

Ernst Suter

Methode der Festpunkte

Dr.-Ing. Ernst Suter†

Die Methode der Festpunkte

zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktionen
mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis
insbesondere ausgeführten Eisenbetontragwerken

Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage

bearbeitet von

O. Baumann und **F. Häusler**

Dipl.-Ing.

Dipl.-Ing.

In zwei Bänden

Mit 656 Figuren im Text
und auf 19 Tafeln



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1932

ISBN 978-3-642-89226-4

ISBN 978-3-642-91082-1 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-91082-1

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1932 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1932
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1932

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Werk bildet die zweite Auflage der im Jahre 1916 im Buchhandel erschienenen Dissertation des Verfassers: „Berechnung des kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Pfeilern, sowie Berechnung des mehrfachen Rahmens mit geradem Balken nach der Methode der Festpunkte“. Während in der genannten Arbeit nur die Berechnung des kontinuierlichen Balkens auf senkrecht zu ihm stehenden Säulen gezeigt wurde, so wird im vorliegenden Werk die Berechnung sämtlicher statisch unbestimmter Konstruktionen, insbesondere des allgemeinen Falles mit beliebig gerichteten Stäben, des Stockwerkrahmens mit beliebig gerichteten Stäben und des Rahmens mit bogenförmigen Stäben nach der Methode der Festpunkte behandelt; aus diesem Grunde mußte der Titel des Werkes eine allgemeine Fassung erhalten.

Die Grundlage aller entwickelten Berechnungsverfahren bilden die Festpunkte (Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, III. Band), die ihrerseits mit Hilfe der Sätze von Mohr abgeleitet sind. Bei allen Ableitungen ist vor allem der Vorstellung durch die geometrische Darstellung der Formänderungen Rechnung getragen, womit dem in der Praxis stehenden Ingenieur am besten gedient ist. Wegen ihrer Übersichtlichkeit ist die Methode der Festpunkte unter den Ingenieuren mit Recht sehr beliebt; nun um so mehr, als die Methode auf alle Tragwerke, seien die Stäbe geradlinig oder bogenförmig, recht- oder schiefwinklig zueinander, in gleicher und einheitlicher Weise angewendet werden kann, wie dies im vorliegenden Werk gezeigt wird.

Das Werk zerfällt in 3 Teile und einen kurzen Anhang.

Der I. Teil entwickelt die Berechnung des Tragwerks mit unverschiebbaren Knotenpunkten, der II. Teil diejenige des Tragwerks mit verschiebbaren Knotenpunkten. Ein Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten, seien seine Stäbe geradlinig oder bogenförmig, recht- oder schiefwinklig zueinander, wird zu seiner Berechnung — und zwar nicht nur bei äußerer Belastung, sondern auch bei Temperaturänderung des Baumaterials, Senkung eines Auflagers und Längenänderungen der Stäbe infolge der Normalkräfte — zuerst durch Anbringung gedachter Lager in ein solches mit unverschiebbaren Knotenpunkten verwandelt und nach dem I. Teil behandelt (Rechnungsabschnitt I). In den gedachten Lagern treten sog. Festhaltungskräfte (Reaktionen) auf, welche die Knotenpunkte verhindern, sich zu verschieben. Entfernen wir diese gedachten Lager, so treten die sog. Verschiebungskräfte (umgekehrte Festhaltungskräfte) in Tätigkeit, welche das Tragwerk noch verschieben und daher zusätzliche innere Kräfte in demselben hervorrufen, die nach dem II. Teil bestimmt werden

(Rechnungsabschnitt II). Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir darauf die endgültigen Momente am Tragwerk und aus ihnen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte.

Der III. Teil enthält 20 Beispiele aus der Praxis, insbesondere ausgeführte Eisenbetontragwerke. Großes Gewicht wurde darauf gelegt, von jeder Konstruktionsgattung ein Beispiel vorzuführen, damit der Ingenieur bei seinen Projektierungsarbeiten für jeden Hauptfall eine Wegleitung besitzt. Die Beispiele sind in der Hauptsache Ausführungen der Akt.-Ges. Wayß & Freytag in Neustadt a. d. Haardt, wo der Verfasser viele Jahre als Oberingenieur tätig war.

Im Anhang sind die im I. und II. Teil abgeleiteten Hauptformeln zusammengestellt, und ferner Tabellen zur raschen Ermittlung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte des Balkens mit beidseitiger und einseitiger geradliniger und parabolischer Voute, sowie des symmetrischen Parabelbogens mit vom Scheitel zu den Kämpfern zunehmendem Querschnitt enthalten.

Schon beim ersten Blick wird man erkennen, daß das Werk sehr ausführlich gehalten ist und zu seinem Studium keine besonderen Vorkenntnisse verlangt, so daß auch der in Statik weniger Geübte sich mit der Methode der Festpunkte vertraut machen kann.

Baden-Schweiz, im Frühjahr 1921.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

In der vorliegenden zweiten Auflage wurde der Stoff der seit längerer Zeit vergriffenen ersten Auflage in zwei Bänden dargestellt. Der erste Band umfaßt die Theorie der Methode und der zweite die Praxisbeispiele.

In der neuen Gestalt des Werkes wurde der theoretische Teil als vollständige Darstellung der Methode ausgearbeitet, unabhängig von den Ausführungen des praktischen Teiles. Diese Neuerung bedingte einige Ergänzungen der frühern theoretischen Abschnitte, zu denen sich andere Erweiterungen hinzufügen, die den Bedürfnissen der Praxis entgegenkommen möchten. Die wesentlichsten Neuerungen des ersten Teiles bestehen in der ausführlicheren Darstellung der Grenzwerteermittlung und deren wichtigsten Hilfsmittels, der Einflußlinien.

Eine wichtige Erweiterung erfuhr Kap. IV des II. Abschnittes durch die Einführung des Gaußschen Algorithmus als Lösungsmethode der Gleichungssysteme.

Der zweite Band enthält fünf neue Beispiele, welche eine Reihe von Problemen behandeln, die in der ersten Auflage nicht berührt waren. Unter den neu eingeführten Beispielen sind die Nummern 16 und 16a nach einem Projekt bearbeitet, während alle andern Ausführungen betreffen, die sich bereits im Betrieb bewährt haben.

Zur leichtern Handhabung des Buches wurde dem Anhang des ersten Bandes eine Zusammenstellung der wichtigsten darin vorkommenden Zeichnungen beigelegt. Am Schluß des zweiten Bandes befindet sich ein

alphabetisch geordnetes Inhaltsverzeichnis aller in den Beispielen besonders ausführlich behandelten Teilprobleme der Methode. Am Anfang des Buches sind die Systemskizzen der bearbeiteten Praxisbeispiele eingefügt. Aus diesen wird ersichtlich sein, daß fast alle heute üblichen Konstruktionselemente, für deren Berechnung unsere Methode in Frage kommt, in irgendeiner Form berührt worden sind.

Im ganzen Werk wurden die Momentenflächen der graphischen Darstellungen so konstruiert, daß ihre positiven Anteile auf der einen und die negativen auf der andern Seite der Stabachse erscheinen. Im zweiten Band wurde von dieser Regel dort abgewichen, wo dadurch gegenüber der gewohnten Methode keine größere Übersichtlichkeit gewonnen wird, also bei Tragwerken, deren Stäbe in einer einzigen Geraden liegen.

Um den alten Umfang des Werkes nicht zu sehr zu überschreiten, machten die Erweiterungen einige Kürzungen der früheren Fassung nötig, die sich im ersten Band auf Stellen beziehen, die aus der allgemeinen Statik bekannt sind oder Wiederholungen darstellen. Im zweiten Band wurden vier alte Beispiele weggelassen, deren Probleme, wenn auch in abgewandelter Form, in den übrigen enthalten und behandelt sind.

Der Verfasser, Herr Dr. E. Suter, wurde leider von der begonnenen Neubearbeitung seines Werkes durch den Tod hinweggeholt.

Die Weiterführung der Bearbeitung des ersten Bandes wurde dem Erstunterzeichneten anvertraut, der von Anfang an von Herrn Dr. Suter zur Mithilfe an der Umarbeitung zugezogen worden war. Da er dabei die Absichten des Verfassers genau kennenlernte, konnte er die begonnene Arbeit ganz in diesem Sinne zu Ende führen.

Auch der Zweitunterzeichnete, der die Neubearbeitung des zweiten Bandes (Praxisbeispiele) übernahm, hielt sich ganz an die Absichten des Verfassers, soweit sie ihm aus schriftlichen Aufzeichnungen bekannt wurden und aus Äußerungen während seiner Mitarbeiterschaft in dem Büro des Herrn Dr. Suter in dessen letzten zwei Lebensjahren.

Es mögen hier noch einige Gedanken folgen, die der leider zu früh Dahingegangene — wenn gelegentliche Aussprüche richtig verstanden worden sind — in sich getragen haben mag.

Die Festpunktmethode bietet nicht nur den Vorteil, daß sie die Lösung hochgradig statisch unbestimmter Systeme ermöglicht, ohne daß man sich in verwirrende abstrakte Berechnungen stürzen muß, sondern sie wirkt erziehend auf denjenigen zurück, der sich ihrer bedient. Dadurch, daß man sich beim Arbeiten nach dieser Methode nie von der Anschauung losreißt, bleibt man immer mit der Wirklichkeit des Stoffes verbunden, den man gestalten will, und dadurch, daß für jeden gemachten Schritt Proben vorhanden sind, erzeugt sich beim Arbeiten jene unbedingte Sicherheit, die allein ein stoff- und sinngerechtes, das heißt zugleich ein im wahren Sinn ökonomisches, Bemessen und Formen ermöglicht.

Soll sich wieder einmal eine wahrhaft künstlerische Architektur herausbilden, so kann sie nur von Menschen ausgehen, die den Kräfteverlauf im Innern der Bauglieder genau kennen und in seinem Sinne die äußeren Formen zu gestalten vermögen. Es gibt aber kaum eine bessere Methode, sich in den innern Kraftverlauf komplizierter architektonischer Gebilde einzuleben, als die

Arbeit nach der Festpunktmethode. Da diese einfach und durchsichtig ist, so kann sie auch ohne weiteres von den Architekten und von architektonisch interessierten Ingenieuren, die weder Zeit noch Lust für das Aneignen weitläufiger mathematischer Kenntnisse haben, studiert und angewendet werden. Kann das vorliegende Werk in dem angedeuteten Sinne dienen, so wird es dadurch zum würdigsten Denkmal für das Schaffen Dr. Suters werden, der in seinem Wesen nicht nur ein ausgebildetes, klares technisches Denken trug, sondern auch eine tiefe Sehnsucht nach Schönheit.

Baden (Schweiz) und Venedig, April 1932.

Dipl.-Ing. Oskar Baumann

Dipl.-Ing. F. Häusler.

Inhaltsverzeichnis zum ersten Band.

	Seite
Einleitung	1
Erster Abschnitt.	
Berechnung des Tragwerks mit unverschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte.	
I. Gang der Berechnung am Tragwerk mit nur geradlinigen Stäben. . .	12
II. Rechnerische Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmasse. . .	17
1. Bezeichnungen.	18
2. Momentenverlauf.	21
3. Festpunktabstände a und b	22
4. Drehwinkel ε^a und ε^b	24
5. Verteilungsmasse μ	25
6. Einfache Drehwinkel τ	28
7. Festpunkte und Verteilungsmasse am „offenen“ Tragwerk.	29
8. Festpunkte und Verteilungsmasse am „einseitig offenen“ Tragwerk.	32
9. Festpunkte und Verteilungsmasse am „geschlossenen“ Tragwerk	34
10. Sonderfälle	35
a) Der durchlaufende Balken auf frei drehbaren Stützen	35
b) Das einfache geschlossene Tragwerk.	36
c) Der durchlaufende Balken mit unendlich vielen Feldern	38
III. Graphische Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmasse. . .	39
1. Drittellinien	40
2. Verschränkte Drittellinien.	43
3. Linker Festpunkt J_1	46
4. Linke Festpunkte J_2, J_3 und J_4	48
5. Rechte Festpunkte K_4, K_3, K_2 und K_1	51
6. Konstruktion der Festpunkte der Balkenfelder 1, 2, 3, 4	52
7. Festpunkte J und K an den Pfeilern	56
8. Verteilungsmasse am durchlaufenden Balkentragwerk der Abb. 76	60
9. Festpunkte und Verteilungsmasse an allgemeinen Tragwerken	64
a) Offenes Tragwerk	64
b) Geschlossenes Tragwerk	68
10. Sonderfälle	69
a) Konstantes, jedoch von Öffnung zu Öffnung sprungweise veränderliches Trägheitsmoment	69
b) Konstantes Trägheitsmoment auf die ganze Länge	72
IV. Bestimmung von Drehwinkeln und Verschiebungen (Ableitung der Sätze von Mohr)	73
1. Drehwinkel α^a und α^b	77
2. Drehwinkel β	79
3. Bestimmung von Verschiebungen an statisch unbestimmten Tragwerken.	80
4. Annahme der Trägheitsmomente	83

	Seite
V. Bestimmung der Momente infolge beliebiger Belastung des Tragwerks	83
1. Entwicklung des allgemeinen Ausdruckes für die Kreuzlinienabschnitte.	84
a) Analytisch	84
b) Graphisch	87
2. Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment	91
a) Einzellast	92
b) Gruppe von Einzellasten	94
c) Stetige Belastung	94
d) Konsolbelastung	95
3. Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei konstantem Trägheitsmoment (Formeln für die wichtigsten Belastungsfälle)	96
a) Einzellast	96
b) Gruppe von Einzellasten	97
c) Stetige Belastung	99
d) Konsolbelastung	104
4. Bestimmung der Momentenfläche am ganzen Tragwerk.	107
a) Allgemein offenes Tragwerk	107
b) Durchlaufender Balken auf elastisch drehbaren Stützen	109
c) Geschlossener Rechteckrahmen	112
d) Der statisch unbestimmte Balken mit einer Öffnung.	116
e) Der frei aufliegende durchlaufende Träger	118
5. Grenzwerte der Momente	119
a) Gleichmäßig verteilte Last	119
b) Bewegliche Einzellasten.	122
6. Analytische Bestimmung der an einem Knotenpunkt angreifenden Momente	127
7. Schlußfolgerungen.	133
VI. Bestimmung der Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte an einem beliebigen Tragwerk	133
1. Querkräfte	134
a) Analytisch	134
b) Graphisch	137
c) Grenzwerte	139
2. Normalkräfte	143
3. Fundamentkräfte	144
VII. Bestimmung der Festhaltungskraft	145
1. Einstöckiger Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben	146
a) Erste Lösung	146
b) Zweite Lösung	150
2. Mehrstöckiger Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.	152
3. Rahmenträger mit beliebig gerichteten Stäben.	155
4. Beispiele (Nr. 1—16)	156
VIII. Bestimmung der innern Kräfte an einem Tragwerk mit bogenförmigen Stäben	177
1. Gang der Berechnung	177
2. Bestimmung der Festpunkte des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes	181
3. Bestimmung der Kämpfermomente infolge beliebiger Belastung des elastisch eingespannten Stabes	182
4. Bestimmung der Drehwinkel β , α^a , α^b , φ^a und φ^b am Zweiggelenkbogen.	184
a) Der unsymmetrische Zweiggelenkbogen	188
b) Der symmetrische Zweiggelenkbogen	198
5. Bestimmung der Drehwinkel ε^a und ε^b der beiden Widerlager eines bogenförmigen Stabes	201

	Seite
6. Bestimmung der Verteilungsmasse μ	203
7. Bestimmung der einfachen Bogendrehwinkel τ	204
8. Bestimmung der Momente, Normalkräfte und Querkräfte am Tragwerk mit bogenförmigen Stäben	205
a) Bogenschub H und Auflagerdrücke V^l und V^r	205
b) Moment, Normalkraft und Querkraft	207
Sonderfall: Das symmetrische Brückengewölbe.	210
9. Bestimmung der Festhaltungskräfte.	214
10. Sonderfall: Der Bogen wird durch zwei oder mehr geradlinige Stäbe gebildet	215

Zweiter Abschnitt.




