

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

Я. В. ЗЕЛЬДОВИЧ

**ТЕОРИЯ
УДАРНЫХ ВОЛН
И ВВЕДЕНИЕ
В ГАЗОДИНАМИКУ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР • 1946

А К А Д Е М И Я Н А У К С О Ю З А С С Р

И Н С Т И Т У Т Х И М И Ч Е С К О Й Ф И З И К И

Я. Б. З Е Л Ъ Д О В И Ч

Т Е О Р И Я
У Д А Р Н Ы Х В О Л Н
И В В Е Д Е Н И Е
В Г А З О Д И Н А М И К У

Т Е Л Ъ С Т В О А К А Д Е М И И Н А У К С С С Р

М О С К В А

1946

Л Е Н И Н Г Р А Д

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
АКАДЕМИК Н. Н. СЕМЕНОВ

Введение

Газодинамика есть составная часть гидродинамики — общей науки о движении текучих тел, жидкостей и газов.

Отличительной особенностью газодинамики является необходимость учета сжимаемости вещества. В то время, как в обычных условиях жидкости можно считать несжимаемыми, газы уже при небольшом изменении давления значительно меняют свой объем.

Очевидно, что для газов необходимо применять специфические формулы и законы газодинамики лишь постольку, поскольку мы имеем дело с большими перепадами давления. При небольших скоростях движение газа обычно можно рассматривать так же, как рассматривается движение жидкости, пренебрегая изменением объема, пренебрегая сжимаемостью.

В зависимости от условий, порядок величины разностей давления, возникающих в потоке, меняется в пределах от величины $\frac{\rho u^2}{2}$ — величины динамического напора, согласно формуле Бернулли, до величины $\rho u c$, где c есть скорость звука, u — скорость движения и ρ — плотность газа. Между тем давление газа приблизительно равно ρc^2 .

Из сопоставления этих выражений видно, что во всяком случае при скоростях, меньших скорости звука, разности давления малы по сравнению с самим давлением, и соответственно этому, как правило, можно пренебрегать и сжимаемостью вещества.

Этим определяется предмет газодинамики.

Газодинамика есть наука о движениях при больших перепадах давлений и при больших скоростях, причем масштабом скорости является скорость звука.

В теории подобия принято следующее обозначение отношения скорости движения к скорости звука:

$$\frac{u}{c} = \text{Ва},$$

где Ва так называемый критерий Барстоу².

Газодинамика изучает движения при значениях $Ва$, сравнимых с единицей. При $Ва \ll 1$ в пределе общие уравнения газодинамики переходят в уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости.

В дальнейшем основные законы гидродинамики несжимаемой жидкости мы будем считать известными, не останавливаясь на выводе соответствующих формул.

Учет сжимаемости означает необходимость учета изменения состояния вещества. Если в гидродинамике при действии диссипативных сил (вязкости) и происходит выделение тепла в жидкости и изменение температуры жидкости, то оно не ведет к изменению объема; изменения внутри жидкости не оказывают обратного влияния на самый характер потока и мало существенны для рассматриваемых в гидродинамике явлений.

В газодинамике нам придется все время иметь дело с изменением состояния вещества в самом потоке. Эта особенность газовой динамики приводит к необходимости термодинамической трактовки всех явлений, приводит к тому, что для газовой динамики термодинамика совершенно необходима.

В предлагаемой книге мы будем рассматривать только специфические явления газовой динамики, т. е. такие явления, которые не имеют аналогии в механике несжимаемой жидкости.

Мы не будем останавливаться на тех областях, где газовая динамика и учет сжимаемости дают лишь небольшие поправки к обычным формулам гидродинамики несжимаемой жидкости. В предлагаемой книге основной упор будет взят не на расчетные методы газовой динамики, методы численного интегрирования сложных двух- и трехмерных течений, а, напротив, будут с особой тщательностью установлены принципиальные основы газовой динамики, предельные законы и методы решения простейших задач.

Мы будем двигаться в этой работе не от общего к частному, а от простого к сложному. Вместо того, чтобы написать сперва уравнения газовой динамики в самом общем виде, с учетом всех факторов, искать общих решений и упрощением этих общих решений переходить к частным решениям простых случаев, мы будем решать простые, элементарные задачи, описывающие отдельные части явлений, с тем, чтобы потом из этих отдельных частных решений конструировать решения более сложных задач.

Можно отметить следующие основные области применения газодинамики.

Первая, наиболее известная и наиболее разработанная в настоящее время область включает в себе вопросы обтекания тел, движущихся с большой скоростью. Сюда прежде всего относятся вопросы о поправках в обычных формулах сопротивления и подъемной силы движущихся тел при скорости, меньшей скорости звука, т. е. о поправках, которые суще-

ственны уже для авиации сегодняшнего дня. Далее радикально меняется вся картина обтекания движущихся тел, когда мы переходим к скорости, большей скорости звука. С такой скоростью мы имеем дело во внешней баллистике, т. е. в науке о движении снарядов, а также при рассмотрении движения ракетных самолетов ближайшего будущего.

Эта область применения газодинамики к задаче о движении тела в газе со скоростью порядка скорости звука или со скоростью, превышающей скорость звука, наиболее подробно освещена в существующих учебниках, и на ней мы будем останавливаться меньше всего.

Второй важнейшей областью является задача о движении газа в каналах — со шлах и трубах. При этом снова газодинамика необходима в том случае, если скорость газа достигает или превышает скорость звука. В этой области характер течения, и зависимость скорости и расхода от перепада давления, претерпевают качественные изменения. Данный круг вопросов важен для теории турбин, реактивных снарядов и двигателей.

Своеобразной областью газодинамики, основанной на учете сжимаемости движущейся среды является учение о звуке — акустика. Скорости движения среды и амплитуда изменения давления под действием звука весьма малы. Тем не менее, учет сжимаемости оказывается необходимым при рассмотрении первых, начальных стадий любого движения и при рассмотрении быстроизменяющихся, в частности — периодических движений.

Ударные волны представляют особенный интерес с целого ряда точек зрения и будут центральным вопросом предлагаемой книги. С одной стороны там, где попытки интегрирования уравнений без введения разрывов, (т. е. ударных волн), приводят к тем или иным парадоксам и к невозможности решения этих уравнений, теория ударных волн разрешает парадоксы и позволяет сконструировать режим движения при любых условиях.

С другой стороны, ударные волны сами представляют собой парадоксальное явление. Они парадоксальны в том смысле, что, не вводя никаких предположений о диссипативных силах — о вязкости и теплопроводности, мы из элементарных соображений получаем законы ударных волн, в которых заключено возрастание энтропии, т. е. законы, в которых заключена необратимость процессов, происходящих в ударной волне.

С этой точки зрения ударные волны представляют значительный логический интерес, даже безотносительно к их применению.

Замечательно, что все основные соотношения и основные принципиальные точки зрения были установлены из рассмотрения общих уравнений газовой динамики более 50 лет тому назад, т. е. в то время, когда не было еще никакого опытного

материала, до того, как ударная волна была изучена экспериментаторами.

По образному выражению Эмиля Жуге, „ударная волна впервые появилась на кончике пера теоретиков“.

Приходится удивляться глубине анализа и мощи теоретического проникновения великих умов прошлого века, прежде всего немецкого математика Бернгарда Римана, английского физика Ренкина, французского артиллериста Гюгонно, с разных сторон и независимо друг от друга создавших теорию ударных волн, не потерявшую значения до настоящего времени.

Наконец, повышенный интерес к ударным волнам в последние годы связан с воп. осом о разрушительном действии взрыва и о распространении взрыва по взрывчатому (способному к химической реакции) веществу. Необходимо точное знание состояния вещества, сжатого ударной волной, знание скорости сжатия и тому подобных свойств волны. Наша книга является введением в теорию взрыва.

Основная часть книги (§§ I—XVII и XIX) была дана в печать в начале 1941 г. Выпуск ее задержался по условиям военного времени. В 1943—44 г. были добавлены: § XVIII—теория реактивной силы и §§ XX—XXIV, в которых подробно рассмотрены следующие за взрывом явления расширения продуктов взрыва, возникновения и распространения воздушной взрывной волны, определяющие разрушительное действие взрыва.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. Н. Н. Андрееву, Б. П. Константинову, Л. Д. Ландау, М. А. Садовскому, О. М. Тодесу и Ю. Д. Харитону за просмотр рукописи и ценные указания.

Литература: популярное введение в гидродинамику [22];¹ некоторые общие руководства по газодинамике [4, 23, 24, 27, 35, 39, 106].

¹ Цифры в квадратных скобках соответствуют порядковым номерам Литературы.

§ 1. Уравнения газовой динамики

Составим уравнения газовой динамики, пренебрегая действием массовых сил (силы тяжести), а также (см. ниже) действием диссипативных сил, т. е. вязкости и теплопроводности. Для простоты запишем уравнения для одномерного случая; обобщение на двух- и трехмерные случаи не составит труда.

Начнем с уравнения неразрывности, т. е. уравнения, выражающего закон сохранения вещества.

Обозначая, как обычно, через $\frac{d}{dt}$ субстанциальную производную по времени, т. е. производную, взятую для данной частицы вдоль ее пути, и через $\frac{\partial}{\partial t}$ локальную производную по времени, характеризующую изменение рассматриваемых величин в данной точке пространства, мы напомним:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1-1)$$

или иначе

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial\rho}{\partial x}. \quad (1-2)$$

Обе формулы, конечно, совершенно эквивалентны. Для вывода первой мы следим за движением слоя вещества, заключающего постоянное количество вещества. Вторую мы выводим, рассматривая изменение плотности в данной точке пространства.

Уравнение движения не отличается от уравнения движения для несжимаемых жидкостей. Оно гласит:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1-3)$$

Наконец, третье уравнение является существенно новым и представляет характерную особенность газовой динамики. Это есть уравнение изменения состояния.

В гидромеханике несжимаемой жидкости мы к первым двум уравнениям добавляли уравнение несжимаемости $\rho = \text{const}$. Как найти связь между плотностью и давлением в сжимаемой жидкости?

Плотность, давление и температура жидкости связаны т. н. уравнением состояния. Зная теплоемкость, мы свяжем температуру и энергию. Для того чтобы определить связь плотности и давления, необходимо составить еще одно уравнение — уравнение энергии движущейся жидкости. При отсутствии диссипативных сил — вязкости и теплопроводности — мы имеем:

$$dE = -p dv; \quad \frac{dE}{dt} = -p \frac{dv}{dt} = -p \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad (1-4)^1$$

где v — удельный объем, величина обратная плотности ρ .

Энергия того или иного рассматриваемого элемента вещества может изменяться лишь за счет работы сжатия, которую производят над ним окружающие объемы жидкости (газа).

Вспоминая основную формулу термодинамики

$$dE = T dS - p dv, \quad (1-5)^2$$

из уравнения энергии мы легко получим для рассматриваемого случая отсутствия диссипативных сил естественный вывод:

$$T dS = 0; \quad \frac{dS}{dt} = 0. \quad (1-6)$$

Другими словами, состояние вещества меняется по адиабате, меняется при постоянной энтропии.

Для идеального газа постоянной теплоемкости, как известно, уравнение адиабаты гласит:

$$p = A \rho^k, \quad (1-7)$$

где $k = \frac{c_p}{c_v}$, $k = \text{const}$. Оно может быть найдено и без рассмотрения энтропии и исторически впервые было найдено Пуассоном в 1818 г. именно так, интегрированием уравнения

¹ Уравнение (1-4) относится к определенной совокупности молекул жидкости (лагранжево представление). В эйлеровом представлении для определенного элемента объема, фиксированного в пространстве, уравнение энергии имеет более сложный вид.

² Уравнение (1-5) применяется нами к веществу, состояние которого вполне определяется заданием удельного объема v и удельной энтропии S . Оно неприменимо например, к системе, не находящейся в химическом равновесии, в которой во время движения происходит необратимая химическая реакция.

(I-4), в которое для идеального газа подставим выражение закона Клапейрона:

$$E = c_v T = \frac{c_v}{R} RT = \frac{c_v}{R} p v; \quad dE = \frac{c_v}{R} p dv + \frac{c_v}{R} v dp. \quad (I-8)$$

Каковы условия применимости написанных выше уравнений,¹ в которых не учтено действие вязкости и теплопроводности? Прежде всего очевидно, что для применимости этих уравнений необходимо, чтобы были велики число Рейнольдса и число Пекле. Как известно из теории подобия и гидродинамики несжимаемой жидкости, число Рейнольдса характеризует отношение инерционных сил к силам вязкостным. Число Пекле играет аналогичную роль, характеризуя отношение молярного переноса тепла движущейся жидкостью к потокам тепла, переносимым молекулярной теплопроводностью.

Таким образом, большое значение числа Рейнольдса означает возможность пренебрежения силами вязкости в уравнениях газовой динамики. Большое значение числа Пекле означает возможность пренебрежения теплопроводностью, означает, что вдоль линии тока движение происходит практически адиабатически.

Из молекулярно-кинетической теории следует, что для газов отношение теплопроводности к объемной теплоемкости (т. н. температуропроводность) приблизительно равно отношению вязкости к плотности (т. н. кинематической вязкости). Поэтому для потока газа число Рейнольдса весьма близко к числу Пекле и оба условия (большое число Рейнольдса и большое число Пекле) совпадают.

Следуя Карману, мы можем дать иную формулировку условию большого числа Рейнольдса. Воспользуемся молекулярным выражением коэффициента вязкости:

$$\eta = \nu \rho = \frac{1}{3} \rho c' l, \quad (I-9)$$

где l — длина свободного пробега молекул в газе, c' — скорость молекул, величина, равная по порядку величины скорости звука, ν — кинематическая вязкость (см²/сек).

Подставляя выражение для вязкости в формулу числа Рейнольдса, получим:

$$\text{Re} = \frac{U \rho d}{\eta} = \frac{U d}{\nu} = 3 \frac{U d}{c' l} \approx \text{Ba} \cdot \frac{d}{l} \quad (I-10)$$

где d — характеристический размер, U — характеристическая скорость рассматриваемого движения.

¹ Общие уравнения газодинамики с учетом вязкости и теплопроводности вынесены в приложение в конце настоящего параграфа, которое читатель может пропустить без ущерба для понимания дальнейшего, приняв на веру утверждения об условиях применимости уравнений (I-1) — (I-6).

Отношение скорости движения к скорости звука носят название критерия Барстоу

$$\frac{u}{c} = \text{Ba}. \quad (\text{I-11})$$

В интересующей нас области газовой динамики, где скорость движения порядка скорости звука $\text{Ba} \sim 1$, число Рейнольдса оказывается по порядку величин равным отношению размеров системы d к длине пробега молекул l .

Высказанное выше условие $\text{Re} \gg 1$, в котором возможно пренебрежение диссипативными силами (вязкостью и теплопроводностью), приводит к требованию, чтобы размеры системы были значительно больше длины свободного пробега молекул.

Однако, как мы увидим дальше, выполнение этого условия, т. е. большой размер системы, в действительности не всегда обеспечивает малость диссипативных сил и возможность рассмотрения только адиабатических процессов. Как мы увидим дальше, при наличии ударных волн в потоке возникают чрезвычайно большие градиенты всех рассматриваемых величин, причем величина этих градиентов уже не зависит от размеров системы и не падает с увеличением размеров системы. В этих случаях, как бы велико ни было число Рейнольдса, нам придется считаться с возможностью изменения энтропий.

Однако, несмотря на то, что и в этих случаях принципиально возможность роста энтропии связана с диссипативными силами, все наблюдаемые макроскопические свойства потока, в частности численное значение прироста энтропии в ударной волне, от величины вязкости и теплопроводности не зависят (автономельны относительно теплопроводности и вязкости); законы изменения состояния в ударной волне могут быть получены без рассмотрения структуры фронта ее, из одних уравнений сохранения материи, количества движения и энергии, примененных к состояниям до и после прохождения волны.

При больших числах Рейнольдса мы могли бы ожидать значительного влияния турбулентности. В действительности, исследования совместного действия турбулентности и весьма высоких — порядка скорости звука — скоростей очень немногочисленны. С одной стороны, в этом повинна, повидимому, сложность такой пограничной области. С другой стороны, в большинстве типических задач газовой динамики мы имеем дело с короткими трубами и соплами, короткими обтекаемыми телами; в короткой трубе турбулентность не успевает развиться и при большом значении Re . Наконец, в гидродинамике малых скоростей при $\text{Ba} < 1$ образование вихрей и турбулентность представляют единственный механизм сопротивления при $\text{Re} \gg 1$; учет их абсолютно необходим для рассмотрения сил, действующих на движущееся в жидкости тело.

При сверхзвуковой скорости появляется так называемое волновое сопротивление и возможность необратимой диссипации энергии в стационарных ударных волнах; отличное от нуля сопротивление может быть найдено и без рассмотрения турбулентности.

Приложение

Для суждения о применимости уравнений (I-1) — (I-6) приведем общий вид уравнений газодинамики (см. например [23, 27]).

Уравнение движения имеет вид:

$$\rho \frac{du_x}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \quad (\text{I-12})$$

где величины X , Y , Z суть компоненты объемной силы, отнесенной к единице массы, а величины T_{xx} , T_{xy} и т. д. компоненты тензора напряжений, происходящих от действия сил вязкости. Действие вязкости зависит от относительного движения соседних частиц жидкости. Из условий симметрии тензора, ограничиваясь членами, пропорциональными первым производным скорости по координате, принимая инвариантную сумму нормальных напряжений на три взаимно перпендикулярные площадки равной утроенному давлению и выделяя давление из тензора напряжений, как это уже сделано в формуле (I-12), мы приходим к следующему выражению тензора напряжений:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{2}{3}\eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}; & T_{zz} &= -\eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \\ T_{xy} &= -\eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{I-13})$$

Уравнения движения по двум другим координатам получатся из (I-12) и (I-13) циклической перестановкой индексов.

Коэффициенты в (I-13) подобраны так, что

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0.$$

В одномерном случае

$$u_x = u(x), \quad u_y = u_z = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$$

и уравнение движения (I-12) упрощается:

$$\rho \frac{du_x}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right). \quad (\text{I-14})$$

При учете вязкости и теплопроводности, дополнительные члены появляются и в уравнении энергии: в общем случае трехмерного движения (λ — теплопроводность)

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\left(E + \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2}\right)}{dt} = \rho (u_x X + u_y Y + u_z Z) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} [u_x (p + T_{xx}) + u_y T_{xy} + u_z T_{xz}] - \frac{\partial}{\partial y} [u_y (\dots) + \dots] - \\ - \frac{\partial}{\partial z} [u_z (\dots) + \dots] + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (I-15) \end{aligned}$$

Напомним, что T без индексов — абсолютная температура. Используя уравнение неразрывности, уравнения движения в форме (I-12) и термодинамическое соотношение $dE = -pdv + TdS$, можно преобразовать (I-15) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \rho T \frac{dS}{dt} = -T_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} - T_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} - T_{xz} \frac{\partial u_x}{\partial x} - T_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} - T_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \\ - T_{yz} \frac{\partial u_x}{\partial x} - T_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} - T_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} - T_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (I-16) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (I-13) компонент тензора вязких напряжений, приведем выражение работы сил вязкости, необратимо превращающейся в тепло в (I-16), к виду, показывающему существенную положительность этой величины:

$$\begin{aligned} \rho T \frac{dS}{dt} = \eta \left\{ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \eta \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (I-17) \end{aligned}$$

В одномерном движении

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \frac{4}{3} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (I-18)$$

Введем безразмерные переменные: координаты, отнесенные к характеристическому размеру системы d , скорость, отнесенную к характеристической скорости (средней скорости или скорости в какой-то произвольной, но определенной точке системы) U , и время, отнесенное к величине d/U . Безразмерные переменные отметим штрихом:

$$x' = x/d; \quad u' = u/U; \quad t' = tU/d. \quad (I-19)$$

Энтропию отнесем к теплоемкости газа: $S' = S/c_p$.
Переходя к безразмерным переменным, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{du'_x}{dt'} &= \frac{Xd}{U^2} - \frac{1}{\rho U^2} \frac{\partial p}{\partial x'} - \frac{\eta}{\rho U d} \left\{ \frac{4}{3} \left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{d\eta}{\eta dx'} \left(\frac{du'}{dx} \right)^2 \right] + \dots \right\}, \\ \frac{dS'}{dt'} &= \frac{\rho U^2}{c_p T} \frac{\eta}{\rho U d} \left\{ \left[\frac{du'_x}{dy'} + \dots \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda}{\rho U c_p d} \cdot \left\{ \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \lambda}{\partial x'} + \dots \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (I-20)$$

Внешние силы входят в безразмерные уравнения умноженными на характеристический размер. Для движений не слишком большой пространственной протяженности, но большой скорости, ими можно пренебречь; изучение движений сжимаемой жидкости в поле силы тяжести представляет предмет динамической метеорологии, которого мы не касаемся. Члены, описывающие влияние вязкости и теплопроводности, в соответствии с утверждением стр. 9, вошли с коэффициентами

$$\frac{\eta}{\rho U d} = \frac{1}{Re} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{\rho U c_p d} = \frac{1}{Pe}, \quad (I-21)$$

где Re и Pe — число Рейнольдса и число Пекле.

Предположение о том, что инвариантная сумма нормальных напряжений на три взаимноперпендикулярные площадки не отличается от утроенного давления, содержит элементы произвола. Конечно, всегда можно определить давление p именно таким образом, как одну треть суммы трех нормальных напряжений, но в действительности мы в последующем идем дальше и делаем физическое допущение, что определенное так давление при данном состоянии вещества (определяемом его составом, плотностью, энергией, энтропией, температурой) не отличается по величине от давления $p_{ст.}$, измеренного в статических условиях, в покоящемся газе. Между тем, с требованием инвариантности физических законов относительно преобразований координат вполне совместимо более общее предположение, что инвариантная сумма напряжений зависит от инварианта, составленного из производных от компонент скорости по координатам. Таким инвариантом является выражение расходимости (дивергенции) скорости:

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

В предположении, что можно ограничиться старшим членом

в разложении (так же, как это было сделано выше при составлении выражения вязких напряжений), мы получим:

$$p = p_{cr}(\rho, E) + \xi \operatorname{div} u. \quad (I-22)$$

Для полной характеристики поведения вещества необходимо, таким образом, задание двух независимых коэффициентов вязкости η и ξ .

В самом общем виде, совместимом с инвариантностью уравнений, выражение тензора напряжений гласит:

$$T_{xx} = \eta' \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad T_{xy} = -\eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (I-23)$$

где η' — величина размерности вязкости, которая, также как и η , должна быть определена на опыте.

Произвольно полагая $\eta' = \eta \cdot 2/3$, мы получили (I-13). В общем случае, не делая этого предположения, получим из (I-23) и (I-22)

$$\xi = 3\eta' - 2\eta. \quad (I-23a)$$

Молекулярно-кинетическая теория легко описывает и вычисляет первый коэффициент вязкости (η), одинаково существенный и при наличии и при отсутствии сжимаемости. Величина η вводится из рассмотрения срезывающего напряжения в потоке, в котором $u_y = u_z = 0$, $u_x = a + by$. Это напряжение обязано обмену количеством движения между слоями, скользящими один над другим с разной скоростью, благодаря хаотическому поперечному движению молекул из одного слоя в другой. Из этих соображений, рассматривая слой, находящийся на расстоянии длины свободного пробега l , так что средняя скорость (скорость массового движения u_x) разнится на величину $\frac{\partial u_x}{\partial y} l$, подсчитывая число молекул, переходящих в единицу времени из одного слоя в другой, и переносимое ими количество движения, легко найти [ср. (I-9)]:

$$T_{xy} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y} \sim n c' m \frac{\partial u_x}{\partial y} l \sim \rho c' l \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad \eta \sim \rho c' l, \quad (I-24)$$

где n — число молекул в единице объема, m — масса отдельной молекулы, c' — скорость движения молекул.

Каков смысл второго коэффициента вязкости ξ ? ξ входит множителем при величине $\operatorname{div} u$, которая уравнением сплошности тождественно связывается со скоростью изменения плотности вещества:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} u. \quad (I-25)$$

Таким образом, ξ описывает зависимость давления от скорости изменения плотности, т. е. описывает тот факт, что при изменении объема не сразу устанавливается статическое значение давления. Тот случай, когда второй коэффициент вязкости ξ того же порядка, что и η , не нуждается в специальном объяснении: этот случай отвечает времени установления статического давления порядка времени свободного пробега молекул между дзума столкновениями, l/c' .

В некоторых случаях, однако, мы встречаемся с аномально большим значением ξ .

В § II мы подробно рассмотрим важнейший пример молекулярного механизма подобного поведения вещества: при наличии внутренних степеней свободы, дающих добавочную теплоемкость и возбуждаемых сравнительно медленно, давление при данной плотности и данной энергии газа зависит от степени возбуждения внутренних степеней свободы. При сжатии (увеличении энергии) давление несколько больше, при быстром расширении несколько меньше статического (ответствующего равновесному возбуждению). Влияние этого эффекта при медленных процессах может быть описано формулой (I-22), причем чем труднее возбуждаются внутренние степени свободы, чем больше время их релаксации, тем при меньшей скорости изменения состояния станет заметным рассматриваемый эффект, тем больше второй коэффициент вязкости ξ .

Однако при быстрых процессах достигаются условия, в которых уже недопустимо пользование линейными формулами (I-22, 23), так как время изменения состояния становится сравнимым или даже меньше времени релаксации внутренних степеней свободы. При этом необходимо в явном виде вводить энергию возбуждения внутренних степеней свободы и находить ее зависимость от времени, решая дифференциальное уравнение кинетики установления равновесия, без упрощающего предположения (допустимого при малой скорости изменения параметров), что отклонение от равновесия пропорционально скорости изменения параметров. Рассмотрение таких задач см. в § II (акустика) и § XIII (ударные волны в газе с замедленным возбуждением). Трактровка второго коэффициента вязкости принадлежит Леонтовичу и Мандельштаму [16, 17].

§ II. Начала акустики; скорость звука

Во введении и в предыдущем параграфе мы уже много раз упоминали характеристическую величину скорости, именно скорость звука. Рассматривая распространение малых возмущений, покажем, как из уравнений газовой динамики получаются в пределе уравнения акустики и как в уравнениях газовой динамики заключена скорость звука.

Мы преобразуем уравнения газовой динамики, написанные выше, полагая скорость движения u и изменение плотности малыми. Скорость движения полагается малой по сравнению со скоростью звука, $\frac{u}{c} \ll 1$, изменения плотности и давления — малыми по сравнению со средними значениями плотности и давления, $\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{\Delta p}{p} \ll 1$. Того же порядка и колебания температуры в волне в газе.

Далее, в уравнениях движения мы пренебрегаем членами порядка выше первого в разложении уравнения состояния вещества по степеням $\Delta \rho$ или Δp (они относятся к оставленным, как $\Delta p/p$); мы также пренебрегаем u^2 по сравнению с uc (отношение отброшенных членов к оставленным равно u/c).

Приведенные ниже значения амплитуды давления в звуке определенной мощности показывают безоговорочную допустимость этих пренебрежений в акустике.

Плотность мы разбиваем следующим образом:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon, \quad (\text{II-1})$$

где ρ_0 — начальную плотность — мы будем полагать величиной постоянной, а изменение плотности ε , связанное с распространением звука или вообще возмущений по газу, мы будем считать величиной малой.

Уравнение сохранения вещества переписывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + (\rho_0 + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{II-2})$$

Пренебрегая величинами высшего порядка малости, т. е. произведениями двух малых величин, мы получим:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\text{II-3})$$

Пренебрегая таким же образом членами высшего порядка малости в уравнении движения, получим:

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (\text{II-4})$$

Дифференцируя уравнение сохранения вещества по времени, а уравнение движения по координате, получим окончательное основное уравнение акустики:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}. \quad (\text{II-5})$$

Обозначая

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2, \quad (\text{II-5a})$$

мы видим, что уравнение допускает две группы решений: первую группу

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(x - ct); & \varrho &= \varrho(x - ct); & u &= u(x - ct); \\ p &= p(x - ct), \end{aligned} \quad (\text{II-6})$$

и вторую группу

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(x + ct); & \varrho &= \varrho(x + ct); & u &= u(x + ct); \\ p &= p(x + ct), \end{aligned} \quad (\text{II-6a})$$

отличающуюся от первой тем, что под знаком функции везде, вместо $x - ct$, стоит $x + ct$. Под c мы везде понимаем положи-

тельный корень из $\frac{\partial p}{\partial \varrho}$, $c = + \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varrho}}$.

Первая группа решений, в которой все величины зависят от комбинации $x - ct$, представляет собой возмущение, распространяющееся вправо, т. е. по направлению возрастающих значений координаты x . Действительно, если в момент t_1 некоторое состояние (ϱ_1, p_1, u_1) осуществлялось в точке x_1 , то в следующий момент t_2 это состояние будет осуществлено в той точке x_2 , где переменная $x - ct$ (от которой только и зависят все величины ϱ_1, p_1, u_1 рассматриваемого решения) имеет то же значение

$$x_2 - ct_2 = x_1 - ct_1, \quad (\text{II-7})$$

$$x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1). \quad (\text{II-8})$$

Заданное состояние распространяется в направлении возрастания x со скоростью c , что и требовалось доказать.

Для этой волны нетрудно, подставляя найденный вид решения в основные уравнения, получить из (II-3):¹

$$-c\varepsilon' = -\varrho_0 u', \quad (\text{II-9})$$

где штрихом обозначено дифференцирование функции (II-6) по переменной $x - ct$. Полагая при больших значениях x , т. е. далеко впереди в невозмущенном газе, $u = 0$, $\varepsilon = 0$ и $\varrho = \varrho_0$, мы найдем для волны, распространяющейся вправо:

$$u = \varepsilon \frac{c}{\varrho_0} = (\varrho - \varrho_0) \frac{c}{\varrho_0}. \quad (\text{II-10})$$

¹ Мы пользуемся преобразованиями

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x - ct) = f'; \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x - ct) = -cf'.$$

Мгновенное значение давления также линейно связано с плотностью и скоростью:

$$p - p_0 = \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho - \rho_0) = \rho_0 u c. \quad (\text{II-11})$$

Отметим особо, что давление пропорционально первой степени скорости в звуке; в стационарном течении, согласно теореме Бернулли, мы имели бы гораздо меньшее изменение давления:

$$p = p_0 - \frac{\rho_0 u^2}{2}. \quad (\text{II-12})$$

Важнейший вывод из формул (II-10) и (II-11) заключается в том, что в волне, распространяющейся вправо, в сторону растущих значений координаты x , массовая скорость движения u положительна там, где вещество сжато, и отрицательна там, где вещество разрежено и плотность вещества меньше нормальной.

Аналогично для второй волны, в которой все величины зависят от комбинации $x + ct$, т. е. для волны, распространяющейся влево, в сторону уменьшения x , мы получим:

$$u = -\varepsilon \frac{c}{\rho_0} = -(\rho - \rho_0) \frac{c}{\rho_0}. \quad (\text{II-13})$$

В обоих случаях там, где вещество сжато, скорость движения направлена в сторону распространения волны.

Если в начальный момент задано некое произвольное распределение плотности и произвольное распределение скорости движения в пространстве

$$t = 0; \quad \rho = \rho(x); \quad \varepsilon = \varepsilon(x) = \rho(x) - \rho_0; \quad u = u(x), \quad (\text{II-14})$$

то для искомым двух волн: первой $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x - ct)$, $u_1 = u_1(x - ct)$ и второй $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x + ct)$, $u_2 = u_2(x + ct)$, мы получим два уравнения:

$$\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) = \rho(x) - \rho_0 = \varepsilon(x), \quad (\text{II-15})$$

$$u_1(x) + u_2(x) = \frac{\varepsilon_1(x)c}{\rho_0} - \frac{\varepsilon_2(x)c}{\rho_0} = u(x). \quad (\text{II-16})$$

Второе уравнение: (II-16) получено применением (II-10) к ε_1 и u_1 и (II-13) к ε_2 и u_2 . Далее сразу получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(x - ct) &= \frac{1}{2} \varepsilon(x - ct) + \frac{\rho_0}{2c} u(x - ct); \\ u_1(x - ct) &= \frac{c}{2\rho_0} \varepsilon(x - ct) + \frac{1}{2} u(x - ct); \\ \varepsilon_2(x + ct) &= \frac{1}{2} \varepsilon(x + ct) - \frac{\rho_0}{2c} u(x + ct); \\ u_2(x + ct) &= -\frac{c}{2\rho_0} \varepsilon(x + ct) + \frac{1}{2} u(x + ct). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-17})$$

Нетрудно рассмотреть также отражение произвольного возмущения от неподвижной стенки. Для нахождения решения к распространяющемуся возмущению $\varepsilon_1(x - ct)$, $u_1(x - ct)$ мы добавляем волну, как-будто приходящую с другой стороны стенки и распространяющуюся в обратном направлении, т. е. встречную волну $\varepsilon_2(x + ct)$, $u_2(x + ct)$.

Вид функции ε_2 определяется из условия непроницаемости отражающей стенки $u = 0$ при $x = x_{\text{ст}}$, откуда

$$u_1(x_{\text{ст}}, t) + u_2(x_{\text{ст}}, t) = 0, \quad (\text{II-18})$$

применяя (II-10) и (II-13), найдем

$$\varepsilon_2(x_{\text{ст}}, t) = \varepsilon_1(x_{\text{ст}}, t), \quad (\text{II-19})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(x, t) &= \varepsilon_2(x + ct) = \varepsilon_2\left(x_{\text{ст}}, \left[t - \frac{x_{\text{ст}} - x}{c}\right]\right) = \\ &= \varepsilon_1\left(x_{\text{ст}}, \left[t - \frac{x_{\text{ст}} - x}{c}\right]\right) = \varepsilon_1(x - ct) = \\ &= \varepsilon_1\left(x, t - 2 \frac{x_{\text{ст}} - x}{c}\right), \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

$$u_2(x, t) = -u_1\left(x, t - 2 \frac{x_{\text{ст}} - x}{c}\right). \quad (\text{II-20a})$$

Как и следовало ожидать, плотность и скорость в отраженной волне (индекс 2) в данной точке в данный момент зависят от значений плотности и скорости в падающей волне в этой точке в момент времени более ранний, причем интервал равен времени, необходимому для пробега от данной точки до отражающей поверхности и обратно со скоростью звука.

Превращение заданного в начальный момент произвольного распределения плотности и скорости в две волны, движущиеся в противоположных направлениях, и отражение одной из них от неподвижной стенки показаны на рис. 1; для примера выбрано начальное состояние, в котором в некоторой области создано повышенное давление, но вещество везде покоится.

Последовательный ряд рисунков $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$, отвечает моментам $t = 0, t = t_1, \dots$. На графиках a представлено мгновенное распределение плотности (ось абсцисс $\varrho = \varrho_0$), на графиках b — распределение скорости (ось абсцисс $u = 0$).

Теория распространения сферических волн в трехмерном пространстве почти так же проста, как и одномерная теория, суммированная в уравнениях (II-1) — (II-20). Место координаты x заступит теперь r — радиус, т. е. расстояние, отсчитанное от центра симметрии движения. Мы рассматриваем только сферически-симметричные движения, в которых каждая величина (скорость, плотность, давление) зависит только от времени

и от расстояния r от центра симметрии и постоянна на сфере радиуса r , т. е. не зависит от угла радиус-вектора, проведенного из центра симметрии, с координатными осями. Движение частиц газа совершается лишь по радиусам, проведенным из центра симметрии. Благодаря этому нам нет надобности пользоваться векторными обозначениями.

Уравнение сохранения вещества имеет вид¹

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u. \quad (\text{II-21})$$

Уравнение движения не меняется:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \\ &= -c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}. \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

Простыми преобразованиями найдем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}. \quad (\text{II-23})$$

В таком виде уравнение отличается от простого уравнения (II.5). Подставим

$$\varepsilon = \frac{\eta}{r}. \quad (\text{II-24})$$

Тогда для функции η получим после сокращений волновое уравнение одномерного движения

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2}, \quad (\text{II-25})$$

решения которого нам уже известны

$$\eta = \eta_1 (r - ct) + \eta_2 (r + ct). \quad (\text{II-26})$$

¹ Поток вещества через сферическую поверхность радиуса r равен $4\pi r^2 u$. Разность потоков вещества, прошедших через сферы радиуса r и $r + dr$, представляет собой количество вещества, оставшееся в шаровом слое, объем которого равен $4\pi r^2 dr$, и меняет плотность заключенного в этом слое вещества.

Таким образом, общее решение для амплитуды изменения плотности в сферической волне имеет следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{\eta_1 (r - ct)}{r} + \frac{\eta_2 (r + ct)}{r}. \quad (\text{II-27})$$

Легко убедиться подстановкой выражения (II-27) в уравнение (II-23) в том, что оно удовлетворяет уравнению при произвольных функциях η_1, η_2 . Первое важнейшее отличие сферических волн от плоских (т. е. одномерных, в которых все величины зависят только от одной координаты x , см. выше) заключается в том, что амплитуда волны при распространении от центра падает обратно пропорционально расстоянию от центра — см. (II-27); амплитуда волны, сходящейся к центру, растет по тому же закону. Падение амплитуды при удалении волны от центра естественно; выберем функцию η_1 такую, чтобы она была отлична от нуля только внутри определенного интервала изменения величины $r - ct$, $a \leq r - ct \leq b$. Это значит, что возмущено, охвачено волновым движением в каждый момент только вещество, находящееся в шаровом слое постоянной толщины $b - a$, $a + ct < r < a + ct + (b - a)$. По мере того как с ростом времени увеличивается r , количество вещества, вовлеченного в движение, растет пропорционально объему слоя, т. е. пропорционально r^2 .

Звуковая энергия единицы объема пропорциональна квадрату амплитуды. Таким образом, при отсутствии поглощения (превращения энергии звука в тепловую) закон сохранения энергии приводит к условию $\varepsilon^2 r^2 = \text{const}$, $\varepsilon \sim r^{-1}$, т. е. к уменьшению амплитуды по найденному выше закону.

Второе отличие сферических волн заключается в том, что простое выражение (II-27) имеет место для амплитуды изменения плотности и давления, но не для скорости. Давление и плотность связаны уравнением адиабаты Пуассона, что при малых амплитудах дает

$$p - p_0 = \frac{\partial p}{\partial \rho} (\rho - \rho_0) = k \frac{p_0}{\rho_0} \varepsilon = c^2 \varepsilon,$$

точно так же, как в плоской волне. Однако простая пропорциональность скорости движения и плотности или давления не имеет места в случае сферических волн [ср. ф-лу (II-10)].

Подставим в (II-22) выражение плотности в сферической волне, бегущей от центра

$$\varepsilon = \eta_1 (r - ct) r.$$

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\varrho_0} \left(\frac{\eta'_1(r-ct)}{r} - \frac{\eta_1(r-ct)}{r^2} \right),$$

$$u = \frac{c}{\varrho_0} \left(\frac{\eta_1(r-ct)}{r} - \frac{\int_{r-ct}^r \eta_1(\xi) d\xi}{r^2} \right) = \frac{c}{\varrho_0} \left(\varepsilon - \frac{\zeta(r-ct)}{r^2} \right). \quad (\text{II-28})$$

В выражении скорости появляется дополнительный член, нарушающий простую пропорциональность (II-10), которая имеет место в распространении плоской волны. Это обстоятельство приводит к важным последствиям, отмеченным впервые Стоксом.

Рассмотрим волну конечной ширины, бегущую в одном определенном направлении — в сторону роста координаты; после прохождения такой волны вещество снова возвращается к начальному значению плотности и покоится.

В случае плоской волны зависимость плотности от координаты внутри волны (внутри области, охваченной возмущением) не подчинена никаким ограничениям; благодаря простой связи (II-10) там, где возвращается к начальному значению плотность, скорость тождественно обращается в нуль.

Между тем, в сферическом случае условия $\varepsilon = 0$ недостаточно: для того чтобы скорость обратилась в нуль после прохождения волны, необходимо обращение в нуль также второго члена в (II-28)

$$\frac{\zeta(r-ct)}{r^2} = 0; \quad \int \eta_1(\xi) d\xi = \int r \varepsilon dr = 0. \quad (\text{II-29})$$

Интеграл в (II-29) берется по всей ширине волны, т. е. по всей области, в которой $\varepsilon \neq 0$. В формуле (II-29) мы усматриваем, что в сферической волне конечной ширины изменение плотности обязательно должно быть знакопеременным: интеграл в (II-29) обратится в нуль лишь в том случае, если в одной части области интегрирования ε положительно, а в другой — отрицательно. То же самое относится и к изменению давления в волне благодаря линейной связи малых изменений плотности и давления.

Как элементарно представить себе причины невозможности сферической волны конечной ширины, на всем протяжении которой вещество было бы сжато? Дополнительное количество вещества,¹ заключенное в волне, равно $\int \varepsilon r^2 dr$. Амплитуда ε падает как r^{-1} ; таким образом, дополнительное количество вещества

¹ Сверх того количества, которое заключено в данном объеме при невозмущенном значении плотности.

В волне, на всем протяжении которой $\varepsilon > 0$, росло бы пропорционально r по мере распространения. Растущее в процессе распространения количество вещества в волне повышенной плотности и вызывает появление следующей за ней волны пониженной плотности.

Более подробное рассмотрение показывает, что у краев волны, т. е. там, где весьма малы одновременно u и ε , величина ξ высшего порядка малости, так что связь u и ε в пределе у краев волны такая же, как в плоской волне. Наконец, можно показать, что не только изменение плотности, но и скорость движения u должна менять знак внутри волны: невозможна сферическая волна конечной ширины, на всем

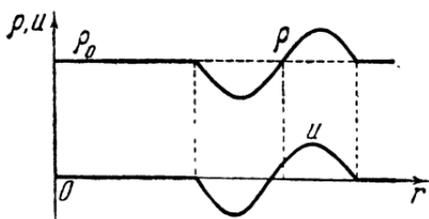


Рис. 2. Распределение плотности и скорости в сферической волне.

протяжении которой вещество двигалось бы в сторону увеличения радиуса. Однако внутри волны точка изменения знака скорости несколько сдвинута в сторону центра симметрии по отношению к точке изменения знака ε (рис. 2).

Эти обстоятельства весьма важны для теории распространения волн, вызванных взрывом, которой мы займемся в последнем параграфе книги.

Для характеристики абсолютных значений давлений и скоростей, с которыми приходится иметь дело в акустике, приведем несколько цифр. Громкость звука измеряется в логарифмической шкале, в децибеллах (по имени изобретателя телефона Грахама Белла). Увеличение громкости на n децибелл (сокращенно дБ) означает увеличение интенсивности звука в $10^{n/10}$ раз, чему отвечает увеличение амплитуды давления, плотности и скорости в $10^{n/20}$ раз. Ноль отвечает порогу чувствительности уха среднего человека. Шелест листьев, шопот имеют громкость ~ 10 дБ, оркестр фортиссимо ~ 80 дБ (интенсивность звука в 10 000 000 раз больше). Сильнейший звук 130 дБ создает в воздухе изменения плотности до 0.4% , чему отвечает амплитуда давления $p - p_0 = 0.4\% \cdot 1.4 p_0 = 0.56\%$, $p_0 = 56$ мм водяного столба. Амплитуда скорости движения частиц воздуха достигает 0.4% от скорости звука, т. е. 1.3 м/сек. Амплитуда смещения частиц составляет $x - x_0 = \frac{u}{2\pi} \cdot 0.4\% = 0.06\%$ μ , т. е. 0.06%

длины волны звука μ , около 0.036 см для звука частоты 500 герц. Излучаемая энергия равна 0.1 ватт/см². За 1 сек. звук проходит 330 м, так что звуковая энергия единицы объема при громкости 130 дб составляет $\frac{0.1}{330 \cdot 100}$ ватт·сек/см²·см = $3 \cdot 10^{-6}$ джоуля/см³ = $0.7 \cdot 10^{-6}$ кал/см³.

Для сравнения укажем, что тепловая энергия воздуха в нормальных условиях составляет 0.07 кал/см³, в 10⁵ раз больше.

Таким образом, не только шопот, но и фортиссимо оркестра и рев льва физически представляют лишь очень малое перемещение и изменение состояния воздуха.

Воспринимаемые человеческим ухом звуки имеют частоту между 20 и 20 000 герц (колебаний в секунду), т. е. длину волны от 15 м до 1.5 см.

Скорость звука определена формулой (II-5а).

Исаак Ньютон в 1687 г. первый вычислил абсолютное значение скорости звука по известным уже в то время упругости и плотности воздуха и показал независимость скорости звука от его амплитуды и частоты. Принимая закон Бойля-Мариотта для связи давления и плотности $p\nu = \text{const}$, $p = \frac{\text{const}}{\nu} = \text{const } \rho$ при $T = \text{const}$, Ньютон нашел:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = 916 \frac{\text{футов}}{\text{сек}} = 280 \frac{\text{м}}{\text{сек}}. \quad (\text{II-30})$$

Вскоре прямые измерения показали, что в действительности скорость звука в воздухе почти на 20% больше вычисленного Ньютоном значения. Объяснение этого расхождения дано Лапласом: в звуковой волне сжатие и разрежение происходят адиабатически, следуя адиабате Пуассона. Нагревание при сжатии и охлаждение при расширении усиливают изменение давления в звуковой волне, увеличивают ее скорость

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s = \frac{\partial (A \rho^k)}{\partial \rho} = k \frac{p}{\rho}, \quad (\text{II-31})$$

где $k = \frac{c_p}{c_v}$.

Приведем таблицу, составленную Ричардсом в 1939 г. [80] в которой сопоставлены экспериментально измеренные и вычисленные по изотермической и по адиабатической сжимаемости значения скорости звука (в метрах в секунду) в различных средах.

Прекрасные совпадения с формулой Лапласа доказывают строгую адиабатичность изменения состояния в волне. Лаплас нашел из скорости звука отношение теплоемкости воздуха при постоянном давлении и при постоянном объеме. Майер приписал разницу между c_p и c_v воздуха работе, которую воз-

Таблица 1

Вещество	Состояние	Т° К	с наблюд. (м/сек)	с вычисленное (м/сек)		k
				адиабат.	изотерм.	
Аргон	Газ	303.1	324.0	324.2	251.2	1.667
Азот	"	273.1	337.3	336.7	284.5	1.400
Бензол	Жидк.	293.1	1324	1319	1095	1.450
Толуол	"	293.1	1328	1317	1138	1.340
CCl ₄	"	293.1	935	931	774	1.46
Вода	"	277	1407.0	—	—	1.000 ¹
Вода	"	313	1530.3	—	—	1.026

дух производит, расширяясь при нагревании при постоянном давлении. Из этих соображений, по очень неточным экспериментальным данным, Майер впервые подошел к установлению соотношения между механической работой и теплотой, к нахождению „механического эквивалента тепла“ — этой численной основы закона сохранения энергии. Лишь впоследствии, под влиянием Майера, Джоуль прямыми опытами подтвердил превращение работы в тепло и нашел более точное значение эквивалента. Основываясь на измерениях скорости звука, Ренкин вычислил теплоемкость воздуха в 1850 г., на 3 года раньше точных измерений Реньо.

Особо следует отметить значительную разницу между изотермической и адиабатической скоростями звука в ряде жидкостей. В этом случае разность c_p и c_v связана уже не с совершением внешней работы, а с увеличением внутренней энергии, с преодолением сил сцепления между молекулами жидкости при тепловом расширении при постоянном давлении.²

¹ 4° С — максимум плотности воды.

² Соотношение $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$ может быть выведено в общем виде из основных термодинамических соотношений для любой системы, отнюдь не только для идеального газа, в котором c_p и c_v зависят только от T (см. Ландау и Лифшиц [15], стр. 48, задача). Прямое измерение $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S$ или c_v в случае жидкости весьма затруднительно. Для расчета используют термодинамическое соотношение

$$c_p - c_v = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v^2 / \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$$

(там же, задача № 11), откуда вытекает

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S = \frac{c_p \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T^2}{c_p \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v^2}$$

Методика измерения скорости звука в настоящее время совсем не та, что во времена Лапласа. Современники Лапласа измеряли хронографом (или секундомером) время, за которое звук проходит известное расстояние в несколько километров. В настоящее время работают на коротких волнах строго определенной частоты, производимых обычно пьезокварцевым или магнито-стрикционным излучателем звука. Частоту ω измеряют в электрической схеме. При известной частоте скорость звука мы найдем, определяя длину волны μ в испытуемом веществе по формуле $c = \mu\omega$.

Длину волны находят, помещая против излучателя пластинку, отражающую звук, и постепенно, например микрометрическим винтом, отодвигая ее от излучателя. Интенсивность звука достигает максимума каждый раз, когда на расстоянии между излучателем и отражателем укладывается целое число полуволн. Одновременно достигает максимума и потребление энергии излучателем, регистрируемое электрическими приборами.

Весьма любопытна и важна для физико-химика подробно исследованная в последние годы причина, вызывающая зависимость скорости звука от частоты. Если звук распространяется в газе, в котором часть степеней свободы возбуждается медленнее других, так что теплоемкость газа зависит от того, с какой скоростью происходит изменение температуры, то нам приходится различать две предельные области. В первой области, при малых частотах колебаний, при сравнительно медленном изменении температуры, за время изменения состояния в акустической волне успевает установиться полное равновесие, все степени свободы возбуждаются, теплоемкость достигает своего максимального значения. Напротив, при достаточно быстром возбуждении, т. е. при большой частоте

Наконец, величина $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ может быть выражена через изотермическую сжимаемость и коэффициент теплового расширения — соотношением, общим для любых трех величин, связанных одним уравнением — уравнением состояния $p = p(v, T)$, в данном случае

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -1.$$

(Макс Планк, Термодинамика, гл. I), так что

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p.$$

Связь между производными по плотности в (II-30, II-31) и производными по объему элементарна:

$$e = \frac{1}{v}; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = -v^2 \frac{\partial p}{\partial v}.$$

звука, те или иные внутренние степени свободы не успевают возбуждаться. Изменение состояния газа происходит так, как если бы его теплоемкость была меньше.

Напомним выражение скорости звука в газе:

$$c^2 = k \frac{P}{\rho}; \quad k = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v}. \quad (\text{II-31a})$$

Из этого уравнения мы видим, что при максимальном значении теплоемкости показатель адиабаты k принимает минимальное значение и соответственно мы получаем минимальное значение скорости звука.

Таким образом, замедленное возбуждение внутренних степеней свободы или вообще какой-то части теплоемкости приводит к зависимости скорости звука от частоты, т. е. к дисперсии звука [50].

В случае углекислоты, молекула которой линейна (три атома O , C , O расположены в равновесии на одной прямой), теплоемкость при комнатной температуре c_v равна $3.3 R$. Эта теплоемкость складывается из теплоемкости поступательной $1.5 R$, теплоемкости вращательной R и теплоемкости колебательной $0.8 R$, где R есть газовая постоянная ($R = 1.985$ кал/град·моль).

Как показали измерения Кнезера [62], при изменении частоты в интервале от $10^4 \frac{1}{\text{сек}}$ (10 килогерц) до $10^6 \frac{1}{\text{сек}}$ (1000 килогерц) скорость звука меняется от значения 260 м/сек до значения 270 м/сек, приблизительно на 4% в соответствии с изменением теплоемкости C_v от $3.3 R$ до $2.5 R$ и изменением k от 1.3 до 1.4. Из этих измерений следует, что время установления равновесия возбуждения колебаний молекулы CO_2 равно 10^{-5} сек. В среднем колебание возбуждается при одном из 600 000 столкновений, колеблющаяся молекула отдает свою энергию в одном из 50 000 столкновений с другими молекулами.¹

Совершенно аналогичные явления будут происходить в системе, в которой добавочная теплоемкость, возбуждаемая сравнительно медленно, обязана наличию тех или иных обратимых химических реакций.

Примером такой системы является двуокись азота, находящаяся при комнатной температуре в равновесии с четырехокисью азота



В этом случае, если время сжатия превышает время протекания обратной реакции, мы должны учитывать „химическую теплоемкость“, возникающую от смещения равновесия и выделения или поглощения теплоты реакции с изменением давления и температуры. При большой частоте, наоборот, равно-

¹ Позднейшие измерения Вальмана [126] дали втрое меньшее число ударов.

весие „замерзает“, система ведет себя как смесь не реагирующих газов, если превращение NO_2 в N_2O_4 не успевает произойти за период колебания. Именно применительно к такого рода системам теория дисперсии звука была впервые развита Альбертом Эйнштейном в 1920 г. [50].

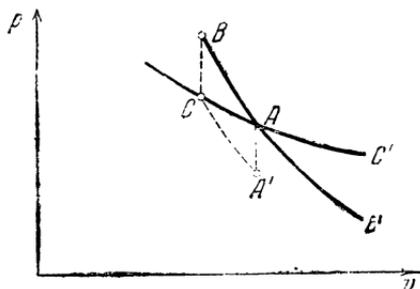


Рис. 3. Круговой процесс в газе с замедленным возбуждением части теплоемкости. Площадь $ABCA'$ определяет потери энергии.

ния при замороженной части теплоемкости, вторая — медленным равновесным процессам. Если мы быстро сожмем газ, он перейдет в состояние B . Выдерживая при постоянном объеме время, достаточное для возбуждения всей теплоемкости, мы перейдем в точку C . При быстром расширении мы пройдем по линии CA' , параллельной BA , и лишь при выдерживании в течение достаточного времени снова попадем в исходную точку. Описанная площадь $ABCA'$ изображает работу, которая в таком цикле необратимо затрачена и перешла в тепло.¹ Работа эта пропорциональна квадрату амплитуды. Мы рассматривали упрощенный цикл, составленный из быстрых изменений состояния с длительным выдерживанием в промежутке. Изменение со-

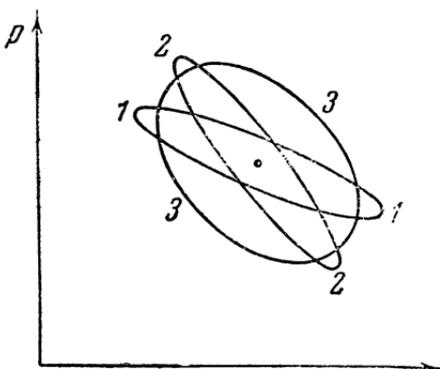


Рис. 4. Изменение состояния при колебаниях газа с замедленным возбуждением части теплоемкости.

Колебания различной частоты: 1 — низкая частота; 2 — высокая частота; 3 — средняя частота, период колебаний порядка времени возбуждения теплоемкости. Площадь эллипса и потери за один цикл максимальны при средней частоте.

