufig in sehr verschiedenen Höhen, und selbst unter Zuhilfenahme eines in den Strahlengang gebrachten Lotes ist es schwer zu beurteilen, ob Bild und Gegenstand wirklich auf dem gleichen Lote liegen. Deshalb eignen sich Winkelspiegel und Prismen vorzüglich für die Ebene, während man in einem sehr hügeligen Gelände die Kreuzscheibe trotz ihrer Schwerfälligkeit vorziehen wird.

Der mittlere Fehler einer mit der Kreuzscheibe oder dem Winkelspiegel abgesteckten Richtung ist etwa $2'$, während er für Prismen vielleicht die Hälfte beträgt.

d) Absteckung fester Winkel durch Schnurdreiecke.

Mit geringerer Genauigkeit können Winkel von 45° , 60° und 90° auch lediglich durch Längenmessung abgesteckt werden. Da man hierfür meist Schnüre benutzt, so spricht man von Schnurdreiecken. Soll z. B. in B (Abb. 94) eine Senkrechte zu BA errichtet werden, so erhält man durch Ab-

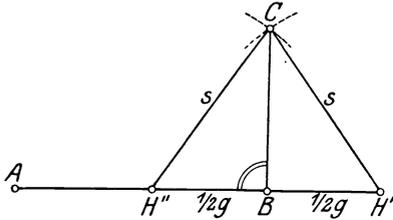


Abb. 94. Abstecken rechter Winkel durch Schnurdreiecke.

tragen der gleichen, an sich beliebigen Längen $\frac{1}{2}g$ von B aus nach beiden Seiten hin die auf AB liegenden Hilfspunkte H' , H'' , welche als die Endpunkte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks aufzufassen sind, dessen Höhe BC die zu errichtende Senkrechte ist. Von H' und H'' aus findet man nun den Punkt C leicht durch Einkreuzen unter Verwendung derselben Halbmesser s . Ist die Verlängerung von AB unzulässig, so kann man sich durch die Konstruktion eines sog. Pythagoreischen Dreiecks etwa mit den Seitenlängen 3, 4, 5 unter Verwendung beliebiger Einheiten helfen. Es wäre dann z. B. $BH'' = 3 \cdot 2$ m, $BC = 4 \cdot 2$ m und $H''C = 5 \cdot 2$ m zu nehmen. Hat man umgekehrt den Fußpunkt einer durch C gehenden Senkrechten zur vorgegebenen, durch A gehenden Richtung zu ermitteln, so wird man von C aus mit der willkürlichen Schenkellänge s durch Einkreuzen auf der vorgegebenen Richtung die Basisendpunkte H' , H'' finden, deren Mittelpunkt der gesuchte Fußpunkt ist.

Derartige Hilfsmittel sind aber immer nur als Notbehelf zu betrachten.

15. Der Theodolit.

Der Theodolit¹⁾ ist das genaueste Hilfsmittel zur Messung beliebiger Horizontalwinkel und wird sehr häufig auch zur Messung von Höhenwinkeln verwendet. Ein Horizontalwinkel hat horizontale Schenkel und kann daher als die Horizontalprojektion eines Lage- oder Positionswinkels aufgefaßt werden, dessen Schenkel im Raum beliebig liegen. Der Höhenwinkel hingegen gehört stets einer Lotebene an und besitzt einen horizontalen Schenkel.

a) Einrichtung des Theodolits.

Dieses Instrument ruht meist mittels dreier Schrauben F_1 , F_2 , F_3 (Abb. 95) auf einem Fußgestell, welches seinerseits die Dreifußbüchse B und damit auch die horizontale Kreisscheibe K trägt. In diese ist ein schmaler Silberstreifen S , der Limbus, möglichst fest eingelassen; auf ihm liegt die feine, im Uhrzeigersinne bezifferte Kreisteilung²⁾, von deren Güte die Leistung des Instruments wesentlich abhängt. Innerhalb des Kreises dreht sich um dessen Mittelpunkt eine Zeigervorrichtung, die Alhidade A , deren meist schwach konischer Stahlzapfen Z in der aus Rotguß bestehenden Dreifußbüchse steckt. Die Alhidade

¹⁾ Siehe hierzu *Hammer, E.*, Zur Geschichte des Theodolits und besonders seines Namens, Z. V. W. 1908, S. 81 bis 91.

²⁾ Kreisteilungen werden mit Hilfe eigener Kreisteilmaschinen hergestellt, unter denen älteren Typen besonders die im Deutschen Museum in München befindliche *Reichenbachsche* Kreisteilmaschine zu nennen ist. Dort steht auch die erste automatische Kreisteilmaschine von *Oertling*. Näheres über Kreisteilmaschinen, besonders über automatische, siehe bei *Ambrohn*, Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde. Berlin 1899. Siehe auch *Hammer, E.*, Die selbsttätige Kreisteilmaschine von Heyde, Z. J. K. 1905, S. 69 bis 73.

trägt die Fernrohrstützen, deren obere Enden als Lager (siehe Abb. 96) für die zylindrischen Enden der horizontalen Drehachse des Zielfernrohrs ausgebildet sind. Außerdem sind an der Alhidade fast immer zwei zur Tilgung des periodisch veränderlichen Exzentrizitätsfehlers diametral gestellte Ablesevorrichtungen angebracht¹⁾. Geringeren Genauigkeitsanforderungen genügen unter Umständen einfache Zeiger oder besser das Strichmikroskop; weitaus am häufigsten wird bei mittleren Genauigkeiten der Nonius, seltener das Skalen- und Noniusmikroskop verwendet²⁾. Den schärfsten Anforderungen

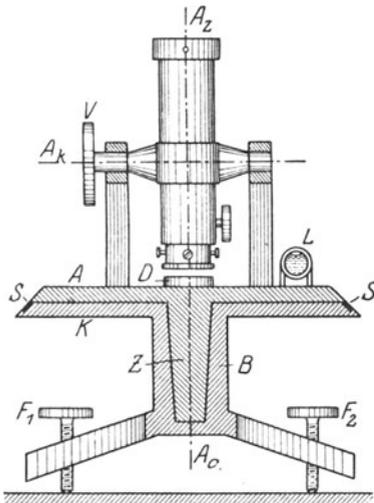


Abb. 95. Theodolit (Vertikalschnitt, Fernrohr in der Ansicht).

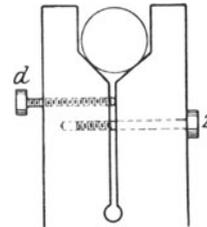


Abb. 96. Kippachsenlager.

ungen aber entspricht der Schraubenmikroskoptheodolit. Der Theodolit ist außerdem mit Klemmen, Feinstellungen sowie Richtschrauben und Libellen zur Achsenberichtigung ausgestattet. Zur ersten Orientierung gegen das Lot dient meist eine zwischen den Fernrohrstützen befindliche Dosenlibelle D , zur scharfen Berichtigung aber eine Röhrenlibelle L , die je nach ihrem Orte als Alhidadenlibelle (wie in Abb. 95), Stützenlibelle (an den Fernrohrstützen), Fernrohrlibelle (fest oder umsetzbar auf dem Fernrohr) oder Achsenlibelle³⁾ (umsetzbar auf der Kippachse) bezeichnet wird. Ein Höhenbogen oder ein Vertikalreis V ermöglicht auch die Messung von Vertikalwinkeln.

Die Klommen deren Anziehen eine feste Verbindung zwischen Kreis und Alhidade herstellt, greifen entweder am Kreisrand oder in der Nähe der

¹⁾ Die Anwendung von zwei diametralen Nonien hat schon *Hedraeus* vorgeschlagen (siehe *Lührs*, Z. V. W. 1910, S. 246). Bei den schwenkbaren Mikroskopen ist trotz ihrer diametralen Ablesestellen eine Ablesung nahezu vom gleichen Augenorte aus möglich; siehe hierzu *Lüdemann*, K., Über den Gebrauchswert des „schwenkbaren Mikroskops“ von *Hensoldt-Hildebrand*; Z. V. W. 1920, S. 314 bis 317.

²⁾ Mittleren Genauigkeitsanforderungen etwa genügen auch die seit der Jahrhundertwende von *Heyde* in Dresden hergestellten Zahnkreistheodolite, bei denen die Fortbewegung der Alhidade mittels einer feingearbeiteten Mikrometerhohlschraube erfolgt, welche mit einer größeren Anzahl von Gängen in den mutterförmigen Rand der Kreisscheibe eingreift. Da der Kreis nur eine grobe Teilung zur Feststellung der ganzen Grade besitzt und die Feinablesung an der geteilten Schraubentrommel erfolgt, so werden bei dieser, auch eine besondere Feinstellung ersetzenden Ablesevorrichtung die Augen sehr geschont. Als etwas Neues aber können diese Zahnkreistheodolite — abgesehen etwa von der gegen früher erhöhten Genauigkeit der Ausführung — kaum bezeichnet werden, denn Zahnkreistheodolite mit gewöhnlicher Schraube, wie sie in schöner Ausführung im Deutschen Museum stehen, hat schon der Augsburgener Mechaniker *Brander* in der zweiten Hälfte des 18. Jahrh. hergestellt, und die Hohlschraube hat nach *Hammer* (Z. J. K. 1911, S. 315) bereits der englische Uhrmacher *John Hindley* in York verwendet.

³⁾ Eine zur bequemen Kontrolle der jeweiligen Kippachsenlage dienende Achsenlibelle leistet wegen des mit der Höhe zunehmenden Kippachsenfehlers, besonders bei steilen Sichten, gute Dienste.

Achse an, so daß man Peripherieklemmen und Achsenklemmen (Ringklemmen und radialwirkende Achsenklemmen) antrifft. In der eine Ringklemme darstellenden Abb. 97 bedeutet K die Klemme, durch deren Anziehen

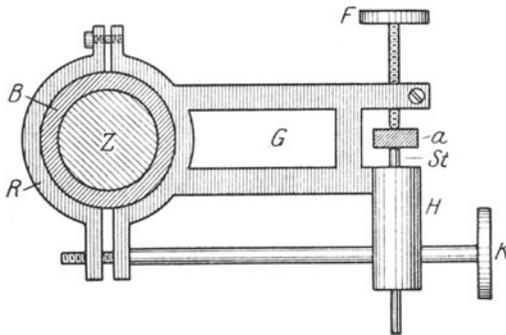


Abb. 97. Achsenklemme (Ringklemme) mit tangentialer Feinbewegung.

ein geschlitzter Ring R fest an die Dreifußbüchse B gepreßt wird. Mit dem Klemmring R ist ein Gestell G verbunden, dessen Enden die Mutter einer Feinstellschraube F und ein Federhäuschen H tragen. Da die Feinstellschraube und der Stift St des Federhäuschens von verschiedenen Seiten her gegen ein fest mit der Alhidade verbundenes Ansatzstück a drücken, so ist bei angezogener Klemme nur noch durch Drehen der Feinstellschraube eine als Feinstellung bezeichnete geringe Verstellung der Alhidade möglich. Neben der hier skizzierten tangentialen Feinbewegung, die manchmal durch eine tangentiale Schraube ohne Ende vermittelt wird, ist auch die Feinbewegung in der Sehnenrichtung zu erwähnen.

b) Berichtigung des Theodolits.

Die Hauptachsen des Theodolits sind die Alhidadenachse, die Kippachse und die Zielachse. Die Alhidadenachse A_a soll lotrecht, die Horizontal- oder Kippachse A_k horizontal liegen, während die Ziellinie oder Zielachse A_z zur Kippachse senkrecht stehen muß. Nur beim Zutreffen dieser Bedingungen stimmt die in horizontale Lage gekippte Fernrohrziellinie mit der Horizontalprojektion der ursprünglich eingestellten Sicht überein. Andernfalls ist das Instrument mit einem Aufstellungsfehler, Kippachsenfehler und Zielachsenfehler behaftet, deren Untersuchung und Berichtigung von der Libellenanordnung abhängt.

In dem meist zutreffenden Falle, daß der Theodolit eine Alhidaden-, Stützen- oder Fernrohrlibelle besitzt, geht der Beseitigung des Kippachsenfehlers diejenige des Zielachsenfehlers, zweckmäßig auch diejenige des Aufstellungsfehlers, voraus. Ist aber das Instrument nur mit einer umsetzbaren Achsenlibelle ausgestattet, so werden Aufstellungs- und Kippachsenfehler durch eine gemeinsame Untersuchung beseitigt.

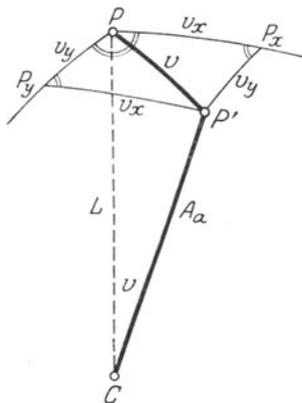


Abb. 98. Bestimmung des Aufstellungsfehlers aus zwei zueinander senkrechten Komponenten.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall. Der Aufstellungsfehler v (Abb. 98) ist der von der Alhidadenachse A_a mit dem Lot L eingeschlossene Winkel. Die um irgendeinen Punkt C von A_a beschriebene Kugel mit dem Halbmesser 1, welche von L und A_a in den Punkten P, P' getroffen wird, zeigt im Abstand dieser Durchstoßpunkte den Winkel v als Bogen, dessen Projektionen v_x und v_y auf zwei beliebige zueinander senkrechte Lotebenen als die Komponenten des Aufstellungsfehlers bezeichnet werden. Aus dem sehr kleinen, wegen seiner geringen Ausdehnung

als ein ebenes zu behandelnden, rechtwinkligen Dreieck $PP'P_x$ findet man leicht

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \dots \dots \dots (153)$$

nach welcher Beziehung der Aufstellungsfehler aus einem beliebigen Paar von senkrechten Komponenten ermittelt werden kann. In Abb. 99, welche eine Projektion auf die die Komponente v_x enthaltende Lotebene darstellt, ist T_1 die zu einer ersten Lage mit dem Blasenstand b_1 gehörige Tangente an den Blasenmittelpunkt, während NN die zur Alhidadenachse Senkrechte parallel zur gewählten Lotebene bedeutet. Nach einer Drehung der Alhidade um 180° gelangt T_1 in die Lage T_2 , welche mit T_1 den Winkel $2v_x$ einschließt. Der Vergleich des neuen Blasenstandes b_2 mit dem alten ergibt einen Blasenweg $w = b_1 - b_2$, welcher der doppelten Komponente $2v_x$ entspricht. Also ist, wenn p wieder den Teilwert bedeutet, offenbar

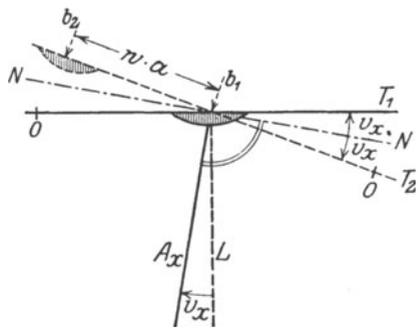


Abb. 99. Bestimmung einer Komponente des Aufstellungsfehlers.

$$v_x = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)p'' \dots \dots \dots (154)$$

die eine der gesuchten Komponenten des Aufstellungsfehlers. Den zugehörigen Wert v_y findet man nach einer Drehung der Alhidade um 90° genau auf dem gleichen Wege.

Zur Beseitigung des Aufstellungsfehlers bringt man die durch eine Alhidadendrehung parallel zur Lotebene durch zwei Fußschrauben F_1, F_2 (Abb. 100 a) gestellte Röhrenlibelle durch Drehen an diesen Schrauben zum

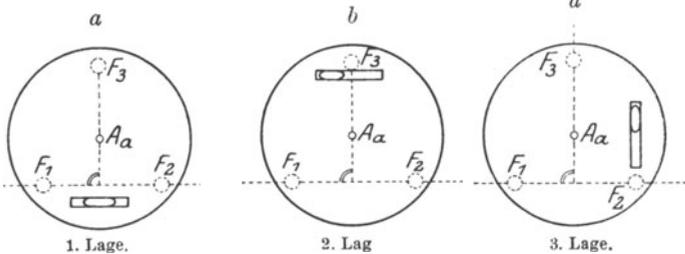


Abb. 100.

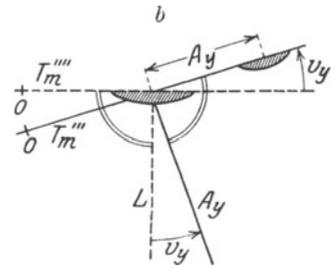


Abb. 101.

Lotrechtstellung der Alhidadenachse mittels einer gleichzeitig zu berichtigenden Alhidadenlibelle.

Einspielen, nachdem schon vorher mittels einer etwa vorhandenen Dosenlibelle eine angenäherte Lotrechtstellung der Alhidadenachse erfolgt ist. Nach einer Drehung der Alhidade um 180° zeigt sich ein Libellenausschlag (Abb. 100 b), welcher der doppelten Komponente des Aufstellungsfehlers v_x in der Lotebene durch F_1, F_2 entspricht. Die den beiden Lagen entsprechende Achsenstellung veranschaulicht Abb. 99, wenn man hierin T_1 und T_2 durch die beiden Lagen T_m', T_m'' der Libellenachse ersetzt denkt und dem Blasenweg w die besondere Bedeutung des Blasen Ausschlags beilegt. Dieser in Lage II vorhandene Ausschlag wird zur Hälfte je an den Libellenrichtschraubchen (bei einer Fernrohrlibelle an der Kippschraube) und an den Fußschrauben F_1, F_2 beseitigt, wodurch die Senkrechtstellung der Libellenachse zu der im Raum noch schief liegenden Alhidadenachse herbeigeführt wird. Nach einer Alhidadendrehung um 90° zeigt

sich ein Ausschlag A_y , welcher der einfachen zweiten Komponente v_y des Aufstellungsfehlers entspricht und ganz an der dritten Fußschraube F_3 zu beseitigen ist (Abb. 101 a, b). Dadurch wird die Libellenachse samt der Alhidadenachse um v_y gedreht, so daß erstere horizontal, letztere aber lotrecht gestellt wird. Ist die Berichtigung — meist erst nach einigen Wiederholungen — hinreichend gelungen, so muß die Libelle bei jeder Alhidadenstellung einspielen. Auch jede andere etwa noch vorhandene Libelle hat dann einen festen Spielpunkt, der lediglich mit Hilfe der Libellenrichtschraubchen in den Teilungsmittelpunkt zu legen ist.

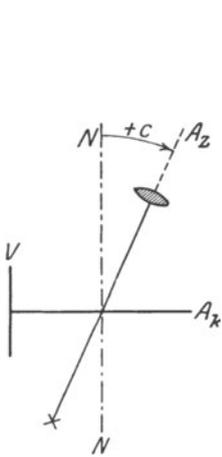


Abb. 102. Zielachsenfehler.

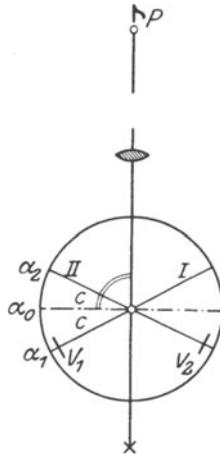


Abb. 103. Beseitigung des Zielachsenfehlers mittels Durchschlagen.

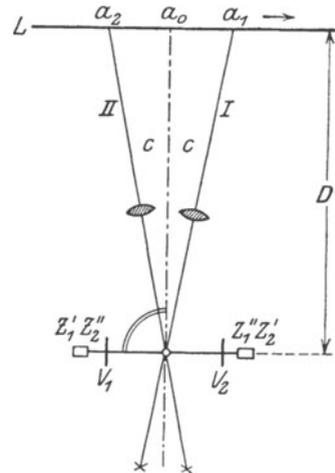


Abb. 104. Beseitigung des Zielachsenfehlers durch Umlegen.

Steht die Ziellinie A_z (Abb. 102) nicht auf der Kippachse A_k senkrecht, so spricht man von einem Zielachsenfehler (Kollimationsfehler) c und versteht hierunter denjenigen im Uhrzeigersinn positiv gezählten Winkel, welchen die Ziellinie mit einer in der Ebene Kippachse-Ziellachse liegenden Senkrechten NN' zur Kippachse einschließt. Er ist positiv, wenn der Winkel zwischen dem Objektivende der Ziellinie und dem Kreisende der Kippachse größer als 90° ist. Der Zielachsenfehler läßt sich aus Beobachtungen in zwei Fernrohrlagen bestimmen und beseitigen, wobei die zweite Lage entweder durch Durchschlagen oder Umlegen des Fernrohrs herbeigeführt wird. Im ersten Falle, dem Abb. 103 entspricht, erhält man nach Einstellung irgendeines im Instrumentenhorizont liegenden, deutlich sichtbaren Punktes P bei Höhenkreis links an dem in der Kippachsenlotebene befindlichen Zeiger die Horizontalkreisablesung α_1 . Wird nunmehr das Fernrohr durchgeschlagen, d. h. um seine Horizontalachse gedreht, wobei Objektiv und Okular ihren Ort wechseln, die Achszapfen aber in ihren Lagern bleiben, und wird ferner nach einer Drehung der Alhidade Punkt P wieder eingestellt, so besitzt die Kippachse bei Höhenkreis rechts die Lage II, welche mit Lage I den Winkel $2c$ einschließt. Bedeutet α_2 die zu Lage II der Kippachse gehörige Horizontalkreisablesung, so ist der Zielachsenfehler nach Größe und Vorzeichen

$$c = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \dots \dots \dots (155)$$

Der richtigen Lage der Zielachse gegen die Kippachse würde eine Ablesung

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \dots \dots \dots (156)$$

entsprechen. Man wird daher zur Beseitigung des Zielachsenfehlers α_0

am Horizontalkreis einstellen und hierauf mittels der horizontal wirkenden Richtschraubchen das Fadenkreuz verschieben, bis Punkt P wieder eingestellt ist.

Ähnlich ist zu verfahren, wenn man, wie in Abb. 104 angenommen, das Fernrohr umlegen kann. Bei dieser Bewegung findet eine Drehung um die Längsachse des Fernrohres statt; Objektiv und Okular bleiben an ihrer Stelle, dagegen vertauschen die Achszapfen Z' , Z'' ihre Lager. Bei dieser Untersuchungsortart richtet man das Fernrohr auf eine im Instrumentenhorizont liegende geteilte, zur Ziellinie senkrechte, horizontale Latte¹⁾ L im Abstände D und findet an der Latte eine Ablesung a_1 . Wird jetzt das Fernrohr umgelegt, so gelangt die Ziellinie aus Lage I in Lage II , welche mit I den Winkel $2c$ einschließt. Ist a_2 die zugehörige Lattenablesung, so besteht, wenn die Bezifferung der Latte wie diejenige des Kreises im Uhrzeigersinne zunimmt, die einfache Beziehung

$$c = \frac{\varrho''}{2D} (a_1 - a_2) \dots \dots \dots (157)$$

Hier würde der richtigen Lage der Ziellinie eine Lattenablesung

$$a_0 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \dots \dots \dots (158)$$

zugehören, so daß zur Beseitigung des Zielachsenfehlers das Fadenkreuz bei unveränderter Alhidadenstellung mittels der Richtschraubchen so weit im horizontalen Sinne zu verschieben wäre, bis a_0 eingestellt ist.

Die Kippachse soll bei lotrechter Alhidadenachse horizontal liegen. Sonst spricht man von einem Kippachsenfehler i (Abb. 105) und versteht hierunter den Höhenwinkel des kreisfreien Endes der Kippachse. Ist etwa eine — für die jetzige Art der Untersuchung nicht notwendige — Achsenlibelle vorhanden, so kann i leicht zahlenmäßig durch Umsetzen der Libelle und Rechnung nach der ersten der beiden Gleichungen (147)

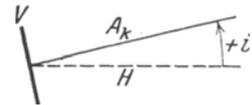


Abb. 105. Kippachsenfehler.

gefunden werden. Zur Wegschaffung des Kippachsenfehlers kann man nach vorhergegangener scharfer Beseitigung des Aufstellungs- und Zielachsenfehlers das horizontale Fernrohr auf ein Lot L (Abb. 106 a) einstellen und hierauf dem Fernrohr eine starke Neigung erteilen. Bei der Kippbewegung beschreibt die Ziellinie in der auf der Zielebene senkrechten Lotebene eine Zielspur S , welche beim Vorhandensein eines Kippachsenfehlers i mit dem Lot L den Winkel i einschließt. Zur Horizontallegung der Kippachse ist das eine Achsenende mit Hilfe von besonderen Lagerschraubchen d , z (Abb. 96) so lange zu heben oder zu senken, bis der Fadenkreuzschnittpunkt des stark geneigten Fernrohres auf dem ursprünglich eingestellten Lote liegt. Mangels eines mate-

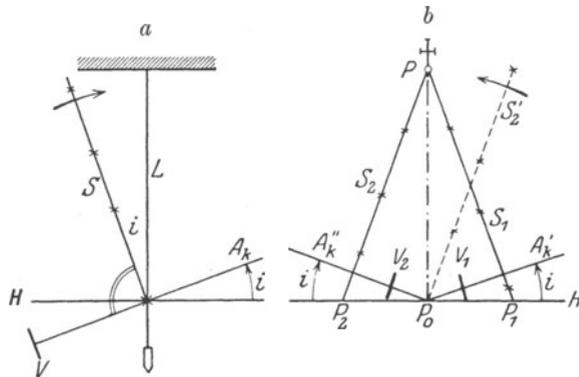


Abb. 106. Berichtigung des Kippachsenfehlers.

¹⁾ Falls es sich nicht um die zahlenmäßige Bestimmung, sondern nur um die Beseitigung des Zielachsenfehlers handelt, kann an Stelle der geteilten Latte wieder ein scharf sichtbarer Punkt im Horizont treten.

riellen Lotes kann man auch in folgender Weise vorgehen. Wird ein sehr hoch oder sehr tief gelegener Punkt P (Abb. 106b) vor und nach dem Durchschlagen des Fernrohrs eingestellt, so beschreibt die Ziellinie beim Kippen im Aufriß die Zielspuren S_1 und S_2 . Bei horizontaler Lage des Fernrohrs trifft die Ziellinie in ihren beiden Lagen die zur Horizontalprojektion P_0 des Punktes P symmetrisch liegenden Punkte P_1 und P_2 . Sind α_1, α_2 die Horizontalkreisablesungen, wenn die Ziellinie nach P_1 bzw. in der zweiten Lage nach P_2 gerichtet ist, so muß, wenn die Horizontalkreiseinstellung

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \dots \dots \dots (159)$$

herbeigeführt wird, die horizontale Ziellinie nach P_0 gerichtet sein. Sie wird beim Kippen nunmehr die an P vorbeigehende Zielspur S_2' beschreiben und es ist nun wieder durch Heben oder Senken des einen Kippachsenlagers der Fadenkreuzschnittpunkt nach P , d. h. in das durch P_0 gehende Lot zu verlegen.

Besitzt der Theodolit nur eine Kippachsenlibelle, so kann der Zielachsenfehler vor oder nach der übrigen Untersuchung genau so, wie vorhin beschrieben, beseitigt werden. Im übrigen wird die Berichtigung in folgender Weise erzielt. Nachdem die Reitlibelle durch Umsetzen berichtigt wurde, die Libellenachse also parallel zur Kippachse liegt, wird durch eine Alhidadenrotation die Libelle parallel zur Lotebene durch zwei Fußschrauben gestellt und durch Drehen an diesen zum Einspielen gebracht. In dieser ersten Stellung

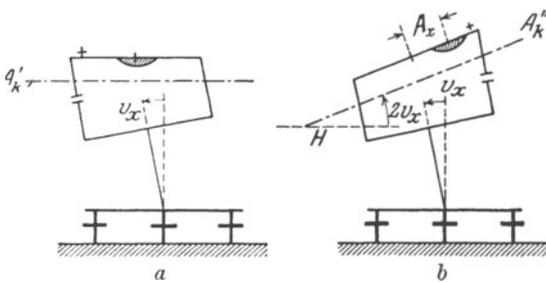


Abb. 107. Gleichzeitige Beseitigung des Aufstellungs- und Kippachsenfehlers mittels einer umsetzbaren Kippachsenlibelle.

(Abb. 107a) liegen dann Libellenachse und Kippachse A_k' horizontal, während zur Projektion der Alhidadenachse auf die genannte Lotebene die Komponente v_x des Aufstellungsfehlers gehört. Der nach einer Drehung der Alhidade um 180° vorhandene Ausschlag A_x (Abb. 107b) entspricht der doppelten Komponente $2v_x$ und ist je zur Hälfte an den benutzten Fußschrauben und durch Höhen-

verstellung des einen Kippachsenlagers zu beseitigen. Damit ist die Kippachse senkrecht zu der noch schiefliegenden Alhidadenachse gestellt. Der nach einer Alhidadenrotation um 90° sich zeigende Ausschlag A_y rührt ausschließlich von dieser schiefen Lage der Alhidadenachse her und ist lediglich mittels der dritten Fußschraube zu beseitigen.

Der Einfluß des Ziel- und Kippachsenfehlers ist eine Funktion des Höhenwinkels h der Sicht, derjenige des Aufstellungsfehlers ist auch noch von dem Winkel α zwischen Zielebene und Alhidadenlotebene abhängig. Bedeuten φ_l', φ_r' die bei Höhenkreis links und rechts an Stelle von φ ausgeführten fehlerhaften Horizontalkreisablesungen, so ist, wie ohne Beweis¹⁾ angeführt werden soll,

$$\varphi = \varphi_l' + \frac{c}{\cos h} - i \operatorname{tg} h - v \sin \alpha \operatorname{tg} h = \varphi_r' - \frac{c}{\cos h} + i \operatorname{tg} h - v \sin \alpha \operatorname{tg} h. (160)$$

¹⁾ Er kann z. B. mit Hilfe von Differentialdreiecken geführt werden, welche durch den Schnitt der Hauptachsen des Theodolits in ihrer richtigen und fehlerhaften Lage mit einer um den Instrumentenmittelpunkt beschriebenen Kugel vom Halbmesser 1 entstehen.

Hieraus folgt durch Einführung des Mittels $\varphi' = \frac{1}{2}(\varphi_i' + \varphi_r')$ der fehlerhaften Beobachtungen

$$\varphi = \varphi' - v \sin \alpha \operatorname{tg} h. \quad \dots \dots \dots (161)$$

Nach diesem Ergebnis ist das arithmetische Mittel der in zwei Fernrohrlagen [mit Durchschlagen¹⁾] ausgeführten Horizontalkreisbeobachtungen frei vom Einfluß des Ziel- und Kippachsenfehlers, während der Einfluß des Aufstellungsfehlers erhalten bleibt. Er kann jedoch durch sorgfältige Lotrechtstellung der Alhidadenachse unter der jeweils zulässigen Grenze gehalten werden.

Bei bekanntem nach (155) oder (157) ermittelten c findet man nach den beiden Gleichungen (160) den Kippachsenfehler mittels des Ausdrucks

$$i = \frac{1}{2}(\varphi_i' - \varphi_r') \operatorname{ctg} h + \frac{c}{\sin h}. \quad \dots \dots \dots (162)$$

Bei einer seitlichen Anordnung des Fernrohrs besitzt die auf einen Punkt P eingestellte Ziellinie eine bestimmte Lage I (Abb. 108) und die an einem zur Zielebene parallel gedachten Zeigerarm erscheinende Horizontalkreisablesung ist α_1 . Zur anderen Fernrohrlage II aber gehört eine Ablesung α_2 , die mit α_1 symmetrisch zur Sollablesung α liegt, welche einem nach P gerichteten Zeiger entspricht. Es stellen also die Ausdrücke

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \varkappa = \alpha - \alpha_1 = \varrho'' \cdot \frac{e}{D} \quad \dots \dots \dots (163)$$

die vom Fehler der Fernrohrexzentrizität c befreite Horizontalkreisablesung bzw. den Fehler der zu Lage I gehörigen Ablesung vor, wenn e und D den Abstand des Fernrohrs und des Zielpunktes von der Alhidadenachse bedeuten.

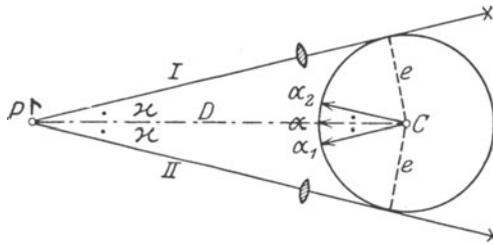


Abb. 108. Exzentrische Lage der Ziellinie.

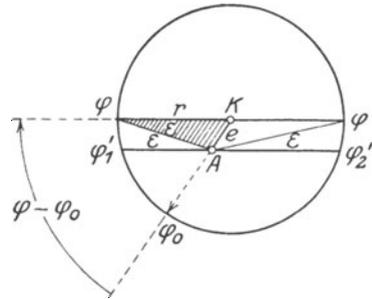


Abb. 109. Periodisch veränderlicher Exzentrizitätsfehler der Alhidade.

Fällt der Kreismittelpunkt K (Abb. 109) nicht auf die Alhidadenachse A , so entsteht ein periodisch veränderlicher Exzentrizitätsfehler ε . Um diesen Betrag unterscheiden sich die an den Enden einer zunächst noch gestreckt gedachten Alhidade ausgeführten Ablesungen φ_1', φ_2' von dem richtigen Werte φ , welcher an den Enden eines zu den Zeigerarmen parallelen Kreisdurchmessers erscheinen würde. Dieser richtige Wert ist nach der Abbildung

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1' + \varphi_2''). \quad \dots \dots \dots (164)$$

Also ist das Mittel der an zwei diametralen Zeigern in einer Fernrohrlage ausgeführten Ablesungen frei vom Einfluß des periodisch veränderlichen Exzentrizitätsfehlers. Er ist auch, wie sich ein-

¹⁾ Träte an Stelle des Durchschlagens das Umlegen, so würde im Beobachtungsmittel der Einfluß des Kippachsenfehlers nicht getilgt.

fach zeigen läßt, im Mittel der am gleichen Zeiger in zwei Fernrohrlagen (mit Durchschlagen) ausgeführten Ablesungen nicht mehr enthalten.

Bedeutet r den Kreishalbmesser, $e = AK$ die lineare Exzentrizität und φ_0 die zu ihrer Richtung gehörige Kreisablesung, so ist nach dem in der Abb. 109 schraffierten Dreieck

$$\varepsilon = \varrho'' \frac{e}{r} \sin(\varphi - \varphi_0), \quad \dots \dots \dots (165)$$

also eine periodisch veränderliche Größe, deren Maximalwert $\varepsilon_{max} = \varrho'' \frac{e}{r}$ ist.

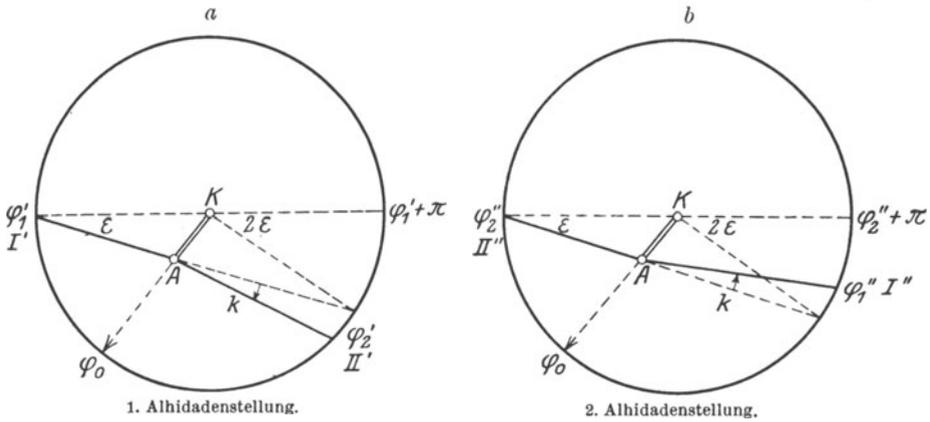


Abb. 110. Bestimmung des periodisch veränderlichen Exzentrizitätsfehlers und des Knickungsfehlers der Alhidade.

Die zahlenmäßige Bestimmung des periodisch veränderlichen Exzentrizitätsfehlers aus Beobachtungen wird vielfach mit einer Teilungsuntersuchung verbunden und sei an der Hand von Abb. 110 kurz erklärt. In einer ersten Alhidadenstellung erscheinen an den beiden Zeigern I', II' die Ablesungen φ_1', φ_2' . Ist, wie hier angenommen, der zweite Zeigerarm gegen die Rückwärtsverlängerung des ersten um einen Betrag k verdreht, so spricht man von einem Knickungsfehler k der Alhidade. Wird diese nun um 180° gedreht, so erscheinen an den in den Stellungen I'', II'' befindlichen Ablesevorrichtungen die Ablesungen φ_1'', φ_2'' , deren Vergleich mit φ_1', φ_2' sowohl den konstanten Wert k wie auch die mit der Alhidadenstellung veränderliche Größe ε ergibt. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\varphi_2' - (\varphi_1' + 180^\circ) = d_1, \quad \varphi_2'' + 180^\circ - \varphi_1'' = d_2 \quad \dots \dots (166)$$

findet man aus der Doppelabb. 110 leicht die Beziehungen

$$d_1 = 2\varepsilon + k, \quad -d_2 = 2\varepsilon - k \quad \dots \dots \dots (167)$$

und hieraus gewinnt man die Fehlerausdrücke

$$k = \frac{1}{2}(d_1 + d_2), \quad \varepsilon = \frac{1}{4}(d_1 - d_2) \dots \dots \dots (168)$$

Werden mehrere Beobachtungen — vielleicht von 15 zu 15° fortschreitend — über den ganzen Kreis verteilt, so erhält man aus den einzelnen k einen Mittelwert k_m , der, zu 180° hinzugefügt, den wahrscheinlichsten Zeigerabstand vorstellt, während der mittlere Fehler eines einzelnen k dem mittleren Fehler der Einzelablesung entspricht. Für die einzelnen nach (168) ermittelten ε , welche ungefähr einer Sinuskurve folgen, lassen sich unter Zugrundelegung der Beziehung (165) durch eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen Verbesserungen berechnen, die dem Zusammen-

wirken der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, der regelmäßigen und der unregelmäßigen Kreisteilungsfehler entsprechen.

Um den Einfluß der Kreisteilungsfehler herabzumindern, wird man, nachdem jeweils der Kreis verstellt worden ist, die Beobachtungen an verschiedenen Kreisstellen ausführen. So werden nicht nur die unregelmäßigen, sondern auch die regelmäßigen Kreisteilungsfehler mit verschiedenen Vorzeichen in das Beobachtungsmittel eingehen und auf dieses nur mehr einen geringen Einfluß ausüben. Das jeweilige Maß der Kreisverstellung ist $360^\circ : n \cdot m$, wenn m die Zahl der Ablesevorrichtungen und n die beabsichtigte Wiederholungszahl der Beobachtungen (Satzzahl) bedeutet.

Eine ungleiche Dicke der zylindrischen Achszapfen bewirkt eine gleichbleibende Neigungsänderung der Kippachse, deren Einfluß gemeinsam mit dem des Kippachsenfehlers getilgt werden kann¹⁾.

c) Gebrauch des Theodolits zur Messung von Horizontalwinkeln.

Zur Horizontalwinkelmessung wird die Alhidadenachse des Theodolits ins Lot des Winkelscheitels gebracht. Als Unterlage eignet sich am besten ein Steinpfeiler oder etwa auch eine dicke, nicht zu lange Holzsäule, in deren Oberfläche der Aufstellungspunkt durch einen Bolzen oder Nagel bezeichnet ist. Für gewöhnlich muß man sich aber damit begnügen, das Instrument auf einem Stativ²⁾, dessen drei Beine fest in den Boden getreten

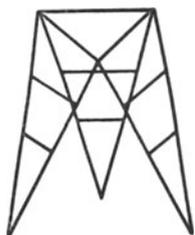


Abb. 111. Gitterstativ.

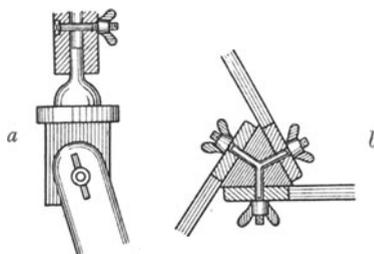


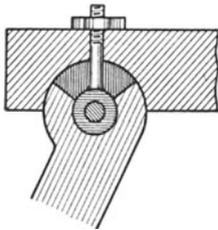
Abb. 112. Zapfenstativ mit ebenen Reibungsflächen.

werden, zu befestigen, um es in eine möglichst unveränderliche Verbindung mit dem Gelände zu bringen. Ein Stativ soll möglichst standfest und handlich sein und eine rasche Aufstellung ermöglichen. Diesen Anforderungen genügen am besten diejenigen Stative, welche der in Abb. 111 skizzierten idealen Grundform des Gitterstativs mit möglichst breiten Gelenkseiten nahe kommen. Allgemein unterscheidet man Zapfenstative und Teller- oder Scheibenstative. Erstere, welche heute als Theodolitträger nicht mehr in Frage kommen, besitzen einen von drei Beinen getragenen prismatischen, in einen Zapfen endigenden Kopf (Abb. 112), an dem mittels Steckhülse das Instrument befestigt wird. Für Theodolitaufstellungen kommen ausschließlich die in einen Kopf mit horizontaler Aufsatzfläche endigenden Tellerstative in Frage, deren wichtigste Formen in den Abb. 113 bis 118 skizziert sind. Abb. 119 zeigt die gebräuchliche Stativfußausbildung mit Eisenschuh und gut befestigtem Trittansatz. Die feste Verbindung des Instrumentes mit

¹⁾ Eine solche vollständige Unschädlichmachung ist aber bei elliptischen Achszapfen nicht möglich; siehe hierzu *Baeschlin, F.*, Untersuchung über den Einfluß elliptischer Form der Horizontalachszapfen eines Theodolits mit y-förmigen Lagern auf die Horizontalwinkelmessungen, Z. J. K. 1916, 285—293.

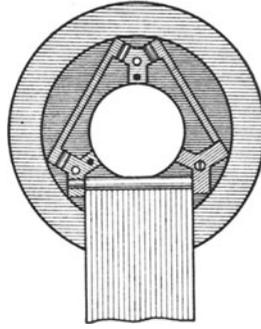
²⁾ Näheres über Stative siehe *Vogler*, Abbildungen geodätischer Instrumente, Berlin 1892.

dem Stativkopf erfolgt, wie in Abb. 120 angedeutet ist, mittels Herzschraube und Gegenfeder, die als Spirale oder wie in Abb. 69 als Blattfeder ausgebildet ist.



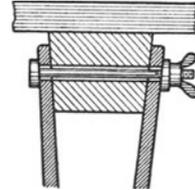
Münchner Stativ (*Reichenbach*), zylindrische Reibungsflächen.

Abb. 113.



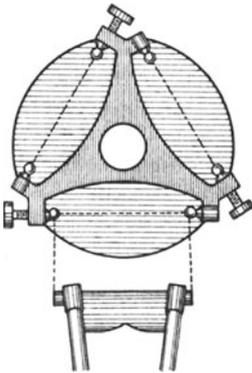
Berliner Stativ von *Meißner*, zylindrische, fest mit einer Gußplatte verbundene Achsen (Untenansicht).

Abb. 114.



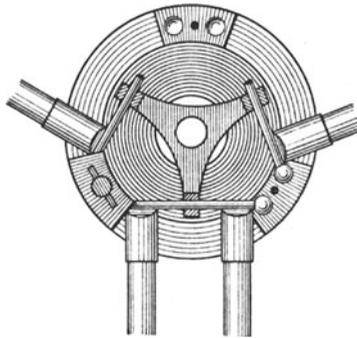
Französisches Stativ (auch nach *Pistor* und *Martins* benannt), ebene Reibungsflächen, kein Fortschritt.

Abb. 115.



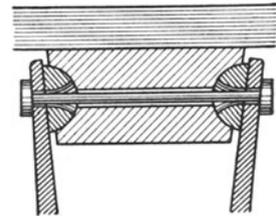
Wiener Stativ von *Starke* u. *Kammerer*, die Enden der Stativbeine besitzen Kugellager (Untenansicht).

Abb. 116.



Stativ von *Wolz* in Bonn, die kugligen Enden der Stativbeine ruhen in Kugellagern des Stativkopfes (Untenansicht).

Abb. 117.



Pariser Stativ mit Kugelreibung.

Abb. 118.

Um nun den Theodolit lotrecht über einem bestimmten Bodenpunkt aufzustellen, wird das Instrument auf dem schon angenähert horizontierten Stativkopf so verschoben, daß die Spitze eines in den Stengelhaken der Herzschraube eingehängten Lotes unmittelbar

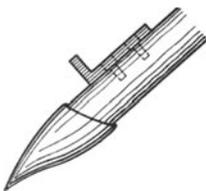


Abb. 119. Stativfuß mit Eisenschuh und Trittansatz.

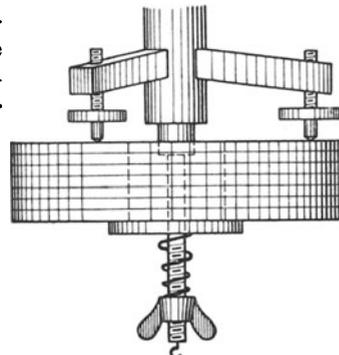


Abb. 120. Verbindung des Instrumentes mit dem Stativ.

über dem Bodenpunkt liegt¹⁾; hierauf wird die Alhidadenachse angenähert lotrecht gestellt, die hierdurch etwa gestörte Zentrierung noch einmal verbessert und dann erst wird durch Anziehen der Befestigungsmutter und der Gelenkschrauben feste Verbindung des Instrumentes mit der Umgebung hergestellt. Ist durch eine gelungene Berichtigung vor allem der Aufstellungsfehler des Theodolits beseitigt, so werden zur Messung des zwischen den Zielen *L*, *R* (Abb. 121) liegenden Horizontalwinkels α_{lr} am Zeiger in den Stellungen Z_l , Z_r die zu den aufeinanderfolgenden Einstellungen beider Zielpunkte gehörigen Horizontalkreisablesungen a_l, a_r ausgeführt, deren Differenz

$$\alpha_{lr} = a_r - a_l \dots \dots \dots (169)$$

bei berichtigtem Instrument der gesuchte Winkel ist. Beobachtungen in nur einer Fernrohrlage²⁾, für welche auch der Ziel- und Kippachsenfehler möglichst scharf zu beseitigen sind, werden heute nur für untergeordnete Zwecke verwendet. Gewöhnlich erfolgen die Winkelmessungen in zwei Fernrohrlagen (mit Durchschlagen) so, daß in der ersten Lage von links nach rechts, in der zweiten von rechts nach links eingestellt wird. Erst die Mittel aus den vier zum gleichen Zielpunkt gehörigen Ablesungen (als Gradzahlen werden diejenigen der ersten Ablesevorrichtung in der ersten Fernrohrlage beibehalten)

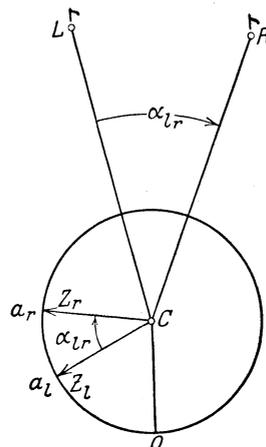


Abb. 121. Horizontalwinkelmessung.

Tabelle 9.

Standpunkt: Polygonpunkt 6.

Ziel- punkt	Ablesungen in Lage $\frac{1}{2}$		Mittel	Winkel
	Nonius I	Nonius II		
P. P. 5	16° 05' 20"	5' 00"	16° 05' 22"	0° 00' 00"
	196 05 40	5 30		
P. P. 7	127 16 40	17 00	127 17 05	111 11 43
	307 17 20	17 20		

werden zur Winkelberechnung nach (169) verwendet. Diese Art der Winkelmessung und Winkelberechnung, für welche Tab. 9 ein einfaches Beispiel enthält, nennt man Tilgungsmessung oder Kompensationsmessung, weil

¹⁾ Das im Wind pendelnde Schnurlot verzögert und verschlechtert die Zentrierung und wird wegen dieser unangenehmen Eigenschaft oft durch das starre Lot ersetzt. Es besteht bei der von Müller und Reinecke (Z. V. W. 1888, S. 115) erstellten Konstruktion im wesentlichen aus ineinander verschiebbaren, eine materielle Fortsetzung der Alhidadenachse bildenden Röhren, deren innerste unten in eine Spitze mit Trittsatz endigt. Diese wird beim Gebrauch in den Bodenpunkt getreten und das Instrument auf dem besonders ausgebildeten Stativkopf so verschoben, daß eine mit dem starren Lot verbundene Dosenlibelle einspielt, dessen Mittelpunktshalbmesser parallel zur Röhrenachse liegt. Siehe auch das feste Lot von Löschner (Z. V. W. 1912, S. 575). Es gibt auch optische Abloteinstrumente, mit denen die Zentrierung auf einige Zehntelmillimeter durchgeführt werden kann. Die entsprechenden Beträge beim starren Lot und beim Schnurlot sind etwa 1 mm bzw. 5 mm.

²⁾ Noch in der ersten Hälfte des 19. Jahrh. wurden Hauptdreiecksnetzwinkel in nur einer Fernrohrlage gemessen.

bei diesem Verfahren eine große Zahl von Fehlern (Zielachsenfehler, Kippachsenfehler, ungleiche Dicke der zylindrischen Achszapfen, exzentrische Lage der Alhidade und der Ziellinie, regelmäßige Drehung der Unterlage) unschädlich gemacht wird. Nicht getilgt werden der Aufstellungsfehler der Alhidadenachse, ein Exzentrizitätsfehler des Instrumentes und des Zielpunktes (z. B. Phasenbeleuchtung), der Einfluß einer nicht zylindrischen Form der Achszapfen, sowie die aus einer unregelmäßigen Veränderung der Unterlage entspringenden Fehler. Auch der Einfluß des rein zufälligen Einstell- und Ablesefehlers, sowie der Kreisteilungsfehler¹⁾ bleibt erhalten, kann aber durch mehrfache Wiederholung der Beobachtungen (n Sätze), die mit Rücksicht auf die Kreisteilungsfehler bei verschiedenen Kreisstellungen (jedesmalige Verstellung $180^0:n$) erfolgen soll, sehr stark herabgedrückt werden. Bedeutet m_e den mittleren zu einer Einstellung gehörigen Einstellfehler des Fernrohrs und m_a den mittleren Ablesefehler an einer Ablesevorrichtung für eine Fernrohrlage, so lautet der analytische Ausdruck für den hieraus entspringenden mittleren Fehler einer einzelnen aus Beobachtungen in zwei Fernrohrlagen und unter Verwendung zweier Ablesevorrichtungen ermittelten Richtung

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{1}{2} m_e^2 + \frac{1}{4} m_a^2}, \dots \dots \dots (170)$$

während

$$m_w = m_r \sqrt{2} = \pm \sqrt{m_e^2 + \frac{1}{2} m_a^2} \dots \dots \dots (171)$$

den mittleren Fehler des als Richtungsdifferenz aufgefaßten Winkels angibt²⁾.

Die entsprechenden, durch das Zeichen μ charakterisierten mittleren Fehler der aus n solchen Sätzen ermittelten Richtungs- bzw. Winkelmittel sind

$$\mu_r = m_r : \sqrt{n} = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} m_e^2 + \frac{1}{4} m_a^2 \right)} \quad \text{und} \quad \mu_w = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left(m_e^2 + \frac{1}{2} m_a^2 \right)}. \quad (172)$$

Als Zielzeichen dienen entweder natürliche oder künstliche Signale. Zu ersteren gehören Türme, Blitzableiter oder andere hervorstechende Punkte an Bauwerken. Bei Blitzableitern wird deren Fußpunkt angezielt, bei Türmen die Stelle, wo der Knopf auf der Helmstange sitzt, wenn es sich um Hori-

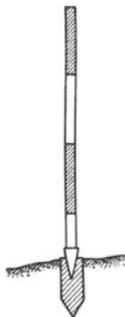


Abb. 122. Fluchtstab.

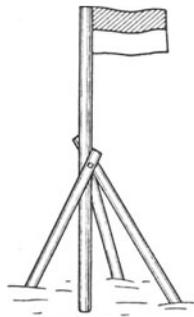


Abb. 123. Signalstange mit Fahne.

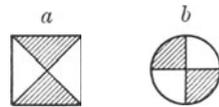


Abb. 124. Zieltafeln.

¹⁾ Bei allen als gut anzusprechenden Instrumenten bleiben die Kreisteilungsfehler unter 1".

²⁾ Die Zahl der an Theodoliten ausgeführten Genauigkeitsuntersuchungen ist eine sehr große. Einige neuere Untersuchungen über Nonientheodolite sind folgende: a) *Klem-pau*, Untersuchung der Kreis- und Nonienteilung eines 10"-Repetitionstheodoliten usw., Z. V. W. 1912, S. 265—280; b) *Lüdemann*, Über die Genauigkeit neuzeitlicher Nonientheodolite, Landmesser 1913, S. 97 ff.; c) *Lüdemann*, Über die Genauigkeit von Nonientheodoliten mit 12 cm Durchmesser des Grundkreises aus Reihenerzeugung, Z. J. K. 1920, S. 49—56.

zonalwinkelmessungen handelt, dagegen der Kugelmittelpunkt bei Höhenwinkelmessungen. An künstlichen Signalen sind hauptsächlich zu nennen Fluchtstäbe, Zielstangen und Zieltafeln. Erstere sind 2 bis 3 m lange, einige cm dicke, mit Ölfarbanstrich in wechselnden Farben versehene Stäbe (Abb. 122) aus geradfaserigem Tannenholze, welche mit ihrem eisenbeschuheten Fuß lotrecht in den zu bezeichnenden Punkten aufgestellt werden. Zur Lotrechtstellung wird entweder das gewöhnliche Lot oder eine mit einem Anlegewinkel verbundene Dosenlibelle benützt; ein verstellbarer Dreifuß dient vielfach, besonders auf hartem Boden, zur Festhaltung des stets am tiefsten sichtbaren Punkte anzielenden Stabes in seiner lotrechten Lage. Auf größere Entfernungen hin verwendet man kräftige 4 bis 5 m lange Stangen, die zur Erhaltung der lotrechten Lage durch Stützen fest verspreizt werden (Abb. 123). Ein vielfach zweifarbiges Bretterkreuz oder ein zweifarbiges im Winde flatterndes Fähnchen machen das Signal auf größere Entfernungen hin sichtbar. Auch besondere quadratische oder kreisförmige Zieltafeln mit Kontrastfarben (Abb. 124) finden Verwendung¹⁾.

d) Repetitionswinkelmessung.

Zur Repetitionswinkelmessung²⁾, die zunächst das Mehrfache des gesuchten Winkels ergibt, braucht man einen Theodolit mit doppeltem Achsensystem, einen sog. Repetitionstheodolit (Abb. 125). Bei diesem Instrumente ist die Alhidade wie auch der Kreis um je eine besondere Achse drehbar, die jedoch beide zusammenfallen sollen.

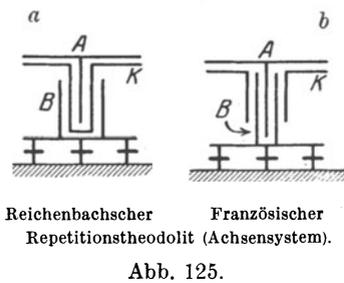


Abb. 125.

Die Repetitionswinkelmessung geht in folgender Weise vor sich. Stellt man das Fernrohr durch Drehung um die Alhidadenachse nacheinander auf P_1 (Abb. 126) und P_r ein, so werden die Horizontalkreisablesungen a_0, a_1 erscheinen, deren zweite durch mechanische Addition des gesuchten Winkels α zu a_0 entsteht. Nun wird bei angezogener Alhidadenklemme die Kreisklemme gelöst und die Alhidade mit dem Kreis zurückgeführt, bis der linke Zielpunkt wieder eingestellt ist, ein Vorgang, bei dem die Kreisablesung unverändert erhalten bleibt. Durch die Wiedereinstellung von P_r mittels Drehung der Alhidade um ihre Achse wird α ein zweites Mal zur vorhergehenden

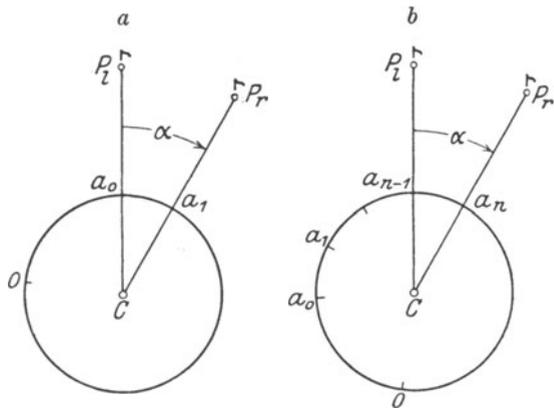


Abb. 126. Vorgang bei der Repetitionswinkelmessung.

¹⁾ Auf sehr große Entfernungen, wie sie bei den Triangulierungsarbeiten der höheren Geodäsie auftreten, werden — manchmal auf sehr hohen Pfeilern — Heliotropenlichter und Lampensignale verwendet.

Wegen der günstigsten Form der Zielzeichen sei auf die in Anmerkung 1), Seite 50 genannte Arbeit von Noetzli hingewiesen.

²⁾ Die Repetitionswinkelmessung wurde um 1780 von dem Göttinger Astronomen Tobias Mayer erfunden.

Ableseung addiert. Wird nunmehr wieder um die Kreisachse zurückgedreht und das beschriebene Verfahren einigemal wiederholt, so erscheint nach n -maliger Addition (Repetition) des Winkels α zur Anfangsablesung eine Ableseung $a_n = a_0 + n \cdot \alpha$, aus welcher sich der einfache Winkel

$$\alpha = \frac{1}{n}(a_n - a_0) \dots \dots \dots (173)$$

ergibt. Auch hier beobachtet man aus den gleichen Gründen wie früher in zwei Fernrohrlagen, wobei aber in der zweiten Lage durch Rückwärtsdrehen um die Alhidadenachse (Vorwärtsdrehen um die Kreisachse) α stets von der vorhergehenden Ableseung subtrahiert wird, so daß, von Beobachtungsfehlern abgesehen, zum Schluß wieder die Anfangsablesung erscheint. Je nachdem nach dem Durchschlagen die Wiedereinstellung des rechten Zielpunktes mittels Drehung um die Alhidadenachse oder um die Kreisachse (*Gauß'sches Verfahren*) erfolgt, sind a_0 und a_n bzw. a_0 allein Mittelwerte aus Ableseungen in beiden Fernrohrlagen. Für den mittleren Fehler des unter Verwendung zweier Ablesevorrichtungen in zwei Lagen des Fernrohrs je n -mal repetierten Winkels ergibt sich der Ausdruck

$$m_w = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left(m_e^2 + \frac{1}{2n} m_a^2 \right)} \quad \text{bzw.} \quad m'_w = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left(m_e^2 + \frac{3}{4n} m_a^2 \right)}, \quad (174)$$

je nachdem nach dem Durchschlagen um die Alhidadenachse oder um die Kreisachse gedreht worden ist.

Da die beiden Theodolitachsen niemals genau zusammenfallen, so muß man sich auf die Lotrechtstellung einer Achse, und zwar der Kreisachse beschränken. Unter dieser Voraussetzung ist es, wie *Helmert*¹⁾ gezeigt hat, möglich, den Einfluß einer Achsenachse dadurch zu eliminieren, daß man eine Wiederholungszahl n wählt, welche den n -fachen Winkel zu einem (annähernd) ganzen Vielfachen des Kreisumfangs macht.

Ein Vergleich der Fehlerausdrücke (172) und (174) zeigt den mit der Repetitionszahl n stark abnehmenden Einfluß des Ablesefehlers und weist darauf hin, daß ein Instrument mit einem leistungsfähigen Fernrohr und einer schlechten Ablesevorrichtung besser zur Repetitionswinkelmessung als zur einfach wiederholten Winkelmessung verwendet wird. Der Repetitionstheodolit, welcher nach der Achsenanordnung entweder nach *Reichenbach* (von innen nach außen: Alhidadenzapfen, Kreisbüchse, Dreifußbüchse) benannt oder als französischer Repetitionstheodolit (Alhidadenzapfen, Dreifußbüchse, Kreisbüchse) bezeichnet wird, besitzt neben seinen unbestreitbaren Vorzügen leider auch systematische Fehlerquellen, die seine Verwendung zu Messungen erster Ordnung ausschließen²⁾.

e) Höhenwinkelmessung.

Zur Festlegung einer Richtung CP_1 oder CP_2 gegen den Horizont HH oder das Lot CP_z dient der Höhenwinkel h , der Zenitabstand z , der Tiefenwinkel h' oder der Nadirabstand z' . Die nähere Bedeutung dieser

¹⁾ *Helmert*, Über das Vertikalachsensystem des Repetitionstheodoliten, Z.V.W. 1876, S. 296 bis 300.

²⁾ Siehe hierzu: a) *Friebe*, Über das Mitschleppen des Limbus und verwandte Fehler bei Repetitionstheodoliten, Z.V.W. 1894, S. 333; b) *Nippa*, Über die Verschiebungen der Alhidade gegen den Limbus bei Repetitionstheodoliten französischer Form, Z.V.W. 1896, S. 675; c) *Israel*, Zur Theorie der einseitig wirkenden Instrumentalfehler an Repetitionstheodoliten, Borna-Leipzig 1912; d) *Rösch, A.*, Zur Beurteilung der Repetitionsmessungen und ihrer Fehler sowie ihrer praktischen Ergebnisse bei der ersten Triangulierung Bayerns auf Grund eines neugebildeten Hauptdreiecksnetzes (noch nicht veröffentlicht).

Größen folgt unmittelbar aus Abb. 127, in welchen P_z den Zenitpunkt und P_n den Nadirpunkt des Lotes bezeichnen. Ihre Messung kann mit jedem Theodolit erfolgen, der mit einem meist fest auf der Kippachse sitzenden Höhenkreis oder doch mit einem Höhenbogen ausgerüstet ist. Die Ermittlung des Zenitabstandes z einer Richtung CP (Abb. 128) geschieht unter der Voraussetzung eines Vollkreises mit durchlaufend beziffertem Kreisumfang in folgender Weise. Man bringt bei lotrecht gestellter Alhidadenachse das Fernrohr in diejenige als Lage I bezeichnete Stellung, für welche bei einer Fernrohrkipfung der Zenitabstand und die Ablesung am Höhenkreis sich im gleichen Sinne ändern, und erhält nach Einstellung von P eine Lage I der Ziellinie und die Ablesung a_1 am Höhenkreis. Nach einer Drehung der Alhidade um 180° gelangt die Ziellinie in die Lage I' (Beobachter mitgedreht!), welche mit dem Lot ebenso wie I den Winkel z einschließt. Eine Kippung des Fernrohrs bis zur Wiedereinstellung von P verlangt also eine Fernrohrdrehung $2z$.

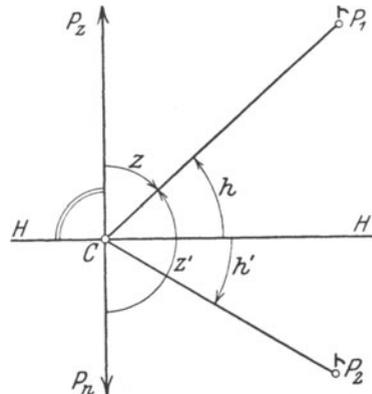


Abb. 127. Richtungsbestimmung im lotrechten Sinne.

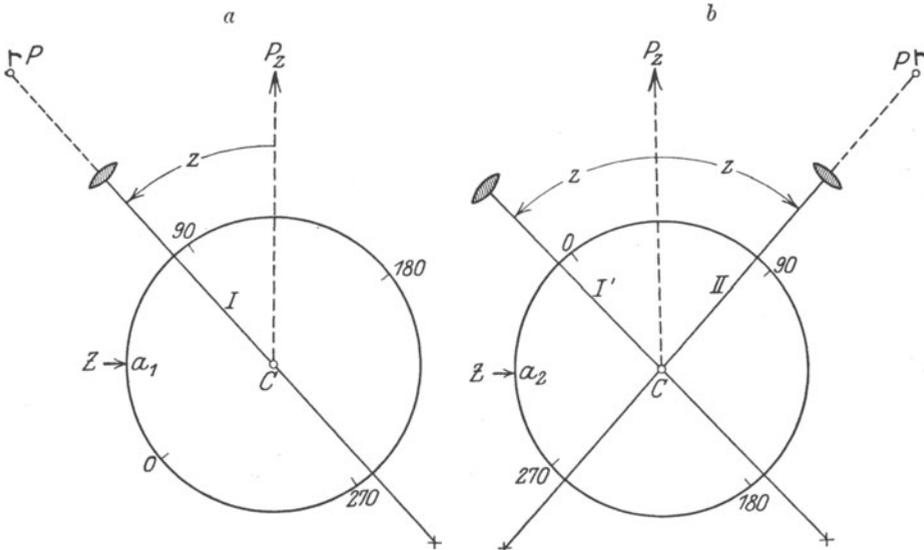


Abb. 128. Messung von Zenitabständen.

In dieser neuen Stellung besitzt die Ziellinie die Lage II und die am Höhenkreis erscheinende Ablesung a_2 ist um $2z$ kleiner als a_1 , so daß der Zenitabstand

$$z = \frac{1}{2}(a_1 - a_2) \dots \dots \dots (175)$$

und der Höhenwinkel $h = 90^\circ - z$ wird.

Der Unterschied

$$z_v = z - a_1 = -\frac{1}{2}(a_1 + a_2) \dots \dots \dots (175a)$$

stellt die Zeigerverbesserung oder Indexverbesserung des Höhenkreises dar, welche zur Beobachtung a_1 in der ersten Lage hinzugefügt, den Zenit-

abstand z ergibt. Da bei einer sorgfältigen Behandlung des Instrumentes z_v konstant bleibt, so bildet seine jedesmalige Ableitung eine willkommene Beobachtungsprobe.

Besitzt das Instrument nur eine zur Zielebene senkrechte Libelle, so ist vor Beginn der Messung die Alhidadenachse scharf lotrecht zu stellen. Von dieser scharfen Beseitigung des Aufstellungsfehlers kann nur dann abgesehen werden, wenn eine mit der Alhidade des Horizontalkreises oder den Fernrohrstützen verbundene, zur Zielebene parallele Libelle vor der scharfen Einstellung des Zielpunktes mittels einer geeignet liegenden Fußschraube genau zum Einspielen gebracht wird. Manche Theodolite besitzen auch eine direkt mit der Höhenalhidade verbundene, mit dieser unabhängig vom Fernrohr verstellbare Verschiebunglibelle, die mittels besonderer Feinstellschraube erst unmittelbar vor der Kreisablesung zum Einspielen gebracht wird.

Ein Zahlenbeispiel für die Höhenwinkelmessung mit einem rechts-sinnig von 0 bis 360^0 bezifferten, fest mit dem Fernrohr verbundenen Kreis enthält Tabelle 10.

Tabelle 10.

Standpunkt P_i	L a g e		Zielpunkt P_k
Nonius	Kreis links	Kreis rechts	Berechnung
I	$50^0 10' 15''$	$309^0 49' 00''$	$z_v = + 22''$
II	$230^0 10' 45''$	$129^0 48' 40''$	$z_v = + 18''$
Mittel	$50^0 10' 30''$	$309^0 48' 50''$	$2z = 100^0 21' 40''$
	$h =$	$39^0 49' 10''$	$z = 50^0 10' 50''$

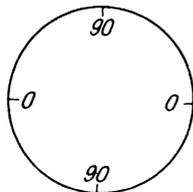


Abb. 129. Höhenkreis mit Quadrantenbeziehung.

Ist der Kreis, wie in Abb. 129 angedeutet, nach Quadranten beziffert, so ergibt sich aus den in beiden Fernrohrlagen ausgeführten Ablesungen a_1, a_2 unmittelbar der Höhenwinkel

$$h = \frac{1}{2}(a_1 + a_2). \dots \dots \dots (176)$$

Häufig besitzt das Instrument nur einen Höhenbogen, an dem nur in einer Fernrohrlage abgelesen werden kann. Hier muß natürlich vor der Messung die Berichtigung soweit durchgeführt werden, daß die Ableseung am Höhenbogen unmittelbar den Höhenwinkel bzw. den Zenitabstand angibt oder daß man doch die Zeigerverbesserung (Indexfehler) kennt, durch deren Hinzufügen zur Ableseung diese berichtigt wird. Die Bestimmung und Beseitigung des Zeigerfehlers am Höhenkreis ist je nach der Bauart des Instrumentes verschieden, läuft aber immer darauf hinaus, die zur lotrechten Alhidadenachse und horizontalen Ziellinie gehörige Kreisablesung bzw. deren Abweichung gegen ihren Sollbetrag zu finden und wo möglich, diese Abweichung durch ein Verschieben des Nonius zu beseitigen. Im schlimmsten Falle kann man sich immer mit Gegenbeobachtungen helfen. Richtet man das über A (Abb. 130) mit lotrechter Alhidadenachse aufgestellte Instrument auf den Punkt i_1 ($i_1 =$ Instrumentenhöhe in A) einer in B stehenden, lotrechten geteilten Latte, so besitzen Ziellinie und Linie AB denselben Höhenwinkel h , während am Höhenbogen eine Ableseung a_1 erscheint. Werden Instrument und Latte vertauscht, so liefert der entsprechende Vorgang für den Tiefenwinkel h eine Ableseung a_2 . Ist z_v die der Höhenwinkelangabe entsprechende Zeigerverbesserung, so gelten die Beziehungen

$$z_v = \frac{1}{2}(a_2 - a_1), \quad h = a_1 + z_v, \quad \dots \dots \dots (177)$$

nach denen der Zeigerfehler bestimmt und gegebenenfalls rechnerisch berücksichtigt werden kann.

Zum Einfluß der Achsenfehler auf die Höhenwinkelmessung sei bemerkt, daß der Zielachsenfehler, der Kippachsenfehler und die in der Kippachsenrichtung liegende Komponente des Aufstellungsfehlers Ablesungsänderungen verursachen, die, wenn man die genannten Fehler als kleine Größen erster Ordnung auffaßt, nur kleine Größen zweiter Ordnung sind. Sie liegen bei einer einigermaßen sorgfältig durchgeführten Instrumentenberichtigung weit innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler und können daher vernachlässigt werden. Die zur Zielebene parallele Komponente des Aufstellungsfehlers aber, die ganz in die Höhenwinkelmessung eingehen würde, wird durch das Einspielenlassen einer zur Zielebene parallelen Libelle unschädlich gemacht.

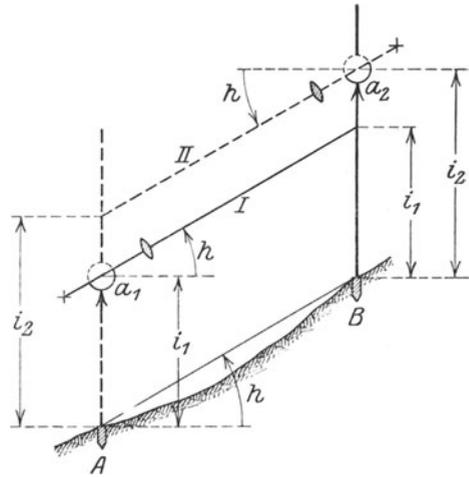


Abb. 130. Bestimmung des Zeigerfehlers am Höhenbogen aus Gegenbeobachtungen.

Die Genauigkeit der Höhenwinkelmessung ist, abgesehen vom Einfluß der atmosphärischen Strahlenbrechung¹⁾ prinzipiell nahezu dieselbe wie bei der Horizontalwinkelmessung. Bei einem sog. (astronomischen) Universalinstrument, dessen Höhenkreis von derselben Güte wie der Horizontalkreis ist, werden daher die Höhenwinkelmessungen den Horizontalwinkelmessungen ungefähr gleichwertig sein; bei den meisten Theodoliten bleibt allerdings wegen der geringeren Dimension des Höhenkreises die Genauigkeit der Höhenwinkel hinter derjenigen der Horizontalwinkel.

16. Andere Instrumente zur Messung beliebiger Horizontalwinkel.

Mit geringerer Genauigkeit wie mit dem Theodolit kann man beliebige Horizontalwinkel auch mit anderen Instrumenten messen. Als solche kommen hauptsächlich in Betracht die Winkeltrommel²⁾, die Prismentrommel und die Busssole.

a) Die Winkeltrommel.

Dieses meist mittels einer Steckhülse auf einem Zapfenstativ befestigte Instrument (Abb. 131) besteht aus zwei zylindrischen Trommeln A und B, deren gemeinsame Achse bei der Aufstellung mit Hilfe einer Dosenlibelle D durch Verstellen der Stativbeine lotrecht gestellt wird. Der untere Zylinder B ist eine festliegende, die Kreisteilung tragende Büchse, gegen den mittels einer in einen Zahnkranz greifenden Triebsschraube T der obere Teil A gedreht werden kann. Dieser trägt den manchmal mit einem Nonius aus-

¹⁾ Siehe die späteren Ausführungen über die trigonometrische Höhenmessung.

²⁾ Nur noch historisches Interesse besitzt der zu Anfang des 17. Jahrhunderts noch von *Snellius* verwendete holländische Kreis oder das Scheibeninstrument.

gerüsteten Ablesezeiger Z und mindestens zwei diametrale Spalten mit Schau-
löchern, die zusammen ein Diopter bilden, das hier an Stelle des Fernrohrs
zur Einstellung der Punkte benützt wird. Vielfach trägt der Mantel des
beweglichen Zylinders noch drei weitere gleichabständige Diopter, so daß
das Instrument auch als Zylinderkreuzscheibe zum Abstecken von rechten
und von 45° -Winkeln dienen kann. Der gesuchte Horizontalwinkel ist die
Differenz der zu den Punkt-
einstellungen gehörigen
Trommelablesungen. Die-
sem rohen Instrument ent-
spricht günstigenfalls ein
mittlerer Winkelfehler von
etwa $\pm 2'$.

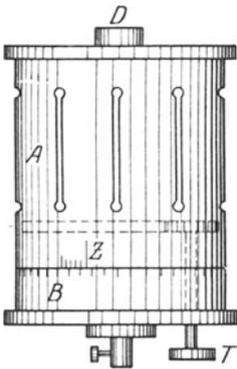


Abb. 131. Winkeltrummel.

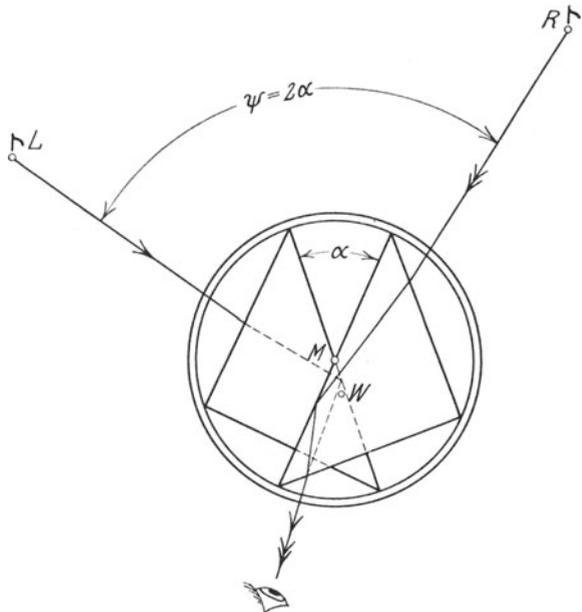


Abb. 132. Prismentrummel.

b) Die Prismentrummel.

Bei diesem meist aus freier Hand oder auch auf einem Stock zu ge-
brauchenden Instrument, dessen Genauigkeit etwa derjenigen der Winkel-
trummel entspricht, liegen in einem zylindrischen Gehäuse zwei rechtwinklig
gleichschenklige Prismen (Abb. 132) so übereinander, daß die Schnittkante
der Hypotenusenflächen in die Zylinderachse fällt. Diese Flächen wirken wie
ebene Spiegel. Die Prismentrummel wird bei lotrechter Achse verwendet,
und zwar wird das mit einem Zeiger verbundene, bewegliche, gegen das fest
im Gehäuse sitzende Prisma so gedreht, daß die von zwei Punkten L und R
her auffallenden und die Prismen verlassenden Strahlen aus derselben Rich-
tung kommen. Dann ist der an einer auf dem Gehäuse befindlichen Teilung
 abzulesende Winkel α beider Hypotenusenebenen die Hälfte des Horizontal-
winkels ψ , unter dem vom Instrumente aus der Abstand der Punkte L , R
erscheint. Streng genommen liegt der Scheitel dieses Winkels ψ nicht in der
Instrumentenmitte M , sondern in einem Punkte W , welcher durch die Ver-
längerungen der von L und R kommenden Strahlen bestimmt wird. Die
Prismentrummel, welche eigentlich nur eine einfachere Form des *Steinheil-*
schen Prismenkreises¹⁾ vorstellt, findet hauptsächlich bei der Kreisbogen-
absteckung Verwendung.

¹⁾ Eine von *Steinheil* herrührende Beschreibung des Prismenkreises enthalten die
Astronomischen Nachrichten, 11. Band, 1834, S. 43—48 und 105—119.

c) Die Bussole.

Die Verwendung der Bussole¹⁾ zur Richtungsmessung beruht auf der Richtkraft, die das erdmagnetische Feld auf die Magnetnadel ausübt. Da diese Richtkraft für kürzere Zeiträume und in Nachbarorten sich nicht merklich ändert, so läßt sich die Magnetnadel als ein stets gleich gerichteter Zeiger betrachten, mit dessen Hilfe an einer drehbaren Kreisteilung abzulesen ist. Im Gegensatz zum Theodolit handelt es sich hier um eine festgerichtete Alhidade und einen beweglichen Kreis, welchem Umstände meist durch eine linkssinnige (entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn bezifferte) Teilung Rechnung getragen wird. Als die wichtigsten der nach ihrem Zweck verschieden eingerichteten Bussolen sind zu nennen: der Taschenkompaß und die Schmalcalder-Bussole²⁾ als Freihandinstrumente für besonders flüchtige Aufnahmen; der für Bussolenmeßbände wichtige Stockkompaß, ferner der auf einem Stativ verwendete Feldmesserkompaß, die Aufsatzbussole, die verschiedenen Orientierbussolen und die teils als Stativinstrumente, teils als Hängeinstrumente ausgebildeten Bergkompass.

Das für die Messungen über Tage wichtigste Magnetinstrument ist der auch als Feldmesserbussole bezeichnete Stativkompaß, auf den im folgenden an Hand der Abbildungen 133—135 kurz eingegangen werden soll. Auf einem durch ein Tellerstativ getragenen Dreifuß ruht eine Bussole *B*, deren zur Umdrehungsachse senkrechte Kreisebene mittels einer Libelle horizontal gestellt werden kann. Als Zielvorrichtung dient ein meist mit

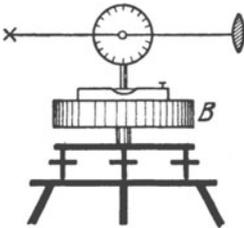


Abb. 133. Stativkompaß mit Dreifuß.

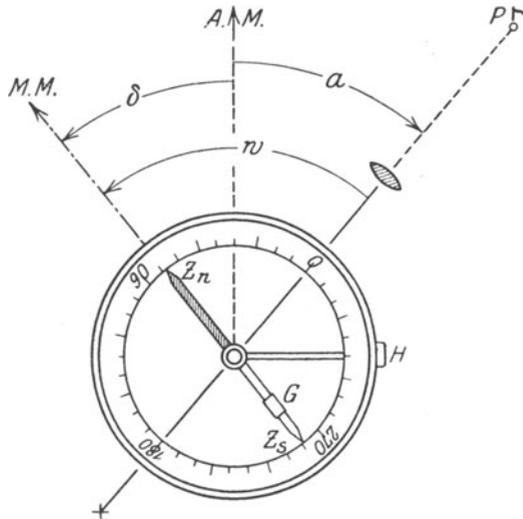


Abb. 134. Kompaßbüchse im Grundriß.

Höhenkreis oder Höhenbogen und mit Distanzfäden ausgestattetes Meßfernrohr. In der Mitte der Kreisteilung befindet sich eine als Pinne bezeichnete konische, feine Stahlspitze, auf welcher mittels eines als Hohlkonus ausgebildeten Achathütchens eine meist hochkantig gestellte, etwa 10—12 cm lange Magnetnadel schwingt, deren entweder spitz zulaufende oder mit Strichen versehene Enden unmittelbar als Ablesezeiger Z_n und Z_s dienen. Die Nadel, deren Nordhälfte durch Blauanlauf kenntlich gemacht ist, wird solange sie nicht im Gebrauch ist, besonders aber beim Transport zur Schonung mittels einer Hemmung *H* von der Pinne abgehoben und gegen einen die Bussole abschließenden Glasdeckel gepreßt. Ein manchmal vorhandenes

¹⁾ Zur Geschichte der Bussole siehe *Gerland, E.*, Der Kompaß bei den Arabern und im christlichen Mittelalter, Mitt. z. Geschichte d. Med. u. Naturw., Jahrg. 1906, S. 9—19. Hiernach war der Kompaß bei den Chinesen schon in vorchristlichen Zeiten in Gebrauch.

²⁾ Die Schmalcalder-Bussole wird auch als Stockinstrument gebraucht.

Gleitstück G dient zur Horizontallegung der Nadel mit Rücksicht auf die wechselnde Inklination. Außer der Magnetnadel und der Pinne darf das Instrument keine magnetischen Bestandteile, besonders weder Eisen noch Nickel enthalten. Das kippbare Zielfernrohr ist so angeordnet, daß es sich mit dem Kreis dreht und daß dessen Nullhalbmesser in der Zielebene liegt.

Wird nun bei lotrechter Stehachse des Instruments dessen Zielvorrichtung auf einen Punkt P eingestellt, so ist die am Nordende Z_n der Nadel erscheinende Ablesung w derjenige als magnetischer Streichwinkel der eingestellten Richtung bezeichnete Winkel, welchen die Zielebene mit der Lotebene durch den magnetischen Meridian $M.M.$ einschließt. Er ist um die westliche magnetische Deklination δ größer als das vom astronomischen Meridian $A.M.$ aus gezählte astronomische Azimut a . Es gelten also die Beziehungen

$$w = a + \delta \quad \text{und} \quad a = w - \delta, \dots \dots \dots (178)$$

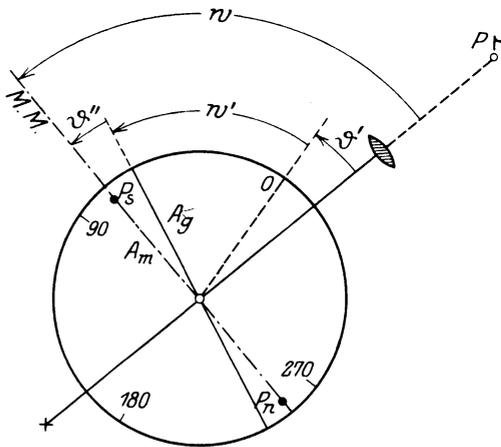


Abb. 135. Orientierungs- und Kreuzungsfehler.

vorausgesetzt, daß der Nullhalbmesser in der zur Kippachse senkrechten Zielebene liegt und die durch die Nadelenden gehende geometrische Nadelachse A_g mit der durch die Pole P_n, P_s bestimmten magnetischen Nadelachse A_m zusammenfällt. Beides trifft niemals genau zu, und man spricht dann von einem Orientierungsfehler ϑ' der Bussole gegen die Zielvorrichtung bzw. einem Kreuzungsfehler ϑ'' der beiden Nadelachsen. Bezeichnet w' die wirklich ausgeführte, gefälschte Ablesung und $\vartheta = \vartheta' + \vartheta''$ den gesamten Zeigerfehler, so gilt offenbar

$$w = w' + \vartheta \quad \text{und} \quad a = w' + \vartheta - \delta = w' - \Delta, \dots \dots (179)$$

wenn zur Abkürzung $\delta - (\vartheta' + \vartheta'') = \delta - \vartheta = \Delta$ gesetzt wird. Am einfachsten kann man die Reduktionsgröße Δ ermitteln, wenn für eine Richtung mit bekanntem astronomischen Azimut a_0 der zugehörige Streichwinkel w'_0 beobachtet wird. Nach Gl. (179) ist nämlich die gesuchte Größe

$$\Delta = w'_0 - a_0. \dots \dots \dots (180)$$

Ist sie aufgestellt, so liefert der Ausdruck $a = w' - \Delta$ sofort die astronomischen Azimute. Vollständig Entsprechendes gilt, wenn an Stelle der astronomischen Azimute die später zu besprechenden Richtungswinkel treten.

Hinsichtlich der Achsenfehler der Bussole sei Folgendes bemerkt. Der Kippachsenfehler und der Zielachsenfehler verhalten sich wie beim Theodolit; sie kommen aber, trotzdem nur in einer Fernrohrlage beobachtet wird, neben dem größeren Gesamteinfluß des Einstell- und Ablesefehlers kaum ernsthaft in Betracht, wenn das Instrument einigermaßen berichtigt ist. Der Einfluß einer exzentrischen Lage der Pinne zum Kreismittelpunkt und derjenige einer Nadelknickung ist im Mittel der an beiden Nadelenden ausgeführten Ablesungen nicht mehr enthalten. Eine exzentrische Lage der Bussole übt auf die Beobachtungen überhaupt keinen Einfluß aus und der Einfluß einer exzentrischen Lage der Zielvorrichtung würde im Mittel der in zwei Fernrohrlagen ausgeführten Beobachtungen verschwinden. Lediglich die vorher

genannte Abweichung der geometrischen Nadelachse aus dem magnetischen Meridian¹⁾ kann nicht ganz so einfach unschädlich gemacht werden; sie kann jedoch besonders bei hochkantig gestellten Nadeln von vorne herein sehr klein gehalten werden und ist im übrigen in der nach Gl. (180) bestimmten Reduktionsgröße Δ berücksichtigt.

Die magnetische Deklination²⁾ ist nicht nur mit dem Ort, sondern auch mit der Zeit veränderlich. Neben der säkularen Änderung treten auch mit der Tageszeit Schwankungen der magnetischen Deklination auf, die im Winter am kleinsten, im Sommer am größten sind. Nach Angaben von *Messerschmitt*³⁾ betragen im Sommer die täglichen Abweichungen der Deklination von ihrem Tagesmittel bis zu 4'. Außerdem ist auch mit plötzlichen unregelmäßigen Deklinationsänderungen zu rechnen. Aus diesen Gründen eignet sich die Bussole nur für diejenigen ingenieur-technischen Messungen über Tage, deren Genauigkeitsgrad es erlaubt, die während der Dauer der Messungen etwa eintretenden Deklinationsänderungen zu vernachlässigen.

Für die Leistungsfähigkeit einer Bussole sind der mittlere Ablesefehler m_a und der mittlere Einstellfehler m_e ihrer Magnetnadel charakteristisch. Unter diesem versteht man die mittlere Abweichung der magnetischen Nadelachse aus dem magnetischen Meridian. Sie soll bei guten Instrumenten 3' nicht überschreiten und wird um so geringer ausfallen, je größer die magnetische Richtkraft und je kleiner die Reibung zwischen Pinne und Hütchen ist. Zur gesonderten Ermittlung des Einstellfehlers m_e kann man ein Nadelende in der Bildebene eines Mikroskops, dessen Teilstriche oder Meßfaden zur Nadelachse parallel liegen, deutlich sichtbar machen und nach je einer von n Schwingungen der Nadel ihre Stellung a im Mikroskop beobachten. Die dabei auftretenden Beobachtungsfehler verschwinden im Vergleich zum gesuchten Einstellfehler, welcher daher im Gradmaß der Ausdruck

$$m_e = \pm \frac{\rho}{r} \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}} \dots \dots \dots (181)$$

ist, wenn $v_i = a_0 - a_i$, $a_0 = [a] : n$ und r die halbe Nadellänge bedeutet. Der dem Zusammenwirken des reinen Ablesefehlers m_a und des Einstellfehlers m_e entsprechende Ausdruck $m_{(a+e)}$ kann aus den zu n' wiederholten Einstellungen der Nadel auf die gleiche Kreisstelle gehörigen Ablesungen a' an einer horizontalen, zur Ziellinie senkrechten Latte gefunden werden. Er ist nämlich in Minuten

$$m_{(a+e)} = \pm \frac{\rho'}{D} \sqrt{\frac{[v' v']}{n'-1}}, \dots \dots \dots (181 a)$$

wenn n' die Zahl der Beobachtungen mit den scheinbaren Beobachtungsfehlern v' und D die Entfernung der Latte bedeutet. Der eigentliche Ablesefehler wird dann

$$m_a = \pm \sqrt{m_{(a+e)}^2 - m_e^2} \dots \dots \dots (181 b)$$

¹⁾ Sie kann bei Nadeln, welche ein Doppelhütchen besitzen, durch Umlegen der Nadel bestimmt werden.

²⁾ Die Preußische Landesaufnahme hat vor kurzem nach den Angaben des Magnetischen Instituts Potsdam Karten mit Linien gleicher magnetischer Deklination (6 Blätter im Maßstab 1 : 1 000 000) für die Epoche 1919,5 herausgegeben. Hiernach war die Deklination im genannten Zeitpunkt in Aachen 11° 21', Hannover 9° 23', Braunschweig 8° 58', Berlin 7° 27', Danzig 4° 25', Königsberg 3° 21', Dresden 7° 26', Breslau 5° 35', Darmstadt 9° 45', Karlsruhe 9° 48', Stuttgart 9° 26' und in München 8° 10'. Die jährliche Abnahme der westlichen Deklination beträgt in Mitteleuropa gegenwärtig rund 9'. Aus den *Haußmannschen* Karten von 1912,0 entnommene Deklinationen sind zur Überführung auf 1919,5 um 1° 10' zu verkleinern.

³⁾ *Messerschmitt*, Die Mißweisung der Magnetnadel, Z. V. W. 1903, S. 681—686.

Der mittlere Ablesefehler kann, wenn das Teilungsintervall 1^0 ist, im Mittel der Ablesungen an beiden Nadelenden zu rund $10'$ veranschlagt werden; also mag auch der mittlere Fehler $m_{(a+e)} = \sqrt{m_e^2 + m_a^2}$ des einmal beobachteten Streichwinkels ungefähr $10'$ betragen.

17. Der Meßtisch.

Der um 1590 von dem Altdorfer Professor *Praetorius* erfundene Meßtisch¹⁾ dient in Verbindung mit der Kippregel und Lotgabel als Hilfsinstrumenten zur graphischen Planaufnahme, indem die Richtungen und Entfernungen sofort in der Natur auf zeichnerischem Wege bestimmt werden, so daß schon auf dem Felde ein verzüngtes Planbild entsteht.

a) Einrichtung des Meßtisches.

Der Hauptbestandteil des Meßtisches ist ein mit Zeichenpapier bespanntes Meßtischblatt *b* (Abb. 136), welches durch Schrauben *s* auf einem metallenen Wenderahmen *w w* befestigt werden kann. Bei der in Abb. 136 skizzierten

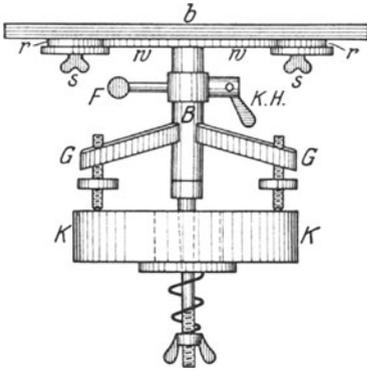


Abb. 136. Meßtisch (Achsentisch).

Konstruktion ist, so lange die durch Ringe *rr* hindurchgeführten Schrauben nicht angezogen sind, eine für die genaue Zentrierung etwa notwendige geringe Verschiebung des Meßtischblattes gegen den Wenderahmen möglich. Ein am Wenderahmen sitzender Zapfen wird von der Dreifußbüchse *B* geführt, so daß bei offenem Klemmhebel *K.H.* mit freier Hand eine grobe und bei angezogener Klemme durch die Feinstellschraube *F* eine feine Horizontaldrehung des Meßtischoberteils möglich ist. Die Verbindung des Fußgestells *G G* mit dem Kopf eines kräftigen Stativs erfolgt in ähnlicher Weise wie beim Theodolit. Die wichtigsten Meßtischtypen stammen von *Brander*, *Lehmann*, *Reichenbach*, *Ertel*, *Geyer* und *Franke*. Man kann sie nach der Art der groben Horizontalbewegung des Meßtischblattes mit dem Wenderahmen einteilen in 1. Achsentische, 2. Tische mit Ringführung, 3. Meßtische ohne feste (materielle) Vertikalachse. Erstere, zu denen auch der in Abb. 136 skizzierte Tisch gehört, besitzen eine massive Vertikalachse von geringem Querschnitt; ihre Standfestigkeit ist deshalb nicht sehr groß. Die unter 2. und 3. genannten Typen jedoch erlauben eine festere Verbindung der Hauptbestandteile; sie besitzen daher eine sehr große Standfestigkeit²⁾.

b) Lotgabel und Kippregel.

Zur Meßtischausrüstung gehört die Lotgabel, besonders aber die Kippregel. Die in Abb. 137 abgebildete Lotgabel besteht aus zwei Schenkeln s_1, s_2 von solcher Länge und mit einem solchen Öffnungswinkel α , daß das im Endpunkt des Schenkels s_2 hängende Lot *L* in seiner Verlängerung durch

¹⁾ Siehe hierzu *Schmidt, M.*, *Mensula Praetoriana*, Z.V.W. 1893, S. 257—283.

²⁾ Eine sehr gute Konstruktion ist der neue *Geyersche* Ringtisch, den *M. Schmidt* in der Z.V.W. 1893, S. 281 beschrieben hat. Er ist in *Hohenner*, *Geodäsie*, Leipzig 1910, S. 101 abgebildet.

den Endpunkt des horizontal liegenden Schenkels s_1 hindurchgeht. Unter dieser Voraussetzung wird bei horizontaler Lage des Meßtischblattes der durch das eine Schenkelende eingestellte Bildpunkt p lotrecht über dem durch die Senkelspitze bezeichneten Feldpunkt P liegen. Zur Prüfung der Lotgabel wird ein Bildpunkt p vor und nach dem Umsetzen der Lotgabel um 180° mittels dieser auf den Boden projiziert. Ergeben sich etwa zwei verschiedene Projektionen P', P'' , so ist deren halber Abstand e der Projektionsfehler des Instrumentes. Zu seiner Beseitigung ist der Öffnungswinkel α so zu ändern, daß die Lotspitze auf den Mittelpunkt P der Strecke $P'P''$ trifft.

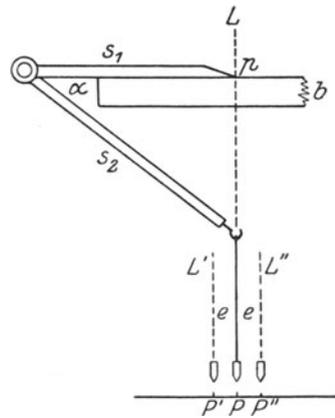


Abb. 137. Lotgabel.

Die Kippregel dient zur Übertragung der Horizontalrichtungen des Feldes auf den Meßtisch und umgekehrt. Sie besteht (siehe Abb. 138 und 139) aus einem meist distanzmessenden, vielfach auch mit einer Libelle, einem Sucherdioptr ($o\ o$) und einem Höhenbogen ausgestatteten kippbaren Zielfernrohr, welches mittels einer Tragsäule T mit einem kräftigen Lineal so verbunden ist, daß dessen Kante K in der Fernrohrzielebene liegt. Das zum bequemen Abheben vielfach mit einem Griff versehene Lineal trägt meistens eine Querlibelle L , ab und zu auch eine Orientierbussole B . Die Untersuchung und Berichtigung der Kippregel erstreckt sich auf 1. die Gerad-

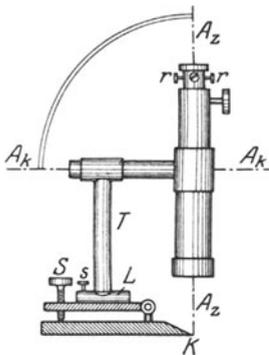


Abb. 138. Kippregel (Stirnansicht).

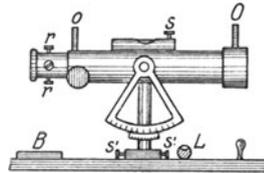


Abb. 139. Kippregel (Längsansicht).

linigkeit der Linealkante, 2. den Zielachsenfehler, 3. den Kippachsenfehler, 4. den Kreuzungsfehler, 5. den Zeigerfehler am Höhenbogen.

Um die Geradlinigkeit der Linealkante zu prüfen, zieht man vor und nach dem Umsetzen der Kippregel längs der jeweils durch dasselbe Punktpaar gehenden Linealkante je einen, im ganzen also zwei Striche, deren Zusammenfallen die Geradlinigkeit der untersuchten Kante bezeugt.

Ein Zielachsenfehler ist wie beim Theodolit dann vorhanden, wenn die Ziellinie A_z zur Kippachse A_k nicht genau senkrecht steht. Zur Untersuchung stellt man irgendeinen im Instrumentenhorizont liegenden scharf sichtbaren Punkt P_1 (siehe Abb. 140) ein, bezeichnet die Lage der Linealkante auf dem Tisch durch Randmarken¹⁾ R_1, R_2 , schlägt das Fernrohr durch und legt nach einer Drehung der Kippregel um 180° die Linealkante wieder genau an die beiden Randmarken an. Dadurch kommt, von einer

¹⁾ Die Randmarken werden meist durch feine eingerissene Linien (Anstichlinien), vielfach auch durch Anschlagnadeln bezeichnet.

für unseren Zweck belanglosen Parallelverschiebung abgesehen, auch die Kippachse A_k im Grundriß wieder in ihre alte Lage. Die horizontale Ziellinie wird in ihren beiden Lagen 1 und 2 den doppelten Zielachsenfehler $2c$ einschließen und in Lage 2 auf einen von P_1 verschiedenen, in der Natur nicht besonders bezeichneten Punkt P_3 treffen. Zur Beseitigung des Zielachsenfehlers wird bei unveränderter Stellung von Tisch und Kippregel deren Fadenkreuz mittels der horizontal wirkenden Richtschraubchen so verschoben, daß der Fadenkreuzschnittpunkt auf dem Mittelpunkt P_3 der Strecke $P_1 P_3$ liegt.¹⁾

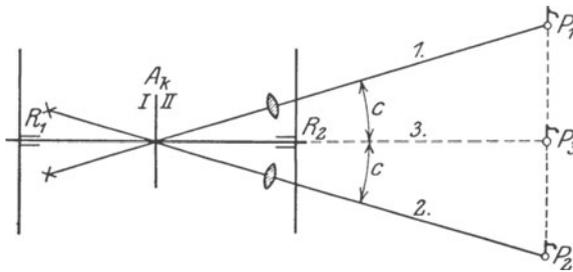


Abb. 140. Berichtigung des Zielachsenfehlers der Kippregel.

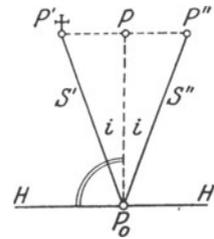


Abb. 141. Berichtigung des Kippachsenfehlers der Kippregel.

Die Kippachse A_k soll zur Linealbahn parallel sein, also bei horizontaler Lage des Meßtischblattes ebenfalls horizontal liegen. Ihre etwaige Neigung bei horizontaler Bahn ist der Kippachsenfehler oder Neigungsfehler des Instrumentes, dessen einfache Beseitigung die vorher besprochene scharfe Berichtigung der Zielachse zur Voraussetzung hat. Zur Berichtigung des Kippachsenfehlers ist zunächst die Tischfläche besonders in der Richtung quer zum Lineal sorgfältig horizontal zu stellen. Dies geschieht entweder mit Hilfe einer besonderen Setzlibelle oder einer auf dem Lineal sitzenden meist quer dazu gestellten Libelle, welche bei dieser Gelegenheit, wenn nötig, auch berichtigt wird. Die weitere Untersuchung kann nun wie beim Theodolit mit Hilfe eines materiellen Lotes (siehe Abb. 106 a) oder mit Hilfe von sehr stark geneigten Sichten erfolgen. In diesem Falle wird zunächst ein sehr hoch oder sehr tief gelegener Punkt P' eingestellt und nach Bezeichnung der Linealkantenlage auf dem horizontalen Meßtisch das Fernrohr durchgeschlagen und die Kippregel nach einer Drehung um 180° wieder scharf an die Randmarken angelegt. Nach dem Aufwärtsskippen des Fernrohrs wird nunmehr beim Vorhandensein eines Kippachsenfehlers die Ziellinie einen Punkt P'' treffen. Da jede der den beiden Fernrohrlagen entsprechenden Zielspuren S' und S'' (Abb. 141) in einer zur Kippachse parallelen Lotebene den Winkel i mit dem Lot einschließt und die horizontale Ziellinie in beiden Lagen nach demselben Punkte P_0 trifft, so liegt der Mittelpunkt P der Strecken $P' P''$ offenbar auf dem Lote durch P_0 und man hat zur Beseitigung des Kippachsenfehlers mittels einer etwa vorhandenen Neigungsschraube S (Abb. 138) den Träger T samt dem Fernrohr soweit zu neigen, daß der Fadenkreuzschnittpunkt auf den erwähnten Mittelpunkt P trifft. Kann, wie es in Abb. 138 zutrifft, die Querlibelle samt dem Oberteil der Kippregel durch eine besondere Stellschraube S gegen das Lineal geneigt werden, so bringt man, wieder unter Verwendung eines hoch gelegenen Zielpunktes bei näherungsweise

¹⁾ Durch die zur Erzielung einer einfacheren Zeichnung stillschweigend gemachte Annahme, daß die Kippachse genau senkrecht zur Linealkante liege, wird die Allgemeingültigkeit der besprochenen Berichtigung nicht eingeschränkt.

horizontaler Tischfläche in beiden Fernrohrlagen die Querlibelle mittels der Stellschraube S zu Einspielen und beseitigt die eine Hälfte der Abweichung der Ziellinie von ihrer ersten Lage mittels der genannten Stellschraube. Wird der dadurch an der Querlibelle erscheinende Ausschlag am Höhenrichtschraubchen der Querlibelle beseitigt, so ist deren Achse parallel zur Kippachse und diese bei einspielender Querlibelle horizontal.

Sowohl der Kippachsenfehler wie auch der Zielachsenfehler, denen die Projektionsfälschungen $igt h$ und $-(c:\cos h)$ entsprechen, müssen besonders beim Auftreten steiler Sichten sorgfältig beseitigt werden, da bei Meßtisch-aufnahmen aus praktischen Gründen nur in einer Fernrohrlage beobachtet werden kann, so daß hier die bei Theodolitmessungen übliche einfache Art der Fehlertilgung versagt.

Der Kreuzungsfehler der Kippregel ist der Winkel, den die Linealkante mit der Zielebene einschließt. Er bewirkt, daß jede auf den Meßtisch übertragene Richtung, also auch das ganze, abgesehen von der Orientierung richtig bleibende Planbild um den Betrag des Kreuzungsfehlers gegen die Natur verdreht ist. Zur Feststellung eines groben Kreuzungsfehlers kann man untersuchen, ob ein durch Zielen längs der Linealkante eingestellter Punkt auch in der Nähe der Fernrohrzielebene liegt. Die Beseitigung des Kreuzungsfehlers erfolgt durch Drehen der das Fernrohr tragenden Säule gegen das Lineal. Vielfach aber ist gar keine Einrichtung zur Beseitigung dieses durchaus ungefährlichen Fehlers vorhanden.

Bei horizontaler Ziellinie soll am Höhenkreis je nach dessen Einrichtung 0° bzw. 90° abgelesen werden; andernfalls ist ein Zeigerfehler vorhanden, der ganz entsprechend wie beim Theodolit bestimmt und beseitigt werden kann.

c) Aufstellung des Meßtisches.

Der gebrauchsfertige Meßtisch muß zentriert, orientiert und horizontiert sein. Ein mit Hilfe der Lotgabel zentrierter Tisch ist so aufgestellt, daß ein vorgegebener Bildpunkt lotrecht über dem zugehörigen Feldpunkte liegt. Orientiert ist der Tisch, wenn eine auf dem Meßtischblatt vorgegebene Richtung und die entsprechende Richtung auf dem Felde in der gleichen Lotebene liegen. Um dieses Ziel zu erreichen, wird die Linealkante der Kippregel an die Randmarken der bis an den Blattrand verlängerten (eventuell durch Berechnung der Blattschnitte) Bildrichtung angelegt und hierauf das Meßtischblatt samt der Kippregel gedreht, bis der zweite gegebene Feldpunkt in der Fernrohrzielebene liegt. Die Horizontierung endlich erfolgt durch eine Röhren- oder Dosenlibelle mit ebener Aufsatzfläche, und zwar muß man sich, da die Tischfläche niemals genau eben ist, in der Regel damit begnügen, die am meisten gebrauchte Tischmitte horizontal zu stellen. Fast jeder Praktiker stellt den Meßtisch zunächst so auf, daß er dem Augenmaße nach den drei gestellten Bedingungen ungefähr genügt und verbessert dann nacheinander die Zentrierung, Horizontierung und Orientierung. Durch dieses ineinandergreifende, versuchsweise Verfahren kommt man bei einiger Übung rascher zum Ziel als durch die sog. systematische Zentrierung, bei welcher der der Tischachse entsprechende Bildpunkt c (Abb. 142) mittels seiner auf die Bildstrecke a , b und deren Anfangspunkt bezogenen und abgegriffenen Koordinaten x , y auf das Feld übertragen wird. Man kann dann zunächst ohne jede Rücksicht auf die Orientierung den Tisch zentrisch über dem gewonnenen Feldpunkte C aufstellen, kann ihn hierauf horizontieren und schließlich so lange drehen, bis gleichzeitig a und b in die Lotebene durch AB zu liegen kommen, womit neben der Orientierung auch die genaue Zentrierung erreicht ist. Ist die richtige Aufstellung des Tisches gelungen,

so werden zur besseren Verbindung der einzelnen Bestandteile zwecks Erhöhung der Standsicherheit des Meßtisches die etwa vorhandenen Versicherungsschrauben angezogen.

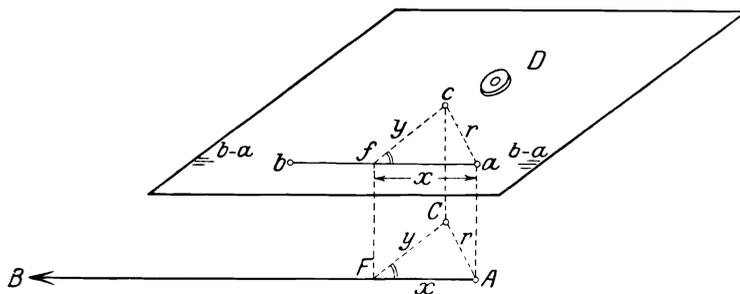


Abb. 142. Systematische Zentrierung des Meßtisches.

Über den Gebrauch der Kippregel sei kurz folgendes bemerkt. Sie ist beim Einstellen einer neuen Richtung vom Tisch abzuheben, in der Luft zu drehen und dann erst wieder aufzusetzen, damit eine Beschmutzung des Papiers und eine unbeabsichtigte Drehung des Tischblattes möglichst vermieden wird. Zur scharfen Neueinstellung eines Punktes verschiebt man die Kippregel vorsichtig, bis ihre Linealkante genau durch den Bildpunkt des Aufstellungsortes geht, legt hier an das Lineal den Scheitel eines gegen den Tisch gedrückten Winkels an und dreht hierauf das am Winkelscheitel anliegende Instrument, bis dessen Zielebene den einzustellenden Punkt enthält. Hierauf zieht man mit flachem, hartem Blei oder mit einer Nadel einen Strich so weit, als man ihn voraussichtlich braucht. Linien, die eine besondere Bedeutung besitzen, werden jedoch auch noch am Rande durch besondere Anstichlinien bezeichnet. Je weiter diese Randmarken von einander entfernt sind und je länger daher gegebenenfalls die Anlegelinie wird, um so kleiner wird der einem bestimmten linearen Anlegefehler entsprechende Richtungs- bzw. Orientierungsfehler. Um eine unzulässige Drehung des Tisches zu vermeiden, ist die ursprünglich gewählte Orientierungsrichtung nicht nur bei besonderen Anlässen, sondern auch regelmäßig von Zeit zu Zeit — etwa nach je 15 Punkten — nachzusehen und ein etwaiger Fehler zu berichtigen.

18. Neigungsmesser.

Mit geringerer Genauigkeit wie mit dem Höhenkreis des Theodolits können Höhenwinkel auch unter Verwendung besonderer Neigungsmesser ermittelt werden, die man je nach dem Gebrauch als Setzinstrumente, Hängeinstrumente und Ziel- oder Freihandinstrumente bezeichnen kann.

a) Setzinstrumente.

Die als Setzinstrumente bezeichnete Art von Neigungsmessern dient zur Ermittlung der Neigung einer ebenen Unterlage, auf welche sie mittels einer angearbeiteten ebenen Bahn aufgesetzt werden. Hierher gehören z. B. der Setzbogen und die Universalwage. Der Setzbogen (Abb. 143) besteht aus einem gleichschenkelig dreieckigen Rahmen, unter dessen Spitze ein Pendel hängt, dessen zeigerförmiges Ende Z_1 auf einer Gradteilung T_1 unmittelbar die Neigung der Unterlage angibt, wenn der Mittelpunkt von T_1 in den Pendeldrehpunkt C fällt und bei horizontaler Aufsatzfläche AB die Ablesung Null erscheint. Das Pendel wird durch sein Eigengewicht, oder etwas ge-

nauer, durch eine in der Abbildung gestrichelt angedeutete Libelle L lotrecht gehalten. Die Untersuchung des Instrumentes erfolgt durch Umsetzen. Sind a_1 und a_2 die in beiden Lagen gewonnenen Ablesungen, so ist

$$i = \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \dots \dots \dots (182)$$

die zur ersten Lage gehörige Zeigerverbesserung, so daß der Neigungswinkel $\alpha = a_1 + i$ erhalten wird. Durch Anbringen einer zweiten Teilung T_2 , an welcher mittels eines Zeigers Z_2 die einer Länge von 5 m entsprechenden Horizontalreduktionen abgelesen werden, erhält man den für die Schrägmessung mit 5 m-Latten bequemen Gradbogen von *Gonser*¹⁾.

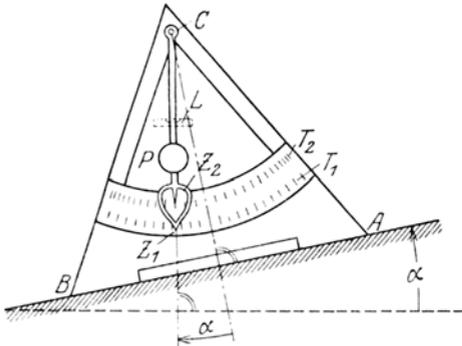


Abb. 143. Setzbogen (nach *Gonser*).

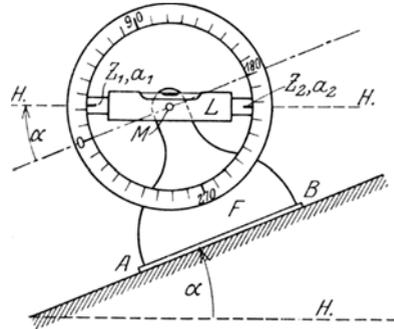


Abb. 144. Universalwaage.

Bei der Universalwaage (Abb. 144) trägt ein mit einer ebenen Ansatzfläche AB ausgestatteter kräftiger Fuß F einen Vollkreis, um dessen Mittelpunkt M sich eine Libellenalhidade L mit mindestens einem Zeiger Z_1 dreht. Liegt der Kreisdurchmesser $0^\circ - 180^\circ$ parallel zu AB und ist MZ_1 parallel zur Libellenachse, so ist die bei einspielender Libelle an Z_1 erscheinende Ablesung a_1 unmittelbar der Neigungswinkel α der Unterlage. Die Berichtigung dieses Instrumentes, das Neigungswinkel von 0 bis 360° , also auch an der Decke gemessene Winkel angibt, erfolgt durch Umsetzen.

Die Genauigkeitsgrenze ist beim Setzbogen auf etwa $\frac{1}{5}^\circ$, bei der Universalwaage auf wenige Minuten zu schätzen.

b) Hängeinstrumente.

Die Hängeinstrumente dienen zur Bestimmung der Neigung von Schnüren und Drähten, an denen sie aufgehängt werden. Sehr verbreitet ist die in Abb. 145 skizzierte Hängewaage, welche, im wesentlichen aus einem von der Mitte aus nach beiden Seiten je von 0 bis 90° bezifferten Halbkreis bestehend, mittels zweier gleich langer, nach verschiedenen Seiten hin geöffneten Haken H_1, H_2 an einer Schnur SS aufgehängt wird. Ein als Zeiger dienendes,

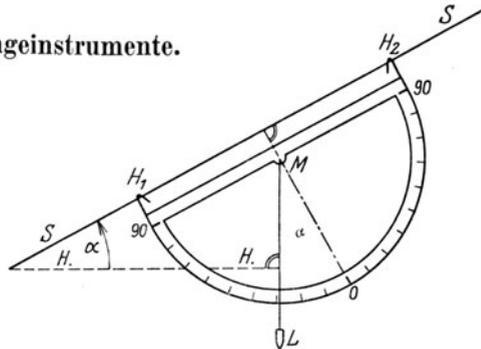


Abb. 145. Hängewaage.

¹⁾ *Steiff*, Der Gradbogen (ein Neigungsmesser für Streckenmessung mit Meßblättern) von Geometer *Gonser* in Ebingen, Z.V.W. 1893, S. 242—249.

im Kreismittelpunkt M befestigtes Fadenpendel L gibt am Kreis unmittelbar die Neigung α der Schnurlinie an. Sollen mit der Hängewage gute Ergebnisse erzielt werden, so sind folgende Forderungen zu erfüllen: 1. der Gradbogen soll eine vollkommen ebene Oberfläche besitzen; 2. das Lot muß genau im Kreismittelpunkt befestigt sein, da ein etwaiger Exzentrizitätsfehler durch Umhängen und Mittelbildung nicht beseitigt wird; 3. die Schnurlinie muß zur Vermeidung eines sog. Kollimationsfehlers zum 90° -Durchmesser parallel sein, und 4. soll das Instrument möglichst leicht (Aluminium) und die Schnur kurz (nicht über 20 m) und gut gespannt sein, damit die Durchbiegung nicht ins Gewicht fällt. Bei Beachtung dieser Anforderungen werden die Messungsfehler nur selten den Betrag von einigen Minuten überschreiten.

c) Zielinstrumente.

Mit den auf dem Pendelprinzip oder der Erscheinung des Auftriebs beruhenden Zielinstrumenten wird die Neigung einer Sicht bestimmt. Ein auf dem Pendelprinzip beruhendes Instrument dieser Art ist z. B. der in Abb. 146 skizzierte *Zugmaiersche Höhenmesser*¹⁾. Er besteht aus einem

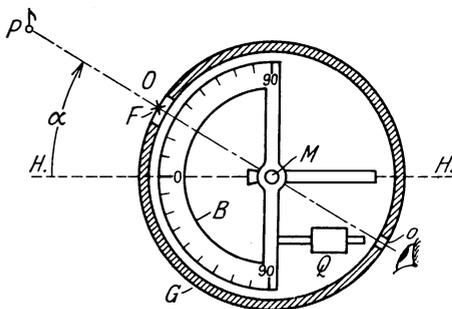


Abb. 146. Höhenmesser nach Zugmaier.

von einem Gehäuse G umgebenen¹⁾ beim Gebrauch um eine horizontale Achse M drehbaren, von der Mitte aus quadrantenförmig geteilten Halbkreis B , welcher mit Hilfe eines Gewichtes Q so ausbalanciert wird, daß sein Nullhalbmesser stets horizontal liegt. Ein kleines Schauloch o und ein in der Mitte eines größeren Fensters O befindlicher Faden F bilden zusammen ein Diopter, dessen Zielinie in die nach einem Punkt P führende Sicht gebracht wird. Das in o befindliche Auge kann dann mittels des Zeigerfadens F an der innen auf einem Kegelmantel befindlichen, also schräg gestellten Teilung, den gesuchten Neigungswinkel α unmittelbar ablesen. Dieses einfache Instrument, dessen Richtigkeit entweder durch Gegenbeobachtungen oder durch die Messung eines vorher mit dem Theodolit genau bestimmten Höhenwinkels geprüft werden kann, liefert die Neigungen mit einer mittleren Unsicherheit von etwa $\frac{1}{2}^\circ$.

Etwas genauer sind die auf dem Prinzip des Auftriebs beruhenden Zielneigungsmesser, wie z. B. der bekannte Spiegelneigungsmesser mit Libelle oder der besonders für Höhenwinkelmessungen von schwankenden Standorten aus wichtige Libellenquadrant.

19. Instrumente zur direkten Längenmessung und ihr Gebrauch.

Die wichtigsten Hilfsmittel der niederen Geodäsie zur direkten Längenmessung, bei welcher die zu ermittelnde Strecke begangen werden muß, sind in der Reihenfolge abnehmender Genauigkeit Meßplatten, Meßbänder sowie Meßrad, Feldzirkel und Schrittzähler.

¹⁾ Der von *Krehan* in der Z.V.W. 1873, S. 113—114 beschriebene *Zugmaiersche Höhenmesser* entstand durch geringe Abänderungen aus dem in der Z.V.W. 1872, S. 213—219 beschriebenen Höhenmesser von *Matthes*. Siehe auch *Brandis*, Neigungsmesser in Z.V.W. 1892, S. 603—604.

a) Lattenmessung.

Die Meßplatten (Abb. 147) sind Maßstäbe aus geradfaserigem Tannenholz, welche gegen die Feuchtigkeit durch einen Ölfarbanstrich und gegen Beschädigungen an den Enden durch Metallkappen geschützt sind. Der Lattenquerschnitt ist meist rechteckig und manchmal, besonders bei geschwellten Latten, oval. Unzweckmäßig ist der kreisförmige Querschnitt, der ein häufiges Beiseiterollen der Meßstangen zur Folge hat. Die einzelnen Meterfelder der meist 3 m (zur Ordinatenmessung) oder 5 m (zur Abszissenmessung) langen Latten sind durch verschiedene Farben — weiß und rot oder weiß und schwarz — unterschieden und bei zwei zusammengehörigen Latten, einem Lattenpaar, sind entsprechende Meterfelder verschiedenfarbig, so daß die eine Latte mit einem weißen, die andere aber mit einem roten oder schwarzen Feld beginnt. Zur Dezimeterbezeichnung dienen Nägel oder Striche. In Abb. 148 sind die gebräuchlichsten Formen der Schutzkappen, nämlich ebene und schneidenförmige Endflächen dargestellt. Seltener sind kugelige Endflächen. Als die wichtigsten Arten der Lattenmessung sind zu nennen: 1. die Messung auf horizontaler Unterlage, 2. die Staffelmessung, 3. die Schrägmessung, 4. die Messung längs gespannter Schnüre, 5. die Keilmessung.

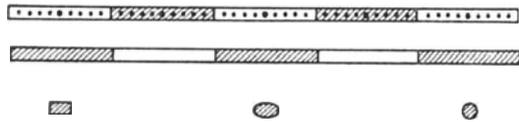


Abb. 147. Meßplatten.

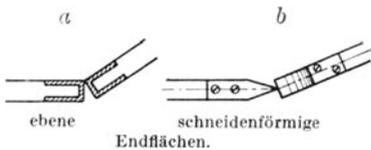


Abb. 148.

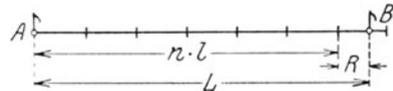


Abb. 149. Lattenmessung auf horizontaler Unterlage.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse bei der Lattenmessung auf horizontaler Unterlage. Nachdem die Richtung der zu bestimmenden Horizontalentfernung AB (Abb. 149) durch eine genügende Anzahl von etwa 30 m voneinander abstehenden Fluchtstäben bezeichnet ist, besteht die ganze Längenmessung nur in einer an A beginnenden, fortwährenden Aneinanderreihung der beiden Latten eines Lattenpaares in der bezeichneten Lotebene. Zur Einschränkung von Zählfehlern beginnt man die Messung stets mit der gleichen Latte — etwa mit den weißen Außenmetern —, deren Vorderende also die ungeraden 5 m-Zahlen angibt, während die geraden 5 m-Zahlen zum Vorderende der anderen Latte des Lattenpaares gehören. Da bei den der ganzen Länge nach aufliegenden Latten eine Durchbiegung nicht zu befürchten ist, so können sie durchwegs auf die Breitseite gelegt werden. Ist n die Zahl der ganzen innerhalb AB liegenden Latten von der Länge l und R das überschießende, an der Lattenteilung abzulesende Reststück, so ist die gesuchte Horizontalentfernung der Ausdruck

$$L = n \cdot l + R. \dots \dots \dots (183)$$

Auf geneigtem Gelände wird eine Horizontalmessung durch die Staffelmessung ermöglicht. Nachdem die Richtung AB (Abb. 150) im Gelände genügend ersichtlich gemacht ist, wird die zur Vermeidung einer Durchbiegung auf die hohe Kante gestellte, mit ihrem hinteren Endpunkte in A anliegende erste Latte l_1 mittels einer Setzlibelle horizontal gelegt und ihr

vorderer Endpunkt E_1 mittels eines Senkels auf den Boden nach E_1' abgelotet. An diesen Punkt E_1' wird nunmehr die zweite Latte l_2 horizontal angelegt und ihr vorderes Ende E_2 ebenfalls abgelotet. Fährt man in dieser Weise fort, so findet man schließlich n ganze horizontale Längen l und ein Reststück R , womit sich der gesuchte Horizontalabstand L ebenfalls nach

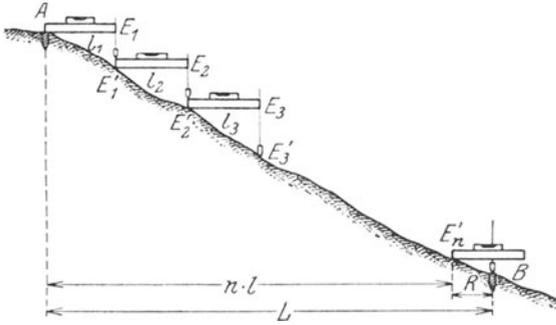


Abb. 150. Staffelmessung.

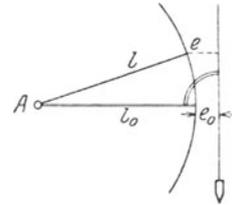


Abb. 151. Horizontallegung der Latte mit Hilfe eines Senkels.

(183) ergibt. Mangels einer Setzlibelle kann mit etwas geringerer Genauigkeit die Horizontallegung der Latten auch mit Hilfe des Senkels (Abb. 151) erfolgen, indem man entweder dem Augenmaß nach die Latte senkrecht zur Lotschnur richtet oder sie um ihren festliegenden Anfangspunkt A so lange dreht, bis ihr Endpunkt den kleinsten Abstand e_0 von einem fest aufgehängten Lot besitzt. In dieser Lage l_0 liegt die Latte aus leicht ersichtlichen Gründen horizontal.

Bei stärker geneigtem Gelände kann die Schrägmessung vorteilhafter sein, besonders wenn durch windiges Wetter bei der Staffelmessung die Sicherheit der Ablotung stark beeinträchtigt wird. Bei der Schrägmessung werden die Neigungswinkel α (Abb. 152) der unmittelbar auf dem Boden aufliegenden Lattenlängen l' mit einem der früher beschriebenen Setzinstrumente gemessen. Die Horizontalprojektion der i -ten Latte ist dann $l_i = l'_i \cos \alpha_i$ und die horizontale Entfernung der Punkte A, B wird

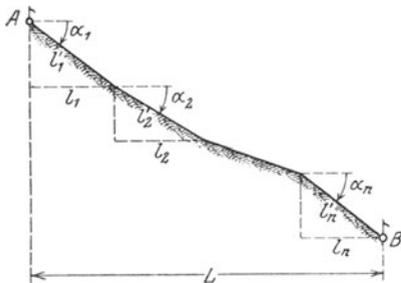


Abb. 152. Schrägmessung.

Handelt es sich stets um dieselbe Länge $l'_i = l'$, so ergibt sich die etwas einfachere Form

$$L = \sum_{i=1}^n l'_i \cos \alpha_i. \dots \dots \dots (184)$$

Handelt es sich stets um dieselbe Länge $l'_i = l'$, so ergibt sich die etwas einfachere Form

$$L = l' \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i. \dots \dots \dots (185)$$

Den Unterschied Δl der schiefen Länge l' gegen ihre Horizontalprojektion l bezeichnet man als die Reduktion der schiefen Länge auf den Messungshorizont. Ihr strenger Ausdruck lautet

$$\Delta l = l' - l = l' - l' \cos \alpha = 2 l' \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \dots \dots \dots (186)$$

Verwendet man zu den Messungen 5 m-Latten und den früher beschriebenen

Setzbogen von *Gonser*, so gibt dessen Teilung T_2 unmittelbar die Reduktionen auf den Horizont an. In einem solchen Falle ist es zweckmäßiger, nach der aus (186) folgenden Formel

$$L = [l'] - [\Delta l] \dots \dots \dots (187)$$

zu rechnen.

Tritt etwa an die Stelle des Lattenneigungswinkels α der Höhenunterschied h der Lattenendpunkte (Abb. 153), so ist die Horizontalprojektion

$$l = l' \sqrt{1 - \left(\frac{h}{l'}\right)^2} \dots \dots \dots (188)$$

Der strenge Ausdruck für die Horizontalreduktion lautet

$$\Delta l = l' - l = l' \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{h}{l'}\right)^2} \right\}; \dots \dots \dots (189)$$

hieraus aber folgt durch Reihenentwicklung nach dem Binomialsatz der einfache Näherungsausdruck

$$\Delta l \approx \frac{h^2}{2l'} \dots \dots \dots (190)$$

Werden, was meist geschieht, 5 m-Latten verwendet, so ergibt sich aus (190) leicht die besonders einfache Form

$$\Delta l_{(mm)} \approx h^2_{(dm)} \dots \dots \dots (191)$$

Solange h klein bleibt und etwa 3 dm nicht überschreitet, kann man Δl mit genügender Sicherheit aus einem geschätzten h bestimmen und bei der Messung sogleich dadurch berücksichtigen, daß man den Anfangspunkt der nächsten Latte nicht unmittelbar an das Ende der vorhergehenden Latte anlegt, sondern nach Schätzung um den Betrag Δl davon abstehen läßt. Man spricht dann von einer Lattenmessung mit abstehenden Enden, die bei kleinen Höhenunterschieden h recht gute Ergebnisse liefert.

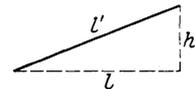


Abb. 153. Längenreduktion auf den Messungshorizont bei bekanntem Höhenunterschied der Endpunkte.

Verschiedene Versuche, das besprochene Vorlegemaß auf rein mechanischem Wege bei der Messung zu berücksichtigen, haben noch zu keiner vollständig gelungenen Lösung geführt.

Die zur Schrägmessung verwendeten Latten sollen schneidenförmige Enden besitzen (Abb. 148 b), damit die Endenberührung in der Lattenachse stattfinden kann. Obwohl eine sorgfältig durchgeführte Schrägmessung der Staffelmessung an Genauigkeit überlegen ist, so wird doch meist die Staffelmessung bevorzugt, welche keinerlei Zwischenaufschreibungen erfordert, während die Schrägmessung fortlaufende Aufschreibungen und deren Berechnung verlangt.

Sehr genau ist die Streckenmessung längs gespannter Schnüre. Bei diesem besonders für Grubenmessungen wichtigen Verfahren wird zunächst das Streckenprofil durch Nägel abgeteilt, welche in Bodenpföcken oder im Zimmerwerk befestigt werden. Diese Nägel werden nun durch straff gezogene Schnüre verbunden, deren Länge durch angelegte Maßstäbe genau bestimmt werden kann. Liegen die Schnüre nicht horizontal, so sind auch die Schnurneigungen — etwa mit der Hängewage — zu ermitteln.

Um das Zurückweichen der vorher gelegten Latte durch ein Anstoßen der folgenden zu vermeiden, läßt man bei der Keilmessung zwischen den stets senkrecht zueinander gestellten schneidenförmigen Lattenenden (Abb. 23) einen kleinen Abstand d , welcher jeweils mit Hilfe des Meßkeils nach (118)

bestimmt wird. Gehören wie bisher zu den schiefen Lattenlängen l' die Horizontalprojektionen l , so ist die gesuchte Länge hier der Ausdruck

$$L = [l] + [d]. \dots \dots \dots (192)$$

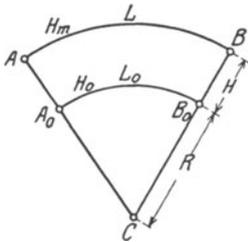


Abb. 154. Längenreduktion auf den Meeresspiegel.

Eine Reduktion der einzelnen Schneidenabstände d auf den Horizont wird nur in Ausnahmefällen, nämlich bei sehr großen Genauigkeitsansprüchen und beträchtlichen Neigungen erforderlich sein.

Die nach irgend einem der bisher besprochenen Verfahren gefundene Horizontalentfernung L entspricht einem mittleren Messungshorizont H_m (Abb. 154) und sie weicht daher von ihrer Projektion L_0 auf den Meereshorizont H_0 um einen kleinen, als Reduktion auf den Meeresspiegel bezeichneten Betrag ΔL ab. Derselbe ist von L und der Meereshöhe H abhängig und ergibt sich aus Abb. 154 zu

$$\Delta L = L - L_0 = L - \frac{LR}{R + H} = \frac{HL}{R + H}, \dots \dots \dots (193)$$

wofür man zweckmäßiger die stets ausreichende Näherung

$$\Delta L = \frac{H}{R} \cdot L \dots \dots \dots (194)$$

verwendet. Nimmt man für den Erdhalbmesser R den runden Wert 6370 km, so beträgt für je 100 m in H und L die Reduktion ΔL 1,57 mm.

b) Bandmessung.