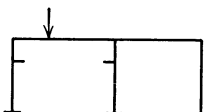
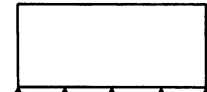


Berechnung des Tragwerkes mit verschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte.

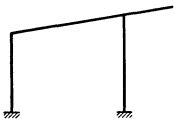
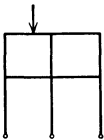
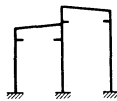

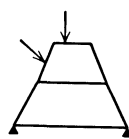
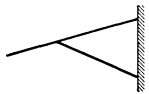
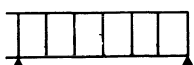
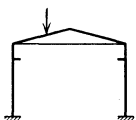
I. Gang der Berechnung	217
1. Der einstöckige Rahmen.	217
a) Rahmen mit parallelen Stützen	217
b) Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen.	222
2. Der mehrstöckige Rahmen.	228
a) Der mehrstöckige Rahmen mit parallelen Stützen.	228
b) Der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen	235
Sonderfälle von mehrstöckigen Tragwerken	241
3. Der Rahmenträger (Vierendeel-Träger)	251
a) Der Rahmenträger mit parallelen Gurtungen	251
b) Der Rahmenträger mit beliebig gerichteten Stäben	254
4. Das biegungsfeste Fachwerk	257
5. Rechnungsproben	259
II. Bestimmung der wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte sowie der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung der Stabenden.	270
1. Der einstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben	274
Beispiele (Nr. I und II)	277
2. Der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben	278
Beispiele (Nr. I—III)	284
3. Der Rahmenträger (Vierendeel-Träger)	288
III. Bestimmung der Momente M' sowie der zugehörigen Erzeugungskraft Z und Festhaltungskräfte D	289
1. Momente $M(\varrho)$ im verschobenen Stab	290
2. Momente $M(\varrho)$ in allen übrigen Stäben.	297
3. Momente M' durch gleichzeitige Verschiebung aller Stäbe.	298
4. Erzeugungskraft Z der Momente M' am einstöckigen Rahmen	299
5. Erzeugungskraft Z der Momente M' und Festhaltungskräfte D am mehrstöckigen Rahmen	300
6. Erzeugungskraft Z der Momente M' und Festhaltungskräfte D am Rahmenträger	302
IV. Bestimmung der Momente M^* sowie der Zusatzmomente M_{zus}	302
1. Der einstöckige Rahmen (Momente M^* am symmetrischen offenen und geschlossenen Rahmen)	303
2. Der mehrstöckige Rahmen.	305
Auflösung der Gleichungen	
a) Determinanten.	320
b) Gaußscher Algorithmus.	328
3. Der Rahmenträger	332


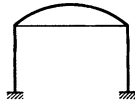

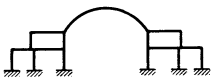
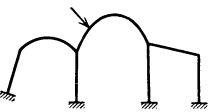

	Seite
V. Bestimmung der Momente infolge einer Temperaturänderung des Baumaterials	333
1. Der einstöckige Rahmen.	335
2. Der mehrstöckige Rahmen.	341
3. Der Rahmenträger	349
VI. Bestimmung der Momente infolge Senkung der Auflager	350
1. Der einstöckige Rahmen.	350
2. Der mehrstöckige Rahmen.	356
3. Der Rahmenträger	359
VII. Bestimmung der Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderungen der Stäbe	359
1. Der einstöckige Rahmen.	360
2. Der mehrstöckige Rahmen.	363
3. Der Rahmenträger	364
VIII. Bestimmung der Grenzwerte der Momente, Querkräfte und Normalkräfte.	364
1. Grenzwerte der Momente	364
a) Gleichmäßig verteilte Last	364
b) Bewegliche Lasten	364
2. Grenzwerte der Querkräfte	371
3. Grenzwerte der Normalkräfte	373
IX. Bestimmung der innern Kräfte an einem Tragwerk mit bogenförmigen Stäben und verschiebbaren Knotenpunkten.	373
1. Gang der Berechnung.	373
2. Bestimmung der Momente M' sowie der zugehörigen Erzeugungskraft Z und Festhaltungskräfte D	378
a) Gegenseitige Verschiebung A' der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie	379
b) Gegenseitige Verschiebung A'' der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie	382
3. Bestimmung der Momente M^* sowie der Zusatzmomente M_{zus}	386
4. Bestimmung der Momente infolge einer Temperaturänderung des ganzen Tragwerks	388
5. Bestimmung der Momente infolge Senkungen der Auflager	390
6. Bestimmung der Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderungen der Stäbe	392
X. Bestimmung der Grenzwerte der Momente, Querkräfte und Normalkräfte.	393
1. Grenzwerte der Momente	393
a) Einflußlinien der Kernpunktsmomente	393
b) Einflußlinien der Kernpunktsmomente für die Pfeiler	398
c) Einflußlinie des endgültigen Bogenschubes	399
2. Einflußlinien für die endgültigen Querkräfte an den Säulen.	399
3. Einflußlinien der endgültigen Normalkräfte der Säulen.	399
Anhang.	
I. Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen	400
A. Geradliniger Stab.	400
B. Bogenförmiger Stab.	401

II. Zusammenstellung der im Ersten und Zweiten Teil abgeleiteten Hauptformeln	403
1. Rechnungsabschnitt I	403
A. Geradliniger Stab	403
B. Bogenförmiger Stab	406
2. Rechnungsabschnitt II	410
A. Geradliniger Stab	410
B. Bogenförmiger Stab	411
III. Tabellen zur raschen Ermittlung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte	412
1. Der Balken mit beidseitig gleicher gerader Voute	412
2. Der Balken mit beidseitig gleicher parabolischer Voute.	413
3. Der Balken mit einseitiger gerader Voute.	414
4. Der Balken mit einseitiger parabolischer Voute	416
5. Sonderfall: Gleichmäßig verteilte Belastung der unter 1. bis 4. behandelten Balken.	417
6. Der symmetrische Parabelbogen mit vom Scheitel zu den Kämpfern zunehmendem Trägheitsmoment	418

Inhaltsverzeichnis zum zweiten Band.

Beispiel	Gegenstand und Systemskizze	Behandelte Lastfälle	Seite
1	 <p>Durchlaufende Decke mit Auflagerverstärkungen</p>	Gleichmäßig verteilte lotrechte Lasten	1
2	 <p>Durchlaufende Balkenbrücke über drei Öffnungen</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht 2. Bewegliche Verkehrslast 	3
3	 <p>Rahmenbrücke über drei Öffnungen</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht 2. Bewegliche Verkehrslast 3. Temperatur und Schwinden 4. Bremskräfte 	9
4	 <p>Unsymmetrischer dreistieliger Rechteckrahmen</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht 2. Lotrechte Einzellasten 3. Seitlicher Winddruck 4. Kranlasten auf Konsole 5. Temperaturänderung 6. Stützensenkung 	33
5	 <p>Wasserhochbehälter</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht 2. Wasserdruck 3. Dehnung des Zugbandes 	65
6	 <p>Stützmauer mit angeschloss-nem Kanal</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Gleichmäßig verteilte lotrechte Lasten 2. Erddruck 3. Konsollast 	70
7	 <p>Eingespanntes Vordach</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Gleichmäßig verteilte lotrechte Lasten 2. Seitlicher Winddruck 3. Temperaturänderung 	76

Beispiel	Gegenstand und Systemskizze	Behandelte Lastfälle	Seite
8	 <p>Rahmenbinder mit schiefem Riegel und Kragarm</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Gleichmäßig verteilte lotrechte Lasten 2. Wind auf den Balken 3. Wind auf die Säulen 4. Belastung des Kragarmes 5. Temperaturänderung 6. Stützensenkung 	80
9	 <p>Zweistöckiger Rahmenbinder</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht 2. Einzellasten 3. Innerer Wanddruck und Bodendruck infolge Erzfüllung 4. Winddruck 	102
10	 <p>Dreistieliger Hallenbinder (nach der Seite zweistöckig)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht 2. Kranlast auf Konsolen 3. Winddruck 4. Temperaturänderung 	121
11	 <p>Unsymmetrische Silozelle</p>	Innendruck infolge Getreidefüllung	149
12	 <p>Zweistöckiger geschlossener Rahmenträger</p>	Einzellasten	157
13	 <p>Fachwerkkragdach</p>	Eigengewicht, Schnee und Wind	169
14	 <p>Vierendeelträger</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht des Obergurtes 2. Ständige Knotenlasten 3. Veränderliche Knotenlasten 4. Belastung der Kragarme 	173
15	 <p>Rahmenbinder mit gebrochenem Riegel</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht 2. Winddruck 3. Einzellasten auf den Riegel 4. Kranlast auf Konsolen 	200

Beispiel	Gegenstand und Systemskizze	Behandelte Lastfälle	Seite
16	 <p>Halle mit gewölbtem Dach ohne Zugband</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Lotrechte Lasten 2. Winddruck 3. Temperaturänderung 	215
16a	 <p>Halle mit gewölbtem Dach mit Zugband</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1—3. Wie Beispiel 16 4. Dehnung des Zugbandes 	233
17	 <p>Eingespannte Bogenbrücke</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Eigengewicht 2. Bewegliche Verkehrslast 3. Temperaturänderung 	237
18	 <p>Rahmenbinder mit geraden und gebogenen Stäben</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Gleichmäßig verteilte lotrechte Lasten 2. Winddruck 3. Temperaturänderung und Schwinden 	257
19	 <p>Rahmenbinder mit unsymmetrischen Bogen</p>	Einzellasten auf den Mittelbogen	299
20	 <p>Durchlaufender Bogenträger</p>	Ermittlung der Einflußlinien der Momente und für die Horizontalschübe und Auflagerkräfte der Bogen	319

Verzeichnis der in den Beispielen ausführlich dargestellten Behandlungen von Teilproblemen der Methode 339

Erster Band

bearbeitet von

O. Baumann

Einleitung.

Durch die Entwicklung des Eisenbetonbaues, der monolithischen Bauweise, wurde der Ingenieur gezwungen, sich mit vielfach statisch unbestimmten Konstruktionen zu befassen, wie z. B. mit dem kontinuierlichen Balken auf elastisch drehbaren Stützen, d. h. mit dem kontinuierlichen Rahmen (Fig. 1, Brückenkonstruktion) oder mit dem mehrstöckigen Rahmen, woran die Momente infolge Winddruck sehr wichtig sind (Fig. 2, Fabrikbau), oder mit dem mehrstöckigen Rahmen, kombiniert mit bogenförmigen Stäben (Fig. 3, Montagehalle).

Solche Tragwerke mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen zu berechnen, ist in der Praxis kaum denkbar; denn erstens ist die Auflösung dieser Gleichungen sehr

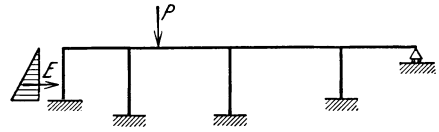


Fig. 1.

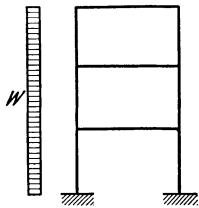


Fig. 2.

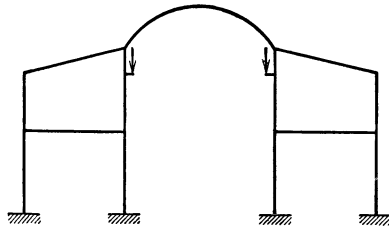


Fig. 3.

zeitraubend, und zweitens, der eigentlich noch wichtigere Punkt, können wir bei einer Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen erst die Schlussergebnisse einer Rechnungsprobe unterziehen, ganz abgesehen davon, daß wir mit sehr vielen Zahlenstellen rechnen müssen. Beiläufig sei erwähnt, daß zur Auflösung eines Systems von 6 Elastizitätsgleichungen mit den 6 Unbekannten x_1 bis x_6 mit mindestens 9 Zahlenstellen gerechnet werden muß, sonst werden die Resultate nicht nur ungenau, sondern vollständig unrichtig. Bei einer Berechnung nach der Methode der Festpunkte dagegen bieten verschiedene Zwischenstadien der Berechnung eine leichte Kontrolle, so daß man bei einem Rechenfehler nicht die ganze Berechnung wiederholen muß; außerdem genügt die Genauigkeit des Rechenschiebers für die meisten Fälle.

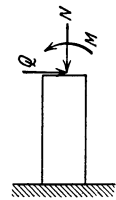


Fig. 4.

Bei den von uns betrachteten Konstruktionen liefern von den in einem Querschnitt auftretenden inneren Kräften (Fig. 4) die Biegemomente den Hauptbeitrag zu den Formänderungen, während der Beitrag herrührend von den Normalkräften und den Querkräften nur gering ist. Der Einfluß der Normal-

kräfte auf die Formänderungen und damit auf die gesuchten inneren Kräfte kann daher in den meisten Fällen, und derjenige der Querkräfte überhaupt immer, vernachlässigt werden. Falls jedoch der Einfluß der Normalkräfte berücksichtigt werden soll, so ist dies zusätzlich leicht möglich, wie später gezeigt wird. Bei unseren Berechnungen setzen wir voraus, daß das Material der zu berechnenden Konstruktionen nur solchen Beanspruchungen ausgesetzt ist, welche innerhalb seiner Elastizitätsgrenze liegen, so daß keine bleibenden Formänderungen auftreten und deshalb die Spannungen proportional den Formänderungen angenommen werden können.

Wir unterscheiden zwei Gattungen von statisch unbestimmten Konstruktionen, nämlich:

1. Tragwerke mit unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten, und
2. Tragwerke mit verschiebbaren Knotenpunkten (Rahmenkonstruktionen).

Ein Tragwerk gehört zur ersten Gattung, wenn bei der Belastung der Stäbe mit den äußeren Kräften nur Verbiegungen der Stäbe, jedoch keine gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der letzteren, also keine Knotenpunktverschiebungen, stattfinden, und ein Tragwerk gehört zur zweiten Gattung, wenn bei der Belastung der Stäbe mit den äußeren Kräften nicht nur Verbiegungen der Stäbe, sondern auch gegenseitige Verschiebungen der Endpunkte der letzteren, also sog. Schwenkungen der Stäbe, hervorgerufen durch Knotenpunktverschiebungen, stattfinden; die Stäbe können geradlinig oder bogenförmig sein.

Dies ist folgendermaßen zu verstehen:

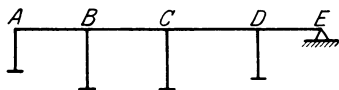


Fig. 5.

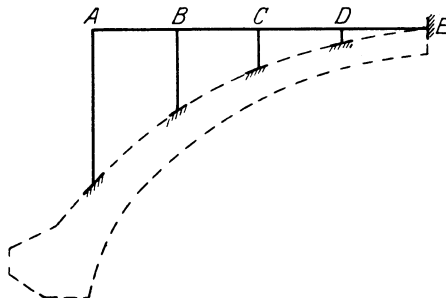


Fig. 5a.