¹ Для того чтобы вернуться в точности в точку A , это тепло следует отобрать на отрезке BC или $A'A$. Однако отобранное за цикл тепло и соответственно смещение начальной точки при отсутствии отбора тепла — высшего порядка малости по сравнению со смещениями AB , AA' , AC , BC на рис. 3. В тексте и на рис. 3 мы пренебрегли им.

стояния в синусоидальной звуковой волне при замедленном возбуждении внутренних степеней свободы описывается эллипсами в p, v плоскости. Центр эллипсов находится в точке, описывающей невозмущенное состояние. На рис. 4 представлены 3 таких эллипса. Эллипс 1 отвечает малой частоте, медленным колебаниям. Движение близко в адиабате SAC' (ср. с рис. 3). Ширина эллипса, характеризующая максимальное отклонение от равновесия, пропорциональна скорости изменения состояния, т. е. пропорциональна частоте ω . Следовательно, пропорциональна ω и площадь эллипса, а также доля энергии, необратимо переходящая в тепло за одно колебание, так что пропорционально ω и поглощение звука на расстоянии, равном длине волны μ . Здесь поведение вещества может быть описано вторым коэффициентом вязкости (§ 1, Приложение). При этом поглощении звука, отнесенное к единице времени или единице длины, оказывается пропорциональным ω^2 , так как время колебания и длина волны пропорциональны $1/\omega$.

Во втором предельном случае весьма быстрых колебаний мы получаем эллипс 2; энергия внутренних степеней свободы успевает измениться лишь на очень малую величину, весь эллипс очень близок к адиабате VAB' . Ширина эллипса пропорциональна амплитуде изменения энергии внутренних степеней свободы, которая в свою очередь пропорциональна времени, в течение которого происходит накопление этой энергии, т. е. пропорциональна периоду колебаний, пропорциональна ω^{-1} .

Наибольшее поглощение энергии за время одного колебания достигается при колебаниях, период которых близок к времени установления равновесия, т. е. там, где наиболее велика дисперсия скорости звука. На рис. 4 этот случай изображен эллипсом 3, ширина которого — порядка расстояния между адиабатами VAB' и SAC' при максимальной амплитуде давления. При более медленных колебаниях изменение состояния приближается к равновесному, и потери за цикл падают, как ω . При более быстрых колебаниях система почти все время находится вдали от равновесия, возбуждение внутренней энергии происходит весьма необратимо, но вследствие быстроты цикла оно проходит за цикл лишь в малой мере, потери за цикл $\sim \omega^{-1}$.

Отнесенные к единице времени потери во второй области (при больших частотах) стремятся к постоянной величине. Если теплоемкость внутренних степеней свободы того же порядка величины, что и полная теплоемкость, интенсивность звука затухнет до $1/e$ за время порядка времени возбуждения внутренних степеней свободы τ .

Максимум поглощения и поведение вещества при этих больших частотах во второй области, где $\omega > \frac{1}{\tau}$, не могут быть

описаны вторым коэффициентом вязкости и требуют конкретных представлений о наличии и свойствах внутренних степеней свободы. В последние годы накоплен обширный материал по вопросам дисперсии и поглощения звука; здесь мы можем только сослаться на упомянутый выше подробный обзор Ричардса [80].

В системе, в которой нет явления замедленного возбуждения внутренних степеней свободы, основными причинами поглощения звука являются вязкость и теплопроводность вещества. Коэффициент поглощения на одной длине волны (за время одного колебания) пропорционален частоте и обратно пропорционален длине волны μ . В случае газа он приближается по порядку величины к 1, когда длина волны приближается к длине пробега молекулы в газе l , так что его можно выразить как l/μ . Последнее выражение может быть получено из точных формул, выведенных Стоксом [90, 91] и Кирхгоффом [61], если подставить в них молекулярно-кинетическое выражение вязкости (I-9) и теплопроводности газа. Невозможность распространения звука с длиной волны, меньшей длины свободного пробега, очевидна.

Действие теплопроводности на распространение звука можно уяснить, рассматривая в p, v плоскости адиабату и изотерму так же, как мы рассматривали только что две адиабаты (с возбуждением и без возбуждения внутренних степеней свободы). Если сжатие происходит быстро, так что теплообмен не успевает произойти, изменение состояния происходит адиабатически; при медленных колебаниях мы можем ожидать изотермического изменения состояния; переход будет сопровождаться дисперсией (зависимостью скорости от частоты) и поглощением звука.

Сказанное относится к случаю теплообмена с внешней средой, например, при распространении звука по стержню или по газу, заключенному в трубку с теплопроводными стенками.

Если речь идет о теплообмене в синусоидальной волне, распространяющейся в неограниченной среде, между участками, где вещество сжато и нагрето, и местами разрежения, сопровождающегося охлаждением, то следует учесть, что с временем сжатия и расширения (периодом колебания) связана тождественно длина волны.

Время выравнивания синусоидального распределения температуры пропорционально квадрату расстояния, квадрату длины волны, т. е. квадрату времени сжатия. Отсюда получается кажущийся парадоксальным вывод, что роль теплообмена тем больше, чем быстрее происходит сжатие, так как при ускорении сжатия в n раз теплообмен ускоряется еще сильнее, в n^2 раз, и становится более существенным, чем при медленном сжатии.

В газах невозможно наблюдать переход к изотермическому

распространению звука; этот переход произошел бы при длине волны порядка длины свободного пробега, где распространение звука уже невозможно; к тому же в газах вязкость всегда оказывает влияние более сильное, нежели теплопроводность.

Согласно последним работам Зинера (100), выравнивание термоэластических разностей температур и переход к изотермическому распространению представляет важнейший механизм поглощения звука в металлах, обладающих очень большой электронной теплопроводностью. Вследствие зависимости термоэластических свойств от ориентации кристалла, в поликристаллическом материале возникают дополнительные потери.

Любопытно, что при отражении звука, распространяющегося по газу, от твердой стенки, возникающие градиенты температуры и скорости значительно больше, чем в синусоидальной волне, распространяющейся в безграничном пространстве, отношение тем больше, чем меньше вязкость и теплопроводность, так как при уменьшении η и λ уменьшается глубина проникновения в газ созданного стенкой возмущения. Развивая эти представления, Б. П. Константинов показал, что поглощение звука при однократном отражении от стенки порядка $\sqrt{l/\mu}$ (напоминаем, что l — длина пробега молекул, μ — длина волны звука), т. е. на порядки величины больше поглощения на длине волны при распространении в безграничном пространстве [13].

Отметим, наконец, своеобразные трудности, возникающие в теории звука при попытке рассмотреть второе приближение и не пренебрегать сжатием в волне по сравнению с начальной плотностью, не пренебрегать массовой скоростью движения вещества по сравнению со скоростью распространения звука.

В этом случае оказывается, что гребни волн, т. е. места, где плотность максимальна, распространяются быстрее впадин, т. е. мест, где имеется разрежение. Более быстрое распространение происходит по двум причинам. Во-первых, в сжатом газе скорость звука больше, так как выше температура сжатого газа. Во-вторых, сжатый газ имеет еще и массовое движение, направленное в ту же сторону, в которую направлено распространение; скорость этого движения нужно прибавить к скорости распространения звука. Эта трудность, которая в неявном виде содержится еще у Пуассона [75], впервые была отмечена в применении к вопросу о распространении звука Стоксом [92].

Нетрудно видеть (рис. 5), что распространяющаяся синусоидальная звуковая волна (a) должна будет в результате непрерывно менять свою форму.

Участки подъема давления будут становиться все короче и круче, а области падения давления, наоборот, будут растя-

гиваться (б).¹ Формулы акустики второго приближения приводят с течением времени к бессмысленной форме волны (в), при которой в одной точке одновременно имеют место три значения плотности и давления.



Рис. 5. Деформация синусоидальной звуковой волны по мере распространения.

a — синусоидальная волна; *б* — деформированная волна, содержит обертоны; *в* — уравнения акустики даль не имеющее физического смысла решение с тремя значениями давления или скорости в одной точке; в действительности *в* не возникает, образуются ударные волны, необходим учет диссипативных сил.

Анализ этой трудности привел Римана [81] и Ренкина [78] к далеко идущим выводам (см. § VII и дальше).

§ III. Истечение газа через насадки и сопла

Рассмотрим движение газа по трубе переменного сечения. Мы ограничимся одномерным рассмотрением явления, т. е. будем пренебрегать составляющими скорости, направленными перпендикулярно оси трубы, и будем считать все величины (плотность, скорость, давление) зависящими лишь от расстояния, отсчитываемого вдоль трубы, но одинаковыми в любом нормальном сечении трубы и не зависящими от времени.

Напишем для всего потока уравнение сохранения количества вещества, которое приводит в интересующем нас случае стационарного истечения к простому условию, чтобы через любое сечение трубы в единицу времени протекало одно и то же количество вещества.

Обозначая площадь сечения через F , мы получим уравнение сохранения вещества в виде:

$$\rho u F = \text{const.} \quad (\text{III-1})$$

Таким же образом мы напишем уравнение сохранения энергии, выражающее постоянство суммы потока энергии, вытекающего через некоторое сечение, и работы сил давления в этом сечении для любого сечения:

$$\left(E + \frac{u^2}{2}\right) \rho u F + p u F = \text{const.} \quad (\text{III-2})$$

¹ Начало процесса — изменение формы волны *б* — воспринимается как изменение спектрального состава звука, как появление обертонов (в чем можно убедиться, разлагая кривую *б* в ряд Фурье) и изменение тембра при распространении звука на большое расстояние (см. Турас, Дженкинс и Нейль и др. [94, 52, 53], а также подробную статью Эйхенвальда [34]).

Заключенное в скобки выражение представляет энергию единицы массы, весь первый член — энергию единицы массы, помноженную на количество вещества, протекающее в единицу времени через все сечение трубы. Второй член представляет собой работу сил давления в этом сечении в единицу времени.

Второе уравнение мы преобразуем с помощью первого к следующему виду:

$$I + \frac{u^2}{2} = \text{const},^1 \quad (\text{III-3})$$

где I есть так называемая энтальпия,

$$I = E + pv, \quad (\text{III-4})$$

одна из основных термодинамических функций. Для вывода (III-3) достаточно (III-2) разделить на (III-1).

Задавшись адиабатическим законом изменения состояния вещества в потоке, из приведенных двух уравнений мы сможем найти, как распределяются скорость и плотность вдоль трубы.

Для определения входящей в уравнение (III-3) константы выпишем ее значение для входа в трубу, т. е. для того места, где сечение F весьма велико и где соответственно скорость движения u можно считать очень малой. Величины в этом сечении будем обозначать индексом 0:

$$\left. \begin{aligned} u_0 \rightarrow 0, \\ I + \frac{u^2}{2} = I_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-5})$$

Добавим сюда условие адиабатичности потока, отсутствия теплообмена со стенками и потерь на гидравлическое сопротивление. Это условие даст для удельной энтропии вещества

$$S = \text{const} = S_0. \quad (\text{III-6})$$

Вспомним термодинамическое выражение

$$dI = TdS + vdp. \quad (\text{III-7})$$

При постоянной энтропии

$$I - I_0 = \int_{p_0}^p vdp = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad (\text{III-8})$$

что в соединении с (III-5) дает скорость движения

$$\frac{u^2}{2} = - \int_{p_0}^p vdp = - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}. \quad (\text{III-9})$$

¹ Ср. Ландау и Лифшиц [15], стр. 41—43, § 13 „Стационарный поток“.

При малом изменении давления пренебрегаем изменением подинтегральной функции

$$\frac{u^2}{2} = \frac{p_0 - p}{\rho} = v(p_0 - p); \quad \frac{\rho u^2}{2} = p_0 - p. \quad (\text{III-10})$$

(III-10) представляет не что иное, как закон Бернулли течения несжимаемой жидкости.

При p , близком p_0 , мы можем пренебречь изменением плотности, и так же, как для несжимаемой жидкости, получаем, что количество газа ρu , протекающее в единицу времени через единицу сечения, оказывается пропорциональным корню квадратному из разности давлений.

Однако при больших перепадах давления, при малом давлении в струе, падение плотности истекающего газа оказывает все более и более сильное действие. В то время как рост скорости ограничен величиной

$$u = \sqrt{2I_0} \quad (\text{III-11})$$

при $I = 0$, плотность газа может упасть до величины, сколь угодно близкой к нулю.

При этом произведение ρu обращается в нуль.

При данном p_0 количество вещества, протекающее через единицу площади сечения, достигает максимума при некотором значении давления в потоке p , меньшем p_0 , и далее снова падает при дальнейшем падении p .

Покажем, что максимум расхода на единицу площади сечения достигается как раз тогда, когда скорость движения равна скорости звука в истекающем газе.

Ищем максимум произведения

$$\rho u = \rho \sqrt{2(I_0 - I)}. \quad (\text{III-12})$$

Составим логарифмическую производную по давлению от выражения (III-12) и приравняем ее нулю (все производные при $S = \text{const}$):

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} - \frac{dI/dp}{2(I_0 - I)} = 0, \quad (\text{III-13})$$

$$\frac{d\rho}{dp} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)^{-1} = c^{-2}; \quad dI/dp = v = \rho^{-1}; \quad 2(I_0 - I) = u^2, \quad (\text{III-14})$$

$$\frac{c^{-2}}{\rho} - \frac{\rho^{-1}}{u^2} = 0; \quad c = u, \quad (\text{III-15})$$

что и требовалось доказать.

Для идеального газа постоянной теплоемкости зависимость расхода от давления легко может быть прослежена аналитически.

В этом случае имеет место соотношение

$$I = c_p T = \frac{c_p}{R} RT = \frac{c_p c_v}{(c_p - c_v) c_v} p v = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{k-1}; \quad (\text{III-16})$$

$$I_0 = \frac{c_0^2}{k-1}.$$

В адиабатическом потоке

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}; \quad I = I_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}; \quad c^2 = k \frac{p}{\rho} = c_0^2 \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (\text{III-17})$$

Введем безразмерные переменные, относя соответствующие величины к их значениям в состоянии покоя; скорость отнесем к скорости звука в исходном газе. Обозначим безразмерную плотность $r = \rho/\rho_0$, давление $\pi = p/p_0$, скорость звука $\gamma = c/c_0$, скорость движения $\varphi = u/c_0$, расход на 1 см² сечения $\psi = r\varphi = \rho u/\rho_0 c_0$.

Для них получим следующие уравнения:

$$r = \pi^{\frac{1}{k}}; \quad \gamma = \pi^{\frac{k-1}{2k}}; \quad \varphi = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left(1 - \pi^{\frac{k-1}{k}} \right)};$$

$$\psi = \pi^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{2}{k-1} \left(1 - \pi^{\frac{k-1}{k}} \right)}. \quad (\text{III-18})$$

На рис. 6 представлен ход кривых r , γ , φ , ψ в зависимости от π для двухатомного газа (например воздуха), у которого

$$k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} = 1.4.$$

При изменении π от 1 до 0 величина r падает от 1 до 0, φ монотонно растет от 0 до $\sqrt{5} = 2.24$; γ падает от 1 до 0. Величина ψ достигает максимума 0.58 при $\pi = 0.53$; $\psi = 0$ при $\pi = 0$ и $\pi = 1$. В точке максимума ψ при $\pi = 0.53$, $\gamma = \varphi = 0.90$.

На примере истечения воздуха комнатной температуры и атмосферного давления в пространство с пониженным давлением покажем, как следует пользоваться графиком рис. 6, составленным в безразмерных величинах. При 17° С, $p_0 = 1$ ата, ρ_0 воздуха = 1.2 кг/м³, $c_0 = 340$ м/сек. Найдем режим истечения при $p = 0.7$ ата, $\pi = 0.7$. На графике находим $r = 0.785$, откуда $\rho = 0.785 \cdot 1.2 = 0.93$ кг/м³; $\varphi = 0.67$, откуда $u = 0.67 \cdot 340 = 227$ м/сек.; $\gamma = 0.94$; $c = 324$ м/сек. Падение скорости звука при истечении есть следствие охлаждения при

адиабатическом расширении. Наконец, $\psi = 0.54$, чему отвечает секундный расход $0.54 \cdot 1.2 \cdot 340 = 220 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{сек.}$

Максимальная скорость при стационарном истечении в вакуум достигает $340 \sqrt{5} = 760 \text{ м/сек.}$

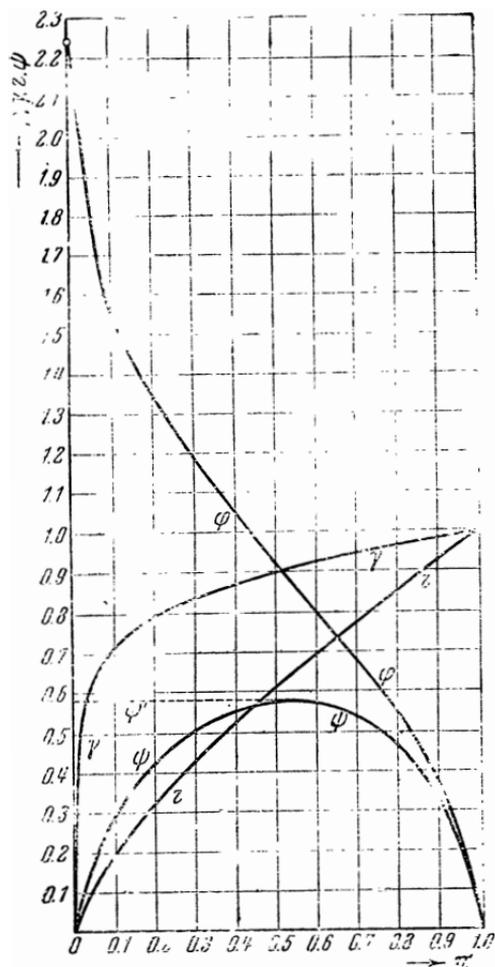


Рис. 6. Зависимость безразмерной плотности (r), скорости (ϕ), скорости звука (γ) и расхода (ψ) от безразмерного давления (π) в двухатомном газе с постоянной теплоемкостью, $k = 1.4$, при стационарном адиабатическом истечении.

При максимуме ψ скорость достигает 306 м/сек, при этом максимальный расход равен $236 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{сек.}$

Величины, относящиеся к тому состоянию газа, при котором достигается максимальный расход на единицу сечения (максимум ρ_0 , максимум ψ), называют критическими и отмечаем ниже индексом $к.p.$

Рассмотрим схему опыта по истечению газа (рис. 7).

Левый сосуд, содержащий газ под давлением p_0 , снабжен простым сужающимся насадком (соплом). При уменьшении противодействия p_n в правом сосуде, в который вытекает газ, количество вытекающего газа, согласно формуле Венцеля-Сен-Венана (III-12, III-18), растет. Однако, если следовать формуле Венцеля-Сен-Венана, при всех режимах принимая давление в выходном сечении сопла p равным давлению в правом сосуде p_n , то, начиная с некоторого значения противодействия, дальнейшее снижение противодействия должно бы привести к уменьшению количества вытекающего газа; в частности для истечения в вакуум получится бессмысленный вывод, что секундный расход газа равен 0.

То обстоятельство, что при достижении максимума количества истекающего вещества скорость истечения как раз равна

скорости звука (см. III-15), позволяет объяснить этот парадокс и предсказать, что в действительности будет происходить при p_n , меньшем $p_{кр}$ критического (т. е. при p_n , меньшем $0.53 p_0$ для воздуха).¹

Действительно, с того момента, как достигнуто критическое истечение, никакие сигналы не могут быть сообщены обратно истекающему газу через слой газа, движущийся со скоростью, равной скорости звука. При p_n , меньшем $p_{кр}$, давление и скорость движения в сопле не будут более меняться, оставаясь все время равными критическому давлению и критической скорости.

Количество истекающего вещества, достигнув максимума, более не будет меняться при меньших значениях противодавления (пунктир на рис. 6).



Рис. 7. Схема опыта для истечения из сужающейся насадки (сопла).

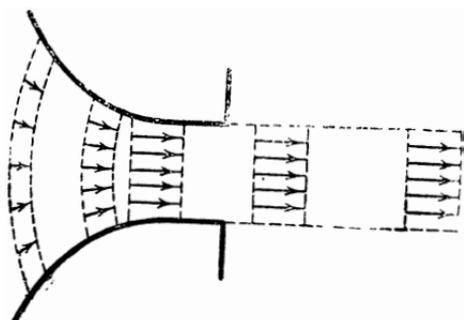


Рис. 8. Истечение струи при противодавлении, превышающем критическое давление. Подкритическая (дозвуковая) струя в свободном пространстве. Давление на выходе струи равно давлению в окружающей среде. Скорость постепенно затухает по мере расширения струи вследствие подсоса окружающего вещества.

При противодавлении p_n таком, что $p_0 > p_n > p_{кр}$, устанавливается режим истечения, при котором давление p в струе на выходе из сопла в точности равно давлению p_n в той среде, в которую газ вытекает. Значения скорости и расхода могут быть взяты с графика рис. 6 подстановкой $\pi = p_n/p_0$.

Вытекающая струя на довольно большом расстоянии (несколько диаметров сопла) сохраняет постоянную скорость на оси, частицы газа движутся параллельно с одинаковой ско-

¹ История вопроса прекрасно изложена в руководстве Стодоли [89].

ростью (рис. 8); далее струя постепенно расширяется и замедляется за счет перемешивания с окружающей средой.¹

Если противодействие в среде, в которую вытекает струя p_n , меньше критического давления $p_{кр}$, режим истечения в сопле не зависит от p_n . В выходном сечении сопла давление равно $p_{кр}$ и составляет определенную долю давления p_0 в резервуаре (немного больше половины p_0), независимо от величины p_n . Однако в этом случае выходящая струя не находится в равновесии с окружающей средой; разность давлений $p_{кр} - p_n$ обуславливает ускорение струи; при этом наряду с увеличением составляющей скорости, направленной по оси сопла, появляются радиальные составляющие скорости, обуславливающие расширение струи (рис. 9).

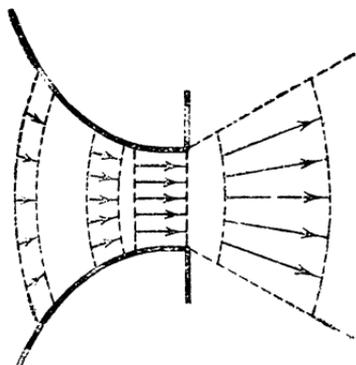


Рис. 9. Истечение струи из сужающейся насадки (сопла) при противодействии, меньшем критического. Давление в струе в выходном сечении равно критическому, по выходе из сопла давление в струе падает, скорость увеличивается, струя расширяется.

Энергия радиальных составляющих не может быть использована, поэтому работоспособность струи оказывается меньше, чем следует при заданном перепаде давления.

Экспериментальное осуществление в сопле скорости истечения, превышающей скорость звука и имеющей определенное, заданное направление, было впервые достигнуто шведским инженером Лавалем.² В согласии с формулами, выписанными выше, когда скорость истечения превышает критическую величину, равную скорости звука, расход на единицу площади q_v падает, и, следовательно, для сохранения потока вещества, согласно (III-1), нужно увеличить сечение сопла.

Таким образом, Лаваль пришел к конструкции сопла, носящего его имя и изображенного на рис. 10.

Дадим снова численный пример для течения воздуха. Рассчитаем сопло с расходом 1 кг/сек при скорости истечения 527 м/сек. Вспоминая определение безразмерных величин, найдем с помощью формул (III-18) или графика рис. 6, что для

Дадим снова численный пример для течения воздуха. Рассчитаем сопло с расходом 1 кг/сек при скорости истечения 527 м/сек. Вспоминая определение безразмерных величин, найдем с помощью формул (III-18) или графика рис. 6, что для

¹ Процесс перемешивания и замедления струи исследовали Г. Н. Абрамович (ЦАГИ) и С. Н. Сыркин и Ляховский (ЦКТИ).

² В одноступенчатой паровой турбине Лавала для достижения хорошего термического к. п. д. необходимо было работать на большом перепаде давлений $p_0 - p_n$, превышающем критический. Для использования его без потерь и понадобился переход к сверхзвуковой скорости.

$$\varphi = \frac{u}{c_0} = 527/340 = 1.55$$

необходимое противодействие $\frac{p}{p_0} = \pi = 0.1$.

Таким образом, при втекании воздуха из атмосферы $p_0 = 1$ ата, противодействие составляет 0.1 ата. При этом $\varphi = 0.3$, расход на единицу площади составляет:

$$0.3 \rho_0 c_0 = 0.3 \cdot 1.2 \text{ кг/м}^3 \cdot 340 \text{ м/сек} = 124 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{сек.}$$

Заданному общему расходу 1 кг/сек отвечает сечение на выходе сопла $1:124 = 0.008 \text{ м}^2 = 80 \text{ см}^2$, диаметр круглого

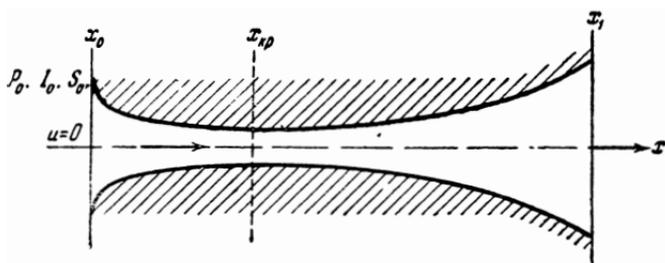


Рис. 10. Сопло Лавала для получения направленной струи со сверхзвуковой скоростью.

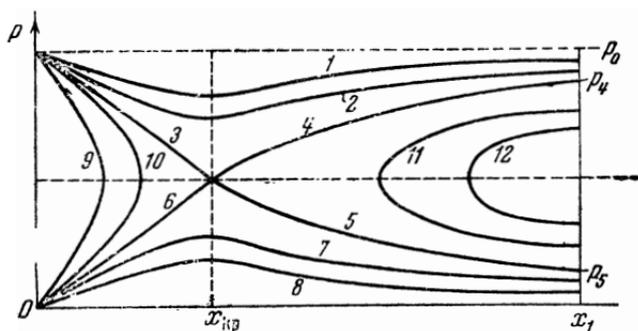


Рис. 11. Различные режимы стационарного адиабатического истечения в сопле Лавала.

отверстия 101 мм. В критическом, наиболее узком, сечении $\varphi = 0.58$, расход $240 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{сек}$, площадь сечения 42 см^2 , диаметр 73 мм.

Задавшись определенным состоянием газа в сосуде, из которого он истекает, построим все возможные режимы истечения (рис. 10 и 11), отличающиеся величиной секундного расхода газа A . Построение может быть проведено с помощью кривой ψ рис. 6. Для каждого значения абсциссы x находим на рис. 10 сечение сопла F , вычисляем величину ψ , равную $A/Fc_0\rho_0$, наконец, зная φ , ищем соответствующие значения

безразмерного давления. Так как кривая ψ рис. 6 имеет максимум, то при некотором произвольно заданном значении ψ мы будем иметь, как правило, либо два, либо ни одного значения π .

Если выбрать малый расход A , так что $A < F_{кр} \psi_{кр} \rho_0 c_0$, мы получаем пару кривых, например, 1 и 8 или 2 и 7. Нижние кривые 7 и 8 могут быть осуществлены лишь в том случае, если в сопло слева поступает газ, уже движущийся со сверхзвуковой скоростью, что противоречит заданному состоянию покоя при $x=0$.

Верхние кривые 1 и 2 представляют совершенно разумные решения, осуществляющиеся в действительности при противодавлении в интервале $p_0 - p_4$. Качественно движение ничем не отличается от движения несжимаемой жидкости в трубке Вентури; расширяющаяся часть сопла Лавала играет роль диффузора, восстанавливающего часть динамического напора жидкости. При попытке построить режим с расходом больше критического, $A > F_{кр} \psi_{кр} \rho_0 c_0$, в середине трубки мы не имеем никакого решения. Соответствующие пары кривых 10 и 11, 9 и 12 не отвечают никакому реальному движению жидкости.

Наконец, при критическом расходе $A = F_{кр} \psi_{кр} \rho_0 c_0$ вышедший из исходной точки p_0, x_0 отрезок кривой 3 попадает в критическом сечении в точку разветвления. При противодавлении $p = p_4$ осуществляется линия 3—4, примыкающая к подзвуковым режимам 7 и 2.

При противодавлении $p_n = p_5$ осуществляется линия 3—5, сопло Лавала дает сверхзвуковой поток.

Дальнейшее уменьшение давления не может изменить движения в сопле. При $p_n < p_5$ в сопле попрежнему осуществляется линия 3—5 с последующим расширением на выходе из сопла.

Однако мы не можем сказать, что произойдет при противодавлении, лежащем в промежутке между p_4 и p_5 . Ответ нам удастся получить лишь после разбора теории ударных волн (см. § XVIII). Построение формы сопла, дающей строго равномерный поток, выходит за рамки одномерной теории. По этому вопросу см., например, работу Буземана [40].

§ IV. Свойства сверхзвукового потока

В предыдущем параграфе мы рассмотрели теорию сопла Лавала, позволяющего получить стационарный параллельный поток газа, движущегося со сверхзвуковой скоростью.

Со времени изобретения сопла Лавала было проведено значительное количество исследований свойств сверхзвуковых потоков, которые во многих отношениях резко отличаются от струй газа, движущихся со скоростью меньшей скорости звука.

По образному выражению Прандтля, сверхзвуковой поток слепо натывается на препятствие. Это значит, что возмущение от препятствия не успевает распространиться вперед, не успевает предупредить частицы жидкости, движущиеся навстречу препятствию, о том, что их ожидает; в результате характер обтекания препятствий, характер движения сверхзвукового потока оказывается совершенно отличным от обычных картин движения несжимаемой жидкости.¹

Для пояснения рассмотрим сначала простейший эксперимент: в некотором потоке, начиная с определенного момента

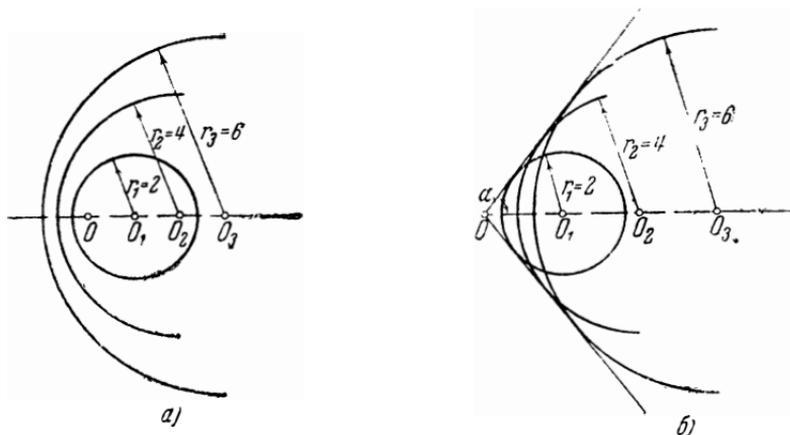


Рис. 12. Распространение возмущения от источника в потоке, движущемся со скоростью, меньшей скорости звука (а) или большей скорости звука (б).

времени, мы будем периодически, через равные промежутки, создавать в определенной точке то или иное малое возмущение; в покоящемся газе от вызванных нами возмущений распространились бы шаровые волны со скоростью, равной скорости звука; в движущемся потоке на распространение шаровых волн наложится движение потока как целого, другими словами, — шаровые поверхности возмущения будут сноситься потоком; однако, в зависимости от того, больше или меньше скорость потока скорости звука, возникнут две совершенно различные картины.

На рис. 12 (а и б) возмущение производится через равные интервалы времени τ в точках O каждого рисунка. За время τ на рис. 12б поток проходит расстояние $u\tau=2.5$ см; на рис. 12а, где скорость движения меньше, расстояние $u\tau=$

¹ Из формул § II видно, что у несжимаемой жидкости $\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$, $\frac{dp}{d\rho} = \infty$, $c = \infty$, скорость звука бесконечна, движение остается „подзвуковым“ при любой скорости.

$= 1.5$ см. Скорость звука c в обоих случаях одинакова и такова, что $ct = 2$ см.¹ В покоящемся газе мы получили бы ряд концентрических шаров R_1, R_2, R_3 ; радиус каждого следующего шара на 2 см больше радиуса предыдущего. На рис. 12а и б показано, как эти шаровые поверхности сносятся потоком.

В потоке, движущемся со скоростью, меньшей скорости звука, возмущение сможет пройти навстречу потоку, и постепенно, с течением времени, весь поток окажется возмущенным. Возмущение заполнит всю область, в которой движется жидкость (рис. 12а).

В сверхзвуковом потоке, как видно из рис. 12б, возмущение охватит лишь часть пространства, заключенного внутри конуса вращения. Угол этого конуса нетрудно найти. Как видно из рисунка, $\sin \alpha$ (где α есть центральный угол конуса) равняется c/u . Если источником возмущений является то или иное препятствие, помещенное в поток газа, то в подзвуковом потоке мы получим обычную картину обтекания препятствия, при которой скорость движения во всей области течения жидкости отличается от той скорости движения, которая была бы в отсутствии препятствия. Вызванное препятствием возмущение с течением времени охватывает весь объем, плавно спадая к нулю на значительном расстоянии от препятствия. В сверхзвуковом потоке вызванное препятствием возмущение движения будет отличаться от нуля только внутри конуса с найденным выше центральным углом (о движении в непосредственной окрестности обтекаемого тела, где возмущение нельзя считать малым, см. § XVII).

Так мы получаем характерную для сверхзвукового потока картину стационарных звуковых волн, отходящих от любого помещенного в сверхзвуковой поток препятствия или возмущения. Эти волны, так называемые волны Маха (по имени исследовавшего их венского физика), позволяют чрезвычайно легко определить скорость движения потока или, наоборот, скорость движения тела в неподвижном газе по измерению угла, образуемого поверхностью волны с направлением движения (угла Маха). Вообще говоря, если неизвестна скорость звука рассматриваемого газа, то во всяком случае наблюдение волн Маха и измерение угла между ними позволяет найти одну связь — отношение скорости движения к скорости звука исследуемого газа.

Однако в тех случаях, когда неизвестно состояние движущегося газа в данном месте потока, обычно бывает известно его „состояние покоя“ — состояние в том сосуде, из которого происходит истечение газа и где скорость газа мала. Уравнение Бернулли и уравнение угла Маха достаточны для

¹ Рисунок 12 выполнен в уменьшенном масштабе.

определения двух величин — скорости звука и скорости движения

$$I_0 = \frac{c^2}{k-1} + \frac{u^2}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{c}{u}, \quad (\text{IV-1})^1$$

откуда

$$c^2 = I_0 \frac{2(k-1) \sin^2 \alpha}{k-1+2 \sin^2 \alpha} = c_0^2 \frac{2 \sin^2 \alpha}{k-1+2 \sin^2 \alpha}; \quad (\text{IV-2})$$

$$u^2 = c_0^2 \frac{2}{k-1+2 \sin^2 \alpha}$$

По формулам (III-18) найдем давление и плотность газа в потоке (в предположении постоянства энтропии, верном при отсутствии ударных волн и в коротком сопле).

Замечательна глубокая аналогия между явлениями, которые мы наблюдаем в газовой динамике, и течением тяжелой несжимаемой жидкости в открытом сверху канале [7, 22, 73]. Эта аналогия позволяет легко воспроизвести „сверхзвуковой“ поток жидкости с открытой поверхностью, легко осуществить изящные демонстрационные опыты и, в частности, показать стационарное распространение волн по поверхности жидкости в случае, если жидкость движется со „сверхзвуковой“ скоростью.

Указанная аналогия между жидкостью со свободной поверхностью и сжимаемым газом имеет простое физическое основание. Действительно, рассмотрим открытый сверху канал, в который налита жидкость. Меняя давление, подпирая жидкость в канале, мы можем менять уровень жидкости и тем самым менять количество жидкости, приходящееся на единицу поверхности дна канала или на единицу длины канала. Процесс выжимания вверх жидкости, находящейся в канале, совершенно аналогичен процессу сжатия газа, находящегося в закрытой со всех сторон трубке. Так, например, канал прямоугольного сечения эквивалентен газу, подчиняющемуся закону Бойля-Мариотта, ибо в канале с прямоугольным сечением количество жидкости, приходящееся на единицу поверхности дна, т. е. то, что можно назвать плотностью (отнесенной к единице поверхности), пропорционально давлению на дно. Роль скорости звука газовой динамики, в случае движения жидкости с открытой поверхностью, играет скорость распространения по поверхности жидкости гравитационных волн. Так же, как в газовой динамике, в известных условиях можно осуществить „сверхзвуковой“ поток жидкости, т. е. поток, в котором скорость движения жидкости больше скорости распространения волн по ее открытой поверхности. Такой поток легко наблюдать, направив струю воды с высоты в несколько десятков сантиметров на гладкую плоскую поверхность. Вблизи места падения струи, на поверх-

¹ Для написания (IV-1) используем (III-5) и (III-16).

ности внутри круга диаметром в несколько сантиметров, слой жидкости очень тонок, жидкость движется с большой скоростью. Введя в этом месте то или иное препятствие, например иглу, мы наблюдаем характерную картину стационарных поверхностных волн, исходящих от иглы под определенным углом и вполне аналогичных волнам Маха в сверхзвуковом потоке газа. За пределами круга диаметром в несколько сантиметров толщина слоя жидкости на протяжении нескольких миллиметров резко увеличивается, что сопровождается падением скорости движения жидкости (аналогия ударной волны, рассматриваемой ниже). В этой, второй области, где слой жидкости сравнительно толст, а скорость движения жидкости соответственно невелика (меньше скорости распространения колебаний по поверхности жидкости), свойства потока совершенно иные.

Часто встречающееся поэтическое противопоставление широкой полноводной реки, плавно текущей в своих берегах, и горного ручья, быстро, с огромной яростью, слепо несущегося по камням, оказывается гораздо глубже, чем это можно было думать. Действительно, в этих случаях мы имеем дело не только с количественным различием скорости движения. Благодаря наличию определенной характеристической скорости — скорости распространения волн по границе раздела воды и воздуха, — два потока (полноводная река и горный ручей) оказываются качественно различными.

Измерение температуры сверхзвукового потока в сопле Лавала привело к весьма интересным результатам. В противоположность тому, что дает расчет по формулам предыдущего параграфа, температура газа, измеренная помещенным в поток термометром или термопарой, понижается незначительно, оказываясь весьма близкой к температуре газа в резервуаре, из которого происходит истечение. Так, воздух, истекая из резервуара, в котором он имел температуру 300°K , должен иметь в критическом сечении температуру 250°K и в сечении, в котором скорость потока равна двойной скорости звука ($2c$), $167^{\circ}\text{K} = -106^{\circ}\text{C}$. Однако измеренная термопарой температура в этом месте оказывается равной примерно 280°K . В действительности такой результат является вполне естественным, ибо измерение термометром или термопарой не делает различия между тепловым движением, т. е. хаотическим движением молекул, и массовым движением газа, т. е. организованным потоком. Понятно поэтому, что измеренная термометром или термопарой температура является в действительности мерилom полной энергии газа, мерилom суммы тепловой и кинетической энергии газа, т. е. измеряет величину, которая в потоке практически не меняется. Если мы рассмотрим пластинку, помещенную в поток нормально направлению движения, то, прослеживая линию тока вблизи пластинки, мы убедимся, что, подходя к пластинке, движущийся газ подвергается торможению, с чем,

по теореме Бернулли, связано обратное возрастание давления и — в условиях газа — соответствующее возрастание температуры до тех значений, которые давление и температура имели в покоящемся газе в резервуаре, из которого газ вытекает через сопло.¹ Естественно поэтому, что расположенная нормально к движению потока пластинка примет не истинную температуру движущегося газа, а примет температуру газа заторможенного у пластинки, совпадающую с начальной температурой газа, которую он имел до того, как он пришел в движение (т. н. температуру покоя).

Рассматривая пластинку, расположенную тангенциально к линиям тока, найдем другую причину повышения ее температуры; в тонком пограничном слое вблизи пластинки, где скорость движения сильно меняется на малом расстоянии, будет происходить выделение значительных количеств тепла в результате внутреннего трения газа. Из молекулярно-кинетической теории газов следует связь между коэффициентом внутреннего трения и теплопроводностью газа. Связь между эффективной вязкостью и эффективной теплопроводностью в турбулентном потоке также удовлетворяет этому соотношению. Благодаря этой связи оказывается возможным в общем виде получить соотношение между выделением и отводом тепла в пограничном слое.

Произведенный Польгаузеном расчет [74] показывает, в согласии с опытом, что тангенциально расположенная пластинка также примет в газе температуру, весьма близкую к температуре покоя (ср. также [6, 31]). От 10% до 85% кинетической энергии перейдет в тепловую энергию газа в пограничном слое вблизи пластинки. Соответственно температура пластинки будет колебаться между температурой покоя и 0.85 температуры покоя плюс 0.15 истинной температуры газа²

$$T_{\text{покоя}} \geq T_{\text{пласт}} \geq 0.85 T_{\text{покоя}} + 0.15 T_{\text{газа}}. \quad (\text{IV-3})$$

Для того чтобы измерить истинную температуру газа, движущегося со звуковой или близкой к звуковой скоростью, необходимо прибегнуть к способу, в котором термометр двигался бы вместе с газом с той же скоростью. Практически удобным способом является развитая в последнее время методика измерения температуры по явлению обращения спектральных линий. Однако эта методика применима лишь при сравнительно высоких температурах, во всяком случае выше 1000° С.

¹ Как мы увидим в § XVII, при наличии ударной волны давление полностью не восстанавливается; однако температура попрежнему полностью восстанавливается до величины „температуры покоя“ при торможении.

² Мы рассматриваем теплообмен пластинки только с газом. Отвод тепла внутрь пластинки или излучение с поверхности пластинки понижают температуру по поверхности (см. Кибель [10]).

Вопрос о температуре, которую принимает поверхность, обтекаемая движущимся с большой скоростью газом, имеет большое техническое значение, ибо развитие газовых турбин и их к. п. д. определяются в настоящее время именно максимальными температурами, которые способны выдерживать лопатки газовой турбины. Как мы видим, недопустимо приравнять температуру лопаток к температуре газа. Температура лопаток всегда будет несколько больше за счет кинетической энергии движущегося газа.

§ V. Течение газа в длинной цилиндрической трубе

Рассмотрим движение газа по длинной цилиндрической трубе, теплоизолированной снаружи. Мы ввели теплоизоляцию для того, чтобы иметь возможность считать полную энергию потока постоянной во всех сечениях. Однако в противоположность тому, что мы делали при рассмотрении сопла Лавала, коротких сопел и насадок, мы здесь не будем больше пренебрегать трением газа о стенки, т. е. сопротивлением движению потока. Совместное действие выделения тепла, трения вблизи стенок и теплообмена между стенками и газом приведет к тому, что температура стенок не будет отличаться от начальной температуры газа в резервуаре, из которого он истекает (см. предыдущий параграф), а следовательно, в том частном случае, когда газ в резервуаре находится при комнатной температуре, теплоизоляция в действительности не понадобится.

Вводя гидравлическое сопротивление движению потока, т. е. вводя необратимые процессы внутреннего трения, мы не можем больше считать энтропию потока постоянной, в силу чего наши результаты и методы будут несколько отличаться от результатов и методов рассмотрения § III.

Составим уравнения рассматриваемого движения, считая сечение трубы постоянным. Из постоянства полного расхода газа в любом сечении трубы мы получим первое уравнение:

$$\rho u = M = \text{const.} \quad (V-1)$$

Также постоянным является полный поток энергии (плюс работа сил давления), отнесенный к единице сечения трубы:

$$\rho u + \rho u E + \frac{\rho u^3}{2} = \text{const.} \quad (V-2)$$

Но так как постоянно и само количество протекающего вещества, то, разделив второе уравнение на первое, мы получим постоянство суммы энтальпии I и кинетической энергии единицы массы в потоке:

$$I + \frac{u^2}{2} = \text{const} = I_0. \quad (V-3)$$

Здесь, так же как и раньше, мы обозначили через I_0 эн-

тальпию газа до входа в трубу, т. е. в резервуаре, там, где скорость движения газа весьма мала.

Замечательно, что из двух уравнений — уравнения сохранения вещества и уравнения сохранения энергии — мы можем исключить скорость и получить, таким образом, определенную связь между характеризующими состояние газа величинами (давлением и объемом), притом связь, которая не зависит от механизма и величины трения [51, 89]. Графически эта связь изображается кривыми в плоскости p, v или кривыми в плоскости I, S , так называемыми линиями Фанно (рис. 14).

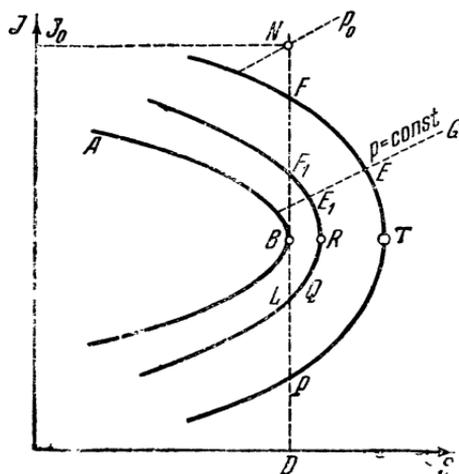


Рис. 14. Линии Фанно в координатах энтропия — теплосодержание (S, I). Вдоль этих линий меняется состояние газа при течении его по трубе постоянного сечения в отсутствие теплообмена, но при наличии сопротивления. Находятся из условий сохранения потока вещества и потока энергии в трубе

действующих нормально контрольным плоскостям 1 и 2, и силы сопротивления (трения) Φ , действующей на боковую поверхность 3 цилиндра, вырезанного плоскостями 1 и 2 в трубе:

$$MF(u_2 - u_1) = (p_1 - p_2)F + \pi d \Delta x \Phi. \quad (V-4)$$

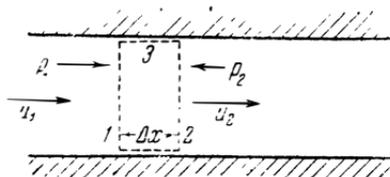


Рис. 13. Элементарный цилиндр, вырезанный в длинной трубе. На торцах втекает и вытекает вещество, действуют силы давления; на боковой поверхности действуют силы трения о стенки трубы.

От сопротивления трубы, т. е. от величины диссипативных сил, будет зависеть лишь скорость движения по линии Фанно точки, изображающей состояние вещества.

Рассмотрим элемент длины трубы Δx (рис. 13) и выясним, как меняется на протяжении Δx скорость и давление газа вследствие действия сопротивления. Общее количество вещества, протекающее в единицу времени через сечение трубы, $quF = MF = \text{const}$.

Количество движения, переносимое потоком в единицу времени, $MFu = qu^2 F$.

Согласно второму закону Ньютона, изменение количества движения при прохождении расстояния Δx между двумя контрольными плоскостями 1 и 2 равно импульсу сил давления, дей-

Вводя коэффициент сопротивления обычным способом, принятым в гидродинамике несжимаемой жидкости, напомним для круглой цилиндрической трубы диаметра d силу сопротивления Φ на единицу боковой поверхности:

$$\Phi = - \zeta \rho u |u| / 8. \quad (V-5)$$

Найдем из (V—4), переходя к бесконечно малым и к единице сечения, уравнение количества движения, в которое войдет сопротивление трубы. В противоположность первым двум мы не можем написать его сразу в интегральной форме. Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$-\frac{d(\rho u^2 + p)}{dx} \equiv -\frac{d(Mu + p)}{dx} = \frac{\zeta}{d} \frac{\rho u |u|}{2}. \quad (V-6)$$

Самый вид последнего члена, несколько отличающийся от обычного написания, связан с тем, что знак силы сопротивления зависит от знака скорости. Сила сопротивления всегда направлена против направления скорости движения газа что теряется при обычном написании $\frac{dp}{dx} = \zeta \rho u^2 / 2d$, или $\Phi = \zeta \rho u^2 / 8$.

В плоскости I, S линии Фанно, отвечающие различным значениям расхода M (см. ф-лу V-1), имеют вид, изображенный на рис. 14. Для идеального газа энтальпия I с точностью до множителя совпадает с температурой. $I-S$ -диаграмма отличается от $T-S$ -диаграммы только масштабом.

Величина M постоянна вдоль каждой линии и является параметром, меняющимся от одной линии Фанно к другой, уменьшаясь слева направо, так как при данной температуре с ростом энтропии падает плотность.

Выясним, как движется точка, изображающая состояние газа, вдоль линии Фанно под действием сопротивления по мере движения газа по трубе.

С помощью известного термодинамического выражения дифференциала энтальпии, напомним уравнение сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(I + \frac{u^2}{2} \right) &= \frac{dI}{dx} + \frac{u du}{dx} = \frac{v dp}{dx} + \frac{T dS}{dx} + \frac{u du}{dx} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{T dS}{dx} + \frac{u du}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (V-7)$$

Подставляя определенное законом сохранения вещества (V-1) значение скорости, выраженное через постоянную по всей трубе величину M , получим для энтропии следующее уравнение:

$$T \frac{dS}{dx} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} + \frac{M du}{dx} \right). \quad (V-8)$$

Используя уравнение (V-6), найдем окончательно:

$$TdS = \frac{\xi}{2d} |u| u dx. \quad (V-9)$$

Если знак dx совпадает со знаком скорости движения потока u , т. е. если мы следуем, меняя x в направлении движения жидкости, приращение энтропии всегда положительно, так как положительно произведение udx .

Движение вещества при наличии трения сопровождается превращением механической энергии в тепловую; в теплоизолированной трубе при отсутствии отбора тепла этот процесс сопровождается ростом энтропии текущего по трубе вещества.

Правая часть (V-9) представляет не что иное, как работу, совершаемую силами сопротивления на элементе длины dx , отнесенную к единице массы протекающей жидкости.

При этом выше максимума энтропии, на отрезке AB линии Фанно (в дозвуковой области, как мы сейчас увидим), движение сопровождается падением давления так же, как в несжимаемой жидкости, как видно из сопоставления наклона линии Фанно и линий $p = \text{const}$ в правой части рис. 14. Напротив, ниже точек B, R, T при сверхзвуковом течении сопротивление вызывает рост давления вдоль потока; сила сопротивления и рост давления преодолеваются потоком за счет динамического напора, за счет падения скорости, связанного с ростом плотности и со сжатием газа при повышении давления.

Соответственно в дозвуковом потоке в направлении движения u растет, а I падает. В сверхзвуковом потоке u падает, а I растет.

Покажем, что в точке B максимума энтропии скорость движения равна скорости звука. Это легко показать на рис. 14, если провести в точке B вертикальную касательную. Мы замечаем, что в точке B , где $S = \text{maximum}$ при $M = \text{const}$ (движение вдоль линии Фанно), имеет место также $M = \text{maximum}$ при $S = \text{const}$ (движение вдоль касательной). Что последнее условие приводит к равенству скорости движения и скорости звука, было показано в § III [формулы III-12—III-5].

Впрочем, доказательство нетрудно провести непосредственно: вблизи точки B , очевидно,

$$\left(\frac{dS}{dQ}\right)_{\text{Фанно}} \rightarrow 0; \quad \left(\frac{dp}{dQ}\right)_{\text{Фанно}} \rightarrow \left(\frac{dp}{dQ}\right)_{S = \text{const}} = c^2. \quad (V-10)$$

Из уравнения неразрывности (V-1) следует:

$$\frac{du}{u} + \frac{dQ}{Q} = 0; \quad du = -u \frac{dQ}{Q}. \quad (V-11)$$

В уравнении (V-7), переходя от дифференцирования по координате x к дифференцированию по плотности ρ , получим в точке касания:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} + T \frac{dS}{d\rho} + u \frac{du}{d\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} c^2 - \frac{1}{\rho} u^2 = 0; \quad (V-12)$$

$$u^2 = c^2,$$

что и требовалось доказать.

Нам нетрудно теперь построить физическую картину движения газа по длинным трубам. На рис. 15 представлены кри-

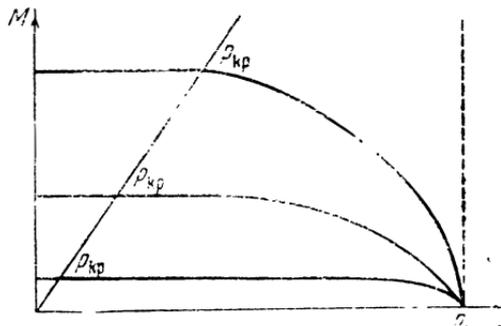


Рис. 15. Зависимость расхода (M) от противодавления (p) для труб разной длины при данном давлении на входе (p_0). Верхняя кривая — для короткого сопла, нижняя — для самой длинной трубы. Прямая отделяет слева область критического истечения со скоростью, равной скорости звука на выходе; при меньшем критическом противодавлении M не зависит от p .

вые зависимости количества M газа, вытекающего в единицу времени, от давления в конце трубы p при заданном давлении p_0 в резервуаре, из которого происходит истечение.

Различные кривые относятся к трубам различной длины. Верхняя кривая относится к случаю короткого сопла, рассмотренного в начале § III. Чем длиннее труба, тем меньше протекающее через нее (при данной разности давлений) количество газа. Во всех случаях понижение давления ниже некоторого критического значения не вызывает больше увеличения расхода газа. Однако это критическое давление само тем меньше, чем длиннее труба. При критическом истечении на выходе из трубы во всех случаях скорость равна скорости звука; отношение температуры газа к начальной его температуре в резервуаре и соотношение между скоростью газа и скоростью звука в исходном газе в резервуаре также неизменны, независимо от длины трубы. Однако в зависимости

от длины трубы меняется плотность истекающего газа, которая при данной его температуре пропорциональна давлению. Таким образом, критические точки для различных труб на рис. 3 соединяются между собой прямой, выходящей из начала координат. Согласно Стодоле, при обычном значении коэффициента сопротивления технических труб критическое (максимальное) M при переходе от короткого сопла к трубе, длиной 360 диаметров, падает в 2 раза, при 1000 диаметрах — в 3 раза, при 5000 диаметрах — в 6 раз.

Как бы мы ни уменьшали давление на выходе из цилиндрической трубы, мы не сможем осуществить сверхзвуковую скорость в трубе. Для того чтобы осуществить ее, необходимо, чтобы газ входил в трубу, уже обладая сверхзвуковой скоростью.