Sehr häufig werden zur direkten Längenmessung — besonders im freien Feld und bei etwas geringeren Genauigkeitsansprüchen — auch Meßbänder¹⁾ aus Stahl verwendet, die je nach dem Gebrauch in Ziehstahlbänder (Feldstahlbänder) und Handstahlbänder unterschieden werden. Die für die Abzissenmessung bestimmten Ziehstahlbänder sind 20—30 m lang, etwa 20 mm breit, 0,3 mm dick und endigen in drehbare, zylindrische Ringe (Abb. 155),

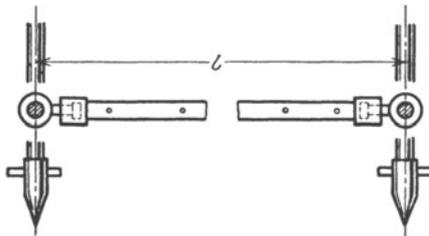


Abb. 155. Ziehstahlband.

deren Achsen um die Meßbandlänge l voneinander abstehen. Zur Messung dienen besondere Ziehstäbe oder Bandstäbe, deren zylindrischer Querschnitt genau gleich der Ringöffnung ist, so daß bei lotrechten Stäben und gestrecktem, horizontalem Band auch die Stabachsen um die Bandlänge l voneinander abstehen. Diese Stäbe endigen in Eisenschuhe mit Querriegeln, die ein Herabfallen der Endringe verhindern. Beim Gebrauch wird das bis

auf Dezimeter geteilte Feldstahlband zunächst angenähert in die Messungsebene gebracht; der hintere Gehilfe steckt seinen Stab in den Anfangspunkt der zu messenden Länge und weist den Vorderstab noch genauer in die Messungsrichtung ein. Dann wird das Band mit etwa 20 kg Zug gestreckt und bei gut lotrechten Stäben das andere Ende der Bandlage durch Eindrücken des Vorderstabes in den Boden bezeichnet. Nach dem Herausnehmen des Stabes wird dieser Punkt durch einen Stift festgehalten und nunmehr

¹⁾ Die Meßkette soll, als gänzlich veraltet, hier nicht besprochen werden.

das Band durch Vorwärtsziehen in die nächste Lage gebracht, wo in der gleichen Weise wie vorher verfahren wird, nachdem der hintere Stab in den durch den ersten Stift bezeichneten Punkt gesteckt worden ist. Die Zahl der vom vorderen Gehilfen gesteckten Stifte, welche der Hintermann alle wieder mitzunehmen hat, gibt die zurückliegende Teillänge an, weshalb man von Zählern spricht. Eine willkommene Probe für die richtige Zählung der ganzen Bandlängen ermöglicht auch die Restzahl der Zähler, welche am Ende der Messung der vordere Gehilfe noch in Händen hat.

Die Messung mit dem Ziehstahlband gestaltet sich am einfachsten bei horizontaler Unterlage, auf welcher das Band unmittelbar aufliegt. Bei geneigtem Gelände wird vielfach gestaffelt, wobei am Ende des straff gezogenen Bandes, bei stärkeren Neigungen auch schon an den Stellen 10 m oder 5 m abgelotet wird. Auch die Schrägmessung kann bei langen, ganz gleichmäßig geneigten Strecken mit Vorteil verwendet werden. Zur Neigungsmessung dient in diesem Falle am besten ein am oberen Ende des Hinterstabes befestigter Freihandhöhenmesser, mit dem das obere Ende des gleich langen Vorderstabes angezielt wird.

Viel handlicher als die schweren Ziehstahlbänder sind die 10 bis 20 m langen, meist in einem Schutzgehäuse befindlichen, bequem aufrollbaren Handstahlbänder, welche hauptsächlich für die Ordinatenmessung und zur Messung anderer nicht in der Standlinie liegenden Maße bestimmt sind. Das Handstahlband trägt meist Zentimeterteilung und wird bei der Messung nur selten auf den Boden gelegt, vielmehr meistens in Brusthöhe gebraucht, wenigstens dann, wenn die zu messende Länge kleiner als die Bandlänge ist. Leinenhandbänder sind mit der Feuchtigkeit starken Längenänderungen unterworfen, so daß sie für ingenieurtechnische Zwecke wenig Verwendung finden.

Stahlmeßbänder erfordern eine sehr sorgfältige Behandlung, wenn sie nicht in kurzer Zeit untauglich werden sollen. Insbesondere sind die Bänder vor Schleifenbildung zu bewahren und nach beendeter Arbeit sorgfältig trocken zu wischen. Ziehstahlbänder werden nach dem Gebrauch auf einen besonderen Rahmen gerollt. Verwahrloste Bänder springen sehr leicht ab und eine eingezätzte Teilung ist bald völlig unkenntlich.

Präzisionslängenmessungen oder Feinlängenmessungen kann man auf horizontaler oder nur schwach geneigter Unterlage außer z. B. mit Schneidenlatten, Setzbogen und Meßkeil auch mit entsprechend eingerichteten Stahlbändern, sog. Feinstahlbändern vornehmen. Bei solchen Feinmessungen

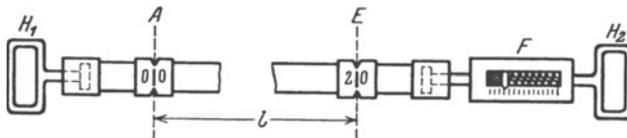


Abb. 156. Feinstahlband mit Federwaage.

kommt es hauptsächlich auf die Erfüllung zweier Forderungen an: 1. muß die jeweilige Bandlänge genau bekannt sein und 2. soll die Aneinanderreihung der einzelnen Bandlagen in möglichst einwandfreier Weise vor sich gehen. Die genaue jeweilige von der Temperatur und der Bandspannung abhängige Bandlänge, welche bei dem in Abb. 156 skizzierten mit Handgriffen versehenen Feinstahlband durch den Abstand zweier durch Kerben hervorgehobener Endstriche A , E bestimmt ist, ergibt sich aus der bei der Messung beobachteten Temperatur und dem an der Federwaage abgelesenen Zug. Der Temperatureinfluß beträgt bei einem Stahlband rund 1,1 mm

für 10^0 C Temperaturänderung auf 10 m Länge. Die Längenänderung infolge des Zugs ist nicht nur vom Material, sondern auch vom wechselnden Querschnitt des Bandes abhängig, so daß sie erst durch eine besondere Abgleichung zu ermitteln ist. Sie bleibt konstant, solange unter Anwendung des gleichen Zuges gemessen wird. Eine sorgfältige Aneinanderreihung¹⁾ der Bandlängen läßt sich in verschiedener Weise erreichen. Man kann z. B. nach einer vorangegangenen flüchtigeren, vorläufigen Messung in den Endpunkten der Bandlängen Pflöcke schlagen und auf diesen bei der nachfolgenden scharfen Messung das Bandende jeweils mittels einer in die Kerbe bei *E* gebrachten Stecknadel genau bezeichnen. Man kann aber auch von vornherein in den nach einer ersten Messung in den Anreihpunkten geschlagenen Pflöcken durch Nadeln oder durch Querstriche Punkte bezeichnen, deren um einige Millimeter von der Bandlänge abweichende Entfernungen an einer etwa beiderseits der Endmarke *E* angebrachten, kurzen Millimeterteilung mittels der als Zeiger dienenden Nadel genau abgelesen werden können. An Stelle der Pflöcke mit den Nadeln können auch zwei Exemplare einer besonderen tragbaren Anreihvorrichtung treten, wie sie Löschner²⁾ angegeben hat. Sie besteht aus einer mit einem Griff *G* (Abb. 157) versehenen etwa 3 kg schweren Eisenplatte *P* mit einem aufklappbaren Zeiger *Z*, welcher mittels einer Schraube *S* genau auf den Endstrich des Bandes eingestellt werden kann,

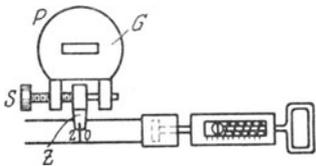


Abb. 157. Anreihvorrichtung von Löschner.

während umgekehrt bei festliegenden Zeigern der Anfangsstrich des Bandes auf den ersten Zeiger eingestellt und mit dem Zeiger der zweiten Anreihvorrichtung an der Millimeterteilung des Bandendes abgelesen würde.³⁾

e) Meßrad, Feldzirkel und Schrittzähler.

Diese Hilfsmittel der direkten Längenmessung besitzen für die Ingenieurtechnik eine mehr untergeordnete Bedeutung. Immerhin können das Meßrad — z. B. in Form eines mit einem Zählwerk verbundenen Wagenrads — und der Schrittzähler bei flüchtigen Aufnahmen in kartographisch unbekanntem Ländern auch dem Ingenieur von Nutzen sein.

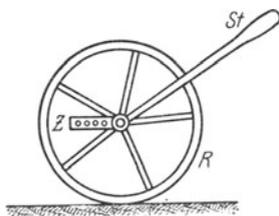


Abb. 158. Meßrad.

Das allbekannte Meßrad (Abb. 158), welches man auch als eine zylindrische Meßplatte auffassen kann, besteht aus einem mit Speichen versehenen, zylindrischen Rad *R*, welches an einem Stiel *St* gehalten und vorwärts geschoben wird. Ein Zeigerwerk *Z* gibt die Zahl *n* der Radumdrehungen an. Ist *u* der bekannte Radumfang, so ist der in der Bodenoberfläche zurückgelegte Weg $U = n \cdot u$. Dieser stimmt mit der Horizontalentfernung der Wegendpunkte nur dann überein, wenn der befahrene

Boden nahezu eben und horizontal ist.⁴⁾

¹⁾ Siehe hierzu auch *Reinhertz*, Zur Stahlbandmessung, Z.V.W. 1903, S. 176—183.

²⁾ *Löschner*, H., Längenmessungen mit Präzisionsstahlmeßbändern, Z.V.W. 1912, S. 639—645. Siehe auch Z.V.W. 1903, S. 165—176.

³⁾ Durch die Verwendung von Invarbändern oder Invardrähten mit besonderen Spannstativen wird die Genauigkeit der Längenmessung noch gesteigert; doch gehört die Beschreibung dieser Apparate und ihres Gebrauches bei Grundlinienmessungen besser in die höhere Geodäsie.

⁴⁾ Über Erfahrungen mit dem Meßrad berichten *Lorber* (Über die Genauigkeit der Längenmessungen mit dem Meßrad von Wittmann & Co. in Wien, Z.V.W. 1877, S. 333

Der manchmal noch für landwirtschaftliche Zwecke verwendete Feldzirkel oder die Drehlatte (Abb. 159) ist gewissermaßen ein Zirkel mit fester Öffnung l ($l = 2$ bis 3 m), mit welchem die gesuchte Entfernung auf dem Felde abgezirkelt wird. Horizontalentfernungen ergeben sich unmittelbar nur auf horizontalem Boden.

Für untergeordnete Zwecke lassen sich Längen auch durch Abschreiten bestimmen. Die Schrittlänge eines jungen Mannes von mittlerer Größe ist etwa 83 cm, so daß 300 Schritte ziemlich genau 250 m ausmachen. Eine schärfere Bestimmung der Schrittlänge ist durch Abschreiten einer vorher gemessenen Strecke möglich. Sollen große Entfernungen durch Abschreiten bestimmt werden, so verwendet man mechanische Schrittzähler oder Pedometer, die am Knie befestigt werden und bei jeder Hebung des Fußes ein Zählwerk in Bewegung setzen.

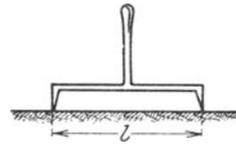


Abb. 159. Feldzirkel (Drehlatte).

d) Fehler der direkten Längenmessung.

Die Fehler der unmittelbaren Längenmessung sind teils regelmäßige, teils unregelmäßige. Unter den zur gemessenen Länge direkt proportionalen, regelmäßigen Fehlern sind besonders zu nennen: 1. der Einfluß einer unrichtigen Länge der Latte oder des Meßbandes, 2. der Einfluß einer Durchbiegung des Meßwerkzeugs, 3. die von einem Ausweichen des Meßwerkzeugs aus der Horizontalen und der Messungslotebene entstehenden Fehler, 4. die Fehler infolge Zurückstoßens einer schon liegenden durch die neu anzuliegende Latte, 5. die etwaige Unterlassung der Reduktion auf den Meereshorizont, 6. der Einfluß eines Abrutschens der Latte bei stark geneigter Unterlage, 7. der Fehler infolge Vorziehens des hinteren Bandstabes beim Anziehen des vorderen Stabes, 8. der durch das Eindringen von Fremdkörpern zwischen die Lattenenden entstehende Fehler.

Die unter 2. bis mit 5. genannten Ursachen wirken stets vergrößernd auf das Messungsergebnis. Im gleichen Sinne wirkt eine unrichtige Lattenlänge, wenn sie von einer Abnutzung der Lattenenden herrührt. Eine durch das stets wiederholte, starke Anziehen der Bandstäbe hervorgerufene Verlängerung der Endringe und damit des Bandes selbst hat eine Verkleinerung des Messungsergebnisses zur Folge. Auch die unter 6. bis mit 8. genannten Fehler bewirken stets ein zu kleines Messungsergebnis. Dem Umstande, daß die meisten Fehler das Messungsergebnis vergrößern, wird vielfach durch eine geringe Verlängerung des Meßwerkzeugs über den Sollwert hinaus Rechnung getragen. Im einzelnen sei zu diesen regelmäßigen Fehlern noch folgendes bemerkt.

Die unrichtige Länge des Meßwerkzeugs kann, wie schon erwähnt, von einer Abnutzung der Lattenenden oder einem Langziehen der Endringe des Meßbandes herrühren. Sie kann bei hölzernen Meßplatten ihren Grund aber auch in einer durch den Wechsel der Feuchtigkeit bedingten Ände-

bis 345) und *Schlehbach* (Über die Genauigkeit und Brauchbarkeit des Meßrades bei gewöhnlichen Längenmessungen, Z.V.W. 1877, S. 241—249). Wie *Bauernfeind* (Elemente der Vermessungskunde, I. Bd., 7. Aufl., Stuttgart 1890, S. 407) angibt, wird die Idee, Räder zum Messen von Entfernungen zu benutzen, schon von *Vitruvius* als eine überlieferte bezeichnet. Auch *Heron* von Alexandria beschreibt im Kapitel XXXIV seiner *Dioptra* schon die Längenmessung mit Hilfe des Wagenrades und eines besonderen Zählwerks (*Schöne, H.*, Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, Leipzig 1903, S. 293 ff.). Bekannt ist der aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts stammende Versuch des französischen Arztes Fernel, den Bogen Paris-Amiens aus der Umdrehungszahl eines Wagenrades zu ermitteln.

zung des Lattenmeters¹⁾ haben und bei Meßbändern durch die Nichtbeachtung einer stärkeren Ausdehnung des Bandes bei einem größeren Temperaturwechsel, sehr häufig aber auch durch das mangelhafte Zusammenflicken eines abgerissenen Bandes verursacht werden. Zur Beseitigung dieses unter Umständen sehr schlimmen Fehlers muß man von Zeit zu Zeit die Länge des Meßwerkzeugs durch eine scharfe Abgleichung mit Hilfe eines Komparators neu bestimmen. Ein Komparator für Lattenabgleichung besteht im wesentlichen aus zwei in fest eingerammten Pflöcken P_1, P_2 oder in Mauerwerk sitzenden Schneiden S_1, S_2 , deren möglichst unveränderlicher Abstand K_1 ,

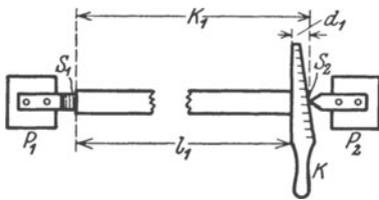


Abb. 160. Komparator zur Abgleichung von Meßlatten.

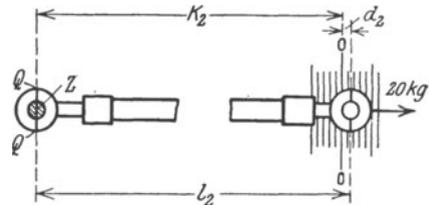


Abb. 161. Komparator zur Abgleichung von Meßbändern.

die Komparatorlänge, durch wiederholtes Abschieben mit Hilfe eines Normalmeters bestimmt wird. Mißt man nun bei eingelegter, an S_1 anstoßender Latte mittels eines Meßkeils K den Abstand d_1 der zweiten Komparatorsehneide vom anderen Lattenende, so ist die gesuchte Lattenlänge

$$l_1 = K_1 - d_1. \dots \dots \dots (195)$$

Der Sicherheit halber wird die Komparatorlänge auch nach der Längenabgleichung noch einmal bestimmt. In ähnlicher Weise geht nach Andeutung von Abb. 161 die Längenabgleichung eines Meßbandes vor sich. Hier ist die ebenfalls durch Abschieben zu ermittelnde Komparatorlänge K_2 durch den Abstand des Nullstriches einer Millimeterteilung von der Achse eines kurzen, zylindrischen Zapfens Z bestimmt. Bei der Abgleichung wird der Anfangsring des Bandes an den Zapfen Z gehängt und so verkerlt, daß sein durch Striche bezeichneter Querdurchmesser Q die Zapfenachse schneidet, wenn am anderen Bandende mit 20 kg Zug angezogen wird. Bedeutet d_2 den an der Teilung abzulesenden Betrag, um welchen bei dieser Stellung der Querdurchmesser des Endringes über den Teilungsnulldpunkt hinausfällt, so ist die Bandlänge

$$l_2 = K_2 + d_2. \dots \dots \dots (196)$$

Bei Feinstahlbändern wäre in ähnlicher Weise zu verfahren und auch noch die Temperaturverbesserung zu berücksichtigen. Bei gewöhnlichen Stahlbändern sieht man davon meistens ab, nimmt aber dafür die Abgleichung bei einer mittleren Temperatur vor, wie sie etwa bei den Messungen im Felde

¹⁾ Sehr eingehend ist diese Frage behandelt in einer zusammenfassenden Arbeit von *Lüdemann*, Die Längenänderung hölzerner Meß- und Nivellierlatten, Z.V.W. 1912, S. 409—418, 433—447, 463—473. *Lüdemann* sagt S. 447 zusammenfassend: „Bei gut gearbeiteten Präzisionsmeß- und Nivellierlatten wird also die Amplitude der jährlichen Schwankung des Lattenmeters 50 mm im allgemeinen nicht überschreiten. . . .“ Man wird also bei Meßlatten, deren Ölfarbanstrich im Laufe der Zeit gelitten hat, wohl mit einer jährlichen Schwankung des Lattenmeters von etwa 0,5 mm rechnen müssen. *Lüdemann* verspricht eine künftige Erörterung der Frage, ob alle Lattenmeter dieselbe Änderung erfahren. Diese Frage ist (für Nivellierlatten) schon von *M. Schmidt* in negativem Sinne beantwortet worden. (Siehe *M. Schmidt*, Ergänzungsmessungen zum bayerischen Präzisionsnivellment, Heft 1. München 1908 und Heft 2. München 1919.)

auftritt. Hat man Latten zur Verfügung, deren Länge scharf bekannt ist, so kann man die Bandabgleichung ohne eine besondere künstliche Vergleichsvorrichtung in der Weise durchführen, daß man den für eine scharf bezeichnete Länge aus wiederholten Stahlbandmessungen gefundenen Mittelwert mit der aus sorgfältigen Lattenmessungen erhaltenen Angabe vergleicht.¹⁾

Infolge einer Durchbiegung des Meßwerkzeugs besitzt nicht die horizontale Entfernung AE (Abb. 162) der Latten- bzw. Bandendpunkte, sondern der Bogen ASE die Länge l , welche fehlerhafterweise an Stelle der Sehne s gesetzt wird. Da man ASE in erster Näherung als einen Kreisbogen mit der Pfeilhöhe p betrachten kann, so läßt sich auch der Unterschied $f = s - l$ leicht näherungsweise angeben. Stellt man nämlich s als Funktion von l und p dar, so erhält man nach einer einfachen Reihenentwicklung bei Unterdrückung der Glieder höherer Ordnung

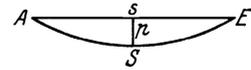


Abb. 162. Durchbiegung des Meßwerkzeugs.

$$f = -\frac{8}{3} \frac{p^2}{l} \dots \dots \dots (197)$$

Die Durchbiegungsfehler sind bei hohlliegenden oder an einem Ende aufliegenden Latten nur gering und können durch Stellen der Latte auf die hohe Kante ganz unschädlich gemacht werden. Bei längeren Meßbändern aber sind sie sehr zu fürchten. Ihr Einfluß kann aber auch hier durch Unterstützen des Bandes in der Mitte oder an anderen geeigneten Stellen stark verringert werden. Die einem frei durchhängenden 20 m-Band entsprechenden Beträge von f enthält Tabelle 11.

$l = 20$ m Tabelle 11.

p	1 dm	2 dm	3 dm	4 dm	5 dm
$-f$	1,3 mm	5,3 mm	12,0 mm	21,3 mm	33,3 mm

Sind die Werte h_1', \dots, h_n' die Höhenunterschiede der Endpunkte des Meßwerkzeugs, so ist die an der schief gemessenen Gesamtlänge anzubringende Verbesserung

$$v' = -\left[\frac{h'^2}{2l} \right] = -\frac{n}{2l} \left[\frac{h'^2}{n} \right] = -n \cdot \frac{h_m'^2}{2l} \dots \dots \dots (198)$$

Hierin bedeutet h_m' die nach Analogie des mittleren Fehlers bestimmte mittlere Abweichung des Meßwerkzeugs von der Horizontalen. Ist diese Größe etwa aus Versuchen für einen Beobachter bestimmt worden, so kann dieser für eine von ihm ausgeführte Messung den Wert v' wenigstens näherungsweise angeben. Ein ganz entsprechender Ausdruck ist die infolge einer mittleren seitlichen Abweichung h_m'' notwendige Verbesserung

$$v'' = -n \cdot \frac{h_m''^2}{2l} \dots \dots \dots (199)$$

An unregelmäßigen, gleich oft positiven und negativen Fehlern der direkten Längenmessung sind hauptsächlich zu nennen die Anlegefehler, Anreihfehler, Ablotungsfehler, Ablesefehler, die Fehler der gemessenen Neigungen und die infolge unrichtigen Zuges entstehenden Spannungsfehler. Hinsichtlich dieses letzteren Fehlers sei bemerkt, daß eine bestimmte Zugänderung —

¹⁾ Auch im Feld verwendbare Vergleichsvorrichtungen sind konstruiert worden. Siehe hierzu *Blaß, K.*, Ein Feldkomparator zur Bestimmung der Längen von Meßplatten, Z.V.W. 1912, S. 11—14 und *Hohenner, H.*, Ein neuer Feldkomparator von C. Sickler in Karlsruhe, Z.V.W. 1912, S. 601—604.

z. B. um 1 kg — einen um so geringeren Längenfehler verursacht, je größer die gewählte Normalspannung — z. B. 20 kg — ist.¹⁾

Nach Theorie und Erfahrung schreitet der mittlere unregelmäßige Fehler m_u mit der Wurzel aus der gemessenen Länge L fort. Dagegen sind die am Anfang und Ende der Strecke je einmal auftretenden Anlege- und Ablesefehler m_a', m_a'' von der Länge unabhängig. Entspricht $\pm m_a$ ihrem Zusammenwirken und bedeutet m_r den mittleren regelmäßigen, m den mittleren Gesamtfehler der Länge, so gelten die Beziehungen

$$m_a = \sqrt{m_a'^2 + m_a''^2}, \quad m_r = C \cdot L, \quad m_u = m_0 \sqrt{L}, \quad m = \sqrt{m_r^2 + m_u^2 + m_a^2}. \quad (200)$$

in welchen C den mittleren regelmäßigen, m_0 den mittleren unregelmäßigen Fehler der Längeneinheit bezeichnet²⁾. m_0 läßt sich aus Doppelmessungen mit dem gleichen Meßwerkzeug bestimmen. Werden für verschiedene Strecken $L_1, \dots, L_i, \dots, L_n$ auf dem Hin- und Rückwege die Wertepaare $L_1', L_1'', \dots, L_i', L_i'', \dots, L_n', L_n''$ mit den Differenzen $d_1, \dots, d_i, \dots, d_n$ gefunden, so ergibt sich damit in Anlehnung an (69)

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{L} \right]}, \quad \dots \dots \dots (201)$$

vorausgesetzt, daß etwa durch die Benutzung eines Anschlagwinkels zur Bezeichnung des Längenansfangs und durch Verwendung eines mm-Maßstabes zur Endablesung die Bestandteile von m_a so klein gehalten werden, daß dieses neben den Differenzen d verschwindet.

Die mittlere Differenz der Längeneinheit ist also $d_0 = m_0 \sqrt{2}$ und die mittlere Differenz zwischen Hin- und Rückmessung der Länge L wird

$$d = d_0 \sqrt{L} = m_0 \sqrt{2L}. \quad \dots \dots \dots (201a)$$

Setzt man nach Analogie des Maximalfehlers die Maximaldifferenz D der dreifachen mittleren Differenz gleich, so ist, wenn man zur Gewinnung einer einfachen Formel den kleinen Betrag m_a vernachlässigt,

$$D = 3d = (3m_0 \sqrt{2}) \sqrt{L} = k \cdot \sqrt{L} \quad \dots \dots \dots (202)$$

die größte zulässige Abweichung zwischen der Hin- und Rückmessung einer Strecke.

Der Wert k hängt nicht nur von der Art und Güte des Meßwerkzeugs, dem Messungsverfahren, der Gewandtheit und Sorgfalt des Beobachters, sondern auch von der Beschaffenheit des Geländes und der Witterung ab, so daß wiederholte Versuche immer auf etwas verschiedene Werte m_0 und k führen werden. Es haben auch die Verwaltungen der verschiedenen Staaten stark voneinander abweichende Werte k festgesetzt. Jedenfalls aber kann man fordern, daß im ebenen Gelände der Bedingung

$$D \leq 0,007 \sqrt{L} \quad \dots \dots \dots (203)$$

genügt wird, in welcher D und L in Metern zu verstehen sind.³⁾

¹⁾ Nach *Haußmann, K.*, Elastizitätsmodul für Stahlmeßbänder, Z.V.W. 1903, S. 161—165 ist der Dehnungskoeffizient für vertikal hängende Stahlbänder $0,5 \cdot 10^{-6}$. Dieser Betrag ist für horizontale, aufliegende Bänder um rund 10 % zu vermindern.

²⁾ Nach *Cappilleri*, Zur Theorie der Lattenmessung, Z.V.W. 1907, S. 33—38, ergibt sich für den durchschnittlichen Fehler der Lattenmessung der Ausdruck $\vartheta = \rho \cdot n \pm \mu \sqrt{n}$, worin n die Zahl der gelegten Latten bedeutet.

³⁾ Einige amtliche Fehlergrenzen werden später bei der Besprechung der Fehler im Polygonzug angegeben werden.

20. Indirekte Längenmessung.

Wird eine Länge ermittelt, ohne daß sie dabei begangen wird, so handelt es sich um eine indirekte Längenmessung, die auf geometrischem, trigonometrischem oder optischem Wege erfolgen kann.

a) Geometrischer Weg.

Von einer geometrischen, indirekten Entfernungsmessung spricht man, wenn sich die gesuchte Entfernung aus einer oder mehreren unmittelbar gemessenen Längen mittels einfacher geometrischer Beziehungen ableiten läßt. Soll z. B. die große Entfernung x eines unzugänglichen Punktes C (Abb. 163) von einem zugänglichen Punkte A gefunden werden, so kann man etwa mit einem sog. entfernungsmessenden Prisma¹⁾ von A aus eine Richtung AB' abstecken, welche mit AC einen der konstanten Richtungsablenkung α gleichen Winkel einschließt. Sucht man nun mit Hilfe des Prismas auf AB' denjenigen Punkt B , von dem aus BC mit BA denselben Winkel α einschließt, so hat man in ABC ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen kurze Grundlinie b direkt zu messen ist. Die gesuchte Entfernung ist dann

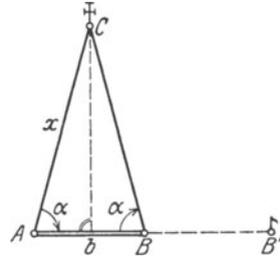
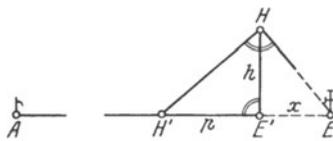


Abb. 163. Indirekte geometrische Entfernungsmessung mit Hilfe eines Distanzprismas.

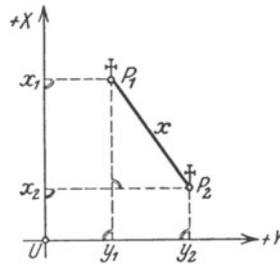
$$x = b : 2 \cos \alpha = C \cdot b \dots \dots \dots (204)$$

und kann in einfacher Weise ermittelt werden, da alle diese Prismen so geschliffen sind, daß der Vergrößerungsfaktor $C = 1 : 2 \cos \alpha$ ein runder Wert — 20, 50, 100, ... — ist. Hat man etwa ein Instrument zum Abstecken von 45° -Winkeln, so ergibt sich für ABC ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck, und die gesuchte Entfernung wird $x = b \cdot \sqrt{2}$. Kann man aber $\alpha = 60^\circ$ machen, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck und es ist unmittelbar $x = b$. Ist die unmittelbare Messung einer Strecke AE (Abb. 164) nur bis zu einem Punkte E' möglich und steht zur Bestimmung der Reststrecke $E'E = x$ außer einem Längenmeßwerkzeug nur ein Prisma, Winkelspiegel oder eine Kreuz-



ein unzugänglicher Endpunkt

Abb. 164.



zwei unzugängliche Endpunkte

Abb. 165.

Indirekte geometrische Entfernungsmessung unter Benützung von Instrumenten zum Abstecken rechter Winkel.

scheibe zum Abstecken rechter Winkel zur Verfügung, so kann man auf AE in E' eine Senkrechte $E'H$ und auf HE hierauf eine Senkrechte errichten,

¹⁾ Das älteste Prisma dieser Art ist vermutlich das unsymmetrische Prisma von *Bauernfeind*. Siehe auch die Beschreibung des militärischen Entfernungsmessers *Souchier* in *Z.V.W.* 1895, S. 177 ff.

welche auf AE den Punkt H' ausschneidet. Aus den direkt zu messenden Längen $H'E' = p$ und $E'H = h$ findet man dann leicht

$$x = \frac{h^2}{p} \dots \dots \dots (205)$$

Sind etwa die beiden Endpunkte P_1, P_2 einer gesuchten Entfernung x (Abb. 165) unzugänglich, so kann man in einem auf dem Felde abgesteckten Koordinatenkreuz mit Hilfe eines Instrumentes zum Abstecken rechter Winkel die Koordinatenfußpunkte bestimmen und aus den direkt zu messenden Koordinatenunterschieden $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$ die gesuchte Länge als den Ausdruck

$$x = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \dots \dots \dots (206)$$

berechnen.

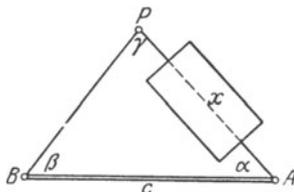
Alle diese Lösungen sind aber nur als ein grober Notbehelf zu betrachten.

b) Trigonometrischer Weg.

Genauere Ergebnisse liefert die indirekte trigonometrische Entfernungsbestimmung, welche mittels trigonometrischer Sätze von den gemessenen Stücken auf die gesuchte Länge führt.

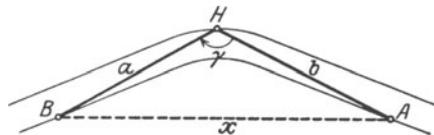
Die in Abb. 166 enthaltene Länge $AP = x$ kann nicht unmittelbar gemessen werden, weil ein von der Seite durchschnittenes Grundstück nicht betreten werden darf. Kann man etwa einen Hilfspunkt B so wählen, daß ein günstig geformtes Dreieck entsteht, in dem die Seite $AB = c$ und mindestens zwei Winkel — vielleicht β, γ — direkt gemessen werden können, so führt die Anwendung des Sinus-Satzes zum Ziel. Es ist nämlich

$$x = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \dots \dots \dots (207)$$



nach dem Sinussatz

Abb. 166.



nach dem Cosinussatz

Abb. 167.

Trigonometrische Entfernungsbestimmung aus Dreiecken.

Wenn irgend möglich, werden alle Dreieckswinkel gemessen, so daß nach Verteilung des Dreieckswiderspruchs ausgeglichene Winkel β, γ in die Rechnung eingehen.

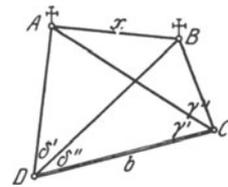
Ist eine unzugängliche Strecke $AB = x$ (Abb. 167) zu ermitteln und kann man den Hilfspunkt H nicht so wählen, daß ein günstiges Dreieck entsteht, etwa, weil man H auf einem nahe an x hinziehenden Weg, den man nicht verlassen darf, annehmen muß, so wird man die von H nach den Endpunkten von x führenden Seiten a, b , sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel γ messen; damit ergibt sich nach dem Cosinus-Satz

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} \dots \dots \dots (208)$$

Wenn eine gesuchte Entfernung x einschließlich ihrer beiden Endpunkte A, B (Abb. 168) unzugänglich bleibt, so wird man etwa

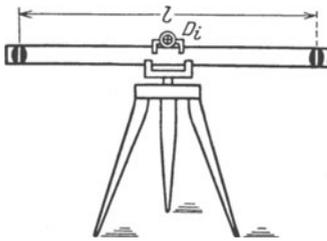
aus einer direkt gemessenen Grundlinie CD und den in ihren Endpunkten beobachteten Winkeln γ', γ'' und δ', δ'' zunächst mittels des \sin -Satzes die Seiten AC, AD, BC, BD berechnen, worauf sich x nach dem Cosinus-Satz einmal aus AC, BC, γ'' und zur Probe ein zweites Mal aus AD, BD, δ' ergibt.

Im unwegsamen Gelände kann auch die trigonometrische Entfernungsmessung mit horizontaler Distanzlatte angewendet werden. Eine solche z. B. von *Böhler* konstruierte Latte besitzt an den Enden zwei gut einstellbare Marken (Abb. 168a), deren Abstand l durch ein Normalmeter scharf bestimmt wird. Die Latte wird auf ein Stativ ungefähr in der Mitte der zu messenden Seite AB gebracht und mit Hilfe eines zur Latte senkrechten Diopters D_i so gestellt, daß sie mit A und B je ein gleichschenkeliges Dreieck bildet. Werden in A und B durch eine sehr scharfe Messung (Mikroskoptheodolit) die Winkel 2α und 2β be-



Beide Streckenendpunkte sind unzugänglich

Abb. 168. Trigonometrische Entfernungsbestimmung aus einem Viereck.



Distanzlatte von *Böhler*.

Abb. 168a.

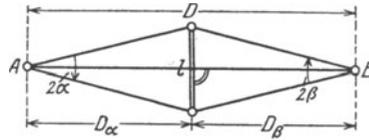


Abb. 168b.

Trigonometrische Entfernungsbestimmung mit horizontaler Distanzlatte.

stimmt, unter welchen von dort aus die Latte erscheint, so ergibt sich mit den Bezeichnungen der Abb. 168b die gesuchte Entfernung zu

$$D = D_\alpha + D_\beta = \frac{l}{2} (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta). \dots \dots \dots (208a)$$

c) Optische Entfernungsmessung.

Mit Hilfe der optischen Entfernungsmesser¹⁾ kann man Längen bestimmen, ohne sie begehen oder eine Hilfsstrecke messen zu müssen. Für die Ingenieurtechnik kommen nur die Distanzmesser mit Latte am Ende der gesuchten Entfernung in Frage.

¹⁾ Schon der Augsburger Mechaniker *G. F. Brander* beschreibt in „Polymetroskopium Dioptrikum“, Augsburg 1764, einen — allerdings noch unvollkommenen — von ihm verfertigten Distanzmesser, womit an einer Feinteilung auf Glas die einem Gegenstand von bekannter Höhe entsprechende Bildhöhe gemessen wird, welche selbst einen Schluß auf die gesuchte Gegenstandsweite gestattet. Im Deutschen Museum zu München sind derartige *Brandersche* Entfernungsmesser zu sehen. Schon viel früher (1674) hatte in Italien *Montanari* einen auf demselben Grundgedanken beruhenden Distanzmesser erfunden. Um die weitere Entwicklung des Instruments haben sich in England *J. Watt* (1771) und *Green* (1778) verdient gemacht. In Deutschland wurde der Fadendistanzmesser um 1810 durch *Reichenbach* eingeführt und wesentlich vervollkommenet. Weitere geschichtliche Mitteilungen siehe bei *Hammer*, Zur Geschichte der Distanzmessung, Z.V.W. 1891, S. 295—299 und Z.I.K. 1892, S. 155—161, ferner *M. Schmidt*, Mensula Praetoriana, Z.V.W. 1893, S. 257—283 und *Hammer* in Z.I.K. 1897, S. 278 ff.

Bei allen diesen wird die Entfernung als Bestandteil eines langen schmalen Dreiecks ermittelt, dessen bekannte Basis, der Lattenabschnitt, am Ende der gesuchten Strecke liegt. Bei den für geodätische Zwecke im allgemeinen viel zu ungenauen Entfernungsmessern ohne Latte ist die Basis des langen, schmalen Dreiecks mit dem Instrument verbunden, liegt also am Anfang der gesuchten Strecke.

Der *Reichenbachsche* Entfernungsmesser¹⁾ in seiner heute gebräuchlichen Form besteht im wesentlichen aus einem Meßfernrohr, in dessen Bildebene drei Horizontalfäden, ein Mittelfaden *m* (Abb. 169) und zwei dazu parallele, um *p* voneinander abstehende Seitenfäden *o*, *u* aufgespannt sind.

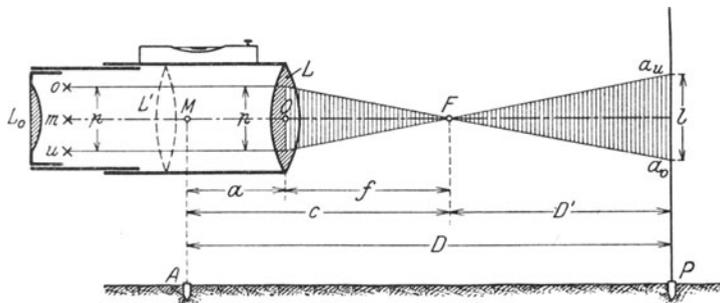


Abb. 169. Strahlengang im Reichenbachschen Entfernungsmesser.

Wesentliches Zubehör ist eine geteilte Latte, die sog. Distanzlatte. Zur Ermittlung der horizontalen Entfernung *D* zweier Punkte *A*, *P* wird das mit seinem Mittelpunkt *M* lotrecht über *A* aufgestellte und mittels einer Libelle oder dem Augenmaß nach horizontal gelegte Instrument auf die in *P* lotrecht stehende Distanzlatte *z* gerichtet, an welcher mittels der Fäden *o* und *u* die Ablesungen *a_o*, *a_u* erhalten werden, deren Differenz *a_u* — *a_o* einen Lattenabschnitt *l* ergibt. Diejenigen von den Enden des Lattenabschnittes ausgehenden und auf die Seitenfäden treffenden Strahlen, welche durch den vorderen Brennpunkt *F* des Objektivs (anallatischer Punkt) hindurch gehen, verlaufen innerhalb des Fernrohrs parallel zur optischen Achse des Objektivs. Also sind die beiden im Bild lotrecht schraffierten Flächen zwei ähnliche Dreiecke mit den Grundlinien *p*, *l* und den Höhen *f* (Objektivbrennweite) und *D'*, welches ein Teil der unbekanntenen Entfernung *D* ist. Mit Rücksicht auf die Proportion $l:p = D':f$ kann man aus der Abbildung leicht die Beziehung

$$D = a + f + D' = a + f + \frac{f}{p} \cdot l \dots \dots \dots (209)$$

ablesen, in welcher *a* den Abstand des Objektivs von der Instrumentenmitte bedeutet. Mit den als Additionskonstante und Multiplikationskonstante bezeichneten Abkürzungen

$$c = a + f, \quad C = \frac{f}{p} \dots \dots \dots (210)$$

lautet daher die Entfernungsgleichung

$$D = c + C \cdot l \dots \dots \dots (211)$$

Eine willkürliche Änderung der Multiplikationskonstanten, für welche ein runder Wert — meist 100 — angestrebt wird, ist hier nur in dem selten

¹⁾ Der *Reichenbachsche* Entfernungsmesser in seiner ältesten Form hatte zwei Okulareinsichten, eine für den oberen und eine für den unteren Faden.

zutreffenden Fall möglich, daß durch Schraubchen der Fadenabstand p etwas geändert werden kann.

Abb. 170 veranschaulicht den Verlauf der Brennpunktstrahlen in den mit einem *Huygens*-Okular ausgestatteten *Ertelschen* Distanzmesser. Hiernach ist $p' = \frac{f_1}{f_1 - y} p$, wenn y den Abstand der Fadenkreuzebene vom Kollektiv

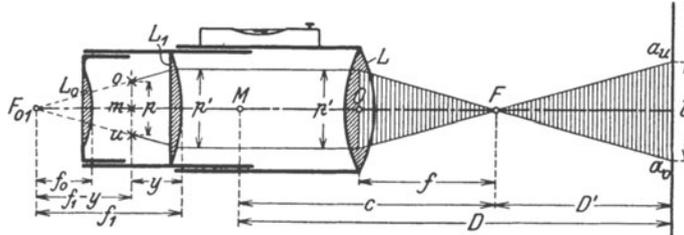


Abb. 170. Strahlengang im *Ertelschen* Distanzmesser.

bedeutet. Behält c seine frühere Bedeutung bei, so erhalten wir unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die schraffierten Dreiecke ähnlich sind, den Ausdruck

$$D = c + \frac{f}{p} \left(1 - \frac{y}{f_1}\right) l, \dots \dots \dots (212)$$

aus dem unter Verwendung der Abkürzung

$$C = \frac{f}{p} \left(1 - \frac{y}{f_1}\right) \dots \dots \dots (213)$$

für die Multiplikationskonstante die übliche Form der Entfernungsgleichung

$$D = c + C \cdot l \dots \dots \dots (214)$$

hervorgeht. Da hier nach (213) C auch von y abhängt, so kann die Multiplikationskonstante durch eine Längsverschiebung des Fadenkreuzes in der Okularröhre etwas geändert werden. Eine hernach etwa notwendige deutliche Sichtbarmachung des Fadenkreuzes ist dann durch eine entsprechende Verschiebung des Augenglases L_0 in der Okularröhre herbeizuführen.

Wird in einem *Reichenbachschen* Entfernungsmesser eine Linse L' (Abb. 169) so zwischen Objektiv L und Fadenkreuzebene eingeschaltet, daß der vordere Brennpunkt des Äquivalentsystems für L und L' , der anallatische Punkt, in die Instrumentenmitte M fällt, so werden die von hier aus gerechneten Entfernungen D zu den Lattenabschnitten l unmittelbar proportional. Für einen solchen *Porroschen* Distanzmesser lautet daher die Entfernungsgleichung

$$D = C \cdot l \dots \dots \dots (215)$$

Bei der auf empirischem Wege erfolgenden Bestimmung der Distanzmesserkonstanten wird zuerst die Additionskonstante c ermittelt, welche sich nach der ersten der Gleichungen (210) aus der unmittelbar am Instrument abzumessenden Entfernung a (Objektiv — Instrumentenmitte) und der Objektivbrennweite f zusammensetzt. Auch diese kann man leicht dem Instrument entnehmen. Sie ist nämlich, wenn das Fernrohr auf einen sehr weit entfernten Punkt eingestellt wird, genügend genau der Abstand des Fadenkreuzes vom Objektiv. Dies gilt aber nur, wenn zwischen diesen beiden Bestandteilen keine weitere Linse eingeschaltet ist. Beim *Ertelschen* Distanzmesser z. B. ist der genannte gemessene, Abstand noch um den Betrag $\frac{1}{2} f_0$

(= Fernrohrverkürzung beim *Huygens*-Okular) zu vergrößern, damit er die Länge f darstellt.

Nachdem c bekannt ist und, wenn möglich, die Multiplikationskonstante nahe an ihren Sollwert gebracht wurde, bezeichnet man zur Bestimmung der Multiplikationskonstanten C den lotrecht unter dem anallatischen Punkt F befindlichen Bodenpunkt und setzt von dort aus durch eine scharfe, unmittelbare Längenmessung in der Zielebene des Fernrohrs die horizontalen Entfernungen D' — etwa 30 m, 60 m, 90 m, 120 m, 150 m — ab, deren Endpunkte ebenfalls scharf bezeichnet werden. Hierauf werden am Instrument bei horizontalem Fernrohr jeweils die im Lattenbild erscheinenden Zufallsstellungen der beiden Entfernungsfäden abgelesen, deren Differenz den zugehörigen Lattenabschnitt l angibt. Zum Schutz gegen grobe Irrtümer und zur Erhöhung der Genauigkeit ermittelt man jeden dieser Lattenabschnitte als das Mittel aus einigen zu etwas verschiedenen Fernrohrstellungen gehörigen Einzelwerten. Nunmehr ergibt sich für jede der n Entfernungen D' nach (209) und (210) ein Wert

$$\frac{1}{C} = \frac{l}{D'} \dots \dots \dots (216)$$

Für die allerdings nur sehr roh zutreffende Näherungsannahme, daß der mittlere Fehler m_l des Lattenabschnittes zur Entfernung D' direkt proportional sei, nämlich $m_l = k \cdot D'$, wird k der gleiche mittlere Fehler aller $\frac{1}{C}$ sein, so daß das einfache arithmetische Mittel

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{n} \left[\frac{l}{D'} \right] \dots \dots \dots (217)$$

den wahrscheinlichsten Wert der Multiplikationskonstanten darstellt. Ist $m_{\frac{1}{C}}$ der aus der Fehlerberechnung folgende mittlere Fehler von $\frac{1}{C}$, so wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$m_C = C^2 \cdot m_{\frac{1}{C}} \dots \dots \dots (218)$$

der mittlere Fehler in C .

Da die getroffene Voraussetzung, m_l sei zu D' proportional, nur roh zutrifft, so kann man sich auch mit der Näherungsformel

$$C = \frac{1}{n} \left[\frac{D'}{l} \right] \dots \dots \dots (218a)$$

begnügen.

Die scharf ermittelte, im allgemeinen geringe Abweichung der Multiplikationskonstanten von ihrem runden Sollwert kann man entweder durch eine leichte Kopfrechnung oder mittels eines einfachen Diagramms berücksichtigen.

Um einen Einblick in die Genauigkeit der Fadendistanzmessung zu gewinnen, leiten wir aus (214) das Differential der Entfernung, d. h. den Entfernungsfehler

$$dD = dc + l \cdot dC + C \cdot dl \dots \dots \dots (219)$$

ab. Sind m_l , m_C und m_c die den dl , dC und dc entsprechenden mittlen Unsicherheiten, so wird der mittlere Entfernungsfehler

$$m_D = \pm \sqrt{m_c^2 + l^2 \cdot m_C^2 + C^2 m_l^2} \dots \dots \dots (220)$$

Der Einfluß des Fehlers dc der Additionskonstanten, welcher leicht unter 1 cm gehalten werden kann, darf als belanglos gelten. Verlangt

man, daß durch dC die Entfernungen bis zu 150 m um nicht mehr als etwa 5 cm gefälscht werden, so darf dC den Betrag 0,033... nicht überschreiten. Über die genügende Erfüllung dieser Bedingung gibt der nach (218) gewonnene mittlere Fehler m_C des auf zwei Stellen nach dem Komma zu berechnenden C Aufschluß. Die Multiplikationskonstante ist hauptsächlich infolge wechselnder Luftfeuchtigkeit¹⁾ sowie unvermeidlicher Erschütterungen des Instrumentes und einer etwaigen geringen Veränderung der Objektivbrennweite mit der Temperatur kleinen Änderungen unterworfen. Man muß sie daher, um ein unzulässiges Anwachsen von dC zu verhindern, von Zeit zu Zeit neu bestimmen.

Den schlimmsten Einfluß übt der mit dem Faktor C multiplizierte Fehler dl im Lattenabschnitt aus, als dessen Hauptursachen zu nennen sind: a) die unregelmäßigen Fehler der Lattenteilung und eine fehlerhafte Länge des Lattenmeters, b) die eigentlichen Ablesefehler an der Latte, c) die ungleiche Strahlenbrechung der oberen und unteren Ziellinie, d) die etwaige Änderung der Stellung des Oberfadens bis zur Vollendung der Ablesung am Unterfaden, e) die schiefe Stellung der Latte.

Eine Berücksichtigung der im allgemeinen sehr geringfügigen Lattenteilungsfehler kann bei der Fadendistanzmessung wohl unterbleiben und eine etwaige größere Änderung des Lattenmeters²⁾ läßt sich mit Hilfe eines von Zeit zu Zeit auf die Teilung zu legenden Normalmeters genügend scharf verfolgen und, wenn nötig, berücksichtigen³⁾. Während der Einfluß der unregelmäßigen Lattenteilungsfehler auf l von der Entfernung unabhängig ist und wechselndes Vorzeichen besitzt, ist derjenige eines fehlerhaften Lattenmeters zur Entfernung direkt proportional. Die entsprechenden mittleren Fehlerbeträge im Lattenabschnitt sind $m_i\sqrt{2}$ und $l \cdot m_m$, wenn m_i den mittleren Teilungsfehler und m_m den mittleren Fehler im Lattenmeter bedeutet.

Der bei der Schätzung der Fadenstellung im Teilfelde t entstandene Ablesefehler hängt vom Zustand der Luft, der Beschaffenheit des Teilungsbildes und unter sonst gleichen Umständen auch von der Feldstelle ab, an welcher geschätzt wird. Am sichersten ist die Ablesung in der Feldmitte und an den Feldenden, während sie an den Stellen 0,25 und 0,75 am unzuverlässigsten wird. Der Ablesefehler enthält auch einen regelmäßigen Anteil, der symmetrisch zur Feldmitte so verläuft, daß der kleinere Feldteil in der Regel zu klein geschätzt wird⁴⁾. Im übrigen hängt der mittlere Ablesefehler (Gesamtschätzungsfehler) m_a , abgesehen von äußeren Umständen sowie der Geschicklichkeit und Sinnesschärfe des Beobachters haupt-

¹⁾ Nach einer neueren Untersuchung von *Samel* (Der Einfluß der Luftfeuchtigkeit auf die Multiplikationskonstante des *Reichenbachs*chen Entfernungsmessers, Z.V.W. 1913 S. 353—359) soll die durch die Luftfeuchtigkeit bedingte Spannungsänderung der Fäden eines *Reichenbachs*chen Entfernungsmessers auf die Größe der Multiplikationskonstanten praktisch ohne Einfluß bleiben.

²⁾ Das Lattenmeter ist der durchschnittliche wirkliche Abstand derjenigen Teilstriche, die 1 m voneinander abstehen sollen.

³⁾ Die eingehendere Lattenuntersuchung soll erst beim geometrischen Nivellement, für welches sie eine größere Bedeutung besitzt, besprochen werden.

⁴⁾ Eine zusammenfassende Darstellung dieser Fragen auf Grund der Arbeiten von *Stampfer*, *Vogler*, *Wagner*, *Reinhertz*, *Kummer* und einiger eigener Untersuchungen enthält die Abhandlung von *C. Müller*: Einiges über Beobachtungsfehler beim Abschätzen an Teilungen geodätischer Instrumente, Fortschritte der Psychologie und ihrer Anwendungen, IV. Bd. (1916), 1. Heft, S. 1—33.

Ein anschauliches Bild über den Verlauf des mittleren zufälligen, regelmäßigen und Gesamtschätzungsfehlers in einem 1 cm-Feld geben die in Abb. 170 a, S. 118, enthaltenen Kurven K_z , K_r und K_g . Sie sind einer Abhandlung von *Kummer*, Genauigkeit der Abschätzung mittelst Nivellierfernrohrs, Z.V.W. 1897, S. 225—245 u. 257—275 entnommen, entsprechen Entfernungen von etwa 30—60 m und einer $43\frac{1}{3}$ fachen Vergrößerung eines *Meißners*chen Instrumentes.

sächlich von der Größe t des Teilfeldes, der Zielweite D und der Fernrohrvergrößerung v ab. Neuerdings haben *Eggert*¹⁾ und *Hohenner*²⁾ für den mittleren Ablesefehler die Ausdrücke

$$m_{a(mm)} = 0,0292 t_{(mm)} + 0,13 \frac{D^{(m)}}{v}, \text{ (Eggert) } \dots \dots (221)$$

$$m_{a(mm)} = 0,2 + 0,019 \frac{D^{(m)}}{v} \cdot t_{(mm)} \text{ (Hohenner) } \dots (222)$$

aus einer graphischen Ausgleichung älteren Materials und (*Hohenner*) unter Hinzunahme eigener Beobachtungen gefunden. Hiernach findet ein einigermaßen gleichmäßiges Fortschreiten des mittleren Ablesefehlers mit der Entfernung nur bei größeren Zielweiten statt, für welche allerdings die Fehlerfrage von ganz besonderer Wichtigkeit ist. Der Einfluß des mittleren Ablesefehlers auf den Lattenabschnitt ist $m_a \sqrt{2}$.

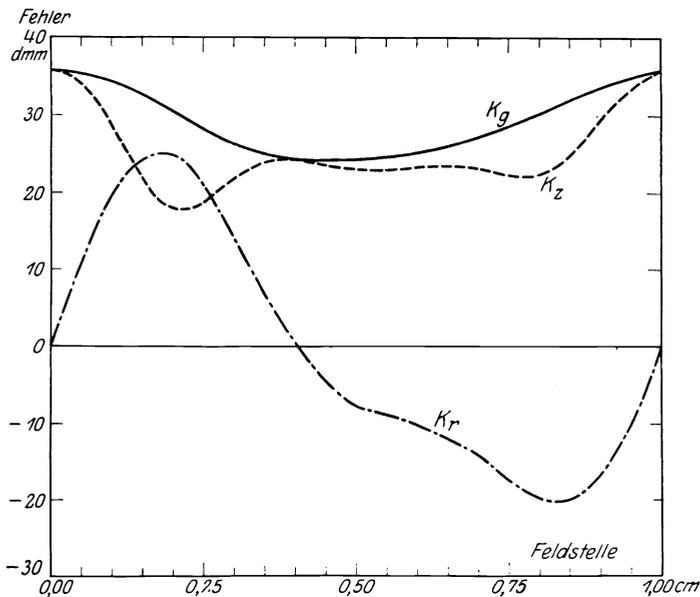


Abb. 170a. Verlauf der Schätzungsfehler in einem 1 cm-Feld.

Eine ungleiche Refraktion³⁾ ist besonders dann zu fürchten, wenn die untere Ziellinie nahe am Boden hinstreicht. Der hieraus entspringende Fehler ist rechnerisch kaum zu fassen, wächst jedoch in der Hauptsache mit dem Quadrat der Zielweite⁴⁾. Sein mittlerer Einfluß ist daher ein Ausdruck von der Form $m_{jr} = \delta \cdot D^2$. Er fällt weg, wenn der Lattenabschnitt nicht an einer lotrechten, sondern an einer wagrechten Latte ermittelt wird.

¹⁾ *Eggert*, Die Zielweite beim Nivellieren, Z.V.W. 1914, S. 249—252.

²⁾ *Hohenner*, Über das Zielen mit dem Zielfernrohre und das Abschätzen der Lage des Zielfadens auf Teilungen, Z.V.W. 1915, S. 357—376.

³⁾ Diesbezügliche Untersuchungen hat *Eggert* in dem Aufsätze „Einfluß der Refraktion auf die Fadendistanzmessung“ Z.V.W. 1911 S. 493—498 durchgeführt und unter anderem gefunden, daß die bei seinen Beobachtungen aus dem unteren Lattenabschnitt berechnete Entfernung (ungefähr 133 m) sich um rund 0,75% kleiner ergab als die gleiche aus dem oberen Abschnitt berechnete Entfernung.

⁴⁾ Näheres hierüber siehe bei der trigonometrischen Höhenmessung.

Eine Stellungsänderung des Oberfadens während der Dauer der Ablesung wird in der Hauptsache von einer geringen Neigungsänderung des Fernrohrs herrühren und daher zur Entfernung, annähernd wohl auch zur Beobachtungsdauer proportional sein. Es ist ein wesentlicher Vorteil der Okularfadendistanzmesser, daß der erwähnte Fehler, sobald er merklich wird, durch einen nochmaligen Blick auf den Oberfaden aufgedeckt werden kann. Dieser Fehler hat die Form $m_0 = D \cdot \kappa$.

Bei einer zur mittleren Fernrohrziellinie schiefen Stellung der Latte um den Betrag m_a' wird zwischen den beiden Entfernungsfäden statt l der zu große Wert $l : \cos m_a'$ erscheinen; alle damit berechneten Entfernungen wären mit $\cos m_a'$ zu multiplizieren und bedürfen zu ihrer Richtigstellung einer Verkleinerung um $m' = \frac{1}{2} D \left(\frac{m_a'}{\rho} \right)^2$. Der betrachtete Fehlereinfluß m' ist also durchaus einseitig und zur Entfernung direkt proportional. Dient zur Lotrechtstellung der Latte eine Dosenlibelle, so wird m_a' selbst unter ungünstigen Verhältnissen den Betrag von 30' kaum erreichen¹⁾. Dieser Grenze würde aber selbst bei $D = 200$ m erst ein 8 mm noch nicht erreichender Fehler entsprechen, der jederzeit vernachlässigt werden kann. Die Lotrechtstellung der Latte nach dem Augenmaß allerdings kann bei ungünstigen äußeren Verhältnissen Fehler bis zu rund $2\frac{1}{2}^\circ$ enthalten, wodurch schon in eine 100 m-Strecke ein Fehler von rund 10 cm hineingetragen wird.

Auch durch das Seitwärtshängen der Latte um m_a'' wird ein Entfernungsfehler m'' verursacht, dessen Ausdruck dem eben besprochenen vollkommen entspricht.

Mit diesen Einzelfehlern ergibt sich das mittlere Fehlerquadrat des Lattenabschnitts

$$m_l^2 = 2 m_t^2 + l^2 \cdot m_m^2 + 2 m_a^2 + \delta^2 \cdot D^4 + \kappa^2 \cdot D^2 + \frac{D^2}{4 \rho^4} (m_a'^4 + m_a''^4) \quad (223)$$

bzw.

$$m_l^2 = 2 m_a^2 + \delta^2 \cdot D^4, \dots \dots \dots (224)$$

wenn etwa die bei einer einigermaßen sorgfältigen Beobachtung bedeutungslos werdenden Fehleranteile von vornherein unterdrückt werden.

Für eine gegebene Vergrößerung v und eine bestimmte Teilungseinheit t erhält man sowohl aus (221) wie auch aus (222) für das Quadrat des mittleren Ablesefehlers einen Ausdruck von der Form

$$m_a^2 = C_0 + C_1 D + C_2 D^2, \dots \dots \dots (225)$$

so daß nach (223), da l zu D genügend genau direkt proportional ist,

$$m_l^2 = 2 (C_0 + C_1 D + C_2 D^2) + \delta^2 \cdot D^4 \dots \dots \dots (226)$$

wird. Mit diesem Ausdruck erhält man aus (220) schließlich den mittleren Entfernungsfehler in der Form

$$m_D = \pm \sqrt{k_0 + k_1 D + k_2 D^2 + \delta^2 \cdot D^4} \dots \dots \dots (227)$$

Hierin ist

$$k_0 = m_c^2 + 2 C_0 + 2 m_t^2, \dots \dots \dots (228)$$

$$k_1 = 2 C_1, \dots \dots \dots (229)$$

$$k_2 = \left(\frac{m_m}{C} \right)^2 + 2 C_2 + \kappa^2 + \frac{1}{4 \rho^4} (m_a'^4 + m_a''^4), \dots (230)$$

während

$$\delta = \Delta k : 2 r \dots \dots \dots (231)$$

¹⁾ Siehe Tabelle 8, Seite 67.

das Verhältnis der mittleren gegenseitigen Abweichung der den beiden Sichten eigenen Refraktionskoeffizienten k_1 und k_2 zum Erddurchmesser $2r$ bedeutet.

Infolge der zusammengesetzten Natur dieser Koeffizienten ist es schwierig, dafür bestimmte, einigermaßen zuverlässige Zahlenwerte anzugeben. Hält man jedoch alles zusammen, so steht zu erwarten, daß bei kurzen Entfernungen in m_D der konstante Fehleranteil überwiegt, daß jedoch m_D bei mittleren Entfernungen zu D und bei großen Entfernungen zu D^2 näherungsweise proportional ist.

Die praktische Erfahrung zeigt, daß der mittlere Fehler einer mit dem Fadendistanzmesser bestimmten Entfernung $D = 100$ m bei Verwendung eines guten Instrumentes etwa ± 5 cm beträgt¹⁾.

¹⁾ Weiteres über Entfernungsmesser mit Latte siehe bei der tachymetrischen Geländeaufnahme.

III. Aufnahmearbeiten.

21. Allgemeines über die Horizontalaufnahme. Ebene Koordinaten.

Durch eine Horizontalaufnahme werden die für den Aufnahmезweck wichtigen Gebilde im Grundriß festgelegt, während auf eine Darstellung der Höhenverhältnisse verzichtet wird. Dem Rahmen dieses Buches entsprechend soll es sich dabei nur um die Aufnahme von Gebieten solcher Größe handeln, für welche die Ebene noch als Projektionsfläche verwendet werden darf, ohne daß die relativen Längenverzerrungen 1:50 000 überschreiten. Diese Bedingung ist, wie in der höheren Geodäsie gezeigt wird, immer erfüllt, wenn die äußersten Punkte der Aufnahmefläche von einem geeignet gewählten Mittelpunkt nicht mehr als 40 km abstehen. Reine Horizontalaufnahmen sind in erster Linie für die Sicherung des Grundeigentums, in vieler Hinsicht aber auch für ingenieurtechnische Zwecke von Bedeutung. Eine solche Horizontalaufnahme kann durchgeführt werden 1. mittels rechtwinkliger Naturmaßkoordinaten auf trigonometrischer Grundlage, 2. nach der Methode der Polarkoordinaten mit Hilfe des entfernungsmessenden Theodolits, 3. nach der gleichen Methode, jedoch unter Verwendung der Bussole, 4. mit dem Meßtisch.

Den grundlegenden Rahmen aller größeren Aufnahmen bildet ein das Gebiet überspannendes Netz von Dreiecken, das Dreiecksnetz 1. Ordnung, in welches je nach Bedarf noch Netze 2., 3. und etwa noch 4. Ordnung mit stets abnehmender Punktentfernung eingeschaltet werden. Bei großen Gebieten, welche der vorher angegebenen Grenze sich nähern, kann die Seitenlänge im Netz 1. Ordnung an 40 km heranreichen, während sie in den nachgeordneten Netzen etwa 15 bzw. 5 und 1 km beträgt. Diese Angaben, von denen die Wirklichkeit manchmal beträchtlich abweicht, sollen nur ein ungefähres Bild geben.

Um die Lage der Dreieckspunkte und anderer wichtiger Punkte in einer übersichtlichen und äußerlich voneinander unabhängigen Form anzugeben, benützt man durchwegs rechtwinklige Koordinaten, während Polarkoordinaten bei manchen Verfahren der Einzelaufnahme verwendet werden. Dabei handelt es sich bei der getroffenen Einschränkung in jedem Falle nur um ebene Koordinaten.

Die häufigste Verwendung findet das rechtwinklige allgemeine Koordinatensystem (Abb. 171), dessen positive X -Achse nach einer Drehung um 90° im Urzeigersinne in die positive Y -Achse fällt. Wenn nicht besondere Gründe dagegen sprechen, wird das Koordinatensystem auf der Erdoberfläche so orientiert, dass die positive X -Achse in die Nordrichtung des Ursprungsmeridians fällt. In Baden, dessen Koordinatenursprung ganz

im Norden des Landes (Mannheim) liegt, wurde, um für die große Mehrzahl aller Punkte positive Koordinatenvorzeichen zu erzielen, die positive X-Achse nach Süden, die positive Y-Achse nach Westen gerichtet. Ein Punkt P_1 ist in einem solchen System durch seine rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 bestimmt, wo die Ordinate y_1 den senkrechten Abstand des Punktes von der Abszissenachse, die Abszisse x_1 aber das vom Ursprung U des Systems bis zum Ordinatenfußpunkt Q_1 reichende Stück der Abszissenachse bedeutet.

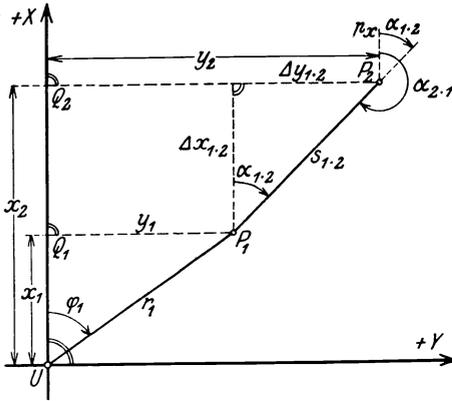


Abb. 171. Beziehungen im ebenen allgemeinen Koordinatensystem.

Die von P_1 nach P_2 führende Strecke $s_{1,2}$ schließt mit der durch P_1 gehenden Parallelen $\Delta x_{1,2}$ zur X-Achse den rechtssinnig¹⁾ gezählten Richtungswinkel $\alpha_{1,2} = (P_1 P_2)$ ein²⁾. Unter dem Gegenrichtungswinkel zu $(P_1 P_2)$ versteht man den

Richtungswinkel $\alpha_{2,1} = (P_2 P_1)$ der Seite $P_2 P_1$. Richtungswinkel und Gegenrichtungswinkel unterscheiden sich, wie ein Blick auf die Abbildung zeigt, um 180° , also ist stets

$$(P_k P_i) = (P_i P_k) + 180^\circ \dots \dots \dots (232)$$

Aus den Koordinaten des Anfangspunktes der Strecke und ihrem Richtungswinkel lassen sich die rechtwinkligen Koordinaten des Streckenendpunktes mittels der Formeln

$$x_2 = x_1 + \Delta x_{1,2} = x_1 + s_{1,2} \cos \alpha_{1,2}, \dots \dots \dots (233)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_{1,2} = y_1 + s_{1,2} \sin \alpha_{1,2} \dots \dots \dots (234)$$

berechnen. Eine gute Probe für die Richtigkeit der berechneten Koordinatenunterschiede liefern die leicht abzuleitenden Kontrollgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{s}{2} \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha) + \frac{s}{2} \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha), \\ \Delta y &= \frac{s}{2} \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha) - \frac{s}{2} \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha), \end{aligned} \right\} \dots \dots (234a)$$

deren Berechnung durch besondere Tafeln³⁾ erleichtert wird.

Bei bekannter Lage der Streckenendpunkte findet man Richtung und Länge der Strecke aus den Beziehungen:

¹⁾ Die in der Geodäsie und Astronomie allgemein übliche Zählung der Winkel im Uhrzeigersinn und die hieraus folgende rechtssinnige Bezifferung der in diesen Wissenschaften gebrauchten Kreisteilungen hat seinen triftigen Grund in dem Umstande, daß auf der nördlichen Erdhalbkugel, in welcher die Heimat der messenden Astronomie liegt, die Azimute der Sonne mit der Zeit im Uhrzeigersinne zunehmen.

²⁾ In der preußischen Katastermessung werden die Richtungswinkel als Neigungen bezeichnet. Im bayerischen Koordinatensystem, dessen positive X- bzw. Y-Achse nach Norden bzw. Westen gerichtet sind, erfolgt die Richtungsangabe mittels der von West über Nord, also im Uhrzeigersinn positiv gezählten Direktionswinkel. Der Direktionswinkel einer bestimmten Richtung ist daher um 90° größer wie ihr Richtungswinkel.

³⁾ Für kurze Entfernungen dient *Seiffert O.*, Vierstellige polygonometrische Tafeln zur Berechnung und Sicherung der Koordinatenunterschiede mit der Rechenmaschine. Braunschweig 1907.

$$\operatorname{tg} \alpha_{1 \cdot 2} = \frac{\Delta y_{1 \cdot 2}}{\Delta x_{1 \cdot 2}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \dots \dots \dots (235)$$

$$s_{1 \cdot 2} = \frac{\Delta x_{1 \cdot 2}}{\cos \alpha_{1 \cdot 2}} = \frac{\Delta y_{1 \cdot 2}}{\sin \alpha_{1 \cdot 2}} \dots \dots \dots (236)$$

Zur Probe kann man auch noch den um 45° vergrößerten Richtungswinkel aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y} = \frac{(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)}{\Delta x - \Delta y} \dots \dots (236 a)$$

ableiten.

Tabelle 12.

Quadrant	$\Delta x_{1 \cdot 2}$	$\Delta y_{1 \cdot 2}$
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Der Quadrant des Richtungswinkels ist durch das Vorzeichen der Koordinatenunterschiede (Tab. 12) eindeutig bestimmt. Bei annähernd gleicher Größe der Koordinatenunterschiede sind die beiden in (236) stehenden Ausdrücke für $s_{1 \cdot 2}$ als gleichwertig zu betrachten; sonst ist wegen des geringeren Einflusses der Abrundungsfehler der mit dem größeren Koordinatenunterschied — allgemein mit dem größeren Zähler (und Nenner) — berechnete Wert vorzuziehen. Die Streckenermittlung nach der Formel

$$s_{1 \cdot 2} = \sqrt{\Delta x_{1 \cdot 2}^2 + \Delta y_{1 \cdot 2}^2} \dots \dots \dots (237)$$

ist nur dann zweckmäßig, wenn man den Richtungswinkel der Strecke nicht braucht und diese so kurz ist — etwa nicht über 100 m —, daß für die Berechnung die gewöhnlichen, in vielen Logarithmentafeln enthaltenen Quadrat- tafeln ausreichen.

22. Trigonometrische Punktbestimmung.

Die trigonometrische Punktbestimmung erfolgt ausschließlich durch Winkelmessungen bzw. Richtungsmessungen mit dem Theodolit, und da es sich hierbei um die Messung von Dreieckswinkeln handelt, so spricht man von einer Triangulierung (mit dem Theodolit). Bei einer trigonometrischen Punktbestimmung treten folgende Arbeiten auf: 1. die Auswahl und Versicherung der Dreieckspunkte, 2. der Bau von Beobachtungspfeilern und die Signalisierung der Dreieckspunkte, 3. die Ausführung der Beobachtungen, 4. die Zentrierung der Beobachtungen, 5. die Ausgleichung der Beobachtungen, 6. die Durchführung der Koordinatenberechnung. Die beiden zuletzt genannten Arbeiten sind ziemlich verschiedenartig, je nachdem es sich um eine Netzeinschaltung oder um eine einfache Punkteinschaltung handelt.

a) Auswahl und Versicherung der Dreieckspunkte.

Die Auswahl der Dreieckspunkte, welche entweder Bodenpunkte oder Luftsignale (Türme, Blitzableiter, Windmühlen) sind, erfolgt, nachdem die gegenseitige Sichtbarkeit der Punkte durch örtliche Erkundungen fest-

gestellt worden ist, so, daß die Dreiecke zwecks Erzielung eines stabilen Netzes möglichst gleichseitig werden und ihre Eckpunkte für nachfolgende Punktbestimmungen günstig liegen. Auch die Frage der voraussichtlichen

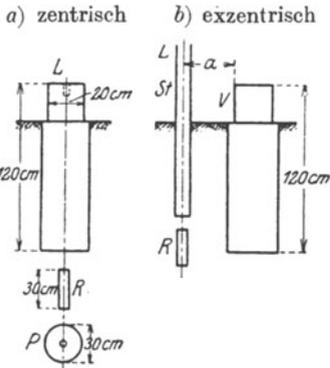


Abb. 172. Oberirdische und unterirdische Versicherung von Dreieckspunkten.

besseren Punkterhaltung kann bei dieser Auswahl mitsprechen. Schon vor Beginn der Winkelmessung werden die endgültig ausgewählten Dreieckspunkte dauerhaft versichert. Die oberirdische Punktbezeichnung erfolgt nach Andeutung der Abbildungen 172a und 172b entweder zentrisch oder exzentrisch durch aufrechte widerstandsfähige Steine, deren mittlere Ausmaße die Abbildung zeigt. Außerdem ist aber jeder Dreieckspunkt auch unterirdisch durch eine lotrechte Röhre R oder eine Platte P versichert, deren Achse bzw. Mittelpunkt bei der zentrischen Versicherung auf dem Lot L durch den Dreieckspunkt oberirdisch bezeichnenden, meist vertieften Mittelpunkt der Steinfläche liegt. Der Querschnitt eines solchen zentrischen Versicherungssteines ist quadratisch. Bei der exzentrischen Punktversicherung ist eine meist einer bestimmten Himmelsrichtung zugekehrte Breitseite des Steins etwa durch ein eingehauenes Dreieck als die Vorderseite V gekennzeichnet, von deren Mitte der unterirdisch versicherte Dreieckspunkt um einen durchwegs gleichen Betrag a absteht. Die exzentrische Punktversicherung bietet im Gegensatz zur zentrischen den Vorteil, daß sie ohne Wegnahme des Dreieckssteines eine zentrische Signalisierung des Dreieckspunktes etwa durch eine lotrechte Stange St ermöglicht. Zur Ergänzung der Punktversicherung werden die Dreieckspunkte auch noch auf scharf bezeichnete Punkte der näheren Umgebung eingemessen. Dies ist auch bei Luftsignalen angebracht, um ihre etwaige, im Laufe der Zeit erfolgte Lageänderung feststellen und berücksichtigen zu können.

b) Einrichtungen für die Instrumentenaufstellung. Signalisierung der Dreieckspunkte.

Zur Instrumentenaufstellung über Bodenpunkten in nachgeordneten Netzen genügt das Stativ, während im Hauptnetz besondere Beobachtungspfeiler errichtet werden. Als solche kommen in Betracht Backsteinpfeiler (Abb. 172a) oder Betonpfeiler in leicht zugänglichen Bodenpunkten und Pfeiler aus Bruchsteinen oder auch massive Pfeiler aus Felsblöcken im Gebirge. Auch kräftige, gut ausgetrocknete Holzsäulen kommen zur Verwendung. In vielen Fällen wird es, um die Sichten frei zu erhalten, notwendig, das Instrument über den Boden zu heben. In einfacheren Fällen genügt hierfür eine längere, vom Standboden des Beobachters vollkommen isolierte Holzsäule, auf deren oberem Ende das Instrument aufgestellt wird. In schwierigen Fällen ist der Bau von eigenen Beobachtungspyramiden nicht zu umgehen. Ein solches Bauwerk besteht aus zwei vollständig voneinander getrennten Teilen, dem stabileren Pfeilergerüst für das Instrument und dem leichteren Beobachtungsgestell, auf dem sich der Beobachter bewegt. Auch Kirchtürme mit

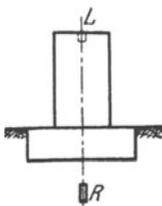


Abb. 172a.
Beobachtungspfeiler
in einem Boden-
punkt.

festem Mauerwerk sind wegen der größeren Fernsicht gesuchte Beobachtungsstände. Da in der Turmmitte selten eine gute Aufstellung zu ermöglichen ist, so führt man hier die Beobachtungen meist exzentrisch auf Pfeilern aus, welche etwa in den Schallöffnungen oder am oberen Ende des Turmmauerwerks auf diesem errichtet werden.

Natürliche Luftsignale sind auf kürzere und mittlere Entfernungen ohne künstliche Nachhilfe sichtbar und zur Signalisierung von Bodenpunkten genügen bei kurzen Sichten häufig gut verstreute, lotrechte, 3—5 m lange Signalstangen mit Fähnchen oder genügend große Zieltafeln, die an Stangen lotrecht über dem Dreieckspunkt befestigt sind (Abb. 123, 124). Auf etwas größere Entfernungen hin finden auch niedrige Pyramiden von einigen Metern Höhe Verwendung, deren oberes Ende eine Lattenverschalung trägt. Auf sehr große Entfernungen hin, wie sie im Hauptnetz auftreten, erfolgt die deutliche Sichtbarmachung sowohl der Luftsignale als auch der Bodenpunkte mit Hilfe von Heliotropen, wenn bei Tage, und durch Lampensignale, wenn bei Nacht beobachtet wird¹⁾.

Eine bei Triangulierungen oft wiederkehrende Arbeit ist das Abloten eines Punktes. Soll z. B. eine Kirchturmspitze in die Turmstube abgelotet werden, so kann dies, da meist Böden und Hölzer hinderlich im Wege stehen, selten mit der wünschenswerten Zuverlässigkeit unmittelbar mit Hilfe eines Schnurlotes erfolgen, so daß man lieber eine optische Ablotung vornimmt. Dazu wird etwa ein Theodolit in mindestens zwei Punkten, von denen aus die Sicht nach der Turmspitze und in die Turmstube frei ist, mit lotrechter Alhidadenachse aufgestellt und auf dem Boden der Turmstube je die Richtung derjenigen Zielebene (Lotebene) bezeichnet, welche die Turmspitze enthält. Der Schnittpunkt dieser beiden geometrischen Örter ist die gesuchte Projektion der Turmspitze. Um den Einfluß des Zielachsen- und des Kippachsenfehlers zu tilgen, wird der Vorgang mit durchgeschlagenem Fernrohr wiederholt und hierauf gemittelt.

c) Beobachtungsverfahren.

Bei der Triangulierung verwendet man heutzutage hauptsächlich die Winkelmessung im engeren Sinne (reine Winkelmessung) und das durch *Bessel* eingeführte Verfahren der Richtungsbeobachtungen; die Repeitionswinkelmessung bildet eine Ausnahme.

Im Netz 1. Ordnung überwiegt die reine Winkelmessung, bei welcher jeweils nur zwei Ziele in einen nach dem Verfahren der Tilgungsmessung zu beobachtenden Satz zusammengefaßt werden. Vielfach mißt man in einem System von s Strahlen, (Abb. 173) das in sich durch $s-1$ Winkel bestimmt ist, die Zwischenwinkel (ik) aller unmittelbar aufeinander folgenden Strahlen. Die Ausgleichung dieser Winkel, welche den Horizont ausfüllen müssen, besteht in einer im allgemeinen gleichmäßigen Verteilung des auftretenden Widerspruchs auf die einzelnen Winkel. Es ist also,

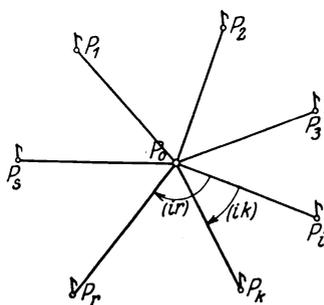


Abb. 173. Bestimmung eines Strahlensystems durch Winkelmessungen.

¹⁾ An dieser Stelle auf weitere Einzelheiten — besonders der künstlichen Signalisierung — einzugehen, ist mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum nicht möglich; hierüber siehe etwa *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, III. Band, 6. A., Stuttgart 1916, S. 32 ff.

wenn (ik) den beobachteten, $[ik]$ den wahrscheinlichsten Wert eines solchen Zwischenwinkels bedeutet, der sog. Horizontwiderspruch

$$w = 360^{\circ} - \sum_{i=1}^s (ik), \dots \dots \dots (238)$$

während die wahrscheinlichsten Werte $[ik]$, deren Summe den Festwert 360° ergeben muß, mittels (78) als die Ausdrücke

$$[ik] = (ik) + \frac{w}{s} \dots \dots \dots (239)$$

gefunden werden, wenn alle Beobachtungen gleiche Genauigkeit besitzen.

Sind die einzelnen (ik) Mittel aus je n Sätzen, so besitzen sie gleiche Gewichte $p = n$. Damit ergibt sich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit (einmal gemessene Winkel) nach (79) zu

$$m_0 = \pm w \sqrt{\frac{n}{s}} \dots \dots \dots (240)$$

während nach (80) der mittlere Fehler jedes ausgeglichenen Zwischenwinkels

$$\mu = \pm \frac{w}{s} \sqrt{s-1} \dots \dots \dots (241)$$

ist. Dieses μ besitzt aber, da es sich nur auf ein einziges w stützt, keine große Zuverlässigkeit, und es ist daher zweckmäßiger, etwa den Durchschnitt der nach (46) und (53) für die Satzmittel gefundenen, nur wenig verschiedenen mittleren Fehler als die mittlere Unsicherheit eines auf der Station ausgeglichenen Winkels zu betrachten.

Vorteilhafter, wenn auch zeitraubender, ist die schon *Gauß* bekannte, von *Schreiber* in die Praxis eingeführte Winkelmessung in allen Kombinationen, bei welcher alle einander nicht auf 360° ergänzenden Winkel (ir) des Strahlensystems beobachtet werden. Da jeder der s Strahlen mit jedem der $s-1$ übrigen je einen Winkel bildet, so ist die Zahl der bei diesem Verfahren zu messenden Winkel

$$z = \frac{1}{2} s (s-1) \dots \dots \dots (242)$$

Um aus den gleich genauen Beobachtungen (12) , (13) , ..., (ir) , ... die ausgeglichenen Winkel $[12]$, $[13]$, ..., $[ir]$, ... zu erhalten, bedenken wir, daß sich jeder Winkel einmal durch den für ihn unmittelbar beobachteten Wert und $(s-2)$ mal als Summe oder Differenz der Beobachtungen darstellen läßt. Die Werte der zweiten Darstellungsart besitzen nach dem mittleren Fehlergesetz das mittlere Fehlerquadrat $2m^2$, wenn zur unmittelbaren Winkelbeobachtung m^2 gehört, so daß die hierzu umgekehrt proportionalen Gewichte mit 1 und 2 angesetzt werden können. Hiernach ist der wahrscheinlichste, aus Winkelmessungen in allen Kombinationen hervorgehende Wert irgendeines Winkels das allgemeine arithmetische Mittel aus seiner direkten Beobachtung und den $s-2$ ihn zusammensetzenden Summen und Differenzen, wo diesen das Gewicht 1 und der unmittelbaren Beobachtung das Gewicht 2 zu geben ist. So ist z. B. in einem System von 6 Strahlen der wahrscheinlichste Wert des von den Strahlen P_0P_1 und P_0P_3 eingefassten Winkels

$$[13] = \frac{2(13) + (12) + (23) + (14) - (34) + (15) - (35) + (16) - (36)}{6} \dots (243)$$

Meist werden alle Winkel in mehreren, etwa in n Sätzen beobachtet. Dann ist, wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden muß,

$$m = \pm \sqrt{\frac{2n[vv]}{(s-1)(s-2)}} \dots \dots \dots (244)$$

der mittlere Fehler des in einem Satz beobachteten Winkels und

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{n \frac{s}{2}}} = \pm 2 \sqrt{\frac{[vv]}{s(s-1)(s-2)}} \dots \dots \dots (245)$$

derjenige eines beliebigen, nach (243) ausgeglichenen Winkels, während

$$p = n \cdot \frac{s}{2} \dots \dots \dots (246)$$

dessen Gewicht darstellt, wenn das zu m gehörige Gewicht des einmal beobachteten Winkels = 1 gesetzt wird. Bei sorgfältigen modernen Messungen erreicht μ nur Bruchteile einer Sekunde. Liegen n Sätze vor, so sind die in (243) stehenden Winkel nicht mehr die unmittelbaren Beobachtungen, sondern bereits die Satzmittel und die in den Ausdrücken für m und μ auftretenden scheinbaren Beobachtungsfehler v sind die Abweichungen der Satzmittel (ir) von den ausgeglichenen Werten $[ir]$.

Zur Winkelmessung im Hauptdreiecksnetz dienen besonders leistungsfähige Instrumente, welche in runden Zahlen einen Kreisdurchmesser von 30 cm, eine Brennweite von 45 cm, 6 cm Objektivöffnung, 40fache Vergrößerung und Libellen mit einem Teilwert von etwa 5" besitzen.

Die anfangs vielversprechende, bis in die Mitte des vorigen Jahrhunderts das Feld beherrschende Repetitionswinkelmessung hat man für das Hauptnetz aufgegeben, weil die ihr anhaftenden systematischen Fehler nicht mit der genügenden Sicherheit bestimmt und unschädlich gemacht werden können.

In den Netzen niederer Ordnung werden fast ausschließlich Richtungsbeobachtungen¹⁾ — womöglich in vollen Sätzen — ausgeführt. Bei diesem Verfahren werden alle s Ziele in der Weise in einen Satz zusammengefaßt, daß sie in der ersten Fernrohrlage in der Reihenfolge von links nach rechts und nach dem Durchschlagen des Fernrohrs in einer zweiten Lage von rechts nach links eingestellt werden. Die Zusammenstellung der Mittel aus den entsprechenden Beobachtungen beider Fernrohrlagen bildet einen vollständigen Satz, wenn bei der Beobachtung kein Ziel ausgefallen ist. Sollen n Sätze beobachtet werden, so wird der geschilderte Vorgang bei verschiedenen Kreisstellungen n -mal wiederholt.

Aus den Beobachtungsmitteln $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{ir}, \dots a_{is}$ des i -ten Satzes ergeben sich in den Differenzen

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{i1} &= a_{i1} - a_{i1} = 0, \\ \gamma_{i2} &= a_{i2} - a_{i1}, \\ \gamma_{i3} &= a_{i3} - a_{i1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \gamma_{ir} &= a_{ir} - a_{i1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \gamma_{is} &= a_{is} - a_{i1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (247)$$

die diesem Satze entsprechenden reduzierten Richtungen, d. h. diejenigen Winkel, welche die einzelnen Strahlen mit dem gemeinsamen Anfangsstrahl P_0P_1 (Abb. 174) einschließen. Bei n Sätzen erhält man für die reduzierten Rich-

¹⁾ Zur Einführung der Richtungsmessungen siehe *Bessel*, Gradmessung in Ostpreußen, 1838.

tungen n gleich genaue Reihen, deren einfaches arithmetisches Mittel auf die wahrscheinlichsten Werte $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, \dots, \gamma_s$ der reduzierten Richtungen führt.

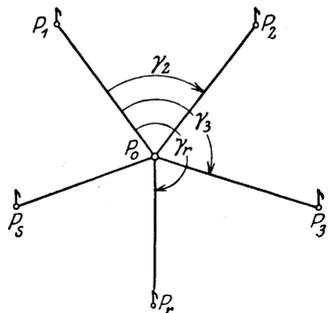


Abb. 174. Bestimmung eines Strahlensystems durch Richtungsbeobachtungen.

Die Fehlerberechnung für vollständige Richtungssätze soll an Hand des in Tabelle 13 enthaltenen Zahlenbeispiels erläutert werden. Sind aus den reduzierten Richtungen $\gamma_{1r}, \gamma_{2r}, \gamma_{3r}, \gamma_{4r}$ der $n=4$ Sätze für sämtliche $s=6$ Zielpunkte die Satzmittel γ_r abgeleitet, so erhält man aus ihrem Vergleich mit den reduzierten Richtungsangaben der einzelnen Sätze je eine Reihe von Unterschieden d , z. B. für den i -ten Satz und die r -te Richtung

$$d_{ir} = \gamma_r - \gamma_{ir} = v_{ir} - v_{i1} \dots (248)$$

Jedes γ_{ir} desselben Satzes ist nach (247) ein Binom, dessen stets gleiches zweite Glied die zur Nullrichtung des i -ten Satzes gehörige Beobachtung a_{i1} ist, so daß jede Differenz auch den Fehler v_{i1} von a_{i1} enthält. Aus (248) folgen die Ausdrücke

$$[d_{ir}] = [v_{ir}] - s \cdot v_{i1}, \quad \frac{1}{s} [d_{ir}] = \frac{1}{s} [v_{ir}] - v_{i1} \dots (249)$$

Tabelle 13.
Standpunkt P_0 .

Zielpunkt	Satzmittel γ_r	1. Satz					2. Satz					3. Satz					4. Satz				
		γ_{1r}	d_{1r}	v_{1r}	$v_{1r} v_{1r}$	$(v_{1r})^2$	γ_{2r}	d_{2r}	v_{2r}	$v_{2r} v_{2r}$	$(v_{2r})^2$	γ_{3r}	d_{3r}	v_{3r}	$v_{3r} v_{3r}$	$(v_{3r})^2$	γ_{4r}	d_{4r}	v_{4r}	$v_{4r} v_{4r}$	$(v_{4r})^2$
P_1	0° 0' 0''	0''	0''	+ 2''	4	0''	0''	- 3''	9	0''	0''	- 3''	9	0''	0''	+ 5''	25	0''	0''	+ 5''	25
P_2	60 15 19	22	- 3	- 1	1	15	+ 4	+ 1	1	16	+ 3	0	0	9	0	23	- 4	+ 1	1	1	
P_3	118 10 30	34	- 4	- 2	4	24	+ 6	+ 3	9	25	+ 5	+ 2	4	37	- 7	- 2	4	37	- 7	- 2	4
P_4	184 53 10	10	0	+ 2	4	8	+ 2	- 1	1	02	+ 8	+ 5	25	20	- 10	- 5	25	20	- 10	- 5	25
P_5	243 03 50	56	- 6	- 4	16	45	+ 5	+ 2	4	47	+ 3	0	0	53	- 3	+ 2	4	53	- 3	+ 2	4
P_6	303 46 20	18	+ 2	+ 4	16	18	+ 2	- 1	1	19	+ 1	- 2	4	26	- 6	- 1	1	26	- 6	- 1	1
$m_r =$	$\sqrt{\frac{172}{3 \cdot 5}} = \pm 3,4''$		- 11	+ 1	45		+ 19	+ 1	25		+ 20	+ 2	42		- 30	0	45		- 30	0	45
$\mu_r =$	$\frac{3,4''}{\sqrt{4}} = \pm 1,7''$	$v_{11} = + 2''$				$v_{21} = - 3''$				$v_{31} = - 3''$				$v_{41} = + 5''$			42				42
																					$[v^2] =$ 172

Das arithmetische Mittel der wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler v_{ir} eines jeden Satzes liegt in der Nähe von Null. Die Einführung dieser Näherungsbeziehung in (249) ergibt in

$$v_{i1} = - \frac{1}{s} [d_{ir}] \dots (250)$$

die Verbesserung der Nullrichtung des i -ten Satzes, welche, zu dessen Werten d_{ir} hinzugefügt, die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler

$$v_{ir} = d_{ir} + v_{i1} \dots (251)$$

ergibt. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt für jeden Satz die Beziehung

$$\sum_{r=1}^{r=s} [v_{ir}] = 0, \dots (252)$$

welche den Charakter einer Rechenprobe besitzt. Eine mit wachsender Satzzahl an Wert zunehmende Probe für die Güte der Beobachtungen liegt darin, daß auch die jeweils zum gleichen Ziel gehörigen Querreihen der Beobachtungsfehler die Eigenschaften zufälliger Fehler besitzen sollen. Näherungsweise soll daher auch die Bedingung

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} [v_{ir}] = 0 \dots \dots \dots (253)$$

erfüllt sein.

Die Summe der für jeden Satz getrennt aufgestellten Teilbeträge $[v_{ir} v_{ir}]$ gibt die Gesamtfehlerquadratsumme

$$[v v] = [v_{1r} v_{1r}] + [v_{2r} v_{2r}] + [v_{3r} v_{3r}] + [v_{4r} v_{4r}], \dots \dots (254)$$

woraus nach (83) der mittlere Fehler

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{\ddot{u}}} \dots \dots \dots (255)$$

der einmal beobachteten Richtung eines Satzes folgt. Die hierin enthaltene Zahl \ddot{u} der überschüssigen Bestimmungsstücke ist

$$\ddot{u} = (n - 1)(s - 1), \dots \dots \dots (256)$$

da in den letzten $n-1$ Sätzen je $s-1$ Richtungen — nicht aber die Nullrichtung — überschüssig sind. Somit wird der mittlere Richtungsfehler einer Einzelbeobachtung

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{(n - 1)(s - 1)}}, \dots \dots \dots (257)$$

während der mittlere Fehler der aus n Sätzen gemittelten Richtung durch den Ausdruck

$$\mu_r = \frac{m_r}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n(n - 1)(s - 1)}} \dots \dots \dots (258)$$

angegeben wird.

In unserem Zahlenbeispiel besitzen diese Fehler die Werte

$$m_r = \pm 3,4'', \quad \mu_r = \pm 1,7''.$$

Da jeder Winkel die Differenz zweier Richtungen ist, so besteht zwischen dem mittleren Winkelfehler m_w und dem mittleren Richtungsfehler m_r der einfache Zusammenhang

$$m_w = m_r \sqrt{2}. \dots \dots \dots (259)$$

Daraus aber folgt die zwischen dem Winkelgewicht p_w und dem Richtungsgewicht p_r bestehende einfache Beziehung

$$p_r = 2 p_w. \dots \dots \dots (260)$$

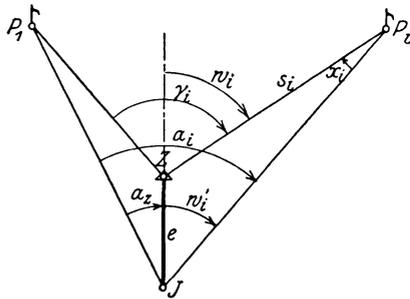
Das Verfahren der Richtungsbeobachtungen verlangt zur Festlegung eines Strahlensystems viel weniger Arbeit als die reine Winkelmessung. Es ist am vorteilhaftesten für Beobachtungen in den untergeordneten Dreiecksnetzen, wo infolge der kürzeren Sichten auch bei etwas ungünstigeren Witterungsverhältnissen die Dreieckspunkte noch ohne umständliche Heliotropen- oder Lampensignalisierung sichtbar sind und vollständige Sätze in kurzer Zeit beobachtet werden können. Letzteres ist wichtig, da nur unter dieser Voraussetzung eine etwaige Drehung der Unterlage des Instruments gleichmäßig mit den Einstellungen fortschreiten wird, so daß jedes Mittel aus den Beobachtungen in beiden Fernrohrlagen um denselben Betrag gefälscht ist

und die als Differenzen gebildeten reduzierten Richtungen vom Einfluß der besprochenen Drehung befreit sind.

Für das Hauptdreiecksnetz eignen sich Richtungsbeobachtungen nicht. Sie würden einen sehr großen Gehilfenapparat erfordern, da jeweils die sämtlichen Zielpunkte eines Satzes durch Heliotropen- oder Lampenlicht zu signalisieren wären. Vielfach würden auch Punkte ausfallen und umständlich zu behandelnde, unvollständige Richtungssätze entstehen. Zudem ist hier bei dem langsameren und unregelmäßigeren Fortschreiten der vielen Einstellungen kaum noch zu erwarten, daß eine regelmäßige Drehung der Unterlage im Endergebnis in der vorhin angegebenen einfachen Weise getilgt werden kann. Infolge dieser Umstände ist im Hauptnetz die reine Winkelbeobachtung vorzuziehen.

d) Zentrieren der Beobachtungen.

Ist der Dreieckspunkt Z (Abb. 175), das Zentrum, ein schwer zugängliches Luftsignal oder ein Bodenpunkt, von dem aus nicht alle Zielpunkte



gesehen werden können, oder steht in Z etwa ein von anderen Punkten aus angezieltes Signal, so werden die Beobachtungen in einem dem Zentrum möglichst naheliegenden Hilfspunkt J (Instrumentenstand) ausgeführt. Zur Reduktion der in J ausgeführten Beobachtungen a_i auf die entsprechenden Werte γ_i , deren Scheitel das Zentrum ist, braucht man die sog. Zentrierungselemente, nämlich die als Exzentrizität bezeichnete Entfernung $JZ = e$ des Instrumentes vom Zentrum, die Entfernung s_i des Zielpunktes P_i vom Zentrum und den mitbe-

Abb. 175. Richtungs-zentrierung bei exzentrischem Beobachtungsort.

obachteten Winkel a_z , welchen die Richtung JZ mit der exzentrischen Anfangsrichtung JP_1 bildet.

Der auf JZ als Anfangsstrahl bezogenen Richtung

$$w'_i = a_i - a_z \dots \dots \dots (261)$$

entspricht die zentrierte Richtung

$$w_i = w'_i + x_i, \dots \dots \dots (262)$$

da w_i Außenwinkel im Dreieck ZJP_i ist. Die Zentrierungsverbesserung x_i läßt sich aus der strengen Beziehung

$$\sin x_i = \frac{e}{s_i} \sin w'_i \dots \dots \dots (263)$$

gewinnen. Solange $e : s_i$ und damit auch x_i klein bleiben, kann man zur Berechnung von x_i den guten Näherungsausdruck

$$x_i'' \approx \varrho'' \frac{e}{s_i} \sin w'_i \dots \dots \dots (264)$$

verwenden, welcher die gesuchte Größe sofort in Sekunden angibt. Ein Vergleich mit (263) liefert den Fehler des Ausdrucks (264) in Sekunden:

$$\Delta'' = \frac{(x_i'')^3}{6 \varrho''^2} \dots \dots \dots (265)$$

Also ist

$$x''_{max} = \sqrt[3]{6 \varrho''^2 \cdot \Delta''} \dots \dots \dots (266)$$

derjenige größte Betrag der Zentrierungsverbesserung, welcher eben noch mittels der Näherung (264) berechnet werden darf, wenn Δ'' nicht überschritten werden soll. Für den besonderen Wert $\Delta'' = \frac{1}{2}''$ erhält man den Grenzwert $x_{max} = 5035'' = 1^\circ 23' 55''$. Dieser Betrag kann keinesfalls überschritten werden, solange $\frac{e}{s_i} < \frac{1}{41}$ bleibt.

Tabelle 14.

Aufstellungspunkt P_0 . $e = 6,459$ m, $\alpha_z = 202^\circ 44' 15''$.

Bezeichnung	P_1	P_2	P_3	P_4
\underline{a}	0° 0' 0''	90° 05' 16''	162° 46' 47''	292° 28' 22''
$\underline{w'}$	157° 15' 45''	247° 21' 01''	320° 02' 32''	89° 44' 07''
$\underline{s:m}$	1316,9	687,8	652,1	628,4
$\log \frac{1}{s}$	6.88 044	7.16 254	7.18 569	7.20 176
$\log e$	0.81 017	0.81 017	0.81 017	0.81 017
$\log \varrho''$	5.31 443	5.31 443	5.31 443	5.31 443
$\log \sin w'$	9.58 716	9.96 514 _n	9.80 769 _n	0.00 000
$\log x''$	2.59 220	3.25 228 _n	3.11 798 _n	3.32 636
x''	+ 391 "	- 1788 "	- 1312	+ 2120
$\underline{w'}$	157° 15' 45''	247° 21' 01''	320° 02' 32''	89° 44' 07''
$x' x''$	+ 06 31	- 29 48	- 21 52	+ 35 20
w	157° 22' 16''	246° 51' 13''	319° 40' 40''	90° 19' 27''
$\gamma = w_i - w_1$	0° 0' 0''	89° 28' 57''	162° 18' 24''	292° 57' 11''

Ist x_i berechnet, so ergibt sich nach (262) die auf JZ bezogene, zentrierte Richtung w_i . Die auf den Anfangspunkt P_1 bezogenen, zentrierten Richtungen γ sind die Differenzen

$$\gamma_i = w_i - w_1 \dots \dots \dots (267)$$

Tab. 14 enthält ein Zahlenbeispiel, dessen unmittelbar gegebene Stücke durch Unterstreichen kenntlich gemacht sind.

Eine Zentrierung wird auch notwendig, wenn mittels des in P_0 (Abb. 176) zentrisch aufgestellten Instrumentes statt des um s entfernten Dreieckspunktes P ein Hilfspunkt P' angezielt wird. Bedeutet e den senkrechten Abstand des Dreieckspunktes P von der Sicht P_0P' , so ist

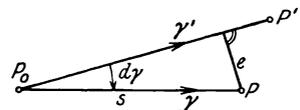


Abb. 176. Richtungs-zentrierung bei exzentrischem Zielpunkt.

$$d\gamma = \varrho'' \frac{e}{s} \dots \dots \dots (268)$$

die wegen der Exzentrizität des Zielpunktes notwendige Zentrierungsverbesserung, durch deren Hinzutreten die exzentrische Richtung γ' in die zentrierte Richtung γ übergeht.

e) Netzeinschaltung.

Soll die zusammenhängende Neubestimmung einer größeren Zahl von Dreieckspunkten im Rahmen eines gegebenen Netzes erfolgen, so spricht man von einer Netzeinschaltung. Bei einer trigonometrischen Punkteinschal-

tung hingegen handelt es sich jeweils um die Neubestimmung eines oder einiger Dreieckspunkte.

Bei der Netzeinschaltung treten die verschiedensten Dreiecksverbindungen auf, zu deren endgültiger Berechnung eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate meist nicht umgangen werden kann. Doch gibt es auch einige Netzformen, welche unter Verzicht auf die volle Strenge in wesentlich einfacherer Weise nach einem Näherungsverfahren, dem Verfahren der übereinstimmenden Dreiecksberechnung, ausgeglichen werden können. Solche besondere Dreiecksverbindungen sind das vollständige Zentralsystem, das unvollständige Zentralsystem, die Polygonkette und die Linienkette.

Beim vollständigen oder geschlossenen Zentralsystem (Abb. 177) schließt eine Dreiecksverbindung mit ihrer ersten und letzten Seite an zwei bekannte Punkte P_0 und P_1 an, außerdem besitzen sämtliche Dreiecke in dem beherrschenden Punkt P_0 eine gemeinsame Spitze.

Fällt die letzte Seite des letzten Dreiecks nicht in die erste Seite des ersten Dreiecks, sondern besitzt sie die Lage $P_0 P_{n+1}$ (Abb. 178), so spricht man von einem unvoll-

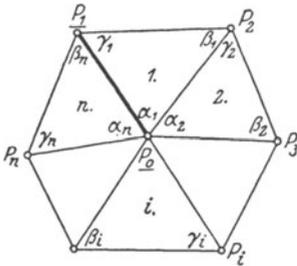


Abb. 177. Vollständiges (geschlossenes) Zentralsystem.

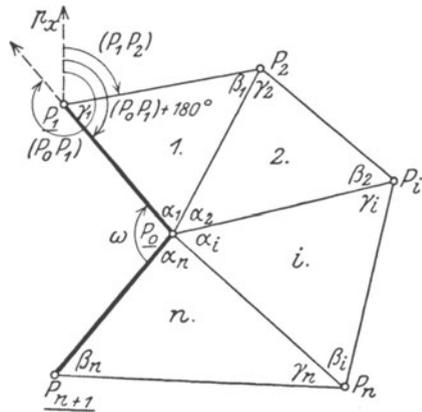


Abb. 178. Unvollständiges (offenes) Zentralsystem.

ständigen oder offenen Zentralsystem. Der Winkel ω zwischen den beiden Anschlußseiten ist die Differenz ihrer Richtungswinkel, nämlich

$$\omega = (P_0 P_1) - (P_0 P_{n+1}) \dots \dots \dots (269)$$

Diese selbst werden durch eine sinngemäße Anwendung der Gl. (235) gefunden.

Da sich das geschlossene Zentralsystem als ein Sonderfall des offenen ergibt, wenn in diesem P_{n+1} mit P_1 zusammenfällt, also $\omega = 0$ und $P_0 P_{n+1} = P_0 P_1$ wird, so soll die Näherungsausgleichung am allgemeineren Fall des unvollständigen Zentralsystems klargestellt werden.

Es seien $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$ die beobachteten Winkel im i -ten Dreieck, $\alpha''_i, \beta''_i, \gamma''_i$ die hieraus durch eine Teilausgleichung erhaltenen Zwischenwerte und $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die durch die vollständige Ausgleichung erhaltenen Endwerte. Letztere müssen

1. die Stations- oder Horizontgleichung:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \omega - 360^\circ = 0 \quad | \quad ds \quad \dots \dots \dots (270)$$

2. die Dreiecksgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180^\circ &= 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - 180^\circ &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_n + \beta_n + \gamma_n - 180^\circ &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{matrix} \dots \dots \dots (271)$$

3. die Seiten- oder Sinusgleichung:

$$1 = \frac{P_0 P_1}{P_0 P_{n+1}} \cdot \frac{\sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 \dots \sin \gamma_n}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \dots \sin \beta_n} = \frac{Z}{N} \dots \dots \dots (272)$$

bzw. $\log Z - \log N = 0$

streng erfüllen. Aus Abb. 178 kann man die Bedingungen (270) bis (272) unmittelbar ablesen, letztere, indem man sich durch wiederholte Anwendung des Sinus-Satzes die Seite $P_0 P_{n+1}$ erst durch $P_0 P_n$, dann durch $P_0 P_{n-1}$ und auf diesem Wege fortfahrend schließlich durch $P_0 P_1$ ausgedrückt denkt.

Setzt man in (270) und (271) an Stelle der noch unbekanntem ausgeglichenen Winkel die Beobachtungen α', β', γ' , so erscheinen auf der rechten Seite dieser Gleichungen der Stationswiderspruch ds bzw. die Dreiecks-widersprüche d_1, d_2, \dots, d_n , welche sämtlich den Charakter von Fehlern besitzen. Diese Unstimmigkeiten werden durch eine erste Teilausgleichung beseitigt. Gibt man jedem Winkel α' auf der Zentralstation mit Rücksicht auf den Horizontwiderspruch ds eine Verbesserung (s) und jedem der Winkel im i -ten Dreieck eine Verbesserung (i) zur Beseitigung von d_i , so bestehen offenbar die Beziehungen

$$\left. \begin{array}{l} (1) + (s) \\ + (2) + (s) \\ + \dots \\ + (n) + (s) \end{array} \right\} + ds = 0, \dots \dots (273) \quad \left. \begin{array}{l} 3(1) + (s) + d_1 = 0, \\ 3(2) + (s) + d_2 = 0, \\ \dots \\ 3(n) + (s) + d_n = 0, \end{array} \right\} \dots \dots (274)$$

da ja durch die einzelnen Verbesserungen die Widersprüche getilgt werden müssen.

Aus der mit 3 multiplizierten Gleichung (273) und der Summe der Gleichungen (274) folgen die Ausdrücke

$$3 \{ (1) + (2) + \dots + (n) \} = -3n(s) - 3ds, \dots \dots \dots (275)$$

$$3 \{ (1) + (2) + \dots + (n) \} = -n(s) - \sum_1^n [d_i], \dots \dots \dots (276)$$

deren linke Seiten einander gleich sind. Durch Gleichsetzen ihrer rechten Seiten erhält man zunächst

$$(s) = \frac{[d] - 3ds}{2n}, \dots \dots \dots (277)$$

während sich bei nunmehr bekanntem (s) die Beträge

$$\left. \begin{array}{l} (1) = -\frac{1}{3}((s) + d_1), \\ (2) = -\frac{1}{3}((s) + d_2), \\ \dots \\ (n) = -\frac{1}{3}((s) + d_n) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (278)$$

aus den Gleichungen (274) ergeben.

Mit den aus der beschriebenen Teilausgleichung gewonnenen Verbesserungen (s) und (i) erhält man aus den Beobachtungen $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$ im i -ten Dreieck die Zwischenwerte

$$\alpha''_i = \alpha'_i + (s) + (i), \quad \beta''_i = \beta'_i + (i), \quad \gamma''_i = \gamma'_i + (i), \dots (279)$$

welche die Stationsgleichung und die Dreiecksgleichungen streng erfüllen müssen. Die Seitengleichung (272) aber erfüllen sie noch nicht und ihre Einführung in (272) liefert an Stelle von Z und N die fehlerhaften Werte Z'

und N' . Zur Beseitigung des hieraus folgenden logarithmischen Seitenwiderspruchs

$$\log Z' - \log N' = \Delta \dots \dots \dots (280)$$

wird jeder Zählerwinkel γ um eine sog. Sinus-Verbesserung x'' verkleinert, jeder Nennerwinkel β aber um x'' vergrößert. Bedeuten nun Δ'_i und Δ''_i die aus der Logarithmentafel zu entnehmenden logarithmischen Sinusänderungen pro 1'' für β_i und γ_i , so sind die Ausdrücke $-x'' \Delta'_i$ und $+x'' \Delta''_i$ die aus x folgenden Änderungen in $\log Z'$ und $\log N'$. Ihre Einführung in (280) muß den Widerspruch Δ tilgen; also ist

$$-x \Delta' - x \Delta'' + \Delta = 0$$

und die Sinusverbesserung wird

$$x = \frac{\Delta}{\Delta' + \Delta''} \dots \dots \dots (281)$$

Nach dieser zweiten Teilausgleichung, welche sich nurmehr auf die Winkel β'' , γ'' erstreckte, sind die ausgeglichenen Endwerte der Winkel im i -ten Dreieck:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i'' = \alpha'_i + (s) + (i), \\ \beta_i &= \beta_i'' + x = \beta'_i + (i) + x, \\ \gamma_i &= \gamma_i'' - x = \gamma'_i + (i) - x. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (282)$$

Sie müssen jetzt die sämtlichen Bedingungsgleichungen (270), (271), (272) streng erfüllen.

Liegen keine Winkelmessungen, sondern Richtungsbeobachtungen vor, so fällt die Stationsgleichung weg, und die ganze erste Teilausgleichung besteht lediglich in der gleichmäßigen Verteilung der Dreieckswidersprüche d_i auf die einzelnen Dreieckswinkel. Der zweite Teil der Ausgleichung jedoch ändert sich nicht.

Tabelle 15.

$$\log P_0 P_1 = 3.307484, \quad \log P_0 P_4 = 3.324012.$$

Bezeichnung	Dreieck 1		Dreieck 2		Dreieck 3		ω	$\omega + [\alpha]$
$\alpha' \alpha'' \alpha$	64° 10' 14"	19 19	67° 00' 30"	31 31	61° 40' 20"	24 24	167° 08' 46"	359° 59' 50"
$\beta' \beta'' \beta$	50° 13' 15"	18 19	70° 01' 00"	59 00	50° 10' 32"	34 35		$ds = -10''$
$\gamma' \gamma'' \gamma$	65° 36' 20"	23 22	42° 58' 31"	30 29	68° 09' 00"	02 01	192° 51' 14"	$= [\alpha]$
Summe der Dreieckswinkel	179° 59' 49"	00 00	180° 00' 01"	00 00	179° 59' 52"	00 00	360° 00' 00"	$[d] = -18''$
(s) = + 2"	(1) = + 3"		(2) = - 1"		(3) = + 2"		$= \omega + [\alpha]$	

Tabelle 16.

Dreieck	Berechnung des logarithmischen Seitenwiderspruchs				Sinusprobe	
	$\log \sin \beta''$	Δ'' in 10^{-6}	$\log \sin \gamma''$	Δ' in 10^{-6}	$\log \sin \beta$	$\log \sin \gamma$
1	9.885 658	+ 1.8	9.959 390	+ 0.9	9.885 660	9.959 389
2	9.973 031	+ 0.8	9.833 580	+ 2.3	9.973 032	9.833 578
3	9.885 371	+ 1.7	9.967 626	+ 0.8	9.885 372	9.967 625
Summe:	9.744 060	$[\Delta''] = +4.3$	9.760 596	$[\Delta'] = +4.0$	9.744 064	9.760 592
$\log P_0 P_4 =$	3.324 012	$= \log P_0 P_1$	3.307 484		3.324 012	3.307 484
$\log Z' =$	3.068 072	$\log N' =$	3.068 080		3.068 076	3.068 076
	$[\Delta'] + [\Delta''] = 8,3 \cdot 10^{-6}$	$\Delta = 8 \cdot 10^{-6}$	$x = +1''$		$= \log N$	$= \log Z$
					$\log Z - \log N = 0.000 000$	

Ein den vorstehenden Entwicklungen sich vollständig anschließendes Zahlenbeispiel, für $n = 3$ Dreiecke, enthalten die beiden Tab. 15 und 16, welche wohl ohne eine besondere Erläuterung verständlich sind.

Nach erfolgter Ausgleichung¹⁾ leitet man von $P_0 P_1$ ausgehend, durch wiederholte Anwendung des sin-Satzes unter Benutzung der ausgeglichenen Winkel die Längen sämtlicher Dreiecksseiten ab. Aus dem bekannten Richtungswinkel ($P_0 P_1$) und den Endwerten der Dreieckswinkel findet man auf Grund der Fig. 178, in welcher p_x eine Parallele zur X-Achse bedeutet, leicht auch die Richtungswinkel der Dreiecksseiten, z. B.:

$$\left. \begin{aligned} (P_1 P_2) &= (P_0 P_1) + 180^\circ - \gamma_1, & (P_2 P_3) &= (P_1 P_2) + 180^\circ - (\beta_1 + \gamma_2), \\ (P_i P_{i+1}) &= (P_{i-1} P_i) + 180^\circ - (\beta_{i-1} + \gamma_i) \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & (P_{n+1} P_0) &= (P_n P_{n+1}) + 180^\circ - \beta_n. \end{aligned} \right\} (283)$$

Der Anschluß an die von vornherein nach Länge und Richtung bekannte Seite $P_0 P_{n+1}$ bietet eine erwünschte Rechenprobe.

Fügt man die aus der Länge und dem Richtungswinkel jeder Seite $P_i P_{i+1}$ berechneten Koordinatenunterschiede

$$\Delta x_i = P_i P_{i+1} \cos(P_i P_{i+1}), \quad \Delta y_i = P_i P_{i+1} \sin(P_i P_{i+1}) \dots (284)$$

der Seitenendpunkte jeweils zu den Koordinaten x_i, y_i des Seitenanfangspunktes, so ergeben sich die Koordinaten

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \dots \dots \dots (285)$$

des Streckenendpunktes P_{i+1} . Auch hier erhält man durch den Anschluß an die Koordinaten des von vornherein festliegenden Punktes P_{n+1} eine Rechenprobe.

Die Polygonkette (Abb. 179), welche von zwei bekannten Ausgangspunkten $P_0 P_1$ zu zwei Anschlußpunkten P_n, P_{n+1} von bekannter Lage führt, wird bei der Triangulierung von langgestreckten Tälern besonders häufig verwendet. Wesentlich ist auch, wie bei jeder Dreieckskette im engeren Sinne des Wortes, daß Diagonalen fehlen und die Berechnung einer Dreiecksseite aus irgendeiner anderen nur auf einem einzigen Wege erfolgen kann. Würde z. B. in der skizzierten Kette auch die Sicht $P_0 P_3$ beobachtet, so würde es sich nicht mehr um eine Kette von Dreiecken, sondern um ein Dreiecksnetz handeln.

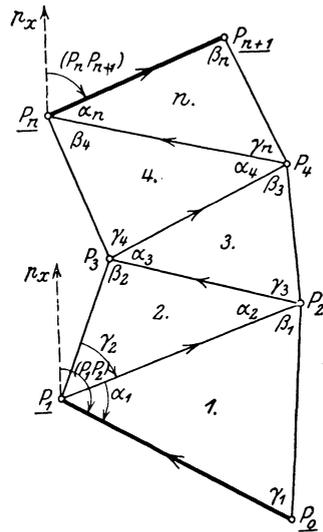


Abb. 179. Polygonkette.

Zu der für Winkel- und Richtungsbeobachtungen ganz gleichartigen Berechnung der Polygonkette denken wir uns die einzelnen Dreieckspunkte durch die je zwei Nachbardreiecke gemeinsamen Seiten $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4, \dots, P_{n-1} P_n$ verbunden. Die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel seien mit α , die Gegenwinkel der jeweils vorhergehenden Seiten mit β und diejenigen der folgenden Seiten mit γ bezeichnet. Aus den Koordinaten der Anschlußpunkte findet man die als fehlerfrei zu behandelnden Richtungswinkel ($P_1 P_0$), ($P_n P_{n+1}$) beider Anschlußseiten. Der zuletzt genannte läßt sich aber auch durch ($P_0 P_1$) und

¹⁾ Die im folgenden beschriebene Koordinatenberechnung stimmt im Grundgedanken mit der etwas später (S. 150 ff.) zu behandelnden Polygonzugberechnung überein.

die Zwischenwinkel α ausdrücken, welche zu diesem Zwecke in links bzw. rechts vom Zug $P_1 P_2 \dots P_n$ liegende Werte ${}^l\alpha$ bzw. ${}^r\alpha$ zu unterscheiden sind. Denkt man sich im Ausdruck

$$(P_n P_{n+1}) = (P_{n-1} P_n) + 180^\circ - \alpha_n$$

den Richtungswinkel $(P_{n-1} P_n)$ durch $(P_{n-2} P_{n-1})$, diesen durch $(P_{n-3} P_{n-2})$ usw. ersetzt, bis man bei $(P_0 P_1)$ angelangt ist, so erhält man hieraus die Polygongleichung

$$(P_0 P_1) + [{}^l\alpha] - [{}^r\alpha] + n \cdot 180^\circ - (P_n P_{n+1}) = 0. \quad | \quad ds \dots (286)$$

Treten hierin an Stelle der richtigen (oder ausgeglichenen) Winkel α die fehlerhaften Beobachtungen α' , so erscheint auf der rechten Seite von (286) ein Polygonwiderspruch ds , welcher dadurch getilgt wird, daß jedem ${}^l\alpha$ bzw. ${}^r\alpha$ eine Polygonwinkelverbesserung $+(s)$ bzw. $-(s)$ zuerteilt wird. Außer der Polygongleichung (286) bestehen auch hier die Dreiecksgleichungen (271), aus denen durch Einsetzen der beobachteten Dreieckswinkel α', β', γ' wieder die Dreieckswidersprüche d_1, d_2, \dots, d_n folgen. Ihnen entsprechen die Dreiecksverbesserungen (1), (2), \dots (n). Dazu tritt eine der Bedingung (272) vollständig entsprechende Seitengleichung

$$1 = \frac{P_0 P_1}{P_n P_{n+1}} \cdot \frac{\sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 \dots \sin \gamma_n}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_n} = \frac{Z}{N} \dots (287)$$

Die weitere Behandlung entspricht ganz der Ausgleichung des Zentral-systems, und wie dort ergeben sich auch hier die Verbesserungen

$$(s) = \frac{1}{2n} ([d] - 3 ds), \quad (i) = -\frac{1}{3} ((s) + d_i) \dots (288)$$

aus einer ersten Teilausgleichung. Die aus derselben gewonnenen Zwischenwinkel sind die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} {}^l\alpha_i'' &= {}^l\alpha_i' + (s) + (i) \\ {}^r\alpha_i'' &= {}^r\alpha_i' - (s) + (i) \end{aligned} \right\}, \quad \beta_i'' = \beta_i' + (i), \quad \gamma_i'' = \gamma_i' + (i) \dots (289)$$

Mit diesen Zwischenwinkeln erhält man aus (287) den logarithmischen Seitenwiderspruch

$$\Delta = \log Z' - \log N' \dots (290)$$

und hieraus den Betrag

$$x'' = \frac{\Delta}{[\Delta'] + [\Delta'']} \dots (291)$$

der Sinusverbesserung, um welchen jeder Zählerwinkel γ'' noch zu verkleinern und jeder Nennerwinkel β'' zu vergrößern ist, damit alle Widersprüche verschwinden. So erhält man schließlich die ausgeglichenen Endwerte

$$\left. \begin{aligned} {}^l\alpha_i &= {}^l\alpha_i'' = {}^l\alpha_i' + (s) + (i) \\ {}^r\alpha_i &= {}^r\alpha_i'' = {}^r\alpha_i' - (s) + (i) \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \beta_i &= \beta_i'' + x = \beta_i' + (i) + x \\ \gamma_i &= \gamma_i'' - x = \gamma_i' + (i) - x \end{aligned} \right\} \dots (292)$$

Sind mittels der ausgeglichenen Dreieckswinkel die Längen und Richtungswinkel aller Seiten abgeleitet, so erfolgt die Koordinatenberechnung am besten auf dem Wege $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Beim Anschluß der Rechnung an P_n werden in den errechneten Koordinaten x_n', y_n' auch bei fehlerfreier Rechnung Anschlußwidersprüche

$$v_x = x_n - x_n', \quad v_y = y_n - y_n' \dots (293)$$

auftreten, welche davon herrühren, daß auch die ausgeglichenen Winkel noch mit kleinen Fehlern behaftet sind. Sie können, wenn man die Einfachheit

in den Vordergrund stellt, etwa proportional den Seitenlängen auf die einzelnen Koordinatenunterschiede verteilt werden.

Ist in einer Polygonkette die erste Anschlußseite $P_0 P_1$ nach Länge und Richtung, die zweite $P_n P_{n+1}$, aber nur der Länge nach bekannt, so fällt die Polygongleichung aus und die ganze erste Teilausgleichung besteht nur in der gleichmäßigen Verteilung der Dreieckswidersprüche auf die einzelnen Dreieckswinkel. Dagegen fällt die Seitengleichung und damit die ganze zweite Teilausgleichung fort, wenn die zweite Anschlußseite wohl der Richtung, nicht aber der Länge nach bekannt ist.

Die Linienkette (Abb. 180) ist eine zwischen zwei bekannte Punkte P_0, P_{n+1} mit oder ohne Orientierung eingespannte Dreieckskette. Bei einer äußeren Orientierung werden die Winkel φ_a, ψ_a beobachtet, welche die Seiten $P_0 P_1$ bzw. $P_{n+1} P_n$ mit bekannten Anschlußrichtungen $P_0 P'_0$ bzw. $P_{n+1} P'_{n+1}$ einschließen. Eine innere Orientierung der Kette ist nur möglich, wenn die beiden Anschlußpunkte P_0, P_{n+1} gegenseitig sichtbar sind. An Stelle von φ_a, ψ_a treten dann die Winkel φ_i, ψ_i der genannten Dreiecksseiten mit der die beiden Kettenendpunkte verbindenden Diagonalen. Durch eine scharfe Bestimmung der Orientierungswinkel φ, ψ kann man die Richtungswinkel $(P_0 P_1)$ und $(P_n P_{n+1})$ so genau erhalten, daß sie im Vergleich zu den beobachteten Dreieckswinkeln als fehlerfrei gelten können, was in der Abbildung durch die Seitenpfeile angedeutet ist. Damit liegen die Verhältnisse hinsichtlich der Winkelausgleichung ebenso wie in einer Polygonkette mit doppeltem Richtungs-, aber nur einfachem Seitenanschluß.

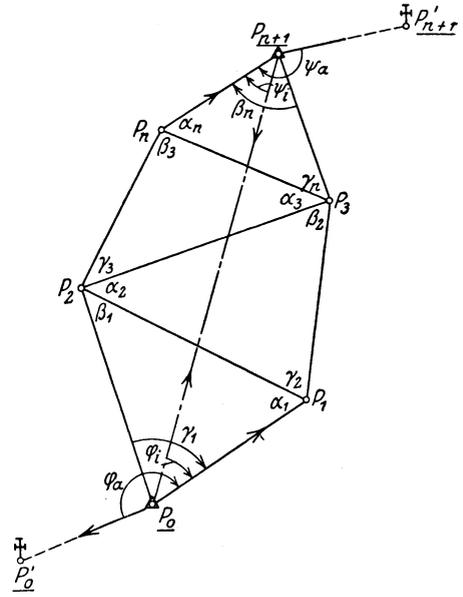


Abb. 180. Linienkette.

Sie stützt sich auf eine Polygongleichung und n Dreiecksgleichungen, ist daher mit der ersten Teilausgleichung erledigt. Die Endwerte α, β, γ der Dreieckswinkel sind unmittelbar die aus (289) folgenden Werte $\alpha'', \beta'', \gamma''$.

Bei der nicht orientierten Linienkette sind lediglich die einzelnen Dreieckswinkel α', β', γ' gemessen und die ganze strenge Winkelausgleichung dieser Dreiecksverbindung besteht in der gleichmäßigen Verteilung der Dreieckswidersprüche auf die Dreieckswinkel. Dagegen bietet die weitere Berechnung der nicht orientierten Linienkette einige Besonderheiten.

Zur Durchführung der Koordinatenberechnung muß man für $P_0 P_1$, das weder der Länge noch der Richtung nach bekannt ist, eine bestimmte Länge $P'_0 P'_1$ und einen Richtungswinkel $(P'_0 P'_1)$ annehmen. Setzt man diesen, wie in Abb. 181 angenommen ist, etwa gleich Null, so ist die Richtung der ersten Seite parallel zur X' -Achse des angenommenen, gegen das Hauptsystem X, Y um δ gedrehten Hilfssystems X', Y' . Mit den getroffenen Annahmen und den ausgeglichenen Dreieckswinkeln lassen sich nunmehr die Längen und Richtungen der Dreiecksseiten einer zur Linienkette $P_0 P_1 P_2 \dots$ ähnlichen und ähnlich gelegenen — wenn wir P'_0 mit P_0 zusammenfallen lassen — Hilfsfigur $P'_0 P'_1 P'_2 \dots$ sowie die rechtwinkligen Koordinaten $x' y'$ ihrer Eckpunkte im Hilfssystem X', Y' berechnen. Es ergibt sich also die Diagonale $P'_0 P'_{n+1}$ aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg}(P_0'P_{n+1}') = \frac{y_{n+1}' - y_0'}{x_{n+1}' - x_0'}, \quad P_0'P_{n+1}' = \frac{x_{n+1}' - x_0'}{\cos(P_0'P_{n+1}')} = \frac{y_{n+1}' - y_0'}{\sin(P_0'P_{n+1}')} \quad (294)$$

nach Länge und Richtung. Die entsprechenden Größen der Hauptfigur im Hauptssystem sind durch die Beziehungen

$$\operatorname{tg}(P_0P_{n+1}) = \frac{y_{n+1} - y_0}{x_{n+1} - x_0}, \quad P_0P_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_0}{\cos(P_0P_{n+1})} = \frac{y_{n+1} - y_0}{\sin(P_0P_{n+1})} \quad (295)$$

bestimmt. Infolge der Ähnlichkeit beider Figuren besitzen entsprechende Größen stets dasselbe Verhältnis

$$C = \frac{P_0P_{n+1}}{P_0'P_{n+1}'} \dots \dots \dots (296)$$

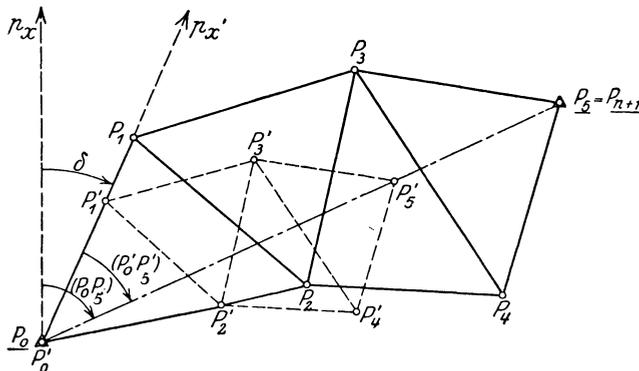


Abb. 181. Berechnung der nicht orientierten Linienkette.

Sind P_iP_k und $P_i'P_k'$ zwei beliebige, einander entsprechende Längen, so ist die Seitenlänge in der Hauptfigur

$$P_iP_k = C \cdot P_i'P_k' \quad \text{bzw.} \quad \log P_iP_k = \log P_i'P_k' + k, \dots \dots (297)$$

wenn

$$k = \log C = \log P_0P_{n+1} - \log P_0'P_{n+1}' \dots \dots \dots (298)$$

gesetzt wird. Mit Hilfe der Gleichungen (297) und (298) kann man in einfacher Weise die sämtlichen Seitenlogarithmen der Hilfsfigur in die entsprechenden gesuchten Seitenlogarithmen der Hauptfigur überführen.

Auch die Orientierung der Dreiecksseiten kann nunmehr leicht durchgeführt werden. Da die X' -Achse des Hilfssystems im Hauptssystem einen Richtungswinkel

$$\delta = (P_0P_{n+1}) - (P_0'P_{n+1}') \dots \dots \dots (299)$$

besitzt, so sind die Richtungswinkel $(P_i'P_k')$ des Hilfssystems alle um das aus (299) bekannte δ zu vergrößern, damit sie in die Richtungswinkel (P_iP_k) des Hauptsystems übergehen. Es ist also

$$(P_iP_k) = (P_i'P_k') + \delta. \dots \dots \dots (300)$$

Mit den bekannten Werten P_iP_k , (P_iP_k) kann nunmehr die Koordinatenberechnung wie bei der Polygonkette durchgeführt werden. Etwaige Anschlußdifferenzen v_x , v_y in den Koordinaten von P_{n+1} haben hier den Charakter von Rechenfehlern bzw. Abrundungsfehlern.

Bei der orientierten Linienkette kann man zwar die endgültigen Seitenrichtungswinkel mittels der ausgeglichenen Dreieckswinkel sofort aufstellen; für die Länge der ersten Seite der Kette aber ist wieder ein Wert $P_0'P_1'$ anzunehmen, damit eine ähnliche Hilfsfigur berechnet werden kann.

Zum Übergang von den Seiten der Hilfsfigur zu den entsprechenden der Hauptfigur dienen auch hier die Gleichungen (296) bis (298).

Der mittlere Fehler m_w der in die Näherungsausgleichung dieser verschiedenen Dreiecksverbindungen eingeführten Winkel ergibt sich einmal aus der schon früher erläuterten, an die Satzmittelung angeschlossenen Fehlerberechnung bzw. aus der Winkelausgleichung auf der Station und völlig unabhängig davon aus den einzelnen Dreieckswidersprüchen d . Aus n solchen Elementen, die sämtlich den Charakter von wahren Fehlern besitzen, ergibt sich der mittlere Fehler der Dreieckswinkelsumme zu

$$d_0 = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{n}} \dots \dots \dots (300a)$$

Da jede Dreieckswinkelsumme aus drei Einzelwinkeln mit je einem mittleren Fehler m_w besteht, so ist offenbar

$$d_0 = m_w \sqrt{3}, \quad m_w = \frac{d_0}{\sqrt{3}} \dots \dots \dots (300b)$$

also

$$m_w = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{3n}} \dots \dots \dots (300c)$$

Dieser Ausdruck, dessen Zuverlässigkeit mit der Dreieckszahl n zunimmt, wird als die internationale Fehlerformel von *Ferrero* bezeichnet.

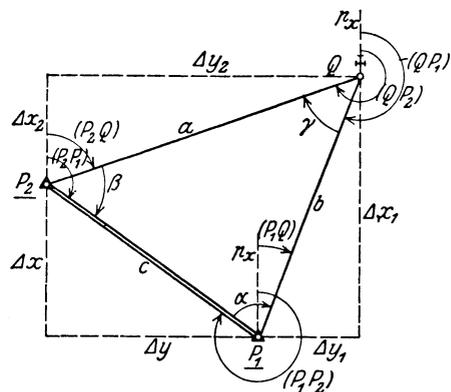
Auch aus dem Seitenwiderspruch kann der mittlere Winkelfehler berechnet werden. Diese Berechnungsart ist aber umständlicher und das Ergebnis unzuverlässig, da es sich bei den betrachteten Formen nur je auf einen einzigen Widerspruch stützt.

f) Trigonometrische Punkteinschaltung.

Die wichtigsten Arten der trigonometrischen Punkteinschaltung, durch welche immer nur ein oder einige Punkte neu bestimmt werden, sind

1. Vorwärtseinschneiden,
2. Seitwärtsabschneiden,
3. Rückwärtseinschneiden,
4. die *Hansen*-aufgabe.

Beim Vorwärtseinschneiden mit Sicht in der Grundlinie (Abb. 182) sind auf zwei bekannten Dreieckspunkten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ die Winkel α und β beobachtet worden, welchen die nach einem unbekanntem Punkte $Q(x, y)$ führenden Sichten mit der Verbindungslinie der gegebenen Punkte (Grundlinie) einschließen. Ist der Neupunkt unzugänglich, so muß dessen Berechnung mit den zur eindeutigen Bestimmung hinreichenden unveränderten Beobachtungen α , β durchgeführt werden. Wenn jedoch in einem zugänglichen Q etwa der überschüssige Winkel γ beobachtet wurde, so sind α und β als die aus der Dreiecksausgleichung hervorgegangenen Winkel aufzufassen.



Mit Sicht in der Grundlinie.
Abb. 182. Vorwärtseinschneiden mit Koordinatenberechnung.