Zur I. Gattung gehört der Brückenträger der Fig. 5 mit festem Endauflager, da sich seine Knotenpunkte, d. h. Säulenknöpfe, nicht verschieben können, immer abgesehen von der Längenänderung der Stäbe infolge der in Richtung der Stabachsen wirkenden Normalkräfte.

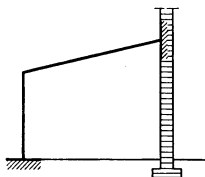


Fig. 5b.

Dasselbe gilt für einen Brückengewölbeaufbau der Fig. 5a, oder den Vordach-Halbrahmen der Fig. 5b, oder den eingespannten Bogen der Fig. 5c.

Zur II. Gattung dagegen gehören folgende Konstruktionen:

Der Brückenträger von vorhin, dagegen mit beweglichem anstatt festem Auflager an seinem rechten Ende (Fig. 5d), weil sich seine Säulenköpfe jetzt verschieben können, und zwar verschieben sie sich nicht nur bei einer waagrechten Säulenbelastung, wie z. B. Erddruck an seinem linken Ende, oder eine Bremskraft in Richtung der Balkenachse, son-

dern auch, natürlich in geringerem Maße, infolge einer unsymmetrisch liegenden senkrechten Belastung.

Dasselbe gilt für den einfachen Rahmen der Fig. 5e. In beiden Belastungsfällen verschieben sich die Säulenköpfe *A* und *B*; dies ist in noch stärkerem Maße der Fall beim Rahmen mit bogenförmigem Riegel (Fig. 5f), und zwar verschieben sich die Säulenköpfe bei diesem System auch bei symmetrischer Belastung.



Fig. 5c.

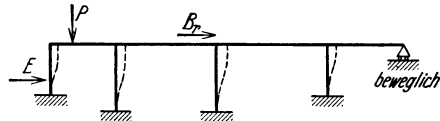


Fig. 5d.

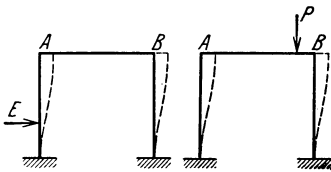


Fig. 5e.

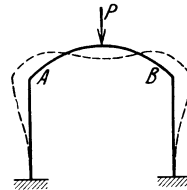


Fig. 5f.

Verschieben sich aber die Säulenköpfe der angeführten Tragwerke, so erleiden die Säulen gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte, d. h. sog. Schwenkungen.

Die Berechnung eines Tragwerkes mit unverschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte ist im Abschnitt I vorgeführt, und zwar für Tragwerke mit nur geradlinigen Stäben (Kap. I bis VII) und für Tragwerke mit bogenförmigen Stäben (Kap. VIII). Die Berechnung eines solchen Tragwerkes besteht nur aus dem sog. Rechnungsabschnitt I.

Die Berechnung eines Tragwerks mit verschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte ist im Abschnitt II erläutert, und zwar für Tragwerke mit nur geradlinigen Stäben (Kap. I bis VII) und für Tragwerke mit bogenförmigen Stäben (Kap. VIII). Die Berechnung dieser Tragwerke zerlegen wir in zwei Abschnitte, nämlich in die Rechnungsabschnitte I und II, kurz mit R. I und R. II bezeichnet. Während R. I wird das Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten, sei es einstöckig oder mehrstöckig (ein Tragwerk mit bogenförmigen Stäben ist wie ein mehrstöckiges zu behandeln) in ein solches mit unverschiebbaren Knotenpunkten verwandelt; dies geschieht dadurch, daß das Tragwerk in so viel Knotenpunkten durch gedachte Lager unverschiebbar festgehalten wird, daß kein Knotenpunkt desselben eine Verschiebung ausführen kann. Die Anzahl der notwendigen gedachten Lager ergibt den Grad der „Stöckigkeit“ des Tragwerkes. Die Berechnung des Tragwerkes wird dann zunächst für diesen festgehaltenen Zustand durchgeführt, d. h. wie für ein Tragwerk der ersten Gattung nach den Ableitungen in Abschnitt I. In den gedachten Lagern treten Auflagerdrücke („Reaktionen“) auf, welche wir als Festhaltungskräfte bezeichnen. Der Rechnungsabschnitt II besteht darin, daß wir die während R. I am Tragwerk gedachten Lager entfernen und die Momente infolge

der nun auftretenden tatsächlichen Verschiebungen der Knotenpunkte, d. h. die sog. Zusatzmomente, ermitteln. Beim Entfernen der während R. I am Rahmen gedachten Lager tritt an jedem der betreffenden Knotenpunkte die umgekehrt gerichtete Festhaltungskraft, nämlich die sog. Verschiebungskraft („Aktion“) in Tätigkeit, welche, allein am Rahmen wirkend, die tatsächlichen Verschiebungen und die davon herrührenden Zusatzmomente hervorruft. Am einstöckigen Tragwerk gibt es nur eine Verschiebekraft. Addieren wir zum Schluß die Momente aus R. I und R. II, so erhalten wir die genau richtigen Momente und die übrigen inneren Kräfte (Quer- und Normalkräfte) für die Rahmenkonstruktion, wie sie eine Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen liefern würde.

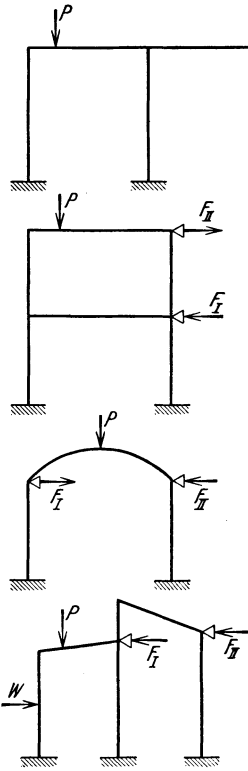


Fig. 6.

Diesen Rechnungsvorgang können wir auch so auffassen, daß wir zur Berechnung des Tragwerks mit verschiebbaren Knotenpunkten das festgehaltene Tragwerk, an welchem wir die Momente mit Hilfe der Festpunkte leicht ermitteln können, als statisch unbestimmtes Hauptsystem verwenden, und unsere statisch unbestimmten Größen X sind die Festhaltungs- resp. Verschiebungskräfte, deren Einfluß auf das Tragwerk unsere Zusatzmomente ergibt, welche auch wieder mit Hilfe der Festpunkte leicht zu ermitteln sind; d. h. das endgültige Moment in einem beliebigen Schnitt M_x ergibt sich aus:

$$M_x = M_{R.I} + V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* + \dots,$$

wenn M_I^* , M_{II}^* ... die Momente infolge $V_I = 1$, $V_{II} = 1 \dots$ bedeuten.

Zur Erläuterung der für die Berechnung nach der Methode der Festpunkte bestehenden Unterschiede haben wir in den folgenden Fig. 7 bis 42

Beispiele

von gebräuchlichen Konstruktionen dargestellt.

Bei allen diesen Tragwerken nehmen wir an, daß ihre Flußpunkte so ausgebildet sind, daß Verschiebungen derselben nicht vorkommen. Bei dieser Annahme sowie Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte muß bei den Tragwerken der Fig. 7 Knotenpunkt B bei jeder beliebigen Belastung des Stabwerkes in Ruhe bleiben, so daß keine Schwenkungen der Stäbe auftreten; diese Tragwerke gehören daher zur Gattung I.

Der in Fig. 5a dargestellte Fahrbahnträger $ABCDE$ einer Bogenbrücke, welcher mit den Eisenbetonpfeilern biegungsfest (elastisch drehbar) verbunden

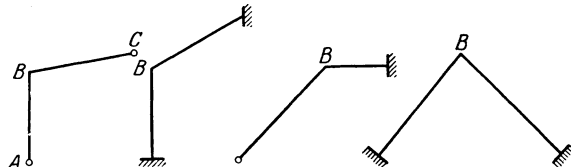


Fig. 7.

ist, gehört ebenfalls zur Gattung I, weil sein Ende E mit dem Bogenscheitel in Verbindung steht, wo der Balken von Haus aus festgehalten ist. Dasselbe gilt von dem Brückenbinder der Fig. 5.

Fig. 8 stellt den Horizontalschnitt durch einen Flüssigkeitsbehälter aus Eisenbeton dar, dessen

Wände einen in sich geschlossenen, an den Ecken A, D, E, H und an den Rippen B, C, F, G abgestützten biegungsfesten Stabzug bilden, welcher zur Gattung I gehört, weil

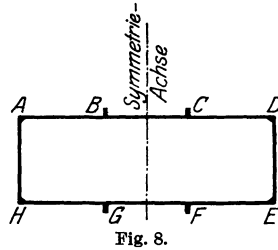


Fig. 8.

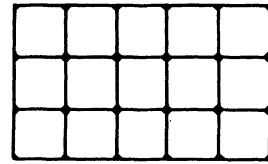


Fig. 8a.

dem überall gleichen inneren Flüssigkeitsdruck keine Verschiebungen der Stützpunkte und daher auch keine Schwenkungen der Stäbe des Tragwerks stattfinden. Dasselbe gilt für die in Fig. 8a im Horizontalschnitt dargestellten Wände eines Silos für Massengüter; bei ungleich hoher Füllung der Zellen

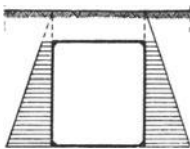


Fig. 9.

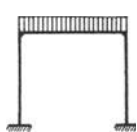


Fig. 9a.

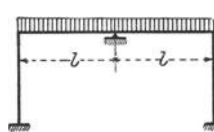


Fig. 9b.

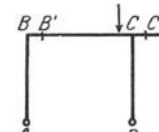


Fig. 9c.

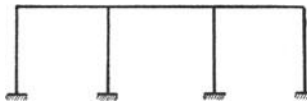


Fig. 9d.

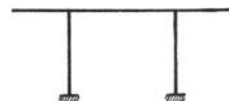


Fig. 9e.



Fig. 9f.

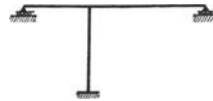


Fig. 9g.

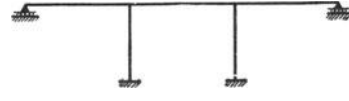


Fig. 9h.

würde eine geringe Verschiebungskraft durch die Silowände als senkrechte Strebepfeiler auf den Baugrund übertragen.

Der in Fig. 9 im Querschnitt dargestellte symmetrische Kanal aus Eisenbeton mit biegungsfest miteinander verbundenen Wänden ist ein gewöhnlicher durchlaufender, in sich geschlossener Balken für den Fall, daß er symmetrisch belastet ist, wie z. B. mit beidseitigem Erddruck, weil in diesem Fall die Eckpunkte keine Verschiebung und die Stäbe daher keine Schwenkungen erleiden. Überhaupt gehört jedes zu einer senkrechten Achse symmetrische Rahmentragwerk zur Gattung I, wenn es symmetrisch belastet ist (siehe Fig. 9a und 9b), weil in diesem Falle seine Stäbe keine Schwenkungen erleiden; eine Ausnahme hiervon machen nur die in Fig. 15 bis 16b dargestellten, „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmentragwerke, deren

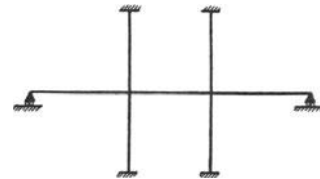
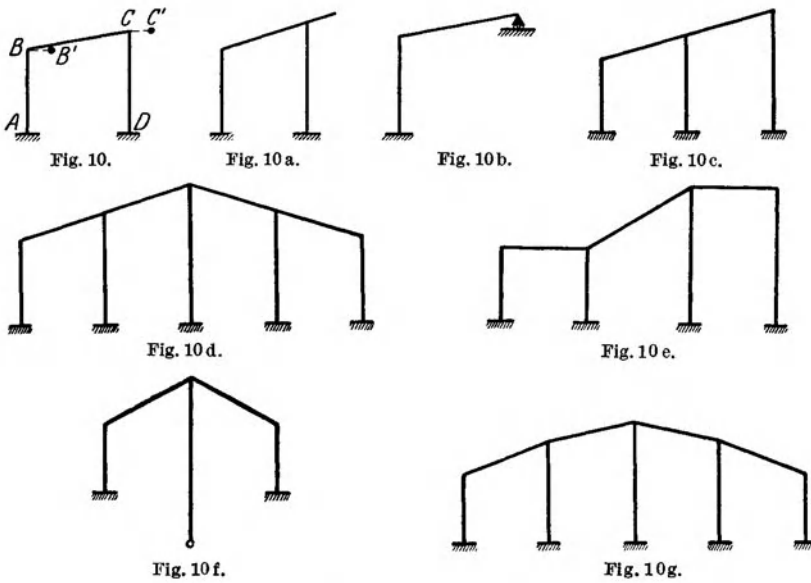
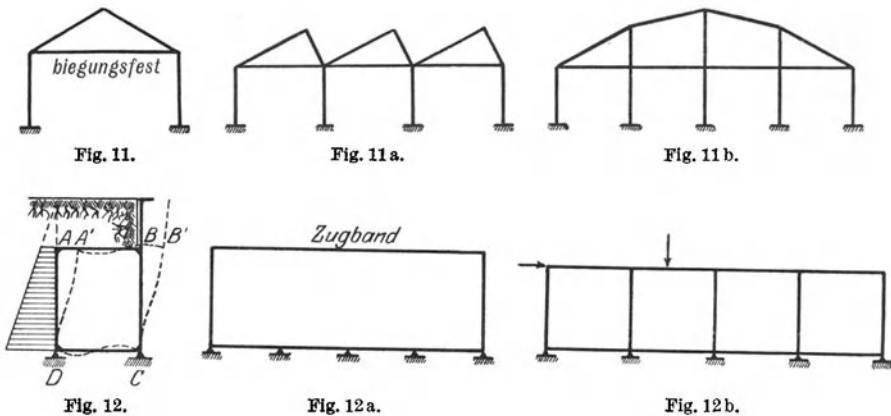


Fig. 9i.

Sonderfälle Fig. 24 bis 31 und die Tragwerke mit bogenförmigen Stäben der Fig. 38 bis 42, welche alle auch bei symmetrischer Ausbildung und symmetrischer Belastung zur Gattung II gehören. Werden jedoch symmetrische Trag-



werke unsymmetrisch belastet (siehe z. B. Fig. 9 c), so erleiden deren Stäbe Schwenkungen, und das Stabwerk ist für solche Belastungsfälle als Rahmentragwerk (Gattung II) zu betrachten, d. h. es ist außer R. I auch R. II durchzuführen.



Die Rahmen der Fig. 9 c bis 10 g werden als „einstöckig“ und je nach der Anzahl der Säulen als ein- oder mehrstielig bezeichnet. Die Rahmen der Fig. 11 bis 11 b sind „einstöckig mit Aufsatz“. Während z. B. die Rahmen der Fig. 9 c bis 10 g „offen“ sind, werden z. B. die Rahmen der Fig. 11 bis 11 c als „einseitig offen“ und z. B. diejenigen der Fig. 12 und 12 b als „geschlossen“ bezeichnet; bei den geschlossenen Rahmen pflanzen sich die Momente im Kreise

herum fort, während sie bei den offenen Rahmen nur in einer Richtung weiterlaufen.

Der aus Fig. 13 ersichtliche Rahmen stellt den Übergang vom einstockigen zum mehrstöckigen Rahmen dar; äußerlich ist er mehrstöckig, jedoch für die Berechnung nur einstockig, weil das untere Stockwerk durch die 2 Streben festgehalten wird und deshalb nur das obere Stockwerk einen frei verschiebbaren Rahmen bildet.