На $I-S$ -диаграмме рис. 14 процесс входа газа в трубу через короткое соединительное сопло AB^1 (рис. 16а) из резервуара описывается вовсе не линией Фанно, а адиабатой, вертикально опускающейся из точки N (рис. 14), описывающей начальное состояние вещества. При простом суживающемся сопле состояние вещества на входе в трубу изображается какой-либо точкой на отрезке NB , например F или F_1 . Состояние вещества на выходе из трубы определяется заданным противодавлением p ; изображающая точка

должна лежать на изобаре EE_1 . Выбор той линии Фанно, по которой мы перейдем с адиабаты NB на изобару, и соответствующей величины расхода газа при данных p_0 и p , зависит от длины трубы, зависит от того, чему равен рост энтропии вдоль трубы. При увеличении длины трубы мы перейдем от режима NF_1E_1 к режиму NFE , — расход уменьшится.

Если противодавление на выходе трубы меньше критического, осуществится критическое истечение, режим, описываемый отрезками NF_1E_1R или $NFET$, — в зависимости от длины трубы — с последующим расширением газа, ср. § III, рис. 9.

Помещая у входа в трубу сопло Лавалья (рис. 16б), мы осуществим на входе в трубу сверхзвуковую скорость, осу-

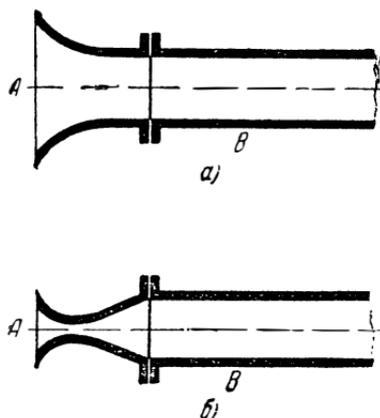


Рис. 16. Соединение трубы с сужающимся соплом (а) и с соплом Лавалья (б). Только во втором случае можно получить сверхзвуковой поток внутри трубы.

¹ Буквы AB рис. 16а, б не имеют отношения к точкам A и B рис. 14.

ществом состояние, изображающееся точкой на отрезке BD рис. 14, например L .

При получении сверхзвукового потока в сопле Лавала устанавливается режим истечения с вполне определенным расходом M (см. § III); положение точки L на отрезке BD вполне определяется конструктивными данными — сечением сопла в наиболее узком месте и сечением трубы.

Далее, вдоль трубы происходит движение от точки L вправо по линии Фанно. Независимость режима истечения от противодействия p вполне естественна для сверхзвукового потока.

Сверхзвуковой режим, осуществляемый в схеме рис. 16 б, требует достаточно низкого противодействия. Однако в длинной трубе возможно, что рост энтропии вдоль линии LQR упрется в критическую точку R .

Таким образом, в случае длинной трубы со значительным сопротивлением, снабженной соплом Лавала на входе, мы не получим сверхзвуковой скорости на выходе из трубы, как бы мало ни было противодействие. Детальное рассмотрение возникающего режима истечения показывает, что в трубе или в сопле возникает так называемый скачок уплотнения — ударная волна, теория которой будет изложена ниже. Разбор различных режимов течения в трубе при наличии скачков уплотнения аналогичен теории сопла Лавала (см. § XIX). Мы можем здесь только сослаться на работу Буземанна [41]. Подробная библиография, доведенная до 1938 г., дана у Франкля, Христиановича и Алексеевой [27].

§ VI. Движения, зависящие от отношения координат ко времени

Уже во Введении мы говорили о том, что в газовой динамике основной константой движущегося вещества является некая скорость — скорость распространения возмущений, скорость звука. Если отвлечься от диссипативных процессов, вещество не имеет ни характеристической длины, ни характеристического времени. Из молекулярно-кинетической теории газов следует, что при введении диссипативных величин, таких, как вязкость или теплопроводность, в комбинации с характеристическим значением скорости звука, мы получим в качестве характеристических значений длины и времени длину свободного пробега молекул и время свободного пробега, т. е. длину и время чрезвычайно малые. Отсюда следует, что если нас не интересуют микропроцессы, протекающие на расстоянии и за времена порядка длины и времени свободного пробега молекул, если, далее, мы зададимся начальными и граничными условиями движения, не содержащими ни характеристической длины, ни характеристического

времени, то мы придем к особому, весьма важному классу движений. Поскольку в уравнениях движения и в начальных и в граничных условиях мы имеем только характеристические значения скорости, но не длины или времени, сами независимые переменные — координата и время — смогут войти в решение уравнений лишь в комбинации размерности скорости x/t . Иными словами, мы ожидаем решений, которые будут меняться, оставаясь подобными самим себе (автомодельными). С ростом времени, отсчитываемого от момента начала движения, сам характер движения меняться не будет, а будут лишь пропорционально времени увеличиваться масштаб и размер области, охваченной движением. В соответствии с этим мы ожидаем, что все величины будут зависеть от одной лишь комбинации переменных x/t , и сможем от рассмотрения дифференциальных уравнений в частных производных для функций двух переменных — координаты и времени — перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям в случае движения вдоль одной координаты.¹

Напишем эти уравнения; обозначим $\xi = x/t$ и составим сразу формулы преобразования к новой переменной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{t} \frac{d}{d\xi}; & \frac{\partial}{\partial t} &= -\frac{x}{t^2} \frac{d}{d\xi}; \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t} (u - \xi) \frac{d}{d\xi}. \end{aligned} \quad (\text{VI-1})$$

Как это принято в гидродинамике, $\frac{\partial}{\partial t}$ есть знак локальной (в данном месте) производной по времени, $\frac{d}{dt}$ — субстанциальная (т. е. для данного, движущегося со скоростью u объема) производная.

Если некоторая интересующая нас величина f есть функция от новой переменной ξ , т. е.

$$f = f(x, t) = f\left(\frac{x}{t}\right) = f(\xi), \quad (\text{VI-2})$$

то мы элементарно получим следующие формулы:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{df}{d\xi}; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{df}{d\xi}; \quad \frac{df}{dt} = \frac{u - \xi}{t} \frac{df}{d\xi}. \quad (\text{VI-3})$$

Преобразуя с помощью этих формул наши основные урав-

¹ Такой прием упрощения уравнений мы встречаем у Власова [3]. Он использован также Щелкиным и автором [9].

нения (§ I), мы получим уравнение сохранения вещества и уравнение движения в следующем виде:

$$\frac{dQ}{dt} = -Q \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow (u - \xi) \frac{dQ}{d\xi} = -Q \frac{du}{d\xi}, \quad (\text{VI-4})$$

$$Q \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow (u - \xi) p \frac{du}{d\xi} = -\frac{dp}{d\xi}. \quad (\text{VI-5})$$

Как и следовало ожидать, сами величины x и t удается полностью исключить из уравнений.

Построенные уравнения могут быть удовлетворены в сделанном нами предположении, что все величины u , p , Q суть функции только комбинации $\xi = x/t$, но не x и t в отдельности.

Покажем теперь пример начальных и граничных условий, не содержащих также величин x , t в отдельности. Представим себе бесконечную плоскость, которая начинает двигаться в момент $t=0$ с равномерной скоростью w , так что координата плоскости $x_n = wt$, $\frac{x_n}{t} = w$, где $w < 0$ (что означает движение плоскости влево). Рассматриваемый газ находится справа от плоскости и расширяется при ее движении (см. рис. 18).

Будем искать решение наших уравнений, полагая до момента $t=0$ весь газ покоящимся и имеющим одинаковые постоянные значения плотности и давления. После начала движения поршня при $t > 0$ мы налагаем условие, чтобы частицы газа, прилегающие к поршню, двигались со скоростью поршня.

Относительно пространства, заполненного газом, в котором происходит распространение вызванного движением поршня возмущения, мы полагаем, что это пространство неограниченно простирается в сторону $x > 0$; при этом начальные условия не содержат никакого определенного значения длины, граничные условия формулируем только на поверхности поршня; там они содержат только задание скорости движения поршня w .

Мы рассмотрим отдельно в конце параграфа вопрос о том, в какой мере решение, зависящее от x/t , которое мы ищем, может быть использовано для задач с конечной протяженностью заполненного газом пространства.

Сопоставляя выписанные выше уравнения сохранения вещества и движения, мы получим

$$(u - \xi)^2 \frac{dQ}{d\xi} = \frac{dp}{d\xi} \quad (\text{VI-6})$$

и отсюда далее

$$\left[(u - \xi)^2 - \frac{dp}{dQ} \right] \frac{dQ}{d\xi} = 0. \quad (\text{VI-7})$$

Последнее уравнение дает возможность построить два вида решения: первый вид — совершенно тривиальный, $Q = \text{const}$ —

отвечает $p, c, \varrho, u = \text{const}$, т. е. движению всего газа как целого; второй вид решения требует

$$(u - \xi)^2 = \pm \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} = \pm c, \quad (\text{VI-8})$$

где c — скорость звука.

Выберем в последней формуле знак $u - \xi = -c$; $\xi = c + u$, отвечающий рассмотрению движения с правой стороны от поршня, т. е. возмущения, распространяющегося вправо.

Значение ξ , а следовательно, и все значения p, ϱ, u , зависящие от одного ξ , постоянны на линиях $\xi = c + u$, $x = (c + u)t$, на так называемых характеристиках уравнений газодинамики. В рассматриваемой задаче все характеристики суть прямые, выходящие из начала координат $x = 0, t = 0$, т. е. из точки, в которой произошло возмущение (рис. 17).

Используя найденное соотношение $u - \xi = -c$, в котором c полностью определяется состоянием вещества, преобразуем уравнения движения (VI-4) и (VI-5):

$$c d\varrho = \varrho du; \quad \varrho c du = dp. \quad (\text{VI-9})$$

Оба уравнения эквивалентны, так как $dp = c^2 d\varrho$. Связь u, ϱ, p совершенно та же, что и в акустической (слабой) волне § II, распространяющейся в положительном направлении.

Отсюда мы сразу найдем связь между приобретенной газом скоростью и его состоянием:

$$u = \int_{p_0}^p \frac{c d\varrho}{\varrho} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\varrho c}. \quad (\text{VI-10})$$

Для идеального газа с постоянной теплоемкостью, обозначая $c_p/c_v = k$, легко вычислить интегралы:

$$p = p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^k; \quad c^2 = k \frac{p}{\varrho} = c_0^2 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{k-1};$$

$$u = \frac{2kp_0}{(k-1)\varrho_0} \left[\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{k-1}{2}} - 1 \right]. \quad (\text{VI-11})$$

Замечательна следующая форма решения: имея в виду, что

$$\ln c = \frac{k-1}{2} \ln \varrho + \text{const}, \quad \frac{dc}{c} = \frac{k-1}{2} \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad (\text{VI-12}),$$

получим:

$$u = \int \frac{cdq}{q} = \frac{2}{k-1} \int dc = \frac{2}{k-1} (c - c_0). \quad (\text{VI-13})$$

Для того чтобы найти распределение в пространстве интересующих нас величин, т. е. структуру волны, мы должны использовать алгебраическое соотношение, в которое входит пространственная координата ξ , $u - \xi = -c$.

В случае более сложной связи p и q про дифференцируем последнее соотношение по ξ :

$$\frac{du}{d\xi} + \frac{dc}{d\xi} = 1, \quad (\text{VI-14})$$

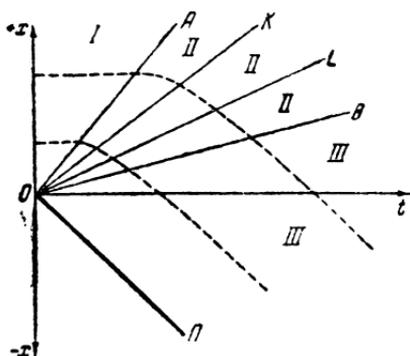


Рис. 17. Характеристики уравнений газодинамики: линии в плоскости координата (x)—время (t) OA , OK , OL , OB . Вдоль них сохраняются все величины, характеризующие движение и состояние газа, в рассматриваемом случае возмущения, вызванного движением поршня. Движение поршня изображается линией II , движение отдельных частиц газа — пунктирными линиями.

и, подставляя $u = u(\varrho)$, $c = c(\varrho)$, получим выражение для $dq/d\xi$ (с тем же успехом можно, впрочем, сразу искать уравнение для другого параметра, например p или s).

В отмеченном случае идеального газа постоянной теплоемкости уравнения чрезвычайно просты.

Подставляя в (VI-14) $du = \frac{2}{k-1} dc$, найдем:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{2}{k+1}; \quad \frac{dc}{d\xi} = \frac{k-1}{k+1}. \quad (\text{VI-15})$$

Скорость движения и скорость звука в волне линейно связаны с величиной ξ — скоростью распространения состояния.

При заданной скорости движения поршня вся картина движения (рис. 18) в целом конструируется из двух тривиальных областей: невозмущенного газа (I) и газа, прилегающего к поршню и движущегося с постоянной во всей области (III) скоростью, и области возмущения (II) — того, что можно назвать волной, в которой все величины меняются от своих значений в одной тривиальной области до значений в другой тривиальной области. В каждой тривиальной (I , III) области $\frac{dx}{d\xi} = \frac{d\varrho}{d\xi} = \frac{du}{d\xi} = \frac{dc}{d\xi} = 0$, $u - \xi \neq c$. Напротив, в волне возмуще-

ния $u - \xi = -c$, и к ней относятся формулы (VI-8), (VI-14), (VI-15). Нетрудно сконструировать режим для любого заданного значения скорости движения поршня в том случае, если скорость движения поршня отрицательна.

Картина распределения скорости и давления в пространстве, представленная на рис. 18, соответствует распределению в переменных t, x рис. 17.

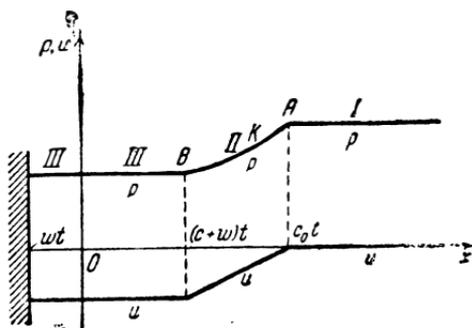


Рис. 18. Волна разрежения: мгновенное распределение давления p и скорости u в зависимости от координаты x . С ростом времени t с момента начала движения поршня все распределение пропорционально растягивается по оси абсцисс. Штриховка слева — поршень Π .

Все масштабы вдоль оси x рис. 18 со временем растут в согласии с видом решения, зависящего от отношения x/t . Собственно волна заключена в области AB (II). Вправо от A простирается невозмущенный газ в состоянии, в котором весь газ находился до начала движения поршня (I). Между поршнем Π и точкой B находится область газа, движущегося со скоростью поршня, причем давление и скорость в интервале $\Pi-B$ постоянны („тривиальная область“ III). Точка A движется со скоростью c_0 вправо. Точка B движется вправо со скоростью $c+w$, где w есть скорость поршня, равная скорости газа в точке B ; напомним, что $w < 0$, а c — скорость звука в газе. При большой скорости поршня величина $c-w$ может стать отрицательной (в случае идеального газа это произойдет при $|w| > \frac{2}{k+1} c_0$), и точка B окажется слева от оси ординат.

В точках A и B сами значения скорости и давления непрерывны. Однако их производные терпят разрыв. Поэтому точки A и B называют иногда точками (поверхностями в трехмерном пространстве) слабого разрыва, волнами ускорения.

На рис. 17 представлено в плоскости t, x движение поршня и линии, вдоль которых сохраняется постоянное значение давления и скорости, так называемые характеристики задачи; к ним принадлежат и линии, отвечающие перемещению

точек A и B в зависимости от времени. Наконец, пунктиром показаны траектории отдельных частиц газа.

В построении рассматриваемого режима, в котором все величины зависят от одного отношения x/t , мы исходили из того, что задача не содержит никаких величин размерности длины или времени. В частности, существенно было предположение о неограниченном простирании газа в область $x > 0$.

Характер найденного решения позволяет смягчить это требование: если нас интересует движение газа в течение первых t_0 секунд после начала движения поршня, возмущение (крайняя точка A) успеет распространиться лишь на расстояние $c_0 t_0$, и для пригодности нашего решения нужно только, чтобы вторая стенка, ограничивающая газ справа, находилась на расстоянии, большем $c_0 t_0$.

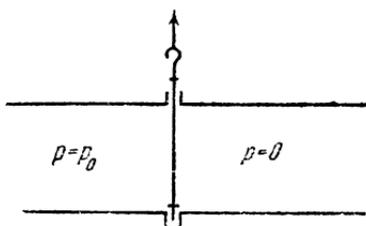


Рис. 19. Схема опыта нестационарного втекания газа в вакуум.

Таким образом, в любых геометрических условиях наше решение представляет интерес для описания начального состояния движения газа. Связь между скоростью и давлением газа и прямолинейность характеристик сохраняются и в более общем случае при любом движении поршня в сторону $x < 0$ (влево, если газ находится справа от поршня, ср. § XIV) с непостоянной скоростью, при котором (движении) ускорение направлено в ту же сторону, $d^2 x_{\text{п}} / dt^2 < 0$. Это показывается методом характеристик, в рассмотрение которого мы не можем здесь входить. Связь (VI-11) сохраняется до тех пор, пока в результате отражения от другой стенки или иного возмущения не появляется распространение волн в обратном направлении, для которых (ср. формулы выше или § II) имеет место другой знак в выражении $qcdx = \pm dp$.

Любопытно полученное нами значение максимальной скорости движения газа при его расширении: для идеального газа из нашей формулы — $u = \frac{2}{k-1} (c_0 - c)$ мы видим, что скорость движения не может превысить — $u_{\text{max}} = \frac{2}{k-1} c_0$; давление на поршень при скорости, меньшей предельной, дается формулой

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{2} \cdot \frac{-u}{c_0} \right)^{\frac{2k}{k-1}}.$$

Для двухатомного газа ($c_p/c_v = 1.4$) максимальная скорость равна пятикратной скорости звука в исходном невозмущенном

газе. Нетрудно видеть, что при этой скорости поршня давление на него в точности равно нулю; иными словами, данный режим описывает истечение в вакуум газа, который был ранее закрыт перегородкой, внезапно вынутой в некоторый момент (рис. 19). Для воздуха найдем $p = p_0 \left(1 - 0.2 \frac{u}{c_0}\right)^7$.

Любопытно сравнить весь ход кривых связи скорости движения и состояния вещества в стационарном истечении (§ III) и в волне разрежения, расширяющейся со временем, рассмотренной выше. В обоих случаях расширение каждого элемента объема идет при постоянной энтропии, так что связь между различными величинами, характеризующими состояние газа, одинакова:

$$S = \text{const}; \quad \frac{c}{c_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

$$\text{при } k = 7/5 \quad \frac{c}{c_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/2} = \\ = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/7} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/5}.$$

В качестве переменной, характеризующей состояние вещества, удобно выбрать величину $\gamma = c/c_0$. Отнесенная к начальной скорости звука скорость движения $\varphi = u/c_0$ выражается в волне разрежения (см. VI-13) уравнением:

$$\varphi = \frac{2}{k-1}(1-\gamma); \quad k = 1.4, \quad \varphi = 5(1-\gamma). \quad (\text{VI-16})$$

В стационарном истечении [см. формулы (III-12) и (III-18)]

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{k-1}(1-\gamma^2)}; \quad k = 1.4, \quad \varphi = \sqrt{5(1-\gamma^2)}. \quad (\text{VI-17})$$

На рис. 20 последние два уравнения для $K = 1.4$ показаны графически сплошными линиями. При малых изменениях скорости звука (при γ , близкой к 1), т. е. при малом изменении

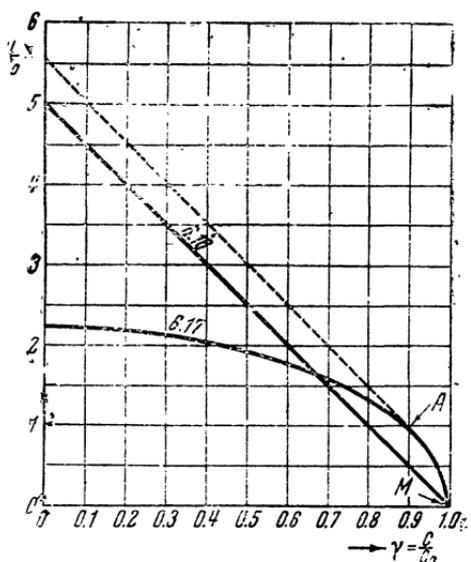


Рис. 20. Зависимость безразмерной скорости φ от безразмерной скорости звука γ для двухатомного газа, $k = 1.4$; (VI-17) для стационарного истечения; (VI-16) для втекания в опыте рис. 19; MA и пунктир — для втекания в опыте рис. 21.

давления, скорость в стационарном истечении значительно больше, чем в волне разрежения. Соотношение становится обратным при малом γ , малом давлении. Наибольшая скорость получится, если скомбинировать стационарное и нестационарное истечение так, как показано пунктирной линией на рис. 20. В точке касания A как раз достигаются критические условия стационарного истечения, $\varphi = \gamma$. Если вместо опыта, показанного на рис. 19, вынимать перегородку или пробку, закрывающую конец откачанной трубки (рис. 21), то во входном сечении D' весьма быстро осуществится стационарное истечение (отрезок MA на рис. 20), дальше по трубке пойдет расширяющаяся волна разрежения (пунктир рис. 20). Таким образом, в условиях опыта рис. 21 возможно достижение

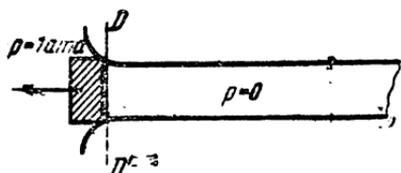


Рис. 21. Схема опыта нестационарного втекания газа в вакуум. При закругленном входе возможно превышение скорости, достигаемой в опыте рис. 19.

скорости истечения в вакуум еще большей, чем в опыте рис. 19; в случае двухатомного газа получим $5.5c_0$ вместо $5c_0$.

Таким образом, относящиеся к опытам Кранца и Шардина [44] расчеты последнего [84] подлежат исправлению, так как в его опытах входное отверстие было закругленным, как на рис. 21,

тогда как расчет Шардина, приводящий к предельному значению $5c_0$, относится к условиям рис. 19.

Впервые численное значение максимальной скорости истечения ($5c_0$) было найдено Ирришоу в 1860 г. [49]. Спустя 17 лет, оно независимо было найдено Гюгионо в его известных мемуарах о распространении возмущения по жидкости [56]. Гюгионо указывает также на значение этого расчета для внутренней баллистики. Величина $2c_0(k-1)$ представляет собой, очевидно, максимальное значение скорости, которую может приобрести снаряд, выталкиваемый пороховыми газами, в том случае, если порох сгорает мгновенно и в начальный момент движения снаряда пороховые газы находятся в покое и скорость звука в покоящихся газах равна c_0 [85].

Детальные расчеты движения снаряда в стволе орудия, расчет массы заряда, необходимой для создания заданной скорости снаряда при минимальной длине ствола, и учет неидеальности продуктов горения пороха были проделаны Ю. Б. Харитонов и автором.

Любопытно, что максимальная скорость истечения в стационарном потоке значительно меньше: она не превышает

$$u'_{\max} = \sqrt{2I_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} c_0,$$

что в случае $k = 1.4$ даст $u_{\max} = c_0 \sqrt{5} \approx 2.2c_0$, вместо $5c_0$ в нестационарном истечении. В литературе встречаются ошибочные попытки отождествления максимальной скорости снаряда с величиной u'_{\max} , которая значительно меньше истинной (Лангвейлер [65]).

При попытке найти в зависимости от x/t режим, описывающий сжатие газа поршнем ($w > 0$), мы сталкиваемся с непреодолимой трудностью: наше уравнение приводит

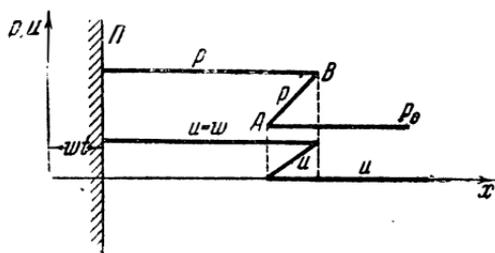


Рис. 22. Не имеющее физического смысла распределение давления и скорости, получающееся при решении уравнений без диссипативных сил в случае сжатия газа поршнем (ср. рис. 18).

к режиму, в котором ряду значений координаты отвечают сразу три значения скорости и давления. Действительно, уравнения попережнему дают $\frac{du}{d\xi} > 0$; формально, следуя тем же путем, что и при рассмотрении волны разрежения, мы приходим к распределению давления и скорости, изображенному на рис. 22.

Очевидно, что такой режим физически неосуществим. Трудность, на которую мы наталкиваемся, явилась исходной точкой для построения теории ударной волны, к изложению которой мы теперь переходим.

§ VII. Теория ударной волны. Введение

В предыдущем изложении мы подчеркнули те случаи, когда классическая газовая динамика, оперирующая представлением о непрерывном распределении давления и пользующаяся дифференциальными уравнениями для описания явлений, но не рассматривающая ни вязкости, ни теплопроводности, наталкивалась на те или иные трудности. Напомним характер этих трудностей.

В параграфе о распространении звука мы выяснили, что звуковая волна в своем распространении должна деформироваться. „Гребни волн“, т. е. те места, где вещество сжато и движется в направлении распространения волны, уходят

вперед; наоборот, „впадины“, т. е. области разрежения, где скорость движения имеет направление, противоположное направлению распространения звука, от волны в целом отстают. Таким образом, деформируясь, звуковая волна как бы захлестывает сама себя — явление, аналогичное тому, которое наблюдается при набегании морских волн на пологий берег.

Как мы выяснили раньше, эта аналогия между газодинамическими явлениями и явлениями в жидкости с свободной поверхностью носит весьма глубокий характер. В обоих случаях имеется тенденция к самопроизвольному увеличению градиентов, к самопроизвольному образованию разрывов при сжатии.

В теории истечения в сопле Лаваля мы также выяснили невозможность, пользуясь одними уравнениями непрерывного потока с постоянной энтропией, описать ряд промежуточных режимов в определенной большой области значений противодавления.

Наконец, особенно отчетливо эта ограниченность классической газовой динамики обрисовалась в последней разобранной нами задаче, именно в случае движения газа, вызванного внезапно начавшимся движением поршня. В этом случае, если поршень движется в сторону газа, $w > 0$, дифференциальные уравнения газовой динамики приводят к бессмысленным трехзначным решениям, т. е. к таким решениям, когда в одном и том же месте одновременно должны быть три значения плотности, три значения температуры, три значения скорости.

Все перечисленные случаи отчетливо показывают необходимость нахождения еще каких-то других видов решения газовой динамики, не вытекающих непосредственно из уравнений газовой динамики идеальных газов (здесь — идеальных в смысле отсутствия вязкости и теплопроводности).

Можно ожидать, что для искомых режимов будет характерна большая величина градиентов, так что в известном приближении их можно будет трактовать как распространение поверхностей разрыва скорости, давления, плотности — так называемых ударных волн.

Перед тем как изложить историю вопроса об ударных волнах, мы в элементарной форме выведем уравнения ударной волны, приблизительно так, как это сделано Гюгонио в его известных мемуарах „О распространении разрыва“ [56], заранее постулируя существование разрыва и не задаваясь вопросами его осуществления, устойчивости и т. п.

§ VIII. Адиабата Гюгонио. Вывод ее из уравнений сохранения

Рассмотрим распространяющуюся по газу ударную волну. Здесь нас не интересует точная структура фронта ударной волны. Мы предполагаем только, что если на самом деле

и нет разрыва в строгом смысле слова (рис. 23а), то во всяком случае все изменение давления, плотности и т. п. происходит в очень узкой области (рис. 23 б).

В элементарном выводе мы ограничимся рассмотрением состояния вещества до и после прохождения через него волны, применяя к этим состояниям уравнения сохранения. При этом мы предполагаем, что сама область волны $A-B$ (рис. 23 б) не растет с течением времени, вследствие чего значения давления, плотности и других величин внутри самого „разрыва“, растянутого на длину AB , должны будут выпасть при составлении уравнений сохранения, поскольку волна перемещается, но количество вещества, количество энергии, количество движения, заключенные в волне между плоскостями A и B , малы, и изменением их во всяком случае можно пренебречь.

Для простоты перейдем к системе координат, движущейся вместе с ударной волной, иными словами, будем рассматривать покоящуюся волну, в которую, с одной стороны, через плоскость A втекает вещество в состоянии, обозначаемом индексом 1, а с другой стороны, справа вытекает вещество, все величины для которого отметим индексом 2. Для принятых контрольных поверхностей составим уравнения сохранения. Мы примем при этом, что вещество движется нормально к поверхности волны.¹

Скорость u_1 — скорость, с которой вещество втекает в покоящуюся ударную волну, — совпадает, очевидно, со скоростью распространения волны относительно несжатого исходного вещества, которую часто обозначают D . Скорость u_2 есть скорость движения волны относительно сжатого в волне вещества. Наконец, разность $u_1 - u_2$, не зависящая от выбора движущейся или покоящейся системы координат, равна изменению скорости движения газа при прохождении волны; в частности, в системе, в которой исходное вещество (индекс 1) покоится, величина скорости после прохождения волны

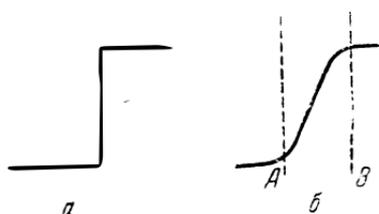


Рис. 23. Идеализированная (а) и истинная (б) структура ударной волны.

$$|u| = u_1 - u_2; \quad u_2 = D - |u|. \quad (\text{VIII-1a})$$

¹ Скорость движения, тангенциального к поверхностям A и B , должна сохраняться при прохождении вещества через волну, как по величине, так и по направлению. Следовательно, тангенциальное движение может быть полностью исключено из рассмотрения соответствующим выбором равномерно движущейся системы координат.

Приравнявая количество вытекающего в единицу времени вещества количеству вытекающего, получим первое уравнение:

$$\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2. \quad (\text{VIII-1})$$

Далее составим для объема, заключенного между A и B , выражение II закона движения Ньютона, приравнявая изменение количества движения в единицу времени импульсу сил давления. Вытекающее в единицу времени количество вещества $\varrho_1 u_1$ обладает скоростью u_1 , так что вытекающее в единицу времени количество движения равно $\varrho_1 u_1^2$. Разность количества движения вытекающей жидкости $\varrho_2 u_2^2$ и количества движения вытекающей жидкости (т. е. приращение количества движения) должна равняться импульсу сил давления, который составляет, также на единицу поверхности, $p_1 - p_2$. Так мы получаем второе уравнение сохранения:

$$p_1 + \varrho_1 u_1^2 = p_2 + \varrho_2 u_2^2. \quad (\text{VIII-2})$$

Наконец, составим уравнение сохранения энергии. В нем мы должны будем учесть три пары величин: внутреннюю энергию вытекающего и вытекающего вещества, кинетическую энергию того и другого и работу, производимую силами давления на контрольные поверхности A и B . Окончательно, количество вытекающей энергии вместе с работой, производимой силами давления на поверхности A , равно

$$\begin{aligned} \varrho_1 u_1 \left(E_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) + p_1 u_1 &= \varrho_1 u_1 \left(E_1 + \frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{u_1^2}{2} \right) = \\ &= \varrho_1 u_1 \left(I_1 + \frac{u_1^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{VIII-3a})$$

Это выражение мы должны приравнять такому же выражению с индексом 2, которое даст нам количество энергии, уносимой вытекающим веществом в единицу времени, и работу, производимую газом против сил давления на контрольной поверхности B . Сокращая полученное уравнение на величину $\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2$, т. е. относя все величины не к единице поверхности ударной волны и единице времени, как это мы делали раньше, а к единице массы протекающего вещества, мы получим третье основное уравнение в следующем виде:

$$I_1 + \frac{u_1^2}{2} = I_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (\text{VIII-3})$$

Здесь мы снова ввели энтальпию $I = E + pv = E + \frac{p}{\varrho}$. Все уравнения симметричны относительно перестановки индексов 1 и 2. Из трех уравнений нетрудно исключить две скорости u_1 и u_2 с тем, чтобы получить связь между величи-

нами давления и плотности до и после волны, так называемое уравнение адиабаты Гюгонио.

Из первых двух уравнений, не привлекая уравнения сохранения энергии, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_2} &= \frac{\rho_2}{\rho_1}; & u_1^2 &= \frac{\rho_2 p_2 - p_1}{\rho_1 \rho_2 - \rho_1}; & u_2^2 &= \frac{\rho_1 p_1 - p_2}{\rho_2 \rho_1 - \rho_2}; \\ u_1^2 - u_2^2 &= \frac{(\rho_1 + \rho_2)(p_1 - p_2)}{\rho_1 \rho_2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII-4})$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение, получим искомое уравнение адиабаты Гюгонио:

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2\rho_1 \rho_2} (\rho_1 + \rho_2) (p_1 - p_2), \quad (\text{VIII-5})$$

или

$$E_1 - E_2 = \frac{1}{2\rho_1 \rho_2} (\rho_1 - \rho_2) (p_1 + p_2). \quad (\text{VIII-6})$$

Для того чтобы отсюда получить в явном виде связь плотности и давления после сжатия в волне, необходимо выразить энтальпию или энергию через давление и плотность. Для идеального газа, теплоемкость которого мы считаем постоянной в интересующем нас интервале температуры между T_1 и T_2 ,

$$I = c_p T = \frac{c_p}{R} RT = \frac{c_p}{R} p v = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho},^1$$

мы получим посредством простых преобразований закон связи плотности и давления для вещества, проходящего через разрыв, уравнение адиабаты Гюгонио:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)p_2 + (k-1)p_1}{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\rho_2 - (k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_2}. \quad (\text{VIII-7})$$

Уравнения приобретают более простой вид, если повсюду, вместо плотности, ввести обратную величину удельного объема:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1}{u_2} &= \frac{v_1}{v_2}; & u_1^2 &= v_1^2 \frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2}; & u_2^2 &= v_2^2 \frac{p_1 - p_2}{v_2 - v_1}; \\ u_1 - u_2 &= \sqrt{(p_1 - p_2)(v_2 - v_1)}; \\ u_1^2 - u_2^2 &= (v_1 + v_2)(p_2 - p_1); \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-8})$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 - I_2 &= \frac{1}{2} (v_1 + v_2) (p_1 - p_2); \\ E_1 - E_2 &= \frac{1}{2} (v_2 - v_1) (p_1 + p_2); \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-9})$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}{(k+1)p_2 + (k-1)p_1}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)v_1 - (k-1)v_2}{(k+1)v_2 - (k-1)v_1} \quad (\text{VIII-10})$$

¹ Постоянное слагаемое, которое появится в I , если теплоемкость ниже T_1 , отличается от теплоемкости в интервале от T_2 до T_1 , входящей

Может быть, логически более простым является другой, физически совершенно эквивалентный предыдущему, вывод уравнения адиабаты Гюгонио, в котором мы непосредственно исходим из рассмотренной ранее задачи о движении поршня в газе. В этом случае нам не придется оперировать понятиями потока энергии и потока количества движения, что может представить некоторые преимущества для неискушенного читателя.

Рассмотрим трубку поперечным сечением в 1 см^2 , закрытую поршнем в начале координат. В момент времени $t=0$ начнем двигать поршень с постоянной скоростью w и будем искать режим движения, изображенный на рис. 24, при котором впереди поршня с постоянной скоростью D распространяется разрыв всех величин — плотности, скорости, давления.

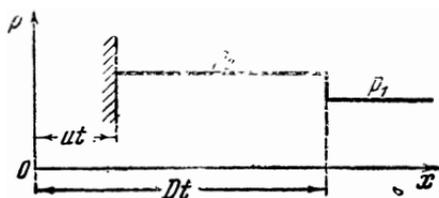


Рис. 24. Распределение давления в пространстве при движении ударной волны, вызванной сжатием газа поршнем.

Справа, впереди разрыва, вещество совершенно не возмущено, сохраняет свое начальное давление p_1 , начальную плотность ρ_1 и неподвижно. В промежутке между поршнем и разрывом вещество имеет какие-то другие, постоянные на всем протяжении между поршнем и разрывом значения плотности ρ_2 и давления p_2 , и движется со скоростью, равной скорости поршня $u=w$.

Рассмотрим состояние, которое получится при таком режиме через время t . За это время разрыв уйдет на расстояние Dt . Количество вещества, которое подверглось сжатию за это время, равно $\rho_1 Dt$. Мы должны приравнять его количеству вещества, которое мы найдем в сжатом до плотности ρ_2 газе между поршнем, продвинувшимся на расстояние ut , и разрывом:

$$\rho_1 Dt = \rho_2 (D - u)t. \quad (\text{VIII-11})$$

Указанное количество вещества приобрело скорость, равную скорости движения поршня. Общее количество движения, приобретенное газом, заключенным в трубке, за время t составляет $\rho_1 Dut$. Мы должны приравнять приращение количества движения импульсу сил давления, т. е. произведению силы, равной разности давления, оказываемого поршнем, и противостоящего ему давления невозмущенного газа, на время действия силы:

$$\rho_1 Dut = (p_2 - p_1)t. \quad (\text{VIII-12})$$

в формулы, может быть устранено соответствующим выбором точки отчета энергии. Во всяком случае, постоянное слагаемое выпадает из уравнения вида (VIII-5) и (VIII-6).

Наконец, приращение энергии вещества при сжатии^Г мы приравниваем работе, производимой поршнем, т. е. работе которую произвела внешняя сила, перемещающая поршень, за время t . Численно сила для площади поршня в 1 см^2 равна p_2 , пройденный поршнем путь равен ut , работа равна $p_2 ut$.

Так мы получим последнее уравнение — уравнение энергии:

$$\rho_1 Dt \left(E_2 + \frac{u^2}{2} - E_1 \right) = p_2 ut. \quad (\text{VIII-13})$$

Очевидно, что эти уравнения совершенно тождественны ряду уравнений, которые мы вывели раньше, и получатся из них при переходе к системе координат, равномерно движущейся относительно системы, выбранной сейчас. При этом скорость распространения разрыва D у нас ранее обозначалась u_1 , так что теперь $D = u_1$, а скорость движения поршня $u = u_1 - u_2$. Мы представляем читателю доказательство того, что последние три уравнения (VIII-11, VIII-12, VIII-13) приводят к такому же выражению адиабаты Гюгонио (VIII-5, VIII-6).

§ IX. Свойства адиабаты Гюгонио. Ударные волны в воздухе и в воде

Выведенное выше уравнение адиабаты Гюгонио обладает рядом чрезвычайно интересных особенностей. Прежде всего, нетрудно видеть, что при беспредельном повышении давления сжатия p_2 плотность идеального газа постоянной теплоемкости не будет расти беспредельно, а стремится к определенному пределу, равному $\rho_2 = \frac{k+1}{k-1} \rho_1$. Для двухатомных газов с невозбужденными колебаниями внутри молекулы $c_p = 5 \text{ кал/моль} \cdot \text{град}$; $c_v = 7 \text{ кал/моль} \cdot \text{град}$; $k = 1.4$ и предельное значение плотности не превышает начальной плотности, умноженной на 6. Для одноатомного газа предельное объемное сжатие равно 4.

Таким образом, мы видим, что по крайней мере при сильных сжатиях, т. е. при больших давлениях сжатия, плотность растет сравнительно медленно, чему отвечает медленное падение объема и соответственно быстрый рост произведения $p v$, определяющего температуру газа.

Численные расчеты вполне подтверждают этот вывод о быстром росте температуры газа с ростом давления сжатия в ударной волне.

Приводим составленные О. И. Лейпунским графики (рис. 25 и 26), дающие, в зависимости от отношения давлений p_2/p_1 , все интересующие нас величины: плотность после сжатия, все скорости u_1 , u_2 , $u_1 - u_2$ и скорость звука в сжатом газе,

причем все скорости отнесены к скорости звука в исходном невозмущенном газе. Температуру сжатого газа легко найдем по кривой скорости звука $T_2/T_1 = (c_2/c_1)^2$. Расчеты проведены в предположении постоянной, не зависящей от температуры,

теплоемкости $c_v = 5$ кал/моль · град, $c_p = 7$ кал/моль · град. У Беккера [38] мы находим таблицу состояния воздуха, сжатого ударной волной.

Расчет Беккера проведен в предположении линейной зависимости теплоемкости от температуры; средняя теплоемкость в интервале от 273° до T выражена формулой:

$$c_{v(273-T)} = 4.78 + 0.45 \cdot 10^{-3} T. \quad (\text{IX-1})$$

Поверочные расчеты показывают, что в интервале от комнатной температуры до 3000°K эта простая формула с точностью до 3% совпадает с современным точным значением теплоемкости воздуха, рассчитанным на основании спектроскопических данных. В таблице Беккер приводит для

сравнения температуру, достигаемую при адиабатическом сжатии (вдоль адиабаты Пуассона, при постоянной энтропии) до того же давления.

Как видно из таблицы, сжатие ударной волной приводит при равном повышении давления к значительно более высокой температуре сжатия.

Непосредственный расчет для идеального газа с постоянной теплоемкостью показывает, что при сжатии в ударной волне, т. е. если $\rho_2 > \rho_1$; $p_2 > p_1$; $v_2 < v_1$; $u_1 > 0$; $u_2 > 0$, имеют место следующие соотношения:

$$u_1 > c_1; \quad u_2 < c_2; \quad S_2 > S_1. \quad (\text{IX-2})$$

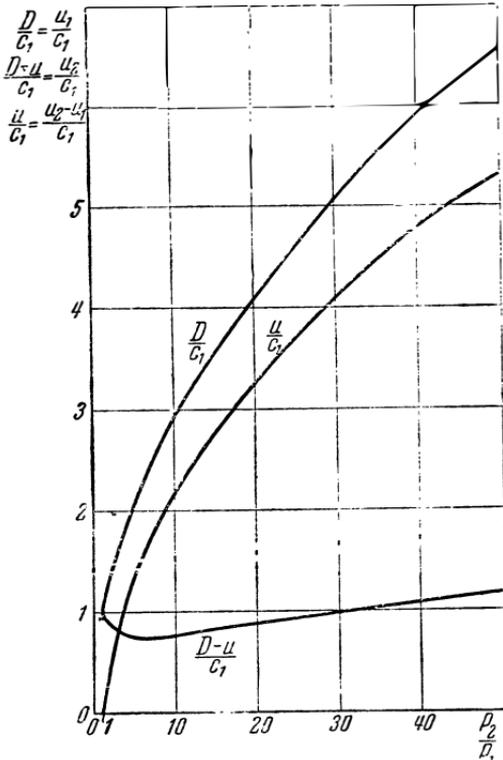


Рис. 25. Зависимость скорости распространения волны D , скорости движения сжатого вещества u и скорости волны относительно сжатого вещества $D-u$ от амплитуды давления в ударной волне в двухатомном газе с постоянной теплоемкостью.

В волне разрежения, если бы она распространялась в виде разрыва, в идеальном газе $u_1 > 0$; $u_2 > 0$; $\rho_2 < \rho_1$; $p_2 < p_1$; $c_2 > c_1$ соотношения были бы обратными:

$$u_1 < c_1; \quad u_2 > c_2; \quad S_1 < S_2. \quad (\text{IX-3})$$

При отсутствии отбора тепла наружу падение энтропии невозможно, откуда следует невозможность распространения

волны разрежения в виде разрыва (так называемая теорема Цемплена [99, 55]). Ниже, углубляя теорию ударной волны, мы покажем механизм роста энтропии в волне сжатия и связь его с неравенствами, относящимися к скорости волны u_1 , u_2 и скорости звука c_1 , c_2 .

Для идеального газа постоянной теплоемкости при большой амплитуде ударной волны $p_2 \gg p_1$, формулы значительно упрощаются: мы уже отметили, что плотность после сжатия находится в определенном отношении $\left(\frac{k+1}{k-1}\right)$ к плотности до сжатия. Отношения между величинами, характеризующими

Таблица 2

p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2 °К	$T(p, S = \text{const})$	D м/сек	u м/сек
1	1	273	273	330	0
2	1.63	336	330	452	175
5	2.84	482	426	698	452
10	3.88	705	515	978	725
50	6.04	2 260	794	2 150	1 795
100	7.66	3 860	950	3 020	2 590
500	11.15	12 200	1 433	6 570	5 980
1 000	14.3	19 100	1 710	9 210	8 560
2 000	18.8	29 000	2 070	12 900	12 210
3 000	22.3	36 700	2 180	15 750	15 050

Цифры ниже линейки ненадежны.

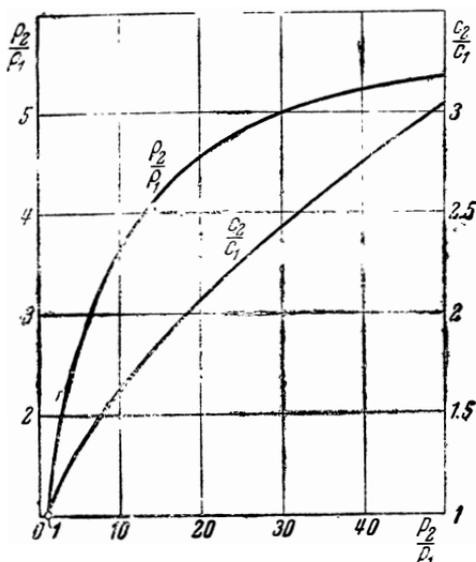


Рис. 26. Зависимость плотности ρ_2 и скорости звука c_2 в сжатом веществе от давления, в тех же условиях, что и на рис. 25.

достигнутое после сжатия состояние, стремится к определенному пределу при $\frac{p_1}{p_1} \rightarrow \infty$

$$D : u : c_2 = k + 1 : 2 : \sqrt{2k(k-1)}. \quad (\text{IX-4})$$

В предельные формулы входит начальная плотность, но не начальное давление или температура, от которых конечное состояние не зависит в пределе, при большой амплитуде.

$$D = \sqrt{\frac{k+1}{2} p_2 v_1} = \sqrt{\frac{k+1}{2} \frac{p_2}{\rho_1}}, \quad T = \frac{k-1}{k+1} \frac{p_2 v_1}{R} = \frac{k-1}{k+1} \frac{p_2}{R \rho_1}. \quad (\text{IX-5})$$

Распространение ударных волн в жидкостях в малой степени являлось предметом исследования. Беккер в своей работе об ударных волнах приводит данные об ударных волнах в спирте и эфире. При вычислении он пользовался приближенным уравнением состояния Таммана.

Принимая во внимание важность изучения ударных волн в воде, в связи с действием подводных взрывов мин и торпед, представляет интерес оценка основных параметров ударной волны в зависимости от давления.

В следующей таблице даны результаты расчета распространения ударной волны в воде, проделанного Лейпунским и автором [125].

В отличие от Беккера, при вычислении мы пользуемся непосредственно табличными данными для сжимаемости, коэффициента расширения и теплоемкости воды, не прибегая к мало надежным уравнениям состояния.

Измерения Бриджмена доведены до весьма высоких давлений, поэтому в расчете не приходится пользоваться экстраполяцией. Для удобства расчета выбраны были такие начальные условия, чтобы конечная температура сжатой в волне воды равнялась 40°C : при этой температуре, согласно Бриджмену, коэффициент теплового расширения воды α не зависит от давления, что облегчает расчет.

В уравнение энергии (VIII.6) входит энергия воды при высоком давлении. Ее мы вычисляем с помощью термодинамических соотношений

$$dE = T dS - p dv = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp - p dv,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \alpha v,$$

$$dE = c_p dT - \alpha T v dp - p dv.$$

Интегрируя последнее выражение по пути, ведущему из состояния с известной энергией в состояние, энергию которого мы определяем, найдем E .

В первых четырех столбцах табл. 3 приведены величины, характеризующие начальное, до сжатия, состояние вещества, в следующих четырех — состояние вещества после сжатия, далее следует скорость распространения ударной волны относительно несжатой воды, $D = u_1$, и скорость движения, приобретаемая водой при сжатии, $u = u_1 - u_2$ (ср. обозначения § VIII).

Таблица 3

p_1	$T_1, ^\circ\text{C}$	v_1	c_1	p_2	$T_2, ^\circ\text{C}$	v_2	c_2	u	D	$T'_{1s}, ^\circ\text{C}$
1	40	1.008	1530	1	40	1.008	1530	0	1530	40
1	31.5	1.005	1500	3 000	40	0.914	1890	150	1820	31.2
1	22.5	1.002	1470	6 000	40	0.859	2520	280	2070	24.2
1	1.8	1.000	1410	12 000	40	0.793	3200	490	2410	11

В последнем столбце приведена величина, характеризующая диссипативные процессы и затухание ударной волны в воде; величина T'_{1s} представляет ту начальную температуру, которая необходима, чтобы изэнтропическим сжатием от p_1 до p_2 достичь показанного в таблице состояния p_2, T_2, v_2 . Разность T'_{1s} и величины T_1 , приведенной во втором столбце, представляет собой ту часть повышения температуры, которая достигается за счет необратимых процессов во фронте ударной волны. Представим себе ударное сжатие с p_1 до p_2 , за которым следует изэнтропическое расширение до давления p_1 ; в результате после прохождения ударной волны заданной амплитуды давления (p_2 , пятый столбец таблицы) и следующей за ней волны разрежения температура воды повысится с T_1 до T'_{1s} .

Такое повышение температуры воды произошло за счет необратимого расходования механической (кинетической и потенциальной) энергии ударной волны и, следовательно, непосредственно связано с затуханием волны. Мерой затухания может служить отношение $\frac{T'_{1s} - T_1}{T_2 - T_1}$.

Легко убедиться в том, что и в данном конкретном случае выполняются общие соотношения: скорость распространения волны больше скорости звука в невозмущенной воде, $D > c_1$; скорость распространения волны относительно сжатой воды меньше скорости звука в сжатой воде, $D - u < c_2$.

Остановимся здесь на некоторых формальных свойствах адиабаты Гюгонио.

Весьма любопытен и имеет глубокий смысл тот факт, что уравнение адиабаты Гюгонио нельзя записать в виде:

$$f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2). \quad (\text{IX-6})$$

В этом отношении адиабата Гюгонио, очевидно, отличается от таких простейших кривых, как изотерма или адиабата Пуассона. Уравнение последней гласит:

$$S = S(p, q) = \text{const}, \quad (\text{IX-7})$$

что, например, для идеального газа даст

$$S = c_p \ln p - c_v \ln q + \text{const}; \quad p q^{-\kappa} = \text{const} \cdot e^{\frac{-S}{c_v}}. \quad (\text{IX-8})$$

Для того чтобы исчерпать все кривые Пуассона, нам достаточно пройти одномерный ряд значений энтропии S . Для того чтобы исчерпать все кривые адиабаты Гюгонио, нам необходимо построить „бесконечность в квадрате“ кривых, отвечающих всем возможным значениям p_1 и q_1 .

Тот факт, что уравнение адиабаты Гюгонио не может быть представлено в виде $f(p, q) = \text{const}$, виден хотя бы из того, что, сжимая, например, двухатомный газ два раза двумя ударными волнами, одна из которых распространяется по второй, мы можем достичь сжатия до 36 раз, тогда как при однократном сжатии мы не можем увеличить плотность больше, чем в 6 раз. Таким образом, при двукратном или вообще многократном сжатии ударными волнами мы приходим к состоянию, к которому нельзя притти однократным сжатием. Между тем, при изэнтропическом сжатии конечное давление полностью определяет конечную плотность вещества, независимо от того, на сколько этапов мы разбили достижение данного конечного давления, что следует из возможности представления адиабаты Пуассона в форме (IX-6).

В плоскости p, q или в плоскости p, v адиабата Пуассона представляет собой кривую, все точки которой эквивалентны. Ни одна из точек не представляет какой-либо особенности. С адиабатой Гюгонио это не так. Начальная точка q_1, p_1 (или v_1, p_1) является особой точкой адиабаты Гюгонио. Мы выявим характер особенности в следующем параграфе, рассматривая окрестность точки p_1, v_1 , описывающей исходное состояние вещества до сжатия.

Уравнение адиабаты Гюгонио запишем так:

$$p = H(q; p_1, q_1). \quad (\text{IX-9})$$

Из симметрии уравнений сохранения, из которых получено уравнение адиабаты Гюгонио, следует, что если

$$p_2 = H(q_2; p_1, q_1), \quad (\text{IX-10})$$

то и обратно

$$p_1 = H(q_1; p_2, q_2) \quad (\text{IX-11})$$

(ср. ниже стр. 80, рис. 28).

§ X. История вопроса об ударной волне

Уравнение связи между давлением и плотностью в веществе, подвергнутому действию ударной волны, выведенное нами из элементарных соображений и рассмотрения законов сохранения, привело к неожиданному результату — росту энтропии при сжатии идеального газа ударной волной. При этом рост энтропии получается непосредственно из сопоставления начального и конечного состояний вещества, которые связаны между собой уравнениями сохранения. Мы не рассматривали процессы, протекающие между контрольными поверхностями A и B (рис. 23б), которые привели к росту энтропии. Формально одни уравнения сохранения, как мы уже указывали, симметричны относительно q_1, p_1 и q_2, p_2 . Уравнениям сохранения мы могли бы удовлетворить также, рассматривая обратное движение — волну разрежения, в которой разрежение происходило бы внутри какого-то, ближе не рассматриваемого, малого интервала AB в согласии с уравнением Гюгонио. Однако такое движение в действительности является невозможным, как это следует из того, что в нем имело бы место падение энтропии (упомянутая выше так называемая теорема Цемплена [99]). Вот эта особенность результата § IX, в котором мы, не рассматривая диссипативных процессов, пришли к изменению энтропии, создает определенные трудности в понимании теории ударной волны, которые могут быть полностью устранены лишь в том случае, если мы рассмотрим процессы внутри самой области изменения состояния (между контрольными поверхностями A и B рис. 23б) и которые значительно задержали развитие теории ударной волны.

Замечательно, что три первые важнейшие работы по теории ударных волн были произведены, хотя и в разное время, но, повидимому, совершенно независимо одна от другой. Это даст нам возможность рассматривать их не в хронологическом порядке, ибо безотносительно к тому, какая работа была календарно сделана раньше, по содержанию эти работы совершенно независимы.

Риман [81] в своем мемуаре, составив первые два уравнения, — сохранения вещества и сохранения количества движения, в качестве третьего уравнения принимает уравнение Пуассона, т. е. заранее задает сохранение энтропии в ударной волне, по аналогии с сохранением энтропии в движениях безударных волн, в которых действие диссипативных сил — вязкости и теплопроводности не рассматривается. Полученное им соотношение между давлением и плотностью и общая картина движения обладают рядом общих черт с истинной картиной. Однако уравнения Римана приводят к тому, что закон сохранения энергии оказывается невыполненным. Поэтому мы должны признать их ошибочными.