Aus den Koordinaten des auf dem linken Schenkel von γ liegenden Punktes P_1 und von P_2 erhält man die Entfernung dieser Punkte und ihren Richtungswinkel mittels der Ausdrücke

$$\operatorname{tg}(P_1P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad P_1P_2 = \frac{x_2 - x_1}{\cos(P_1P_2)} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(P_1P_2)}, \quad \dots (301)$$

während sich bei bekanntem P_1P_2 die von den bekannten Punkten nach Q hinführenden Seitenlängen

$$P_1Q = P_1P_2 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad P_2Q = P_1P_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \dots (302)$$

nach dem Sinussatz ergeben. Der hierin enthaltene Winkel γ kann gegebenenfalls als die Ergänzung der Summe $\alpha + \beta$ auf 180° gefunden werden. Die Richtungswinkel der abgeleiteten Seiten kann man aus dem Bild ablesen; sie sind

$$(P_1Q) = (P_1P_2) + \alpha, \quad (P_2Q) = (P_2P_1) - \beta, \quad \dots (303)$$

während die Ausdrücke

$$(Q P_1) = (P_1Q) + 180^\circ, \quad (Q P_2) = (P_2Q) + 180^\circ \quad \dots (304)$$

ihre Gegenrichtungswinkel sind. Sie ermöglichen mittels der einfachen Beziehung

$$\gamma = (QP_2) - (QP_1) \quad \dots (305)$$

eine Prüfung der Seitenrichtungswinkel (P_1Q) und (P_2Q) .

Mit den abgeleiteten Seiten und ihren Richtungswinkeln ergeben sich die entsprechenden, von P_1 und P_2 aus gezählten Koordinatenunterschiede

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= P_1Q \cos(P_1Q), & \Delta x_2 &= P_2Q \cos(P_2Q), \\ \Delta y_1 &= P_1Q \sin(P_1Q), & \Delta y_2 &= P_2Q \sin(P_2Q). \end{aligned} \right\} \dots (306)$$

Damit erhält man nun die Koordinaten x, y des Neupunktes von den beiden gegebenen Punkten aus als die Summen

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \Delta x_1 = x_2 + \Delta x_2, \\ y &= y_1 + \Delta y_1 = y_2 + \Delta y_2, \end{aligned} \right\} \dots (307)$$

welche, von kleinen Abrundungsfehlern abgesehen, je zwei übereinstimmende Werte ergeben sollen (Rechenprobe).

Zur Erläuterung mag das in Tabelle 17 enthaltene Zahlenbeispiel dienen.

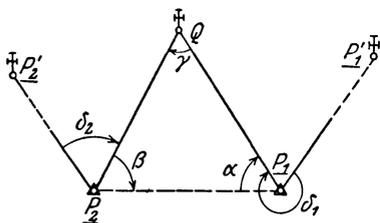


Abb. 183. Vorwärtseinschneiden ohne Sicht in der Grundlinie.

Ist eine Visur in der Grundlinie nicht möglich (Abb. 183), so werden in den gegebenen Punkten P_1, P_2 die Winkel δ_1, δ_2 beobachtet, welche die Seiten P_1Q, P_2Q mit den nach zwei sichtbaren bekannten Anschlußpunkten P_1', P_2' führenden Richtungen einschließen. Aus den Koordinaten von P_1, P_1' und P_2, P_2' erhält man zunächst $(P_1P_1'), P_1P_2$ sowie die Richtungswinkel (P_1P_1') und (P_2P_2') und hiermit die Seitenrichtungswinkel

$$(P_1Q) = (P_1P_1') + \delta_1, \quad (P_2Q) = (P_2P_2') + \delta_2. \quad \dots (308)$$

Die zur Berechnung der Dreiecksseiten P_1Q und P_2Q notwendigen Dreieckswinkel aber sind die Richtungswinkeldifferenzen

$$\alpha = (P_1Q) - (P_1P_2), \quad \beta = (P_2P_1) - (P_2Q). \quad \dots (309)$$

Tabelle 17.¹⁾

1. Punkte		2. Dreieckswinkel		3. Richtung und Länge der Basis		4. Länge der Dreiecksseiten			
		beobachtet	verbessert						
$P_1 = \triangle 7$ $P_2 = \triangle 8$ $P_3 = \triangle 20$		α	61° 13' 30"	33	$y_2 - y_1$	- 954,43	$\log P_2 Q$	3.00904	
5. Richtung der Dreiecksseiten		β	31 27 42	45	$x_2 - x_1$	+ 665,59	$\log \sin \alpha$	9.94276	
		γ	87 18 39	42	$\log \Delta y$	2.97974 _n	$\log P_1 P_2$	3.06580	
		Sa.	179 59 51	00	$\log \Delta x$	2.82320	E. $\log \sin Q$	0.00048	
		Gegebene Koordinaten				$\log \operatorname{tg} (P_1 P_2)$	0.15654 _n	$\log \sin \beta$	9.71762
		$x_1 = -25\,616,57$ $x_2 = -24\,950,98$				$\log \sin (P_1 P_2)$	9.91394 _n	$\log P_1 Q$	2.78390
$(P_1 P_2)$		304° 53' 27"		$y_1 = -10\,664,92$ $y_2 = -11\,619,35$		$\log \cos (P_1 P_2)$		9.75741	
α		61 13 33				$\log P_1 P_2$		3.06580 79	
$(P_1 Q)$		6 07 00		6. Koordinaten-Berechnung von Q					
$(P_2 P_1)$		124 53 27		a) von P_1 aus		b) von P_2 aus			
β		31 27 45		x_1	-25616,57	x_2	-24950,98		
$(P_2 Q)$		93 25 42		$\log \Delta x_1$	2.78142	$\log \Delta x_2$	1.78574 _n	Δx_2	- 61,06
$(Q P_2)$		273 25 42		Δx_1	+ 604,53	$\log \cos (P_2 Q)$	8.77670 _n	x	-25012,04
$(Q P_1)$		186 07 00		$\log \cos (P_1 Q)$	9.99752	x	+25012,04		
$(QP_2)-(QP_1)$		87 18 42		$\log P_1 Q$	2.78390	$\log P_2 Q$	3.00904	y_2	-11619,35
				$\log \sin (P_1 Q)$	9.02757	$\log \sin (P_2 Q)$	9.99922	Δy_2	+ 1019,22
				$\log \Delta y_1$	1.81147	$\log \Delta y_2$	3.00826	y	-10600,13
				y_1	-10664,92				
				Δy_1	+ 64,78				
				y	-10600,14				

Die Punktfestlegung durch Vorwärtseinschneiden wird unbestimmt, wenn γ in der Nähe von 0° oder 180° liegt.

Kann nur in einem der beiden bekannten Punkte beobachtet werden, weil der andere unzugänglich ist, so muß dafür der Punkt Q zugänglich sein, in dem dann der Winkel γ als zweiter Dreieckswinkel zu messen ist. Man spricht in einem solchen Fall von einer Punktbestimmung durch Seitwärtsabschneiden. Da der Winkel im unzugänglichen bekannten Punkte als die Ergänzung der Summe der gemessenen Dreieckswinkel auf 180° leicht berechnet werden kann, so unterscheidet sich die rechnerische Behandlung des Seitwärtsabschneidens nicht von derjenigen des Vorwärtseinschneidens.

Um die Genauigkeit einer Punktbestimmung durch Vorwärtseinschneiden ohne Winkelausgleichung zu ermitteln, denken wir uns die Koordinaten x, y des Neupunktes als Funktionen der fehlerhaften Beobachtungen $\alpha \pm m_\alpha, \beta \pm m_\beta$ dargestellt. Die Anwendung des mittleren Fehlergesetzes auf diese Funktionen führt zu den mittleren Koordinatenfehlern

$$\left. \begin{aligned}
 m_x &= \pm \frac{c}{\sin^2 \gamma} \sqrt{\{\sin \beta \cos (\beta + \psi)\}^2 m_\alpha^2 + \{\sin \alpha \cos (\alpha - \psi)\}^2 m_\beta^2}, \\
 m_y &= \pm \frac{c}{\sin^2 \gamma} \sqrt{\{\sin \beta \sin (\beta + \psi)\}^2 m_\alpha^2 + \{\sin \alpha \sin (\alpha - \psi)\}^2 m_\beta^2},
 \end{aligned} \right\} (310)$$

wenn mit ψ der Richtungswinkel $(P_1 P_2)$ der Grundlinie bezeichnet wird.

Benützen wir, wie üblich, als Maß für den mittleren Punktfehler den Ausdruck

$$m_p = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \dots \dots \dots (311)$$

so ergibt sich in

$$m_p = \pm \frac{c}{\sin^2 \gamma} \sqrt{\sin^2 \beta \cdot m_\alpha^2 + \sin^2 \alpha \cdot m_\beta^2} = \pm \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{a^2 m_\alpha^2 + b^2 m_\beta^2} \quad (312)$$

¹⁾ Da der relative Fehler der zu einem Logarithmus mit einer 5-stelligen Tafel aufgeschlagenen Zahl bis zu rund $0,8 \cdot 10^{-5}$ anwachsen kann, und in obigem Beispiel Entfernungen über 1 km auftreten, so sind in den Endergebnissen x, y aus rechnerischen Gründen die cm nicht mehr ganz sicher. Sollen diese feststehen, so muß man bei Entfernungen über 500 m mit 6-stelligen Logarithmentafeln rechnen.

ein von der Lage des Dreiecks zum Koordinatensystem unabhängiger Ausdruck. Für gleich genaue Beobachtungen wird $m_\alpha = m_\beta = m$ und

$$m_p = \pm m \frac{c}{\sin^2 \gamma} \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} = \pm \frac{m}{\sin \gamma} \sqrt{a^2 + b^2} \dots (313)$$

Der mittlere Punktfehler wird am kleinsten, wenn der Neupunkt auf der Mittelsenkrechten zur Grundlinie liegt und durch einen aus der Bedingung $\sin \gamma = \frac{2}{3} \sqrt{2}$ folgenden Schnittwinkel $\gamma \approx 109\frac{1}{2}^\circ$ bestimmt wird. In diesem günstigsten Fall nimmt m_p den besonderen Wert $\pm m \cdot c \sqrt{\frac{27}{32}}$ an.

Die in diesen Formeln von (310) ab enthaltenen Winkelfehler sind in Bogenmaß zu verstehen.

Werden zur Berechnung die durch die Verteilung des Dreieckswiderspruchs verbesserten Winkel α, β verwendet und bedeutet m wieder den mittleren Fehler der gleich genau beobachteten Winkel, so ist

$$m_p = \frac{m \cdot c}{\sin^2 \gamma} \sqrt{\frac{2}{3}(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma)} \dots (313a)$$

der Ausdruck für den mittleren Punktfehler, welcher im gleichschenkeligen Dreieck ($a = b$) mit dem Schnittwinkel $\gamma \approx 100^\circ 44'$ sein absolutes Minimum $0,798 \cdot c \cdot m$ erreicht.

Während beim Vorwärtseinschneiden und beim Seitwärtsabschneiden je zwei Instrumentenaufstellungen vorzunehmen sind, wird beim Rückwärtseinschneiden¹⁾ das Instrument nur im Neupunkte Q (Abb. 184) selbst aufgestellt, wo die Winkel u und v gemessen werden, unter denen von Q aus die beiden Seiten P_1P_2 und P_2P_3 eines durch die drei bekannten Punkte $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ bestimmten Dreiecks erscheinen. Da die gegebenen Punkte nicht zugänglich sein müssen, so spricht man auch von der Aufgabe der unzugänglichen Punkte.

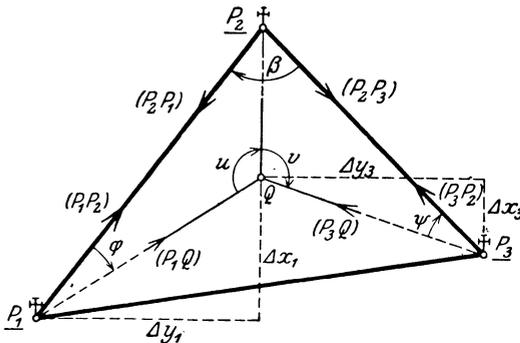


Abb. 184. Rückwärtseinschneiden mit Koordinatenberechnung.

Um die Koordinaten x, y von Q zu ermitteln, leitet man bei der sog. *Burckhardtschen Lösung*²⁾ (1801) zunächst in bekannter Weise die Seiten P_1P_2 und P_2P_3 nach Richtung und Länge ab. Damit ergibt sich der Dreieckswinkel bei P_2 als die Richtungswinkeldifferenz

$$\beta = (P_2 P_1) - (P_2 P_3) \dots (314)$$

Zur Bestimmung der nunmehr einzuführenden Hilfswinkel φ, ψ erhält man zunächst aus dem Viereck $P_1 P_2 P_3 Q$

¹⁾ Die erste trigonometrische Lösung des Rückwärtseinschneidens hat 1617 *Willebrord Snellius* gegeben (*Snellius, Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, Lugduni Batavorum 1617*), während die erste Behandlung der Aufgabe mit Koordinatenberechnung wohl *Delambre* zuzuschreiben ist (*Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, Paris, An 7, S. 143*).

²⁾ Nach *Liebitzky* (ZVW. 1920, S. 18) rührt die Einführung der Hilfswinkel φ, ψ von dem Göttinger Professor *Abraham Gotthelf Kästner* her, der sie in seinen „Geometrischen Abhandlungen“ 1790 verwendete.

$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 180^\circ - \frac{1}{2}(u + v + \beta) = \gamma_1, \dots \dots \dots (315)$$

also die halbe Summe der gesuchten Winkel. Aus den in $P_2 Q$ zusammenstoßenden Dreiecken $P_1 P_2 Q$ und $P_2 P_3 Q$ ergibt sich die gemeinsame Seite doppelt, nämlich

$$P_2 Q = P_1 P_2 \frac{\sin \varphi}{\sin u} = P_2 P_3 \frac{\sin \psi}{\sin v} \dots \dots \dots (316)$$

Daraus aber findet man unmittelbar das Sinusverhältnis

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{P_2 P_3}{P_1 P_2} \cdot \frac{\sin u}{\sin v} = \text{ctg } \lambda = \frac{\text{ctg } \lambda}{1} \dots \dots \dots (317)$$

der gesuchten Winkel. Daß der Hilfswinkel λ um 180° unbestimmt bleibt, ist belanglos, da er später in einem Ausdruck von der Form $\text{ctg}(C + \lambda)$ erscheint, dessen Zahlenwert demjenigen von $\text{ctg}(C + \lambda + 180^\circ)$ gleich ist.

Durch entsprechende Subtraktion und Addition erhält man aus (317)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} &= \frac{\text{ctg } \lambda - 1}{\text{ctg } \lambda + 1} \\ \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} &= \frac{\text{ctg } 45^\circ \text{ctg } \lambda - 1}{\text{ctg } \lambda + \text{ctg } 45^\circ} \end{aligned} \right\} \dots \dots (318)$$

Daraus aber folgt unmittelbar die Gleichung

$$\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \text{tg } \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \text{ctg}(45^\circ + \lambda) = \text{tg } \gamma_1 \text{ctg}(45^\circ + \lambda), \dots (319)$$

woraus man die halbe Differenz der Hilfswinkel, nämlich

$$\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \gamma_2 \dots \dots \dots (320)$$

gewinnt. Die Hilfswinkel selbst sind nach (315) und (320) die Ausdrücke

$$\varphi = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \psi = \gamma_1 - \gamma_2 \dots \dots \dots (321)$$

γ_2 ist zunächst um 180° unbestimmt. Wurde der Quadrant richtig gewählt, so muß die nunmehr folgende Berechnung der Seiten $P_2 Q$, $P_3 Q$ auf positive Werte führen. Erscheinen negative Ergebnisse, so sind γ_2 und mit ihm φ und ψ je um 180° zu ändern. Auch schon auf Grund einer rohen Skizze kann man den Quadranten für γ_2 bestimmen.

Nunmehr sind die Längen und Richtungswinkel der von den bekannten Punkten P_1 und P_3 zum Neupunkt Q führenden Seiten zu ermitteln. Sie lassen sich leicht aus der Abbildung ablesen, und es ist

$$P_1 Q = P_1 P_2 \frac{\sin(u + \varphi)}{\sin u}, \quad P_3 Q = P_2 P_3 \frac{\sin(v + \psi)}{\sin v} \dots \dots (322)$$

bzw. $(P_1 Q) = (P_1 P_2) + \varphi, \quad (P_3 Q) = (P_3 P_2) - \psi \dots \dots (323)$

Die den Strecken $P_1 Q$ und $P_3 Q$ entsprechenden Koordinatenunterschiede sind die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= P_1 Q \cos(P_1 Q), & \Delta x_3 &= P_3 Q \cos(P_3 Q), \\ \Delta y_1 &= P_1 Q \sin(P_1 Q), & \Delta y_3 &= P_3 Q \sin(P_3 Q). \end{aligned} \right\} \dots \dots (324)$$

Werden sie zu den Koordinaten der Streckenanfangspunkte hinzugefügt, so ergeben sich die gesuchten Koordinaten x, y des Neupunktes mit Kontrolle, nämlich

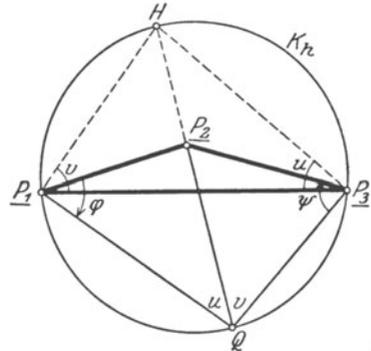
$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \Delta x_1 = x_3 + \Delta x_3, \\ y &= y_1 + \Delta y_1 = y_3 + \Delta y_3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (325)$$

Ein nach den vorstehenden Entwicklungen berechnetes Zahlenbeispiel enthält Tab. 18.

Tabelle 18.

1. d)		a)		b)		c)	
		Gegebene Punkte		Richtungen		Winkel	
$Q = \triangle 18$ $x_2 = -2\ 992,05$ $y_2 = -10\ 698,05$		$P_1 = \triangle 7$ $P_2 = \triangle 8$ $P_3 = \triangle 9$		$232^\circ\ 22'$ $0^\circ\ 00'$ $99^\circ\ 29'\ 41''$		$u = 127^\circ\ 37'\ 45''$ $v = 99^\circ\ 29'\ 41''$ $u + v = 227^\circ\ 07'\ 26''$	
4.		7. Berechnung der Koordinaten von Q.					
$ctg \lambda = \frac{P_2 P_3 \sin u}{P_1 P_2 \sin v}$							
$\log \sin u$ $\log P_2 P_3$ E. $\log \sin v$ E. $\log P_1 P_2$	$9.89\ 872$ $2.91\ 880$ $0.00\ 599$ $7.14\ 449$	$\log P_1 P_2$ $\log \sin(u + \psi)$ E. $\log \sin u$	$2.85\ 551$ $9.49\ 560$ $0.10\ 128$	$\log P_2 P_3$ $\log \sin(v + \psi)$ E. $\log \sin v$	$2.91\ 880$ $9.83\ 663$ $0.00\ 599$		
$\log ctg \lambda$ $45^\circ + \lambda$	$9.96\ 800$ $47^\circ\ 06'\ 32''$ $92\ 06\ 32$	$\log P_1 Q$ $\log \cos(P_1 Q)$	$2.45\ 239$ $9.30\ 062_n$	$\log P_3 Q$ $\log \cos(P_3 Q)$	$2.76\ 142$ $9.76\ 499_n$		
5.	$\log ctg(45^\circ + \lambda)$ $\log tg \gamma_1$ $\log tg \gamma_2$	$8.56\ 613_n$ $9.85\ 552$ $8.42\ 165_n$	$\log \Delta x_1$ Δx_1 x_1 x	$1.75\ 301_n$ $56,62$ $-2\ 479,31$ $-2\ 535,98$	$\log \Delta x_3$ Δx_3 x_3 x	$2.52\ 641_n$ $336,05$ $-2\ 199,89$ $-2\ 535,94$	
	γ_2 γ_1	$-1^\circ\ 30'\ 45''$ $35\ 38\ 26$	$\log P_1 Q$ $\log \sin(P_1 Q)$	$2.45\ 239$ $9.99\ 115_n$	$\log P_3 Q$ $\log \sin(P_3 Q)$	$2.76\ 142$ $9.91\ 015$	
	$\varphi = \gamma_1 + \gamma_2$ $\psi = \gamma_1 - \gamma_2$	$34\ 07\ 41$ $367\ 09\ 11$	$\log \Delta y_1$ Δy_1 y_1 y	$2.44\ 354_n$ $-277,68$ $-10\ 191,87$ $-10\ 469,55$	$\log \Delta y_3$ Δy_3 y_3 y	$2.67\ 157$ $469,43$ $-10\ 939,00$ $-10\ 469,57$	
2.		Länge und Richtung der Dreiecksseiten					
r		1		3			
x_r y_r $y_r - y_2$ $x_r - x_2$ $\log \Delta y$ $\log \Delta x$		$2\ 479,31$ $-10\ 191,87$ $501,18$ $512,74$ $2.69\ 999$ $2.70\ 990$		$-2\ 199,89$ $-10\ 939,00$ $245,95$ $792,16$ $2.39\ 085_n$ $2.89\ 881$			
$\log tg(P_2 P_r)$ $\log \sin(P_2 P_r)$ $\log \cos(P_2 P_r)$		$9.99\ 009$ $9.84\ 447$ $9.85\ 439$		$9.49\ 204_n$ $9.47\ 206$ $9.98\ 001_n$			
$\log P_2 P_r$ $(P_2 P_r)$		$2.85\ 551$ $44^\circ\ 20'\ 46''$		$2.91\ 880$ $342^\circ\ 45'\ 04''$			
3.		$\beta = (P_3 P_1) - (P_2 P_3)$ $u + v + \beta$ $= 180^\circ - \frac{1}{2}(u + v + \beta)$					
6.		$(P_1 Q) = (P_1 P_2) + \varphi$ $(P_3 Q) = (P_3 P_2) - \psi$ $u + \varphi$ $v + \psi$					
		$258^\circ\ 28'\ 27''$ $125\ 35\ 53$ $161\ 45\ 26$ $136\ 38\ 52$					

Eine eigenartige, *Collins* (1671) zugeschriebene Lösung des Rückwärtseinschneidens sei im folgenden skizziert. In dem den Dreieckspunkten P_1, P_3 und dem gesuchten Punkt Q umschriebenen Hilfskreis K_h (Abb. 185) bestimmt die Richtung QP_2 einen Hilfspunkt H (*Collinscher Hilfspunkt*) so, daß die Seiten P_1H, P_3H von den Gegenpunkten P_3 und P_1 aus unter den in Q gemessenen Winkeln u, v erscheinen. Man kann also



1. den Punkt H mittels u, v von P_1 und P_3 aus durch Vorwärtseinschneiden bestimmen;

2. aus den Koordinaten von H, P_3, P_1 und P_3 die Richtungswinkel $(HP_3) = (P_3Q), (P_1P_2), (P_3P_2)$ sowie die Seiten P_1P_2, P_3P_2 ableiten und die Richtungen $(P_1Q) = (HP_2) - u, (P_3Q) = (HP_2) + v$ aufstellen; damit erhält man

Abb. 185. Lösung des Rückwärtseinschneidens noch *Collins*.

3. die Hilfswinkel $\varphi = (P_1Q) - (P_1P_2)$ und $\psi = (P_3P_2) - (P_3Q)$, mit deren Hilfe aus den vorher berechneten Seiten P_1P_2, P_2P_3 und den Winkeln u, v mittels des Sinussatzes auch die Längen P_1Q und P_3Q gewonnen werden.

4. Mit den Werten $P_1Q, (P_1Q)$ und $P_3Q, (P_3Q)$ findet man endlich in bekannter Weise die Koordinaten von Q .

Eine andere eigenartige Lösung, die auf das Vorwärtseinschneiden zurückführt, hat *Runge* angegeben¹⁾.

Neuerdings versucht man, die Lösung des Rückwärtseinschneidens dem Arbeiten mit der Rechenmaschine anzupassen. Ein zu diesem Zwecke z. B. von *Reutzel*²⁾ entwickeltes Formelsystem ist unter Benützung der hier bisher gebrauchten Bezeichnungen das folgende:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} u &= a_1, & y_3 - y_2 + (x_3 - x_2) a_1 &= b_1, & x_3 - x_2 - (y_3 - y_2) a_1 &= c_1, \\ \operatorname{tg} v &= a_2, & y_2 - y_1 - (x_2 - x_1) a_2 &= b_2, & x_2 - x_1 + (y_2 - y_1) a_2 &= c_2, \end{aligned} \right\} (326)$$

$$\frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \mu, \quad \Delta y_2 = \frac{\mu b_1 + c_1}{a_1(1 + \mu^2)} = \frac{\mu b_2 + c_2}{a_2(1 + \mu^2)}, \quad \Delta x_2 = \mu \cdot \Delta y_2, \quad (327)$$

$$x = x_2 + \Delta x_2, \quad y = y_2 + \Delta y_2 \dots \dots \dots (328)$$

Die Lösung des Rückwärtseinschneidens mit Hilfe der Stücke u, v wird unbestimmt, wenn der Neupunkt Q auf dem Umkreis K_g (Abb. 186) des gegebenen Dreiecks liegt. Dann erscheinen die Seiten des gegebenen Dreiecks nicht nur von dem zu bestimmenden Punkte Q aus, sondern aus jedem der auf dem genannten Umkreis liegenden Punkte Q' unter denselben Peripheriewinkeln u und v , welche für sich allein daher den Ort Q nicht mehr eindeutig festlegen. Wegen dieser bedenklichen Eigenschaft des dem gegebenen Dreieck umschriebenen Kreises K_g spricht man von einem gefährlichen Kreis.

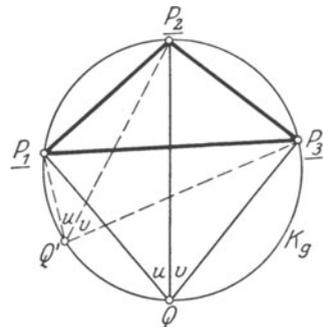


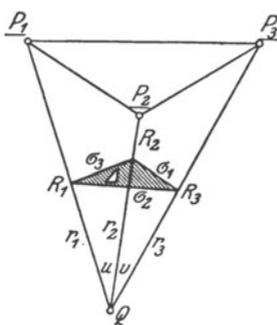
Abb. 186. Gefährlicher Kreis beim Rückwärtseinschneiden.

¹⁾ *Runge, C.*, Über die Verwandtschaft des Rückwärts- und Vorwärtseinschneidens, Z.V.W. 1899, S. 313—315.

²⁾ *Reutzel, P.*, Rückwärtseinschneiden mit Koordinaten, Z.V.W. 1908, S. 57—59. Siehe hierzu auch *Runge*, Rückwärtseinschneiden mit Koordinaten, Z.V.W. 1894, S. 204 bis 206 und *Sossna*, Z.V.W. 1896, S. 269 ff.

Die analytische Untersuchung dieses Falles ergibt für $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ den unbestimmten Ausdruck $0 \cdot \infty$.

Zur Genauigkeit der Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden sei folgendes bemerkt. Bestimmten Fehlern du, dv in u und v entsprechen die Koordinatenänderungen



$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{1}{2\Delta} (\xi_1 dv + \xi_3 du), \\ dy &= \frac{1}{2\Delta} (\eta_1 dv + \eta_3 du), \end{aligned} \right\} \dots \dots (329)$$

Abb. 187. Reziprokendreieck zur Beurteilung der Genauigkeit des Rückwärtseinschneidens.

wenn Δ die Fläche des zum gegebenen Dreieck $P_1 P_2 P_3$ gehörigen Reziprokendreiecks $R_1 R_2 R_3$ (Abb. 187) ist, dessen auf den Strahlen $Q P_1 = s_1, Q P_2 = s_2, Q P_3 = s_3$ liegende Ecken vom gesuchten Punkt Q die Abstände $r_1 = 1 : s_1, r_2 = 1 : s_2, r_3 = 1 : s_3$ besitzen und wenn ferner ξ_1, η_1 sowie ξ_3, η_3 die auf den Anfangspunkt R_2 bezogenen rechtwinkligen Koordinaten der Punkte R_1, R_3 in einem zum Hauptsystem X, Y parallelen System bedeuten¹⁾. Eggert hat an dem in der eben gegebenen Anmerkung genannten Ort auch die der Winkelmessung und der Richtungsmessung entsprechenden Ausdrücke

$$m_p = \pm \frac{m_w}{2\Delta} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}, \quad (\text{Winkelmessung}) \dots \dots (330)$$

$$m_p = \pm \frac{m_r}{2\Delta} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (\text{Richtungsbeobachtungen}) \quad (331)$$

für den mittleren Punktfehler des Rückwärtseinschneidens aufgestellt. Hier hat Δ dieselbe Bedeutung wie in (329), m_w ist der mittlere Winkel-, m_r der mittlere Richtungsfehler, während $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Längen der den Punkten R_1, R_2, R_3 gegenüberliegenden Seiten bezeichnen.

Ist außer den notwendigen Winkeln u, v noch deren Summe oder ihre Ergänzung auf 2π gemessen und wird der auftretende Horizontwiderspruch gleichmäßig auf die gemessenen Winkel verteilt, so ergibt sich der mittlere Punktfehler des mit diesen verbesserten Winkeln berechneten Rückwärtsschnittes zu

$$m_p = \pm \frac{m_w}{2\Delta} \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} \dots \dots \dots (332)$$

Bei der Hansenaufgabe wird die Lage zweier unbekannter Punkte

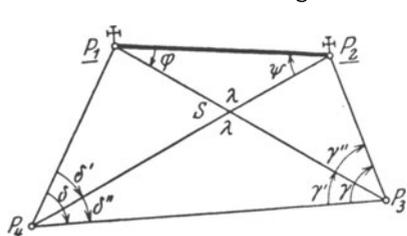


Abb. 188. Die Hansen-Aufgabe. (Direkte Lösung mit Hilfswinkeln.)

$P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$ (Abb. 188) aus den auf ihnen nach zwei bekannten Punkten $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ und dem jeweils anderen unbekanntem Punkte beobachteten Richtungen gefunden. Man spricht auch von der Aufgabe der unzugänglichen Entfernung, da die beiden gegebenen Punkte nicht zugänglich sein müssen. Eine direkte Lösung der Aufgabe führt zu folgendem Rechnungsgang. Man

¹⁾ Die Ausdrücke (329) folgen unmittelbar aus den in Eggert, O., Einführung in die Geodäsie, Leipzig 1907, S. 136 für die Koordinatendifferentiale mitgeteilten Formeln.

leitet zunächst aus den Koordinaten der bekannten Punkte die Richtung $(P_1 P_2)$ und Länge $P_1 P_2$ ihrer Verbindungslinie ab. Zur Bestimmung zweier Hilfswinkel φ, ψ , deren Scheitel in P_1 und P_2 liegen, erhält man aus den beiden, einen gleichen Winkel λ besitzenden Dreiecken $P_1 S P_2$ und $P_3 S P_4$ die halbe Summe der Hilfswinkel

$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1}{2}(\gamma' + \delta'') = \gamma_1, \dots \dots \dots (333)$$

während ein Vergleich der beiden für $P_3 P_4$ aus $P_1 P_2$ über $P_1 P_4$ bzw. $P_2 P_3$ sich ergebenden Ausdrücke auf das Sinusverhältnis

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \gamma'' \sin \delta'' \sin(\delta + \gamma')}{\sin \gamma' \sin \delta' \sin(\gamma + \delta'')} = \text{ctg } \lambda \dots \dots \dots (334)$$

führt. Genau wie beim Rückwärtseinschneiden findet man auch hier die Beziehungen

$$\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \text{tg } \gamma_1 \text{ ctg}(45^\circ + \lambda), \dots \dots \dots (334a)$$

$$\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \gamma_2, \dots \dots \dots (335)$$

$$\varphi = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \psi = \gamma_1 - \gamma_2 \dots \dots \dots (336)$$

Die von $P_1 P_2$ ausgehende und zur Probe wieder an diese Seite anschließende Längenberechnung erfolgt mittels des Sinussatzes und führt auf die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} P_2 P_3 &= P_1 P_2 \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma''}, & P_3 P_4 &= P_2 P_3 \frac{\sin(\gamma + \delta'')}{\sin \delta''}, \\ P_4 P_1 &= P_3 P_4 \frac{\sin \gamma'}{\sin(\gamma' + \delta)}, & P_1 P_2 &= P_4 P_1 \frac{\sin \delta'}{\sin \psi}, \end{aligned} \right\} \dots (337)$$

welche positiv werden, wenn γ_2 im richtigen Quadranten aufgeschlagen wurde. Ein etwa auftretendes negatives Vorzeichen für die Längen ist durch eine Änderung von γ_2, φ, ψ um je 180° zu beseitigen.

Auch die Ableitung der Richtungswinkel dieser Seiten schließt zur Probe beiderseits an $P_1 P_2$ an. Sie sind die einfachen Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} (P_2 P_3) &= (P_1 P_2) + \varphi + \gamma'', & (P_4 P_1) &= (P_4 P_3) - \delta, \\ (P_3 P_4) &= (P_3 P_2) - \gamma, & (P_1 P_2) &= (P_4 P_1) + \psi + \delta'. \end{aligned} \right\} (338)$$

Schließlich erfolgt in bekannter Weise die Koordinatenberechnung auf dem Wege P_2, P_3, P_4, P_1 .

Auch bei der aus Abb. 189 ersichtlichen Punktanordnung, wo $P_3 P_4$ nicht mehr Vierecksseite sondern Diagonale ist, kann zur Lösung das oben entwickelte Formelsystem dienen, wenn die Punktbezeichnung so erfolgt, daß der um P_1 im Uhrzeigersinn gedrehte Strahl $P_1 P_2$ erst nach P_3 und dann nach P_4 gelangt. Außerdem sind unter $\gamma, \gamma', \gamma''$ und $\delta, \delta', \delta''$ die der vorigen Punktanordnung entsprechenden Richtungsunterschiede zu verstehen.

Die indirekte Lösung der *Hansenaufgabe*, welche die Hilfswinkel φ, ψ umgeht, berechnet erst mit einer Annahme $P_3' P_4'$ für die Länge $P_3 P_4$ die Seitenlängen einer zur gegebenen ähnlichen Figur, wobei die der Strecke $P_1 P_2$ entsprechende Länge $P_1' P_2'$ gefunden

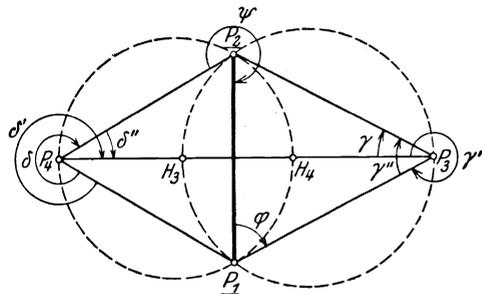


Abb. 189. Lösung der *Hansen-Aufgabe* mit *Collinsschen* Hilfskreisen.

wird. Die im Verhältnis $P_1 P_2 : P_1' P_2'$ vorgenommene Seitenreduktion führt auf die Längen der Hauptfigur. Der übrige Teil der Lösung (Richtungsableitung und Koordinatenberechnung) unterscheidet sich nicht von der direkten Auflösung.

Die *Hansenaufgabe* kann auch mit Hilfe von zwei *Collinsschen* Hilfspunkten H_3, H_4 (Abb. 189), welche die durch die Neupunkte bestimmte Richtung auf den zwei durch die gegebenen Punkte und je einen Neupunkt bestimmten Kreisen ausschneidet, in ähnlicher Weise berechnet werden wie das Rückwärtseinschneiden mit einem solchen Hilfspunkt.

Wenn die beiden Neupunkte zusammenfallen oder beide auf der durch die gegebenen Punkte bestimmten Richtung liegen, so wird die Lösung der Aufgabe unbestimmt.

Eine Untersuchung des der *Hansenaufgabe* entsprechenden mittleren Punktfehlers hat *Eggert*¹⁾ durchgeführt. Nach ihm sind unter allen Umständen jene Vierecksformen ungünstig, deren Neupunkte sehr nahe beieinander liegen, besonders aber diejenigen, bei denen ein Festpunkt in der Nähe der Verbindungslinie der Neupunkte liegt²⁾.

23. Theodolit-Polygonzüge.

Auch im Dreiecksnetz letzter Ordnung sind die Seiten noch viel zu lang, um der Einzelaufnahme als Standlinien dienen zu können; auch würden sie dafür viel zu ungünstig liegen. Man schaltet daher in das Dreiecksnetz noch das Polygonnetz ein, dessen zahlreiche, etwa 100—150 m voneinander abstehende Punkte durch die Verbindung von Längen- und Winkelmessungen verhältnismäßig viel billiger als die Dreieckspunkte bestimmt werden können.

a) Anlage und Messung der Polygonzüge.

Polygonzüge, Winkelzüge oder Streckenzüge haben eine vorwiegend praktische Bedeutung und werden daher so angelegt, daß sie vor allem für die nachfolgende Stückmessung günstig liegen und eine Aufnahme mit kurzen Ordinaten ermöglichen. Sie folgen den verschiedenen Verkehrswegen, Wasserläufen, Gewannen-, Eigentums- und Kulturgrenzen. Auch darauf ist bei der Punktauswahl zu sehen, daß die Züge möglichst auf derselben Seite der Verkehrswege und Wasserläufe bleiben, daß gute Instrumentenaufstellungen möglich werden und von den einzelnen Punkten aus die beide Nachbarpunkte bezeichnenden Stäbe an ihren Fußpunkten oder doch möglichst nahe darüber angezielt werden können; auch sollen die Umstände für die Seitenmessung nicht allzu ungünstig sein. Die Wiederauffindung der

¹⁾ *Eggert O.*, Die Genauigkeit der Punktbestimmung durch *Hansens* Problem, Z.V.W. 1911, S. 1—16.

²⁾ Außer den hier besprochenen Arten der Punkteinschaltung wäre noch zu nennen die Punktbestimmung durch Gegenschnitt, d. i. eine Abart des Rückwärtseinschneidens, bei welcher u und ψ oder v und φ beobachtet werden (siehe hierzu Z.V.W. 1912, S. 148—149); ferner das Rückwärtseinschneiden mit zwei Nachbarpunkten (*Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, II. Bd., 6. A., Stuttgart 1904, S. 352ff.) und die *Mareksche* Aufgabe (siehe ebendort, S. 355). Bei großen Höhenunterschieden kann die horizontale Lage eines Punktes auch aus dem in ihm gemessenen Horizontalwinkel zwischen zwei nach Lage und Höhe bekannten Punkten, sowie den Höhenwinkeln der genommenen Sichten ermittelt werden (*Werner*, Punktbestimmung, Z.V.W. 1913, S. 161—169 und *Dock*, Rückwärtseinschneiden im Raum, Österreich. Z.V.W. 1910, 291—305). Auch aus den Höhenwinkeln allein, welche im gesuchten Punkte nach drei der Lage und Höhe nach bekannten Punkten beobachtet werden, kann man den Beobachtungsort nach Lage und Höhe bestimmen (*Werner*, Punktbestimmung durch Vertikalwinkelmessung, Z.V.W. 1913, S. 241—253.)

Polygonpunkte wird erleichtert, wenn sie auf der geraden Verbindungslinie zweier Grenzsteine liegen. Soweit es möglich ist, trägt man natürlich auch theoretischen Anforderungen Rechnung, indem wenigstens die Hauptzüge einigermaßen gestreckt und gleichseitig angelegt werden. Auch soll die Zuglänge im allgemeinen 1 km nicht überschreiten.

Man unterscheidet offene Polygonzüge, geschlossene Züge und Zugverknötungen. Die wichtigste Form ist der offene, meist zwischen zwei Dreieckspunkte P_1, P_n (Abb. 190) eingespannte Zug (zweifacher Punktanschluß), in dessen Endpunkten teils zur bequemen Orientierung, teils zur Steigerung der Genauigkeit noch je eine Anschlußrichtung nach je einem bekannten Punkte gemessen wird. Eine Seltenheit ist der mehr mark-

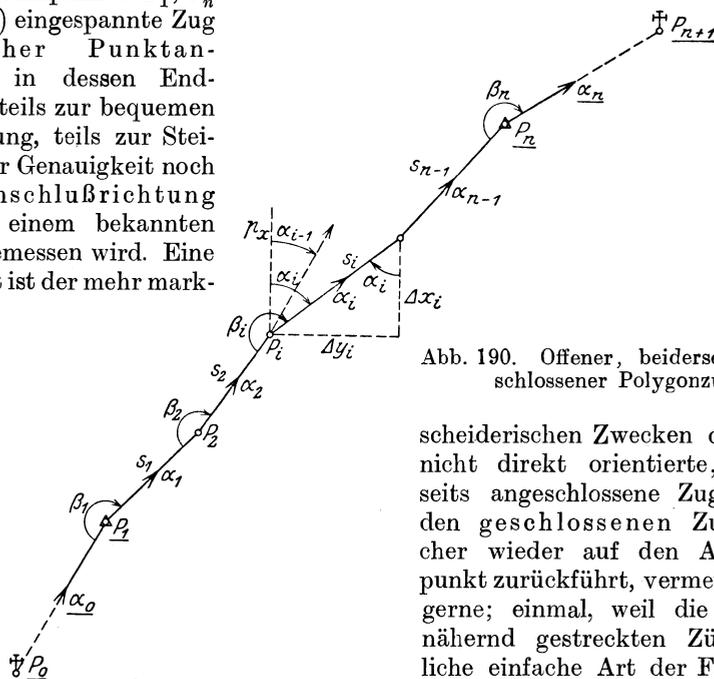


Abb. 190. Offener, beiderseits angeschlossener Polygonzug.

scheiderischen Zwecken dienende, nicht direkt orientierte, beiderseits angeschlossene Zug. Auch den geschlossenen Zug, welcher wieder auf den Ausgangspunkt zurückführt, vermeidet man gerne; einmal, weil die bei annähernd gestreckten Zügen übliche einfache Art der Fehlerverteilung hier nur noch vom Stand-

punkt der Einfachheit aus berechtigt erscheint, dann aber auch, weil bei der Berechnung geschlossener Züge ein etwaiger Längenfehler im Meßwerkzeug nicht aufgedeckt wird. Bei Zugverknötungen endlich, welche zur Vermeidung allzu stark gebogener oder auch allzu langer Züge dienen, führen mehrere möglichst symmetrisch angeordnete Züge zu einem gemeinsamen Knotenpunkt.

Die Versicherung der Polygonpunkte ist vor der Zugmessung durchzuführen und erfolgt stets zentrisch meist durch etwa 60—80 cm lange behauene Steine mit quadratischem Querschnitt, welche in ihrer Stirnfläche eine den Polygonpunkt bezeichnende Vertiefung tragen. Im Stadtgebiet sind die Polygonpunkte wohl auch in besonderen Schutzkästen untergebracht, welche in den Straßenkörper einbetoniert und oben durch einen Deckel abgeschlossen werden. Eine weitere Versicherung der Polygonpunkte erfolgt durch eine sorgfältige Einmessung auf scharf bezeichnete Punkte der näheren Umgebung. Wichtigere Punkte werden zweckmäßig auch noch unterirdisch durch eine Platte oder eine kurze Röhre zentrisch versichert.

Zur Festlegung eines Polygonzuges P_1, P_2, \dots, P_n (Abb. 190) werden die je zwei Nachbarpunkte verbindenden Polygonseiten s_1, s_2, \dots, s_{n-1} sowie ihre links liegenden Brechungswinkel β gemessen. Auch werden in den Zugendpunkten die Anschlußwinkel β_1 und β_n beobachtet, welche die erste Polygonseite mit der ersten Anschlußrichtung $P_1 P_0$ bzw. eine zweite Anschlußrichtung

$P_n P_{n+1}$ mit der letzten Polygonseite einschließt. Zur Seitenmessung dienen Schneidenlatten und Gradbogen oder gewöhnliche Latten, während das Meßband bei geringeren Genauigkeitsansprüchen Verwendung findet. Teils zum Schutz gegen grobe Fehler, teils zur Einschränkung der unvermeidlichen Fehler werden alle Seiten doppelt, das zweite Mal in entgegengesetzter Richtung gemessen. Beide Ergebnisse müssen innerhalb einer bestimmten Fehlergrenze D_s übereinstimmen; im anderen Fall ist die Messung zu wiederholen.

Von Zeit zu Zeit ist zur Verringerung der konstanten Längenmessungsfehler eine Abgleichung der Meßlatten oder der Meßbänder vorzunehmen, besonders dann, wenn Messungen in geschlossenen oder stark gebogenen Zügen oder in unsymmetrischen Zugverknötungen bevorstehen.

Für die Winkelmessung ist auf eine sorgfältige Lotrechtstellung der Zielstäbe, soweit ihre Fußpunkte unsichtbar sind und auf eine gute Zentrierung des Instrumentes wohl zu achten. Insbesondere soll der Zentrierungsfehler senkrecht zu dem durch die drei je zusammengehörigen Polygonpunkte bestimmten Kreis möglichst gering bleiben. Die Bestimmung der Polygonwinkel erfolgt am einfachsten mittels Richtungsbeobachtungen; ein in zwei Fernrohrlagen sorgfältig beobachteter Satz reicht in der Regel aus. Zur Lotrechtstellung der Alhidadenachse kann, soweit es sich um horizontale Sichten handelt, eine gute, berichtigte Dosenlibelle dienen; bei geneigten Sichten kann man hierzu die Röhrenlibelle nicht entbehren und bei sehr steilen Zielungen, wie sie manchmal beim Anschluß an Hochpunkte auftreten, wird am besten die jeweilige Lage der Kippachse gegen den Horizont an einer Kippachsenlibelle verfolgt.

b) Berechnung der Polygonzüge.

Die Berechnung des offenen Polygonzugs mit zweifachem Koordinaten- und Richtungsanschluß verlangt folgende Arbeiten:

1. Ableitung der Anschlußrichtungswinkel,
2. Ausgleichung der gemessenen Polygonwinkel,
3. Berechnung der Polygonseitenrichtungswinkel,
4. Aufstellung der vorläufigen Koordinatenunterschiede,
5. Ausgleichung der Koordinatenunterschiede,
6. Koordinatenberechnung der Polygonpunkte.

Bezeichnet α_i (Abb. 190) den Richtungswinkel der Polygonseite $P_i P_{i+1} = s_i$, so sind die Richtungswinkel α_0 und α_n beider Anschlußrichtungen durch die Ausdrücke

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \quad \dots \dots (339)$$

bestimmt. Für die Rechnung werden α_0 und α_n ebenso wie die Koordinaten der Anschlußpunkte als fehlerfreie Größen behandelt.

Aus der allgemeinen Beziehung

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + 180^\circ + \beta_i \quad \dots \dots (340)$$

folgt

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + 180^\circ + \beta_n \quad \dots \dots (341)$$

Ersetzt man hierin α_{n-1} durch α_{n-2} , dieses durch α_{n-3} usw. bis man auf α_0 zurückgekommen ist, so ergibt sich im Ausdruck

$$\alpha_n = \alpha_0 + [\beta] + n \cdot 180^\circ \quad \dots \dots (342)$$

eine zweite Form für den Richtungswinkel der zweiten Anschlußrichtung, welcher hier durch den Richtungswinkel der ersten Anschlußrichtung und die

Polygonwinkelsumme ausgedrückt ist. Ersetzt man in (342) $[\beta]$ durch $[\beta']$, wo die β' die fehlerhaften Beobachtungen bedeuten, so erscheint auch ein von α_n abweichender Wert

$$\alpha_n' = \alpha_0 + [\beta'] + n \cdot 180^\circ, \dots \dots \dots (343)$$

welcher um den sog. Richtungsanschlußwiderspruch

$$w = \alpha_n - \alpha_n' \dots \dots \dots (344)$$

zu verbessern ist. Dieses w , welches die Summe aller Polygonwinkelfehler ist, wird unter der allerdings nicht ganz zutreffenden Annahme, alle Polygonwinkel würden gleiche mittlere Fehler besitzen, nach den im Anschluß an (80) gemachten Ausführungen gleichmäßig auf die Polygonwinkel verteilt. Ist $v_\beta = w : n$ eine solche Einzelverbesserung, so sind die ausgeglichenen Polygonwinkel die Ausdrücke

$$\beta_i = \beta_i' + v_\beta = \beta_i' + \frac{w}{n} \dots \dots \dots (345)$$

Auch der Richtungsanschlußwiderspruch w darf eine gewisse Grenze nicht überschreiten.

Mit Hilfe der eben ausgeglichenen Polygonwinkel findet man nunmehr die ausgeglichenen Seitenrichtungswinkel

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_1 + 180^\circ, \dots \quad \alpha_i = \alpha_{i-1} + \beta_i + 180^\circ, \dots$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_n + 180^\circ. \dots \dots \dots (346)$$

Durch den letzten dieser Ausdrücke wird die ganze bisherige Rechnung mit Ausschluß der aus (339) abgeleiteten α_0 und α_n verprobt.

Aus den ausgeglichenen Seitenrichtungswinkeln und den mit Rücksicht auf die jeweilige Länge der Latten oder Bänder verbesserten Seitenlängen s ergeben sich die vorläufigen Koordinatenunterschiede

$$\Delta x_i' = s_i \cos \alpha_i, \quad \Delta y_i = s_i \cdot \sin \alpha_i, \dots \dots \dots (347)$$

welche entweder auf logarithmischem Wege oder beim Vorhandensein von Tafeln der natürlichen Werte der \sin und \cos durch Multiplikation (Rechenmaschine, Produktentafel) oder am besten unmittelbar aus hinreichend genauen Koordinatentafeln¹⁾ ermittelt werden.

Fügt man die Summe der vorläufigen Koordinatenunterschiede zu den Koordinaten des Anfangspunktes P_1 hinzu, so erhält man die fehlerhaften Koordinaten

$$x_n' = x_1 + [\Delta x'], \quad y_n' = y_1 + [\Delta y'] \dots \dots \dots (348)$$

des Zugendpunktes P_n . Die als Koordinatenanschlußwidersprüche bezeichneten Unterschiede

$$v_x = x_n - x_n', \quad v_y = y_n - y_n' \dots \dots \dots (349)$$

rühren von den Ungenauigkeiten der Seitenmessung und den nach der Winkelgleichung noch vorhandenen kleinen Winkelfehlern her. Sie sind die Summen der Fehler sämtlicher Koordinatenunterschiede und werden bei annähernd gestreckten Zügen in der Regel, vielfach aber auch bei anders geformten Zügen proportional den Streckenlängen auf die Koordinatenunterschiede verteilt. Auf $\Delta x_i'$, $\Delta y_i'$ treffen bei dieser einfachsten Verteilungsart die Verbesserungen

$$d \Delta x_i = \frac{s_i}{[s]} \cdot v_x, \quad d \Delta y_i = \frac{s_i}{[s]} \cdot v_y \dots \dots \dots (350)$$

¹⁾ Das zweckmäßigste Hilfsmittel dieser Art sind zurzeit wohl *Grünerts* Tafeln zur Berechnung der Koordinaten von Polygon- und Kleinpunkten, Stuttgart 1913, aus denen bis zu $s=300$ m mittels doppelter Interpolation die Koordinatenunterschiede bis auf 1 cm entnommen werden können.

Mit den in dieser oder auf eine andere Weise ausgeglichenen Koordinatenunterschieden

$$\Delta x_i = \Delta x'_i + d\Delta x_i, \quad \Delta y_i = \Delta y'_i + d\Delta y_i. \quad \dots \quad (351)$$

ergeben sich nunmehr die ausgeglichenen Koordinaten der Polygonpunkte:

$$\left. \begin{aligned} x_2 = x_1 + \Delta x_1, \dots \quad x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \dots \quad x_n = x_{n-1} + \Delta x_{n-1}, \\ y_2 = y_1 + \Delta y_1, \dots \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \dots \quad y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}. \end{aligned} \right\} (352)$$

Durch die Übereinstimmung der so berechneten Werte x_n, y_n mit ihren bekannten Sollwerten wird der letzte Teil von (348) einschl. ab geprüft.

Ein an diese Ausführungen anschließendes Zahlenbeispiel enthält Tab. 19.

Tabelle 19.

Seite s (in m) Punkt	Richtungs- winkel α Polygonw. β' v_β	$\log \cos \alpha$ $\log s$ $\log \sin \alpha$	$\log s \cdot \cos \alpha$ $\log \mathfrak{S} \sin \alpha$	$\Delta x' = s \cdot \cos \alpha$ $d\Delta x$ x	$\Delta y' = s \cdot \sin \alpha$ $d\Delta y$ y	Ableitung der Anschlußrichtungs- winkel
P_0	11° 42' 06''			$x_0 = +$ 10 005,14	$y_0 = +$ 3 116,05	$x_1 - x_0 = +2 005,89$ $y_1 - y_0 = + 415,46$ $\log \Delta y = 2.61 853$
P_1	198 10 30 + 9			+ 12 011,03	+ 3531,51	
115,46	29 52 45 182 05 20 + 9	9.93 806 2.06 243	2.00 049	+ 100,11 + 2	+ 57,52 - 1	$\log \Delta x = 3.30 231$ $\log \text{tg } \alpha_0 = 9.31 622$
P_2		9.69 738	1.75 981	+ 12 111,16	+ 3589,02	
128,89	31 58 14 178 19 40 + 9	9.92 856 2.11 022	2.03 878	+ 109,34 + 2	+ 68,25 - 1	$x_{n+1} - x_n = +1 214,70$ $y_{n+1} - y_n = + 884,82$
P_3		9.72 386	1.83 408	+ 12 220,52	+ 3657,26	
105,18	30 18 03 179 47 50 + 9	9.93 621 2.02 194	1.95 815	+ 90,81 + 1	+ 53,07 - 1	$\log \Delta y = 2.94 686$ $\log \Delta x = 3.08 447$ $\log \text{tg } \alpha_n = 9.86 239$
P_4		9.70 289	1.72 483	+ 12 311,34	+ 3710,32	
102,09	30 06 02 185 58 05 + 9	9.93 709 2.00 899	1.94 608	+ 88,32 + 1	+ 51,20 - 1	
$P_5 = P_n$		9.70 029	1.70 928	+ 12 399,67	+ 3 761,51	
P_{n+1}	36 04 16			+ 13 614,37	+ 4 646,33	
$[\beta']$ $\alpha_n =$	924 21 25 36 03 31			$[\Delta x'] = +388,58$ $x'_n = +12 399,61$	$[\Delta y'] = + 230,04$ $y'_n = +3 761,55$	
w $v_\beta =$ $m_\beta =$	+ 45 + 9 ± 20			$v_x = + 6$ $[s] = 451,62$	$v_y = - 4$	

Die Berechnung eines ohne Richtungsanschluß zwischen zwei bekannte Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_n(x_n, y_n)$ eingespannten Zuges erfolgt zunächst in einem an sich beliebigen Hilfskoordinatensystem, welches zweckmäßig so angenommen wird, daß P_1 seine Koordinaten beibehält und die X' -Achse in die Richtung der ersten Polygonseite fällt. Aus den in diesem System errechneten Koordinaten x'_n, y'_n des Zugendpunktes und aus x_1, y_1 für den Zugangfang erhält man den Richtungswinkel $(P_1 P'_n)$ der Schlußdiagonalen im Hilfssystem, während der im Hauptssystem X, Y abgeleitete entsprechende Wert $(P_1 P_n)$ ist. Man hat also zu allen im System X', Y' abgeleiteten Richtungswinkeln α' die Orientierungsverbesserung

$$\delta = (P_1 P_n) - (P_1 P'_n) \dots \dots \dots (353)$$

hinzuzufügen, um die Richtungswinkel

$$\alpha = \alpha' + \delta \dots \dots \dots (354)$$

im Hauptssystem zu erhalten.

Der so orientierte Zug kann nunmehr — allerdings ohne zweiten Richtungsanschluß, aber mit zweifachem Koordinatenanschluß — berechnet werden.

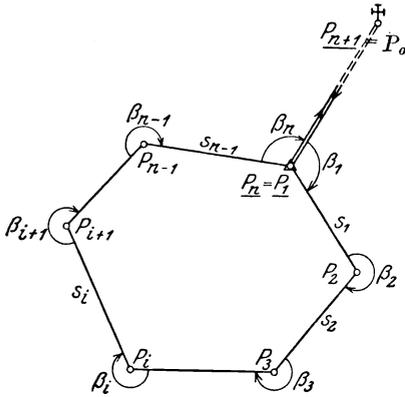


Abb. 191. Geschlossener Polygonzug mit Richtungsanschluß.

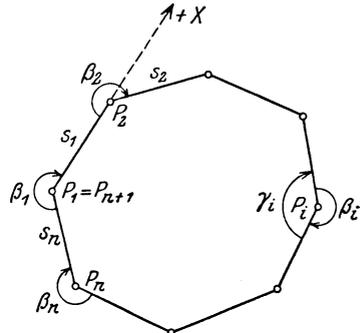


Abb. 192. Geschlossener Polygonzug ohne Richtungsanschluß.

In gleicher Weise wie der beiderseits orientierte und angeschlossene Zug und mit denselben Bezeichnungen kann ein geschlossener Zug, der nach Lage und Richtung ans Dreiecksnetz angeschlossen ist (Abb. 191) berechnet werden, wenn die zusammenfallenden Anschlußpunkte mit P_1, P_n bzw. P_0, P_{n+1} bezeichnet werden und β_1, β_n voneinander unabhängige Winkel sind. Handelt es sich um einen geschlossenen Zug ohne Anschlüsse (Abb. 192), so trennt man besser P_1 von P_n ; die Rechnung kann mit beliebig angenommenen Werten der Koordinaten von P_1 und des Richtungswinkels ($P_1 P_2$) erfolgen.

Am einfachsten aber ist es, nach P_1 den Koordinatenursprung und in die erste Polygonseite die $+X$ -Achse zu legen. Die Rechnung geht auch hier wie früher vor sich, nur daß der Längenanschluß erst in einem mit P_1 zusammenfallenden Punkte P_{n+1} stattfindet.

In einem derartigen geschlossenen Polygonzug bestehen die Winkelproben

$$[\beta] = (n + 2) 180^\circ, \quad [\gamma] = (n - 2) 180^\circ, \quad (355)$$

wo β die Außenwinkel und γ die Innenwinkel des Vielecks bedeuten.

Umständlicher ist die Berechnung einer Zugverknotung (Abb. 193), bei welcher mehrere ziemlich gestreckte und gleichseitige Teilstücke Z_1, Z_2, Z_3, \dots in einem gemeinsamen Knotenpunkte K zusammenlaufen, von dem aus gelegentlich der Polygonwinkelmessung auch ein gut sichtbarer Punkt H von im allgemeinen unbekannter Lage mitbeobachtet wird. Der einzuhaltende Rechnungsgang ist durch folgende Arbeiten gekennzeichnet:

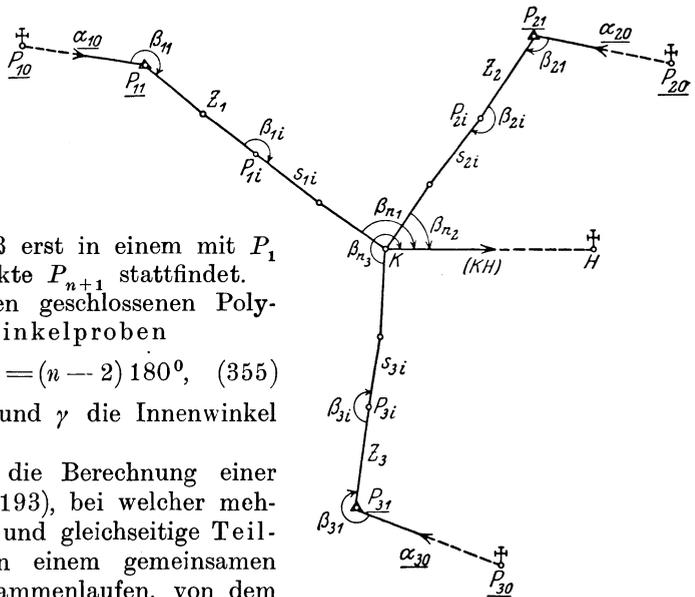


Abb. 193. Zugverknotung.

1. Ableitung der Anschlußrichtungswinkel in den Anfangspunkten der Teilzüge,
2. Berechnung des Mittelwertes der gemeinsamen Anschlußrichtung (KH),
3. Ausgleichung der gemessenen Polygonwinkel,
4. Berechnung der vorläufigen Koordinatenunterschiede,
5. Aufstellung der Koordinaten des Knotenpunktes,
6. Ausgleichung der Koordinatenunterschiede und Koordinatenberechnung der Polygonpunkte.

Im einzelnen sei hierzu folgendes bemerkt:

Zu 1. Die Anschlußrichtungswinkel α_{10} , α_{20} , α_{30} ergeben sich aus den Koordinaten der bekannten Punkte P_{10} , P_{11} , P_{20} , P_{21} und P_{30} , P_{31} , deren Zeiger mit denjenigen ihrer Koordinaten übereinstimmen.

Zu 2. Die einzelnen Züge liefern für den Richtungswinkel (KH) der gemeinsamen Anschlußrichtung mit den in der Figur enthaltenen Bezeichnungen die Werte

$$\left. \begin{aligned} (KH)_1 &= \alpha_{10} + [\beta'_1] + n_1 \cdot 180^0, \\ (KH)_2 &= \alpha_{20} + [\beta'_2] + n_2 \cdot 180^0, \\ (KH)_3 &= \alpha_{30} + [\beta'_3] + n_3 \cdot 180^0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (356)$$

deren wahrscheinlichster Wert das allgemeine arithmetische Mittel

$$(KH) = \frac{p_1 (KH)_1 + p_2 (KH)_2 + p_3 (KH)_3}{p_1 + p_2 + p_3} \dots \dots \dots (357)$$

ist. Die mittleren Fehler der $(KH)_1$, $(KH)_2$, $(KH)_3$ sind zu den Wurzeln aus den Zahlen n_1 , n_2 , n_3 der in diesen Richtungswinkeln jeweils enthaltenen Polygonwinkel proportional; also sind die in (357) auftretenden Richtungsgewichte zu den n selbst umgekehrt proportional und durch die Ausdrücke

$$p_1 = \frac{C}{n_1}, \quad p_2 = \frac{C}{n_2}, \quad p_3 = \frac{C}{n_3} \dots \dots \dots (358)$$

bestimmt, in denen C einen beliebigen Festwert bedeutet.

Zu 3. An Stelle des unbekannt bleibenden strengen Wertes für den Richtungswinkel der gemeinsamen Richtung tritt der unter (357) stehende Mittelwert (KH), aus dessen Vergleich mit seinen Näherungen die Richtungswidersprüche

$$w_1 = (KH) - (KH)_1, \quad w_2 = (KH) - (KH)_2, \quad w_3 = (KH) - (KH)_3 \quad (359)$$

der einzelnen Teilzüge folgen. Damit ergeben sich in Z_1 , Z_2 , Z_3 die Polygonwinkelverbesserungen

$$v_{\beta_1} = \frac{w_1}{n_1}, \quad v_{\beta_2} = \frac{w_2}{n_2}, \quad v_{\beta_3} = \frac{w_3}{n_3} \dots \dots \dots (360)$$

und die ausgeglichenen Polygonwinkel

$$\beta_{1i} = \beta'_{1i} + v_{\beta_1}, \quad \beta_{2i} = \beta'_{2i} + v_{\beta_2}, \quad \beta_{3i} = \beta'_{3i} + v_{\beta_3}, \quad \dots \dots (361)$$

mit deren Hilfe die ausgeglichenen Richtungswinkel α_{1i} , α_{2i} , α_{3i} der Zugseiten in bekannter Weise gefunden werden. Die bei dieser Gelegenheit aus den einzelnen Teilzügen sich ergebenden Richtungswinkel der gemeinsamen Richtung müssen mit dem in (357) aufgestellten Werte (KH) vollständig übereinstimmen, wenn nicht von (356) einschl. ab ein Rechenfehler unterlaufen ist.

Ist etwa ν die Zahl der Teilzüge, so erhält man aus den Widersprüchen w_1, w_2, \dots, w_ν mittels (63) für den mittleren Fehler des gemessenen Polygonwinkels den Ausdruck

$$m_\beta = \pm \sqrt{\frac{1}{\nu - 1} \left[\frac{w_i w_i}{n_i} \right]}, \dots \dots \dots (361a)$$

dessen Zuverlässigkeit jedoch für kleines ν nur gering ist.

Zu 4. Mit den ausgeglichenen Seitenrichtungswinkeln wird nunmehr die Berechnung der vorläufigen Koordinatenunterschiede

$$\left. \begin{aligned} \Delta x'_{1i} &= s_{1i} \cos \alpha_{1i}, & \Delta x'_{2i} &= s_{2i} \cos \alpha_{2i}, & \Delta x'_{3i} &= s_{3i} \cos \alpha_{3i}, \\ \Delta y'_{1i} &= s_{1i} \sin \alpha_{1i}, & \Delta y'_{2i} &= s_{2i} \sin \alpha_{2i}, & \Delta y'_{3i} &= s_{3i} \sin \alpha_{3i} \end{aligned} \right\} \dots (362)$$

vorgenommen.

Zu 5. Jeder Zug liefert ein Wertepaar für die Koordinaten x_K, y_K des Knotenpunktes, nämlich

$$\left. \begin{aligned} x_{1K} &= x_{10} + [\Delta x'_1], & x_{2K} &= x_{20} + [\Delta x'_2], & x_{3K} &= x_{30} + [\Delta x'_3], \\ y_{1K} &= y_{10} + [\Delta y'_1], & y_{2K} &= y_{20} + [\Delta y'_2], & y_{3K} &= y_{30} + [\Delta y'_3]. \end{aligned} \right\} (363)$$

Hieraus folgen die wahrscheinlichsten Koordinatenwerte als die allgemeinen arithmetischen Mittel

$$x_K = \frac{P_{1x} x_{1K} + P_{2x} x_{2K} + P_{3x} x_{3K}}{P_{1x} + P_{2x} + P_{3x}}, \quad y_K = \frac{P_{1y} y_{1K} + P_{2y} y_{2K} + P_{3y} y_{3K}}{P_{1y} + P_{2y} + P_{3y}}, \quad (364)$$

wenn zu den Einzelwerten der Koordinaten die verschiedenen Koordinatengewichte P_x, P_y gehören. Sie sind, wenn C_x, C_y zwei willkürliche Festwerte und $m_{x_{n_1}}, m_{y_{n_1}}, m_{x_{n_2}}, m_{y_{n_2}}, m_{x_{n_3}}, m_{y_{n_3}}$ die etwas später von (394) bis (395) gebrachten mittleren Fehler der mit den ausgeglichenen Zugwinkeln berechneten, unter (363) stehenden Koordinaten bedeuten, die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} P_{1x} &= \frac{C_x}{m_{x_{n_1}}^2}, & P_{2x} &= \frac{C_x}{m_{x_{n_2}}^2}, & P_{3x} &= \frac{C_x}{m_{x_{n_3}}^2}, \\ P_{1y} &= \frac{C_y}{m_{y_{n_1}}^2}, & P_{2y} &= \frac{C_y}{m_{y_{n_2}}^2}, & P_{3y} &= \frac{C_y}{m_{y_{n_3}}^2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (365)$$

Zu 6. Zur Ausgleichung der vorläufigen Koordinatenunterschiede bildet man die Koordinatenwidersprüche

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= x_K - x_{1K}, & v_{2x} &= x_K - x_{2K}, & v_{3x} &= x_K - x_{3K}, \\ v_{1y} &= y_K - y_{1K}, & v_{2y} &= y_K - y_{2K}, & v_{3y} &= y_K - y_{3K}, \end{aligned} \right\} \dots (366)$$

deren Verteilung in jedem Zugzweige ganz so wie im einfachen, beiderseits angeschlossenen Zuge erfolgt. Auch die Berechnung der endgültigen Polygonpunktkoordinaten ist dieselbe.

Eine bei verschiedenen Zugformen häufig wiederkehrende Arbeit ist der Anschluß an einen Hochpunkt P_n (Abb. 194) von bekannter Lage. In einem solchen Falle mißt man zur indirekten Bestimmung der letzten Zugseite s_{n-1} und des Abschluß-

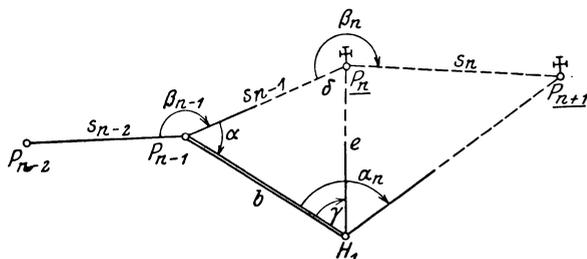


Abb. 194. Polygonzuganschlus an einen Hochpunkt.

man zur indirekten Bestimmung der letzten Zugseite s_{n-1} und des Abschluß-

winkels β_n in den Endpunkten einer von P_{n-1} ausgehenden, durch direkte Längenmessung bestimmten Seite b die Winkel α, γ, a_n . Aus b, α, γ findet man die Seiten s_{n-1} und e , die am besten annähernd gleich lang sind und senkrecht zueinander stehen. Mit Hilfe von γ, a_n, e und der aus den Koordinaten der bekannten Punkte P_n, P_{n+1} gewonnenen Entfernung s_n aber kann man a_n durch eine Zentrierungsrechnung in β_n überführen. Dabei sind die Zentrierungsverbesserungen für die Richtungen $H_1 P_{n-1}$ und $H_1 P_{n+1}$ wegen der relativ großen Exzentrizität e mittels der strengen Formel (263) zu ermitteln. Diese wichtige Zentrierung wird zur Kontrolle und zur Erhöhung der Genauigkeit unter Benutzung eines anderen Hilfspunktes H_2 wiederholt.

c) Fehlerfragen.

Zur Beurteilung der Zuggenauigkeit pflegt man die bei den Seitenmessungen auftretenden Widersprüche ds , den Richtungswiderspruch w , die Längen- und Querabweichung v_l und v_q oder den linearen Anschlußfehler f_s heranzuziehen. Die bei der Hin- und Rückmessung der Polygonseiten s auftretenden Unterschiede ds sollen die aus (200) folgende Maximaldifferenz

$$D_s = 3 m \sqrt{2} = 3 \sqrt{2 (m_a^2 + m_u^2 + m_r^2)} = \sqrt{c_0 + c_1 s + c_2 s^2} \dots (367)$$

nicht überschreiten. In (367) wird der Koeffizient c_2 Null, wenn etwa die zweimalige Längenmessung mit dem gleichen Meßwerkzeuge am gleichen Tage vorgenommen wird. Einige amtliche Fehlergrenzen enthält — durchwegs in Metern — Tab. 20¹⁾.

Tabelle 20.

Land	D_s	M_{a_n}	M_s	$\left\{ \begin{matrix} \Delta l \\ \Delta q \end{matrix} \right.$
Einheit →	m		m	m
Baden	a) $0,002 \sqrt{s} + 0,0001 s + 0,01$ b) $0,004 \sqrt{s} + 0,0002 s + 0,01$	$1,2' \sqrt{n} + 0,5'$	$0,004 \sqrt{[s]} + 0,0002 [s] + 0,05$	
	a) für Schneidenlatten und Gradbogen, b) für Staffelmessung	$\approx 40'' \sqrt{n} + 17''$		
Bayern	$0,007 \sqrt{s} + 0,02$	$48'' \sqrt{n} + 25''$		$\left\{ \begin{matrix} 0,0035 \sqrt{[s]} \\ + 0,00044 [s] + 0,05, \\ 0,00025 [s] + 0,05 \end{matrix} \right.$
Preußen	$0,01 \sqrt{4s + 0,005 s^2}$	$1,5' \sqrt{n}$	$0,01 \sqrt{4 [s] + 0,005 [s]^2}$.
Sachsen	$0,02 + 0,0041 \sqrt{s} + 0,00044 s$	$1' \sqrt{n}$	$0,000654 [s]$.
Württemberg	$0,010 \sqrt{s} + 0,0005 s$	$1,5' \sqrt{n}$	$0,010 \sqrt{[s]} + 0,0005 [s] + 0,1 \sqrt{n-1}$.

Die Fehlergrenzen entsprechen nicht immer genau der theoretischen Form (367) und vernachlässigen teilweise den an sich geringen Betrag von m_a . Dem Zutagetreten der regelmäßigen Fehler bei Verwendung verschiedener Meßwerkzeuge zur Hin- und Rückmessung trägt das Glied mit s^2 unter der Wurzel bzw. das außerhalb der Wurzel stehende, in s lineare Glied Rechnung.

Der mittlere Fehler m_{β_i} des gemessenen Polygonwinkels β_i' setzt sich aus dem reinen Messungsfehler $\pm \mu$ sowie den Einflüssen der

¹⁾ Soweit verschiedene Grenzen im gleichen Lande bestehen, ist hier nur die engere angegeben.

mittleren Fehler μ_e, μ_e' in der zentrischen Aufstellung der Signale in P_{i-1} und P_{i+1} (Abb. 195) und des Instrumentes in P_i zusammen. Mit dem Verhältnis $\mu_e'^2 : \mu_e^2 = \tau$ und den aus der Abbildung verständlichen Bezeichnungen a_i, b_i, c_i ist der strenge Ausdruck für das mittlere Fehlerquadrat des einmal in zwei Lagen gemessenen Polygonwinkels:

$$m_{\beta_i}^2 = \mu^2 + \frac{1}{2} (\varrho \mu_e)^2 \cdot \frac{a_i^2 + b_i^2 + \tau c_i^2}{a_i^2 b_i^2}, \dots \dots \dots (368)$$

wie *Helmert*¹⁾ zuerst gezeigt hat. Dieser Ausdruck besitzt nur für die eigentlichen Polygonwinkel — nicht auch für die beiden Anschlußwinkel — im gleichseitigen, gleichmäßig gekrümmten Zuge denselben Wert. Das mit τ multiplizierte Glied in (368) stellt den Einfluß des mittleren Fehlers in der zentrischen Aufstellung des Instrumentes dar, welcher besonders zu fürchten ist, da fast immer $c^2 > a^2 + b^2$ ist. Man kann dem schädlichen Einfluß der Exzentrizitätsfehler in wirksamster Weise durch besondere Aufstellungsverrichtungen begegnen, auf denen die Signale mit dem Instrument so genau vertauscht werden können, daß deren Achsen bis auf etwa 0,1 mm zusammenfallen. Gehen diese lotrechten Achsen etwas an den zugehörigen Bodenpunkten vorbei, so schadet es wenig, da solche Fehler in dem durch die genannten Achsen bezeichneten Zuge sich nicht fortpflanzen können²⁾.

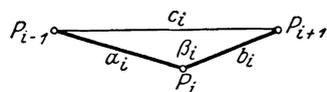


Abb. 195. Polygonwinkelfehler.

Eine Berücksichtigung der Unterschiede in den mittleren Fehlern der Polygonwinkel muß im allgemeinen als viel zu umständlich unterbleiben, und man legt daher den sämtlichen Polygonwinkeln den gleichen mittleren Fehler m_{β} bei. Für den mittleren Fehler m_{α_i} des Richtungswinkels

$$\alpha_i' = \alpha_0 + [\beta_e'] + i \cdot 180^\circ \dots \dots \dots (369)$$

der Seite s_i vor der Winkelausgleichung erhält man daher

$$m_{\alpha_i} = m_{\beta} \sqrt{i} = w \sqrt{\frac{i}{n}} \dots \dots \dots (370)$$

und für den entsprechenden Fehler im Richtungswinkel α_n' der zweiten Anschlußrichtung

$$m_{\alpha_n} = m_{\beta} \sqrt{n} \dots \dots \dots (371)$$

Die zweite Form von (370) folgt aus (79).

Die Grenze für den Richtungswiderspruch w ist der Maximalfehler in α_n' , nämlich

$$M_{\alpha_n} = 3 m_{\alpha_n} = 3 m_{\beta} \sqrt{n} \dots \dots \dots (372)$$

Zum Quadrat dieses Betrages tritt streng genommen noch ein Glied $18 m_r^2$, welches den aus den Koordinatenunsicherheiten der Anschlußpunkte folgenden Fehlern m_r der Anschlußrichtungen Rechnung trägt. Ein solches Glied ist — in etwas anderer Form — z. B. in den amtlichen Fehlergrenzen von Baden und Bayern enthalten.

¹⁾ *Helmert*, Strenger Ausdruck für den mittleren Fehler eines Polygonwinkels, in Z. V. W. 1877, S. 112—115.

²⁾ Derartige Einrichtungen sind nicht nur für bergmännische Zwecke, sondern auch für moderne Stadtvermessungen von Wichtigkeit. Dazu gehören z. B. die allbekannte Freiburger Aufstellung (beschrieben in *Bauernfeind*, Elemente der Vermessungskunde, I. Bd., 7. A., Stuttgart 1890, S. 338—345) sowie der hieraus entstandene Zentrierapparat für Theodolite und Signalaufstellung von *Nagel*, welcher auszugsweise in der Z. V. W. 1888, S. 39—50 beschrieben ist.

Aus den Koordinaten

$$x_e = x_1 + \sum_{l=1}^{e-1} s_l \cdot \cos \alpha_l, \quad y_e = y_1 + \sum_{l=1}^{e-1} s_l \cdot \sin \alpha_l \quad \dots \dots (373)$$

folgen leicht die Differentialausdrücke

$$\left. \begin{aligned} dx_e &= -\sum_{l=1}^{e-1} \Delta y_l \cdot d\alpha_l + \sum_{l=1}^{e-1} \cos \alpha_l \cdot ds_l, \\ &= -\sum_{i=1}^{e-1} (y_e - y_i) d\beta_i + \sum_{i=1}^{e-1} \cos \alpha_i \cdot ds_i = dx_{1e}, \\ dy_e &= \sum_{l=1}^{e-1} \Delta x_l \cdot d\alpha_l + \sum_{l=1}^{e-1} \sin \alpha_l \cdot ds_l, \\ &= \sum_{i=1}^{e-1} (x_e - x_i) d\beta_i + \sum_{i=1}^{e-1} \sin \alpha_i \cdot ds_i = dy_{1e}, \end{aligned} \right\} \dots \dots (374)$$

welche für beliebige Änderungen $ds, d\alpha, d\beta$ der Seiten und Richtungswinkel bzw. der Polygonwinkel gelten. Bezeichnen ds und $d\beta$ die Fehler der beobachteten, unveränderten s und β' , so sind die Ausdrücke (374) die bestimmten Koordinatenfehler dx_{1e}, dy_{1e} des Punktes P_e im nicht ausgeglichenen Zug. Daraus folgen im gestreckten, gleichseitigen Zuge die mittleren Koordinatenfehlerquadrate

$$\left. \begin{aligned} m_{x_{1e}}^2 &= \frac{1}{6} s^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot e(e-1)(2e-1) m_\beta^2 + (e-1) \cos^2 \alpha \cdot m_s^2, \\ m_{y_{1e}}^2 &= \frac{1}{6} s^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot e(e-1)(2e-1) m_\beta^2 + (e-1) \sin^2 \alpha \cdot m_s^2, \end{aligned} \right\} \cdot (374a)$$

wenn m_s und m_β die mittleren Fehler der gemessenen Seiten und Winkel bedeuten. Für die dem Zugende P_n entsprechenden Werte ist in (374 a) $e=n$ zu setzen. Legt man die X-Achse in die Zugrichtung, so wird $\alpha=0$ und aus (364) ergeben sich die hier nur aus den Längen- bzw. Winkel Fehlern entspringenden mittleren Längen- und Querabweichungen des nicht ausgeglichenen Zuges, nämlich

$$m_{1l} = m_s \sqrt{n-1}, \quad m_{1q} = s \cdot m_\beta \sqrt{\frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)} \quad \dots \dots (375)$$

oder
$$m_{1l} = m_0 \sqrt{L}, \quad m_{1q} = m_\beta \cdot L \sqrt{\frac{n(2n-1)}{6(n-1)}}, \quad \dots \dots \dots (376)$$

wenn man noch die Zuglänge $L = (n-1)s$ einführt und den mittleren Seitenfehler durch die gute Näherung $m_s = m_0 \sqrt{s}$ wiedergibt. Für eine bestimmte Zuglänge L ist demnach die Querverschwenkung m_{1q} am geringsten bei kleinem n , d. h. für große Seitenlängen. Hingegen ist m_{1l} lediglich von der Zuglänge selbst abhängig.

Der mit den ausgeglichenen Polygonwinkeln β berechnete Richtungswinkel $\alpha_i = \alpha_0 + [\beta_e] + i \cdot 180^\circ$ ist seiner Entstehung nach der Ausdruck

$$\alpha_i = C + \left(1 - \frac{i}{n}\right) [\beta']_1 - \frac{i}{n} [\beta']_{i+1}, \quad \dots \dots \dots (377)$$

in dem C eine Konstante bedeutet. Die Anwendung des mittleren Fehlergesetzes auf diesen Ausdruck führt zum mittleren Fehler μ_{α_i} im Richtungswinkel α_i nach der Winkelausgleichung, nämlich

$$\mu_{\alpha_i} = m_\beta \sqrt{\frac{i}{n}(n-i)} = \frac{w}{n} \sqrt{i(n-i)} \quad \dots \dots \dots (378)$$

Auch hier folgt die zweite Form aus (79). Wie eine einfache Untersuchung zeigt, nimmt μ_{α_i} für $i = \frac{n}{2}$, also für die Zugmitte den größten Wert an, während m_{α_i} für $i = n$, also für den Zugendpunkt am größten wird. Es sind diese Extremwerte

$$m_{\alpha_{max}} = w \quad \text{und} \quad \mu_{\alpha_{max}} = \frac{w}{2}, \dots \dots \dots (379)$$

so daß durch die Winkelausgleichung das Maximum des Richtungsfehlers auf die Hälfte reduziert wird.

Die bestimmten Koordinatenfehler oder Koordinatenwidersprüche im Endpunkte des mit den ausgeglichenen, je um $w:n$ verbesserten Polygonwinkeln berechneten Zuges sind die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} v_x = dx_{2n} &= \sum_1^n \eta_i d\beta_i + \sum_1^{n-1} \cos \alpha_i ds_i, \\ v_y = dy_{2n} &= -\sum_1^n \xi_i d\beta_i + \sum_1^{n-1} \sin \alpha_i ds_i, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (380)$$

in welchen $d\beta_i$, ds_i die Fehler der Beobachtungen β'_i , s_i und ξ_i , η_i die auf den Schwerpunkt aller Polygonpunkte bezogenen Koordinaten von P_i bedeuten¹⁾. Hieraus folgt, daß die Änderung eines Winkels, dessen Scheitel in den genannten Schwerpunkt fällt, keinen Einfluß auf den Längenanschluß des Zuges ausüben kann.

Die Anwendung des mittleren Fehlergesetzes auf (380) führt im gestreckten und gleichseitigen Zug zu den Quadraten der nach der vorläufigen Winkelausgleichung zu befürchtenden mittleren Koordinatenanschlußwidersprüche

$$\left. \begin{aligned} m_{x_{2n}}^2 &= \frac{n}{12} (n^2 - 1) s^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot m_\beta^2 + (n - 1) \cos^2 \alpha \cdot m_s^2, \\ m_{y_{2n}}^2 &= \frac{n}{12} (n^2 - 1) s^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot m_\beta^2 + (n - 1) \sin^2 \alpha \cdot m_s^2, \end{aligned} \right\} \dots (381)$$

aus denen für $\alpha = 0$ die diesem Fall entsprechenden mittleren Längen- und Querabweichungen m_{2l} , m_{2q} des Zugendpunktes hervorgehen, nämlich

$$m_{2l} = m_s \sqrt{n - 1} = m_{1l}, \quad m_{2q} = s \cdot m_\beta \sqrt{\frac{n}{12} (n^2 - 1)} \dots \dots (382)$$

bzw.
$$m_{2l} = m_0 \sqrt{L}, \quad m_{2q} = m_\beta L \sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}} \dots \dots (383)$$

Während m_{2q} stets $< m_{1q}$ ist, sind m_{2l} und m_{1l} einander gleich, so daß, wie zu erwarten, durch die vorläufige Winkelausgleichung im gestreckten Zuge lediglich eine Verbesserung der Punktlagen senkrecht zur Zugrichtung erfolgt.

Die wirklich auftretenden Längen- und Querabweichungen v_l und v_q lassen sich in einfachster Weise zeichnerisch aus den Koordinatenwidersprüchen v_x , v_y ermitteln. Trägt man diese vom fehlerfreien Endpunkte P_n (Abb. 196) des Zuges aus mit negativen Vorzeichen ab,

¹⁾ Dieser Ausdruck ist abgeleitet in *Näbauer*, Flächenfehler im einfachen, durch Umfangsmessung bestimmten Polygonzug, Karlsruhe 1918, S. 6, Gleichung (20).

so gelangt man zur fehlerhaften Lage P'_n des Zugendpunktes, welcher von P_n um den linearen Anschlußfehler

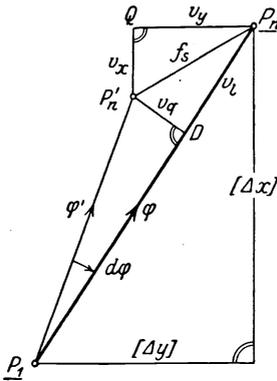


Abb. 196. Anschlußfehler im Polygonzug.

$$f_s = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \dots \dots \dots (384)$$

absteht. Dessen Projektionen auf die Zugrichtung und eine dazu Senkrechte sind die Längenabweichung v_l und die Querabweichung v_q . Im gestreckten Zuge kann v_l nur von Längensmessungsfehlern, v_q nur von Fehlern der Winkelmessung herrühren.

Wird für f_s eine obere Grenze M_s gesetzt, so muß der mit den vorläufig ausgeglichenen Winkeln berechnete Zugendpunkt P' innerhalb eines um den richtigen Ort P mit dem Halbmesser M_s beschriebenen Kreises liegen. Sind hingegen für v_l und v_q Fehlergrenzen Δl , Δq angegeben, so wird verlangt, daß P' in einem Rechteck liegt, dessen zur Zugrichtung parallele bzw. senkrechte Seiten die Längen $2 \Delta l$ und $2 \Delta q$ besitzen.

Manchmal wird auch noch die Zugverschwenkung

$$d\varphi'' = \varrho'' \frac{v_q}{P_1 P_n} \dots \dots \dots (385)$$

für die Genauigkeitsbeurteilung herangezogen.

Im gestreckten, gleichseitigen Zug ist die mittlere Zugverdrehung

$$m_\varphi = \frac{m_{2q}}{L} = m_\beta \sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}} \dots \dots \dots (386)$$

Stellt man nach der gleichmäßigen Verteilung der Koordinatenwiderprüche im nunmehr vollständig ausgeglichenen, gleichseitigen, gestreckten Zug die bestimmten Koordinatenfehler dx_{3e} , dy_{3e} des Punktes P_e als Funktionen der Beobachtungsfehler $d\beta$, ds dar, so gewinnt man hieraus für die Quadrate der mittleren Koordinatenfehler in der Zugrichtung und senkrecht dazu die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} m_{3l_e}^2 &= \frac{(e-1)(n-e)}{n-1} \cdot m_s^2, \\ m_{3q_e}^2 &= \frac{s^2}{48} \cdot \frac{(e-1)(n-e)}{n(n-1)} \{ (n+1)(n^2+3) - (n+3)[(e-1) - (n-e)]^2 \} m_\beta^2. \end{aligned} \right\} (387)$$

Damit erhält man für den Mittelpunkt $P_{\frac{n+1}{2}}$ des betrachteten Zuges die größte mittlere Längen- und Querverschiebung

$$\left. \begin{aligned} m_{3l_m} &= \frac{1}{2} m_s \sqrt{n-1}, \\ &= \frac{1}{2} m_0 \sqrt{L}, \end{aligned} \right\} (388) \quad \left. \begin{aligned} m_{3q_m} &= \frac{s}{8} \cdot m_\beta \sqrt{\frac{(n^2-1)(n^2+3)}{3n}}, \\ &= m_\beta \cdot \frac{L}{8} \sqrt{\frac{(n+1)(n^2+3)}{3n(n-1)}}. \end{aligned} \right\} (389)$$

Erstere ist für eine bestimmte Zuglänge L von der Länge s der Polygonseiten unabhängig; dagegen nimmt m_{3q_m} bei festem L mit der Punktzahl zu, verringert sich also für längere Polygonseiten.

Zur Einschränkung der Rechenarbeit ist — von besonderen Ausnahmefällen abgesehen — eine einfache Verteilung der Koordinatenwider-

sprüche v_x, v_y zu fordern. Das vielfach übliche Verfahren, v_x und v_y proportional den Streckenlängen auf die Koordinatenunterschiede zu verteilen, führt nach den Untersuchungen von *Eggert*¹⁾ nicht nur im gestreckten gleichseitigen, sondern auch im mäßig geknickten Zuge zu Ergebnissen, welche den nach der Methode der kleinsten Quadrate gewonnenen nahezu gleichwertig sind.

Es sind noch die Ausdrücke für die bei der Zugverknötung auftretenden Koordinatengewichte P_x, P_y aufzustellen.

Aus (357) und (358) folgt

$$(KH) = \left. \begin{aligned} & \left[\frac{1}{n} \right] \cdot \left(\frac{1}{n_1} \{ \alpha_{10} + [\beta'_{1i}] + n_1 \cdot 180^0 \} + \frac{1}{n_2} \{ \alpha_{20} + [\beta'_{2i}] + n_2 \cdot 180^0 \} \right. \\ & \left. + \frac{1}{n_3} \{ \alpha_{30} + [\beta'_{3i}] + n_3 \cdot 180^0 \} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (390)$$

als Funktion der Beobachtungen β' . Hieraus und aus (360) gewinnt man leicht die für jeden Winkel β'_{vi} des Teilzuges Z_v gleiche Winkelverbesserung

$$v_{\beta_{vi}} = \frac{\left(\frac{1}{n_v} - \left[\frac{1}{n} \right] \right) \sum_1^{n_v} d\beta_{vi} + \frac{1}{n_1} \sum_1^{n_1} d\beta_{1i} + \frac{1}{n_2} \sum_1^{n_2} d\beta_{2i} + \frac{1}{n_3} \sum_1^{n_3} d\beta_{3i}}{n_v \left[\frac{1}{n} \right]} \quad (391)$$

als Funktion der Fehler $d\beta$ in den beobachteten Polygonwinkeln. Der ausgeglichene Polygonwinkel β im Zuge Z_v ist daher mit dem Fehler

$$d\beta_{vi}^0 = d\beta_{vi} + v_{\beta_{vi}} = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{n_v} \left[\frac{1}{n} \right] \left\{ n_v \left[\frac{1}{n} \right] d\beta_{vi} + \left(\frac{1}{n_v} - \left[\frac{1}{n} \right] \right) \sum_1^{n_v} d\beta_{vi} + \frac{1}{n_1} \sum_1^{n_1} d\beta_{1i} + \frac{1}{n_2} \sum_1^{n_2} d\beta_{2i} \right. \\ & \left. + \frac{1}{n_3} \sum_1^{n_3} d\beta_{3i} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (392)$$

behaftet. Ersetzt man in den aus (374) folgenden, bestimmten Koordinatenfehlern

$$\left. \begin{aligned} dx_{n_v} &= - \sum_{i=1}^{n_v-1} (y_{n_v} - y_{vi}) d\beta_{vi}^0 + \sum_{i=1}^{n_v-1} \cos \alpha_{vi} \cdot d s_{vi}, \\ dy_{n_v} &= \sum_{i=1}^{n_v-1} (x_{n_v} - x_{vi}) d\beta_{vi}^0 + \sum_{i=1}^{n_v-1} \sin \alpha_{vi} \cdot d s_{vi} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (393)$$

$d\beta_{vi}^0$ durch (392), so erhält man für die dem Endpunkte des Teilzuges Z_v entsprechenden Werte dx_{n_v}, dy_{n_v} Ausdrücke, welche unmittelbare Funktionen der Beobachtungsfehler $d\beta$ und ds sind. Die Anwendung des mittleren Fehlergesetzes hierauf führt für einen gestreckten, gleichseitigen Zweig Z_v zu den mittleren Koordinatenfehlerquadraten

$$\left. \begin{aligned} m_{x_{n_v}}^2 &= \frac{s_v^2 \cdot \sin^2 \alpha_v}{4 \left[\frac{1}{n} \right]^2} (n_v - 1) \left\{ \frac{1}{3} n_v (n_v + 1) \left[\frac{1}{n} \right]^2 \cdot m_{\beta_v}^2 + (n_v - 1) \left(\frac{m_{\beta_1}^2}{n_1} + \frac{m_{\beta_2}^2}{n_2} + \dots + \frac{m_{\beta_v}^2}{n_v} + \dots \right) \right. \\ & \left. + (n_v - 1) \cos^2 \alpha_v \cdot m_{s_v}^2 \right\} \\ m_{y_{n_v}}^2 &= \frac{s_v^2 \cdot \cos^2 \alpha_v}{4 \left[\frac{1}{n} \right]^2} (n_v - 1) \left\{ \frac{1}{3} n_v (n_v + 1) \left[\frac{1}{n} \right]^2 \cdot m_{\beta_v}^2 + (n_v - 1) \left(\frac{m_{\beta_1}^2}{n_1} + \frac{m_{\beta_2}^2}{n_2} + \dots + \frac{m_{\beta_v}^2}{n_v} + \dots \right) \right. \\ & \left. + (n_v - 1) \sin^2 \alpha_v \cdot m_{s_v}^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (394)$$

¹⁾ *Eggert*, Die Fehlerfortpflanzung in Polygonzügen, Z. V.W. 1907, S. 4—19. — Ferner siehe *Eggert*, Die zulässigen Abschlußfehler der Polygonzüge, Z. V.W. 1912, S. 495 bis 508, und Zur Ausgleichung von Polygonzügen, Z. V.W. 1912, S. 547—554. (S. auch Z. V.W. 1914, S. 215—235.)

des Zügelpunktes. Setzt man auch noch für alle Teilzüge gleiche Seiten s , gleiche mittlere Seitenfehler m_s und Winkelfehler m_β voraus, so erscheinen an Stelle von (394) die etwas einfacheren Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} m_{x_{n_v}}^2 &= \frac{s^2 \cdot \sin^2 \alpha_v}{12 \left[\frac{1}{n} \right]} (n_v - 1) \left\{ n_v (n_v + 1) \left[\frac{1}{n} \right] + 3(n_v - 1) \right\} \cdot m_\beta^2 + (n_v - 1) \cos^2 \alpha_v \cdot m_s^2, \\ m_{y_{n_v}}^2 &= \frac{s^2 \cdot \cos^2 \alpha_v}{12 \left[\frac{1}{n} \right]} (n_v - 1) \left\{ n_v (n_v + 1) \left[\frac{1}{n} \right] + 3(n_v - 1) \right\} \cdot m_\beta^2 + (n_v - 1) \sin^2 \alpha_v \cdot m_s^2, \end{aligned} \right\} (395)$$

in denen, wie auch bisher, m_β im Bogenmaß zu verstehen ist.

Hat man sich für m_β und m_s nach (361 a) und aus Doppelmessungen oder nach Schätzungen Zahlenwerte verschafft, oder kennt man wenigstens näherungsweise nur das Verhältnis $m_\beta : m_s$, so kann man auch die unter (365) stehenden Zuggewichte P_x , P_y zahlenmäßig berechnen. Häufig begnügt man sich auch mit rohen Näherungen für die Zuggewichte, indem man sie z. B. umgekehrt proportional den Zuglängen oder ihren Quadraten setzt.

24. Einzelaufnahme durch rechtwinklige Naturmaßkoordinaten.

Dieses auch als Zahlenmethode oder Koordinatenaufnahme bezeichnete Verfahren ist die genaueste Art der Horizontalaufnahme und dient in erster Linie zur Sicherung des Grundeigentums. In einem solchen Falle soll der Messung stets eine dauerhafte Abmarkung der Eigentums Grenzen vorausgehen. Die Koordinatenaufnahme, welche allerdings teurer kommt als die später zu besprechende Meßtischaufnahme, hat die Eigentümlichkeit, daß man jederzeit später aus den in Tabellen und Handrissen niedergelegten Messungsergebnissen einen Plan in einem innerhalb gewisser Grenzen beliebigen Maßstab herstellen kann¹⁾.

a) Liniennetz.

Die Seiten des Polygonnetzes werden besonders bei starker Zersplitterung des Besitzes und im bebauten Gelände nicht ausreichen, um eine technisch einwandfreie Festlegung aller Einzelheiten zu ermöglichen. Es wird daher notwendig, noch weitere Messungslinien, das sog. Liniennetz in das Polygonnetz einzubinden. Die Endpunkte dieser Einbände sind die Liniennetzpunkte oder Bindepunkte. Sie liegen scharf eingerichtet²⁾ auf Polygonseiten oder schon bekannten Bindelinien und sind durch ihre gemessenen Abstände von den Anfangspunkten dieser Strecken bestimmt. Die wichtigeren dieser Punkte, deren Bezeichnung sich nach dem vorhergehenden Polygonpunkt richtet — siehe z. B. 16¹, 16², 16³ in Abb. 197 — werden durch lotrecht gestellte Röhren versichert. Einbände sollen nahe an den Grenzen vorbeiführen und möglichst unmittelbar an den festen Rahmen des Polygonnetzes anschließen. Man wird sie über die Grundstücksecken hinwegführen,

¹⁾ Eine solche Grenze kommt nur in Betracht, wenn der nachträglich gewählte Maßstab vielmal größer ist als der ursprünglich gewählte, da man an eine in sehr großem Maßstab darzustellende Aufnahme von vornherein größere Anforderungen in bezug auf ihre Vollständigkeit und Genauigkeit stellen mußte.

²⁾ Diese scharfe Einrichtung kann bei kurzen Seiten aus freiem Auge oder mit Hilfe eines Feldstechers erfolgen; bei längeren Seiten wird dazu besser ein im Anfangspunkte der bekannten Seite gut zentrisch aufgestellter, berichteter Theodolit benützt.

wenn — wie auf der linken Seite von Abb. 197 — die Polygonseite außerhalb des Grundstücks liegt; durchschneidet sie es jedoch — wie in der Abbildung rechts — und sollen die Bindepunkte versichert werden, so legt man diese der besseren Zugänglichkeit und Erhaltung halber zweckmäßiger in die Schnittpunkte der Polygonseite mit den Langseiten der Grundstücke

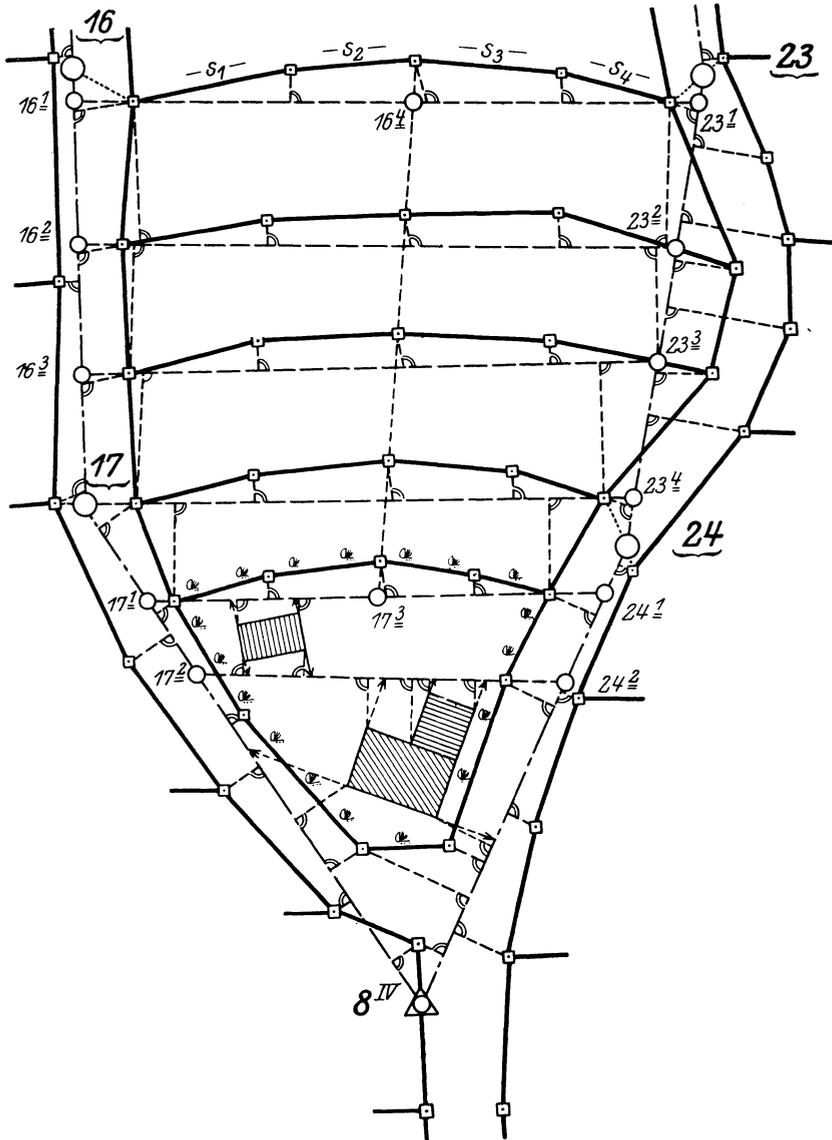


Abb. 197. Skizze einer auf ein Polygon- und Liniennetz bezogenen Stückmessung.

Die häufig notwendige Koordinatenberechnung von Liniennetzpunkten geht in folgender Weise vor sich. Der zu berechnende Punkt P (Abb. 198) besitze die Koordinaten x, y und stehe vom Anfangspunkt A der Strecke $AE = S$ um s ab. Aus den Koordinaten x_a, y_a und x_e, y_e der Punkte A und E erhält man mit den in der Abbildung enthaltenen Bezeichnungen

$$\Delta a = x_e - x_a, \quad \Delta o = y_e - y_a, \quad \dots \dots \dots (396)$$

$$\Delta x = \frac{s}{S} \Delta a = \frac{s'}{S'} \Delta a, \quad \Delta y = \frac{s}{S} \Delta o = \frac{s'}{S'} \Delta o. \quad \dots \dots \dots (397)$$

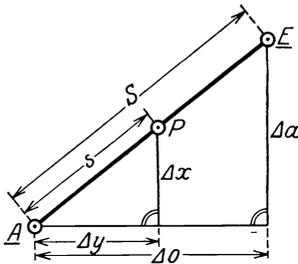


Abb. 198. Berechnung eines Liniennetzpunktes.

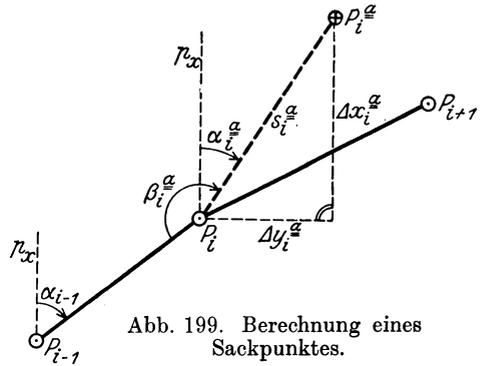


Abb. 199. Berechnung eines Sackpunktes.

Liegen für s und S die fehlerhaften Beobachtungen s' , S' vor, so besteht, wenn man sich s' verhältnismäßig zu S' verbessert denkt, die Proportion

$$s : S = s' : S', \quad \dots \dots \dots (398)$$

so daß die Koordinatenunterschiede Δx , Δy auch mittels der zweiten Formen von (397) berechnet werden können. Die Endergebnisse sind

$$x = x_a + \Delta x, \quad y = y_a + \Delta y. \quad \dots \dots \dots (399)$$

Häufig stellt sich bei der Anlage des Liniennetzes auch die Notwendigkeit heraus, in umschlossenen Hofräumen, durch welche eine Messungslinie nicht bis zu einer benachbarten Polygonseite geführt werden kann, Sackpunkte zu bestimmen. Ein solcher Sackpunkt P_i^a (Abb. 199) wird durch seine Entfernung s_i^a vom nächstliegenden Polygonpunkte P_i und deren Winkel β_i^a mit der vorhergehenden Polygonseite s_{i-1} festgelegt. Damit und mit den Bezeichnungen der Figur ergeben sich der Richtungswinkel

$$\alpha_i^a = \alpha_{i-1} + 180^\circ + \beta_i^a \quad \dots \dots \dots (400)$$

der Sackseite, die Koordinatenunterschiede

$$\Delta x_i^a = s_i^a \cos \alpha_i^a, \quad \Delta y_i^a = s_i^a \sin \alpha_i^a \quad \dots \dots \dots (401)$$

sowie die Koordinaten des Sackpunktes, nämlich

$$x_i^a = x_i + \Delta x_i^a, \quad y_i^a = y_i + \Delta y_i^a. \quad \dots \dots \dots (402)$$

Bei der Festlegung und Berechnung solcher Sackpunkte ist besondere Vorsicht geboten, da eine Anschlußprobe für die Richtigkeit der Messung oder Rechnung nicht besteht.

Sind die Koordinaten x , y des Schnittpunktes P (Abb. 200) zweier Strecken $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ mit bekannten Endpunkten zu ermitteln, so kann man zur Lösung der Aufgabe die Tangente des Richtungswinkels jeder Strecke je doppelt, einmal aus den Endpunkten, ein zweites Mal mit einem Endpunkt und dem gesuchten Punkt ausdrücken und erhält:

$$\operatorname{tg}(P_1 P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \quad \operatorname{tg}(P_3 P_4) = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y - y_3}{x - x_3} = n, \quad (403)$$

$$(P_1 P_2) = \operatorname{arctg} m, \quad (P_3 P_4) = \operatorname{arctg} n. \quad \dots \dots \dots (404)$$

Da m und n zahlenmäßig berechnet werden können, so sind die letzten Formen der Beziehungen (403) zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x, y , für welche sich die Ausdrücke

$$x = \frac{nx_3 - mx_1 + y_1 - y_3}{n - m}, \quad y = y_1 + m(x - x_1) = y_3 + n(x - x_3) \quad . (405)$$

ergeben. Aus den Koordinatenunterschieden

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= x - x_1, & \Delta x_2 &= x - x_2, & \Delta x_3 &= x - x_3, \\ \Delta y_1 &= y - y_1, & \Delta y_2 &= y - y_2, & \Delta y_3 &= y - y_3 \end{aligned} \right\} \quad . (406)$$

lassen sich dann auch die Entfernungen

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{\Delta x_1}{\cos(P_1 P_2)} = \frac{\Delta y_1}{\sin(P_1 P_2)}, & s_2 &= \frac{\Delta x_2}{\cos(P_2 P_1)} = \frac{\Delta y_2}{\sin(P_2 P_1)}, \\ s_3 &= \frac{\Delta x_3}{\cos(P_3 P_4)} = \frac{\Delta y_3}{\sin(P_3 P_4)}, & s_4 &= \frac{\Delta x_4}{\cos(P_4 P_3)} = \frac{\Delta y_4}{\sin(P_4 P_3)} \end{aligned} \right\} \quad (407)$$

des Schnittpunktes P von den gegebenen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 berechnen.

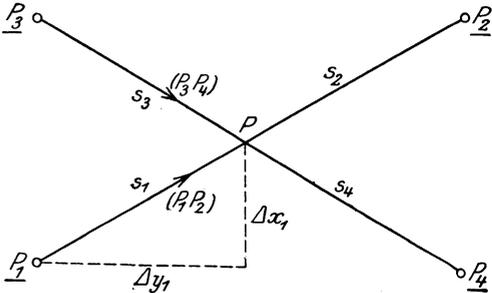


Abb. 200. Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes zweier Strecken.

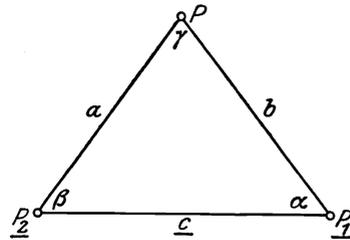


Abb. 201. Berechnung eines durch Bogenschnitt bestimmten Punktes.

Nur ausnahmsweise bestimmt man einen Punkt $P(x, y)$ (Abb. 201) von zwei bekannten Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ aus durch Einkreuzen oder Bogenschnitt, indem man seine Entfernungen b, a von diesen mißt. Mit den Abkürzungen

$$c = P_1 P_2, \quad s = \frac{1}{2}(a + b + c) \quad (408)$$

erhält man durch Anwendung des Halbwinkelsatzes die Dreieckswinkel α, β, γ aus den Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, & \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned} \right\} \quad . . (409)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (410)$$

mit Kontrolle, so daß nunmehr die Koordinaten von P mittels Vorwärts-einscheidens berechnet werden können.

b) Einzelaufnahme.

Liegt das Liniennetz fest, so erfolgt nach Andeutung von Abb. 197 die Aufnahme der Einzelheiten durch in der Natur unmittelbar gemessene rechtwinklige Koordinaten und durch Verlängerungen. Hauptsächlich zur Kontrolle werden auch die als Spannungen bezeichneten direkten Entfernungen $s_1, s_2 \dots$ eingemessener Punkte ermittelt. Die Koordinatenaufnahme erfolgt in örtlichen Systemen, deren Abszissenachsen die Polygonseiten und Einbände sind, während der Ursprung jeweils der Anfangspunkt einer solchen Linie ist. Diese Linien, bzw. die durch sie bestimmten Lotebenen werden in der Natur durch eine genügende Zahl von scharf eingewiesenen Stäben bezeichnet. Zur durchlaufenden Abszissenmessung dienen meist 5 m-Latten, seltener das Ziehstahlband, während die Ordinaten auch mit 5 m-Latten oder 3 m-Latten oder mit einem Handstahlband ermittelt werden, wobei sorgfältig darauf zu sehen ist, daß der Nullpunkt des Meßwerkzeugs jeweils genau auf der Abszissenachse liegt. Zum Fällen und Erreichen von Senkrechten wird im horizontalen Gelände zweckmäßig ein Winkelprisma und in stark hügeligen Gebieten die Kegelkreuzscheibe verwendet. In Städten wird bei kurzen Ordinaten wohl auch ein Winkel an die am Boden aufgeschnürte Abszissenachse angelegt. Sehr lange Ordinaten sollen wegen der größeren Unsicherheit in der Lage des Fußpunktes vermieden oder unter Umständen — ausnahmsweise — mit dem Theodolit abgesteckt werden. Scharfe Messungsproben sind für die Endpunkte langer Ordinaten besonders wichtig. Durch Spannungen, welche gegen die Messungslinie und gegen die Ordinaten annähernd gleichmäßig geneigt sind, wird sowohl der zugehörige Abszissenunterschied als auch der Ordinatenunterschied — nicht aber die Koordinaten selbst — verprobt, während zur Abszissenachse annähernd parallele bzw. senkrechte Spannungen lediglich den Abszissenunterschied bzw. den Ordinatenunterschied sichern. Auch die Messung sog. Steinlinien, wie z. B. eine über 16 $\frac{1}{2}$ und 17 $\frac{3}{4}$ (Abb. 197) läuft, bietet willkommene Proben. Vielfach mißt man auch die zur eigentlichen Punktfestlegung entbehrlichen Viereckshöhen, um später eine einfache Flächenberechnung zu ermöglichen. Auch Straßen- und ähnliche Gebilde nimmt man, selbst wenn ihre Begrenzung schon teilweise anders festgelegt ist, stets von den auf oder neben der Straße verlaufenden Polygonseiten aus auf, damit ihre Begrenzung jederzeit in einfacher Weise wiederhergestellt werden kann. Eine wahllose Messung aller möglichen überschüssigen Bestimmungsstücke ist jedoch unangebracht.

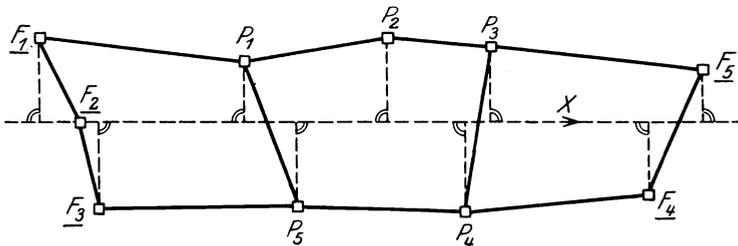


Abb. 202. Standlinienaufnahme.

Die Messungsergebnisse werden in Handrisse eingetragen, welche, soweit es die Rücksicht auf die Deutlichkeit erlaubt, annähernd maßstäblich geführt werden. Gegenstand der Aufnahme sind Eigentums-, Kultur-, Gewannen- und politische Grenzen, ferner Verkehrswege aller Art, Zäune, Hecken, Brunnen, Leitungen, Hydranten, Kanalschächte und andere für den jeweiligen Aufnahmeweck wichtige Einzelheiten.

In einfachen Fällen kann man auch ohne Polygonnetz mit einem rechteckigen oder dreieckigen Rahmen auskommen, dessen Seiten als Messungslinien dienen. Den einfachsten Fall stellt die Standlinienaufnahme dar, bei welcher eine als Abszissenachse X (Abb. 202) dienende Standlinie das aufzunehmende Gebilde $P_1 P_2 \dots P_5$ der Länge nach ungefähr halbiert. Zum Eintrag einer solchen Aufnahme in einen bereits vorhandenen Plan muß die Standlinie nach Andeutung von Abb. 202 auf im Plan sicher festliegende Punkte $F_1, F_2, \dots F_5$ eingemessen werden¹⁾.

Die mittlere Lageunsicherheit der durch eine gute Koordinatenaufnahme bestimmten Punkte gegen die nächsten Polygonpunkte ist auf einige cm zu schätzen²⁾.

25. Horizontalaufnahme durch Polarkoordinaten mit dem entfernungsmessenden Theodolit.

Diese auch als Rayonieren mit dem Theodolit bezeichnete Aufnahmeart kommt nur für offenes, übersichtliches, annähernd horizontales Gelände in Betracht und ist ein Sonderfall der später ausführlicher zu behandelnden Tachymetrie. In einem größeren Aufnahmegebiet werden zunächst wieder Festpunkte P_1, P_2, \dots etwa durch Polygonmessung bestimmt, welche dann der Einzelaufnahme als Theodolitstandpunkte dienen. Ist das Instrument etwa über P_1 zentrisch aufgestellt, so sind die Achsenfehler so weit zu beseitigen, daß ihr Einfluß den der zufälligen Beobachtungsfehler nicht mehr erreicht. Diese Untersuchung erstreckt sich, da die Aufnahme mit Rücksicht auf die etwas geringeren Genauigkeitsanforderungen und gesteigerten Ansprüche an den Arbeitsfortschritt nur in einer Fernrohrlage erfolgen kann, auch auf den Ziel- und Kippachsenfehler. Die Berichtigung ist übrigens, da lauter nahezu horizontale Sichten in Frage kommen, leicht ausreichend, es wäre denn, daß etwa zur Orientierung ein sehr nahe gelegener Hochpunkt verwendet würde. Hat man die Konstanten des Entfernungsmessers bestimmt, so wird das berichtigte Instrument zur Orientierung der Aufnahme auf einen anderen bekannten Punkt P_i gerichtet, worauf die zu dieser Einstellung gehörige Horizontalkreisablesung aufgeschrieben wird. Daraufhin erfolgt die Aufnahme der Einzelpunkte, indem jeweils das annähernd horizontale Fernrohr auf eine in diesen Punkten lotrecht gestellte Latte gerichtet, an dieser der zwischen den Entfernungsfäden befindliche Lattenabschnitt und am Horizontalkreis die Horizontalrichtung abgelesen wird. So ist die Lage jedes Punktes in bezug auf den Instrumentenstandort, und die Orientierungsrichtung durch seine horizontale Entfernung und deren Richtung, also durch seine horizontalen Polarkoordinaten bestimmt. Eine unmittelbare Messung der Entfernung ist nur zweckmäßig, wenn diese eine Meßbandlänge nicht überschreitet. Während ein Beobachter am Instrument seine Messungen ausführt und einträgt, weist ein Handrißführer

¹⁾ Als besondere Art der Koordinatenaufnahme sei noch die Parallelmethode genannt, welche die Einzelaufnahme auf ein System von zwei senkrechten Scharen paralleler Linien stützt. Dieses Verfahren, welches seinerzeit bei der dänischen und württembergischen Landesaufnahme eine Rolle gespielt hat, liefert einfache, gute Messungsproben; es scheidet aber in der Regel daran, daß ein solches der Gestalt nach vorgegebenes Liniennetz nur sehr schwer abzustecken ist und sich den aufzunehmenden Linien und dem Gelände überhaupt viel zu wenig anschmiegt.

²⁾ Eine Koordinatenaufnahme beschreibt schon *Heron* von Alexandrien (*Schöne*, Heron, S. 261 ff. und 267 ff.). Einen geschichtlichen Rückblick auf die Koordinatenmethode gibt des Verfassers Arbeit „Die Bedeutung der Koordinatengeometrie für die Bauingenieurtechnik“ in der Z. B. G. V., Jahrg. 1907, S. 188 ff.

dem Lattenträger die Lattenstandpunkte an, numeriert sie in seiner Skizze (Abb. 203) fortlaufend und ergänzt, wo notwendig, die Aufnahmen durch einzelne direkt

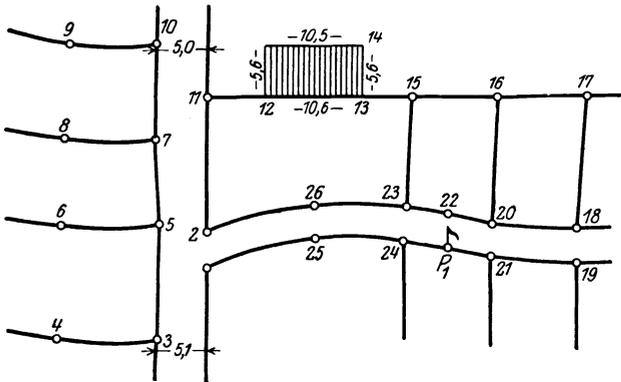


Abb. 203. Handriß zur Aufnahme nach Polarkoordinaten.

durch einzelne direkt gemessene Maße wie Wegbreiten, Hausbreiten u. dergl. Von Zeit zu Zeit wird durch Zuruf nachgeprüft, ob die Numerierung im Handriß mit derjenigen des Beobachters noch übereinstimmt. Am Ende der Beobachtungen, bei besonderen Anlässen auch schon früher, erfolgt auf jedem Standorte noch einmal eine Nachprüfung der

Orientierung. Die mittlere Lageunsicherheit der nach diesem Verfahren aufgenommenen Punkte gegen den Instrumentenstandort hängt natürlich wesentlich von der Entfernung ab; ihre Größenordnung ist auf etwa 1 dm zu veranschlagen.

26. Busselenaufnahme.

Auch bei der Horizontalaufnahme mit der Busssole handelt es sich um eine Punktfestlegung durch Polarkoordinaten. Nur erfolgt hier die Ablesung der Horizontalrichtung an der Bussolenteilung; auch liegen hinsichtlich der Fehlerfortpflanzung besondere Verhältnisse vor.

a) Bussolenzüge.

Spätestens mit der Einzelaufnahme wird auch die Festlegung der meist verpflockten Bussolenstandorte vorgenommen. Sie erfolgt meistens mit Hilfe von Bussolenzügen, d. h. von kurzzeitigen (Seiten nicht über 50 m) Polygonzügen, in denen an Stelle der Brechungswinkel die Seitenrichtungen, nämlich die magnetischen Streichwinkel beobachtet werden, während zur Messung der Seitenlängen entweder das Meßband oder das distanzmessende Bussolenfernrohr dient.

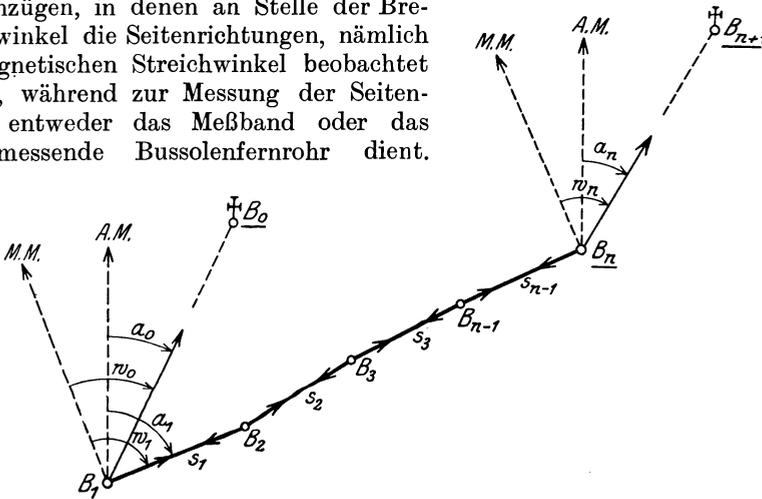


Abb. 204. Bussolenzug mit Gegenazimuten und mit Orientierungsanschluß.

Die Bussolenzüge kann man daher auch als Richtungszüge, die Theodolit-polygonzüge hingegen als Winkelzüge bezeichnen.

Ein Bussolenzug $B_1 B_2 \dots B_n$ (Abb. 204) wird womöglich immer an zwei Punkte B_1, B_n von bekannter Lage (Dreieckspunkte oder gut bestimmte Polygonpunkte) angeschlossen. Ist das Instrument über B_1 aufgestellt, so ermittelt man zunächst aus der zur Einstellung eines weiteren bekannten Punktes B_0 gehörigen Streichwinkelablesung w_0' (Mittel der Ablesungen an beiden Nadelenden) nach (180) die Reduktionsgröße Δ , stellt hierauf den vorwärtsliegenden Punkt B_2 ein und erhält aus dem Mittel w_1' der Ablesungen das astronomische Azimut a_1 der Seite s_1 nach (179). Gleichzeitig erfolgt die Seitenmessung. Zur eindeutigen Punktfestlegung würde es genügen, in Sprungständen zu beobachten, d. h. nur in jedem zweiten Punkte die von ihm ausgehenden Seiten nach Länge und Richtung zu ermitteln. Sicherer ist es, einen Bussolenzug mit Gegenazimuten zu messen, also die von jedem Punkt ausgehenden Seiten nach Richtung und Länge zu bestimmen und die zusammengehörigen Doppelbeobachtungen für jede Seite vor ihrer weiteren Verwertung zu mitteln. Auch am Ende der Arbeit soll die Größe Δ noch einmal ermittelt werden. Zur Bestimmung dieser Hilfsgrößen kann an Stelle der Richtungen $B_1 B_0$ und $B_n B_{n+1}$ natürlich auch eine andere in der Nähe liegende bekannte Richtung dienen. Ein Zahlenbeispiel für eine Zugmessung mit Gegenazimuten enthält Tabelle 21.

Tabelle 21.

Standpunkte	Zielpunkte	Strecke (Mittel)	Beobachtete Streichwinkel		Mittel w'	Astronom. Azimut a	Bemerkungen
			Nordende	Südende			
B_1	B_0	m	28,4 ⁰	208,3 ⁰	28,35 ⁰	<u>18,55⁰</u>	bekannt $\Delta = w_0' - a_0$ $= + 9,80^0$ um 6 ³⁰
	B_2	41,0 (41,05)	89,2	269,2	89,20	<u>79,40</u>	
B_2	B_1	41,1	269,1	89,2	269,15	259,35	
	B_3	39,8 (39,75)	84,7	264,5	84,60	74,80	
B_3	B_2	39,7	264,6	84,5	264,55	254,75	
	B_4	43,5	88,8	268,8	88,80	79,00	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
B_n	B_{n-1}	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	bekannt $\Delta = + 9,85^0$ um 5 ³⁰
	B_{n+1}	\dots	70,3	250,2	70,25	<u>60,40</u>	

Zur Einrechnung eines Bussolenzuges in das Koordinatennetz der allgemeinen Aufnahme braucht man die von der Parallelen p_x (Abb. 205) zur X-Achse des Koordinatensystems aus gezählten Richtungswinkel α , welche sich von den astronomischen Azimuten a um die Meridiankonvergenz κ unterscheiden, so daß

$$\alpha_i = a_i - \kappa \dots \dots \dots (411)$$

wird. κ , welches innerhalb eines Zuges als konstant betrachtet werden darf, ist, wie die höhere Geodäsie zeigt, durch den Ausdruck

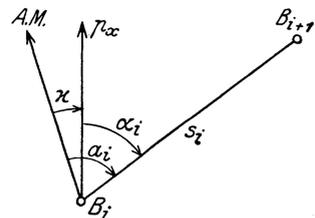


Abb. 205. Meridiankonvergenz.

$$\kappa'' = \Delta \lambda'' \sin \varphi = \varrho'' \frac{y}{r} \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots (412)$$

bestimmt, in dem $\Delta \lambda$ die von der X-Achse aus nach Osten positiv gezählte

geographische Länge, φ die geographische Breite, y die Ordinate des Beobachtungsortes und r den Erdhalbmesser (rund 6370 km) bedeutet.

Sind mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen sämtliche Zugseitenrichtungswinkel aufgestellt, so kann der Bussolenzug wie ein Polygonzug mit bekannten Seitenlängen und Richtungswinkeln berechnet werden.

Ein Fehler im Streichwinkel beeinflusst lediglich die Richtung der betreffenden Seite, während alle übrigen Seitenrichtungen davon unberührt bleiben, so daß nur eine geringe Parallelverschiebung des folgenden Zugteiles eintritt. Anders beim Theodolitpolygonzug (Winkelzug), wo ein Winkelfehler eine Drehung des ganzen Restzuges zur Folge hat!

Bedeutet m_r den mittleren Fehler der beobachteten Streichwinkel, so ist die hieraus folgende Querverschwenkung des Endpunktes einer einzelnen Seite s das Produkt $s \cdot m_r$. Für den Endpunkt B_n eines gleichseitigen, gestreckten Bussolenzuges von der Länge L ist daher die Querverschwenkung

$$m_q = m_r \cdot s \sqrt{n-1} = m_r \sqrt{s \cdot L} \dots \dots \dots (413)$$

zu befürchten. Sie ist bei einer festen Zuglänge L zu \sqrt{s} proportional, so daß vom Standpunkte der Fehlerfortpflanzung aus Bussolenzüge mit kurzen Seiten, wie sie sich im Walde meist von selbst ergeben, Zügen mit langen Seiten vorzuziehen sind. Für die Theodolitpolygonzüge ergab sich aus (376) das umgekehrte Ergebnis.

Die mittlere Längsverschwenkung des Endpunktes im betrachteten Bussolenzug wird

$$m_l = m_s \sqrt{n-1}, \dots \dots \dots (414)$$

wenn m_s den mittleren Längenfehler einer Zugseite s bedeutet. Der Ausdruck für m_l stimmt in der Form mit dem entsprechenden Fehler (375) im Theodolitpolygonzuge überein. Bei den kurzen Entfernungen wird m_s in der Hauptsache durch den Ausdruck $m_0 \sqrt{s}$ bzw. $k \cdot s$ angegeben, je nachdem die Längenmessung unmittelbar oder mit dem Distanzmesser erfolgt. Die Längsverschwenkung des Zugendpunktes wird demnach

$$m_l = m_0 \sqrt{L} \quad \text{bzw.} \quad m_l = k \sqrt{s \cdot L} \dots \dots \dots (415)$$

Bei Anwendung des Distanzmessers zur Seitenmessung verdienen daher die kurzseitigen Bussolenzüge auch mit Rücksicht auf die Längsverschwenkung den Vorzug.

b) Einzelaufnahme.

Auch die Einzelaufnahme mit der Bussole erfolgt durch Polarkoordinaten (Streichwinkel und Entfernungen), die sich auf den jeweiligen Instrumentenstandort und dessen magnetischen Meridian beziehen. Dabei werden Entfernungen unter einer Meßbandlänge meist mit dem Meßband, größere hingegen mit der Distanzmesservorrichtung ermittelt. Die Messungsergebnisse trägt man in Tabellen und Handrisse ein, die von Zeit zu Zeit auf die Übereinstimmung der Punktnummerierung hin nachgeprüft werden. Sowohl bei der Einzelaufnahme wie auch schon bei der Standortsbestimmung sind alle Ursachen, welche die Nadel aus der Richtung des magnetischen Meridians bringen könnten, wie die Annäherung von Schlüsseln, Messern, Klemmerfedern, Ziernadeln an die Magnetnadel oder eine nahe gelegene Starkstromleitung sorgfältig zu vermeiden. Unter normalen Verhältnissen ist die mittlere Lageunsicherheit der zerstreut aufgenommenen Einzelpunkte gegen den zugehörigen Bussolenstandort auf etwa 1 dm zu veranschlagen, solange die Entfernungen 50 m nicht überschreiten.

Das Hauptanwendungsgebiet für die Bussole ist der Wald, wo schon die schlechteren Sichtverhältnisse zur Einhaltung der von der Theorie geforderten kurzen Seitenlängen zwingen. Allerdings handelt es sich dabei seltener um eine reine Horizontalaufnahme, als vielmehr um eine vereinigte Horizontal- und Höhenaufnahme.

27. Meßtischaufnahme.

Bei Meßtischaufnahmen erfolgt auch die Bestimmung der Meßtischstandorte, von denen aus möglichst viel Einzelpunkte zu erreichen sein sollen, in der Regel mit dem Meßtisch. Dieses Stationieren mit dem Meßtisch muß stets der Einzelaufnahme vorausgehen, damit sich nicht etwa Fehler in den Standpunktbildern auf alle von ihnen aus bestimmten Einzelheiten übertragen.

a) Stationieren mit dem Meßtisch.

Die wichtigsten Arten der Punktbestimmung mit dem Meßtische sind:

1. das graphische Vorwärtseinschneiden,
2. das graphische Seitwärtsabschneiden,
3. das graphische Rückwärtseinschneiden.

Zu diesen als graphische Triangulierung bezeichneten Verfahren tritt noch

- 4, die Polygonmessung mit dem Meßtisch.

Beim graphischen Vorwärtseinschneiden (Abb. 206) ist von zwei bekannten Feldpunkten A, B aus, deren Bilder a, b auf dem Meßtischblatt

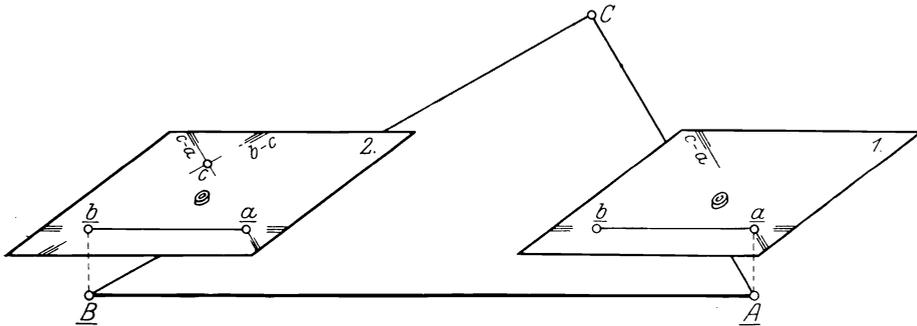


Abb. 206. Vorwärtseinschneiden mit dem Meßtisch.

im Maßstab der nachfolgenden Einzelaufnahme aufgetragen sind, der zu einem Neupunkt C gehörige Bildpunkt c zu ermitteln. Zu diesem Zwecke stellt man den Meßtisch zentriert, orientiert und horizontalisiert nacheinander in den beiden gegebenen Punkten A, B auf, indem man zur Orientierung jeweils die Richtung nach dem anderen bekannten Punkte benutzt. Dreht man nun bei feststehendem Tisch die berichtigte¹⁾ Kippregel so, daß ihre Zielebene den unbekanntem Punkt C enthält und die Linealkante durch den Bildort a bzw. b des jeweiligen Standortes geht, so geben die längs der

¹⁾ Die Kippregelberichtigung muß sowohl für das Stationieren wie auch für die Einzelaufnahme mit dem Meßtisch sehr sorgfältig durchgeführt werden, da aus praktischen Gründen immer nur in einer Fernrohrlage beobachtet werden kann.