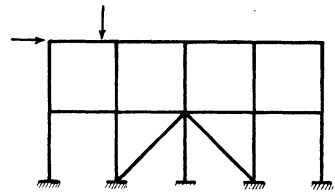


Fig. 13.

Fig. 14 stellt einen zweistöckigen geschlossenen Rahmen, Fig. 14a einen zweistöckigen einseitig offenen, Fig. 14b einen zweistöckigen Rahmen mit einem Aufsatz von Schnitt $a - a$ aufwärts und Fig. 14c einen vierstöckigen einseitig offenen Rahmen dar.

Die Rahmen der Fig. 15 bis 18 sind „nach der Seite“ mehrstöckig, und zwar stellt Fig. 15 einen zwei-

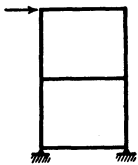


Fig. 14.

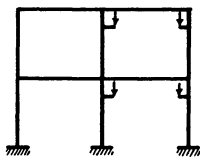


Fig. 14a.

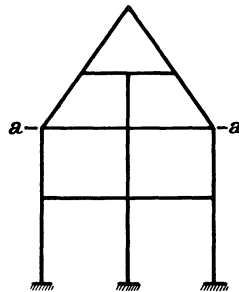


Fig. 14b.

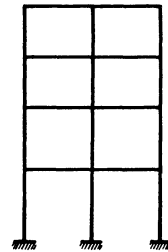


Fig. 14c.



Fig. 15.

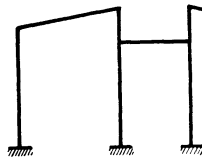


Fig. 15a.

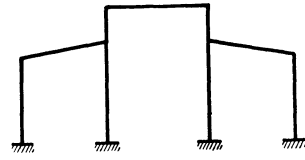


Fig. 15b.

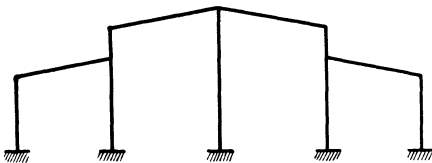


Fig. 15c.

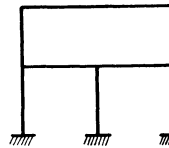


Fig. 16.

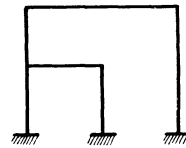


Fig. 16a.

stöckigen, Fig. 15a, 15b und 15c je einen dreistöckigen, Fig. 16 und 16a je einen zwei-stöckigen und Fig. 16b einen nach der Seite fünfstöckigen Rahmen mit Aufsätzen auf den 3 „mittleren“ Stockwerken dar.

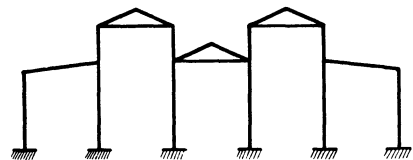


Fig. 16b.

In den Fig. 17 bis 23 ist eine Gruppe von Rahmen mit verschiedenen gerichteten Säulen dargestellt, deren Berechnung etwas länger dauert als diejenige der Rahmen mit gleichgerichteten Säulen; erteilt man nämlich dem Riegel BC der Rahmen von Fig. 9c, 18 und 17 eine

gewisse Verschiebung, so sehen wir, daß bei den Rahmen mit gleichgerichteten Säulen (Fig. 9c und 10) die Verbindungslinie der beiden verschobenen Knoten-

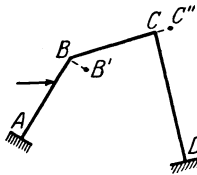


Fig. 17.

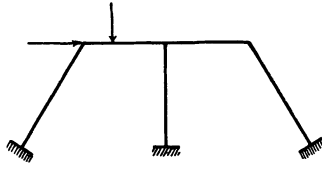


Fig. 17a.

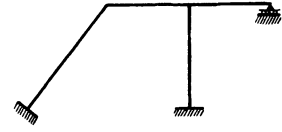


Fig. 17b.

punkte B' und C' parallel geblieben ist zur ursprünglichen Richtung des Stabes BC , d. h. der Stab BC hat keine Schwenkung erlitten, während beim Rahmen mit verschiedenen gerichteten Säulen (Fig. 17) der Riegel BC eine Schwenkung vollführt hat. Aus diesem Grunde ergeben sich bei den Rahmen mit verschiedenen gerichteten



Fig. 17c.

Säulen (Fig. 17 bis 23) bei einer Verschiebung desselben mehr Stäbe mit Schwenkungen als bei den Rahmen mit gleichgerichteten Säulen (Fig. 9c bis

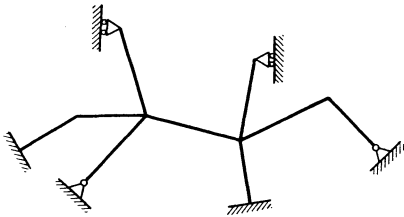


Fig. 18.

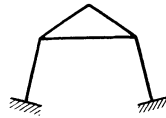


Fig. 19.

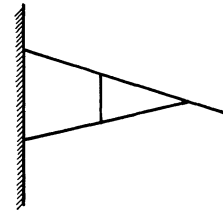


Fig. 20.



Fig. 21.



Fig. 21a.



Fig. 21b.



Fig. 21c.

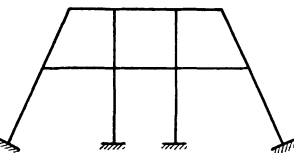


Fig. 21d.

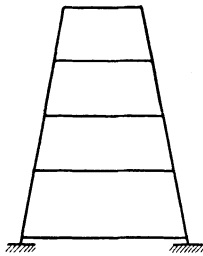


Fig. 22.

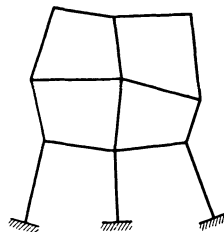


Fig. 23.

16b), was die Rechnung natürlich etwas verlängert. Die Neigung des Riegels hat dagegen keinen Einfluß. Die Rahmen der Fig. 17 bis 20 sind einstäckig, diejenigen der Fig. 21 bis 23 mehrstöckig.

In den Fig. 24 bis 31 sind Sonderfälle von „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen dargestellt, welche ebenfalls zur Gruppe II gehören.

Die Rahmen der Fig. 24, 25 und 25a sind „nach der Seite“ zweistöckig, weil man zwei ihrer Knotenpunkte, nämlich *B* und *D*, während R. I durch je ein gedachtes Lager unverschiebbar festhalten muß, damit kein Knotenpunkt der Tragwerke eine Verschiebung ausführen kann. Ferner stellt die Fig. 26 und

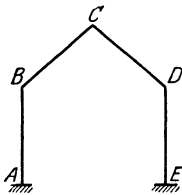


Fig. 24.

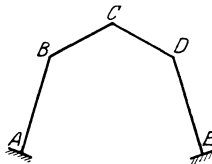


Fig. 25.

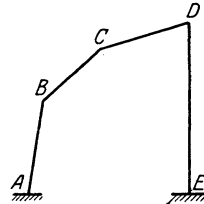


Fig. 25 a.

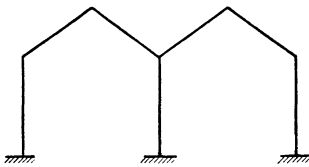


Fig. 26.

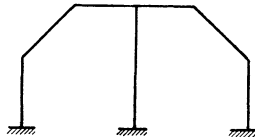


Fig. 27.

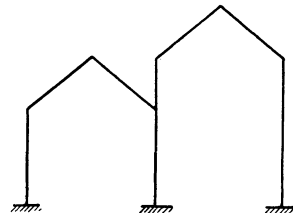


Fig. 28.

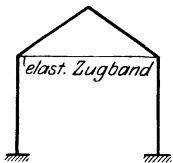


Fig. 29.

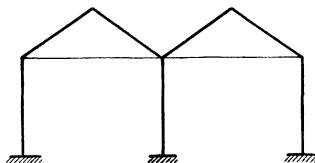


Fig. 30.

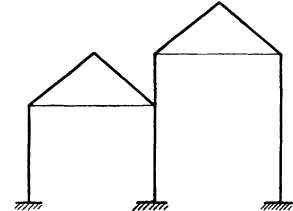


Fig. 31.

die Fig. 27 je einen „nach der Seite“ dreistöckigen, und Fig. 28 einen „nach der Seite“ vierstöckigen Rahmen dar.

Die Rahmen der Fig. 29 bis 31 sind bei ihrer Berechnung gleich zu behandeln wie die Rahmen der Fig. 24 bis 29, obwohl sie Zugbänder (elastische) besitzen. Dementsprechend ist der Rahmen der Fig. 29 „nach der Seite“ zweistöckig, der Rahmen der Fig. 30 dreistöckig und derjenige der Fig. 31 vierstöckig.

In den Fig. 32 bis 34 sind sog. Rahmenträger (System Vierendeel) dargestellt, welche nach demselben Prinzip wie mehrstöckige Rahmen zu berechnen sind. Der in Fig. 32 dargestellte einfache Rahmenträger ist wie ein dreistöckiger Rahmen zu behandeln, da man während R. I an seinen Knotenpunkten *H*, *G* und *E* je ein festes Lager anbringen muß, damit sich kein Knotenpunkt des Tragwerks verschieben kann. Fig. 33 zeigt einen Rahmenträger mit 2 Stockwerken, der wie ein dreistöckiger Rahmen zu berechnen ist. Der Rahmenträger der Fig. 34 auf elastisch drehbaren Stützen ist wie ein fünfstöckiger Rahmen zu berechnen, da sowohl seine 3 inneren Pfosten als auch seine obere und untere

Gurtung während R.I durch je ein festes Lager unverschiebbar festgehalten werden müssen.

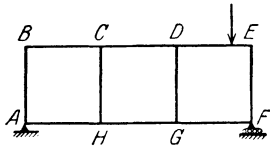


Fig. 32.

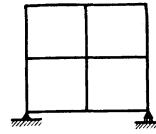


Fig. 33.

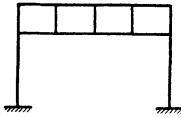


Fig. 34.

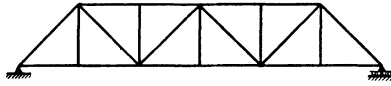


Fig. 35.

In Fig. 35 haben wir ein biegungsfestes Fachwerk, einen Parallelträger aus Eisen, dargestellt, dessen Biegungsmomente in Gurtungen und Streben, herrührend von der biegungsfesten Knotenpunktausbildung mit Hilfe der Fest-

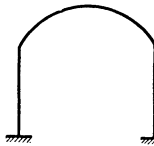


Fig. 36.

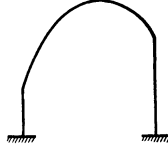


Fig. 36a.

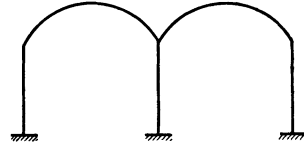


Fig. 37.

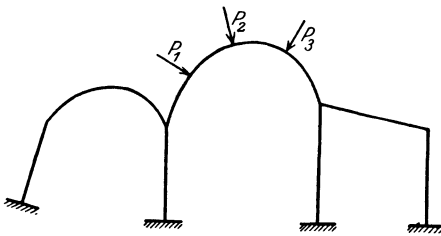


Fig. 38.

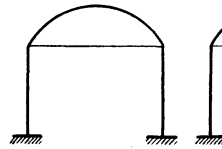


Fig. 39.

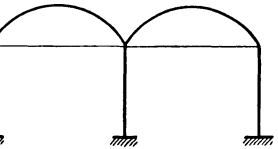


Fig. 39a.

punkte verhältnismäßig leicht ermittelt und damit die Nebenspannungen im Eisenfachwerk genau festgestellt werden können.

In den Fig. 36 bis 42 haben wir Rahmen mit bogenförmigen Stäben dargestellt, welche unter die Tragwerke mit verschiebbaren Knotenpunkten fallen.

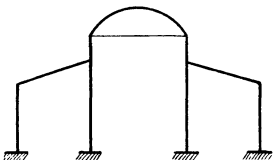


Fig. 40.

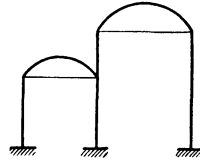


Fig. 40a.

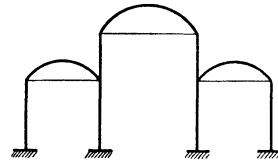


Fig. 40b.

Diese Rahmen werden genau gleich berechnet wie die Sonderfälle der mehrstöckigen Rahmen der Fig. 24 bis 31, mit dem einzigen Unterschied, daß der bogenförmige Stab eine besondere Behandlung erfährt. Es stellt daher für die Berechnung Fig. 36 und 36a je einen zweistöckigen, und Fig. 37 und 38 je einen

dreistöckigen Rahmen dar. Die Rahmen der Fig. 39 bis 40 b haben Zugbänder, trotzdem ist für die Berechnung Fig. 39 ein zweistöckiger, Fig. 39 a ein drei-

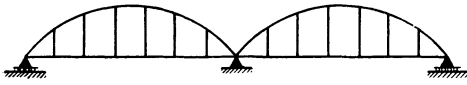


Fig. 41.

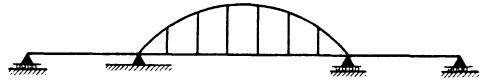


Fig. 41 a.

stöckiger, Fig. 40 ein vierstöckiger, Fig. 40 a ebenfalls ein vierstöckiger und Fig. 40 b ein sechsstöckiger Rahmen, wofür jedoch wegen Symmetrie eine Vereinfachung der Berechnung eintritt.

In den Fig. 41 und 41 a haben wir zwei Bogenbrücken mit aufgehängter Fahrbahn, welche gleichzeitig als Zugband wirkt, dargestellt, welche für die Berechnung Tragwerke mit unverschiebbaren Knotenpunkten sind, wenn man von dem Einfluß der Verlängerung des Zugbandes absieht.

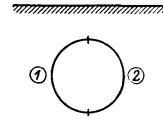


Fig. 42.

Zum Schluß zeigt Fig. 42 ein Rohrprofil, welches wie ein einstöckiges Tragwerk, bestehend aus 2 bogenförmigen Stäben, berechnet wird.

Berechnung des Tragwerks mit unverschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte.

I. Gang der Berechnung am Tragwerk mit nur geradlinigen Stäben.

Die Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte eines Tragwerks kann entweder durch ein zur Konstruktion gehöriges festes Auflager am Balken, z. B. am einstöckigen Tragwerk der Fig. 43 bei E bzw. an jedem Stockwerkbalken, z. B. am mehrstöckigen Tragwerk der Fig. 44 bei C und F , oder durch gedachte Lager an den Balken (vgl. Fig. 45 und 46) bewirkt werden; für die Berechnung

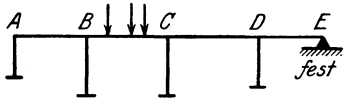


Fig. 43.

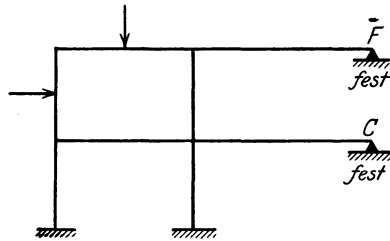


Fig. 44.

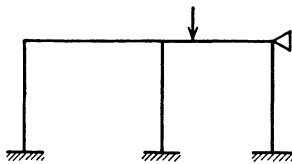


Fig. 45.