Любопытно, что даже в издании 1925 г. известной книги „Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики“, составленной Вебером по лекциям Римана [97], после того как весь вопрос был полностью выяснен, Вебер попрежнему выражает странные сомнения — не могут ли при учете турбулентности все же иметь место уравнения Римана.

Вывод Гюгионо [56], с именем которого принято связывать уравнение (VIII-7), воспроизведен нами в предыдущем параграфе.

Мы перейдем сейчас к мемуару Ренкина [78], наиболее интересному с точки зрения физической газодинамики, с точки зрения отчетливого понимания сущности происходящих в ударной волне явлений.

Ренкин рассматривает движение, которое могло бы распространяться неограниченно далеко, не меняя своей формы, т. е. рассматривает стационарно распространяющееся по газу возмущение. Таким же способом, который мы применили в выводе адиабаты Гюгионо, Ренкин выделяет две контрольные плоскости и составляет закон сохранения вещества и закон сохранения количества движения. Ренкин рассматривает вещество, хотя и не обладающее вязкостью, но обладающее теплопроводностью. У него сформулированы важнейшие для ударных волн принципы автомодельности. Именно, Ренкин особенно подчеркивает, что численно коэффициент теплопроводности вещества может быть сколь угодно мал, но тем не менее в ударной волне мы не можем им пренебречь, потому что заранее никак не задана сама ширина волны, не задана величина градиентов в ударной волне. Чем меньше коэффициент теплопроводности, тем больших градиентов мы можем ожидать в ударной волне, так что произведение градиента температуры на коэффициент теплопроводности (равное количеству тепла, переносимого теплопроводностью в единицу времени) может оставаться конечным при стремлении самого коэффициента теплопроводности к нулю. Этим кладется основа отчетливого понимания того, как можно пренебрегать дисси-

плативными силами, в частности теплопроводностью, там, где величина градиентов определена извне, заранее задана самими уравнениями движения без теплопроводности, и почему нельзя пренебрегать теплопроводностью там, где величина градиента сама по себе не определена. Примером первого рода является волна разрежения, для которой мы построили решение в предположении отсутствия теплопроводности. Мы нашли, что ширина волны разрежения того же порядка, что и пройденное возмущением расстояние, ширина волны разрежения линейно растет со временем и по порядку величин равна

$$\Delta x = \frac{\Delta p}{p} ct.$$

Если мы будем считать это первым приближением, поскольку в построении волны разрежения не учитывались теплопроводность и вязкость, и захотим в следующем приближении учесть действие теплопроводности и вязкости на поля температуры и скорости, найденные в первом приближении, то увидим, что чрезвычайно скоро все градиенты окажутся настолько малыми, что теплопроводность и вязкость практически совершенно не будут влиять на результат. Не то в ударной волне. Если за первое приближение мы захотели бы принять бесконечно крутой разрыв, который получается при равных нулю теплопроводности и вязкости, то в следующем приближении, вводя теплопроводность и вязкость, мы получили бы бесконечные потоки тепла, бесконечно большое возрастание энтропии. В случае ударной волны, где уравнения движения без теплопроводности и вязкости не дают никакого определенного значения ширины волны, величина градиентов и связанная с ней ширина волны могут быть получены только из рассмотрения диссипативных сил, и при этом ширина оказывается как раз такой, чтобы дать требуемое уравнениями сохранения возрастание энтропии. При этом, обратно, если в волне разрежения при конечной, соизмеримой с размерами системы ширине мы могли пренебречь действием диссипативных сил, то в ударной волне, для того чтобы диссипативные силы давали конечное возрастание энтропии, необходимо, чтобы ширина ударной волны была весьма мала по сравнению с размерами системы. Благодаря этому везде, кроме поверхностей ударных волн, мы и можем исключить диссипативные силы. Качественно для частного случая, когда единственным диссипативным фактором является теплопроводность вещества, эти соотношения совершенно отчетливо выяснены Ренкиным.

Дальнейшее изложение Ренкина страдает излишней сложностью. Так, уравнение энергии он составляет совершенно правильно, однако в общем случае произвольного вещества Ренкин не выражает внутреннюю энергию в явной форме, как

функцию давления и плотности; вместо этого он пользуется общими термодинамическими соотношениями, включающими энтропию.

На процессы переноса тепла внутри разрыва Ренкин накладывает условие: $\int T dS = 0$, физический смысл которого заключается в том, что в ударной волне происходит лишь обмен тепла между соседними слоями, так что количество тепла, отнятое от одного слоя, равно количеству тепла, полученному другим, — нет внешних источников тепла.

В комбинации с общими термодинамическими соотношениями Ренкин, правда не без труда, получает систему уравнений, эквивалентную системе уравнений § VIII, и выписывает уравнения для идеального газа. Таким образом, из содержащихся в работе Ренкина формул уравнение адиабаты Гюгионо в его обычной форме VIII-10 могло бы быть получено элементарными алгебраическими преобразованиями. Напомним, что работа Ренкина на 15 лет опередила мемуар Гюгионо.

Рейлэй [79], подводя в 1910 г. итоги истории ударных волн, особенно подчеркивает несправедливость, заключающуюся в термине „адиабата Гюгионо“.

Из отдельных указаний любопытно отметить, что еще в 1858 г. весьма близок к созданию теории ударных волн был английский священник Иршоу [49]. Подобно Риману, он исходил из рассмотрения волны сжатия конечной ширины, в которой (см. § II) гребень волны перегоняет область низкого давления, приводя к образованию разрыва. Однако, подойдя вплотную к уравнениям, Иршоу неожиданно делает вывод, что природа не терпит скачков, и говорит нечто невразумительное об отражениях, о том, что природа как-нибудь да избежит возникновения ударной волны, возникновения разрыва. Мы видим здесь очень наглядный и поучительный пример дурного влияния ошибочной философии на научные исследования.

В более позднее время, уже после открытий Римана, Ренкина и Гюгионо, французский ученый Пьер Дюгем (один из вождей модного в начале XX в. течения „энергетиков“) отрицал существование ударных волн на том основании, что в уравнениях газодинамики с вязкостью и теплопроводностью не может быть строгого разрыва [46, 47]. Ученик Дюгема Эмиль Жуге вслед за Ренкиным указал на то, что диссипативные силы приводят к весьма малой ширине, пренебрегая которой можно говорить о разрыве, ударной волне; Жуге не только выяснил заблуждение Дюгема, но и значительно продвинул вперед теорию ударных и детонационных волн [58, 59, 60].

Однако, в связи с замечаниями Дюгема, во французской литературе до сих пор часто говорят о „квзизволнах“ („почти волнах“), имея в виду конечную ширину фронта.

В сущности, здесь мы касаемся общего вопроса о значении и смысле приближенных методов, приближенных решений в физике (см. замечательную статью В. А. Фока [29]), вопроса о том, когда приближенное выполнение тех или иных соотношений оправдывает создание новых качественных понятий.

Ренкин касается также вопроса о волнах разрежения и ссылается на устное сообщение Томсона, согласно которому волна разрежения должна быть неустойчивой механически. В действительности невозможность волны разрежения, при том именно невозможность, а не неустойчивость ее, уже заключена в ходе мысли самого Ренкина. Действительно, если мы рассматриваем процессы теплопроводности внутри волны, то, кроме уравнения сохранения, написанного Ренкиным: $\int T dS = 0$, уравнения, которое выражает, что в процессе теплопроводности количество тепла, полученное одними слоями, равно количеству тепла, отданному другими слоями, мы должны хотя бы качественно учесть тот элементарный факт, что в процессе теплопроводности тепло всегда переходит от тела более горячего к телу более холодному. Отсюда, естественно, мы получим, что в ударной волне энтропия может только возрастать. Таким образом, если бы мы попытались построить волну разрежения, обратив в ударной волне все скорости движения, то внутри фронта ударной волны, внутри „разрыва“ мы столкнулись бы с необходимостью обратить также поток тепла и осуществить переход тепла от более холодных к более горячим слоям газа, что невозможно. Остается пожалеть, что эти элементарные соображения иногда игнорируются и в современной литературе (см. гл. I ценной в других отношениях книги Власова [3]).

§ XI. Графические методы трактовки теории ударных волн. Волны вблизи критической точки

Очень удобным подспорьем для простого и наглядного разбора теории ударных волн является представление процессов и состояний на диаграмме, в которой по оси абсцисс отложен удельный объем v , по оси ординат — давление p . Уже указывалось, что каждому заданию начальной точки (точка A , p_1 , v_1 на рис. 27) отвечает одна определенная кривая Гюгонио. Покажем на рис. 27, как на графике найти скорость распространения ударной волны. Используем формулу, которая давала нам скорость ударной волны в функции давлений, и удельных объемов до и после сжатия:

$$D^2 = u_1^2 = v_1^2 \frac{p_2 - p_1}{v_1 - v_2}. \quad (\text{XI-1})$$

Для данного исходного состояния вещества p_1, v_1 , множитель перед дробью v_1^2 есть постоянная величина, и скорости распространения ударных волн, отвечающих различным степеням сжатия, различным конечным состояниям, зависят от отношения $p_2 - p_1 / v_2 - v_1$, т. е. от тангенса угла наклона соответствующих прямых, соединяющих начальную точку p_1, v_1 с точками, изображающими состояние после сжатия p_2, v_2 . Так, из рисунка непосредственно ясно, что точка C , отвечающая большему давлению, чем точка B , отвечает ударной волне, распространяющейся с большей скоростью, ибо угол наклона

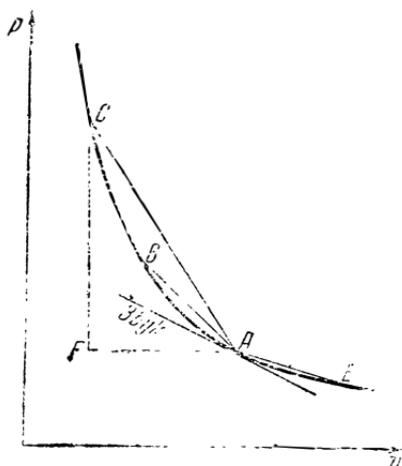


Рис. 27. Скорость распространения ударной волны определяется наклоном хорды, например, AC, AB, AE ; скорость звука — наклоном касательной.

прямой AC больше угла наклона прямой AB . Весьма существенно, что выражение (XI-1) выведено нами как следствие только первых двух уравнений — уравнения сохранения вещества и уравнения сохранения количества движения, независимо от уравнения сохранения энергии. Поэтому оно будет верным во всех случаях, когда не нарушается уравнение сохранения количества движения, т. е. когда нет внешних сил типа трения газа о стенки. Во всех этих случаях, в частности и при наличии химической реакции или при наличии внешних источников тепла и подачи энергии извне, меняющих только уравнение энергии, но не уравнение ко-

личества движения, соотношение между плотностью и давлением в начальном и конечном состояниях и скоростью распространения остается в силе. В частности, выражение (XI-1) относится и к скорости распространения детонации по взрывчатым газовым смесям [8, 59, 60].

Особенно следует отметить, что уравнение XI-1 получается в результате составления уравнений сохранения вещества и количества движения только для начального и конечного состояния газа в волне. Использование прямых AC или AB для расчета скорости вовсе не обозначает предположения о том, что промежуточные состояния (ср. рис. 23 б) изображаются точками этих прямых.

В случае, если нас интересует промежуточное состояние, через которое проходит сжатие внутри тонкого фронта ударной волны или внутри фронта детонационной волны или иной волны, распространяющейся стационарно по газу, то наряду с внешними

силами, могущими нарушить закон сохранения количества движения, — необходимо учитывать также возможные действия внутренних сил вязкости газа, выпадающие при сопоставлении начального и конечного состояний. Если по тем или иным причинам можно пренебречь действием вязкости, действием внутреннего трения, наше уравнение (XI-1) может быть применено ко всем промежуточным состояниям, которые проходит вещество на пути от начального состояния к своему конечному состоянию. Именно так обстоит дело в детонационной волне, где ширина волны зависит от скорости химической реакции и, вообще говоря, довольно значительна, вследствие чего действие сил вязкости невелико. Подробное обсуждение вопроса и полная библиография находятся в работе автора [8] [103].

На рис. 27 легко найти также графическое изображение скорости звука. Мы получим распространение звука как предельный случай распространения весьма слабых ударных волн. Таким образом, скорость распространения звука на диаграмме рис. 27 будет дана предельным положением наклона секущей, когда вторая точка, изображающая конечное состояние вещества, подойдет на бесконечно малое расстояние к первой точке, т. е. наклоном касательной к адиабате Гюгонио в точке, изображающей начальное состояние рассматриваемого вещества.

Сопоставляя выражение (XI-1) при малом $p_2 - p_1$ с выражением скорости звука $c^2 = -v^2 \frac{\partial p}{\partial v} \Big|_S$, мы заключаем, что в начальной точке A адиабата Гюгонио касается линии постоянной энтропии (адиабаты Пуассона).

Из рисунка непосредственно видно, что для идеального газа с постоянной теплоемкостью, для которого адиабата Гюгонио имеет вид, изображенный на рис. 27, скорость распространения ударной волны больше скорости распространения звука в исходном газе $D = u_1 > c_1$. В пределе, неограниченно увеличивая давление ударной волны, мы можем получить столь угодно большую скорость распространения ударной волны. Напротив, для волны разрежения, в которой конечное состояние E на рис. 27 лежит ниже начального состояния, мы получили бы скорость распространения, меньшую скорости звука. Проводя в конечном состоянии сжатого газа в ударной волне, например в точке B , адиабату Пуассона или же касающуюся ее в этой точке адиабату Гюгонио, мы можем таким же способом разобрать соотношение между скоростью ударной волны и скоростью звука в сжатом газе. Для скорости распространения волны относительно сжатого газа имеем:

$$u_2^2 = (D - u)^2 = v_2^2 \frac{p_1 - p_2}{v_2 - v_1}, \quad (\text{XI-2})$$

выражение совершенно симметрично выражению для скорости волны относительно исходного газа. На рис. 28 через точку B

проведена адиабата Гюгонио H_B , для которой состояние B принято за начальное; по симметрии уравнений, если B лежит на H_A , то H_B проходит через точку A (см. ф-лы IX-10, 11).¹ В точке B кривая H_B касается адиабаты Пуассона. Из расположения на рис. 28 линий H_B и прямой BA следует, что $c_2 > u_2 = D - u$, скорость звука в газе, сжатом волной, превышает скорость волны относительно сжатого газа.

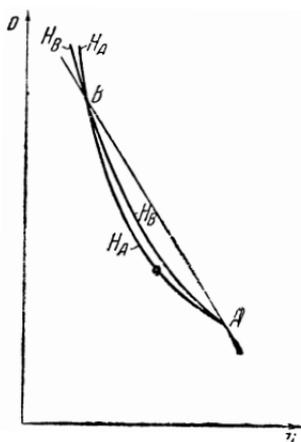


Рис. 28. Соотношение скорости распространения волны относительно исходного состояния A и скорости звука в состоянии A дается отношением наклона хорды AB и касательной к кривой H_A в точке A . Соотношение скорости волны относительно сжатого вещества в состоянии B и скорости звука в состоянии B дается отношением наклона AB и касательной к кривой H_B в точке B . Прямое сравнение скоростей относительно разных состояний недопустимо, так как коэффициент, входящий при переходе от наклона к скорости, зависит от удельного объема v .

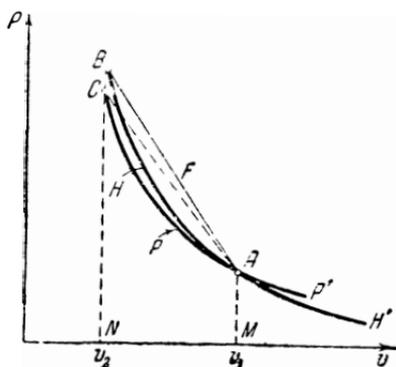


Рис. 29. Рост энтропии при сжатии в ударной волне AB зависит от знака и величины площади $AFBCPA$; AHB — адиабата Гюгонио; APC — адиабата Пуассона.

В p - v -диаграмме может быть разобран вопрос о росте энтропии в ударной волне. Составим выражение для изменения внутренней энергии газа в ударной волне с общим термодинамическим выражением дифференциала энергии. В ударной волне

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_2 - E_1 = \\ &= \frac{p_1 + p_2}{2} (v_1 - v_2). \quad (\text{XI-3})^2 \end{aligned}$$

Между тем в общем виде $dE = TdS - pdv$. Вдоль адиабаты Пуассона (изэнтропы) мы имели бы при изменении объема

¹ H_A и H_B сокращенные наименования кривых — адиабат Гюгонио (Hugoniot), для которых указанная индексом точка (A , B , является начальной.

² Уравнение (XI-3) получается из (VIII-6), если от плотности перейти к удельному объему.

в тех же пределах

$$\begin{cases} dS = 0 \\ E_2 - E_1 = \Delta E = - \int_{v_1}^{v_2} p dv. \end{cases} \quad (\text{XI-4})$$

Сопоставляя выражение для изменения энергии вдоль адиабаты Пуассона (P) с выражением для изменения энергии при ударном сжатии по адиабате Гюгонио (H), мы получим уравнение для величины ΔS изменения энтропии при ударном сжатии:

$$\bar{T} \Delta S = \frac{p_1 + p_2}{2} (v_1 - v_2) - \int_{v_2}^{v_1} p dv. \quad (\text{XI-5})$$

Интегралы (XI-4) и (XI-5) берутся вдоль адиабаты Пуассона. Рассмотрим соотношение двух членов последней формулы на подробном рис. 29.

На этом рисунке APC есть адиабата (изэнтропа) Пуассона, AHB — адиабата Гюгонио, изменение энтропии при сжатии ударной волной равно $S_B - S_A = S_B - S_C$ и, согласно формуле (XI-5), зависит от разности площади трапеции $AFBNM$ и площади, ограниченной адиабатой Пуассона APC и хордой AC . Произведение абсолютной температуры¹ на приращение энтропии равно разности этих площадей, т. е. площади фигуры $APCBF$.

Разобьем эту площадь на две части прямой AC . Первая часть — сегмент, крайние точки которого A и C замкнуты отрезком APC адиабаты Пуассона и хордой AC , вторая часть — треугольник ABC .

Запишем уравнение в следующем виде, обозначая F площадь фигур:

$$\bar{T} \Delta S = F_{\text{сегм. } APC} + F_{\text{треуг. } ABC}. \quad (\text{XI-6})$$

Площадь треугольника легко найти: примем отрезок BC за основание, тогда высота равна $v_1 - v_2$. Длина отрезка BC в p, v плоскости равна $\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v \Delta S$, и площадь треугольника

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v (v_1 - v_2) \Delta S.$$

¹ Значение \bar{T} в формуле (XI-5) заключено между T_C и T_B . Для доказательства перейдем из состояния A в B (рис. 29) изэнтропическим сжатием (AC) и последующим нагреванием сжатого газа в постоянном объеме (CB).

Подставляя в исходное уравнение, найдем:

$$\bar{T} \Delta S = F_{\text{сегм}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v (v_1 - v_2) \Delta S, \quad (\text{XI-7})$$

$$\Delta S = \frac{F_{\text{сегм}}}{\bar{T} - \alpha}, \quad (\text{XI-8})$$

где $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v (v_1 - v_2)$.

При малых изменениях объема практически $\bar{T} \Delta S = F_{\text{сегм}}$, поправка на площадь треугольника мала. Если $\Delta S \sim (v_1 - v_2)^n$, то площадь треугольника $\sim \Delta S (v_1 - v_2) \sim (v_1 - v_2)^{n+1}$ высшего порядка малости по сравнению с ΔS и, следовательно, высшего порядка малости по сравнению с площадью сегмента.

Следовательно, знак изменения энтропии полностью определяется знаком площади сегмента, т. е. взаимным расположением адиабаты Пуассона и ее секущей, которое, в свою очередь, зависит от выпуклости или вогнутости адиабаты Пуассона, т. е. от знака второй производной $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_S$. Если α приближается к \bar{T} , то $\Delta S \rightarrow \infty$, что действительно имеет место в идеальном газе при $v_2 \rightarrow \frac{k-1}{k+1} v_1$, когда на адиабате Гюгонио $p \rightarrow \infty$; $\bar{T} < \alpha$ отвечает отрицательному давлению и тому подобным, не имеющим в данном случае никакого физического смысла, условиям.

Для слабых волн легко найти теперь предельные законы изменения энтропии в ударной волне. Произведем расчет, разлагая все выражения в ряд по степеням $\Delta v = v - v_1$ и оставляя везде только старший член, дающий отличный от нуля конечный результат.

Уравнение адиабаты Пуассона

$$p = p_1 + \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_{S,1} \cdot \Delta v + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{S,1} \cdot (\Delta v)^2. \quad (\text{XI-9})$$

Второй индекс указывает, что значения производных взяты в состоянии 1 (точке А рис. 29).

Обозначая $\Delta v_2 = v_2 - v_1 = \omega$, найдем¹ давление p'_2 в точке С (рис. 29), опуская индексы у производных:

$$p'_2 = p_1 + \frac{\partial p}{\partial v} \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \omega^2. \quad (\text{XI-10})$$

Составим выражение изменения энтропии, пренебрегая площадью треугольника ABC в (XI-5, 6, 7):

¹ Отметим, что $v_2 < v_1$, так что $\omega < 0$.

$$\begin{aligned} \bar{T} \Delta S &= \frac{p_1 + p_2'}{2} (-\omega) - \int_{\omega}^0 p d\Delta v = -\frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_S \omega^3 = \\ &= \frac{1}{12} \frac{v^2 p}{v^2} (v_1 - v_2)^3. \end{aligned} \quad (\text{XI-11})$$

Сопоставляя уравнение адиабаты Гюгонио в форме

$$I_2 - I_1 = \left(\frac{v_2 + v_1}{2} \right) (p_2 - p_1) \quad (\text{XI-12})$$

с выражением $dI = T dS + v dp$, мы можем во всех предыдущих рассуждениях переставить p и v . При этом мы получим результат:¹

$$\bar{T} \Delta S = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} (p_2 - p_1)^3 = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \left(-\frac{\partial p}{\partial v} \right)^3 (p_2 - p_1)^3. \quad (\text{XI-13})$$

В слабой ударной волне изменение энтропии пропорционально кубу амплитуды. В начальной точке адиабата Гюгонио касается адиабаты Пуассона; в этой точке кривые имеют общую касательную и общий центр кривизны (касание второго порядка); касание сопровождается пересечением (см. продолжение кривых при $v > v_1$ на рис. 29).

Более сложным путем, не прибегая к геометрической трактовке, эти результаты впервые получил Жуге [58]. Так как более полная работа Жуге опубликована ранее сообщения Цемплена [99] (во второй заметке в 142-м томе Цемплен отмечает, что ему следовало бы цитировать Жуге), принятый обычай называть доказательство невозможности разрывных волн разрежения „теоремой Цемплена“ совершенно несправедлив.

Рассматривая (XI-11), мы устанавливаем, что для идеального газа адиабата Пуассона, везде выпуклая² к оси абсцисс, приводит к тому, что энтропия растет в ударной волне сжатия; напротив, в резкой волне разрежения, к которой были бы применимы уравнения сохранения, энтропия падала бы, откуда сразу видна невозможность распространения в идеальном газе волны разрежения с тонким фронтом, подобной ударной волне сжатия.

¹ Может быть, стоит еще раз отметить, что расчет площади трапеции, ограниченной прямой AFB (рис. 29), основан на выражении адиабаты Гюгонио, следующем из законов сохранения, приложенных к состоянию до и после волны. Этот расчет ни в какой связи не находится с вопросом о форме линии, по которой в действительности меняется состояние в волне (см. § XII).

² Нужен невероятно быстрый рост теплоемкости для того, чтобы за счет падения $k = c_p/c_v$ абсолютная величина $\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_S = -k \frac{p}{v}$ падала с ростом температуры.

Для слабых волн из рис. 29 мы можем в совершенно общем виде, т. е. для произвольного уравнения состояния вещества, сделать заключение о соотношении между скоростью распространения ударной волны и скоростью звука в веществе до и после сжатия. Для того чтобы сжатие распространялось по газу в форме ударной волны с весьма крутым фронтом, необходимо, чтобы адиабата Пуассона имела выпуклость книзу, т. е. имела вид, изображенный на рис. 29. Однако в этом случае геометрически ясно, что наклон касательной к адиабате в точке A должен быть меньше наклона секущей AB .

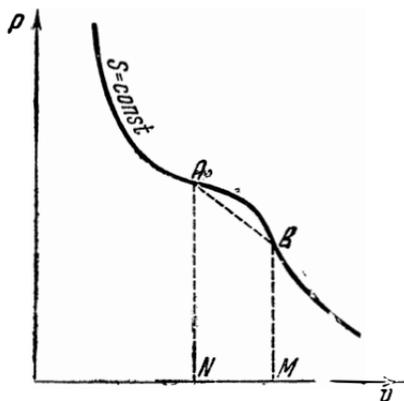


Рис. 30. Адиабата Пуассона с отрезком с аномальной выпуклостью вверх. На этом отрезке возможны ударные волны разрежения.

Напротив, наклон касательной в точке B , изображающей конечное состояние, или наклон касательной в весьма близкой к B (с точностью до величин третьего порядка) точке C больше наклона секущей.¹ Таким образом, мы получаем элементарный вывод найденного впервые Жуге соотношения, согласно которому сжатие распространяется в виде ударной волны, если скорость звука до сжатия меньше скорости распространения ударной волны, найденной из законов сохранения, а скорость звука в

веществе после сжатия больше скорости ударной волны относительно сжатого вещества.² В случае адиабаты Пуассона, имеющей обратную вогнутость (рис. 30, участок AB) сжатие в ударной волне сопровождалось бы падением энтропии, ибо ограниченная адиабатой Пуассона площадь больше площади, ограниченной секущей, вертикалями и осью абсцисс. В веществе, в котором адиабаты Пуассона имеют обратный знак вогну-

¹ Изменение величины $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S$, от которой зависит скорость звука при переходе от A к C или от A к B , — первого порядка в $v_1 - v_2$; изменение $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S$ при переходе от C к B — третьего порядка.

² Величины D , c_1 и c_2 при малой амплитуде отличаются на величину, пропорциональную амплитуде. Скорость движения u также пропорциональна амплитуде. С точностью до величин, пропорциональных квадрату амплитуды, скорость ударной волны равна среднему арифметическому скорости звука в начальном состоянии c_1 и скорости распространения возмущения в направлении волны в сжатом, движущемся газе $c_2 + u$:

$$D = \frac{c_1 + c_2 + u}{2}.$$

тости, волны сжатия не будут более резкими. Вызванное в какой-нибудь части вещества, например, движением поршня, сжатие будет распространяться волной, постепенно расширяющейся наподобие волн разрежения в идеальном газе, разобранных нами ранее. Напротив, в таком веществе волна разрежения будет распространяться с чрезвычайно крутым фронтом, крутизна которого не будет уменьшаться со временем и будет определяться малыми значениями теплопроводности и вязкости. Этому соответствует обратное соотношение между скоростью ударной волны и скоростью звука. Действительно, в распространяющейся волне разрежения, в которой исходное состояние представлено точкой A , а конечное состояние вещества представлено точкой B (рис. 30), скорость распространения волны разрежения AB относительно вещества в состоянии A определяется наклоном прямой AB и превышает скорость звука в состоянии A , что видно из характера пересечения адиабаты и секущей в точке A , где касательная к адиабате Пуассона идет более полого, чем прямая AB . Напротив, в точке B , описывающей состояние вещества после прохождения крутой волны разрежения, скорость звука превышает скорость распространения конечного возмущения.

Существуют ли в природе вещества, у которых, хотя бы в какой-нибудь части p, v плоскости, адиабаты Пуассона имеют выпуклость, направленную вверх? Мы можем ожидать появления таких состояний вблизи критической точки жидкость — газ. Действительно, еще задолго до критической точки изотермы имеют перегиб (в самой критической точке перегиб изотермы становится к тому же горизонтальным); для вещества с достаточно большой молекулярной теплоемкостью, у которого изотермы и адиабаты отличаются достаточно мало, мы можем ожидать, что вне области двухфазных систем, в состоянии, в котором вещество совершенно устойчиво находится в виде одной фазы, у адиабаты также получится обратный знак второй производной. Соотношение между структурой волны сжатия и волны разрежения станет обратным по сравнению с соотношением между резкой ударной волной сжатия и размытой волной разрежения в обычных газах вдали от критической точки.

На рис. 31 в плоскости p, v для случая $c_p = 40$ кал./град. моль проведена линия II, отделяющая область с $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s < 0$, адиабата, проходящая через эту область, и линия I, отделяющая заштрихованную область двухфазных систем (последняя не зависит от величины c_p). Вычисления проделаны при участии инж. Ф. Е. Юдина (лаборатория горения ИХФ).

В уравнении Ван-дер-Ваальса теплоемкость при постоянном объеме зависит только от температуры, во всей области однофазных систем; энергия однородного вещества, подчиняюще-

гося уравнению ван-дер-Ваальса, может быть представлена в виде суммы двух членов:

$$E = E_1(T) + E_2(v) = \int c_v dT - \frac{a}{v}.$$

Это обстоятельство существенно облегчает расчеты, так как энтропию ван-дер-ваальсовского газа также удастся пред-

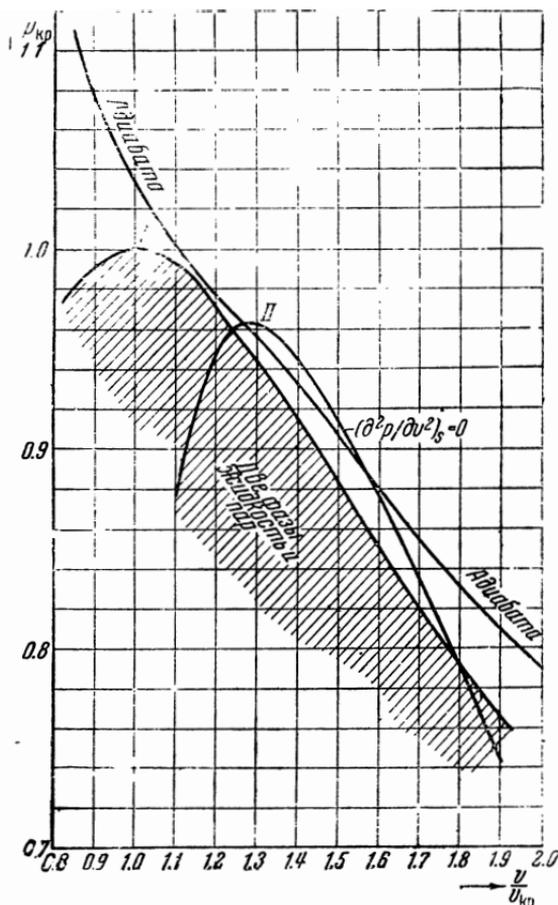


Рис. 31. Адиабаты с аномальной выпуклостью в ван-дер-ваальсовом газе с теплоемкостью $c_v = 40$. Заштрихована область двухфазных систем; кривая II ограничивает область состояний с аномальной выпуклостью адиабат. Под кривой II $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_S < 0$.

ставить в виде суммы функции температуры и функции удельного объема. Весьма интересно было бы исследовать экспериментально ударные волны и волны разрежения в газе с большой теплоемкостью в той области, где можно ожидать

указанных выше аномалий. Для этой цели можно взять высокомолекулярное органическое соединение, при том такое, которое еще не разлагается при критической температуре.

Установление в общем виде связи между скоростью звука в веществе до и после прохождения ударной волны и изменением энтропии в ударной волне существенно и доставляет большое удовлетворение, так как ясно (см. замечание Томсона, цитированное в статье Ренкина [78]), что соотношение между скоростью ударной волны и скоростью звука определяет механическую устойчивость волны. Необходимо, чтобы ударная волна распространялась со скоростью, превышающей скорость звука в газе, подвергающемся ее действию, для того чтобы вызываемое ударной волной возмущение не ушло вперед со скоростью, равной скорости звука. Необходимо, чтобы ударная волна распространялась относительно сжатого газа со скоростью, меньшей скорости звука в сжатом газе, ибо только в этом случае можно представить себе причинную связь между движением поршня, вызывающего ударную волну, и распространением ударной волны, так как перенос возмущения от поршня фронту ударной волны совершается через слой сжатого газа. С теми же критериями $c_1 < u_1$, $c_2 > u_2$ мы встретимся, исследуя возникновение ударной волны. Глубоко удовлетворителен тот факт, что эти непосредственно ощущаемые критерии механической устойчивости ударной волны удается совершенно строго связать со знаком изменения энтропии в ударной волне, который в общем виде говорит о возможности или невозможности распространения ударной волны, удовлетворяющей законам сохранения вещества, количества движения и энергии.

Связь знака ΔS и неравенств, касающихся скоростей звука, нарушится только в том случае, если в рассматриваемом интервале изменения давления осуществляются оба знака $d^2 p/dv^2$, так что адиабата Пуассона имеет больше двух точек пересечений с прямой. Рассмотрение возникающих сложных режимов, в которых одновременно имеют место и разрывы и примыкающие к ним размытые волны, выходит за рамки настоящей книги.

§ XII. Структура фронта ударной волны

Мы приступаем к исследованию того тонкого слоя, внутри которого в ударной волне происходит переход из одного состояния в другое, — слоя между контрольными поверхностями *A* и *B* рис. 23 б. В предыдущем изложении мы не рассматривали процессов внутри этого слоя на том основании, что толщина слоя, которая определяется диссипативными силами, весьма мала и результаты процессов, происходящих в этом слое, нам удастся определить из уравнений сохранения без детального рассмотрения самих этих процессов.

Здесь нас будут интересовать именно процессы внутри слоя и его толщина. Мы рассмотрим отдельно два предельных случая: 1) случай весьма малой вязкости и 2) случай малой теплопроводности; более сложный в математическом (но не в физическом) отношении случай совместного влияния вязкости и теплопроводности мы рассматривать не станем и для него приведем лишь окончательное выражение толщины переходного слоя.

Первый случай замечателен тем, что уравнение (XI-1)

$$D^2 = v_1^2 \frac{p - p_1}{v_1 - v},$$

связывающее между собой изменение плотности, изменение давления и скорость распространения волны, оказывается пригодным не только для конечного состояния, которое достигается в ходе сжатия, но и для всех промежуточных состояний внутри слоя.

Действительно, это уравнение является следствием первых двух уравнений сохранения — сохранения вещества и количества движения.

Уравнение сохранения вещества в простой форме (VIII-1)

$$\rho u = \frac{u}{v} = \text{const}$$

выполнено всегда при распространении плоской волны; при распространении волны в трубе необходимо, чтобы сечение трубы было постоянным; кроме того, на стенках трубы не должно происходить поглощение или выделение вещества. Для выполнения уравнения количества движения для начального и конечного состояния в простом виде (VIII-2)

$$p + \rho u^2 = \text{const}$$

необходимо, чтобы на вещество не действовали внешние силы; при распространении в трубе необходимо пренебречь силами трения о стенки трубы. Наконец, при рассмотрении промежуточных состояний, интересующих нас здесь, для выполнения (VIII-2) необходимо, чтобы были малы силы внутреннего трения (вязкости).

В ударной волне, в среде, в которой имеют место только процессы, учитываемые в уравнении энергии, например выделение энергии химической реакции (детонационная волна — см. [8], [59], [60]) или теплопроводность, уравнение (XI-1) применимо ко всем промежуточным состояниям. При распространении ударной волны как целого скорость, с которой каждое из промежуточных состояний движется относительно

исходного состояния, одна и та же. В уравнении (XI-1) величину D мы должны считать постоянной; таким образом, это уравнение приводит к линейной связи между давлением и объемом

$$p = p_1 + \frac{D^2}{v_1} - \frac{D}{v_1^2} v. \quad (\text{XI-1})$$

В плоскости p, v (рис. 32) состояние меняется по прямой, соединяющей точки, описывающие начальное A и конечное B состояния вещества.

Зная связь между давлением и плотностью, которая имеет место на всем протяжении фронта ударной волны, мы сможем найти ее ширину элементарным интегрированием.

Можно показать, что вдоль прямой AB энтропия достигает максимума где-то посередине (точка M рис. 32) между начальным и конечным состояниями вещества.

Действительно, в точке A скорость волны относительно вещества больше скорости звука, в точке B скорость волны меньше скорости звука; в какой-то точке M скорость волны равна скорости звука. В этой точке прямая AB касается адиабаты Пуассона и, следовательно, энтропия максимальна.¹

В сделанном предположении об отсутствии вязкости изменение энтропии происходит лишь за счет теплопроводности. В стационарном режиме, в системе координат, в которой сама ударная волна покоится, от субстанциальной производной по времени мы легко перейдем к производной по координате. В этом случае излишен также знак частной производной, поскольку рассматриваемый процесс в выбранной системе стационарен, от времени не зависит. Окончательно:

$$q Tu \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx} \lambda \frac{dT}{dx} \approx \lambda \frac{d^2 T}{dx^2}, \quad (\text{XII-2})$$

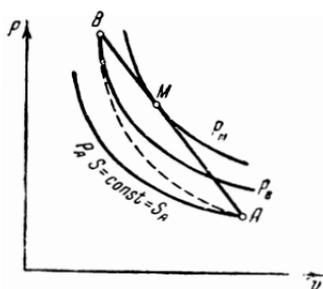


Рис. 32. A и B начальное и конечное состояние газа, сжатого ударной волной. Сплошные кривые — адиабаты Пуассона, т. е. линии постоянной энтропии, возрастающей от S_A к S_B и S_M . В отсутствии вязкости, но при наличии теплопроводности состояние изменяется по прямой AB , на которой энтропия достигает максимума в точке касания M . В отсутствие теплопроводности состояние меняется по пунктирной кривой AB , на которой энтропия монотонно растет от A к B . Адиабата Гюгонио не проведена на рисунке (она также проходит через A и B , но не совпадает с пунктирной линией).

¹ На рисунке 32 адиабаты Пуассона, проходящие через точки A, B, M , отмечены знаками P_A, P_B, P_M .

где λ — теплопроводность вещества. Температура, по крайней мере в слабой ударной волне, монотонно меняется вдоль прямой AB .

Искомое решение — распределение температуры и энтропии как функций от координаты — имеет вид, изображенный на рис. 33; точка, в которой энтропия достигает максимума, совпадает как раз с точкой перегиба зависимости температуры от координаты.

Из оценок предыдущего параграфа легко найти порядки величин (считая изменение объема при сжатии величиной пер-

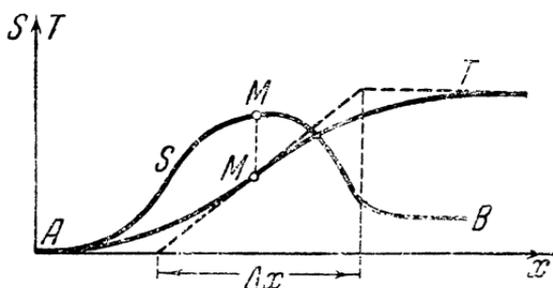


Рис. 33. Внутренняя структура ударной волны небольшой амплитуды при наличии теплопроводности, но в отсутствие вязкости. Обозначения см. рис. 32.

вого порядка малости): Δp , ΔT — первого порядка, пропорциональны Δv ; $S_M - S_A \sim S_M - S_B$ — второго порядка, пропорциональны $(\Delta v)^2$; $S_B - S_A$ — третьего порядка, пропорционально $(\Delta v)^3$. Легко произвести оценку ширины фронта ударной волны, интегрируя (XII-2) до точки M :

$$\frac{1}{v} T u (S_M - S_A) = \lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_M \simeq \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (\text{XII-3})$$

Из наших оценок следует:

$$\Delta x \sim \lambda \frac{\Delta T}{S_M - S_A} \sim \lambda \frac{\Delta v}{(\Delta v)^2} \sim \frac{\lambda}{\Delta v}. \quad (\text{XII-3a})$$

Определение Δx , отвечающее последним формулам, см. на рис. 33. Порядок величины коэффициента оценим из размерности

$$\Delta x \simeq \frac{\lambda}{R} \frac{v^2}{c \Delta v}, \quad (\text{XII-4})$$

где R — газовая постоянная — размерности теплоемкости кал/градус · грамм, степени v и c подобраны так, чтобы дать величину размерности длины.

Изображенное на рис. 33 распределение представляет собой конкретизацию идей Ренкина [78].

Любопытно, что при сильном сжатии возникает своеобразная принципиальная трудность, именно на линии AB между точками A и B достигается максимум температуры в том случае, если давление в ударной волне p_B превышает $1.5 p_A$ (при $c_p/c_v = 7/5$, для двухатомного газа).

При этом максимум температуры лежит при более высоком давлении, чем максимум энтропии.

При наличии максимума температуры оказывается невозможным построить непрерывное распределение температуры и энтропии в пространстве, которое удовлетворяло бы основному уравнению (XII-1).

Как показал Рейлэй [79], эта трудность указывает на необходимость введения в рассмотрение также вязкости. Однако при действии молекулярной вязкости изменяется не только уравнение энергии, но и уравнение движения [наше уравнение (VII-2)]. Таким образом, в этом случае траектория системы в p, v плоскости отклоняется от линии AB . Позднее эти же соображения, без упоминания Рейлэя, были приведены у Беккера [38] (со ссылкой на частное сообщение Прандтля, см. также [76]).

Во втором предельном случае, при отсутствии теплопроводности и действии одной вязкости, изменение энтропии в волне происходит только за счет превращения в теплоту работы против сил вязкости [см. формулу (I-18)].

$$qT \frac{dS}{dt} \sim \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (\text{XII-5})$$

Согласно последнему уравнению, энтропия под действием вязкости монотонно растет; изменение состояния на диаграмме p, v изображается кривой, заключенной между адиабатами Пуассона, проходящими через начальную и конечную точки (пунктир рис. 32). Введем снова понятие эффективной ширины:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_B - u_A}{\Delta x}, \quad (\text{XII-6})$$

$$\frac{dS}{dt} = D \frac{\partial S}{\partial x} = D \frac{S_B - S_A}{\Delta x}. \quad (\text{XII-7})$$

Из уравнения (XII-5) легко найдем (отождествляя D и c по порядку величины), замечая, что $u_B - u_A = D \cdot \Delta v/v$,

$$\Delta x \simeq \frac{\eta v^2}{\Delta v c}. \quad (\text{XII-8})$$

Отклонение состояния от прямой AB происходит благодаря импульсу сил вязкости. Уравнение стационарного движения по одной координате гласит:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} \eta \frac{du}{dx} \right). \quad (\text{XII-9})$$

Интегрируя, найдем:¹

$$p + \rho u^2 + \frac{2}{3} \eta \frac{du}{dx} = p_A + \rho_A u_A^2 = p_B + \rho_B u_B^2, \quad (\text{XII-10})$$

но из уравнения неразрывности мы найдем:

$$u\rho = \frac{u}{v} = M = \text{const}; \quad \frac{du}{dx} = M \frac{dv}{dx}, \quad (\text{XII-11})$$

$$p + Mv + \frac{2}{3} \eta M \frac{dv}{dx} = p_A + Mv_A = p_B + Mv_B = \text{const}. \quad (\text{XII-12})$$

Без члена $\frac{2}{3} \eta M \frac{dv}{dx}$ уравнение дает прямую AB .

Если, согласно рис. 32, $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_S > 0$, то пунктирная линия, заключенная между адиабатами $S = S_A$ и $S = S_B$, целиком лежит ниже прямой, так что в волне

$$p + Mv < p_A + Mv_A. \quad (\text{XII-13})$$

В этом случае из уравнения находим $\eta M \frac{dv}{dx} < 0$, в волне v уменьшается, происходит сжатие; волна разрежения требовала бы отрицательной вязкости. Рассмотрение структуры фронта при действии вязкости привело нас к тем же выводам относительно связи возможности волн сжатия или разрежения со знаком $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_S$, к которым мы пришли иным путем раньше.

При полном отсутствии теплопроводности уменьшение коэффициента вязкости приведет только к уменьшению ширины фронта, так что увеличится производная $\frac{du}{dx}$, произведение $\eta \frac{du}{dx}$ останется постоянным, траектория в плоскости p, v не изменится.

¹ В состояниях A и B , очевидно, $\frac{du}{dx} = 0$; при интегрировании надо учесть, что $\rho u = \text{const}$ по уравнению сохранения вещества.

При наличии теплопроводности уменьшение ширины и рост производных по x при уменьшении вязкости окажется ограниченным; при достаточно малом значении η окажется малым весь член $\eta \frac{du}{dx}$, и мы приблизимся к выполнению уравнения $p + Mv = \text{const}$, т. е. уравнения прямой AB (ср., впрочем, сделанные выше замечания о сильных ударных волнах, в которых на отрезке прямой AB имеет место максимум температуры; в этом случае в определенной части фронта именно вязкость, как бы она ни была мала, определяет величину производных).

Для оценки порядка величины ширины фронта воспользуемся молекулярно-кинетическими выражениями коэффициентов теплопроводности и вязкости. Легко найдем в обоих предельных случаях:

$$\Delta x \sim l \frac{v}{\Delta v} \sim l \frac{p}{\Delta p} \sim l \frac{c}{u_1 - u_2}, \quad (\text{XII-14})$$

где l есть длина свободного пробега молекул в газе.¹

Для воздуха при атмосферном давлении, принимая критерий Прандтля (отношение кинематической вязкости к теплопроводности) равным 1, Тэйлор [93], [24] через коэффициент диффузии B дает следующее выражение ширины фронта ударной волны

$$\Delta x = \frac{4.4B}{u_1 - u_2}. \quad (\text{XII-15})$$

Для воздуха при атмосферном давлении $B = 0.18 \text{ см}^2/\text{сек}$,

$$\Delta x = \frac{1}{u_1 - u_2} = 4.10^{-5} \frac{1}{\Delta p} (\Delta x - \text{см}, u - \text{см}/\text{сек}, \Delta p - \text{атм}). \quad (\text{XII-16})$$

Все оценки согласно указывают на то, что в сколько-нибудь мощных ударных волнах, в которых $\Delta v \cong v$ и $\Delta p \sim p$ ширина

¹ Во всех приведенных выше расчетах мы рассматривали идеальный газ, для которого (по крайней мере по порядку величины) имеют место следующие оценки:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_S \simeq - \frac{p}{v}; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \simeq \frac{p}{v^2}.$$

В общем случае легко установить, что при прочих равных условиях ширина фронта обратно пропорциональна величине $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_S$, в соответствии с ролью, которую эта величина играет в теории ударной волны.

фронта порядка длины свободного пробега; в этих условиях детальные расчеты структуры и применение дифференциальных уравнений гидродинамики теряют смысл.

§ XIII. Распространение ударных волн в газе с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы

В § II мы рассматривали вопрос о распространении звука в газе с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы, т. е. в газе, теплоемкость которого при весьма быстрых изменениях состояния заметно меньше, чем при медленных изменениях состояния, при медленном изменении температуры. Эта зависимость теплоемкости от скорости изменения состояния, это замедленное возбуждение части теплоемкости могут быть обязаны либо затрудненной передаче энергии на внутренние степени свободы, либо обратимой химической реакции. В термодинамической трактовке добавочная теплоемкость вследствие обратимой химической реакции, равновесие которой смещается при изменении температуры или давления, совершенно эквивалентна замедленному возбуждению внутренних степеней свободы. Напротив, случай обратимой химической реакции не имеет ничего общего с необратимым протеканием химической реакции в ударной волне, т. е. с явлением детонации, которого мы здесь касаться не будем.

Как было выяснено в § II, замедленное возбуждение части теплоемкости приводит к двум основным особенностям акустического поведения вещества. Во-первых, оно приводит к дисперсии звука, т. е. к зависимости скорости распространения звука от частоты. Звук большой частоты распространяется так, как если бы теплоемкость была мала. В звуке малой частоты, большой длины волны, изменение состояния происходит медленно. Теплоемкость успевает полностью возбудиться, и соответственно мы получаем меньшую скорость звука. Одновременно с дисперсией звука появляется и чрезвычайно сильное поглощение звука. По выражению одного из экспериментаторов, в соответствующей области частот газ становится „непрозрачным“ для звука. Появляется поглощение, связанное с тем, что внутренняя энергия газа меняется не в фазе с его давлением и удельным объемом, т. е. меняется все время в состоянии, далеко от равновесия, меняется необратимо. Замедленное возбуждение части теплоемкости представляет собой один из возможных механизмов диссипации (рассеивания) энергии.

Рассмотрим распространение ударной волны по газу с замедленным возбуждением части теплоемкости. В p, v плос-

кости рис. 34 мы можем провести через данную точку $A(p_0, v_0)$, описывающую исходное состояние вещества до сжатия, две адиабаты Пуассона, т. е. две изэнтропы, одна из которых осуществляется при весьма быстром сжатии (пунктир, $\omega = \infty$), вторая — более пологая — отвечает медленному сжатию с полным возбуждением всей равновесной теплоемкости вещества (пунктир, $\omega = 0$). Если нас интересует распространение ударной волны на большое расстояние (мы увидим дальше, каков естественный масштаб этой задачи и по сравнению с чем следует считать расстояние большим), контрольную плоскость, на которой мы фиксируем состояние газа, подвергнувшегося сжатию, мы всегда сможем выбрать на достаточном расстоянии от того места, где сжатие началось, так что всегда будет существовать область, в которой уже полностью возбуждены все внутренние степени свободы и вся внутренняя теплоемкость. Помещая контрольную плоскость рис. 23б (стр. 63) в этом месте, мы получим из уравнений сохранения кривую адиабаты Гюгонио с полным возбуждением внутренних степеней свободы (сплошная линия AMC , $\omega = 0$). Эта адиабата Гюгонио, следовательно, в точке A будет касаться пологой адиабаты Пуассона, отвечающей малой частоте, и лишь дальше, при значительных сжатиях, отойдет от нее и пойдет выше.

Из рис. 34 явствует, что могут представиться различные случаи в зависимости от давления сжатия в ударной волне. Слабая ударная волна I (в которой конечное состояние после сжатия, после полного возбуждения всех внутренних степеней свободы описывается точкой M на адиабате Гюгонио, $\omega = 0$) должна распространяться со скоростью, меньшей скорости звука при большой частоте. Какова будет структура такой ударной волны?

Если бы в рассматриваемой сравнительно слабой ударной волне I происходило в каком-то участке фронта весьма быстрое и резкое изменение состояния, то к такому изменению состояния мы могли бы также приложить законы сохранения. Однако в быстром изменении состояния возбуждение внутренних степеней свободы не успеет произойти. Такое изменение состояния можно было бы назвать „ударной волной без возбуждения“.

Адиабата Гюгонио, составленная без учета внутренних степеней свободы, т. е. для весьма быстрого сжатия, должна будет лежать выше соответствующей адиабаты Пуассона (сплошная кривая AB , $\omega = \infty$ на рис. 34). Скорость распространения „ударной волны без возбуждения“, очевидно, превышает скорость звука при большой частоте и, следовательно, тем более превышает скорость распространения звука малой частоты и превышает также скорость достаточно слабых ударных волн с возбуждением.

Таким образом, в искомом режиме, для того чтобы он был стационарен (если он стационарен), если все части фронта движутся с одной и той же скоростью относительно газа, сохраняя взаимное расстояние при постоянной структуре фронта, не может быть в слабой волне резких возрастаний давления, резких изменений объема. Можно сказать, что от медленно распространяющегося возмущения, медленно движущейся ударной волны, все время будут выбегать вперед

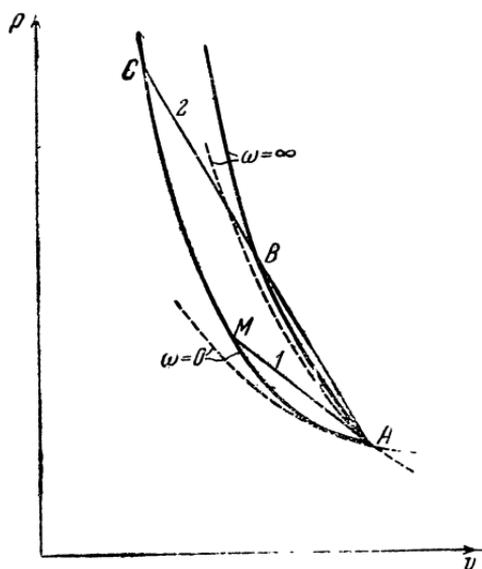


Рис. 34. Распространение ударной волны в газе с замедленным возбуждением части теплоемкости. Адиабаты Гюгонио (сплошная линия) и Пуассона (пунктир) вычерчены в двух предположениях: отсутствия возбуждения ($\omega = \infty$) части теплоемкости и полного возбуждения. Хорда адиабаты Гюгонио $\omega = 0$ пересекает или не пересекает адиабату $\omega = \infty$ в зависимости от амплитуды.

звуковые волны большой частоты, скорость распространения которых превышает скорость ударной волны вследствие дисперсии звука. Однако эти волны весьма быстро ослабевают и экспоненциально затухают впереди ударной волны. Наложение бесконечного количества затухающих звуковых волн в совокупности образует размытый фронт слабой ударной волны. Точную структуру фронта мы можем найти, пренебрегая в этом случае действием вязкости и теплопроводности. Состояние вещества меняется вдоль прямой AM . Скорость изменения состояния вещества определяется скоростью возбуждения внутренних степеней свободы. Качественно очевидно (и это можно подтвердить несложными расчетами), что эффективная ширина фронта

такой ударной волны, распространяющейся со скоростью меньшей, чем скорость звука большой частоты, зависит от времени возбуждения внутренних степеней свободы. По порядку величины ширина фронта равна произведению скорости звука на время возбуждения теплоемкости (см. рисунок 35а). Эта ширина может во много раз превышать ширину фронта, получаемую вследствие действия вязкости и теплопроводности. Так, в случае углекислоты полная теплоемкость при медленном возбуждении составляет 3.3 кал/моль · град. Из них 2.5 кал/моль · град. представляет теплоемкость враща-

тельного и поступательного движений молекул и возбуждается мгновенно, практически при каждом столкновении между молекулами. Остальные 0.8 кал/моль·град есть колебательная теплоемкость, возбуждающаяся в среднем в одном из 600 тысяч столкновений [62]. Скорость звука при больших частотах на 4% превышает скорость звука при малой частоте. В углекислоте ударная волна, вызванная движением поршня со скоростью ~ 13 м/сек, в которой достигается сжатие на 5% (давление растет на 7%), распространяется по газу со скоростью, которая еще на 1% меньше скорости звука большой

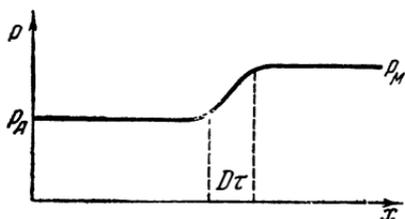


Рис. 35а. Структура ударной волны малой амплитуды (АМ) в газе с замедленным возбуждением (ср. рис. 34). τ — время возбуждения.