Linealkante gezogenen Striche $a-c$ und $b-c$ je einen geometrischen Ort, deren Schnitt den gesuchten Bildpunkt c ergibt. Daß für die scharfe Richtungsbezeichnung jeweils Randmarken verwendet werden, ist wohl selbstverständlich.

Ist von den gegebenen Punkten einer, z. B. A (Abb. 207) unzugänglich, während B und der unbekannte Punkt C zugänglich sind, so führt das graphische Seitwärtsabschneiden zum Ziel. Hat man den

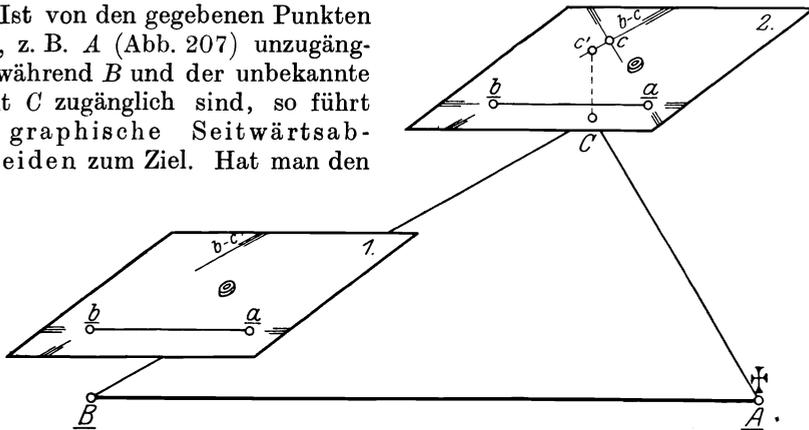


Abb. 207. Seitwärtsabschneiden mit dem Meßtisch.

Tisch zentriert, orientiert und horizontiert in B aufgestellt, so erhält man durch Einstellen von C mittels der Kippregel wie vorhin für c einen ersten geometrischen Ort $b-c$. Auf diesem schätzt man für c einen Näherungsort c' ein und stellt damit und mit der Richtung CB als Orientierungsrichtung nunmehr den Tisch in C zentriert, orientiert und horizontiert auf. Dreht man hierauf bei festem Tisch die Kippregel so, daß ihre Zielebene den unzugänglichen gegebenen Punkt A enthält und die Linealkante durch dessen Bildpunkt a geht, so liefert der Schnitt der Linealkante mit $b-c$ den gesuchten Bildpunkt c . In dieser Konstruktion steckt insofern ein kleiner, praktisch belangloser Fehler, als der zu c gehörige Bodenpunkt von C um den geringen Betrag cc' absteht. Dadurch wird c um $cc':V$ fehlerhaft, wenn $M=1:V$ der Aufnahmemaßstab ist. Für $M=1:1000$ und die große Abweichung $cc'=5$ cm z. B. wird der Fehler in der Lage des Bildpunktes c

erst 5 mm. Sollte er ja einmal die Grenze der zeichnerischen Darstellungsmöglichkeit überschreiten, so kann er entweder durch eine Wiederholung des Abschneidens in C bei verbesserter Zentrierung oder durch Abtragen der Größe $cc':V$ von c gegen c' hin unschädlich gemacht werden.

Sowohl beim graphischen Vorwärtsabschneiden wie auch beim Seitwärtsabschneiden sind je zwei bekannte Punkte und je zwei Meßtischauflagen notwendig. Beim graphischen Rückwärtseinschneiden hingegen braucht man drei bekannte Punkte, während nur eine einzige Meßtischauflage im gesuchten Punkte erforderlich ist. Sind u, v, w (Abb. 208) die

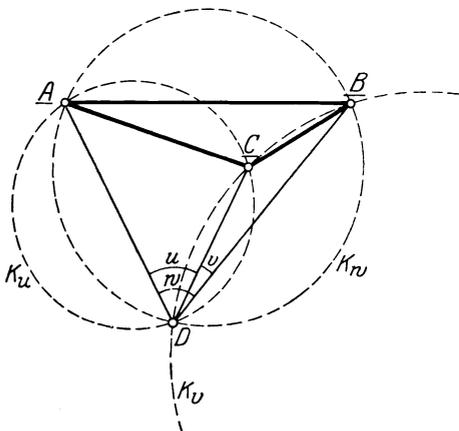


Abb. 208. Lösung des Rückwärtseinschneidens mit Hilfe der Schickhartschen Kreise.

Winkel, unter denen vom gesuchten Punkt D aus die Seiten des durch die gegebenen Punkte A, B, C gebildeten Dreiecks erscheinen, so kann man D als

den gemeinsamen Schnittpunkt dreier Kreise K_u, K_v, K_w , der sog. *Schickhart*-schen Kreise, auffassen, von denen jeder eine Dreiecksseite als Sehne und den zugehörigen Gesichtswinkel u bzw. v, w als Peripheriewinkel faßt.

Eine dieser Darlegung entsprechende nach *Schickhart* benannte Lösung besteht darin, die Winkel u, v auf dem in D aufgestellten Meßtisch zu zeichnen und hierauf im gegebenen Bilddreieck abc mit Hilfe der gezeichneten Winkel u, v die den Kreisen K_u, K_v entsprechenden Bildkreise k_u, k_v zu konstruieren, deren Schnittpunkt den dem Neupunkt D entsprechenden Bildpunkt d liefert. Doch ist diese naheliegende, direkte planimetrische Lösung praktisch bedeutungslos, da sie viel zu umständlich ist und zudem vollkommen versagt, wenn die Kreismittelpunkte nicht auf das Meßtischblatt fallen.

Brauchbarer ist schon die von *Bohnenberger* unter Benutzung des *Collins*-schen Hilfspunktes angegebene folgende Lösung. Man stellt den Meßtisch über dem Feldpunkt D auf und legt die dort gemessenen Winkel u, v in b und a sofort zeichnerisch an die Seite ab des Bilddreiecks an. Der Schnittpunkt h (Abb. 209) der nicht zusammenfallenden Schenkel dieser Winkel ist der *Collins*sche Hilfspunkt im Bild. Da nach früheren Ausführungen (Abb. 185) d auf hc liegt (die Verbindungslinie hc schneidet auf dem durch a, b, c gehenden Hilfskreis k_h den gesuchten Ort d aus), so kann man in D den Meßtisch mit Hilfe der Anlegelinie $c-h$ orientieren. Schneidet man dann noch seitwärts nach A oder B ab, so ist der Schnittpunkt der Linealkante mit $c-h$ der gesuchte Bildpunkt d . In Abb. 209 ist zur leichteren Orientierung die Reihenfolge der zu nehmenden Sichten durch Numerieren kenntlich gemacht. Streng genommen müßte man im ganzen drei Meßtischaufstellungen vornehmen, nämlich je eine, wenn beim Antragen der Winkel u, v die Bildpunkte b, a lotrecht über D gebracht werden und eine dritte beim Seitwärtsabschneiden des Punktes d . Dies würde die Lösung sehr umständlich machen. Stellt man den Tisch von vornherein so auf, daß ein für d geschätzter Näherungsort lotrecht über D liegt, so kommt man bei nicht allzu großen Genauigkeitsansprüchen auch mit dieser einen Aufstellung und einigen Drehungen der Tischplatte aus, da sich wegen der gegen die Punktentfernungen sehr kleinen Verschiebungen der Scheitel der angetragenen Winkel u und v diese selbst nur um belanglose Beträge ändern. Die Konstruktion versagt, wenn der Hilfspunkt h über das Tischblatt hinausfällt.

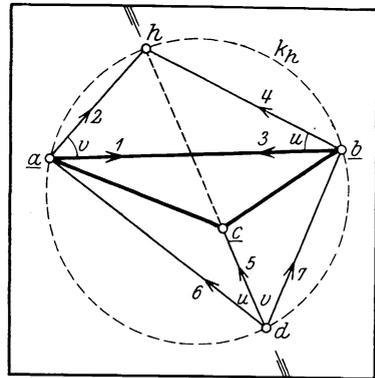


Abb. 209. Graphisches Rückwärts-einschneiden nach *Bohnenberger-Collins*.

Außer dem eben beschriebenen direkten Verfahren hat *Bohnenberger* unter Verwendung von *Lehmans* fehlerzeigenden Dreiecken noch ein nie versagendes Näherungsverfahren zur graphischen Lösung des Rückwärts-einschneidens erdacht, welches als das im allgemeinen zweckmäßigste heute fast ausschließlich verwendet wird. Bei dieser Lösung stellt man den Meßtisch mit Hilfe eines für d darauf angenommenen Näherungsortes d' zentrisch, horizontal und angenähert orientiert über dem Neupunkt D auf, wobei zur Erzielung einer guten Orientierung am zweckmäßigsten die Richtung nach dem entferntesten der gegebenen Punkte benützt wird. Werden hierauf bei feststehendem Tisch die Feldpunkte A, B, C nacheinander in die Zielebene der Kippregel gebracht, deren Linealkante dabei je durch den zugehörigen Bildpunkt a bzw. b und c geht, so schließen die längs der Linealkante ge-

zogenen, in Abb. 210 durch einen einfachen Pfeil bezeichneten Richtungen die schon mehrfach genannten Winkel u, v, w ein, deren Scheitel β, α, γ auf den drei durch den gesuchten Bildpunkt d gehenden Schickhartschen Bildkreise k_u, k_v, k_w liegen. Nunmehr wird die Orientierung des Tisches etwas verändert und zwar am zweckmäßigsten mit Hilfe eines schärferen Näherungs-ortes d'' für d verbessert¹⁾. Dieses d'' erhält man durch Einschätzung des

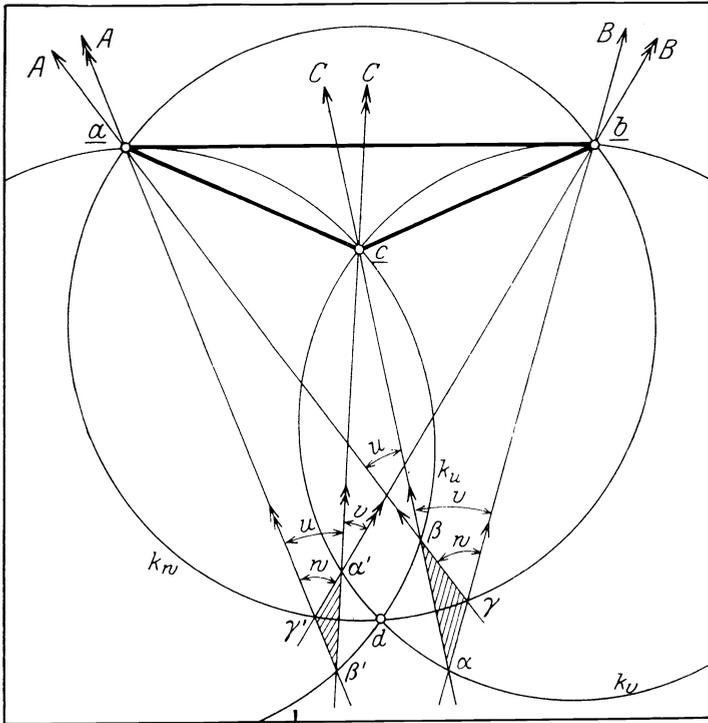


Abb. 210. Bohnenbergers graphische Lösung des Rückwärtseinschneidens mit Hilfe von Lehmanns fehlerzeigenden Dreiecken.

Schnittpunktes²⁾ der drei durch β, α, γ gehenden, ihrer Lage nach ungefähr zu überblickenden Bildkreise k_u, k_v, k_w . In dieser neuen Stellung des Tisches wird die eben besprochene Konstruktion wiederholt (Doppelpfeile), wodurch man die ebenfalls auf k_u, k_v, k_w liegenden Winkelscheitel β', α', γ' erhält. Bei einiger Übung werden die beiden fehlerzeigenden Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$, besonders letzteres ziemlich nahe an den gesuchten Bildort d heranrücken, so daß man, ohne einen großen Fehler zu begehen, die kurzen Bögen $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ durch ihre leicht zu zeichnenden, sich im gesuchten Bildpunkte d schneidenden Sehnen ersetzen darf. Demnach findet man das Bild d des Neupunktes als den Schnittpunkt der Verbindungslinien $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$

¹⁾ Zur Wahrung der Übersichtlichkeit ist in Abb. 210 die Lage des Bilddreiecks vor und nach der Orientierungsänderung dieselbe; dagegen hat man sich das in der Zeichnung nicht mehr erhaltene Naturdreieck ABC im entgegengesetzten Sinne um den Betrag der Orientierungsänderung gedreht zu denken.

²⁾ Dieser Schnittpunkt d liegt innerhalb bzw. außerhalb des fehlerzeigenden Dreiecks, je nachdem der zu bestimmende Punkt D innerhalb oder außerhalb des gegebenen Dreiecks ABC liegt. Siehe hierzu Frenchen, *•T.*, Beweis für Lehmanns Sätze über die Stellung des gesuchten Punktes zum fehlerzeigenden Dreiecke beim Rückwärtseinschneiden, Z.V.W. 1877, S. 276 und 277.

(Abb. 211) der entsprechenden Punkte von zwei nahe an d liegenden fehlerzeigenden Dreiecken. Wird der Tisch, nachdem d gefunden ist, nach einem der gegebenen Punkte orientiert, so müssen zur Probe auch die übrigen Orientierungen stimmen. Sollte dies nicht genügend genau zutreffen, etwa weil das erste fehlerzeigende Dreieck noch zu groß war und die drei Sehnen

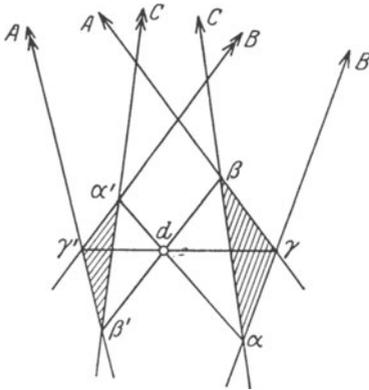


Abb. 211. Konstruktion des Standortes aus den fehlerzeigenden Dreiecken.

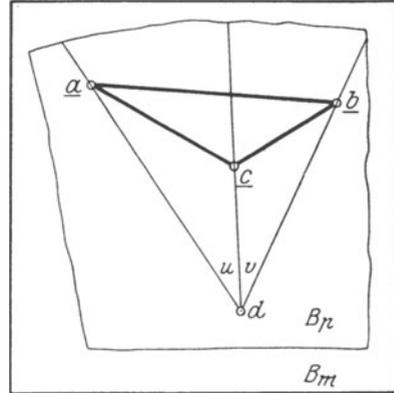


Abb. 212. Lösung des Rückwärtseinschneidens mit Hilfe einer aufgelegten Pause.

$\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ nicht genau durch ein und denselben Punkt gehen, so zieht man zur endgültigen Punktbestimmung noch ein drittes bei schärferer Orientierung des Tisches konstruiertes, fehlerzeigendes Dreieck heran.

Sehr einfach und für manche Zwecke hinreichend genau ist die folgende, mit Hilfe einer Pause durchzuführende Lösung. Überträgt man in D mittels der Kippregel die vom Neupunkt nach den gegebenen Punkten führenden Richtungen auf ein Blatt Pauspapier B_p (Abb. 212) und legt dies so auf das Meßtischblatt B_m , daß die Schenkel der Winkel u, v durch die drei gegebenen Bildpunkte a, b, c gehen, so bezeichnet der Ort des Strahlenscheitels den gesuchten Bildpunkt d .

Bezüglich des gefährlichen Kreises gilt dasselbe, was schon gelegentlich der trigonometrischen Punktbestimmung hierüber gesagt worden ist¹⁾.

Beim Polygonisieren mit dem Meßtisch tritt die graphische Richtungsmessung in Verbindung mit der Längenmessung auf.

Die Punktbestimmung erfolgt hier jeweils durch Vorwärtsvisieren und Messung der Strahlenlänge, die sofort in dem vorgeschriebenen Maßstabe aufgetragen wird.

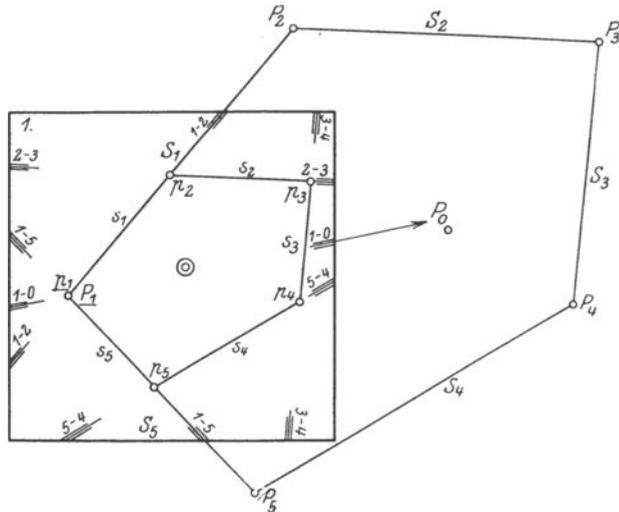


Abb. 213. Polygonaufnahme mit dem Meßtisch.

¹⁾ Siehe Seite 145.

Ist $P_1 P_2 P_3 \dots$ (Abb. 213) z. B. das aufzunehmende Polygon, zu dessen bekanntem Anfangspunkt P_1 der zugehörige Bildpunkt p_1 gegeben ist, so wird der Tisch zunächst in P_1 zentrisch aufgestellt und nach einem weiteren Punkte P_0 von bekannter Lage orientiert¹⁾. Dann setzt man bei unveränderter Lage des Tisches die Kippregel so, daß ihre Zielebene den Punkt P_2 enthält und die Linealkante durch den Bildpunkt p_1 geht. In dieser Instrumentenstellung trägt man die der meist direkt gemessenen horizontalen Entfernung $P_1 P_2 = S_1$ im Maßstab der Darstellung entsprechende Länge s_1 von p_1 aus längs der Linealkante ab und erhält so den Bildpunkt p_2 . Außerdem wird zur Erzielung einer möglichst langen Anlegelinie für die Richtung $p_1 p_2$ diese auch an den Blatträndern längs der Linealkante durch Randmarken bezeichnet. Der Meßtischgenauigkeit würde eine einfache direkte Seitenmessung durchaus genügen; sie muß jedoch zur Aufdeckung etwaiger grober Fehler wiederholt werden.

So wie im ersten Punkte wird auch in den übrigen Punkten verfahren, wobei zur Orientierung des Tisches jeweils die lange Anlegelinie der vorher bestimmten Seite benützt wird. Schließlich soll der Endpunkt der letzten Zugseite im Bilde mit einem fehlerfrei vorgegebenen Punkte — im geschlossenen Zuge mit dessen Anfangspunkt — zusammenfallen. Auch soll eine im Endpunkte etwa noch vorhandene Orientierung stimmen.

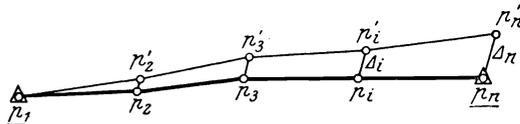


Abb. 214. Linearer Anschlußfehler der graphischen Polygonmessung.

Wegen der verschiedenen unvermeidlichen Messungsfehler wird jedoch an Stelle des richtigen Zuges $p_1 p_2 \dots p_n$ (Abb. 214) der fehlerhafte $p_1 p_2' p_3' \dots p_n'$ mit einem linearen Anschlußfehler Δ_n treten. Eine strenge Zugausgleichung ist hier noch viel weniger am Platz wie bei der Theodolitpolygonisierung, und man kann etwa in ganz roher, aber auch sehr einfacher Weise nach Andeutung von Abb. 214 die sämtlichen Punkte p' in der Richtung des Schlußfehlers um Beträge verschieben, welche der Zahl der zurückliegenden Polygonseiten jeweils proportional sind. So ist z. B.

$$\Delta_i = (i - 1) \frac{\Delta_n}{n - 1} \dots \dots \dots (416)$$

die Verschiebung des Punktes p_i .

Wird der Schlußfehler Δ_n größer als etwa $\frac{1}{1000}$ der Zuglänge, so ist auch noch die Einwirkung grober Fehler anzunehmen. Zeigt sich z. B., daß Δ_n ziemlich genau parallel bzw. senkrecht zu einer Zugseite liegt, so ist zu vermuten, daß deren Länge bzw. ihre Richtung falsch aufgetragen ist, und man wird zunächst diese Seite daraufhin nachprüfen. Kann dadurch die Differenz nicht aufgeklärt werden, so ist die ganze Zugmessung zu wiederholen.

b) Einzelaufnahme mit dem Meßtisch.

Vor der eigentlichen Einzelaufnahme geht man zuerst das Gebiet ab und entwirft dabei in allgemeinen Umrissen einen Handriß. Manchmal werden auch gleich die hernach aufzunehmenden Punkte durch numerierte Späne bezeichnet. Dann stellt man den Meßtisch zunächst im ersten Standort P_1 (Abb. 215) gehörig auf, orientiert nach einem möglichst weit entfernten Punkte

¹⁾ Dabei ist es, wenn der Bildpunkt p_0 nicht mehr auf das Meßtischblatt fällt, notwendig, die Schnittpunkte der Orientierungsrichtung mit den Blatträndern, die sog. Blattsschnitte zu berechnen.

von bekannter Lage, führt nötigenfalls die Kippregelberichtigung und die Bestimmung der Distanzmesserkonstanten durch und nimmt hierauf alle vom Standort aus gut zu erreichenden Einzelheiten 1, 2, 3, ... durch Polarkoordinaten auf. Dabei werden die Entfernungen r_1, r_2, r_3, \dots dieser Punkte — abgesehen von denen, die unter einer Meßbandlänge betragen — durch Distanzmessung an einer lotrechten Latte ermittelt und sofort im Aufnahmemaßstab von p_1 (Bildpunkt des Standortes) aus an der durch diesen Punkt gehenden Linealkante abgetragen. Die aufgetragenen Punkte werden sowohl auf dem Meßtisch als auch im Handriß fortlaufend numeriert. Die Übereinstimmung der Numerierung wird, da der Handrißführer mit dem Latten-träger gehen muß, um ihm die Standorte anzuweisen, von Zeit zu Zeit durch Zuruf kontrolliert. Ab und zu, jedenfalls aber unmittelbar vor dem Verlassen des Standortes und nach einer Erschütterung des Meßtisches muß dessen Orientierung — mittels langer Anlegelinie — nachgeprüft und, wenn nötig, berichtigt werden. Sind im ersten Standpunkte alle von dort aus er-

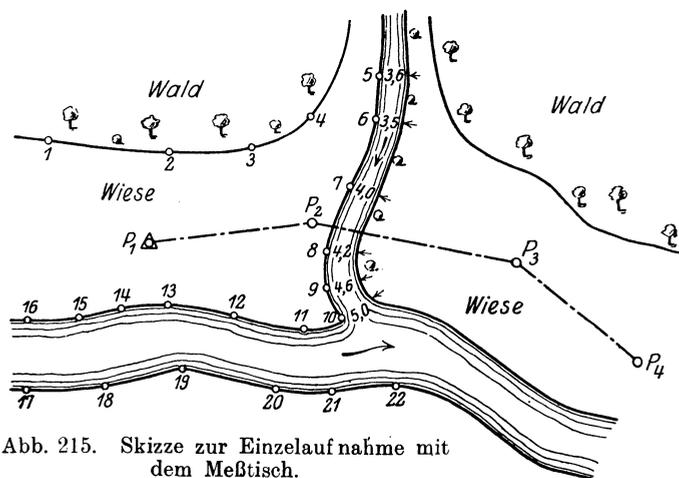


Abb. 215. Skizze zur Einzelaufnahme mit dem Meßtisch.

reichbaren Punkte aufgenommen, so begibt man sich der Reihe nach auf die übrigen Stationen und verfährt dort ebenso. Die eine oder andere Station wird man auch überspringen können, wenn die in ihrer Umgebung liegenden Einzelheiten von den beiden Nachbarstandorten aus noch mit genügender Sicherheit aufgenommen werden können. Die Punktnumerierung ist eine durchlaufende, knüpft also stets an die letzte gegebene Nummer im eben verlassenen Standpunkte an.

Da auf die beschriebene Art und Weise schon im Felde ein genaues, verjüngtes Planbild entsteht, so kann bereits die im Entstehen begriffene Aufnahme in all ihren Einzelheiten zur Aufdeckung grober Fehler mit der Natur verglichen werden.

Die Güte der Meßtischaufnahmen hängt in erster Linie vom Maßstab ab. Je kleiner derselbe, desto größer sind die Fehler der aus dem Plan entnommenen Örter und Entfernungen. Ferner spielen die Standfestigkeit des Tisches und die Sorgfalt der Meßtischaufstellung, die Beschaffenheit der Kippregel, das Wetter sowie die Übung, Geschicklichkeit und Gewissenhaftigkeit des Beobachters eine große Rolle. Für die Unsicherheit der aus den Lattenabschnitten ermittelten, aufzutragenden Entfernungen gelten die an früherer Stelle (Seite 116 ff.) über die Fehler der Fadendistanzmessung gegebenen Ausführungen.

Der mittlere Punktfehler eines aus einer sorgfältigen Originalaufnahme vorsichtig abgegriffenen Ortes oder einer direkt abgegriffenen Entfernung mag, wenn $M=1:V$ der Maßstab ist, etwa ($V:10000$) Meter betragen¹⁾.

Beispiele größerer Meßtischaufnahmen — vielfach in Verbindung mit Höhenaufnahmen — sind die bayerische Landesaufnahme 1:5000, teilweise auch die württembergische Katasteraufnahme 1:2500, ferner die preußischen Meßtischblätter (1:25000), die älteren badischen topographischen Blätter und die sächsische topographische Landesaufnahme. Eine glänzende Meßtischaufnahme der neuesten Zeit ist der von 1899—1905 aufgenommene Plan des Stadtgebietes Zürich²⁾ (50 qkm in 23 Blättern 1:2500 mit 2 m-Höhenlinien).

28. Allgemeines über Höhenaufnahmen.

Höhenaufnahmen sind für die verschiedensten Zwecke, insbesondere auch für rein ingenieurtechnische Aufgaben von großer Bedeutung. Je nach dem von Zweck der Arbeit abhängigen Genauigkeitsanforderungen kommen verschiedene Methoden der Höhenmessung in Betracht. Die wichtigsten derselben sind, annähernd nach abnehmender Genauigkeit geordnet, die folgenden: 1. das geometrische Nivellement, 2. die trigonometrische Höhenmessung, 3. das tachymetrische Nivellement, 4. die Staffelmessung mit Latten und Schnuren, 5. die barometrische Höhenmessung. Die verschiedenen Arten der Höhenmessung dienen zur Bestimmung der Höhenunterschiede zwischen je zwei Punkten und zur Ermittlung ihrer Meereshöhen, d. h. ihrer lotrechten Abstände vom Meeresspiegel. Dieser muß wegen des starken Einflusses der Erdkrümmung auf die Höhen schon auf kurze Entfernungen hin als kugelförmig, bei feineren Messungen sogar als ellipsoidisch betrachtet werden. In Deutschland bezieht man heute die Höhen auf den möglichst genau in die Niveaulfläche des Nullpunktes des Amsterdamer Pegels³⁾ gelegten Normalnullpunkt (N.N.P.) und bezeichnet sie als Höhen über Normalnull (N.N.). Zur oberirdischen Festlegung des tief unter die Bodenoberfläche fallenden Normalnullpunktes dient der Normalhöhenpunkt (N.H.P.), welchen nach den Ergebnissen sorgfältiger Messungen⁴⁾ 1879 das preußische Zentralkontor der Vermessungen am Nordpfeiler der Berliner Sternwarte 37,000 m über N.N. durch den Nullpunkt einer Millimeterteilung bezeichnete. Als infolge der geplanten Verlegung der Berliner Sternwarte der Verlust des N.H.P. bevorstand, wurde 1912 zum Ersatz dafür zwischen Herzfelde und Hoppegarten eine Gruppe von 5 Punkten unterirdisch festgelegt und durch Verbindung mit dem Normalhöhenpunkt der Höhe nach genau bestimmt⁵⁾.

¹⁾ Eine interessante Untersuchung über die Genauigkeit der bayerischen Grundsteuerkatasterpläne gibt *Vogel, P.*, in der Z.B.G.V. 1902, S. 59—69.

²⁾ Siehe hierzu das Referat *Hammer* in der Z.V.W. 1911, S. 621—626.

³⁾ Der Nullpunkt des Amsterdamer Pegels liegt selbst um 0,162 m über dem aus langjährigen (ab 1701), sorgfältigen Beobachtungen bestimmten Mittelwasser der Nordsee. Siehe Z.V.W. 1892, S. 650. Nach den dort S. 648 gegebenen Mitteilungen scheinen die Höhen der Mittelwasser verschiedener Meere bis zu einigen Dezimetern voneinander abzuweichen.

⁴⁾ Die nivellitische Verbindung des N.H.P. mit dem N.N.P. erfolgte 1875 u. 1876 mit Hilfe von niederländischen Messungen und von Messungen der trigonom. Abt. d. Preußischen Landesaufnahme. Sie sind beschrieben in Nivellements der trigonom. Abt. d. Landesaufnahme, IV. Bd., Berlin 1880. Siehe hierzu auch die Ausführungen in der Z.V.W. 1880, S. 1—16. Der mittlere Fehler dieser Übertragung ist kleiner als 1 dm zu schätzen.

⁵⁾ Siehe dazu *Wolff, H.*, Ersatz des Normalhöhenpunktes a. d. Berliner Sternwarte, Z.V.W. 1914, S. 51—52.

29. Das geometrische Nivellement.

Beim geometrischen Nivellieren oder Einwägen werden die Höhenunterschiede durch horizontales Zielen nach lotrecht gestellten, geteilten Latten oder Maßstäben bestimmt. Man bedarf dazu eines der früher (Seite 58 ff.) beschriebenen Nivellierinstrumente und einer Nivellierlatte.

Für sehr flüchtige Zwecke kann es manchmal genügen, nach Andeutung von Abb. 64 ein Nivellement mit Aughöhen durchzuführen, indem man sich bei jeder neuen Aufstellung auf denjenigen Geländepunkt begibt, welcher durch das verlängerte horizontale Lotbild in der vorhergehenden Station bezeichnet wurde und die Zahl n der Aughöhen i zwischen den beiden Punkten abzählt, deren Höhenunterschied bestimmt werden soll. Dieser ist die Summe aus dem Produkt $n \cdot i$ und einem im Endpunkt sich ergebenden geschätzten oder gemessenen Restbetrag. Dieses rohe Verfahren, bei dem an Stelle der Lattenablesungen die konstante Aughöhe i tritt, kann als ein Nivellieren vom Ende aus bezeichnet werden, da bergauf lauter Vorblicke, bergab jedoch lauter Rückblicke auftreten.

Verhältnismäßig roh sind auch die Höhenbestimmungen mit anderen Pendelnivellierinstrumenten, mit den hydrostatischen Nivellierinstrumenten sowie mit den Freihandnivellierinstrumenten mit Libelle.

Will man die Höhenunterschiede von Punkten, welche 1 km und mehr voneinander entfernt sind, auf einige mm genau erhalten, so muß man sich des eine feste Aufstellung ermöglichenden Dreifußnivellierinstrumentes mit Fernrohr und Libelle bedienen.

a) Festpunkte.

Vor Beginn der Messungen werden die ihrer Höhe nach zu bestimmenden Punkte sorgfältig ausgewählt und versichert. Die Auswahl dieser 1—2 km Abstand haltenden Höhenfestpunkte oder Fixpunkte (Abb. 216), deren Gesamtheit das Höhennetz bildet, erfolgt so, daß Zerstörungen oder auch

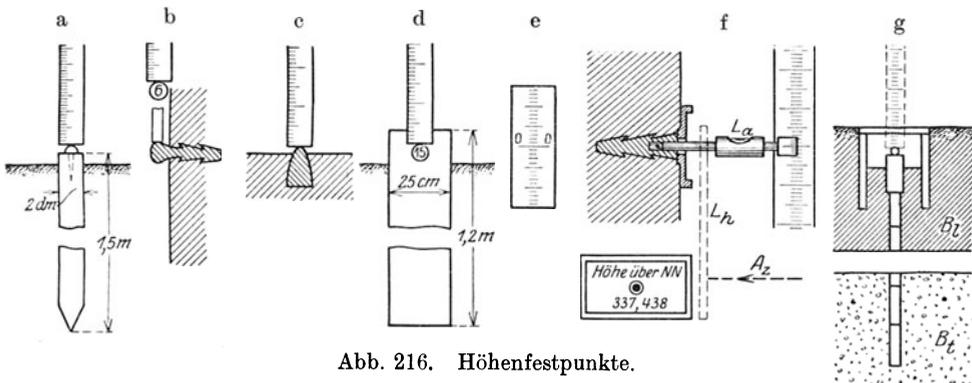


Abb. 216. Höhenfestpunkte.

nur meßbare Höhenänderungen der Träger dieser Punkte unwahrscheinlich sind¹⁾ und spätere Höhenmessungen leicht daran angeschlossen werden können.

Für untergeordnete Messungen von vorübergehender Bedeutung genügen vielfach Grenzsteine und Kilometersteine oder ebene Flächen (Quadrate, Drei-

¹⁾ Gegen Höhenänderungen infolge von plötzlichen oder langsamen Bewegungen der ganzen Erdkruste sind natürlich auch diese Punkte nicht gefeit.

ecke) auf Trittstufen, Sockelvorsprüngen u. dergl.; genaueren Anforderungen entsprechen Nivellementsfpfähle mit eingeschlagenem Nagel mit gewölbtem Kopf (Abb. 216a), horizontale massive Höhenbolzen (Abb. 216b) in festen Sockelmauern, Brückenfeilern und ähnlichen Bauwerken, aufrechtstehende Kopfbolzen (Abb. 216c) auf den Widerlagern von Brücken, größeren Durchlässen usw., in weit ausgedehnten Anlagen z. B. auch besondere Nivellementssteine (Abb. 216d) mit horizontalen oder senkrechten Bolzen, Teilungsmarken (Abb. 216e), in festem Mauerwerk sitzende horizontale Bolzen mit zentrischer Bohrung (Abb. 216f), die auch kurzweg als Höhenmarken bezeichnet werden und Rohrfestpunkte (Abb. 216g). Ein solcher besteht aus einem tief in den tragfähigen Boden getriebenen schmiedeeisernen Brunnenrohr, an dessen oberes Ende eine Kugelkappe aufgeschraubt ist¹⁾. Längs der Flüsse werden vielfach auch an gut fundierten km-Steinen oder km-Säulen Höhenbolzen angebracht. Standsicherheit verspricht ein Höhenfestpunkt nur dann, wenn sein Träger genügend weit unter die Frostgrenze in festen, gewachsenen Boden reicht. Höhenpunkt ist mit Ausnahme von 216e und f jeweils der höchste Punkt der betreffenden Marke, auf welchen beim Anschluß der Lattenfußpunkt aufgesetzt wird. Bei den Teilungsmarken ist es der Nullstrich einer feinen Teilung und bei den immer mit einem durchbohrten Schutzschild versehenen zentrischen Höhenmarken die horizontalliegende Achse einer zylindrischen Bohrung. Geeignete Höhenlage des Instrumentes und der Teilungsmarke vorausgesetzt, kann beim Anschluß an dieser selbst unmittelbar abgelesen werden. Auch der Anschluß an Höhenmarken mit horizontaler zentrischer Bohrung kann in ähnlicher Weise bewerkstelligt werden, indem mittels der Ziellinie A_z an einer kurzen Hängelatte L_h (Anschlußlatte) abgelesen wird (in Abb. 216f gestrichelt), welche in ihrem Nullpunkt an einem genau in die Höhlung der Marke passenden zylindrischen Stift aufgehängt ist. Die Höhenübertragung auf eine neben der Höhenmarke stehende Latte kann auch mit Hilfe einer sog. Anschlußlibelle L_n in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise erfolgen²⁾.

b) Durchführung und Berechnung des gewöhnlichen geometrischen Nivellements.

Die Ableitung der Meereshöhe H_2 (Abb. 217) eines Punktes P_2 aus der bekannten Meereshöhe H_1 eines Ausgangspunktes P_1 durch ein geometrisches Längen- oder Liniennivellement mit Hilfe eines fest aufzustellenden Fernrohrnivellierinstrumentes mit Libelle geschieht in folgender Weise. Man stellt zunächst das Instrument, dessen Fernrohrvergrößerung etwa 20—25 beträgt und dessen Libellentheilwert 10—15'' ist, in einem Punkte A_1 auf, der von P_1 gegen P_2 zu um etwa 40 m absteht. Hat es nach einiger Zeit, gegen direkte Sonnenbestrahlung, Regen oder Wind durch einen Meßschirm geschützt, die Temperatur der umgebenden Luft angenommen, so wird es auf die früher (Seite 56 ff. u. 62 ff.) beschriebene Weise berichtigt. Nunmehr richtet man das Nivellierfernrohr auf die rückwärts in P_1 (auf dem Festpunkt) lotrecht stehende Latte und erhält an derselben bei scharf einspielender Libelle als Ablesung den ersten Rückblick r_1 . War z_1 die zugehörige Zielweite, so wird jetzt die Latte über A_1 hinaus, wo das Instrument stehen bleibt, um z_1 gegen P_2 zu in W_1 aufgestellt, so daß das Instrument in der Mitte der Station steht und — auf alle Stationen angewendet — von einem Nivellieren aus der Mitte gesprochen werden kann. An der in W_1 lotrecht stehenden Latte er-

¹⁾ Näheres siehe bei *Gurlitt, S.*, Ein Normalhöhenpunkt, Z.V.W. 1908, S. 145—149.

²⁾ Näheres hierüber siehe in *Schmidt, M.*, E.M.B.P.N.H. 1, S. 36 u. 37.

hält man bei einspielender Libelle den Vorblick v_1 . Das gleiche wiederholt man in aneinandergereihten Stationen so lange, bis man mit einer n -ten Station mit der Zielweite z_n und den Lattenablesungen r_n, v_n im Endpunkte P_2 ankommt. In den Lattenstandpunkten W_1, W_2, \dots, W_{n-1} , den sog. Wechselpunkten, wird die Latte jeweils auf eine fest in den Boden getretene

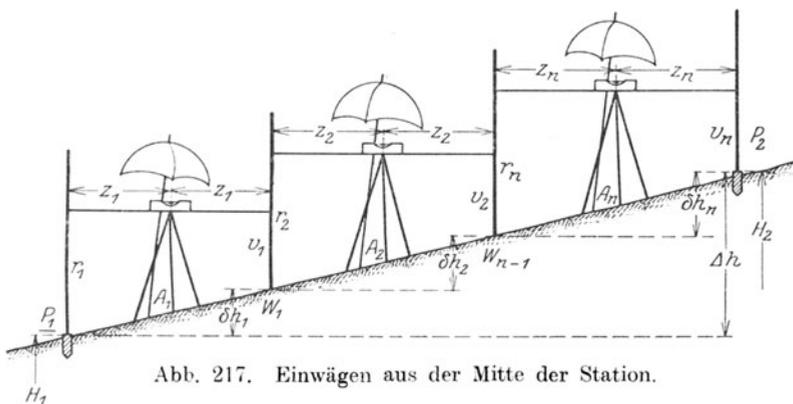


Abb. 217. Einwägen aus der Mitte der Station.

Unterlagsplatte aufgesetzt, während sie in den Endpunkten P_1, P_2 unmittelbar auf den betreffenden Pflock, Bolzen usw. gesetzt wird. Die Höhenunterschiede der aufeinander folgenden Wechselpunkte sind die Differenzen $\delta h_1 = r_1 - v_1, \dots, \delta h_n = r_n - v_n$, so daß der Höhenunterschied von P_1 bis P_2

$$\Delta h = \sum_1^n [\delta h_i] = \sum_1^n [r_i] - \sum_1^n [v_i] \dots \dots \dots (417)$$

und die Meereshöhe des letztgenannten Punktes

$$H_2 = H_1 + \Delta h = H_1 + \sum_1^n [r_i] - \sum_1^n [v_i] \dots \dots \dots (418)$$

wird.

Zur Sicherung gegen unzulässige Fehler soll jedes Nivellement in seinem weiteren Verlauf entweder an einen zweiten Punkt von bekannter Höhenlage anschließen oder in einer geschlossenen Schleife zum Ausgangspunkt zurückkehren.

Eine sich vollständig an den Gang der Messung anschließende, gebräuchliche Art der Aufschreibung und vorläufigen Berechnung eines Nivellements enthält Tab. 22, in welcher \otimes den jeweiligen Instrumentenhorizont, d. h. die Meereshöhe der horizontalen Ziellinie, andeutet. Das auf den Anfangspunkt zurückgeführte Nivellement kommt dort mit einer um 15 mm zu großen Höhe an. Sehr häufig wird auch die in Tab. 23 enthaltene Art der Aufschreibung und Berechnung benutzt, welche eine auf der letzten Zeile der Tabelle durchgeführte Rechenprobe ermöglicht.

Tabelle 22.

F.P. 1	125,340
+	0,438
\otimes	125,778
-	1,034
	124,744
+	0,402
\otimes	125,146
-	1,025
F.P. 2	124,121
+	0,616
\otimes	124,737
...	...
F.P. 3	123,045
...	...
F.P. 4	123,138
...	...
F.P. 5	124,086
...	...
F.P. 6	124,851
...	...
F.P. 7	124,934
...	...
F.P. 8	125,169
...	...
F.P. 1	125,355

so findet man mittels des Sekantensatzes leicht den scharfen Näherungsausdruck

$$dh_e = \frac{a^2}{2r} \dots \dots \dots (419)$$

Betrachtet man die Lichtkurve in erster Näherung¹⁾ als einen Kreisbogen vom Halbmesser R und besteht das als Refraktionskoeffizient bezeichnete Verhältnis

$$k = r : R, \dots \dots \dots (420)$$

so ist der Einfluß der Strahlenbrechung

$$dh_s = k \frac{a^2}{2r} \dots \dots \dots (421)$$

Ein kleiner Neigungsfehler der Libellenachse gegen die Ziellinie wird nach der besten Berichtigung noch vorhanden sein oder infolge von Erschütterungen und Temperaturänderungen oder beim Verstellen des Okularauszugs sich bald wieder einstellen. Auch die bei der Berichtigung vernachlässigte Ungleichheit der Ringdurchmesser oder eine Exzentrizität des Objektivmittelpunktes bei einem drehbaren, umlegbaren oder durchschlagbaren Fernrohr wirken in diesem Sinne.

Der Einfluß einer Vernachlässigung der Erdkrümmung, eines Neigungsfehlers, bei nicht zu langen Sichten auch derjenige der Strahlenbrechung auf das Nivellement kann durch Nivellieren aus der Mitte der Station behoben werden. Der Höhenunterschied der beiden Wechsellpunkte W_{i-1} und W_i ist als Abstand der durch sie gehenden kugeligen Niveauflächen der Unterschied

$$\delta h_i = r_i - v_i, \dots \dots \dots (422)$$

wenn r_i, v_i die Lattenstellen bezeichnen, wo eine in der Niveaufläche des Instrumentenhorizonts gedachte Ziellinie 1 die Latte im Rückblick und Vorblick trifft. Die horizontale, nicht gestörte Ziellinie besitzt die Lage 2; infolge der Strahlenbrechung entsteht Lage 3 und durch Hinzutreten des Neigungsfehlereinflusses endlich ergibt sich die wirkliche Lage 4 der Ziellinie, zu welcher eine von r_i um A_r sich unterscheidende fehlerhafte Rückblickablesung r'_i gehört. Die entsprechenden Lagen des Vorblicks sind 1', 2', 3', 4'. Sie schließen untereinander und mit dem Lot des Aufstellungspunktes A_i dieselben Winkel ein wie 1, 2, 3, 4, so daß bei gleichen Lattenabständen auch die zu 4' gehörige Ablesung v'_i von v_i sich um $A_v = A_r$ unterscheiden wird. Setzt man die Ausdrücke

$$r_i = r'_i - A_r, \quad v_i = v'_i - A_v = v'_i - A_r \dots \dots (423)$$

in (422) ein, so findet man im Ausdruck

$$\delta h_i = r'_i - v'_i \dots \dots \dots (424)$$

den richtigen Höhenunterschied aus den fehlerhaften Beobachtungen.

Durch das Nivellieren aus der Mitte wird der bei schiefer Stehachse auftretende Einfluß des Kreuzungsfehlers α und der einer seitlichen Lage der Ziellinie nicht eliminiert. Der Einfluß des Kreuzungsfehlers ist, solange sich der Aufstellungsfehler (v'_i) in der zur Libelle senkrechten Richtung nicht ändert, für die beiden Blicke eines Standes entgegengesetzt gleich, so daß

¹⁾ Näheres hierzu siehe bei der trigonometrischen Höhenmessung S. 209 ff.

sein doppelter Betrag in den Teilhöhenunterschied δh_i eingeht. Für die Zielweite z_i ergibt er sich unter Beachtung von (148) zu

$$d h_z^i = 2 z_i \cdot \frac{v''}{\rho''} = 2 z_i \frac{x^0}{\rho^0} \cdot \frac{(v_i')''}{\rho''} \dots \dots \dots (425)$$

Ist e' der seitliche Abstand der Ziellinie, so besitzen nach Andeutung von Abb. 219 die beiden Ziellinien des i -ten Standes einen Höhenunterschied $2 \delta_e^i$, so daß der Fehler im Höhenunterschied dieses Standes

$$d h_{e'}^i = 2 e' \frac{(v_i')''}{\rho''} \dots \dots \dots (426)$$

ist. Ein ganz entsprechender Fehler $d h_{e''}^i$, entsteht, wenn die exzentrische Kippachse um e'' von der in der Zielrichtung um v_i'' geneigten Stehachse absteht. Diese drei Fehler, welche durch eine genügende Lotrechtstellung der Stehachse leicht praktisch vollkommen bedeutungslos gemacht werden können, besitzen für den Gesamthöhenunterschied Δh den Charakter zufälliger Fehler, da sie in

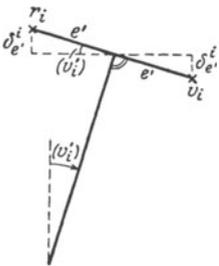


Abb. 219. Nivellierfehler bei schiefer Stehachse und seitlicher Ziellinie.

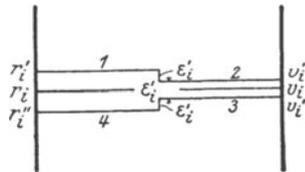


Abb. 220. Einsinken des Nivellierinstrumentes.

den Beobachtungen einer größeren Zahl von Ständen verschieden groß und mit verschiedenen Vorzeichen auftreten.

Zwischen den beiden Blicken desselben Standes wird das Instrument etwas einsinken, so daß jeder Vorblick um einen Betrag ϵ_i' (Abb. 220) zu klein erhalten wird. Hingegen findet während des Standortwechsels, in der Zeit zwischen dem Vorblick des letzten und dem Rückblick des neuen Standes ein Einsinken oder geringes Abrutschen der stehenbleibenden Latte um ϵ_i'' statt, so daß der neue Rückblick um denselben Betrag zu groß ausfällt. Beide Fehler, deren Summe $\epsilon_i = \epsilon_i' + \epsilon_i''$ ist, wirken einseitig im gleichen Sinne. Infolge der Verkleinerung aller Vorblicke und der Vergrößerung aller Rückblicke werden die Meereshöhen sämtlicher einnivellierten Punkte zu groß ausfallen, und zwar um so mehr, je weiter die Messung fortschreitet. Da ϵ_i mit der zum Wechseln der Latten- und Instrumentenstandorte benötigten Zeit, also auch mit der Zielweite z_i zunimmt, im allgemeinen jedoch, ohne damit gleichen Schritt halten zu können, so wird man den einem ϵ_i entsprechenden mittleren Fehler im Teilhöhenunterschied δh_i in grober Annäherung durch den Ausdruck $\epsilon_m \sqrt{z_i}$ darstellen können, so daß der mit gleichen Zielweiten in n Ständen nivellierte Höhenunterschied Δh den einseitigen Fehler $n \cdot \epsilon_m \sqrt{z}$ besitzen mag.

Bei verschiedenen leistungsfähigen Augen wird zum Einstellen — bzw. Ablesen — der Blase sehr oft das eine Auge bevorzugt, wodurch die Blasenränder falsch auf die Libellenteilung projiziert werden. Der entstehende Fehler ist für alle Stände einseitig, wenn der Libellenbeobachter in bezug

zur Nivellierichtung stets auf derselben Seite des Instrumentes steht. Er wird dagegen schon im einfachen geometrischen Nivellement vollständig getilgt, wenn bei einer geraden Anzahl von Aufstellungen mit gleichen Zielweiten der Libellenbeobachter von Stand zu Stand abwechselnd auf verschiedenen Seiten des Instrumentes sich befindet¹⁾.

Einseitig und proportional den gemessenen Höhenunterschieden Δh verläuft der Einfluß einer Abweichung des Lattenmeters von seiner nominellen Länge. Für einfache technische Zwecke genügt es, das Lattenmeter durch die Messung einiger Strichabstände mittels eines Normalmaßstabes zu bestimmen und etwaige größere Abweichungen rechnerisch zu berücksichtigen. Die der Bestimmung des Lattenmeters eigene Unsicherheit m_m verursacht in Δh den mittleren Fehler $\Delta h \cdot m_m$.

Dem Ursprung nach rein zufällig ist die Lattenschiefe, deren mittlere Beträge in der Zielrichtung und senkrecht dazu m'_a und m''_a sein mögen. Ihre Wirkung aber ist vollständig einseitig, da stets an einer zu hoch gelegenen Stelle der Teilung abgelesen wird. Die bestimmten Abweichungen $d\alpha_{ir}$, $d\alpha_{iv}$ im i -ten Stand verursachen im Rückblick r_i und im Vorblick v_i die bestimmten Ablesefehler $d r_{ia} = -\frac{1}{2} r_i \cdot (d\alpha_{ir})^2$ und $d v_{ia} = -\frac{1}{2} v_i (d\alpha_{iv})^2$, so daß im Gesamthöhenunterschied Δh der bestimmte Fehler

$$d h_a = \left[\sum_{i=1}^n d r_{ia} \right] - \left[\sum_{i=1}^n d v_{ia} \right] = -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n r_i (d\alpha_{ir})^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n v_i (d\alpha_{iv})^2 \right] \quad \dots (427)$$

steckt, für welchen leicht ein guter Näherungswert berechnet werden kann. Faßt man nämlich in den Summen die Stände mit gleichgeneigten Profilstrecken in Gruppen zusammen, so werden in jeder dieser Gruppen je alle Rückblicke und je alle Vorblicke nahezu gleich sein, so daß man sie vor die Summenklammer nehmen kann. Eine solche e Stände enthaltende Gruppe liefert demnach zum Höhenfehler den Teilbetrag

$$\Delta d h_a = -\frac{1}{2} r [(d\alpha_{ir})^2] + \frac{1}{2} v [(d\alpha_{iv})^2] \quad \dots (428)$$

Nun ist aber

$$[(d\alpha_{ir})^2] = e \cdot m_a^2 = [(d\alpha_{iv})^2], \quad \dots (429)$$

also

$$\Delta d h_a = -\frac{m_a^2}{2} (e \cdot r - e \cdot v) = -\frac{m_a^2}{2} [\delta h_e] \quad \dots (430)$$

Da für alle übrigen Gruppen dasselbe gilt, so wird der Höhenfehler wegen der Lattenschiefe näherungsweise

$$d h_a = [\Delta d h_a] = -\frac{1}{2} m_a^2 \left[\sum_{i=1}^n \delta h_i \right] = -\frac{\Delta h}{2} \cdot m_a^2, \quad \dots (431)$$

in welchem Ausdruck m_a im Bogenmaß zu nehmen ist. Ersetzt man m_a durch m'_a bzw. m''_a , so erhält man mittels (431) die ihnen entsprechenden Verbesserungen $d h'_a$ bzw. $d h''_a$ des Höhenunterschiedes Δh . Bedeutet

$$m_a = \sqrt{m'^2_a + m''^2_a}$$

die gesamte mittlere Lattenschiefe, so ist der Ausdruck (431) die dieser Resultante entsprechende Höhenverbesserung. Sie läßt sich zahlenmäßig an-

¹⁾ Näheres hierüber siehe bei *Holm*, Augenmängel des Libellenlesers als Fehlerquelle im Feinnivellement und ihre Ausschaltung, Z.V.W. 1910, S. 769–779 und 801–811. Nach den dort gemachten Angaben beträgt, wenn das eine, stets auf der gleichen Seite bleibende Auge gar nicht benutzt wird, unter normalen Verhältnissen der aus dem beregten Mangel fließende Fehler im Feinnivellement etwa 1,2 mm auf 1 km.

geben, wenn m'_α und m''_α oder m_α selbst aus Versuchen bestimmt worden sind. Für $m_\alpha = 10'$ z. B. wird $d h_\alpha = -4,24 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta h$. Durch eine sorgfältige Lotrechtstellung der Latte kann der betrachtete Fehler bedeutungslos gemacht werden¹⁾.

Die rein zufälligen, unvermeidlichen Nivellierfehler beruhen in der Hauptsache auf den gleichen Ursachen wie die früher Seite 116 ff. betrachteten Fehler des Lattenabschnitts. Besonders sind zu nennen a) der mittlere Fehler m_t der Lattenteilung; b) der vom Flimmern des Lattenbildes und von der Lage der Ablesestelle im Teilfeld stark beeinflusste Schätzungsfehler, d. i. der eigentliche Ablesefehler m_α , c) die bei längeren Sichten, geneigtem und ungleich bedecktem Boden besonders zu fürchtende ungleichmäßige Strahlenbrechung²⁾ im Rückblick und im Vorblick. Ihr Einfluß ist höchst unsicher, wächst aber in der Hauptsache proportional mit dem Quadrat der Zielweite z . Wird sein der Differenz Rückblick minus Vorblick entsprechendes Quadrat mit $z^4 \delta^2$ angesetzt, wo δ dem unter (231) stehenden Wert entspricht, so trifft — rein rechnerisch — auf die einzelne Sicht $m_\delta^2 = \frac{1}{2} z^4 \delta^2$. d) Ferner kommt in Betracht eine geringe Neigungsänderung der Ziellinie vom Einspielenlassen der Libelle bis zum Ablesen und eine kleine Änderung des Neigungsfehlers der Libelle in der Zeit zwischen dem Rückblick und dem Vorblick. Der Einfluß beider Fehler ist zur Zielweite proportional. e) Dasselbe gilt auch für den schon früher besprochenen Einfluß des Kreuzungsfehlers. Dem Zusammenwirken der unter d) und e) genannten Fehler möge für die einzelne Ablesung der mittlere Betrag $\eta_m = z \cdot \eta$ entsprechen. f) Der Einfluß einer seitlichen Lage der Ziellinie — siehe (426) — oder der Kippachse bei schiefer Zapfen ist unabhängig von der Zielweite, und sein Quadrat sei für beide Ursachen zusammen für die einzelne Sicht — rein rechnerisch betrachtet — der Ausdruck τ^2 . g) Die Ablesungen werden auch durch die beim Einspielenlassen der Libelle begangenen Fehler gefälscht. Sollen diese keinen systematischen Charakter annehmen, so muß man darauf sehen, daß für den Rückblick und Vorblick desselben Standes die letzte Bewegung der Feinstellschraube stets im gleichen Sinne, etwa durch ein Hineindrehen der Schraube erfolgt. Andernfalls würde ein leichtes Nachziehen der Blase die beiden Ablesungen eines Standes im entgegengesetzten Sinne beeinflussen, in der Differenz der Ablesungen also den doppelten Einfluß ausüben. Der Einfluß des rein zufälligen Fehleranteils ist mit Rücksicht auf (146)

$$m_z = z \frac{m_s}{\rho'} = \frac{0,09}{\rho'} z \sqrt{p} = 4,4 \cdot 10^{-7} z \sqrt{p}, \quad (432)$$

wenn m_s den mittleren Einstellfehler der Blase und p den in Sekunden ausgedrückten Teilwert bedeutet.

¹⁾ Ein wegen seiner Geringfügigkeit für gewöhnlich zu vernachlässigender systematischer Fehler entsteht infolge der aus dem Eigengewicht der Latte und eines an den Handgriffen wirkenden Zuges eintretenden Verkürzung der lotrechten Latte. Näheres siehe bei *Näbauer, M.*, Theoretische Untersuchung des Einflusses einer Verkürzung der lotrecht stehenden Latte auf das Nivellement. Z.V.H.B.V. 1913, S. 35—58. Einseitige, der Größe nach schwer anzugebende Fehler entstehen auch durch die lästige, bei unvorsichtiger Behandlung manchmal auftretende Krümmung der Latte.

²⁾ Im Gegensatz zur trigonometrischen Höhenmessung verlaufen beim geometrischen Nivellement die Sichten ganz in Bodennähe, also in vielfach gestörten Luftschichten. Es ist begreiflich, daß hier der Refraktionskoeffizient (siehe S. 210) manchmal das 10-fache des der freien Atmosphäre entsprechenden Wertes beträgt und daß er im übrigen stark vom Bodenprofil sowie dem Abstand der Sichten vom Boden abhängt. Siehe dazu *Hugershoff*, Der Zustand der Atmosphäre als Fehlerquelle im Nivellement, Dresden 1907 und besonders *Kohlmüller, F.*, Zur Refraktion im Nivellement, München 1912.

Aus den besprochenen rein zufälligen Fehlern ergibt sich das mittlere Fehlerquadrat einer Ablesung des i -ten Standes

$$\mu_i^2 = m_i^2 + \tau^2 + m_a^2 + \eta_m^2 + m_\lambda^2 + m_\delta^2, \dots \dots \dots (433)$$

woraus mit Rücksicht auf die obigen Ausführungen und auf (225) die Form

$$\mu_i^2 = m_i^2 + \tau^2 + C_0 + C_1 z_i + C_2 z_i^2 + \eta^2 z_i^2 + \widehat{m}_s^2 z_i^2 + \frac{1}{2} \delta^2 z_i^4 \dots (434)$$

oder durch Ordnen nach Potenzen von z

$$\mu_i^2 = (C_0 + m_i^2 + \tau^2) + C_1 z_i + (C_2 + \eta^2 + \widehat{m}_s^2) z_i^2 + \frac{1}{2} \delta^2 z_i^4 \dots (435)$$

hervorgeht.

Setzt man für die n gleich sorgfältig beobachteten Stände annähernd gleiche Zielweiten z voraus, so erhält man durch Anwendung des mittleren Fehlergesetzes auf die aus $2n$ Gliedern bestehende Summe (417) bzw. auf (418) für das mittlere unregelmäßige Fehlerquadrat des Höhenunterschiedes Δh , also auch der Meereshöhe H_2 den Ausdruck

$$\dot{m}_u^2 = 2n \mu^2 = \frac{l}{z} \cdot \mu^2, \dots \dots \dots (436)$$

wenn l die Länge der nivellierten Strecke bedeutet.

Daraus folgt

$$m_u = \mu \sqrt{2n} = \mu \sqrt{\frac{l}{z}} = \frac{\mu}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{l} \dots \dots \dots (437)$$

Durch Einsetzen von (435) in (436) ergibt sich

$$m_u^2 = \frac{1}{z} \{l(C_0 + m_i^2 + \tau^2)\} + C_1 l + z \{l(C_2 + \eta^2 + \widehat{m}_s^2)\} + \frac{1}{2} z^3 \{l \cdot \delta^2\} \dots (438)$$

oder

$$m_u^2 = a \cdot z^{-1} + b + cz + ez^3, \dots \dots \dots (439)$$

wenn das Absolutglied in (438) mit b und die Koeffizienten der Potenzen von z mit a , c und e bezeichnet werden.

Macht man (439) zu einem Minimum, so erhält man für die zugehörige günstigste Zielweite¹⁾ den allgemeinen Ausdruck

$$z_0 = \sqrt{-\frac{c}{6e^3} + \sqrt{\left(\frac{c}{6e^3}\right)^2 + \frac{a}{3e}}} \dots \dots \dots (440)$$

Über die Größe der Koeffizienten a , b , c , e läßt sich von vornherein nichts Sicheres angeben, abgesehen etwa davon, daß für kleinere Zielweiten — unter 50 m — und annähernd horizontales Profil der Koeffizient e sehr klein wird, also der Einfluß einer ungleichen Refraktion im Rückblick und Vorblick praktisch verschwindet. Für diesen Fall folgt aus (440) nach einer kleinen Umformung die schon von *Eggert*²⁾ angegebene günstigste Zielweite

$$z_0 = \sqrt{\frac{a}{c}} \dots \dots \dots (441)$$

¹⁾ Für ein mit einem Instrument von mittlerer Leistungsfähigkeit ausgeführtes einfaches technisches Nivellement liegt nach der Erfahrung die günstigste Zielweite bei ebenem Gelände in der Nähe von 40 m.

²⁾ Die Zielweite beim Nivellieren, Z.V.W. 1914, S. 251.

Die vom Einsinken von Instrument und Latte, der Unsicherheit des Lattenmeters und von der Lattenschiefe herrührenden regelmäßigen Fehler erzeugen in Δh das regelmäßige mittlere Fehlerquadrat

$$m_r^2 = (n \cdot \varepsilon_m \sqrt{z})^2 + (\Delta h \cdot m_m)^2 + \left(\frac{\Delta h}{2} \cdot \widehat{m}_\alpha^2\right)^2 \dots \dots \dots (442)$$

$$= \left(\frac{l}{\sqrt{z}} \varepsilon_m\right)^2 + \Delta h^2 (m_m^2 + \frac{1}{4} \widehat{m}_\alpha^4), \dots \dots \dots (443)$$

so daß

$$\begin{aligned} m^2 &= m_u^2 + m_r^2 \\ &= \left[\frac{1}{z} \{l(C_0 + m_t^2 + \tau^2)\} + C_1 l + z \{l(C_2 + \eta^2 + \widehat{m}_s^2)\} + \frac{1}{2} z^3 \{l \delta^2\} \right] \\ &\quad + \left[\frac{l^2}{z} \varepsilon_m^2 + \Delta h^2 (m_m^2 + \frac{1}{4} \widehat{m}_\alpha^4) \right] \dots \dots \dots (444) \end{aligned}$$

das mittlere Quadrat des Gesamtfehlers in Δh vorstellt.

Beim Nivellieren einer einseitig geneigten Strecke nimmt auch der Einfluß einer ungleichen Strahlenbrechung im Rückblick und Vorblick einen einseitigen Charakter an, da die bodennahen Sichten — bergauf die Vorblicke — stets eine stärkere Krümmung besitzen werden als die höher über dem Boden streichenden Visuren. Unter normalen Verhältnissen werden daher durch diesen Fehler die Absolutwerte aller Höhenunterschiede vergrößert. Im mittleren unregelmäßigen Fehlerquadrat (444) ist also das Glied $\frac{1}{2} z^3 \{l \cdot \delta^2\}$ zu streichen und dafür das Glied $\frac{1}{4} (z \cdot l \cdot \delta)^2$ zu m_r^2 hinzuzunehmen, wodurch das mittlere Gesamtfehlerquadrat

$$\begin{aligned} m'^2 &= \left[\frac{1}{z} \{l(C_0 + m_t^2 + \tau^2)\} + C_1 l + z \{l(C_2 + \eta^2 + \widehat{m}_s^2)\} \right] \\ &\quad + \left[z^2 (\frac{1}{2} l \cdot \delta)^2 + \frac{1}{z} (l \cdot \varepsilon_m)^2 + \Delta h^2 (m_m^2 + \frac{1}{4} \widehat{m}_\alpha^4) \right] \dots \dots \dots (445) \end{aligned}$$

entsteht. Der hierin enthaltene Wert δ hängt offenbar auch von der Profilineigung ab, so daß die Verwendung eines konstanten Mittelwertes δ nur eine grobe Annäherung darstellt.

Bei Innehaltung gleicher Zielweiten wird der Quotient $\mu: \sqrt{z}$ in (437) ein Festwert m_0 , so daß der mittlere unregelmäßige Fehler des Höhenunterschiedes

$$m_u = m_0 \sqrt{l} \dots \dots \dots (446)$$

zur Wurzel, aus der nivellierten Länge proportional ist. Unter der getroffenen Voraussetzung sind daher die zufälligen Fehlerquadrate direkt, die zugehörigen Gewichte umgekehrt proportional zu den l .

Den als mittleren zufälligen Kilometerfehler bezeichneten Festwert m_0 kann man aus Doppelmessungen bestimmen. Werden für die Höhenunterschiede Δh_i der Endpunkte von n Strecken l_i in zwei Messungsreihen die Werte $\Delta h_i', \Delta h_i''$ mit den Differenzen

$$d_1 = \Delta h_1'' - \Delta h_1', \dots \quad d_i = \Delta h_i'' - \Delta h_i', \dots \quad d_n = \Delta h_n'' - \Delta h_n' \dots (447)$$

gefunden, zu denen die Gewichte

$$p_i = \frac{1}{l_i} \dots \dots \dots (448)$$

gehören, so ergibt sich, wenn die l_i in Kilometern ausgedrückt werden, nach

(66) der mittlere zufällige Kilometerfehler¹⁾ des einfachen Nivellements zu

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d}{l} \right]} \dots \dots \dots (449)$$

Der entsprechende Wert für das Doppelnivellement (arithmetisches Mittel aus zwei Messungen) ist

$$M_0 = \frac{m_0}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d}{l} \right]} \dots \dots \dots (450)$$

Die zulässige Größe von m_0 hängt von dem besonderen Zweck der Messung ab. Ein gewöhnlichen technischen Zwecken dienendes Nivellement wird man meistens noch als brauchbar bezeichnen können, solange

$$m_0 \leq 10 \text{ mm} \dots \dots \dots (451)$$

bleibt²⁾.

Die Ausgleichung eines geometrischen Nivellements wird besonders einfach, wenn dieses zwischen zwei Punkte von bekannter Höhenlage eingespannt ist.

Führt es von einem Punkte P_1 (Abb. 221) von bekannter Höhe H_1 zu einem davon um L entfernten Punkte P_n mit der bekannten Höhe H_n und

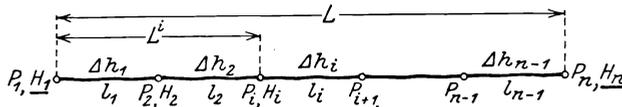


Abb. 221. Ausgleichung einer Nivellementslinie bei festliegenden Endpunkten.

besitzen die eingeschalteten Zwischenpunkte P_2, P_3, \dots, P_{n-1} die Nachbarabstände l_1, l_2, \dots, l_{n-1} und die beobachteten Höhenunterschiede $\Delta h_1', \Delta h_2', \dots, \Delta h_{n-1}'$, so erhält man durch Hinzufügen von $\left[\frac{\Delta h_i'}{l_i} \right]$ zu H_1 einen zweiten Wert für die Meereshöhe von P_n , nämlich

$$H_n' = H_1 + \left[\frac{\Delta h_i'}{l_i} \right] \dots \dots \dots (452)$$

Er unterscheidet sich von H_n um den Betrag

$$H_n - H_n' = w, \dots \dots \dots (453)$$

welcher Widerspruch die Summe der wahren Beobachtungsfehler vorstellt und nach (78) umgekehrt proportional den Gewichten der $\Delta h_i'$ auf diese zu verteilen ist, da $\left[\frac{\Delta h_i'}{l_i} \right]$ eine vorgegebene feste Summe $H_n - H_1$ besitzt. Die strengere Gewichtsermittlung, welche an (444) bzw. (445) anschließen müßte, wäre für gewöhnliche technische Zwecke viel zu umständlich; auch kann man bei geringen Höhenunterschieden die nur von den Δh_i abhängigen regel-

¹⁾ Soll der mittels (449) berechnete Wert m_0 keinen nennenswerten einseitigen Fehleranteil enthalten, so müssen die beiden Messungen je einer Strecke unter möglichst gleichen Umständen in der gleichen Richtung erfolgen.

²⁾ Nach den strengeren Bestimmungen des Zentralkuratoriums der Vermessungen im preußischen Staat vom 12. I. 1895 gilt ein Nivellement als gut, wenn der mittlere km-Fehler nicht mehr als 3 mm und noch als brauchbar, wenn er nicht über 5 mm beträgt.

mäßigen Fehleranteile (Lattenmeter, Lattenschiefe) vernachlässigen. Meist begnügt man sich daher damit, unter Berücksichtigung lediglich der zufälligen Fehler die Gewichte¹⁾ der $\Delta h_i'$ umgekehrt proportional den l_i zu setzen. Es wird also, wenn v_i die zu $\Delta h_i'$ gehörige Verbesserung ist, der ausgeglichene Höhenunterschied

$$\Delta h_i = \Delta h_i' + v_i = \Delta h_i' + \frac{l_i}{L} \cdot w \quad \dots \dots \dots (454)$$

sein, während sich nach (79) der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, nämlich der mittlere Kilometerfehler eines einfach beobachteten Höhenunterschiedes zu

$$m_0 = \pm \frac{w}{\sqrt{L}} \quad \dots \dots \dots (455)$$

ergibt, welcher Wert allerdings keine große Zuverlässigkeit besitzt, da er sich nur auf einen einzigen Widerspruch stützt. Die ausgeglichene Meereshöhe von P_i wird nun

$$H_i = H_1 + [\Delta h_e]_1^{i-1} \quad \dots \dots \dots (456)$$

Ist $H_i' = H_1 + [\Delta h_e']_1^{i-1}$ die mit den fehlerhaften beobachteten Höhenunterschieden berechnete Meereshöhe des von P_1 um $L^i = [l_e]_1^{i-1}$ entfernten Punktes P_i , so wird die Verbesserung von H_i' unmittelbar

$$V_i = [v_e]_1^{i-1} = [l_e]_1^{i-1} \cdot \frac{w}{L} = \frac{L^i}{L} w \quad \dots \dots \dots (457)$$

und die ausgeglichene Meereshöhe ist

$$H_i = H_i' + V_i = H_i' + \frac{L^i}{L} w \quad \dots \dots \dots (458)$$

Ein diese Darlegungen erläuterndes Zahlenbeispiel enthält Tabelle 24.

Tabelle 24.

F. P. Nr.	H_i'	L^i	V_i	H_i
	m	km	mm	m
1	125,340	0,00	0	125,340
2	124,121	0,95	— 2	124,119
3	123,045	2,10	— 3	123,042
4	123,138	3,06	— 5	123,133
5	124,086	3,97	— 7	124,079
6	124,851	5,05	— 8	124,843
7	124,934	6,90	— 11	124,923
8	125,169	8,00	— 13	125,156
1	125,355	9,10	— 15	125,340
$w = -0,015$		$L = 9,10$	$m_0 = \frac{15}{\sqrt{9,1}} \text{ mm} = \pm 5,0 \text{ mm.}$	

¹⁾ Eine Untersuchung über die Aufstellung von Nivellementsgewichten enthält *Werkmeister*, Über Nivellementsgewichte, Z. V. W. 1912, S. 353—364 und 377—391.

c) Längen- und Querprofile.

Das einfache geometrische Nivellement findet in der Ingenieurtechnik die ausgiebigste Anwendung. Insbesondere liefert es die Unterlagen für die Herstellung von Längen- und Querprofilen an Wegen, Straßen, Eisenbahnen und Wasserläufen.

Zur Festlegung eines Längenprofils werden bei der Durchmessung desselben alle Hektometerpunkte, die Hauptpunkte, durch bodengleiche Pflöcke bezeichnet. Außerdem werden auch Zwischenpunkte oder Nebenpunkte verpflockt, in denen das Längenprofil eine ausgesprochene Brechung erfährt, die Form der Querprofile sich ändert oder die sonst eine besondere Bedeutung besitzen. Neben jedem Bodenpflock steht ein über den Boden herausragender, die Bezeichnung des Bodenpflockes tragender Nummernpflock. Bei der durchlaufenden Längenmessung erhalten die Hunderterpunkte die Bezeichnung 1, 2, 3, ..., während die Zwischenpunkte durch zur Nummer des vorhergehenden Hauptpunktes beigesezte Buchstaben, (z. B. 2^a, 2^b, 2^c, ..., 3^a, 3^b, ...) voneinander unterschieden werden.

In den Haupt- und Nebenpunkten des Längenprofils, deren Höhen durch ein doppelt geführtes geometrisches Längennivellement zu bestimmen sind, legt man senkrecht zum Längenprofil die Querprofile. In diesen werden die ausgesprochenen Brechungspunkte und andere wichtige Punkte, bei gleichmäßiger Neigung die um die runden Beträge 5 m, 10 m usw. von der Achse abstehenden Punkte etwa durch Späne bezeichnet und ihre Achs-

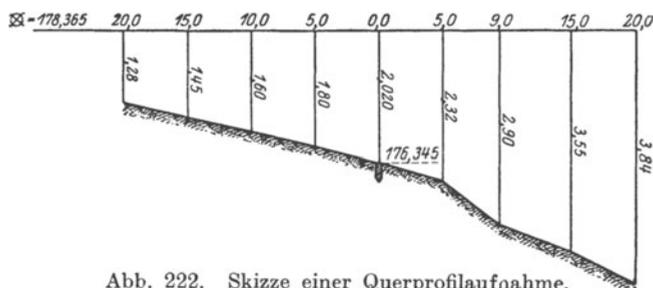


Abb. 222. Skizze einer Querprofilaufnahme.

abstände in eine Skizze (Abb. 222) eingetragen. Zur Höhenbestimmung richtet man das seitlich aufgestellte Nivellierinstrument bei einspielender Libelle auf die zunächst im bekannten Achspunkt aufgestellte Latte und erhält durch Hinzufügen der erhaltenen Ablesung zur Meereshöhe des Achspunktes den Instrumentenhorizont. Liest man nunmehr an der nacheinander in den einzelnen Profilbrechungspunkten aufgestellten Latte die sog. Seitenblicke ab, welche ebenfalls in die Skizze einzutragen sind, so ist das betreffende Querprofil nach Form und Höhenlage bestimmt. Bei beträchtlichen Profilneigungen werden mehrere Instrumentenaufstellungen in verschiedenen Höhenlagen erforderlich.

Sollen die Gefällsverhältnisse eines fließenden Wassers dargestellt werden, so führt man längs desselben ein als Flußnivellement bezeichnetes Längennivellement durch, welches nicht nur alle etwa vorhandenen Pegel und Eichmarken, sondern auch alle Punkte einbeziehen soll, in denen ein Gefällswechsel stattfindet. Hier werden die Köpfe von kräftigen, in der Nähe des Ufers noch etwas im Wasser stehenden Pflöcken einnivelliert, außerdem aber auch die Abstände des Sohlenpunktes und des Wasserspiegels vom Kopf des

Pflockes (mit Zeitangabe) ermittelt. Auch ist an einem Pegel während der Dauer des Nivellements der Wasserstand zu verfolgen. Die Aufnahme der Querprofile begegnet hier manchmal großen Schwierigkeiten. In einfacheren Fällen kann etwa über das Gewässer im Profil eine Meßleine mit großer Teilungseinheit (1 m, 5 m, 10 m) gespannt werden, in deren Teilungspunkten die Latte auf der Sohle aufgesetzt wird, während die Ablesung jeweils mittels des fest am Ufer aufgestellten Instrumentes erfolgt.

d) Das Feinnivellement.

Die Bedeutung der Feinnivellements ist teils eine praktische, teils eine rein wissenschaftliche. Sie bilden einen festen Rahmen für die verschiedensten technischen Nivellements, ermöglichen die Untersuchung der Standsicherheit von Bauwerken und dienen andererseits der Erdmessung zum Studium der Erdgestalt und zur Verfolgung von Bodenbewegungen¹⁾. Diesen Zwecken entsprechend verlaufen sie längs der wichtigsten Staatsstraßen, Eisenbahnen, Kanäle, Flußläufe und Meeresküsten in langen Linien, deren jede eine größere Anzahl von Strecken umfaßt, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt des Netzes²⁾. Die Bezeichnung der sehr wichtigen Knotenpunkte erfolgt fast immer durch zentrische Höhenmarken, die ihrerseits wieder versichert werden, während zur Bezeichnung der Streckenendpunkte auch Mauerbolzen oder Kopfbolzen genügen.

Die wesentlich höhere Genauigkeit der Feineinwägungen wird erreicht:

1. durch die Verwendung eines besonders leistungsfähigen Nivellementinstrumentes,
2. durch die Anwendung besonders geeigneter Latten und eine strenge Kontrolle des Lattenmeters,
3. durch ein zweckmäßig ausgebautes Beobachtungsverfahren,
4. durch eine sachgemäße Berechnung der Ergebnisse unter Berücksichtigung der Erdabplattung.

Zu 1. Das Feinnivellementinstrument soll eine beträchtliche Vergrößerung ($v = 30 - 40$), große Helligkeit, starkes Auflösungsvermögen und einen kleinen Teilwert ($p = 5''$) besitzen, sowie bei gedrungener, aber nicht schwerfälliger Bauart eine möglichst unveränderliche Lage der Libellenachse gegen die Ziellinie gewährleisten³⁾. Zur schnellen Lotrechtstellung des Vertikalzapfens mittels der Dreifußschrauben dient eine gute Dosenlibelle, während das Einspielen der Nivellementlibelle durch eine besondere, am Ende eines langen Hebelarms angreifende Feinstellschraube herbeigeführt wird. Eine genügend scharfe Lotrechtstellung der Stehachse ist notwendig, damit der Einfluß einer etwa vorhandenen Exzentrizität der Ziellinie oder der Kippachse⁴⁾ gegen die Stehachse von vornherein wegen seiner Geringfügigkeit vernachlässigt werden kann. Vorteilhaft ist auch die feste oder lose Verbindung einer Kontroll-

¹⁾ In der Bodenseegegend sind schon mehrfach Senkungen der Erdoberfläche festgestellt worden. Eine Erdkrustenbewegung im oberbayerischen Alpenvorland wurde erst jüngst von *M. Schmidt* in München nachgewiesen. Siehe *Schmidt, M.*, E.M.B.P.N., Heft 1 und E.M.B.P.N., Heft 2.

²⁾ Nach einem von *Lallemand* auf der Allgem. Erdmessungskonferenz in Hamburg 1912 erstatteten Bericht betrug Anfang 1912 die Gesamtlänge aller Feinnivellementslinien auf der ganzen Erdoberfläche 323539 km; die Zahl aller Höhenfestpunkte war 240734.

³⁾ Zur Erreichung dieses Zweckes haben die Amerikaner Invarinstrumente (Nickelstahl) eingeführt.

⁴⁾ Eine große Exzentrizität der Kippachse ist immer dann vorhanden, wenn diese am vorderen Ende einer das Fernrohr tragenden Wiege liegt.

Libelle mit dem Fernrohr, da ein Auseinandergehen der Blasenstände auf jede größere, manchmal plötzlich auftretende Lageänderung der Libellenachse gegen das Fernrohr — leider nicht auch auf eine Verlagerung der Ziellinie gegen das Fernrohr — aufmerksam macht.

Zu 2. Man verwendet stets zwei zusammengehörige Latten I und II, ein Lattenpaar, welche von Stand zu Stand abwechselnd im Rückblick und im Vorblick auf den Zapfen von kräftigen Unterlagsplatten stehen. Jede Latte wird mittels zweier mit ihr verbundenen, sich gegenseitig kontrollierenden Dosenlibellen lotrecht gestellt und in dieser Lage durch ein Stativ, durch gespannte Schnüre oder am einfachsten mit Hilfe von verspreizten Stöcken hinreichend sicher festgehalten. So kann man den mittleren Aufstellungsfehler der Latte leicht beträchtlich unter $10'$, seinen Einfluß also unter $\frac{1}{200}$ mm auf 1 m Höhenunterschied halten und ihn von vornherein vernachlässigen. Jede der aus einem Stück bestehenden, also nicht zusammenklappbaren Latten ist ungefähr 3 m lang und besitzt eine weiß-schwarze und eine weiß-rote Teilung, die gewöhnlich auf verschiedenen Seiten der Latte angebracht sind und mit I', I'' bzw. II', II'' bezeichnet sein mögen. Die beiden Teilungen einer Latte, welche meist zweireihige Felderteilungen von etwa $\frac{1}{2}$ cm Feldgröße sind, bei einem sehr leistungsfähigen Fernrohr und nicht zu großen Zielweiten auch gute Strichteilungen sein können, sind — abgesehen von der Bezifferung — rund um ein halbes Teilfeld gegeneinander verschoben. Dadurch geht der einseitige Schätzungsfehler¹⁾ in derselben Größe, aber mit verschiedenen Vorzeichen in die Ablesungen an beiden Teilungen ein, verschwindet also im Mittel der Beobachtungen. Abgesehen davon wird das Ergebnis auch infolge der wiederholten Beobachtungen genauer. Die Bezifferung der Teilungen I'' und II'' ist meist in dekadischen Ergänzungen gehalten, d. h. von den Ablesungen ist noch die Einheit 10, manchmal auch eine andere bestimmte Zahl zu subtrahieren, so daß praktisch an die Stelle der Subtraktion eine Addition tritt und umgekehrt. Beim Gebrauch dieser durch ein vorgesetztes liegendes Kreuz (z. B. $\times 8,462$ statt 1,538) charakterisierten Zahlen wird man an der zweiten Teilung unbefangener ablesen wie an zwei gleich gerichteten Teilungen und erhält in der Summe je zweier zusammengehöriger Ablesungen, welche den bekannten Abstand beider Teilungsnulldpunkte ergeben soll, eine erwünschte Kontrolle.

Bei allen hölzernen Latten ändert sich das Lattenmeter teils infolge des Temperaturwechsels (Ausdehnungskoeffizient $\alpha \approx 6 \cdot 10^{-6}$ für Fichtenholz), besonders aber mit dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft im Verlauf einiger Monate manchmal um mehrere dmm. Da ein einfacher Zusammenhang zwischen der Luftfeuchtigkeit und der von ihr verursachten Änderung des Lattenmeters bisher nicht angegeben werden kann, so ist es für Feineinwägungen unerläßlich, die Größe des Lattenmeters jeweils auf anderem Wege zu bestimmen. Eine naheliegende Möglichkeit, die Änderungen des Lattenmeters zu ermitteln, besteht darin, in Abständen von rund 1 m in die Teilung Metallmarken mit feinen Strichkreuzen einzulassen, deren Abstände A_1 , A_2 (Abb. 223) mit einem Normalmeter von Zeit zu Zeit genau bestimmt werden. In einfacherer Weise als aus solchen Markenabstandsänderungen läßt sich die Bewegung des Lattenmeters und dessen jeweilige Länge mit Hilfe des von *M. Schmidt* eingeführten und untersuchten

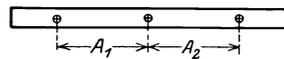


Abb. 223. Latte mit Abstandsmarken zur Bestimmung des Lattenmeters.

¹⁾ Sein ungefährer Verlauf ist aus Abb. 170 a Seite 118 ersichtlich.

Variometers¹⁾ verfolgen. Der Hauptbestandteil dieser Vergleichsvorrichtung ist ein Invardraht *D* (Abb. 224) — Nickelstahl —, dessen Ausdehnungskoeffizient etwa 10^{-8} und weniger beträgt, so daß jedenfalls die aus dem

Temperaturwechsel folgende Änderung der Drahtlänge gegen die Längenänderungen des Holzes vollständig vernachlässigt werden kann. Mit den Enden dieses nahezu 3 m langen, in einer auf der Schmalseite der Latte befindlichen Rinne enthaltenen Drahtes sind zwei kurze zylindrische Ansatzstücke *Z*₁, *Z*₂ verbunden, deren unteres sich gegen ein fest mit dem Holz verschraubtes Widerlager *W*₁ stützt, wenn der Draht durch eine sehr kräftige zwischen dem oberen Ansatzstück *Z*₂ und einem ebenfalls fest mit der Latte verschraubten Widerlager *W*₂ befindliche Spiralfeder *F* gespannt wird. Ein mit dem oberen Ende der Latte fest verbundenes Metallplättchen trägt eine feine Teilung *T*, an welcher mit Hilfe eines am Draht befestigten Nonius *N* die Variometerablesungen *a* ausgeführt werden. Bei geeigneter Wahl der Teilungseinheit gibt *a* die Änderung des Durchschnitts der drei Lattenmeter in cmm mit etwa ± 3 cmm mittlerem Fehler an. Um diesen Durchschnittswert jeweils selbst angeben zu können, muß man Variometerablesungen mit einer sorgfältigen Teilungsuntersuchung verbinden. Zu diesem Zweck wird ein mit einem eingelassenen Thermometer versehener Strichmaßstab, welcher zu beiden Seiten seiner Endstriche noch je ein in $\frac{1}{5}$ mm geteiltes Millimeterintervall besitzt, längs der Teilungslinie auf die Teilung der horizontalen, unterstützten Latte gelegt und in Abständen von etwa 2 cm je die Länge des Lattenmeters bestimmt. Ist dieses *M*_{*i*} (Abb. 225), ferner *M*'_{*i*} die mittels der abgelesenen Temperatur *t*_{*i*} aus der bekannten Maßstabgleichung gefundene Maßstablänge und *l*_{*i*} die mittels einer Lupe erhaltene

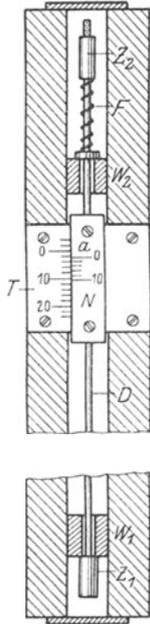


Abb. 224. Variometer von M. Schmidt zur Bestimmung des Lattenmeters.

Maßstabablesung am Endstrich des Lattenmeters, wenn dessen Anfangsstrich mit dem Anfangsstrich des Maßstabs zusammenfällt, so besteht die einfache Beziehung

$$M_i = M'_i + l_i \dots \dots \dots (459)$$

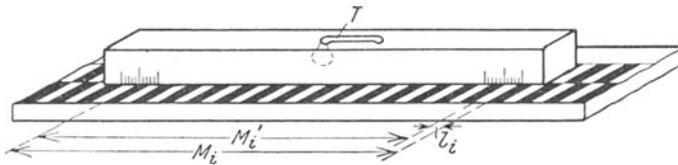


Abb. 225. Teilungsuntersuchung.

Aus den *n* an allen Stellen der Teilung ausgeführten Längenbestimmungen erhält man das durchschnittliche Lattenmeter

$$M_0 = \frac{1}{n} \sum_1^n [M_i] = 1 \text{ m} + x_0 \dots \dots \dots (460)$$

¹⁾ Schmidt, M., E.M.B.P.N., Heft 1, S. 29 ff. Ein älteres, aber viel schwerfälligeres Hilfsmittel dieser Art ist die ebendort S. 23 ff. beschriebene Lattenkompensations-einrichtung von Goulier.

während sich aus den scheinbaren Beobachtungsfehlern $v_i = M_0 - M_i$ der mittlere Teilungsfehler

$$m_t = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \dots \dots \dots (461)$$

ergibt, welcher bei guten Teilungen einige cmm nicht überschreiten soll. War a_0 das arithmetische Mittel einiger gleichmäßig auf die ganze Teilungsuntersuchung verteilten Variometerablesungen, so zeigt dieses a_0 ebenfalls das Lattenmeter M_0 an. Zu einer anderen Variometerablesung a wird also ein Lattenmeter

$$M = 1 \text{ m} + x_0 + a - a_0 = 1 \text{ m} + x \dots \dots \dots (462)$$

gehören, wenn man zur Abkürzung den Ausdruck $x_0 - a_0 + a = x$ setzt.

Eine solche Teilungs- und Variometeruntersuchung, mit welcher vielfach auch noch die Messung von Markenabständen A verbunden wird, soll vor und nach jeder längeren Feldreise vorgenommen werden.

Es ist aber immer noch möglich, daß das aus der Variometerablesung errechnete Lattenmeter nicht mit demjenigen übereinstimmt, in dem die Beobachtungen vorgenommen werden¹⁾.

Diese Schwierigkeit sowie das unangenehme Drehen und Krümmen mancher Holzlatten fällt weg, wenn die Teilung selbst auf ein Invarband aufgetragen und dieses unter Anwendung einer kräftigen Feder von möglichst konstanter Zugkraft in die nur noch als Rahmen und Träger der Bezifferung dienende Latte eingespannt wird. Seit einigen Jahren stellt die Firma *Zeiß* derartige Latten her, bei denen das unter 20 kg Zug gehaltene Nickelstahlband zwei von unten nach oben bezifferte um 2,5 mm gegeneinander verschobene Strichteilungen trägt. Solche Teilungen, welche ein von der Temperatur und Feuchtigkeit praktisch unabhängiges Lattenmeter besitzen, braucht man nur selten zu untersuchen; ab und zu aber doch um festzustellen, ob nicht etwa eine beim Invar manchmal auftretende sprunghafte Längenänderung erfolgt ist²⁾.

¹⁾ Nach *Schmidt, M.*, E.B.P.N., Heft 1, Seite 36, wurde aus Beobachtungen festgestellt, daß bei Nivellierlatten aus Tannenholz das Mittelstück unter dem Einfluß stark wechselnder Luftfeuchtigkeit und Temperatur eine um etwa 30% größere Längenänderung zeigen kann als die beiden Endstücke.

²⁾ Ein eifriger Vorkämpfer für die Einführung von Metall-Latten war *Vogler*, nach welchem derartige Latten schon 1870 in München und etwas später in Holland versucht worden sind. *Vogler* selbst hat in der Absicht, jederzeit eine einfache, sichere Bestimmung des Lattenmeters zu ermöglichen und die Zielfehler möglichst gering zu halten, als Nivellierlatte eine am einen Ende mit einem Zinkstreifen verbundene Stahllamelle benutzt. Aus der gegenseitigen Verschiebung der beiden freien Enden dieser ein Metallthermometer bildenden Metallstreifen findet man leicht die jeweilige Länge des Lattenmeters. Als eigentlicher Maßstab ist die etwa 3 m lange Stahllamelle zu betrachten, auf welcher jedoch nur die dm durch weiße Scheibchen von 3 mm Durchmesser bezeichnet sind. Die Abstände dieser Marken können mit Hilfe eines Normalmaßstabes sehr scharf bestimmt werden. Das eigenartige *Voglersche* Nivellierinstrument, zu dem die beschriebene Latte gehört, besitzt ein Schieberfernrohr, welches beim Gebrauch längs einer vertikalen zylindrischen Säule um einen jeweils bis auf einzelne cmm zu messenden Betrag — der Spielraum für die vertikale Verschiebung ist etwa 2 dm — so weit verschoben wird, bis bei nahezu einspielender Libelle das nächstliegende Dezimeterscheibchen durch Halbieren scharf eingestellt ist. Zur Reduktion der Einstellung auf horizontale Lage der Ziellinie ist die Ermittlung des geringen Blasenauerschlags notwendig. Eine ausführliche Beschreibung des *Voglerschen* Instruments und seiner Anwendung gibt *Eggert, O.*, in „Die Einwägungen der Landwirtschaftlichen Hochschule bei Westend“, Z.V.W., 1902, S. 1—19 und S. 32—64; siehe auch Z.V.W., 1908, S. 495ff.

Eine Nivellierlatte aus Nickelstahl hat zuerst vermutlich *Schell* 1903 in

Zu 3. Bei der Ausführung des Feinnivellements arbeiten im allgemeinen 5 Personen zusammen: ein Beobachter für das Fernrohr, einer für die Libelle, ein Schirmhalter, der zugleich Aufschreiber und Rechner ist, und schließlich zwei Lattenträger, die — stets mit derselben Latte — abwechselnd im Rückblick und im Vorblick stehen. Der Libellenbeobachter behält auf ein und demselben Stande die gewählte Stellung unveränderlich bei, so daß nicht etwa durch ein Herumtreten Bodenschwankungen entstehen. Man umgibt sich hier mit einer zur sofortigen Aufdeckung von Beobachtungsfehlern hinreichenden Zahl von Kontrollen, welche teils durch Ablesen an zwei Teilungen, teils durch wiederholte Einstellungen oder auch durch Ablesen an mehreren Fäden gewonnen werden. Ein Zuviel an Beobachtungen ist aber eher schädlich als nützlich, da dann die Arbeit zu langsam vorangeht und erfahrungsgemäß nur bei einem flotten Arbeitsgang gute Ergebnisse erzielt werden. Dagegen muß jede Feineinwägung in zwei verschiedenen Richtungen durchgeführt werden. Dadurch werden nämlich einseitige Fehler aufgedeckt, die verborgen bleiben, wenn die Wiederholung der Messung in der ursprünglichen Richtung erfolgt. Das Mittel aus dem Hin- und Rücknivellement, das Doppelnivellement, ist von den schlimmsten einseitigen Fehlern befreit. Die Ablesungen an den einzelnen Teilungen erfolgen stets in der Reihenfolge r', v', v'', r'' , so daß die beiden Vorblicke v', v'' zeitlich zwischen die beiden Rückblicke zu liegen kommen. Dadurch wird das Einsinken des Instrumentes ziemlich unschädlich gemacht, da die den Mittelwerten $r = \frac{1}{2}(r' + r'')$, $v = \frac{1}{2}(v' + v'')$ entsprechenden Lattenablesungen r_i, v_i nach Andeutung von Abb. 220 auf einer Horizontalen liegen. Zum mindesten hat der etwa übrig bleibende Fehler seinen einseitigen Charakter verloren.

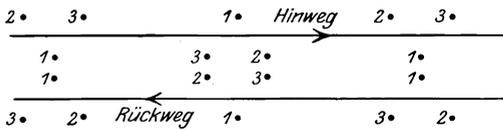


Abb. 226. Aufstellungsschema für ein Feinnivellement.

Große Sorgfalt ist auch auf die Einhaltung gleicher Zielweiten auf ein und demselben Stande zu verwenden, und niemals darf während der Beobachtungen auf einem Stande der Okularauszug verstellt werden. Das Stativ wird so aufgestellt, daß

stets das gleiche Bein senkrecht zur Messungsrichtung steht (Abb. 226) und sich abwechselnd zu verschiedenen Seiten derselben befindet. Ihm gegenüber steht jeweils der Libellenbeobachter, dessen Stellung einen entsprechenden Wechsel erfährt. Wie schon früher¹⁾ erwähnt, kann dadurch der Einfluß von Augenmängeln des Libellenbeobachters auf das Nivellement behoben werden. An heißen Tagen wird bei starkem Flimmern der Luft die Arbeit während der Mittagstunden ausgesetzt. Mindestens am Beginn und Ende

der Werkstätte von *Rost* in Wien anfertigen lassen. Es handelt sich um einen in einer Aluminiumhülle befindlichen Invarstab (Länge: 3 m, Breite: 3 cm, Dicke: 6 mm), auf dessen beiden Seiten lediglich die dm durch die Spitzen von weißen Dreiecken auf schwarzem Grunde bezeichnet sind. Da die Latte ganz auf das *Schellsche* Präzisionsnivellierinstrument zugeschnitten ist, so kann sie für andere Nivellierinstrumente nicht verwendet werden. Latte und Instrument hat *Dolezal* in der Z.V.W. 1905, S. 490—497 und S. 505—519 beschrieben.

1912 hat *Musil* (siehe *Musil*. Eine neue Präzisionsnivellierlatte mit Invarskala, Z.V.W., 1915, S. 33—42) zwei 3 m lange Invarbänder von je 30 mm/2 mm Querschnitt mit $\frac{1}{2}$ cm-Teilung am einen Ende mit dem Lattenfuß verbunden, während die anderen Enden frei beweglich blieben. Eine Spannfeder wurde nicht verwendet; vielmehr dienten zur Geradhaltung des Invarbandes Führungsleisten und Führungsstifte. Sowohl bei *Schell* wie auch bei *Musil* ist Temperaturmessung vorgesehen.

¹⁾ Siehe Anmerkung 1) Seite 185.

jeder einzelnen Nivellementsstrecke wird zur Kontrolle des Lattenmeters auch ein etwa vorhandenes Variometer abgelesen.

Für die Ausführung der Beobachtungen im einzelnen kommen vier verschiedene Methoden in Frage, nämlich α) Nivellieren mit einspielender Libelle und Zufallsablesung an der Latte, β) Nivellieren mit nahezu einspielender Libelle und Zufallsablesung an der Latte, γ) Nivellieren mit schwach geneigter Ziellinie (mit Libellenausschlägen) und Einstellen auf Teilfeldmitte, δ) Nivellieren mit einspielender Libelle und Mitteneinstellung.

Zu α). Beim Nivellieren mit einspielender Libelle und Zufallsablesungen an der Latte erfolgen bei scharf einspielender Libelle an drei gleichabständigen Fäden die Zufallsablesungen an den Lattenteilungen in der Reihenfolge I', II', II'', I'' , wenn auf dem betreffenden Stande die Latte I im Rückblick steht. Eine erste Probe besteht darin, daß die entsprechenden arithmetischen Mittel r', v', v'', r'' mit der jeweiligen Ablesung am Mittelfaden übereinstimmen sollen. Eine weitere sehr wirksame Kontrolle liefert der Vergleich der zusammengehörigen Ablesungen auf beiden Lattenteilungen. Bei verschieden (bzw. gleich-) gerichteten Bezifferungen ist nämlich die Summe (bzw. Differenz) entsprechender Ablesungen der Abstand beider Teilungspunkte, also ein Festwert c_0 . Es muß daher jeweils die Bedingung

$$r'_i + r''_i = c_0 = v'_i + v''_i \dots \dots \dots (463)$$

erfüllt sein. Aus dem mittels der beiden Außenfäden o, u gefundenen Lattenabschnitt und den Distanzmesserkonstanten c, C erhält man jeweils auch die Zielweite, welche bei diesem Verfahren zweckmäßig etwa 40 bis 60 m ist. Ein Zahlenbeispiel für die dabei auf einem Stand auszuführenden Beobachtungen enthält Tabelle 25.

Tabelle 25.

$c_0 = 4,0000$ (Sollwert).

Stand 11.

$c = 0,50$ m, $C = 100,00$.

Rückblick			Vorblick			Bemerkungen
Entfernung	Vorderteilung	Rückteilung	Entfernung	Vorderteilung	Rückteilung	
0,503	¹⁾ $o = 1,095$	¹⁾ $o = 2,906$	0,507	²⁾ $o = 1,251$	³⁾ $o = 1,749$	bedeckter Himmel, ruhige, klare Bilder
0,506	$m = 1,347$	$m = 2,653$	0,506	$m = 1,505$	$m = 2,495$	
	$u = 1,598$	$u = 2,400$		$u = 1,758$	$u = 2,242$	
50,95 m	4,040	7,959	51,15 m	4,514	7,486	
= z	$r' = 1,3467$	$r'' = 2,6530$	= z	$v' = 1,5047$	$v'' = 2,4953$	
	Kontrolle:	$c_0 = 3,9997$		Kontrolle:	$c_0 = 4,0000$	
Doppelte Berechnung des Höhenunterschieds beider Wechsellpunkte: $\Delta h' = r' - v' = -0,1580$ m, $\Delta h'' = v'' - r'' = -0,1577$ m, Standdifferenz $\delta = \Delta h'' - \Delta h' + 3$ dmm						Mittel: $\Delta h = -0,1578$ m

Zu β). Beim Nivellieren mit nahezu einspielender Libelle und Zufallsablesungen an der Latte¹⁾ verzichtet man auf das viel Zeit erfordernde scharfe Einspielenlassen der Libelle, welches doch nicht während der ganzen Dauer der Ablesung anhält. Es wird daher die Libelle nur nahezu zum Einspielen gebracht und ihr Stand vor und nach den je drei zu einer Teilung gehörigen Ablesungen ermittelt. Die Mittel b_r', b_v', b_v'', b_r'' aus je zwei Blasenständen werden dann in guter Annäherung den zugehörigen

¹⁾ Nach einer Bemerkung von Vogler in Z. V. W. 1878, S. 8, ist dieses Verfahren zuerst von Hirsch und Plantamour in der Schweiz angewendet worden. Später fand es auch beim bayerischen Präzisionsnivellement Verwendung.

Beobachtungsmitteln r', v', v'', r'' entsprechen. Da die Ziellinie während der Ablesungen nicht genau horizontal war, so bedürfen diese kleiner Verbesserungen, um in diejenigen Werte überzugehen, welche horizontalen Sichten entsprechen. Ist b_0 (Abb. 227 a) die Mittelmarke der Libelle, so wäre beim Blasenstand b_0 die Ziellinie horizontal. Für einen Blasenstand b ist, wenn

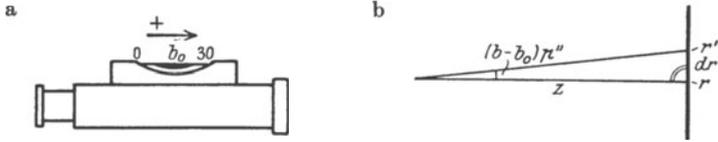


Abb. 227. Nivellieren mit schwach geneigter Sicht.

die Libellenbeziehung am Okularende der Libelle mit Null beginnt und gegen das Objektivende hin zunimmt, der Höhenwinkel der Sicht $(b - b_0)p''$; es werden also die Ablesungen an den aufwärts bezifferten Vorderteilungen zu groß, diejenigen an den abwärts bezifferten Rückteilungen zu klein ausgefallen sein. Die einer Zielweite z entsprechenden Verbesserungen der Ablesungsmittel r', r'', v', v'' sind daher

$$\left. \begin{aligned} dr' &= -\frac{p''}{q''}(b_r' - b_0)z, & dr'' &= +\frac{p''}{q''}(b_r'' - b_0)z, \\ dv' &= -\frac{p''}{q''}(b_v' - b_0)z; & dv'' &= +\frac{p''}{q''}(b_v'' - b_0)z, \end{aligned} \right\} \dots (464)$$

welche Werte entweder mit den Eingängen z und b bzw. $2b$ aus einer Hyperbeltafel entnommen werden oder auch leicht mit dem Rechenschieber zu berechnen sind. Die verbesserten Beobachtungsmittel sind dann

$$\underline{r'} = r' + dr', \quad \underline{r''} = r'' + dr'', \quad \underline{v'} = v' + dv', \quad \underline{v''} = v'' + dv''. \quad (464a)$$

Auch hier werden Zielweiten von 40 bis 60 m genommen. Die Aufschreibungen eines nach diesem Verfahren beobachteten Standes und ihre Berechnung enthält Tabelle 26. Eine Kontrolle der Libellenablesungen wird durch die Berechnung der Blasenlänge (= Differenz dieser Ablesungen) ermöglicht.

Tabelle 26.

$b_0 = 25,0$ $p = 5''$ $c_0 = 4,0000$ Stand 9. $c = 0,50$ m $C = 100,00$

Rückblick					Vorblick					Bemerkungen
Entfernung	Libelle	Vorderteilung	Libelle	Rückteilung	Entfernung	Libelle	Vorderteilung	Libelle	Rückteilung	
0,541	16,5	¹⁾ $o = 1,372$	17,3	⁴⁾ $o = 2,627$	0,543	17,6	²⁾ $o = 1,032$	16,8	³⁾ $o = 2,969$	leichten Flimmer
0,541	32,8	$m = 1,643$	33,5	$m = 2,356$	0,542	34,0	$m = 1,304$	32,8	$m = 2,698$	
	<u>49,3</u>	$u = 1,913$	<u>50,8</u>	$u = 2,086$		<u>51,6</u>	$u = 1,575$	<u>49,6</u>	$u = 2,427$	
54,6 m = z	$= 2b_r'$	4,928	$= 2b_r''$	7,069	54,75 m = z	$= 2b_v'$	3,911	$= 2b_v''$	8,094	
		$r' = 1,6427$		$r'' = 2,3563$			$v' = 1,3037$		$v'' = 2,6980$	
		$dr' = + 5$	Probe: c_0	$dr'' = + 5$			$dv' = - 11$	Probe: c_0	$dv'' = - 3$	
		$\underline{r'} = 1,6432$	$= 4,0000$	$\underline{r''} = 2,3568$			$\underline{v'} = 1,3026$	$= 4,0003$	$\underline{v''} = 2,6977$	
Doppelte Berechnung des Höhenunterschiedes beider Wechsellpunkte:										Mittel
$\Delta h' = \underline{r'} - \underline{v'} = + 0,3406$ m					$\Delta h'' = \underline{v''} - \underline{r''} = + 0,3409$ m					$\Delta h =$
Standdifferenz $\delta = \Delta h'' - \Delta h' = + 3$ dmm										+0,3407

Zu γ). Das Nivellieren mit Libellenausschlägen und Einstellung auf Teilfeldmitte beruht auf der Überlegung, daß der bei der Halbierung eines Teilfeldes begangene Fehler beträchtlich hinter dem zur Ablesung der zufälligen Fadenstellung gehörigen Ablesefehler bleibt. Bei diesem in die

Tabelle 27.

= 25,0 $p = 4''$ $c_0 = 4,0000$ Stand 7. $c = 0,25$ Dm $C = 100,00$

Rückblick					Vorblick					Be- merkungen	
Ent- fernung	Li- belle	Vorder- teilung	Li- belle	Rück- teilung	Ent- fernung	Li- belle	Vorder- teilung	Li- belle	Rück- teilung		
0,362	13,6	¹⁾ $o = 0,870$	13,9	⁴⁾ $o = 3,129$		18,0	²⁾ $o = 0,287$	18,3	³⁾ $o = 3,714$	Sonne, leichtes Flimmern	
0,361	31,7	$m = 1,0510$	31,8	$m = 2,9490$	0,361	36,1	$m = 0,4670$	36,3	$m = 3,5330$		
	45,3	$u = 1,232$	45,7	$u = 2,768$	0,361	54,1	$u = 0,648$	54,6	$u = 3,353$		
	13,8		13,7			18,2		18,1			
36,4 Dm	31,8	$r' = 1,0510$	31,7	$r'' = 2,9490$	36,3 Dm	36,2	$v' = 0,4670$	36,2	$v'' = 3,5330$		
= z	45,6	$\bar{d}r' = + 16$	45,4	$\bar{d}r'' = - 16$	= z	54,4	$\bar{d}v' = - 15$	54,3	$\bar{d}v'' = + 16$		
	45,45	$\underline{r'} = 1,0526$	45,55	$\underline{r''} = 2,9474$		54,25	$\underline{v'} = 0,4655$	54,45	$\underline{v''} = 3,5346$		
	= $2b_{r'}$		= $2b_{r''}$	$c_0 = 4,0000$		= $2b_{v'}$		= $2b_{v''}$	$c_0 = 4,0001$		
Doppelte Berechnung des Höhenunterschiedes beider Wechsellpunkte: $\Delta h' = \underline{r'} - \underline{v'} = + 0,5871$ Dm $\Delta h'' = \underline{v''} - \underline{r''} = + 0,5872$ Dm Standdifferenz $\delta = \Delta h'' - \Delta h' = + 1$ Ddmm											Mittel: $\Delta h = + 1,1743$ m

deutsche Nivellierpraxis durch *Seibt* eingeführt, von ihm weiter ausgebildeten und nach ihm benannten Verfahren wird jeweils der Faden auf die Mitte desjenigen weißen Teilfeldes scharf eingestellt, das er bei horizontaler Lage der Ziellinie trifft, worauf sogleich der Stand der Libelle abzulesen ist. Dieser Vorgang wird zur Verringerung des Einstellfehlers sogleich einmal oder öfter wiederholt; bei der ersten Einstellung werden an jeder Teilung auch die beiden Entfernungsfäden abgelesen. Die Reduktion der Einstellungen auf horizontale Sicht erfolgt ebenso wie vorher bei β); nur handelt es sich hier um wesentlich größere Beträge. Zur Ausnützung der Vorzüge dieses Verfahrens, für das eine durchschnittliche Zielweite von 70 m als günstig erachtet wird, ist eine häufiger zu untersuchende, sehr gute Libelle mit durchaus gleichartiger Schliiffkurve und die genaue Kenntnis des Teilwertes unerlässlich. Tabelle 27 gibt ein Zahlenbeispiel für die Aufschreibungen eines Standes beim abgekürzten *Seibtschen* Verfahren für eine nach Doppelseinheiten¹⁾ bezifferte Teilung mit 4 mm breiten Teilfeldern.

Das Verfahren bleibt im Prinzip dasselbe, wenn nicht ein Faden auf die Teilfeldmitte, sondern bei Strichteilungen ein Teilstrich in die Mitte eines horizontalen Doppelfadens gebracht wird, wie es seit Jahren bei der preußischen Landesaufnahme üblich ist²⁾.

¹⁾ Die Doppelseinheit ist in Tabelle 27 jeweils durch ein der betreffenden Einheit vorgesetztes *D* gekennzeichnet.

²⁾ Nach *Vogler*, Über das holländische Präzisionsnivellement, Z. V. W. 1878, S. 7 bis 18, hat *Cohen Stuart* schon 1875 beim holländischen Feinnivellement das Nivellieren mit Libellenausschlägen und Einstellung auf Teilfeldmitte in der Form angewendet, daß nacheinander auf die Mitte des von der horizontalen Sicht getroffenen Feldes sowie auf die Mitten der beiden anliegenden Teilfelder eingestellt und aus den zugehörigen Blasenständen unter Voraussetzung einer gleichmäßig gekrümmten Schliiffkurve sowohl der Libellenteilwert als auch die Reduktion der Einstellungen auf horizontale Sicht berechnet wurde.

Die bisher besprochenen Verfahren α), β), γ), welchen die mittleren Fehler m_α , m_β , m_γ eigentümlich sein mögen, hat *Reinhertz*¹⁾ auf ihre Genauigkeit hin untersucht und dafür die Beziehung

$$\frac{1}{m_\alpha} : \frac{1}{m_\beta} : \frac{1}{m_\gamma} = 1 : 1,2 : 20 \dots \dots \dots (465)$$

gefunden. Demnach ist das heute weit verbreitete *Seibtsche* Nivellierverfahren den beiden anderen entschieden überlegen.

δ) Das Nivellieren mit einspielender Libelle und Mitteneinstellung²⁾ vereinigt den Vorteil des Nivellierens bei einspielender Libelle, nämlich geringere Genauigkeitsanforderungen an die Libelle und einfachste Rechnung, mit dem Vorteil größerer Genauigkeit der Mitteneinstellung. Es ist durch den Bau eines Feinnivellierapparates von *Zeiß* in den Vordergrund gerückt worden. Dieser von *Wild* konstruierte Apparat besteht aus der auf Seite 195 erwähnten Invarbandlatte und dem früher, Seite 64, beschriebenen Nivellierinstrument von *Zeiß*, vor dessen Objektiv eine kreisförmig begrenzte, etwa 24 mm dicke, genau planparallele Platte, die Einstellplatte, so befestigt wird, daß sie mit Hilfe einer mit Randteilung versehenen Feinstell-

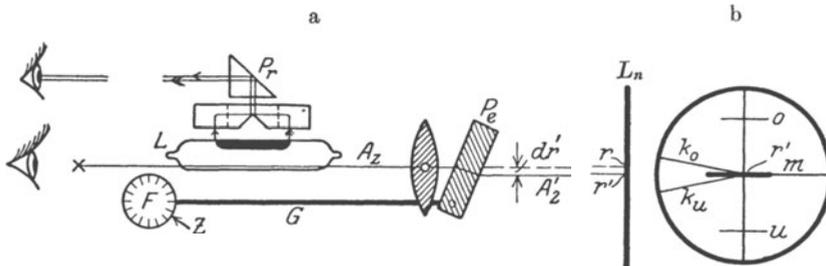


Abb. 228. *Wildsches* Nivellierinstrument der Firma *Zeiß* zum Nivellieren mit einspielender Libelle und Mitteneinstellung.

schraube um eine zur Zielrichtung senkrechte, horizontale Achse gedreht werden kann. Beim Gebrauch wird die Libelle ($\nu = 10''$) des auf die Nivellierlatte L_n (Abb. 228a) gerichteten Fernrohrs zum Einspielen gebracht (s. Abb. 76) und hierauf mittels der Feinstellschraube F durch Vermittlung eines nur angedeuteten Gestänges G die Einstellplatte P_e so weit gedreht, bis im Bilde (Abb. 228b) der nächstliegende Teilstrich r' (erster Rückblick) den Öffnungswinkel des keilförmigen Fadenkreuzes halbiert (Keilstricheinstellung). Die dadurch bewirkte Parallelverschiebung der Ziellinie — dr' in Abb. 228 —, um welche die Einstellung r' zu verbessern ist, kann an der Randteilung der Feinstellschraube unmittelbar auf dmm abgelesen und bis auf cmm geschätzt werden. Da die Einstellung der Libelle vom Fernrohr aus erfolgt, so sind hier am Instrument nur zwei Personen notwendig. Tabelle 28 enthält ein mit geringen Änderungen aus *M. Schmidt*, E. M. B. P. N. H. 2, S. 9, entnommenes Beispiel für die Aufschreibungen eines Standes bei Verwendung des *Zeißschen* Nivellierapparates³⁾.

¹⁾ *Reinhertz*, Mitteilung einiger Beobachtungen über die Schätzungsgenauigkeit an Maßstäben, insbesondere an Nivellierlatten, Z. V. W. 1894, S. 603.

²⁾ Beim Gebrauch des in Anmerkung 2), S. 195, erwähnten *Voglerschen* Nivellierapparates handelt es sich um ein Nivellieren mit nahezu einspielender Libelle und Mitteneinstellung.

³⁾ Der seit 1915 zu den Ergänzungsmessungen im Bayrischen Präzisionsnivellement verwendete Nivellierapparat von *Zeiß* und sein Gebrauch sind in *M. Schmidt*, E. M. B. P. N. H. 1 ausführlicher beschrieben.

Tabelle 28.

Linie: Mühldorf-München.

□ bei km 55,820, Bahndurchlaß, bis □ bei km 55,440, Brücke über die Goldach.

$c_0 = 592,500$

Nummer des Standes und der Latte	Rückblick					Vorblick					Stand-differenz $\delta = dv - dr$	Zeit, Bemerkungen
	Teilung I'		Ziel-differenz dr	Teilung I''		Teilung II'		Ziel-differenz dv	Teilung II''			
	Latte	Trommel		Latte	Trommel	Latte	Trommel		Latte	Trommel		
	cm	cmm	cmm	cm	cmm	cm	cmm	cmm	cm	cmm		
$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$		
Stand Nr. 1	272	320		864	790	285	764		878	260		1915 9. Sept. 4 ^h 10 ^m leichter, kühler Wind, Sonne.
Latte 83/61		340			790		780			262		
$z = \begin{cases} 60,00 \text{ m} \\ 60,50 \text{ m} \end{cases}$		300			796		770			260		
		960	+ 28		2376		2314	+ 10		782	- 18	
$r' =$	272	320	$r'' =$	864	792	285	771	$= \frac{v'}{c_0} =$	878	261	$= \frac{v''}{c_0} =$	
			$c_0 =$	592	472				592	490		

Zu 4). Zur Berechnung eines Feinnivellements und seiner Genauigkeit sei folgendes bemerkt. Es bezeichne Δh bzw. h den Höhenunterschied zwischen den Endpunkten einer durch zwei benachbarte Festpunkte begrenzten Strecke l bzw. einer durch zwei Knotenpunkte des Höhennetzes begrenzten Linie L . Die für Δh in beiden Richtungen beobachteten Werte $\Delta h'$, $\Delta h''$ sind zunächst durch Hinzufügen der dem Hin- und Rückweg entsprechenden Verbesserungen v'_m , v''_m zur Berücksichtigung des Lattenmeters in die verbesserten Werte

$$' \Delta h' = \Delta h' + v'_m, \quad ' \Delta h'' = \Delta h'' + v''_m \dots \dots \dots (466)$$

überzuführen. In ihrem arithmetischen Mittel $'' \Delta h = \frac{1}{2} (' \Delta h' + ' \Delta h'')$ ist der aus dem Einsinken von Instrument und Latte entstehende Fehler, welcher die Absolutwerte der positiven Höhenunterschiede zu groß, diejenigen der negativen zu klein erscheinen läßt, getilgt bis auf kleine, für mehrere Strecken den Charakter von zufälligen Fehlern annehmende Restfehler. Eine weitere, mit Rücksicht auf die ellipsoidische Erdgestalt notwendige Verbesserung ist die orthometrische Korrektion γ . Sie wird, wie hier ohne Beweis mitgeteilt werden muß, in dmm durch den Ausdruck

$$\gamma = - 2,57 \cdot 10^{-4} H \cdot \Delta \varphi'' \cdot \sin 2 \varphi \dots \dots \dots (467)$$

bestimmt, wenn $\Delta \varphi''$ den in Sekunden ausgedrückten Breitenzuwachs vom Anfangspunkt der Strecke bis zu ihrem Endpunkt, φ die geographische Breite für die Mitte der Strecke und H die (genäherte) durchschnittliche Meereshöhe beider Streckenendpunkte in Metern bedeutet. Der verbesserte Wert

$$' \Delta h = '' \Delta h + \gamma \dots \dots \dots (468)$$

ist, wenn keine weiteren Bedingungen vorhanden sind, ein wahrscheinlichster. Die Summe der zu einer Linie L gehörigen $' \Delta h$ ergibt den ihren Endpunkten entsprechenden Höhenunterschied

$$' h = [' \Delta h]. \dots \dots \dots (469)$$

Die $' h$ und auch die $' \Delta h$ sind als Mittelwerte aus Hin- und Rückmessungen frei von den mit der Entfernung fortschreitenden systematischen Fehlern, welche durch das Einsinken von Instrument und Latte hervor-

gerufen werden. Da infolge der sorgfältigeren Lattenaufstellung auch der Einfluß der Lattenschiefe außer Betracht bleiben kann, so bleiben nur die mit der Wurzel aus der nivellierten Länge wachsenden zufälligen Nivellierfehler $\mu_u = \mu_0 \sqrt{L}$ sowie der mit h zunehmende Einfluß $h \cdot m_m$ einer geringen Unsicherheit des Lattenmeters und die für feste Zielweite zu L proportionale Wirkung $\frac{1}{2} z \cdot L \cdot \delta$ einseitiger Refraktionsfehler übrig. Es ist also das Quadrat des mittleren Gesamtfehlers in h ein Ausdruck von der Form

$$\mu_g^2 = L \cdot \mu_0^2 + h^2 \cdot m_m^2 + L^2 \cdot m_\delta^2, \dots \dots \dots (470)$$

dessen zweites und drittes Glied jedoch nur bei größeren Höhenunterschieden bzw. bei einseitig geneigten Profilen von Bedeutung sind. $L^2 m_\delta^2$ wird für diejenige relativ schwache Neigung am größten, bei welcher die eben noch unverkürzte Sicht den Fußpunkt der einen Latte trifft.

Die Genauigkeitsbeurteilung einer Feineinwägung erfolgt nach dem mittleren zufälligen km-Fehler m_0 bzw. μ_0 des einfachen bzw. des Doppelnivellements sowie nach der Größe der systematischen Fehler, soweit diese eben nachweisbar sind. Für m_0 wird sich aus den Standdifferenzen ein Wert m_0' , aus den Streckendifferenzen einer Linie aber ein anderer Wert m_0'' ergeben.

Versteht man unter den Standdifferenzen δ (s. die Tabellen 25 bis 28) den für jeden der n Stände berechneten Unterschied der je aus beiden Lattenteilungen ermittelten Höhenunterschiede benachbarter Wechselpunkte, so sind — gleiche Zielweiten vorausgesetzt — die Ausdrücke

$$m_0' = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2l_i}}, \dots \dots \dots (471)$$

$$m_0' = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{2L}}, \dots \dots \dots (472)$$

in welchen $[\delta\delta]$ verschiedene Werte besitzt, die einer Strecke l_i bzw. einer Linie L entsprechenden mittleren Standfehler pro 1 km des einfachen (in einer Richtung) gemessenen Nivellements. Der entsprechende Ausdruck für das Doppelnivellement ist

$$\mu_0' = \frac{m_0'}{\sqrt{2}}. \dots \dots \dots (473)$$

Die Berechnung von m_0'' aus den Streckendifferenzen einer Linie erfolgt gemeinsam mit der Ermittlung desjenigen zur Länge proportionalen systematischen Fehlers k , welcher die Absolutwerte $|\Delta h'_+|$ und $|\Delta h''_-|$ der positiven und negativen Höhenunterschiede auf dem Hin- und Rückwege in verschiedenem Sinne beeinflusst. Ist

$$d_i = |\Delta h'_+| - |\Delta h''_-| \dots \dots \dots (474)$$

die einseitig beeinflusste Differenz der beiden Höhenunterschiede einer Strecke l_i und d_i' der zugehörige zufällige Wert, so gelten die Beziehungen:

$$d_i = d_i' + l_i(2k), \dots \dots \dots (475)$$

$$\frac{d_i}{\sqrt{l_i}} = \frac{d_i'}{\sqrt{l_i}} + 2k\sqrt{l_i}, \dots \dots \dots (476)$$

$$\left[\frac{d_i}{\sqrt{l_i}} \right] = \left[\frac{d_i'}{\sqrt{l_i}} \right] + 2k \left[\sqrt{l_i} \right]. \dots \dots \dots (477)$$

Nun sind die $d'_i : \sqrt{l_i}$ lauter zufällige Differenzen vom Gewicht 1, so daß

$$\left[\frac{d'_i}{\sqrt{l_i}} \right] = 0 \quad \dots \dots \dots (478)$$

ist. Damit aber ergibt sich aus (477) der systematische Nivellierfehler für 1 km:

$$k = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{d'_i}{\sqrt{l_i}} \right] : \left[\sqrt{l_i} \right] \right\} \dots \dots \dots (479)$$

Mit bekanntem k findet man aus (475) die zufälligen Differenzen

$$d'_i = d_i - 2k \cdot l_i \quad \dots \dots \dots (480)$$

und damit die mittleren zufälligen km-Fehler

$$m_0'' = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d' d'}{l} \right]}, \quad \mu_0'' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d' d'}{l} \right]} \dots \dots (481)$$

Ein Zahlenbeispiel¹⁾ für die Berechnung des systematischen und des mittleren zufälligen Linienfehlers auf 1 km enthält Tab. 29, S. 204.

Bilden die Linien eine größere Anzahl von geschlossenen Schleifen, so kann nach Beseitigung der systematischen Fehler der mittlere zufällige km-Fehler näherungsweise auch aus den Schleifenschlußfehlern, zuverlässiger aber aus einer strengen Netzausgleichung, deren Besprechung im Rahmen dieses Buches zu weit führen würde, erfolgen.

Ist w_i der Schlußfehler der doppelt nivellierten i -ten Schleife von der Länge S_i , so sind die Ausdrücke

$$m_0''' = \pm \sqrt{\frac{2}{\nu} \left[\frac{w w}{S} \right]}, \quad \mu_0''' = \pm \sqrt{\frac{1}{\nu} \left[\frac{w w}{S} \right]} \dots \dots (481a)$$

die aus den ν Schleifenschlußfehlern w berechneten Näherungswerte für den mittleren km-Fehler des einfachen bzw. des Doppelnivellements.

Jedes Feinnivellement ist an gewisse, engere Fehlergrenzen gebunden. Nach einem Beschluß der Allgemeinen Konferenz der Europäischen Erdmessung zu Berlin, 1867, darf der mittlere Fehler der Höhendifferenz zweier um 1 km entfernten Punkte im allgemeinen nicht 4,5 mm und in keinem Falle 7,5 mm überschreiten. Die seither erzielten großen Fortschritte in der Genauigkeit des Nivellierens haben die 17. Allgem. Konf. d. Internationalen Erdmessung in Hamburg, 1912, veranlaßt, neben den unverändert bestehenbleibenden Präzisionsnivellements als Feineinwägungen von hoher Genauigkeit solche in entgegengesetzten Richtungen und womöglich an verschiedenen Tagen durchgeführte Doppelnivellements zu be-

¹⁾ Die Zahlenwerte der d_i und l_i sind aus *M. Schmidt*, E. M. B. P. N. H. 1, S. 38 entnommen. Mit den dort aus einer geometrisch sehr anschaulichen Linienausgleichung erhaltenen Beträgen $y = +0,52$ mm (S. 39) und $\mu_1 = \pm 1,27$ mm (S. 40) stimmen die ihnen entsprechenden Werte $2k$ und μ_0'' in Tab. 29 bis auf 2 bzw. 1 Einheit der zweiten Dezimalstelle überein. Bei einer solchen Linienausgleichung trägt man die Entfernungen aller Punkte, vom Anfangspunkt der Linien, als Abszissen und die zugehörigen Summen aller zurückliegenden d als Ordinaten auf. Die so entstandene Punktreihe läßt sich in ihrer ganzen Ausdehnung oder in mehreren Abschnitten durch je eine Gerade ausgleichen, deren genaue Lage durch eine Ausgleichung mit zwei Unbekannten gefunden wird. Auch wenn die Fehlerberechnung mittels der Formeln (479) und (481) erfolgt, ist die Herstellung eines solchen Schaubildes für das Auseinandergehen beider Einwägungen notwendig, damit für die Berechnung der k die etwa notwendige Unterabteilung der Linie an den richtigen Stellen erfolgt.

Tabelle 29.

Nr.	d_i	l_i	$\sqrt{l_i}$	$\frac{d_i}{\sqrt{l_i}}$	$2k l_i$	d_i'	$d_i' d_i$	$\frac{d_i' d_i}{l_i}$
	mm	km	km ^{1/2}	mm	mm	mm	mm ²	mm ²
1	+ 4,3	1,67	+ 1,29	+ 3,34	0,89	+ 3,41	11,6	7,0
2	+ 3,6	2,01	+ 1,42	+ 2,54	1,07	+ 2,53	6,4	3,2
3	+ 3,9	2,01	+ 1,42	+ 2,75	1,07	+ 2,83	8,0	4,0
4	- 4,7	2,01	+ 1,42	- 3,31	1,07	- 5,77	33,3	16,6
5	- 1,9	2,01	+ 1,42	- 1,34	1,07	- 2,97	8,8	4,4
6	+ 3,3	1,74	+ 1,32	+ 2,50	0,93	+ 2,37	5,6	3,2
7	- 2,1	1,40	+ 1,18	- 1,78	0,75	- 2,85	8,1	5,8
8	+ 1,7	1,01	+ 1,00	+ 1,70	0,54	+ 1,16	1,3	1,3
9	+ 3,7	2,02	+ 1,42	+ 2,61	1,08	+ 2,62	6,9	3,4
10	- 0,8	2,03	+ 1,42	- 0,56	1,08	- 1,88	3,5	1,7
11	+ 0,5	2,00	+ 1,41	+ 0,35	1,06	- 0,56	0,3	0,2
12	- 0,2	2,02	+ 1,42	- 0,14	1,08	- 1,28	1,6	0,8
13	+ 8,7	4,03	+ 2,01	+ 4,32	2,15	+ 6,55	42,9	10,6
14	- 3,2	1,51	+ 1,23	- 2,60	0,80	- 4,00	16,0	10,6
15	- 2,4	0,53	+ 0,73	- 3,29	0,28	- 2,68	7,2	13,6
16	+ 3,4	0,48	+ 0,69	+ 4,93	0,26	+ 3,14	9,8	20,4
17	+ 3,0	1,48	+ 1,22	+ 2,46	0,79	+ 2,21	4,9	3,3
18	+ 1,8	2,03	+ 1,42	+ 1,27	1,08	+ 0,72	0,5	0,2
19	- 2,9	2,00	+ 1,41	- 2,06	1,06	- 3,96	15,7	7,8
20	+ 2,0	2,35	+ 1,53	+ 1,30	1,25	+ 0,75	0,6	0,3
21	+ 4,7	1,65	+ 1,28	+ 3,67	0,88	+ 3,82	14,6	8,9
22	+ 2,6	1,75	+ 1,32	+ 1,97	0,93	+ 1,67	2,8	1,6
23	- 0,8	2,05	+ 1,43	- 0,56	1,09	- 1,89	3,6	1,8
24	- 1,9	3,29	+ 1,81	- 1,05	1,75	- 3,65	13,3	4,0
25	+ 0,7	4,89	+ 2,21	+ 0,37	2,61	- 1,91	3,6	0,7
26	- 4,2	2,43	+ 1,56	- 2,69	1,29	- 5,49	30,1	12,4
27	+ 8,9	2,01	+ 1,42	+ 6,27	1,07	+ 7,83	61,3	30,5
28	- 0,2	2,03	+ 1,42	- 0,14	1,08	- 1,28	1,6	0,8
29	+ 2,4	1,99	+ 1,41	+ 1,70	1,06	+ 1,34	1,8	0,9
30	+ 1,4	0,30	+ 0,55	+ 2,55	0,16	+ 1,24	1,5	5,0
31	- 1,1	1,71	+ 1,31	- 0,84	0,91	- 2,01	4,0	2,3
32	+ 4,5	1,33	+ 1,15	+ 3,91	0,71	+ 3,79	14,4	10,8
33	- 0,9	0,10	+ 0,32	- 2,81	0,05	- 0,95	0,9	9,0
34	- 4,9	2,15	+ 1,47	- 3,33	1,14	- 6,04	36,5	17,0
[+]				+ 50,51		+ 47,98		
[-]				- 26,50		- 49,17		
[+]		64,02	+ 45,04	+ 24,01		- 1,19		+ 224,1

$$k = + 0,27 \text{ mm}; \quad \mu_0'' = \pm 1,28 \text{ mm}; \quad m_0'' = \pm 1,81 \text{ mm}$$

zeichnen, deren nach bestimmten Formeln¹⁾ berechnete mittlere zufällige und mittlere systematische Fehler die Beträge $\pm 1,5$ mm bzw. 0,3 mm nicht überschreiten.

In manchen Staaten werden, einem viel empfundenen Bedürfnisse folgend, die Ergebnisse der Feinnivellements und anderer Höhenmessungen in besonderen Höhenverzeichnissen veröffentlicht²⁾.

¹⁾ Siehe Verhandlungen d. 1912 in Hamburg abgehaltenen 17. Allg. Konf. d. Intern. Erdm., II. Teil, Berlin 1914, Annex B. VIIIc, S. 251/252.

Ein geometrisches Nivellement durch Nivellieren aus Zwischenpunkten, die allerdings nicht in der Mitte der Station vorausgesetzt sind, beschreibt schon *Heron* von Alexandria; siehe *Schöne*, Heron, S. 205ff, Aufgabe VI.