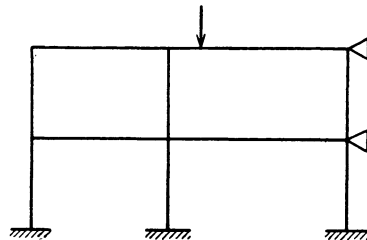


Fig. 46.

ergibt sich daraus kein Unterschied. Ferner ist die Unterscheidung von ein- und mehrstöckigen Tragwerken, wenn deren Knotenpunkte von Haus aus unverschiebbar sind, überflüssig; denn die Berechnung gestaltet sich bei beiden genau gleich. Die Unterscheidung braucht erst gemacht zu werden bei der Bestimmung der sog. Festhaltungskraft, welche in dem festen Balkenaufleger des einstöckigen bzw. in dem festen Auflager an jedem Stockwerkbalken des mehrstöckigen Tragwerks auftritt und eine Verschiebung der Knotenpunkte verhindert (siehe Kap. VII); denn an einem Tragwerk treten ebenso

viele Festhaltungskräfte auf, als dasselbe Stockwerk besitzt. Bei einem Tragwerk mit von Haus aus unverschiebbaren Knotenpunkten benötigen wir die Festhaltungskraft (am einstöckigen) bzw. Festhaltungskräfte (am mehrstöckigen Tragwerk) zur Berechnung der Verankerung der Konstruktion in dem die Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte bewirkenden Lager (am einstöckigen) bzw. Lagern (am mehrstöckigen Tragwerk); bei einem Tragwerk mit von Haus aus verschiebbaren, jedoch zur Berechnung desselben vorübergehend durch gedachte Lager unverschiebbar gemachten Knotenpunkten dagegen benötigen

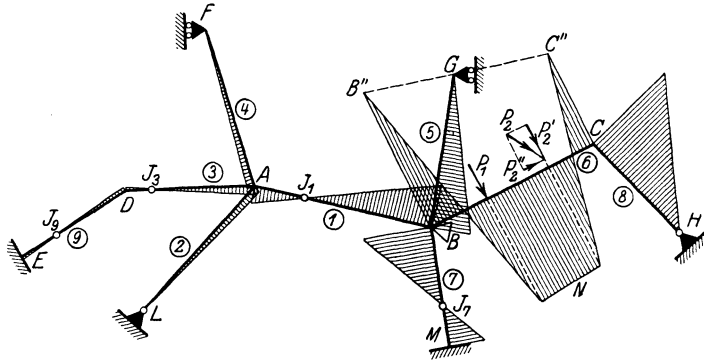


Fig. 47.

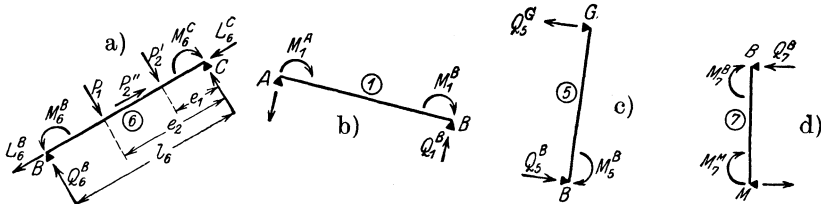


Fig. 47 a—d.

wir die Festhaltungskraft (am einstöckigen) bzw. Festhaltungskräfte (am mehrstöckigen Tragwerk) zur Berechnung der Zusatzmomente, welche zu den Momenten für den vorübergehend festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente am Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten zu erhalten (siehe Abschnitt II, Kap. I).

Den Gang der Berechnung erläutern wir

am allgemeinen Tragwerk

der Fig. 47 mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner biegungsfesten Stäbe 1 bis 9 mit den Längen l_1 bis l_9 . Den Stäben haben wir absichtlich eine ganz beliebige Lage gegeben, um die Bestimmung der Festpunkte und Momente ganz allgemein zu halten und damit nicht etwa die Meinung besteht, daß die Stäbe senkrecht aufeinander stehen müßten; der Rechteckrahmen (z. B. Fig. 43) ist ein Spezialfall, welcher in Kap. V beschrieben wird. Die Punkte E, L, M und H seien unverschiebbare Auflager des Tragwerks; die Stäbe 2 und 8 sind an ihren Fußpunkten gelenkartig, die Stäbe 9 und 7 fest eingespannt angenommen. Der von den Stäben 3, 1 und 6 gebildete „Balken“ des Tragwerks kann sich wegen eines am Knotenpunkt B befindlichen festen Lagers nicht ver-

schieben. Die in den Knotenpunkten A und B biegungsfest angeschlossenen, nach oben verlaufenden Stäbe 4 und 5 besitzen an ihren oberen Enden F und G Rollenlager, die auf senkrechter Bahn beweglich sind.

Wir bezeichnen mit A_1 den Querschnitt von Stab 1 unmittelbar neben Knotenpunkt A , mit M_1^A das Moment und mit Q_1^A die Querkraft im Querschnitt A_1 , mit A_2 den Querschnitt von Stab 2 unmittelbar neben A , mit M_2^A das Moment und mit Q_2^A die Querkraft im Querschnitt A_2 , usw. Ferner bezeichnen wir ein Moment an einem „liegenden“ Stab als positiv, wenn es an der unteren Stabkante Zugspannungen hervorruft, und wir bezeichnen ein Moment an einem „stehenden“ Stab als positiv, wenn es an der rechten Stabkante Zugspannungen hervorruft. Die Grenze zwischen „liegend“ und „stehend“ werde durch die 45° Neigung bestimmt, letztere selbst gelte noch als „liegend“. Die Momentenflächen tragen wir stets an die Zugkanten der einzelnen Stäbe an, und aus diesem Grunde ist es nur zur Ermittlung der Größtwerte der Momente bei verschiedenen Belastungsfällen nötig, die Momente mit positiv und negativ zu bezeichnen, da schon aus der aufgezeichneten Momentenfläche hervorgeht, an welcher Seite Zugspannungen entstehen.

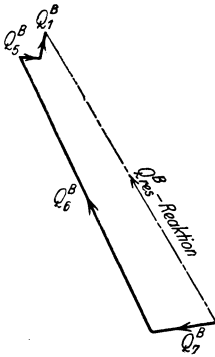


Fig. 48.

Es sei nur ein Stab, beispielsweise Stab 6, mit den beliebig gerichteten Kräften P_1 und P_2 belastet; da P_2 schiefwinklig zur Stabrichtung angenommen ist, so muß diese Kraft zur Bestimmung der Momente am ganzen Tragwerk zunächst in die Komponente P_2' rechtwinklig zur Stabachse und in die Komponente P_2'' in Richtung der Stabachse zerlegt werden, welche letztere in die Knotenpunkte B und C übertragen wird und keine Momente erzeugt.

Zur Bestimmung der Momente und damit der Quer- und Normalkräfte am ganzen Tragwerk — und aus allen dreien ergeben sich die Auflagerkräfte — benutzen wir in allen unseren Berechnungen die Festpunkte (Kap. II und III) der einzelnen Stäbe.

Die beiden Festpunkte J und K eines elastisch eingespannten geradlinigen Stabes, dessen Enden keine Verschiebungen ausführen, sind die Momentennullpunkte dieses Stabes für den Fall, daß an einem seiner beiden Enden ein Moment eingeleitet wird, und keine anderen Lasten vorhanden sind; diese Punkte haben eine von der äußeren Belastung unabhängige Lage.

Um die Momentenfläche am ganzen Tragwerk (Fig. 47) zu erhalten, müssen wir natürlich von dem belasteten Stab 6 ausgehen, an welchem wegen seiner elastischen Einspannung in den Knotenpunkten B und C an letzteren negative Momente, genannt Stützenmomente, auftreten.

Die beiden Stützenmomente am belasteten Stab ermitteln wir mittels der Festpunkte und der sog. Kreuzlinienabschnitte (nach Kap. V), und zwar entweder zeichnerisch durch Ziehen von wenigen Geraden oder rechnerisch aus den von diesen Geraden gebildeten Dreiecken, wobei man dann alle Werte mathematisch genau erhält. Sind diese beiden Stützenmomente bekannt, so ergibt sich die Momentenfläche am belasteten Stab aus der Zusammensetzung

der positiven Momentenfläche $B''NC''$ des einfachen Balkens auf zwei Stützen (M_0 -Fläche) mit dem negativen Trapez $BB''C''C$; denn die Momente am belasteten geradlinigen, an seinen Enden elastisch eingespannten Stab sind diejenigen des mit den äußeren Lasten sowie den beiden Stützenmomenten belasteten einfachen Balkens, und es ist in einem beliebigen Schnitt desselben

$$M_x = M_0 + M^B \cdot \frac{l-x}{l} + M^C \cdot \frac{x}{l}, \quad (1)$$

worin die Stützenmomente M^B und M^C mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Da die Stäbe in ihren Knotenpunkten biegeunflexibel miteinander verbunden sind, pflanzen sich die Momente von dem belasteten Stab aus über das ganze Tragwerk fort. Beim Überschreiten des Knotenpunktes B nach links spaltet sich das Stützenmoment B in die Momente M_7^B , M_1^B und M_5^B . Aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgetrennten Knotenpunkt B (Fig. 49) ergibt sich:

$$M_6^B - M_5^B - M_1^B - M_7^B = 0.$$

Daraus folgt, daß M_5^B , M_1^B und M_7^B sämtlich kleiner sind als M_6^B .

Bezeichnen wir mit

μ_{6-5}^B (gelesen μ in B von 6 nach 5) das Verteilungsmaß (Kap. II und III), mit welchem das Moment M_6^B beim Übergang über den Knotenpunkt B multipliziert werden muß, um daraus M_5^B zu erhalten, mit

μ_{6-1}^B das Verteilungsmaß, mit dem M_6^B multipliziert werden muß, um M_1^B zu erhalten, und mit

μ_{6-7}^B das Verteilungsmaß, mit dem M_6^B multipliziert werden muß, um M_7^B zu erhalten, so ist

$$M_5^B = \mu_{6-5}^B \cdot M_6^B,$$

$$M_1^B = \mu_{6-1}^B \cdot M_6^B$$

und

$$M_7^B = \mu_{6-7}^B \cdot M_6^B.$$

Um die Momente M_1^B , M_5^B und M_7^B über die betreffenden unbelasteten Stäbe weiterzuleiten, brauchen wir nach der Definition der Festpunkte nur eine Gerade vom Endpunkt der betreffenden Momentenordinaten durch den entsprechenden Festpunkt zu legen oder das betreffende Moment mit $\frac{a}{l-a}$ zu multiplizieren.

Ziehen wir deshalb vom Endpunkt des in B_1 aufgetragenen Momentes M_1^B eine Gerade durch den in der Nähe des Knotenpunktes A gelegenen Festpunkt J_1 des Stabes I , so schneidet diese Gerade auf der in A_1 errichteten Senkrechten zur Stabrichtung I das Moment M_1^A ab, wodurch die Momentenfläche am Stab I vollkommen bestimmt ist.

In analoger Weise pflanzt sich das Moment M_5^B über den Stab 5 und M_7^B über den Stab 7 weiter.

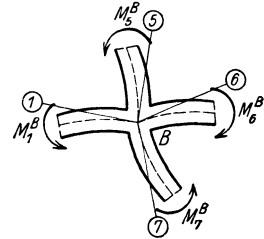


Fig. 49.

Das oben gefundene Moment M_1^A überträgt sich nun weiter auf die mit Stab 1 biegungsfest verbundenen Stäbe 2, 3 und 4, es spaltet sich analog wie M_6^B bei bei Knotenpunkt B in:

$$M_2^A = \mu_{1-2}^A \cdot M_1^A,$$

$$M_3^A = \mu_{1-3}^A \cdot M_1^A$$

und

$$M_4^A = \mu_{1-4}^A \cdot M_1^A.$$

Ziehen wir nun analog wie bei Stab 1 von den Endpunkten der an ihrem zugehörigen Stabende aufgetragenen Momente M_2^A , M_3^A und M_4^A je eine Gerade durch den unteren Festpunkt J_2 des Stabes 2, den linken Festpunkt J_3 des Stabes 3 und den oberen Festpunkt K_4 des Stabes 4, so sind damit auch die Momentenflächen an den Stäben 2, 3 und 4 bestimmt.

Sind mehrere Stäbe gleichzeitig belastet, so bestimmt man die Momentenflächen der belasteten Stäbe für die Belastung dieser Stäbe getrennt voneinander und addiert darauf die Momente unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens.

Die Hauptsache ist immer die Momentenfläche, denn aus dieser geht alles übrige hervor.

Nachdem wir die Momentenfläche am ganzen Tragwerk bestimmt haben, können wir nun auf Grund derselben auch die Quer- und Normalkräfte an allen Stäben wie folgt ermitteln (Kap. VI):

Wir denken uns alle Stäbe durch an ihren beiden Enden geführte Schnitte aus dem Stabwerk herausgetrennt, wie einfache Balken auf 2 Stützen gelagert und mit den gegebenen äußeren Lasten sowie mit den Stützenmomenten bzw. Einspannmomenten belastet. In den Fig. 47a bis 47d wurden z. B. die Stäbe 6, 1, 5 und 7 in herausgetrenntem Zustand dargestellt. Der einfache Balken AB (Fig. 47b) ist mit den beiden rechtsdrehenden Stützenmomenten M_1^A und M_1^B zu belasten, der einfache Balken BG (Fig. 47c) mit dem rechtsdrehenden Stützenmoment M_5^B und der einfache Balken BM (Fig. 47d) mit den rechtsdrehenden Stützenmomenten M_7^B und M_7^M . Der einfache Balken BC (Fig. 47a) ist mit den gegebenen äußeren Kräften P_1 und P_2 sowie mit den entgegengesetzt drehenden Stützenmomenten M_6^B und M_6^C zu belasten.

Nun sind die Auflagerdrücke an diesen einfachen Balken gleich den Querkraften an den Enden der betreffenden Stäbe, also z. B.

$$Q_1^B = \frac{M_1^A + M_1^B}{l_1},$$

$$Q_5^B = \frac{M_5^B}{l_5},$$

$$Q_6^B = \frac{P_1 \cdot e_1 + P_2 \cdot e_2}{l_6} + \frac{M_6^B - M_6^C}{l_6},$$

$$Q_7^B = \frac{M_7^B + M_7^M}{l_7}.$$

Diese vier Querkraften stoßen im Knotenpunkt B zusammen und können daher mit Hilfe des Kräftecks der Fig. 48 zu einer einzigen Kraft Q_{res}^B („Reaktion“) zusammengesetzt werden. Dasselbe ist am Knotenpunkt A der Fall,

wo die Querkräfte Q_1^A , Q_2^A , Q_3^A und Q_4^A sich zu der einzigen Kraft Q_{res}^A („Reaktion“) zusammensetzen.

Durch Zerlegung der Kräfte Q_{res}^A und Q_{res}^B in die anstoßenden Stabrichtungen erhalten wir noch die auf die Knotenpunkte wirkenden Normalkräfte („Reaktionen“) am ganzen Tragwerk, welche in den Stäben (als „Aktionen“) entgegengesetzt gerichtet sind, und wir sind nun in der Lage, auch die Auflagerkräfte, d. h. die Resultanten in den Auflagerpunkten anzugeben. Da wir eine Kraft in der Ebene nur in zwei sich auf dieser Kraft schneidende Richtungen zerlegen können, so verfahren wir in praktischen Fällen in der in Kap. VI angegebenen Weise, um zur Bestimmung der Normalkräfte keine Elastizitätsgleichungen anschreiben zu müssen.