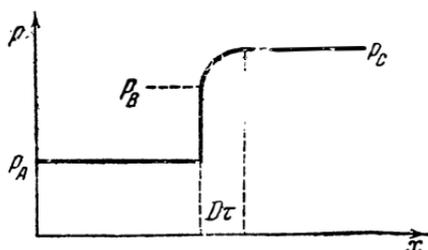


Рис. 35б. Структура ударной волны большой амплитуды (АС) в газе с замедленным возбуждением (ср. рис. 34).

частоты. Оценивая по формулам Прандтля [76], Рейлэя [79], Тэйлора [93] и Беккера [38] (§ 12) ширину такой ударной волны в воздухе, зависящую от теплопроводности и вязкости, мы получим при атмосферном давлении $8 \cdot 10^{-3}$ мм и при давлении 15 мм ртутного столба 0.4 мм. В углекислоте эти величины были бы еще меньше. Между тем, ширина ударной волны в углекислоте, зависящая от замедленного возбуждения, составит по грубому расчету при атмосферном давлении 12 мм; при давлении 150 мм ртутного столба ширина достигает 60 мм. Такое резкое изменение ширины ударной волны может быть замечено при изучении структуры фронта методами теплеровской фотографии, при сравнении фотографии в газах, у которых этих эффектов нет, например, в воздухе, и фотографии в углекислоте.

В случае сильной ударной волны (2 на рис. 34) мы должны ожидать более сложных режимов (ср. рис. 35б): разрыв АВ, ширина которого определяется вязкостью и теплопроводностью и соответственно весьма мала, распространяется без заметного возбуждения внутренних степеней свободы, точка В лежит на соответствующей адиабате Гюгонио (знак $\omega = \infty$). Следующее за разрывом возбуждение сопровождается плавным (на длине порядка $D\tau$) повышением давления и увеличением сжатия до точки С. Рис. 35а и 35б иллюстрируют распределения давле-

ния в пространстве во фронте ударной волны, которые можно ожидать в этих двух случаях. Совершенно аналогичны непоказанные распределения температуры, плотности и скорости. Фотографическое изучение формы ударной волны должно стать, по нашему мнению, удобным прямым методом исследования замедленного возбуждения внутренних степеней свободы.

Увеличение ширины фронта естественно, если вспомнить, что замедленное возбуждение дает большой второй коэффициент вязкости (§ 1). Однако замена конкретных представлений формальным введением второго коэффициента вязкости возможна только в ограниченных пределах и, в частности, не позволяет найти более сложный режим рис. 35б (ср. § II, $\omega \gg 1/\tau$). Подробные расчеты содержатся в статье автора, находящейся в печати в Журн. экспер. теор. физики.

§ XIV. Возникновение ударной волны

Мы подошли к теории ударной волны, рассматривая движение, получающееся при сжатии газа поршнем, в определенный момент ($t=0$) начавшим двигаться с постоянной скоростью. В этом случае мы пришли к режиму, в котором ударная волна сразу образуется у поршня в момент начала его движения и дальше распространяется с постоянной интенсивностью. При конечной массе поршня такое движение требовало бы преодоления бесконечно большой силы инерции в начальный момент при мгновенном изменении скорости поршня.

Рассмотрим движение газа, возникающее при постепенном ускорении поршня, сжимающего газ и покоящегося в начале движения. Мы можем легко сконструировать движение, заменяя непрерывное ускорение большим числом мельчайших скачков скорости, т. е. заменяя плавную кривую в плоскости $x-t$ ломаной, составленной из хорд этой кривой.¹

Рассмотрим подробно первые этапы движения. Поршень начинает двигаться и движется в течение времени t_1 с малой постоянной скоростью w_1 .

В течение этого времени по газу распространяется ударная

¹ Мы ограничиваемся здесь ссылкой на работу Каньяра [43], рассматривающего движение с малой амплитудой. В отличие от всех остальных работ, Каньяр с самого начала рассматривает уравнения движения, содержащие вязкостные члены, так что расчеты описывают не только образование ударной волны, но и стационарную структуру фронта волны. Физический интерес такого рассмотрения невелик, так как до образования ударной волны действие вязкости ничтожно, а стационарная структура может быть более эффективно найдена прямыми методами, в которых заранее предполагается стационарность волны.

волна постоянной интенсивности, причем скорость движения вещества, подвергшегося действию ударной волны, постоянна и равна скорости поршня w_1 . Иными словами, относительно непосредственно примыкающего к нему газа поршень покоится. В момент, когда произойдет следующий скачок скорости до величины w_2 , повторится то же самое, и по газу, примыкающему к поршню и сжатому первой ударной волной, пойдет вторая ударная волна, характеризующаяся скачком скорости $w_2 - w_1$, и т. д.

На рис. 36 показана картина распределения скорости в пространстве после трех таких скачков. Совершенно аналогичный вид имеют графики распределения давления и плотности в тот же момент времени.

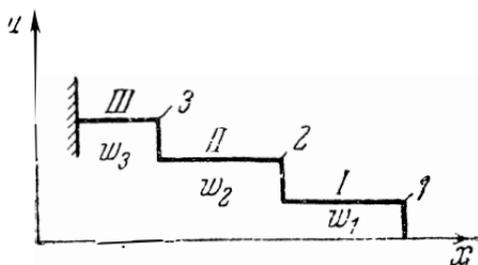


Рис. 36. Распространение ряда последовательных импульсов. С течением времени точка 3 догоняет 2, обе догоняют 1. По оси ординат отложена скорость движения газа.

Фундаментальное значение приобретают сейчас показанные в общем виде Жуге ([58, 60], см. также Дюгем [48]) свойства ударных волн; скорость распространения волны 1 относительно сжатого в ней газа в отрезке 2—1 меньше скорости звука в состоянии 1.

Напротив, скорость волны 2 относительно состояния 1, которое для этой волны является начальным, должна быть больше скорости звука в состоянии 1 и, согласно Жуге, тем более превышает скорость распространения волны 1.

Отсюда видно, что волны догоняют друг друга, имеют тенденцию кумулироваться (накапливаться), объединяясь в мощную ударную волну. Гюгонио связывает с этим обстоятельством устойчивость ударной волны [56]. Адамар [54] и Беккер [38] рассчитывают момент и место начала кумуляции в зависимости от ускорения поршня.

В плоскости x, t кумуляции соответствует пересечение характеристик (линий, изображающих движение отдельных ударных волн) впереди поршня.

В случае разрежения (движения поршня от газа) характеристики расходятся веером, не пересекаясь, и найденное решение (ср. § VI) остается правильным неограниченно долго. Уменьшая отдельные скачки скорости и увеличивая их число, мы приходим к непрерывной плавной кривой движения поршня и к непрерывному распределению плотности, давления, скорости в газе перед поршнем вместо ступенек.

Однако в случае сжатия такое решение будет правильным только до момента пересечения характеристик, т. е. момента, когда одна волна догонит предыдущую.

При уменьшении величины скачка скорости $w_n - w_{n-1}$, с одновременным пропорциональным уменьшением интервала времени между двумя последовательными скачками во времени и место соединения двух волн (гопка пересечения в плоскости $x-t$) стремятся к вполне определенному пределу. Найдем этот предел. Скорость распространения весьма слабой волны не отличается от скорости звука. В движущемся газе к скорости звука добавляется скорость движения самого газа, равная скорости поршня, так что скорость распространения слабой волны в пространстве равна $c + w$. За время Δt волна уйдет на расстояние $(c + w) \Delta t$.

Если за это время скорость поршня изменилась на величину Δw и вызванное изменением скорости поршня сжатие изменило скорость звука на величину Δc , скорость распространения увеличилась на $\Delta w + \Delta c$. Сумма $\Delta w + \Delta c$ и представляет скорость, с которой одна волна догоняет другую (разность их скоростей), так что встреча произойдет через время $t = \frac{c + w}{\Delta c + \Delta w} \Delta t$.

Используя найденные в акустике законы изменения состояния в слабых волнах (мы могли бы поучить их и предельным переходом от уравнений ударных волн), мы легко вычислим последнюю величину:

$$t = \frac{c + w}{\Delta c + \Delta w} \cdot \Delta t = \frac{c + w}{\frac{\Delta c}{\Delta w} + 1} \frac{\Delta t}{\Delta w}. \quad (\text{XIV-1})$$

После предельного перехода получим:

$$\frac{\Delta t}{\Delta w} = \frac{1}{\frac{d(c+w)}{dw} \Delta t} = \frac{1}{g}, \quad (\text{XIV-2})$$

где g есть ускорение поршня.

$$\frac{\Delta c}{\Delta w} = \frac{dc}{dw} = \frac{dc}{d\rho} \frac{d\rho}{dw}. \quad (\text{XIV-3})$$

В акустике мы нашли:

$$du = \frac{c}{\rho} d\rho; \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}.$$

Так как скорость газа u равна скорости поршня w , получим

$$\frac{d\rho}{dw} = \frac{\rho}{c}; \quad \frac{dc}{d\rho} \frac{d\rho}{dw} = \frac{\rho}{c} \frac{dc}{d\rho} = \frac{d \ln c}{d \ln \rho}. \quad (\text{XIV-4})$$

Для идеального газа легко найдем:

$$c \sim \sqrt{T} \sim \rho^{\frac{k-1}{2}}; \quad \frac{d \ln c}{d \ln \rho} = \frac{k-1}{2}, \quad (\text{XIV-5})$$

$$t = \frac{c+w}{1 + \frac{k-1}{2}} \frac{1}{g} = \frac{1}{g} \frac{2}{k+1} (c+w). \quad (\text{XIV-6})$$

В случае произвольного уравнения состояния преобразуем знаменатель (XIV-1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dw} + 1 &= \frac{\rho}{c} \frac{dc}{d\rho} + 1 = \frac{1}{2\rho c^2} \left(2\rho^2 c \frac{dc}{d\rho} + 2\rho c^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2\rho c^2} \frac{d}{d\rho} \rho^2 c^2 = \frac{1}{2\rho c^2} \frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{dp}{d\rho}. \end{aligned} \quad (\text{XIV-7})$$

Переходя к более удобной переменной — удельному объему $v = \frac{1}{\rho}$; $\frac{d}{dv} = \rho^2 \frac{d}{d\rho}$, найдем:

$$\frac{dc}{dw} + 1 = \frac{v^3}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s \quad (\text{XIV-8})$$

и в пределе при $w \rightarrow 0$

$$t = \frac{c^3}{v^3 \left(\partial^2 p / \partial v^2 \right)_s} \frac{1}{g}. \quad (\text{XIV-9})$$

Таким образом, сама возможность одной волне догнать предыдущую и возможность возникновения ударной волны связаны со знаком $(\partial^2 p / \partial v^2)_s$, роль которого в термодинамической теории мы отмечали раньше в § XI.

Общее рассмотрение всей картины движения при произвольном задании движения поршня представляет большие трудности [54, 38]. Возникают ударные волны конечной, но переменной амплитуды, после их прохождения изменяется энтропия газа; только в самое последнее время Кибелю, Франклю и Христиановичу удалось развить эффективные графические

методы расчета, которые, однако, слишком сложны для нашего курса (см. [11]). Аналитические методы до сих пор удалось найти только для движения до образования разрыва [37].

Значительно легче найти такое движение поршня, при котором все характеристики пересекаются в одной точке, т. е. все волны одновременно и в одном месте нагоняют друг друга.

Зададимся местом и временем образования ударной волны (соединения всех слабых волн), которые связаны между собой условием $x_b = c_0 t_b$, получающимся из рассмотрения первой слабой волны, распространяющейся по невозмущенному еще неподвижному газу. Переносим начало координат в x, t плоскости в эту точку (новые координаты x', t'), мы заметим, что состояние газа постоянно вдоль прямых (характеристик), проходящих через начало новой системы координат; иными словами, состояние газа зависит только от отношения x'/t' .¹ В частности, только от отношения x'/t' зависит скорость газа и равная ей скорость движения поршня.

Таким образом, дифференциальное уравнение движения поршня является однородным

$$w = \frac{dx_n'}{dt'} = f\left(\frac{x_n'}{t'}\right) \quad (\text{XIV-10})$$

и элементарными приемами интегрируется в квадратурах (см. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, стр. 80).

Вид функции f найдем, замечая, что наклон характеристики

$$\frac{x'}{t'} = u + c. \quad (\text{XIV-11})$$

Связь u и c при изменении состояния газа волнами, распространяющимися в одном направлении (см. § VI), при отсутствии ударных волн (при постоянной энтропии) иногда легко получить в явном виде [идеальный газ $u = \frac{2}{k-1}(c - c_0)$]. Эту связь всегда можно найти при известном уравнении адиабаты $p = p(\rho, S = \text{const})$ в параметрическом виде [$u = u(\rho), c = c(\rho)$] — см. ф-лы (VI-19).

Преобразуем ее к виду

$$u = f(u + c), \quad (\text{XIV-12})$$

где f есть как раз функция f уравнения (XIV-10).

¹ Все расчеты относятся к состоянию до возникновения ударной волны $t < t_b$, т. е. $t' < 0$. Движение происходит в области $x < x_b$, где $x' < 0$.

Так, для идеального газа в случае $k = c_p/c_v = 1.4$ имеет место

$$u = \frac{2}{k-1}(c - c_0) = 5(c - c_0) = \frac{5}{6}(c + u - c_0), \quad (\text{XIV-13})$$

$$\frac{dx_n'}{dt'} = \frac{5}{6} \left(\frac{x_n'}{t'} - c_0 \right). \quad (\text{XIV-14})$$

Введем безразмерный параметр y

$$\frac{x_n'}{t'} = yc_0; \quad x_n' = c_0 t' y; \quad \frac{dx_n'}{dt'} = c_0 t' \frac{dy}{dt'} + c_0 y \quad (\text{XIV-15})$$

Согласно (XIV-14), получим уравнение:

$$c_0 t' \frac{dy}{dt'} + c_0 y = \frac{5}{6} (yc_0 - c_0). \quad (\text{XIV-16})$$

Переменные разделяются:

$$t' \frac{dy}{dt'} = -\frac{1}{6} y - \frac{5}{6}. \quad (\text{XIV-17})$$

Начальные условия:

$$t'_0 = -t_b; \quad x'_{0n} = -x_b = -c_0 t_b = c_0 t'_0; \quad y_0 = 1 \quad (\text{XIV-18})$$

Решение имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} t' &= -t_b \left(\frac{y}{6} + \frac{5}{6} \right)^{-6}, \\ x_n' &= c_0 y t' = -t_b c_0 y \left(\frac{y}{6} + \frac{5}{6} \right)^{-6} = -x_b y \left(\frac{y}{6} + \frac{5}{6} \right)^{-6}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV-19})$$

Возвращаясь к системе координат, в которой в начальный момент поршень находился в начале координат, получим следующее уравнение движения поршня в параметрическом виде:

$$x_n = x_b \left[1 - y \left(\frac{1}{6} y + \frac{5}{6} \right)^{-6} \right], \quad (\text{XIV-20})$$

$$t = t_b \left[1 - \left(\frac{1}{6} y + \frac{5}{6} \right)^{-6} \right]. \quad (\text{XIV-21})$$

В явном виде уравнение несколько громоздко.

Кривая (XIV—20) — (XIV-21) вычерчена точно на рис. 37; на кривой помечены скорости поршня в различных точках; пунктиром проведена первая характеристика.

Амплитуда разрыва плотности, скорости и давления в месте встречи зависит от того, в какой момент движение поршня отклоняется от только что найденного закона.¹

В момент соединения всех волн в месте соединения образуется конечный разрыв; легко видеть, однако, что этот разрыв не может распространяться дальше как одно целое, без изменения, так как в распространяющемся без изменения разрыве — в ударной волне — имеют место другие соотношения между плотностью, давлением и скоростью. Так, до момента

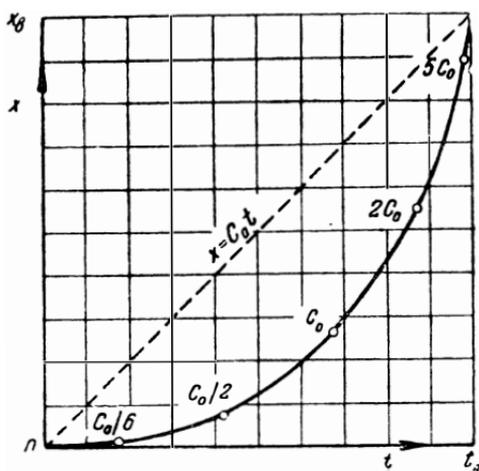


Рис. 37. Движение поршня (сплошная линия), при котором все характеристики пересекаются одновременно в одной точке A в верхнем правом углу чертежа. В отдельных точках помечена скорость поршня. c_0 — скорость звука в газе до сжатия.

образования разрыва градиенты везде были невелики, действием диссипативных сил можно было пренебречь, энтропия не изменялась, связь между давлением и плотностью удовлетворяла уравнению адиабаты Пуассона. В ударной волне выполняется уравнение Гюгонио, энтропия растет.

Рассмотрение движения, возникающего в момент образования разрыва, мы отложим до § XVI; в ближайшем § XV будут приведены некоторые опытные данные, касающиеся возникновения ударных волн.

¹ При $t \rightarrow t_b$ уравнения (XIV-20) и (XIV-21) приводят к $x_n \rightarrow x_b$, что отвечает бесконечному сжатию (конечное количество вещества с отрезка $0 - x_b$ сжимается в стремящийся к нулю интервал между x_n и x_b), бесконечному давлению и скорости.

§ XV. Ударная волна в колебаниях большой амплитуды

В 60-х годах прошлого века было замечено образование странных линий на закопченной пластинке, вблизи которой проскакивали сильные электрические искры лейденской банки. Предполагали электрическое происхождение этих линий. Рядом остроумных экспериментов Мах и его сотрудники [66, 67, 68, 69, 82] показали, что линии эти представляют собой след столкновения волн, распространяющихся от отдельных искр, отражающихся у бортов пластинки, и т. д. Располагая у пластинки два искровых промежутка разной длины, соединенных последовательно, Мах заметил, что место встречи волн находится всегда ближе к слабой искре; так была показана зависимость скорости распространения сильных возмущений от их амплитуды. Применяя теневой метод для наблюдения распространения волн, стробоскопирование и моментальную фотографию с освещением отдельной искрой, Мах показал сверхзвуковую скорость распространения и резкость фронта возмущения. Он отметил также, что распространяющееся в пространстве возмущение затухает гораздо быстрее, чем возмущение, вынужденное распространяться в одном измерении, в узкой трубке.

Опыты по индцированию ударных волн, возникающих в трубе при разрыве перегородки, разделяющей газы разного давления, производил Ввей около 1900 г. [96]. Вотье [123] исследовал распространение импульса, вызванного выстрелом из пистолета. В первом случае с удовлетворительной точностью была подтверждена следующая из уравнений Гюгонио связь между давлением (амплитудой волны) и скоростью ее распространения. Во втором случае волны были сравнительно слабы и при возникновении имели размытый фронт без разрыва. Однако на протяжении километров (была использована только что построенная, но еще не пущенная в эксплуатацию водопроводная линия) удалось отметить постепенное характерное увеличение крутизны, образование разрыва во фронте волны.

В кратком обзоре, отнюдь не претендующем на полноту, мы остановимся на последних, особенно тщательно проведенных опытах [87, 70]. В связи с исследованием колебаний газа в выхлопном и всасывающем трубопроводах двигателя внутреннего горения [87] были проделаны следующие опыты. Труба длиной 12 м и внутренним диаметром 7 см присоединялась к цилиндру маленькой поршневой машины того же диаметра (7 см) с ходом поршня 6.8 см. В пяти сечениях трубы были установлены измерители давления и скорости движения газа. Давление замерялось пьезокварцем, скорости газа — шайбочкой размерами 2×3 мм, укрепленной на оси трубы.

При движении газа шайбочка движется по оси, закручивая стержень. Поворот стержня регистрируется через окошко с помощью зеркала, прикрепленного к стержню. Особое внимание было обращено на высокую собственную частоту (малую инерционность) измерительных приборов и хорошее демпфирование собственных колебаний.

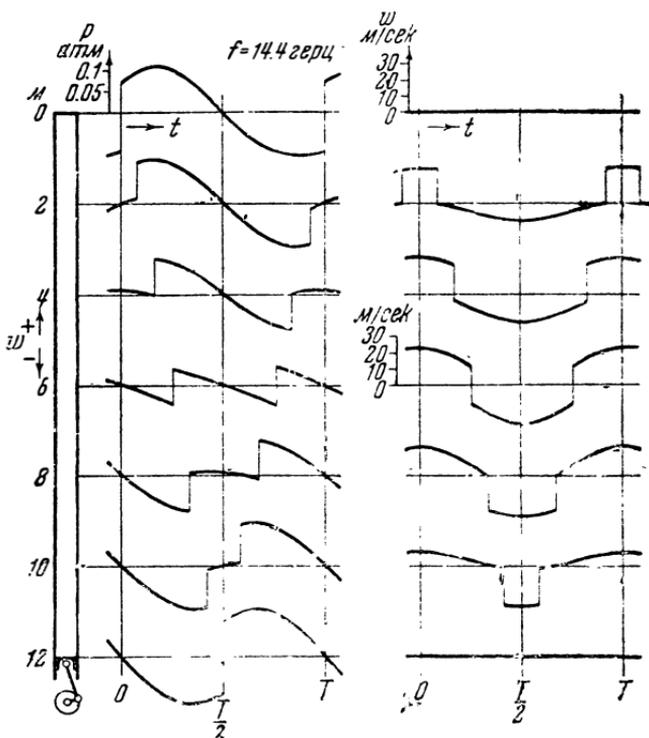


Рис. 38а. Схема опыта (крайняя слева труба) и запись кривых изменения давления (слева) и скорости газа (справа) в 7 сечениях трубы в зависимости от времени при возбуждении колебаний движением поршня с основной собственной частотой трубы 14,4 герц.

Поршень приводился в гармоническое возвратно-поступательное движение электромотором. При частоте, далекой от резонанса, амплитуда колебаний была мала. Изменение давления и скорости в каждом сечении также происходило по гармоническому закону, в полном соответствии с обычными акустическими представлениями.

Однако при резонансе характер движения резко менялся. На рис. 38а и 38б схематически представлены записи приборов при возбуждении основного тона трубы. Частота колебаний поршня 14,4 герц (14,4 колебаний в секунду). Как и следовало ожидать, весьма велика амплитуда движения газа:

скорость движения поршня при частоте 14,4 герц не превышает $\pi 14,4 h$, где h — ход поршня, т. е. $3,14 \cdot 14,4 \cdot 6,8 \text{ см/сек.} = 3,1 \text{ м/сек.}$ В резонансе скорость газа достигает 25 м/сек — почти в 10 раз больше. Для нас особый интерес представляет вид кривых изменения скорости и давления, свидетельствующий о возникновении ударных волн значительной амплитуды

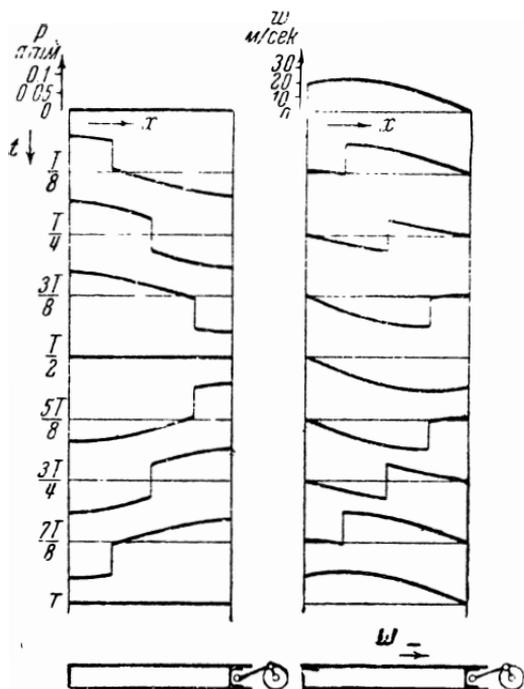


Рис. 386. Мгновенные распределения давления и скорости по длине трубы в различные моменты времени (обработка записей рис. 38а).

при гармоническом возбуждении сравнительно медленно движущимся поршнем.

Теория ударной волны позволяет легко сделать приближенные, но весьма важные выводы относительно амплитуды волн в резонансе в условиях опыта Шмидта. Рассеяние энергии вследствие трения и теплоотдачи газа вблизи боковых стенок трубки (Кирхгофф [61]), при отражении от конца трубы и поршня (Константинов [13]) — все эти обычные для акустики причины поглощения звука в условиях опытов такого типа невелики; рассеиваемая в единицу времени энергия растет пропорционально квадрату амплитуды (т. е. пропорционально энергии колебаний) и при большой амплитуде, когда возникают раз-

рывы, может отступить на задний план по сравнению с другим механизмом рассеяния энергии.

В § XI мы установили, что в ударной волне происходит рост энтропии, пропорциональный третьей степени амплитуды давления, плотности или скорости в волне. В стационарном режиме этот рост энтропии должен быть скомпенсирован автоматически устанавливающимся соответствующим отводом тепла из газа в стенки трубы. Рост энтропии описывает необратимое превращение механической энергии в тепловую, описывает затухание волн, незначительное при малой амплитуде, но растущее быстро (как куб, вместо квадрата в линейной акустике) поглощение. Приблизительно, вводя эффективное значение амплитуды давления Δp , обозначая частоту ω , длину трубы l , ход поршня h , скорость поршня w , площадь поршня, равную сечению трубы F , найдем работу, совершенную поршнем в единицу времени:

$$A = \frac{1}{t} \int_0^t F \Delta p w dt. \quad (\text{XV-1})$$

В резонансе¹ приближенно оценим A , замечая, что $w \simeq h \omega$.

$$A \simeq \Delta p h \omega F. \quad (\text{XV-2})$$

Поглощение энергии найдем, составляя выражение

$$A_1 = D \rho F T \Delta S, \quad (\text{XV-3})$$

где $D \rho F$ есть количество вещества, подвергающееся ударному сжатию в единицу времени; D — скорость распространения ударной волны — приближенно заменим скоростью звука c ; ΔS — приращение удельной (на грамм) энтропии; T — абсолютная температура, $T \Delta S$ — необратимо превращенная в тепло работа на грамм вещества.

Согласно формуле (XI-13),

$$T \Delta S \simeq \frac{1}{12} \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} (\Delta p)^3.$$

Для воздуха $k = 1.4$;

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s = \frac{v}{p^2} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 1 \right) = \frac{2.4}{1.4^2} \frac{v}{p^2}.$$

$$T \Delta S \simeq \frac{1}{10} \frac{v}{p^2} (\Delta p)^3;$$

$$A_1 = c \rho F T \Delta S = \frac{1}{10} c \rho F v (\Delta p)^3 / p^2 = \frac{c F}{10} \frac{(\Delta p)^3}{p^2}. \quad (\text{XV-4})$$

¹ Вдали от резонанса Δp и w меняются со значительным сдвигом фазы, оценка (XV-2) была бы неправильна (завышена).

Приравнивая работу поршня поглощению энергии, получим:

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 = \frac{10h\omega}{c}. \quad (\text{XV-5})$$

В рассматриваемом случае возбуждения основного тона трубы частота колебаний поршня в резонансе связана с длиной трубы $\omega = \frac{c}{2l}$ (длина полуволны равна длине трубы). Подставляя, найдем простую формулу

$$\frac{\Delta p}{p} = \sqrt{5 \frac{h}{l}}. \quad (\text{XV-6})$$

В опыте Шмидта $h = 6.8$ см и $l = 12$ м найдем

$$\frac{\Delta p}{p} = \sqrt{5 \frac{0.063}{12}} = 0.17; \quad \Delta p \sim 0.17 \text{ ата}$$

в разумном соответствии с наблюдаемым порядком величины (рис. 33а и 38б), если принять во внимание приближенный характер расчета и наличие других видов поглощения. Заметим, что для обертонов, наряду с изменением соотношения ω и l , необходимо также учитывать наличие в каждый момент нескольких поверхностей разрыва (ударных волн), что увеличивает E_1 .

§ XVI. Распространение произвольного разрыва

В § XIV мы вплотную подошли к задаче о дальнейшей судьбе разрыва, возникшего в месте соединения многих слабых ударных волн, — разрыва, не подчиняющегося уравнению Гюгонио. Обобщая эту задачу, поставим вопрос о поведении произвольного разрыва в следующей формулировке.

В начальный момент $t = 0$ дана плоскость (поместим ее в начало координат $x = 0$), на которой терпят скачок все характеризующие состояние и движение газа величины p, v, T, u . По обе стороны плоскости разрыва все эти величины постоянны. Чем больше то расстояние, на котором еще можно считать постоянными все величины, тем дольше (во времени) будет правильно решение, к которому мы придем.

Поскольку в условиях задачи не содержится ни характеристической длины, ни характеристического времени, анализ § VI показывает, что следует искать движение, зависящее от одного отношения x/t . В упомянутом параграфе мы нашли это движение аналитически для распространения по газу волны разрежения. Для волны сжатия аналитическое решение приводило к нелепости — к необходимости осуществления в одной

и той же точке пространства одновременно трех различных значений давления и объема. Именно это явилось одним из исходных пунктов построения теории ударной волны. Зная теорию ударной волны, мы уже в состоянии решить обе частные задачи для начинающегося в момент времени $t=0$ движения поршня, которое приводит либо к волне разрежения, либо к ударной волне сжатия. Сейчас мы можем решить и общую задачу распространения произвольного разрыва. Мы будем конструировать решение из исследованных ранее волн разрежения и волн сжатия.

Отметим сперва определенную трудность: волна разрежения распространяется по газу со скоростью, равной скорости звука, волна сжатия распространяется, как мы видели, со скоростью, превышающей скорость звука; однако относительно уже сжатого газа ударная волна сжатия распространяется медленнее скорости звука в этом газе. Таким образом, мы располагаем только двумя волнами: одна волна, будь то волна разрежения или волна сжатия, распространяется в одну сторону, например, влево от плоскости, на которой имел место разрыв в начальный момент времени, другая волна распространяется в другую сторону — вправо. В одну сторону мы не можем направить больше одной волны. Действительно, если, например, направо распространяется ударная волна, то волна разрежения или тем более ударная волна, пущенная по газу, подвергшемуся сжатию, в том же направлении, должна обязательно догнать исходную ударную волну. Но так как обе волны должны выйти из одной точки $x=0$ одновременно, в момент времени $t=0$, когда был осуществлен разрыв (иначе говоря, все явление должно зависеть только от координаты x/t , а в этом случае нельзя себе представить, чтобы одна волна догоняла другую), то в каждую сторону может идти не больше одной волны. Между тем, волна, распространяющаяся по газу, состояние которого задано, будь то волна разрежения или ударная волна, полностью определяется одним параметром. Так, например, если мы зададим отношение плотности до и после ударной волны, то этим самым полностью определится давление ударной волны (по адиабате Гюгонио), скорость распространения ударной волны, энтропия и все прочие величины для подвергшегося сжатию вещества. При этом для того чтобы мы имели дело именно с ударной волной, необходимо еще, чтобы плотность вещества превышала начальную плотность вещества, поскольку мы имеем дело с газами вдали от критической точки. Напротив, если мы зададим, что плотность вещества после прохождения волны меньше плотности вещества до волны, то из термодинамических соображений сразу можно заключить, что здесь мы будем иметь дело не с ударной волной, а с постоянно расширяющейся волной разрежения. Для волны разрежения снова изме-

нение плотности полностью определяет изменение давления в волне, энтропия газа в волне не меняется, скорость распространения волны равна в каждой точке скорости звука.

Таким образом, на первый взгляд в нашем распоряжении есть только два параметра, за которые можно выбрать изменение плотности в двух волнах, распространяющихся в две разные стороны. Между тем, нам нужен третий параметр для описания распространения произвольного разрыва. С одной стороны разрыва, например справа, нам были заданы три величины — давление, плотность, скорость в невозмущенном газе; в каждой волне мы располагаем одним параметром; имеются две волны, что дает

два параметра; между тем, нам необходимо притти к произвольно заданным трем значениям величин, характеризующим состояние газа слева (например, давление, плотность и скорость с другой стороны разрыва). Мы приходим отсюда к необходимости существования еще одного разрыва или еще одной волны. Однако этот разрыв или волна должны иметь особое свойство: этот разрыв не должен распространяться относительно газа со звуковой скоростью. Такой разрыв можно представить себе лишь в том случае, если давление и скорость по обе стороны разрыва одинаковы. Лишь в этом случае от разрыва не пойдут в обе стороны звуковые волны. При этом равенство скорости движения и давления, обеспечивающее механическое равновесие в разрыве особого рода, не препятствует тому, чтобы по обе стороны разрыва были различны температура, плотность и энтропия газа. С помощью такого третьего разрыва, разрыва особого рода, мы и получаем возможность удовлетворить всем уравнениям, т. е. построить полное решение вопроса о дальнейшей судьбе заданного в начальный момент произвольного разрыва.

Зададимся прежде всего определенными значениями давления и удельного объема вещества.

В p, v диаграмме рис. 39 пусть точка A представляет состояние газа слева от разрыва (давление p_a), точка B — состояние газа справа от произвольного разрыва (давление p_b),

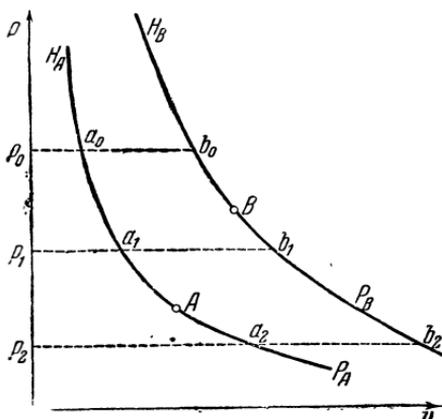


Рис. 39. Распространение произвольного разрыва. Начальные состояния с обеих сторон разрыва описываются точками A и B . Вверх от A и B проведены адиабаты Гюгонио H_A и H_B , вниз — адиабаты Пуассона P_A и P_B .

в начальный момент $t=0$. Проследим теперь все движения, получающиеся при различных значениях скорости относительного движения веществ справа и слева от заданной в начальный момент плоскости разрыва. Через каждую точку A и B проводим вверх адиабату Гюгоню, по которой идет сжатие в ударной волне, вниз — адиабату Пуассона, по которой изменяется состояние вещества при расширении в волне разрежения.

При изменении относительной скорости движения меняется давление p в волнах, распространяющихся по газу первому и второму, одинаковое по обе стороны возникающего разрыва

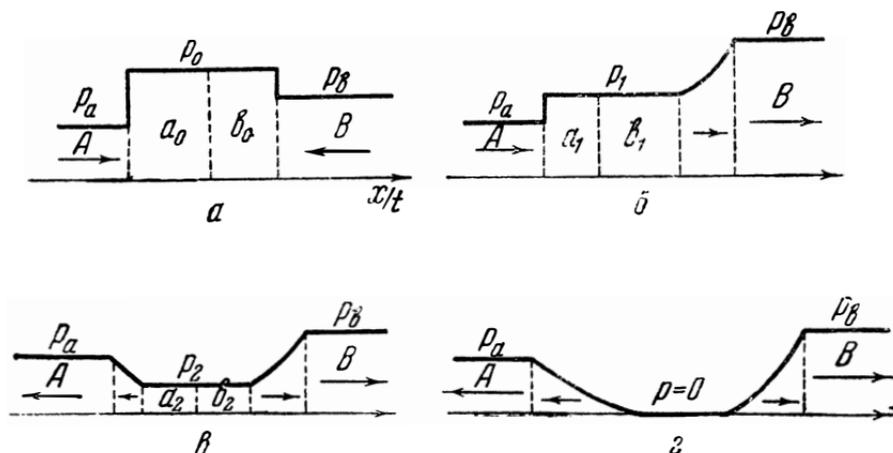


Рис. 40. Типические случаи распространения произвольного разрыва при заданных давлении и плотности по обе стороны разрыва, но различных относительных скоростях.

a — столкновение двух масс газа; возникают две ударные волны; $б$ — движущаяся с равной скоростью массы газа; в газе большего давления возникает волна разрежения, толкающая ударную волну в газе меньшего давления; $в$ — разлет двух масс газа; возникают две волны разрежения; $г$ — разлет двух масс газа со скоростью, превышающей сумму скоростей истечения; возникают две волны разрежения, в середине — вакуум.

Стрелки, показывающие скорости газа, даны в системе координат, в которой покоятся получающиеся в волнах газы в середине рисунков ($a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$).

особого рода. Однако вместо задания относительной скорости и нахождения давления p удобнее поступить иначе и, задаваясь различными значениями p , конструировать соответствующий режим и находить, какое должно было быть относительное движение газов в начальный момент в состояниях, изображаемых точками A и B для того, чтобы было достигнуто заданное давление p .

Выберем давление p_0 , превышающее как давление p_a так и давление p_b (рис. 40а). В этом случае и вправо и влево от произвольного разрыва пойдут ударные волны сжатия. Вещества в состоянии a_0 и b_0 граничат между собой, они разделены разрывом особого рода, в котором давление по обе стороны равно p_0 , и должны быть равны между собой скорости

движения вещества. Но так как вещество в состоянии a_0 движется относительно исходного вещества A влево, а вещество b_0 , точно так же в ударной волне движется относительно своего исходного вещества B вправо — в сторону распространения ударной волны Bb_0 , то для того, чтобы скорости в состоянии a_0 и b_0 были равны между собой, необходимо, чтобы в начальном состоянии, в момент $t=0$, вещества A и B двигались навстречу, сталкиваясь друг с другом с большой скоростью. Ударные волны, распространяющиеся по обе стороны разрыва, мы получим в случае столкновения двух движущихся с большой скоростью навстречу масс вещества. Чем меньше взаимная скорость, с которой сталкиваются вещества A и B , тем меньше должно быть давление p_0 в ударных волнах. Наконец, при достаточно малой скорости столкновения мы перейдем к другому режиму (рис. 40б). В этом режиме давление p_1 больше давления p_a , но меньше давления p_b . По веществу A движется ударная волна, по веществу B — волна разрежения. Такой режим может быть осуществлен, в частности, и в том случае, если в начальный момент $t=0$ скорости движения вещества A и вещества B равны между собой, так что в начальный момент мы имеем только разрыв давления. Естественно в таком случае, что между веществами A и B возникнет область с промежуточным между p_a и p_b давлением. В этом случае вещество будет двигаться от большего давления B в сторону меньшего давления A . При этом по веществу, в котором давление было меньше, пойдет ударная волна; напротив, по веществу, давление которого было больше, пойдет волна разрежения. Этот случай подробно рассмотрен ниже.

Вернемся к рис. 39 и будем продолжать разбор различных могущих представиться случаев. Выбирая p_2 меньше p_a и p_b , мы получим волны разрежения, бегущие в обе стороны от первоначального разрыва (рис. 40в). Такой режим осуществится в том случае, если в начальный момент вещество в состоянии A и вещество в состоянии B двигались в разные стороны от разрыва с достаточной скоростью. Наконец, в том случае, если относительная скорость, с которой двигались друг от друга в начальный момент вещество в состоянии A и вещество в состоянии B , превышает $5(c_A^0 + c_B^0)$,¹ где c_A^0 и c_B^0 обозначают скорость звука в состоянии A и в состоянии B , т. е. если скорость относительного движения вещества A и вещества B превышает сумму максимальных скоростей

¹ Для двухатомного газа при $c_p/c_v = 1.4$. В общем случае для этого понадобится скорость, превышающая $\frac{2c_A^0}{K_A - 1} + \frac{2c_B^0}{K_B - 1}$, где K_A и K_B — показатели адиабат газов A и B .

истечения вещества A и вещества B , то между веществом A и веществом B образуется вакуум (рис. 40г).

В статье Щелкина и автора [9] и в более ранней работе Шардина [84] даны относящиеся к случаю начального разрыва давления без разрыва скорости (случай рис. 40б) подробные численные расчеты. Любопытно, что в том случае, если сжатым веществом является водород, скорость звука в котором больше скорости звука во втором веществе низкого давления, например, в воздухе, ударная волна значительно мощнее, чем в том

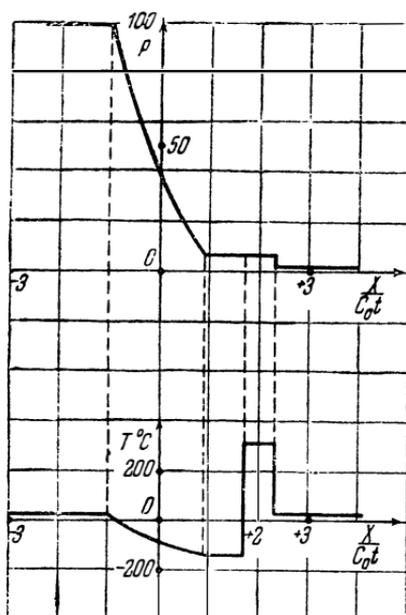


Рис. 41а. Распространение разрыва, возникшего при соприкосновении покоящегося воздуха, сжатого до 100 ата, и покоящегося воздуха при 1 ата. В начальный момент температура везде 20°C . На рисунке даны кривые давления (сверху) и температуры (снизу).

случае, если сжатым веществом также является воздух. Заимствуем из цитированной работы [9] численный пример. На рис. 41а,б, показана картина распределения давления и температуры в случае внезапного разрыва перегородки, разделявшей сжатый до 100 атм. газ и газ при атмосферном давлении. Слева в обоих случаях помещен сжатый газ. По оси абсцисс отложено отношение координаты к времени x/c_0t , причем c_0 есть скорость звука в воздухе при начальной тем-

пературе, не зависящая от давления. Перегородка находилась при $x=0$.

На рис. 41а (с обеих сторон воздух) мы видим, что слева на расстоянии, превышающем единицу, сжатый воздух еще не возмущен. Между $x/t = -c_0$ и $x/t = 0.9c_0$ расположена волна разрежения, которая в последней точке граничит с воздухом, расширившимся до давления около 6 атм. Разрыв особого рода покоится относительно воздуха, находящегося с обеих сторон разрыва, но в нашей системе координат он

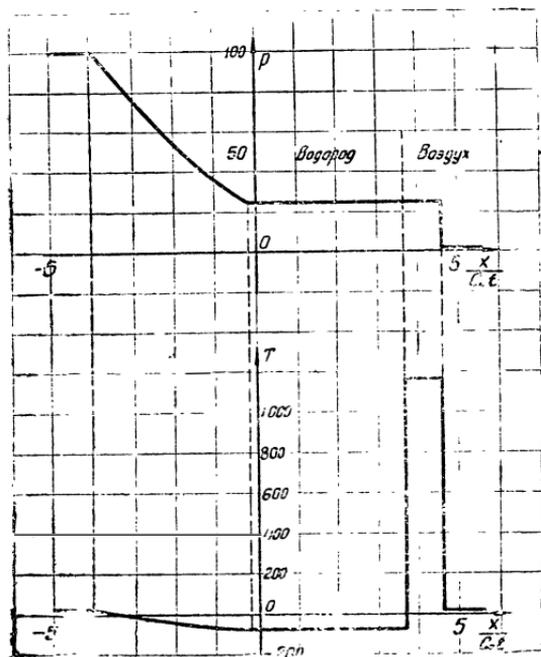


Рис. 41б. Сжатие воздуха водородом с начальным давлением 100 ата.

движется вместе с окружающим его воздухом со скоростью около 1.7 скорости звука в исходном состоянии (т. е. около 580 м/сек). Справа от разрыва особого рода находится воздух, подвергшийся ударному сжатию от атмосферного давления до давления около 6 атм. В волне разрежения температура воздуха падает с 20°C (при 100 атм) до -140°C (при 6 атм.) в соответствии с уравнением адиабаты Пуассона. Справа в ударной волне сжатие газа от 1 до 6 атм. сопровождается ростом температуры с 20 до 300°C , заметно превышающим рост температуры по адиабате Пуассона (220°C). Ударная волна сжатия с 1 до 6 атм распространяется со скоростью, равной 2.3 скорости звука. Только при x , большем $2.3 c_0 t$, справа

расположен невозмущенный еще воздух при атмосферном давлении.

На рис. 41 б построена такая же картина для случая, когда сжатым газом является водород. В соответствии с большей скоростью звука водород способен дать значительно большую скорость истечения при данном перепаде давления. Поэтому водород сильнее сжимает воздух, хотя сам он расширяется меньше. Давление в волне расширения в водороде и в ударной волне, распространяющейся в воздухе, составляет около 25 атм. В соответствии с этим достигается гораздо большая скорость ударной волны, примерно $4,6 c_0$ ¹; в ударной волне достигается весьма высокая температура 1175°C . Можно думать, что такие высокие температуры при истечении водорода в воздух в известных условиях могут привести к воспламенению водорода. В том случае, если истечение водорода в воздух происходит в закрытом резервуаре, последующее многократное отражение ударных волн может привести к дальнейшему повышению температуры.

Какой из рассмотренных на рис. 40 а, б, в, г случаев осуществится, если разрыв в начальный момент образован наложением большого числа малых ударных волн сжатия, которые одновременно соединились в один и тот же момент в одной точке пространства? Физически мы осуществим этот случай, вдвигая в газ поршень с переменной скоростью, ускоренно. В § XIII мы нашли такой график движения поршня, при котором все волны соединятся одновременно. В момент соединения волн справа от места соединения будем иметь невозмущенный газ. Слева будем иметь газ, подвергшийся многократному сжатию в слабых ударных волнах. Но мы уже несколько раз отмечали, что последовательное сжатие двумя ударными волнами не эквивалентно однократному ударному сжатию. В частности приращение энтропии в каждой волне, если они (волны) достаточно малы, пропорционально $(\Delta p)^3$. Подбирая достаточно большое число достаточно слабых ударных волн, мы сможем осуществить сжатие до любого заданного давления со сколь угодно малым приращением энтропии, так как если мы разбиваем все заданное изменение давления между n волнами, то приращение давления в каждой волне пропорционально $1/n$, приращение энтропии в каждой волне пропорционально $1/n^3$ и полное приращение энтропии в n волнах пропорционально $1/n^2$. Таким образом, в случае кумуляции большого числа слабых волн сжатия мы будем иметь почти адиабатическое изменение состояния.

В момент соединения отдельных волн, показанных на рис. 36 (§ XIII, стр. 99) справа от места соединения, мы будем

¹ c_0 — скорость звука в воздухе. Скорость звука в водороде равна $4 c_0$

иметь невозмущенный газ в начальном состоянии A , слева — подвергшийся практически адиабатическому сжатию газ в состоянии B .¹ Очевидно, что точка B не лежит на адиабате Гюгонио H_A . В соответствии с этим разрыв не может распространяться дальше как одно целое. К его распространению мы должны приложить общую теорию распространения произвольного разрыва. Можно показать, что скорость движения, которую приобретает газ при последовательном сжатии большим числом ударных волн, меньше скорости движения, которую приобрел бы газ при сжатии до того же давления одной

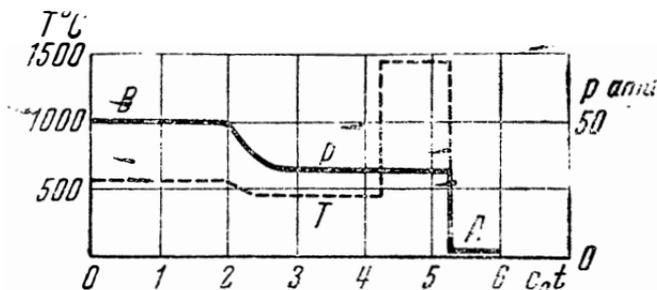


Рис. 41в. Распространение разрыва, возникшего после столкновения волн сжатия рис. 36. Давление в возникающей ударной волне ниже (навстречу волнам сжатия идет волна разрежения), но температура в ударной волне значительно выше максимальной температуры, достигнутой при наложении мелких волн сжатия. Распределение давления — сплошная линия; распределение температуры — пунктир.

ударной волной. Отсюда следует, что при распространении разрыва, возникшего при соединении многих слабых ударных волн, мы будем иметь случай рис. 40 б: давление p_1 окажется ниже давления, созданного поршнем (давления p_B); по сжатию газу по направлению к поршню пойдет волна разрежения, вправо в невозмущенный газ пойдет возникшая в разрыве ударная волна сжатия. На рис. 41 в представлено распределение давления и температуры, получающееся через время t после соединения волн, образованных при сжатии воздуха поршнем, скорость которого постепенно достигла $4.44c_0 = 1500$ м/сек, так что давление на поршне p_B достигло $50 p_A$, т. е. 50 ата. Давление в ударной волне сжатия будет ниже, чем достигнутое раньше на поршне давление p_B . Однако вследствие роста энтропии это более низкое давление отвечает более высокой температуре. Разрыв температуры, покоящийся относительно газа, виден на графике распределения температуры для этого случая (пунктир рис. 41в). Заметим, что на

¹ Обозначения A и B не показаны на рис. 36, однако, они используются ниже, на рис. 41 в; ср. также рис. 39 и 40б.

рис. 41в координата и время отсчитываются соответственно от места и момента кумуляции, т. е. возникновения разрыва. В системе координат, в которой A неподвижно, волна разрежения движется вправо, однако, она движется влево относительно движущегося с большой скоростью газа в состоянии B и не показанного на рис. 41в поршня.

Рассмотренный выше случай представляет значительный интерес для теории возникновения детонации, ибо полученный результат объясняет, каким образом пламя, действующее на газ, подобно поршню, может постепенным сжатием вызвать появление ударной волны на большом расстоянии от поршня (от пламени). Постепенно сжимая газ до невысокой температуры (630°C , рис. 41в), мы можем осуществить резкий подъем температуры (1450°C , рис. 41в) на значительном расстоянии в момент кумуляции, осуществить „дистанционное зажигание“ газа. Повидимому, именно так следует представлять себе механизм возникновения детонации в газах в ряде случаев.

Выяснив характер движений, получающихся при распространении произвольного разрыва, мы можем проверить исходное допущение о том, что движение зависит только от отношения x/t .

В § VI в случае волны разрежения такой характер решения был обусловлен отсутствием величин размерности времени или длины в начальных и граничных условиях задачи, а также пренебрежением диссипативными величинами. Пренебрежение это необходимо, так как в комбинации со скоростью звука из вязкости или теплопроводности можно построить характеристическую длину и характеристическое время, например, $\frac{\eta}{\rho c_0}$ и $\frac{\lambda}{c_p \rho c_0}$. В волне разрежения пренебрежение диссипативными силами было обосновано тем, что уравнения газодинамики привели нас к размытой волне большой (растущей линейно со временем) ширины, с весьма малыми значениями градиента скорости и градиента температуры.

Можем ли мы пренебречь диссипативными силами при наличии ударной волны, в которой имеет место значительный рост энтропии? Утвердительный ответ связан с тем, что численная величина роста энтропии в ударной волне (обусловленного в последнем счете действием вязкости и теплопроводности) полностью определяется уравнениями сохранения и не зависит от величины теплопроводности и вязкости. Последние определяют только конечную ширину фронта ударной волны. Но полученная при этом величина размерности длины — ширина фронта ударной волны — весьма мала: порядка длины пробега молекулы в случае сильной ударной волны.

Мала также и ширина разрыва особого рода: выравнивание температуры по обе стороны этого разрыва и взаимное проникновение газов диффузией приводят по истечении вре-

мени t к ширине порядка $\xi = \sqrt{\kappa t} \approx \sqrt{Bt}$, где κ — температуропроводность; B — коэффициент диффузии. Используя молекулярно-кинетические выражения κ и B , найдем $\xi \sim \sqrt{lt}$, где l — длина пробега молекулы, c — скорость звука. Между тем, расстояние x , пробегаемое ударными волнами и волнами разрежения за время t , порядка ct , так что $\xi \sim \sqrt{lx}$.

Таким образом, отношение размеров области, в которой диссипативные силы существенны, к размеру всей захваченной движением области равно $\frac{l}{x}$ для ударной волны, $\sqrt{\frac{l}{x}}$ для разрыва особого рода. Обе величины весьма малы в любом макроскопическом движении, в котором $x \gg l$.

Весьма любопытна история вопроса о распространении произвольного разрыва, в которой сказывается общая во всей теории ударных волн разобщенность исследователей разных стран. Впервые изложенная выше теория была дана еще Гюгионо одновременно с теорией ударных волн [56]. Принадлежащая Гюгионо теория распространения произвольного разрыва была хорошо известна французским авторам. Она упоминается у Крюсара [45], встречается также в книге Адамара [54] о распространении волн. Изложение Адамара, правда, несколько испорчено, с одной стороны, отсутствием полной ясности в вопросе о том, когда следует пользоваться адиабатой Гюгионо, а когда адиабатой Пуассона (рост энтропии в ударных волнах сжатия, и термодинамическая невозможность ударных волн разрежения были показаны Жуге и Земплем позже), с другой стороны, — стремлением Адамара к получению формул в замкнутом виде. Однако немецким авторам теория распространения произвольного разрыва, повидимому, неизвестна. Так, у Вебера [97] мы находим только случай столкновения двух ударных волн равной амплитуды, т. е. как раз тот случай, когда тождественно совпадают оба исходных состояния A и B нашего рисунка и соответственно совпадают на всем протяжении проведенные из них адиабаты Гюгионо. В этом частном случае, как видно из симметрии, разрыв особого рода обращается в нуль. По обе стороны его не только равны давление и скорость, но равны между собой и температура, и энтропия, и плотность. В издании 1925 г. Вебер прямо пишет, что “до сих пор неизвестно, что произойдет в общем случае столкновения двух произвольных ударных волн”.

Задача о кумуляции ударных волн была поставлена Беккером в его известной работе „К теории детонационной и ударной волны“ [38]. В 1920 г. Беккер правильно предсказывает основной качественный результат кумуляции ударных волн — повышение температуры в момент их совпадения. Однако далее он пишет: „Пока совершенно неизвестно, что произойдет, когда крутизна подъема через известное время

станет бесконечной". Решение этой задачи дано выше. Нельзя не заметить, что в статье Беккера как мемуары Гюгионо, так и книга Адамара цитированы. Вполне строгий и весьма общий разбор всех могущих встретиться случаев распространения произвольного разрыва дан Кочиным [64].