²⁾ Siehe z. B. a) in Baden: Die Großh. Bad. Hauptnivellements mit den Anschlüssen an die Nachbarstaaten, bearbeitet von *Jordan*, Karlsruhe 1885; ferner Beiträge zur Hydrographie des Großherzogtums Baden, 13. Heft: Die Hochwassermarken im Großherzogtum Baden, bearbeitet von *Kitivatschky*, Karlsruhe 1911; b) Bayern: Das Bayerische Landes-

30. Trigonometrische Höhenmessung.

Bei der Berechnung einer trigonometrischen Höhenmessung treten goniometrische Funktionen von gemessenen Zenitabständen oder Höhenwinkeln der von gegebenen zu gesuchten Punkten führenden Richtungen auf.

a) Kurze Sichten.

Verbindet eine kurze Sicht, deren Höhenwinkel α (Abb. 229) und deren Horizontalprojektion a ist, den Punkt P_1 von bekannter Meereshöhe H_1 mit einem der Höhe nach zu bestimmenden Punkte P_2 , so ist dessen Meereshöhe

$$H_2 = H_1 + h, \dots \dots \dots (482)$$

wo unter Vernachlässigung der Erdkrümmung und Strahlenbrechung

$$h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (483)$$

ohne weiteres sich aus dem rechtwinkligen Neigungsdreieck $P_1 P_2^0 P_2$ ergibt

Eine sehr häufige und vorteilhafte Anwendung findet diese einfache Art der trigonometrischen Höhenbestimmung, wenn in Polygonzügen, die einer topographi-

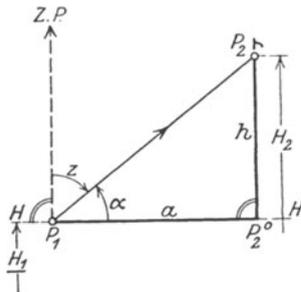


Abb. 229. Trigonometrische Höhenmessung mit kurzen Sichten.

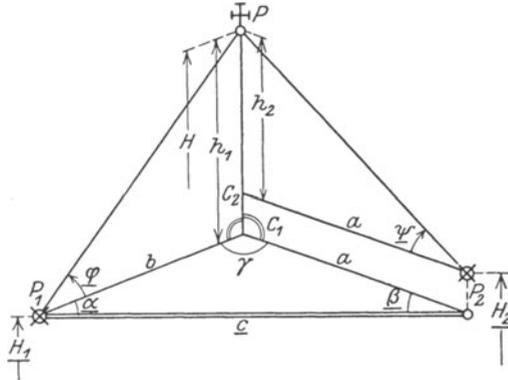


Abb. 230. Turmhöhenbestimmung mit seitlich gelegener Grundlinie.

sehen Aufnahme als Grundlage dienen, die Endpunkte der bereits gemessenen Polygonseiten auch der Höhe nach bestimmt werden sollen.

Hierher gehört auch die Bestimmung von Turmhöhen aus nächster Nähe. Sind in den um die gemessene Horizontalentfernung c voneinander abstehenden Punkten P_1, P_2 (Abb. 230), deren Instrumentenhorizonte H_1, H_2

nivellement, bearbeitet von *M. Schmidt*, München 1910, enthält die in Bayern durch Präzisionsnivellements (das unter *Bauernfeinds* Leitung ausgeführte, über das ganze Land sich erstreckende Feinnivellement wurde seinerzeit von *C. Örtel* bearbeitet), Eisenbahn- und Flußnivellements bestimmten Höhen nach dem Stand von Ende 1909. Dazu treten die Ergänzungsmessungen zum Bayerischen Präzisionsnivellement, Heft 2, bearbeitet von *M. Schmidt*, München 1919; c) Preußen und ehemalige Reichslande: Nivellements und Höhenbestimmungen der Punkte erster und zweiter Ordnung, ausgeführt v. d. Trigonometrie, Abt. d. Landesaufnahme, Berlin 1870, 1873, 1875, 1880, 1883, 1886, 1889, 1894. Außer diesen größeren Werken sind nach Landesteilen geordnete Auszüge für den unmittelbaren Gebrauch der Technik veröffentlicht worden, die in bisher 13 Heften (Mittler & Sohn, Berlin) erschienen sind; ferner Kgl. Preuß. Ministerium der öffentl. Arbeiten, Höhen über Normalnull von Festpunkten und Pegeln an Wasserstraßen, Stankiewicz, Berlin; bisher 16 Hefte nach Flußgebieten geordnet (für den praktischen Gebrauch bestimmte Auszüge aus größeren Bänden); d) in Württemberg: Publikation d. K. Württemb. Commission für Europäische Gradmessung, Präzisionsnivellement, ausgeführt unter der Leitung von *Schoder*,

durch ein an einen Höhenfestpunkt angeschlossenes geometrisches Nivellement scharf bestimmt worden sind, die Höhenwinkel φ, ψ gemessen worden, welche die von P_1, P_2 nach einem der Höhe H nach zu bestimmenden Punkte P führenden Sichten besitzen und bedeuten α, β die ebenfalls gemessenen Horizontalwinkel zwischen diesen Sichten und der Standlinie c , so ergibt sich mit den eingeschriebenen Bezeichnungen H doppelt auf dem Wege über folgende Formeln:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \quad a = c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad b = c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \dots \quad (484)$$

$$h_1 = b \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad h_2 = a \operatorname{tg} \psi, \quad \dots \quad (485)$$

$$H = H_1 + h_1 = H_2 + h_2. \quad \dots \quad (486)$$

Ist es nicht möglich, die Standlinie so zu wählen, daß ein günstiges horizontales Bestimmungsdreieck entsteht, so kann man etwa in einer auf den Turm zuführenden Straße die Standlinie P_1P_2 (Abb. 231) so legen, daß ihre Lotebene auch den zu bestimmenden Punkt P enthält. Aus den ermittelten Instrumentenhorizonten H_1, H_2 , in den Endpunkten der Standlinie D und den dort beobachteten Höhenwinkeln α, β findet

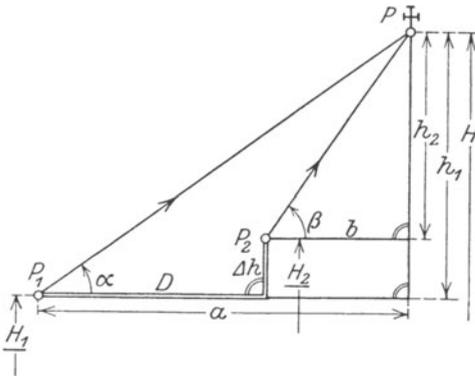


Abb. 231. Turmhöhenbestimmung mit auf das Ziel gerichteter Grundlinie.

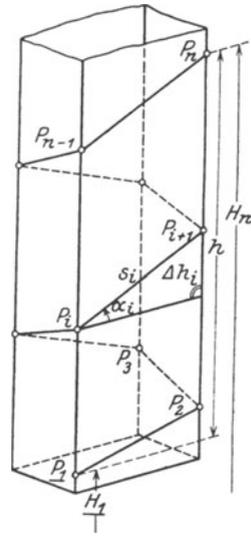


Abb. 232. Turmhöhenbestimmung mit Hilfe eines Schnurzugs.

man unter Verwendung der eingeschriebenen Bezeichnungen leicht:

$$\Delta h = H_2 - H_1, \quad a = b + D, \quad b = a - D, \quad \dots \quad (487)$$

$$\Delta h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha - b \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad \dots \quad (488)$$

$$a = \frac{\Delta h - D \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}, \quad b = \frac{\Delta h - D \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}, \quad \dots \quad (489)$$

$$h_1 = a \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad h_2 = b \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad \dots \quad (490)$$

$$H = H_1 + h_1 = H_2 + h_2. \quad \dots \quad (491)$$

Stuttgart 1885; e) Sachsen: Astronomisch-geodätische Arbeiten für die Europäische Gradmessung im Königreich Sachsen; IV. Abt. Das Landesnivellement, begonnen unter Leitung von Julius Weisbach, vollendet und bearbeitet von A. Nagel, Berlin 1886; f) auch einzelne Städte, z. B. Dresden, haben ihr Höhenverzeichnis veröffentlicht.

Über den jeweiligen Stand der Feinnivellements auf der ganzen Erde und die dabei verwendeten Instrumente, Latten und Arbeitsmethoden, geben die verschiedenen messungs- und Erdmessungsberichte Aufschluß.

Auch die Ermittlung der Meereshöhe H_n eines im Turminnenen gelegenen Punktes P_n (Abb. 232) mittels eines Schnurzugs $P_1 P_2 \dots P_i \dots P_n$, für dessen Seiten die Längen s und Neigungen α_i (Hängewage) zu messen sind, ist — wenigstens vom rechnerischen Standpunkte aus — hier zu nennen. Der einer einzelnen Seite entsprechende Höhenunterschied ist

$$\Delta h_i = s_i \cos \alpha_i, \dots \dots \dots (492)$$

also wird der Gesamthöhenunterschied

$$h = \sum_1^{n-1} [\Delta h_i]. \dots \dots \dots (493)$$

Fügt man sie zur vorher bestimmten Höhe H_1 des Zuganfangspunktes P_1 am Turmfuß, so erhält man die Höhe des Zugiendpunktes, nämlich

$$H_n = H_1 + h = H_1 + \sum_1^{n-1} [\Delta h_i] = H_1 + \sum_1^{n-1} [s_i \cos \alpha_i]. \dots \dots (494)$$

Zur Erzielung guter Ergebnisse sind die Schnüre straff zu spannen und die einzelnen Strecken nicht über 20 m zu nehmen.

Noch eine andere Art der Höhen- und Entfernungbestimmung, welche man vielleicht als Nivellement durch zweifache Höhenwinkel-messung bezeichnen kann, gehört hierher.

Sind mit Hilfe eines in A (Abb. 233) stehenden, zum Messen von Höhenwinkeln eingerichteten Instruments mit der Instrumentenhöhe i die Höhenwinkel α, β der nach dem oberen und unteren Endpunkt des festen Abschnittes l einer im Lot von P stehenden Latte führenden Sichten beobachtet worden und bedeuten z und h die Höhe des unteren Endpunktes des Lattenabschnittes über dem Lattenfußpunkt P , bzw. über dem Instrumentenhorizont, so ergeben sich die horizontale Entfernung D und der Höhenunterschied Δh beider Geländepunkte A und P mittels der aus den beiden Neigungsdreiecken folgenden Beziehungen

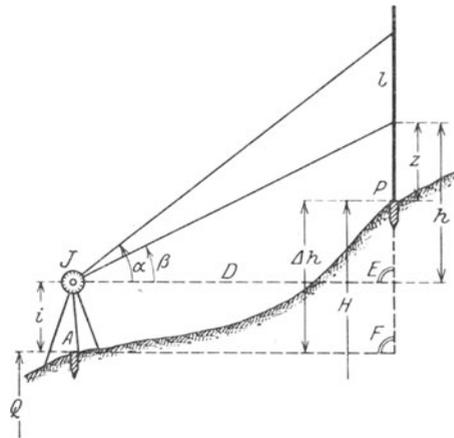


Abb. 233. Bestimmung der horizontalen Entfernung und des Höhenunterschiedes durch zweifache Höhenwinkel-messung.

$$D \cdot \operatorname{tg} \alpha = h + l, \quad D \cdot \operatorname{tg} \beta = h \dots \dots \dots (495)$$

zu

$$D = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}, \dots \dots \dots (496)$$

$$\Delta h = D \cdot \operatorname{tg} \alpha + i - l - z = D \cdot \operatorname{tg} \beta + i - z \dots \dots \dots (497)$$

Im hügeligen Gelände kann es sich, wenn zugunsten der Zeitersparnis die Genauigkeitsanforderungen etwas zurücktreten dürfen, lohnen, ein solches Nivellement durchzuführen, wenn das hernach beschriebene tachymetrische Nivellement versagt. Nach Abb. 234, in deren Bezeichnungen die Zeiger r und v den Rückblick und den Vorblick andeuten, ist der Höhenunterschied zwischen den aufeinanderfolgenden Wechsellpunkten W_r und W_v

$$\delta h = h_v - h_r + z_r - z_v. \dots \dots \dots (498)$$

Nimmt man, was fast immer geschieht, $z_r = z_v$, so erhält man den einfachen Ausdruck

$$\delta h = h_v - h_r, \dots \dots \dots (499)$$

welcher in der äußeren Form bis auf das Vorzeichen mit dem entsprechenden Ausdruck $\delta h = r - v$ im geometrischen Nivellement übereinstimmt. Zur Er-

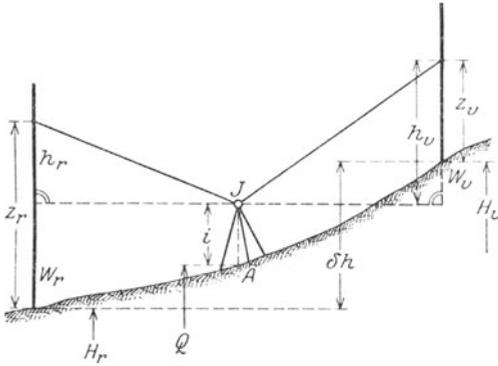


Abb. 234. Höhenübertragung von Wechselpunkt zu Wechselpunkt durch trigonometrisches oder durch tachymetrisches Nivellement.



Abb. 235. Latte mit Zielscheiben.

leichterung der Beobachtungen und zur Erhöhung ihrer Genauigkeit bezeichnet man die Endpunkte des Lattenabschnittes l häufig durch fest mit der Latte verbundene Zielscheiben (Abb. 235), deren möglichst runder Abstand mit Hilfe eines Normalmaßstabes genau bestimmt und von Zeit zu Zeit nachgeprüft wird.

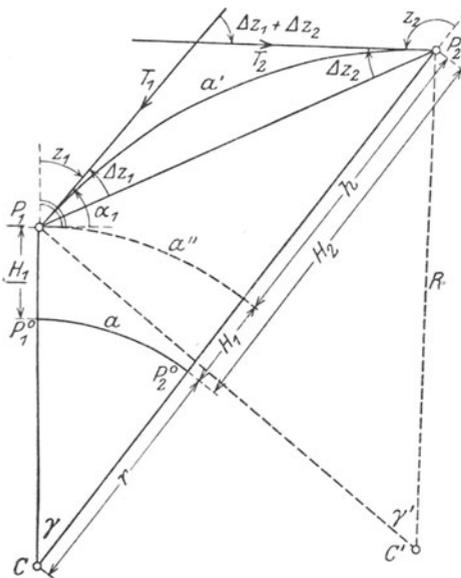


Abb. 236. Trigonometrische Höhenmessung unter Berücksichtigung von Erdkrümmung und Strahlenbrechung.

Soll die Erdkrümmung und Strahlenbrechung die Höhe des Endpunktes einer Sicht in den Zentimetern nicht mehr verfälschen, so muß man Entfernungen über 200 m vermeiden. Bei Zielungen, die, wie beim Nivellement durch zweifache Höhenwinkelmessung, in Bodennähe hinstreichen, werden die cm schon auf geringere Entfernungen hin unsicher. Doch wird dieser Fehler im Höhenunterschied δh zum Teil behoben, wenn annähernd aus der Mitte der Station nivelliert wird und die untere Zielscheibe nicht allzu nahe am Lattenfuß liegt.

Bei längeren Sichten ist, wenn der Höhenfehler einige Zentimeter nicht überschreiten soll, stets der Einfluß der Erdkrümmung und Strahlenbrechung zu berücksichtigen. In Abb. 236 sei a' die zwischen den entfernten Punkten P_1, P_2 mit den Meereshöhen H_1, H_2 verlaufende Lichtkurve, deren Endpunktstangenten T_1, T_2

die Richtungen der jeweils auf den anderen Endpunkt eingestellten Fernrohrziellinie angeben. Sie besitzen die Zenitabstände z_1, z_2 und schließen mit der Sehne P_1, P_2 die als terrestrische Refraktionen bezeichneten Winkel $\Delta z_1, \Delta z_2$ ein¹⁾. Aus dem durch den Erdmittelpunkt C und die Punkte P_1, P_2 gebildeten Dreieck findet man, wenn a' vom Erdmittelpunkt aus unter dem Zentriwinkel γ erscheint, nach dem Tangenssatze

$$\frac{CP_2 - CP_1}{CP_1 + CP_2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \{(z_2 + \Delta z_2) - (z_1 + \Delta z_1)\}}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} \dots (500)$$

Die Differenz $CP_2 - CP_1$ ist der zu ermittelnde Höhenunterschied h zwischen P_1 und P_2 . Mittels der für alle terrestrischen Sichten (Sichten nach irdischen Zielpunkten) praktisch als streng zu erachtenden Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{2r}, \dots (501)$$

in welcher a die Horizontalprojektion der Lichtkurve auf das Meeresniveau und r (rund 6370 km) den Erdhalbmesser bedeutet, ergibt sich aus (500)

$$h = a \left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2r} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \{(z_2 + \Delta z_2) - (z_1 + \Delta z_1)\}, \dots (502)$$

bzw.
$$h = a \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \{(z_2 + \Delta z_2) - (z_1 + \Delta z_1)\}, \dots (503)$$

wenn H_m , für das ein Näherungswert genügt, die mittlere Meereshöhe von P_1 und P_2 bedeutet. Das Argument des letzten Faktors in (503) läßt sich mit Hilfe der aus der Winkelsumme des Dreiecks CP_1P_2 hervorgehenden Gleichung

$$(z_1 + \Delta z_1) + (z_2 + \Delta z_2) = \pi + \gamma \dots (504)$$

durch die Substitutionen

$$z_2 + \Delta z_2 = \pi + \gamma - (z_1 + \Delta z_1), \quad z_1 + \Delta z_1 = \pi + \gamma - (z_2 + \Delta z_2) \dots (505)$$

als Funktion von $z_1, \Delta z_1, \gamma$ bzw. von $z_2, \Delta z_2, \gamma$ ausdrücken. Man erhält auf diese Weise die beiden noch strengen Formen

$$h = a \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) \operatorname{ctg} \left(z_1 + \Delta z_1 - \frac{\gamma}{2} \right), \dots (506)$$

$$h = -a \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) \operatorname{ctg} \left(z_2 + \Delta z_2 - \frac{\gamma}{2} \right). \dots (507)$$

Über die Form der Lichtkurven war bisher noch keine Voraussetzung getroffen worden. Macht man die in vielen Fällen genügend genau zutreffende, im allgemeinen aber doch unsichere Annahme, daß die beiden Refraktionswinkel in den Endpunkten der Lichtkurven einander gleich seien, nämlich

$$\Delta z_1 = \Delta z_2 = \Delta z, \dots (508)$$

so findet man aus (503) den Höhenunterschied

$$h = a \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (z_2 - z_1) \dots (509)$$

¹⁾ Die Summe $\Delta z_1 + \Delta z_2$ dieser Teilrefraktionen in den Strahlenendpunkten ergibt die terrestrische Gesamtrefraktion.

ohne Kenntnis der Strahlenbrechung aus gegenseitigen Zenitabständen. Die Lichtkurve ist streng genommen eine von der wechselnden, nur ungenau bekannten Luftbeschaffenheit und von der Wellenlänge des Lichtes abhängige unregelmäßige Kurve. Bei normaler Luftschichtung weicht sie von einem sehr flachen Kreisbogen, zu dessen Zentriwinkel γ' der Scheitel C' und der Halbmesser R gehören mögen, nur wenig ab. Für diese allgemein übliche Näherungsannahme wird

$$\Delta z = \frac{1}{2} \gamma'. \quad \dots \dots \dots (510)$$

Um Δz durch γ ausdrücken zu können, brauchen wir eine — wenigstens näherungsweise bekannte — Beziehung zwischen γ' und γ . Bedeutet $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - z_1$ den in P_1 gemessenen Höhenwinkel von a' , so kann man in guter Annäherung

$$a' = \frac{a''}{\cos \alpha_1} = \frac{a}{\cos \alpha_1} = \frac{r \cdot \gamma}{\cos \alpha_1} \quad \dots \dots \dots (511)$$

setzen. Andererseits ist

$$a' = R \cdot \gamma', \quad \dots \dots \dots (512)$$

also

$$\gamma' = \frac{1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{r}{R} \cdot \gamma = \frac{k}{\cos \alpha_1} \cdot \gamma. \quad \dots \dots \dots (513)$$

Das Verhältnis $k = r : R$ des Erdhalbmessers zum Halbmesser der Lichtkurve ist der Refraktionskoeffizient. Die Einführung von (513) in (510) ergibt somit den Refraktionswinkel

$$\Delta z = \frac{1}{\cos \alpha_1} \cdot k \cdot \frac{\gamma}{2} \quad \dots \dots \dots (514)$$

und der Höhenunterschied wird nach (506)

$$h = a \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) \operatorname{tg} \left\{ \alpha_1 + \left(1 - \frac{k}{\cos \alpha_1} \right) \frac{\gamma}{2} \right\}. \quad \dots \dots \dots (515)$$

Hieraus erhält man durch Entwickeln nach dem *Taylor*schen Satz unter Beschränkung auf die beiden ersten Glieder

$$h = a \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) \left\{ \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{\gamma}{2 \cos^2 \alpha_1} \left(1 - \frac{k}{\cos \alpha_1} \right) \right\} \quad \dots \dots \dots (516)$$

oder unter Beachtung der Beziehung

$$\gamma = \frac{a}{r} \quad \dots \dots \dots (517)$$

und unter Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung

$$h = a \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) \operatorname{tg} \alpha_1 + \left(1 - \frac{k}{\cos \alpha_1} \right) \frac{a^2}{2 r \cos^2 \alpha_1}. \quad \dots \dots \dots (518)$$

Ersetzt man im Korrektionsglied das gegen 1 sehr kleine Glied $k : \cos \alpha_1$ durch k , so erscheint die bekanntere Form

$$h = a \left(1 + \frac{H_m}{r} \right) \operatorname{tg} \alpha_1 + (1 - k) \frac{a^2}{2 r \cos^2 \alpha_1}. \quad \dots \dots \dots (519)$$

Der Quotient $H_m : r$ im ersten Gliede dieses Ausdrucks trägt der Vergrößerung des im Meeresspiegel befindlichen Bogens a bis zum mittleren Messungshorizont H_m Rechnung. Er kann wenn es sich nicht um sehr große Meereshöhen handelt, vielfach unterdrückt werden.

Da bei den größeren Entfernungen nur kleine Höhenwinkel α in Frage kommen, so kann meistens im Zusatzgliede von (519) auch $\cos^2 \alpha = 1$ gesetzt werden. So entsteht der in der trigonometrischen Höhenmessung vielgebrauchte, meist ausreichende Näherungsausdruck

$$h = a \operatorname{tg} \alpha_1 + (1 - k) \frac{a^2}{2r}, \quad \dots \dots \dots (520)$$

dessen zweites Glied dem mit dem Quadrat der Entfernung fortschreitenden Gesamteinfluß der Erdkrümmung und Strahlenbrechung entspricht. Die in gleicher Weise fortschreitenden Teilverbesserungen sind $+\frac{a^2}{2r}$ (Erdkrümmung) und $-k \frac{a^2}{2r}$ (Strahlenbrechung).

Zur zahlenmäßigen Ermittlung des Refraktionskoeffizienten kann man den aus (520) folgenden Ausdruck

$$k = 1 - \frac{2r}{a^2} (h - a \operatorname{tg} \alpha_1) \quad \dots \dots \dots (521)$$

benützen, wenn h schon aus einem geometrischen Nivellement genau bekannt ist. Auch aus gleichzeitig beobachteten gegenseitigen Zenitabständen z_1, z_2 oder den ihnen entsprechenden Höhenwinkeln α_1, α_2 kann er mittels der aus (504) nach einer kleinen Umformung entstehenden Formel

$$k = 1 + \frac{r}{a} \cdot \frac{\alpha_1^{\circ} + \alpha_2^{\circ}}{\rho^{\circ}} \quad \dots \dots \dots (522)$$

berechnet werden. Ein für das Festland¹⁾ in Deutschland gültiger, aus vielen Bestimmungen gefundener Mittelwert ist

$$k = + 0,13 \pm 0,03 \dots \dots \dots (523)$$

Die damit berechneten, mit dem Quadrat der Entfernung fortschreitenden Höhenverbesserungen auf 1 km sind $+ 7,8$ cm wegen der Erdkrümmung, $- 1,0$ cm wegen der Strahlenbrechung und $+ 6,8$ cm wegen des Zusammenwirkens beider Erscheinungen.

Der Refraktionskoeffizient ist abhängig von der Wellenlänge λ der Lichtstrahlen, der Zusammensetzung der Luft, ihrem Staubgehalt, dem Luftdruck B , der Temperatur t , vom Druckgefälle π und besonders vom Temperaturgefälle τ (Temperaturabnahme auf 1 m Höhenzunahme). Er ist für $t = 0^{\circ}$ und $B = 760$ mm überschlagsweise

$$k = 0,23 - 6,8 \tau \dots \dots \dots (524)$$

Die große Unsicherheit des Refraktionskoeffizienten, auch seine lästige Änderung mit der Tageszeit — er ist am kleinsten (rund 0,10) wenn die Sonne im Zenit, am größten (etwa 0,19), wenn sie im Horizont steht²⁾

¹⁾ Über Wasserflächen gelten andere Verhältnisse. Siehe *Helmert*, Trigonometrische Höhenmessung und Refraktionskoeffizienten in der Nähe des Meeresspiegels; Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften 1908, S. 492—511.

²⁾ Dadurch erklärt sich auch der periodische Verlauf der trigonometrisch bestimmten Höhen, welche sich um die Mittagszeit zu groß, morgens und abends zu klein ergeben. Nach den Untersuchungen von *Kohlmüller*, *Frz.*, Zur Refraktion im Nivellement, München 1912 (Sonderabdruck aus der Z.V.H B.V. 1912, S. 151—189, 242—280, 299—317) liegen die Verhältnisse bei der auch als topographische Refraktion bezeichneten Refraktion im Nivellement gerade umgekehrt. Sie ist morgens und abends am kleinsten, mittags am größten und im übrigen sehr viel größer als die terrestrische Refraktion. Durch die Formel (524) läßt sie sich nicht genügend darstellen.

— bewirken, daß mit der zunehmenden Leistungsfähigkeit des geometrischen Nivellements die Bedeutung der ursprünglich bevorzugten trigonometrischen Höhenmessung sehr stark zurückgegangen ist. Die Genauigkeit der trigonometrischen Höhenmessung, welche weniger von der Leistungsfähigkeit des Instrumentes und der Sorgfalt des Beobachters als von der Kürze der Sichten abhängt, läßt sich durch Beobachtungen aus der Mitte der Station steigern, besonders wenn bei einer geeigneten Wahl des Instrumentenstandes beide Ziellinien möglichst weit über dem Boden und über gleichartigem Gelände sich befinden¹⁾.

31. Tachymetrisches Nivellement.

Beim tachymetrischen Nivellement mittels Kreistachymeters — d. i. ein mit Höhenkreis und Distanzmessereinrichtung versehener Theodolit

— erfolgt die Bestimmung des Höhenunterschiedes h (Abb. 237) und der horizontalen Entfernung D eines durch die mittlere Ziellinie bezeichneten Lattenpunktes M in bezug auf den Instrumentenmittelpunkt J aus dem zwischen den Entfernungsfäden liegenden Abschnitt $UO = l$ der lotrechten Latte und dem Höhenwinkel α der mittleren Ziellinie. Die Horizontale Entfernung D , deren Kenntnis zur Darstellung der Neigungsverhältnisse nicht entbehrt werden kann, ist, wenn c die Additionskonstante des Fernrohrs bedeutet, die Summe

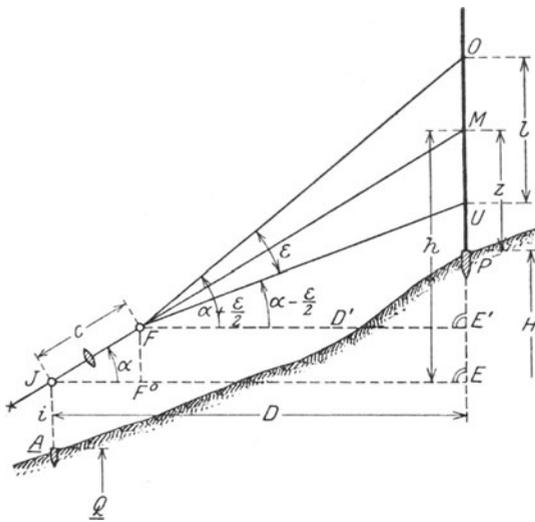


Abb. 237. Bestimmung der Horizontalentfernung und des Höhenunterschiedes mit dem Kreistachymeter.

$$D = JF^0 + F^0E = c \cdot \cos \alpha + D' \dots (525)$$

Mit den in Abb. 237 eingetragenen Bezeichnungen sind die Abstände der durch die äußeren Ziellinien bezeichneten Lattenstellen O und U vom Horizont durch den anallatischen Punkt F die Ausdrücke

$$E'O = D' \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2} \right), \quad E'U = D' \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2} \right), \dots (526)$$

aus deren Differenz

$$E'O - E'U = l = D' \left\{ \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2} \right) - \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2} \right) \right\} \dots (527)$$

unter Rücksicht auf (525) der strenge Ausdruck für die Horizontalentfernung

¹⁾ Die irdische Strahlenbrechung wurde wahrscheinlich zuerst von *Picard* 1669 beobachtet (siehe *Picard, Mesure De La Terre*, S. 57/58, *Mémoires De L'Academie Royale Des Sciences*, Tome Quatrième).

$$D = c \cos \alpha + \frac{l}{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$= c \cdot \cos \alpha + \frac{l}{\sin \varepsilon} \cos\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \dots \dots \dots (528)$$

hervorgeht. Der sogenannte distanzmessende Winkel ε ist mit der Multiplikationskonstanten C durch die einfache strenge Beziehung

$$2 \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{C} \dots \dots \dots (529)$$

verknüpft. Nach einer kleinen Umformung von (528) ergibt sich unter Vernachlässigung des Gliedes

$$v_D = + 2 c \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha - \frac{l}{4 C} \sin^2 \alpha \dots \dots \dots (530)$$

die übliche bequeme Näherungsformel

$$D = (c + C \cdot l) \cos^2 \alpha = K \cdot \cos^2 \alpha, \dots \dots \dots (531)$$

deren leicht zu berechnender Koeffizient $K = c + C \cdot l$ als Stammzahl bezeichnet wird.

Der Höhenunterschied ist streng

$$h = D \operatorname{tg} \alpha = c \sin \alpha + \frac{l \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \dots \dots \dots (532)$$

Unterdrückt man das kleine Glied

$$+ 2 c \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha - \frac{l}{4 C} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha, \dots \dots \dots (533)$$

so erscheint die für den Höhenunterschied gebräuchliche Näherungsformel

$$h = \frac{1}{2} (c + C \cdot l) \sin 2 \alpha = \frac{1}{2} K \sin 2 \alpha. \dots \dots \dots (534)$$

Die Ermittlung von D und h erfolgt am einfachsten durch Entnahme aus sog. Tachymetertafeln¹⁾. Sie sind auch mit dem Rechenschieber — es gibt besondere Tachymeterschieber — leicht zu bestimmen. Dabei wird zweckmäßig nicht unmittelbar D , sondern der bei den meist schwachen Neigungen geringe Unterschied

$$\Delta = K - D = 2 K \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \dots \dots \dots (535)$$

¹⁾ Von den Zahlenwerken dieser Art sind besonders zu nennen a) *Jordan*, Hilfstafeln für Tachymetrie (alte Teilung), 1. Aufl., Stuttgart 1880, 6. Aufl., Stuttgart 1917; b) *Reger*, Tachymetertafeln als Ergänzungen der *Jordanschen* Hilfstafeln für Tachymetrie (alte Teilung), Stuttgart 1910; c) *Jadanza*, Tachymetertafeln für zentesimale Winkelteilung. Deutsche Ausgabe besorgt von *Hammer*, Stuttgart 1909; d) *Hammer*, Tafeln zur Berechnung der Höhenunterschiede aus horizontaler Entfernung und Höhenwinkel, alte Teilung, Stuttgart 1895; e) Tafeln zur Berechnung von Höhenunterschieden aus Horizontaldistanz und Höhenwinkel in Zentesimal- und Sexagesimalteilung. Nebst Hilfstafeln und Anleitungen. Bearbeitet von *H. Wild*. Herausgegeben vom Eidgen. Departement des Innern, Bern, 1905.

Von graphischen Werken dieser Art seien genannt: a) *Werkmeister, P.*, Graphische Tachymetertafel für alte Kreisteilung, Stuttgart 1908 und b) *Wenner, F.*, Graphische Tafeln für Tachymetrie (Zentesimalteilung), Darmstadt 1905.

die Reduktion der Stammzahl auf den Horizont, berechnet, um den die Stammzahl zu verkleinern ist, damit sie in D übergeht.

Sind h_r und h_v (Abb. 234) die im Rückblick und Vorblick einer Station gegen den Instrumentenmittelpunkt gefundenen Höhenunterschiede, zu denen die Ablesungen z_r , z_v an der mittleren Ziellinie gehören, so ergibt sich die Meereshöhe H_v des Lattenfußpunktes W_v im Vorblick aus derjenigen H_r des Lattenfußpunktes W_r im Rückblick als der Ausdruck

$$H_v = H_r - h_r + h_v + (z_r - z_v) \dots \dots \dots (536)$$

oder

$$H_v = H_r - h_r + h_v, \dots \dots \dots (537)$$

wenn, wie fast immer, $z_r = z_v$ gemacht wird.

Zur Berechnung der Meereshöhe

$$Q = H_r + z_r - h_r - i \dots \dots \dots (538)$$

des Instrumentenaufstellungspunktes A ist auch die Instrumentenhöhe i zu messen.

Bestimmt man durch tachymetrisches Nivellement mittels wiederholter Instrumentenaufstellungen aus der bekannten Meereshöhe H_1 eines Ausgangspunktes P_1 die Höhe H_2 eines entfernten Punktes P_2 , so ist diese

$$H_2 = H_1 - [h_r] + [h_v] + [z_r] - [z_v] \dots \dots \dots (539)$$

bzw.

$$H_2 = H_1 - [h_r] + [h_v], \dots \dots \dots (540)$$

wenn auf jedem Stand $z_r = z_v$ ist.

Vor Beginn der eigentlichen Messungen ist auf die früher beschriebene Weise (S. 115ff.) die sorgfältige Bestimmung der Distanzmesserkonstanten, sowie die Berichtigung des Instrumentes vorzunehmen. Vor allem ist der Zeigerfehler des Höhenkreises zu bestimmen und womöglich zu beseitigen, und zwar nicht nur bei Instrumenten, die nur einen Höhenbogen besitzen, sondern auch bei denen, die mit einem Vollkreis ausgestattet sind, da zur Zeitersparnis doch nur in einer Fernrohrlage beobachtet wird. Der Zielachsenfehler, Kippachsenfehler und ein Aufstellungsfehler in der Richtung der Kippachse üben nur einen geringen Einfluß aus; dagegen ist durch scharfes Einspielenlassen einer in der Zielrichtung liegenden Libelle¹⁾ dafür zu sorgen, daß bei der scharfen Einstellung des Mittelfadens auf einen meist durch eine Zielscheibe bezeichneten Lattenpunkt die Zeigerlinie des Höhenkreises stets dieselbe Lage gegen den Horizont besitzt. Der Lattenabschnitt müßte streng genommen aus den zur Einstellung des Mittelfadens gehörigen Zufallsablesungen an den äußeren Fäden berechnet werden. Teils zur Vermeidung der damit verbundenen Rechnung und möglichen Irrtümer, teils zur Herabminderung des Ablesefehlers kippt man jedoch meist das Fernrohr erst so weit, bis der Oberfaden auf dem nächsten dm - oder m -Strich liegt und liest hierauf nahezu unmittelbar den Lattenabschnitt selbst ab²⁾. Bei den ab und zu auftretenden horizontalen Teilstrecken wird

¹⁾ Trägt eine mittels besonderer Feinstellschraube drehbare Höhenalhidade eine besondere Versicherungslibelle, so kann diese auch erst unmittelbar nach der scharfen Einstellung des Mittelfadens, aber noch vor der Höhenkreisablesung zum Einspielen gebracht werden.

²⁾ Hammer untersucht in dem Aufsatz „Über die Näherungen bei Anwendung des Fadendistanzmessers in der Tachymetrie“, Z.V.W. 1905, S. 721—735 (Zusatz Z.V.W. 1911, S. 905—911) den aus der Höhenkreisablesung bei veränderter Fernrohrstellung entspringenden Fehler in D unter der Annahme, daß der Mittelfaden stets auf 1,3 m, der Oberfaden stets auf 0,5 m eingestellt wird. Desgleichen untersucht er dort die beiden

man zur Vereinfachung der Beobachtung und Rechnung bei horizontaler Lage der mittleren Ziellinie ablesen und die betreffenden Höhenunterschiede auf geometrischem Wege ermitteln.

Da die Zielweiten hier beträchtlich größer sind als beim geometrischen Nivellement und größere Neigungen den Arbeitsfortschritt nicht hemmen, so kommt man mit dem besprochenen Verfahren sehr schnell vorwärts. Allerdings ist auch die Genauigkeit des tachymetrischen Nivellements eine geringere. Wenn aber unter Vermeidung allzu großer Zielweiten jeweils möglichst aus der Mitte der Station beobachtet wird und ein gutes, sorgfältig berichtigtes Instrument Verwendung findet, so kann man den mittleren Kilometerfehler des Höhenunterschiedes unter 1 *dm* halten.

Der analytische Ausdruck für den bestimmten Fehler eines einzelnen Höhenunterschiedes *h* ergibt sich aus (534) zu

$$dh = h \left\{ \frac{dC}{C} + \frac{dl}{l} \right\} + D(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) d\alpha, \quad \dots \dots (541)$$

wenn der äußerst geringe Fehler *dc* der Additionskonstanten von vornherein vernachlässigt wird. Wegen der Fehler *dC* und *dl* der Multiplikationskonstanten und des Lattenabschnittes sei auf die früheren Ausführungen (S. 116f.) verwiesen. Ihr Einfluß ist, solange man den Quotienten $\frac{dl}{l}$

in erster Näherung als konstant betrachtet, zum Höhenunterschied proportional und bleibt für kleine *h* bis zu etwa 5 m praktisch bedeutungslos. Der von der Horizontalentfernung *D* und der Neigung der Sicht abhängige Einfluß eines Fehlers *dα* im Höhenwinkel verschwindet für $\alpha = 45^\circ$ und erreicht, da Zielungen, für welche $\operatorname{tg}^2 \alpha > 2$ ist, praktisch doch nicht in Frage kommen, für horizontale Sichten seinen größten Wert mit *D* · *dα*.

Der Einfluß von *dC*, *dl* und *dα* auf die Horizontalentfernungen, welcher nicht so sehr für das tachymetrische Nivellement als für die bei der tachymetrischen Geländeaufnahme auftretenden Tachymeterzüge von Bedeutung ist, wird nach (531):

$$dD = D \left\{ \frac{dC}{C} + \frac{dl}{l} \right\} - 2h \cdot d\alpha. \quad \dots (542)$$

Der aus *dC* und *dl* in *D* entspringende Fehler ist also zu *D* proportional, während der Einfluß des Höhenwinkelfehlers *dα* mit dem doppelten Höhenunterschiede wächst. Er ist für *dα* = 1' und *h* = 50 m erst — 2,9 cm, bleibt also selbst für Präzisionsmessungen ziemlich bedeutungslos.

Ein Aufstellungsfehler *v* (Abb. 238) der Latte fälscht sowohl die Horizontalentfernung wie auch den Höhenunterschied. Die wegen einer solchen Lattenschiefe anzubringenden Verbesserungen sind, wie hier ohne

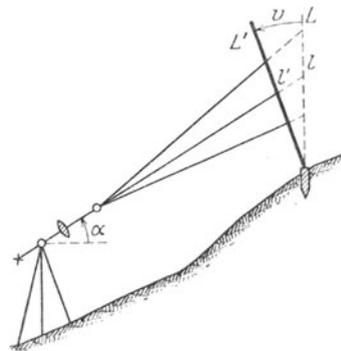


Abb. 238. Einfluß eines Aufstellungsfehlers der Latte.

den Fehler der Näherungsformel (531) darstellenden Glieder des Ausdrucks (530). Der Verlauf aller drei Fehler, von denen nur der erste gefährlich werden kann, ist durch Schaubilder erläutert. Die entsprechenden Höhenfehler entstehen durch Multiplikation der genannten Beträge mit $\operatorname{tg} \alpha$. Siehe hierzu auch *Hohener* in Z.V.H.B.V. 1911, S. 271 bis 282 und *Werkmeister* in Z.V.W. 1906, S. 513—521.

Beweis mitgeteilt werden soll, in den Hauptgliedern $+h \cdot v$ in D und $+h \cdot v \cdot \text{tg } \alpha$ in h , wenn der Oberteil der Latte gegen das Instrument zu geneigt ist. Für $v = +1^\circ$, $D = 100$ m und $h = 50$ m z. B. ergeben sich die Beträge $+0,87$ m und $+0,44$ m, woraus ohne weiteres folgt, daß besonders bei größeren Höhenunterschieden die Entfernungslatte sorgfältig lotrecht zu stellen ist.

32. Staffelmessung.

Staffelmessungen kann man mit horizontal gerichteten Latten oder Schnüren ausführen, an deren Enden an lotrecht gestellten Maßstäben abgelesen wird. Es handelt sich dabei also auch um eine geometrische Höhenmessung, deren Genauigkeit, wenigstens bei Verwendung von Latten jedoch weit hinter der des geometrischen Nivellements zurückbleibt.

Der Vorgang der Staffelmessung ist aus Abb. 239a, die Art der Aufschreibung aus 239b ohne viel Worte ersichtlich. Dabei handelt es sich

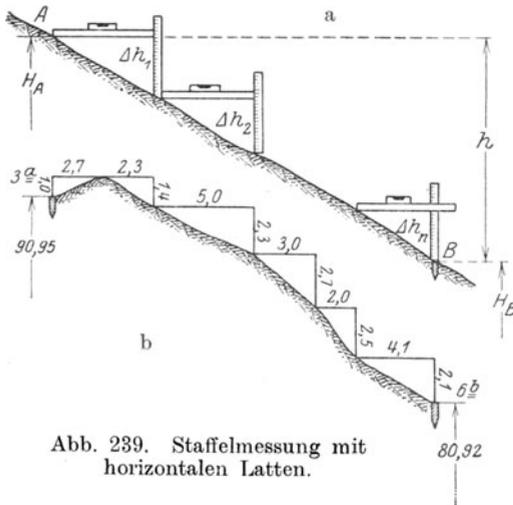


Abb. 239. Staffelmessung mit horizontalen Latten.

seltener darum, nur den Höhenunterschied h zweier Punkte A, B zu bestimmen, als vielmehr um eine Aufnahme des Profils, wobei der meist schon aus einer anderen genauen Höhenmessung bekannte Höhenunterschied h als Messungsprobe dient. Bei vereinzelt Messungen verwendet man gewöhnliche, durch Setzlibellen horizontal gerichtete 5 m-Latten, bei sehr steilem Gelände auch nur 3 m-Latten, während zum Messen der einzelnen Höhenunterschiede Δh eine mit Dezimeterteilung versehene Meßstange meist genügt. Für gewöhnlich findet die Staffelung nur am Ende der horizontalen

Latte statt; nur bei ausgesprochenen Brechungspunkten des Profils und anderen besonders wichtigen Punkten wird auch zwischenhinein oder mit kürzeren Längen abgelotet. Für größere Arbeiten dieser Art verwendet man wohl auch ein besonderes Staffelzeug, dessen horizontale, mit einer eingelassenen Libelle versehene Latte an dem auf den Boden zu setzenden Ende einen Handgriff trägt, während sie sich zur Gewichtsverminderung nach dem in der Luft schwebenden Ende zu verjüngt.

An Fehlern kommen hauptsächlich in Betracht: 1. die Abweichung aus der Horizontalen, 2. der Ablesefehler an der lotrechten Latte, 3. der Ablotungsfehler und 4. der Anlegefehler der nächsten Latte. Schätzt man den hieraus entspringenden mittleren Fehler einer der n Staffelungen zu ± 4 cm, so ist der in Metern ausgedrückte mittlere Fehler des Höhenunterschiedes h

$$m_n = \pm 0,04 \sqrt{n} \dots \dots \dots (543)$$

Der entsprechende mittlere km-Fehler in h beträgt gegen 60 cm bzw. gegen 75 cm, wenn stets mit 5 m-Latten bzw. 3 m-Latten gearbeitet wird. Eine solche Staffelmessung mit Latten kann also nur geringeren Genauigkeitsansprüchen genügen.

Sehr viel genauere Ergebnisse werden bei der in Abb. 240 veranschaulichten Art der geometrischen Höhenmessung mit Hilfe der Hängelibelle erzielt, welche besonders in niedrigen, nur zum Durchkriechen bestimmten Gängen, wo eine Instrumentenaufstellung nicht möglich ist, das gewöhnliche geometrische Nivellement ersetzen muß. Die Ziellinie ist hier jeweils durch eine meist kurze, straff gespannte, durch eine Hängelibelle gut horizontal gerichtete Schnur ersetzt, deren Enden für die die Nivellierlatten ersetzenden kurzen, lotrechtgestellten Maßstäbe als Ableser dienen. Die Höhenberechnung erfolgt mit Hilfe der Rückblicke r und Vorblicke v in der vom geometrischen Nivellement her bekannten Weise.

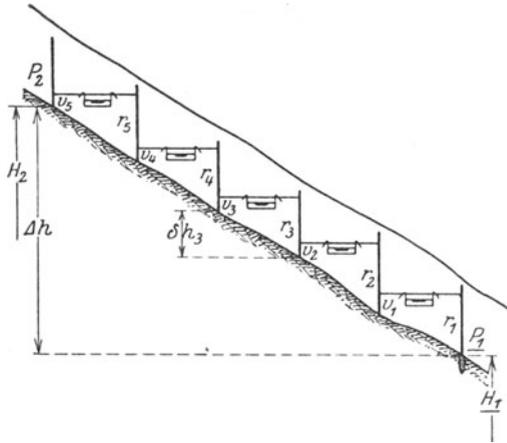


Abb. 240. Staffelmessung mit horizontalen Schnüren.

33. Barometrische Höhenmessung.

Wesentlich ungenauer als die bisher besprochenen Verfahren ist die barometrische Höhenmessung, deren Ergebnisse selbst in günstigen Fällen um einige Meter unsicher bleiben¹⁾. Es beruht auf dem Umstande, daß unter sonst gleichen Umständen der Luftdruck mit zunehmender Höhe abnimmt, so daß das direkt den Luftdruck angegebende Barometer indirekt auch als Höhenmesser dienen kann. Die Beziehung, welche den Zusammenhang zwischen der Höhe und dem Luftdruck angibt, nennt man die Barometerformel. Sie läßt sich unter der Voraussetzung trockener und in verschiedenen Höhen gleich warmer Luft leicht aufstellen. Bedeutet in Abb. 241 der schraffierte Teil ein Luftprisma vom Querschnitt 1 und der unendlich kleinen Höhe dH , zu dem eine Temperatur t , ein Druck p und ein spezifisches Gewicht s gehören, während der Temperatur t_0 die Werte p_0 , s_0 entsprechen, so ist nach dem Gesetz von *Mariotte-Gay-Lussac*

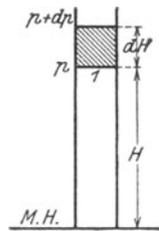


Abb. 241. Barometrische Höhenmessung. Höhenänderung und Druckänderung.

$$s = s_0 \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} \cdot \dots \dots \dots (544)$$

α bezeichnet hierin den kubischen Ausdehnungskoeffizienten der Luft. Die

¹⁾ Trotzdem behält die barometrische Höhenmessung ihre große Bedeutung für allgemeine Erkundungszwecke des Ingenieurs bei, besonders in unbekanntem Ländern. Einen neueren Beleg dafür bietet die Arbeit von *Walther*: Lagen- und Höhenmessungen bei technischen Erkundungsreisen des Bauingenieurs in kartographisch unbekanntem Ländern. Karlsruhe 1919.

Für barometrische Aufnahmen in Ostafrika sei auf die auch in der vorgenannten Arbeit besprochenen sehr wichtigen Untersuchungen von *Kohlschütter* (Ergebnisse der ostafrikanischen Pendelexpedition, Abh. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-phys. Kl. N. F. B. 5, Nr. 1, I. Bd., Berlin 1907) hingewiesen.

der Höhenänderung dH entsprechende Druckänderung auf die Flächeneinheit ist das negative Gewicht des kleinen Luftprismas, also

$$dp = -1 \cdot dH \cdot s = -s_0 \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{dH}{1 + \alpha \cdot t} \dots \dots \dots (545)$$

Die Integration der hieraus folgenden Form

$$\frac{dp}{p} = -\frac{s_0}{p_0} \cdot \frac{dH}{1 + \alpha \cdot t} \dots \dots \dots (546)$$

ergibt den Ausdruck

$$\lg p = -\frac{s_0}{p_0} \cdot \frac{H}{1 + \alpha \cdot t} + C, \dots \dots \dots (547)$$

welcher p und p_0 im absoluten Maßsystem enthält. Sind B_1 und B_2 die zu den Meereshöhen H_1 und H_2 eines tief und eines hoch gelegenen Punktes gehörigen Luftdruckwerte in mm, für welche p die besonderen Werte p_1, p_2 annimmt, so bestehen offenbar die Beziehungen

$$p_1 = k \cdot B_1, \quad p_2 = k \cdot B_2, \dots \dots \dots (548)$$

wo k eine Konstante bedeutet. Wendet man (547) unter Beachtung von (548) auf beide Messungen an, so entstehen die Ausdrücke

$$\lg k B_1 = -\frac{s_0}{p_0} \cdot \frac{H_1}{1 + \alpha \cdot t} + C, \quad \lg k B_2 = -\frac{s_0}{p_0} \cdot \frac{H_2}{1 + \alpha \cdot t} + C, \dots (549)$$

deren Subtraktion auf die Gleichung

$$\lg k B_1 - \lg k \cdot B_2 = \lg \frac{k B_1}{k \cdot B_2} = \lg \frac{B_1}{B_2} = \frac{s_0}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} (H_2 - H_1) \dots (550)$$

führt. Versteht man ferner unter

$$h = H_2 - H_1 \dots \dots \dots (551)$$

den Höhenunterschied beider Punkte, so folgt aus (550)

$$h = \frac{p_0}{s_0} (1 + \alpha t) \lg \frac{B_1}{B_2} \text{ bzw. } h = \frac{1}{M} \cdot \frac{p_0}{s_0} (1 + \alpha t) \log \frac{B_1}{B_2}, \dots (552)$$

wenn $M = 0,4343$ den Modul des *Briggs*schen Logarithmensystems bedeutet.

Mit den Ausgangswerten

$$t_0 = 0^0, \quad p_0 = 76 \cdot 13,596 \text{ g auf 1 qcm, } s_0 = 0,001293, \quad \alpha = 0,003665, \dots (553)$$

welche nach *Jordan*¹⁾ für Deutschland gelten, erhält man aus (552) den in Metern ausgedrückten Höhenunterschied

$$h = 18464 (\log B_1 - \log B_2) (1 + 0,003665 t), \dots \dots (554)$$

die Lufttemperatur t (Mittelwert der Thermometerangaben in beiden Punkten) in Celsiusgraden gemessen²⁾.

¹⁾ *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, II. Bd., 6. Aufl., Stuttgart 1904, S. 598.

²⁾ Gleichung (554) ist eine sog. unvollständige Barometerformel. Die etwas genaueren vollständigen Barometerformeln, deren wichtigste von *Laplace* (1805), *Biot* (1811), *Bauernfeind* (1872), *Rühlmann* (1870) und *Jordan* (1876) abgeleitet worden sind, werden wegen ihrer großen Umständlichkeit nur in Ausnahmefällen verwendet.

Sehr bequeme Hilfstafeln zur Höhenberechnung mittels der obenstehenden Barometerformel hat *Jordan* berechnet, nämlich Barometrische Höhentafeln für Luftdrücke zwischen 630 und 765 mm und für Lufttemperaturen zwischen 0° und +35°. Die ersten 6 Temperaturgrade neu hinzugefügt von *Hammer*. 3. Aufl., Stuttgart 1917; ferner Barometrische Höhentafeln für Tiefland und für große Höhen, Hannover 1896.

Die praktische Durchführung und Berechnung der barometrischen Höhenmessung ist eine etwas verschiedene, je nachdem die Luftdruckänderung aus der Höhenänderung einer Quecksilbersäule, aus der Formänderung einer elastischen Dose oder aus dem Unterschied der Siedetemperaturen des Wassers ermittelt wird.

a) Höhenmessung mit dem Quecksilberbarometer.

Die Quecksilberbarometer, welche den Luftdruck durch die Höhe einer ihm das Gleichgewicht haltenden Quecksilbersäule messen, sind entweder Gefäßbarometer, Heberbarometer oder Gefäßheberbarometer, deren wesentliche Kennzeichen aus den schematischen Darstellungen Abb. 242 a, b, c ersichtlich sind. Beim Gefäßbarometer taucht der untere Teil einer geraden, mit Quecksilber gefüllten Barometerröhre *R* in ein

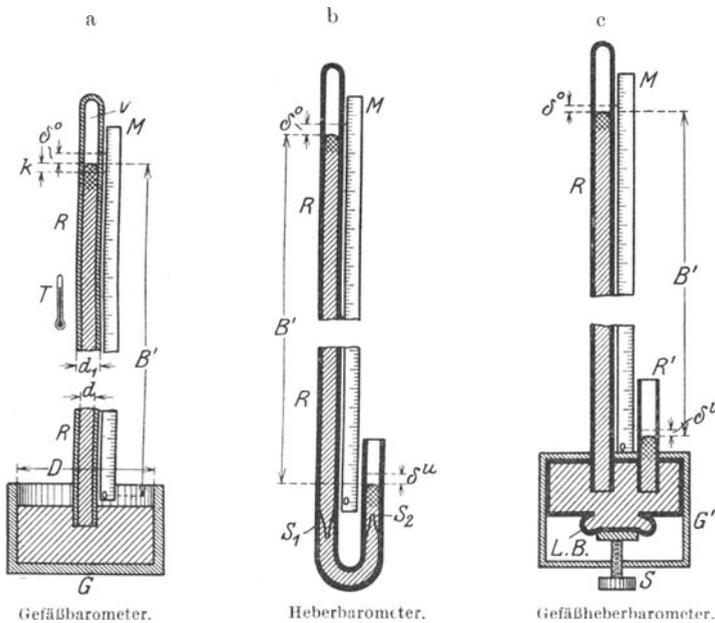


Abb. 242. Quecksilberbarometer.

offenes, weites, zylindrisches, mit Quecksilber gefülltes Gefäß. Ein daneben stehender fester oder beweglicher Maßstab *M* ermöglicht die Ablesung des Barometerstandes *B'*, zu dem noch die Temperaturverbesserung *v(t)*, die Schwereverbesserung *v(g)*, die Gefäßverbesserung *v(G)* und die Kapillarverbesserung δ hinzuzufügen sind, damit er in den von den wesentlichsten Fehlern befreiten Barometerstand *B* übergeht.

Wegen der Ausdehnung des Quecksilbers und des Maßstabes ist eine Temperaturverbesserung

$$v(t) = -(\beta - \gamma) B' \cdot t^i \dots \dots \dots (555)$$

notwendig. Hierin ist *tⁱ* die an einem am Instrumente befindlichen Thermometer *T* abgelesene Instrumententemperatur in Celsiusgraden, $\beta = 180 \cdot 10^{-6}$ der kubische Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers und γ (für Glas $10 \cdot 10^{-6}$, für Messing, Silber, Neusilber $19 \cdot 10^{-6}$) der lineare des Maßstabes.

Eine Schwereverbesserung

$$v(g) = -0,00265 B' \cos 2 \varphi - 2 \frac{B' H}{r}, \dots \dots \dots (556)$$

in welcher $r = 6370$ km den Erdhalbmesser, φ die geographische Breite und H die Meereshöhe des Beobachtungsortes bedeutet, wird notwendig, weil die den Druck der Quecksilbersäule bestimmende, also auch den Barometerstand wesentlich beeinflussende Schwerkraft mit der Meereshöhe und der geographischen Breite des Beobachtungsortes veränderlich ist.

Ist der Maßstab M fest mit der Barometerröhre verbunden, so ist an B' auch eine Gefäßverbesserung

$$v(G) = (B' - B^0) \frac{d^2}{D^2 - d_1^2} \dots \dots \dots (557)$$

anzubringen, da der Teilungsnullpunkt nur für einen ganz bestimmten Barometerstand B^0 in den unteren Quecksilberspiegel fallen wird. In (557) bedeuten d und D die lichten Weiten der Barometerröhre und des Gefäßes, während d_1 der äußere Durchmesser der Barometerröhre ist.

Diese Gefäßverbesserung fällt fort, wenn vor jeder Ablesung durch Verstellen eines verschiebbaren Maßstabes dessen Nullpunkt jeweils in den unteren Quecksilberspiegel gebracht werden kann.

Wegen der von der lichten Röhrenweite d und von der zu messenden Kuppenhöhe k abhängigen Kapillardepression des Quecksilbers ist noch eine Kapillarverbesserung

$$\delta = f(d, k) \dots \dots \dots (558)$$

erforderlich, welche aus Tabelle 30 entnommen werden kann¹⁾. Sie ist für das Gefäßbarometer stets positiv und trägt ausschließlich dem zu tiefen Stand der oberen Quecksilberkuppe in der Barometerröhre Rechnung. Der auf den unteren Quecksilberspiegel treffende entsprechende Betrag ist wegen der großen lichten Weite des Gefäßes verschwindend klein und kann daher vernachlässigt werden.

Tabelle 30.

Kuppenhöhe in mm	Lichte Röhrenweite in mm						Kuppenhöhe in mm	Lichte Röhrenweite in mm					
	4	6	8	10	12	14		4	6	8	10	12	14
0,00	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,90	2,2	0,98	0,50	0,28	0,16	0,09
0,10	0,3	0,12	0,06	0,03	0,02	0,01	1,00	..	1,07	0,55	0,30	0,18	0,10
0,20	0,6	0,24	0,12	0,06	0,04	0,02	1,10	..	1,14	0,59	0,33	0,19	0,11
0,30	0,9	0,36	0,18	0,10	0,06	0,03	1,20	..	1,21	0,63	0,35	0,20	0,12
0,40	1,2	0,48	0,24	0,13	0,07	0,04	1,30	..	1,27	0,67	0,38	0,22	0,13
0,50	1,4	0,59	0,29	0,16	0,09	0,05	1,40	..	1,32	0,71	0,40	0,23	0,14
0,60	1,6	0,70	0,35	0,19	0,11	0,06	1,50	..	1,37	0,74	0,42	0,24	0,14
0,70	1,9	0,80	0,40	0,22	0,13	0,07	1,60	..	1,41	0,77	0,44	0,25	0,15
0,80	2,0	0,90	0,45	0,25	0,14	0,08	1,70	..	1,44	0,79	0,45	0,26	0,16
0,90	2,2	0,98	0,50	0,28	0,16	0,09	1,80	..	1,46	0,81	0,47	0,27	0,16

Durch die Berücksichtigung aller bisher genannten Verbesserungen erhält man einen Wert

$$(B) = B' + v(t) + v(g) + v(G) + \delta, \dots \dots \dots (559)$$

welcher von dem richtigen Barometerstand B , den ein sorgfältig behandeltes

¹⁾ Die Zahlen der Tabelle 30 stammen aus *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, II. Bd., 6. Aufl., Stuttgart 1904, Seite [17] des Anhangs.

unter ständiger Kontrolle gehaltenes Normalbarometer angibt, noch um die auch als absolute Korrektion bezeichnete Standverbesserung

$$v(s) = B - (B) \dots \dots \dots (560)$$

abweicht. Diese Differenz hat verschiedene Ursachen und rührt hauptsächlich von einer die Säulenhöhe vergrößernden Verunreinigung des Quecksilbers sowie von der entgegengesetzt wirkenden Anwesenheit geringer Mengen an Luft, Wasser- und Quecksilberdampf im Vakuum her. Die Standkorrektion ist daher streng genommen eine mit der Zeit und der Temperatur veränderliche Größe. Sie kann jedoch hauptsächlich mit Rücksicht darauf, daß die in kleinen Zeitspannen auftretenden Änderungen des Barometerstandes im Vergleich zur Höhe des Vakuums und erst recht gegen diejenige der Quecksilbersäule nur kleine Größen sind, für kürzere Zeit als unveränderlich behandelt werden. Doch soll man sie bei jeder günstigen Gelegenheit nachprüfen.

Soll eine zweite Beobachtung B_2' mit einer ersten B_1' verglichen werden, so kann dies nur für den gleichen Luftzustand geschehen. Es ist also B_2' , dessen übrige Verbesserungen denen von B_1' vollkommen entsprechen, noch mit der Verbesserung auf den gleichen Luftzustand

$$v(a) = B_{s1} - B_{s2} \dots \dots \dots (561)$$

zu versehen, wo B_{s1} und B_{s2} die zu gleicher Zeit mit B_1' und B_2' an einem fest aufgestellten Barometer, dem Standbarometer, beobachteten Barometerstände sind.

Demnach sind die verbesserten, für die Höhenberechnung nach (554) verwendbaren Barometerstände die Ausdrücke¹⁾

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_1' + v(t)_1 + v(g)_1 + v(G)_1 + \delta_1 + v(s), \\ B_2 &= B_2' + v(t)_2 + v(g)_2 + v(G)_2 + \delta_2 + v(s) + v(a). \end{aligned} \right\} \dots \dots (562)$$

Das besprochene Gefäßbarometer eignet sich wegen seiner Schwerfälligkeit und wegen der Transportschwierigkeiten nicht für Aufnahmen im freien Felde; dagegen leistet es als Standbarometer gute Dienste.

Viel geeigneter ist für Geländeaufnahmen das Heberbarometer (Abb. 242b), dessen Röhre am unteren Ende U-förmig umgebogen ist. Hier ist der fehlerhafte Barometerstand B' die Differenz der zu den beiden Kuppen im langen geschlossenen und im kurzen offenen Schenkel gehörigen Maßstabablesungen. Eine Gefäßverbesserung gibt es beim Heberbarometer nicht, dagegen bleiben $v(t)$, $v(g)$, δ , $v(s)$ und $v(a)$ erhalten. Nur wird hier die Kapillardepression

$$\delta = \delta^o - \delta'' \dots \dots \dots (563)$$

als die Differenz der zum oberen und unteren Kuppenstand gehörigen, ebenfalls aus Tabelle 30 zu entnehmenden Teilbeträge δ^o und δ'' gefunden.

Auch das in Abb. 242c skizzierte Gefäßheberbarometer ist für Reisezwecke brauchbar. Hier stecken die beiden Röhren R und R' in einem geschlossenen, mit Quecksilber gefüllten Gefäß G' , welches einen durch die Schraube S verstellbaren Lederboden $L.B.$ besitzt. Durch ein Anheben

¹⁾ Hat man viel mit dem gleichen Instrument zu arbeiten, so empfiehlt es sich, die besprochenen Verbesserungen in Tabellenform oder graphisch darzustellen. Streng genommen ist auch noch eine sog. Isobarenkorrektion notwendig, da in den Projektionen der Beobachtungspunkte auf das Meeresniveau im allgemeinen ein verschiedener Luftdruck herrscht. Diese bei größeren Entfernungen zu berücksichtigende Verbesserung kann aus einer Isobarenkurve entnommen werden.

dieses Bodens wird die Reibung zwischen dem Quecksilber und den Röhren überwunden¹⁾, so daß in den gleichweiten Röhren R , R' die beiden Kuppen gleiche Gestalt annehmen, also auch gleiche Depression besitzen. Somit verschwindet hier, da $\delta^o = \delta^u$ ist, auch die Kapillarverbesserung δ , und es bleiben lediglich die Verbesserungen $v(t)$, $v(g)$, $v(s)$ und $v(a)$ übrig.

Nach den skizzierten Grundformen werden die Quecksilberbarometer in der verschiedensten Weise ausgeführt. Vielen Formen gemeinsam ist die sog. *Buntensche Spitze* (S_1 in Abb. 243b), welche einen sehr wirksamen Schutz gegen das gefährliche Eindringen von Luft ins Vakuum gewährt, da eine etwa aufsteigende Luft nahezu restlos in den durch diese Vorrichtung und die anschließende Barometerröhre gebildeten Zwickel geleitet wird. Bei Reisebarometern ist auch für einen geeigneten Verschuß des beim Beobachten offenen Schenkels der Röhre zu sorgen.

b) Höhenmessung mit dem Federbarometer.

Die Wirksamkeit der für die Reise außerordentlich handlichen Federbarometer oder Aneroide beruht auf der Messung der den Luftdruckschwankungen folgenden Formänderungen einer nahezu luftleeren, elastischen Dose.

Bei dem hauptsächlich von *Naudet* und *Bohne* vervollkommenen Federbarometer von *Vidi*²⁾, dessen wesentliche Bestandteile Abb. 243 zeigt, erfolgt die Messung der erwähnten geringen Formänderung durch ein stark vergrößerndes Hebelsystem in folgender Weise. Auf der mit dem Boden

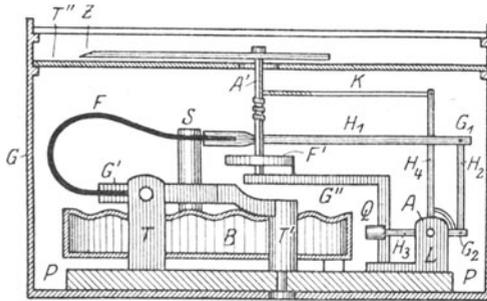


Abb. 243. Federbarometer.

eines Gefäßes G verbundenen kräftigen Grundplatte P befindet sich eine luftdicht verschlossene, zur Herabminderung der Temperatureinflüsse möglichst luftleere Dose B , deren stark gewellte, sehr elastische Decke eine aufgelötete Säule S trägt. Damit der auch im Gehäuse G herrschende äußere Luftdruck die Büchse nicht eindrückt, wird die wenig widerstandsfähige Dosedecke durch eine das obere Ende von S fest

umschließende, sehr kräftige Blattfeder F , deren Spannkraft etwa dem Luftdruck entspricht, nach oben gezogen. Das eine Ende dieser Feder ist durch das Gestell G' und die zugehörigen Träger T , T' , ohne B zu berühren, mit der Grundplatte P fest verbunden. Zur Vergrößerung der einer Luftdruckänderung entsprechenden Hebung oder Senkung der Dosedecke, deren Bewegung durch S auf das freie Ende der Blattfeder übertragen wird, dient das Hebelsystem H_1 bis H_4 mit den Gelenken G_1 , G_2 . Die Teile H_3 , H_4 sind fest verbunden und bilden einen Rechtwinkelhebel, dessen Achse A in dem mit der Grundplatte P fest verbundenen Bock L gelagert ist. Q ist ein an der Verlängerung von H_3 sitzendes Gewicht, das einen toten Gang verhindern soll. Durch die beschriebene Vorrichtung wird eine vertikale Bewegung der Dosedecke in eine beträchtlich größere horizontale Bewegung des oberen Endes von H_4

¹⁾ Beim Gefäß- und beim Heberbarometer wird sie durch ein sanftes Klopfen überwunden.

²⁾ Erfunden 1847.

übergeführt. Diese aber wird mit Hilfe eines Kettchens K , dessen eines Ende um eine vertikale Achse A' geschlungen ist, in eine Drehbewegung dieser im Gestell G'' gelagerten Achse verwandelt. Mit dem oberen Ende von A' ist ein damit sich drehender Zeiger Z verbunden, welcher an einer geeigneten, auf dem Gehäusedeckel befindlichen Teilung T'' den jeweiligen Luftdruck angibt. Wie sich leicht verfolgen läßt, kann die Kette K nur bei einer Zunahme des Luftdrucks einen Zug ausüben. Damit die Achse A' auch bei einer Druckabnahme eine — entgegengesetzte — Drehbewegung ausführt, ist A' mit dem einen, das Gestell G'' mit dem anderen Ende einer dem Zug von K entgegenwirkenden Spiralfeder F' verbunden.

Die Formänderung der Barometerdose läßt sich, wie beschrieben, durch ein stark vergrößerndes Hebelsystem messen. Man kann sie aber auch ohne wesentliche vorherige Vergrößerung mit Hilfe einer feinen Mikrometerschraube ermitteln, wie es bei den Federbarometern von *Goldschmid* geschieht¹⁾ oder ebenfalls ohne wesentliche Hebelvergrößerung mit Hilfe eines stark vergrößernden Mikroskops bestimmen²⁾.

Zu den Angaben B_1' und B_2' der Federbarometer ist weder eine Gefäßverbesserung, noch eine Schwereverbesserung, noch eine Kapillarverbesserung hinzuzufügen. Dagegen bleiben die hier andersgeartete Temperaturverbesserung $v(t)$, die Standverbesserung $v(s)$ und die Reduktion auf gleichen Luftzustand $v(a)$ bestehen, wozu noch eine Teilungsverbesserung $v(T)$ tritt.

Die für die Höhenberechnung geeigneten verbesserten Federbarometerstände sind daher

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_1' + v(t)_1 + v(T)_1 + v(s), \\ B_2 &= B_2' + v(t)_2 + v(T)_2 + v(s) + v(a). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (564)$$

Eine Temperaturverbesserung $v(t)$ wird hier hauptsächlich deshalb notwendig, weil die in der Dose B noch befindliche geringe Menge Luft einen mit der Temperatur t^i wechselnden Druck auf die elastische Decke ausübt und somit die Ablesungen fälscht. Die in guter Annäherung zu t^i proportionalen Werte $v(t)$ kann man durch Vergleich der bei gleichem Barometerstand, aber möglichst verschiedenen Temperaturen (Winterbeobachtungen im Zimmer und im Freien) gefundenen Federbarometerangaben untereinander oder mit einem Standbarometer ermitteln. Sie werden für jedes Instrument in eine Tabelle gebracht und auf diesem oder in dessen Futteral befestigt. Bei Instrumenten mit Temperaturkompensationen wird $v(t)$ dadurch zum Verschwinden gebracht, daß H_1 (Abb. 243) aus zwei übereinanderliegenden Lamellen mit verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten hergestellt wird.

Eine Teilungsverbesserung $v(T)$ wird notwendig, weil — unter sonst gleichen Verhältnissen — die Unterschiede der Barometerablesungen nicht unmittelbar die Luftdruckunterschiede in Millimetern angeben, sondern nur — in guter Annäherung — zu diesen proportional sind. Man ermittelt sie aus Beobachtungen bei möglichst gleichen Temperaturen, aber unter möglichst verschiedenem Druck durch Vergleich mit den verbesserten Angaben eines Quecksilberbarometers und reiht sie in einer Tabelle an die schon vorher bestimmten Temperaturverbesserungen an.

Die auch hier nur für kürzere Zeit als unveränderlich zu betrachtende Standverbesserung $v(s)$ wird wie beim Quecksilberbarometer durch den

¹⁾ Siehe *Koppe*, Die Aneroid-Barometer von *Goldschmid* und das barometrische Höhenmessen, Zürich 1877.

²⁾ Ein Instrument dieser Art ist das Federbarometer von *Reitz-Deutschbein*; siehe hierzu *Z. V. W.* 1873, S. 363 bis 373 und 1887, S. 20 bis 25.

Vergleich des Wertes $(B) = B' + v(t) + v(T)$ mit der gleichzeitig beobachteten und verbesserten Angabe B eines guten Standbarometers als die Differenz $B - (B)$ gefunden. Sie rührt hauptsächlich von einer Verschiebung des Teilungsnulldpunktes her.

c) Höhenbestimmung mit dem Siedethermometer.

Die Höhenermittlung mit dem Siedethermometer erfolgt aus den beim Sieden des reinen Wassers beobachteten Dampftemperaturen. Die Verwendung dieses Instrumentes, welches als Höhenmesser mit den Federbarometern in erfolgreichen Wettbewerb getreten ist, gründet sich auf den Umstand, daß die Siedetemperatur t_s des Wassers eine Funktion der stets dem Luftdruck B gleichen Dampfspannung d_s ist; also gilt auch umgekehrt

$$B = d_s = f(t_s) \dots \dots \dots (565)$$

Da man aus einer der zahlreichen Dampfspannungstabellen¹⁾ zu jeder beobachteten Siedetemperatur d_s den zugehörigen Luftdruck B im Beobachtungsort entnehmen kann, so ist damit die Aufgabe auf die rein barometrische Höhenmessung zurückgeführt.

Das Instrument, welches in Abb. 244 schematisch dargestellt ist, besteht aus einem feinen Thermometer, welches zweckmäßig statt der Gradteilung gleich eine den Luftdruck in Millimetern angegebende

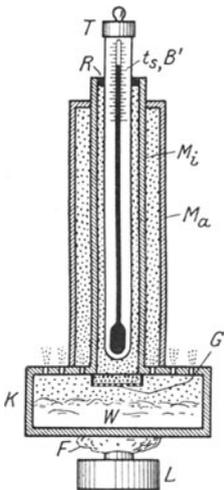


Abb. 244.

Teilung besitzt. Es steckt in dem mit einem Kochgefäß K verbundenen inneren Mantel M_i , welcher oben durch einen Gummiring R abgeschlossen wird, in dem das Thermometer T verschoben werden kann. Beim Gebrauch wird mittels der 3 bis 4 cm hohen Flamme F einer Spirituslampe L das ins Gefäß K gefüllte destillierte Wasser oder Regenwasser W zum Kochen gebracht, worauf der Wasserdampf, soweit er nicht durch Löcher in der Gefäßdecke in die Luft entweicht, in den zum Schutz gegen Abkühlung noch mit einem Außenmantel M_a umgebenen Innenmantel M_i strömt und dort das Thermometer umspült. Ein Gitter G schützt das Thermometergefäß vor spritzendem, kochendem Wasser. Nach einiger Zeit wird das Thermometer nicht mehr steigen und sodann die gesuchte Siedetemperatur t_s bzw. gleich den Luftdruck B' des Beobachtungsortes angeben. Damit nicht etwa die Temperatur eines überhitzten Dampfes gemessen wird, ist wohl darauf zu achten, daß die Dampfabzugslöcher nicht verstopft sind. Eine im Laufe der Zeit

eintretende geringe Verschiebung des Teilungsnulldpunktes, welche durch Vergleich mit einem Normalbarometer zu ermitteln ist, spielt ganz die Rolle einer Standverbesserung $v(s)$. Der verbesserte Barometerstand ist dann die Summe

$$B = B' + v(s) \dots \dots \dots (566)$$

¹⁾ Solche Tabellen und andere zur Erleichterung der Berechnung barometrischer Höhenmessungen sind in manchen geodätischen Werken, besonders in *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Bd., Anhang [13] bis [27] enthalten.

d) Barometrische Höhenstufen.

Die Beziehung zwischen einer kleinen Höhenänderung dh und der zugehörigen Druckänderung dB erhält man durch Differentiation der Barometerformel (554) zu

$$dh = -18464 \cdot M \cdot \frac{dB}{B} (1 + 0,003665 t), \dots (567)$$

wenn dort B_2 und h als veränderlich betrachtet werden.

Für $dB = -1$ mm folgt hieraus die barometrische Höhenstufe

$$dh_0 = \frac{8019}{B} (1 + 0,003665 t), \dots (568)$$

das ist derjenige Betrag, um den man steigen muß, damit der Luftdruck um 1 mm abnimmt. Ein aus (568) folgendes Verzeichnis der von der Lufttemperatur und dem Luftdruck abhängigen dh_0 in Metern gibt die Tabelle 31¹⁾. Hat man nun in zwei Punkten P_1, P_2 die verbesserten

Tabelle 31.

Temperatur t_m^l	Mittlerer Barometerstand B_m in mm																
	760	750	740	730	720	710	700	690	680	670	660	650	640	630	620	610	600
-4 ^o	10,40	10,54	10,68	10,82	10,97	11,13	11,29	11,45	11,62	11,79	11,97	12,16	12,35	12,54	12,74	12,95	13,17
-2	47	61	76	90	11,06	21	37	54	71	88	12,06	25	44	64	84	13,05	27
0	55	69	84	98	14	29	46	62	79	97	15	34	53	73	93	15	36
+2	63	77	92	11,07	22	38	54	71	88	12,06	24	43	62	82	13,03	24	46
4	71	85	99	15	30	46	62	79	97	14	33	52	71	92	12	34	56
6	78	93	11,07	23	38	54	71	88	12,05	23	42	61	81	13,01	22	44	66
8	86	11,01	15	31	46	63	79	96	14	32	51	70	90	10	31	54	76
10	94	08	23	39	55	71	88	12,05	23	41	60	79	99	20	41	63	85
12	11,01	16	31	47	63	79	96	13	31	50	68	88	13,08	29	50	73	95
14	09	24	39	55	71	87	12,04	22	40	58	77	97	17	38	60	83	14,05
16	17	32	47	63	79	96	13	30	48	67	86	13,06	27	47	69	93	15
18	25	40	55	71	87	12,04	21	39	57	76	95	15	36	57	79	14,02	25
20	32	48	63	79	95	12	30	47	66	85	13,04	24	45	66	88	12	35
22	40	55	71	87	12,04	20	38	56	74	93	13	33	54	75	98	22	44
24	48	63	79	95	12	29	46	64	83	13,02	22	42	63	85	14,07	31	54
26	56	71	87	12,03	20	37	55	73	92	11	31	51	72	94	17	41	64
28	63	79	95	11	28	45	63	81	13,00	20	40	60	82	14,03	26	51	74
30	71	87	12,03	19	36	54	72	90	09	29	49	69	91	13	36	61	84
32	79	95	11	27	44	62	80	99	18	37	57	78	14,00	22	45	70	93
34	87	12,02	19	35	53	70	88	13,07	26	46	66	87	09	31	55	80	15,03

Barometerstände B_1, B_2 und die Lufttemperaturen t_1^l, t_2^l gefunden, so kann man mit einer mittleren Lufttemperatur $t_m^l = \frac{1}{2}(t_1^l + t_2^l)$ und dem mittleren Barometerstand $B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ als Eingängen aus vorstehender Tabelle das zugehörige dh_0 entnehmen. Damit und aus der Luftdruckabnahme

$$\Delta B = B_1 - B_2$$

von P_1 bis P_2 findet man die entsprechende Höhenzunahme

$$\Delta h = \Delta B \cdot dh_0 \dots (569)$$

¹⁾ Nach *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Bd., 6. A., Stuttgart 1904, Anhang [26].

Tabelle 32.

21. VII. 1913. Instrument *Bohne* 411 (412).

Standort	Barometer- ablesung <i>B'</i>	Temperatur t^i (Instr.) t^l (Luft)	Zeit	Stand- baromet. (Brocken- baromet.)	Verbesserungen			Ver- besserter Barometer- stand <i>B</i>
					$v(a)$	$v(s)$	$v(t_i)$	
	mm	Grad C		mm	mm		mm	
1. Kaltenbachtal- brücke, 1,1 m über dem Bolzen. Bolzenhöhe 287,8 m	735,5 (737,3)	+ 18,0 (15,0) 10,0	8 ⁴⁵	661,7	0,0 + 0,6 - 0,21 - 1,2 <u>- 0,81</u>	0,0 - 1,9 0,00 <u>+ 0,1</u> <u>- 1,8</u>	734,69 (735,50)	
2. Molkenhaus, Gaststube, 0,8 m über dem Boden	716,2 (717,4)	15,0 (14,0) 8,0	10 ¹⁵	661,9	- 0,2 + 0,6 - 0,15 - 1,8 <u>- 1,55</u>	- 0,2 - 1,9 0,00 <u>0,0</u> <u>- 2,10</u>	714,65 (715,30)	
3. Dreiherrnbrücke, Landesgrenzstein, Oberfläche	717,5 (718,6)	14,0 (14,5) 7,7	10 ⁵⁰	661,9	- 0,2 + 0,6 - 0,13 - 1,8 <u>- 1,53</u>	- 0,2 - 1,9 0,00 <u>0,0</u> <u>- 2,10</u>	715,97 (716,50)	
4. Scharfenstein, Gaststube, 0,8 m über dem Boden	707,2 (708,2)	11,8 (12,2) 7,3	11 ⁴⁰	662,0	- 0,3 + 0,6 - 0,09 - 1,9 <u>- 1,69</u>	- 0,3 - 1,9 0,00 <u>+ 0,1</u> <u>- 2,10</u>	705,51 (706,10)	
5. Wegkreuzung Ilsenburg- Hermannsklippe, 1,0 m über dem Boden	696,3 (696,8)	12,3 (13,0) 7,1	12 ³⁰	662,0	- 0,3 + 0,6 - 0,10 - 2,0 <u>- 1,80</u>	- 0,3 - 1,9 0,00 <u>+ 0,3</u> <u>- 1,90</u>	694,50 (694,90)	
6. Bismarckklippe, Felsbank	684,7 (684,6)	11,5 (12,5) 5,9	12 ⁵⁵	662,0	- 0,3 + 0,6 - 0,08 - 2,4 <u>- 2,18</u>	- 0,3 - 1,9 0,00 <u>+ 0,5</u> <u>- 1,70</u>	682,52 (682,90)	
7. Bahnübergang, 1,3 m über dem Boden	668,4 (668,5)	10,0 (11,0) 5,1	1 ²⁵	662,0	- 0,3 + 0,6 - 0,05 - 2,4 <u>- 2,15</u>	- 0,3 - 1,9 0,00 <u>+ 0,7</u> <u>- 1,50</u>	666,25 (667,00)	
8. Brocken, Pfeiler I, Ober- fläche, Höhe 1142,3 m	663,9 (664,0)	9,0 (10,0) 4,9	1 ³⁵	662,1	- 0,4 + 0,6 - 0,04 - 2,4 <u>- 2,24</u>	- 0,4 - 1,9 0,00 <u>+ 0,8</u> <u>- 1,50</u>	661,66 (662,50)	

Tabelle 32.

Standverbesserung $v(s) = +0,6 \text{ mm}$ ($-1,9 \text{ mm}$).

Mittlerer Barometerstand B_m	Mittl. Lufttemperatur t_m^l	Barometer-Höhenstufe dh_0	Differenz der verb. Barometerstände ΔB	Vorläufiger Höhenunterschied h'	Verbesserung des Höhenunterschieds dh	Ausgeglichenen Höhenunterschied h	Ausgegliche Meereshöhe H	
mm	Grad C	m	mm	m	m	m	m	
							<u>288,9</u>	
725 (725)	+ 9,0	11,43 (11,43)	- 20,04 (- 20,20)	+ 229,1 (+ 230,9)	- 2,0 (- 1,8)	+ 227,1 (+ 229,1)	516,0 (518,0)	
715 (716)	7,8	11,54 (11,52)	+ 1,32 (+ 1,20)	- 15,2 (- 13,8)	- 0,1 (- 0,1)	- 15,3 (- 13,9)	500,7 (504,1)	
711 (711)	7,5	11,58 (11,58)	- 10,46 (- 10,40)	+ 121,1 (+ 120,4)	- 1,1 (- 0,9)	+ 120,0 (+ 119,5)	620,7 (623,6)	
700 (700)	7,2	11,76 (11,76)	- 11,01 (- 11,20)	+ 129,5 (+ 131,7)	- 1,1 (- 1,0)	+ 128,4 (+ 130,7)	749,1 (754,3)	
689 (689)	6,5	11,92 (11,92)	- 11,98 (- 12,00)	+ 142,8 (+ 143,0)	- 1,3 (- 1,1)	+ 141,5 (+ 141,9)	890,6 (896,2)	
674 (675)	5,5	12,14 (12,12)	- 16,27 (- 15,90)	+ 197,5 (+ 192,7)	- 1,8 (- 1,5)	+ 195,7 (+ 191,2)	1086,3 (1087,4)	
664 (665)	5,0	12,30 (12,28)	- 4,59 (- 4,50)	+ 56,5 (+ 55,3)	- 0,5 (- 0,4)	+ 56,0 (+ 54,9)	<u>1142,3</u>	
$[h] = H_8 - H_1 = + 853,4 \text{ m}$			$[h'] =$	+ 861,3 (+ 860,2)	$[dh] =$	- 7,9 (- 6,8)	$[h] =$	853,4 (853,4)

Dieses auf *Babinet* zurückgehende Verfahren der Höhenbestimmung mit Hilfe von barometrischen Höhenstufen ist sehr einfach und liefert, solange die Δh nicht allzu groß werden, ganz annehmbare Ergebnisse, besonders, wenn bei sog. Höheneinschaltungen der Endpunkt einer Kette von derartigen Höhenmessungen wieder an einen Punkt von bekannter Höhenlage angeschlossen wird, so daß ein auftretender Anschlußwiderspruch verteilt werden kann.

Ein nach diesem Verfahren aus Beobachtungen an zwei Federbarometern berechnetes Zahlenbeispiel enthält Tabelle 32, deren den bisher gebrauchten Bezeichnungen entsprechende Einträge wohl ohne besondere Erläuterung verständlich sind.

e) Genauigkeit der barometrischen Höhenmessung.

Soweit es sich um absolute Luftdruckbestimmungen und um große Höhenunterschiede handelt, liefern die Quecksilberbarometer die besten Ergebnisse. *Bauernfeind*¹⁾ fand z. B. aus 100 korrespondierenden Messungen am Großen Miesing 1857 für eine Messung der Höhenunterschiede 540 m, 528 m und 1068 m mit dem Quecksilberbarometer die durchschnittlichen Fehler $\pm 3,0$ m, $\pm 3,3$ m und $\pm 4,6$ m. *Samel*²⁾ bestimmte neuerdings aus Zimmerbeobachtungen den mittleren Fehler einer Luftdruckangabe zu $\pm 2,7$ cmm, $\pm 4,3$ cmm bzw. 6,6 cmm für ein Normalbarometer *Wild-Fueß*, ein Reisebarometer von *Fortin* bzw. für ein *Darmersches* Reisebarometer. Die Federbarometer liefern, wenn sie nur zum Einschalten von Punkten und für nicht zu große Höhenunterschiede (etwa nicht über 300 m) benützt werden, mindestens ebenso gute Ergebnisse wie Quecksilberbarometer. *Schmidt*³⁾ fand z. B. den mittleren Fehler einer Luftdruckbeobachtung mit *Naudet*-Aneroiden zu ± 11 cmm und denjenigen im Höhenunterschied (Δh bis zu 300 m) zu rund 1 m. *Hammer*⁴⁾ gibt als mittleren Höhenfehler einer Punkteinschaltung durch ein *Bohne*-Aneroid (Δh bis zu 70 m) den sehr geringen Betrag von $\pm 0,65$ m an. *A. Schreiber*⁵⁾ hat Genauigkeitsversuche mit einem *Bohneschen* Aneroid auf Eisenbahnfahrten angestellt, wobei die Horizontalentfernung der äußersten Punkte 36,1 km, ihr Höhenunterschied 470 m betrug. Er fand den mittleren unregelmäßigen Fehler einer Luftdruckbeobachtung zu $\pm 4,1$ cmm und denjenigen eines Höhenunterschiedes zu $\pm 0,90$ m. Gefährlich ist beim Federbarometer immer die bei der Überwindung großer Höhenunterschiede auftretende elastische Nachwirkung, die auch im Mittel der Angaben mehrerer gleichzeitig benützter Instrumente erhalten bleibt. Recht gute Ergebnisse werden neuerdings auch mit dem Siedethermometer erzielt. Einen ausführlichen Bericht über derartige Messungen gibt das S. 217, Anmerk. 1) genannte Werk von *Kohlschütter*, nach welchem der Luftdruck durch einen vollen Satz von vier Thermometern bis auf 1 dmm genau bestimmt wird. Nach einer neueren Untersuchung von *Samel*⁶⁾ beträgt der mittlere Fehler einer Luftdruckbestimmung im Zimmer etwa 1 dmm.

Gemeinsam für alle Arten der barometrischen Höhenmessung sei bemerkt, daß die Kenntnis des mittleren Fehlers einer Luftdruckbestimmung

¹⁾ *Bauernfeind*, Elemente der Vermessungskunde, II. Bd., 7. A., Stuttgart 1890, S. 436.

²⁾ *Samel*, Verwendbarkeit von Siedethermometern und Quecksilberbarometern zur Höhenmessung, Z. V. W. 1911, S. 549 bis 560.

³⁾ *Schmidt, M.*, Über den praktischen Wert *Naudetscher* Aneroide, München 1876.

⁴⁾ *Hammer*, Genauigkeitsversuche mit einigen *Bohneschen* Aneroiden, Z. V. W. 1890, S. 79 bis 87.

⁵⁾ Z. V. W. 1907, S. 449 bis 470 und 481 bis 493.

⁶⁾ Siehe Anm. 2 dieser Seite.

noch keinen zuverlässigen Schluß auf den mittleren Höhenfehler gestattet, da die Höhe auch noch von anderen Faktoren, insbesondere von der Lufttemperatur abhängt. Temperaturfehler aber sind immer zu befürchten, da nicht zu erwarten steht, daß die in der Nähe des Erdbodens beobachtete, schon durch die Wärmestrahlung des Bodens gefälschte Thermometerangabe die Mitteltemperatur der über dem Instrument befindlichen Luftsäule bezeichnet. Damit in Einklang steht auch der in bezug auf die Tageszeit und Jahreszeit periodische Verlauf der barometrisch bestimmten Höhen, welche sich bei normaler Witterung um die Mittagszeit (nach *Bauernfeind* am Miesing im Sommer von 10^h bis 4^h) zu groß, morgens und abends aber zu klein ergeben¹⁾.

34. Flächennivellement.

Zur Bestimmung der Geländeoberfläche sind alle für dieselbe charakteristischen Punkte nach Lage — d. h. in der Horizontalprojektion — und Höhe festzulegen. Insbesondere kommen dafür in Betracht die höchsten und tiefsten Punkte von Kuppen und Mulden, Sattelpunkte sowie die Brechungspunkte von Rückenlinien, Tallinien, von Verschneidungen und von Profilen. Die zu einer solchen Flächenbestimmung insgesamt notwendigen als Flächennivellement bezeichneten Arbeiten können entweder nach Lage und Höhe getrennt oder aus einem Guß erfolgen. Ersteres trifft für das geometrische Flächennivellement, im wesentlichen auch für die halbrigonometrische Höhenmessung zu, während bei der Flächenaufnahme durch Längen- und Querprofile, insbesondere aber bei der tachymetrischen und photogrammetrischen Geländeaufnahme sofort die Gesamtunterlagen für die räumliche Punktbestimmung ermittelt werden.

a) Das geometrische Flächennivellement.

Beim geometrischen Flächennivellement, welches bei geringen Höhenunterschieden ein sehr schnelles und doch genaues Arbeiten gestattet, werden entweder Schichtenlinien von runder Meereshöhe ins Gelände übertragen und nachträglich durch eine Horizontalaufnahme im Grundriß bestimmt oder es erfolgt zur nachträglichen zeichnerischen Ermittlung der Schichtenlinien eine Höhenbestimmung von zerstreuten Geländepunkten, deren horizontale Lage entweder schon bekannt ist oder durch eine besondere nachträgliche Vermessung erst noch zu bestimmen ist. Als Instrument dient in jedem Falle zweckmäßig ein Dreifußnivellierinstrument, auf dessen scharf lotrecht gerichteter Vertikalachse Ziellinie und Libellenachse genau senkrecht stehen müssen, wenn nicht bei jeder Drehung des Fernrohrs ein lästiger größerer Libellenausschlag eintreten soll. Eine Übertragung der Schichtenlinien in die Natur kann bei sehr flachem Gelände, insbesondere für kulturtechnische Zwecke in Frage kommen. In einem solchen Falle wird man

¹⁾ Aus der reichen Literatur über barometrische Höhenmessung sei zu dem bisher Gebrachten noch genannt: *Hartl*, Praktische Anleitung zum Höhenmessen mit Quecksilberbarometer und mit Aneroiden, 2. A., Wien 1884; *Koppe*, Die Verfahren der Ausführung und der Berechnung barometrischer Höhengmessungen, Z. V. W. 1888, S. 561 bis 584; *Hammer*, Beiträge zur Praxis der Höhengmessungen, Z. V. W. 1892, S. 353 bis 368; *Hammer*, Hilfsmittel zur Berechnung barometrisch gemessener Höhenunterschiede mit Höhenstufen, Z. J. K. 1896, S. 161 bis 167; *Hebe*, Über die Prüfung von Aneroiden, Z. J. K. 1900, S. 253 bis 266; *Liznar*, Die barometrische Höhenmessung, Leipzig und Wien 1904; *v. Neumayer*, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, 3. A., Hannover 1906, Bd. I, Abschnitt von *P. Vogel*, Aufnahme des Reiseweges und des Geländes, S. 74 bis 164; desgl. die Ausführungen von *Hann*, S. 613 bis 619; ferner Anhang S. 812 bis 823.

zunächst von einem Höhenfestpunkt aus bis zur Aufnahmestelle zur Gewinnung des Instrumentenhorizontes ein geometrisches Längennivellement durchführen und hierauf in geeigneten Abständen durch Einwinken einer — langen, auch für größere Höhenunterschiede ausreichenden — Nivellierlatte diejenigen Geländepunkte bezeichnen, für welche bei horizontaler Ziellinie im Fernrohr an der Latte die Höhenzunahme von der abzusteckenden Schichtenlinie bis zum bekannten Instrumentenhorizont abgelesen wird. Die so gefundenen Höhenlinien, in deren Verlauf etwaige Unstetigkeiten auf die Möglichkeit von Absteckungsfehlern hinweisen, werden hierauf im Grundriß je nach der geforderten Genauigkeit durch eine Koordinatenaufnahme oder durch ein anderes Verfahren der Horizontalaufnahme festgelegt.

Viel häufiger erfolgt die Höhenaufnahme von zerstreuten Geländepunkten mit nachträglicher Lageeinmessung. Dieses Verfahren ist besonders vorteilhaft, wenn bereits Horizontalpläne mit genügend viel Einzelheiten (Flurpläne von Bayern und Württemberg!) vorhanden sind. Dann beschränkt man sich im wesentlichen darauf, eine genügende Anzahl von geeignet liegenden Punkten diese Pläne auch der Höhe nach zu bestimmen. Einzelne für die Oberflächengestaltung besonders charakteristische, im Plan jedoch nicht enthaltene Punkte werden zur Ergänzung ebenfalls aufgenommen und dabei durch den mit dem Lattenträger gehenden Planführer — etwa durch Abschreiten ihrer auf die nächste Grundstücksgrenze und ihren Anfangspunkt bezogenen Koordinaten — auch gleich im Horizontalplan festgelegt. Bei der Aufnahme werden die Punkte sowohl im Plan wie auch in der Aufschreibung am Instrument fortlaufend numeriert. Während die Instrumentenhorizonte aus einem durchlaufenden, an beiden Endpunkten an Höhenfestpunkte angeschlossenen Nivellement bis auf mm zu ermitteln sind, genügt es, die Meereshöhen der aufzunehmenden Seitenpunkte je nachdem auf cm oder nur auf dm anzugeben. Die Art der Aufschreibung zeigt Tabelle 33, deren römische Ziffern die Instrumentenstandorte bedeuten, neben denen die zugehörigen Instrumentenhorizonte stehen.

Tabelle 33.

Punkt Nr.	Meereshöhen	
	Hauptpunkte	Seitenpunkte
F. P. 10	531,810	
I ⊗	512,291	
1	1,45	510,84
2	1,03	511,26
3	1,10	511,19
II ⊗	510,802	
16	1,60	509,20
17	1,48	509,32
F. P. 10	531,818	
	$w = -8$	

b) Die halbtrigonometrische Höhenmessung.

Eine sehr vorteilhafte Art der Flächenaufnahme ist die halbtrigonometrische Höhenmessung, wenn es sich um ein Gelände mit größeren Höhenunterschieden handelt, für das schon Horizontalpläne mit einer genügenden Zahl von in der Natur leicht erkennbaren Punkten vorliegen. Bei diesem Verfahren wird man zunächst eine genügende Anzahl von auch im

Plan enthaltenen oder in denselben einzutragenden Punkten durch geometrisches oder ein sorgfältig durchgeführtes tachymetrisches Nivellement der Höhe nach bestimmen. Manchmal ist es auch möglich, den Standpunkt nach Lage und Höhe durch Rückwärtseinschneiden nach einigen räumlich festliegenden Punkten des Höhennetzes zu bestimmen. Die Einzelaufnahme erfolgt nun von denjenigen dieser Punkte aus, welche einen guten Geländeüberblick gewähren, in folgender Weise. Nach der Berichtigung des mit einem Höhenbogen versehenen Instrumentes wird die gemessene Instrumentenhöhe i an einer Latte durch eine Zielscheibe bezeichnet, deren Stellung während der Beobachtungsdauer eines Standes unverändert bleibt. Der Planführer wählt die aufzunehmenden Punkte aus, numeriert sie im Plan, zeichnet Leitkurven und führt kleine Ergänzungsmessungen durch. Vom Instrumente aus aber wird jeweils die Zielscheibe der in den ausgesuchten Punkten aufgestellten Latte eingestellt und der zugehörige Höhenwinkel α am Instrument abgelesen. Ist Q die Meereshöhe des Instrumentenstandortes, D die unter Berücksichtigung des Papiereinganges¹⁾ aus dem Plan zu entnehmende Horizontalentfernung des Geländepunktes, h der Höhenunterschied zwischen Instrumentenhorizont und Zielscheibe und H die gesuchte Höhe des Lattenfußpunktes, so ist offenbar

$$H = Q + h = Q + D \operatorname{tg} \alpha. \quad \dots \dots \dots (570)$$

Ab und zu ist es auch nicht zu vermeiden, daß zur Ergänzung ein im Plan nicht enthaltener Punkt tachymetrisch bestimmt wird.

Die Berechnung der H nach (570) ist höchst einfach, besonders wenn man Tabellen zu Hilfe nimmt. Es ist aber bei weitem vorteilhafter, die Meereshöhe vollständig auf zeichnerisch mechanischem Wege zu

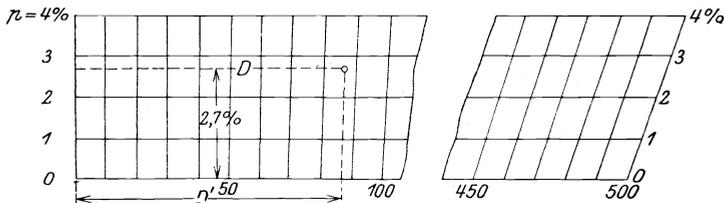


Abb. 245. Diagramm zur Reduktion von Planmaßen infolge des Papiereinganges.

ermitteln. Hat man nach den für die Koordinatenrichtungen ermittelten Extremwerten p_x , p_y des Papiereingangs für die abgegriffene Länge D' den Betrag $p^0/0$ eingeschätzt, so kann man nach Andeutung des Diagramms Abb. 245²⁾ mit p (hier $2,7^0/0$) und der Zirkelöffnung D' als Eingängen leicht die verbesserte Horizontalentfernung D abgreifen und damit aus einem Strahlendiagramm, welches etwa die 10fachen $\operatorname{tg} \alpha$ angibt, sofort den Höhenunterschied h in den Zirkel nehmen. Wird h an einem Strichmaßstab, auf dem Q bezeichnet ist, von diesem Punkte aus angetragen, so liest man am Zirkelende unmittelbar H ab³⁾.

¹⁾ Näheres über den Papiereingang siehe von Gl. (605) ab.

²⁾ Die gleichmäßig geteilten Parallelen 1—1, 2—2, 3—3 des Diagramms sind um 1, 2 bzw. $3^0/0$ länger als 0—0.

³⁾ Weitere Einzelheiten zu diesem in Württemberg mit großem Vorteil angewendeten Verfahren siehe bei Hammer, Beiträge zur Praxis der Höhenaufnahmen, Z.V.W. 1890, S. 641—655 und Zum trigonometrischen Flächennivellement auf Grund eines gedruckten Plans, Z.V.W. 1897, S. 202—207.

c) Flächenaufnahme durch Längen- und Querprofile.

Die Oberfläche eines schmalen, längs einer Achse verlaufenden Geländestreifens kann, wenn es sich um größere Genauigkeit handelt, durch in früher beschriebener Weise (S. 191) mit dem Nivellierinstrument aufgenommene Längen- und Querprofile bestimmt werden, wozu allerdings auch die Lage der einnivellierten Achse noch im Grundriß zu bestimmen ist. Doch haben derartige Profilaufnahmen mit dem Nivellierinstrument weniger den Zweck, eine nachträgliche Darstellung der Geländeoberfläche zu ermöglichen, als vielmehr den, die unmittelbaren rechnerischen Grundlagen für Massenermittlungen zu liefern.

Handelt es sich um die Aufnahme von unübersichtlichen, vielleicht auch steilen Flächen und kann — etwa wegen zu dichten Gebüsches — die Bussolentachymetrie keine Verwendung finden, so kommt die Profilaufnahme durch Staffelmessung zu ihrem Recht. Ein solches Gelände

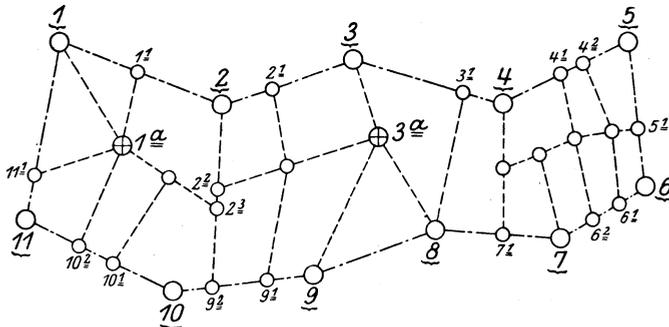


Abb. 246. Profilnetz einer Flächenaufnahme durch Staffelmessung.

(siehe Abb. 246) wird durch einen Polygonzug 1 — 2 — .. — 11 umschlossen, dessen Punkte nach Lage und Höhe — in letzterem Sinn entweder durch geometrisches oder tachymetrisches Nivellement — zu bestimmen sind. In diesen festen Rahmen werden Profilrichtungen 2—9² usw. eingebunden, welche den Rücken- und Tallinien sowie anderen Bruchlinien möglichst folgen und im übrigen in der Richtung des größten Gefälles angelegt werden. Dazu tritt noch eine genügende Zahl von Querverbindungen, z. B. 2²—3². Soweit die verpflochten Einbindpunkte auf den Polygonseiten liegen, werden sie gleich bei der Messung des Polygonzuges ebenfalls nach Lage und Höhe bestimmt. Daran schließt sich nun die Aufnahme aller Profile durch die früher S. 216 beschriebene Staffelmessung mit der Latte. Auch die auf den Einbindelinien liegenden Netzpunkte 2. Ordnung z. B. 2², 2³ werden bei dieser Gelegenheit räumlich durch Staffellung bestimmt.

35. Die tachymetrische Geländeaufnahme.

Unter Tachymetrie oder Schnellmeßkunst versteht man ein weitverbreitetes Verfahren der vereinigten Horizontal- und Höhenaufnahme, bei welchem durch Beobachtung von je nur einem Instrumentenstandorte aus die Unterlagen für die räumliche Festlegung der Geländepunkte gewonnen werden.

a) Grundlagen der Aufnahme.

Die Grundlagen der tachymetrischen Geländeaufnahme bilden ein über die aufzunehmende Fläche gespanntes Dreiecksnetz und ein Polygonnetz, deren Punkte räumlich scharf festzulegen sind. Auch gut bestimmte Tachymeterzüge kann man noch hierher rechnen. Ein genügend dichtes Dreiecksnetz erhält man entweder durch eine Neuaufnahme oder durch eine mittels Einzelpunkteinschaltung oder Ketteneinschaltung weit genug getriebene Verdichtung eines schon bestehenden Netzes. Die bei einer Ketteneinschaltung der Lageberechnung der Dreieckspunkte vorausgehende Winkelgleichung kann nach dem Verfahren der übereinstimmenden Dreiecksberechnung (Seite 132 ff.) erfolgen, während beim Vorliegen überschüssiger Bestimmungsstücke für Einzelpunkteinschaltungen eine Koordinatenausgleichung¹⁾ nicht gut zu umgehen ist, wenn Willkür vermieden werden soll.

Sehr häufig hat man es in unkultivierten Ländern ohne vorgegebenes Dreiecksnetz mit der Aufnahme von schmalen, gegen 1 km breiten, aber sehr langen Streifen zu tun. Hier wird das Dreiecksnetz fast immer eine einfache, über den Streifen hinziehende Kette sein, in welcher nicht nur am Anfang und am Ende, sondern auch an Zwischenstellen die Länge einzelner Dreiecksseiten, wenn es etwa geht, direkt zu messen oder aus einer unmittelbar gemessenen Strecke in einfacher Weise abzuleiten ist. Durch solche Grundlinien, welche mit Rücksicht auf die vielleicht nicht allzu große Genauigkeit der Winkelmessung schon in Abständen von je 20 km einzuschalten wären, wird die richtige Länge der Dreiecksseiten besser gewahrt. Eine Anhäufung von Winkel Fehlern zu allzu großen Richtungsfehlern wird dadurch vermieden, daß etwa für die vorher der Länge nach bestimmten Seiten auch noch die Azimute, d. h. diejenigen Winkel gemessen werden, welche die durch diese Seiten bezeichneten Lotebenen mit der Meridianebene einschließen²⁾. Mit Hilfe von (411) und (412) kann man hieraus die Richtungswinkel dieser Seiten ohne Benutzung der Dreieckswinkel finden und einen in der Kette auftretenden Richtungswiderspruch, auch einen Seitenwiderspruch, wie bei einer Polygonkette verteilen³⁾.

Die Punkte des Polygonnetzes, dessen bis zu 250 m lange Seiten am besten durch direkte Längenmessungen bestimmt werden, soll man so auswählen, daß sie vor allem eine feste Instrumentenaufstellung und eine gute Übersicht ermöglichen, damit bei der nachfolgenden Einzelaufnahme von jedem Polygonpunkte aus möglichst viele Geländepunkte aufgenommen werden können. Soweit möglich, soll auch dem ordentlichen Aufbau des Netzes die nötige Sorgfalt zugewendet werden. Bei langen, sehr schmalen Streifen — etwa bis 400 m Breite — wird man in der Mitte des Streifens liegende Züge zwischen geeignet gelegene Dreieckspunkte einspannen, so daß, von diesen Zwischen-Dreieckspunkten abgesehen, ein einziger das Rückgrat des Streifens bildender Zug den ersten mit dem letzten Dreieckspunkt verbindet. Wird der Streifen breiter, so braucht man zwei derartige, annähernd parallel geführte Züge, deren Abstand von den Streifenrändern etwa die Hälfte ihres gegenseitigen Abstandes betragen soll.

Die Höhenbestimmung der Dreiecks- und Polygonpunkte erfolgt, wenn die auftretenden Höhenunterschiede nur gering und die Punkte

¹⁾ Wird in den Werken über Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate besprochen.

²⁾ Es handelt sich da um eine astronomisch-geodätische Aufgabe.

³⁾ Allerdings braucht man zu dieser Ableitung schon einen Wert für y . Dieser braucht aber nicht genau zu sein, da z. B. für $\varphi = 45^\circ$ ein Fehler von 31 m in y erst einen Fehler von 1" in x hervorruft.

leicht zugänglich sind, mit dem Nivellierinstrument. Treffen diese Voraussetzungen nicht zu, so begnügt man sich damit, die Höhen von nur einigen möglichst diametral liegenden Dreieckspunkten geometrisch zu nivellieren und ermittelt die Höhen der übrigen Dreieckspunkte trigonometrisch durch die Messung gegenseitiger Zenitdistanzen in zwei Fernrohrlagen. Die zusammengehörigen der unter Berücksichtigung von Erdkrümmung und Strahlenbrechung berechneten Höhenunterschiede weichen meist nur einige cm voneinander ab, solange die Dreiecksseiten 2 km nicht übersteigen. Ihre Mittelwerte sind entweder durch eine Ausgleichung oder, wenn das zu viel Arbeit verursacht, mehr oder weniger nach Gutdünken zwischen die vorher einnivellierten Dreieckspunkte einzupassen.

Auch die Höhenbestimmung der Polygonpunkte kann trigonometrisch gelegentlich der Polygonwinkelmessung durch die Beobachtung gegenseitiger Zenitabstände erfolgen. Hier genügt zur Beobachtung (in einer Fernrohrlage) ein Instrument, das nur einen Höhenbogen besitzt, und die Berechnung der Höhenunterschiede kann ohne Rücksicht auf Erdkrümmung und Strahlenbrechung vorgenommen werden. Der am Ende eines Zuges auftretende Höhenwiderspruch ist proportional zu den Quadraten der Seitenlängen auf die ihnen entsprechenden Höhenunterschiede zu verteilen.

Zur Ergänzung des Polygonnetzes dienen Tachymeterzüge, d. h. verpflochte Winkelzüge, deren Horizontalwinkelmessung in der auch sonst üblichen Weise, jedoch nur in einer Fernrohrlage erfolgt, während die Seitenlängen und Höhenunterschiede dieser Züge durch das beim tachymetrischen Nivellment beschriebene Verfahren bestimmt werden. Dabei wird zur Kontrolle und zur Erhöhung der Genauigkeit jede Seite und der zugehörige Höhenunterschied doppelt, einmal bei Blick rückwärts und ein zweites Mal bei Blick vorwärts gemessen. Tachymetrisch zu bestimmende Seiten dürfen ja nicht zu lang genommen werden, selbst bei sehr leistungsfähigen Instrumenten nicht über 150 m. Längere Seiten müßten gegebenenfalls mit Aufstellung des Instrumentes in der Mitte der Seite in zwei Abschnitten gemessen werden. Mit der Messung von Tachymeterzügen pflegt man sogleich auch die Einzelaufnahme zu verbinden.

b) Die Einzelaufnahme mit verschiedenen Tachymetertheodoliten.

Das älteste und in bezug auf Genauigkeit noch heute das leistungsfähigste Instrument dieser Art ist das Kreistachymeter, ein mit Höhenkreis und Fadendistanzmesser ausgestatteter Theodolit. Zur Durchführung der Einzelaufnahme wird das Instrument, nachdem seine Distanzmesserkonstanten scharf bestimmt worden sind, über einem der vorher bestimmten Netzpunkte aufgestellt und berichtigt. Diese Berichtigung hat sich auf die deutliche Sichtbarmachung des Fadekreuzes, die Lotrechtstellung der Alhidadenachse und Berichtigung der Alhidadenlibelle, die Beseitigung des Neigungsfehlers einer etwa vorhandenen Fernrohrlibelle sowie des Zeigerfehlers am Höhenkreis, und, da nur in einer Fernrohrlage beobachtet wird, auch auf die Wegschaffung des Zielachsen- und Kippachsenfehlers zu erstrecken. Zur horizontalen Orientierung des aufzunehmenden Punktsystems wird der rückwärtsliegende Polygonpunkt oder ein anderer gut sichtbarer Punkt von bekannter Lage eingestellt und die zugehörige Ablesung am Horizontalkreis aufgeschrieben. Ist das Instrument ein Repetitionstheodolit, so wird man dafür sorgen, daß bei Einstellung der Orientierungsrichtung am Horizontalkreis ihr von vornherein bekannter Richtungswinkel erscheint. Dann gibt auch jede andere Horizontalkreisablesung sogleich den Richtungswinkel der zugehörigen Zielebene an. Die gemessene Instrumentenhöhe i bezeichnet man

an der Entfernungslatte zweckmäßig durch eine Zielscheibe, auf welche jeweils die mittlere Fernrohrziellinie gerichtet wird, wenn ihr Höhenwinkel abgelesen werden soll. Nach diesen Vorbereitungen geht der Handrißführer mit zwei Lattenträgern ins Gelände, wählt die aufzunehmenden charakteristischen Punkte aus, in denen die Latten aufgestellt werden, skizziert, zeichnet Leitlinien und nimmt kleinere Ergänzungsmessungen vor, während zwei Beobachter, deren einer auch die Aufschreibungen besorgt, am Instrument bleiben. Zur Aufnahme eines Punktes wird zuerst der Lattenabschnitt l abgelesen, wobei der obere Faden zweckmäßig auf 1 m oder doch auf einen dm-Strich eingestellt wird. Hierauf stellt man den Mittelfaden auf die Zielscheibe, so daß die Ablesung am Mittelfaden, die sog. Zielhöhe, $z = i$ wird und ruft dann den Lattenträger sofort ab, damit er sich zum nächsten Punkt begeben kann, während am Instrument noch die Ablesungen am Horizontalkreis und Höhenkreis (Höhenwinkel oder Zenitabstand) ausgeführt werden. Kann einmal z nicht gleich i gemacht werden, etwa weil die Zielscheibe verdeckt ist, so ist das gewählte z natürlich aufzuschreiben. Manchmal wird es aus einem ähnlichen Grunde notwendig, auch an den beiden äußeren Fäden Zufallsablesungen auszuführen, deren Differenz dann den Lattenabschnitt ergibt. Die Art der Aufschreibung für welche die Punktnumerierung eine durchlaufende für alle Standorte ist, zeigt Tabelle 34. Sind in einem Standorte

Tabelle 34.

Ziel- punkt Nr.	Fadenablesungen				Winkel- ablesungen		Stamm- zahl K	Horiz. Ent- fernung D	Höhen- unter- schied h	Meeres- höhe H	Be- mer- kungen
	o	$m = z$	u	$l = u - o$	Hori- zontal- kreis	Höhen- kreis					
	Standort: P. P. 16				36° 15'	= Orientierung nach P. P. 15.		$Q_{16} =$	311,56	$i = 1,40$ m	
26		i		0,538	51° 38'	+5° 58'					
27		i		0,630	55 14	+4 19					
28		1,30		0,705	68 21	+4 25					
29	1,046	i	1,988	0,942	75 06	+3 08					
45		i		1,004	34 30	+4 23					
					36 14	= Orientierung nach P. P. 15.					

alle Punkte aufgenommen, so wird vor der Wegnahme des Instrumentes noch einmal die Orientierung nachgeprüft. Bei besonderen Anlässen ist sie schon früher nachzusehen und, wenn nötig, zu berichtigen. Auch die Übereinstimmung der Punktnumerierung am Instrument und im Handriß ist etwa alle 5 Punkte durch Zuruf nachzuprüfen. Durch die Horizontalkreisablesung, den Lattenabschnitt und den Höhenwinkel der mittleren Ziellinie sowie durch i und z ist bei bekannter Lage des Aufstellungspunktes nunmehr auch die räumliche Lage des aufgenommenen Punktes bestimmt. Wie schon früher (S. 213) gezeigt worden ist, sind die horizontale Entfernung D der Latte und der Höhenunterschied h zwischen der Kippachse des Instruments und dem Lattenpunkte z die Ausdrücke¹⁾:

$$D = K \cos^2 \alpha, \quad h = \frac{1}{2} K \sin 2\alpha; \quad \dots \dots \dots (571)$$

¹⁾ Über die Hilfsmittel zur Bestimmung von D und h siehe Anm. auf Seite 213; wegen der Fehler der Ausdrücke (571) siehe (530) und (533) und Anm. 2), Seite 214.

also ist, wenn Q (Abb. 247) die Meereshöhe des Aufstellungspunktes A und $Q' = Q + i - z$ dessen reduzierte Kote bedeuten, die Meereshöhe H des Geländepunktes

$$H = Q' + h. \dots \dots \dots (572)$$

Tachymeter, welche die Rechenarbeit ganz oder teilweise selbst erledigen, nennt man selbstreduzierende Tachymeter. Dazu gehört das Schiebetachymeter oder Projektionstachymeter von *Kreuter*¹⁾.

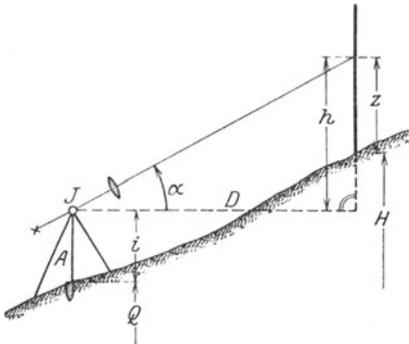


Abb. 247. Höhermittlung für einen tachymetrisch aufgenommenen Geländepunkt.

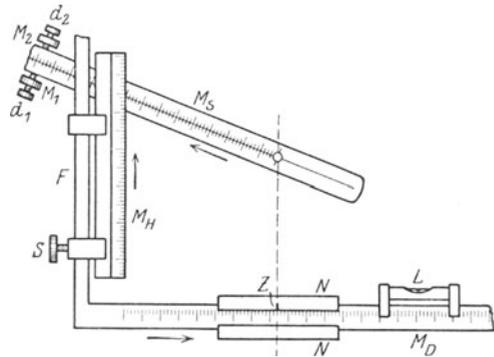


Abb. 248. Projektionsgestänge des *Kreuter*-Tachymeters.

Es ist das ein Repetitionstheodolit mit in einem Rohrlager drehbarem distanzmessenden Ringfernrohr, das eine umsetzbare Reitlibelle besitzt, so daß das Instrument auch als Nivellierinstrument gebraucht werden kann. Das Eigenartige des Instrumentes ist ein aus drei geteilten Linealen bestehendes Projektionsgestänge (Abb. 248), dessen schiefes Lineal, das sog. Hypotenusenlineal M_s , fest mit dem Fernrohr verbunden ist und dessen Teilungskante zur unteren Ziellinie Z_u (Abb. 249) parallel ist, wenn das Fernrohr auf unendlich eingestellt ist. Ein Horizontalmaßstab M_D läßt sich in einer unten an den Fernrohrstützen befestigten Nut N verschieben; er endigt in einen lot-

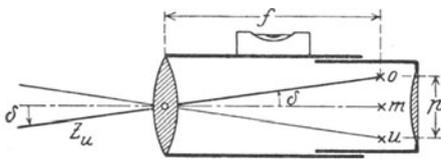


Abb. 249. Fernrohr des Schiebetachymeters von *Kreuter*.

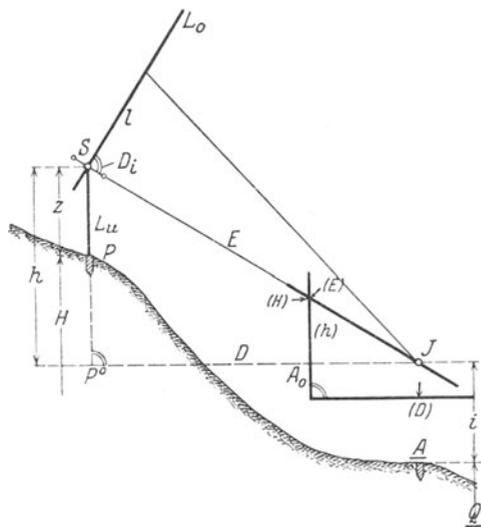


Abb. 250. Wirkungsweise des *Kreuterschen* Projektionstachymeters.

rechten Führungsarm F , an dem ein Höhenmaßstab M_H mit abgeschrägter Kante verschoben und durch eine Klemmschraube S befestigt werden kann.

¹⁾ *Kreuter, F.*, Patentiertes Quotierinstrument für generelle Aufnahmen in kouriertem Terrain, Wien 1874; ferner Das neue Tacheometer, 2. A., Brünn 1888.

Der Sinn der Bezifferungen ist in der Abbildung durch Pfeile angedeutet. Beim Gebrauch wird im aufzunehmenden Punkte P eine Latte, deren Ober-
 teil um ein in der Höhe z befindliches Scharnier S (Abb. 250) drehbar ist,
 so aufgestellt, daß der Lattenfuß L_u lotrecht steht, während der Ober-
 teil L_o mit Hilfe eines kurzen, dazu senkrechten, aufklappbaren Diopters D_i senk-
 recht zur unteren auf S gerichteten Ziellinie Z_u gestellt wird. Da in S der
 Nullpunkt der Distanzteiling liegt, kann am Unterfaden sogleich der Latten-
 abschnitt l abgelesen werden, so daß der Ausdruck $C \cdot l$ ($C=100,00$) gegeben-
 falls unter Hinzufügung von c sogleich die schiefe Entfernung E angibt.
 Wird nunmehr durch eine horizontale Verschiebung von M_D mittels der Kante
 des Höhenmaßstabes am schiefen Maßstab M_s die eben ermittelte schiefe
 Entfernung E eingestellt, so liest man an M_D sogleich die Horizontalent-
 fernung D , an M_H jedoch die Meereshöhe H des aufzunehmenden Punktes
 ab, wenn nach Aufstellung des Instrumentes über A der Höhenmaßstab so
 verstellt wurde, daß an ihm bei horizontaler Lage der unteren Ziellinie durch
 die Teilungskante von M_s die Ablesung

$$A_0 = Q' = Q + i - z \dots \dots \dots (573)$$

angezeigt wird.

Vor dem Gebrauch ist das Instrument zuerst als Theodolit, Nivellier-
 instrument und als Distanzmesser zu berichtigen. Dann erst erfolgt die
 Untersuchung des Projektionsgestänges in bezug auf 1. die wagerechte
 Lage des Horizontalmaßstabes durch Umsetzen einer Libelle;
 2. den Parallelismus zwischen Hypo-
 tenusenlineal und unterer Ziel-
 linie Z_u (Verminderung der Able-
 sung an M_H um $\frac{1}{200} \cdot \Delta D$, wenn

bei einspielender Fernrohrlibelle
 M_D um ΔD verschoben wird;
 3. den Zeigerfehler am Horizont-
 talmaßstab (für horizontale Sicht
 — einspielende Libelle — sollen
 die Ablesungen an M_s und M_D
 übereinstimmen) und 4. auf die
 richtige Einstellung des Höhen-
 maßstabes (bei einspielender Li-
 belle soll an M_H die Ablesung
 $A_0' = A_0 - \frac{1}{200} D$ erscheinen)¹⁾.

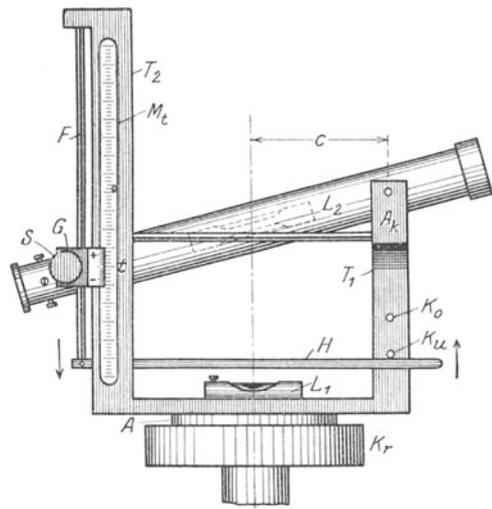


Abb. 251. Kontakttachymeter von Sanguet.

Auch das Kontakt-Tachy-
 meter von Sanguet ist ein cha-
 rakteristisches selbstreduzierendes Tachymeter. Auf der mit einer Libelle L_1
 ausgerüsteten Alhidade dieses Instruments (Abb. 251) sitzen die beiden Fern-
 rohrträger T_1, T_2 , in deren erstem die um c exzentrische Kippachse des Fern-

¹⁾ Schon der durch die Erfindung des Meßtisches rühmlichst bekannte Altdorfer
 Professor Magister Praetorius hatte an seinem Meßtischlein drei Nebenregeln angebracht,
 welche den Projektionsvorrichtungen des Schiebetachymeters vollkommen entsprechen
 (siehe Daniel Schwenter, Geometriae Practicae, Nürnberg 1627). Nach Puller (Z. V. W. 1896,
 S. 375) hat 1865 Geometer Kiefer den Gedanken der Projektionsvorrichtung gefaßt und
 von Breithaupt ausführen lassen. Etwas jünger als das Kreutersche Instrument ist das
 Tachygraphometer von Wagner. Das vom Erfinder Puller in der Z. V. W. 1901, S. 531
 bis 544 beschriebene Schiebetachymeter von Puller-Breithaupt vermeidet die bei Kreuter
 und Wagner notwendige schiefe Lattenstellung.

rohres gelagert ist. T_2 trägt eine als Tangentenmaßstab M_t bezeichnete Teilung, deren Ablesungen t die 100fachen tg der Höhenwinkel α der Ziellinie — das Instrument besitzt nur eine Ziellinie — angeben. Das Okularende des Fernrohres ruht mittels einer in der durch den Fadenkreuzschnittpunkt und die Kippachse bestimmten Ebene liegenden Schneide S_1 (Abb. 252) auf einer dazu senkrechten horizontalen Schneide S_2 , welche ihrerseits mit einem an der lotrechten Führungsstange F verschiebbaren Gleitstück G verbunden ist. Durch Anziehen einer Klemmschraube S wird dieses mit einem Nonius ausgerüstete Gleitstück und damit das Fernrohr in bestimmter Lage festgehalten. Charakteristisch ist ein in der Ausgangsstellung an einem

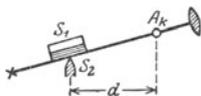


Abb. 252. Schneidenauflagerung beim Kontakttachymeter von Sanguet.

unteren Knopf K_u anliegender Hebel H , durch dessen Verstellung bis zum oberen Knopf K_o die mit dem anderen Hebelende verbundene Führungsstange F und damit auch die Schneide S_2 um einen konstanten Betrag q

gesenkt werden. Bedeutet d den Abstand dieser Schneide von der Kippachse und war bei einer Instrumentenhöhe i in der Ausgangsstellung (H an K_u) t die Ablesung am tg -Maßstab und z diejenige an der Latte, welche in der zweiten Fernrohrstellung (H an K_o) um l vergrößert erscheint, so erhält man mit den in Abb. 253 eingeschriebenen Bezeichnungen leicht:

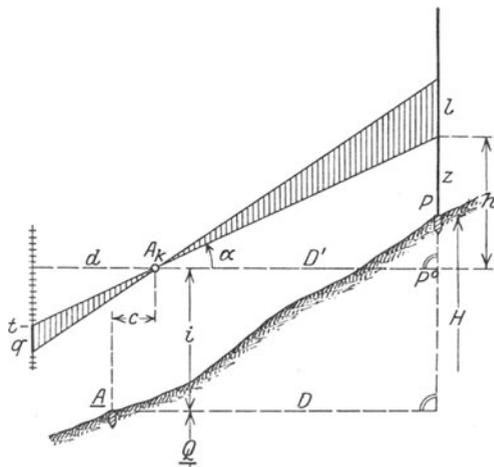


Abb. 253. Wirkungsweise des Kontakttachymeters von Sanguet.

$$D' : d = l : q, \quad D = c + \frac{d}{q} \cdot l \quad \text{und} \quad h = D' \cdot \frac{t}{100} \dots (574)$$

Bezeichnet man die Multiplikationskonstante $d : q$ zur Abkürzung mit C ($= 100,00$), so erhält man zur Bestimmung der Punktlage außer der Ablesung am Horizontalkreis:

$$D = c + C \cdot l \quad \text{und} \quad H = Q + i - z + h \dots (575)$$

Das Instrument wird vor dem Gebrauch als Theodolit und unter Verwendung der gestrichelt gezeichneten Fernrohrdoppelschlibbelle L_2 als Nivellierinstrument berichtigt. Schließlich erfolgt bei lotrechter Alhidadenachse und horizontaler Ziellinie die Bestimmung und Beseitigung des Zeigerfehlers am tg -Maßstab.

Eine sehr sinnreiche neuere Konstruktion ist das selbstreduzierende Tachymeter von Hammer-Fennel¹⁾.

Denkt man sich den Ausdruck für die Horizontalentfernung auf die Form

$$D = C \cdot l \cos^2 \alpha = \frac{f}{p} \cdot \cos^2 \alpha \cdot l_p = C_1 \cdot l_p \dots (576)$$

¹⁾ Hammer, E, Tachymetertheodolit zur unmittelbaren Lattenablesung von Horizontalentfernung und Höhenunterschied, Z. V. W. 1901, S. 153 bis 158.

gebracht und verlangt man, daß C_1 für alle Fernrohrstellungen eine (runde) Konstante bleibt, so muß, da die Objektivbrennweite f als unveränderlich zu betrachten ist, der Fadenabstand mit der Fernrohrneigung veränderlich sein. Der zum Höhenwinkel α gehörige Wert von p ist nach (576) der Ausdruck

$$p_\alpha = \frac{f}{C_1} \cos^2 \alpha. \dots \dots \dots (577)$$

In derselben Weise findet man aus

$$h = \frac{1}{2} C \cdot l \sin 2\alpha = \frac{f}{2q} \cdot \sin 2\alpha \cdot l_q = C_2 \cdot l_q, \dots \dots \dots (578)$$

wo C_2 ein für die Bestimmung des Höhenunterschieds dienender runder Festwert sein soll, den zu α gehörigen Fadenabstand

$$q_\alpha = \frac{f}{2C_2} \sin 2\alpha. \dots \dots \dots (579)$$

Nun konstruiert man mit den für die verschiedenen α berechneten Fadenabständen p_α, q_α durch radiales Abtragen derselben von einem Grundkreise G aus ein Diagramm, dessen Kurven in Abb. 254 mit D und $+h$ bzw. $-h$

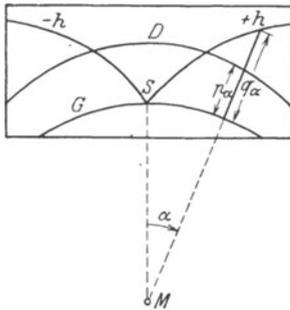


Abb. 254. Diagramm der Fadenabstände.

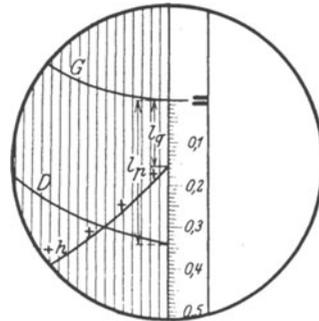


Abb. 255. Anblick im Fernrohr.

Selbstreduzierendes Tachymeter von *Hammer-Fennel*.

bezeichnet sind und projiziert das mit dem einen durchbrochenen Kippachsenende verbundene Diagramm durch ein geeignetes System von Prismen und Linsen so in die Bildebene, daß die der jeweiligen Fernrohrneigung entsprechenden Längen p_α, q_α stets in der Zielebene liegen. Sie fallen dann in eine den Vertikalfaden ersetzende, das Gesichtsfeld halbierende Prismenkante. Wird mittels dieser Kante die Latte eingestellt und das Fernrohr so geneigt, daß der Grundkreis durch den in mittlerer Instrumentenhöhe befindlichen Teilungsnulppunkt der Latte geht, so liest man an den beiden anderen Kurven des Diagramms (Abb. 255) sogleich die Werte l_p und l_q ab, welche unmittelbar auf die Größen

$$D = C_1 \cdot l_p, \quad h = C_2 \cdot l_q \dots \dots \dots (580)$$

führen. Es ist zweckmäßig, die Einrichtung so zu treffen, daß $C_1 = 100,00$ und $C_2 = 20,00$ wird.

Bei den besonders in Österreich gebräuchlichen Schraubendistanzmessern wird der Unterschied in den tg -Werten des Höhenwinkels einer nach

den beiden Endpunkten eines Lattenabschnittes l (Abb. 256) führenden Ziellinie mit Hilfe einer lotrechten, von der Kippachse um d entfernten Tangentenkippschraube gemessen. Sind o, u die zu diesen beiden Lagen der Ziellinie, a_0 die zur horizontalen Ziellinie gehörigen Schraubenableesungen, und ist γ die Schraubenganghöhe, so bestehen nach Abb. 256 die Beziehungen

$$D' = \frac{d \cdot l}{\gamma(o - u)} = C \frac{l}{o - u}, \quad h = \frac{u - a_0}{o - u} l, \quad \dots \dots (581)$$

worin man der Multiplikationskonstanten $C = d : \gamma$ durch eine geeignete Wahl von d und γ einen runden Wert geben kann. Mit dem Schraubendistanzmesser kann man noch auf Entfernungen hin arbeiten, für welche bei fest aufgespannten Entfernungsfäden der Fadenabstand schon größer ist als die Länge des Lattenbildes¹⁾.