Die beiden Kräfte Q_{res}^A und Q_{res}^B in den Knotenpunkten A und B haben wir aber nicht nur zur Ermittlung der Normalkräfte gebildet, sondern sie interessieren uns hauptsächlich deshalb, weil sie als „Aktionen“ (in umgekehrter Richtung genommen), wie in der Einleitung erwähnt, eine Verschiebung des „Balkens“ des Tragwerkes und damit Zusatz-Momente, -Querkräfte und -Normalkräfte hervorrufen würden, wenn das Tragwerk im Knotenpunkt B nicht unverschiebbar festgehalten wäre.

II. Rechnerische Bestimmung der Festpunkte und der Verteilungsmaße.

Die beiden Festpunkte eines elastisch eingespannten Stabes, dessen Enden keine Verschiebungen ausführen, sind die Momentennullpunkte dieses Stabes für den Fall, daß an einem seiner beiden Enden ein Moment eingeleitet wird

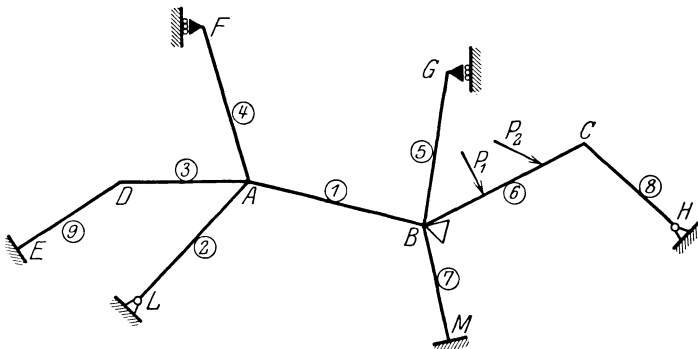


Fig. 50.

und keine anderen äußeren Lasten vorhanden sind. Diese Punkte haben eine von der äußeren Belastung unabhängige Lage.

Die Verteilungsmaße geben an, welche Anteile von einem Moment, das an einem Knotenpunkt (Stababzweigung) angreift, auf die „anstoßenden“ Stäbe entfallen. Die Summe dieser Zahlen für die anstoßenden Stäbe muß gleich 1 sein (100 %).

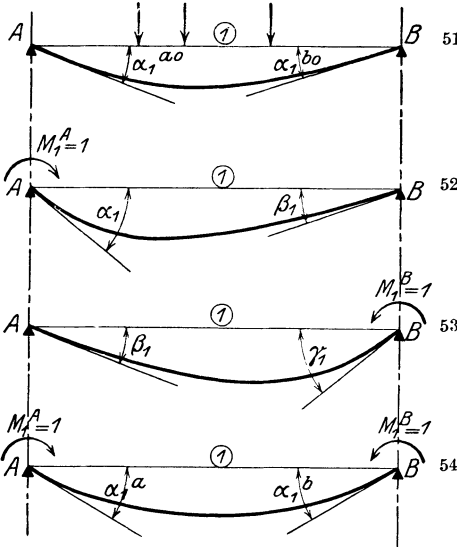
Zunächst leiten wir die Hauptformeln zur Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmaße an dem allgemeinen Tragwerk der Fig. 50 mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe her und erläutern dann den Rechnungsgang am offenen, einseitig offenen und geschlossenen Tragwerk.

1. Bezeichnungen.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein; es sei:

α_1^{ao} bzw. α_1^{bo} (Fig. 51) der Drehwinkel des einfachen Balkens I an dem dem Festpunktabstand a bzw. b zunächst gelegenen Knotenpunkt infolge der

Belastung mit den äußeren Kräften P .



α_1 bzw. β_1 (Fig. 52) der Drehwinkel des einfachen Balkens I infolge der Belastung in A mit dem Moment $M_1^A = 1$ (der Winkel β tritt an dem Auflager auf, wo das Moment nicht eingeleitet wird).

γ_1 bzw. β_1 (Fig. 53) der Drehwinkel des einfachen Balkens I infolge der Belastung in B mit $M_1^B = 1$ (der Winkel β in Fig. 53 ist nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Formänderungen gleich dem Winkel β in Fig. 52).

α_1^a bzw. α_1^b (Fig. 54) der Drehwinkel des einfachen Balkens I an dem dem Festpunktabstand a bzw. b zunächst gelegenen Knotenpunkt infolge der gleichzeitigen Belastung $M_1^A = 1$ und $M_1^B = 1$.

Fig. 51—54.

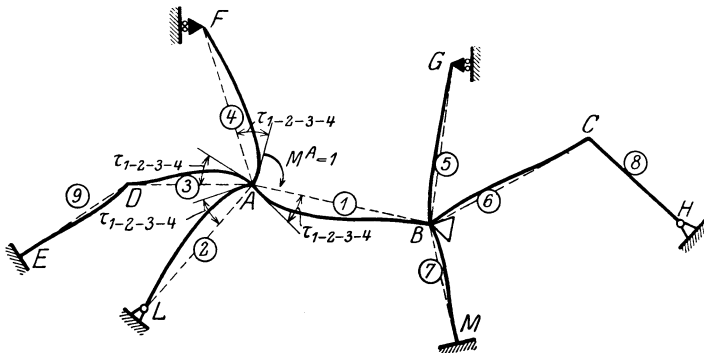


Fig. 55.

$\tau_{1-2-3-4}^A$ (Fig. 55) der gemeinsame gleiche Drehwinkel der Stäbe $1, 2, 3, 4$ an der Stelle A , an welcher die Stäbe biegungsfest miteinander verbunden sind, infolge der Belastung A mit $M^A = 1$. In A findet keine Verschiebung, sondern nur eine Drehung statt. Alle 4 beteiligten Stäbe

müssen denselben Drehwinkel in A beschreiben, weil infolge der starren Stabverbindung in A die Winkel zwischen den einzelnen Stäben bei der Drehung erhalten bleiben müssen.

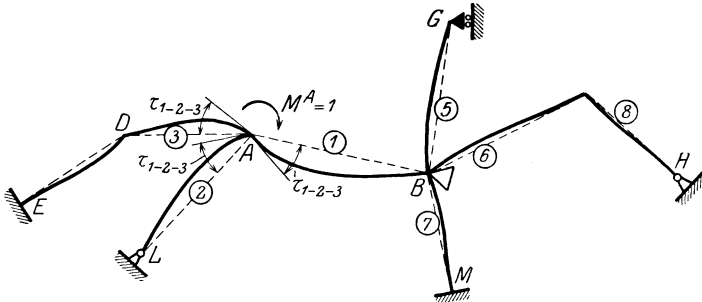


Fig. 56.

τ_{1-2-3}^A (Fig. 56) der gemeinsame gleiche Drehwinkel der Stäbe 1, 2, 3 an der Stelle A , an welcher die Stäbe biegungsfest miteinander verbunden sind, infolge der Belastung in A mit $M^A = 1$. Hierbei ist also Stab 4 entfernt gedacht, die übrigen Stäbe 1, 2, 3 bleiben sowohl unter sich in A , als auch an ihren anderen Endpunkten in derselben Verbindung wie vorher.

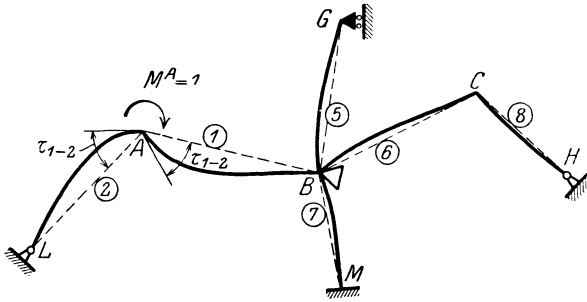


Fig. 57.

τ_{1-2}^A (Fig. 57) der gemeinsame gleiche Drehwinkel der Stäbe 1 und 2 an der Stelle A , an welcher die 2 Stäbe biegungsfest miteinander verbunden sind, infolge der Belastung in A mit $M^A = 1$. Hierbei sind die Stäbe 3 und 4 entfernt gedacht, die übrigen Stäbe 1 und 2 bleiben sowohl unter sich in A als auch an ihren anderen Endpunkten in derselben Verbindung wie vorher.

τ_1^A (Fig. 58) der Drehwinkel des Stabes 1 an der Stelle A infolge der Belastung $M^A = 1$ in A , wobei angenommen ist, daß Stab 1 in einem gedachten Gelenklager in A frei drehbar gestützt ist und daß an seinem Endpunkt die Verbindung mit der übrigen Konstruktion wie vorher bestehen bleibt.

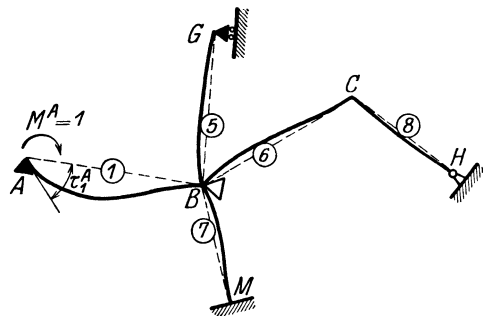


Fig. 58.

Ferner bezeichnen wir mit:

ε_1^a allgemein die Drehung desjenigen Widerlagers von Stab I , welches dem Festpunktabstand a zunächstgelegen ist (wird benötigt zur Berechnung des Festpunktabstandes a des Stabes I) infolge Belastung dieses Widerlagers mit $M_1^A = 1$, und analog mit

ε_1^b allgemein die Drehung desjenigen Widerlagers von Stab I , welches dem Festpunktabstand b zunächstgelegen ist, infolge Belastung dieses Widerlagers mit $M_1^B = 1$.

In Fig. 59 ist die Einspannung des Stabes I an seinen beiden Enden schematisch dargestellt; in Fig. 59a ist die elastische Drehung ε_1^a des dem Stabe I

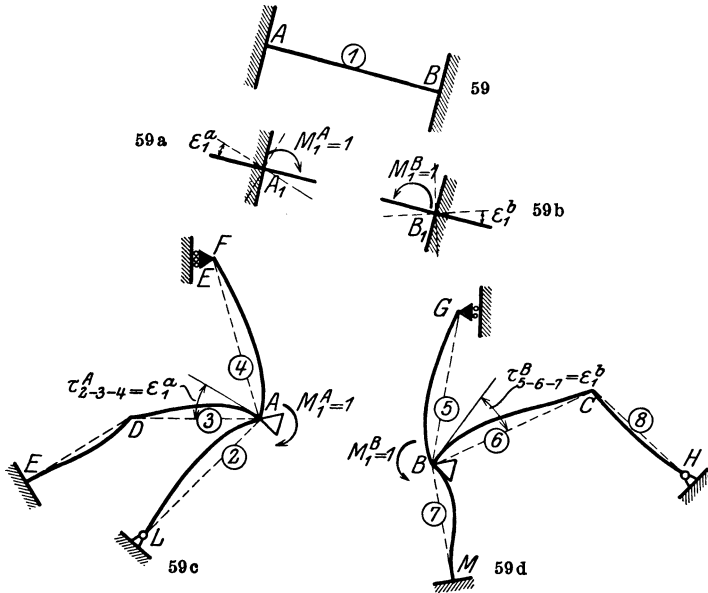


Fig. 59—59d.

zugeordneten, dem Festpunktabstand a entsprechenden, schematisch dargestellten Widerlagers A_1 , und in Fig. 59b die elastische Drehung ε_1^b des dem Stabe I zugeordneten, dem Festpunktabstand b entsprechenden, schematisch dargestellten Widerlagers B_1 veranschaulicht.

Das Widerlager des Stabes I in A wird an unserem allgemeinen Tragwerke gebildet durch die drei im Knotenpunkt A biegungsfest verbundenen Stäbe 2, 3, 4 (Fig. 59c) und das Widerlager in B durch die drei im Knotenpunkt B biegungsfest verbundenen Stäbe 5, 6, 7 (Fig. 59d). Im vorliegenden Fall ist ε_1^a (Fig. 59a) gleich τ_{2-3-4}^A (Fig. 59c), und ε_1^b (Fig. 59b) ist gleich τ_{5-6-7}^B (Fig. 59d). Wir wollen trotzdem die Bezeichnungen ε_1^a und ε_1^b in die meisten späteren Formeln an Stelle der Drehwinkel τ_{2-3-4}^A bzw. τ_{5-6-7}^B aufnehmen, weil sie allgemeiner sind und besonders dann zutreffen, wenn das betreffende Stabende nicht an andere Stäbe angeschlossen, sondern in Fundament- oder aufgehendes Mauerwerk eingespannt ist. ε_1^a bzw. ε_1^b kann alle Werte zwischen Null und Unendlich haben, und zwar den Wert Null bei fester Einspannung des Stabendes A bzw. B , und den Wert Unendlich bei gelenkartiger (frei drehbarer) Lagerung derselben.

2. Momentenverlauf.

Wir nehmen in Fig. 60 die Momentenfläche am ganzen Stabwerk, hervorgerufen durch die Belastung des Stabes 6 mit den Kräften P_1 und P_2 vorläufig

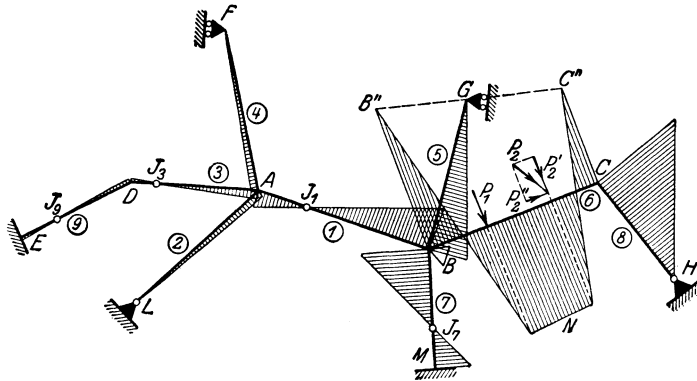


Fig. 60.

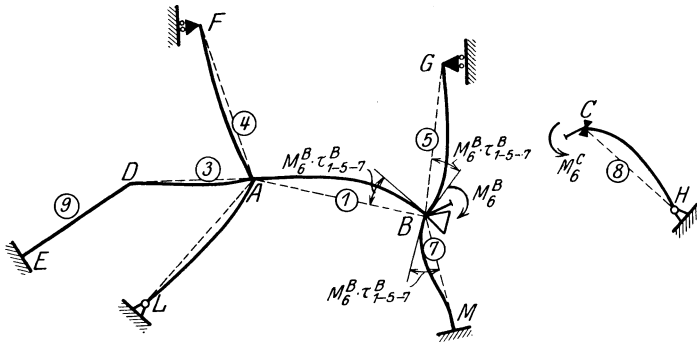


Fig. 61.

als bekannt an, und bemerken nur, daß wir eine schief zur Stabachse gerichtete Kraft P_2 stets in eine Komponente P_2'' in Richtung des belasteten Stabes und in eine Komponente P_2' rechtwinklig dazu zerlegen und für letztere die Momentenfläche bestimmen.

Wir trennen nun Stab 6 durch in B_6 und C_6 geführte Schnitte heraus und belasten die übrige, noch in C anschließende Konstruktion (Stab 8, könnte auch ein Fundament sein) mit M_6^C und die andere, in B anschließende Konstruktion, bestehend aus den Stäben 1, 2, 3, 5, 6, 7 und 9 mit M_6^B (Fig. 61).