§ XVII. Обтекание тела при сверхзвуковой скорости

Выше, в § IV, мы выяснили некоторые свойства обтекания тела сверхзвуковым потоком, относящиеся к характеру потока на большом расстоянии от тела. Прежде всего был установлен тот факт, что возмущение, вызванное наличием тела в сверхзвуковом потоке, охватывает не весь поток, а лишь конус с осью, параллельной направлению движения потока, и углом раскрытия, синус которого равен отношению скорости звука к скорости потока (так называемый угол Маха). Однако эти высказывания относились только к потоку на большом расстоянии от тела. В частности, только на большом расстоянии от тела, там, где мы можем считать возмущение малым, можно утверждать, что скорость распространения возмущения будет равна скорости звука. В непосредственной близости к самому телу, там, где возмущение потока, вызванное наличием тела, нельзя больше считать малым, это возмущение может стационарно распространяться относительно потока в виде ударной волны, со скоростью, превышающей скорость звука в невозмущенном газе. Знакомство с теорией ударных волн позволит нам установить некоторые свойства обтекания сверхзвуковым потоком, относящиеся уже к непосредственной близости обтекаемого тела и, следовательно, имеющие значение для вопроса о сопротивлении тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью, — важнейшего вопроса внешней баллистики.

В дальнейшем мы рассмотрим отдельно два случая. Первый случай — обтекание тела с тупым профилем. Нетрудно представить себе общий характер движения (рис. 42).

На большом расстоянии, как уже говорилось, возмущение мало. Сплошной линией показано положение стационарной ударной волны, пунктиром — линии тока. На большом расстоянии от тела — там, где амплитуда ударной волны мала, скорость ее не отличается от скорости звука, угол наклона сплошной линии равен углу Маха. Однако несомненно, что в некоторой точке — и эту точку нетрудно найти для любого симметричного профиля — поверхность ударной волны должна быть расположена нормально к направлению потока (рис. 42, точка a_1). В этой точке скорость движения газа относительно ударной волны максимальна, амплитуда изменения давления в ударной волне наиболее велика и может быть легко вычислена, если

нам известна скорость потока (или, напротив, скорость движения нашего снаряда, или другого рассматриваемого тела относительно неподвижного газа). При сжатии в ударной волне скорость газа меняется от сверхзвуковой к подзвуковой величине. Таким образом, в непосредственной близости от тела, вблизи его тупой передней части, мы имеем дело с дозвуковым потоком; дальнейшее торможение газа на отрезке пути от ударной волны до поверхности тела $a_1 - a_2$ (рис. 42) происходит адиабатически, и повышение давления может быть вычислено по теореме Бернулли.

Весьма существенно отмеченное Рейлэем [79] обстоятельство, что такое последовательное сжатие сперва ударной волной, а потом адиабатическое в получающемся подзвуковом потоке, приводит при больших скоростях к значительно меньшему давлению, нежели чисто адиабатическое (изэнтропическое) сжатие от сверхзвуковой скорости до состояния покоя, осуществляемого в точке разветвления линий

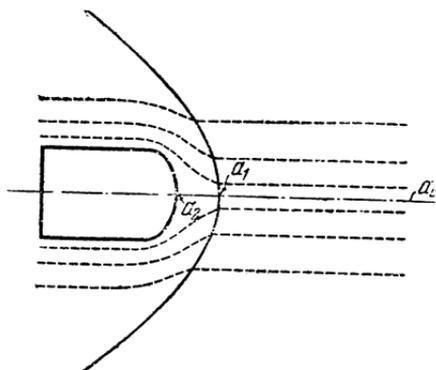


Рис. 42. Схема сверхзвукового обтекания тела с тупым профилем.

тока в передней части обтекаемого тупого профиля. То, что давление при полном торможении будет ниже при наличии ударной волны, нетрудно показать термодинамически. Как при наличии, так и при отсутствии ударной волны, вдоль линии тока имеет место закон сохранения энергии, т. е. теорема Бернулли в интегральной форме $I + \frac{u^2}{2} = \text{const}$, которая вполне определяет теплосодержание газа в точке, где он полностью будет заторможен, так называемое теплосодержание покоя $I_0 = I + \frac{u^2}{2}$. Если сжатие происходит адиабатически, то к этому добавляется условие $S = \text{const}$. Значение теплосодержания I и энтропии S полностью определяет состояние вещества. Если имеет место ударная волна, то энтропия больше не сохраняется.

Расчет точного значения давления и расчет состояния вещества в результате торможения в том случае, если это торможение частично происходит в ударной волне, более сложен. Однако во всяком случае мы можем утверждать, что энтропия в ударной волне растет, а рост энтропии при заданном теплосодержании всегда означает падение давления.¹ Таким

¹ $dI = v dp + T dS$; при $I = \text{const}$, $\frac{dp}{dS} = -\frac{T}{v}$.

образом, наличие ударной волны спереди движущегося со сверхзвуковой скоростью тела приводит к уменьшению давления на передней части тупого профиля тела, к уменьшению величины сопротивления движению тела, и тем устраняет, как показал Рейлэй, существовавшее ранее значительное расхождение между экспериментальными данными по сопротивлению снарядов и величиной сопротивления, вычисленной по формулам, предполагающим адиабатическое (изэнтропическое) сжатие. Это обстоятельство весьма существенно также при измерении сверхзвуковой скорости трубкой Пито. В этом случае при расчете скорости движения по измеренному трубкой Пито давлению также необходимо учитывать возникновение ударной волны перед носиком трубки.

Представим себе резервуар, наполненный сжатым газом, истекающим со сверхзвуковой скоростью, и помещенное в поток обтекаемое тело (рис. 43).

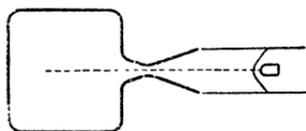


Рис. 43.

В резервуаре газ покоится, в сопле он приобретает скорость, а подходя к точке a_2 разветвления потока на поверхности обтекаемого тела — снова тормозится. Поучительно сравнение состояния газа в резервуаре и в точке a_2 . Если бы изменение газа в ходе торможения следовало тому же закону, что и в ходе ускорения, в точке a_2 газ должен был бы вернуться к тому же состоянию, в котором он находился в резервуаре, давление и температура газа в точке a_2 не должны были бы отличаться от давления и температуры в резервуаре. Именно так обстоит дело в действительности в случае дозвукового потока. Однако в случае сверхзвукового потока ускорение и расширение в сопле происходит изэнтропически, тогда как торможение и сжатие газа в ударной волне сопровождается увеличением энтропии. Прилагая к движению отдельного элемента объема газа закон сохранения энергии, приходим к уравнению (III-5) § III

$$I + \frac{u^2}{2} = \text{const.} \quad (\text{III-5})$$

Уравнение это остается верным, и значение константы сохраняется также при ударном сжатии газа, т. е. тогда, когда линия тока пересекает поверхность ударной волны в стационарном движении.¹ В резервуаре и в точке a_2 ско-

¹ Формула (III-5) правильна только в той системе координат, в которой тело и ударная волна покоятся. В системе координат, в которой покоится невозмущенный газ, а тело движется, при приближении тела частицы газа подвергаются сжатию (причем растет энтальпия газа) и вступают в движение, причем приобретают кинетическую энергию, так что растет и сумма $I + \frac{u^2}{2}$. Уравнение (III-5) неприменимо в этой системе координат.

рость $u=0$, поэтому (III-5) приводит к выводу о равенстве энтальпии газа в точке разветвления и в резервуаре. У газов энтальпия зависит только от температуры; следовательно, в опыте рис. 43 газ, находящийся в резервуаре, в процессе истечения охлаждается, а затем снова нагревается при торможении и доходит при этом до той же температуры, которую имел в резервуаре, так же как это было в дозвуковом потоке. Однако необратимый рост энтропии в фазе торможения приводит к тому, что плотность и давление газа в точке a_2 оказываются ниже, чем плотность и давление в резервуаре, давление полностью не восстанавливается в противоположность дозвуковому потоку. Это обстоятельство, существенное для сопротивления воздуха движению тел, летящих со сверхзвуковой скоростью, подробно рассмотрено Рэйлеем (табл. 4).

Т а б л и ц а 4

u , м/сек	330	660	990	1320
u/c_0	1	2	3	4
$\rho(a_2)$, ата	1.89	5.75	12.32	21.6
$T(a_2)$, °C	80	250	550	950
$\rho(S=\text{const})$	1.89	7.84	36.6	150.2
$\rho(a_1)$	1.00	4.5	10.3	18.5

В первой строке таблицы дана (для движения в воздухе) скорость тела, во второй — отношение скорости к скорости звука, в третьей — давление, развивающееся при движении в точке a_2 , в четвертой — температура газа в этой точке ($p_0=1$ ата, $T_0=20^\circ$), в пятой строке приведено давление, которое было бы развито при изэнтропическом торможении газа или, иначе говоря, давление, которое нужно было бы создать в резервуаре для того, чтобы достичь заданной скорости истечения газа. Наконец, в последней строке дано давление в точке a_1 рис. 42, после сжатия в ударной волне. но до торможения в дозвуковом потоке.

Любопытно, что при обтекании тела с тупым профилем потоком газа, скорость которого меньше скорости звука, у поверхности тела может появиться область сверхзвуковой скорости. Так, при поперечном обтекании круглого цилиндра сверхзвуковая скорость сбоку достигается, начиная с числа Барстоу $Ва=0.45$ (Тэйлор [25]).

В случае сверхзвукового обтекания тела с заостренной вершиной образующиеся после сжатия в ударной волне подзвуковые струи газа будут легко обтекать острие, стационар-

ная ударная волна будет ближе к острию, чем в случае обтекания тупого профиля. При достаточно малом угле раствора острия мы можем ожидать картины рис. 44а, при которой ударная волна соприкасается в вершине с самим острием. Если имеет место такая картина движения, то при изменении масштаба (например, при переходе к снаряду, все линейные размеры которого в определенное число раз больше показанной на рис. 44а пули) мы мало меняем условия у самой вершины. Переходя к предельному случаю бесконечно большого тела, мы убеждаемся, что для нахождения движения вблизи вершины мы не имеем в этом случае ни характеристической длины, ни характеристического времени, и вся картина движения может зависеть лишь от угла между радиусом-вектором, проведенным в данную точку из вершины конуса, и осью конуса. Мы ищем решения, в котором все величины зависят от одного этого угла, т. е. постоянны вдоль каждой конической поверхности с общей осью и общей вершиной, причем сам обтекаемый конус принадлежит к этому же семейству конусов.

Стационарная ударная волна вблизи вершины также принимает форму одного из таких конусов, вершина которого совпадает с вершиной тела, а угол раствора зависит от угла раствора конической вершины тела. В каком случае этот результат, относящийся первоначально к окрестности острия безгранично протяженного конуса, можно будет применить к реальному снаряду, в котором коническая головка соединена (в простейшем случае, рис. 44а) с цилиндрической частью и дном снаряда?

При достаточно остром обтекаемом конусе и достаточно большой скорости движения можно ожидать, что и после сжатия в ударной волне скорость движения газа относительно поверхности конуса останется больше скорости звука. В этом случае, если скорость движения газа в области $GFABCD$ (рис. 44а) больше скорости звука, изменение характера движения, происходящее в точках D , C и далее (вследствие того, что в этих точках поверхность снаряда заметно отличается от продолжения конической поверхности AB), не сможет сказаться на характере движения вблизи AB , не сможет передаться навстречу потоку. Таким образом, мы сможем частное решение для безграничного конуса, зависящее только от одного угла и сравнительно легко рассчитываемое, — применить для построения движения на всем коническом участке у вершины снаряда, с одним условием, чтобы эта вершина была достаточно острой, так, чтобы скорость после сжатия в ударной волне все еще превышала скорость звука.

На самой поверхности ударной волны мы имеем при этом преломление линий тока. В так называемом сильном разрыве, т. е. в ударной волне, претерпевает внезапное изменение только нормальная составляющая скорости, между тем как

тангенциальные к поверхности ударной волны составляющие скорости остаются без изменения. Отсюда вытекает показанное на рис. 44а, б, преломление линии тока в ударной волне. Сам центральный угол конуса, образованного поверхностью

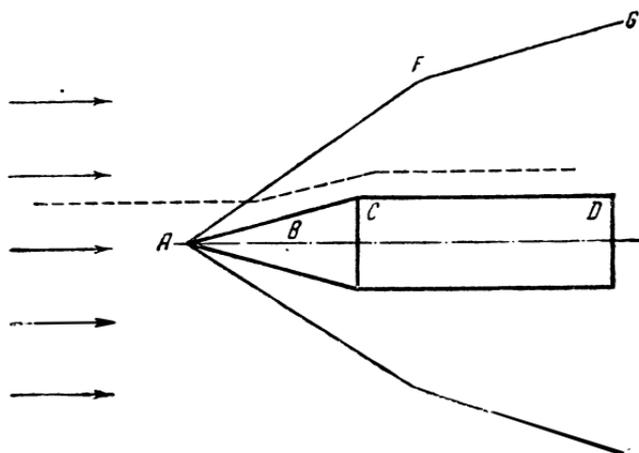


Рис. 44а.

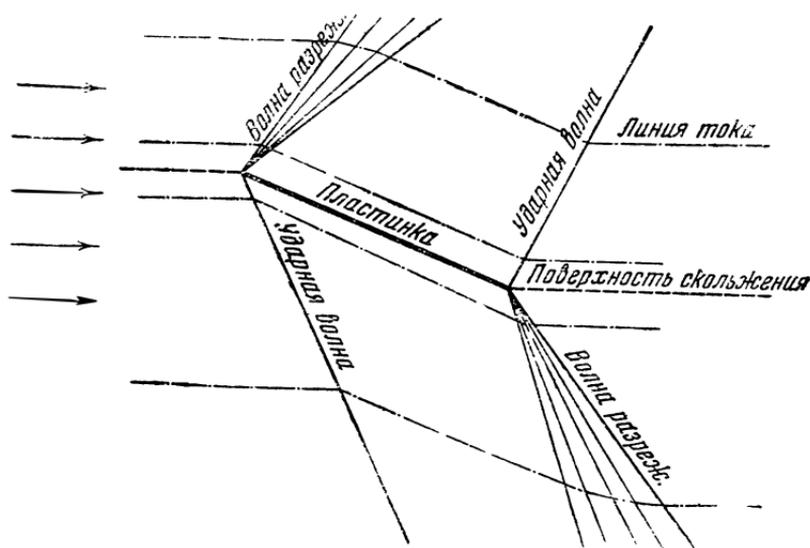


Рис. 44б.

ударной волны, вычисляется из условия, чтобы после преломления в ударной волне и последующего изгиба, согласно уравнениям движения, линии тока у поверхности снаряда были параллельны обтекаемому конусу.

Мы не останавливаемся на деталях расчета и приводим картину движения и схему расчета главным образом не в связи с численными результатами, далекими от интересующей нас области применения, а как пример тех математических упрощений, которые совершенно специфичны именно для сверхзвукового потока и тесно связаны с применением теории подобия [42]. В настоящее время Франклем развиты методы расчета распределения давления на поверхности остроконечных тел вращения также и в той области, где они отличаются от конуса [26, 27].

Еще проще случай обтекания сверхзвуковым потоком тонкой пластинки, слабо наклоненной к потоку (рис. 44б).

На передней кромке образуются две волны: ударная волна под пластинкой, в которой линии тока внезапно преломляются и после волны движутся параллельно пластинке, и волна разрежения над пластинкой, в которой постепенно происходит такое же искривление линий тока.

Вблизи передней кромки все состояние также зависит от одного отношения u/x (если начало координат поместить в эту точку), как в задаче о движении поршня с постоянной скоростью движение зависело только от x/t .

Явления у задней кромки аналогичны распространению произвольного разрыва, так как в этой точке соединяются два потока, давления в которых различаются. При этом за кромкой возникают ударная волна, волна разрежения и разрыв особого рода (пунктир), на котором теперь терпит разрыв также тангенциальная составляющая скорости (вихревая поверхность). Однако при достаточной скорости потока и малом наклоне пластинки поток вдоль пластинки остается сверхзвуковым, явления у задней кромки не оказывают обратного влияния на свойства потока у поверхности пластинки. Давление на верхнюю поверхность пластинки меньше, а давление на нижнюю поверхность больше давления в невозмущенном потоке, что обуславливает появление силы, действующей нормально поверхности пластинки в направлении вверх и назад. Для расчета сопротивления и подъемной силы достаточно рассчитать волны, примыкающие к передней кромке.

Весьма характерно, что в газодинамике сверхзвукового потока парадокс д'Аламбера (отсутствие сопротивления при безвихревом обтекании тела идеальной жидкостью) не имеет места. Появляется так называемое волновое сопротивление, связанное с наличием стационарных волн, уносящих работу, совершаемую движущимся телом против сил сопротивления.

Наряду с этим при больших скоростях становится существенным необратимое нагревание подвергшегося ударному сжатию вещества, сохраняющееся в виде „следа“ после пролета тела.

Обтекание крыла строится, таким образом, из решения задачи об обтекании угла, образованного крылом и линией тока, попадающей на переднюю кромку. Обтекание угла рассмотрено было Прандтлем [77] и Майером [71]. Графические методы решения уравнений, определяющих параметры косых ударных волн, см. в общих руководствах [27, 23, 35, 39].

Сжатие газа при обтекании тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью, представляет способ осуществления быстрого нагрева газа до весьма высокой температуры. В опытах Лейпунского и автора алюминиевая пуля, скорость которой достигала 3300 м/сек, пролетая через ртутный пар, создавала повышение температуры до нескольких десятков тысяч градусов (расчет в предположении постоянной теплоемкости дает $45\,000^\circ$). При этом наблюдалось сильнейшее термическое свечение ртутного пара на пути пули. [125]

Простреливая газы и газовые смеси, способные к химической реакции, мы можем исследовать скорость реакции при температуре до 4000° и времени воздействия около 10^{-5} сек. [104]

§ XVIII. Теория реактивной силы

Для современной военной техники характерен интерес к реактивным снарядам. Ценой усложнения снаряда и уменьшения коэффициента полезного действия пороха по сравнению с артиллерийскими системами достигается замена тяжелого ствола орудия легкой направляющей и отсутствие отдачи. Эти свойства реактивных снарядов, согласно выпущенному еще до начала войны курсу Серебрякова [112], могут пригодиться, например, в условиях горной войны или при десантных операциях, при установке на самолетах, автомобилях, мелких судах.

Схематический чертеж реактивного снаряда (рис. 45) заимствован у М. Руа. [111] Порох заключен в камере, продукты горения под высоким давлением ($P_{\text{уа}}$ приводит расчеты для давления до 500 атм) вытекают через сопло Лавала. Расчет реактивной силы в этих условиях основан на газодинамической теории истечения (§ III). Однако для того чтобы лучше усвоить методику рассмотрения вопроса и особенности сверхзвукового истечения, начнем с рассмотрения более простого случая несжимаемой жидкости.

Представим себе аппарат (рис. 46), состоящий из камеры с простым сужающимся соплом. Давление в камере обозначим p , давление в окружающей среде (атмосфере) p_1 , площадь выходного сечения сопла F .

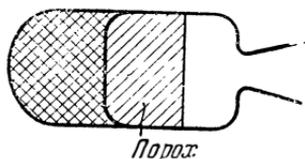


Рис. 45.

Теория и опыт показывают, что в коротком сопле с плавными очертаниями с большой точностью скорость истечения удовлетворяет закону Бернулли и струя заполняет все сечение; таким образом,

$$\frac{\rho u^2}{2} + p_1 = p; \quad G = F \rho u, \quad (\text{XVIII-1})$$

где G — весовой расход жидкости.

Давление в выходном сечении струи не отличается от p_1 . Окружим аппарат контрольной поверхностью. Количество движения, приобретаемое жидкостью за время t , равно произведению вытекшего количества жидкости на скорость; по второму закону Ньютона, приобретенное количество движения равно импульсу силы, действующей на жидкость; по третьему закону Ньютона, сила, действующая со стороны аппарата на жидкость, тождественно равна реактивной силе R , испытываемой аппаратом.

Считая за положительное направление силы влево (рис. 46), а положительное направление скорости вправо, получаем

уравнение для импульса реактивной силы I

$$I = Rt = Gtu = F \rho u t, \quad (\text{XVIII-2})$$

$$R = F \rho u^2. \quad (\text{XVIII-3})$$

Подставляя выражение скорости, следующее из закона Бернулли, найдем

$$R = 2F(p - p_1). \quad (\text{XVIII-4})$$

Результат замечателен тем, что из формулы выпали величины, характеризующие свойства жидкости; реактивная сила пропорциональна разности давлений, вызывающей истечение.

Подойдем к вычислению R другим способом, определяя результирующую сил давления на внутреннюю и внешнюю поверхности аппарата. Представим себе, что сопло закрыто пробкой. На внутреннюю поверхность аппарата и поверхность пробки действует давление p , на внешнюю поверхность — давление p_1 . Результирующая сила для закрытого аппарата (т. е. совокупности аппарата с соплом и пробки) равна нулю. Сила, действующая на пробку R_3 , равна $R_3 = -F(p - p_1)$. Очевидно, что результирующая сила, действующая на всю поверхность аппарата без пробки, равна $R_1 = F(p - p_1)$, так как $R_3 + R_1 = 0$.

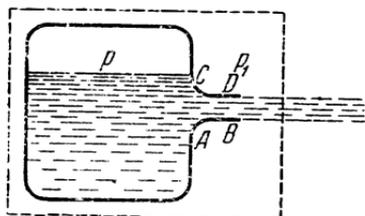


Рис. 46.

Между тем приведенное выше выражение R вдвое больше. Парадокс заключается в том, что при удалении пробки из сопла сила R , действующая на аппарат, увеличится вдвое по сравнению с силой R_1 в тот момент, когда пробка уже отъединена от аппарата, но еще находится в сопле. При удалении пробки начнется истечение жидкости; жидкость набирает скорость постепенно в сужающемся сопле; по закону Бернулли, движение жидкости сопровождается падением давления; падение давления на примыкающие к отверстию участки поверхности (AB, CD) дает результирующую R_2 , равную R_1 , так что

$$R = R_1 + R_2 = 2R_1.$$

Мы не станем здесь приводить расчета R_2 ; результат $R_2 = R_1$, $R = 2R_1$ имеет место для любого гладкого профиля сопла, обеспечивающего коэффициент расхода, равный 1.

При оценке качества работы реактивного аппарата было бы нецелесообразно пользоваться энергетическим коэффициентом полезного действия, т. е. отношением работы реактивной силы к тепловой энергии сожженного топлива или пороха. Дело в том, что от конструкции аппарата и сопла и режима процессов, происходящих в аппарате, зависит реактивная сила, тогда как работа этой силы зависит от скорости перемещения аппарата как целого; энергетический к. п. д. поэтому также зависит от скорости движения аппарата; при заданной постоянной степени совершенства всех внутренних процессов к. п. д. будет меняться по мере изменения скорости движения аппарата, так что энергетический к. п. д. в данном случае не является мерой совершенства аппарата.

Важнейшим показателем качества работы реактивного аппарата является так называемый единичный импульс I_1 , т. е. импульс реактивной силы, развиваемый при истечении единицы массы; единичный импульс равен отношению силы к расходу

$$I_1 = \frac{I}{M} = \frac{Rt}{Gt} = \frac{R}{G}. \quad (\text{XVIII-5})$$

Из приведенных выше формул следует для несжимаемой жидкости

$$I_1 = u = \sqrt{2(p - p_1)/\rho}. \quad (\text{XVIII-6})$$

Единичный импульс равен скорости истечения при измерении всех величин в абсолютной (физической) системе CGS. В технической системе размерность I_1 — кг сила \times сек/кг масса и численно $I = u/g$, где g — ускорение силы тяжести.

Для несжимаемой жидкости скорость истечения и единичный импульс пропорциональны корню квадратному раз-

ности давлений в камере и в окружающей среде. Для достижения наибольшего эффекта желательно увеличение скорости истечения путем увеличения перепада давления. При истечении газообразных продуктов горения пороха при увеличении давления мы сталкиваемся с влиянием сжимаемости, с необходимостью применения расширяющегося сопла Лавала и с явлениями критического и сверхзвукового истечения.

Сопло Лавала характеризуется заданием двух сечений: наименьшего (критического) F_k и выходного F_a , причем $F_a > F_k$; мы обозначим в дальнейшем $F_a/F_k = \theta$. В критическом сечении достигается критическое давление, составляющее определенную долю давления в камере (около 55%). Давление p_a , достигаемое в выходном сечении F_a , зависит от отношения θ . Ниже мы рассматриваем идеальный газ постоянной теплоемкости; в этом случае

$$\frac{p_a}{p} = \Pi_a(\theta). \quad (\text{XVIII-7})$$

Скорость истечения, достигаемая на выходе из сопла, по формуле Сен-Венана-Вентцеля зависит от давления. Так же как это было сделано в § III (см. рис. 6, стр. 36), отнесем скорость истечения к скорости звука в начальном состоянии

$$\frac{u_a}{c_0} = \varphi = \varphi(\Pi_a) = \varphi(\theta). \quad (\text{XVIII-8})$$

Если сопло подобрано в полном соответствии с давлением p , которое имеется в камере, то давление в струе в выходном сечении p_a не отличается от атмосферного давления p_1

$$p_a = p_1; \quad \theta = \theta\left(\frac{p_1}{p}\right). \quad (\text{XVIII-9})$$

В этом случае по выходе из сопла струя находится в механическом равновесии с окружающей средой, скорость струи по выходе из сопла не изменяется ($u_a = u_1$, обозначение u_1 см. ниже).

Окружим аппарат контрольной поверхностью подобно тому, как это было сделано на рис. 46. Давление на контрольной поверхности равно атмосферному везде, в том числе и там, где поверхность пересекает выходное сечение струи, так как по условию $p_a = p_1$. В этом случае результирующая сила давления на контрольную поверхность равна нулю. Реактивная сила равна произведению расхода на скорость в выходном сечении сопла

$$R = G u_a, \quad (\text{XVIII-10})$$

единичный импульс равен выходной скорости совершенно так же, как в случае истечения несжимаемой жидкости. Отличия от несжимаемой жидкости заключаются: 1) в другом, более сложном виде зависимости скорости истечения от давления и 2) в том, что для осуществления рассматриваемого режима, при котором $p_a = p_1$, необходимо вполне определенное, зависящее от отношения p_1/p , расширение сопла Лавала; в несжимаемой жидкости равенство $p_a = p_1$ осуществлялось автоматически, при истечении из любого сопла, в том числе и из

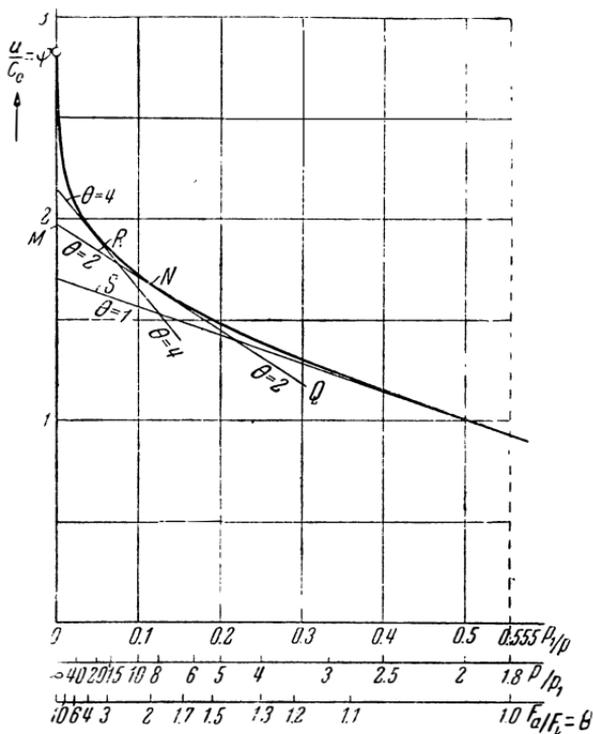


Рис. 47а.

простейшего сужающегося сопла, дающего наименьшие потери на трение и вихреобразование.

Результаты расчета по формуле Сен-Венана-Вентцеля для идеального газа с показателем адиабаты 1.25 суммированы в графике (рис. 47а и 47б). Значение $K = 1.25$ получено Д. А. Франк-Каменецким для продуктов горения бездымного пороха. По оси ординат рис. 47а и 47б отложена величина $\varphi = \frac{u}{c_0}$, по оси абсцисс — отношение давлений p_1/p . Вдоль оси абсцисс дана также разметка соответствующих значений θ и $\frac{p}{p_1}$.

При заданном p_1 (атмосферном давлении) и давлении в камере p мы составляем отношение p_1/p , находим по верхней шкале соответствующую абсциссу и по нижней шкале θ . Скорость истечения и единичный импульс отсчитываем по жирной линии φ ; при этом

$$I = u_1 = u_a = \varphi c_0. \quad (\text{XVIII-11})$$

Во внутренней баллистике принято характеризовать состояние продуктов горения пороха силой пороха $f = \frac{p}{\rho}$; прене-

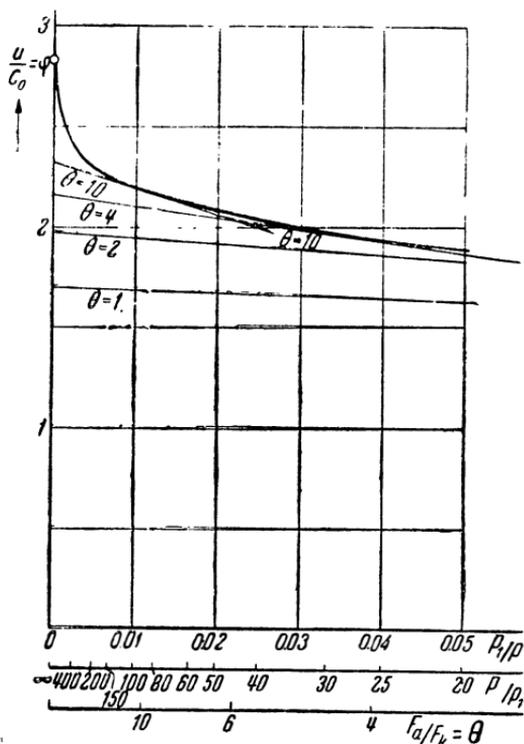


Рис. 476.

брегая отступлениями от законов идеального газа, найдем

$$c_0 = \sqrt{kf}, \quad (\text{XVIII-12})$$

так что

$$I_1 = u_1 = \varphi \sqrt{kf}. \quad (\text{XVIII-13})$$

Переходя к техническим единицам:

$$I_1 = \frac{\text{кг. сек}}{\text{кг}},$$

$$f = \frac{\text{кг}}{\text{дм}^2} / \frac{\text{кг}}{\text{дм}^3}$$

и, подставляя $k = 1.25$, $g = 981$ см/сек,² найдем

$$I_1 = 0.113 \varphi \sqrt{f}. \quad (\text{XVIII-14})$$

Так, для бездымного пороха с $f = 1\,000\,000 \frac{\text{кг/дм}^2}{\text{кг/дм}^3}$ при давлении в камере $p = 100$ кг/см² и атмосферном $p_1 = 1$ кг/см², найдем

$$\varphi = 2.2, I_1 = 0.113 \cdot 2.2 \cdot 1000 = 250 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек.}^1}{\text{кг}}$$

При этом значение φ мы отсчитываем по графику 476, на котором наиболее практически интересная область p_1/p от 0 до 0.05 (p от 20 кг/см² и выше) дана в увеличенном масштабе.

Подставляя выражение расхода при критическом истечении, мы выразим реактивную силу через критическое сечение и давление в камере (индекс k относится к величинам в критическом сечении)

$$\begin{aligned} R = G u_a &= F_k \rho_k u_k u_a = F_k \rho_0 \frac{\rho_k}{\rho_0} \cdot c_0^2 \cdot \frac{u_k}{c_0} \frac{u_a}{c_0} = \\ &= F_k p \cdot \frac{\rho_0 c_0^3 u_a u_k}{p c_0 c_0}, \end{aligned} \quad (\text{XVIII-15})$$

$$R = \text{const } \varphi \cdot F_k p = 0.74 \varphi F_k p. \quad (\text{XVIII-16})$$

Численный коэффициент найден для показателя адиабаты 1.25, для которого построены рис. 47 а, б. Так же как в случае несжимаемой жидкости, в последнее выражение не входят плотность газа, его температура и тому подобные величины. Безразмерное отношение $R/F_k p$ во французской литературе называется „coefficient de propulsion“ „коэффициент подталкивания“ (Серебряков, Гретен, Оппоков [112]).

В приведенном примере

$$(\varphi = 2.2, R = 0.74 \cdot 2.2 \cdot F_k p = 1.63 F_k p)$$

коэффициент этот достигает 1.63; в случае истечения несжимаемой жидкости отнесенный к разности давлений $p - p_1$ коэффициент был равен 2.

¹ В реактивном снаряде порох горит при постоянном давлении, развивая температуру более низкую, чем при горении в замкнутом объеме. Поэтому и сила пороха f , входящая в формулы (XVIII-12) — (XVIII-14), должна быть уменьшена в отношении теплоемкостей, т. е. в $K = 1.25$ раз по сравнению с силой того же пороха, измеренной в замкнутом объеме.

Каков характер движения и как рассчитать реактивную силу в том случае, если расширение сопла θ не соответствует отношению давлений? Струя газа, движущегося со сверхзвуковой скоростью, вытекает в окружающую среду при давлении в струе в выходном сечении p_a , отличающемся от атмосферного давления p_1 ; в месте соприкосновения, на краю выходного сечения, возникает возмущение потока: его расширение, сопровождающееся увеличением скорости в случае $p_a > p_1$, или сжатие потока и уменьшение скорости движения в случае $p_a < p_1$. На распространение возмущения от края

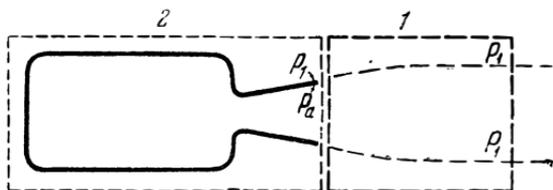


Рис. 48.

сечения к оси струи накладывается поступательное движение газа в струе; благодаря этому поверхность, на которой испытывают возмущение отдельные линии тока, приобретает форму конуса, опирающегося на выходное сечение и вытянутого в направлении движения струи (см. ниже, рис. 49). В самом выходном сечении поток невозмущен, давление везде равно p_a и скорость истечения u_a ; состояние потока в выходном сечении зависит от состояния газа в камере и расширения сопла θ , согласно формулам. От атмосферного давления p_1 состояние потока, в частности величины p_a и u_a , совершенно не зависят; независимость явствует из того, что возмущение, вызванное различием p_a и p_1 , не распространяется в выходное сечение.

Проведем снова контрольную поверхность, окружающую аппарат и проходящую через выходное сечение (поверхность 2, рис. 48). Везде, кроме выходного сечения сопла F_a , давление равно p_1 , в сечении F_a давление равно p_a . Результирующая сила давления равна $F_a(p_a - p_1)$; при расчете реактивной силы мы должны добавить эту величину

$$R = Gu_a + F_a(p_a - p_1). \quad (\text{XVIII-17})$$

Подставляя

$$G = F_a \rho_a u_a, \quad (\text{XVIII-18})$$

преобразуем

$$R = G \left(u_a + \frac{p_a - p_1}{\rho_a u_a} \right) = Gu_a, \quad (\text{XVIII-19})$$

При этом мы вводим величину u_1 , определяя ее так:

$$I_1 = u_1 = u_a + \frac{p_a - p_1}{\rho_a u_a}. \quad (\text{XVIII-20})$$

Введенная величина u_1 представляет собой среднее значение осевой скорости струи там, где давление в струе сравнялось с окружающим атмосферным давлением: в этом мы убедимся, составляя уравнение количества движения для контрольной поверхности l рис. 48, в которую струя входит с давлением p_a и скоростью u_a , а покидает при давлении p_1 с искомой скоростью u_1 .

Из уравнения следует, что единичный импульс при $p_a \neq p_1$ определяется именно скоростью u_1 , а не выходной скоростью u_a .

Можно показать в общем виде, что при данном исходном состоянии газа в камере и данном p_1 величина u_1 имеет максимум при $p_a = p_1$; другими словами, выгоднее всего именно рассмотренный нами ранее случай полного расширения в сопле до атмосферного давления.

Для доказательства составим производную от (XVIII-20)

$$\frac{du_1}{dp_a} = \frac{du_a}{dp_a} + \frac{1}{\rho_a u_a} - \frac{p_a - p_1}{(\rho_a u_a)^2} \frac{d(\rho_a u_a)}{dp_a}. \quad (\text{XVIII-21})$$

Согласно закону Бернулли (ср. § III), дифференцируя III-9, найдем

$$\frac{du_a}{dp_a} = -\frac{1}{\rho_a u_a}. \quad (\text{XVIII-22})$$

При $p_a = p_1$, $\frac{du_1}{dp_a} = 0$; легко показать, определяя знак

$$\left. \frac{d^2 u_1}{dp_a^2} \right|_{p=p_1} = -(\rho_a u_a)^{-2} \frac{d\rho_a u_a}{dp_a} < 0,$$

что мы имеем дело именно с максимумом u_1 .

Этот результат вполне естественен. Рассматривая давление на коническую поверхность расширяющейся части сопла Лавала, мы убеждаемся в том, что при $p_a > p_1$ удлинение конуса (сопряженное с увеличением F_a и уменьшением p_a) дает добавочное слагаемое, увеличивающее реактивную силу; при $p_a < p_1$ удлинение конуса даст слагаемое, уменьшающее реактивную силу. Напомним замечание § III: во всех случаях струя рано или поздно по выходе приобретает давление p_1 . Однако в случае $p_a \neq p_1$ часть перепада давления тратится на радиальные составляющие скорости, не создающие реактивной силы.

Практически тщательная регулировка сопла, особенно в процессе с переменным давлением в камере, с целью постоянного поддержания $p_a = p_1$ весьма сложна. Практический интерес представляет задача исследования работы реактивного аппарата с заданным постоянным соплом, т. е. заданным θ при переменных давлениях p и p_1 .

Выведенные ранее формулы (XVIII-13) и (XVIII-16) сохраняют силу, если, вместо скорости истечения на выходе струи u_a , подставить эффективную скорость u_1 , заданную формулой (XVIII-20). Вместо безразмерной скорости $\varphi = u_a/c_0$ надлежит пользоваться $\varphi_1 = u_1/c_0$. Величина φ_1 есть функция двух переменных θ и Π_1 , где $\Pi_1 = p_1/p$

$$\varphi_1 = \varphi_1(\theta, \Pi_1). \quad (\text{XVIII-23})$$

Функция φ_1 тесно связана с функцией φ . Из предыдущего видны следующие свойства φ_1 :

- 1) при постоянном θ функция φ_1 линейно зависит от Π_1 ;
- 2) при $\theta = \theta(\Pi_1)$, т. е. при расширении сопла, соответствующем отношению атмосферного давления к давлению в камере, тождественно, по определению $\varphi_1 \equiv \varphi$;
- 3) при $\theta \neq \theta(\Pi_1)$, $\varphi_1(\theta, \Pi_1) < \varphi(\Pi_1)$.

Из этих свойств вытекает, что в плоскости рис. 47 а, б (см. выше стр. 131, 132) линия зависимости φ_1 от Π_1 при заданном постоянном θ представляет собой прямую, касающуюся кривой φ при том значении Π_1 , которое отвечает данному θ .

На рис. 47 а, б нанесен ряд линий φ_1 ($\theta = \text{const}$, Π_1) при $\theta = 1, 2, 4$ и 10 . Для того чтобы найти, например, $\varphi_1(2; 0.05)$, мы отыскиваем значение $\theta = 2$ на нижней шкале θ , под осью абсцисс: шкала θ построена в соответствии с теорией сопла Лаваля, так что каждое θ расположено под соответствующим Π_1 ; $\Pi_1(\theta = 2) = 0.115$. На кривой φ находим соответствующую точку N и проводим касательную $MNRNQ$ (подпись под касательной $\theta = 2$).

Эта касательная представляет зависимость $\varphi_1(2, \Pi_1)$. При $\Pi_1 = 0.05$ находим точку R , $\varphi_1(2; 0.05) = 1.84$. Значение это любопытно сравнить с значением φ при оптимальном подборе расширения сопла для данного Π_1 : $\theta_1(0.05) = 3.5$; $\varphi(0.05) = 1.91$. Оптимальное сопло дает выигрыш 3.7%. Напротив, взяв сопло без диффузора, $\theta = 1$, мы получили бы при $\Pi_1 = 0.05$, $\varphi_1(1; 0.05) = 1.63$ (точка S), величину на 15% меньше оптимальной. Как видно из предыдущего, импульс реактивной силы пропорционален величинам φ_1 [(XVIII-13), (XVIII-16)].

Для удобства пользования на графиках даны также шкалы $\frac{1}{\Pi_1} = \frac{p}{p_1}$. Эта величина представляет собой давление в камере в том случае, если $p_1 = 1$ ата.

Рассмотрим подробнее истечение из сопла при $p_a \neq p_1$.

Если $p_a > p_1$, коническая волна разрежения (рис. 49, линии a, b) у края сопла подобна волне разрежения у края помещенной в сверхзвуковой поток тонкой пластинки (ср. рис. 44 б, верхняя левая или нижняя правая часть). Поверхность a , на которой начинается падение давления, распространяется со скоростью звука c_a по газу движущемуся со скоростью u_a . Поэтому образующая конуса a составляет с направлением потока угол Маха, $\sin \alpha = \frac{c_a}{u_a}$. Скорость звука и направление движения после начала разрежения таковы, что последующие характеристики образуют более вытянутый внешний конус (b , рис. 49). Падение давления и изменение скорости происходят в слое между поверхностями a и b .

Если $p_a < p_1$, газ, выходящий из сопла, подвергается сжатию ударной волной, также располагающейся в виде конуса. Поскольку скорость ударной волны больше скорости звука и зависит от амплитуды, „угол Маха“ волны тем больше и конус тем ниже, чем выше давление p_1 . Наконец, при некотором p_1 скорость волны сравнивается со скоростью

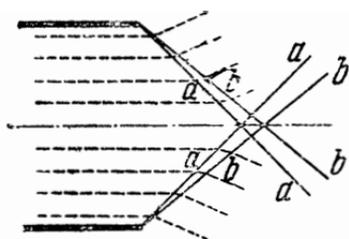


Рис. 49.

истечения $D = u_a$; в выходном сечении сопла образуется плоская ударная волна. При еще более высоком давлении на выходе p_1 ударная волна прячется внутрь диффузора (расширяющейся части) сопла Лаваля. В ударной волне сверхзвуковой поток превращается в дозвуковой; давление в дозвуковом потоке в расширяющемся сопле растет по ходу движения газа, так как уменьшается скорость движения и динамический напор преобразуется в давление, по терминологии гидравликов. Начиная с того значения p_1 , при котором ударная волна заходит внутрь сопла и меняет распределение давления на поверхности сопла, более не правильны выведенные выше выражения и номограммы для определения реактивной силы.¹

На рис. 50 представлены экспериментальные кривые распределения давления на оси сопла Лаваля, продуваемого водяным паром при различных значениях противодавления на выходе из сопла.

Эти кривые заимствованы у турбостроителя Стодоли, которому принадлежит также трактовка резкого повышения давления как ударной волны Римана — Гюгонио — Ренкина.

¹ По замечанию Ландау, резкое повышение давления в ударной волне вызывает одновременно срыв граничного слоя.

Сочетая законы адиабатического потока (§ III) с представлением об ударной волне внутри или на выходе из сопла, мы получили возможность сконструировать режим истечения при любом давлении на выходе из сопла между p_4 и p_5 (рис. 11, § III стр. 39).

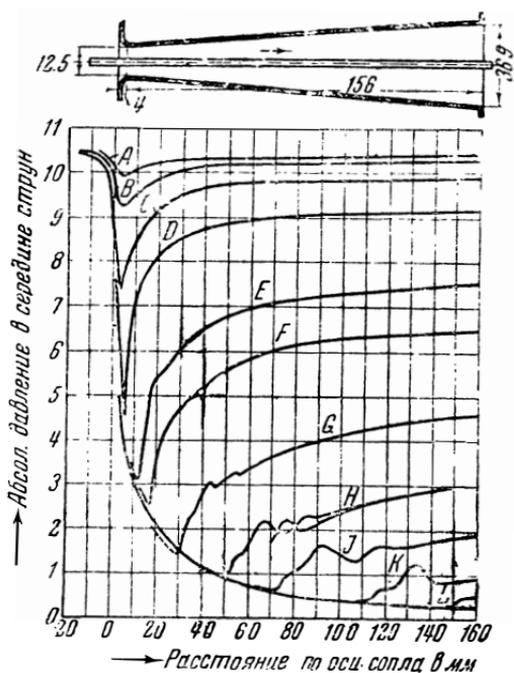


Рис. 50.

§ XIX. Отражение ударной волны

Представим себе твердое тело, помещенное в пространство, в котором распространяется ударная волна. В тот момент, когда фронт волны доходит до тела, движение меняется по сравнению с тем, которое было бы при распространении волны в свободном пространстве. Выясним особенности этого движения, определяющие те силы, которые действуют на тело.

Беляев [2] в Институте химической физики экспериментально исследовал условия, возникающие при отражении и столкновении ударных волн. Он судил о росте давления при отражении волны, сравнивая прогиб двух свинцовых мембран, одна из которых была поставлена тангенциально, а другая — нормально к направлению распространения волны, вызванной в воздухе взрывом тетрилового патрона. На рис. 51а мембрана мало нарушает условия распространения ударной волны, и прогиб ее измеряет величину давления p . Напротив,

очевидно, что усилие, действующее на мембрану, поставленную нормально (рис. 51б), зависит также от скорости движения газов в ударной волне. Беккер [38], следуя Рюденбергу [83], пытался учесть это обстоятельство, вводя сумму $t' = p + \rho u^2$ как характеристику импульса волны.

Давление при нормальном ударе о препятствие Рюденберг принимает за $2F$; однако введение суммы $2F$ строго не обосновано. Власов [3] справедливо отмечает, что величина эта на 50% отличается от истинного значения давления.



Рис. 51а.

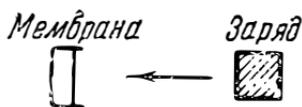


Рис. 51б.

Рассмотрим условия в момент, когда в опыте рис. 51б ударная волна достигает мембраны. Меняя систему отсчета, можно сказать, что в этот момент мембрана начинает двигаться со скоростью u относительно сжатого в ударной волне газа. Это движение мембраны вызывает появление второй ударной волны, распространяющейся навстречу первой по газу, сжатою первой волной.

Действие ударной волны в первый момент на поверхность препятствия, перпендикулярную направлению распространения волны, определяется именно давлением p_1 во встречной ударной волне, останавливающей движение газа у препятствия.

Измайлов (цитируем по статье Беляева [2]),¹ откуда заимствованы также рис. 51—53) дал общую формулу для давления p_1 при произвольной амплитуде давления p в падающей (первой) ударной волне и начальном атмосферном давлении p_0 :

$$p_1 = p \frac{(3k-1)p - (k-1)p_0}{(k-1)p + (k+1)p_0} \quad (\text{XIX-1})$$

и для $k=1.4$

$$p_1 = p \frac{8p - p_0}{p + 6p_0}. \quad (\text{XIX-2})$$

При малой амплитуде мы получим акустический результат

$$p_1 - p_0 = 2(p - p_0). \quad (\text{XIX-3})$$

При очень большой амплитуде, $p \gg p_0$, достигается предельное значение

$$p_1 = \frac{3k-1}{k-1} p; \text{ при } k=1.4, \quad p_1 = 8p. \quad (\text{XIX-4})$$

¹ Диссертация Беляева была защищена в 1935 г. Независимо аналогичные расчеты проделаны Власовым [3].

Беляев указывает на то, что условия при столкновении двух одинаковых ударных волн (см. рис. 52) не отличаются от рассмотренных только что условий при отражении волны от стенки.

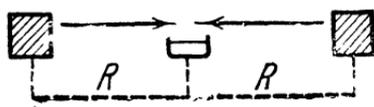


Рис. 52. Измерение давления при столкновении двух ударных волн.

В условиях отражения ударной волны от мембраны в первый момент появляется отраженная волна, движущаяся навстречу падающей волне и удаляющаяся от мембраны. При отсутствии боковых стенок это удаление волны должно вести к ее ослаблению, и за время порядка d/c , где d — диаметр мембраны, мы должны получить переход к картине стационарного обтекания препятствия потоком со скоростью u . Расчет указывает на весьма существенное обстоятельство: скорость движения газа, сжатого мощной ударной волной, превышает скорость звука в сжатом газе. Таким образом, при стационарном обтекании тела потоком воздуха, созданным мощной ударной волной, мы получим переход к картине, подробно описанной ранее в § XVII, со стационарной ударной волной перед препятствием (рис. 54). Однако амплитуда стационарной волны меньше первоначального значения амплитуды отраженной волны, так как в стационарной волне $D_1 = u$, тогда как в отраженной волне $u_1 = u$. Стационарное давление на поверхность мембраны в предельном случае весьма мощной волны в двухатомном газе составит

$$p_2 = 5.24 p, \quad (\text{XIX-5})$$

вместо начального значения, равного $p_1 = 8p$ формулы (XIX-4).

Если падающая ударная волна слаба, то попрежнему

Опыты Беляева в пределах точности эксперимента подтвердили выражение (XIX-2) как для отражения, так и для столкновения; результаты опытов сопоставлены с (XIX-2) на рис. 53.

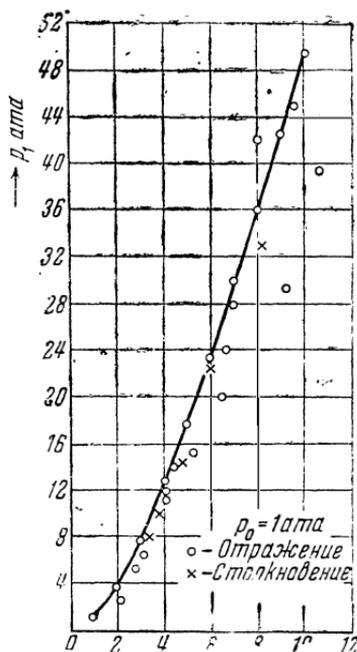


Рис. 53. Зависимость давления при отражении и попарном столкновении ударных волн от амплитуды ударной волны. (Измерения А. Ф. Беляева).

в момент падения образуется отраженная волна; при малой амплитуде (XIX-3) дает

$$p_1 = p_0 + 2(p - p_0) = p + \rho u c, \quad (\text{XIX-6})$$

но вслед за этим отраженная волна, быстро ослабевая, уходит

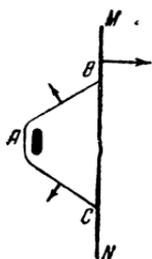


Рис. 54. Фронт звуковой волны ABC , возникающей в сжатом газе при прохождении весьма мощной ударной волны MN мимо малого препятствия. Ударной волне MN достигнута сверхзвуковая скорость движения сжатого вещества; отрезок AB есть разрез конуса Маха (ср. рис. 12 б стр. 41).

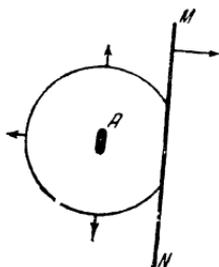


Рис. 55. Сферический фронт звуковой волны, возникающей в сжатом газе при прохождении слабой ударной волны MN мимо препятствия A . Амплитуда волны MN недостаточна для достижения сверхзвуковой скорости, (ср. рис. 12, стр. 41).

в бесконечность; стационарное давление вычисляется по формуле Бернулли

$$p_2 = p + \frac{\rho u^2}{2}. \quad (\text{XIX-7})$$

Расчет показывает, что при $k=1.4$ для достижения звуковой скорости в ударной волне необходимо, чтобы $p=4.5 p_0$.

При $p/p_0 < 4.5$, $u < c$ образуется шаровая волна (рис. 55), отрывающаяся от препятствия; амплитуду ударной волны можно определить по моментальной фотографии (рис. 55); мы не останавливаемся на подробностях расчета.

В интервале давлений в волне от $5 p_0$ до $10-15 p_0$ изменение угла наклона волн Маха на моментальной теневой фотографии (см. рис. 54) может служить для точного определения мгновенных параметров падающей ударной волны.

Заметим, наконец, что сверхзвуковая скорость сжатого газа несколько не противоречит общей теории, требующей, чтобы $D < c + u$. В мощных ударных волнах, начиная с $p/p_0 = 4.5$

и выше, возмущение не передается навстречу движению газа, но любое возмущение сзади передается фронту волны.

Дюгем [48] особо отмечает, что в ударной волне, в которой плотность увеличивается более чем в $\frac{2}{k-1}$ раза (что отвечает росту давления $p > \frac{4k-k^2+1}{(k-1)^2} p_0$, т. е. $p > 15.25 p_0$ при $k=1.4$), скорость распространения ударной волны относительно невозмущенного газа больше, чем скорость звука в сжатом газе, $D > c$. Однако, насколько нам известно, при переходе через $D=c$ не возникает никаких особенностей в поведении волны.

§ XX. Действие взрывчатых веществ. Введение

Важнейшей областью применения теории ударных волн является взрыв и действие взрывчатых веществ.

Взрыв представляет собой быструю химическую реакцию, при которой взрывчатое вещество полностью или частично превращается в газ более или менее высокой температуры.

В зависимости от состава и состояния вещества, от условий, в которых взрыв имеет место, и от условий, вызывающих взрыв, химическая реакция протекает по-разному, с различной скоростью.

Только чрезвычайно быстрая химическая реакция приводит к появлению больших разностей давления и распространению ударных волн, составляющих отличительную особенность взрыва.¹ Поэтому нас интересует вопрос о скорости химической реакции.

Всякое практически применяемое взрывчатое вещество является при комнатной температуре химически инертным; химическая реакция, взрыв, наступает лишь после зажигания (инициирования) взрывчатого вещества.

Как правило, зажигание является относительно заряда взрывчатого вещества локальным (местным). Исследуемые сложные процессы приводят к тому, что химическая реакция в одном слое возбуждает химическую реакцию в соседнем слое и т. д. Результатом является распространение химической реакции с определенной линейной скоростью (размерность ско-

¹ Мы не рассматриваем здесь того случая, когда реагирующее вещество заключено в герметичную прочную оболочку; в такой оболочке даже медленная химическая реакция, сопровождающаяся выделением газа, разовьет высокое давление, ограниченное прочностью сосуда. Разрыв сосуда высокого давления внешне во многих отношениях напоминает взрыв, но детали этого процесса, зависящие от свойства материала, из которого изготовлен сосуд, и его конструкции, не интересуют нас.