Den Zwecken der Feintachymetrie, besonders der genauen räumlichen Festlegung der Polygonpunkte, dient der Präzisionsdistanzmesser von *Hohenner*. Zur Ermittlung eines Lattenabschnittes kann man entweder an beiden Fäden Zufallsablesungen ausführen oder man kann einen Faden auf eine Teilfeldgrenze oder Teilfeldmitte bringen und am anderen eine Zufallsablesung vornehmen, oder man kann sich auch beide Fäden auf Teilfeld-

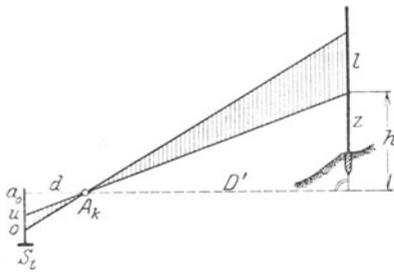


Abb. 256. Wirkungsweise des Schraubendistanzmessers.

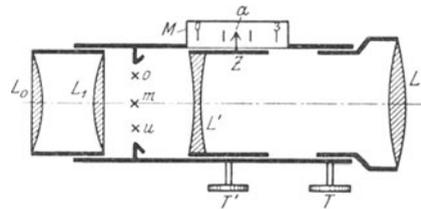


Abb. 257. Präzisionsdistanzmesser von *Hohenner*.

mitten eingestellt denken. Die diesen Verfahren entsprechenden Entfernungfehler m_1, m_2, m_3 werden in der genannten Reihenfolge abnehmen; sie stehen nach *Hohenners* Angaben²⁾ im Verhältnis 3 : 2 : 1. Die gleichzeitige Einstellung beider Entfernungsfäden auf Feldmitten müßte also einen wesentlichen Genauigkeitsgewinn bringen. Zur Ermöglichung einer solchen Einstellung ist bei dem genannten Instrument zwischen Okular und Objektiv noch eine durch einen Trieb T' (Abb. 257) verstellbare Schaltlinse L' eingefügt, durch deren Verstellung die Größe des Lattenbildes innerhalb enger Grenzen so weit geändert werden kann, daß bei deutlicher Sichtbarkeit des Bildes beide Fäden auf Feldmitten stehen. Die damit verbundene sehr geringe Änderung der Multiplikationskonstanten kann leicht aus der Angabe a eines mit L' verbundenen Zeigers Z ermittelt werden. Bei horizontaler Fernrohrstellung wird die Entfernung durch den Ausdruck

$$D = c + (C_0 + K \cdot a) \cdot l \quad \dots \dots (582)$$

¹⁾ Die Tangentenkippschraube hat Oberst *Hogrewe* eingeführt; siehe *Hogrewe*, Praktische Anweisung zum Nivellieren usw., Hannover 1800. Siehe auch *Vogler*, Die Tangentenkippschraube, Z. V. W. 1891, S. 145 bis 159. Ferner *Klingatsch*, Über Fadentachymeter mit Tangentenschraube, Z. V. W. 1905, S. 337 bis 341 und 353 bis 362.

²⁾ Der *Hohenner*sche Präzisionsdistanzmesser und seine Verbindung mit einem Theodolit, Leipzig-Berlin 1919, S. 8.

angegeben. Von den drei Konstanten c , C_0 , K wird die Hauptkonstante C_0 scharf auf einen runden Wert, z. B. 100,00 gebracht. Die Additionskonstante c ist praktisch als unveränderlich zu betrachten, da einem Anwachsen von D von 20 auf 300 m in c nur eine Abnahme von 4 mm entspricht.

c) Meßtischtachymetrie und Bussolentachymetrie.

Bei der Meßtischtachymetrie, die besonders früher im offenen übersichtlichen Gelände viel verwendet worden ist, erfolgt die Richtungsangabe durch die Linealkante einer mit Höhenbogen oder Höhenkreis versehenen distanzmessenden Kippregel. Die horizontalen Entfernungen, manchmal auch die Höhen, werden sogleich entweder aus einer Zahlentabelle oder einem Diagramm entnommen und in den Plan eingetragen. Sollen etwa auch die Standorte des Tisches durch Polygonisieren mit dem Meßtisch bestimmt werden, so sind aus den früher (S. 171) genannten Gründen das Stationieren und die Einzelaufnahme vollständig voneinander zu trennen. Dem Vorteil einer größeren Anschaulichkeit steht bei der Meßtischtachymetrie ein schwerfälligeres Instrument und die größere Abhängigkeit von der Witterung entgegen¹⁾.

Die Bussolentachymetrie, bei welcher an einem mit distanzmessendem Fernrohr und Höhenbogen versehenen Bussoleninstrument an Stelle der Horizontalkreisablesungen die magnetischen Streichwinkel beobachtet werden, eignet sich für den Wald, wo teils infolge der schlechten Beleuchtung, teils infolge von hinderlichem Baumwuchs nur kurze Sichten möglich sind, wie man sie nach früherem (S. 170) bei Bussolenmessungen verlangen muß. Zur Aufnahme legt man Bussolenzüge mit Gegenazimuten oder auch nur in Sprungständen, die im horizontalen Sinne nach den Ausführungen auf S. 168 ff. festgelegt werden. Zur Höhenfestlegung der Zugpunkte, von denen aus schon bei der Zugmessung die erreichbaren Geländepunkte durch sog. Seitenblicke aufgenommen werden, sind natürlich wie bei jedem Tachymeterzug auch die Höhenwinkel zu messen. Bei sehr dichtem Gebüsch ist die Anwendung der von *Jordan* eingeführten Meßbandzüge empfehlenswert. Dabei sind alle Seiten gleich der Länge des flach aufliegenden Meßbandes, dessen jeweiliger Neigungswinkel mit Hilfe eines am oberen Ende des Hinterstabes befindlichen Freihandhöhenwinkelmessers (S. 100) durch Beobachten des oberen Endes des gleichlangen Vorderstabes bestimmt wird, während die Ermittlung der Bandrichtung vom hinteren Ende aus mit Hilfe einer Stockbussole erfolgt.

d) Genauigkeitsfragen.

Die schärfsten Ergebnisse liefert das Kreistachymeter, welches — ein gutes Instrument vorausgesetzt — den auf die Kippachse des Instrumentes bezogenen, scharf bezeichneten Endpunkt einer Hektometerstrecke nach Lage und Höhe auf etwa 5 cm bzw. 2 cm festlegt. Ähnlich liegen die Verhältnisse beim Schraubentachymeter. Für das *Kreutersche* Schiebetachy-

¹⁾ Neuerdings verliert die Meßtischtachymetrie an Bedeutung, ohne etwa bedeutungslos geworden zu sein. Nach *Koppe* geben die französischen Ingenieure durchweg der Zahlentachymetrie den Vorzug, während in der Schweiz die Meßtischtachymetrie vorherrscht. In Deutschland wurde die Meßtischtachymetrie z. B. verwendet bei der preußischen und sächsischen topographischen Landesaufnahme 1:25000 sowie für die von *Koppe* geschaffene, jedoch nur teilweise ausgeführte neue braunschweigische Landeskarte in 1:10000. Die Neuaufnahmen der bayerischen und württembergischen topographischen Karten erfolgen auf der Grundlage der dort vorhandenen Kataster- und Flurpläne teils durch halbrigonometrische Höhenmessung, teils durch Zahlentachymetrie. Dieses Verfahren findet auch bei den Neuaufnahmen der badischen topographischen Blätter 1:25000 Verwendung.

meter sind die entsprechenden Fehler auf etwa 20 cm bzw. 10 cm zu veranschlagen, welche Genauigkeit für ingenieurtechnische Vorarbeiten durchaus ausreicht. Etwas genauer arbeitet das Kontakttachymeter von *Sanguet*. Das *Hammer-Fennelsche* Tachymeter scheint nach verschiedenen Untersuchungen¹⁾ die Horizontal- und Vertikalprojektion der Hektometersicht mit einer mittleren Unsicherheit von etwa 3 dm bzw. 1 dm anzugeben. Eine gute Tachymeterkippregel mit Fadendistanzmesser ist dem Kreis-tachymeter nahezu ebenbürtig, während der Tachymeterbussole aus leicht begreiflichen Gründen die geringste Genauigkeit zukommt.

Der mittlere Fehler in der räumlichen Lage eines Geländepunktes setzt sich aus den eben genannten Fehlern des Geländepunktes gegen den Instrumentenstandort und aus dessen eigenem Fehler zusammen. Ersterer wird in Lage und Höhe 3 dm bzw. 1 dm kaum überschreiten. Auch die entsprechenden Fehler der Aufstellungspunkte werden selbst in der Mitte von langen Zügen nicht größer sein. Man darf also wohl annehmen, daß der mittlere Fehler der nach den besprochenen Methoden aufgenommenen Geländepunkte in Lage (gegen die nächsten Dreieckspunkte) und Meereshöhe die Beträge 0,5 m bzw. 0,2 m nicht überschreitet. Die dadurch gekennzeichnete Genauigkeit ist aber für ingenieurtechnische Zwecke fast immer als ausreichend zu betrachten.

Während die sog. topographische Tachymetrie mit einer wesentlich geringeren Genauigkeit (Entfernungen und Höhen auf wenige m bzw. dm genau) wie die Ingenieurtachymetrie auskommt, werden bei der sog. Feintachymetrie wesentlich schärfere Ergebnisse angestrebt und erreicht. So fand z. B. *Hohenner*²⁾ die mittleren Fehler der mit seinem Präzisionsdistanzmesser einmal bestimmten Horizontalentfernungen und Höhenunterschiede zu rund

$$m_D = \pm \frac{D}{3000} \quad \text{bzw.} \quad m_h = \pm \frac{D}{5600}.$$

Bei solchen feintachymetrischen Messungen handelt es sich jedoch nicht so sehr um Geländeaufnahmen als um die Verdrängung der direkten Messung von Polygonseiten in schwierigem Gelände. Zur Erzielung der erwähnten größeren Genauigkeit braucht man ein gut berichtichtiges, besonders leistungsfähiges Instrument (starke Vergrößerung, große Helligkeit, gutes Auflösungsvermögen), gut eingeübte Lattenträger und mit empfindlichen Dosenlibellen versehene, durch Verspreizen lotrecht gehaltene Latten mit scharfer Teilung, deren Meterlänge genau bekannt sein muß. Soll die besonders in *D* erwartete größere Genauigkeit auch zuverlässig sein, so muß man darauf bedacht sein, durch die Verwendung der allerdings nicht so bequemen horizontalen Distanzlatte auch die Refraktionsfehler im Lattenabschnitt unschädlich zu machen³⁾.

¹⁾ Siehe dazu *Koppe*, Der *Hammer-Fennelsche* Tachymetertheodolit und die Tachymeterkippregel, Z. V. W. 1902, S. 144 bis 147; ferner *Hammer*, Neue Genauigkeitsversuche mit einem *Hammer-Fennelschen* Tachymetertheodolit, Z. V. W. 1903, S. 691 bis 696, und *Haerpfner*, Ein Genauigkeitsversuch mit dem *Hammer-Fennelschen* Tachymetertheodolit, Z. V. W. 1915, S. 385 bis 400 und 433 bis 444.

²⁾ Siehe S. 240, Anm. 2), S. 51 u. 54.

³⁾ Siehe dazu auch *Röthlisberger, E.*, Die Verwendung der Präzisionstachymetrie bei den Katastervermessungen im Berner Oberland, Z. V. W. 1906, S. 233 bis 241.

Zur Genauigkeit tachymetrischer Aufnahmen siehe auch *Müller, H.*, Über den zweckmäßigsten Maßstab topographischer Karten. Ihre Herstellung und Genauigkeit, Heidelberg 1913; ferner *Egerer, A.*, Untersuchungen über die Genauigkeit der topographischen Landesaufnahme (Höhenaufnahme) von Württemberg im Maßstab 1:2500, Stuttgart 1915.

Zur tachymetrischen Aufnahme im allgemeinen siehe *Hammer*, Beiträge zur Praxis

36. Photogrammetrie.

Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst ermöglicht die Darstellung der Geländeoberfläche nach Lage und Höhe aus photographischen Aufnahmen von bekannten Standpunkten aus. Manchmal hat sie auch noch die Lage des Aufnahmeortes aus den Bildern bekannter Punkte zu ermitteln. Zur photogrammetrischen Punktbestimmung sind im allgemeinen mindestens zwei zusammengehörige Aufnahmen erforderlich; nur wenn von vorneherein feststeht, daß das aufzunehmende Gebilde in einer bekannten Fläche liegt, wie z. B. die Uferlinien eines stehenden Gewässers, kann man mit einer einzigen Aufnahme auskommen. Die Photogrammetrie, welche die gleichzeitige Bestimmung einer großen Zahl von Punkten mit mäßiger Genauigkeit ermöglicht, verlangt Einblick in alle Einzelheiten des Geländes, aber kein Begehen desselben; sie besitzt daher ihre Hauptbedeutung für Aufnahmen in kahlen unwegsamen Gegenden, besonders im Hochgebirge.

a) Der Phototheodolit.

Am besten lassen sich die Einzelheiten durch Aufnahmen aus der Luft erfassen; doch kommt diese Aufnahmeart für die Zwecke des Bauingenieurs heute im allgemeinen noch wenig in Frage. Er muß seine Aufnahmen von festen Punkten der Erdoberfläche aus vornehmen, wozu ihm der Phototheodolit dient.

Jeder zu photographischen Aufnahmen vom festen Boden aus oder aus der Luft bestimmte photographische Apparat trägt einen rechteckigen Rahmen mit den Ausmaßen a , b , dessen Mittelmarken M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (Abb. 258) bei der Belichtung auf der fest an den Rahmen gepreßten Platte mit abgebildet werden. Der wichtigste Bestandteil ist ein gegen den Markenrahmen möglichst unveränderlich angeordnetes, perspektivisch richtig zeichnendes, auch von anderen Fehlern möglichst freies Objektiv. Der hintere, auch als optisches Zentrum bezeichnete Hauptpunkt O dieser Linse, deren Achse zur Bildebene senkrecht liegt, steht von dieser, also auch von der Rahmenebene um die Bildweite D ab. Die von O nach den Bildpunkten führenden Strahlen schließen dieselben Winkel ein wie die vom vorderen Hauptpunkte¹⁾ nach den entsprechenden Geländepunkten gezogenen Richtungen. Da O aus Stabili-

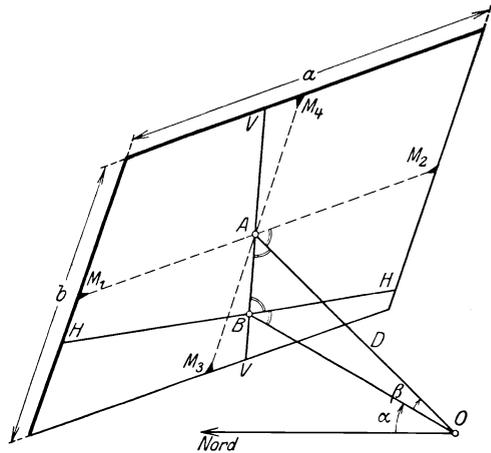


Abb. 258. Elemente der inneren und äußeren Orientierung.

der Höhenaufnahmen; II. Zur Tachymetrie auf freiem Feld und im Wald, Z.V.W. 1891, S. 193 bis 207 und 241 bis 251.

Die Genauigkeit der Höhenentnahme beliebiger Kartenpunkte wird im Anschluß an die Herstellung von Höhenplänen besprochen.

¹⁾ Man kann ihn für die Zwecke der Photogrammetrie stets mit O zusammenfallen lassen. In Abb. 258 ist die in Wirklichkeit nicht zutreffende, für die praktische Bearbeitung aber sehr zweckmäßige Annahme gemacht, daß das aufrechte Bild um den Betrag der Bildweite D vor O liegt.

linie $M_1 M_2$ fallen soll. f) Endlich soll D parallel zur Zielebene liegen¹⁾. Ist die Instrumentenuntersuchung und Berichtigung²⁾ durchgeführt, so kann man den Bildhorizont und die Hauptvertikale, deren Lage gegen die Rahmenmarken nunmehr als bekannt anzunehmen ist, in die aufgenommenen Bilder eintragen.

Ein für Präzisionsphotogrammetrie bestimmtes typisches deutsches Instrument ist der Phototheodolit von *Koppe*. Das Gehäuse der verhältnismäßig kleinen photographischen Kammer ist ein metallener Kegelstumpf, der in einer konischen Ausbohrung der Kippachse sitzt, welche an einem Ende ein exzentrisches Fernrohr, am anderen einen Höhenkreis trägt.

b) Grundlage der Aufnahmen.

Die Grundlage der photogrammetrischen Aufnahmen bildet, soweit diese für ingenieurtechnische Zwecke brauchbar sein sollen, stets ein gut bestimmtes Dreiecksnetz mit nicht zu großen Seitenlängen oder zum mindesten eine Folge von gut bestimmten Polygonzügen. Im großen und ganzen gelten für diese Grundlagen die Ausführungen auf Seite 233 ff. über die Grundlagen der tachymetrischen Geländeaufnahme. Nur in einzelnen besonders günstig liegenden Fällen kann auch eine photogrammetrische Standortbestimmung aus den Aufnahmebildern stattfinden. Bei der photogrammetrischen Einzelaufnahme steht der Phototheodolit in der Regel in den beiden nach Lage und Höhe bekannten Endpunkten einer Grundlinie. Ist nach sachgemäßer Aufstellung des Instrumentes die Instrumentenhöhe gemessen und nach Einstellung des anderen Endpunktes der Grundlinie am Horizontalkreis abgelesen worden, so richtet man am besten das Fernrohr auf einen in der Mitte des Aufnahmefeldes liegenden, markanten Punkt und liest wieder sowohl am Horizontalkreis wie auch am Objektivschieber oder bei geneigter Kammer am Höhenkreis ab. Die Differenz der Horizontalkreisablesungen ist der Winkel, den die Bildweite D bei der Aufnahme mit der Grundlinie einschließt. Unmittelbar vor und nach der Belichtung der Platte überzeugt man sich, ob die ursprüngliche Einstellung der Ziellinie erhalten geblieben ist.

Schon bei der Aufnahme und erst recht für ihre Auswertung ist zwischen der älteren Einschnide- oder Meßtischphotogrammetrie und der neueren Parallaxen- oder Stereophotogrammetrie zu unterscheiden.

c) Die Einschnidephotogrammetrie.

Durch die Einschnidephotogrammetrie werden die Horizontalprojektionen der aufgenommenen Punkte durch ein meist zeichnerisches Vorwärtseinschneiden gewonnen, während die Höhen im Anschluß an die Grund-

¹⁾ Auf die Beschreibung der hierfür notwendigen Untersuchungen muß hier aus Raumangel verzichtet werden.

Über photogrammetrische Instrumente und ihre Untersuchung siehe außer anderen z. B. *Finsterwalder*, Die Photogrammetrie als Hilfsmittel der Geländeaufnahme in *Neumayer*, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, 1. Bd., 3. Aufl., Hannover 1906; ferner *Koppe*, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889 und Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung, Braunschweig 1896. Abbildungen der gebräuchlichsten Apparate enthält *Weiß*, Die geschichtliche Entwicklung der Photogrammetrie und die Begründung ihrer Verwendbarkeit für Meß- und Konstruktionszwecke, Stuttgart 1913. Die mathematischen Grundlagen des neuen Aufnahmeverfahrens sind behandelt in *Finsterwalder*, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahrbuch der deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 1899; siehe ferner *Finsterwalder*, Photogrammetrie in der Enzykl. d. math. Wissenschaften, VI, 2, Leipzig 1906 mit Literaturangaben.

²⁾ Bei sorgfältiger Behandlung des Apparates erhält sich dessen Berichtigung ziemlich lange.

rißfestlegung in der Regel durch Rechnung ermittelt werden. In Abb. 260 handle es sich um zwei mit lotrechten Bildebenen ausgeführte Aufnahmen

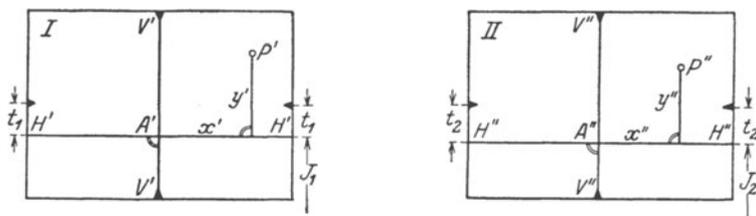


Abb. 260. Zwei zusammengehörige photogrammetrische Aufnahmen bei lotrechter Bildebene.

I, II in den bekannten, um die Grundlinie *B* (Abb. 261) voneinander abstehenden Standorten O_1, O_2 mit den Instrumentenhorizonten J_1 und J_2 . Sind auf Grund der bei der Aufnahme abgelesenen Schieberstellungen t_1, t_2 von den Mittelmarken aus die Bildhorizonte $H' H', H'' H''$ eingetragen und

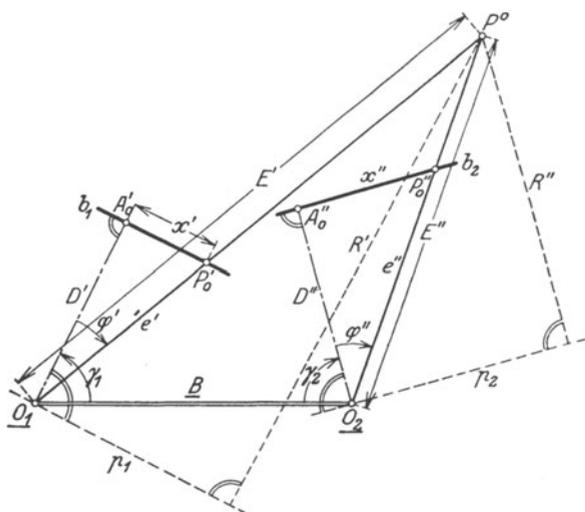


Abb. 261. Ermittlung der Horizontalprojektion eines Punktes aus zwei zusammengehörigen lotrechten Aufnahmen.

in ihren Schnittpunkten mit den beiden Hauptvertikalen $V' V', V'' V''$ die zwei Lagen A', A'' des Hauptpunktes gefunden worden, so kann man die auf das Achsenkreuz Bildhorizont — Hauptvertikale bezogenen rechtwinkligen Koordinaten x', y' und x'', y'' der Bildpunkte P', P'' eines Geländepunktes P den Aufnahmen durch Abmessen entnehmen. Bei Verwendung von Papierbildern ist deren etwa eingetretener Schwund durch Vergleich der Seitenlängen a', b' des Bildrechtecks mit den bekannten Seiten a, b des Markenrahmens festzustellen und in den Koordinaten zu berücksichtigen. Wird

hingegen die Bildweite sinngemäß reduziert (getrennt für die Ermittlung der Horizontalprojektion und der Höhen), so können zur nachfolgend beschriebenen Punktbestimmung die unveränderten Koordinaten der Bildpunkte Verwendung finden. Nunmehr trägt man im Grundriß mittels der bei der Aufnahme gemessenen Winkel γ_1, γ_2 von O_1 und O_2 aus die Bildweite D in ihren den Aufnahmen entsprechenden Lagen D', D'' ab und errichtet in ihren Endpunkten A'_0, A''_0 , den Horizontalprojektionen des Hauptpunktes, die als Bildlinien bezeichneten Senkrechten b_1 und b_2 . Für genaue Arbeiten genügen zu dieser Konstruktion Transporteur und rechter Winkel nicht; es ist vielmehr rätlich, sowohl für die Horizontalprojektion des Hauptpunktes wie auch für zwei an den Enden der Bildlinie gelegene Punkte die rechtwinkligen Koordinaten zu berechnen und damit in einem sorgfältig konstruierten Quadratnetz, in das vorher schon die Standorte eingetragen wurden, nunmehr auch die Haupt-

punkte mit den zugehörigen Bildlinien einzutragen. Die Endpunkte der in die Bildlinien übertragenen Abszissen x' , x'' bezeichnen die Horizontalprojektionen P_0' , P_0'' der Bildpunkte P' , P'' , während der Schnittpunkt der beiden geometrischen Örter O_1P_0' und O_2P_0'' die Horizontalprojektion P^0 des Geländepunktes P angibt. Sind E' , E'' dessen horizontale Entfernungen von O_1 , O_2 , während e' , e'' die Entfernungen der entsprechenden Bildlinienpunkte P_0' , P_0'' von O_1 und O_2 bedeuten, so folgt aus den beiden ähnlichen Aufrißdreiecken der Abb. 262 für die Höhenzunahme vom optischen Zentrum O_1 bis zum Punkte P der Ausdruck

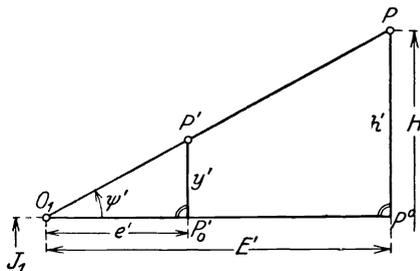


Abb. 262. Ermittlung der Höhe eines Punktes bei bekannter Horizontalprojektion.

$$h' = \frac{E'}{e'} \cdot y' = \frac{R'}{D} \cdot y', \dots \dots \dots (583)$$

dessen letzte, bequemere Form, in der R' (siehe Abb. 261) den Abstand des Punktes P^0 von einer durch O_1 gezogenen Parallelen p_1 zu b_1 bedeutet, leicht aus der Beziehung $E':e' = R':D$ hervorgeht. Ebenso findet man für den Höhenunterschied zwischen O_2 und P

$$h'' = \frac{E''}{e''} \cdot y'' = \frac{R''}{D} \cdot y''. \dots \dots \dots (584)$$

Die senkrechten Abstände R' , R'' von p_1 und p_2 können, nachdem P^0 im Grundriß festliegt, demselben ohne weiteres entnommen werden. Die Meereshöhe H des Geländepunktes muß sich aus den beiden Ausdrücken

$$H = J_1 + h' = J_2 + h'' \dots \dots \dots (585)$$

übereinstimmend ergeben.

Soll man die auf die Bildweite bezogene Horizontalrichtung φ des Strahles OP und seinen Höhenwinkel ψ zahlenmäßig angeben, so hat man hierfür nach den Abb. 261 und 262 die Gleichungen

$$\text{tg } \varphi' = \frac{x'}{D}, \quad \text{tg } \varphi'' = \frac{x''}{D}, \dots \dots \dots (586)$$

$$\text{tg } \psi' = \frac{y'}{e'}, \quad \text{tg } \psi'' = \frac{y''}{e''}. \dots \dots \dots (587)$$

Mittels der Horizontalrichtungen φ und Höhenwinkel ψ zweier Strahlen OP_1 , OP_2 läßt sich auch der von ihnen eingefasste schiefe oder Positionswinkel $s_{1,2}$ angeben. Man erhält nämlich durch die Anwendung des sphärischen Cosinus-Satzes auf das durch $s_{1,2}$ und die Ergänzungen von ψ_1 , ψ_2 auf 90° gebildete Kugeldreieck

$$\cos s_{1,2} = \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1). \dots \dots (588)$$

Zur Bestimmung von $s_{1,2}$ reicht auch die Kenntnis der inneren Orientierungselemente D und A aus. Nach Abb. 263 erhält man nämlich, wenn p , q , r_1 und r_2 den betreffenden Aufnahmen entnommen worden sind, den gesuchten Winkel aus den Gleichungen

$$\text{tg } \omega = \frac{p}{q}, \quad \text{tg } s_1 = \frac{r_1}{D}, \quad \text{tg } s_2 = \frac{r_2}{D} \dots \dots \dots (589)$$

$$\cos s_{1,2} = \cos s_1 \cos s_2 + \sin s_1 \sin s_2 \cos \omega. \dots \dots \dots (590)$$

Ist die Aufnahme nicht mit lotrechten Bildebenen, sondern unter einem Höhenwinkel β der Bildweite so ausgeführt worden, daß die Markenverbindungsline M_1, M_2 horizontal liegt, so kann man die Winkel aus der in Abb. 264 angedeuteten Grund- und Aufrißkonstruktion entnehmen. Man trägt die zur Tafel II parallel gedachte

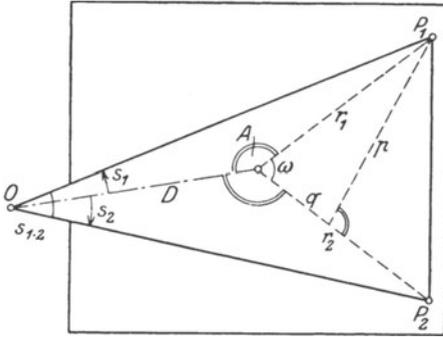


Abb. 263. Ermittlung des durch zwei Bildpunkte und das optische Zentrum bestimmten Lagewinkels.

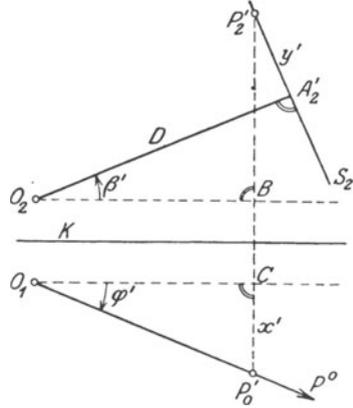


Abb. 264. Ermittlung der Horizontalrichtung und des Höhenwinkels eines Bestimmungsstrahles bei geneigter Bildebene.

Bildweite D im Aufriß unter ihrem Höhenwinkel β' auf und trägt vom Bild A_2' des Hauptpunktes aus die von der Markenverbindungsline $M_1 M_3$ aus gezählte Ordinate y' des Bildes P' auf der Spur S_2 der Bildebene ab. Das Lot durch den so erhaltenen Aufrißpunkt P_2' schneidet die Kantenparallelen durch O_2 und O_1 in den Punkten B und C . Trägt man auf dem verlängerten Lot durch P_2' im Grundriß von C aus mittels der Abszisse x' den Grundriß P_0' von P' auf, so ist $O_1 P_0'$ sogleich wieder der erste geometrische Ort für die gesuchte Horizontalprojektion P^0 des Geländepunktes, wenn von vornherein $O_1 C$ so gelegt wird, daß es mit der Grundlinie B den Winkel γ_1 einschließt. Zur zahlenmäßigen Bestimmung der Richtung φ' und des zugehörigen Höhenwinkels ψ' dienen die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{x'}{O_1 C} = \frac{x'}{D \cos \beta' - y' \sin \beta'}, \dots \dots \dots (591)$$

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{B P_2'}{O_1 P_0'} = \frac{D \sin \beta' + y' \cos \beta'}{D \cos \beta' - y' \sin \beta'} \cos \varphi' \dots \dots \dots (592)$$

Ganz entsprechendes gilt auch für die Werte φ'' , ψ'' einer zweiten Station. Unter Voraussetzung einer lotrechten Bildebene sollen noch einige bei photogrammetrischen Aufnahmen und ihrer Verwertung manchmal hervortretende besondere Aufgaben besprochen werden. Für den Zusammenschluß mehrerer Aufnahmen desselben Standpunktes braucht man den Winkel λ (Abb. 265), welchen die zu den Aufnahmen gehörigen Lagen D', D'' der Bildweiten einschließen. Er ist im allgemeinen aus den Horizontalkreisablesungen am Phototheodolit bekannt, kann aber, wenn in dieser Richtung etwa ein Versäumnis vorliegt, mit geringerer Genauigkeit auch aus den Aufnahmen selbst bestimmt werden.

Sind P', P'' , zu welchen wieder die Abszissen x', x'' gehören, die Bilder ein und desselben Punktes in beiden Aufnahmen, so berechnet man zunächst

φ', φ'' aus den Gleichungen (586) und erhält sodann den Winkel λ als die Differenz

$$\lambda = \varphi' - \varphi'' \dots \dots \dots (593)$$

Zur Erhöhung der Genauigkeit wird man λ unter Zuhilfenahme verschiedener Punkte wiederholt wie angegeben berechnen und die Einzelwerte zu einem Mittel vereinigen. Recht einfach ist auch das folgende von *Finsterwalder* angegebene Verfahren, welches unter Verzicht auf den Beweis mitgeteilt werden soll. Wählt man in beiden Aufnahmen eine größere Zahl zusammengehöri-

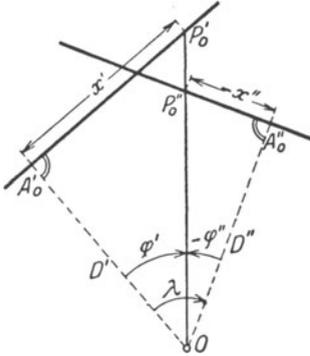


Abb. 265.

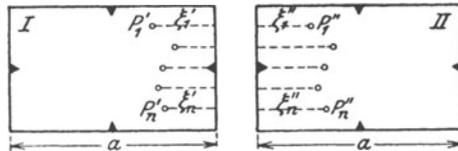


Abb. 266.

Zusammenschluß von lotrechten Aufnahmen einer Station

unter Verwendung beliebiger
zusammengehöriger Punkte.

unter Benutzung von zusammengehörigen Punkten
in der Nähe der Bildschnittlinie.

ger Punkte P_1', P_1'' bis P_n', P_n'' (Abb. 266) so aus, daß sie von den einander zugekehrten Bildrändern nahezu gleiche Abstände ξ_1', ξ_1'' bis ξ_n', ξ_n'' besitzen, so erhält man mit der Rahmenbreite a den Winkel λ aus den Gleichungen

$$m = \frac{1}{2n} ([\xi'] + [\xi'']), \quad \text{tg } \frac{\lambda}{2} = \frac{\frac{1}{2}a - m}{D} \dots \dots \dots (594)$$

Ebenfalls ohne Beweis, der sich auf die Gleichungen (586), (593) und (594) stützt, sei mitgeteilt, wie die an einem Näherungswert (D) der Bildweite noch anzubringende Verbesserung dD gefunden werden kann, wenn sämtliche den Horizont einer Station ausfüllenden λ mit (D) berechnet worden sind.

Es ergibt sich

$$dD = \frac{2(D)(360^\circ - [\lambda])}{\varrho([\sin 2\varphi''] - [\sin 2\varphi'])} = \frac{(D)([\lambda] - 360^\circ)}{\varrho[\sin \lambda]}, \dots \dots (595)$$

$$D = (D) + dD \dots \dots \dots (596)$$

Auch der Höhenunterschied der Objektivzentren zweier Standorte ist manchmal zu bestimmen. Er ergibt sich als die Differenz der Instrumentenhorizonte aus (585) zu

$$\Delta h = J_2 - J_1 = h' - h'' \dots \dots (597)$$

Aus einer größeren Zahl von zusammengehörigen Differenzen h', h'' kann für Δh ein genauerer Mittelwert gefunden werden.

Ist — etwa infolge einer unterbliebenen Ablesung am Objektivschieber — die Lage der zu den Markenverbindungs-
linien M_1', M_2' und M_1'', M_2'' (Abb. 267) parallelen Bildhorizonte $H'H', H''H''$ nicht genau bekannt und werden die Bildpunktsordinaten η', η'' deshalb von den Markenverbindungs-

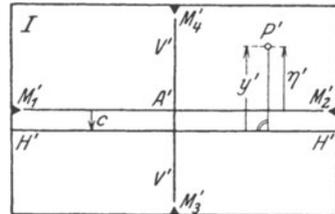


Abb. 267. Ermittlung des zur Markenverbindungsline parallelen Bildhorizontes bei lotrechter Bildebene.

linien oder dazu parallelen Linien aus gemessen, so bestehen die Gleichungen

$$y' = \eta' + c_1, \quad y'' = \eta'' + c_2, \quad \dots \dots \dots (598)$$

wenn c_1 und c_2 die notwendigen Horizontverschiebungen — nach unten im aufrechten Bild — bedeuten. Damit ergeben sich, da man ja die Horizontalprojektionen von Geländepunkten konstruieren kann, aus (583), (584) und (597) für drei Punkte P_1, P_2, P_3 die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} R_1' \cdot c_1 - R_1'' c_2 - D \cdot \Delta h + (R_1' \eta_1' - R_1'' \eta_1'') &= 0, \\ R_2' \cdot c_1 - R_2'' c_2 - D \cdot \Delta h + (R_2' \eta_2' - R_2'' \eta_2'') &= 0, \\ R_3' \cdot c_1 - R_3'' c_2 - D \cdot \Delta h + (R_3' \eta_3' - R_3'' \eta_3'') &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (599)$$

woraus die drei Unbekannten $c_1, c_2, \Delta h$ eindeutig gefunden werden können. Wird größere Genauigkeit angestrebt, so sind unter Verwendung weiterer Punkte zu den Gleichungen (599) noch überschüssige Bestimmungsgleichungen mit geeigneten Gewichten für die Absolutglieder aufzustellen, aus denen durch eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen die wahrscheinlichsten Werte der gesuchten Größen sich ergeben.

Sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 (Abb. 268) von bekannter Lage in der Aufnahme abgebildet, so ist der Standort auch durch photogrammetrisches Rückwärtseinschneiden bestimmt. Durch Entnahme der Richtungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aus der Abbildung kann man den Ort der Aufnahme nach früheren Darlegungen (S. 175, Abb. 212) zeichnerisch oder rechnerisch ermitteln. Doch ist diese Art der Punktbestimmung nur bei günstiger Punktlage und gut bestimmten Ausgangspunkten brauchbar. Auch ist es ratsam, überschüssige Punkte heranzuziehen.

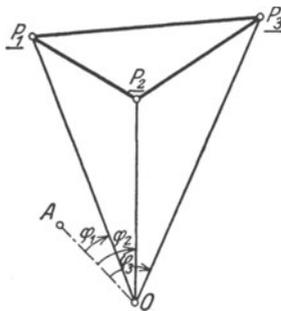


Abb. 268. Photogrammetrische Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden.

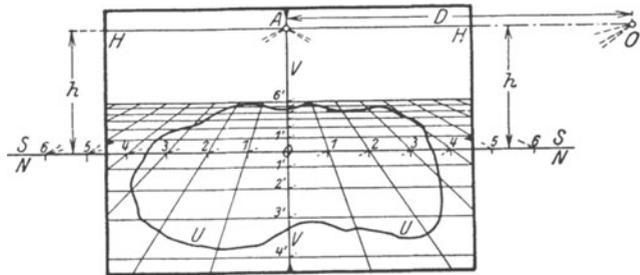


Abb. 269. Darstellung eines mit lotrechter Bildebene aufgenommenen horizontalen Gebildes.

Um bei bekanntem Höhenunterschiede aus der Aufnahme eines stehenden Gewässers dessen Uferlinie darzustellen, legt man zweckmäßig der Horizontalprojektion ein Quadratnetz zugrunde, dessen zur Bildebene senkrechte bzw. parallele Netzlinien perspektivisch in das Abbild zu übertragen sind. Die im Maßstab der Darstellung um den Höhenunterschied h (Abb. 269) vom Bildhorizont HH abstehende Schnittgerade SS der Bildebene mit dem Wasserspiegel wird ohne Verzerrung abgebildet; also bleiben in der Abbildung auch die der gewünschten Maschenweite w entsprechenden gleichabständigen Teilungspunkte $0, 1, 2, 3 \dots$ einer in diese Gerade gelegten Netzlinie erhalten. Das Bild des Teilungsnulldpunktes 0 mag in die Hauptvertikale VV fallen. Da nach den gemachten Annahmen die beiden zueinander senkrechten Scharen von Netzlinien senkrecht bzw. parallel zur Bildebene liegen, so gehen ihre perspektivischen Bilder durch den Hauptpunkt A

(Fluchtpunkt der ersten Schar) bzw. durch den unendlich fernen Punkt des Bildhorizontes HH . Die erste Schar der Netzlinienbilder ist demnach ein durch die Teilungspunkte $0, 1, 2 \dots$ gehendes Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt A . Zur Auffindung der zweiten, zum Horizont parallelen Schar denkt man sich die durch O und VV bestimmte Lotebene durch eine Drehung um die Hauptvertikale in die Aufrißtafel geklappt. Dabei wird auch eine in der genannten Ebene liegende geteilte Netzlinie NN mit umgeklappt, welche in dieser Lage mit SS und ihrer Teilung zusammenfällt. Projiziert man diese Punkte von O aus auf die Hauptvertikale (z. B. 3 nach $3'$), so sind die durch diese Projektionen zu HH gezogenen Parallelen die perspektivischen Bilder der zweiten Schar von Netzlinien. Ist das Netz eng genug, so kann man die Schnittpunkte der Uferlinie UU mit den Netzlinien lediglich durch Schätzung aus dem perspektivischen Netz in das quadratische der Horizontalprojektion übertragen.

Bei Aufnahmen aus der Luft, auf deren Behandlung im einzelnen hier nicht eingegangen werden kann, geht im allgemeinen der Bestimmung von Geländepunkten die Festlegung des Ortes der Aufnahme und ihrer äußeren Orientierung aus den Bildern von wenigstens drei bekannten Punkten voraus. Die in verschiedener Weise mögliche Lösung geht beim sog. Pyramidenverfahren davon aus, daß durch die aus dem photographischen Bild zu entnehmenden Winkel, unter welchen vom Instrument aus die Seiten des Festpunktdreiecks erscheinen, der Aufnahmeort bestimmt ist¹⁾.

In sehr einfacher Weise kann aus einer einzigen Aufnahme ohne Kenntnis irgendwelcher Orientierungselemente die Horizontalprojektion eines ebenen Gebildes gefunden werden, falls die Aufnahme — möglichst in den Ecken — die Bilder von vier bekannten Punkten der Ebene enthält. Ermittelt man in den beiden zu einander projektiven Vierecken durch Verbindung des Diagonalschnittpunktes mit den meist unzugänglichen Schnittpunkten der Vierecksebene auf jeder Seite des Vierecks noch je einen dritten Punkt, so kann man in Bild und Plan leicht zwei projektive Netze von beliebig enger Maschenweite herstellen, mit deren Hilfe die Entzerrung der Aufnahme in einfacher Weise möglich ist.

Enthält die Aufnahme die Bilder von nur drei bekannten Punkten der Ebene, so braucht man zur Entzerrung des Bildes auch die innere Orientierung des Apparates.

Eigenartig und sehr genau ist die *Koppesche* Art der Plattenausmessung. Setzt man das von hinten her zu beleuchtende Negativ genau in seiner ursprünglichen Stellung wieder in den gegen das Lot orientierten Apparat, so kann man durch dessen Objektiv hindurch mittels eines auch für Höhenwinkelmessung eingerichteten Theodolits, dessen Fernrohr auf paralleles Licht eingestellt ist, die nach den einzelnen Geländepunkten führenden Strahlenrichtungen im horizontalen und lotrechten Sinne messen. Dieses Präzisionsverfahren besitzt den Vorzug, daß es Verzeichnungsfehler des Objektivs vollständig eliminiert. Der erwähnte Theodolit ist, damit sein Fern-

¹⁾ Siehe hierzu besonders *Finsterwälder*, Das Rückwärtseinschneiden im Raum (Sitzungsber. d. math.-physik. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., Bd. 33, S. 591 ff.) und *Förg*, Die Bestimmung des Standpunktes und der äußeren Orientierungselemente in der Photogrammetrie bei bekannter innerer Orientierung, Nürnberg 1909; ferner *Hugershoff* und *Cranz*, Grundlagen der Photogrammetrie aus Luftfahrzeugen (mit Literaturverzeichnis), Stuttgart 1919 sowie *Pulfrich*, Über Photogrammetrie aus Luftfahrzeugen, Jena 1919.

Hier seien auch die verdienstvollen Bemühungen von *Scheimpflug* erwähnt, durch zonenweises Umphotographieren von Aufnahmen einen in der Wirkung photographisch naturgetreuen Horizontalplan herzustellen (*Scheimpflug*, Die Herstellung von Karten und Plänen auf photographischem Wege; Sitzungsber. d. K. u. K. Akad. d. Wissensch. in Wien, mathem.-naturw. Kl. 116, 1907).

rohr stets genügend Licht erhält, so gebaut, daß der Schnittpunkt seiner Kippachse mit der Ziellinie näherungsweise in das optische Zentrum des photographischen Objektivs gebracht werden kann¹⁾.

Die Einschneidephotogrammetrie wird vom geometrischen Standpunkte aus im allgemeinen um so bessere Ergebnisse liefern, je weniger die Strahlenschnitte vom rechten Winkel abweichen. Dafür sind aber lange Standlinien notwendig, von deren Endpunkten aus dasselbe Gelände oft recht verschieden aussieht, wodurch das Zusammensuchen von Bildern identischer Punkte sehr erschwert wird. Weniger ausgeprägt ist dieser Mißstand bei der mit kürzeren Grundlinien arbeitenden Parallaxenphotogrammetrie.

d) Die Parallaxenphotogrammetrie.

Die etwa bis zum Anfang dieses Jahrhunderts zurückreichende Parallaxenphotogrammetrie, deren rasches Aufblühen hauptsächlich den Arbeiten *Pulfrichs* zu verdanken ist, bestimmt den Grundriß P^0 (Abb. 270) eines

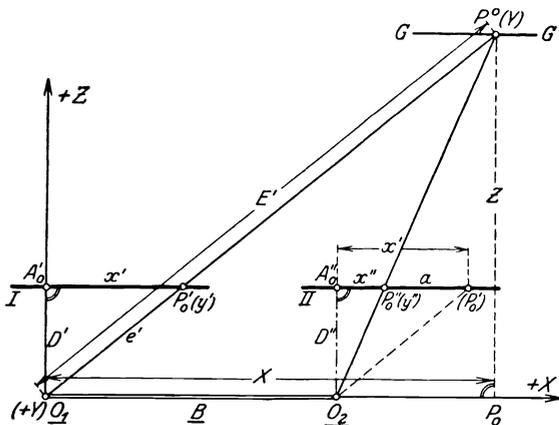


Abb. 270. Normalfall der Stereophotogrammetrie.

Geländepunktes P als den Schnittpunkt des vom ersten (linken) Standort ausgehenden Bestimmungsstrahles $O_1 P^0 = E'$ mit dem geometrischen Ort GG der Punkte gleicher Parallaxe oder Punktverschiebung a , worunter der Abszissenunterschied $x' - x''$ zu verstehen ist. Seine verhältnismäßig größere Genauigkeit verdankt dieses Verfahren dem Umstande, daß man die Parallaxe und den von ihr abhängigen geometrischen Ort GG sehr scharf bestimmen kann²⁾. Es wird dazu die durch ein Stereoskop gesteigerte Fähigkeit des Menschen, mit zwei Augen körperlich zu sehen, benutzt, so daß man das Meßverfahren auch als Stereophotogrammetrie und die Vorrichtung zur Ausmessung der Platten als Stereokomparator³⁾ bezeichnen kann. Dieser besteht, wie die schematische Abb. 271 zeigt, im wesentlichen aus vier auf einem festen Rahmen RR befindlichen Schlitten, deren gegenseitige Verschiebung mittels der Mikrometerschrauben S_1 bis S_4 an deren Trommeln und an Maßstäben scharf abgelesen werden kann. Sind die Platten I, II richtig auf die zugehörigen Schlitten gebracht und stellt man die beiden Bildmarken des einen erweiterten Objektivabstand besitzenden Doppelmikroskops M auf die Bilder P', P'' eines Objektpunktes P scharf ein, so sieht man das räumliche Bild der nächsten Umgebung von P , auf welchen eine ebenfalls räumlich erscheinende Mikro-

¹⁾ *Koppe*, Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung, Braunschweig 1896.

²⁾ Zur Genauigkeit der photogrammetrischen Punktbestimmung siehe *Schilling*, Die geometrische Theorie der Stereophotogrammetrie, Z.V.W. 1911, S. 637 ff.

³⁾ Der Stereokomparator sowie der für stereophotogrammetrische Aufnahmen von *Pulfrich* konstruierte besondere Phototheodolit sind nach Einrichtung, Theorie und Gebrauch eingehend beschrieben in *Pulfrich*, Neuere stereoskopische Methoden und Apparate, Berlin 1912. Siehe auch *Eggert*, Neuere Instrumente für Stereophotogrammetrie, Z.V.W. 1908, S. 425—436.

skopmarke eingestellt ist. Im einzelnen werden durch die Abszissenschraube S_1 , deren Trommelablesungen die Bildpunktabzissen x' der linken Platte angeben, bei fest bleibendem Mikroskop beide Platten gleichmäßig in der Abszissenrichtung verschoben. Die Schraube S_2 bewegt bei unveränderter Plattenlage

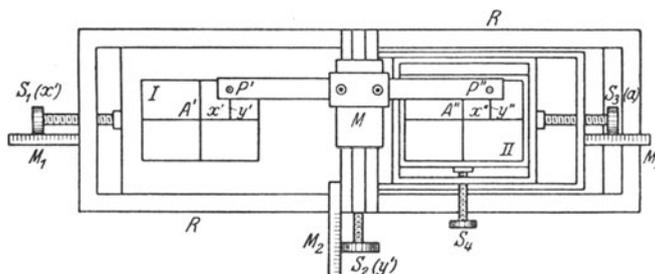


Abb. 271. Schematische Darstellung des Stereokomparators von Pulfrich.

das Mikroskop und mißt die Ordinaten y' der linken Platte, während die Schraube S_3 eine Verschiebung der rechten Platte gegen die festliegende linke ermöglicht und daher zur Parallaxenmessung dient. Durch S_4 endlich wird eine zur Erhaltung des stereoskopischen Effektes notwendige Nachstellung der Platte II in der Ordinatenrichtung ermöglicht.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse bei dem ursprünglich allein angewendeten Normalfall der Stereophotogrammetrie, für welchen die lotrechten Bildebenen beider Aufnahmen zusammenfallen, wie es auch in Abb. 270 angenommen ist. Wir denken uns durch das optische Zentrum O_1 der linken Aufnahme ein räumliches, rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt, dessen X-Achse die horizontale Richtung $O_1 O_2$, dessen Y-Achse das Lot in O_1 und dessen Z-Achse die zur X-Achse senkrechte Horizontale durch O_1 ist. P habe in diesem System die Koordinaten X, Y, Z . Eine durch O_2 gezogene Parallele zu $O_1 P^0$ schneidet die Bildebenenspur II in (P_0'') , dessen Abstand von P_0'' die Parallaxe a ist. Aus den ähnlichen Dreiecken $O_1 P^0 O_2$ und $(P_0'') O_2 P_0''$ sowie $O_1 P^0 P_0$ und $O_1 A_0' P_0'$, ferner aus den beiden zu $O_1 P'$ und $O_1 P$ gehörigen ähnlichen Neigungsdreiecken ergeben sich die Beziehungen

$$Z : D = B : a, \quad X : x' = Z : D, \quad Y : y' = Z : D \dots \dots (600)$$

Ersetzt man die rechten Seiten der beiden letzten dieser Verhältnisgleichungen durch die gleichwertige rechte Seite der ersten Proportion, so erhält man die rechtwinkligen Naturkoordinaten von P in der Form

$$X = x' \frac{B}{a}, \quad Y = y' \frac{B}{a}, \quad Z = D \cdot \frac{B}{a} \dots \dots \dots (601)$$

Der Ausdruck für Z zeigt, daß für den Normalfall der Stereophotogrammetrie der geometrische Ort GG aller Punkte gleicher Parallaxe eine zur Grundlinie B parallele Gerade ist. Während beim Vorliegen des Normalfalls die Koordinaten eines Geländepunktes nach (601) leicht berechnet und aufgetragen¹⁾ werden können, liegen die Verhältnisse schon etwas umständlicher, wenn die lotrechten und zueinander parallelen Bildebenen infolge einer Parallelverschwenkung aus der Grundlinienlotebene $O_1 O_2$ heraustreten. Noch etwas schwieriger wird die Auf-

¹⁾ Zur Erleichterung des Punktauftrags und für die Ermittlung von Y beim Normalfall hat Pulfrich ein mit einem Drehlineal und Teilungen ausgestattetes Zeichenbrett konstruiert; siehe Pulfrich, Über den Gebrauch der von mir angegebenen Hilfsmittel für die Kartierung bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen, Wien und Leipzig 1910.

gabe, wenn die Aufnahmen zwar mit horizontalen, aber sonst beliebig gelegenen Bildweiten erfolgen. In der diesem Fall entsprechenden Abb. 272 sei α die rechtssinnige Verschwenkung der linken Aufnahme, während γ die Konvergenz der Bildweiten D' , D'' und B die Horizontalprojektion der Standlinie bedeuten. Hat der Geländepunkt P (im Grundriß P^0) in bezug auf O_1 und die verlängerte Bildweite D' als Z -Achse die rechtwinkligen Raumkoordinaten X, Y, Z , so ergeben sich mit den in der Abbildung enthaltenen Bezeichnungen aus $O_1 F = Z = E' \cos \varphi'$ leicht die Beziehungen

$$Z = B \cdot f \frac{\cos(\alpha - \gamma) - x'' \sin(\alpha - \gamma)}{(f^2 + x' x'') \sin \gamma + f(x' - x'') \cos \gamma}, \dots \dots (602)$$

$$X = Z \frac{x'}{f}, \quad Y = Z \frac{y'}{f} \dots \dots \dots (603)$$

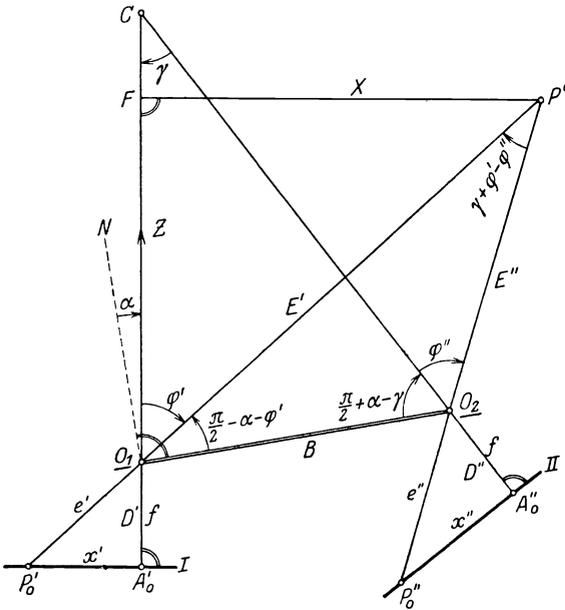


Abb. 272. Stereophotogrammetrische Aufnahmen mit beliebig gerichteten horizontalen Achsen.

Treten die Bildweiten auch noch aus ihrer horizontalen Lage heraus, so werden die Koordinatenformeln¹⁾ derart umständlich, daß eine rein rechnerische Lösung nicht mehr in Frage kommt.

Ganz besonders in solchen Fällen ist die nahezu rein automatisch erfolgende Auswertung der Platten mit Hilfe des Stereoauto-graphen am Platze. Dieser ist im wesentlichen die Verbindung des Stereokomparators mit einem Zeichenbrett und einem Übertragungsmechanismus, welcher so eingerichtet ist, daß durch die zur Einstellung von Bildpunkten im Komparatormikroskop auszuführenden Schlittenbewegungen jeweils ein Zeichenstift an die Stelle der Horizontalprojektionen der entsprechenden Objektpunkte gebracht wird, während gleichzeitig die in mechanischer Weise dargestellten Höhenunterschiede der einzelnen Geländepunkte gegen das Objektivzentrum

O_1 der linken Aufnahme zu dessen Höhe automatisch addiert werden, so daß an einem Maßstab sogleich auch die Meereshöhen abgelesen werden können. Ganz besonders vorteilhaft gestaltet sich die Zeichnung von Horizontalkurven. Man braucht dazu nur deren Höhe an einem sog. Höhenmaßstab fest einzustellen und hierauf die zum Abszissen- und Parallaxenschlitten gehörigen Kurbeln so zu drehen, daß die Stereoskopmarke stets in der Oberfläche des räumlich gesehenen Geländebildes bleibt; der Zeichenstift beschreibt dabei die gesuchte Schichtenlinie. Aber auch andere wichtige Linien und Punkte können — unter Freigabe des Höhenmaßstabes — mechanisch ausgemessen werden, wenn sie deutlich erkennbar sind. Zweifellos hat die Stereophotogrammetrie durch die Erfindung des Stereoauto-graphen, der die Zeichenarbeit

²⁾ Die diesem allgemeinsten Fall entsprechenden Formeln sind z. B. angegeben in Sander, W., Der v. Orel-Zeibische Stereoauto-graph und neue Vorschläge für seine weitere Ausgestaltung; Z.J.K. 1921, S. 1—27, 33—60 u. 65—86.

in der kürzesten Zeit bewältigt, eine gewaltige Förderung erfahren. Ursprünglich war dieses durch *v. Orel*¹⁾ erfundene Präzisionsinstrument, um dessen Bau und Vervollkommnung sich die Firma *Zeiß* große Verdienste erworben hat, nur für den Normalfall der Stereophotogrammetrie eingerichtet, aber schon seit 1914 kann man damit auch Aufnahmen mit beliebig gerichteten horizontalen Achsen auswerten²⁾ und durch *Sanders* und *v. Grubers* Arbeiten ist auch die Auswertung von Aufnahmen mit beliebig liegenden geneigten Achsen mittels des Stereoautographen als gelöst zu betrachten³⁾.

¹⁾ *v. Orel*, Der Stereoautograph als Mittel zur automatischen Verwertung von Komparatordaten. Mitt. d. K. K. Militärgeographischen Instituts in Wien, Bd. XXX, 1910. (Siehe auch *Eggert*, Der Stereoautograph von Oberleutnant *v. Orel*, Z.V.W. 1913.) Ein Vorläufer des *v. Orel*schen Apparates ist der Stereoplotter von *Thompson*.

²⁾ Siehe dazu *Lüscher*, *H.*, Der Stereoautograph Modell 1914. Seine Berichtigung und Anwendung, Dissertation als Handschrift gedruckt 1917? (Siehe auch Z.J.K. 1919, 2—19, 55—67 u. 83—91.)

Ferner sei hingewiesen auf *Eggert*, Der Stereoautograph, Z.V.W. 1913, S. 7—12 und 1920, S. 529—538.

³⁾ Siehe hierzu *Sander*, Der *v. Orel-Zeiß*ische Stereoautograph und neue Vorschläge für seine weitere Ausgestaltung, Z.J.K. 1921, S. 1 ff.

Eine bis 1911 reichende Zusammenstellung der Literatur über alte und neue Photogrammetrie gibt *Weiß* in seiner S. 245, Anm. 1) genannten Arbeit. Auch *Pulfrichs* Abhandlung Stereoskopisches Sehen und Messen, Jena 1911, enthält eine von 1900 bis 1911 reichende Literaturzusammenstellung, in der neben dem stereoskopischen Sehen auch die Stereophotogrammetrie berücksichtigt ist. Eine Zeitschrift für das Gesamtgebiet der Photogrammetrie ist das seit 1908 in Wien und Leipzig erscheinende Internationale Archiv für Photogrammetrie.

IV. Planherstellung und Flächenberechnung.

37. Allgemeines.

Ein Hauptzweck der meisten geodätischen Aufnahmen ist die Herstellung von Karten und Plänen. Man versteht darunter zeichnerische Darstellungen der Aufnahmen, welche den Geländegrundriß bis auf den Maßstab richtig wiedergeben. Abbildungen kleineren Maßstabes (unter $M=1:10\,000$) dienen mehr geographischen sowie Übersichtszielen und werden als Karten bezeichnet, während man bei den für ingenieurtechnische Zwecke wichtigeren Darstellungen größeren Maßstabes von Plänen spricht. Je nachdem ein solches Bild lediglich Grundrißdarstellungen oder auch noch Höhenangaben in irgendeiner Form enthält, handelt es sich um Horizontal- oder Lagepläne bzw. um Höhenpläne. In beiden Fällen muß die Darstellung ausgebehrter Aufnahmen auf eine größere Anzahl regelmäßig oder unregelmäßig begrenzter Blätter verteilt werden, deren Ausmaße in beiden Richtungen etwa

40 bis höchstens 60 cm betragen. Zur regelmäßigen Blattbegrenzung dienen bei Karten meistens geographische Netzlinien (Meridiane und Parallelkreise), bei Plänen hingegen rundabständige Senkrechte und Parallele zur Abszissenachse des Koordinatensystems. Im ersteren Falle erfolgt die Bezeichnung des Blattes entweder durch eine Nummer oder durch Angabe des wichtigsten in ihm enthaltenen Ortes; im zweiten Falle hingegen wird die Lage eines Blattes durch Angabe des Quadranten sowie der von den genannten Senkrechten und Parallelen eingeschlossenen Schicht (römische Ziffern in Abb. 273) und Reihe (arabische Nummern) bestimmt. Das in Abb. 273 schraffierte Blatt *B* würde demnach die Bezeichnung N. O.

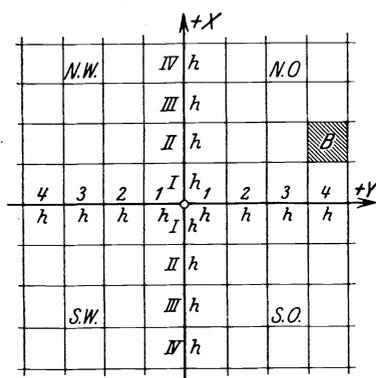


Abb. 273. Regelmäßige Blatteinteilung.

II. 4 tragen. Daß die Ränder regelmäßig begrenzter Blätter Grundstücke durchschneiden, ist nicht schlimm, da die Flächenberechnung doch meist aus Naturmaßen erfolgt und kleinere Reststücke auch noch über den Blattrand hinaus kartiert werden können. Der große Vorteil der regelmäßigen Blattbegrenzung, die einzelnen Blätter je nach Bedarf in einfachster Weise zu größeren Plänen zusammenstoßen zu können, geht bei der meist durch Gemeindegrenzen oder Flurgrenzen bestimmten unregelmäßigen Blatteinteilung vollständig verloren, welcher Nachteil durch die ungeteilte Darstellung der Grundstücke keinesfalls wettgemacht werden kann.

38. Horizontalpläne.

Zur Zeichnung dieser Pläne sind zunächst alle das Netz der Aufnahme bildenden Dreiecks-, Polygon- und Liniennetzpunkte mittels ihrer rechtwinkligen Koordinaten aufzutragen. Diese werden ihrer großen Ausdehnung halber nicht unmittelbar von den Koordinatenachsen aus, sondern von den dazu parallelen Seiten eines Quadratnetzes mit runder Maschenweite l (meist 1 dm) abgesetzt. Die Konstruktion eines solchen Koordinatennetzes muß man, da die Schiebedreiecke zu ungenau sind, für gewöhnlich mit Hilfe von Zirkel und Transversalmaßstab und eines auf seine Geradlinigkeit geprüften Lineals vornehmen. Sehr vorteilhaft ist die Verwendung eines sogenannten Konstruktions- oder Kontroll-Lineals, welches zwei Teilungen mit zusammenfallenden Anfangspunkten und den Teilungseinheiten l und $l\sqrt{2}$ (Diagonaleinteilung) besitzt.

Soll der Auftrag des Koordinatennetzes nach der in Abb. 274 dargestellten Diagonalenmethode erfolgen, so zieht man zwei annähernd durch die Blattecken E_1, E_3 und E_2, E_4 gehende Gerade, betrachtet sie als die Diagonalen eines Rechtecks und trägt auf ihnen von ihrem Schnittpunkte M aus die angenehme Halbdigonale $\frac{1}{2}d$ nach allen Seiten hin ab. Die so gewonnenen Punkte A, B, C, D bilden einen rechteckigen Rahmen. Auf dessen Seiten werden von den Ecken aus solche Werte c_1, c_2 abgetragen, daß die Verbindungslinien der bezeichneten Punkte Netzlinien von geeigneter Lage sind. Bezeichnet man von diesen aus auf den Rechtecksseiten alle um die gewünschte Maschenweite l abstehenden Punkte, so erhält man in den Verbindungslinien der zusammen-

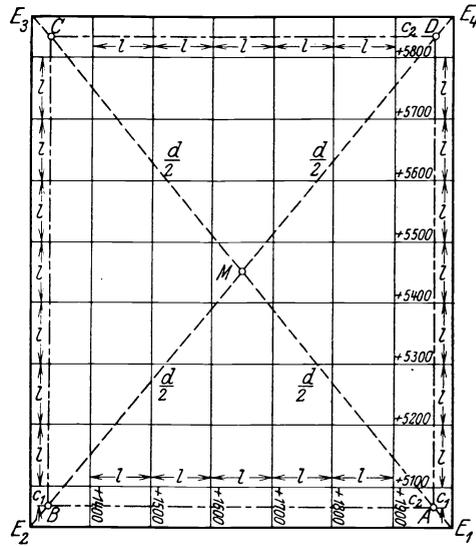
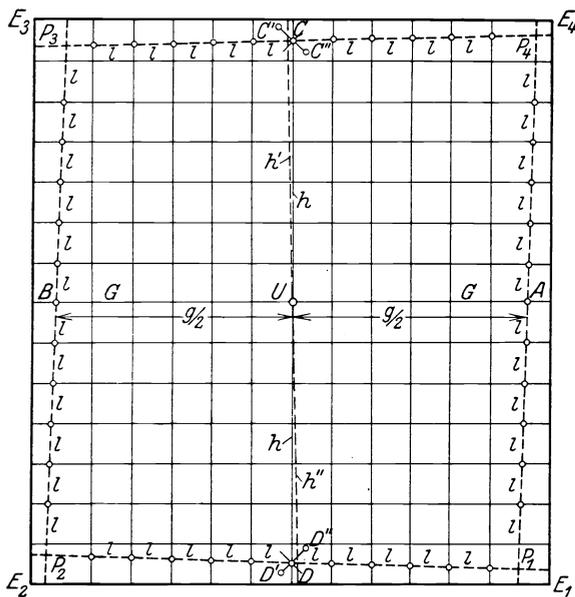


Abb. 274. Auftrag eines Koordinatennetzes nach der Diagonalenmethode.

gehörigen Punkte die beiden Parallelenscharen des Koordinatennetzes. Bei der Prüfung des Netzes müssen alle diagonal liegenden Netzpunkte in die geradlinige Kante und in die Teilstriche der $l\sqrt{2}$ -Teilung eines geeignet angelegten Kontrollineals fallen. Um nach der in Abb. 275 angedeuteten Achsenkreuzmethode ein Koordinatennetz aufzutragen, wählt man in der Mitte einer das Blatt etwa halbierenden horizontalen Geraden GG den Achsen-schnittpunkt U und errichtet in ihm mit gewöhnlichen Hilfsmitteln (Reißschiene und Winkel) eine zu GG annähernd Senkrechte $k'k''$. Durch Abtragen einer angenommenen Länge $\frac{1}{2}g$ auf GG von U aus nach beiden Seiten hin findet man die Hilfspunkte A, B . Werden z. B. mit einem Stangen-zirkel von geeigneter Öffnung r , dessen eines Ende in B eingesetzt ist, in der Nähe der Blattränder zu beiden Seiten von $k'k''$ nahe an diesen Linien die Punkte C', C'' bzw. D', D'' bezeichnet, so schneidet der nunmehr in A mit derselben Öffnung r eingesetzte Zirkel auf den Strecken $C'C''$ und $D'D''$ die Punkte C und D aus, deren Verbindungslinie mit AB ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit dem Mittelpunkt U bildet. Die durch A, B, C, D mit

Reißschiene und Winkel gezogenen Achsenparallelen bilden ein von einem Rechteck nur wenig abweichendes Hilfsviereck $P_1P_2P_3P_4$, auf dessen Seiten von den erstgenannten Achsenpunkten aus die gewünschte Maschenweite l wiederholt abgetragen wird.



Die Verbindungslinien entsprechender Punkte bilden wieder das Koordinatennetz. Nimmt man an, der Endpunkt irgendeiner der etwa 0,5 m langen Seiten des Hilfsvierecks sei gegen ihren Anfangspunkt seitlich um 2 mm verschoben, so ist der hieraus entstehende Projektionsfehler dieser Seite erst 4μ , also noch weit unter der zeichnerischen Darstellungsmöglichkeit. Zur Erzielung einer scharfen Konstruktion ist hauptsächlich darauf zu sehen, daß die Punkte A, B, C, D nahe an die Blattränder fallen und das Einkreuzen von C und D unter nahezu rechten Winkeln erfolgt. Zur Verprobung des Netzes dient wieder das Kontrollineal.

Abb. 275. Auftrag eines Koordinatennetzes mit Hilfe eines rechtwinkligen Achsenkreuzes.

Handelt es sich um die Konstruktion eines quadratischen Blattes 1 2 3 4 (Abb. 276) von der Seitenlänge a , so trägt man erst die Punkte 1, 2 im Abstände a auf, errichtet in 2 die auf 1 2 (annähernd) Senkrechte h' und bezeichnet zu ihren beiden Seiten in ihrer unmittelbaren Nähe zwei von 1 um $a\sqrt{2}$ abstehende Hilfspunkte $3', 3''$. Der von 2 aus durch Einkreuzen mit der Entfernung a bestimmte Punkt 3 auf der Strecke $3' 3''$ bezeichnet einen weiteren Eckpunkt des Blattquadrats. Dessen letzter Punkt 4 kann von 2 und 1 aus in derselben Weise oder von 1 und 3 aus durch Einkreuzen mit dem Halbmesser a gefunden werden. Eine weitere Probe für diese am besten mit dem Kontrollineal auszuführende Konstruktion bietet der Umstand, daß alle Halbdagonalen des Quadrats gleich lang sind.

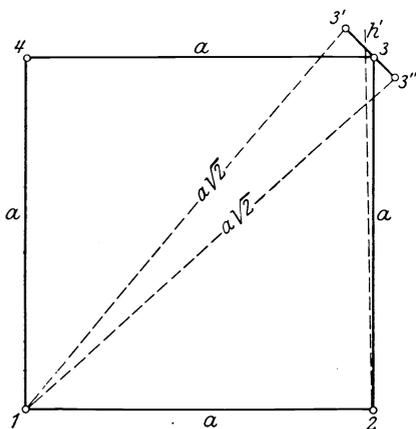


Abb. 276. Auftrag einer quadratischen Blattbegrenzung.

Wesentlich genauer, leichter und in viel kürzerer Zeit wie mit Zirkel und Lineal kann ein Koordinatennetz mit Hilfe des in Abb. 277 skizzierten großen, freirollenden Koordinatographen von Coradi erstellt werden. Das Instrument besteht im wesentlichen aus zwei Wagen W_1, W_2 , die mittels der schneidenförmigen, in den Nuten N, N' laufenden Räder r, r, r', r' in den Koordinatenrichtungen verschoben werden können. W_1 läuft auf einer mit dem Zeichentisch T verschraubten Schiene AA und trägt das am freien Ende

der schneidenförmigen, in den Nuten N, N' laufenden Räder r, r, r', r' in den Koordinatenrichtungen verschoben werden können. W_1 läuft auf einer mit dem Zeichentisch T verschraubten Schiene AA und trägt das am freien Ende

mittels einer Laufrolle R auf einer Schiene B ruhende Gestell GG' für W_2 . Während die groben Verschiebungen an den Teilungen M, M' abgelesen werden, dienen zur Messung der feinen Bewegungen die in den Zahnstangen Z, Z' sich abwälzenden Zählrollen z, z' . Feineinstellungen nach erfolgter Klemmung werden durch Feinbewegungen F, F' ermöglicht. Der Wagen W_2 trägt die federnden Punktierstifte I, II, III, durch welche jeweils drei Netzpunkte auf einmal bezeichnet werden können. An ihre Stelle gebrachte Reißfedern zeichnen so-

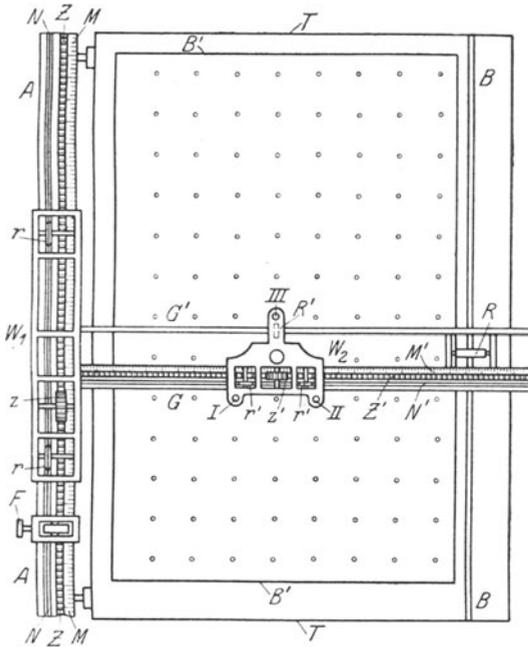


Abb. 277. Skizze des großen, freierollenden Koordinatographen von Coradi.

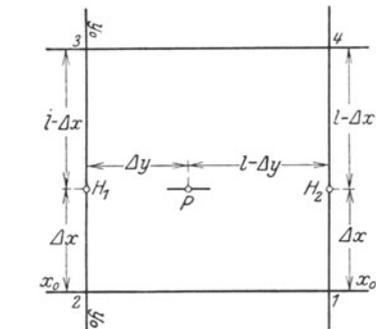


Abb. 278. Auftrag eines durch seine rechtwinkligen Koordinaten (im Hauptsystem) bestimmten Punktes.

gleich die Linien des Koordinatennetzes. Der mittlere Auftragfehler dieses Apparates ist der Größenordnung nach auf etwa 1 mm zu schätzen¹⁾.

Soll ein Punkt P mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y ins Koordinatennetz eingetragen werden, so ermittelt man zunächst dasjenige Netzquadrat 1 2 3 4 (Abb. 278), in welches der Punkt hineinfällt. Gehören zu den den Koordinatenachsen nächstliegenden Quadratseiten 12 und 23 die runden Koordinaten x_0, y_0 , so sind in den Ausdrücken

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y \dots \dots \dots (604)$$

Δx und Δy die Abstände des Punktes P von den erwähnten Quadratseiten. Durch Abtrag des Restes Δx von 1 und 2 aus in der Abszissenrichtung erhält man die mittels der Ergänzung $l - \Delta x$ von der Gegenseite aus zu prüfenden Hilfspunkte H_1, H_2 , deren Verbindungslinie ein geometrischer Ort für P ist. Trägt man auf ihm von H_1 aus Δy ab, so ergibt sich der aufzutragende Punkt, dessen richtige Lage mittels der Restlänge $l - \Delta y$ von H_2 aus zu verproben ist. Bei einer solchen Konstruktion ist die hernach zu besprechende Papieränderung genau zu berücksichtigen. Auch der Auftrag aller dieser Punkte, deren rechtwinklige Koordinaten im gemeinsamen Hauptsystem bekannt sind, kann außer durch Zirkel und Transversalmaßstab

¹⁾ Zur eingehenden Untersuchung des Instrumentes siehe Spaeth, Der freierollende Koordinatograph, Z. V. H. B. V. 1914, S. 131 bis 144.

(S. 37)¹⁾ mittels des vorhin beschriebenen Koordinatographen schnell und mit größter Genauigkeit erfolgen²⁾).

An das feste Gefüge der koordinierten Punkte schließt sich nunmehr der Auftrag des Liniennetzes an. Dabei ergeben sich zahlreiche Proben für die Richtigkeit der Arbeit, da die Entfernungen der kartierten Netzpunkte mit den entsprechenden Maßangaben des Handrisses übereinstimmen müssen. Erst nach der angedeuteten Verprobung des Polygon- und Liniennetzes erfolgt nach den Angaben des Handrisses im engsten Anschluß an die Art der Aufnahme die Kartierung der Einzelheiten mit Hilfe der auf die einzelnen Netzseiten und ihre Anfangspunkte bezogenen örtlichen, rechtwinkligen Koordinaten. Verlängerungen und Spannungen

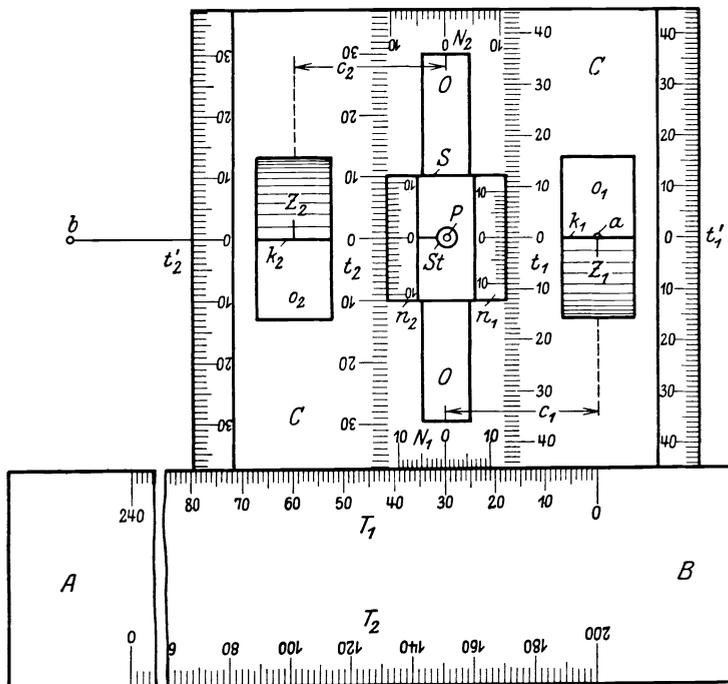


Abb. 279. Orthograph.

dienen zur Ergänzung des Auftrags, hauptsächlich aber als willkommene Kontrollen. Ist bei dieser Kleinkartierung von den einzelnen Linien aus jeweils eine größere Anzahl von Punkten durch Abszissen und Ordinaten abzusetzen, so kann der sog. Orthograph gute Dienste leisten. Ein von Peltz 1857 konstruierter Orthograph³⁾ besteht im wesentlichen aus einem zwei verschiedene Teilungen T_1 , T_2 (für verschiedene Maßstäbe) tragenden Abszissenlineal AB (Abb. 279), an dem eine mit denselben Teilungen t_1 , t_2 und den zugehörigen Nonien N_1 , N_2 (zu T_1 , T_2) bzw. n_1 , n_2 (zu t_1 , t_2) versehene Ordinatenplatte CC verschoben werden kann. Zwei seitliche Fenster o_1 , o_2 sind in der einen Richtung durch Kanten k_1 , k_2 begrenzt, welche auf einer

¹⁾ Die zum Punktauftrag durch rechtwinklige Koordinaten für gewöhnlich erforderlichen Lineale und Winkel bezeichnet man als Abschiebezeug.

²⁾ Diesem Zweck und dem Kleinauftrag insbesondere dient ein etwas kleineres Instrument dieser Art, der sog. Detailkoordinatograph von Coradi.

³⁾ Peltz, W., Der Orthograph, Z. V. W. 1874, S. 45 bis 48.

die Nullpunkte der Teilungen t_1, t_2 enthaltenden, zur Kante des Abszissenlineals parallelen Geraden liegen. In einem in der Mitte angeordneten Ausschnitt OO gleitet senkrecht zum Abszissenlineal eine mit Nonien und Punktierstift St ausgestattete Zeigervorrichtung S . Zum Gebrauch legt man die Kanten k_1, k_2 so an die betreffende Messungslinie ab , daß ihr Anfangspunkt a an einem Zeiger Z_1 ansteht und verschiebt hierauf das angelegte Abszissenlineal so weit, bis an ihm der runde Abstand c_1 dieses Hilfsstriches Z_1 vom Nullstrich des Nonius N_1 abgelesen wird. Bei richtiger Lage von AB muß, nachdem durch Verschieben von C und S an N_1 und n_1 die Einstellungen Null erreicht sind, der Punktierstift St auf a stehen und bei einer Verschiebung von C längs AB auch b auf den Fensterkanten k_1, k_2 liegen. Sind für irgendeinen Punkt P an T_1 und t_1 seine Koordinaten eingestellt, so wird er durch einen Druck auf St auf dem Papier bezeichnet. Werden an den Seiten von C mit t_1 und t_2 gleiche Kantenteilungen t'_1, t'_2 angebracht, so kann man das Instrument auch zur Entnahme von Koordinaten aus dem Plan verwenden.

Der mittlere Fehler der mit Zirkel und Transversalmaßstab durch einen geübten Zeichner aufgetragenen Längen ist auf $\frac{1}{20}$ mm zu veranschlagen. Wie schon erwähnt, wird die Auftragegenauigkeit bei Verwendung eines Koordinatographen wesentlich erhöht.

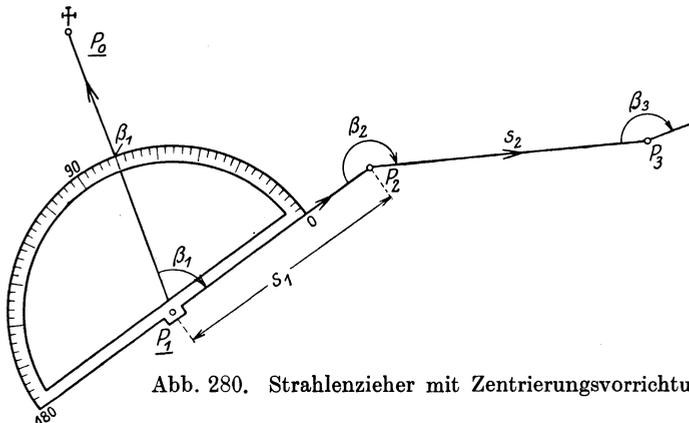


Abb. 280. Strahlenzieher mit Zentrierungsvorrichtung.

Untergeordnete Züge kann man mit Hilfe eines Strahlenziehers unmittelbar mit den gemessenen Bestimmungsstücken zu Papier bringen. Hat man einen Strahlenzieher mit Zentrierungsvorrichtung (Abb. 280), d. h. einen mit einer Gradteilung versehenen Kreis, dessen Mittelpunkt durch ein Kreuz, einen engen Kreis auf Glas oder durch eine kleine kreisförmige Öffnung bezeichnet ist, so legt man seinen Mittelpunkt auf den einen Anschlußpunkt P_1 und dreht das Instrument so, daß die als Zeiger dienende Anschlußrichtung P_1P_0 an ihm den Polygonwinkel β_1 angibt. Trägt man in dieser Stellung längs des Nullhalbmessers (Ziehkante) von P_1 aus die erste Polygonseite s_1 im gewünschten Maßstabe ab, so ist der Punkt P_2 gefunden. Ebenso findet man von P_2 aus mit der Orientierung P_2P_1 den Punkt P_3 und in ganz entsprechender Weise ergeben sich auch die übrigen punkte, deren letzter bei guter Arbeit in den bereits durch seine Koordinaten aufgetragenen zweiten Anschlußpunkt P_n fallen muß. Liegen die Richtungswinkel oder Azimute der Polygonseiten vor, so benutzt man zur Orientierung beim Auftrag der folgenden Richtung jeweils die durch ihren Anfangspunkt gezogene Abszissenparallele bzw. die Meridian-

richtung. Mit denselben Hilfsmitteln können von den Polygonseiten aus auch die durch ihre horizontalen Polarkoordinaten bestimmten Einzelpunkte des Geländes aufgetragen werden.

Ein recht bequemes Arbeiten ermöglicht der in Abb. 281 skizzierte, nach *Jordans*¹⁾ Angaben hergestellte Strahlenzieher ohne Zentrierung. Er besitzt einen um den Kreismittelpunkt M drehbaren Arm A mit einem

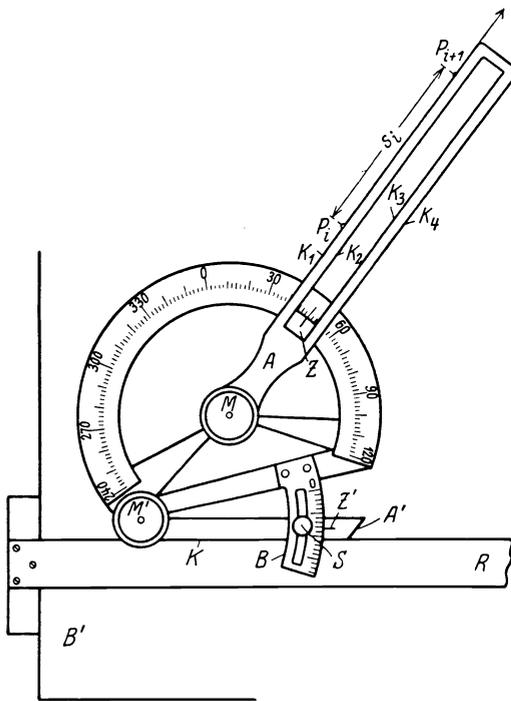


Abb. 281. Strahlenzieher ohne Zentrierungsvorrichtung (nach *Jordan*).

Einstellstrich Z und vier zum Zeigerhalbmesser parallelen Ziehanten K_1 bis K_4 . Ein zweiter Arm A' mit zwei parallelen Kanten wird zur Berücksichtigung der Deklination beim Auftrag magnetischer Beobachtungen um den Mittelpunkt M' eines Hilfsbogens B so weit gedreht, bis an ihm die Deklination eingestellt ist. Beim Gebrauch wird bei angezogener Klemme S die Unterkante K des Armes A' an die Oberkante der Reißschiene R angelegt, der abzutragende Richtungswinkel bzw. das Azimut mit Hilfe von Z am Hauptbogen eingestellt und das Instrument — wenn nötig auch die Reißschiene — so weit verschoben, bis eine geeignet beleuchtete Ziehkante durch den gegebenen Punkt P_i geht. Von diesem aus erhält man durch Abtrag von s_i sogleich den nächsten Polygonpunkt P_{i+1} . Eine Abweichung der Reißschieneoberkante von der Senkrechten

zum Blattrand kann ebenfalls durch Verstellen des Armes A' berücksichtigt werden²⁾.

Beim Reinzeichnen der Pläne werden die fein eingestochenen Punkte — wenigstens soweit die entsprechenden Feldpunkte scharf bezeichnet sind — von den Tuschelinien nicht überzogen. Zur Darstellung der Einzelheiten dienen besondere Symbole, sog. Signaturen, die als Grund- und Aufrißbilder den natürlichen Eindruck der Gegenstände mehr oder weniger gut wiedergeben³⁾.

Sowohl für den Auftrag der Pläne wie auch bei der Maßentnahme aus Plänen spielt die Papieränderung eine große Rolle. Dies gilt weniger für die neuerdings häufigeren Trockendrucke als besonders für die älteren durch-

¹⁾ *Jordan*, Strahlenzieher, Z. V. W. 1899, S. 135 bis 138.

²⁾ Bussolenzüge werden außer durch rechtwinklige Koordinaten oder mit dem Strahlenzieher auch mit Kompaß und Zulegeplatte oder auch mit Hilfe von Tangenten- und Sehnenlängen kartiert.

³⁾ Die Zeichnungsvorschriften der einzelnen Verwaltungen weichen vielfach voneinander ab. Solche Vorschriften sind z. B.: a) Bestimmungen über die Anwendung gleichmäßiger Signaturen für topographische Pläne und geometrische Karten, Pläne und Risse (Generaldirektorium der Vermessungen in Preußen), Berlin 1888, b) Vorschriften für Zeichnung und Lithographie der bayerischen Katasterpläne vom Jahre 1896.

wegs feucht gedruckten Pläne. Diese erleiden besonders in der Richtung, in welcher sie durch die Presse gingen, beträchtliche, als Papiereingang bezeichnete Schrumpfungen, etwa $1,5\%$, und senkrecht dazu $0,5\%$. Sehr alte und schlecht behandelte Pläne zeigen manchmal Eingänge von 3% und mehr. Daneben findet ein vom Verlaufe der Temperatur- und Luftfeuchtigkeit abhängiges geringes unregelmäßiges Arbeiten des Papieres statt.

Eine einwandfreie Bestimmung der Papieränderung setzt die Erhaltung der Schnittpunkte des Koordinatennetzes voraus. Der betrachtete Bezirk sei stets nur so groß, daß innerhalb desselben die Papieränderung für alle zueinander parallelen Richtungen als unveränderlich betrachtet werden darf. Bei einer solchen Abgrenzung liegen die beiden extremen Werte der Papieränderung, welche $p\%$ und $q\%$ sein mögen, stets in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Zeigt sich nun, daß die Maschenweite nicht mehr l sondern l' und l'' (Abb. 282) in der Richtung der Koordinatenachsen ist, so treffen auf diese Längen die Verbesserungen

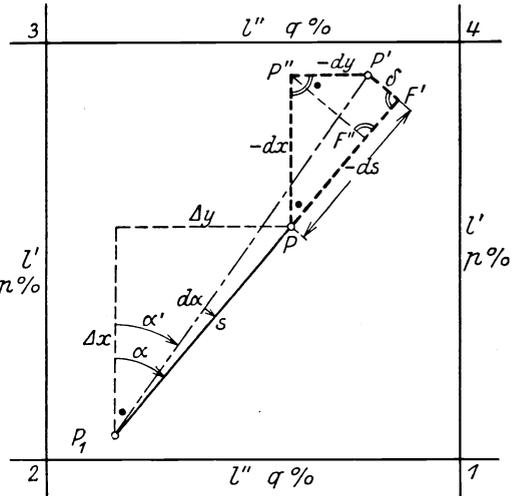


Abb. 282. Papieränderung, Längen- und Querverschiebung.

denen die Prozentzahlen

$$dl_x = l - l', \quad dl_y = l - l'', \quad \dots \dots \dots (605)$$

denen die Prozentzahlen

$$p_0 = 100 (dl_x : l) \quad \text{und} \quad q_0 = 100 (dl_y : l) = q_0 \dots \dots \dots (606)$$

entsprechen.

Die nächste Untersuchung erfolgt unter der meist zutreffenden Annahme, daß die Extremwerte der Papieränderung in die Richtung der Blattränder fallen, so daß alle rechten Winkel, deren Schenkel den Koordinatenachsen parallel sind, als rechte Winkel erhalten bleiben. Die nach (606) bestimmten Zahlen p_0 und $q_0 = p_{90}$ sind dann sogleich die Extremwerte p und q . Der Endpunkt P (Abb. 282) einer Strecke $P_1P = s$ gelangt bei als fest betrachtetem P_1 nach P' und bedarf der Koordinatenverschiebungen (Verbesserungen)

$$dx = \frac{p}{100} \cdot \Delta x, \quad dy = \frac{q}{100} \Delta y, \quad \dots \dots \dots (607)$$

um wieder nach P zu kommen. Die entsprechenden, ebenfalls als Verbesserungen aufgefaßten Längen- und Querverschiebungen ds und δ von P lassen sich aus der Abbildung, deren Fehlerfigur $PP''P'F'$ der Deutlichkeit halber übertrieben groß gehalten ist, unter Benutzung des Richtungswinkels α leicht ablesen; es ist nämlich

$$ds = dx \cos \alpha + dy \sin \alpha = \frac{s}{100} (p \cos^2 \alpha + q \sin^2 \alpha) = \frac{p \cdot \Delta x^2 + q \cdot \Delta y^2}{100 \cdot s}, \quad \dots \dots (608)$$

$$\delta = -dx \sin \alpha + dy \cos \alpha = -\frac{s}{200} (p - q) \sin 2\alpha = -\frac{1}{100} \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{s} (p - q). \quad (609)$$

Die entsprechenden, auf s bezogenen Prozentzahlen p_α und r_α der Papieränderung in der Richtung α und der dazu senkrechten Querverschiebung sind daher

$$p_\alpha = 100 \frac{ds}{s} = p \cos^2 \alpha + q \sin^2 \alpha, \dots (610)$$

$$r_\alpha = 100 \frac{\delta}{s} = -(p - q) \sin \alpha \cos \alpha. \dots (611)$$

Sie können nach Andeutung der ohne viel Worte verständlichen Abb. 283 mit Hilfe zweier konzentrischer Kreise mit den Halbmessern p und q in einfacher Weise zeichnerisch gefunden werden.

Die aus r_α bzw. δ folgende Richtungsänderung $\alpha - \alpha'$ ist in Gradmaß

$$d\alpha = \frac{\rho}{100} \cdot r_\alpha = -\frac{\rho}{200} (p - q) \sin 2\alpha = -\frac{\rho}{100} \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{s^2} (p - q). \dots (612)$$

Damit erhält man die Verzerrung (als Verbesserung) $d\beta_{ik}$ eines Winkels $\beta_{ik} = \alpha_k - \alpha_i$ als den Ausdruck

$$d\beta_{ik} = d\alpha_k - d\alpha_i = -\frac{\rho}{100} (p - q) \sin \beta_{ik} \cos (\alpha_i + \alpha_k), \dots (613)$$

welcher für $\beta_{ik} = 90^\circ$ den besonderen Wert

$$d\beta_{90} = \frac{\rho}{100} (p - q) \sin 2\alpha_i \dots (614)$$

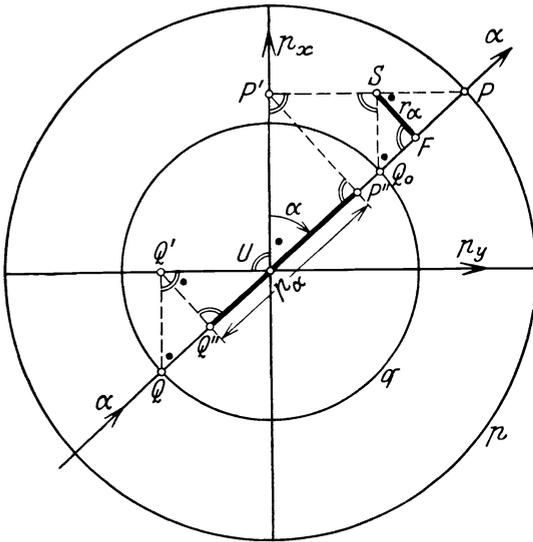


Abb. 283. Zeichnerische Ermittlung der Prozentzahlen r_α , p_α der Längen- und Querverschiebung des Endpunktes einer beliebig gerichteten Strecke.

annimmt. Die Verzerrung eines festen Winkels β_{ik} wird nach (613) am größten, nämlich $\frac{1}{100} \rho (p - q) \sin \beta_{ik}$, wenn seine Schenkel zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegen. Ist dagegen eine Oktantenrichtung die Winkelhalbierende, so verschwindet die Winkelverzerrung. Infolge der Winkelverzerrung bedarf der Endpunkt einer Ordinate o , welche von einer den Richtungswinkel α_i besitzenden Messungslinie aus abgesetzt worden ist, einer Querversetzung

$$\delta_o = \frac{1}{100} \cdot o (p - q) \sin 2\alpha_i, (615)$$

deren Projektionen auf die Koordinatenachsen

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ox} &= -\delta_o \sin \alpha_i, \\ \delta_{oy} &= \delta_o \cos \alpha_i \end{aligned} \right\} (616)$$

sind.

Die Richtigkeit der vorhin getroffenen Annahme $p_0 = p$, $p_{90} = q$ wird in einfachster Weise durch die gleiche Länge der abgegriffenen Diagonalen 13 und 24 (Abb. 282) bestätigt. Ein Unterschied dieser Strecken weist jedoch darauf hin, daß die Extremwerte p und q nicht in die Koordinatenrichtungen fallen. Trotzdem bleiben alle bisher abgeleiteten Formeln erhalten, wenn man für deren Anwendung die zunächst noch unbekannte

Richtung von p als Abszissenachse auffaßt. Ist α_0 ihr Richtungswinkel im alten System, so sind alle Richtungswinkel im neuen Hilfssystem um α_0 kleiner als die entsprechenden Werte α im Hauptssystem; also bestehen nach (610) die Gleichungen

$$p_\alpha = p \cos^2(\alpha - \alpha_0) + q \sin^2(\alpha - \alpha_0), \dots \dots \dots (617)$$

$$q_\alpha = p \sin^2(\alpha - \alpha_0) + q \cos^2(\alpha - \alpha_0), \dots \dots \dots (618)$$

deren Addition auf den Ausdruck

$$p_\alpha + q_\alpha = p + q = 2\sigma_1 \dots \dots \dots (619)$$

führt. Demnach ist die Summe der prozentualen Papieränderungen in zwei beliebigen zueinander senkrechten Richtungen konstant.

Zur Ermittlung der drei Unbekannten p, q, α_0 ist es vorteilhaft, für vier bestimmte Richtungen — genügen würden schon drei — aus dem betreffenden Netzquadrat die zugehörigen Papieränderungen zu entnehmen. Sind $p_0, p_{45}, p_{90}, p_{135}$ diese für die Koordinatenrichtungen und Oktantenrichtungen ermittelten Zahlen, so erhält man zunächst aus (619)

$$\frac{1}{2}(p + q) = \frac{1}{2}(p_0 + p_{90}) = \frac{1}{2}(p_{45} + p_{135}) = \sigma_1 \dots \dots \dots (620)$$

Wendet man (617) und (618) einerseits auf p_0 und p_{90} , andererseits auf p_{45} und p_{135} an, so findet man unter Verwendung der Abkürzungen ξ, η

$$(p - q) \cos 2\alpha_0 = p_0 - p_{90} = \xi, \dots \dots \dots (621)$$

$$(p - q) \sin 2\alpha_0 = p_{45} - p_{135} = \eta. \dots \dots \dots (622)$$

Diese beiden Ausdrücke bestimmen den Winkel $2\alpha_0$ sowie die Differenz $p - q = 2\sigma_2$. Man findet

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\eta}{\xi}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \dots \dots \dots (623)$$

Verbindet man die letzte Gleichung mit (620), so ergeben sich die Extremwerte der Papieränderung, nämlich

$$p = \sigma_1 + \sigma_2, \quad q = \sigma_1 - \sigma_2. \dots \dots \dots (624)$$

Etwas einfacher ist die unmittelbar an (620) bis (622) anschließende zeichnerische Lösung nach Abb. 284, in welcher die gegebenen Stücke σ_1, ξ, η unterstrichen, die nach Größe und Lage gesuchten Werte p, q stark ausgezogen sind. Zur Konstruktion sei nur noch bemerkt, daß M und H' die Mittelpunkte des Bogens $H''H$ und der Hypotenuse $U''H$ sind und daß $U'E$ parallel zu $U''M$ gezogen ist.

Die Papieränderung ist beim Auftrag des Koordinaten- und Liniennetzes auf das peinlichste zu verfolgen und zu berücksichtigen, in der Kleinkartierung hauptsächlich beim Abtragen längerer Abszissen oder Abszissenreste auf den Messungslinien zu beachten,

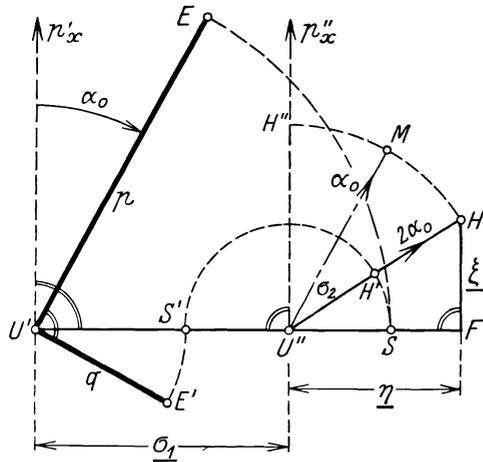


Abb. 284. Zeichnerische Ermittlung der Extremwerte der prozentualen Papieränderung nach Größe und Richtung (p, q, α_0) aus den in beiden Achsen- und Oktantenrichtungen gemessenen Prozentzahlen.

während sie bei kurzen Ordinaten übergangen werden kann. Auch die Entnahme von Strecken und Koordinaten aus dem Plan muß unter Berücksichtigung der Papieränderung erfolgen¹⁾.

41. Höhenpläne.

Höhenpläne enthalten neben den Horizontalprojektionen auch Angaben über die Oberflächengestaltung. Ihre ursprüngliche Form ist in der Regel der kotierte Plan, welcher durch Einschreiben der Höhenzahlen zu den im Grundriß aufgetragenen Punkten entsteht. Er bestimmt ein der Geländeoberfläche sich anschmiegendes Polyeder, aber seine Angaben sind unübersichtlich und man kann aus ihm nur für enge Bezirke die Bodenformen durch Vergleich der Höhenzahlen mühsam herausfinden.

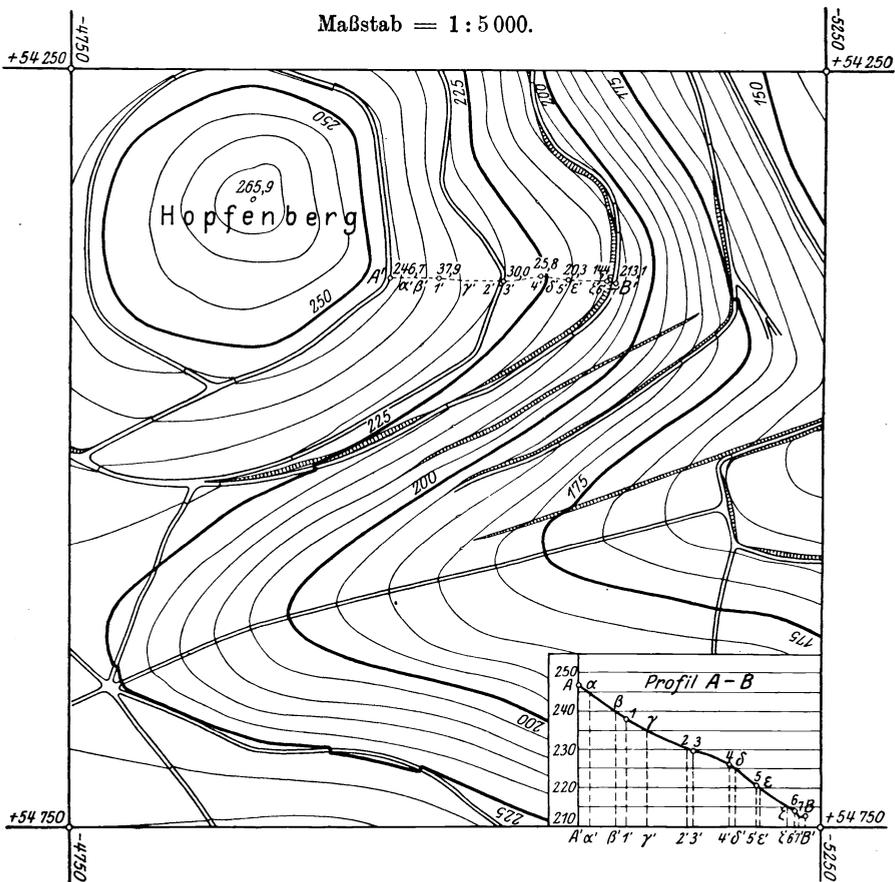


Abb. 285. Plan mit Höhenlinien. Konstruktion der Höhenlinien nach Profilen.

Die für ingenieurtechnische Zwecke vorteilhaftesten Höhenpläne sind die meist auf Grund kotierter Pläne entstandenen Schichtenpläne und die Profil-

¹⁾ Zur allgemeinen Theorie der Papieränderung siehe *Laska, W.*, Theorie des Karteneinganges, Z.V.W. 1906, S. 113—122 und *Fuchs, K.*, Theorie des Karteneinganges, Z.V.W. 1907, S. 289—298. Siehe auch *Weyh*, Die Ermittlung des linearen Papiereinganges bei Linien in beliebiger Richtung, Z.B.G.V. 1908, S. 251—255.

pläne. Die Schichtenpläne enthalten die als Schichtenlinien, Höhenlinien oder Isohypsen bezeichneten geometrischen Örter von Punkten gleicher Meereshöhe, welchen man aus praktischen Gründen runde, gleichabständige Höhenzahlen zuordnet. So entstehen für ein und denselben Plan gleichabständige oder äquidistante Höhenlinien. In verschiedenen Blättern aber schwankt die Schichtdicke je nach den Geländebeziehungen und dem Zweck der Darstellung innerhalb sehr weiter Grenzen. Sie kann in kulturtechnischen Plänen großen Maßstabs bei geringen Neigungen vielleicht nur 1—2 dm betragen und in Übersichten kleinen Maßstabs bei starken Neigungen bis zu 100 m und mehr anwachsen.

Bei der zeichnerischen Ausführung werden, nachdem die Höhenlinien schätzungsweise in Blei eingetragen sind, die Höhenpunkte in Züge zusammengefaßt, welche annähernd senkrecht zu den Schichtenlinien stehen, also in Profilen in der Richtung des größten Gefälles liegen. In Abb. 285 ist $A'B'$ die Horizontalspur eines solchen Profilszugs. Man denkt sich nun alle Profilstrecken um das Lot durch ihren Anfangspunkt so weit gedreht, daß sie in die Lotebene der ersten Strecke gelangen, und zeichnet mit den angegebenen Höhenzahlen und den dem Plane zu entnehmenden Horizontalentfernungen das gestreckte Profil AB im Aufriß. Dort bestimmt man die Schnittpunkte des Profils mit den Aufrißbildern der Höhenlinien und überträgt deren Horizontalprojektionen α' , β' , ... jeweils vom vorhergehenden Teilpunkt aus in den Grundriß zurück. Mit Hilfe einer größeren Zahl solcher Punkte¹⁾ kann man den Verlauf der Höhenlinien verbessern. Sie überqueren die Wege senkrecht und verlaufen geradlinig in ebenen Böschungen. Die beschriebene Art der Einschaltung von Höhenlinien-

punkten ist zum mindesten dem Anfänger zu empfehlen. Sie ist sehr anschaulich und sehr genau, weil in der zeichnerischen Darstellung auch die Ausrundungen der Profile gut berücksichtigt werden können. Im einfachen Gelände wird auch die geradlinige Interpolation genügen. Dafür gibt es eine Unzahl von Hilfsmitteln, deren einfachstes, bequemstes und billigstes ein mit bezifferten gleichabständigen Parallelen ... 6, 7, 8, ... 11 (Abb. 286) versehenes Blatt Pauspapier ist, welches so auf die durch eine Blei- linie verbundenen Profildpunkte A' , B' gelegt wird, daß deren Höhen zwischen die Linien hineinpassen. Die mit einer Nadel durchzustechenden Schnittpunkte α' , β' , ... der verschiedenen Parallelen mit der Linie $A'B'$ sind unmittelbar Punkte der Horizontalkurven.

Aus einem Schichtenplan kann man bei geeigneter Dichte der Linien den Verlauf der Geländeoberfläche mit einem Blick erfassen und die Geländeneigung nicht nur in der Richtung des größten Gefälles (Böschungswinkel), sondern auch für jede andere Richtung entnehmen. Auch die nach einem solchen Plan erfolgende Zeichnung von lotrechten Profilen mit beliebiger Horizontalspur ist eine höchst einfache Aufgabe.

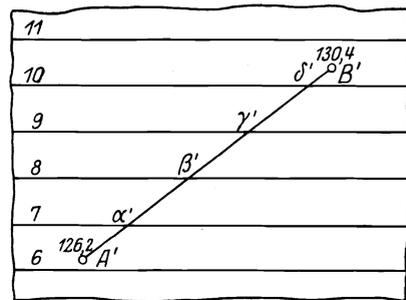


Abb. 286. Einschalten von Punkten runder Höhe mit Hilfe einer Parallelschar auf Pauspapier.

¹⁾ In Abb. 285 sind alle für die Erklärung des Profilauftrags entbehrlichen Punkte mit ihren Höhenzahlen weggelassen worden, damit die Wirkung der Schichtenlinien nicht beeinträchtigt wird.

Um die Klärung der Frage nach dem zweckmäßigsten Maßstab und nach der zu fordernden Genauigkeit der Schichtenpläne hat sich *Koppe* sehr verdient gemacht. Die Maßstabfrage muß jeweils unter Beachtung verschiedener Umstände entschieden werden. Sie hängt nicht nur von der im allgemeinen geforderten Genauigkeit und der Schwierigkeit des Geländes ab, sondern wird auch vom Maßstab etwa bereits vorhandener, auch zur Höhenaufnahme verwendeter Horizontalpläne beeinflusst. Für die Aufstellung eines zuverlässigen ingenieurtechnischen Vorprojektes ist jedenfalls der Maßstab 1:25 000 viel zu klein, schon deswegen, weil er eine maßstabgetreue deutliche Darstellung schmaler Gebilde (Wege, Gräben, Straßen, Bäche usw.) nicht mehr ermöglicht. Darüber und über die Notwendigkeit, mit Zunahme der Geländeschwierigkeiten auch den Maßstab zu vergrößern, der im Gebirge 1:1 000 und mehr betragen kann, sind sich alle erfahrenen Ingenieure einig. 1:10 000, 1:5 000 und 1:2 500 sind in Deutschland und in der Schweiz häufig gebrauchte Maßstäbe. Zur Beurteilung der Genauigkeit von Höhenplänen dient der mittlere Fehler der Kartenhöhen, welcher durch das Zusammenwirken der Messungsfehler, Zeichnungsfehler und Interpolationsfehler entsteht. Man versteht unter einer Kartenhöhe die durch Einschätzung zwischen benachbarte Schichtenlinien gefundene Meereshöhe eines beliebigen Geländepunktes. Nach *Koppes* Untersuchungen sind für allgemeine technische Vorarbeiten bestimmte Pläne in 1:10 000 als zweckentsprechend genau zu betrachten, wenn der mittlere Fehler der Kartenhöhen in Metern etwa

$$m = c + k \cdot \text{tg } \alpha = 0,5 + 5 \text{ tg } \alpha \dots \dots \dots (625)$$

beträgt. Hierin bedeutet α den Böschungswinkel an der betrachteten Stelle.

Will man ein zuverlässiges Urteil über den Wert eines Blattes und darüber gewinnen, welchen Genauigkeitsanforderungen es tatsächlich genügt, so müssen die Koeffizienten c und k für den Plan bestimmt und demselben beigegeben werden. Um mit relativ einfachen Mitteln den mittleren Fehler der Kartenhöhen eines Blattes zu finden, kann man etwa an Stellen verschiedener Neigung nach Lage und Höhe gut bestimmte Polygonpunkte durch Züge verbinden, für deren Brechungspunkte ebenfalls die genaue räumliche Lage aus Messungen zu bestimmen ist. Nach dem Eintrag dieser Züge in den Plan können demselben die Kartenhöhen der eingezeichneten Punkte entnommen und mit den aus den Messungen erhaltenen Punkthöhen verglichen werden. Trägt man die Absolutwerte der auftretenden Differenzen als Ordinaten zu den entsprechenden Werten $\text{tg } \alpha$ als Abszissen auf, so entsteht eine Punktreihe, welche mit genügender Genauigkeit durch eine Gerade ausgeglichen werden kann. Ihr Abschnitt auf die Ordinatenachse und ihre trigonometrische Tangente mit der Abszissenachse, beide mit $\frac{5}{4}$ multipliziert, sind gute Näherungswerte der Konstanten c und k , vorausgesetzt, daß die Fehler der Probemessung gegen diejenigen der Kartenhöhe vernachlässigt werden dürfen¹⁾.

¹⁾ *Koppe* hat seine Untersuchungen über die Maßstabfrage und die Genauigkeit der Höhenlinienpläne in folgenden Arbeiten niedergelegt: a) Die neuere Landestopographie, die Eisenbahnvorarbeiten und der Doktor-Ingenieur, Braunschweig 1900; b) Die neue topographische Landeskarte des Herzogtums Braunschweig im Maßstab 1:10 000, Z.V.W. 1902, S. 397—424; c) Militärische und technische Topographie, Z.V.W. 1904, S. 1—7; d) Über die zweckentsprechende Genauigkeit der Höhendarstellung in topographischen Plänen und Karten für allgemeine technische Vorarbeiten, Z.V.W. 1905, S. 2—13, 33—38; e) Über die zweckentsprechende Genauigkeit der Höhendarstellung in topographischen Plänen und Karten für allgemeine Eisenbahnvorarbeiten, Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 1905, S. 73—76, 91—94; f) Eisenbahnvorarbeiten und Landeskarten, Z.V.W. 1906, S. 2—9; g) Die Weiterentwicklung der Geländedarstellung durch Horizontalkurven auf wissenschaftlich praktischer Grundlage im technischen und

Zu den Höhenplänen im weiteren Sinne gehören auch die besonders für ingenieurtechnische Zwecke wichtigen Profilpläne, welche Darstellungen

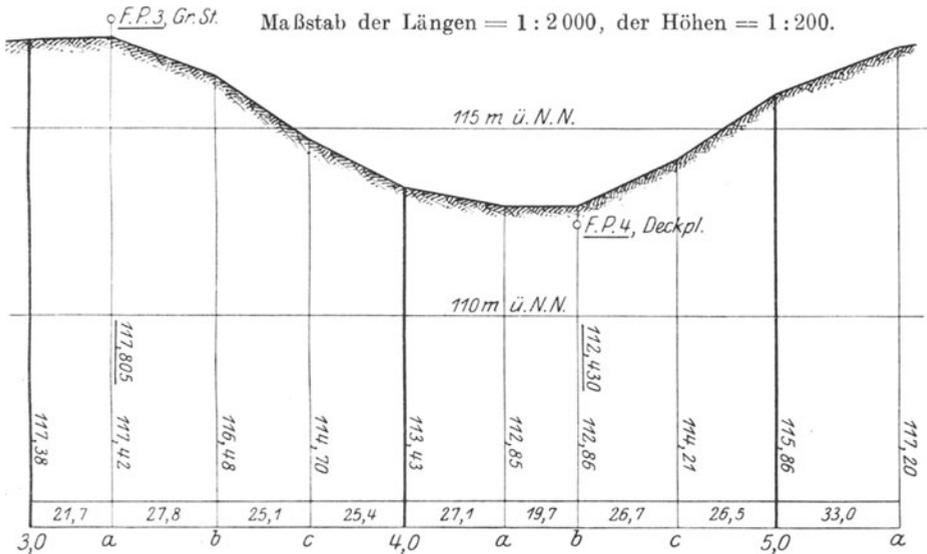


Abb. 287. Längenprofil mit zehnfacher Überhöhung.

allgemeinen Landesinteresse, Zeitschr. f. Architektur- u. Ingenieurwesen 1907, S. 211—215; h) Die vermessungstechnischen Grundlagen der Eisenbahnvorarbeiten in der Schweiz, Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 1908, S. 112—116, 125—127, 152—154, 161—164, 185—188 mit Bericht. S. 246; i) Die topographischen Grundlagen bei Eisenbahnvorarbeiten in verschiedenen Ländern, Z.V.W. 1910, S. 401—410; k) Die vermessungstechnischen Grundlagen der Eisenbahnvorarbeiten in Deutschland und Österreich, Organ f. d. Fortschritte des Eisenbahnwesens 1912, S. 127—129, 145—147, 163—168, 181—185. In der unter f) genannten Arbeit schreibt *Koppe*: „Durch die früher bereits besprochenen Untersuchungen von bei der Rheinischen Eisenbahn mit Erfolg zu generellen Vorarbeiten benutzten Höhenpläne, sowie die gutachtlichen Äußerungen hervorragender Eisenbahnbauingenieure konnte festgestellt werden, daß die an eine topographische Landeskarte von ziviltechnischer Seite zu stellenden Anforderungen im allgemeinen sind: 1. Möglichst genauer Grundriß in richtiger geometrischer Verjüngung. 2. Zahlreiche in die Karte eingeschriebene und in der Natur scharf bezeichnete Höhenfestpunkte, um so mehr, je steiler und schwieriger das dargestellte Gelände ist. 3. Vollständige und topographisch richtige Darstellung der Geländeformen durch Horizontalkurven. 4. Genauigkeit der Höhenschichtenlinien bis auf einen durchschnittlichen (Bemerkung d. Verfassers: soll heißen mittleren) Fehler derselben $m = \pm (0,5 + 5 \text{ tg } N)$ Meter, wobei N die jeweilige Neigung des Bodens bedeutet.“ Nach der unter d) angeführten Arbeit wird durch die Verdoppelung des Maßstabes die für die Feldaufnahme ein und derselben Fläche erforderliche Zeit etwa auf das $1\frac{1}{2}$ fache erhöht. Zu den besprochenen Fragen siehe ferner *Schumann*, Ein Vergleich der Höhenlinien einer tachymetrischen Aufnahme mit denen des Meßtischblattes der K. Landesaufnahme, Z.V.W. 1909, S. 1—9, weiter *Müller, Heinrich*, Über den zweckmäßigsten Maßstab topographischer Karten. Ihre Herstellung und Genauigkeit, Heidelberg 1913 und *Egerer, A.*, Untersuchungen über die Genauigkeit der topographischen Landesaufnahme (Höhenaufnahme) von Württemberg im Maßstab 1 : 2500, Stuttgart 1915. *Müller* pflichtet nach eingehender Untersuchung der *Koppes* Genauigkeitsformel auch für den Maßstab 1 : 5000 bei, während *Egerer* auf Grund zahlreicher Untersuchungen für den Maßstab 1 : 2500 vorschlägt, den mittleren Fehler der Kartenhöhen mit $0,3 + 4 \text{ tg } \alpha$ (für Feldaufnahmen) bzw. $0,4 + 5 \text{ tg } \alpha$ (für Waldaufnahmen) anzusetzen.

Schichtenlinien wurden zuerst wahrscheinlich zur Veranschaulichung von Punkten gleicher Wassertiefe benutzt. 1730 verwendete sie der niederländische Wasserbauer und Geometer *Cruquius* zu diesem Zweck; bald darauf auch der französische Geograph *Buache*. Die große Bedeutung dieser Linien für die Oberflächendarstellung über Wasser hat zuerst wohl der Genfer Ingenieur *Ducarla* erkannt, welcher über diese Frage 1771 der Pariser Akademie der Wissenschaften eine Abhandlung vorlegte.

von lotrechten Längen- oder Querschnitten sind und deren Auftrag entweder mit etwas geringerer Genauigkeit nach den Angaben eines Schichtenplanes oder wesentlich genauer nach unmittelbaren Profilaufnahmen (S. 191) erfolgen kann. Als Maßstab der Längen wird bei der Zeichnung des Längenprofils meistens derjenige des zugehörigen Horizontalplans gewählt, während die Höhen in der Regel in einem 10-mal größeren Maßstab dargestellt werden, so daß durch eine zehnfache Überhöhung auch geringere Neigungen sichtbar gemacht werden können. In das Längenprofil (Abb. 287) trägt man die in hm oder km gehaltene durchlaufende Bezeichnung der Hauptpunkte sowie diejenige der Zwischenpunkte und ihre gegenseitigen Abstände oder ihre Entfernungen vom vorhergehenden Hauptpunkte ein, desgleichen die runden Meereshorizonte und die zu den Profilverpunkten und zu nahegelegenen Festpunkten gehörigen Meereshöhen. Auch Wegeübergänge, Durchlässe, Böschungskanten, Grabensohlen usw. werden besonders für die weitere Verwertung des Profils in demselben bezeichnet.

Der Auftrag von gemessenen Querprofilen erfolgt im engsten Anschluß an die Art der Aufnahme, bei mit dem Nivellierinstrument aufgenommenen Profilen (S. 191) z. B. am einfachsten vom Instrumentenhorizont aus. In diese natürlichen Profile können die Profile der projektierten Bauwerke mit Hilfe der aus dem Längenprofil sich ergebenden Planikoten eingetragen werden. Aus den Querprofilen werden für die nachfolgende Massenberechnung die Grundflächen der zu berechnenden Körper ermittelt; es ist daher zweckmäßig, sie ohne Verzerrung darzustellen.

Die bei Darstellungen kleineren Maßstabes (Karten) häufige Schraffenmanier¹⁾ verdankt hauptsächlich militärischen Bedürfnissen ihre Entstehung, ist aber für ingenieurtechnische Zwecke weniger wichtig, da sie die Oberflächenform nur teilweise, nämlich hinsichtlich der Neigungen, darstellt. Zwar sind besonders wichtigen Punkten die Höhenzahlen beigegeben, zu beliebigen Punkten aber können aus einem solchen Schraffenplan die Meereshöhen nicht entnommen werden.

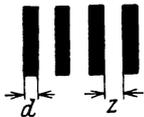


Abb. 288. Schraffenmanier.

Die Schraffenmanier stützt sich auf den Umstand, daß das Gelände einem hoch über demselben befindlichen Auge bei lotrechter Beleuchtung mit zunehmender Neigung immer dunkler erscheinen wird. Man bemißt deshalb die Dicke d (Abb. 288) der zur Neigungsdarstellung verwendeten schwarzen Schraffen im Verhältnis zu den weißen Zwischenräumen z um so stärker, je größer die Neigung ist, und zwar benutzt man dafür die Beziehung

$$d : z = \alpha^0 : (C^0 - \alpha^0), \dots \dots \dots (626)$$

in welcher α^0 den Böschungswinkel der betreffenden Geländestelle und C^0 den größten in einem ausgedehnten Aufnahmegebiet auftretenden Böschungswinkel bedeutet. Demnach wird C^0 in Ländern mit annähernd horizontaler Oberfläche klein bleiben, in Gebirgsländern aber große Werte annehmen müssen.

Schraffenpläne, welche wie die bekannte *Dufour*-Karte der Schweiz unter Annahme einer schiefen Beleuchtung gezeichnet werden, erzielen eine ungemein plastische Wirkung. Sie stellen die Geländeformen gut dar, täuschen jedoch falsche Neigungen vor, da die beleuchteten Hänge (Nordwesthänge) zu flach, die im Schatten liegenden aber zu steil erscheinen. Dieser Nachteil

¹⁾ Der Grundgedanke der Schraffenmanier „je steiler, desto dunkler“ ist dem preußischen Ingenieurmajor *Ludwig Müller* zuzuschreiben. In ein festes System wurde die Schraffenzeichnung 1799 durch den sächsischen Major *Lehmann* gebracht, welcher für die Verteilung von Weiß und Schwarz die senkrechte Beleuchtung zugrunde legte.

wird etwas gemildert, wenn die Darstellung auch noch Höhenlinien enthält. In solchen Fällen ersetzt man die zeitraubende Schraffenzeichnung vielfach durch eine ähnlich wirkende Abtönung, eine sog. Schummerung, in welcher die Höhenlinien gut erkennbar bleiben. Neben anderen deutschen Karten besitzt z. B. die zum topographischen Atlas von Bayern in 1:50000 gehörige Karte des Wettersteingebirges und der Miemingergruppe schiefe Beleuchtung. Sie enthält braune Höhenlinien auf grau-grüner Schummerung, blaue Gewässer und schwarze Situation.

Hauptsächlich in geographischen Karten werden zur Darstellung der Höhenzonen verschiedene Farben verwendet. Am meisten haben sich die den natürlichen Bodenfarben gut angepaßten *Sydowschen* Regionalfarben eingebürgert, welche mittels einer genügenden Zahl von Abstufungen über grün, weiß, braun vom Tiefland ins Hochgebirge führen. Sehr beachtenswert ist eine neuere vom Wiener Geographen *Peucker* stammende Farbenskala, welche unter Ausnutzung der Raumwerte der Farben nicht nur die Höhenlage, sondern auch die Geländeformen — wenigstens im Gebirge — ziemlich gut zum Ausdruck bringt¹⁾.

42. Abzeichnen und Vervielfältigung von Plänen.

Ein heute noch viel gebrauchtes Hilfsmittel zum Abzeichnen von Plänen im gleichen oder in einem vom Original verschiedenen Maßstab ist der zu Anfang des 17. Jahrhunderts von *Christ. Scheiner* aus Mindelheim erfundene Pantograph oder Storchschnabel. Dieses Instrument ist im wesentlichen ein Parallelogramm $ABCD$ (Abb. 289), dessen durch Stäbe verkörperte Seiten in ihren Endpunkten gelenkig miteinander verbunden sind, so daß wohl eine Formänderung, aber keine Seitenänderung des Parallelogramms möglich ist. Auf zweien seiner Seiten liegen ein das Original O umfahrender Fahrstift E und ein dabei das Abbild Z beschreibender Zeichenstift G , welche so angeordnet sind, daß ihre Verbindungslinie durch den festen Aufstellungs- und Drehpunkt F des Storchschnabels hindurchgeht. Zur Erzielung verschiedener Maßstäbe können die beiden Stifte in Löchern verstellbar werden. Das Abbild Z wird stets dem Original O ähnlich sein, wenn

1. die Verbindungslinie EG bei jeder beliebigen Stellung des Instrumentes durch den festen Drehpunkt F hindurchgeht,
2. der Abstand EG durch F stets im gleichen Verhältnis geteilt wird.

Zu 1. Für irgendeine Zufallsstellung des Pantographen gilt nach den beiden ähnlichen Dreiecken DFG und AEG

$$DF = DG \frac{AE}{AG} = C_1. \quad \dots \dots \dots (627)$$

DG , AE und AG sind unveränderliche Größen, so daß das von der Ver-

¹⁾ Siehe hierzu *Peucker, K.*, Höhengichterkarten. Studien und Kritiken zur Lösung des Flugkartenproblems (mit einer farbigen Karte), Z.V.W. 1911, S. 17 bis 23, 37 bis 62, 65 bis 81, 85 bis 96.

Zur Geländedarstellung siehe auch die Arbeiten von *Röger, J.*, Die Geländedarstellung auf Karten, München 1908; Die Bergzeichnung auf den älteren Karten, München 1910; Anleitung für den Unterricht im Kartenlesen, München 1910; ferner *Walter, M.*, Inhalt und Herstellung der topographischen Karte 1:25000, Gotha 1913, *Rothe, R.*, Darstellende Geometrie des Geländes, Leipzig u. Berlin 1914, und besonders die beiden Schriften von *Egerer, A.*, Kartenlesen, 2. A., Stuttgart 1918, und Kartenkunde (Bd. 610 a. Natur u. Geisteswelt), Leipzig u. Berlin 1920, welche auch eine Besprechung und übersichtliche Zusammenstellung der hauptsächlichsten deutschen Kartenwerke und der wichtigsten zugehörigen Daten enthalten.

bindungslinie der Stifte auf CD abgeschnittene Stück DF stets ein und derselbe Wert C_1 ist.

Es wird daher EG immer durch den Drehpunkt F gehen, wenn dieser so angeordnet ist, daß es für irgendeine Zufallsstellung des Instrumentes zutrifft.

Zu 2. Das Verhältnis des Zeichenstrahles FG zum Fahrstrahl FE ist nach den ähnlichen Dreiecken DFG und HEF

$$v = FG : FE = DG : HF = DG : AD = C_2. \dots \dots (628)$$

Es ist eine Konstante C_2 , da DG und AD ebenfalls Festwerte sind.

Nach (627) und (628) sind die beiden gestellten Bedingungen erfüllt, so daß, wenn der Fahrstift E ein Urbild O umfährt, der Zeichenstift G ein zum Urbild ähnliches und ähnlich gelegenes (F ist Ähnlichkeitspunkt), v -mal vergrößertes Abbild Z aufzeichnet.

Werden also nach Einstellung der Stifte auf die gewünschte Vergrößerung v die sämtlichen Linien und Punkte eines Originalplanes befahren, so zeichnet der zweite Stift den verlangten Plan.

Gebräuchlich ist auch eine andere Anordnung, bei welcher der feste Drehpunkt in eine Ecke des Parallelogramms gelegt wird. Den Punkten E, F, G entsprechen dann die ebenfalls auf einer Geraden liegenden Punkte E', F', G' (Abb. 289).

Nicht so genau, aber recht einfach ist die Abzeichnung eines

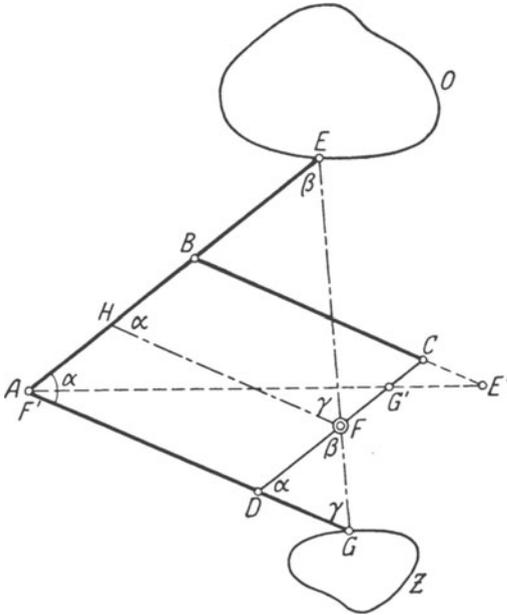


Abb. 289. Storchschnabel (Pantograph) zum Abzeichnen von Plänen.

Planes durch Einschalten von Punkten in ein Quadratnetz. Überzieht man den gegebenen Plan mit einem Quadratnetz $0, 1, 2, 3, \dots a, b, c, \dots$ (Abb. 290a) und konstruiert man dazu in der für die Abzeichnung gewünschten Ver-

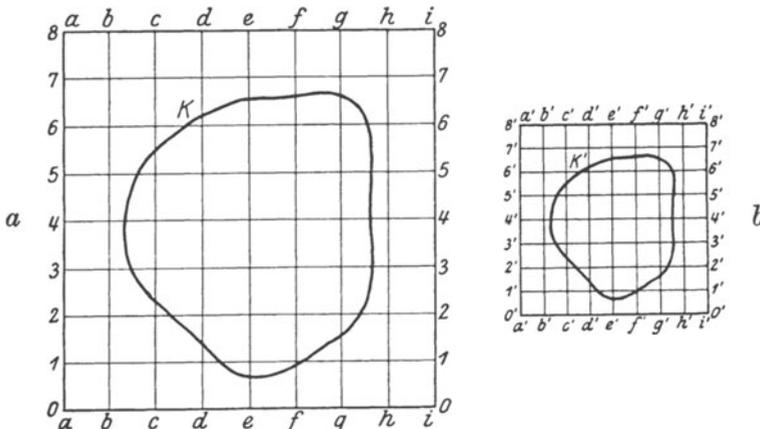


Abb. 290. Abzeichnen eines Plans mit Hilfe zweier entsprechender Quadratnetze.

jüngung ein zweites Quadratnetz $0', 1', 2', 3', \dots a', b', c' \dots$ (Abb. 290b), so kann man die Schnittpunkte der Planlinien des Originals mit dem zugehörigen Netz und andere Punkte nach Schätzung in das verzüngte Netz übertragen. So entsteht ein dem Urbild ähnliches Abbild, dessen Genauigkeit im allgemeinen mit der Netzdichte zunimmt.

Liegt das Bedürfnis nach einer größeren Anzahl von genauen Kopien der Originalpläne vor, so erfolgt die Planvervielfältigung mittels eines der bekannten Reproduktionsverfahren, von denen hauptsächlich der Kupferstich und der Steindruck in Frage kommen. Den Übertrag des Originals auf den Bildstock besorgte früher der Pantograph; heute weist man diese Aufgabe der Photographie zu, nachdem es gelungen ist, sehr scharf und perspektivisch richtig zeichnende Weitwinkelobjektive zu konstruieren. Zur Schonung der teuren Kupfer- bzw. Steinplatten werden diese meist nur zur Herstellung besonders wichtiger Planabdrücke wie der Korrekptionsblätter unmittelbar benutzt. Im übrigen werden durch Umdruck auf Zink- oder Aluminiumplatten Hilfsbildstöcke gewonnen, auf welchen dann die große Mehrzahl der Pläne gedruckt wird. Geringeren Anforderungen an die Zahl und Beschaffenheit der Abdrücke genügt auch das Lichtpausverfahren¹⁾.