Das Moment M_6^B pflanzt sich über die übrige Konstruktion fort und spaltet sich am Knotenpunkt B in die Stützenmomente M_1^B , M_5^B und M_7^B . Nehmen wir diese Momente vorläufig als bekannt an, so können wir Schnitte in B_1 , B_5 und B_7 führen, die Stäbe 1, 5, 7 an den Schnittstellen gelenkartig stützen und mit den Momenten M_1^B bzw.

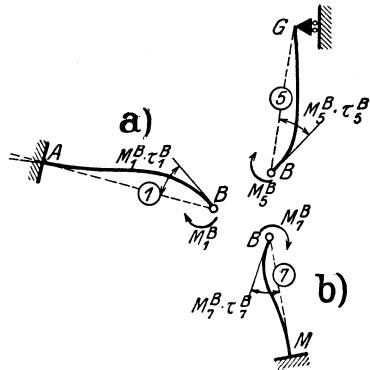


Fig. 62—62 b.

M_5^B bzw. M_7^B belasten (Fig. 62, 62a und 62b); dann untersuchen wir, wie sich diese Momente über die Stäbe 1, 5, 7 fortpflanzen.

3. Festpunktabstände a und b .*

Nach der Definition der Festpunkte erhalten wir nun im Momentennullpunkt z. B. des Stabes 1 den gesuchten linken Festpunkt J_1 dieses Stabes bzw. dessen linken Festpunktabstand a_1 von Knotenpunkt A .

In Fig. 63 haben wir die Stäbe 2, 3, 4, welche das Widerlager des Stabes 1 in A bilden, fortgelassen und dafür die Einspannung des Stabes 1 in A schematisch dargestellt. Wir führen nun in A

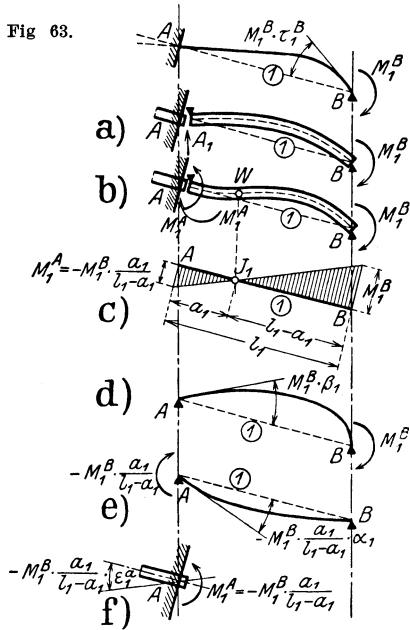


Fig. 63—63f.

einen Schnitt und stützen den Balken dasselbst frei drehbar (Fig. 63a). Infolge der Belastung mit M_1^B wird dann die in Fig. 63a gezeichnete Durchbiegung des einfachen Balkens erzeugt, wobei die Schnittfläche A_1 am Balken und die entsprechende am Widerlager sich nicht mehr decken, sondern einen gewissen Winkel miteinander bilden. Um die beiden Querschnitte wieder zur Deckung zu bringen, muß offenbar an der Querschnittsfläche A_1 des Balkens ein rechtsdrehendes Moment angebracht werden, das sog. Einspannmoment (Fig. 63b). Hierdurch wird der Stab 1 in der Nähe von B entgegengesetzt durchgebogen als vorher, und es ist hieraus ersichtlich, daß zwischen A und B ein Wendepunkt W in der elastischen Linie liegen muß, welchem bekanntlich ein Wechsel im Momentenverzeichen entspricht, so daß die Momentenfläche die in Fig. 63c dargestellte Form

haben muß. Ist das Einspannmoment sehr klein, also die Einspannung in A gering, so fällt W beinahe mit A zusammen. Mit wachsender Einspannung in A entfernt sich W von B und nimmt seine größte Entfernung von A bei vollkommener oder fester (nicht elastischer) Einspannung des Stabes 1 im Widerlager B ein. Wir erkennen, daß W jedenfalls nahe bei A liegt und sein Abstand a_1 von A dem Einspannungsgrad des Stabes 1 entspricht. Für eine gegebene Einspannung, d. i. Steifigkeit der in A anschließenden Konstruktion, hat der Wendepunkt W eine feste, von der äußeren Belastung unabhängige Lage. Wir bezeichnen ihn daher als Festpunkt J_1 des Stabes 1.

In vorliegendem Fall wurde ein Moment M_1^B in B eingeleitet und in der Richtung BA über den Stab 1 fortgepflanzt. Würden wir jedoch in A ein

* Vgl. Dr.-Ing. Max Ritter: Über die Berechnung elastisch eingespannter und kontinuierlicher Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment, Schweiz. Bauzeitung, Bd. 53, Heft 18 u. 19; sowie derselbe: Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen, Schweiz. Bauz., Bd. 57, Heft 4.

Moment M_1^A einleiten und in der Richtung AB über den Stab I weiterleiten, so würde sich analog ein Wendepunkt in der Nähe von B ausbilden, welchen wir als Festpunkt K_1 des Stabes I bezeichnen, und dessen Entfernung b_1 von B nur von dem Einspannungsgrade des Stabes I an seinem Widerlager in B abhängt.

In ähnlicher Weise erhalten wir z. B. die Abstände a_6 und b_6 der Festpunkte J_6 und K_6 des Stabes 6 in der Nähe von B resp. C , die Abstände a_7 und b_7 der Festpunkte J_7 und K_7 des Stabes 7 in der Nähe von M bzw. B usw.,

Nach Fig. 63c beträgt das Moment in A :

$$M^A = -M^B \cdot \frac{a}{l-a}, \quad (2)$$

wenn wir den Index I , der sich auf die Stabnummer bezieht, der Einfachheit halber weglassen. Dies ist also das Einspannungsmoment, welches in Fig. 63b sowohl an der Querschnittsfläche A des Balkens wie des Widerlagers, mit dem eingetragenen Drehsinn angebracht werden muß, damit beide wieder zur Deckung kommen. Dann beträgt:

1. Die Drehung des Querschnittes A am betrachteten Stab:

a) durch M^B nach Fig. 63d: $M^B \cdot \beta$,

b) durch $M^A = -M^B \cdot \frac{a}{l-a}$ nach Fig. 63e:

$$-M^B \cdot \frac{a}{l-a} \cdot \alpha_1.$$

2. Die Drehung des Querschnittes A am Widerlager des Stabes:

durch $M^A = -M^B \cdot \frac{a}{l-a}$ nach Fig. 63f:

$$-M^B \cdot \frac{a}{l-a} \cdot \varepsilon^a.$$

Da nun die Querschnittsfläche A am Stab I und am Widerlager bei ihrer Wiedervereinigung denselben Drehwinkel zurückgelegt haben müssen, oder mit anderen Worten die Summe der zurückgelegten Drehwinkel gleich Null sein muß, so besteht folgende Gleichung:

$$M^B \cdot \beta - M^B \cdot \frac{a}{l-a} \cdot \alpha - M^B \cdot \frac{a}{l-a} \cdot \varepsilon^a = 0, \quad (3)$$

$$\frac{a}{l-a} (\alpha + \varepsilon^a) = \beta \quad (3a)$$

oder

$$\frac{a}{l-a} = \frac{\beta}{\alpha + \varepsilon^a}, \quad (4)$$

woraus folgt:

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha + \beta + \varepsilon^a}. \quad (5)$$

Setzen wir schließlich, wie aus den Fig. 52, 53 und 54 hervorgeht,

$$\alpha + \beta = \alpha^a, \quad (6)$$

so folgt für einen beliebigen geradlinigen Stab die allgemeine Hauptformel

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a}. \quad (7)$$

Analog erhalten wir für den Festpunktabstand b die allgemeine Hauptformel:

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b}. \quad (8)$$

Die Werte für die in den beiden Hauptformeln (7) und (8) vorkommenden Drehwinkel α^a , α^b und β wurden in Kap. IV für Stäbe mit veränderlichem und konstantem Trägheitsmoment abgeleitet; für Stäbe mit geraden und parabolischen Vouten sind im Anhang Tabellen enthalten.

Am geradlinigen Stab mit konstantem Trägheitsmoment auf seine ganze Länge ist, da in diesem Falle nach Gl. (207a): $\alpha^a = \alpha^b = 3\beta$:

$$a = \frac{l}{3 + \frac{\varepsilon^a}{\beta}}, \quad (7a)$$

$$b = \frac{l}{3 + \frac{\varepsilon^b}{\beta}}. \quad (8a)$$

4. Drehwinkel ε^a und ε^b .

Wir ermitteln nun die in den beiden Hauptformeln (7) und (8) vorkommenden Drehwinkel ε_1^a und ε_1^b der Widerlager A und B .

Die Ableitung führen wir nur für den Drehwinkel ε_1^a durch und nehmen dabei an, daß sich in A , wie in Fig. 60 gezeichnet, die drei Stäbe 2, 3 und 4 an den Stab 1 biegefest anschließen, so daß laut Definition

$$\varepsilon_1^a = \tau_{2-3-4}^A,$$

welcher Drehwinkel also zu bestimmen ist:

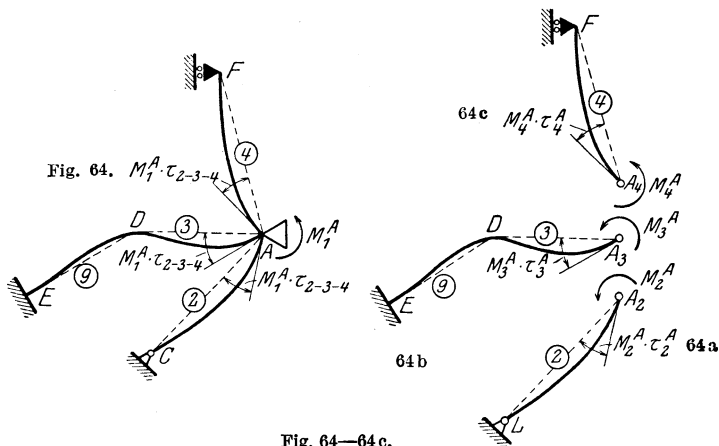


Fig. 64—64c.

Das durch Gl. (2) bestimmte Moment M_1^A erzeugt in A an den drei dort biegefest miteinander verbundenen Stäben 2, 3 und 4 den gemeinsamen gleichen Drehwinkel $M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A$ (Fig. 64) und die entsprechenden Stützmomente M_2^A , M_3^A und M_4^A . Nehmen wir diese Momente vorläufig als bekannt an, so können wir auch Schnitte in A_2 , A_3 und A_4 führen, die Stäbe 2, 3 und 4

an den Schnittstellen gelenkartig stützen und mit den Momenten M_2^A , M_3^A und M_4^A belasten. Die hierbei erzeugten Drehwinkel $M_2^A \cdot \tau_2^A$ (Fig. 64a), $M_3^A \cdot \tau_3^A$ (Fig. 64b) und $M_4^A \cdot \tau_4^A$ (Fig. 64c) müssen gleich dem Drehwinkel derselben Stäbe in Fig. 64 sein. Wir erhalten daher die folgenden drei Gleichungen:

$$M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A = M_2^A \cdot \tau_2^A, \quad (9)$$

$$M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A = M_3^A \cdot \tau_3^A, \quad (10)$$

$$M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A = M_4^A \cdot \tau_4^A. \quad (11)$$

Eine vierte Gleichung erhalten wir aus der Bedingung, daß am herausgetrennten Knotenpunkt A (Fig. 65) die drei Schnittmomente M_2^A , M_3^A und M_4^A mit dem erzeugenden Moment M_1^A im Gleichgewicht stehen müssen oder

$$M_1^A = M_2^A + M_3^A + M_4^A. \quad (12)$$

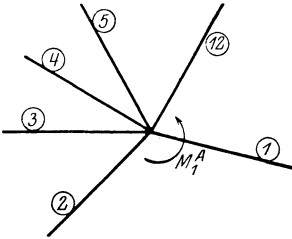


Fig. 65.

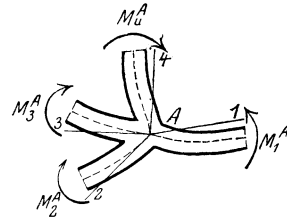


Fig. 66.

Aus den Gleichungen (9), (10), (11) erhalten wir:

$$M_2^A = M_1^A \cdot \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_2^A}, \quad (13)$$

$$M_3^A = M_1^A \cdot \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_3^A}, \quad (14)$$

$$M_4^A = M_1^A \cdot \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_4^A}. \quad (15)$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (12) ergibt sich:

$$M_1^A = M_1^A \cdot \tau_{2-3-4}^A \left(\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A} \right), \quad (16)$$

woraus die wichtige Beziehung folgt:

$$\tau_{2-3-4}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A}}. \quad (17)$$

Aus Gl. (17) ergibt sich ohne weiteres als Drehwinkel an einem Knotenpunkt A mit $1, 2, 3, 4 \dots n$ (Fig. 66) daselbst biegungsfest vereinigten Stäben:

$$\tau_{1-2-3-4 \dots n}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1^A} + \frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\tau}}. \quad (18)$$

5. Verteilungsmaße μ .

Die Momente M_2^A , M_3^A und M_4^A sind alle kleiner als M_1^A , die Koeffizienten von M_1^A auf den rechten Seiten der Gl. (13), (14), (15) sind daher alle kleiner als 1 und ihre Summe muß gleich 1 sein.

Wir bezeichnen diese Koeffizienten als Verteilungsmaße am Knotenpunkt A für den Übergang des Momentes M_1^A , weil man das erzeugende Moment M_1^A nur mit diesen Zahlen zu multiplizieren hat, um die gesuchten Momente M_2^A , M_3^A und M_4^A zu erhalten. Für diese Verteilungsmaße führen wir allgemein die Bezeichnung μ ein und schreiben zur Unterscheidung im vorliegenden Falle:

für den Koeffizienten in Gl. (13): μ_{1-2}^A (gelesen μ in A von 1 nach 2),

für den Koeffizienten in Gl. (14): μ_{1-3}^A ,

für den Koeffizienten in Gl. (15): μ_{1-4}^A ,

womit angedeutet sein soll, daß der Übergang in Knotenpunkt A stattfindet, und zwar von Stab 1 nach Stab 2 bzw. 3 bzw. 4.

Wir können nun die Gl. (13), (14) und (15) einfacher schreiben und erhalten:

$$M_2^A = M_1^A \cdot \mu_{1-2}^A, \quad (19)$$

$$M_3^A = M_1^A \cdot \mu_{1-3}^A, \quad (20)$$

$$M_4^A = M_1^A \cdot \mu_{1-4}^A, \quad (21)$$

und die Momente M_5^B und M_7^B , welche wir oben vorläufig als bekannt voraussetzten, haben mithin den Wert

$$M_5^B = M_6^B \cdot \mu_{6-5}, \quad (22)$$

und

$$M_7^B = M_6^B \cdot \mu_{6-7}. \quad (23)$$

Aus den Gl. (13), (14), (15) ergeben sich jetzt für die Verteilungsmaße μ die Hauptformeln:

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_2^A}, \quad (24)$$

$$\mu_{1-3}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_3^A}, \quad (25)$$

$$\mu_{1-4}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_4^A}, \quad (26)$$

und allgemein:

$$\mu_{1-n} = \frac{\tau_{2-3-\dots-n}}{\tau_n}, \quad (26 a)$$

in welchen der Wert von τ_{2-3-4}^A aus Gl. (17) einzusetzen ist.

Hat man zwei der vorstehenden drei Faktoren μ bestimmt, so erhält man den dritten auch aus der Ergänzung der Summe der beiden anderen zu 1, d. h. es ist z. B.

$$\mu_{1-4}^A = 1 - (\mu_{1-2}^A + \mu_{1-3}^A), \quad (27)$$

da $\sum \mu = 1$ sein muß (Probe).