рости — длина \cdot время⁻¹) по пространству, занятому взрывчатым веществом.¹

Возникают два вопроса: об условиях и скорости распространения реакции и о распределении давления и других величин в пространстве к моменту окончания реакции. Теоретическое рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей книги. Опыт показывает, что в сильных взрывчатых веществах (сокращенно ВВ) современной техники скорость распространения реакции достигает нескольких тысяч метров в секунду и превосходит скорость звука в этих веществах. Благодаря этому при центральном зажигании внешние части заряда ВВ не успевают сдвинуться с занимаемых ими мест до окончания взрыва. Средняя плотность газообразных продуктов взрыва (сокращенно ПВ) равна начальной плотности ВВ. Средняя температура ПВ, в зависимости от типа ВВ, колеблется в пределах 1500—4000° К.

Средним значениям: плотности 1,3, температуре 3000° К и молекулярному весу ПВ 25 отвечало бы по закону Клапейрона, давление

$$\bar{p} = \frac{1,3 \cdot 3000 \cdot 22 \cdot 400}{273 \cdot 25} = 13 \, 000 \text{ атм.}$$

В действительности, по причине отступлений газа от идеальности, среднее давление в несколько раз выше; к тому же распространение реакции приводит к неравномерному распределению давления в объеме, занятом ПВ; часть ПВ находится в движении; неравномерность и движение ПВ понятны, если учесть, что различные частицы ВВ реагируют в различные моменты времени, так что история их различна. Рассчитанное с учетом этих обстоятельств максимальное давление ПВ достигает 100-400 тыс. атм.

К моменту окончания реакции ПВ, состояние которых описано выше, окружены невозмущенной атмосферой. Расширение ПВ сопровождается образованием мощной ударной волны.

В процессе расширения ПВ охлаждаются до температуры, близкой к комнатной, и занимают объем, в среднем в 1000 раз превосходящий объем ВВ.

Предметы, расположенные на расстоянии до 10 радиусов заряда, подвергаются не только действию ударной волны, рас-

¹ Скорость эту надо отличать от скорости химической реакции определенной частицы вещества, характеризуемой временем протекания реакции. Точно так же в случае распространения реакции надо различать время реакции всего заряда (в простейшем случае постоянной скорости, пропорциональное размеру заряда) и время реакции отдельных частиц вещества; время реакции отдельных частиц составляет, очевидно, лишь часть первого, так как в процессе взрыва различные частицы реагируют не одновременно, и в упомянутом простейшем случае от размеров заряда не зависит.

пространяющейся в воздухе, но и действию более или менее расширившихся ПВ.¹

Вблизи заряда, пока расширение незначительно и соответственно температура и плотность ПВ велики, характерно значительное тепловое воздействие на поверхность препятствия.

Зачастую ПВ содержат окись углерода и водород—в случае ВВ с отрицательным кислородным балансом: возможно и вероятно соединение окиси углерода и водорода ПВ с кислородом воздуха. В случае тротила теплота сгорания ПВ (окиси углерода и водорода ПВ) в кислороде воздуха достигает 220⁰/₀ теплоты взрыва (теплоты превращения ВВ в ПВ).²

В настоящее время не выяснен важный вопрос о том, как и когда происходит реакция СО и Н₂, содержащихся в ПВ, с кислородом воздуха и в какой мере энергия этой реакции используется как механическая энергия взрыва.³

ПВ, расширяясь, действуют как поршень и толкают перед собой воздух. Огромной степени расширения ПВ отвечает хороший, близкий к 1 к. п. д. использования химической энергии, взрыва в первой стадии процесса.

Распространение ударной волны в силу необратимого характера сжатия в волне сопровождается рассеянием механической энергии и превращением ее в тепловую. По этой причине, а также и потому, что по мере распространения волны увеличиваются ее поверхность и количество вовлеченного в движение вещества амплитуда волны падает с расстоянием.

Наконец, волна доходит до препятствия; с одной стороны, происходят отражение волны и огибание волной препятствия—

¹ В случае несимметричного распространения детонации, расстояние проходимое ПВ, и мощность действия взрыва в одних направлениях (главным образом в направлении распространения детонационной волны) больше, в других—меньше. Здесь мы не касаемся чрезвычайно интересного и важного вопроса о кумулятивных зарядах, отличающихся сильнейшей концентрацией энергии в заданном направлении. Вопросу этому посвящена специальная литература [110].

² Теплота горения тротила в калориметрической бомбе в избытке кислорода составляет 3592 ккал/кг (с образованием жидкой воды); в расчете на горение с образованием паробразной воды получим около 3480 ккал/кг. Теплота взрыва тротила при высокой плотности заряжания, согласно Шмидту, равна 1085 ккал/кг. Теплоту горения ПВ найдем, вычитая из теплоты горения тротила теплоту взрыва (3480—1085 = 2395).

³ В артиллерии хорошо известно явление дульного пламени: после вылета снаряда из дула вытекают продукты горения пороха, которые перемешиваются с окружающим воздухом; при достаточном содержании горючего и достаточной температуре образовавшаяся смесь сгорает (взрывается) с яркой вспышкой.

В связи с звукометрическим определением расположения артиллерийских орудий, Эсклангон [114], а за ним другие авторы исследовали звук выстрела и обнаружили существование двух отдельных звуковых волн: звука, происходящего от расширения продуктов горения пороха, и звука дульного пламени; последний на большом расстоянии от орудия интенсивнее первого и отличается большей длиной волны.

явления, происходящие в воздушной среде и определяющие действующее на препятствие усилие.

С другой стороны, усилия эти вызывают перемещение и деформацию препятствия, т. е. те процессы, которые определяют в последнем счете опрокидывание или разрушение препятствия.

Здесь мы встречаемся с двумя типическими случаями: в одном случае действие определяется максимальным, пиковым давлением; если максимального давления недостаточно и разрушения не произошло, то последующее действие более слабого давления уже ничего не меняет.

Случай этот имеет место тогда, когда максимальные усилия и деформации достигаются в разрушаемой системе очень быстро, за время, меньшее, чем время спада давления. Примером может служить разрушение сплошной стали положенным на поверхность стальной плиты зарядом.

Наличие или отсутствие разрушения зависит от максимального давления, т. е. от рода ВВ и от расстояния (зазора) между зарядом и поверхностью.¹

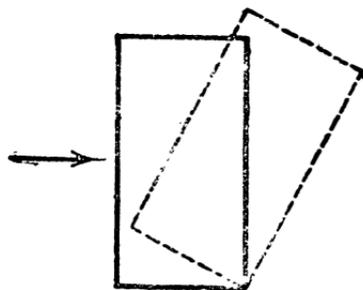


Рис. 56.

В другом случае, с которым мы сталкиваемся более часто, время действия ударной волны оказывается малым по сравнению со временем разрушения. Возьмем в качестве примера опрокидывание кирпичной стены высотой 1.5 м и шириной 0.25 м (рис. 56). Для опрокидывания нужно сообщить центру тяжести стенки скорость около 0.5 м/сек. При такой скорости перемещение центра тяжести до наивысшей точки (соответствующее положение стены показано пунктиром) займет около 0.25 сек.

Очевидно, что время действия ударной волны во много раз меньше, чем 0.25 сек, за 0.25 сек волна пробегает около 100 м. Следовательно, за время действия ударной волны перемещение стенки незначительно, стенка только набирает скорость, а с этой скоростью движение продолжается по инерции по окончании действия волны. Набранная скорость движения зависит не от величины пикового давления, а от площади кривой зависимости давления от времени, т. е. от импульса сил давления.

¹ Однако и в этом случае надо иметь в виду, что размер разрушения, если оно происходит, зависит от величины заряда (которой определяется длительность воздействия давления); независимость самого наличия или отсутствия разрушения от длительности действия давления, как видно из сказанного выше, имеет место также только с определенного минимального времени воздействия, т. е. с определенной минимальной величины заряда.

Импульс сил определяет, таким образом, будет ли стена опрокинута.

Если разрушению подвергается гибкая конструкция, состоящая, например, из длинных металлических стержней, работающих на изгиб, то по сравнению с временем разрушения (временем деформации необходимой для разрушения) время действия волны окажется также малым, малыми окажутся происходящие за это время перемещения. Максимальные, опасные для конструкции деформации, возникнут позже, через время, равное четверти периода собственных колебаний системы; давление ударной волны в этот момент уже не действует на систему, и деформация идет по инерции, за счет накопленной в начале движения скорости.

В дальнейшем, рассматривая распространение ударных волн от взрыва заряда ВВ, мы должны будем исследовать изменение обеих характеризующих ударную волну величин: максимального давления и общего импульса; отношение импульса к максимальному давлению характеризует эффективное время воздействия давления ударной волны.

При измерении давления и импульса и при действии ударной волны на объект существенны условия взаимодействия волны и объекта. Мы видели выше (§ XIX), что давление на поверхность, поставленную нормально фронту волны, в результате отражения в несколько раз превышает давление, измеренное поверхностью, поставленной тангенциально. Импульс силы зависит, кроме того, от условий обтекания объекта воздухом, сжатым в волне. Соотношение между импульсом давления волны¹ и импульсом силы, испытанной объектом, зависит поэтому еще и от отношения времени действия давления ударной волны ко времени огибания волной препятствия.

§ XXI. Подобие взрыва и распространения взрывных волн

Сложность аналитического расчета даже наиболее симметричных и схематичных задач делает необходимым установление методики моделирования явления взрыва и действия взрыва в малом масштабе и определение законов переноса результатов, полученных в малом масштабе, на большой масштаб. Иными словами, оказывается необходимым установление законов подобия в данной области.

В § VI и XVI мы видели, что уравнения газовой динамики содержат только определенную характерную скорость (ско-

¹ Импульс давления волны мы определяем как величину $\int (p - p_0) dt$, где p_0 — атмосферное давление (постоянная величина), $p = p(t)$ — давление в рассматриваемой точке пространства при прохождении ударной волны, не возмущенной ни препятствиями, ни измерительными приборами.

рость звука), но не содержат ни длины, ни времени. В § XVI было показано, что в распространении ударных волн диссипативные величины также не вводят характерной длины. Отсюда следует возможность при моделировании задавать масштаб по произволу. При этом подобие будет обеспечено, если все размеры изменены с соблюдением геометрического подобия.

Если рассматривается задача распространения давления взрыва, то для подобия необходимо также, чтобы свойства ПВ были в определенном отношении к соответствующим величинам, характеризующим свойства воздуха. Это относится к скорости звука, плотности и давлению ПВ и воздуха.

Так как свойства воздуха при атмосферном давлении заданы и постоянны, подобие будет соблюдено при сохранении свойств ПВ.

Для сохранения свойств ПВ необходимо соблюдение двух условий; первое из них—сохранение свойств ВВ.

Условие это очень просто: при моделировании надо применять то же взрывчатое вещество при той же плотности заряжения, что и в натуре. Условие это необходимо, но не достаточно. Нужно еще, чтобы достигнутое подобие не было нарушено в самом процессе взрыва, т. е. в процессе протекания химической реакции.

Точного сохранения подобия ожидать нельзя: химическая реакция характеризуется определенной скоростью, т. е. определенным временем, необходимым для ее (реакции) завершения; между тем, как мы уже много раз упоминали, газодинамические явления имеют характеристическую скорость распространения размерности см/сек; поэтому при изменении геометрического масштаба опыта пропорционально изменяются и все времена: если модель в 10 раз меньше натуре, то в 10 раз меньше, например, и время прохождения ударной волны от заряда до препятствия. При изменении масштаба меняется соотношение между временем реакции и другими, зависящими от движения газов временами, что, вообще говоря, нарушает подобие.

Известно давно, что скорость детонации, измеренная для ВВ в патронах малого диаметра, оказывается пониженной по сравнению с нормальным значением, измеренным в патронах большого диаметра. Скорость детонации не зависит от размера (как этого требует подобие), только начиная с определенного, достаточно большого диаметра и выше.

Наиболее яркое выражение нарушения подобия мы встречаем в исследованном Ю. Б. Харитоновом с сотр. [116] явлении критического (для детонации) диаметра: заключенные в трубки заряды жидкого нитроглицерина в трубках большого диаметра детонируют (при надлежащем иницировании); в трубках узких детонация затухает и не распространяется.

Очевидно, что, измеряя ударные волны от зарядов разного

диаметра, даже при соблюдении всех остальных условий (геометрического подобия), мы получим совершенно различные результаты при переходе критического значения диаметра трубки.

При распространении детонации новые слои ВВ вовлекаются в результате воздействия со стороны ранее вступивших в реакцию, ранее превратившихся в ПВ слоев; в настоящее время не ясна роль различных факторов (влияние высокого давления на скорость реакции, нагревание при сжатии, нагревание ВВ соприкосновением и перемешиванием с ПВ) в этом воздействии; во всяком случае вступающий в реакцию слой подвергается действию высокого давления. Заключенные в непрочной стеклянной трубке или другой тонкой оболочке ВВ при высоком давлении стремятся разлететься в стороны.

Ю. Б. Харитон объясняет затухание детонации ВВ при малом диаметре именно тем, что время разлета, время разбрасывания заряда становится меньше времени химической реакции. ВВ оказываются рассеянными, давление падает раньше, чем успеет произойти реакция. При увеличении диаметра время разлета увеличивается; если оно превышает время реакции, возможна незатухающая детонация.

Существование критического диаметра нарушает подобие взрывов зарядов разных размеров. Вместе с тем оно дает нам критерий для определения той области условий, в которой подобие будет иметь место.

Для подобия нужно, чтобы время реакции стало малым по сравнению с другими характерными временами: на основании теории критического диаметра Ю. Б. Харитона заключаем, что взрыв двух зарядов одинаковой формы, но разной величины будет подобным, если все размеры меньшего заряда (и значит, тем более, размеры большего заряда) в несколько раз превышают критический диаметр.

Нужно добиваться того, чтобы детонация была полной и в большем и в меньшем зарядах: подобие нарушается там, где полнота реакции растет с увеличением заряда; но рост полноты реакции ограничен 100% и на этом основано убеждение в том, что, начиная с некоторого достаточно большого размера, подобие будет соблюдаться.

Пусть подобие осуществлено. Каковы законы переноса сведений от модели к натуре? Все геометрические размеры уменьшены в одинаковом масштабе. Выберем в качестве характеристического размера радиус заряда R . Сходственными точками, в которых все явления развиваются подобно, окажутся точки, расстояния которых от центра заряда находятся в равном отношении к радиусам зарядов, т. е. точки, в которых равны отношения $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$, $\frac{z}{R}$ или (в случае сферической симметрии) $\frac{r}{R}$, где r — расстояние точки от центра симметрии.

Масштаб давления в подобных системах одинаков, так как одинаково атмосферное давление воздуха, одинаково и максимальное давление ПВ, что следует из одинаковости плотности ПВ и температуры взрыва. Как мы уже указывали, масштаб времени в подобных системах пропорционален размерам; поэтому если мы сравниваем кривые зависимости давления от времени, то они окажутся трансформированными

$$\frac{t}{R} = \text{idem}, \quad p = f\left(\frac{t}{R}, \frac{r}{R}\right). \quad (\text{XXI-1})$$

Для того чтобы иметь дело с безразмерной функцией, запишем это же соотношение так:

$$p = p_0 \cdot f\left(\frac{t c_0}{R}, \frac{r}{R}\right), \quad (\text{XXI-2})$$

где p_0 — характерное давление (например атмосферное), c_0 — характерная скорость (например скорость звука в воздухе).

Нас интересуют прежде всего две величины: максимальное давление и полный импульс давления; мы получим для этих величин

$$\begin{aligned} p_{\max} &= p_0 \pi \left(\frac{r}{R}\right); \\ i &= \int (p - p_0) dt = \int p_0 \left[f\left(\frac{t c_0}{R}, \frac{r}{R}\right) - 1 \right] \cdot \frac{R}{c_0} d\left(\frac{t c_0}{R}\right) = \\ &= p_0 \frac{R}{c_0} \cdot \eta\left(\frac{r}{R}\right). \end{aligned} \quad (\text{XXI-3})$$

Максимальное давление в сходственных точках одинаково, импульс давления в сходственных точках пропорционален масштабу R . Совершенно аналогичные формулы имеют место и для движения газов: в сходственных точках максимальная скорость газов одинакова, кривые изменения скорости со временем подобны, перемещения частиц пропорциональны масштабу R .

Давление, действующее на поверхность препятствия, отличается от давления в ударной волне и зависит от явлений отражения и огибания волной препятствия. Если препятствия подобны, то явления эти также будут протекать подобно; максимальное давление на поверхность препятствия отличается от максимального давления ударной волны множителем, зависящим от амплитуды волны (см. § XIX), т. е. от p/p_0 . Таким образом, максимальное давление отраженной волны зависит только от отношения длин r/R ; точно так же к импульсу силы, действующей на единицу поверхности препятствия, относится формула того же вида, что и для импульса давления, так что

импульс силы на единицу площади на сходственных поверхностях пропорционален размеру заряда.

Задачей экспериментального и теоретического исследования является определение давления как функции двух переменных $f\left(\frac{tc_0}{R}, \frac{r}{R}\right)$. Эта задача чересчур сложна, и целесообразно определение, прежде всего, двух функций безразмерного расстояния π, η , характеризующих максимальное давление и полный импульс. Наряду с определением их в свободно распространяющейся волне мы ищем также эти функции при наличии определенного стандартного типа отражения и огибания. Так, Садовский пользовался приборами, вделанными в сплошную высокую стену: в такой постановке мы имеем дело с отражением ударной волны без огибания препятствия.

Для вещества определенной плотности радиус просто связан с весом заряда. Экспериментаторы представляют свои данные в виде зависимости давления и импульса от расстояния r и массы заряда m . Так как $m \sim R^3$, теория подобия приводит к следующим зависимостям.¹

$$P_{\max} = f\left(\frac{r}{\sqrt[3]{m}}\right); i = \sqrt[3]{m} \cdot h\left(\frac{r}{\sqrt[3]{m}}\right). \quad (\text{XXI-4})^1$$

Наконец, в неслишком широком интервале изменения давления естественно искать степенные зависимости определяемых величин от веса заряда и расстояния

$$P_{\max} = \text{const} \cdot r^a m^b; i = \text{const} \cdot r^c m^d.$$

Законы подобия связывают показатели степени: из (XXI-4) следует

$$a + 3b = 0; c + 3d = 1. \quad (\text{XXI-5})$$

Формулы, приводимые в литературе для максимального давления ударной волны, удовлетворяют требованиям теории подобия; например, для больших расстояний принята формула

$$P_{\max} = \text{const} \cdot \frac{\sqrt[3]{m}}{r} + p_0. \quad (\text{XXI-6})$$

¹ Если измерять r в метрах, а m в килограммах, то для заряда шаровой формы при плотности 1.6 значение $\frac{r}{\sqrt[3]{m}} = 1$ отвечает отношению $\frac{r}{R} = 19$; для точки, лежащей на поверхности заряда, вычисленное в технических единицах $\frac{r}{\sqrt[3]{m}} = 0.053$.

Однако для импульса при обработке опытных данных часто приводится формула

$$i = \text{const} \cdot \frac{\sqrt[3]{m}}{r}. \quad (\text{XXI-7})$$

которая находится в противоречии с выведенной выше формулой (XXI-5). Такое отклонение может зависеть от несоблюдения условий подобия при измерении импульса, особенно в случае больших зарядов и больших расстояний. Созершенно правильные с точки зрения теории подобия формулы для импульса дают Власов [3] и Савич [113].

Выше отмечено, что одним из условий подобия является постоянство плотности ВВ. Садовским установлен тот экспериментальный факт, что при $\frac{r}{\sqrt[3]{m}} > 1$ (м, кг) параметры ударной волны зависят только от веса

заряда, но не от его плотности; при этом сохраняются формулы (XXI-4), а не (XXI-2). В этих опытах сравнивался эффект взрыва прессованного тротила и порошкообразного тротила разной насыпной плотности (от 1.6 до 0.3); уменьшение давления и импульса не превышало 2—30%.

С другой стороны, заряд малой плотности, взорванный в нормальной атмосфере, можно считать подобным заряду большой плотности, взорванному в воздухе повышенного давления.¹

В этом предположении результат Садовского позволяет предсказать с помощью теории подобия зависимость характеризующих волну величин от плотности воздуха. Приводим без вывода окончательные формулы, в которых плотность воздуха выражена через его давление p_0 и температуру T_0 ,

$$p_m = p_0 f \left(\frac{r \sqrt[3]{p_0}}{\sqrt[3]{m T_0}} \right); i = \sqrt[3]{m p_0^2 T_0} h \left(\frac{r \sqrt[3]{p_0}}{\sqrt[3]{m T_0}} \right) \quad (\text{XXI-8})$$

или для степенных выражений связь между показателями степени расстояния r , массы заряда m и атмосферного давления p_0 и температуры T_0 , которые мы здесь не считаем постоянными,

$$p_m = \text{const} \cdot r^{-3b} m^b p_0^{1-b} T_0^b; i = \text{const} r^{1-3d} m^d p_0^{1-d} T_0^d.$$

Такую же связь между показателями степени получим, полагая, что $p_m - p_0$ зависит от параметров по степенному закону. На большом расстоянии амплитуда изменения давления и импульс затухают обратно пропорционально расстоянию; примем здесь этот предельный закон как вывод из эксперимента. В таком случае получим

$$p_m = p_0 + \text{const} \cdot r^{-1} m^{1/3} p_0^{2/3} T_0^{1/3}; i = \text{const} \cdot r^{-1} m^{2/3} p_0^{1/3} T_0^{2/3}.$$

Было бы интересно подвергнуть экспериментальному исследованию вопрос о влиянии атмосферных условий на распространение ударных волн: изменение температуры от +40 до -40°C меняет $T_0^{1/3}$ на 100%, $T_0^{2/3}$ на 220%.

¹ Подобие не точное, так как в ПВ при начальной плотности имеют место большие отступления от уравнения состояния идеального газа, зависящие от плотности; собственный объем молекул ПВ доставляет характеристическую плотность. Однако можно полагать, что это обстоятельство не сказывается уже в момент, когда ударная волна отошла на значительное расстояние от заряда и ПВ значительно расширились.

Наряду с наиболее важным случаем сферического распространения ударных волн представляют некоторый интерес также цилиндрический и одномерный случаи. Цилиндрический случай реализуется при взрыве длинного заряда при изучении волны на расстоянии от заряда меньшем, чем длина заряда. Одномерный случай реализуется при распространении ударной волны в трубе. Нетрудно изменить для них выведенные выше для сферического распространения предельные законы; так, в одномерном случае

$$P_{\max 1} = p_0 f(r/m_1) i = p_0 m_1 f(r/m_1),$$

где m_1 — приходящаяся на единицу сечения масса ВВ.

Движение на близком (малом по сравнению с размерами заряда) расстоянии от поверхности заряда также можно трактовать как одномерное движение. Однако в этом случае особая осторожность нужна вследствие зависимости законов распределения давления и движения ПВ от характера распространения детонационной волны: сферической при центральном инициировании заряда или плоской при одновременном инициировании по плоскости параллельной поверхности заряда ([8]—2-я статья).

Особенно ценно моделирование при изучении распространения волн в сложных геометрических условиях, например при исследовании различных способов защиты вентиляционных каналов от взрывной волны, законов дифракции ударной волны у препятствия и т. п. [117] Понятно, что в этих случаях необходимо соблюдение подобия как в расположении поверхностей, отражающих ударные волны, так и в расположении измерительных приборов. Результаты измерений зависят не только от расстояния прибора от заряда, но и от его расположения относительно препятствия и т. п.

XXII. Моделирование и подобие разрушений, производимых ударной волной

Постольку, поскольку разрушение зависит от достижения определенного предельного значения напряжения в материале, подобие разрушения будет соблюдено в самых простых условиях, при применении в модели того же материала, что и в натуре, и, конечно, при соблюдении геометрического подобия.

Действительно, применение одинаковых материалов обеспечит подобие в распространении ударной волны, в переходе ее из одной среды в другую, отражении и т. п. Мы видели, что характерная амплитуда давления постоянна; в подобных взрывах в сходственных точках давления одинаковы.

Подобны будут области, в которых вызванные взрывом напряжения превысят допустимые значения и вызовут разрушение материала.

Разрушение требует достижения определенной деформации, т. е. перемещения одних частиц тела относительно других; инерционные силы и упругость приводят к тому, что деформация и разрушение достигаются не мгновенно. Не приведет ли существование определенного времени деформации к нарушению подобия?

Легко видеть, что подобие сохранится: именно инерция вещества, зависящая от плотности, и упругость его определяют

скорость звука в веществе; даже формально анализом размерности можно показать, что из плотности и упругости удастся построить время деформации, только привлекая размеры тела, и это будет время прохождения волны по телу; время окажется пропорциональным размеру; при изменении масштаба время деформации меняется по тому же закону, что и само время воздействия ударной волны, и соотношение времен остается постоянным, что обеспечивает подобие явлений.

Подобие распространяется и на тот более сложный тип разрушения, в котором определяющим является не пиковое давление, а импульс ударной волны (см. § XX).

Действительно, пусть мы имеем какую-то гибкую балку, период колебания которой превышает время действия ударной волны.

При уменьшении всех размеров заряда, балки и расстояния между ними в n раз также в n раз уменьшится период колебаний балки, в n раз увеличится частота; это легко проверить по формулам теории упругости для любого конкретного способа закрепления балки.

Масса уменьшилась в n^3 раз, в n раз уменьшился в сходственной точке импульс ударной волны на единицу поверхности за счет уменьшения ее ширины и уменьшения времени воздействия волны при постоянном пиковом давлении, в n^2 раз уменьшилась поверхность, воспринимающая давление. Таким образом, линейная скорость, достигнутая балкой в результате воздействия импульса давления, оказывается не зависящей от размера; амплитуда возбужденных колебаний — порядка произведения скорости на период, т. е. пропорциональна размеру. Отсюда видно, что относительные деформации и плотность упругой энергии, пропорциональная квадрату начальной скорости, одинаковы на модели и в натуре; одинаков будет и результат — наличие или отсутствие разрушения. Заметим, что подобие не будет нарушено и трением, зависящим от скорости и от нагрузки в том случае, если нагрузка также задается в основном действием ударной волны, так как скорость и давление сохраняются в подобных системах.

Менее тривиален другой, часто встречающийся в строительной механике, случай, в котором прочность сооружения и усилие, потребное для его разрушения, зависят от тяжести сооружения. Простейшим примером такого рода является песчаный грунт, лишенный связности. Другой пример — кирпичная кладка, выложенная насухо, крепость которой зависит от тяжести кирпичей и от трения кирпичей, давящих друг на друга. Харитон подчеркивает, что такой тип прочности чрезвычайно часто определяет сопротивление разрушению сооружений. Сухая кирпичная кладка представляет один крайний пример, в котором тяжесть определяет внутреннюю связность; прочная стальная коробка, которая скорее будет опрокинута

как целое, нежели сломана, представляет другой крайний пример, в котором также взрыв работает против силы тяжести.

Уже формально ясна невозможность строгого подобия: в теорию входит теперь ускорение земного тяготения g размерности длина/время². Вместе с характерными скоростями процесса взрыва, например c_0 , наличие g позволяет построить масштаб длины, например c_0^2/g и масштаб времени c_0/g . Отсутствие подобия и физически очевидно: если мы сравним два заряда разных размеров, закопанные в песок на соответствующие глубины, то убедимся в том, что давление грунта на уровне заряда пропорционально глубине, пропорционально размеру заряда. Так же точно пропорционально размеру минимальное давление, необходимое для опрокидывания стенки во втором примере. Между тем атмосферное давление и давление взрыва от размера не зависят.

Таким образом, с изменением размера меняется отношение давления грунта или потребного для начала разрушения давления к давлению взрыва и нарушается подобие.

Прекрасный метод моделирования предложил Покровский [109]: для того чтобы добиться подобия, необходимо, меняя масштаб опыта, менять пропорционально и естественный масштаб длины. Покровский достигает этого изменением ускорения, заменяя силу тяжести центробежной силой; взрыв модели производится на центрофуге, размеры уменьшены против природы в отношении центростремительного ускорения к ускорению силы тяжести; легко проверить, что давление грунта на подобных глубинах будет подобным.

Покровский широко использовал свой метод практически для моделирования больших и ответственных взрывов на выброс и исследования влияния различных грунтов и различного расположения заряда на результат взрыва. Линейный масштаб моделирования в его опытах достигал 29, т. е. все размеры модели были сокращены в 29 раз по сравнению с размерами моделируемого объекта. Вес заряда, характеризующий стоимость эксперимента, сокращался в 25 000 раз.

Зельдович и Харитон предложили приближенный метод моделирования работы ВВ против силы тяжести. Он основан на том замечании, что новый критерий, от которого зависит отсутствие подобия при изменении масштаба, резко отличается от 1. Так, если мы напомним этот критерий как отношение характерной длины c_0^2/g к размеру заряда R , то для заряда весом в 1 кг получим $\frac{c_0^2}{gR} = 2 \cdot 10^5$. Отношение статического давления грунта к давлению взрыва составит, при глубине воронки в несколько метров, величину порядка $10^{-4} - 10^{-5}$. Критерий в самых различных формулировках оказывается резко отличен от 1. Значит, мы имеем дело не с таким случаем, в котором все величины одного порядка; очевидно,

мы находимся в области действия предельных законов, в которой можно ожидать автомодельности, подобно тому как возникает автомодельность в гидродинамике при очень больших или очень малых числах Рейнольдса.

Надлежит найти физическую природу этой автомодельности.

Рассмотрим ближе опрокидывание стенки (см. рис. 56, стр. 145). В начале предыдущего параграфа мы привели его как пример процесса, длящегося значительно дольше времени воздействия волны (отношение времен доставляет в этом случае еще один критерий, резко отличный от единицы), т. е. процесса, в котором определяющую роль играет общий импульс волны. Задавшись делением процесса на две стадии: 1) воздействие волны на объект, задающее его количество движения, 2) движение объекта по инерции, преодолевающее силу тяжести, — мы легко найдем условие подобия.

Действительно, количество движения K объекта, равное импульсу силы, при геометрически подобном изменении системы (при котором размеры объекта и расстояние объект — заряд меняются пропорционально размеру заряда R) пропорционально

$$K \sim Fi \sim R^2 \cdot \frac{\rho_0}{c_0} R \sim \frac{\rho_0}{c_0} R^3, \quad (\text{XXII-1})$$

где F — площадь, на которую воздействует волна, i — импульс давления на единицу поверхности. Количество движения объекта, достаточное для его опрокидывания, определим из энергетических соображений: кинетическую энергию объекта приравняем работе подъема центра тяжести объекта на высоту, пропорциональную размеру объекта,

$$E \sim \frac{K^2}{M} \sim MgR. \quad (\text{XXII-2})$$

Подставим выражение массы объекта M через характеристический размер R и плотность объекта ρ в выражение K (XXII-1)

$$M \sim \rho R^3; \frac{\rho_0^2 (R^3)^2}{c_0^2 \rho R^3} \sim \rho R^3 g R; \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \rho^2 g R = \text{idem} \quad (\text{XXII-3})$$

Знак *idem*, принятый в теории подобия, означает, что подобие будет иметь место при сохранении постоянным написанного слева выражения. Для всех взрывов в воздухе в нормальных условиях $c_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$, критерий упрощается, $\rho^2 g R = \text{idem}$.

Критерий этот включает и точное моделирование — изменение ускорения g обратно пропорционально размеру R (центробежное моделирование). Но благодаря сделанным приближениям мы получили критерий, допускающий также другое решение — изменение плотности обратно пропорционально корню из размеров. Этот способ был предложен Харитоновым

и автором [105]. Метод допускает достаточно широкое изменение масштаба: заменяя материал плотностью 2 (камень) материалом плотностью 11 (свинец), получаем возможность уменьшить R в 30 раз, что отвечает уменьшению заряда в 27000 раз, т. е. возможности моделировать взрыв 1 т ВВ взрывом 40 г того же вещества.

В многочисленных опытах Харитона поставленные на ребро кирпичи оказались удобными указателями расстояния, на котором импульс ударной волны падает до определенного значения.

Понятно, что применительно к более сложным случаям, в которых наряду с жесткой конструкцией работает и грунт, необходимо центробежное моделирование; область применения предложенного Харитоном и автором приближенного моделирования изменением плотности менее широка и преимуществом его является лишь простота экспериментального осуществления.

§ XXIII. Явления в непосредственной близости с зарядом

Теория подобия позволяет свести зависимость величин, характеризующих действия взрыва, от массы заряда и расстояния к двум безразмерным функциям одной безразмерной переменной. Определение вида этих функций должен дать конкретный разбор явления взрыва и следующего за ним распространения ударной волны. Мы не рассматриваем здесь самого взрыва — распространения детонационной волны по ВВ, сопровождающегося химической реакцией превращения ВВ в ПВ. Наше рассмотрение начинается с того момента, когда детонационная волна доходит до поверхности заряда. Оболочку заряда считаем весьма тонкой и не учитываем ее влияния. В указанный момент оказываются граничащими: с одной стороны, невозмущенный воздух или разрушаемый материал, с другой — ПВ, только что образовавшиеся в результате химической реакции.

Расчеты, относящиеся к теории детонации, показывают, что эти ПВ движутся в направлении распространения детонационной волны. Плотность их выше средней плотности ПВ, так что давление вдвое больше среднего. Если заряд ВВ граничит с препятствием, то в момент, когда детонационная волна доходит до границы, движущиеся ПВ сталкиваются с препятствием, и происходит резкое торможение ПВ. При тех давлениях, с которыми приходится иметь дело, любой материал пластичен. Скорость, приобретаемая материалом препятствия под действием ПВ, ограничена в основном не прочностью материала, а его инерцией, т. е. плотностью и сжимаемостью (от последней зависит скорость распространения возмущения и отсюда — количество материала, вовлеченного в движение в единицу времени).

При ударе ПВ о сталь или железо (плотность 7,8, тогда как плотность ПВ не выше 2,5) можно считать, что ПВ практи-

чески останавливаются. В этот момент от границы внутрь заряда начинает двигаться ударная волна, останавливающая и сжимающая ПВ. Качественно явление аналогично отражению ударной волны (§ XIX). Количественно имеется некоторая разница, и расчет показывает, что давление ПВ увеличивается ~ вдвое при столкновении детонационной волны с препятствием.

В случае малой плотности ВВ, если можно считать ПВ идеальным газом, во фронте детонационной волны скорость поступательного движения ПВ составляет около 45% скорости детонации, плотность во фронте волны достигает 180% начальной; к тому же на 10% повышается температура по сравнению со средней. Благодаря этому давление повышено в два раза по сравнению со средним давлением \bar{p} или давлением, которое будет развито при медленной адиабатической реакции ВВ в постоянном объеме. Давление это почти утраивается, как показал Измайлов (и достигает, таким образом, 5—6 \bar{p}), при торможении ПВ абсолютно жестким препятствием, поставленным на пути детонационной волны. Однако при взрыве, применяемых на практике ВВ отклонения от идеальности весьма значительны. Отношение скорости движения ПВ к скорости детонации уменьшается. Уменьшается также отношение плотности ПВ во фронте волны к средней плотности ПВ; но вместе с тем уменьшается и сжимаемость ПВ. Равное изменение плотности вызывает большее, чем в идеальном газе, изменение давления, увеличивается скорость звука; удар о препятствие становится более жестким. Отношение давлений: среднего P , максимального в детонационной волне $P_{дет}$, давления отражения детонационной волны от жесткого препятствия $P_{отр}$, найденное для идеального газа, несколько изменяется в плотных ПВ при наличии значительных отклонений от идеальности.

В табл. 5 показаны основные константы для нескольких типичных ПВ: теплота взрыва Q ккал/кг, объем, занимаемый ПВ при нормальных условиях (0°C , 1 атм), V_0 литр/кг; температура ПВ во фронте детонационной волны $T_{ид}$ °К, скорость детонации при малой плотности $D_{ид}$ м/сек, скорость движения ПВ во фронте волны $u_{ид}$ м/сек, вычисленные по теории детонации без учета отклонения от идеальности, начальная плотность ВВ ρ_0 г/см³ или кг/литр, измеренная при этой плотности скорость детонации D м/сек. Отличие D от $D_{ид}$ характеризует отклонение состояния ПВ от идеальности. В следующих столбцах вычислены плотность ПВ ρ и скорость движения ПВ в направлении распространения волны u . $P_{дет}$ есть давление ПВ в детонационной волне, вычисленное с учетом отступления от идеальности и сжатия ПВ в волне. В графе $P_{отр}$ приведено давление, развивающееся при резком торможении ПВ, скорость движения их и состояние определены в предыдущих столбцах.

	Q	V_0	$T_{нд}$	$D_{нд}$	$u_{нд}$	ρ_0
Тротил	1085	685	3630	1930	890	1.59
Нитропентаэритрит . . .	1530	768	5000	2400	1090	1.60
Нитроглицерин	1517	716	5200	2360	1080	1.60
Азид свинца	200 ¹ 325 ²	270 ¹ 230 ²	2800	1250	570	4.70

	D	ρ	u	$\rho_{дет}$	$\rho_{отр}$
Тротил	6900	2.10	1700	190 000	430 000
Нитропентаэритрит . . .	7900	2.12	2000	250 000	560 000
Нитроглицерин	7900	2.12	2000	250 000	560 000
Азид свинца	5890	6.30	1500	400 000	900 000

Основанные на теории детонации расчеты, учитывающие неидеальность ПВ, производили Дотриш, [119], Шмидт [124] и Власов. [3]

Расчеты эти были основаны на предположении применимости к ПВ уравнения состояния

$$p = \frac{RT}{v - b}$$

с постоянным значением b или со значением b , зависящим от удельного объема v (Шмидт). Как указал Ландау, в действительности это уравнение состояния неприменимо при достигаемой в ПВ плотности. Молекулы нельзя считать несжимаемыми. В первом приближении давление ПВ зависит от их плотности (пропорционально кубу плотности), но не от температуры. Расчеты Ландау и Станюковича [107] (1944 г.) показывают, что при этом измеренной скорости детонации отвечает меньший удельный объем и более высокое давление по сравнению с прежними расчетами. Харитон отметил, что уравнение состояния, принятое Ландау, требует затраты значительной части энергии взрыва на сжатие ПВ и температура ПВ при большой начальной плотности ВВ значительно ниже приведенной в таблице $T_{нд}$.

Структура детонационной волны отличается тем, что в момент образования ПВ имеют максимальную плотность, скорость движения и давление; за фронтом волны следует более или менее быстрое торможение и расширение ПВ [8, 108]. Все

¹ Расчет на парообразный свинец.

² Расчет на жидкий свинец.

приведенные значения давлений относились к гребню волны. Сразу после столкновения волны с препятствием, т. е. после того как будет развито огромное давление $p_{отр}$, начинается быстрое падение давления. Ниже, рассматривая импульс давления ВВ, мы увидим, как определяется время падения давления. По порядку величины это время равно $R \cdot 10^{-6}$ сек., если R есть эффективный радиус заряда, выраженный в сантиметрах. Для заряда в 1 кг это время — порядка $5 \cdot 10^{-6}$ сек.

Для расчета времени сопоставим импульс силы с величиной максимального давления. Представим себе заряд в 1 кг

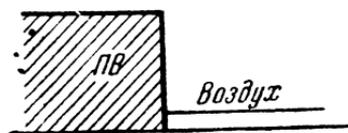


Рис. 57.



Рис. 58

тротила в виде цилиндра диаметром 10 см и высотой 8 см. Площадь основания цилиндра 80 см^2 . Приняв максимальное давление, развивающееся при отражении волны, 430000 атм. , мы получим максимальную силу, действующую на препятствие, на которое этот заряд положен основанием, $3.5 \cdot 10^7 \text{ кг}$. Найденному экспериментально (опыты Кудрявцева, цитирую по Садовскому) значению импульса $100 \text{ кг} \cdot \text{сек}/\text{кг}$ отвечает эффективное время действия вычисленной выше силы $3 \cdot 10^{-6}$ сек. При скорости звука в ПВ порядка $5 \cdot 10^5 \text{ см}/\text{сек}$ (это значение мы находим по измеренной скорости детонации) время, за которое волна разрежения пробегает расстояние 5 см, составляет $10 \cdot 10^{-6}$ сек. Понятно, что в действительности давление спадает постепенно и достигает атмосферного давления за время, значительно большее. Величины $3 \cdot 10^{-6}$ или $10 \cdot 10^{-6}$ сек представляют собой только эффективное значение, т. е. время, в течение которого давление падает несколько раз.

Какова картина движения при выходе детонационной волны на свободную, граничащую с атмосферой поверхность заряда? В момент исчерпания ВВ в соприкосновении оказываются движущиеся накаленные ПВ высокого давления и невозмущенный атмосферный воздух. Поверхность заряда становится поверхностью разрыва давления, разрыва скорости движения и температуры газа (рис. 57). Таким образом, мы имеем дело с задачей, разобранный в § XVI. Вперед, в направлении, в котором распространялась детонационная волна, выбегают расширенные и ускорившиеся ПВ, которые гонят перед собой воздух, сжимая его (рис. 58). Движение границы расширенных ПВ и сжатого воздуха определяется из условия равенства давления по обе стороны этой границы. По сравнению с § XVI новым является только то обстоятельство, что на

поверхности разрыва происходит также изменение химического состава (ПВ — воздух). При распространении разрыва поверхность изменения состава тождественно совпадает с поверхностью разрыва особого рода, на которой происходит изменение температуры и энтропии без изменения давления и скорости движения; все результаты § XVI остаются в силе.

К расчету ударной волны, возникающей на поверхности детонирующего ВВ, приложил теорию распространения произвольного разрыва Эмиль Жуге [120]. Он произвел эти расчеты в связи с опытами Перрота и Гаутропа [122]. Позже тот же вопрос исследовали Л. Д. Ландау и Станюкович [108].

Результаты расчета согласуются с опытными данными, в частности в вопросе о влиянии состава атмосферы, окружающей заряд, на скорость расширения. Достигаемая скорость ударной волны в атмосфере и скорость движения границы ПВ — атмосфера весьма велики и могут превосходить скорость детонации ВВ, с которой они непосредственно не связаны. В соответствии с большой скоростью движения ПВ, сжимающих воздух, в ударной волне развивается давление, высокое по сравнению с атмосферным, но составляющее малую часть начального давления ПВ. Если воздух заключен в виде тонкого слоя между зарядом ВВ и препятствием, то ударная волна, дойдя до поверхности препятствия, отразится и переменит направление распространения. Когда отраженная волна дойдет до границы ПВ — воздух, произойдет частичное ее отражение, частичное прохождение в ПВ и т. д. Воздушный слой между ВВ и препятствием растягивает во времени рост давления, действующего на стенку, и задерживает момент достижения максимального давления. Если бы ПВ способны были оказывать длительное давление, наличие прослойки не изменило бы конечного давления на стенку, так же как мягкая прокладка не уменьшает давления груза на опору. В действительности, структура детонационной волны обуславливает быстрое падение давления, зависящее от выравнивания давления и расширения ПВ в направлении, обратном направлению распространения детонации (т. е. к центру заряда). Зависящая от наличия воздушного промежутка задержка в передаче давления ПВ препятствию приводит к тому, что за время задержки давление ПВ падает и уменьшается максимальное давление, действующее на препятствие. Чрезвычайно резкая зависимость пробивной силы взрыва от расстояния между зарядом и броней хорошо известна практикам.

Наставление для инженерных войск по подрывным работам (Воениздат НКО, 1941) дает следующее правило: на перебивание стального листа необходимо дать вес заряда из расчета 25 г ВВ нормальной мощности на 1 см² перебиваемого сечения; сечение рассчитывается как произведение длины линии, по которой производится перебивание, и толщины листа.

При наличии воздушного промежутка между броней и зарядом или при составной броне из стальных листов с воздушным промежутком „Наставление“ требует добавлять воздушный промежуток к расчетной толщине листа.

Таким образом, если основываться на этом принципе, имеющем, разумеется, приближенный характер, то мы приходим к выводу, что заряд, пробивающий, например, 5-сантиметровый лист при плотном прикосновении, при удалении от брони на 2 см сможет пробить только 3-сантиметровую броню.

Движение носит другой характер, если на некотором расстоянии от заряда расположено тело, размеры которого малы по сравнению с расстоянием от заряда. Такое тело подвергнется сперва действию воздушной ударной волны. Вскоре после отражения ударной волны от поверхности тела ударная волна проходит дальше, огибая тело. Испытываемая телом сила представляет собой после этого сопротивление тела в потоке сжатого ударной волной воздуха и зависит от плотности и скорости движения воздуха и от обтекаемости (величины коэффициента сопротивления) тела. Затем граница раздела ПВ — воздух доходит до тела, и в дальнейшем тело обтекает уже не сжатый воздух, а расширенные ПВ. На границе раздела давление ПВ не отличается от давления воздуха. Как изменится действующая на тело сила? Для ответа на этот вопрос необходимо сравнить плотность ПВ и воздуха.

Расширение ПВ происходит изэнтропически и сопровождается падением температуры ПВ; сжатие воздуха ударной волной по адиабате Гюгонио вызывает рост температуры.

Грубый приближенный расчет, сделанный для тротила (исходные данные см. таблицу), детонирующего в воздухе, дал следующие результаты: скорость движения расширившихся ПВ, равная скорости сжатого воздуха, 4700 м/сек; давление расширенных ПВ и сжатого воздуха 250 атм. При этом температура ПВ падает до 1100° К (830° С), плотность ПВ равна 0.1 г/см³; в воздухе ударная волна распространяется со скоростью 5250 м/сек, температура воздуха достигает 7600° К, плотность равна 0.012 г/см³. Абсолютное значение скорости волны удовлетворительно согласуется с данными Перрота и Гаутропа, зарегистрировавших скорости волны в воздухе 4600 м/сек, в водороде 5560 м/сек в случае более слабого ВВ (плотность 1.32, скорость детонации 4600 м/сек).¹

Отметим, что в результате расширения ПВ происходит инверсия температуры: температура сжатого воздуха оказывается значительно выше температуры соприкасающихся с ним ПВ. Здесь нет противоречия началам термодинамики: происходят лишь процессы изэнтропические (расширение) и сопровождающиеся ростом энтропии (сжатие в ударной

¹ Ср. подстрочное примечание на стр. 163.

волне); не нарушено и первое начало: количество сжимаемого в единицу времени воздуха во много раз меньше количества расширяющихся ПВ.

Молекулярный вес воздуха и ПВ при взрыве органических ВВ мало отличаются друг от друга. При равном давлении плотности находятся в отношении, обратном отношению температур;¹ плотность расширенных ПВ значительно больше плотности сжатого воздуха. Действующая на тело сила возрастает приблизительно пропорционально плотности в тот момент, когда ПВ, расширяясь, достигают тела. Одновременно, как это ни удивительно, возрастает и тепловое воздействие на поверхность тела. Температура ПВ ниже температуры сжатого воздуха, но при сверхзвуковом обтекании следует учитывать одинаково тепловую и кинетическую энергию движущегося газа (см. § IV „температура покоя“).

Скорости движения ПВ и воздуха одинаковы, превращение кинетической энергии в тепловую повышает температуру на одинаковую величину. Таким образом, различие „температуры покоя“ воздуха и ПВ относительно меньше, чем различие истинных температур воздуха и ПВ. В приведенном выше примере, когда истинные температуры воздуха (7600°) и ПВ (1100°) относятся как 7:1, температуры покоя 24 000° (воздух) и 17 000° (ПВ) относятся как 1.4:1.² Интенсивность теплового воздействия зависит не только от температуры газа, окружающего тело, но и от других факторов, определяющих интенсивность теплового потока. В рассматриваемом случае тепловой поток и тепловое воздействие повышаются за счет повышенной в 8 раз плотности ПВ по сравнению с плотностью воздуха.

Опыты, подтверждающие приведенные соображения, произвели Мишель-Леви и Мюраур [121] в 1934—1936 гг. Они исследовали вопрос о природе свечения взрыва кристаллов азидов свинца. Фотографии показывают, что свечение особенно интенсивно в местах столкновения ударных волн. Интенсивность и спектр свечения существенно зависят от атмосферы, окружающей кристаллы; наиболее интенсивное свечение дает аргон, наименее интенсивное — бутан, в соответствии с вели-

¹ В случае взрыва соединений тяжелых металлов (азидов свинца, гремучей ртути) высокий молекулярный вес ПВ дополнительно увеличивает плотность.

² Температура покоя ПВ оказывается выше начальной температуры ПВ (температуры детонации). Это характерно для нестационарной волны разрыва, в которой происходит перераспределение энергии: кинетическая энергия выбегающих вперед ПВ создается частично за счет потенциальной энергии (за счет расширения) более глубоких слоев. Эти соотношения видны на рис. 20, стр. 59 где можно сравнить связь скорости (определяющей кинетическую энергию) и давления (определяющего потенциальную энергию) для стационарного истечения в сопле, при котором сумма энтальпии и кинетической энергии постоянна, и для нестационарного расширения.

чиной теплоемкости. При данном составе газа (аргон) увеличение давления уменьшает интенсивность свечения в соответствии с изменением амплитуды ударной волны. Особенно изящна работа, в которой металл (барий) вводился в ВВ и в газ; при подмешивании соединений бария в заряд азида в спектре свечения линии бария не обнаруживаются. В других опытах барий был введен в газовую фазу путем сжигания перед опытом малого количества пиротехнического состава, дающего мелкодисперсный, медленно оседающий дым, содержащий окись и карбонат бария. В последнем случае при взрыве спектр свечения изобилует линиями бария; наряду с возбужденными атомами бария, спектр обнаруживает присутствие возбужденных ионов бария и напоминает в этом отношении искровой, а не дуговой спектр. В совокупности опыты Мишель-Леви и Мюраура показывают, что в атмосфере, окружающей ВВ, при взрыве возникают ударные волны большой амплитуды, нагревающие газ до огромных температур, во много раз превышающих температуру ПВ. Температуры особенно высоки благодаря малой теплоемкости аргона. С такой концепцией согласуются все наблюдаемые факты.

Жуге [120] в упомянутой теоретической работе сравнивает распространение ударных волн взрыва в газах различного молекулярного веса (в водороде, воздухе и углекислоте). Скорость волн, вызываемых в различных средах, находится в соотношении, которое хорошо согласуется с опытом; прямой расчет абсолютных значений Жуге не производит, избегая таким образом вопросов теории детонации ВВ и состояния ПВ большой плотности. Вместо этого Жуге пользуется для характеристики состояния ПВ скоростью волны в воздухе и отсюда вычисляет скорость волн в других средах.

Власов [3] идет значительно дальше и, преодолев трудности, зависящие от неидеальности, вычисляет параметры ударной волны в воздухе и скорость ее в хорошем согласии с опытом (нитроманнит: вычислено Власовым 6100 м/сек, наблюдается Бюрло 6430 м/сек).¹ Для характеристики состояния ПВ Власов пользуется измеренной скоростью детонации.

Здесь необходимо также отметить весьма интересные и полные расчеты картины движения у поверхности ВВ, сделанные А. А. Грибом и содержащиеся в его диссертации [102] [Ленинградский горный институт, 1940 г.]. Задача решена в предположении о распределении давления и движении, отвечающих

¹ В изложении Власова отражены неправильные представления о возможности скачкообразных волн разрежения. К счастью, эта неправильность практически не отражается на численных результатах. Не учтено также сделанное позже замечание Ландау [107, 108] о виде уравнения состояния.

Примечание при корректуре: расчеты Ландау и Станюковича [108] дают для тротила скорость движения ПВ и воздуха 7800 м/сек, давление ударной волны 750 кг/см², температуру ПВ 1200° К.

мгновенной химической реакции всего ВВ — конденсированного или газообразного.

Остановимся в заключение на второй возможности интерпретации импульса взрывчатого вещества. Согласно упомянутым выше измерениям, заряд весом m кг, положенный на поверхность, при взрыве развивает импульс силы $I = 100 m$ кг. сек. Согласно § XVIII, такой импульс отвечает среднему значению компоненты скорости ПВ, нормальной поверхности $\bar{u}_n = 100 g = 1000$ м/сек.

Импульс силы оказывается в 2—3 раза меньше импульса силы, который был бы развит при организованном истечении ПВ из лавалевского сопла реактивного аппарата, при котором все ПВ движутся в одном направлении. Не трудно видеть, что при взрыве открытого заряда в действительности ПВ равномерно расширяются во все стороны полусферы; обозначив среднюю скорость в радиальном направлении \bar{u}_r , найдем $u_n = 2\bar{u}_r = 2000$ м/сек; половина импульса теряется в результате расширения ПВ не только в направлении, нормальном стенке, но и в стороны.

§ XXIV. Законы распространения взрывной волны на большом расстоянии от заряда

В § XXIII мы рассматривали явления, происходящие в непосредственной близости к заряду. При этом в количественных оценках мы пользовались тем, что теория детонации определяет состояние ПВ во фронте детонационной волны независимо от формы заряда, расположения детонатора и тому подобных факторов. Все эти факторы весьма существенны для возникающего распределения давления; однако благодаря тому, что скорость детонации как раз равна скорости распространения возмущения по ПВ, эти факторы не влияют на скорость детонации и на состояние во фронте.

Однако вскоре после первого прикосновения ПВ и воздуха (или разрушаемого материала) на характер движения окажет влияние распределение давления в более глубоких слоях ПВ; определение картины движения в этой стадии требует весьма трудоемких и сложных расчетов, тем менее привлекательных, что результат будет различен для каждого конкретного случая.

Только в следующей стадии можно ожидать, что на достаточном расстоянии от заряда зависимость от конкретной геометрии взрыва сгладится и выработается в процессе распространения определенная форма ударной волны, зависящая только от общего количества взорванного вещества, но не от конкретных особенностей данного заряда, таких, как положение детонатора или наличие оболочки, или форма заряда,

крайне существенных на близком расстоянии. Условие, необходимое для образования такой установившейся формы волны, заключается в том, чтобы в движение было вовлечено количество воздуха, по крайней мере в несколько раз превышающее заряд ВВ.

При передаче энергии ПВ ближайшему слою воздуха, от этого слоя следующему и т. д. в несколько приемов произойдет освобождение волны от специфических для данного заряда особенностей. Чем же определяются свойства движения? Можно ожидать существования двух предельных областей в соответствии с упрощениями, которые испытывают законы теории ударной волны в двух предельных случаях: 1) мощных ударных волн, $p \gg p_0$, и 2) слабых ударных волн $p - p_0 \ll p_0$, приближающихся по свойствам к звуку (см. § III).