43. Flächenberechnung aus Naturmaßen.

In vielen Fällen, besonders bei Eigentumsaufnahmen, folgt der Kartierung die Flächenberechnung. Dabei handelt es sich nicht etwa um die wirklichen, krummen Oberflächen²⁾ der Grundstücke, sondern um ihre Horizontalflächen, d. h. um die von den Horizontalprojektionen der Grundstücksgrenzen umschlossenen ebenen Flächen. Die Flächenberechnung kann a) aus Naturmaßen, b) nach dem Plan, c) halbgraphisch vorgenommen werden.

Die Flächenberechnung aus Naturmaßen ist die genaueste Art der Flächenberechnung und erfolgt mit Hilfe der in der Natur unmittelbar gemessenen Bestimmungsstücke, wobei die Rechenmaschine oder besondere Rechentafeln gute Dienste leisten können.

Die Bestimmung der Fläche F des Dreiecks ABC (Abb. 291) kann, je nachdem diese oder jene Größen gemessen sind, mittels einer der Formeln

$$F = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} a b \sin \gamma = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (629)$$

erfolgen, in deren letzter (*Heronische Flächenformel*) $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ den halben Dreiecksumfang bedeutet. Auch die Formeln

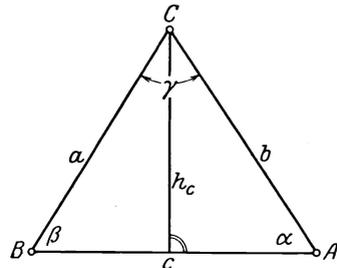


Abb. 291. Berechnung von Dreiecksflächen.

¹⁾ Für ein näheres Studium der Planvervielfältigung sei verwiesen auf a) *Schikofsky*, Reproduktionsmethoden zur Herstellung von Karten, Wien 1890; b) *Ibel, A.*, Anwendung der Photographie zur Vervielfältigung bayerischer Katasterpläne, Z. V. W. 1907, S. 194 bis 203; c) *Ibel, A.*, Gravierung und Evidenthaltung der neueren Katasterpläne, Sonderabdruck eines Beitrags zu *Amann, J.*, Die Bayerische Landesvermessung in ihrer geschichtlichen Entwicklung, München 1908.

²⁾ Zu dieser Frage siehe *Finsterwalder, S.*, Über den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche, Sitzungsberichte d. K. B. Akademie d. Wissenschaften, math.-phys. Kl. 1890, S. 35 bis 82; die Ergebnisse sind dort in den Ausdrücken (3) auf S. 42 bzw. 43 (unten) und (26) auf S. 69 enthalten.

$$F = \frac{c^2}{2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)} = \frac{a b c}{4 r} = 2 r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \varrho \cdot s, \dots (630)$$

in denen r und ϱ den Umkreishalbmesser und den Inkreishalbmesser des Dreiecks bezeichnen, können unter Umständen von Nutzen sein.

Die Fläche eines Rechtecks mit den Seiten a, b ist

$$F = a \cdot b, \dots (631)$$

diejenige eines Trapezes, dessen parallele Seiten a, b den Abstand h besitzen, ist

$$F = \frac{1}{2}(a + b) h, \dots (632)$$

während der Ausdruck

$$F = \frac{1}{2} e (h_b + h_d) = \frac{1}{2} e f \sin \mu \dots (633)$$

die Fläche eines beliebigen Vierecks $ABCD$ (Abb. 292) mit den in der Abbildung enthaltenen Bezeichnungen angibt.

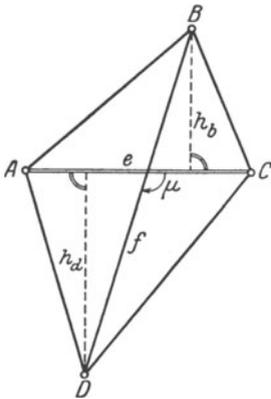


Abb. 292. Berechnung einer Vierecksfläche.

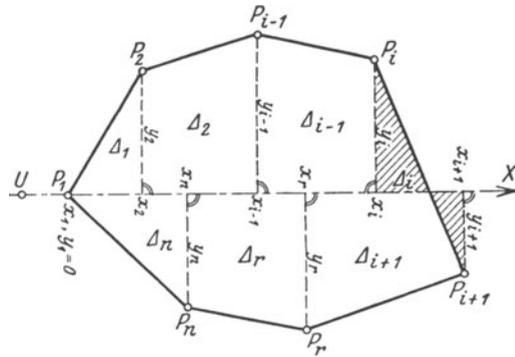


Abb. 293. Berechnung der Fläche eines Vielecks mittels der Trapezformel.

In der Mehrzahl der Fälle handelt es sich um die Berechnung eines nach der Standlinienaufnahme durch gemessene, rechtwinklige Koordinaten bestimmten Vielecks $P_1 P_2 \dots P_i \dots P_n$ (Abb. 293). Dieses wird schon durch die Art der Aufnahme in die n Teilflächen $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ zerlegt, welche teils rechtwinklige Dreiecke, teils rechtwinklige Trapeze sind, deren Summe

$$F = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n \dots (634)$$

die Vielecksfläche ist. Diese Teilflächen lassen sich unmittelbar aus der Abbildung ablesen, z. B.

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)y_2, & \Delta_2 &= \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 + y_3), \\ \Delta_r &= \frac{1}{2}(x_r - x_{r+1})(y_r + y_{r+1}), \dots \end{aligned} \right\} \dots (635)$$

Wird der Anfangspunkt U der Abszissenmessung nach P_1 verlegt, so ist $x_1 = 0$. Unter den Trapezen befinden sich manchmal auch verschränkte Trapeze, z. B. Δ_i , welche aus einem positiven und einem negativen Bestandteil zusammengesetzt sind. Diesem Umstande entsprechend tritt in dem Ausdruck

$$\Delta_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(y_i - y_{i+1}) \dots (636)$$

an Stelle der Summe die Differenz der Ordinatenabsolutwerte auf. Diese ungleichartige Behandlung verschwindet, wenn man unter x, y nicht die in

den Handriß geschriebenen Absolutwerte, sondern die algebraischen Werte der Koordinaten versteht, deren Vorzeichen aus der Lage der Koordinatenlinien hervorgeht. Setzt man rechtssinnige Bezifferung der Vieleckspunkte und das allgemeine Koordinatensystem voraus, so ergeben sich an der Hand von Abb. 293 leicht die allgemein gültigen Trapezformeln

$$2 F = - \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i)(y_i + y_{i+1}) = + \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i)(x_i + x_{i+1}). \quad (637)$$

Sie gelten auch für überschlagene Flächen, wenn man deren Teilflächen positiv bzw. negativ auffaßt, je nachdem deren Punktnumerierung nach dem Anblick dem Uhrzeiger folgt oder ihm entgegengesetzt ist.

Vorteilhafter ist die unter strenger Beachtung der Koordinatenvorzeichen anzuwendende sog. *Gaußsche Flächenformel*¹⁾, welche meistens zur Ermittlung von Polygonflächen aus deren berechneten Eckpunktkoordinaten dient, aber ebensogut auch zur Flächenberechnung einer Standlinienaufnahme Verwendung finden kann.

Durch Verbinden der Eckpunkte des Polygons $P_1 P_2 \dots P_n$ mit dem Koordinatenursprung U (allgemeines System) wird dessen Fläche F in die Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ zerlegt, so daß

$$F = \sum_{i=1}^n \Delta_i \quad (638)$$

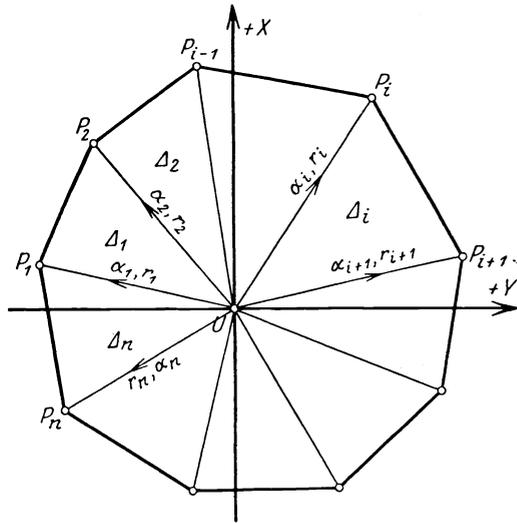


Abb. 294. Zur Flächenberechnung eines Polygons mittels der *Gaußschen Flächenformel*.

ist. Bezeichnen α_i und r_i Richtungswinkel und Länge des Strahles UP_i , so ist die doppelte Fläche des i -ten Dreiecks

$$2 \Delta_i = r_i r_{i+1} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \left. \begin{aligned} & (r_i \cos \alpha_i)(r_{i+1} \sin \alpha_{i+1}) \\ & - (r_i \sin \alpha_i)(r_{i+1} \cos \alpha_{i+1}). \end{aligned} \right\} \dots (639)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$r_i \cos \alpha_i = x_i, \quad r_i \sin \alpha_i = y_i$$

findet man aus (639) leicht

$$2 \Delta_i = x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}, \quad \dots \dots \dots (640)$$

so daß

$$2 F = \left[\sum_{i=1}^n 2 \Delta_i \right] = \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^n y_i x_{i+1} \dots \dots \dots (641)$$

wird. Setzt man in den zwei letzten Summen die gemeinsamen x_i bzw. y_i jeweils vor eine Klammer, so entstehen die beiden Formen der *Gaußschen Flächenformel*:

$$2 F = \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) = - \sum_{i=1}^n y_i (x_{i+1} - x_{i-1}). \quad \dots \dots (642)$$

¹⁾ Sie wird auch nach *L'Huilier* benannt.

Bei diesem Ausdruck sind n Differenzen und n Produkte zu berechnen. Er ist also vorteilhafter als die Form (641), welche die Berechnung von $2n$ Produkten verlangt. Bei der praktischen Durchführung einer Flächenberechnung mittels der eben aufgestellten Formel wird man, da die Fläche von der Lage des Koordinatensystems unabhängig ist, zur Erzielung kleiner Faktoren x_i, y_i die Koordinaten von einem der Fläche möglichst nahe liegenden Nullpunkt aus zählen. Müssen zur Flächenberechnung auf verschiedene Messungslinien bezogene Koordinaten verwendet werden, so sind

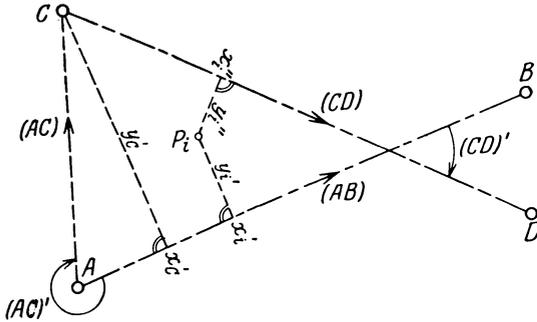


Abb. 295. Koordinatentransformation.

diese erst durch eine Koordinatentransformation auf ein und dasselbe System zu beziehen.

In Abb. 295 sind AB, CD zwei Messungslinien, für deren Endpunkte die rechtwinkligen Koordinaten in einem gemeinsamen Hauptsystem bekannt sind. Es soll der durch unmittelbare Messung von der örtlichen Abszissenachse CD ($C =$ Ursprung) aus festgelegte Punkt P_i durch Umrechnung auf die Achse AB mit A als Ursprung bezogen

werden. Bezeichnen $xy, x'y', x''y''$ bzw. $(), ()'$ und $()''$ die Koordinaten eines Punktes bzw. den Richtungswinkel einer Strecke im gemeinsamen Hauptsystem und in den örtlichen Systemen AB bzw. CD , so erhält man aus den Koordinaten $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D$ der Punkte A, B, C, D im Hauptsystem in bekannter Weise

$$(AB), (CD), (AC), AC \dots \dots \dots (643)$$

$$(AC)' = (AC) - (AB), \quad (CD)' = (CD) - (AB) \dots \dots \dots (644)$$

sowie die auf AB bezogenen Koordinaten des Punktes C

$$x'_C = AC \cdot \cos(AC)', \quad y'_C = AC \cdot \sin(AC)'. \dots \dots \dots (645)$$

Da im System AB die Koordinaten x''_i, y''_i die Richtungswinkel $(CD)'$ und $(CD)' + 90^\circ$ besitzen, so werden die ihnen entsprechenden Koordinatenunterschiede

$$x''_i \cos(CD)' - y''_i \sin(CD)' \quad \text{bzw.} \quad x''_i \sin(CD)' + y''_i \cos(CD)' \dots (646)$$

in der Abszissen- bzw. Ordinatenrichtung. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen entstehen die Transformationsformeln

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x'_C + x''_i \cos(CD)' - y''_i \sin(CD)', \\ y'_i &= y'_C + x''_i \sin(CD)' + y''_i \cos(CD)'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (647)$$

Will man eine krummlinig begrenzte Fläche möglichst scharf berechnen, so ermittelt man erst die Fußpunkte x_0, x_n (Abb. 296) der die Grenzlinie berührenden Ordinaten, zerlegt den Abszissenunterschied $x_n - x_0$ in eine gerade Anzahl n gleicher Teile

$$h = \frac{1}{n} (x_n - x_0) \dots \dots \dots (648)$$

und ermittelt aus den in diesen Punkten errichteten Ordinaten die Sehnen

$$\Delta y_0, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n.$$

Durch Anwendung der *Simpsonschen* Regel auf die beiderseits der Standlinie gelegenen Flächenteile erhält man für die gesuchte Fläche den Ausdruck

$$F = \frac{1}{3} h \left[\Delta y_0 + \Delta y_n + 4(\Delta y_1 + \Delta y_3 + \dots + \Delta y_{n-1}) + 2(\Delta y_2 + \Delta y_4 + \dots + \Delta y_{n-2}) \right] \quad (649)$$

dessen beide erste Glieder $\Delta y_0, \Delta y_n$ unter der getroffenen Voraussetzung verschwinden¹⁾).

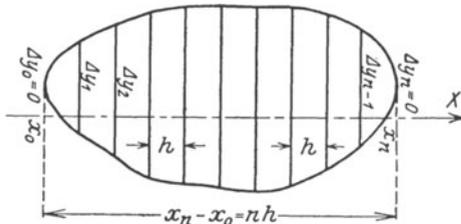


Abb. 296.

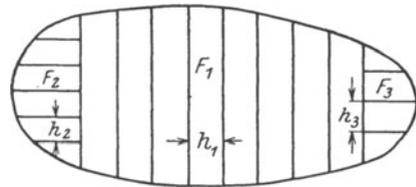


Abb. 297.

Flächenberechnung mit Hilfe der *Simpsonschen* Regel.

Man kann auch die Kuppen F_2, F_3 (Abb. 297) einer Fläche F vom Kern F_1 abtrennen, alle drei Teile nach (649) berechnen²⁾ und zur Summe

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \dots \dots \dots (650)$$

vereinigen.

Projiziert man die im mittleren Messungshorizont H berechnete Fläche F mit der Umgrenzung K (Abb. 298) auf den Meeresspiegel, so entsteht die von K_0 umschlossene, infolge der Lotkonvergenz etwas kleinere Fläche F_0 . Den Unterschied

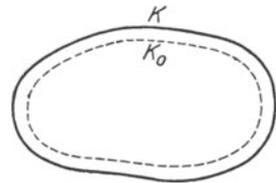


Abb. 298. Flächenreduktion auf den Meeresspiegel.

$$\Delta F_0 = F - F_0 \quad \dots \dots \dots (651)$$

bezeichnet man als die Flächenreduktion auf den Meereshorizont. Die ähnlichen Flächen F_0 und F liegen auf zwei Kugeln vom Halbmesser r ($r = \text{Erddhalbmesser}$) und $r + H$; sie verhalten sich also wie die Quadrate dieser Längen und es ist daher

$$F_0 = F \left(\frac{r}{r+H} \right)^2 = F \left(\frac{1}{1 + \frac{H}{r}} \right)^2 = F \left(1 - \frac{H}{r} + \dots \right)^2 = F \left(1 - 2 \frac{H}{r} + \dots \right). \quad (652)$$

Die hierin vernachlässigten Glieder höherer Ordnung von $\frac{H}{r}$ sind im Vergleich zu diesem verschwindend klein. Es wird also die Reduktion auf den Meeresspiegel

$$\Delta F_0 = 2 F \cdot \frac{H}{r}$$

und die reduzierte Fläche ist

$$F_0 = F - 2 F \cdot \frac{H}{r} = F \left(1 - 2 \frac{H}{r} \right) \dots \dots \dots (653)$$

¹⁾ Mittels (649) erhält man an Stelle der sonst errechneten Fläche eines Sehnepolygons den Inhalt einer durch Parabelbögen begrenzten Figur. Diese Parabelbögen schließen sich der Umgrenzung inniger an als die Sehnen und sind dadurch bestimmt, daß sie durch je drei aufeinanderfolgende Ordinatenendpunkte gehen und daß die Achsen der Parabeln, auf denen sie liegen, zur Standlinie senkrecht stehen.

²⁾ Bei der Berechnung des Teiles F_1 sind Δy_0 und Δy_n von Null verschieden.

Für $F = 1$ ha und $H = 100$ m ist $\Delta F_0 = 0,314$ qm; wegen seiner geringfügigkeit kann es — mindestens in Tiefländern — meistens vernachlässigt werden.

44. Flächenberechnung nach dem Plan.

Liegen für die Flächenermittlung keine Maßzahlen vor, wie z. B. bei Meßtischaufnahmen, so erfolgt mit geringerer Genauigkeit die Flächenberechnung nach dem Plan, und zwar entweder a) aus Planmaßen, b) mit Hilfe von Flächentafeln oder c) mit dem Planimeter.

a) Flächenberechnung aus Planmaßen.

Zur Flächenberechnung aus Planmaßen werden die einzelnen Figuren in Dreiecke und rechtwinklige Trapeze zerlegt, deren Bestimmungsstücke dem Plan zu entnehmen sind. Die Dreieckshöhen bzw. die Vielecksordinaten, einzelne Grundlinien und Diagonalen werden meist mit Zirkel und Transversalmaßstab bestimmt, während zur Abszissenmessung im Vieleck in der Regel ein abgeschrägter (prismatischer) Maßstab mit einer zuverlässigen, deutlichen Millimeterteilung benützt wird. Mit den so gewonnenen Maßen erfolgt nunmehr die Flächenberechnung in derselben Weise wie vorher aus Naturmaßen.

Natürlich ist bei dieser Art der Flächenberechnung auch die Papieränderung zu berücksichtigen. Man könnte gleich bei der Maßentnahme jede abgegriffene Länge in entsprechender Weise verbessern. Diesen umständlichen Weg kann man aber vermeiden, indem man die zunächst ohne Berücksichtigung des Papiereingangs berechnete, fehlerhafte Fläche F' mit einem entsprechenden Zuschlag ΔF , der Flächenverbesserung infolge der Papieränderung, versieht.

Wir denken uns F durch Parallele zur einen Hauptrichtung der Papieränderung in unendlich schmale Streifen dF zerlegt, die als Rechtecke von der Länge a und der Breite db gelten können. Sind p und q die Prozentzahlen der Papieränderung in der Richtung der Rechtecksseiten, so betragen deren Änderungen

$$da = \frac{p}{100} \cdot a, \quad \delta b = \frac{q}{100} \cdot db. \quad \dots \dots \dots (654)$$

$$\text{Aus dem Ausdruck} \quad dF = a \cdot db \quad \dots \dots \dots (655)$$

für die Rechtecksfläche folgt daher die Flächenänderung

$$\delta F = a \cdot \delta b + db \cdot da = a \frac{q}{100} \cdot db + db \frac{p}{100} \cdot a \quad \dots \dots \dots (656)$$

$$= \frac{a db}{100} (p + q) = dF \frac{p + q}{100} \quad \dots \dots \dots (657)$$

Also ist die der Gesamtfläche $F = \int dF$ entsprechende Flächenänderung ΔF wegen des Papiereingangs

$$\Delta F = \int \delta F = \frac{p + q}{100} \int dF = F \cdot \frac{p + q}{100}, \quad \dots \dots \dots (658)$$

d. h. der Prozentsatz der Flächenänderung ist die Summe der Prozentzahlen der extremen Papieränderungen. Die berichtigte Naturfläche wird daher

$$F = F' + \Delta F = F' + F \cdot \frac{p + q}{100} \quad \dots \dots \dots (659)$$

Wurden einem Plane, dessen Maßstab etwa $M = 1 : V$ ist, die zur Flächenberechnung verwendeten Maße im natürlichen Maßstab entnommen, so ist das erhaltene Ergebnis zunächst die fehlerhafte Papierfläche f' , aus welcher sich die wegen des Papiereingangs berichtigte Papierfläche

$$f = f' + \Delta f = f' + f \cdot \frac{p + q}{100} \dots \dots \dots (660)$$

ergibt. In der zu f ähnlichen Feldfläche F ist jede Länge V -mal größer als in f , und da sich die Flächen ähnlicher Gebilde wie die Quadrate entsprechender Längen verhalten, so besteht für den Übergang von der Papierfläche zur Feldfläche die Beziehung

$$F = V^2 \cdot f. \dots \dots \dots (661)$$

b) Das Schätzquadrat.

Unter den sog. Flächentafeln sei das Schätzquadrat genannt. Dasselbe ist eine durchsichtige, mit einem feinen Quadratnetz überzogene Tafel (Abb. 299), dessen Maschenquadrat eine bekannte runde Fläche f_0 besitzt. Beim Gebrauch wird das Schätzquadrat mit der Teilung auf das Papier gelegt und durch Abzählen und Schätzen die Zahl n der Flächenelemente f_0 ermittelt, welche in der zu bestimmenden Fläche f' enthalten sind. Es ist dann

$$f' = n \cdot f_0. \dots \dots \dots (662)$$

Das Schätzquadrat ist sehr bequem; es liefert aber nur mäßig genaue Ergebnisse und wird mit Vorteil besonders zur Nachprüfung von Flächenberechnungen zwecks Aufdeckung etwaiger grober Rechenfehler benützt. Die Berücksichtigung des Papiereingangs spielt daher bei der Benützung des Schätzquadrats keine so große Rolle¹⁾.

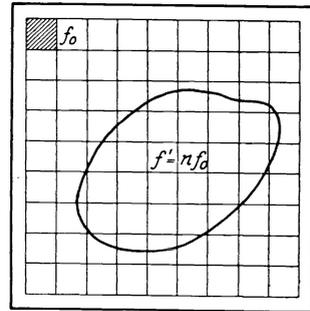


Abb. 299. Flächenbestimmung mit dem Schätzquadrat.

c) Flächenberechnung mit dem Planimeter.

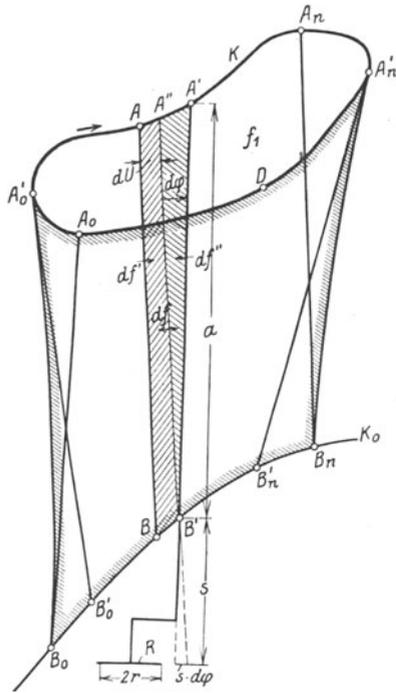
Mit den Planimetern kann man Flächen auf rein mechanischem Wege durch einfaches Umfahren bestimmen. Die weiteste Verbreitung unter allen Umfahrungsplanimetern²⁾ hat das Amslersche Polarplanimeter gefunden, dessen Theorie im folgenden besprochen werden soll.

¹⁾ Ähnliche Hilfsmittel zur Flächenbestimmung sind die Faden- oder Harfenplanimeter, deren wirksamer Bestandteil eine Schar von parallelen Geraden mit gleichen runden Abständen a ist. Liegt die Harfe auf der Fläche, so kann man rechnerisch oder mit dem Zirkel die Mittellängen der entstandenen Streifen addieren und erhält im Produkt aus dieser Summe s in den Parallelenabstand a die gesuchte Fläche $f = a \cdot s$.

Hier sei auch die Hyperbeltafel von Kloth genannt, welche auf einer durchsichtigen Platte eine Schar von gleichseitigen Hyperbeln trägt und zur bequemen Ermittlung von Dreiecks- und Vierecksflächen dient.

²⁾ Das älteste Umfahrungsplanimeter ist das Linearplanimeter (mit zwei zueinander senkrechten Bewegungen), als dessen erster Erfinder nach *Bauernfeind*, *Elemente der Vermessungskunde*, 2. Bd., Stuttgart 1890, S. 228 der bayerische Trigonometer *Hermann* (1814) anzusehen ist. Dieses im Laufe der Zeit hauptsächlich durch *Wetti* und *Hansen* verbesserte Instrument war jedoch ziemlich teuer und genauer als notwendig. Es wurde daher durch das einfachere, billigere und doch hinreichend genaue Polarplanimeter, welches 1854 *Amsler* in Schaffhausen konstruiert und das nahezu gleichzeitig (1855) auch *Miller* in Leoben erfunden hatte, schnell verdrängt.

Die gesuchte von der stark ausgezogenen Kurve K umschlossene Fläche f_1 (Abb. 300) werde mit dem einen Ende eines Stabes von der Länge a um-



fahren, während sich das andere Stabende zwangsläufig auf einer außerhalb f_1 befindlichen Kurve K_0 bewegt. Durch eine kleine Bewegung gelangt der Stab aus seiner Anfangslage AB in die Nachbarlage $A'B'$ und überstreicht dabei die kleine Fläche df , welche man sich aus einem unendlich schmalen Trapez df' und einem unendlich schmalen Dreieck df'' zusammengesetzt denken kann. Rechnet man df' , df'' und df der Reihe nach positiv, wenn $B'A''$ rechts von BA , $B'A'$ rechts von $B'A''$ und $B'A'$ ganz oder mit seiner größeren Hälfte rechts von BA liegt, so gilt immer die einfache Beziehung

$$df = df' + df'' \dots (663)$$

Die Anteile df' , df'' entsprechen einer unendlich kleinen Parallelverschiebung bzw. Drehung des Stabes um die Beträge dU und $d\varphi$, so daß

$$df = a dU + \frac{a^2}{2} d\varphi \dots (664)$$

wird, wobei $d\varphi$ im Bogenmaß zu nehmen ist. Die bei einer vollständigen Umfahrung von f_1 von a überstrichene Fläche f_2 ist also die Summe

Abb. 300. Zur Theorie des Polarplanimeters für eine mit Pol außerhalb umfahrene Fläche.

$$f_2 = \int df = a \int dU + \frac{a^2}{2} \int d\varphi \dots (665)$$

f_2 , welches den äußeren Umriß $B_0 A_0' A A_n' B_n B$ besitzt, enthält einen Teil $B_0 A_0' D A_n' B_n B$, welcher sowohl beim Hinweg wie auch beim Rückweg, also rechtssinnig und linkssinnig überstrichen wird. Er besitzt daher nach der vorhin getroffenen Vorzeichenregel einmal positives, einmal negatives Vorzeichen, so daß f_2 dem allein übrig bleibenden Teil f_1 gleich wird. Also ist

$$f_1 = f_2 \dots (666)$$

Eine mit a verbundene, auf der Unterlage sich abwälzende Rolle R , deren Achse zum Fahrstab parallel liegt und deren Berührungsebene vom Stabende B bzw. B' um s absteht, wird sich infolge der Parallelverschiebung und Drehung des Stabes um die Beträge $+dU$ und $-s \cdot d\varphi$ abwälzen. Die wirklich erfolgende Rollenabwälzung ist ihre Summe

$$dU_0 = dU - s \cdot d\varphi \dots (667)$$

Setzt man den hieraus folgenden Ausdruck

$$dU = dU_0 + s \cdot d\varphi \dots (668)$$

in (665) ein, so folgt

$$f_2 = a \int dU_0 + a \cdot s \int d\varphi + \frac{a^2}{2} \int d\varphi \dots (669)$$

$\int dU_0$ ist die gesamte, während der Umfahrung von f_1 erfolgende Rollenabwälzung U_0 . Die Stabrichtung, welche beim Beginn der Bewegung etwa φ_0 war, ist am Ende derselben wieder φ_0 , da der Stab in die Ausgangslage zurückgekehrt ist, ohne den Umkreis umfahren zu haben; es sind also auch in $\int d\varphi$ die Grenzen φ_0 einzusetzen. Damit erhält man

$$f_2 = a \cdot U_0 + \left(a s + \frac{a^2}{2} \right) \left[\varphi \right]_{\varphi_0}^{\varphi_0} = a \cdot U_0 \dots \dots \dots (670)$$

oder mit Rücksicht auf (666)

$$f_1 = f_2 = a \cdot U_0 \dots \dots \dots (671)$$

Bedeutet r den Halbmesser, u den Umfang und n die Umdrehungszahl der Rolle R , so gelten die Beziehungen

$$u = 2 \pi \cdot r, \quad U_0 = n \cdot u = 2 n \pi \cdot r \dots \dots \dots (672)$$

Ihre Berücksichtigung in (671) führt auf die für Pol außerhalb der umfahrenen Fläche gültige Planimetergleichung

$$f_1 = (a \cdot u) \cdot n = k \cdot n \dots \dots \dots (673)$$

Die umfahrene Fläche ist also, wenn das zweite Stabende außerhalb ihres Umrisses liegt, das Produkt aus einer Multiplikationskonstanten k und der Rollenumdrehungszahl n . Die Multiplikationskonstante

$$k = a \cdot u \dots \dots \dots (674)$$

ist das Produkt der Stablänge a in den Rollenumfang u .

Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn sich beim Befahren der die gesuchte Fläche f_1 begrenzenden Linie K das zweite Stabende B auf einer innerhalb K liegenden, geschlossenen Kurve K_0 (Abb. 301) bewegt, welche die Fläche f_3 begrenzen möge. Bei einer vollständigen Umfahrung von K überstreicht der Fahrstab a die ringförmige von K und K_0 begrenzte Fläche f_2 und gelangt nach einer vollen Umdrehung in die mit der Anfangsstellung $B_0 A_0$ zusammenfallende Endstellung. Den beiden Lagen entsprechen also die Richtungsangaben φ_0 bzw. $\varphi_0 + 2\pi$. Für f_3 ergibt sich durch die gleichen Überlegungen wie vorher der Ausdruck (670), nur daß jetzt die obere Integrationsgrenze nicht mehr φ_0 sondern $\varphi_0 + 2\pi$ ist. So findet man jetzt

$$f_2 = a \cdot U_0 + a^2 \cdot \pi + 2 a s \cdot \pi \dots \dots \dots (675)$$

Für den Fall, daß K_0 ein Kreis vom Halbmesser p ist, wird

$$f_3 = p^2 \pi \dots \dots \dots (676)$$

und die gesuchte Fläche ist

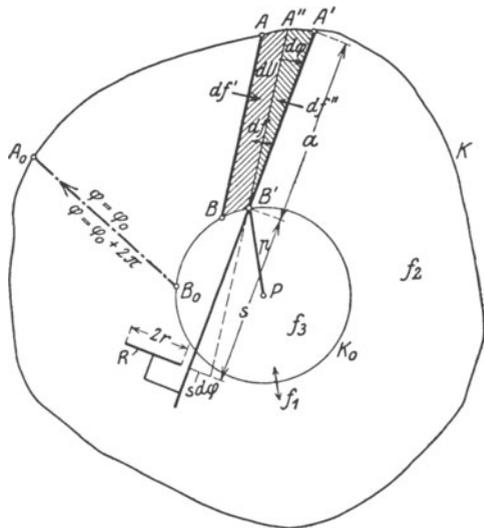


Abb. 301. Zur Theorie des Polarplanimeters für eine mit Pol innerhalb umfahrene Fläche.

$$f_1 = f_2 + f_3 = a \cdot U_0 + \pi(a^2 + 2as + p^2) \dots (677)$$

bzw.

$$f_1 = k \cdot n + C, \dots (678)$$

wenn k und n ihre alte Bedeutung behalten und von den Abkürzungen

$$a^2 + 2as + p^2 = L^2, \quad \pi \cdot L^2 = C \dots (679)$$

Gebrauch gemacht wird.

Bewegt sich das Stabende B_0 auf einer innerhalb der befahrenen Kurve K liegenden Linie K_0 , so ist die umfahrene Fläche f_1 das Produkt der Multiplikationskonstanten k in die Umdrehungszahl n , vergrößert um eine Additionskonstante C .

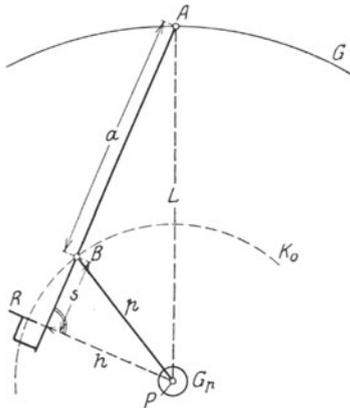


Abb. 302. Schematische Darstellung des Polarplanimeters.

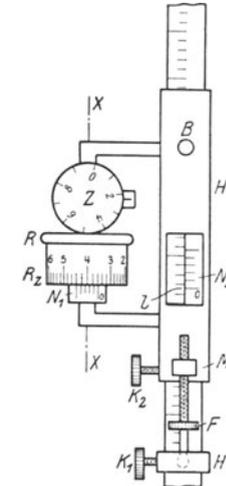


Abb. 303. Rollen-, Zähl- und Einstellwerk des Polarplanimeters.

Das in Abb. 302 schematisch dargestellte *Amslersche* Polarplanimeter besteht im wesentlichen aus zwei im gemeinsamen Endpunkte B gelenkig verbundenen Stäben, dem Fahrarm a und dem in den Pol P endigenden Polarm p . Ersterer besitzt im Endpunkte A einen Fahrstift, mit dem kleine Figuren mit festem Pol außerhalb, große aber mit Pol innerhalb der zu bestimmenden Fläche umfahren werden. Der Pol wird, wenn er eine Spitze besitzt, mit derselben in die Unterlage eingedrückt und durch ein kleines Polgewicht G_p beschwert; bei kugelförmiger Ausbildung wird der Pol in die entsprechend geformte Höhlung eines größeren, fest auf der Unterlage liegenden Polgewichtes eingesetzt. Mit dem Fahrarm ist eine Laufrolle R verbunden, deren Achse XX (Abb. 303) zu a parallel liegt und deren Berührungsebene vom Gelenk B um s absteht. Ein anschließender Zylinder, die Zählrolle R_z trägt eine Teilung, an der mit Hilfe eines Nonius die Bruchteile der Umdrehungszahl abgelesen werden, während eine Zählrolle Z die ganzen Umdrehungen angibt. Um eine Änderung der Fahrarmlänge zu ermöglichen, sind die eben genannten Bestandteile nicht unmittelbar mit dem Fahrstab, sondern mit einer nach Lösen der Klemmschrauben K_1, K_2 am Fahrarm verschiebbaren Hülse H verbunden. Ist mit Hilfe des Nullstriches eines Nonius N_2 an der in einem Fenster der Hülse sichtbaren Fahrarmteilung die gewünschte Einstellung l ungefähr erreicht, so wird K_1 angezogen, mit der Feinstellschraube F die Einstellung l scharf herbeigeführt und sodann die Verschlussklemmschraube K_2 angezogen. Die

Hülse H trägt auch das Gelenk B , welches vielfach derart ausgebildet ist, daß der Polarm nach dem Gebrauch ohne weiteres herausgenommen werden kann.

Der Festwert C kann als die Fläche eines Kreises, des sog. Grundkreises aufgefaßt werden, dessen Halbmesser bei kreisförmigem K_0 eine einfache geometrische Deutung besitzt. Faßt man diejenige Stellung des Fahrarmes zum Polarm ins Auge, für welche die erweiterte Rollenebene durch den Pol geht (Abb. 302), so ist das Quadrat des zugehörigen Abstandes AP des Fahrstiftes vom Pol der besondere Wert

$$x^2 = (a + s)^2 + h^2 = (a + s)^2 + p^2 - s^2 = a^2 + 2as + p^2, \dots (680)$$

welcher mit dem durch (679) definierten L^2 übereinstimmt. Die Additionskonstante oder Grundkreisfläche $C = \pi \cdot L^2$ ist daher die Fläche desjenigen Kreises G , welcher umfahren wird, wenn die Rollenebene stets den Pol enthält. Da sich die Rolle bei der Umfahrung des Grundkreises stets in der Richtung ihrer Achse bewegt, so findet dabei nur ein Gleiten, aber keine Umdrehung der Rolle statt.

Will man $C = 0$ machen, so muß L verschwinden. Für diesen Fall folgt aus der ersten der Gleichungen (679) die Beziehung

$$s = -\left(\frac{a}{2} + \frac{p^2}{2a}\right), \dots (681)$$

nach welcher R und A sich jedenfalls auf derselben Seite von B (R in der Nähe von A) befinden müssen.

Verbindet man den Polarm mit zwei gleich dicken, senkrecht zur Achse fein gerillten Zylindern Z_1, Z_2 (Abb. 304), die mittels Spitzen in einem festen, in der Abbildung gestrichelt angedeuteten Rahmen laufen, welcher auch das Gelenk B trägt, so wird sich bei einer Bewegung des Fahrstiftes der Polarm stets parallel zu seiner Anfangslage verschieben. Der Pol liegt also bei diesem in verschiedenen Formen ausgebildeten Rollplanimeter im Unendlichen, so daß alle Flächen, die sich übrigens senkrecht zum Polarm beliebig weit ausdehnen können, stets mit Pol außerhalb umfahren werden.

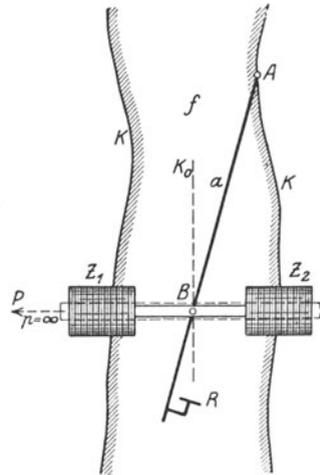


Abb. 304. Rollplanimeter.

Die Bestimmung der Planimeterkonstanten k, C kann in roher Weise mittels der Ausdrücke (674) und (679) aus den Abmessungen des Instrumentes erfolgen. Die so gewonnenen, ziemlich ungenauen Ergebnisse sind jedoch nur für eine rohe Überprüfung tauglich. Zur scharfen Planimetereichung dient der im folgenden beschriebene empirische Weg.

Wird eine bekannte Fläche f mit Pol außerhalb der Figur mit den verschiedenen Fahrarmenlängen a_1, a_2 umfahren, so ergeben sich die Umdrehungszahlen n_1, n_2 und es bestehen die Beziehungen

$$f = k_1 n_1 = k_2 n_2, \dots (682)$$

aus welchen bei bekanntem f und beobachteten n_1, n_2 die Werte k_1, k_2 zahlenmäßig berechnet werden können.

Nach (674) aber ist auch

$$k_1 = a_1 \cdot u, \quad k_2 = a_2 u, \dots (683)$$

so daß aus (683) und (682) die Verhältnisgleichung

$$k_1 : k_2 = a_1 : a_2 = \frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2} \dots \dots \dots (684)$$

hervorgeht. Demnach sind die Multiplikationskonstanten eines Planimeters zu den zugehörigen Fahrarmmlängen direkt, zu den zur gleichen Fläche gehörigen Umdrehungszahlen indirekt proportional.

Ist k_0 eine runde Konstante, für welche die zugehörige Fahrarmmlänge a_0 gesucht wird, so gilt nach (684) auch

$$a_0 : a_1 = k_0 : k_1 \dots \dots \dots (685)$$

Hieraus und aus

$$a_2 : a_1 = k_2 : k_1 \dots \dots \dots (686)$$

ergibt sich durch entsprechende Subtraktion

$$(a_0 - a_1) : (k_0 - k_1) = a_1 : k_1 = (a_2 - a_1) : (k_2 - k_1) \dots \dots (687)$$

und daraus folgt für die gesuchte Fahrarmmlänge der Ausdruck

$$a_0 = a_1 + (a_2 - a_1) \frac{k_0 - k_1}{k_2 - k_1} \dots \dots \dots (688)$$

Würden die Ablesungen bei den Fahrarmeinstellungen wirklich die Fahrarmmlängen angeben, so könnte zur Berechnung von a_0 die einfachere Beziehung (685) dienen. In Wirklichkeit unterscheiden sich aber die Fahrarmmlängen a_0, a_1, a_2 um einen Betrag Δ von den entsprechenden Fahrarmeinstellungen (Ablesungen) l_0, l_1, l_2 , so daß

$$a_0 = l_0 + \Delta, \quad a_1 = l_1 + \Delta, \quad a_2 = l_2 + \Delta \dots \dots \dots (689)$$

ist. Setzen wir diese Ausdrücke in (688) ein, so fällt Δ hinaus und es ergibt sich die zur runden Konstanten k_0 gehörige Fahrarmeinstellung

$$l_0 = l_1 + (l_2 - l_1) \frac{k_0 - k_1}{k_2 - k_1}, \dots \dots \dots (690)$$

welche hiernach aus den mittels (682) berechneten Zufallswerten k_1, k_2 und den zugehörigen Fahrarmeinstellungen l_1, l_2 bestimmt werden kann. Die Beziehung (690) gilt auch, wie sich leicht zeigen läßt, für jede beliebige Einheit der Fahrarmteilung wie auch für den Fall, daß die Bezifferung des Fahrarms mit zunehmender Fahrarmmlänge abnimmt.

An die Bestimmung der Multiplikationskonstanten k reiht sich nunmehr die Ermittlung der Additionskonstanten C aus Umfahrungen einer großen bekannten Fläche f mit Pol innerhalb der Figur. Ist n die dabei beobachtete Umdrehungszahl, so wird

$$C = f - k \cdot n \dots \dots \dots (691)$$

Zur Durchführung einer Flächenbestimmung mit dem Planimeter setzt man zweckmäßig zunächst den Fahrstift in die Mitte der Figur, stellt den Polarm rechtwinklig zum Fahrarm, fährt hierauf mit dem Fahrstift an den Rand der Figur und überzeugt sich zunächst, ob bei der gewählten Stellung ein Umfahren der Figur möglich ist, ohne daß der von den beiden Armen des Instrumentes eingeschlossene Winkel an irgendeiner Stelle zu spitz oder zu stumpf wird. Dann wählt und bezeichnet man als Anfangspunkt der Umfahrung eine Stelle, für welche einer Bewegung des Fahrstiftes eine möglichst geringe Änderung der Rollenablesung entspricht. Unter dieser Voraussetzung macht es für das Ergebnis wenig aus, wenn der Fahrstift am

Ende der Umfahrung etwa nicht genau in den Anfangspunkt zu liegen kommt; er muß jedoch am Anfang und am Ende der Bewegung scharf auf der befahrenen Linie liegen. Zum Schutz gegen grobe Irrtümer und zur Erhöhung der Genauigkeit führt man in der Regel in beiden Umfahrungsrichtungen mindestens je drei Umfahrungen durch und vereinigt die gefundenen Einzelwerte zum arithmetischen Mittel.

Die Papieränderung spielt für die Flächenermittlung mit dem Planimeter genau dieselbe Rolle wie bei der Flächenberechnung aus Planmaßen¹⁾. Auch die Beziehung zwischen Papierfläche, Feldfläche und Maßstab ist in beiden Fällen die gleiche.

45. Halbgraphische Flächenberechnung.

Die halbgraphische Flächenberechnung liegt der Genauigkeit nach zwischen der Flächenberechnung aus Naturmaßen und derjenigen nach dem Plan. Sie erfolgt unter gleichzeitiger Verwendung von Naturmaßen und Planmaßen, und zwar werden zur Geringhaltung der Flächenfehler die kleinen Faktoren direkt gemessen, die großen aber unter sofortiger Berücksichtigung der Papieränderung dem Plane entnommen.

46. Genauigkeit der Flächenberechnung.

Die Fehlerfortpflanzung in der Flächenberechnung ist eine verschiedene, je nachdem es sich um Flächenberechnungen aus Naturmaßen oder nach dem Plan handelt.

a) Fehler der Flächenberechnung aus Naturmaßen.

Erfahren die Grundlinie c und die zugehörige Höhe h_c eines Dreiecks die Änderungen dc und dh_c , so ist, wie aus (629) folgt,

$$dF = \frac{1}{2}(c \cdot dh_c + h_c \cdot dc) \dots \dots \dots (692)$$

der den genannten Änderungen entsprechende bestimmte Fehler der Dreiecksfläche. Hierin ist jeder Faktor mit dem Fehler des anderen multipliziert. Bei sehr verschiedenen Faktoren wird also der mit dem großen Faktor multiplizierte Fehler des kleinen Faktors einen viel größeren Einfluß ausüben wie der mit dem kleinen Faktor multiplizierte Fehler des großen Faktors. Daraus folgt die bekannte, allgemein gültige Regel, die kleineren Faktoren mit besonderer Schärfe zu bestimmen.

Wenn an Stelle von dc und dh_c die mittleren Unsicherheiten m_c , m_{h_c} treten, so ergibt die Anwendung des mittleren Fehlergesetzes das mittlere Flächenfehlerquadrat

$$m_F^2 = \frac{1}{4}(c^2 \cdot m_{h_c}^2 + h_c^2 \cdot m_c^2), \dots \dots \dots (693)$$

gleichgültig, in welcher Weise m_c und m_{h_c} entstehen. Setzt man etwa

$$m_c^2 = m_0^2 \cdot c, \quad m_{h_c}^2 = m_0^2 \cdot h_c, \dots \dots \dots (694)$$

¹⁾ Eine Fläche f kann ohne Kenntnis der Papieränderung und der Multiplikationskonstanten des Planimeters bestimmt werden, wenn mit ihr auch eine sie umschließende bekannte Fläche f_0 (z. B. ein Netzquadrat) ebenfalls mit Po! außerhalb umfahren wird. Sind n und n_0 die beobachteten Umdrehungszahlen, so wird die nach dieser sog. Proportionalmethode bestimmte Fläche $f = \frac{n}{n_0} \cdot f_0$. Auch durch eine geringe Änderung der Fahrarmeinstellung kann der Papiereingang berücksichtigt werden.

wo m_c den mittleren unregelmäßigen Fehler der Längeneinheit bedeutet, so folgt aus (693) die besondere Form des mittleren Fehlerquadrats der Dreiecksfläche

$$m_F^2 = \frac{1}{4} c \cdot h_c (c + h_c) m_0^2 = \frac{1}{2} F (c + h_c) m_0^2. \dots (695)$$

Dieser Ausdruck wird mit Rücksicht auf den Faktor $(c + h_c)$ am kleinsten, wenn zur Flächenberechnung dasjenige Paar „Grundlinie, Höhe“ benutzt wird, dessen Elemente die kleinste Summe besitzen. Wie die weitere Untersuchung zeigt, besitzen diese Längen unter sich den geringsten Unterschied.

Den Einfluß, welchen die Fehler da, db, dc in den gemessenen Seiten auf die Dreiecksfläche ausüben, erhält man aus der Heronischen Flächenformel zu

$$dF = r (da \cdot \cos \alpha + db \cdot \cos \beta + dc \cdot \cos \gamma), \dots (696)$$

wenn r den Halbmesser des Dreiecksumkreises bedeutet. Demnach läßt ein kleiner Fehler der Hypotenuse die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks unberührt.

Den beliebig entstandenen mittleren Seitenfehlern m_a, m_b, m_c entspricht im Dreieck das mittlere Flächenfehlerquadrat

$$m_F^2 = r^2 (\cos^2 \alpha \cdot m_a^2 + \cos^2 \beta \cdot m_b^2 + \cos^2 \gamma \cdot m_c^2). \dots (697)$$

Für die Rechtecksfläche $F = a \cdot b$ erhält man die den Gleichungen (692) und (694) entsprechenden Fehlerausdrücke

$$dF = a \cdot db + b \cdot da \dots (698)$$

bzw.

$$m_F^2 = F (a + b) m_0^2. \dots (699)$$

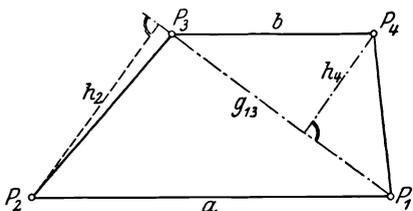


Abb. 305. Flächenfehler im Viereck.

Die (695) und (699) entsprechenden mittleren Fehlerquadrate der Trapezfläche sind

$$m_F^2 = \frac{1}{2} F (a + b + h) m_0^2 \dots (700)$$

bzw. $m_F^2 = \frac{1}{2} F (g_{13} + h_2 + h_4) m_0^2, (701)$

je nachdem die Trapezfläche nach (632) oder aber nach Andeutung von Abb. 305 als Summe zweier Dreiecksflächen mit

der gemeinsamen Grundlinie g_{13} und den Höhen h_2, h_4 berechnet wird.

Für ein beliebiges als Summe zweier Dreiecke berechnetes Viereck findet man

$$m_F^2 = \frac{1}{2} F (e + h_b + h_d) m_0^2 = \frac{1}{2} F \left\{ e + f - 2f \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\mu}{2} \right) \right\} m_0^2. (702)$$

bzw. $m_F^2 = \frac{1}{2} (f + h_a + h_c) m_0^2 = \frac{1}{2} F \left\{ e + f - 2e \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\mu}{2} \right) \right\} m_0^2, (703)$

je nachdem zur Flächenberechnung die Stücke e, h_b, h_d (Abb. 292) bzw. f, h_a, h_c verwendet worden sind. Aus einem Vergleich der dritten Glieder in beiden geschweiften Klammern folgt, daß diejenige Flächenbestimmung als die genauere zu betrachten ist, welche die kürzere Diagonale als Grundlinie benutzt.

Sehr viel umständlicher liegen die Verhältnisse, wenn es sich um den wichtigen Fall der Flächenberechnung eines Vielecks handelt. Dabei verläuft die Fehlerfortpflanzung für eine Standlinienaufnahme mittels rechtwinkliger Koordinaten wesentlich anders als bei einer Vielecksaufnahme durch Umfangsmessung, d. h. durch Polygonzüge.

Wir betrachten zunächst die Verhältnisse bei der durch eine Standlinienaufnahme bestimmten Vielecksfläche und berücksichtigen wegen der Wichtigkeit dieses Falles nicht nur die bisher allein beachteten mit der Wurzel aus den gemessenen Längen fortschreitenden Fehler, sondern auch alle übrigen. Aus (642) erhält man zunächst den bestimmten Flächenfehler

$$dF = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_{i-1}) dx_i - \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_{i-1}) dy_i \right\} \dots (704)$$

der ins Auge gefaßten Fläche, deren Eckpunkte P_1 bis P_n sein mögen, während zu P_m (Abb. 306) die größte Abszisse gehören soll. Bedeuten m_0 den mit \sqrt{l} fortschreitenden mittleren zufälligen Fehler der Längenmessung, $m_r = k \cdot y$ den durch eine Ungenauigkeit der Ordinatenrichtung verursachten mittleren Fehler der Abszisse (k etwa $1' : \rho'$, also roh $1 : 3000$), m_a (rund 2,9 Einheiten der ersten abgeworfenen Stelle), m_λ die mittleren Fehler der Abrundung, Ablesung und der Ablotung bzw. des Einrichtens und ist $|A_{ik}|$ der Absolutwert eines zwischen zwei aufeinander folgenden Ordinatenfußpunkten liegenden Abszissenelementes, gleichgültig, ob die zugehörigen Eckpunkte P_i, P_k auch in der Numerierung aufeinanderfolgen oder ob sie diagonal liegen, so wird das Quadrat des mittleren Flächenfehlers¹⁾

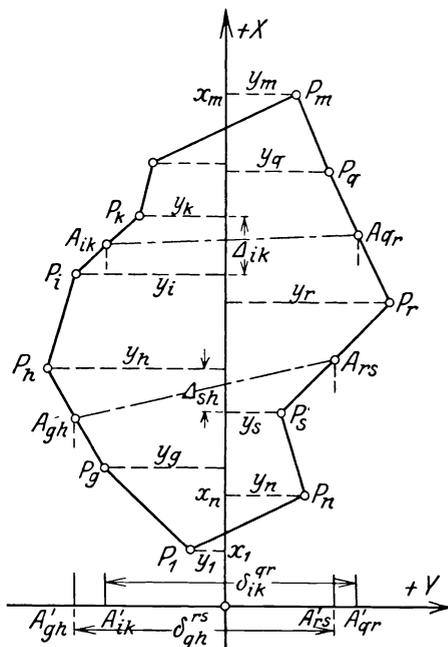


Abb. 306. Flächenfehler eines durch eine Standlinienaufnahme bestimmten Polygons.

$$m_F^2 = m_0^2 \left\{ \sum_{i=1}^{k=m} |A_{ik}| (\delta_{ik}^{qr})^2 + \sum_{i=1}^n |y_i| (x_{i+1} - x_{i-1})^2 \right\} + k^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 (y_{i+1} - y_{i-1})^2 + \frac{1}{4} D^2 (m_a^2 + m_\lambda^2) \dots (705)$$

Hierin²⁾ bedeutet weiter δ_{ik}^{qr} die Projektion der Diagonale $A_{ik} A_{qr}$ auf die Ordinatenachse, A_{ik} und A_{qr} selbst aber sind die Mittelpunkte derjenigen Strecken $P_i P_k$ und $P_q P_r$, in deren Projektionen auf die Abszissenachse das Element A_{ik} enthalten ist. In dem Beiwert

$$D = \sqrt[n]{[d_i^2]} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2} \dots (706)$$

bedeutet d_i die nach dem übersprungenen Punkte P_i bezeichnete direkte Entfernung der Punkte P_{i-1}, P_{i+1} . D , also auch der Einfluß von m_a, m_λ auf die Fläche sind von der Lage des Koordinatensystems unab-

¹⁾ Siehe hierzu *Näbauer*, Über die Genauigkeit einer aus rechtwinkligen Koordinaten berechneten Fläche, Z.V.H.B.V. 1912, S. 1—12.

²⁾ Die Summe $\sum_{i=1}^{k=m} |A_{ik}| (\delta_{ik}^{qr})$ enthält $n-1$ Glieder.

hängig. Der Bau von (705) weist darauf hin, daß man zur Erzielung eines kleinen Flächenfehlers bei langgestreckten Vielecken die Standlinie so legen soll, daß sie das Grundstück der Länge nach oder in Richtung der längeren Diagonale annähernd halbiert. Auch kann man aus (705) ersehen, daß durch eine Einschaltung weiterer Punkte des Umfangs zwischen die bereits vorhandenen der Flächenfehler im allgemeinen verringert wird.

Sind die zur Abszissen- und Ordinatenmessung verwendeten Längenmeßwerkzeuge um $p^0/0$ bzw. $q^0/0$ fehlerhaft, so entsteht ein weiterer Flächenteilfehler

$$dF_m = \frac{1}{100} (p + q) F. \dots \dots \dots (707)$$

Wendet man die Formel (705) auf ein Rechteck von der Fläche F mit den Seiten a, b an, dessen zu a parallele Standlinie b halbiert, so findet man

$$m_F^2 = (2a + b) F \cdot m_0^2 + k^2 b^4 + d^2 (m_a^2 + m_b^2 + m_i^2), \dots \dots (708)$$

wenn $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ die Rechtecksdiagonale bedeutet. Geht die Standlinie durch zwei Gegenecken des Rechtecks und ist h der Abstand der beiden anderen Ecken von dieser Diagonale, so ergibt sich das Fehlerquadrat

$$m_F^2 = (2d + h) F \cdot m_0^2 + d^2 (m_a^2 + m_b^2 + m_i^2) \dots \dots \dots (709)$$

Hier verschwindet also das mit k^2 behaftete Glied, und ein Vergleich mit (708) zeigt, daß die Aufmessung des Rechtecks auf die Diagonale derjenigen auf die Längsachse unter sonst gleichen Umständen vorzuziehen ist.

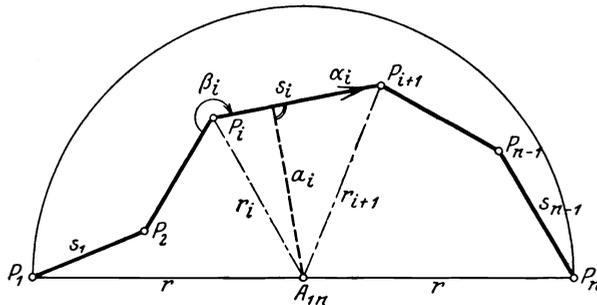


Abb. 307. Zur Ermittlung des Flächenfehlers eines durch Umfangsmessung bestimmten Polygons.

Wesentlich anders als in der durch gemessene rechtwinklige Koordinaten bestimmten Vielecksfläche liegen die Verhältnisse in dem durch Umfangsmessung bestimmten Polygonzug $P_1 P_2 \dots P_n$ (Abb. 307). Bedeuten m_i, μ_i, ν_i die mittleren Fehler der gemessenen Seiten s_i , Polygonwinkel β_i und Seitenrichtungen α_i , ferner ${}^n_1S, {}^n_1T, {}^n_1O$ die entsprechenden mittleren Fehler der vom Zug und seiner Abschlußdiagonale $P_1 P_n$ umschlossenen Fläche, so gelten die Beziehungen¹⁾

$${}^n_1S^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ a_i + C_1 \sin \alpha_i + C_2 \cos \alpha_i \right\}^2 m_i^2, \dots \dots \dots (710)$$

$${}^n_1T^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \left(-r_i^2 + \frac{1}{n} [r_e^2] \right) - C_1 \cdot \xi_i + C_2 \cdot \eta_i \right\}^2 \mu_i^2, \dots \dots (711)$$

$${}^n_1O^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} (r_{i+1}^2 - r_i^2) + C_1 \cdot \Delta x_i - C_2 \cdot \Delta y_i \right\}^2 \nu_i^2. \dots \dots (712)$$

¹⁾ Auf die Herleitung dieser Ausdrücke muß hier verzichtet werden. Siehe dazu *Näbauer*, Flächenfehler im einfachen, durch Umfangsmessung bestimmten Polygonzug, Karlsruhe 1918.

Dabei besitzt n_1S für den Winkelzug und den Richtungszug bei doppeltem Koordinatenanschluß Geltung, n_1T bezieht sich auf den mit zweifachem Koordinaten- und Richtungsanschluß gemessenen, in üblicher Weise ausgeglichenen (erst Winkelausgleichung, dann Koordinatenausgleichung) Winkelpolygonzug, während n_1O zu einem Richtungszug (z. B. Bussolenzug) mit doppeltem Koordinatenanschluß gehört.

Die in den Ausdrücken (710) bis (712) auftretenden Größen kann man teilweise der Zeichnung entnehmen. a_i ist der Abstand des Mittelpunktes $A_{1,n}$ der Abschlußstrecke $P_1 P_n$ von der Seite s_i (positiv, wenn $A_{1,n}$ rechts von s_i liegt), r_i, r_{i+1}, r_e sind die Entfernungen der Polygonpunkte P_i, P_{i+1}, P_e von $A_{1,n}$; $\Delta x_i, \Delta y_i$ bezeichnen die Differenzen $x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i$ und ξ_i, η_i bedeuten die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P_i in einem zum gegebenen parallelen Koordinatensystem, dessen Ursprung in den Schwerpunkt der Polygonpunkte $P_1, P_2, \dots P_n$ fällt. Die Beiwerte C_1, C_2 endlich sind die Summen

$$C_1 = +\frac{1}{2} \sum_1^n q_e (x_{e+1} - x_{e-1}), \quad C_2 = -\frac{1}{2} \sum_1^n p_e (y_{e+1} - y_{e-1}), \dots \quad (713)$$

deren Koeffizienten p_e, q_e die Bedeutung von Verteilungszahlen bei der Koordinatenausgleichung besitzen, so zwar, daß die auf den Punkt P_e treffenden Koordinatenverbesserungen die Ausdrücke

$$dx_e = p_e \cdot v_x, \quad dy_e = q_e \cdot v_y \quad \dots \quad (714)$$

sind, wo die Koordinatenanschlußwidersprüche $v_x = x_n - x'_n, v_y = y_n - y'_n$ den Charakter von Verbesserungen besitzen.

Durch die Verwendung eines um $p\%$ fehlerhaften Längenmeßwerkzeugs entsteht der systematische Flächenfehleranteil

$$dF_m = \frac{p}{100} \{2 {}^n_1F + C_1 (y_n - y_1) + C_2 (x_n - x_1)\} \dots \quad (715)$$

Für den gleichseitigen, gestreckten Zug ist

$${}^n_1S = 0, \quad {}^n_1T^2 = \frac{s^4}{720} n(n^2 - 1)(n^2 - 4)\mu^2, \quad {}^n_1O^2 = \frac{s^4}{12} n(n-1)(n-2)v^2, \quad (716)$$

wenn, wie es sehr häufig geschieht, v_x und v_y zu gleichen Teilen auf die einzelnen Koordinatenunterschiede verteilt werden.

Die unter Voraussetzung derselben Verteilungsart für den gleichseitigen, gleichmäßig gekrümmten Zug sich ergebenden Flächenfehler sind die etwas umständlichen Ausdrücke¹⁾

$${}^n_1S = \pm m \frac{s}{2(n-1)} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \sqrt{(n-1)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\Gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right)^2 \left(3(n-1) - \frac{\sin \Gamma}{\sin \gamma} \right)}, \dots \quad (717)$$

$${}^n_1T = \pm \mu \frac{s^2}{4(n-1) \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \left[\frac{\sin \frac{n\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \cos \frac{\Gamma}{2} \right] \sqrt{\frac{n}{2} - \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{n\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\sin n\gamma}{\sin \gamma}}, \dots \quad (718)$$

¹⁾ Ihre Ableitung siehe bei *Näbauer*, Fehler der Polygonfläche n_1F im gleichseitigen, gleichmäßig gekrümmten Zug, Z. V. W. 1921, S. 417—434, 449—466, 481—494.

$${}^n_1O = \pm \nu \cdot s^2 \frac{\sin \frac{\Gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{4(n-1) \sin \frac{\gamma}{2}} \sqrt{2 \left(n-1 - \frac{\sin \Gamma}{\sin \gamma} \right)}, \dots \dots (719)$$

in welchen γ und $\Gamma = (n-1)\gamma$ die Zentriwinkel bedeuten, unter denen vom Mittelpunkt des dem Polygon umschriebenen Kreises aus die einzelne Polygoneite s bzw. die Abschlußdiagonale $P_1 P_n$ erscheinen. Der unter (715) stehende systematische Fehleranteil wird hier der besondere Wert

$$dF_m = \frac{p}{100} \left[2 {}^n_1F + \frac{1}{2} P_1 P_n^2 \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\Gamma}{2} - \frac{1}{n-1} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right\} \right] \dots \dots (720)$$

Aus (717) bis (719) folgen für den regelmäßigen, geschlossenen Zug, in dem P_n nach P_1 fällt, die besonderen Werte

$${}^n_1S = m \cdot \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \sqrt{n-1} = m \cdot R_e \sqrt{n-1}, \dots \dots (721)$$

wo R_e den Inkreishalbmesser des Polygons bedeutet, bzw.

$${}^n_1T = 0, \quad {}^n_1O = 0. \dots \dots (722)$$

Demnach wird bei der gleichmäßigen Verteilung der Koordinatenwidersprüche die Fläche des geschlossenen, regelmäßigen Polygons durch die Seitenrichtungsfehler und Polygonwinkelfehler nicht beeinflusst.

Wenn man sich auf Zentriwinkel $\Gamma < \pi$ beschränkt, so kann man an Stelle der strengen Ausdrücke (717) bis (719) von den Näherungen

$${}^n_1S = \pm m \cdot s \frac{\widehat{\Gamma}}{11} (n-1) \sqrt{n-2} \left\{ 1 - \frac{\widehat{\Gamma}^2}{27} \right\}, \dots \dots (723)$$

$${}^n_1T = \pm \mu \cdot s^2 \sqrt{\frac{1}{720} (n - \frac{1}{2})^5} \left\{ 1 - \frac{\widehat{\Gamma}^2}{20} \right\}, \dots \dots (724)$$

$${}^n_1O_5 = \pm \nu \cdot s^2 \sqrt{\frac{n}{14} (n-1)(n-2)} \left\{ 1 - \frac{\widehat{\Gamma}^2}{20} \right\} \dots \dots (725)$$

Gebrauch machen, ohne äußerstenfalls die relativen Fehler $\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}$ zu überschreiten. Solange Γ im ersten Quadranten liegt, kann in diesen Gebrauchsformeln auch noch das mit $\widehat{\Gamma}^2$ behaftete Glied in der geschweiften Klammer unterdrückt werden.

b) Fehler der aus Planmaßen berechneten Flächen.

Die aus dem Plan mit Zirkel und Transversalmaßstab oder einem guten Millimetermaßstab entnommenen Maße besitzen alle die gleiche, von der Länge unabhängige mittlere Unsicherheit m_p , welche bei einiger Übung etwa $\pm \frac{1}{20}$ mm beträgt. Bei Verwendung des Koordinatographen zur Maßentnahme wird dieser Fehler noch wesentlich kleiner. Infolge der gleichen Unsicherheit kurzer und langer Planmaße werden auch die Flächenfehlerausdrücke etwas andere als bei der Flächenberechnung aus Naturmaßen.

Für die aus der Grundlinie c und der Höhe h_c berechnete Dreiecksfläche f z. B. findet man das mittlere Fehlerquadrat

$$m_f^2 = \frac{1}{4} (c^2 + h_c^2) m_p^2 \dots \dots (726)$$

Es wird — wie früher — um ϵ_0 kleiner, je weniger sich die gewählte Grundlinie von der zugehörigen Höhe unterscheidet.

Im Rechteck mit der Diagonale d wird

$$m_f = d \cdot m_p, \dots \dots \dots (727)$$

während sich für das Trapez die Ausdrücke

$$m_f^2 = \frac{1}{4} [(a+b)^2 + 2h^2] m_p^2 \text{ bzw. } m_f^2 = \frac{1}{4} [2g_{13}^2 + (h_2 + h_4)^2] m_p^2 \quad (728)$$

ergeben, je nachdem die Trapezfläche nach (632) aus den parallelen Seiten und ihrem Abstand oder nach Andeutung von Abb. 305 als Summe zweier Dreiecke mit der gemeinsamen Grundlinie g_{13} ermittelt wird.

Für ein nach der zuletzt genannten Art berechnetes beliebiges Viereck erhält man, wenn e (Abb. 292) als Grundlinie gewählt wird,

$$m_f^2 = \frac{1}{4} [2e^2 + (h_b + h_d)^2] m_p^2 = \frac{1}{2} \left(e^2 + f^2 - f^2 \cos^2 \frac{\mu}{2} \right) m_p^2 \dots \dots (729)$$

Die zuletzt angeschriebene Form läßt erkennen, daß man auch hier vom Genauigkeitsstandpunkte aus stets die kürzere Vierecksdiagonale zur Grundlinie machen soll.

Um den mittleren Fehler einer beliebigen Vielecksfläche, deren Eckpunktskoordinaten dem Plan entnommen sind, aufzustellen, brauchen wir nur an den allgemein gültigen Fehlerausdruck (704) anzuknüpfen. Ersetzt man die darin enthaltenen bestimmten Koordinatenänderungen dx , dy durch die mittlere Unsicherheit m_p , so ergibt sich bei Anwendung des mittleren Fehlergesetzes für den Flächenfehler der höchst einfache Ausdruck

$$m_f = \frac{1}{2} D \cdot m_p, \dots \dots \dots (730)$$

wo D seine alte, durch (706) erklärte Bedeutung besitzt.

Die diesen verschiedenen Fehlern m_f der Papierfläche f entsprechenden mittleren Fehler m_F der Feldfläche F sind die Ausdrücke

$$m_F = V^2 \cdot m_f, \dots \dots \dots (731)$$

wenn der Planmaßstab $M = 1:V$ ist.

c) Genauigkeit der Flächenberechnung mit dem Planimeter.

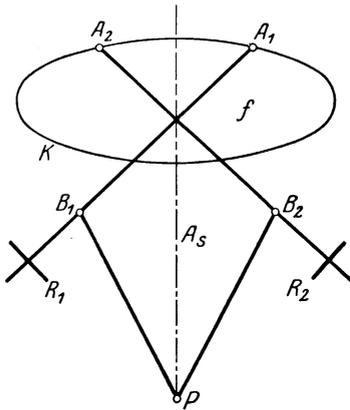
Eine mit dem Planimeter bei Pol außerhalb bestimmte Fläche $f = k \cdot n$ ist mit dem bestimmten Flächenfehler

$$df = k \cdot dn + n \cdot dk \dots \dots \dots (732)$$

behaftet, wenn dn und dk die bestimmten Fehler der Rollenumdrehungszahl und der Multiplikationskonstanten bedeuten. dk ist, da k auf empirischem Wege aus n bestimmt wird, von diesem, also auch von dn abhängig. Bei einer mit Pol innerhalb erfolgten Flächenbestimmung tritt zur rechten Seite von (732) noch der ebenfalls von n abhängige Fehler dC der Additionskonstanten.

Die Ursachen des Fehlers dn sind hauptsächlich folgende: 1. der Umfahrungsfehler, 2. die mangelhafte Abwälzung der Rolle auf schlechter Unterlage, 3. die Rollenschiefen gegen den Fahrarm, 4. die Schiefe der Rollenebene gegen die Rollachse, 5. die Schiefe der Scharnierachse (für Polarm und Fahrarm), 6. eine geringe Polverschiebung durch Druck oder Zug, welcher bei allzu spitzen oder stumpfen Winkeln zwischen Polarm und Fahrarm auftritt. Die praktische Ermittlung des Einflusses dieser Fehler bereitet Schwierigkeiten. Man trachtet daher, diesen Einfluß von vornherein auszuschalten, was bei verschiedenen neueren Planimeterkonstruktionen gut gelungen ist. Am einfachsten läßt sich die Rollenschiefe unschädlich

machen. Man umfährt nämlich die Fläche mit einem Kompensationspolarplanimeter, d. h. einem Polarplanimeter, dessen Polarm gegen den Fahrarm durchgeschlagen werden kann, in zwei zur Symmetrieachse A_s (Abb. 308)



der Fläche symmetrischen Aufstellungen (1 und 2). Das arithmetische Mittel der so gewonnenen Umdrehungszahlen ist frei vom Einfluß der Rollenschiefen. Um den sehr schädlichen Einfluß einer mangelhaften Unterlage zu beheben, hat man Planimeter gebaut, mit welchen eine für die Rollenabwälzung besonders geeignete Fläche verbunden ist. Eine der besten neueren Konstruktionen ist das Kugelrollplanimeter von Coradi. Lorber¹⁾ hat unter Benutzung zahlreicher Beobachtungen die Genauigkeit verschiedener Planimeterkonstruktionen untersucht. Er stellte für den mittleren Flächenfehler die Beziehung

Abb. 308. Flächenbestimmung mit dem Kompensationspolarplanimeter.

$$m_f = c \cdot k + c_1 \sqrt{k \cdot f} \dots (733)$$

auf und fand für das gewöhnliche Polarplanimeter insbesondere die Werte $c = 0,00126$ und $c_1 = 0,00022$, so daß für den mittleren Fehler der mit diesem einfachen Instrument einmal umfahrenen Fläche der Betrag

$$m_f = 0,00126 k + 0,00022 \sqrt{k \cdot f} \dots (733a)$$

zu erwarten ist. k bedeutet wie bisher den Flächenwert einer Rollenumdrehung. Lorber hat mittels der angegebenen Formel für $k = 10$ qcm und für verschiedene Flächen die zugehörigen in Tab. 35 enthaltenen relativen mittleren Fehler je einer Umfahrung berechnet, nach denen man sich ein Urteil über die ungefähre Leistungsfähigkeit des einfachen Polarplanimeters bilden kann.

Tabelle 35.

$k = 10$ qcm

f in qcm	$m_f : f$
5	1 : 357
10	1 : 588
20	1 : 1000

f in qcm	$m_f : f$
50	1 : 1852
100	1 : 2857
200	1 : 4255

d) Flächenabgleichung mit Hilfe von Kontrollflächen.

Zur Verprobung der Flächenberechnung und zur Verbesserung der errechneten Einzelflächen dienen Kontrollflächen, in welchen je eine geeignete Anzahl von nicht allzu verschiedenen Grundstücksflächen F zusammengefaßt ist. Die Hauptmasse der möglichst scharf zu bestimmenden und durch eine zweite Berechnung zu sichernden Kontrollfläche K ist die Fläche P eines Polygons, dessen der Lage nach durch ihre Koordinaten bestimmte Brechungspunkte so ausgewählt werden, daß die Polygonseiten dem Umfang der Grundstückssumme, d. h. dem Umfang der Kontrollfläche sich

¹⁾ Lorber, Franz, Über Coradi's Kugelplanimeter, Z. V. W. 1888, S. 161 bis 187. — Zur Theorie der Planimeterfehler siehe auch Wilski, P., Rollenschiefen und Scharnierschiefen beim Amslerschen Polarplanimeter, Z. V. W. 1892, S. 609 bis 618. — Ferner sei verwiesen auf Doležal E., Planimeterstudien, Berg- u. Hüttenmännisches Jahrbuch zu Leoben u. Příbram 1906, S. 293 bis 360 und 1907, S. 81 bis 143.

möglichst gut anschmiegen, und daß die über das Polygon hinausragenden Grundstücksteile (Zugänge z) sowie die Flächenteile (Abgänge a) zwischen den Polygonseiten und den innerhalb derselben liegenden Grundstücksgrenzen nicht zu groß werden und vor allem tunlichst aus Naturmaßen berechnet werden können. An die Stelle einer Polygonfläche im engeren Sinne des Wortes kann auch, besonders bei Flächenberechnungen nach dem Plan, die Fläche P eines regelmäßig begrenzten Blattes oder die Fläche eines oder mehrerer Netzquadrate treten. In allen Fällen bestehen die Beziehungen

$$K = P + [z] - [a], \quad [F] = K. \quad \dots \dots \dots (734)$$

Ersetzt man hierin die richtigen bzw. ausgeglichenen Einzelflächen F durch die unmittelbar berechneten Werte F' , so ergibt sich ein Widerspruch

$$w = K - [F'], \quad \dots \dots \dots (735)$$

welcher streng genommen proportional zu den mittleren Fehlerquadraten der Einzelflächen auf diese zu verteilen wäre. Die numerische Ermittlung dieser Fehler ist jedoch nicht immer ganz einfach und würde für die große Zahl der in Frage kommenden Grundstücke im allgemeinen zu viel Arbeit erfordern. Da andererseits der Flächenfehler zwar in keiner einfachen Beziehung zur Fläche steht, auch nicht von ihr allein abhängt, im allgemeinen aber doch mit ihr zugleich wächst, und da die Flächen ohnedies ermittelt werden, so begnügt man sich in praktischen Fällen damit, den auftretenden Widerspruch w verhältnismäßig den berechneten Flächen auf diese zu verteilen. Die abgeglichene Einzelfläche ist daher

$$F_i = F'_i + \frac{F'_i}{[F'_i]} \cdot w. \quad \dots \dots \dots (736)$$

Im Bedarfsfall, besonders wenn sehr verschiedenartige Grundstückskomplexe auftreten, zieht man es vor, die große Kontrollfläche in mehrere kleinere zu zerlegen, welche dann zunächst auf die große Kontrollfläche abgeglichen werden, ehe sie zur Abgleichung der Einzelflächen dienen.

V. Absteckungsarbeiten.

Absteckungsarbeiten sind vielfach schon bei den Aufnahmen vorzunehmen; ihre größte Bedeutung aber besitzen sie, wenn es sich darum handelt, zur Übertragung eines ingenieurtechnischen Entwurfs ins Gelände dort nach den Ergebnissen geodätischer Berechnungen oder zeichnerischer Konstruktionen Linien mit bestimmten Eigenschaften zu bezeichnen. Dabei hat man es außer mit der Bezeichnung von Profilen hauptsächlich mit der Absteckung von Linien gleicher Neigung, von Geraden und von Kurven — insbesondere Kreisbögen — zu tun, von welchen in der Natur jeweils so viel Punkte angegeben werden, daß ihre Träger praktisch genau genug bestimmt sind¹⁾. Die Ausdrücke Gerade, Kreisbogen usw. sind jedoch nicht wörtlich zu nehmen; man versteht darunter vielmehr Profillinien, deren Horizontalprojektionen gerade Linien bzw. Kreisbögen sind.

47. Absteckung von Bauprofilen.

Zur augenfälligen Bezeichnung des projektierten Baukörpers in der Natur dienen sog. Bauprofile, durch welche sowohl das Längenprofil wie insbesondere auch Querprofile des Bauwerks dargestellt werden.

a) Absteckung eines Längenprofils.

Sollen Punkte der Längsachse in der Oberfläche des projektierten Bauwerks in der Natur bezeichnet werden, so kann man etwa aus den Profiplänen oder aus den dazugehörigen Berechnungsheften die Beträge Δh entnehmen, um welche die einnivellierten Haupt- und Zwischenpunkte des Längenprofils unter den entsprechenden sichtbar zu machenden Punkten der Längsachse liegen. Werden nunmehr neben den Profilpflocken Latten lotrecht so weit eingeschlagen, oder nach dem Einschlagen in einer solchen Höhe abgeschnitten, daß ihre oberen, meist mit einem Querstück versehenen Enden die genannten Bodenpflocke um die Beträge Δh überragen, so bezeichnen die Lattenenden Punkte der Längsachse in der Oberfläche des Bauwerks.

Zur Aufsuchung des Durchstoßpunktes D (Abb. 309), der Längsachse durch die Geländeoberfläche ermittelt man etwa diejenigen Profilpunkte P_1 , P_2 auf dem gewachsenen Boden, welche in vertikalem Sinne auf verschiedenen Seiten der zugehörigen Achsstrecke P_1' , P_2' liegen. Sind H_1 , H_2 und H_1' , H_2' die bekannten zu den genannten Punkten gehörigen Meereshöhen,

¹⁾ Auf die Beschreibung der für die Vermessungskunde sehr wichtigen bei Flächenteilungen auftretenden Absteckungsarbeiten, die jedoch für den Bauingenieur weniger von Bedeutung sind, muß hier aus Mangel an Raum verzichtet werden.

während s , s_1 und s_2 die Horizontalprojektionen der Strecken P_1P_2 , DP_1 und DP_2 bedeuten, so erhält man unter Verwendung der Abkürzungen

$$\Delta H_1 = H_1' - H_1, \quad \Delta H_2 = H_2' - H_2 \dots \dots \dots (737)$$

aus den beiden schraffierten ähnlichen Dreiecken leicht die Absteckungselemente

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= s \cdot \frac{\Delta H_1}{\Delta H_1 - \Delta H_2}, \\ s_2 &= s \cdot \frac{\Delta H_2}{\Delta H_2 - \Delta H_1}, \end{aligned} \right\} (738)$$

deren eines zur Verprobung der Rechnung und der darauffolgenden Messung dienen kann.

Für die Meereshöhe H_D des Durchstoßpunktes D findet man unter Verwendung der Abkürzung

$$\Delta H = H_2 - H_1 \dots \dots \dots (739)$$

leicht den Ausdruck

$$H_D = H_1 + \frac{s_1}{s} \cdot \Delta H = H_2 - \frac{s_2}{s} \cdot \Delta H \dots \dots \dots (740)$$

Bei bekanntem H_D kann in D ein Pflock, dessen Oberflächenhöhe mittels eines Nivellierinstrumentes unter Kontrolle gehalten wird, so weit eingeschlagen werden, daß sein oberes Ende den Durchstoßpunkt D nach Lage und Höhe scharf bezeichnet¹⁾.

b) Absteckung von Auftrags- und Abtragsprofilen.

Bei dieser wichtigeren Aufgabe wird das Bauwerk mit Hilfe von Leeren aus Latten in der Natur in groben Zügen veranschaulicht. Mit Rücksicht auf die folgenden Erdarbeiten muß durch die abgesteckten Lattenprofile vor allem der Böschungsfuß F (Abb. 310) einer Anschnüpfung, der Rand eines Einschnittes und der Böschungswinkel φ bzw. das Böschungsverhältnis $v = \text{ctg } \varphi$ angegeben werden.

Die Kronenmitte M wird, wie vorhin beschrieben, durch den Oberrand einer kurzen horizontalen Latte L' bezeichnet, welche auf einer lotrechten

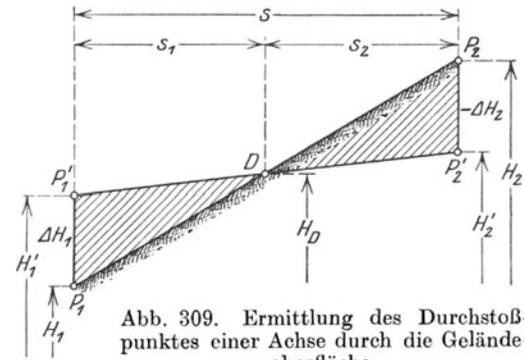


Abb. 309. Ermittlung des Durchstoßpunktes einer Achse durch die Geländeoberfläche.

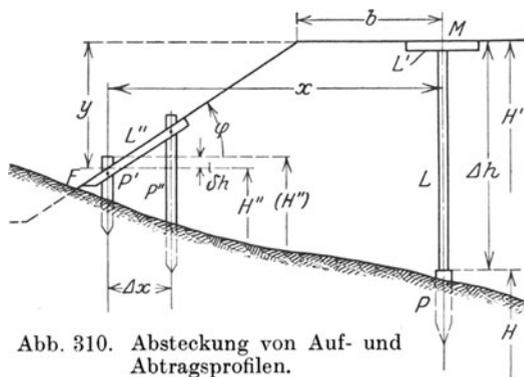


Abb. 310. Absteckung von Auf- und Abtragsprofilen.

¹⁾ Manchmal wird der Durchstoßpunkt auch mit Hilfe von drei gleich langen T-förmigen Krücken in der Weise bestimmt, daß zwei Krücken in den beiden im Auftrag liegenden, vorhergehenden oder folgenden bereits bezeichneten Achspunkten aufgestellt werden, worauf die dritte Krücke so lange in der Achsrichtung verstellt wird, bis ihre Querkante in der durch die Querkanten der beiden ersten Krücken bestimmten Ebene liegt, d. h. bis die drei Kanten sich decken. Der Fußpunkt der dritten Krücke bezeichnet dann den gesuchten Durchstoßpunkt.

am Achspfloek P befestigten Latte L von der Länge $\Delta h = H' - H$ befestigt ist. H ist die Meereshöhe des Achsenbodenpflockes, H' diejenige der Krone. Um nun auch die Böschung durch die Oberkante einer Latte L'' bezeichnen zu können, bestimmt man erst entweder durch Maßentnahme aus dem Profilplan oder durch bloße Schätzung in der Natur den ungefähren Ort des Böschungsfußes F und schlägt etwas innerhalb desselben einen Pflock P' , welcher von der Achse um x abstehen möge. Bedeutet b die halbe Kronenbreite, y die Höhenzunahme vom Schnittpunkt der Böschungskante mit dem Pflock P' bis zur Krone und H'' die Meereshöhe des vorerwähnten Schnittpunktes, so kann man aus Abb. 310 unmittelbar die Beziehung

$$H'' = H' - y = H' - (x - b) \operatorname{tg} \varphi = H' - \frac{1}{v} (x - b) \dots (741)$$

ablesen. Diese berechnete Höhe wird etwas kleiner sein, als die mit Hilfe des Nivellierinstrumentes von P auf den Kopf von P' übertragene Höhe (H''). Es wird also der um

$$\delta h = (H''') - H'' \dots (742)$$

unterhalb des oberen Pflockendes liegende Ort den gesuchten Schnittpunkt der Böschungskante mit der Pflockachse bezeichnen. In ähnlicher Weise bestimmt man einen solchen Schnittpunkt auf einem um Δx von P' entfernten Pflocke P'' und befestigt hierauf die Profillatte L'' so an P' und P'' , daß ihre in die Böschung fallende Oberkante durch die beiden ermittelten Schnittpunkte geht.

In entsprechender Weise kann man auch Einschnittsprofile abstecken. Nur werden hier die Pflocke P' , P'' aus leicht ersichtlichen Gründen nicht innerhalb (von der Achse aus gerechnet), sondern außerhalb der Einschnittskante geschlagen.

48. Absteckung einer Linie gleicher Steigung.

Eine mittelbare Lösung besteht darin, die Linie gleicher Steigung erst in einem Schichtenplan zu ermitteln und hernach ihre auf geeignete Messungslinien bezogene Horizontalprojektion ins Gelände zu übertragen. Zur Auffindung einer von A ausgehenden Linie AB (Abb. 311) bestimmter

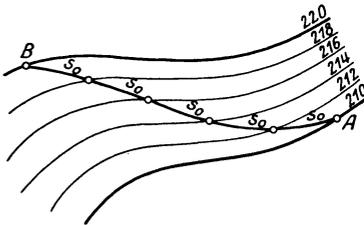


Abb. 311.

Aufsuchen einer Linie gleicher Steigung im Plan.

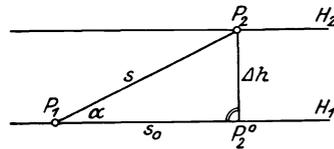


Abb. 312.

Steigung im Plan ermittelt man aus dem Abstand Δh zweier benachbarter Höhenlinien H_1 , H_2 und der in Prozent oder durch den Neigungswinkel α bestimmten Steigung die Horizontalprojektion s_0 (Abb 312) einer Strecke s , welche zwei Punkte P_1 , P_2 der genannten Höhenlinien unter der verlangten Steigung verbindet. Der aus dem Neigungsdreieck P_1 , P_2 , P_2^0 sich zeichnerisch oder rechnerisch ergebende Wert

$$s_0 = \Delta h \cdot \operatorname{ctg} \alpha \dots (743)$$

wird in den Zirkel genommen und, in A beginnend, von Schichtlinie zu Schichtlinie abgetragen. Der so entstehende Linienzug AB kann in untergeordneten Fällen unverändert beibehalten werden; bei wichtigeren Linien aber sind mit Rücksicht auf die Bodenbeschaffenheit, zur Vermeidung allzu starker Krümmungen oder aus anderen Gründen Abweichungen von der konstruierten Linie notwendig.

Handelt es sich darum, zwei von vornherein festliegende Punkte A, B im Plan durch eine Linie von gleicher, noch unbekannter Steigung zu verbinden, so nimmt man einen geschätzten Wert s_0 in den Zirkel, führt die Konstruktion versuchsweise durch und erreicht auf der durch B gehenden Höhenlinie statt B einen Näherungsort B' . Nach einigen Wiederholungen mit einer stets wieder verbesserten Zirkelöffnung wird man so nahe an B hinkommen, daß der geringe, bleibende Abstand gleichmäßig auf die einzelnen Höhenlinien verteilt werden darf.

Die unmittelbare Absteckung einer Linie gleicher Steigung im Felde kann entweder mit einem Nivellierinstrument oder unter Verwendung eines besonderen Gefäll- oder Neigungsmessers erfolgen.

Die Verwendung des Nivellierinstrumentes ist bei größeren Genauigkeitsanforderungen und besonders bei geringeren Neigungen am Platz. Ist Δh die der gewünschten Steigung auf die Meßbandlänge l entsprechende Höhenzunahme und wurde an der im Anfangspunkt A aufgestellten Latte im Nivellierfernrohr die Ablesung r gefunden, so bringt man das hintere Ende des schon ungefähr richtig liegenden Meßbandes in den Anfangspunkt A und beschreibt mit dem vorderen Bandende ein Kreisbogenstück. Auf diesem findet man nach einigen Lattenaufstellungen leicht den der gesuchten Linie angehörenden Punkt, für welchen nämlich die Lattenablesung

$$v = r - \Delta h \dots \dots \dots (744)$$

erscheinen muß.

Bei geringeren Genauigkeitsanforderungen kann man unter Benützung einer Handkanalwage (S. 60) oder eines optisch horizontal gelegten Lotes (S. 59) auch mit Aughöhen arbeiten, wobei man sich jeweils im zuletzt bestimmten Punkt aufzustellen hat. Ist $i = \Delta h$ die Aughöhe und s_0 die zugehörige horizontale Kathete des Neigungsdreieckes, nämlich

$$s_0 = i \cdot \text{ctg } \alpha, \dots \dots \dots (745)$$

so hält man das hintere Ende einer Schnur von der Länge s_0 am Auge fest, richtet die Schnur mittels der Handkanalwage oder nach dem optisch horizontal gelegten Lot horizontal und beschreibt in dieser Lage mit dem vorderen Schnurende einen Kreis. Dessen Schnitt mit dem Boden bezeichnet den nächsten Punkt der abzusteckenden Linie, von dem aus weitere Punkte in derselben Weise gefunden werden.

Bei stärkeren Steigungen, wo die Anwendung des Nivellierinstrumentes wegen der vielen Aufstellungen sehr mühsam wird, kommt der Vorteil der Absteckung einer Linie gleicher Steigung mittels eines besonderen Neigungsmessers so recht zur Geltung. Dazu kann man z. B. den auf S. 100 beschriebenen Höhenmesser von *Zugmaier* oder ein ähnliches Instrument verwenden. Sehr zweckmäßig ist auch der in Abb. 313 skizzierte *Ertelsche* Gefällmesser (Nivellierdiopter), bei welchem ein Gestänge F_1, L_1, F_2 an dem mit einem Stab St fest verbundenen Haken H pendelnd aufgehängt wird. Dieses durch eine schwere Pendellinse P in einer bestimmten Lage gegen den Horizont festgehaltenen Gestänge besteht aus zwei durch ein Lineal L starr verbundenen Flügeln F_1 und F_2 , deren erster ein festliegendes Schauloch o mit Fadenkreuz besitzt. Der Flügel F_2 hingegen enthält die Führung

für einen im lotrechten Sinn beweglichen Schlitten S , der eine Öffnung mit eingespanntem Fadenkreuz besitzt. o und O bilden zusammen ein zum Vorwärts- und Rückwärtszielen eingerichtetes Diopter, dessen Ziellinie durch geeignetes Einstellen eines mit dem Schlitten S verbundenen Zeigers auf eine an der Vorderseite von F_2 aufgebrachte Prozentteilung die gewünschte Neigung erhält. Als Zubehör dient ein Stab mit Zielscheibe, deren Höhe so bemessen wird, daß die auf sie gerichtete Ziellinie zur Verbindungslinie der entsprechenden durch die unteren Stabenden bezeichneten Bodenpunkte parallel ist. Beim Gebrauch stellt man durch Verschieben des Schlittens S erst die gewünschte Steigung der Ziellinie ein und verstellt hierauf den Stab mit der Zielscheibe so lange, bis diese im Diopter des im horizontalen Sinne nachgedrehten Instrumentes eingestellt ist. Da man bei der Verwendung eines besonderen Gefällmessers sich nicht ängstlich an eine bestimmte Entfernung zu halten braucht, so kann man, wo es wünschenswert ist, die abgesteckten Punkte auf ausgesprochene Bruchlinien des Geländes verlegen.

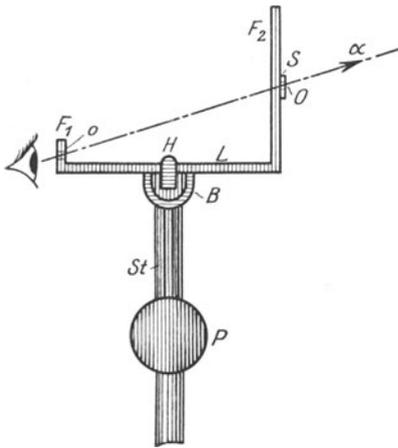


Abb. 313. Gefällmesser von Ertel.

Bei der Verwendung eines besonderen Gefällmessers sich nicht ängstlich an eine bestimmte Entfernung zu halten braucht, so kann man, wo es wünschenswert ist, die abgesteckten Punkte auf ausgesprochene Bruchlinien des Geländes verlegen.

49. Abstecken von Geraden über Tage.

Diese Aufgabe tritt unter allen Absteckungsarbeiten am häufigsten auf und wird je nach Lage der Dinge in verschiedener Weise gelöst.

a) Einschalten der Zwischenpunkte vom Ende aus.

Sollen in die gerade Verbindungslinie der gegebenen, durch zwei lotrechte Stäbe bezeichneten Punkte A, B (Abb. 314) von A aus weitere Punkte C, D eingeschaltet werden, so schickt man einen Gehilfen mit einem Stab

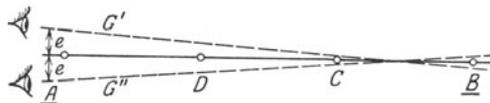


Abb. 314. Einschalten der Zwischenpunkte einer Geraden vom Ende aus.

zunächst in die Nähe des entfernteren der zu bezeichnenden Punkte und weist nun den hier möglichst lotrecht gehaltenen Stab von A aus in die Gerade AB ein. Ist die Einschaltung wirklich gelungen, so muß sich das Auge vom Stabe in A aus um genau die gleichen Beträge e nach rechts bzw. nach links bewegen, bis der in B stehende Stab unmittelbar neben dem in C befindlichen erscheint. Bei der Einschaltung weiterer Punkte wird der A am nächsten liegende zuletzt eingerichtet. Den Abstand benachbarter Stäbe braucht man nicht unter 30 m zu nehmen, wenn es sich nur um eine Längenmessung in der Richtung der Linie auf übersichtlichem Gelände handelt. Wird dagegen die Arbeit durch Unübersichtlichkeit des Geländes erschwert oder sind etwa senkrecht zur abgesteckten Richtung auch Ordinaten zu messen, so ist der Punktabstand geringer zu nehmen.

Bei kurzen Linien wird man die beschriebene Absteckung mit freiem Auge oder allenfalls mit Hilfe eines Feldstechers vornehmen; bei etwas längeren Geraden ist es zu empfehlen, die Zielebene eines in A meßgerecht aufgestellten Theodolits nach B zu richten und nunmehr die Fußpunkte der Stäbe in die lotrechte Zielebene einzuweisen.

b) Punkteinschaltung aus Zwischenpunkten der Geraden.

Um in einer Geraden mit unzugänglichen oder infolge starker Profilkrümmung gegenseitig unsichtbaren Endpunkten A, B (Abb. 315) weitere Punkte zu bezeichnen, wählt man in der Nähe der Geraden zwei gegenseitig sichtbare Punkte C_1, D_1 , von welchen aus auch der Endpunkt A bzw. B gesehen werden kann. Nun wird von dem durch einen Stab bezeichneten Punkt C_1 aus ein in D_1 befindlicher Stab scharf in die Richtung nach A und hierauf von dem eben bestimmten Orte D_1 aus Punkt C_1 in die Richtung nach B eingewiesen, wodurch der bezeichnende Stab nach C_2 kommt. Nach einigen Wiederholungen dieses Vorganges, welcher stets eine Annäherung der beiden Stäbe an die Gerade AB herbeiführt, wird der Abstand der Stäbe von dieser Geraden so weit verringert sein, daß er vernachlässigt werden darf. Diesen Zustand erkennt man daran, daß gleichzeitig die Punkte C, D, A und D, C, B in einer Geraden erscheinen.

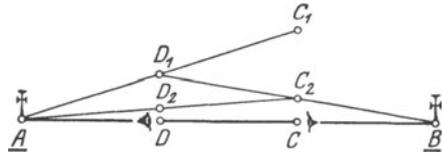


Abb. 315. Punkteinschaltung aus Zwischenpunkten der Geraden.

c) Einweisen eines Zwischenpunktes durch Winkelmessung.

Soll ein einzelner Punkt C (Abb. 316) in die gerade Verbindungslinie zweier sehr weit entfernter Punkte A, B oder etwa beim Versagen der vorhin beschriebenen Methode zwischen zwei unzugängliche Punkte eingeschaltet werden, so mißt man mittels eines in dem der Geraden AB benachbarten Orte C' aufgestellten Theodolits den Winkel γ , unter dem von C' aus die Seite AB erscheint. Bedeutet

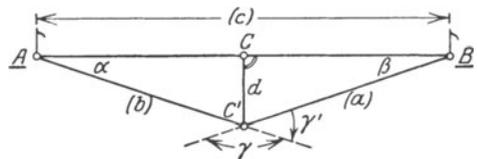


Abb. 316. Zwischenpunktbestimmung durch Winkelmessung.

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma \dots \dots \dots (746)$$

die geringe Abweichung des beobachteten Winkels von einem gestreckten und sind $(a), (b), (c)$ Näherungswerte für die Entfernungen der Punkte A, B von C' bzw. voneinander, so findet man auf dem Weg über den Sinussatz für die kleinen Winkel α, β die hinreichend genauen Ausdrücke

$$\alpha = \frac{(a)}{(c)} \cdot \gamma', \quad \beta = \frac{(b)}{(c)} \cdot \gamma'.$$

Hiermit ergibt sich nach der Abbildung die notwendige Querversetzung des Punktes C' zu

$$d = (b) \cdot \hat{\alpha} = (a) \cdot \hat{\beta} = \frac{(a) \cdot (b)}{(c)} \cdot \hat{\gamma}' \dots \dots \dots (747)$$

Eine zur Probe doch notwendige Wiederholung der Winkelmessung in dem verbesserten Orte C zeigt sogleich, ob noch eine weitere geringe Versetzung erforderlich ist oder nicht.

d) Verlängerung einer Geraden.

Die Verlängerung einer Geraden AB (Abb. 317) über B hinaus kann auf eine kürzere Entfernung hin mit freiem Auge erfolgen. Dazu wird ein Stab C nach dem Augenmaß in die Lotebene durch AB gebracht und hierauf die Richtigkeit seiner Stellung durch geringes Seitwärtsbewegen des Auges in der vorhin beschriebenen Weise nachgeprüft. Weitere Punkte D, E, \dots werden in der gleichen Weise bestimmt.



Abb. 317. Verlängern einer Geraden mit freiem Auge.

Zu Verlängerungen auf größere Entfernungen hin dient entweder ein besonderes Absteckungsinstrument oder der Theodolit.

Um mit Hilfe eines zum Umlegen und Durchschlagen eingerichteten Instrumentes die Gerade AB (Abb. 318) über B hinaus zu verlängern, stellt man den Theodolit mit lotrechter Alhidadenachse in B auf und stellt im Fernrohr den Anfangspunkt A scharf ein. Die Ziellinie besitzt dann die Lage $K_1 O_1$. Durch Umlegen des Fernrohrs geht sie in die Lage $K_2 O_2$ über,

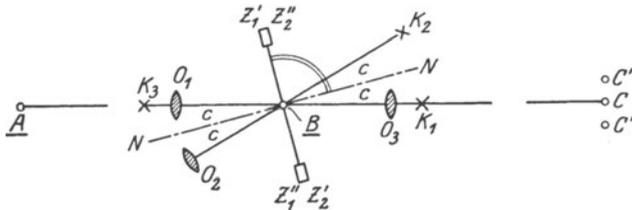


Abb. 318. Verlängern einer Geraden mittels Umlegen und Durchschlagen des Fernrohrs.

welche gegen $K_1 O_1$ um den doppelten Zielachsenfehler $2c$ gedreht ist. Wird das Fernrohr auch noch durchgeschlagen, so gelangt die Ziellinie in der Lage $K_3 O_3$ genau in die rückwärtige Verlängerung ihrer ersten Lage, also in die Richtung AB , und ein in ihrer Zielebene bezeichneter Punkt C wird in der Geraden AB liegen. Bei stärkeren Neigungen der Strecken AB und BC müßte man zur Ausschaltung des Einflusses eines etwa vorhandenen Kippachsenfehlers die Absteckung auch mit umgestellter Alhidade vornehmen, wobei ebenso wie in der ersten Alhidadenstellung eine etwa vorhandene Querlibelle zur Sicht genau einspielen muß. Der richtige Ort C liegt in der Mitte zwischen den in beiden Alhidadenstellungen gefundenen Punkten C' und C'' .

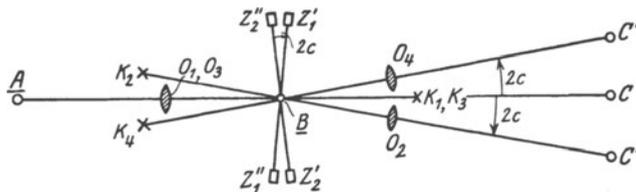


Abb. 319. Verlängern einer Geraden durch zweimaliges Durchschlagen des Fernrohrs.

Ist das Theodolitfernrohr nur zum Durchschlagen eingerichtet, so geschieht die Absteckung in folgender Weise. Es wird im Fernrohr des in B (Abb. 319) mit lotrechter Alhidadenachse aufgestellten Theodolits der

rückwärts liegende Punkt A eingestellt, wodurch die Ziellinie in die Lage $K_1 O_1$, die Kippachse in die Lage $Z_1' Z_1''$ gelangt. Nach dem Durchschlagen kommt sie in die Stellung $K_2 O_2$ und schließt mit ihrer ersten Lage bzw. mit $A B$ den Winkel $2c$ ein, wenn c den Zielachsenfehler bedeutet. Ein in der Zielebene bezeichneter Punkt besitzt die fehlerhafte Lage C' . Nun wird die Alhidade gedreht, bis Punkt A wieder eingestellt ist. Die neue Lage $K_3 O_3$ der Ziellinie fällt mit ihrer ersten Richtung $K_1 O_1$ zusammen, während die Kippachse eine Lage $Z_2' Z_2''$ besitzt, welche mit $Z_1' Z_1''$ den Winkel $2c$ einschließt. Ein nochmaliges Durchschlagen des Fernrohrs bringt dessen Ziellinie in die Lage $K_4 O_4$, welche mit $A B$ den Winkel $2c$, mit $K_2 O_2$ den Winkel $4c$ einschließt. Wird nunmehr in der Zielebene ein Punkt C'' bezeichnet, so ist der Mittelpunkt C der Strecke $C' C''$ der vom Zielachsenfehler und Kippachsenfehler nicht mehr beeinflusste gesuchte, in der Lotebene durch $A B$ liegende Punkt.

Will man ein sehr genaues Ergebnis erzielen, ohne die Absteckung selbst des öfteren zu wiederholen, so kann man etwa durch eine erste Absteckung einen guten Näherungsort C' (Abb. 320) bestimmen

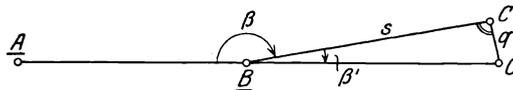


Abb. 320. Verlängern einer Geraden durch Winkelmessung und nachträgliche Querversetzung.

und daraufhin bei scharf lotrechter Alhidadenachse den Winkel $A B C'$ in mehreren Sätzen in je zwei Fernrohrlagen (mit Durchschlagen) messen. Ist β der Mittelwert aus den Beobachtungen und β' dessen Fehlbetrag an einem gestreckten Winkel, so gibt

$$q = s \cdot \beta' \dots \dots \dots (748)$$

die zur Erreichung der Richtung $A B$ noch notwendige kleine Querversetzung von C' an, wenn s , für das eine rohe Näherung genügt, die Entfernung $A C'$ bedeutet.

e) Absteckung einer Geraden in unübersichtlichem Gelände.

Sind P_1 und P_n (Abb. 321) die Endpunkte einer in unübersichtlichem Gelände, z. B. in Wald verlaufenden Geraden, auf welcher Zwischenpunkte P_2, P_3, \dots, P_{n-1} bezeichnet werden sollen, so kann man etwa durch den Anfangspunkt P_1 eine Standlinie X legen und den davon nicht allzu weit abliegenden Endpunkt P_n durch seine zu messenden rechtwinkligen Koordinaten x_n, y_n auf diese Hilfslinie beziehen. An Hand der Abbildung ergibt sich leicht zu einer beliebigen Abszisse x_i diejenige Ordinate y_i , deren Endpunkt P_i auf der Geraden $P_1 P_n$ liegt. Sie ist nach den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken, welche durch die Koordinaten x_i, y_i bzw. x_n, y_n gebildet werden, der Ausdruck

$$y_i = \frac{y_n}{x_n} \cdot x_i \dots \dots \dots (749)$$

Mittels dieser Gleichung wird man für geeignet gewählte Abszissen x die zugehörigen Ordinaten y berechnen und die dadurch bestimmten Punkte P der Geraden $P_1 P_n$ durch Abstecken der gefundenen Koordinaten in die Natur übertragen.

Ist es nicht möglich, die Hilfsgerade X durch P_1 zu legen, so läßt sich vielleicht eine Standlinie X' (Abb. 321, untere Hälfte) so nahe an der ab-

zusteckenden Geraden vorbeiführen, daß deren Endpunkte P_1, P_n auf X' aufgemessen werden können, wobei ein beliebiger Punkt U' als Ursprung dienen möge. Sind x_1', y_1' und x_n', y_n' die dabei gefundenen rechtwinkligen

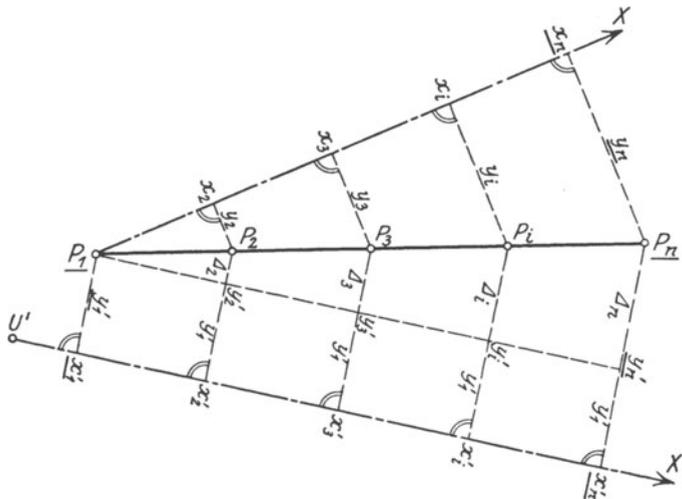


Abb. 321. Absteckung von Zwischenpunkten einer Geraden in unübersichtlichem Gelände.

Koordinaten dieser Punkte, so erhält man nach der Abbildung für die zu einer Abszisse x_i' gehörige Ordinate y_i' , deren Endpunkt P_i auf $P_1 P_n$ liegt, den Ausdruck

$$y_i' = y_1' + \Delta_i = y_1' + \frac{y_n' - y_1'}{x_n' - x_1'} \cdot (x_i' - x_1') \dots (749 a)$$

Mit den hiernach berechneten Koordinaten kann die Absteckung beliebiger Zwischenpunkte der Geraden $P_1 P_n$ von X' aus durchgeführt werden.

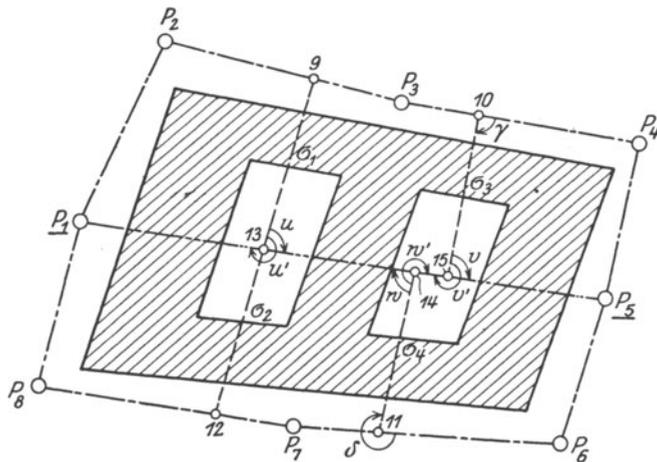


Abb. 322. Angabe von Zwischenpunkten einer Durchbruchlinie.

Besondere Vorsicht ist geboten, wenn es sich darum handelt, durch einen Häuserblock eine Gerade $P_1 P_5$ (Abb. 322) abzustecken, in deren Richtung ein Durchbruch geplant ist. Zur Durchführung dieser Absteckung sind folgende Arbeiten vorzunehmen:

1. Man legt um den Block einen über die Punkte P_1, P_5 führenden Polygonzug, dessen rechtwinklige Koordinaten nach sorgfältiger Messung seiner Bestimmungsstücke in einem beliebig angenommenen System berechnet werden.

2. Hierauf werden Liniennetzpunkte 9, 10, 11, 12 ausgewählt, von denen aus man unter Benützung von Durchfahrten, Fenstern und Hofräumen zusammensehen kann oder von denen aus wenigstens in die Hofräume gesehen und gemessen werden kann. Nach erfolgter Einmessung dieser Liniennetzpunkte werden deren Koordinaten in dem vorhin benützten System, wie S. 163 u. 164 beschrieben, berechnet.

3. Sind gegenseitig sichtbare Liniennetzpunkte 9 und 12 vorhanden, so können nach den Ausführungen auf S. 164 u. 165 die Koordinaten des Schnittpunktes 13 ihrer Verbindungslinie mit der abzusteckenden Geraden $P_1 P_5$ sowie die Entfernungen σ_1, σ_3 des Punktes 13 von 9 und 12 gefunden werden, und die Winkel

$$u = (P_1 P_5) - (12 \cdot 9), \quad u' = (P_5 P_1) - (12 \cdot 9) \quad (750)$$

der Geraden $P_1 P_5$ mit dem Einband 9·12 ergeben sich als die Differenzen der aus der Koordinatenberechnung bekannten bzw. durch die Koordinaten von P_1 und P_5 bestimmten Richtungswinkel der genannten Strecken.

4. Kann man vom Liniennetzpunkt 10 aus keinen gegenüberliegenden Netzpunkt erreichen, wohl aber den Hofraum einsehen, so mißt man den Winkel γ , den eine festzuhaltende Sicht 10·15 mit $P_3 P_4$ einschließt. Die Lage dieser Sicht ist durch ihren bekannten Anfangspunkt 10 und ihren Richtungswinkel

$$(10 \cdot 15) = (P_3 P_4) + \gamma \quad (751)$$

eindeutig bestimmt, so daß sich die Koordinaten ihres Schnittpunktes 15 mit $P_1 P_5$ sowie die Länge $10 \cdot 15 = \sigma_3$ ermitteln lassen. Außerdem findet man auch die Winkel

$$v = (P_1 P_5) - (15 \cdot 10), \quad v' = (P_5 P_1) - (15 \cdot 10) \quad (752)$$

der abzusteckenden Geraden mit der angenommenen Sicht. In entsprechender Weise ergeben sich aus dem bekannten Anfangspunkt 11 und dem dort gemessenen Winkel δ einer Kontrollsicht 11·14 mit $P_6 P_7$ die Koordinaten des Schnittpunktes 14 dieser Sicht mit $P_1 P_5$, die Entfernung σ_4 und die Winkel w, w' .

5. Mit Hilfe der berechneten Stücke $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, lassen sich die auf der abzusteckenden Geraden liegenden Punkte 13, 14, 15 — ersterer mit Kontrolle — in die Natur übertragen. Die ebenfalls verlangte Richtungsangabe der genannten Geraden in diesen Punkten erfolgt mit Hilfe der in ihnen von den Richtungen 13·9, 15·10 und 14·11 aus abzutragenden, vorher berechneten Absteckungswinkel u, u', v, v' und w, w' . Die beiden von 14 und 15 aus vorgenommenen Richtungsangaben kontrollieren sich gegenseitig.

Solche im städtischen Bauwesen herantretende Aufgaben wird man fast immer in der eben skizzierten Weise oder auf einem ähnlichen Wege lösen können. Großes Gewicht ist dabei stets auf die Beschaffung einer hinreichenden Zahl von Kontrollen zu legen.

50. Richtungsübertragungen.

Bei dieser Art von Absteckungsarbeiten handelt es sich darum, gestützt auf eine festliegende bekannte Richtung eine andere Richtung zu bezeichnen, welche mit der ersten einen bestimmten Winkel einschließt bzw. welche einen vorgeschriebenen Richtungswinkel besitzt.

a) Absteckung einer Parallelen durch gleichlange Ordinaten.

Zur Lösung dieser einfachen, häufig auftretenden Aufgabe, bei welcher durch einen bestimmten Punkt C (Abb. 323) eine Parallele zu einer gegebenen

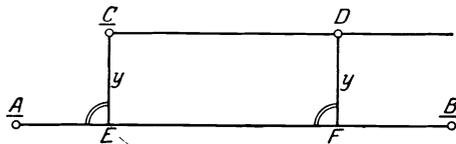


Abb. 323. Parallelenabsteckung durch gleich lange Ordinaten.

Geraden AB zu ziehen ist, ermittelt man die hierauf bezogene Ordinate y des Punktes C und errichtet hierauf in einem beliebigen Punkte F von AB darauf eine Senkrechte von der Länge y , deren Endpunkt D zusammen mit C die abzusteckende Parallele bestimmt. Zur Angabe der Ordinatenrichtung wird meist eines der

früher (S. 67 ff.) beschriebenen Instrumente zum Abstecken rechter Winkel genügen.

b) Absteckung einer Parallelen durch schiefe Längen.

Um durch Längenmessung allein zu AB (Abb. 324) eine durch den festen Punkt C gehende Gerade abzustecken, wählt man ungefähr in der Mitte der Verbindungsgeraden BC einen Punkt S , dessen zu messende Ent-

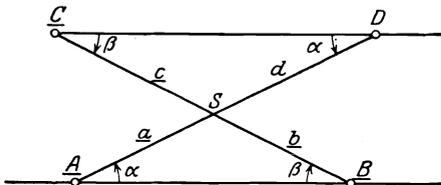


Abb. 324. Parallelabsteckung durch Längenmessung.

fernungen von A , B , C die Längen a , b , c sein mögen. Denkt man sich AS bis zum Schnittpunkt D mit der durch C zu ziehenden Parallelen verlängert, so ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken ASB und $DS C$ für den Abstand des Punktes D von S der Wert

$$d = \frac{a \cdot c}{b} \dots (753)$$

Man braucht also nur AS über S hinaus um die berechnete Länge d zu verlängern, um den auf der gesuchten Parallelen anzugebenden Punkt D zu erhalten.

c) Absteckung einer Parallelen durch Winkelmessung.

Ist eine Längenmessung etwa wegen zu großer Entfernungen oder wegen Unzugänglichkeit des zwischen den Parallelen liegenden Geländes nicht möglich, oder wird etwas größere Genauigkeit angestrebt, so kann man zunächst in B (Abb. 324) den Winkel β messen, welchen die Zwischenrichtung BC mit der gegebenen Richtung einschließt. Hierauf stellt man den Theodolit meßgerecht in C auf und trägt von CB aus den Winkel β in dem der Messung entgegengesetzten Sinn wieder ab. Die so bezeichnete Richtung, der ein Punkt D angehören möge, versinnlicht die abzusteckende Parallele CD .

d) Übertragung einer beliebigen Richtung durch Winkelmessung.

In Abb. 325 ist AB eine in der Natur bezeichnete Gerade mit dem bekannten Richtungswinkel α_1 während C einen gegebenen Punkt bedeutet, durch den eine Richtung CD zu ziehen ist, deren Richtungswinkel einen vorgegebenen Wert α_2 besitzt. Zur Lösung der Aufgabe verbindet man B und C durch einen Polygonzug mit möglichst langen Seiten, der, wenn er unzugängliche Gebiete G_1, G_2 umgehen muß, häufig eine gewundene Gestalt besitzt. Mit Hilfe der zu messenden Polygonwinkel $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ und der bekannten Anschlußrichtungswinkel α_1 und α_2 läßt sich der in C abzusteckende, letzte Polygonwinkel β_n berechnen. Es ist nämlich

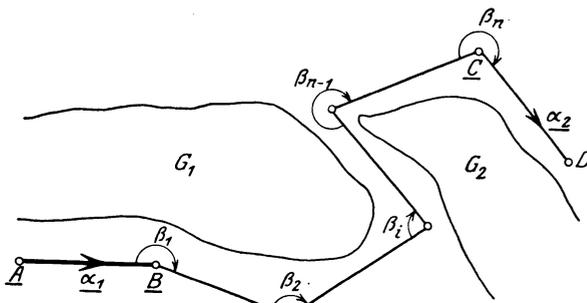


Abb. 325. Richtungsübertragung durch Winkelmessung.

... β_{n-1} und der bekannten Anschlußrichtungswinkel α_1 und α_2 läßt sich der in C abzusteckende, letzte Polygonwinkel β_n berechnen. Es ist nämlich

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \sum_1^{n-1} [\beta_i] + \beta_n + n \cdot 180^\circ; \dots \dots \dots (754)$$

also ergibt sich
$$\beta_n = \alpha_2 - \alpha_1 - \sum_1^{n-1} [\beta_i] - n \cdot 180^\circ \dots \dots \dots (755)$$

Wird daher in C der errechnete Winkel β_n von der letzten Polygonseite aus im Uhrzeigersinn abgetragen, so enthält die vorwärts gerichtete Zielebene, in welcher ein Punkt D bezeichnet werden möge, die abzusteckende Richtung mit dem verlangten Richtungswinkel α_2 . Irgendeine Längenmessung tritt bei dem beschriebenen Verfahren nicht auf.

51. Absteckung einer geraden Tunnelachse.

Soll sogleich in den beiden Mundlochpunkten M_1, M_2 eines geraden Tunnels mit dem Stollenvortrieb begonnen werden, so ist für jeden dieser Punkte die Richtung der Tunnelachse genau zu bestimmen. Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn es möglich ist, mit Hilfe des Theodolits über den Berg hinweg eine durch beide Mundlochpunkte gehende Gerade abzustecken, in deren Profil auf dem Rücken des Berges ein und derselbe Punkt von beiden Mundlochpunkten aus sichtbar ist. Die Zielebene eines in diesen Punkten meßgerecht aufgestellten Instrumentes, dessen Fernrohr auf den erwähnten Zwischenpunkt gerichtet wird, ist sodann eine die Tunnelachse enthaltende Vertikalebene.

So einfach liegen aber die Verhältnisse nur selten, und wenn vielfach auch noch eine Absteckung über Tage möglich ist, so kann sie meist nur unter Benutzung von mehreren häufig genug ungünstig liegenden Zwischenpunkten erfolgen, wodurch die Sicherheit der direkten Absteckung beeinträchtigt wird. Unter solchen Umständen ist es wünschenswert, zur Kontrolle auch noch eine indirekte Richtungsangabe durchzuführen; zu einer unumgänglichen Notwendigkeit wird sie in jenen Fällen, wo eine Absteckung der Achsrichtung über Tage unmöglich ist.¹⁾

¹⁾ Eine rein geometrische Lösung der in Rede stehenden Aufgabe hat schon Heron von Alexandrien angegeben. Siehe *Schöne*, Heron, die Aufgaben VII, S. 215 und XV, S. 239. Handbibliothek. I. 4.

Handelt es sich um einen kürzeren Tunnel, dessen Länge einige Kilometer nicht überschreitet, und läßt sich zwischen M_1 und M_2 ein auch für Längenmessungen geeigneter Geländestreifen ausfindig machen, so kann zur Lösung der Aufgabe ein die beiden Mundlochpunkte verbindender Polygonzug genügen, dessen möglichst lange Seiten und Brechungswinkel mit großer Sorgfalt zu messen sind. Wird der auf irgendein ebenes, rechtwinkliges Koordinatensystem bezogene Zug berechnet, so erhält man aus den Koordinaten der Zugsendpunkte den Richtungswinkel ihrer Verbindungslinie, d. h. der Tunnelachse und findet in den Unterschieden dieses Richtungswinkels gegen die Richtungswinkel der anliegenden Polygonseiten die sog. Absteckungswinkel, d. h. diejenigen Winkel, welche man in M_1 und M_2 von der ersten bzw. letzten Polygonseite aus abzutragen hat, damit die lotrechte Fernrohrzielebene die Tunnelachse enthält.

Bei sehr großen Tunnellängen versagt auch diese Methode, da auf weite Entfernungen hin ihre Ergebnisse zu unsicher werden und auch häufiger schwieriges Gelände zu überwinden ist. In solchen Fällen verbindet man die beiden Mundlochpunkte M_1 , M_2 (Abb. 326) durch eine Kette und ein Netz

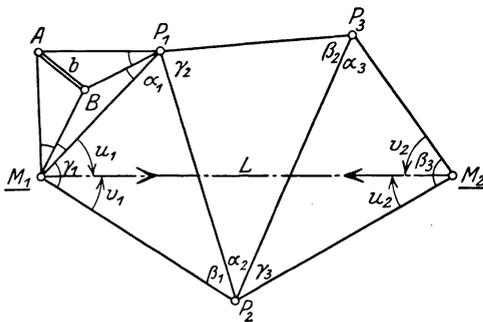


Abb. 326. Richtungsangabe einer geraden Tunnelachse.

von günstig geformten, großen Dreiecken, deren Winkel mit größter Sorgfalt gemessen werden. Im einzelnen sind zur Ermöglichung der Richtungsangabe der Tunnelachse folgende Arbeiten durchzuführen:

1. Zunächst sind die Dreieckspunkte auszuwählen, zu versichern und mit gemauerten Pfeilern für die Instrumentenaufstellung zu versehen. Es hat sich bewährt, in diesen Pfeilern eine lotrechte, zentrische Eisenröhre von etwa 8 cm lichter Weite anzu-

bringen, in welche nach der Beobachtung eine kurze Stange gesteckt wird, die einen den Dreieckspunkt auf größere Entfernungen hin sichtbar machenden, pyramidenförmigen oder kegelförmigen Aufsatz (Hut) aus Blech oder Holz trägt.

2. Zur Winkelmessung dient ein leistungsfähiger Mikroskoptheodolit mit etwa 20 cm Kreisdurchmesser, an dem einschließlich Schätzung der Bruchteile bis auf 2" abgelesen werden kann. Die Zahl der in verschiedenen Kreisstellungen durch Kompensationsmessung zu bewältigenden Sätze ist so zu bemessen, daß die mittleren Fehler der Winkelmittel nur noch Bruchteile von 1" betragen. Die genaue zahlenmäßige Angabe des zu fordernden mittleren Winkelfehlers hängt im übrigen von der Form des Netzes, der Tunnellänge und der angestrebten Durchschlagsgenauigkeit ab.

3. Bei sehr ungleichartiger Massenverteilung sind in den Stationen, von welchen steile Sichten ausgehen, die Lotabweichungskomponenten ξ , η des physischen Lotes (Normale an das Geoid) in der Richtung des Meridians und senkrecht dazu zu bestimmen, was entweder durch Vergleichung der astronomisch bestimmten geographischen Länge und Breite mit den entsprechenden durch geodätische Übertragung errechneten Werten, oder näherungsweise nach den sichtbaren Unregelmäßigkeiten in der Massenverteilung erfolgen kann. Aus ξ und η , welche positiv gezählt werden, wenn das nach oben verlängerte physische Lot nach Norden bzw. Osten ausschlägt (Zenitabweichungen), erhält man die gesamte Zenitabweichung Θ und ihr Azimut ϵ

in entsprechender Weise wie den Aufstellungsfehler v aus seinen Komponenten v_x und v_y , nämlich aus den Beziehungen

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\eta}{\xi}, \quad \Theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad \dots \dots \dots (756)$$

Auch die Wirkung der Lotabweichung entspricht ganz derjenigen des Aufstellungsfehlers. Davon ausgehend erhält man aus dem fehlerhaften Horizontalwinkel β' , dessen linker und rechter Schenkel die Höhenwinkel h_1, h_2 besitzen und mit der Richtung der Zenitabweichung Θ die rechtssinnig positiv gezählten Horizontalwinkel γ_1, γ_2 einschließen, den vom Einfluß der Lotabweichung befreiten Horizontalwinkel

$$\beta = \beta' - \Theta (\sin \gamma_2 \operatorname{tg} h_2 - \sin \gamma_1 \operatorname{tg} h_1) = \beta' + v_\beta. \quad \dots \dots \dots (757)$$

Die Unterdrückung der Verbesserungen v_β kann in ungünstigen Fällen (sehr steile Sichten, große Lotabweichungskomponenten senkrecht zur Tunnelrichtung) bei einer großen Tunnellänge ein vollständiges Mißlingen des Durchschlags zur Folge haben.

4. Für die Richtungsangabe einer geraden Tunnelachse wäre die Kenntnis der Tunnellänge L nicht notwendig. Man braucht sie aber aus anderen, naheliegenden Gründen. Es muß daher auch eine Seitenlänge im Dreiecksnetz bestimmt werden, was im einfachsten Falle durch einen Anschluß der Messungen an ein schon vorhandenes, bekanntes Dreiecksnetz geschehen kann. Ist dies nicht möglich, so muß man auf festem Boden eine auch sonst günstig gelegene Grundlinie b direkt messen und durch ein sog. Vergrößerungsnetz mit der nächstliegenden Dreiecksseite (M_1, P_1 in Abb. 326) verbinden. Zur Grundlinienmessung genügen horizontal gerichtete Schneidenlatten oder Schneidenlatten mit Gradbogen, deren genaue Länge durch eine sorgfältige Abgleichung unmittelbar vor und nach der Messung zu bestimmen ist. Die Grundlinie ist, wie früher (S. 102—104) beschrieben, erst auf den mittleren Messungshorizont und von diesem auf den Meeresspiegel zu reduzieren, ehe sie zu Ableitung der Dreiecksseite Verwendung findet.

5. Zur Neigungsermittlung der Tunnelachse wird der Höhenunterschied ihrer Endpunkte durch ein Feinnivellement bestimmt, welches zur Sicherheit entweder eine geschlossene Schleife bildet oder wenigstens in Form eines Doppelnivellements (hin und zurück) durchgeführt wird.

6. Die Ausgleichung der Dreieckswinkel erfolgt wegen der Wichtigkeit der Sache am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, über welches Verfahren die Lehrbücher der Ausgleichsrechnung unterrichten¹⁾. Für den Fall, daß es sich wie in Abb. 326 um eine reine Dreieckskette handelt, wird die ganze strenge Ausgleichung denkbar einfach und besteht lediglich in der gleichmäßigen Verteilung der Dreieckswidersprüche auf die Dreieckswinkel.

7. Für die Berechnung der Dreiecksseiten nach Länge und Richtung genügt als Projektionsfläche die Kugel. Auf ihr findet auch die Koordinatenberechnung statt, wenn man nicht die Verwendung der ebenen, rechtwinkligen konformen Koordinaten (Merkatorprojektion) vorzieht, wobei die Abszissenachse zweckmäßig so gelegt wird, daß sie das Dreiecksnetz in dessen

¹⁾ Siehe z. B. *Helmert, F. R.*, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1907; ferner *Jordan, W.*, Handbuch der Vermessungskunde, I. Bd., Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 6. Aufl., Stuttgart 1910; die Elemente der Ausgleichsrechnung sind auch enthalten in *Näbauer, M.*, Grundzüge der Geodäsie, Leipzig und Berlin 1915.

Längsrichtung etwa halbiert¹⁾. Ist die Koordinatenberechnung durchgeführt, so erhält man aus den Koordinaten der beiden Mundlochpunkte leicht die Tunnelachse nach Richtung und Länge, und die vor allem gesuchten Absteckungswinkel sind die Richtungs-differenzen

$$\begin{aligned} u_1 &= (M_1 M_2) - (M_1 P_1), & v_1 &= (M_1 P_2) - (M_1 P_1) \\ u_2 &= (M_2 M_1) - (M_2 P_2), & v_2 &= (M_2 P_3) - (M_2 P_2) \end{aligned} \quad (758)$$

8. Zur Vorbereitung für die eigentliche Achsabsteckung errichtet man über den an den Mundlochpunkten oder in ihrer Nähe liegenden Dreieckspunkten, in denen auf festem Grund besonders kräftige Pfeiler stehen, als Schutz gegen Witterungsunbilden je ein Beobachtungshäuschen. Von diesen Observatorien aus werden durch Abtragen der errechneten Absteckungswinkel mittels des Theodolits nach oft wiederholten Messungen (in genügender Entfernung auf dem stehenden Fels gut sichtbare, bei Nacht durch leuchtende Marken, Richtmarken, angebracht, welche alsdann mit den Observatorienpunkten eine die Tunnelachse enthaltende Lotelinie bilden. Die erwähnten Dreieckspunkte etwas weiter (vielleicht 1/3 km) von den Mundlochpunkten ab, so kommen die Absteckungsmarken am besten über das Tunnelportal zu liegen; sind dagegen die Observatorien sehr nahe an den Tunnelendpunkten, so bringt man sie besser in der rückwärtigen Verlängerung der Achse.

9) Nach diesen Vorbereitungen kann man zur Absteckung der Achsrichtung von den Observatorien aus ein standfestes, mit gutem Fernrohr, ausgestattetes Durchgangsinstrument benutzen. Wird dessen auf die Richtmarken eingestelltes Fernrohr so weit gekippt oder dangeschlagen, bis es die Neigung der Tunnelachse besitzt, so kann man vorwärts im Tunnel auf einem sehr kräftigen Stativ befindliches Lichtsignal in die Achse einweisen. Dieser Vorgang wird des öfteren vollständig wiederholung sehr erleichtert, wenn der Stativkopf einen senkrecht zur Tunnelrichtung verschiebbaren Schlitten trägt, dessen Bewegung an einer Millimeterteilung gemessen werden kann. Die gefundene Mittellage wird sorgfältig abgelesen und etwa durch einen eingefeilten Strich auf einer in die Tunnelsohle eingelassenen Eisenklammer bezeichnet. Wird das Absteckungsinstrument nunmehr über diesem neubestimmten Punkte aufgestellt, so kann von hier aus ein vorwärtsliegender Achspunkt in der gleichen Weise gefunden werden. Von den Umstellstativen ist zu fordern, daß sie nicht nur stabil aufgestellt werden können, sondern auch so eingerichtet sind, daß die senkrechten Achsen des Lichtsignals des Absteckungsinstrumentes und der Abotungsrichtung zusammenfallen.

Man hat Hauptabsteckungen und Zwischenabsteckungen zu unterscheiden. Erstere finden nur ab und zu statt, wenn eben der Stellenvortrieb jeweils wieder um ein oder zwei Kilometer vorgeschritten ist. Dabei sucht man mit möglichst langen Sichten vorwärts zu kommen, was jedoch nur bei staub-, rauch- und nebelfreier Luft gelingt. Zur Herstellung dieses Zustandes muß schon einige Zeit vor der Absteckung die Arbeit gänzlich eingestellt und mittels der Ventilatoren neue Luft in den Tunnel gepumpt werden. Bei der Absteckung selbst jedoch soll ein gleichmäßiger Luftzustand herrschen. Ist aus irgendwelchen Gründen (z. B. höhere Temperatur der rechten oder linken Tunnelwand) eine einseitige Erwärmung der Luft zu befürchten, so wird man zur Vermeidung oder Herabminderung dieser

¹⁾ Die Rechnung auf der Kugel sowie die Theorie der ebenen rechtwinkligen konformen Koordinaten (Merkatorprojektion) wird in den Lehrbüchern über höhere Geodäsie behandelt. Siehe z. B. *Jordan, W.*, Handbuch der Vermessungskunde, III. Bd. Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung, 6. Aufl., Stuttgart 1916.

Eine kurzgefaßte höhere Geodäsie enthalten auch des Verfassers Grundzüge der Geodäsie (siehe vorhergehende Anmerkung).

gefährlichen seitlichen Strahlenbrechung allzu große Zielweiten vermeiden und die Umstellstationen etwa nur in 500 m Entfernung anordnen. Die immer während des Vortriebes vorzunehmenden Zwischenabsteckungen stützen sich jeweils auf die zuletzt ausgeführte Hauptabsteckung. Sie erfordern, da ihre Fehler sich nur auf einer kürzeren Strecke geltend machen und durch die nächste Hauptabsteckung wieder korrigiert werden, etwas weniger Sorgfalt; es genügen auch wesentlich kürzere Sichten.

Bei dieser Absteckungsarbeiten ist außer der Horizontalrichtung der Tunnelachse auch noch deren Neigung durch geometrisches Nivellement in den Stollen zu übertragen und ferner durch genaue Längenmessung die Länge der zurückliegenden Tunnelstrecke zu bestimmen.

Das treffendste Urteil über die Genauigkeit der Arbeit liefert der in *Fig. 10* durchschlagsresultaten sich aussprechende Erfolg. Die in Betracht kommende Fehler nämlich 1. die seitliche Abweichung, 2. die Höhenabweichung und 3. die bei einem geraden Tunnel etwas weniger gefährliche Längenabweichung, dürfen aber gewisse Beträge keinesfalls überschreiten; wenn nicht großer Schaden entstehen soll. Man muß sich daher über den Zusammenhang zwischen den mittleren zu befürchtenden Durchschlagsfehlern und ihren Ursachen, nämlich den Fehlern der Messung und der Absteckung im klaren sein. Die mittlere Unsicherheit der errechneten Absteckungselemente (Richtungswinkel der Achse bzw. Absteckungswinkel und Tunnellänge) erhält man gelegentlich der Ausgleichung des Dreiecksnetzes und man kann, sobald dessen Gestalt und die Leistungsfähigkeit des Instrumentes in der Hand eines bestimmten Beobachters feststehen, die Inrehaltung gewisser Fehlergrenzen unter normalen Verhältnissen erforderlich zu setzen.

Zu den Unsicherheiten der errechneten Absteckungsdaten treten noch die bei der Ausführung der Absteckung unterlaufenden Fehler. Sie verhalten sich, soweit die Horizontalrichtung in Frage kommt, ebenso wie die Winkelfehler in einem gestreckten Polygonzug und lassen sich von vornherein ungefähr abschätzen, besser aber aus den bei wiederholten Absteckungen auftretenden Widersprüchen ermitteln. Auch die in der Längenmessung und im geometrischen Nivellement enthaltenen Unsicherheiten lassen sich am zuverlässigsten nach den Widersprüchen mehrerer Messungen beurteilen¹⁾.

¹⁾ Bezüglich weiterer Einzelheiten, praktischer Erfahrungen und der erzielten Durchschlagsresultate sei auf einige naheliegende praktische Beispiele hingewiesen. a) Die 1857/58 vorgenommene Achsabsteckung des 1870 durchschlagenen Mont-Cenis-Tunnels (12,9 km) konnte infolge günstiger Umstände mit genügender Sicherheit über den Berg hinweg erfolgen. Die Durchschlagsdifferenzen sind nach einer Notiz der Zeitschr. des Österr. Ing. u. Archit.-Vereins, Bd. 26, 1875, S. 224, 14 m in der Länge, 3 dm in der Höhe, während sich in der Richtung kein nennenswerter Betrag ergab. (Conte, „Über die Herstellung des großen Tunnels durch die Alpen.“ Der Zivilingenieur, N. F., 9. Bd. 1863, Anmerk. auf S. 347, 48; Pestalozzi, S., „Die Absteckung der Achse des Gotthardtunnels.“ Vortrag, Die Eisenbahn, VI. Bd., 1877, S. 89 bis 91 und 97 bis 99); b) Die Absteckung des Gotthardtunnels (15,85 km) erfolgte sowohl durch Gelpke, wie auch durch Koppe indirekt mittels eines Dreiecksnetzes (1869 bzw. 1874) und unter ungünstigen Verhältnissen zur Probe auch noch direkt über den Berg hinweg. Der am 29. II. 1880 vorgenommene Durchschlag zeigte die Fehler 7 m, 49 cm (später nur noch 33 cm) und 5 cm in Länge, Richtung und Höhe. Die große Längenabweichung rührt nach den Untersuchungen von Meiers, nicht (Neuberechnung der Länge des Gotthardtunnels, Z.V.W. 1902, S. 189 bis 191) wahrscheinlich von einem Längenmessungsfehler in der von Koppe übernommenen Gelpkeschen Grundlinie her. (An Literatur siehe Gelpke, O., „Bericht über die Bestimmung der St. Gotthard-Tunnel-Achse“, Zivilingenieur, N. F. 16. Bd., 1870, S. 143 bis 167; Koppe, C., „Bestimmung der Achse des Gotthardtunnels.“ Z.V.W. 1875, S. 369 bis 444 mit Berichtigungsnachtrag 1876, S. 86 bis 90; Koppe, C., „Bestimmung der Achse des Gotthardtunnels“, II., Z.V.W. 1876, S. 353 bis 382; Koppe, C., „Trigonometrische Höhenmessung zur Tunneltriangulation“, Z.V.W. 1876, S. 129 bis 145; Helmert, „Diskussion der

Beobachtungsfehler in *Koppes Vermessung für die Gotthardtunnelachse*, Z.V.W. 1876, S. 146 bis 155; *Gelpke, O.*, „Die letzten Richtungsverifikationen und der Durchschlag am großen St. Gotthardtunnel, Z.V.W. 1880, S. 101 bis 116, 137 bis 148, 149 bis 163; *Pestalozzi, S.*, „Die Absteckung der Achse des Gotthardtunnels“, Die Eisenbahn, VI. Bd., 1877, S. 89 bis 91 und 97 bis 99; *Dolezalek, C.*, „Hilfsmittel für die Richtungsangabe im Gotthardtunnel,“ Zeitschr. des Archit.- u. Ing.-Vereins zu Hannover, Bd. XXIV, 1878, S. 186 bis 194; ferner Bericht zum Vortrag von *Dolezalek* „Über den Durchschlag und die Richtungsbestimmung des Gotthardtunnels,“ Zeitschr. d. Archit.- u. Ing.-Vereins zu Hannover, Bd. XXVI: 1880, S. 317 bis 320). c) Beim Durchschlag des über 10 km langen Arlbergtunnels (1883), über dessen Absteckung nichts näheres bekannt geworden ist, waren die Durchschlagsdifferenzen 5,7 m, 4 cm und 16 cm in Länge, Richtung und Höhe (Schweizer. Bauzeitung, 3. Bd., 1884, S. 17/18). d) Der längste bisher gebaute Alpentunnel ist der Simplontunnel (19,80 km), dessen Achse über Tage nicht abgesteckt werden konnte und deshalb von *Rosenmund* aus einer im Sommer 1898 durchgeführten Triangulierung unter Berücksichtigung der Lotabweichungen auf indirektem Wege abgeleitet wurde. Die nach dem am 24. II. 1905 erfolgten Durchschlag festgestellten Durchschlagsfehler betragen 79 cm, 20 cm und 9 cm in Länge, Richtung und Höhe. (*Rosenmund, M.*, „Über die Absteckung des Simplontunnels,“ Schweizerische Bauzeitung, Bd. XXXVII, 1901, S. 221 bis 224 und 243 bis 245; *Rosenmund, M.*, „Achsabsteckung am Simplontunnel,“ Z.V.W. 1902, S. 74 bis 82, und *Rosenmund, M.*, „Die Schlußergebnisse der Absteckungen des Simplontunnels,“ Z.V.W. 1905, S. 578 bis 579). e) Zur Richtungsermittlung des geraden Haupttunnels der Albulabahn (5,87 km) diente kein zusammenhängendes neues Netz; vielmehr wurde jedes der beiden Observatorien durch ein kleines, im Herbst 1898 und Frühjahr 1899 gemessenes Netz an drei Punkte der neuen eidgenössischen Triangulation angeschlossen. Die Durchschlagsfehler waren 1,15 m, 5 cm und 5 cm in Länge, Richtung und Höhe. (*Graf, W.*, „Die neuen Linien der rhätischen Bahn. Einiges über die Tunnelabsteckungen auf der Albulabahn,“ Schweizerische Bauzeitung, Bd. XL, 1902, S. 284 bis 290.) f) Über die Tunnelabsteckungen auf der Tauernbahn berichtet *Tichy, A.*, in „Rationelle Vorgänge der Absteckung bedeutend langer Eisenbahntunnels,“ Vortrag, Zeitschr. d. Österr. Ing.- u. Archit.-Vereins 1914, S. 717 bis 722, 733 bis 736, 749 bis 754. Über die erzielten Durchschlagsresultate unterrichtet Tabelle 36. Von besonderem Interesse ist die mitgeteilte

Tabelle 36.

Tunnel	Länge	Differenz in		
		Länge	Richtung	Höhe
	m	m	mm	
Wocheiner . .	6338	0,76	50	3
Karawanken .	7972	0,45	20	30
Bosruck . . .	4766	0,18	153	30
Tauern	8552	2,93	55	56

Beobachtung einer seitlichen Strahlenbrechung von 10" und 8" nach verschiedenen Seiten hin. g) Der zuletzt erbaute große Alpentunnel ist der 14,5 km (gerader Abstand der Tunnelendpunkte 13,7 km) lange Lötschbergtunnel, für dessen Richtungsangabe *Mathys* 1906 zwei Achspunkte getrennt durch Einschaltung in das Dreiecksnetz der schweizerischen Landestopographie bestimmte. Zur Berechnung der Triangulation diente ein Näherungsverfahren! Behufs Kontrolle seiner errechneten Richtungsangaben führte *Mathys* noch 1906 mit Hilfe von drei Zwischenpunkten auch noch eine oberirdische Achsabsteckung durch. Nach *Mathys* Tode übernahm 1907 *Baeschlin* die Weiterführung der Arbeiten und prüfte zunächst unter Berücksichtigung der aus den sichtbaren Massen errechneten Lotabweichungen die vorliegende oberirdische Absteckung. Diese Nachprüfung ergab die Notwendigkeit einer geringen seitlichen Verschiebung der Achssignale. Die Höhenlage der Tunnelportale war schon 1906 durch ein an das Höhenetz der schweizerischen Landestopographie angeschlossenes Feinnivellement bestimmt worden. Nachdem der Stollenvortrieb an der Südseite etwa bis zu km 4,2 und an der Nordseite bis zu km 2,7 gelangt war, erfolgte an dieser Stelle im Juli 1908 der Einbruch der Kander. Es wurde eine Umgehung dieser Stelle und damit die Aufgabe der geradlinigen Tunnelachse notwendig. Zwei neu eingeschaltete gerade Strecken wurden unter sich und mit den Endstücken der geraden Tunnelachse durch Kreisbögen von 1100 m Radius verbunden, wodurch die Tunnelachse auf 14,5 km verlängert und ihre Absteckung wesentlich erschwert wurde. Der am 31. III. 1911 erfolgte Durchschlag zeigte trotzdem nur ganz belanglose Differenzen, nämlich 41 cm, 26 cm bzw. 10 cm in Länge, Richtung und Höhe. (*Baeschlin, F.*, „Über die Absteckung des Lötschbergtunnels,“ Schweiz. Bauzeitung, 58. Bd., 1911, S. 109 bis 111, 125 bis 129, 154 bis 156, 167 bis 169, 189 bis 192 u. S. 234.)

52. Richtungsübertragung auf einen anderen Horizont (Schachtlotung).

Die Richtungsübertragung in der gleichen Lotebene auf einen anderen Horizont spielt als sog. Schachtlotung in der Markscheidkunst eine große Rolle. Für die Bauingenieure gewinnt sie besondere Bedeutung, wenn die Durchbohrung eines langen Tunnels außer von seinen Endpunkten auch von mehreren Zwischenpunkten aus in Angriff genommen werden soll. Zur Erreichung dieser Punkte kann man durch besondere, nicht zu lange Seitenstollen von bekannten Punkten aus Polygonzüge führen und so abstecken, daß ihre Endpunkte nach Lage und Höhe auf der Tunnelachse liegen. Mit Hilfe dieser Polygonzüge kann nach den Ausführungen auf S. 305 in den gefundenen Zwischenpunkten die Achsrichtung leicht angegeben werden.

Besitzt das Profil der über Tage abgesteckten Tunnelachse tiefe Täler (Abb. 327), so ist es naheliegend, dort Förderschächte S_1 , S_2 anzulegen

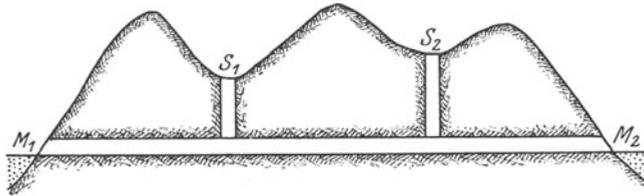


Abb. 327. Richtungsangabe der Tunnelachse in Zwischenpunkten.

und bis zur Tunnelachse hinabzuführen, um gleichzeitig an mehreren Zwischenpunkten mit der Durchbohrung beginnen zu können. Die in diesen Örtern notwendige Richtungsangabe der Achse unter Tage kann etwa in folgender Weise gefunden werden. Man bringt in den Schacht S (Abb. 328 und 329) in möglichst großem Abstände a zwei Lote L_1 , L_2 aus dünnem, aber starkem Stahldraht,

an denen schwere Gewichte G_1 , G_2 (bis zu einem Zentner und darüber) hängen. Die Lote sind über Tage im Horizont H_o in den Punkten O_1 , O_2 einer Hängebank so befestigt, daß sie sowohl unter sich als auch zur Umgebung eine möglichst unveränderliche Lage besitzen. Sie durchstoßen in den Punkten U_1 , U_2 den Horizont

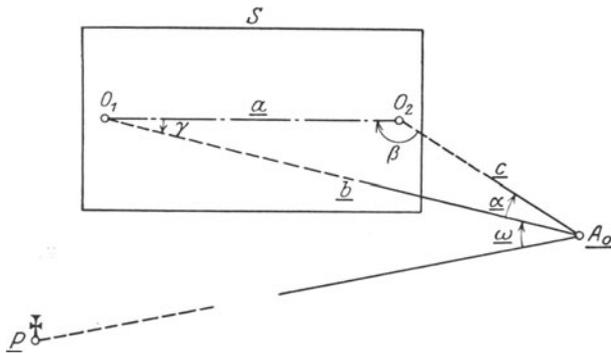


Abb. 328. Scharfe Orientierungsermittlung über Tage.

H_u des Tunnels. Gelingt es, 1. über Tage die Lage eines der beiden Aufhängepunkte O_1 , O_2 sowie die durch sie bestimmte Richtung genau zu ermitteln und 2. die Projektionen U_1 , U_2 dieser Punkte auf H_u in aller Schärfe ausfindig zu machen, so ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten.

Zu 1. Man wählt etwa möglichst nahe der Lotebene durch O_1 , O_2 und nahe an O_2 auf festem Boden einen Standort A_o , so, daß seine Lage im Netz der Tunneltriangulierung gut bestimmt werden kann. Sind die in A_o gemessenen Winkel α (Standwinkel) und ω die Horizontalwinkel, welche

die nach dem oberen Ende des ersten Lotes gerichtete Sicht mit der Richtung nach O_2 bzw. mit einer nach einem bekannten Punkte P führenden Anschlußrichtung einschließt, und bedeutet γ den aus α und den ebenfalls zu messenden Entfernungen a, c aus

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (759)$$

errechneten Anschlußwinkel bei O_1 im Anschlußdreieck $A_o O_1 O_2$, so gibt der Ausdruck

$$(O_1 O_2) = (PA_o) + \omega - \gamma \dots \dots \dots (760)$$

den Richtungswinkel der Strecke $O_1 O_2$ an¹⁾.

Mit Hilfe der gemessenen Seiten b bzw. c und ihrer Richtungswinkel

$$(A_o O_1) = (A_o P) + \omega \quad \text{und} \quad (A_o O_2) = (A_o P) + \omega + \alpha \dots \dots (761)$$

erhält man vom bekannten Punkte A_o aus leicht die Koordinaten von O_1 und O_2 , wodurch die genaue Lage dieser Punkte gegen die Tunnelachse bestimmt ist.

Zu 2. Die Ermittlung der Untenpunkte U_1, U_2 muß mit der größten Sorgfalt durchgeführt werden, da sich auf die Richtung ihrer kurzen Verbindungsstrecke ein vielmal längeres Stück der Tunnelachse stützt, so daß Querfehler dieser Punkte auch als vielmal größerer Beitrag in den seitlichen Durchschlagsfehler eingehen. Es ist deshalb notwendig, in manchmal sehr große Tiefen die Obenpunkte O_1, O_2 bis auf einige Dezimillimeter genau abzuloten, was bei der hauptsächlich durch den Wetterzug und das Traufwasser verursachten Unruhe der Lote eine sehr schwierige Aufgabe ist.

Ein sehr sinnreiches, den gestellten Genauigkeitsanforderungen vollkommen gewachsenes und heute am weitesten verbreitetes Schachtlotverfahren hat 1882 *M. Schmidt* in Freiberg angegeben und später noch weiter ausgebaut²⁾. Es besteht in folgendem. Man kann an zwei hinter dem betreffenden Lote befindlichen, senkrecht zueinander gestellten Teilungen T_1, T_2 (Abb. 329) die Bewegungen des schwingenden Lotes verfolgen und die den Umkehren des Lotes entsprechenden Projektionen desselben auf die Teilungen beobachten. Erscheinen die Projektionen der Umkehren an den Stellen a'_1, a'_2, \dots, a'_n bzw. $a''_1, a''_2, \dots, a''_n$ dieser Teilungen, so sind, für n' und n'' gerade Zahlen vorausgesetzt, die aus einer großen Zahl von Beobachtungen errechneten Mittelwerte

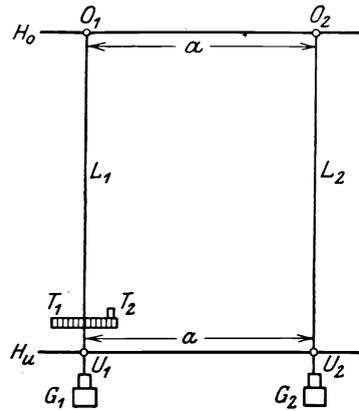


Abb. 329. Orientierungsübertragung in die Tiefe nach dem Schachtlotverfahren von *M. Schmidt*.

$$a'_m = \frac{1}{n'} [a'], \quad a''_m = \frac{1}{n''} [a''] \dots \dots \dots (762)$$

¹⁾ Für die allerdings nicht streng zutreffende Annahme, daß die Fehler in ω, α, a und c von der Lage des Standortes A_o unabhängig sind, wird der Fehler in dem nach (760) abgeleiteten Richtungswinkel um so kleiner, je näher A_o an die Richtung $O_1 O_2$ und an O_2 heranrückt. Näheres hierüber siehe bei *Parschin, N.*, Tagesanschluß der Grubenmessungen, Heft 1, Freiberg i. S. 1914, (ins Deutsche übertragen von *P. Wilski*).

²⁾ Siehe hierzu die folgenden Schriften von *M. Schmidt*: a) Das Problem der Schachtlotung mit frei schwingendem Lote; b) Schachtlotungsverfahren mit fixierten Loten, Jahrb. f. d. Berg- u. Hüttenwesen im Kgr. Sachsen 1882 bzw. 1884; c) die Methoden der unterirdischen Orientierung und ihre Entwicklung seit 2000 Jahren, München 1892 (Bericht der Technischen Hochschule München für das Studienjahr 1891/92).

diejenigen Teilungsstellen, auf welche sich das zentrierte, d. h. in die richtige Lage gebrachte Lot projizieren muß.

Zur praktischen Ausführung benutzt man einen horizontalen Zentrierteller Z (Abb. 330), mit dem die beiden Teilungen verbunden sind. Zur direkten Beobachtung der Werte a' dient ein seitlich in A_u aufgestelltes Fernrohr, dessen Ziellinie zur Teilung T_1 senkrecht steht. Die sonst für die an T_2 auszuführenden Beobachtungen a'' notwendige Aufstellung eines zweiten Fernrohres kann dadurch vermieden werden, daß in der Höhe von T_2 mit dem Zentrierteller ein lotrechter Spiegel S (eingeführt von Cséti) verbunden wird,

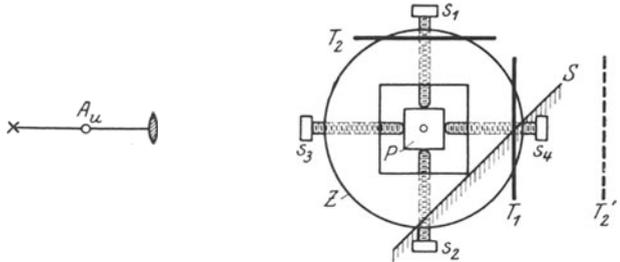


Abb. 330. Zentrierteller nach M. Schmidt mit Cséti'schem Spiegel.

welcher mit T_2 einen 45° -Winkel einschließt. Man erhält dann sogleich von A_u aus mittels der Spiegelbilder der Lotumkehrungen am Teilungsbild T_2' die gesuchten Ablesungen a'' . Um während der Beobachtung die in einem Ausschnitt des Zentriertellers frei schwingenden Lote möglichst wenig störenden Einflüssen auszusetzen, müssen während der Beobachtungsdauer die Türen verschlossen und die Ventilatoren abgestellt werden. Zur Einstellung des Lotes auf seine errechnete Ruhelage führt man es durch die Bohrung eines prismatischen Zentrierklotzes P , welcher mit Hilfe der Zentrierschrauben s_1, s_2, s_3, s_4 in der Richtung beider Teilungen derart verstellt wird, daß von A_u aus das Lot an den Teilungsstellen a'_m bzw. a''_m erscheint. Ist in derselben Weise auch das Lot L_2 zentriert worden, so muß der Abstand $U_1 U_2$ bis auf den Einfluß der Lotkonvergenz (S. 104) mit dem über Tage gemessenen Lotabstand a übereinstimmen. Das Gelingen des beschriebenen Schachtlotverfahrens setzt vollkommen frei schwingende Lote voraus und es ist daher schon vor Beginn der Arbeit zu untersuchen, ob das durch verschiedene Böden gehende und nahe an Bauhölzern vorbeiführende Lot nicht irgendwo geklemmt ist oder anliegt. Man kann sich davon in einfachen Fällen durch den unmittelbaren Augenschein überzeugen; auch kann man längs der Lote Papierscheibchen hinableiten lassen oder die gelegentlich der Zentrierungsbeobachtungen ebenfalls ermittelte Schwingungsdauer mit dem aus der bekannten Schwerebeschleunigung g und der Schachttiefe l berechneten theoretischen Wert

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots (763)$$

vergleichen.

Mit Hilfe eines im Horizont H_u liegenden Anschlußdreiecks $U_1 U_2 A_u$ (man denke sich in Abb. 328 an Stelle von O_1, O_2, A_o nunmehr U_1, U_2, A_u gesetzt!) ergeben sich aus den unter Tage gemessenen Stücken a, b, c und α der Winkel γ , der Richtungswinkel ($U_1 A_u$) der Seite b , die genaue Lage des nahezu in der Lotebene der Tunnelachse befindlichen Standortes A_u sowie der für die Angabe der Achsrichtung von $A_u U_1$ aus abzusetzende Absteckungswinkel¹⁾.

¹⁾ Das beschriebene Verfahren der Richtungsübertragung, bei dem die Standorte A_o bzw. A_u nicht auf dem Lot L_2 oder L_1 liegen, ist ein exzentrisches Schachtlotverfahren. Über andere Verfahren dieser Art, sowie über die zentrische Schacht-

53. Kurvenabsteckung.

Soll die gerade Achse eines Bauwerks ihre Richtung ändern, so wird zur Herbeiführung einer allmählichen Richtungsänderung zwischen die beiden Geraden eine Kurve oder ein Kurvenzug eingeschaltet, wobei der Kreisbogen¹⁾ die größte Rolle spielt.

a) Kreisbogennetz.

Die Übertragung eines größeren Bogens in die Natur stützt sich auf einen vorher abzusteckenden Rahmen, das sog. Kurvennetz (Abb. 331). Es besteht aus den beiden Haupttangente G_1, G_2 , der Scheiteltangente EF und etwaigen weiteren Zwischen-

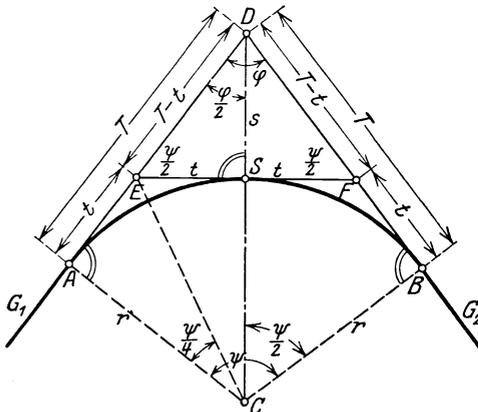


Abb. 331. Kreisbogennetz bei zugänglichem Tangentschnittpunkt.

und etwaigen weiteren Zwischentangenten sowie den Berührungspunkten dieser Geraden mit dem Kreisbogen und ihren gegenseitigen Schnittpunkten. Die Berechnung des Kurvennetzes erfolgt je nach den gegebenen Bestimmungsstücken in verschiedener Weise.

Im einfachsten Falle sind außer dem Kreisbogenhalbmesser r die beiden Haupttangente G_1, G_2 mit zugänglichem Tangentschnittpunkt D gegeben. Man kann dann mit Hilfe eines in D aufgestellten Theodolits den Tangentschnittwinkel φ messen und erhält damit aus dem in den Berührungspunkten A, B rechtwinkligen Viereck $CADB$

($C =$ Kreismittelpunkt), dessen Winkelsumme 360° ist, den dem Bogen entsprechenden Zenitwinkel

$$\psi = 180^\circ - \varphi \dots \dots \dots (764)$$

lotung siehe die Lehrbücher der Markscheidekunde, ferner die in Anmerkung 1) S. 312 genannte Schrift von *N. Parschin*.

Die Kunst der unterirdischen Orientierung war schon *Heron* von Alexandrien bekannt (siehe *Schöne*, Heron) und eine der bedeutendsten Unternehmungen des Altertums, bei der sie Verwendung fand, war der unter Kaiser *Claudius* (51—54 n. Chr.) erfolgte Bau eines etwa 5,7 km langen Wasserabzugstollens vom *Fuciner-See* zum *Lirifuß*. Nach den Ausführungen von *M. Schmidt* in der auf S. 312 Anmerkung 2) unter c) genannten Schrift dienten zur Richtungsanweisung und Materialbeförderung 40 vertikale Schächte von 80 bis 122 m größter Tiefe und eine noch höhere Anzahl flacher Schächte von 16 bis 20° Neigung. Das in der nachrömischen Zeit verfallene Werk wurde 1862 bis 1875 wieder in Stand gesetzt und die dabei erfolgte Wiedereröffnung der altrömischen Schächte und Stollen ergab infolge mangelhafter Orientierungsmessungen und fehlerhafter Höhenangaben große Abweichungen, welche der raschen Wasserabführung hinderlich waren und zum frühzeitigen Verfall des Werkes wesentlich beigetragen haben.

Überraschend gute Durchschlagsresultate wurden nach den Ausführungen von *Koppe* in d. Z.V.W. 1876, S. 376 bis 378, bei dem 1851 bis 1864 erfolgten Bau des 10,3 km langen *Ernst-August-Stollens* im Harz erzielt. Die Arbeit wurde unter Benutzung von 8 Förderschächten an 10 Punkten gleichzeitig in Angriff genommen und die Durchschlagsfehler betragen durchwegs nur einige Zentimeter.

¹⁾ Eine Kreisbogenabsteckung ist schon beschrieben in *Daniel Schwenter* „*Geometriae Practicae*“, von neuem an den Tag gegeben und mit vielen nützlichen Additionen und neuen Figuren vermehrt durch *Georgium Andream Böcklern*, Architekt und Ingenieur, Nürnberg 1667. Doch werden dort die abzusteckenden Größen nicht auf rechnerischem, sondern auf zeichnerischem Wege ermittelt.

Zur Absteckung der Tangentenberührungspunkte A, B von D aus braucht man die Länge T der Haupttangente. Sie ergibt sich aus dem Dreieck CAD oder CBD zu

$$T = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi, \dots \dots \dots (765)$$

während die Länge der in S berührenden Scheiteltangente

$$t = r \operatorname{tg} \frac{1}{4} \psi \dots \dots \dots (766)$$

ist. Auch die Schnittpunkte E, F dieser Scheiteltangente mit den beiden Haupttangente können mit Hilfe der nunmehr bekannten Differenzen $T - t$ vom Tangentenschnittpunkt D aus auf G_1 und G_2 abgetragen werden. In ähnlicher Weise geht auch die Berechnung weiterer Zwischentangenten vonstatten.

Zur Probe wird man die unmittelbar zu messende Entfernung EF mit ihrem Sollbetrag $2t$ vergleichen und untersuchen, ob der Mittelpunkt S dieser Strecke, der Kurvenscheitel, auf der Winkelhalbierenden der beiden Haupttangente liegt und von D um den aus Dreieck EDS folgenden, errechneten Scheitelabstand

$$s = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \operatorname{tg} \frac{1}{4} \psi \dots \dots \dots (767)$$

absteht.

Ist der Tangentenschnittpunkt D unzugänglich (Abb. 332) — vielleicht weil er ins Wasser fällt —,

so lassen sich etwa auf den in der Natur bezeichneten Geraden G_1, G_2 möglichst nahe an D zwei Hilfspunkte A'', B'' signalisieren und in genügendem Abstände weiter rückwärts zwei gegenseitig sichtbare Theodolitstandorte A', B' angeben, deren Entfernung c unmittelbar (oder mittelbar) gemessen werden kann und von denen aus auch die Punkte A'', B'' angezielt werden können. Sind α und β die in A' und B' zu beobachtenden Winkel, welche die Tangente G_1, G_2 mit c einschließen, so ist nach dem Dreieck $A'DB'$ der Tangentenschnittwinkel

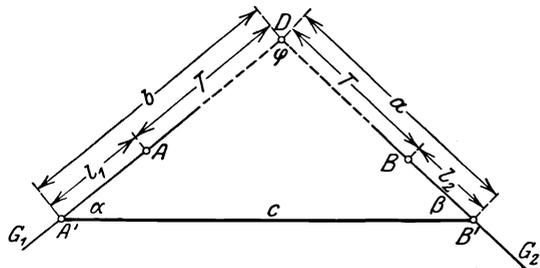


Abb. 332. Berechnung des Kreisbogennetzes bei unzugänglichem Tangentenschnittpunkt.

$$\varphi = 180^\circ - (\alpha + \beta). \dots \dots \dots (768)$$

Hat man nach (764) den Zentriwinkel ψ und mittels (765) die Länge T der Haupttangente berechnet, ferner die Dreiecksseiten $A'D, B'D$ zu

$$b = c \frac{\sin \beta}{\sin \varphi}, \quad a = c \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (769)$$

ermittelt, so findet man die Abstände der Tangentenberührungspunkte A, B von A', B' als die Differenzen

$$l_1 = b - T, \quad l_2 = a - T. \dots \dots \dots (770)$$

Die Berührungspunkte A, B können somit von A', B' aus abgesteckt werden, womit die weitere Behandlung der Aufgabe auf die vorher besprochene Lösung zurückgeführt ist¹⁾.

¹⁾ Je nach den gegebenen Bestimmungsstücken ist die Art der Netzberechnung natürlich immer wieder eine etwas verschiedene. Eine Reihe von einschlägigen Aufgaben enthalten z. B. die verschiedenen Jahrgänge der Z.V.W.

b) Absteckung von gleichabständigen Kreispunkten durch rechtwinklige Koordinaten von der Tangente aus.

Ist das Kurvennetz ins Gelände übertragen, so wird jeder der gleichgroßen Teilbögen für sich von der zugehörigen Tangente aus abgesteckt, wobei man allerdings die für den ersten Bogen zu berechnenden Koordinaten sogleich auch für die übrigen Bögen verwenden kann.

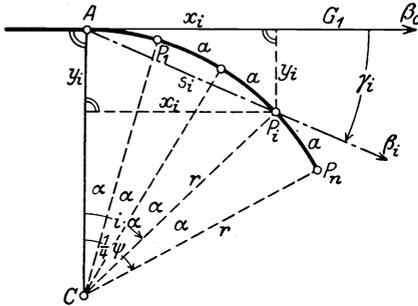


Abb. 333. Absteckung gleichabständiger Kreispunkte durch rechtwinklige Koordinaten von der Tangente aus.

Denkt man sich den Teilbogen, zu dem der Zentriwinkel $\frac{1}{4}\psi$ gehören möge, in n gleiche Teile a (Abb. 333) zerlegt, wo a je nach dem Zweck etwa zwischen 5 m und 20 m liegt, so ist der einem Kleinbogen a entsprechende Zentriwinkel

$$\alpha = \frac{\psi}{4n}, \dots (771)$$

während sich für die auf die Tangente G_1 und ihren Berührungspunkt A bezogenen rechtwinkligen Koordinaten eines Kreispunktes P_i nach der Figur die Ausdrücke

$$x_i = r \cdot \sin i\alpha, \dots (772)$$

$$y_i = r - r \cdot \cos i\alpha = 2r \cdot \sin^2 \frac{1}{2}i\alpha (773)$$

ergeben.

Die nach diesem Verfahren berechneten und in die Natur übertragenen Punkte stehen gleichweit voneinander ab; man hat also, vom Einfluß der Messungsfehler abgesehen, den Vorteil einer an allen Stellen gleichmäßig sicher bestimmten Kurve. Daß mit wachsendem x die Abszissenunterschiede — erst langsam und dann rasch — abnehmen, ist ein Nachteil der Methode, welcher sich besonders bei der Anlage von Kurventabellen bemerklich macht. Solche Hilfstafeln, welche für bestimmte Halbmesser und Bögen die Kreiskoordinaten angeben, werden bei der praktischen Durchführung von Kurvenabsteckungen mit Vorliebe benützt, da die zahlenmäßige Berechnung der Punkte mittels der analytischen Formeln auf dem Felde meist zu viel Zeit in Anspruch nehmen würde¹⁾.

c) Absteckung von Kreispunkten durch rechtwinklige Koordinaten von der Tangente aus mit gleichen Abszissenunterschieden.

Sind x_1 und x_n (Abb. 334) die auf die Tangente G_1 und ihren Berührungspunkt A bezogenen Abszissen des Bogenpunktes P_1 und des Bogenendpunktes P_n , so ist

$$x_1 = \frac{1}{n} \cdot x_n = \frac{1}{n} r \cdot \sin \frac{1}{4}\psi \dots (774)$$

Die Abszisse des Punktes P_i ergibt sich dann zu

$$x_i = i \cdot x_1 \dots (775)$$

während
$$y_i = r - \sqrt{r^2 - x_i^2} \approx 2r \left\{ \left(\frac{x}{2r} \right)^2 + \left(\frac{x}{2r} \right)^4 \right\} \dots (776)$$

¹⁾ Das bekannteste und wohl auch älteste Werk, welches Hilfstafeln zum Abstecken von Bögen nach der oben beschriebenen Methode enthält, ist *Kröhnke*, „Taschenbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wegelinien“, 1. A. Leipzig 1851, 15. A. Leipzig 1911. Hilfstafeln für dieselbe Absteckungsmethode sind auch enthalten in *Knoll*, C., „Taschenbuch zum Abstecken der Kurven an Straßen und Eisenbahnen“, 3. A. Leipzig 1911.

den strengen bzw. einen genäherten Wert der zugehörigen Ordinate angibt. Ersteren kann man leicht der Figur entnehmen; durch Reihenentwicklung nach dem Binomialsatz folgt hieraus der in den meisten Fällen ausreichende Näherungswert.

Will man den Vorteil dieser Methode voll ausnützen, so muß man dem konstanten Abszissenunterschied x_i einen runden Wert beilegen. Dann gestaltet sich die Berechnung und Absteckung der Abszissen so außerordentlich einfach, daß man seine Hauptaufmerksamkeit der Ermittlung und Absteckung der die Krümmung eines flachen Bogens besonders stark beeinflussenden Ordinaten zuwenden kann. Dafür läßt sich der kleine Nachteil, daß mit wachsenden Abszissen die Punktabstände zunehmen, leicht mit in Kauf nehmen¹⁾.

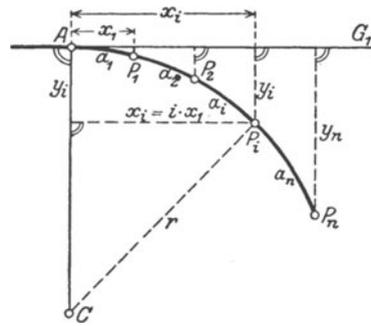


Abb. 334. Absteckung von Kreispunkten durch rechtwinklige Koordinaten von der Tangente aus mit gleichen Abszissenunterschieden.

d) Absteckung von Kreispunkten durch rechtwinklige Koordinaten von der Sehne aus.

Die beiden vorhin beschriebenen Methoden sind annähernd gleichwertig und anwendbar, wenn das auf der Außenseite des Bogens befindliche Gelände zugänglich und für genaue Längenmessungen geeignet ist. Trifft diese Voraussetzung nicht mehr zu, während sich das innerhalb des Bogens liegende Gelände für die Vornahme von Messungen eignet, so kann die Einzelpunkt-absteckung durch rechtwinklige Koordinaten von der Sehne aus am Platze sein. Dabei ist die zwischen den Berührungspunkten A, B (Abb. 335) gezogene Sehne die Abszissenachse, während in ihren Mittelpunkt der Koordinatenursprung U fällt.

Die Koordinaten x'_i, y'_i eines Punktes P_i lassen sich in einfachster Weise durch die auf die Tangente bezogenen Werte x_i, y_i ausdrücken, gleichgültig, ob es sich um gleiche Punktabstände oder um konstante Abszissenunterschiede handelt. Nach Abb. 335 gilt nämlich

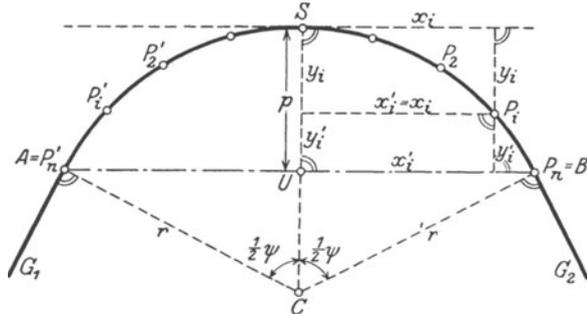


Abb. 335. Absteckung von Kreispunkten durch rechtwinklige Koordinaten von der Sehne aus.

$$x'_i = x_i, \quad y'_i = p - y_i, \dots \dots \dots (777)$$

$$p = 2r \cdot \sin^2 \frac{1}{4} \psi \dots \dots \dots (778)$$

wenn die Pfeilhöhe des Bogens AB bedeutet.

¹⁾ Beim Bau der Brennerbahn (1861—1868) sind nach *Kreuter* alle Bögen nach dem oben beschriebenen Verfahren abgesteckt worden.

Auch für diese Art des Kurvenabsteckens bestehen Hilfstabellen wie z. B. in *Sarrazin u. Oberbeck*, Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbogen, 34. A. Berlin 1919. Ferner sind solche Tafeln enthalten in *Bauernfeind*, Elemente der Vermessungskunde, II. Band, Tafel XXIV, in *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, II. Bd., 8. A. Stuttgart 1914, Anhang [36] bis [38] sowie in dem in der vorhergehenden Anmerkung genannten Hilfswerk von *Knoll*.

e) Absteckung von Kreispunkten durch ein regelmäßiges, eingeschriebenes Polygon.

Wenn zu beiden Seiten des Bogens sehr wenig Platz zur Verfügung steht und auch nicht die ganze Kurve überblickt werden kann, wie z. B. in reifenden Getreidefeldern, in engen Schluchten oder gar in einem Tunnel, so kann, wenn genaue Arbeit verlangt wird, die Absteckung des Kreisbogens mit Hilfe eines ihm eingeschriebenen, regelmäßigen Polygons vorteilhaft sein.

Die in Abb. 336 angedeutete Lösung nimmt für den etwas schwierigeren Fall, daß der Tangentenschnittpunkt unzugänglich und die Sicht zwischen den beiden Hilfspunkten A' , B' auf den Haupttangente G_1 , G_2 nicht frei ist, den folgenden Verlauf.

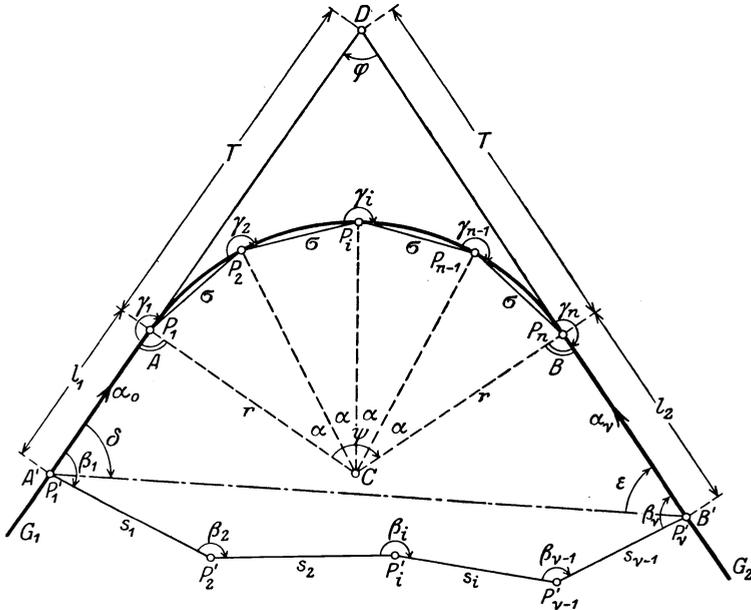


Abb. 336. Absteckung von Kreispunkten durch ein regelmäßiges eingeschriebenes Polygon.

1. Man verbindet die Hilfspunkte A' , B' durch einen Polygonzug $A' P_2' \dots B'$, dessen möglichst lange Seiten $s_1, \dots s_{v-1}$ und Brechungswinkel $\beta_1, \dots \beta_v$ sorgfältig gemessen werden.

2. Ist α_0 der irgendwie angenommene Richtungswinkel der Haupttangente G_1 (erste Anschlußrichtung), so erhält man von diesem ausgehend die Richtungswinkel der einzelnen Polygonseiten auf bekanntem Wege und schließlich den Richtungswinkel α_v der mit der zweiten Anschlußrichtung identischen Haupttangente G_2 , nämlich

$$\alpha_v = \alpha_0 + [\beta_i] - (v - 1) 180^\circ \dots \dots \dots (779)$$

Nun ist aber der Tangentenschnittwinkel φ die Differenz der beiden Tangentenrichtungswinkel, also

$$\varphi = \alpha_0 - \alpha_v = (v - 1) 180^\circ - [\beta_i] \dots \dots \dots (780)$$

Damit ist auch der Zentriwinkel $\psi = 180^\circ - \varphi$ wieder bekannt.

3. Mit den Polygonseiten und ihren soeben aufgestellten Richtungswinkeln lassen sich unter Annahme irgendwelcher Koordinaten $x_{A'}$, $y_{A'}$ für den Zusagefangspunkt A' die rechtwinkligen Koordinaten der einzelnen Zugpunkte berechnen, wobei der Endpunkt B' die Koordinatenwerte $x_{B'}$, $y_{B'}$ erhalten möge. Damit ergibt sich $A'B'$ nach Richtung und Länge, nämlich

$$\operatorname{tg}(A'B') = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}}, \quad A'B' = \frac{x_{B'} - x_{A'}}{\cos(A'B')} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{\sin(A'B')} \dots (781)$$

4. Nunmehr erhält man im Dreieck $A'DB'$ die bei A' und B' liegenden Winkel

$$\delta = (A'B') - \alpha_0, \quad \varepsilon = \alpha_v - (B'A') \dots (782)$$

als die Differenzen der Seitenrichtungswinkel, und mit den Abkürzungen

$$A'B' = c, \quad A'D = b, \quad B'D = a \dots (783)$$

ergeben sich nach dem Sinussatze die noch unbekanntenen Dreiecksseiten

$$a = c \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}, \quad b = c \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} \dots (784)$$

Da bei gegebenem Halbmesser r die Länge T der Haupttangente nach (765) berechnet werden kann, so lassen sich auch die Längen

$$l_1 = b - T, \quad l_2 = a - T \dots (785)$$

angeben, welche man von A' und B' aus auf den Haupttangente gegen deren Schnittpunkt zu abzutragen hat, um auf die Tangenteberührungspunkte A und B zu kommen.

5. Soll das dem Kreisbogen AB einzubeschreibende regelmäßige Polygon $n - 1$ Seiten σ fassen, so ist der einer solchen Seite entsprechende Zentriwinkel

$$\alpha = \frac{\psi}{n - 1}, \dots (786)$$

so daß

$$\sigma = 2r \sin \frac{1}{2} \alpha = 2r \sin \frac{1}{2(n - 1)} \psi \dots (787)$$

wird. Die an die Haupttangente anschließenden Absteckungswinkel γ_1 und γ_n an den Bogenenden sind die Ausdrücke

$$\gamma_1 = \gamma_n = 180^\circ + \frac{1}{2} \alpha \dots (788)$$

während sich für die Zwischenpunkte die einander gleichen Winkel

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_{n-1} = 180^\circ + \alpha \dots (789)$$

ergeben.

6. Damit sind alle rechnerischen Vorbereitungen erledigt und das Polygon kann nunmehr vom Punkt A und der Richtung AA' ausgehend mit Hilfe der errechneten Werte γ und σ abgesteckt werden, wobei für längere Bögen sowohl der Winkelabsteckung mit dem Theodolit als auch der Längenabsteckung große Sorgfalt zuzuwenden ist. Eine durchschlagende Kontrolle für die Richtigkeit der Arbeit ergibt sich erst beim Anschluß an B , der sowohl der Punktlage nach als auch der Richtung nach stimmen soll.

Ist die Zahl der so gewonnenen Bogenpunkte noch zu gering, so kann man weitere Kreispunkte von den Sehnen σ aus durch rechtwinklige Koordinaten, wie auf Seite 317 beschrieben, abstecken¹⁾.

¹⁾ Die Verwendung eines regelmäßigen Sehnenpolygons ist im allgemeinen zweckmäßiger als die Absteckung mit Hilfe eines regelmäßigen Tangentenpolygons, da im

$$CC' = \frac{k}{AC}, \quad CC'' = \frac{k}{BC}, \quad \dots \dots \dots (790)$$

in welcher k ein beliebiger Festwert ist, genügt wird.

Soll die Absteckung von Kreispunkten auf Grund eines Kurvennetzes erfolgen, so sind vorerst diejenigen Bestimmungsstücke des Dreiecks ABC zu messen, welche den Bogen festlegen, nämlich die Seite c und der Winkel γ . Ein Blick auf die Figur ergibt dann für den Zentriwinkel ψ den Ausdruck

$$\psi = 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 2\gamma \quad \dots \dots \dots (791)$$

und da die Haupttangente G_1, G_2 mit der Sehne AB je den Winkel $\frac{1}{2}\psi$ einschließen, so kann man durch Abtragen dieses Winkels in A und B von c aus auch die Tangentenrichtungen in die Natur übertragen. Mit Hilfe von ψ und des Bogenhalbmessers

$$r = \frac{c}{2 \sin \frac{1}{2}\psi} \quad \dots \dots \dots (792)$$

ergeben sich nach den Formeln (765), (766) auch die Tangentenlängen T und t .

Ohne Benutzung eines Theodolits kann man in folgender Weise vorgehen. Bezieht man C durch seine zu messenden rechtwinkligen Koordinaten x, y (Abb. 337b) auf die Sehne $AB = l$ und ihren Mittelpunkt M' und bezeichnet q den Abstand des Kreismittelpunktes M von AB , so ergibt sich aus dem Sehnensatz

$$q = \frac{1}{2y} \left\{ \frac{1}{4} l^2 - (x^2 + y^2) \right\} = \frac{1}{2y} \left(\frac{1}{2} l + \varrho \right) \left(\frac{1}{2} l - \varrho \right) \dots \dots (793)$$

Hierin ist die Abkürzung

$$\varrho = M'C = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots \dots \dots (794)$$

verwendet. Der Kreishalbmesser r , die zum Kurvenscheitel S gehörige Pfeilhöhe p , der Abstand $p + s$ des Tangentenschnittpunktes D vom Mittelpunkt M' der Seite AB und die Länge der Haupttangente sind dann die Ausdrücke

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} l^2 + q^2}, \quad \dots \dots \dots (795)$$

$$p = r - q, \quad \dots \dots \dots (796)$$

$$p + s = \frac{l^2}{4q}, \quad \dots \dots \dots (797)$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{4} l^2 + (p + s)^2} \quad \dots \dots \dots (798)$$

Durch Errichten einer Senkrechten in M' auf AB von der berechneten Länge $p + s$ erhält man den Tangentenschnittpunkt D und in den Verbindungen AD und BD sogleich die Haupttangente nach Länge und Richtung. Zur Probe muß der nach (798) errechnete Wert für T mit den direkt gemessenen Entfernungen AD und BD übereinstimmen. Der dem Bogen ASB entsprechende Zentriwinkel ψ endlich ergibt sich aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi = \frac{l}{2q} \quad \dots \dots \dots (799)$$

g) Absteckung von Kreispunkten durch Polarkoordinaten.

Bei diesem Verfahren wird der abzusteckende Bogen AP_n (Abb. 333) in n gleiche Teile zerlegt, deren jedem ein Zentriwinkel α entspricht. Die

auf die Tangente G_1 und ihren Berührungspunkt A bezogenen Polarkoordinaten eines Kreispunktes P_i sind die Ausdrücke

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \cdot i \cdot \alpha, \quad s_i = 2 r \sin \frac{1}{2} \cdot i \cdot \alpha \dots \dots \dots (800)$$

Während die Richtung des Strahles AP_i durch Absteckung des Winkels γ_i von G_1 aus anzugeben ist, wäre s_i in der Zielebene des Theodolits von A aus direkt abzumessen¹⁾. Das wird besonders bei größeren Entfernungen lästig und kann auch mit Rücksicht auf Geländeschwierigkeiten nicht immer durchgeführt werden. Man begnügt sich deshalb vielfach damit, die Strahlenrichtung von der Tangente aus abzustecken und die Strahlenlänge bzw. den Punkt P_i auf dem Strahl dadurch zu bestimmen, daß man die dem Winkel α entsprechende konstante Sehnenlänge $s_1 = 2 r \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha$ jeweils vom vorhergehenden Punkte P_{i-1} aus so abträgt, daß ihr Endpunkt in die abgesteckte Strahlenrichtung fällt. Da jedoch bei diesem bequemen Verfahren die Länge der Leitstrahlen auf indirektem Wege bestimmt wird, so kann man, streng genommen, kaum mehr von einer Absteckung durch Polarkoordinaten sprechen. Es ist besonders vorteilhaft, wenn man zwar vom Berührungspunkt der Tangente aus den ganzen Bogen überblicken kann, zu beiden Seiten der — vielleicht auf einem hohen Damm liegenden — Kurve jedoch keine Messungen ausgeführt werden können²⁾.

h) Absteckung von Kreispunkten nach der Einrückmethode.

Auch hier wird der abzusteckende Bogen AP_n (Abb. 338) in n gleiche Teile zerlegt. Mit Hilfe des einem Teil entsprechenden Zentriwinkels α erhält man die auf die Haupttangente G_1 bezogenen rechtwinkligen Koordinaten

$$x_1 = r \cdot \sin \alpha, \quad y_1 = 2 r \cdot \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \dots \dots \dots (801)$$

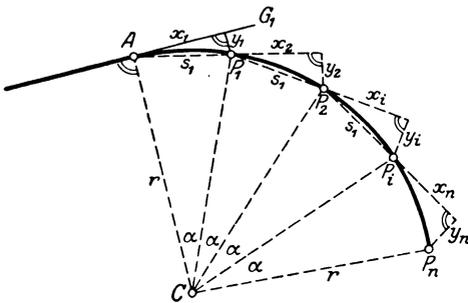


Abb. 338. Absteckung von Kreispunkten nach der Einrückmethode.

des ersten Bogenpunktes P_1 . Auch alle weiteren Punkte werden durch rechtwinklige Koordinaten abgesteckt, die jedoch nicht mehr auf die Tangente, sondern auf die Sehne durch die beiden jeweils vorhergehenden Kurvenpunkte mit dem zuletzt bestimmten Punkt als Ursprung bezogen werden. Wie leicht einzusehen, sind diese Koordinaten für alle Punkte von P_2 ab dieselben Werte, nämlich

$$x_2 = x_i = s_1 \cdot \cos \alpha, \quad y_2 = y_i = s_1 \sin \alpha, \quad (802)$$

wo $s_1 = 2 r \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha \dots \dots (803)$ ist.

Dieses Verfahren bietet den Vorteil, sehr wenig Raum zu beanspruchen und eignet sich daher besonders zur Absteckung durch enge Schluchten oder durch Getreidefelder. Auch bei der Absteckung eines ganz kurzen Tunnels kann es angebracht sein, doch muß man diese Methode mit großer Vorsicht

¹⁾ Hilfstabellen für dieses Verfahren sind enthalten in *Bauernfeind*, Elemente der Vermessungskunde, 2. Bd., Tafel XXVI.

²⁾ Die beschriebene Abart stammt nach Prof. *Kreuter* aus den 1840-Jahren und ist von *Rankine* (siehe *Rankine*, *W. J. M.*, Handbuch der Bauingenieurkunst. Deutsche Bearbeitung von *Franz Kreuter*, 3. A. Wien 1892). Hilfstafeln enthalten die auf S. 317 Anmerk. 1) genannten Kurventabellen von *Sarrazin* und *Oberbeck* sowie *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, II. Bd., 8. A. Stuttgart 1914, Anhang [39]—[41].

und peinlicher Genauigkeit anwenden. Sie besitzt nämlich eine sehr ungünstige Fehlerfortpflanzung, da sich eine Ungenauigkeit in der Bestimmung irgend-eines Punktes auch auf alle folgenden Punkte überträgt. Man bezeichnet daher dieses Verfahren wie auch das folgende als ein Näherungsverfahren.

i) Absteckung von Kreispunkten nach der Ausrückmethode.

Bei diesem Verfahren, welches die gleichen Vorteile und Nachteile wie die Einrückmethode besitzt, wird ebenfalls der erste Zwischenpunkt P_1 (Abb. 339) des in n gleiche Teile mit je einem Zentriwinkel α zerlegten Bogens mittels seiner nach (801) berechneten rechtwinkligen Koordinaten von der Tangente G_1 aus abgesteckt. Jeder folgende Kurvenpunkt P_2, P_3, \dots aber ergibt sich jeweils als Endpunkt einer durch den zuletzt bestimmten Punkt gehenden Sehne, deren konstante Länge s_1 nach (803) berechnet werden kann, während zur Bezeichnung ihrer Richtung je ein Punkt ihrer rückwärtigen Verlängerung mittels der auf die vorhergehende Sehne und ihren Anfangspunkt bezogenen Ordinate

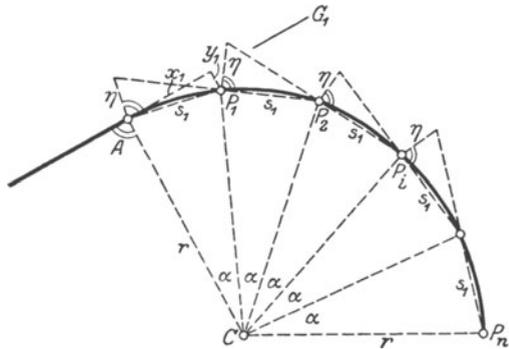


Abb. 339. Absteckung von Kreispunkten nach der Ausrückmethode.

$$\eta = s_1 \cdot \text{tg } \alpha \dots \dots \dots (804)$$

abgesteckt wird.

k) Absteckung von Kreispunkten nach der Viertelmethode.

Sind die beiden zuletzt besprochenen Absteckungsarten wegen ihrer ungünstigen Fehlerübertragung vom technischen Standpunkte aus als Näherungsmethoden zu bezeichnen, so trifft dies für die Viertelmethode mehr vom

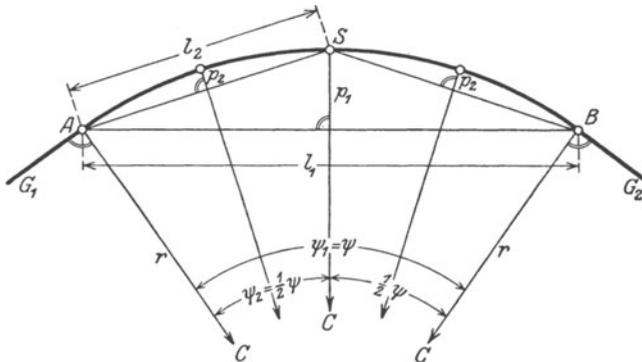


Abb. 340. Absteckung von Kreispunkten nach der Viertelmethode.

mathematischen Standpunkte aus zu. Sie kann mit Vorteil nur auf Bögen mit kleinen Zentriwinkeln ψ (Abb. 340) angewendet werden und setzt voraus, daß in der Natur außer den Bogenendpunkten A, B auch noch der Kurvenscheitel S gegeben ist. Der Kreishalbmesser r hingegen braucht nicht bekannt zu sein.

Bedeutet l_1, p_1 die Sehne und die Pfeilhöhe zum Zentriwinkel ψ_1 , während l_2, p_2 die entsprechenden Werte zum Zentriwinkel ψ_2 sind, so gelten für p die strengen Ausdrücke

$$p_1 = \frac{l_1^2}{4(2r - p_1)} = 2r \cdot \sin^2 \frac{1}{4} \psi_1, \quad p_2 = \frac{l_2^2}{4(2r - p_2)} = 2r \cdot \sin^2 \frac{1}{4} \psi_2, \quad (805)$$

aus welchen leicht die für kleinere Zentriwinkel hinreichend genauen Näherungsbeziehungen

$$p_1 \approx \frac{1}{8r} \cdot l_1^2 \approx \frac{1}{8} r \cdot \widehat{\psi}_1^2, \quad p_2 \approx \frac{1}{8r} \cdot l_2^2 \approx \frac{1}{8} r \cdot \widehat{\psi}_2^2 \quad \dots \quad (806)$$

hervorgehen. Daraus aber folgt unmittelbar die Proportion

$$p_1 : p_2 \approx l_1^2 : l_2^2 \approx \psi_1^2 : \psi_2^2, \quad \dots \quad (807)$$

nach welcher sich die Pfeilhöhen näherungsweise wie die Quadrate der zugehörigen Sehnen oder der entsprechenden Zentriwinkel verhalten. Faßt man etwa den ganzen Bogen AB und den halben Bogen AS mit den Zentriwinkeln ψ und $\frac{1}{2}\psi$ ins Auge, so führt (807) auf die besonders einfache Beziehung

$$p_1 : p_2 \approx 1 : \frac{1}{4} \quad \text{bzw.} \quad p_2 \approx \frac{1}{4} p_1, \quad \dots \quad (808)$$

welche der Viertelsmethode unmittelbar zugrunde liegt und ihr den Namen gegeben hat. Hiernach erhält man die Scheitel der halben Bögen, indem man von den Mittelpunkten der zugehörigen Sehnen aus nach außen zu Ordinaten absetzt, deren Länge ein Viertel der zum ganzen Bogen gehörigen Pfeilhöhe ist. Geht man vom halben Bogen auf den Viertelsbogen usw., so wird der Kreisbogen bald durch eine genügende Zahl von gleichabständigen Punkten bezeichnet sein.

1) Absteckung der kubischen Parabel als Übergangskurve.

Bei der Verwendung einfacher Kreisbögen als Verbindungslinien geradliniger Schienenstränge findet in den Tangentenberührungspunkten ein plötzlicher Krümmungswechsel statt. Dieser Umstand ist für das diese Punkte durch-eilende Fahrzeug sehr mißlich, da es hier einer plötzlichen Änderung der Fliehkraft ausgesetzt ist. Bekanntlich kann man dieser Kraft, welche den Wagen in der Richtung der Normalen hinauszuerfen sucht, einen durch eine entsprechende Überhöhung der äußeren Schiene erzielten Widerstand entgegensetzen. Nun soll wegen der Krümmung Null der Tangente im Be-

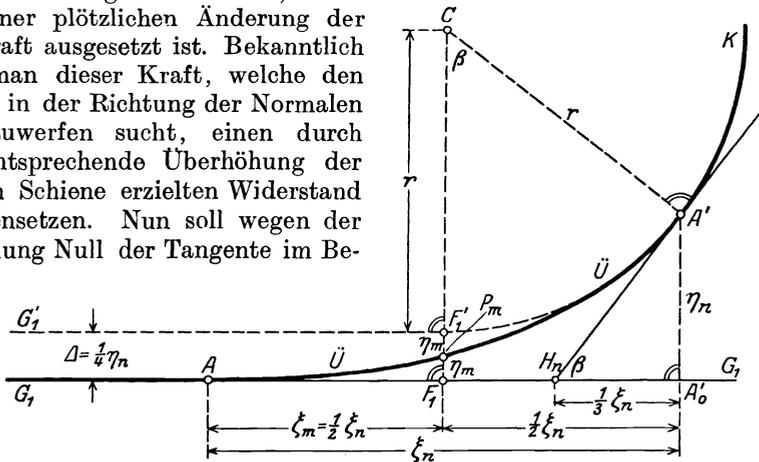


Abb. 341. Die kubische Parabel als Übergangskurve.

rührungspunkt noch keine Überhöhung vorhanden sein; andererseits soll dort aber wegen der endlichen Krümmung des anschließenden Kreisbogens schon eine Überhöhung stattfinden! Um diesem Zwiespalt zu entgehen, schaltet man

zwischen die Gerade G_1 (Abb. 341) und den Kreisbogen K eine sog. Übergangskurve \bar{U} ein, welche in ihren Berührungspunkten mit den Anschlußlinien gleiche Krümmung besitzt. Ihr Krümmungshalbmesser ist daher im Tangentenberührungspunkt A unendlich groß und nimmt von da an beständig ab, bis er im Berührungspunkt A' mit dem Kreisbogen dessen Halbmesser r erreicht. Eine einfache den gestellten Bedingungen genügende Kurve ist die kubische Parabel

$$\eta = \frac{\xi^3}{6q}, \dots \dots \dots (809)$$

bezogen auf die Tangente G_1 und ihren Berührungspunkt A als Anfangspunkt. Der im Nenner von (809) enthaltene Festwert ist der Ausdruck

$$q = \frac{v \cdot w \cdot v^2}{g} = l \cdot r, \dots \dots \dots (810)$$

hängt also von der Überhöhungszunahme v der äußeren Schiene pro Längeneinheit, der Spurweite w , der Fahrzeuggeschwindigkeit v und der Beschleunigung g durch die Schwerkraft ab. Er ist auch gleich dem Produkt $r \cdot l$ aus dem Kreisbogenhalbmesser r in die Länge l der Übergangskurve. Bezeichnet h die dem Kreisbogen zukommende Schienenüberhöhung und ist ein bestimmtes v ($v = \frac{1}{200}$ bis $\frac{1}{300}$) gewählt, so ergibt sich

$$l = \frac{h}{v} \approx \xi_n. \dots \dots \dots (811)$$

Die Vertauschung von l mit der Endabszisse ξ_n ist wegen der sehr geringen Neigung der Übergangskurve gegen die Tangente G_1 praktisch immer zulässig.

Aus der Gleichung (809) der Übergangskurve ergeben sich noch einige wichtige Beziehungen. Bedeuten ξ_m, η_m die Koordinaten desjenigen Kurvenpunktes P_m , dessen Ordinatenverlängerung den Kreismittelpunkt C enthält, so gilt

$$\xi_m = \frac{1}{2} \xi_n, \quad \eta_m = \frac{1}{8} \eta_n. \dots \dots \dots (812)$$

Die Projektion F_1 von C auf G_1 halbiert also die Endabszisse $AA_0' = \xi_n$. Ferner findet man die infolge Einschaltens der Übergangskurve \bar{U} notwendige Verschiebung des Kreisbogens K nach innen zu

$$A = F_1 F_1' = 2 \cdot \eta_m = \frac{1}{4} \eta_n. \dots \dots \dots (813)$$

Der Krümmungshalbmesser R in einem Punkte P mit der Abszisse ξ ist genähert jeweils

$$R \approx q : \xi = \frac{l}{\xi} \cdot r \dots \dots \dots (814)$$

und die zugehörige Subtangente

$$S_t = \frac{1}{3} \xi, \dots \dots \dots (815)$$

woraus für den Kurvenendpunkt A' der besondere Wert

$$S_{t_n} = H_n A_0' = \frac{1}{3} \xi_n \dots \dots \dots (816)$$

hervorgeht. Von Bedeutung ist auch der durch die Beziehung

$$\text{tg } \beta = \frac{\xi_n}{2r} \dots \dots \dots (817)$$

bestimmte Zentriwinkel β , welchen der nach dem Endpunkt A' der Übergangskurve führende Kreishalbmesser mit der Ordinatenrichtung einschließt.

Sind in einem praktisch einfachen Falle die den zu messenden Winkel φ einschließenden Haupttangente G_1, G_2 (Abb. 342) in der Natur gegeben, und sollen sie durch einen Kreisbogen K zum Halbmesser r mit beiderseits

anschließenden identischen Übergangskurven \check{U}_1, \check{U}_2 verbunden werden, so ergibt sich folgender Arbeitsgang:

1. Zunächst ist mittels (810) der Festwert q und nach (811) die Länge l der Übergangskurve bzw. die Endabszisse ξ_n abzuleiten.

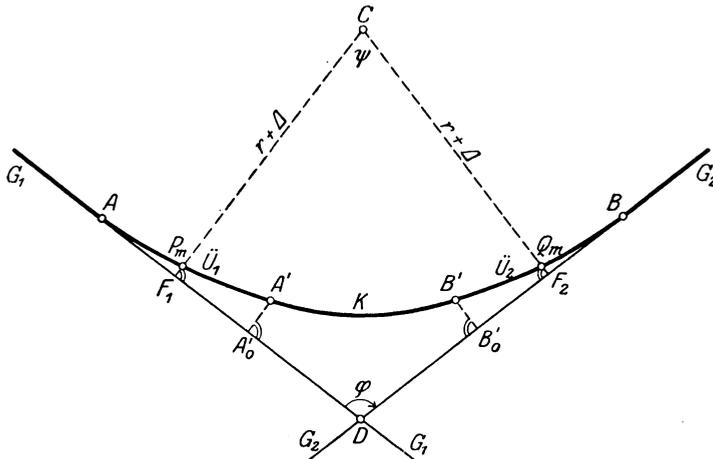


Abb. 342. Absteckung eines Kreisbogens mit beiderseits anschließenden Übergangskurven.

2. Damit erhält man aus (809) sogleich die Endordinate η_n und hieraus nach (813) die Tangentenverschiebung Δ .

3. Zur Absteckung der Fußpunkte F_1, F_2 braucht man ihren Abstand T vom Tangentenschnittpunkt D . Er ergibt sich als die Länge der statt mit r mit $r + \Delta$ berechneten Haupttangente, nämlich

$$T = (r + \Delta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi. \quad \dots \dots \dots (818)$$

4. Durch Abtragen der Länge $\frac{1}{2} \xi_m$ auf G_1 bzw. G_2 von F_1 bzw. F_2 aus nach beiden Seiten hin erhält man die Berührungspunkte A, B der Übergangskurven \check{U}_1, \check{U}_2 mit den Haupttangente G_1, G_2 und die Ordinatenfußpunkte A_0', B_0' der Berührungspunkte A', B' von \check{U}_1 und \check{U}_2 mit dem dazwischenliegenden Kreisbogen K .

5. Die Berührungspunkte A, A' bzw. B, B' und die durch Abtragen der Ordinate η_m in F_1 und F_2 gewonnenen Kurvenmittelpunkte P_m bzw. Q_m werden in vielen Fällen die Übergangskurve schon hinreichend genau bestimmen. Im Bedarfsfalle können weitere Kurvenpunkte leicht nach Gleichung (809) abgesteckt werden.

6. Daran reiht sich die Absteckung der wie sonst berechneten, jedoch um $\frac{1}{2} \xi_n$ vergrößerten Kreisabszissen und den um Δ vergrößerten Kreisordinaten von den Haupttangente G_1, G_2 und ihren Berührungspunkten A, B aus. Im übrigen kann der Kreisbogen nach einer beliebigen Methode abgesteckt werden, während die Absteckung der Übergangskurven stets durch rechtwinklige Koordinaten von der Tangente aus erfolgt¹⁾.

¹⁾ Nach Rankine (s. Anm. 2), S. 322), S. 743, hat zuerst William Froude in den vierziger Jahren des vorigen Jahrh. die im vorhergehenden beschriebene kubische Parabel als Übergangskurve benutzt. Um ihre Einführung auf dem Kontinent hat sich nach Sarrazin und Oberbeck Nördling, der Cheffingenieur der französischen Orleans-Zentralbahnen verdient gemacht. Hilfstabellen zur Absteckung von Übergangskurven durch rechtwinklige Koordinaten sind z. B. enthalten in dem auf S. 317, Anm. 1) genannten Taschenbuch von Sarrazin und Oberbeck, sowie in Hecht, Karl, Hand- und Hilfsbuch zum Abstecken von Eisenbahn- und Straßenkurven, Dresden 1893 (I. Teil Text, II. Teil Tabellen). Das

m) Berechnung der Absteckungselemente eines dreifachen Korbbogens bei festliegenden Haupttangente und vorgegebenen Halbmessern.

Um bei größeren Höhenunterschieden die zur Vermeidung unzulässiger Steigungen erforderliche Bahnlänge zu gewinnen, ist man häufig genötigt, einen Kehrtunnel anzulegen, dessen Achse in der Horizontalprojektion ein aus Kreisbögen mit gegebenen Halbmessern zusammengesetzter Korbbogen ist. In Abb. 343, welche die Horizontalprojektion eines dreiteiligen Korbbogens darstellt, ist die Berglinie G_1 mit der Tallinie G_2 durch die größtenteils im Berg verlaufenden Kreisbögen A_1B_1, B_1B_2, B_2A_2 mit den Halbmessern r_1, r_3, r_2 verbunden. Gelten etwa die beiden Mundlochpunkte M_1, M_2 , deren senkrechte Abstände y_1, y_2 von den ebenfalls gegebenen Haupttangente G_1, G_2 zu messen sind, als festliegend und hat man für die Halbmesser r_1 und r_2 der an die Geraden anschließenden Bögen passende Werte

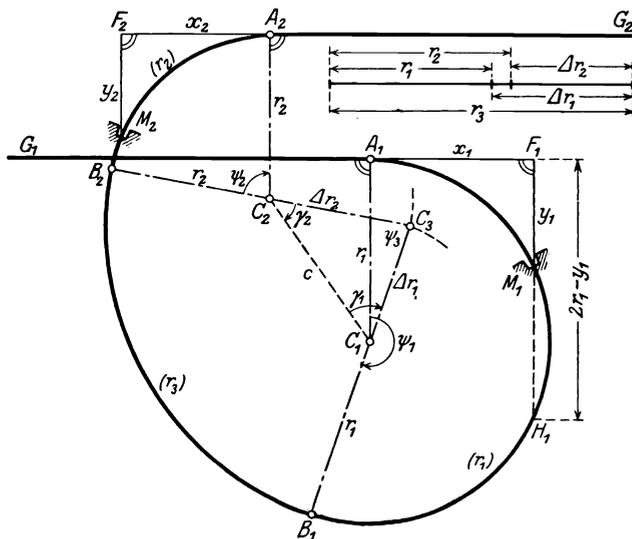


Abb. 343. Berechnung der Absteckungselemente eines dreiteiligen Korbbogens.

gewählt, so kann man zunächst die Lage der Tangenteberührungspunkte A_1, A_2 angeben, wenn ihre Abstände x_1, x_2 von den Ordinatenfußpunkten F_1, F_2 ermittelt werden. Für diese Längen ergeben sich nach dem Sekantensatz die Ausdrücke

$$x_1 = \sqrt{y_1(2r_1 - y_1)}, \quad x_2 = \sqrt{y_2(2r_2 - y_2)}. \quad \dots \quad (819)$$

Die Endpunkte der in A_1, A_2 senkrecht zu G_1, G_2 gezogenen Halbmesser r_1, r_2 bezeichnen im Plan die Mittelpunkte C_1, C_2 der Bögen A_1B_1 und A_2B_2 . Um diese durch einen sie berührenden Bogen mit dem Halbmesser r_3 zu verbinden, muß man für den durch die Abbildung veranschaulichten Fall r_3 jedenfalls größer als r_1 und r_2 annehmen. Hat man einen derartigen Wert gewählt, so ergeben sich in den Differenzen

$$\Delta r_1 = r_3 - r_1, \quad \Delta r_2 = r_3 - r_2, \quad \dots \quad (820)$$

älteste Hilfswerk dieser Art ist wohl *Helmert*, Die Übergangskurven für Eisenbahngleise mit Tafeln, Aachen 1872. *Gravatt* hat nach *Rankine* (siehe S. 322, Anm. 2)) S. 743, schon 1828 oder 1829 die einen sehr allmählichen Krümmungswechsel ermöglichende Sinuskurve zur Verbindung zweier Geraden verwendet und sie von der Berührungspunktsehne aus durch rechtwinklige Koordinaten abgesteckt. Er kam so mit einer einzigen Kurve aus, wo bei dem heute üblichen Verfahren drei gesonderte Kurvenzweige, nämlich zwei kubische Parabeln als Übergangskurven und der dazwischenliegende Kreisbogen abzustecken sind. Neuerdings hat *Hecht* in seinem vorgenannten Werke vorgeschlagen, irgendeinen Kegelschnitt statt des Kreisbogens samt den Übergangskurven als Bahnkurve zu wählen. Die Absteckung solcher zu den Tangente symmetrischen Kegelschnittsbahnkurven erfolgt zweckmäßig durch rechtwinklige Koordinaten mit gleichmäßig zunehmenden Abszissen. *Hecht* hat hiernach eine größere Zahl von Hiltstabellen berechnet. Die Anwendung und Absteckung der gemeinen Parabel von der Achse aus als Bahnkurve ist schon behandelt in *Prob, Friedr.*, Lehrbuch der praktischen Geometrie, Stuttgart 1838.

deren Summe zudem größer sein muß als die Entfernung $C_1 C_2$, die Abstände des Mittelpunktes C_3 des dritten Bogens von den schon vorliegenden Mittelpunkten C_1 und C_2 . Punkt C_3 kann also durch Einkreuzen mit den Entfernungen $\Delta r_1, \Delta r_2$ von C_1 und C_2 aus leicht zeichnerisch angegeben werden, während die Berührungspunkte B_1, B_2 durch die Verlängerungen $C_3 C_1$ und $C_3 C_2$ auf den beiden äußeren Anschlußbögen ausgeschnitten werden. Somit läßt sich jetzt aus dem Mittelpunkt C_3 mit dem Halbmesser r_3 zwischen B_1 und B_2 auch der dritte Kreisbogen zeichnen.

Zur Übertragung des Korbogens in die Natur kann man jeden seiner Teile etwa durch ein regelmäßiges, einbeschriebenes Polygon oder auch in anderer Weise abstecken. Auf jeden Fall braucht man außer den schon bestimmten Halbmessern r_1, r_2, r_3 auch die den zugehörigen Bögen entsprechenden Zentriwinkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 , für deren Ermittlung die gegenseitige Lage sowohl der Berührungspunkte A_1, A_2 wie auch der Anschlußtangente G_1, G_2 bekannt sein muß. Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn es möglich ist, die Winkel und eine Seite desjenigen Dreiecks zu messen, welches durch die Berührungspunkte A_1, A_2 und den Schnittpunkt der Tangente G_1, G_2 gebildet wird. Vielfach aber sind diese Unterlagen nur durch eine größere Triangulierung zu erlangen. Hat man auf diesem Wege die rechtwinkligen Koordinaten von A_1, A_2 und die Richtungswinkel $(A_1 F_1), (A_2 F_2)$ der Tangente G_1, G_2 gefunden, so ist der weitere Arbeitsgang folgender:

1. Aus den Richtungswinkeln

$$(A_1 C_1) = (A_1 F_1) + 90^\circ, \quad (A_2 C_2) = (A_2 F_2) - 90^\circ \dots (821)$$

der Strecken $A_1 C_1 = r_1, A_2 C_2 = r_2$ folgen die rechtwinkligen Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x_{C_1} &= x_{A_1} + r_1 \cdot \cos(A_1 C_1), & x_{C_2} &= x_{A_2} + r_2 \cdot \cos(A_2 C_2), \\ y_{C_1} &= y_{A_1} + r_1 \cdot \sin(A_1 C_1), & y_{C_2} &= y_{A_2} + r_2 \cdot \sin(A_2 C_2) \end{aligned} \right\} \dots (822)$$

ihrer Endpunkte, der Kreismittelpunkte C_1, C_2 .

2. Deren Verbindungsstrecke $C_1 C_2 = c$ erhält man aus den oben berechneten rechtwinkligen Koordinaten mittels der Formeln

$$(C_1 C_2) = \arctg \frac{y_{C_2} - y_{C_1}}{x_{C_2} - x_{C_1}}, \quad c = \frac{x_{C_2} - x_{C_1}}{\cos(C_1 C_2)} = \frac{y_{C_2} - y_{C_1}}{\sin(C_1 C_2)} \dots (823)$$

nach Richtung und Länge.

3. Die Innenwinkel $\gamma_1, \gamma_2, \psi_3$ des seinen Seiten $c, \Delta r_1, \Delta r_2$ nach bekannten Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ ergeben sich nach dem Halbwinkelsatz aus den Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma_1 &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-\Delta r_1)}{s(s-\Delta r_2)}}, & \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma_2 &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-\Delta r_2)}{s(s-\Delta r_1)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi_3 &= \sqrt{\frac{(s-\Delta r_1)(s-\Delta r_2)}{s(s-c)}}, & & \dots \dots \dots (824) \end{aligned}$$

wenn

$$s = \frac{1}{2}(c + \Delta r_1 + \Delta r_2) \dots \dots \dots (825)$$

den halben Dreiecksumfang bedeutet. Die Bedingung

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \psi_3 = 180^\circ \dots \dots \dots (826)$$

bietet eine erwünschte Rechenprobe.

4. Nunmehr erhält man die Richtungswinkel der nach den Berührungspunkten B_1, B_2 führenden Halbmesser, nämlich

$$\left. \begin{aligned} (C_1 B_1) &= (C_3 B_1) = (C_1 C_2) + \gamma_1 + 180^\circ, \\ (C_2 B_2) &= (C_3 B_2) = (C_1 C_2) - \gamma_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (827)$$

Sie werden durch die Beziehung

$$\psi_3 = (C_3 B_2) - (C_3 B_1) \dots \dots \dots (828)$$

verprobt.

5. Die noch fehlenden Zentriwinkel ψ_1, ψ_2 der Bögen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ ergeben sich als die Unterschiede der aus den Bogenmittelpunkten nach den zugehörigen Bogenendpunkten führenden Richtungen. Es ist

$$\psi_1 = (C_1 B_1) - (C_1 A_1), \quad \psi_2 = (C_2 A_2) - (C_2 B_2) \dots \dots (829)$$

Damit hat man alles, was man braucht, um von A_1 und A_2 aus die Absteckung der Bögen in Angriff zu nehmen¹⁾.

n) Absteckung eines dreiteiligen Korbbogens mit Übergangskurven an den beiden Außenbögen.

Sind die an die Haupttangente G_1, G_2 (Abb. 344) anschließenden Kreisbögen $A_1 B_1, A_2 B_2$ mit den Halbmessern r_1, r_2 stark gekrümmt, so wird es

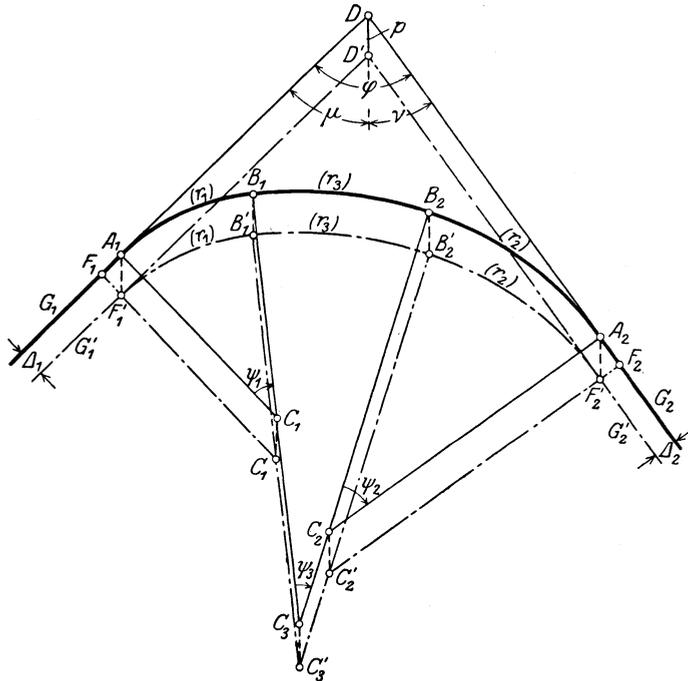


Abb. 344. Absteckung eines dreiteiligen Korbbogens mit Übergangskurven an den beiden Außenbögen.

¹⁾ Der Kehrtunnel spielt besonders bei Gebirgsbahnen eine große Rolle. Angaben über wirklich ausgeführte Kehrtunnelabsteckungen in den Alpen und die dabei erzielte Genauigkeit sind z. B. enthalten in a) *Koppe, C.*, „Über die Bestimmung der Absteckungselemente für die sieben Kehrtunnels der Gotthardbahn“, die Eisenbahn (Schweiz. Zeitschr. für Bau- u. Verkehrswesen), XIII. Bd., 1880, S. 34–37 u. 40–43 (enthält die Berechnungen für den Pfaffensprung- und den Travitunnel sowie Übersichten der anderen Tunnels; b) *Graf, W.*, „Die neuen Linien der rhätischen Bahn. Einiges über Tunnelabsteckungen auf der Albulabahn“, Schweizerische Bauzeitung, Bd. XL, 1902, S. 284–290 (die dort für mehrere Kehrtunnels angegebenen Durchschlagsfehler in Länge, Richtung und Höhe betragen jeweils nur wenige cm).

notwendig, zwischen die Haupttangente und die genannten Bögen je eine Übergangskurve U_1 bzw. U_2 (in der Abbildung zur Vermeidung einer Überladung nicht enthalten) einzuschalten. Dabei werden sich, nachdem mittels (810) und (811) die Festwerte q_1, q_2 und die Längen l_1, l_2 der Übergangskurven gefunden sind, für die Kreistangenten nach (813) die Verschiebungen A_1 und A_2 ergeben, welche eine Versetzung des Tangentenschnittpunktes D nach D' um den vorerst unbekanntem Betrag p und eine ebenso große und gleichgerichtete Verschiebung des ganzen Korbbogens nach innen zu zur Folge haben. Ist φ der bekannte, wie bisher ermittelte Tangentenschnittwinkel, welcher durch DD' in die Teile μ, ν zerlegt wird, so ergeben sich zu deren Bestimmung und zur Ermittlung von p die Gleichungen

$$\frac{1}{2}(\mu + \nu) = \frac{1}{2}\varphi = \gamma_1, \dots \dots \dots (830)$$

$$\frac{\sin \mu}{\sin \nu} = \frac{A_1}{A_2} = \text{ctg } \lambda, \dots \dots \dots (831)$$

$$\text{tg } \frac{1}{2}(\mu - \nu) = \text{tg } \gamma_2 = \text{ctg}(45^\circ + \lambda) \text{tg } \gamma_1 \dots \dots \dots (832)$$

$$\frac{1}{2}(\mu - \nu) = \gamma_2, \dots \dots \dots (833)$$

$$\mu = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \nu = \gamma_1 - \gamma_2, \dots \dots \dots (834)$$

$$p = \frac{A_1}{\sin \mu} = \frac{A_2}{\sin \nu} \dots \dots \dots (835)$$

Die Beziehung (830) folgt unmittelbar aus dem Anblick der Figur. Dasselbe gilt für (831), wenn man sich nur noch in der Abbildung von D' aus die Senkrechten A_1 und A_2 zu G_1 und G_2 gezogen denkt. Gleichung (832) aber entsteht aus (831) nach Einführung eines Hilfswinkels λ in der gleichen Weise wie die bei der trigonometrischen Behandlung des Rückwärtseinschneidens auf S. 143 aufgestellte Beziehung (319) aus (317) hervorging.

Bei bekanntem μ, ν, p erhält man nunmehr die zur Absteckung der beiden Übergangskurven notwendigen Punkte F_1, F_2 , sowie die Punkte F'_1, F'_2 von A_1 und A_2 aus mittels der rechtwinkligen Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} A_1 F_1 &= p \cdot \cos \mu, & F_1 F'_1 &= A_1, \\ A_2 F_2 &= p \cdot \cos \nu, & F_2 F'_2 &= A_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (836)$$

Mit diesen Unterlagen läßt sich in der früher (S. 325) angegebenen Weise jeder der beiden Übergangsbögen U_1, U_2 abstecken.

In der Absteckung der Kreisbögen selbst tritt — abgesehen von ihrer Parallelverschiebung — gegen früher keine Änderung ein.

54. Übersicht der vermessungstechnischen Arbeiten beim Eisenbahnbau.

Bei der Anlage von Verkehrswegen, besonders der Eisenbahnen, spielen auch vermessungstechnische Arbeiten eine große Rolle, deren Bedeutung mit der Schwierigkeit des Geländes zunimmt. Hauptsächlich kommen sie in Betracht bei den sog. Eisenbahnvorarbeiten, welche man gewöhnlich in Voruntersuchungen, allgemeine Vorarbeiten und ausführliche (spezielle) Vorarbeiten gliedert.

1. Bei den Voruntersuchungen werden mehrere, vielfach durch weite Räume getrennte Linien miteinander verglichen. Für die Wahl der einen oder anderen Linie bleiben Geländeinheiten ohne Bedeutung; dagegen sprechen neben allgemeinen wirtschaftlichen Gesichtspunkten die großen Züge

im Anlitz der Natur, wie die Beschaffenheit und Höhenlage etwaiger Gebirgstäler und Gebirgsübergänge ein entscheidendes Wort. In Kulturländern, die im Besitze einer 25 000-teiligen topographischen Karte mit Schichtenlinien sind, wird es fast immer möglich sein, auf Grund dieses Kartenwerks eine sichere Auswahl zu treffen. Auch eine 50 000-teilige topographische Karte kann noch genügen, wenn sie in bezug auf die Höhendarstellung etwa mittels barometrischer Messungen soweit ergänzt wird, daß sie 10 m- oder mindestens 20 m-Schichtenlinien enthält. Bei der Anlage von Verkehrswegen in kartographisch unbekanntem Ländern bleibt freilich nichts anderes übrig, als daß man die einzelnen Linien bereist und sie unter Zuhilfenahme der Barometers, der Bussole, des Schrittzählers oder der Marschzeiten oder eines Wagenrades als Meßrad in flüchtiger Weise aufnimmt. Die Arbeit kann in einem gut gangbaren Gelände durch automatische Meßinstrumente¹⁾, welche, wie z. B. der Pedograph von *Ferguson*, den Reiseweg in der Hauptsache selbsttätig auftragen, wesentlich erleichtert werden. Zur Sicherung solcher Routenaufnahmen werden einzelne ihrer Punkte, in erster Linie ihr Anfangs- und ihr Endpunkt durch geographisch-astronomische Ortsbestimmungen festgelegt²⁾.

2. Zu den allgemeinen Vorarbeiten gehört vor allem die Herstellung eines zuverlässigen, in größerem Maßstabe gehaltenen Schichtenplans, welcher einen manchmal mehrere hundert Meter breiten Geländestreifen zu beiden Seiten der ihrem ungefähren Verlaufe nach in die Natur übertragenen Linie darstellt. Auf Grund dieses Planes, welchem auch — in der Regel unter Beibehaltung des Längenmaßstabes — die meist 10-fach überhöhten Längenprofile entnommen werden, findet unter Einhaltung gewisser Bedingungen (kleinster Halbmesser, größte Steigung usw.) die Ermittlung einiger Varianten des Verkehrsweges statt, unter denen schließlich die bauwürdigste ausgewählt wird.

Bezüglich des Maßstabes und der Art der Aufnahme solcher Schichtenpläne für allgemeine Vorarbeiten herrscht nun eine große, zum Teil allerdings berechnete Verschiedenheit!

Ist aus Mangel an geeigneten Planunterlagen eine vollständige Neuaufnahme notwendig, die sich, wie früher beschrieben, auf ein Dreiecksnetz und Polygonzüge stützt, so ist nach dem übereinstimmenden Urteil von erfahrenen Fachmännern der Maßstab 1:5000 als der zweckmäßigste zu bezeichnen. Er reicht zur Darstellung aller wichtigeren Einzelheiten aus und liefert ein noch als übersichtlich zu bezeichnendes Planmaterial, dessen Höhenlinien im Flachland, Hügelland, Mittelgebirge und Hochgebirge zweckmäßig die Abstände 1 m, 2 m, 3 m und 5 m besitzen. Die Ausführungsmethode solcher Neuaufnahmen wird, soweit nicht Vorschriften entscheiden, bis zu einem gewissen Grade immer von der persönlichen Veranlagung und Liebhaberei des Leiters der Arbeiten abhängen. In tieferen, meist unübersichtlichen Lagen wird wohl die Zahlentachymetrie mit dem Theodolit, in dichten Wäldern diejenige mit der Bussole vorzuziehen sein, während in höheren, meist übersichtlicheren Bezirken mit viel Einzelheiten in den Geländeformen die Meß-

¹⁾ Siehe z. B. *Koll, F.*, „Automatische Meßinstrumente“ (Pedograph, Cyclograph, Hodograph), Z.V.W. 1905, S. 245—251. Ferner siehe Z.J.K. 1904, S. 57.

²⁾ Siehe dazu in *Neumayer, G. v.*, „Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen“, Bd. I, 3. Aufl., Hannover 1906; die Beiträge a) *Ambromn, L.*, Geographische Ortsbestimmung auf Reisen, S. 1—73; b) *Vogel, P.*, Aufnahme des Reiseweges und des Geländes, S. 74—164; c) *Finsterwalder, S.*, Die Photogrammetrie als Hilfsmittel der Geländeaufnahme, S. 165—202.

Auch auf die S. 217, Anm. 1) genannte Arbeit von Oberbauinspektor *P. T. Walther* sei hier noch einmal verwiesen.

tischtachymetrie vielleicht bessere Dienste leisten kann. Nimmt mit zunehmender Höhe die Zugänglichkeit des Aufnahmegebietes immer mehr ab, während es doch gut eingesehen werden kann, so versagen die genannten Methoden, und es kommt die Photogrammetrie als Hilfsmittel der Geländeaufnahme zu ihrem Recht. Nur in einzelnen, besonders einfachen Fällen, z. B. bei der Aufnahme eines nahezu horizontalen Talbodens, genügt es auch, mit dem Nivellierinstrument eine hinreichende Zahl von Querprofilen aufzunehmen, welche in geeigneten Punkten des gut einnivellierten Längensprofils eines Polygonzuges gelegt werden.

Sind bereits Horizontalpläne vorhanden (z. B. in Württemberg die Flurpläne 1:2500, in Bayern die Katasterpläne 1:5000), so braucht man diese nur innerhalb des aufzunehmenden Streifens in bezug auf die Höhen zu ergänzen, was je nach der Geländebeschaffenheit durch geometrisches Flächennivellement, durch halbtrigonometrische Höhenmessung oder auch tachymetrisch erfolgen kann, während das barometrische Flächennivellement, als für diesen Zweck zu ungenau, hier nicht in Betracht kommt. Im übrigen ist ein großer Teil der allgemein zugänglichen württembergischen Flurkarten bereits mit Höhenlinien versehen, und auch in Bayern werden vom topographischen Büro in die 5000-teiligen Katasterblätter Höhenlinien eingetragen¹⁾. Etwas umständlicher liegen die Verhältnisse, wenn, wie z. B. in Preußen, die Lagepläne der Fluraufnahmen in verschiedenen Maßstäben und zusammenhanglos vorliegen. Solche Pläne muß man erst auf einen passenden, gemeinsamen Maßstab bringen und hierauf durch Aneinanderfügen längs der Gemeindegrenzen — so gut es geht — zu einem Ganzen verbinden. Die in manchen Ländern vorhandenen 10 000-teiligen Übersichtspläne der Katasteraufnahme sind, wenn es sich nicht um ganz einfache Verhältnisse handelt, in der Regel doch zu klein, um nach Ergänzung in bezug auf die Höhen für die Ermittlung der bauwürdigsten Linie eine zuverlässige Grundlage abzugeben.

In Österreich hat es sich eingebürgert, unter Beiseitelassung der früher ebenfalls benutzten Katasterblätter, für die allgemeinen Vorarbeiten vollständige Neuaufnahmen (Zahlentachymetrie) in dem großen Maßstabe 1:1000 auszuführen. Dieses Verfahren kommt allerdings ziemlich teuer; es sind aber auch für die hernach zu besprechenden speziellen Vorarbeiten keine besonderen Aufnahmen mehr vorzunehmen.

3. Zur Vornahme der ausführlichen Vorarbeiten ist zunächst die auf Grund der allgemeinen Vorarbeiten ermittelte bauwürdigste Linie aus dem Plan in die Natur zu übertragen und dauerhaft zu bezeichnen. Bei dieser Gelegenheit hat man es häufig mit der Absteckung von sehr langen Geraden zu tun, während die Bögen in der Regel noch nicht ausgesteckt werden. Längs der ins Feld übertragenen Linie findet ein genaues Längennivellement und die Aufnahme einer genügenden Zahl von kurzen Querprofilen statt. Diese Messungen, nach welchen Profile in größerem Maßstabe (1:1000 und größer) hergestellt werden, bilden nicht nur die Grundlage für die endgültige, genaue Massenberechnung, sondern auch für die genaue räumliche Anordnung der verschiedenen Kunstbauten. Für letzteren Zweck sind manchmal auch noch Detailaufnahmen in größerem Maßstabe erforderlich. Stellt sich auf Grund der letzten Berechnungen die Notwendigkeit einer kleinen Rückung der Linie heraus, so sollen davon im allgemeinen die vorgesehenen Kurven möglichst wenig berührt werden, da Bögen vielfach eingelegt werden, um die Linie zwischen nahe aneinander liegenden Hindernissen ungefährdet

¹⁾ Diese durch Höhenlinien ergänzten 5000teiligen Blätter sind allerdings nur als Grundlage für die Herstellung der topographischen Blätter in 1:25 000 gedacht.

hindurch zu führen. Liegt der Verkehrsweg nunmehr endgültig fest, so wird man auch die verschiedenen Bogenabsteckungen vornehmen und die Richtungsangaben für etwaige Tunnelabsteckungen durchführen.

4. Eine wichtige vermessungstechnische Aufgabe, die jedoch mit dem eigentlichen Bau von Verkehrswegen nichts zu tun hat, bildet die Vermarkung und Vermessung der neuen Eigentums Grenzen, sowie die Herstellung der Grunderwerbspläne. Derartige Aufnahmen müssen — wenigstens in Kulturländern — mit der größten Sorgfalt durchgeführt werden und erfolgen heute fast ausnahmslos auf trigonometrischer Grundlage nach der Koordinatenmethode. Diese Arbeiten werden, da es sich hierbei um Eigentumsfragen und um die Laufendhaltung des Grundbuchs handelt, von einer unparteiischen Instanz, nämlich durch die von Staats wegen aufgestellten Geometer bzw. Vermessungsingenieure nach besonderen Vermessungsanweisungen vorgenommen¹⁾.

¹⁾ Zum Schluß dieser Ausführungen sei noch auf die einschlägigen wertvollen Untersuchungen von *C. Koppe* hingewiesen, nämlich a) Die topographischen Grundlagen bei Eisenbahnvorarbeiten in verschiedenen Ländern, *Z.V.W.* 1910, S. 401—410 und b) Die vermessungstechnischen Grundlagen der Eisenbahnvorarbeiten in Deutschland und Österreich; *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens*, N. F. 1912, XLIX. Bd., S. 127—129, 145—147, 163—168, 181—185. Siehe ferner *Puller*, „Über Eisenbahnvorarbeiten“, *Z.V.W.* 1898, S. 153—162.

An einschlägigen amtlichen Vorschriften seien erwähnt a) in Baden: Vorschriften für die Bearbeitung genereller Eisenbahnprojekte aus dem Jahre 1885 (ihnen folgten 1888 die Mitteilungen über die Herstellung topographischer Karten mit Horizontalkurven zur Bestimmung der Zugrichtung von Eisenbahnen, Straßen und Kanälen von v. *Würthenau*); b) in Preußen insbesondere: 1. Bestimmungen für die Aufstellung der technischen Vorarbeiten zu Eisenbahnanlagen im Königreich Preußen vom Oktober 1871, 2. Vorschriften über allgemeine Vorarbeiten für Eisenbahnen (preußisch-hessische Staatsbahnen) vom 1. August 1911, 3. Vorschriften für das Vermessungswesen im Bereiche der preußisch-hessischen Eisenbahngemeinschaft vom Januar 1913.

Sachregister.

- Abbildungsgleichung, optische** 30.
Aberration, sphärische 33.
Ablesefehler an der Bussole 93.
— an der Latte 117, 118.
— am Theodolit 84.
Ablesevorrichtungen 25, 34—42, 73.
Abschiebezeug 260.
Ablotung, optische 125.
Abmarkung 162.
Absehvorrichtungen 42—51.
Absteckungsarbeiten 294—333.
Absteckung von Bauprofilen 294—296.
— von Geraden über Tage 298—303.
— von Linien gleicher Steigung 296—298.
— von Korbbögen 327—330.
— von Kreisbögen 314—324.
— einer Tunnelachse 305—310.
— von Übergangsbögen 324—326, 329, 330.
Absteckungswinkel 306.
Abzeichnen von Plänen 271—273.
Achromatisches Objektiv 47.
Achse, Alhidadenachse 74.
— Kippachse 74.
— Libellenachse 52.
— mechanische Achse 49, 50.
— optische Achse 49.
Achsenschiefe zwischen Alhidaden- u. Kreis-
Achszapfen 81. [achse 86].
Additionskonstante 114, 282.
Alhidade 72.
Aneroide 222—224.
Anreihvorrichtung von Löschner 106.
Anschluß an einen Hochpunkt 155, 156.
Anschlußplatte 180.
Anschlußlibelle 180.
Archivmeter 21.
Arkograph 320.
Astigmatismus 33.
Aufgabe der unzugänglichen Entfernung
146—148.
— — — Punkte 142—146.
Auflösungsvermögen 47.
Aufnahmearbeiten 121—255.
Aufstellungsfehler 74—76, 78.
Aufstellungsvorrichtungen 157.
Auftrag nach rechtwinkligen Koordinaten
257—260.
Ausdehnungskoeffizient 11.
Ausgleichung eines Nivellements 189, 190.
Ausgleichungsprinzip, allgemeines 20.
Ausgleichungsrechnung nach der Methode
der kleinsten Quadrate 20.
Ausrückmethode 323.
Bandmessung 104—106.
Barometrische Höhenmessung 217—229.
— Höhenstufen 225—228.
Beispiele 8—11, 13, 16—17, 83, 88, 128 bis
129, 131, 134—135, 141, 144, 152, 169,
181, 182, 190, 197, 198, 199, 201, 203—204,
226—227, 230, 235.
Beobachtungsdifferenzen 17, 18.
Beobachtungen mit fester Summe 18—20.
Beobachtungsfehler 3—6.
Beobachtungsverfahren der Winkelmessung
125—130.
Bildaufrichtung 25.
Bildhorizont 244.
Bildlinie 246.
Bildmeßkunst 243—255.
Bildwölbung 33.
Bildverzerrung 33.
Bindepunkte 162.
Blatteinteilung 256.
Blende, Bildfeldblende 43.
Bogenmaß 24, 25.
Bogenschnitt 165.
Brennpunkte 30.
Buntensche Spitze 222.
Bussole 91—94.
Bussolenaufnahme 168—171.
Bussolentachymetrie 241.
Bussolenzüge 168—170, 241.
Collinscher Hilfspunkt 145, 148.
Dioptr 42.
Dioptrische Hauptformel 30.
Direktionswinkel 122.
Doppelnivellement 196.
Distanzlatte, horizontale 113.
Distanzmesser 113—120.
Drehlatte 106, 107.
Dreiecksberechnung, Verfahren der über-
einstimmenden 132—139.
Dreiecksgleichung 132, 136.
Dreieckspunkte, Auswahl und Versicherung
der 123, 124.
Dreifußnivellierinstrument 62—65.
Durchschlagen 76.
Durchschlagsfehler 309, 310, 329.
Einrückmethode 322, 323.
Einschneidephotogrammetrie 245—252.
Einstellfehler der Magnetnadel 93.
Elementarfehler, Theorie der 5.
Einwägen 179.

- Einzelaufnahme 166, 170, 176.
 Endmaßstab 21.
 Entfernungsmessung, optische 113—120.
 Erdkrümmung und Strahlenbrechung 182, 183, 208—212.
 Ertelscher Distanzmesser 115.
 Exzentrizität des Fadenkreuzes 50.
 — des Fernrohrs 79.
 — der Linsen 49, 50.
 Exzentrizitätsfehler, periodisch veränderlicher der Alhidade 79, 80.
- Fadenkreuz** 43, 44.
Farbenabweichung 32, 33.
Federbarometer 222—224.
Fehler, durchschnittlicher 6, 7, 10.
 — grobe 3.
 — konstante 3.
 — Maximalfehler, Grenzfehler 8, 10, 156.
 — mittlere 6, 7, 14, 15, 19, 20.
 — mittl. F. d. Gewichtseinheit 11, 18.
 — mittl. F. d. Kartenhöhen 268.
 — mittl. F. einer Dreiecksseite 13.
 — mittl. F. d. Polygonwinkels 157.
 — scheinbare Beobachtungsfehler 4, 14.
 — systematische 3, 4, 8.
 — wahre 4.
 — wahrscheinliche 6, 7, 10. [14.
 — wahrscheinlichste Beobachtungsfehler 5,
 — zufällige, unvermeidliche 3, 4, 5, 8, 9.
 — Elementarfehler 5.
 — der Fadendistanzmessung 116—120.
 — der direkten Längenmessung 107—110.
 — im Polygonzug 156—162.
 — und Fehlereigenschaften 3—6.
Fehlergesetz, Gaußsches 5.
 — mittleres 12.
Fehlergrenzen im Polygonzug 156.
Fehlerfortpflanzung 11—13.
Fehlermaße 6—11.
Fehlerquadratsumme 15, 16, 20.
Fehlerreihe, Untersuchung einer 8—11, 20.
Fehlerystem, wahrscheinlichstes 20.
Fehlertheorie, Elemente der 3—20.
Fehlertilgung 4, 83, 183.
Fehlerverteilung 8, 10.
Fehlerwahrscheinlichkeit 5, 20.
Feinbewegungen 74.
Feineinwägungen von hoher Genauigkeit 203, 204.
Feinnivellement 192—204.
 — Genauigkeit im 200—204.
Feintachymetrie 240—242.
Felderteilung 66.
Feldmesseruniversal 61.
Feldzirkel 106, 107.
Fernrohr, einfaches, astronomisches 42—47.
Fernrohrachsen 49, 50.
Fernrohreinrichtung 44.
Fernrohrexzentrizität 79.
Fernrohrhelligkeit 45, 46.
Fernrohrnivellierinstrumente 60—65.
Fernrohrvergrößerung 45.
Finsterwalder, Phototheodolit von 244.
Flächenabgleichung 292, 293.
Flächenaufnahme durch Längen- und Querprofile 232.
- Flächenberechnung** 273—293.
 — Genauigkeit der 285—293.
 — Halbgraphische 285.
 — aus Naturmaßen 273—278.
 — nach dem Plan 278—285.
Flächenformel, Gaußsche 275.
Flächenmaße 23.
Flächennivellement 229.
 — geometrisches 229, 230.
Flächenreduktion auf den Meeresspiegel 277.
Fluchtstab 84, 85.
- Gaußsches Fehlergesetz** 5.
Gaußsche Flächenformel 275.
Gefäßbarometer 219—221.
Gefäßheberbarometer 221, 222.
Gefäßverbesserung 220.
Geländeaufnahme, tachymetrische 232—242.
Genauigkeit der barometrischen Höhenmessung 228, 229.
Genauigkeit, Maß der 5.
 — des Rückwärtseinschneidens 146.
 — der Vorwärtseinschneidens 141, 142.
 — der Tachymetrie 215, 216, 241, 242.
Geradenabsteckung 298—303.
Gesichtsfeld 45, 46.
Gewichte 11, 12, 18.
Gewicht einer Funktion 12.
 — einer Richtung 129.
 — eines Winkels 129.
Gewichtseinheit, mittlere Fehler der 11, 16, 18, 20.
Gewichtskoeffizient 12. 18, 20.
Gradmaß 24, 25.
- Hängeinstrumente** 99—100.
Hängelibelle 56, 217.
Hängewage 99, 100.
Halbtrigonometrische Höhenmessung 230, 231.
Hammer-Fennel, selbstreduzierendes Tachymeter von 238, 239.
Hansen-Aufgabe 146—148.
Häufigkeitszahl 6, 7, 8, 10.
Hauptformel, dioptrische 30.
Hauptpunkte der Linsen 30—32.
Hauptpunkt im Phototheodolit 244.
Haupttangente 314.
Hauptvertikale 244.
Heberbarometer 221.
Heron von Alexandrien 1.
Hilfspunkt von Collins 145, 148.
Hochpunkt, Anschluß an einen 155, 156.
Hohenner, Präzisionsdistanzmesser von 240, 241.
Hohlschraube 73.
Horizontalplan 257—266.
Horizontgleichung 132.
Horizontierung des Meßtisches 97.
Horizontalwinkelmessung 81—86.
Höhenaufnahmen 178—255.
Höhenbogen 73.
Höheneinschaltung 228.
Höhenfestpunkte 179, 180.
Höhenlinien 267.
Höhenmesser von Zugmaier 100.
Höhenmessung, barometrische 217—229.
 — trigonometrische 205—212.

- Höhenpläne 266—271.
Höhenstufen, barometrische 225—228.
Höhenverzeichnisse 204—206.
Höhenwinkelmessung 86—89.
- Indexfehler** 87, 88.
Instrumentenaufstellung 124, 125.
Instrumentenhorizont 181.
Instrumentenkunde, Elemente der 21—120.
Invarbandlatte von Zeiß 195.
Isohyphen 267.
- Kanalwage** 59, 60.
Kapillarverbesserung 220—222.
Karten 256.
Kartenhöhen, mittlere Fehler der 268.
Kegelkreuzscheibe 67—70.
Keilgleichung 35.
Keilmessung 103, 104.
Kilometerfehler, mittlere, beim Nivellieren 188, 189, 202—204.
Kippachse 74, 77—79.
Kippachsenfehler 77, 78, 96.
Kippregel 94—97.
Klemmen 73, 74.
Knickungsfehler der Alhidade 79, 80.
Knotenpunkte 30.
Kollimationsfehler 76, 77.
Koma 33.
Komparator 108.
Kompensationsmessung 4, 83.
Konstantenbestimmung am Distanzmesser 115, 116.
Kontakttachymeter von Sanguet 237, 238.
Kontrollineal, Konstruktionslineal 257.
Kontrollfläche 292.
Koordinaten, ebene 121—123.
Koordinatenaufnahme 162—167.
Koordinatengewichte 155, 161.
Koordinatennetz, Auftrag des 257—260.
Koordinatentafeln 151.
Koordinatentransformation 276.
Koordinatograph 258, 259.
Koppe, Phototheodolit von 245.
— **Plattenausmessung nach** 251, 252.
Korbbogenabsteckung 327—330.
Korrektion, orthometrische 201.
Kreis, gefährlicher 145.
Kreisbogenabsteckung 314—324.
Kreistachymeter 212, 234.
Kreisteilungsfehler 81, 84.
Kreuter, Schiebetachymeter von K. 236.
Kreuzungsfehler 56, 57, 95, 97.
Kugelabweichung 33.
Kurvenabsteckung 314—330.
Kurvennetz 314, 315.
Kurventabellen 316, 317.
- Lageplan** 256—266.
Latten, Nivellierlatten 65—67.
Lattenmeter 117, 185, 193—195.
Lattenmessung 101—104.
— **mit abstehenden Enden** 103.
— **längs gespannter Schnüre** 103.
Lattenpaar 101, 193.
Lattenschiefe 119, 185, 215, 216.
Längenmasse 21—23.
- Längenmessung** 100—120.
— **Fehler der direkten** 107—110.
— **indirekte, geometrische** 111, 112.
— **indirekte, trigonometrische** 112, 113.
— **indirekte, optische** 113—120.
Längennivellement, Liniennivellement 180—190.
Längenprofile 191, 269.
Längsverschwenkung des Zupendpunktes 156—160, 170.
Legebrett 54.
Libelle 51—58.
— **Dosenlibelle** 51, 52.
— **Doppelschifflibelle** 57.
— **Hängelibelle** 56.
— **Reitlibelle** 56.
— **Röhrenlibelle** 52—58.
— **Setzlibelle** 55.
Libellenachse 52.
Libellenfassung 55.
Libellenquadrant 100.
Limbus 72.
Linienausgleichung 203.
Linienkette 137—139.
Liniennetz 162.
Linsen 25, 29—34.
Lotabweichungskomponenten 306, 307.
Lotgabel 94, 95.
Löschner, Anreihvorrichtung von L. 106.
Lupe 35, 36.
- Magnetnadel, Einstellfehler der** 93.
Markenrahmen 243.
Maßeinheiten, ältere und fremde 22, 23.
Maßstab, zweckmäßigster 268.
Maßstabgleichung 22.
Maßstabverbesserung, absolute 22.
Meereshorizont, Reduktion auf den 104.
Meßbandzüge 241.
Meßfernrohr 42—51.
Meßplatten 101.
Meßkeil 34, 35.
Meßrad 106.
Meßtisch 94—98.
Meßtischaufnahme 171—178.
Meßtischphotogrammetrie 245—252.
Meßtischtachymetrie 241.
Meßungshorizont, Reduktion auf den 102, 103.
Meter, Archivmeter 21.
— **internationales** 21, 22.
Methode der kleinsten Quadrate 20.
Mikrometerschraube 34.
Mikroskope 33—42.
Mittel, allgemeines arithmetisches 15—17.
— **einfaches arithmetisches** 13.
Mittelpunkt, optischer 29, 30, 31.
Multiplikationskonstante 114, 281.
- Neigungen** 122.
Neigungsfehler der Libelle 55—58.
Neigungsmesser 98—100.
Netzauftrag 257—260.
Netzeinschaltung, trigonometrische 131—139.
Nivellement durch zweifache Höhenwinkel-
messung 207, 208.

- Nivellement, tachymetrisches 212—216.
 — geometrisches, 178, 179—204.
 — mit Aughöhen 179.
 Nivellementsausgleichung 189, 190, 203.
 Nivellierfehler 182—190.
 Nivelliermethoden 197—201.
 Nivellierinstrumente 58—67, 195, 200.
 — von Wild-Zeiß 64, 200.
 Nivellierlatten 65—67, 193—196.
 Nonius 37, 38.
 Noniusmikroskop 41.
 Normalhöhenpunkt 178.
 Normalnullpunkt 178.
- Objektiv** 43.
 — achromatisches 47.
 Okular 43, 47, 48.
 Orientierung, äußere und innere O. des Photo-
 theodolits 244.
 — des Meßtisches 97, 98.
 — des Tachymeters 234, 235.
 Orthograph 260, 261.
 Orthometrische Korrektion 201.
- Pantograph** 271, 272.
 Papieränderung 262—266, 278, 279, 285.
 Parallaxe 44.
 Parallaxenphotogrammetrie 252—255.
 Parallelenabsteckung 304.
 Parallelmethode 167.
 Pedometer 107.
 Pendelnivellierinstrument 58, 59.
 Photogrammetrie 243—255.
 Phototheodolit 243—245.
 Plan, Planherstellung 256—273.
 Plan, kotierter 266.
 Planimeter 279—285.
 — Bestimmung der Pl.-Konstanten 283, 284.
 Planimetergleichung 281.
 Planvielfältigung 273.
 Platte, planparallele 28, 29.
 Polygonkette 135, 136.
 Polygonwinkel, mittlere Fehler der 157.
 Polygonzug 148—162.
 — geschlossener 149, 153.
 — offener 149, 150—152.
 — Fehlerfragen im 156—162.
 Praetorius 2, 94.
 Präzisionsdistanzmesser von Hohennher 240,
 241.
 Präzisionslängenmessungen 105, 106.
 Prismen 25—29.
 Prisma, entfernungsmessendes 111.
 Prismenkreuz 71.
 Prismentrommel 90.
 Profilaufnahme durch Staffelmessung 232.
 Profilpläne 269, 270.
 Projektionstachymeter 236.
 Punkt, annallatischer 114.
 Punktbestimmung, trigonometrische
 123—148.
 Punktschaltung, trigonometrische
 139—148.
 Punktfehler, mittlere 141, 142, 146.
 Punktversicherung 124, 149.
- Quecksilberbarometer** 219—222.
Querprofile 191, 270.
Querverschwenkung des Zugsendes
 156—160, 170.
- Raum, toter** 31.
 Rayonieren mit dem Theodolit 167.
 Reduktion auf den Meereshorizont 104.
 — auf den Messungshorizont 102, 103.
 Refraktion, terrestrische 209.
 — im Nivellement 186, 211.
 Refraktionskoeffizient 210, 211.
 Refraktionswinkel 209.
 Reichenbachscher Distanzmesser 114.
 Repetitionswinkelmessung 85, 86, 127.
 Reziprokendreieck 146.
 Richtmarken 308.
 Richtungen, reduzierte R. 127.
 Richtungsbeobachtungen 125, 127—130.
 Richtungsgewicht 129.
 Richtungswinkel 122.
 Richtungsübertragungen 304—305.
 Richtungszenrierung 130, 131.
 Rückwärtseinschneiden 142—146.
 Run 41.
- Sackpunkt** 164.
 Sanguet, Kontakttachymeter von 237, 238.
 Schachtlotung 311—313.
 Schätzquadrat 279.
 Scheiteltangente 314, 315.
 Schichtenplan 266—268.
 Schiebetachymeter von Kreuter 236.
 Schleifenschlußfehler 203.
 Schmidt, M., Schachtlotverfahren nach Sch.
 312, 313.
 — Variometer von Sch. 194.
 Schnurdreiecke 72.
 Schnurzug 206, 207.
 Schraffenmanier 270.
 Schraubendistanzmesser 239, 240.
 Schraubenmikroskop 40, 41.
 Schrägmessung 102, 103.
 Schritzzähler 107.
 Schwereverbesserung 220.
 Seibtsches Nivellierverfahren 199.
 Seitengleichung, Sinusgleichung 133, 136.
 Seitenvertauschung 25.
 Seitwärtsabschneiden 141, 171, 172.
 Setzbogen 98, 99.
 Setzinstrumente 98, 99.
 Sexagesimalteilung 24, 25.
 Siedethermometer 224.
 Signalisierung 125.
 Skalenmikroskop 39, 40.
 Spiegel 25.
 Spiegelkreuz 70.
 Spielpunkt der Libelle 76.
 Staffelmessung 102, 216, 217.
 Stahlbandmessung 104—106.
 Stammzahl 213, 214.
 Standbarometer 221.
 Standdifferenz 202.
 Standlinienaufnahme 167, 274, 287.
 Standverbesserung 221, 223.
 Standwinkel 311.
 Stationieren mit dem Meßtisch 171—176.

- Stationsgleichung 132.
 Stative 81, 82.
 Stereoautograph 254.
 Stereokomparator 252, 253.
 Stereophotogrammetrie 252—255.
 Storhschnabel 271, 272.
 Strahlenbrechung und Erdkrümmung 182,
 183, 208—212.
 Strahlenzieher 261, 262.
 Streckenzug 148.
 Strichmaßstab 22.
 Strichmikroskop 38, 39.
 Strichteilung 66.
- Tabellen** 8, 9, 10, 16, 17, 48, 67, 83, 88,
 109, 123, 128, 131, 134, 141, 144, 152,
 156, 169, 181, 182, 190, 197, 198, 199,
 201, 204, 220, 225, 226, 227, 230, 235,
 292, 310.
- Tachymeter** 234—240.
 — Kreist. 234.
 — von Hammer-Fennel 238, 239.
 — Kreuter-T. 236, 237.
 — Sanguet-T. 237, 238.
 — selbstreduzierende 236—239.
Tachymetertafeln 213.
Tachymetrie 232—242.
 — topographische 242.
 — Feint. 240, 242.
- Tachymetrisches Nivellement** 212—216.
Teilungsuntersuchung 80, 194, 195.
Teilungsverbesserung 223.
Teilwert der Libelle 53.
Temperaturverbesserung 22, 219, 223.
Terrestrische Refraktion 209.
Theodolit 72—89.
Tilgungsmessung 4, 83.
Transversalen 36, 37.
Trapezformel 275.
Trigonometrische Höhenmessung 205—212.
Turmhöhenbestimmung 205, 206.
Tunnelabsteckung 305—310.
- Übergangskurven** 324—326, 329, 330.
Umkehrprisma 27, 28.
Umlegen 76.
Universal, Feldmesser 61.
 — astronomisches 89.
Universalwage 99.
Urmaß 22, 23.
- Variometer** von M. Schmidt 194.
Verbesserung 4.
- Vergrößerung des Fernrohres** 45.
Vergrößerungsnetz 307.
Verlängerung einer Geraden 300, 301.
Vertikalkreis 73, 87, 89.
Vervielfältigung von Plänen 271—273.
Verzeichnung 33.
Viertelsmethode 323, 324.
Vogler, Nivellierapparat von V. 195.
Vorlegemaß 103.
Vorwärtseinschneiden 139—142, 171, 172.
- Wahrscheinlichkeit** 5, 20.
Wahrscheinlichkeitszahlen 7, 8.
Wendelatte 66.
Wechsellpunkt 181, 207, 208.
Widerspruch 18, 19.
Winkel, Lage- oder Positionsw. 72.
 — Höhenw., Zenitw. 72, 86.
 — Horizontalw. 72, 83.
Winkelgewicht 129.
Winkelfehler 84, 86, 139.
Winkelköpfe 67.
Winkelkreuz 67.
Winkelmaße 24, 25.
Winkelmessung, reine W. 125, 126.
Winkelprismen 70, 71.
Winkelspiegel 69, 70.
Winkeltrommel 89, 90.
Winkelzug 148, 169.
- Zahlenmethode** 162—167.
Zahnkreistheodolit 73.
Zapfennivellierinstrument 61.
Zeiger, einfacher Z. 35.
Zeigerfehler 87, 88, 97.
Zeiß, Invarbandlatte von Z. 195.
Zenitabstand 86, 210.
Zentesimalteilung 24, 25.
Zentralsystem 132—135.
Zentrieren des Fadenkreuzes 50.
 — des Meßtisches 97, 98.
 — der Richtungen 130, 131.
Zentrierteller 313.
Zielachse 49, 74.
Zielachsenfehler 76, 77, 95, 96.
Zielgenauigkeit 42, 50.
Zieltafel 84.
Zielvorrichtungen 42—51.
Zielweite, günstigste Zielw. beim Nivellieren
 187.
Zielzeichen 84.
Zugmaier, Höhenmesser von Z. 100.
Zugverknötung 149, 153—155, 161, 162.

Die Aufzeichnung des Geländes beim Krokieren für geographische und technische Zwecke. Von **P. Kahle**. Mit 28 Abbildungen und 4 farbigen Tafeln. 1896. Preis M. 2,40.

Feldmessen und Nivellieren. Elementare Anleitung für die Schule und zum Selbstunterricht. Von Ober-Geometer **Fr. Heer**. Mit 57 Figuren. 1910. (C. W. Kreidel's Verlag in Berlin W 9). Preis M. 1,—.

Tafeln und Formeln zur Astronomie und Geodäsie für die Hand des Forschungsreisenden, Geographen, Astronomen und Geodäten. Von Prof. Dr. **C. Wirtz**, Straßburg i E. 1918. Gebunden Preis M. 18,—.

Einführung in die Markscheidkunde mit besonderer Berücksichtigung des Steinkohlenbergbaues. Von Dr. **L. Mintrop**, Bochum. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 191 Textfiguren und 5 mehrfarbigen Tafeln. Unveränderter Neudruck. 1920. Gebunden Preis M. 42,—.

Beobachtungsbuch für markscheiderische Messungen. Von Dr. **L. Mintrop**, Bochum. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 14 Figuren und 11 ausführlichen Messungsbeispielen nebst Erläuterungen. 1916. Gebunden Preis M. 2,—.

Zahlentafeln der Seigerteufen und Sohlen bezw. zur Berechnung der Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes aus der Hypothense und einem Winkel. Nebst einem Anhang für die Verwandlung von Stunden in Grade. Von Markscheider Dr. **L. Mintrop**, Bochum. Fünfte Auflage. 1921. Preis M. 6,—.

Mathematische Tafeln für Markscheider und Bergingenieure, sowie zum Gebrauche für Bergschulen. Von **E. Lüling**. Mit Textfiguren. Fünfte Auflage. 1902. Gebunden Preis M. 6,—.

Taschenbuch für Bauingenieure. Unter Mitarbeit zahlreicher Fachleute herausgegeben von Geh. Hofrat Prof. Dr.-Ing. E. h. **M. Foerster**, Dresden. Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 3193 Textfiguren. In zwei Teilen, 1921. Gebunden Preis M. 160,—.

Die Grundzüge des Eisenbetonbaues. Von Dr.-Ing. E. h. M. Foerster, Geheimer Hofrat, ord. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 170 Textabbildungen. 1921.
Gebunden Preis M. 38,—.

Repetitorium für den Hochbau. Für den Gebrauch an Technischen Hochschulen und in der Praxis, Von Geheimem Hofrat Professor Dr.-Ing. E. h. Max Foerster, Dresden.

Erstes Heft. **Graphostatik und Festigkeitslehre.** Mit 146 Textfiguren. 1919.
Preis M. 12,— (einschl. Verlagszuschlag).

Zweites Heft. **Abriß der Statik der Hochbaukonstruktionen.** Mit 157 Textfiguren. 1920.
Preis M. 12,— (einschl. Verlagszuschlag).

Drittes Heft. **Grundzüge der Eisenkonstruktionen des Hochbaues.** Mit 283 Textfiguren. 1920.
Preis M. 20,— (einschl. Verlagszuschlag).

Eisen im Hochbau. Ein Taschenbuch mit Zeichnungen, Zusammenstellungen und Angaben über die Verwendung von Eisen im Hochbau. Herausgegeben vom Stahlwerks-Verband A.-G., Düsseldorf. Fünfte, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit zahlreichen Textfiguren und 7 Tafeln. 1920.
Gebunden Preis M. 20,—

Ausgeführte Eisenbetonkonstruktionen. Neunundzwanzig Beispiele aus der Praxis. Von Dipl.-Ing. O. Hausen, Hanau. Mit 125 Textfiguren. 1919.
Preis M. 8,—; gebunden M. 9.60.

Vorlesungen über Eisenbeton. Von Dr.-Ing. E. Probst, ord. Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.
Erster Band: **Allgemeine Grundlagen. — Theorie und Versuchsforschung. — Grundlagen für die statische Berechnung. — Statisch unbestimmte Träger im Lichte der Versuche.** Mit 171 Textfiguren. 1916. Gebunden Preis M. 18,—.
Zweiter Band: **Anwendung des Eisenbetons.** Erscheint Ende 1921.

Tabellen zur Berechnung von einfach und doppelt armierten Balken und Platten aus Eisenbeton, mit Hilfstafeln für Plattenbalken. Aufgestellt von Ing. Ernst Geyer. Mit 4 Textfiguren. 1921.
Preis M. 6,—.

Die Eisenkonstruktionen. Ein Lehrbuch für Schule und Zeichentisch nebst einem Anhang mit Zahlentafeln zum Gebrauch beim Berechnen und Entwerfen eiserner Bauwerke. Von Dipl.-Ing. Prof. L. Geusen, Oberlehrer in Dortmund. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 505 Figuren im Text und auf 2 farbigen Tafeln. 1918.
Gebunden Preis M. 18,—.

Die Knickfestigkeit. Von Privatdozent Dr.-Ing. Rudolf Mayer, Karlsruhe. Mit 280 Textabbildungen und 87 Tabellen. 1921. Preis M. 120,— gebunden M. 130,—.

Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau nebst einer Tafel der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Von Dr.-Ing. **K. Hayashi**, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki (Japan). Mit 150 Textfiguren. 1921. Preis M. 40,—; gebunden M. 50,—.

Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes. Von Ing. **Fr. Bleich**, Wien. Mit 108 Textfiguren. 1918. Preis M. 12,—.

Bau und Berechnung gewölbter Brücken und ihrer Lehrgerüste. Drei Beispiele von der badischen Murgtalbahn. Von Bauinspektor Dr.-Ing. **Ernst Gaber**. Mit 56 Textabbildungen. 1914. Preis M. 6,—; gebunden M. 7,—.

Mehrteilige Rahmen. Verfahren zur einfachen Berechnung von mehrstieligen, mehrstöckigen und mehrteiligen geschlossenen Rahmen (Rahmenbalkenträgern). Von Ing. **Gustav Spiegel**. Mit 107 Textabbildungen. 1920. Preis M. 18,—.

Berechnung von Rahmenkonstruktionen und statisch unbestimmten Systemen des Eisen- und Eisenbetonbaues. Von Ing. **P. Ernst Glaser**. Mit 112 Textabbildungen. 1919. Preis M. 9,—.

Theorie und Berechnung der statisch unbestimmten Tragwerke. Elementares Lehrbuch. Von **H. Buchholz**. Mit 303 Textabbildungen. 1921. Preis M. 62,—; gebunden M. 68,—.

Kompendium der Statik der Baukonstruktionen. Von Dr.-Ing. **I. Pirlet**, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Aachen. In zwei Bänden. Zuerst erschien: Zweiter Band: **Die statisch unbestimmten Systeme.**
I. Teil: **Die allgemeinen Grundlagen zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme.** Die Untersuchung elastischer Formänderungen. Die Elastizitätsgleichungen und deren Auflösung. Mit 136 Textfiguren. 1921. Preis M. 40,—; gebunden M. 46,—.
II. Teil: **Anwendungen auf einfachere Aufgaben.** Gerade Träger mit Endeinspannungen und mehr als zwei Stützen. Der beiderseits eingespannte Rahmen. Das Gewölbe. Armierte Balken u. dergl. Mit etwa 160 Textfiguren. Erscheint Ende 1921.

Flugzeugstatik. Von Dipl.-Ing. **Aloys van Gries**. Mit 207 Textfiguren. 1921. Preis M. 80,—; gebunden M. 86,—.

Praktische Winke zum Studium der Statik und zur Anwendung ihrer Gesetze. Ein Handbuch für Studierende und praktisch tätige Ingenieure. Von **Robert Otzen**, Geh. Regierungsrat und Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Dritte Auflage. Mit 125 Textfiguren. (C. W. Kreidel's Verlag in Berlin W 9). 1921. Preis M. 20,—; gebunden M. 24,—.

Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Von Privatdozent Dr. **Paul Funk**, Privatdozent an der deutschen Universität und an der Technischen Hochschule in Prag. Mit 24 Textabbildungen. 1920. Preis M. 10,—.

Kalkulation und Zwischenkalkulation im Großbaubetriebe. Gedanken über die Erfassung des Wertes kalkulativer Arbeit und deren Zusammenhänge. Von **Rudolf Kundigraber**. Mit 4 Abbildungen. 1920. Preis M. 6,40.

Freitragende Holzbauten. Vorträge von Regierungsbaumeister F. Geissler, Dr.-Ing. H. Gesteschi, Ing. W. Greim, Direktor O. Hetzer, Regierungsbaumeister Dr.-Ing. A. Jackson, Architekt O. Kaper, Dr.-Ing. H. Lewe, Kommerzienrat S. Michalski, Baurat Dr.-Ing. A. Nanning, Dr. phil. R. Plönnis, Ingenieur J. Stamer, Oberingenieur H. Storck, Oberingenieur S. Voss. Mit einem Geleitwort von Baurat Dr.-Ing. Weiss, ordentl. Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin. Zusammengestellt und ergänzt von **C. Kersten**. Mit 335 Textfiguren. 1921. Gebunden Preis M. 74,—.

Die Herstellung der feuerfesten Baustoffe. Von **Friedrich Wernicke**. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 10 Textabbildungen und 4 Tafeln. 1921. Gebunden Preis M. 54,—.

Grundbegriffe des Städtebaues. Von Prof. **K. A. Hoepfner**, o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe in B. Erster Band: Mit 37 Abbildungen sowie 8 Tafeln im Text. 1921. Preis M. 45,—; gebunden M. 51,—.

Werkstattbau. Anordnung, Gestaltung und Einrichtung von Werkanlagen nach Maßgabe der Betriebserfordernisse. Von Dr.-Ing. **Carl Theodor Buff**. Mit 207 Textabbildungen und einer Tafel. 1921. Gebunden Preis M. 125,—.

Der Thermosbau, Konstruktionsgrundlagen und ihre Anwendungen. Von Ing. **Hans Pohlmann**, Hamburg. Mit 91 Textfiguren. 1921. Preis M. 16,—; gebunden M. 20,—.

Der Bauingenieur. Zeitschrift für das gesamte Bauwesen. Organ des Deutschen Eisenbau-Verbandes und des Deutschen Beton-Vereins. Herausgegeben von Professor Dr.-Ing. E. h. **M. Foerster** in Dresden, Professor Dr.-Ing. **W. Gehler** in Dresden, Professor Dr.-Ing. **E. Probst** in Karlsruhe, Dr.-Ing. **H. Fischmann** in Berlin und Dr.-Ing. **W. Petry** in Oberkassel. Erscheint zweimal monatlich. Vierteljährlich Preis M. 14,—.

Abkürzungen.

Z.V.W. . . . Zeitschrift für Vermessungswesen,
Z.B.G.V. . . . Zeitschrift des bayerischen Geometervereins,
Z.V.H.B.V. . . . Zeitschrift des Vereins der höheren bayerischen Vermessungsbeamten,
E.M.B.P.N., H. 1 (H. 2) . . . Ergänzungsmessungen zum bayerischen Präzisionsnivelliment,
Heft 1, München 1908 (Heft 2, München 1919).
Schöne, Heron *Schöne, Hermann*, Herons von Alexandria Vermessungslehre und
Dioptra, Leipzig 1903.

Berichtigungen.

Seite 46, Zeile 3 von oben lies Innenrand statt Innenwand,
„ 76, „ 1 „ „ „ v_y statt v_u ,
„ 113, in Abb. 168a gehören zu den beiden Marken die Bezeichnungen M_1 und M_2 ,
„ 116, Zeile 5 von unten lies m_c statt m_t ,
„ 256, Textzeile 10, 11 von oben lies ausgedehnter statt ausgebehnter.