В первом случае, согласно Ландау, мы перейдем к пределу, пренебрегая p_0 по сравнению с p . Очевидно, что при этом мы одновременно имеем право пренебречь и начальной температурой и энергией воздуха по сравнению с температурой и энергией его после сжатия ударной волной. В таком приближении распределение давления и температуры меняется с течением времени, оставаясь подобным самому себе.

Предельные законы мощных ударных волн предусматривают постоянное отношение между кинетической и тепловой энергией сжатого вещества. Постоянна во время движения полная энергия всего вовлеченного в движение количества вещества: в сделанных пренебрежениях вовлечение новых слоев воздуха не сопровождается заметным увеличением полной энергии, отсчитанной от абсолютного нуля температуры.

Средняя плотность энергии падает обратно пропорционально охваченному волной объему, т. е. обратно пропорционально третьей степени пройденного волной пути. При подобии распределения в том же отношении падают и локальные значения плотности энергии. По законам идеального газа постоянной теплоемкости, давление зависит только от плотности энергии ε , но не от плотности вещества ρ

$$P = \frac{RT}{v} = \rho RT = (k-1)\rho c_v T = (k-1)\varepsilon, \quad (\text{XXIV-1})$$

где R — газовая постоянная, ниже R — радиус заряда, r — расстояние от центра заряда.

Таким образом, в указанном предельном случае Ландау приходит к простым формулам

$$\bar{p} = \frac{(k-1)CM_1}{4\pi/3 \cdot r^3}; \quad M = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \rho_0; \quad T = \frac{QM_1}{c_p M} \approx T_{вз.} \cdot \frac{M_1}{M}, \quad (\text{XXIV-2})$$

где \bar{p} , \bar{T} — среднее давление и температура, Q — теплота взрыва ВВ, M_1 — масса заряда, M — масса воздуха, вовлеченного в дви-

жение, ρ_0 — начальная плотность воздуха. Однако в действительности вряд ли есть область, в которой этот предельный закон выполняется сколько-нибудь строго, для этого нужно было бы одновременное выполнение двух условий:

$$\frac{M}{M_1} \gg 1; \quad \frac{\bar{T}}{T_0} \gg 1. \quad (\text{XXIV-3})$$

Согласно приведенным выше формулам

$$\frac{M}{M_1} \cdot \frac{\bar{T}}{T_0} = \frac{T_{\text{взр}}}{T_0}. \quad (\text{XXIV-4})$$

Однако для ПВ и воздуха комнатной температуры отношение $\frac{T_{\text{взр}}}{T_0}$ не превышает 10—15; весь интервал от $\frac{M}{M_1} = 0$ до $\frac{\bar{T}}{T_0} = 2$ мы проходим при изменении радиуса взрывной волны в 2—2.5 раза.

В действительности при малых r мы должны учитывать влияние начального распределения давления и плотности в ПВ.

Отношение $\frac{M}{M_1}$ (массы вовлеченного в движение воздуха к массе ПВ) достигает единицы при значении $\frac{r}{\sqrt[3]{M}} = 0.6 \frac{\text{м}}{\sqrt[3]{\text{кг}}}$,

т. е. на расстоянии, равном 11 радиусам заряда. Эта же величина дает расстояние прямого действия ПВ на препятствие. Однако уже при значении $\frac{r}{\sqrt[3]{M}} = 1.5$, на расстоянии, равном 27 радиу-

сам заряда, количество тепла, внесенное вовлеченным в движение воздухом, сравнивается с энергией взрыва (все цифры приведены для типичных ВВ).

Среднее давление в этот момент вдвое больше рассчитанного по предельной формуле, предусматривающей падение p обратно пропорционально r^3 ; дальше расхождение увеличивается. Власов [3] считает, что хорошо согласуется с экспериментальными данными формула для давления на препятствие, нормальное направлению распространения волны,

$$p_{\text{max}} = 250\,000 \left(\frac{r}{R}\right)^{-2.6} = 120 \frac{M^{0.87}}{r^{2.6}} \left(\text{м, кг, } \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}\right), \quad (\text{XXIV-5})$$

которую он применяет для всего интервала от $\frac{r}{R} = 1$ (давление на тело, находящееся в контакте с ВВ) до $\frac{r}{R} = 100$. Теоретический вывод этой формулы нельзя считать убедитель-

ным. Описание единой формулой весьма различных процессов, зависящих от различных факторов (неидеальность ПВ при $\frac{r}{R}$, близком к 1, действие ПВ при $\frac{r}{R}$ до 10, мощная ударная волна при $\frac{r}{R}$ от 10 до 100), невероятно. Следует заметить, что в интервале между вычисленным значением при $\frac{r}{R} = 1$ и систематическими измерениями, начинающимися с $\frac{r}{R} \geq 15$, имеется лишь одна экспериментальная точка.

Таким образом, если рассматривать формулу Власова как эмпирическую, то нельзя ее считать проверенной во всем интервале, для которого она рекомендована. Вместе с тем следует признать, что в том интервале, в котором имеются измерения, согласие их с формулой Власова удовлетворительно, что обуславливает ее рабочую практическую ценность.

Перейдем к рассмотрению второго предельного случая — распространения взрывной волны на значительном расстоянии от заряда, там, где ее амплитуда мала. В пределе законы распространения должны, очевидно, совпасть с акустическими законами, с которыми мы уже познакомились в начале книги (§ III). Акустические законы предусматривают распространение волны с амплитудой, постоянной в линейном случае и падающей, как $\frac{1}{r}$, в сферическом случае, но без изменения ширины волны и ее формы; следовательно, акустические законы не могут служить для определения формы и ширины волны даже в первом приближении. Поэтому в дальнейшем нам придется особое внимание обратить именно на отклонения от акустических законов, уменьшающиеся по мере падения амплитуды, и на экспериментальные данные об амплитуде и форме взрывных волн.

На рис. 59 представлены заимствованные из доклада Бернала [101] кривые изменения давления со временем на различных расстояниях от заряда взрывчатого вещества. Мы отметим, что невозмущенный воздух вначале подвергается резкому сжатию, за которым следует падение давления, проходящего через минимум и возвращающегося к атмосферному. Очевидно, что мгновенное распределение давления в пространстве напоминает кривые изменения давления со временем, причем длительность 2—3 миллисекунды отвечает ширине волны около 1 м.

Итак, фронт взрывной волны, передняя ее часть, представляет собой ударную волну, за которой следует волна разрежения. Чтобы предвидеть закон изменения взрывной волны, вспомним кинематические и термодинамические соотношения между ударной волной и непрерывной волной разрежения.

В непрерывной волне, в которой соседние состояния отличаются бесконечно мало, каждое состояние распространяется в пространстве со скоростью, равной сумме скорости звука и скорости движения вещества.

Скорость распространения ударной волны меньше суммы скоростей движения и звука в веществе, сжатом волной

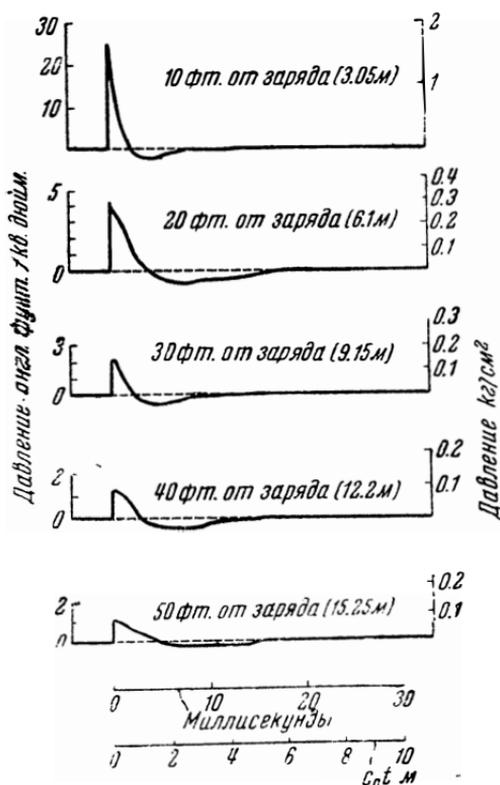


Рис. 59.

и находящемся внутри охваченной движением области; падение давления внутри области, через которую волна прошла, передается поверхности ударной волны и ослабляет волну; поэтому амплитуда ударной волны падает быстрее, чем падает амплитуда слабой звуковой волны.

Другая особенность рассматриваемого здесь распространения ударной волны заключается в изменении энтропии при ударном сжатии. Вследствие этого, после прохождения волны воздух не возвращается в состояние, тождественное начальному (до возмущения) состоянию.

В акустической волне энергия волнового движения полностью передается от слоев, ранее подвергавшихся возмущению, тем слоям, которые вовлекаются в движение по мере распро-

странения волны. В случае ударной волны часть энергии волнового движения навсегда застревает в тех слоях, через которые волна прошла, необратимо расходуясь на их нагревание. Это обстоятельство обуславливает постепенное уменьшение энергии волнового движения в случае ударной волны и вызывает падение амплитуды ударной волны в условиях, в которых амплитуда акустической волны постоянна или усиливает падение амплитуды ударной волны по сравнению с акустической в тех условиях, в которых амплитуда акустической волны падает.

Наконец, необходимость расширения волны конечной амплитуды видна непосредственно.

Будем называть „волной“ как и прежде, всю область, охваченную возмущением, в которой отличны от нуля скорость движения и избыточное (против атмосферного) давление. Передний по направлению распространения край волны представляет собой ударную волну, сжимающую воздух; скорость такой волны больше скорости звука в невозмущенном воздухе. Задний край волны представляет собой либо непрерывную (как на рис. 59), либо ударную волну, возвращающую газ в исходное состояние.¹ Скорость распространения заднего края равна или меньше скорости звука в воздухе в исходном состоянии. Следовательно, передний край волны движется быстрее заднего, обуславливая с течением времени увеличение расстояния от переднего до заднего края, т. е. увеличение ширины волны.

В § XI мы особенно подробно и в общем виде доказали взаимную связь трех указанных особенностей: того, что скорость ударной волны больше скорости звука в начальном состоянии; того, что скорость ударной волны меньше скорости звука в сжатом газе; того, что прохождение ударной волны сопровождается ростом энтропии, т. е. необратимым превращением энергии в тепловую энергию.

Ввиду тесной связи всех этих особенностей, естественно, что использование любой из них для определения закона изменения амплитуды и ширины волны по мере ее распространения приводит к тождественным результатам.

Перед рассмотрением сферического распространения, интересующего нас в связи с теорией действия взрывчатых веществ, рассмотрим более простой линейный случай.

Линейное (одномерное) движение осуществляется при движении газа в прямой трубе постоянного сечения; мы пренебрегаем при его рассмотрении потерями, зависящими от взаимодействия газа с боковыми стенками трубки.

Крюссар [118] в 1913 г. первый установил предельный закон такого движения.

¹ Точнее, в состояние, отличающееся от исходного лишь на величины, пропорциональные при малой амплитуде кубу амплитуды вследствие изменения энтропии при сжатии в волне.

Рассмотрим, следуя Крюгсару, волну треугольной формы, показанную на рис. 60. С течением времени расстояние между каждой парой точек a , b , отвечающих различным давлениям, увеличивается, так как скорость распространения (равная сумме скорости движения газа и скорости звука) растет с ростом давления: в целом волна представляет собой совокупность ударной волны $У$, в которой происходит быстрое сжатие, и следующей за ней волны разрежения $УП$, в которой давление газа падает.

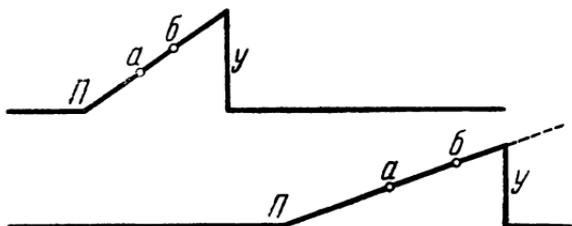


Рис. 60.

Напишем уравнение распространения состояния a

$$x_a = x_{a0} + (c_a + u_a) t. \quad (\text{XXIV-6})$$

По законам акустики

$$c = c_0 \left(1 + \frac{k-1}{2k} \frac{\Delta p}{p_0} \right); \quad u = c_0 \frac{1}{k} \frac{\Delta p}{p_0}; \quad (\text{XXIV-7})$$

обозначив $\frac{\Delta p}{p_0} = \pi$, найдем

$$x_a = x_{a0} + c_0 t + \frac{k+1}{2k} c_0 \pi t. \quad (\text{XXIV-8})$$

Если в начальный момент имело место линейное распределение давления в зависимости от координаты, то оно останется линейным и позже.¹

$$t = 0, x > x_{00}, \pi = \frac{1}{\alpha} (x - x_{00}); \quad x < x_{00}, \pi = 0; \quad (\text{XXIV-9})$$

$$x(t, t) = x_0(\pi) + c_0 t + \frac{k+1}{2k} c_0 \pi t = x_{00} + \alpha \pi + c_0 t + \frac{k+1}{2k} c_0 \pi t; \quad (\text{XXIV-10})$$

$$\pi = \frac{x - x_{00} - c_0 t}{\alpha + \frac{k+1}{2k} c_0 t}. \quad (\text{XXIV-11})$$

Задавшись начальным линейным распределением (XXIV-9) в момент $t = 0$, мы получим в произвольный момент t также линейное распределение давления (XXIV-11).

Скорость движения ударной волны D , амплитуду которой обозначим π^* равна среднему арифметическому c_0 и скорости распространения $c + u$ состояния, получающегося после сжатия до давления π^* .

¹ Легко убедиться, что любое начальное распределение с постоянным знаком $dp/dx > 0$ монотонно приближается к линейному с течением времени, так как возрастает линейный в давлении член пропорциональный $c_0 \pi$.

$$D = \frac{c_0 + (c + u)}{2} = c_0 \frac{1 + 1 + \frac{k+1}{2k} \pi^*}{2} = c_0 \left(1 + \frac{k+1}{4k} \pi^* \right). \quad (\text{XXIV-12})$$

Составим выражение изменения амплитуды ударной волны по мере распространения

$$\frac{d\pi^*}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial t} + D \frac{\partial \pi}{\partial x}. \quad (\text{XXIV-13})$$

Выражение это отлично от нуля за счет того, что D отлично от $c + u$. Воспользовавшись выражением $\pi(x, t)$, XXIV-11), найдем

$$\frac{d\pi^*}{dt} = -\frac{k+1}{4k} c_0 \frac{\pi^*}{x + \frac{k+1}{2k} c_0 t}, \quad (\text{XXIV-14})$$

$$\ln \pi^* = -\frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{k+1}{2k} c_0 t \right) + \text{const}, \quad (\text{XXIV-15})$$

$$\pi^* = \frac{A}{\sqrt{x + \frac{k+1}{2k} c_0 t}}, \quad (\text{XXIV-16})$$

где A — постоянная интегрирования, зависит от начальных условий.

Зная связь между τ, x, t , найдем ширину волны Δx , т. е. расстояние от точки, в которой в данный момент $\pi = 0$, до точки, в которой достигается давление ударной волны π^*

$$\Delta x = x(\tau^*) - x(0) = A \sqrt{\alpha + \frac{k+1}{2k} c_0 t}. \quad (\text{XXIV-17})$$

Таким способом Крюссар установил, что в одномерном случае амплитуда ударной волны падает по мере распространения, как $1/\sqrt{t}$, ширина волны растет пропорционально \sqrt{t} .¹ В оригинальной работе Крюссара, выполненной в 1912—1913 гг., содержится также анализ, показывающий, что найденный закон относится к случаю малой амплитуды, т. е. является предельным законом при большом времени распространения.

В 1938 г. Шмушкевич [115] вывел тот же закон следующим образом. Задавись тем, что распределение давления в волне остается подобным по мере распространения — по крайней мере в пределе, при большом t , после того как волна проделала большой путь, — Шмушкевич составляет уравнение скорости изменения ширины волны Δx и сопоставляет его с уравнением постоянства количества движения волны

$$\frac{d\Delta x}{dt} = D - c_0 = \frac{k+1}{4k} c_0 \pi^*, \quad (\text{XXIV-18})$$

$$\Delta x \cdot \rho \cdot \dot{u} = \Delta x \cdot \pi^* \cdot \text{const} = \text{const}. \quad (\text{XXIV-19})$$

¹ Мы упростили зависимость, считая $\frac{k+1}{2k} c_0 t$ большим по сравнению с x или соответствующим образом изменяя момент начала отсчета времени.

При составлении второго уравнения (количества движения) мы используем известную из акустики линейную связь между скоростью движения и давлением и далее используем предположение о том, что распределение остается подобным самому себе, так что $\bar{\pi} = \text{const} \cdot \pi^*$. Выписанные выше два уравнения легко решаются

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \frac{k+1}{4k} \cdot c_0 \cdot \tau = B \cdot \frac{1}{\Delta x}, \quad (\text{XXIV-20})$$

$$(\Delta x)^2 = 2Bt + \text{const},$$

$$\Delta x = B_1 \sqrt{t + B_2}, \quad \tau^* = \frac{B_3}{\sqrt{t + B_2}}, \quad (\text{XXIV-21})$$

где B, B_1, B_2, B_3 — константы.

Как Крюссар, так и Шмушкевич используют предположение о том, что после прохождения волны вещество возвращается в исходное состояние, с начальной скоростью звука c_0 и начальным давлением $p = p_0, \pi = 0$. При этом мы отбрасываем зависящие от изменения энтропии эффекты, которые пропорциональны кубу амплитуды; пренебрежение это допустимо, поскольку мы рассматриваем уравнения, содержащие большие члены.

В предположениях Шмушкевича мы можем, вместо изменения ширины волны, рассматривать изменение ее свободной энергии ε , зависящее от превращения энергии в тепловую, т. е. от роста энтропии, пропорционального τ^{*3} ,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} (\text{const} \cdot \tau^{*3} \cdot \Delta x) = -\text{const} \cdot \tau^{*3} \quad (\text{XXIV-22})$$

$$\text{const} \cdot \tau^* \cdot \Delta x = \text{const}, \quad (\text{XXIV-19})$$

откуда находим

$$\frac{d\tau^*}{dt} = -B\tau^{*3}. \quad (\text{XXIV-23})$$

Интегрирование (XXIV-23) даст результат, тождественный формулам (XXIV-21).

Итак, при использовании различных свойств ударной волны, того, что скорость $D < c + u$ (Крюссар), того, что $D > c_0$ (Шмушкевич), и роста энтропии в волне, мы получили одинаковый предельный закон; этот результат зависит от внутренней связи перечисленных свойств волны (см. § XI).

Экспериментальное исследование одномерного распространения ударной волны было произведено Вейем [86] и позже Вотье [123], опыты которых кратко описаны в § XV.

Значительно сложнее вопрос о предельных (для больших расстояний) законах распространения сферических волн, который особенно интересен для теории фугасного действия взрывчатых веществ.

Рассмотрение сферических ударных волн мы начнем с напоминания о свойствах сферических акустических волн.

Основная особенность последних — уменьшение амплитуды обратно пропорционально расстоянию от центра симметрии. Это уменьшение амплитуды не связано с уменьшением общего запаса звуковой энергии; уменьшение амплитуды зависит

от того, что по мере распространения сферической волны растет пропорционально объему сферического слоя количество вещества, вовлеченное в движение.

Вторая особенность сферических волн заключается в том, что за волной сжатия с необходимостью следует волна разрежения. Если в начальный момент вокруг центра находилось сжатое вещество (рис. 61а), расширение его дает начало волне сжатия, за которой следует волна разрежения (рис. 61б, ABC и CDE); при этом мы имеем две области нарастания давления (AB и DE) и одну область понижения давления (BCD).

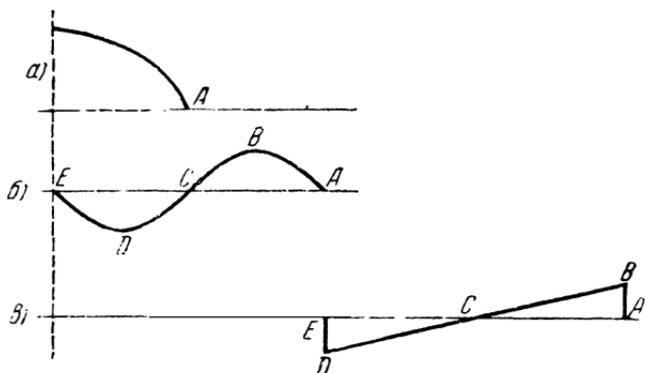


Рис. 61.

Зависимость скорости распространения от амплитуды вызовет уменьшение расстояний AB и DE и увеличение расстояния BD ; Ландау [128] отмечает, что в пределе, по истечении достаточного времени (и после прохождения достаточно длинного пути) волна примет форму, показанную на нижнем рисунке 61в с двумя ударными волнами AB и DE .

С момента образования ударной волны дальнейшее распространение сопровождается диссипацией звуковой энергии, превращением ее в тепловую; амплитуда максимального давления падает быстрее, чем раньше, быстрее, чем по закону $\frac{1}{r}$.

Подойдем к нахождению количественных закономерностей, созная акустическую формулу § III

$$\pi = \frac{\mu (r - c_0 t)}{r} \quad (\text{XXIV-24})$$

в качестве нулевого приближения. В следующем приближении, вместо c_0 , мы подставим скорость распространения $s + u$, соответствующую данному состоянию. Найдём, как меняется расстояние между парой точек, напри-

мер m и n , которым отвечают определенные значения μ_m и μ_n по мере распространения волны

$$\begin{aligned} \frac{dr_{mn}}{dt} &= (c+u)_m - (c+u)_n = c_0 \left(1 + \frac{k+1}{2k} \frac{\mu_m}{r}\right) - c_0 \left(1 + \frac{k+1}{2k} \frac{\mu_n}{r}\right) = \\ &= c_0 \frac{k+1}{2k} \frac{\mu_m - \mu_n}{r}, \end{aligned} \quad (\text{XXVI-25})$$

$$\frac{dr_{mn}}{dr} = \frac{1}{c_0} \frac{dr_{mn}}{dt} = \frac{k+1}{2k} \frac{\mu_m - \mu_n}{r}, \quad (\text{XXIV-26})$$

$$r_{mn} = r_{mn0} + \frac{k+1}{2k} (\mu_m - \mu_n) \ln \frac{r}{r_0}. \quad (\text{XXIV-27})^1$$

Рассмотрим отрезок AB , отождествляя $m = A$, $n = B$, так как $\mu_B > \mu_A$; отрезок AB сокращается по мере движения волны; на расстоянии r , таком, что

$$\ln \frac{r}{r_0} = \frac{r_{AB0}}{\mu_B - \mu_A} \frac{2k}{k+1}, \quad (\text{XXIV-28})$$

длина отрезка r_{AB} обращается в нуль, т. е. образуется ударная волна. То же относится и к DE .

Напротив, длина участка BCD , на котором происходит падение давления, растягивается по мере распространения, так что производная $\partial\mu/\partial r$ уменьшается с ростом t и с ростом r ,

$$\frac{\partial\mu}{\partial r} = \frac{\mu_n - \mu_m}{r_{nm}} = \frac{1}{a + \frac{k+1}{2k} \ln r}, \quad (\text{XXIV-29})$$

где

$$a = \left(\frac{\partial\mu}{\partial r}\right)_0^{-1} = \frac{k+1}{2k} \ln r_0.$$

Рассмотрим теперь закон изменения амплитуды ударной волны. Величина μ^* во фронте ударной волны падает потому, что скорость распространения ударной волны меньше скорости распространения состояния с постоянным значением μ . Аналогично расчету одномерного случая, найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\mu^*}{dt} &= -(c+u-D) \frac{\partial\mu}{\partial r}, \\ c_0 \frac{d\mu^*}{dr} &= -\frac{k+1}{4k} c_0 \frac{\mu^*}{r} \cdot \frac{1}{a + \frac{k+1}{2k} \ln r}. \end{aligned} \quad (\text{XXIV-30})$$

¹ При выводе (XXIV-27) в выражении (XXIV-25) мы приняли простую связь $c+u$ и μ , пренебрегая членами $\sim r^{-2}$. В формуле (XXIV-26) мы заменили $c+u$ на c_0 , считая амплитуду малой.

Уравнение легко интегрируется:

$$\left. \begin{aligned} \mu^* &= \frac{\text{const}}{\sqrt{a + \frac{k+1}{2k} \ln r}}, \\ \pi^* &= \frac{\mu^*}{r} = \frac{\text{const}}{r \sqrt{a + \frac{k+1}{2k} \ln r}}. \end{aligned} \right\} \text{(XXIV-31)}$$

Сравнивая результат с одномерным распространением, отметим любопытную формальную аналогию: зависимость π от x в одномерном случае имеет такой же вид, как и зависимость $\mu = \pi r$ от $\ln r$ в сферическом случае.

Расчеты для сферического случая приводят к выводам:

1. Специфическое для ударной волны добавочное падение амплитуды оказывается на большом расстоянии весьма слабым, как $(\ln r)^{-1/2}$, по сравнению с акустическим падением (r^{-1}).

2. Установление предельной формы волны, к которой она стремится при $r \rightarrow \infty$, происходит тогда, когда становится достаточно большим $\ln r$. Это требование гораздо сильнее, чем условие, чтобы r было велико. Большое значение $\ln r$ может достигаться при столь больших r , при которых абсолютное значение амплитуды волны станет настолько малым, что ее распространение уже не представляет интереса; в игру могут быть при большом времени распространения вовлечены новые факторы.

Поэтому использование предельных законов требует большой осторожности; в большей мере, чем в других случаях, приходится основываться на опытных данных, несмотря на их неполноту.

На рис. 59 стр. 168 были приведены кривые изменения давления со временем, измеренные на различном расстоянии от места взрыва. Эти кривые заимствованы из статьи известного английского физика Берналя „Физика воздушных налетов“, опубликованной в 1941 г. [101]. Наряду с британскими мерами оригинала справа мы даем метрические шкалы. Переход от кривых $\pi(t)$ при $r = \text{const}$ к мгновенному распределению давления в пространстве $\pi(r)$ при $t = \text{const}$ довольно сложен, так как скорость распространения и амплитуда не постоянны.

Для того чтобы дать некоторое приблизительное представление о толщине слоя, охваченного в каждый данный момент возмущением, кроме шкалы времени, приводим шкалу $c_0 t$ произведения времени на скорость звука c_0 в невозмущенном воздухе.

Что же можно почерпнуть из рис. 59? Опыт подтверждает существование волны разрежения, следующей за волной сжатия. На большом удалении произведение средней амплитуды

на ширину волны разрежения приближается к такой же величине волны сжатия. Импульс силы, действующей за большой промежуток времени (0.015—0.020 сек., как видно из чертежа), представляет собою разность действия волны сжатия и направленного в противоположную сторону действия волны разрежения. Поэтому оказывается, что импульс силы падает быстрее, чем амплитуда волны.

В теоретической части, следуя Ландау, мы установили, что предельная форма волны отличается двумя скачками давления — спереди и сзади (см. рис. 60*в*). Кривые Бернала не показывают образования скачка давления сзади. По форме последней части волны разрежения мы предвычислим то расстояние, на котором должен образоваться скачок.

Выберем для расчета кривую с хорошо выраженной волной разрежения, записанную на расстоянии 20 футов от заряда (вторая сверху, рис. 59).

При $r_0 = 6$ м минимум давления составляет $p_{\min} = -0.04$, расстояние точки минимума давления m от точки n , в которой восстанавливается давление, составляет около $r_{\min} = 3$ м.

$$\mu_m = -0.04 \cdot 6 = -0.24, \mu_n = 0.$$

$$r_{\min} = r_{\min 0} + \frac{k+1}{2k} (\mu_m - \mu_n) \ln \frac{r}{r_0} = 3 - \frac{6}{7} \cdot 0.24 \ln \frac{r}{r_0}. \quad (\text{XIV-32})$$

Полагая $r_{\min} = 0$, найдем расстояние r образования скачка:

$$\ln \frac{r}{r_0} = \frac{3 \cdot 7}{0.24 \cdot 6} = 14.5; \quad r = r_0 \cdot e^{14.5} = 12 \cdot 10^6 \text{ м.}$$

Предельную форму волна примет на расстоянии 12000 км. Понятно, что в этом случае все относящиеся к предельной форме утверждения не имеют никакой реальной ценности. Расчет приводит к выводу, что в сферическом распространении формирование ударной волны за счет зависимости скорости распространения от амплитуды происходит весьма медленно. Передняя ударная волна, в которой давление скачком поднимается до максимального значения, не формируется таким путем, а образуется сразу в момент, когда заканчивается детонация заряда взрывчатого вещества и происходит соприкосновение продуктов взрыва с воздухом; в этот момент (на расстоянии от центра, равном радиусу заряда, около 6 см для заряда, к которому относится рис. 59) амплитуда ее достигает огромных значений (см. § XXIII); при последующем распространении амплитуда падает, но нарастание давления сохраняет характер ударной волны.

По вопросу об амплитуде давления в ударной волне, сопровождающей взрыв, имеется обширная экспериментальная литература. Однако следует с осторожностью использовать старые данные, так как для правильного измерения быстро изменяющегося давления необходимы достаточно безинерционные приборы.

В большинстве случаев воспринимающая давление поверхность прибора устанавливалась навстречу направлению распространения волны; доходя до поверхности, волна отражалась. Пиковое (максимальное) давление при этом растет в два раза для слабых волн и более сильно при большой амплитуде (см. § XIX). Обработывая данные многих авторов, Власов вывел зависимость

$$p_m = p_0 + 2.4 \frac{\sqrt[3]{M}}{r} = p_0 + 44 \frac{R}{r^3}, \quad (\text{XXIV-33})$$

где p_m — давление, развивающееся при отражении взрывной волны,

p_0 — атмосферное давление,

r — расстояние от центра взрыва, выраженное в метрах,

R — эффективный радиус заряда (в м), M — вес заряда (в кг); формула справедлива для ВВ типа тротила, другие ВВ, значительно отличающиеся по мощности, требуют введения поправок.

Власов ограничивает применимость формулы условием $r > 85R$, $r > 4.4 \sqrt[3]{M}$ (зависимость сильнее формулы (XXIV-33) при меньших расстояниях). Садовский дает для всего исследованного им интервала следующее выражение максимального давления:

$$p_m = p_0 + 12 \frac{\sqrt[3]{M}}{r} - 22 \frac{\sqrt[3]{M^2}}{r^2} + 147 \frac{M}{r^3}. \quad (\text{XXIV-34})$$

Таким образом, на больших расстояниях формула Садовского¹ дает в 5 раз большее значение амплитуды давления по сравнению с формулой Власова: коэффициент при старшем члене 12, вместо 2.4. К выяснению действительного значения амплитуды мы привлекли прежде всего данные Бернала (табл. 6).

В первых четырех столбцах приведены данные опытов Бернала; по измеренному им максимальному давлению p_1 , считанному с графиков, давление p_m вычислено по формуле отражения ударной волны (XIX-2). Как видно из таблицы, начиная с $p_1 - p_0 \leq 0.15$, практически $p_m - p_0 = 2(p_1 - p_0)$.

¹ Примечание при корректуре: формула была сообщена М. А. Садовским в докладе 1942 г.; позже он установил [127], что все коэффициенты должны быть уменьшены в 1.92 раза.

Таблица 6

r, фут	$\frac{r}{\sqrt[3]{M}}$, $\frac{m}{\sqrt[3]{кг}}$	Берналь		Власов	Садовский
		$p_1 - p_0$	$p_m - p_0$	$p_m - p_0$	
10	3.05	1.8	6.9	—	6.7
20	6.10	0.3	0.70	0.40	1.9
30	9.45	0.15	0.30	0.25	1.20
40	12.60	0.09	0.18	0.19	0.90
50	15.75	0.08	0.16	0.15	0.70

При больших расстояниях подтверждается именно формула Власова.

Нельзя ли предположить, что зарегистрированные Садовским высокие давления длятся весьма кратковременно, вследствие чего другими авторами и другими способами они не регистрируются? Наилучшей проверкой такого предположения является сопоставление со скоростью распространения ударной волны, однозначно зависящей от амплитуды (табл. 7).

Таблица 7

$r/\sqrt[3]{M}$	Скорость волны		
	Садовский	Берналь	эксперимент [113]
4.3	482	470	—
8.6	414	364	379
12.9	390	354	357

Задаваясь определенной зависимостью давления от расстояния, можно найти значения скорости в каждой точке; вычисление средней скорости требовало бы более сложного расчета. В таблице эти значения сопоставлены с заимствованными у Савича [113] экспериментальными данными французских исследователей, определявших скорость волн. Сопоставление также неблагоприятно для формулы (XXIV—34).

Заметим, наконец, что предположение об остром пике давления противоречит теоретическим представлениям: такой пик должен был бы подвергнуться весьма быстрому ослаблению и расширению. По кривым Бернала мы можем определить скорость изменения давления после ударного сжатия и отсюда — закон изменения амплитуды самой ударной волны.

Если для расстояний 10—40—200 м (при заряде в 1 кг) истинный закон падения амплитуды аппроксимировать степенной функцией $\pi = \text{const} \cdot r^{-\nu}$, то значение показателя ν в этих

пределах падает от 1.4 до 1.25; при большом расстоянии простая формула $\pi = \text{const} \cdot r^{-1}$ дает удовлетворительное приближение к истинному закону.

В § XXI отмечено, что длительность действия давления взрывной волны пропорциональна линейному размеру (например радиусу) заряда; величину размерности времени мы получим, составляя отношение радиуса заряда к скорости звука R/c_0 .

Данные Бернала показывают, что время действия волны сжатия τ составляет от 0.003 до 0.005 сек., тогда как $\frac{R}{c_0}$ для его заряда равно $\frac{0.06}{330} = 0.0002''$; таким образом, безразмерное

отношение $\tau: \frac{R}{c_0}$ колеблется от 15 до 25 и заметно отличается от 1. Большая длительность и соответственно большая пространственная протяженность взрывной волны вполне естественны. Ширина волны и длительность действия сохраняются при распространении слабой акустической волны. Мы имели бы $\tau: \frac{R}{c_0} \approx 1$ в том случае, если бы начальное возмущение можно было считать слабым, т. е. если бы изменение давления в области, занятой взрывчатым веществом, было мало.

В действительности в первых стадиях распространения амплитуда давления огромна, акустическое приближение совершенно непригодно. Приблизненно правильным его можно считать, лишь начиная с того момента, когда среднее давление в охваченной возмущением области падает до 1 атм. Для обычных ВВ объем такой области достигает 10 м^3 на 1 кг, чему отвечает радиус $R' = 1.35 \sqrt[3]{M}$ (м, кг); радиус R' области, в которой среднее давление равно 1 атм (2 ата), в 22 раза больше радиуса заряда. В согласии с нашими представлениями величина $\tau: \frac{R'}{c_0}$ действительно порядка 1.

Вследствие большой ширины и длительности волны импульс давления, действующего на поверхность тела, нормальную волне, чрезвычайно сильно зависит от условий отражения волны и обтекания тела воздухом, приведенным в движение волной. Повидимому, этим объясняются значительные противоречия в экспериментальной литературе по этому вопросу.

Кривые Бернала позволяют найти, хотя бы с малой точностью, к. п. д. превращения энергии ВВ в энергию взрывной волны. Энергия волны состоит из двух частей — кинетической энергии движения воздуха и потенциальной энергии, равной работе изменения давления воздуха. Очевидно, что как сжатие, так и разрежение воздуха, находившегося под атмосферным давлением, требует затраты энергии и увеличивает потенциальную энергию системы.

Полная энергия единицы объема равна приближенно $25 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2$ ккал/м³; расчет для распределения, отвечающего кривым Бернала, дает к. п. д. около 30—40%; при этом энергии волны сжатия и волны разрежения относятся приблизительно, как 3 : 1.

Таким образом, энергия взрывчатого вещества превращается в энергию взрывной волны и переносится на расстояние, в сотни и тысячи раз превышающее размер заряда ВВ с к. п. д. того же порядка, что и к. п. д. превращения энергии пороха в энергию движения снаряда в орудии или энергии горения топлива в механическую энергию в двигателе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Р. Н. — см. Франкль [27].
2. Беляев А. Ф. Отражение и столкновение ударных волн. Сборник работ по теории взрывчатых веществ, Оборонгиз, 1940.
3. Власов О. Е. Взрывные волны, Воен.-инж. акад., Москва, 1937.
4. Газовая динамика. Сборник докладов, ГОНТИ, 1939.
5. Дюренд В. Ф. Аэродинамика. ГИЗОборонпром, 1939.
6. Жуковский В. С. Измерение температуры газового потока при больших скоростях. Журн. техн. физики, 8, 1938, 1938.
7. Жуковский Н. Е. О движении воды в открытом канале и о движении газов в трубах. Труды ЦАГИ, вып. 1, 1925.
8. Зельдович Я. Б. К теории распространения детонации в газах. Журн. exper. теор. физики, 10, 550, 1940; 12, 389, 1942.
9. Зельдович Я. Б. и Щелкин К. И. Применение теории распространения произвольного разрыва. Журн. exper. теор. физики, 10, 569, 1940.
10. Кибель И. А. Стационарная температура пластинки в сверхзвуковом потоке. Доклады Акад. Наук СССР, 25, 275, 1938.
11. Кибель И. А. и Франкль Ф. И. О прямолинейных движениях газа. Булл. ЦАГИ, № 52.
12. Кибель И. А. — см. Розе Н. В. [23], глава 2, „Теоретические основы газовой динамики“.
13. Константинов Б. П. Поглощение звука при отражении. Журн. техн. физики, 9, 226, 1939.
14. Кочин Н. Е. — см. Розе Н. В. [23].
15. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Статистическая физика. ОНТИ, 1938.
16. Леонтович М. Замечания к теории поглощения звука в газах. Журн. exper. теор. физики, 6, 561, 1936.
17. Леонтович М. и Мандельштам Л. И. К теории поглощения звука в жидкостях. (О втором коэффициенте вязкости.) Журн. exper. теор. физики, 7, 438, 1937.
18. Лифшиц Е. — см. Ландау Л. Д. [15].
19. Макколл — см. Тэйлор Дж. И. [24].
20. Мандельштам Л. И. см. Леонтович М. [17].
21. Пешль Т., Эвальд П. и Прандтль Л. Физика упругих и жидких тел. ГТТИ, 1933.
22. Прандтль Л. — см. Пешль Т. [21], главы 4, 5, 6 [гидростатика, гидравлика, гидродинамика].
23. Розе Н. В., Кибель И. А. и Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика, ч. II, ОНТИ, 1937.
24. Тэйлор Дж. И. и Макколл — см. Дюренд [5], т. III, глава „Механика сжимаемой жидкости“.
25. Тэйлор Дж. И. — см [4], стр. 29.
26. Франкль Ф. И. Сверхзвуковые течения осевой симметрии. Изв. Артилл. акад., № 6, стр. 91, 1934.

27. Франкль Ф. И., Христианович С. А. и Алексеева Р. Н. Основы газовой динамики. Учебник; [Подробная библиография]. Труды ЦАГИ, № 364, Москва, 1939
28. Франкль Ф. И. — см. Кибель И. А. [11]
29. Фок В. А. Принципиальное значение приближенных методов в физике. Успехи физич. наук, **16**, 1070, 1936.
30. Христианович С. А. — см. Франкль Ф. И. [27].
31. Широков М. Ф. Влияние теплоты трения на процессы передачи тепла при больших скоростях потока. Изв. Всес. Теплотехн. инст. № 9, стр. 26—30, 1935.
32. Шелкин К. И. — см. Зельдович Я. Б. [9].
33. Эвальд П. — см. Пешль Т. [21].
34. Эйхенвальд А. Акустические волны большой амплитуды. Успехи физич. наук, **14**, 552, 1934.
35. Ackeret J. Handb. der Physik, Bd. VII, 1927. [Газовая динамика].
36. Airy. Philos. Magaz., (3), **34**, 401, 1849. [Звук большой амплитуды].
37. Bechert K. Ann. der Physik, (5) **37**, 89, 1940; **38**, 1, 1940; **39**, 169, 1941. [Движение газа большой амплитуды без разрывов.]
38. Becker R. ZS. f. Physik, **8**, 326, 1920. [Теория ударной и детонационной волны.]
39. Busemann A. Handb. der Experimentalphysik, Bd. IV. T. 1, 1934. [Газовая динамика.]
40. Busemann A. ZS. V. D. I., **84**, 857, 1940. [Сопло Лавала.]
41. Busemann A. ZS. Angew. Math., Mech., **8**, 419, 1928. [Сверхзвуковой поток в цилиндрической трубе.]
42. Busemann A. ZS. Angew. Math. Mech., **9**, 496, 1929. [Сверхзвуковое обтекание острого конуса.]
43. Cagniard A. Ann. de Physique, **13**, 239, 1940. [Возникновение ударной волны в вязкой среде. Распространение движений в вязкой среде.]
44. Cranz C. u. Schardin H. ZS. f. Physik, **56**, 170, 1929. [Фотографирование сверхзвукового обтекания; ударная волна при втекании газа в эвакуированную трубку.]
45. Crussard L. Bull. de la Soc. de l'industrie Minérale de St. Étienne, **6**, 25—71, 1907. [Ударные и детонационные волны.]
46. Duhem P. Cours d'Hydrodynamique. 1900. [Курс гидродинамики.]
47. Duhem P. Comptes Rendues, **141**, 811, 1905; **142**, 324, 377, 431, 612, 750, 1906; **144**, 179, 1907. [К теории ударных волн.]
48. Duhem P. ZS. Physikal. Chemie, **69**, 169, 1909. [Теория ударных волн.]
49. Earnshaw Reverend Samuel. Philos. Trans., **150**, 133, 1858. [Математическая теория звука.]
50. Einstein A. Sitzungsber. Berliner Akad. der Wissensch., стр. 380, 1920. [Теория распространения звука в среде с химической реакцией.]
51. Fanno. Дипломная работа Techn. Hochschule, 1904. [Течение газа в трубах.]
52. Fay K. D. Journ. Acoust. Society America, **3**, 223, 1931. [Появление дополнительных частот при распространении интенсивного звука в воздухе.]
53. Ghiron E. F. Alta Frequenza, **4**, 530, 1930. [Дополнительные частоты при распространении звука.]
54. Hadamard J. Leçons sur la propagation des ondes. Paris, 1908. [Теория распространения волн.]
55. Hadamard J. Comptes Rendues, **141**, 712, 1905. [Замечания о теореме Демпленна.]
56. Hugoniot H. Journ. école Polytechn., **57**, 1887; **58**, 1889. [О распространении движения в телах (теория ударных волн и волн разрежения).]
57. Jenkins R. T. — см. Thuras A. L. [94].

58. Jouguet E. Comptes Rendues; **138**, 786 и 1085, 1904. [Термодинамическая теория ударной волны.]
59. Jouguet E. Journ. de Mathem., **6**, 5, 1904. [Теория ударных и детонационных волн.]
60. Jouguet E. Mécanique des Explosifs. Paris, 1917. [Механика взрывчатых веществ.]
61. Kirchhoff. Poggendorff's Annalen, **134**, 177, 1868. [Поглощение звука.]
62. Kneser H. O. Ann. der Physik, **11**, 761 и 777, 1931. [Дисперсия звука в многоатомных газах.]
63. Kögler — см. Mach E. [68].
64. Kottchine N. Rendiconti del Circolo Mat. de Palermo, **50**, 1926. [Теория ударных волн и распространения произвольного разрыва.]
65. Langweiler. ZS. techn. Physik, **19**, 416, 1938. [О скорости вылетающей пули.]
66. Mach E. u. Woszka. Sitzber. Wiener. Akad., **72**, 1875. [Экспериментальное исследование ударных волн.]
67. Mach E. u. Sommer. Там же, **75**, 101, 1877.
68. Mach E., Tumlriz u. Kögler. Там же, **77**, 1878.
69. Mach E. Там же, **77**, 819, 1878.
70. Mayer-Schuchardt C. Forschungsheft V. D. I., № 376, 13, 1936. [Колебания газа в трубе, появление разрывов при большой амплитуде.]
71. Meyer Th. Forschungsheft V. D. I., № 62, 1908. [Сверхзвуковое обтекание тупого угла плоскопараллельным потоком.]
72. O. Neil H. T. — см. Thuras A. L. [94].
73. Preiswerk E. Mitteil. Inst. Aerodynam., № 7, Zürich, 1938. [Применение газодинамических методов к течениям воды со свободной поверхностью.]
74. Pohlhausen. ZS. Angew. Math. Mech., **1**, 115, 1921. [Теплообмен в потоке большой скорости.]
75. Poisson. Journ. Ecole Polytechn., **7**, 319, 1820. [Уравнения движения газа большой амплитуды.]
76. Prandtl L. ZS. f. d. gesamte Turbinenwesen, 1906. [К теории ударной волны, толщина фронта.]
77. Prandtl L. Physik. Zeitschr., **8**, 23, 1907. [Сверхзвуковое обтекание; струи со сверхзвуковой скоростью.]
78. Rankine. Philos. Trans., **160**, 277, 1870. [Волны конечной амплитуды в воздухе. Термодинамическая теория.]
79. Rayleigh. Proc. Roy. Soc., **84**, 247, 1910. [Волны конечной амплитуды: толщина фронта, ударные волны при сверхзвуковом обтекании.]
80. Richards W. T. Rev. of Modern Physics, **11**, 40, 1939. [Ультразвуковые явления — обзор с подробной библиографией.]
81. Riemann B. Abhandl. d. Gesellsch. d. Wissensch. in Göttingen. Math.-Phys. Klasse, **8**, 43, 1860. Gesammelte Werke, стр. 144, 1876. [Распространение плоских воздушных волн конечной амплитуды. Первая работа по теории ударных волн.]
82. Rosicky. Sitzungsber. Wiener Akad., **73**, 1876. [Экспериментальное исследование ударных волн; одна из работ школы Маха; ср. [65—68].]
83. Rüdenberg. Artill. Monatshefte, 1916. [Давление ударной волны на преграду.]
84. Scharadin. Physikal. Zeitschrift, **34**, 50, 1933. [Нестационарное истечение газа в вакуум.]
85. Scharadin. Deutsche Jägerzeitung, 1933. [Предельная скорость снаряда в огнестрельном оружии.]
86. Scharadin — см. Cranz C. [44].
87. Schmidt E. ZS. V. D. I., **79**, 671, 1935 и Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung, № 9, 1939 (доклад на конференции в мае 1939 г., помещенный в сборнике „Физические и химические процессы при горении в моторе“). [Колебания газа в трубе, появление разрывов при большой амплитуде.]

88. Sommer — см. Mach E. [67].
89. Stodola. Dampf- u. Gasturbinen, 1925. [Курс паровых и газовых турбин; в первых главах — техническая термодинамика, гидродинамика и газодинамика.]
90. Stokes G. G. Transact. Cambridge Philosoph. Soc., 8, 297, 1845. [О поглощении звука.]
91. Stokes G. G. Philosoph. Magaz. (4), 1, 305, 1851. [Поглощение звука.]
92. Stokes G. G. Philosoph. Magaz. (3), 33, 349, 1848. [Звуковые волны большой амплитуды; изменение формы по мере распространения.]
93. Taylor G. I. Proc. Roy. Soc., 84, 371, 1910. [Теория ударной волны; толщина фронта.]
94. Thuras A. L., Jenkins R. T. a. O'Neil H. T. Journ. Acoust. Soc. America, 6, 173, 1933. [Дополнительные частоты при распространении интенсивного звука в воздухе.]
95. Tumlriz — см. Mach E. [68].
96. Vieille. Mém. des poudres et salpêtres, 10, 177, 1899/1900. [Экспериментальное исследование ударных волн в трубах.]
97. Weber H. Riemann — Weber, Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, Bd. II, изд. 1919 и 1925. [Курс математической физики, глава об уравнениях газодинамики.]
98. Wozzka — см. Mach E. [66].
99. Zemplen. Comptes Rendues, 141, 712, 1905; 142, 142, 1906. [О невозможности ударных волн разрежения.]
100. Zener. Phys. Rev., 53, 90, 1938 и 56, 343, 1939 (Внутреннее трение в металлах, роль термоэластических явлений).
101. Берналь. Физика воздушн. налетов. Успехи физических наук, 26, 169, 1944.
102. Гриб А. А. О распространении плоской ударной волны при обыкновенном взрыве у твердой стенки. Прикладная математика и механика 8, 169, 1944.
103. Зельдович Я. Б. Теория горения и детонации газов. Ленинград, изд-во Академии Наук, 1944.
104. Зельдович Я. Б. и Лейпунский О. И. Исследование химических реакций в ударных волнах. Acta Physicochimica USSR 18, 167, 1943. Достижение рекордных температур в ударной волне. Journal of Physics (USSR) 7, № 5, 1943.
105. Зельдович Я. Б. и Харитон Ю. Б. Научно-исследовательские работы химических институтов Академии Наук за 1941—1943 гг. Академическое Издательство, в печати.
106. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГТТИ, 1944.
107. Ландау Л. Д. и Станюкович К. П. Об изучении детонации конденсированных взрывчатых веществ. Доклады Академии Наук, 46, 399, 1945.
108. Ландау Л. Д. и Станюкович К. П. Определение скорости истечения продуктов детонации конденсированных взрывчатых веществ. Доклады Академии Наук, 47, 273, 1945.
109. Покровский Г. И. Исследование удара и взрыва в деформируемых средах. Издание ВИА, 1937.
110. Покровский Г. И. Направленное действие взрыва. Воениздат, 1942.
111. Руа М. О полезном действии и условиях применения ракетных аппаратов. ОЧТИ, 1933.
112. Серебряков М. Е., Гретен и Оппоков. Внутренняя баллистика Оборонгиз, 1939.
113. Савиц. Динамика взрывных волн. Изд. ВИА, Москва, 1941.
114. Эсклангон. Акустика орудий и снарядов. Ленинград, ВТА РККА, 1929.
115. Шмускевич. Предельный закон ослабления плоской ударной волны. Журнал технической физики, 8, 2168, 1938.

116. Харитон Ю. Б. и Розинг В. О. критическом диаметре при детонации. Доклады Академии Наук 26, 360. 1940.
117. Bollé Zs. techn. Phys. 7, 126, 1926. Ударные волны в каналах и шахтах.
118. Crussard. Compt Rend. 156, 447, 611, 1913. Затухание плоской ударной волны.
119. Dautriche, Compt. Rend. 154 1221, 1912. Влияние коволюма на скорость детонации.
120. Jouguet. Compt. Rend. 202, 1225, 1320, 1936. О волнах у поверхности ВВ.
121. Michel. Levy et Muraour Compt. Rend. 198, 825, 1499, 1760, 2091, 1934. Свечение газа в ударных волнах при взрыве.
122. Perrotta. Gawthor. Journ. Frankl. Inst. 208, 643, 1929. Ударные волны у поверхности ВВ. Экспериментальное исследование.
123. Vautier. Compt Rend. 179, 256, 1924. Затухание ударных волн в трубке.
124. Schmidt. A. Zs. Ges. Schiess. u. Sprw. 30, 1935 и 31, 1936. Ряд статей по теории детонации конденсированных ВВ.
125. Зельдович Я. Б. и Лейпунский О. И. Журн. Эксп. Теор. Физики. 13, 183, 1943.
126. Wallmanh Ann. d. Physik 21, 676, 1934,
127. Садовский М. А. Труды Сейсмического Института Академии Наук, 116, 1945.
128. Ландау Л. Д. Прик. Мат. Мех., 9, 286, 1945.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение		3
§ I. Уравнения газовой динамики		7
§ II. Начала акустики; скорость звука		15
§ III. Истечение газа через насадки и сопла		32
§ IV. Свойства сверхзвукового потока		40
§ V. Течение газа в длинной цилиндрической трубе		46
§ VI. Движения, зависящие от отношения координат ко времени		52
§ VII. Теория ударной волны. Введение		61
§ VIII. Адиабата Гюгонио. Вывод ее из уравнений сохранения		62
§ IX. Свойства адиабаты Гюгонио. Ударные волны в воздухе и в воде		67
§ X. История вопроса об ударной волне		73
§ XI. Графические методы трактовки теории ударных волн. Волны вблизи критической точки		77
§ XII. Структура фронта ударной волны		87
§ XIII. Распространение ударных волн в газе с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы		94
§ XIV. Возникновение ударной волны		98
§ XV. Ударная волна в колебаниях большой амплитуды		105
§ XVI. Распространение произвольного разрыва		109
§ XVII. Обтекание тела при сверхзвуковой скорости		120
§ XVIII. Теория реактивной силы		127
§ XIX. Отражение ударной волны		138
§ XX. Действие взрывчатых веществ. Введение		142
§ XXI. Подобие взрыва и распространения взрывных волн		146
§ XXII. Моделирование и подобие разрушений, производимых ударной волной		152
§ XXIII. Явления в непосредственной близости с зарядом		156
§ XXIV. Законы распространения взрывной волны на большом расстоянии от заряда		164
Литература		181

Я. Е. ЗЕЛЬДОВИЧ — ТЕОРИЯ УДАРНЫХ ВОЛН
И ВВЕДЕНИЕ В ГАЗОДИНАМИКУ

*

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

*

Технический редактор *Е. Н. Самкина*
Корректор *Ф. М. Снеирова*

*

РИСО АН СССР № 2357. А-05729. Издат. № 218.
Тип. заказ № 838. Подписано к печати 7/VI 1946 г.
Формат бум. 60X92¹/₁₆. Печ. л. 11.75. Уч.-издат. л. 15.25.
Тираж 5000.

Ля Типография Издательства Академии Наук СССР.
Ленинград, Вас. Остр., 9 линия, 12

ИСПРАВЛЕНИЯ

<i>Страница</i>	<i>Строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>
14	Ф-ла (I-22)	$p = p_{ст}(\rho, E) + \xi \operatorname{div} u$	$p = p_{ст}(\rho, E) - \xi \operatorname{div} u$
14	Ф-ла (I-23а)	$\xi = 3\eta' - 2\eta$	$-3\xi = 3\eta' - 2\eta$
54	Ф-ла (VI-5)	$\rightarrow (u - \xi) \rho \frac{du}{d\xi} = -\frac{dp}{d\xi}$	$\rightarrow (u - \xi) \rho \frac{du}{d\xi} = -\frac{dp}{d\xi}$

Я. Б. Зельдович. Теория ударных волн
и введение в газодинамику

Цена 12 руб. 50 коп.