Es sei hervorgehoben, daß die gemeinsamen Drehwinkel ε , in vorliegendem Falle τ_{2-3-4}^A , schon bei der Bestimmung der Festpunkte ermittelt werden müssen und deshalb zur Einsetzung in obige Hauptformeln für μ zur Verfügung stehen.

Um jedoch eine Form für μ zu zeigen, die man sich leicht merken kann, setzen wir noch den Wert von τ_{2-3-4}^A aus Gl. (17) in obige Hauptformeln ein und erhalten:

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\frac{1}{\tau_2^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A}}, \quad (28)$$

$$\mu_{1-3}^A = \frac{\frac{1}{\tau_3^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A}}, \quad (29)$$

$$\mu_{1-4}^A = \frac{\frac{1}{\tau_4^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \frac{1}{\tau_4^A}}. \quad (30)$$

Würden sich im Knotenpunkt A nicht nur 3, sondern n Stäbe anschließen (das Widerlager des Stabes 1 in A bildend), so wäre z. B. (Fig. 66)

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\frac{1}{\tau_2^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}, \quad (31)$$

$$\mu_{1-3}^A = \frac{\frac{1}{\tau_3^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}, \quad (32)$$

$$\mu_{1-n}^A = \frac{\frac{1}{\tau_n^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}. \quad (33)$$

Selbstverständlich ist es gleichgültig, ob das Moment M_1^A in Fig. 66 ein Stützenmoment (wenn Stab 1 eine Balkenöffnung ist) oder ein Konsolmoment (wenn Stab 1 ein Kragarm ist) darstellt.

Aus der Definition der Winkel $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$ ergibt sich ohne weiteres, daß z. B. der Wert $\frac{1}{\tau_n}$ gleich ist dem Widerstand, welchen der Stab n seiner Verdrehung entgegensetzt, und wir nennen das Verhältnis $\frac{1}{\tau_n}$ daher das „Elastizitätsmaß“ des Stabes n .

Aus den Formeln (31), (32) und (33) erkennen wir nun die natürliche Beziehung, daß sich das in A eingeleitete Moment M_1^A auf die dort biegungsfest angeschlossenen („anstoßenden“) Stäbe $2, 3 \dots n$ im Verhältnis der Elastizitätsmaße derselben verteilt (daher der Ausdruck „Verteilungsmaße“), d. h. im Nenner des Ausdruckes für μ steht immer die Summe der Elastizitätsmaße der Stäbe, in welche sich ein Moment fortpflanzt,

und im Zähler das Elastizitätsmaß desjenigen Stabes, dessen Teilmoment man sucht.

In dieser Form kann man sich den Ausdruck für die Verteilungsmaße μ am besten merken.

Sonderfall.

Hat man z. B. in Fig. 67 ein Stützenmoment M_1^A in nur zwei „anstoßende“ Stäbe 2 und 3 weiterzuleiten, so ist nach Gl. (17):

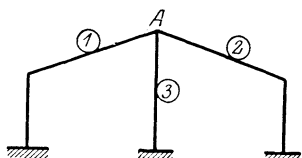


Fig. 67.

$$\tau_{2-3}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A}}, \quad (34)$$

und nach Gl. (24):

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\tau_{2-3}^A}{\tau_3^A}. \quad (35)$$

Multiplizieren wir Zähler und Nenner von Gl. (34) mit $\tau_2^A \cdot \tau_3^A$, so ergibt sich

$$\tau_{2-3}^A = \frac{\tau_2^A \cdot \tau_3^A}{\tau_2^A + \tau_3^A}. \quad (36)$$

Setzen wir diesen Wert in Gl. (35) ein, so erhalten wir

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\tau_3^A}{\tau_2^A + \tau_3^A} \quad (37)$$

und

$$\mu_{1-3}^A = \frac{\tau_2^A}{\tau_2^A + \tau_3^A}$$

oder

$$\mu_{1-3}^A = 1 - \mu_{1-2}^A, \quad \text{da} \quad \sum \mu = 1 \quad (\text{Probe}). \quad (38)$$

Wir können also in einfachen Fällen mit zwei „anstoßenden“ Stäben zur Ermittlung des gemeinsamen Drehwinkels und des Verteilungsmaßes die Drehwinkel τ_2^A und τ_3^A direkt in Formel (36) und (37) einsetzen und brauchen dann die Elastizitätsmaße $\frac{1}{\tau_1^A}$, $\frac{1}{\tau_2^A}$ usw. nicht zu bilden. Dies ist aber nur dann zweckmäßig, wenn ein Moment nur auf zwei Stäbe verteilt werden muß.

6. Einfache Drehwinkel τ .

Die in den Formeln für den Wert $\tau_{1-2-3} \dots_n$ sowie μ_{1-n} vorkommenden einfachen Drehwinkel $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$ sind zum Schluß noch zu bestimmen. Die Ableitung folgt nachstehend beispielsweise für den

Drehwinkel τ^A :

Nach der Definition des Drehwinkels τ^A bildet sich derselbe, wenn wir (Fig. 68) den in B elastisch eingespannten, in A frei drehbar gestützten Stab I mit $M^A = 1$ belasten. Dann entsteht

$$\text{in } B \text{ das Moment } -\frac{b}{l-b}.$$

Belasten wir jetzt den einfachen Balken I am Auflager A mit $M^A = 1$ und am

Auflager B mit dem Moment $-\frac{b}{l-b}$, so muß durch die Gesamtwirkung beider Momente der Drehwinkel τ^A entstehen.

Durch $M^A = 1$ entsteht (Fig. 68a) der Drehwinkel α , nach dessen Definition durch $-\frac{b}{l-b}$ in B entsteht (Fig. 68b) in A der

Drehwinkel $-\frac{b}{l-b} \cdot \beta$.

Es ist mithin:

$$\tau^A = \alpha - \frac{b}{l-b} \cdot \beta. \quad (39)$$

Setzen wir schließlich, wie aus den Fig. 52, 53 und 54 hervorgeht,

$$\alpha = \alpha^a - \beta, \quad (40)$$

so folgt zunächst

$$\tau^A = \alpha^a - \beta - \frac{b}{l-b} \cdot \beta = \alpha^a - \beta \left(1 + \frac{b}{l-b}\right) \quad (41)$$

und daraus für einen beliebigen geradlinigen Stab die Hauptformel

$$\tau^A = \alpha^a - \frac{l}{l-b} \cdot \beta. \quad (42)$$

Analog erhalten wir für den Drehwinkel τ^B am andern Ende des betreffenden Stabes AB , falls wir den in A elastisch eingespannten, in B frei drehbar gestützten Stab mit $M^B = 1$ belasten, die Hauptformel

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta. \quad (43)$$

Die Werte für die in den beiden Hauptformeln (42) und (43) vorkommenden Drehwinkel α^a , α^b und β wurden in Kap. IV für Stäbe mit veränderlichem und konstantem Trägheitsmoment abgeleitet.

Am geradlinigen Stab mit konstantem Trägheitsmoment auf seine ganze Länge ist, da in diesem Falle nach Gl. (207a): $\alpha^a = \alpha^b = 3\beta$:

$$\tau^A = \beta \left(3 - \frac{l}{l-b}\right), \quad (42a)$$

$$\tau^B = \beta \left(3 - \frac{l}{l-a}\right), \quad (43a)$$

bei voller Einspannung am anderen Ende (a resp. $b = \frac{l}{3}$) ist:

$$\tau = 1,5\beta, \quad (42b)$$

bei gelenkartiger Lagerung am anderen Ende (a resp. $b = 0$) ist:

$$\tau = 2\beta. \quad (43b)$$

7. Festpunkte und Verteilungsmaße am „offenen“ Tragwerk.

Sind für einen bestimmten Stab die Festpunkte J und K sowie die Verteilungsmaße μ zu bestimmen, so werden zuerst die in den Hauptformeln für a , b und μ vorkommenden Drehwinkel α , β , ε und τ nach den Formeln in Kap. IV, welche dort für veränderliches und konstantes Trägheitsmoment

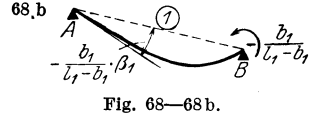
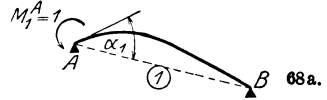
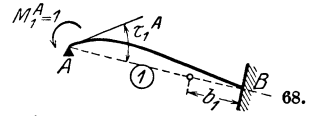


Fig. 68—68b.

eines Stabes angeschrieben sind, ermittelt, und diese Werte in die genannten Hauptformeln eingesetzt.

Da sich die in irgendeinem Stab auftretenden Momente über das ganze Tragwerk fortpflanzen, so müssen an allen Stäben die Festpunkte und an jedem Knotenpunkt die Verteilungsmaße bestimmt werden. Die Frage entsteht nun, an welchem Stab wir bei der Bestimmung der Festpunkte beginnen, d. h. welchen Stabes Festpunkt wir zuerst ermitteln müssen. Beginnen wir

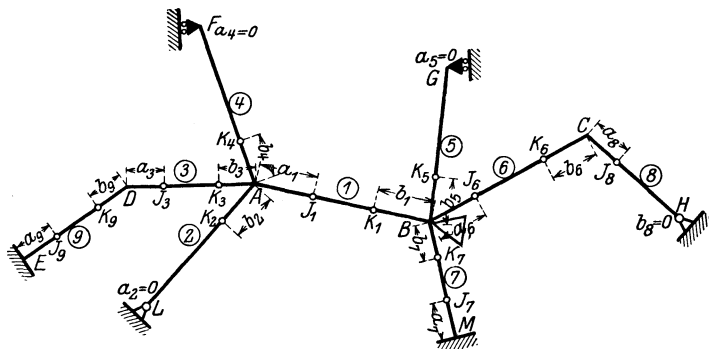


Fig. 69.

z. B. an dem „offenen“ Tragwerk der Fig. 69 mit dem Stab 1, so erhalten wir die Festpunktabstände aus:

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^a + \tau_{2-3-4}^A}, \tag{44}$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \tau_{5-6-7}^B}. \tag{45}$$

In diesen Ausdrücken beziehen sich die Winkel α_1^a , α_1^b und β_1 auf den Stab 1, der Winkel τ_{2-3-4}^A aber auf die links und der Winkel τ_{5-6-7}^B auf die rechts anstoßenden Stäbe. Um den Winkel τ_{2-3-4}^A und hierzu die Winkel τ_2^A , τ_3^A und τ_4^A berechnen zu können, benötigen wir jedoch die Festpunktabstände a der Stäbe 2, 3 und 4 (der Abstand a_4 wird gleich Null wegen des freien Auflagers in F). Und um den Festpunktabstand a_3 des Stabes 3 bestimmen zu können, brauchen wir den Winkel $\varepsilon_3^D = \tau_9^D$ und zu letzterem Wert wiederum den Festpunktabstand a_9 . Das Analoge gilt für den Drehwinkel τ_{5-6-7} , welcher in dem Ausdruck für b_1 vorkommt. Aus diesem Grunde müssen wir mit der Bestimmung des am weitesten links gelegenen Festpunktabstandes a beginnen und schreiten nach rechts fort und analog beginnen wir mit der Bestimmung des am weitesten rechts gelegenen Festpunktabstandes b und schreiten nach links fort.

Da der Stab 9 an seinem linken Ende fest eingespannt ist, so ist in Hauptformel (7) $\varepsilon^a = 0$ zu setzen und es ist

$$a_9 = \frac{l_9 \cdot \beta_9}{\alpha_9^a}. \tag{46}$$

Bei konstantem Trägheitsmoment des Stabes 9 ist mit Einsetzung des entsprechenden Wertes für β aus Gl. (207) und α^a aus Gl. (204)

$$a_9 = \frac{l_9}{3}. \tag{47}$$

Für Stab 3 erhalten wir unter Berücksichtigung, daß in Hauptformel (7) $\varepsilon^a = \tau_9^D$ zu setzen ist:

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + \tau_9^D}. \quad (48)$$

Für Stab 2, welcher an seinem unteren Ende ein frei drehbares Auflager besitzt, ist $\varepsilon^a = \infty$, d. h.

$$a_2 = 0. \quad (49)$$

Für Stab 4, dessen linkes Ende frei aufgelagert (Rollenlager) angenommen wurde, ist ebenfalls $\varepsilon^a = \infty$, d. h.

$$a_4 = 0.$$

Nun können wir a_1 aus Formel (44) bestimmen. Nachdem wir noch a_7 ermittelt haben aus

$$a_7 = \frac{l_7 \cdot \beta_7}{\alpha_8^a}, \quad (50)$$

da wegen fester Einspannung in M : $\varepsilon_7 = 0$, so ergibt sich auch a_6 und darauf a_8 .

Analog verfahren wir bei der Bestimmung der Festpunktabstände b : Wir beginnen mit b_8 ; wegen des Gelenkes in H ist

$$b_8 = 0. \quad (51)$$

Dann berechnen wir b_6 , b_5 und b_7 und ermitteln darauf b_1 , dann b_2 , b_3 und b_4 und zuletzt b_9 . Es ist

$$b_6 = \frac{l_6 \cdot \beta_6}{\alpha_6^b + \tau_8^C}, \quad (52)$$

worin $\tau_8^C = \alpha_8$, da $b_8 = 0$,

$$b_5 = \frac{l_5 \cdot \beta_5}{\alpha_5^b + \tau_{1-6-7}^b}, \quad (53)$$

$$b_7 = \frac{l_7 \cdot \beta_7}{\alpha_7^b + \tau_{1-5-6}^b}, \quad (54)$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \tau_{5-6-7}^b}, \quad (55)$$

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^b + \tau_{1-3-4}^A}, \quad (56)$$

$$b_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^b + \tau_{1-2-4}^A}, \quad (57)$$

$$b_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^b + \tau_{1-2-3}^A}, \quad (58)$$

$$b_9 = \frac{l_9 \cdot \beta_9}{\alpha_9^b + \tau_3^D}. \quad (59)$$

Was die Bestimmung der Verteilungsmaße μ betrifft, so ist nur noch zu bemerken, daß die Anzahl der zu ermittelnden Verteilungsmaße sich

nach den belasteten Stäben richtet. Ist z. B. in Fig. 69 nur Stab 1 belastet, so sind zu bestimmen:

$$\mu_{1-2}, \mu_{1-3},$$

$$\mu_{1-4} = 1 - (\mu_{1-2} + \mu_{1-3})$$

sowie

$$\mu_{1-5}, \mu_{1-6},$$

$$\mu_{1-7} = 1 - (\mu_{1-5} + \mu_{1-6}).$$

Ist auch Stab 3 belastet, so sind noch zu ermitteln:

$$\mu_{3-4}, \mu_{3-1},$$

$$\mu_{3-2} = 1 - (\mu_{3-4} + \mu_{3-1}).$$

8. Festpunkte und Verteilungsmaße am „einseitig offenen“ Tragwerk.

Haben wir es nicht mit einem allseitig offenen, sondern mit einem nur einseitig offenen Tragwerk zu tun, wie z. B. in Fig. 70, so beginnen wir auf der offenen Seite des Tragwerks, und zwar mit der Bestimmung der Festpunkt-

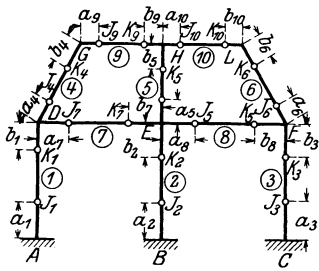


Fig. 70.

abstände a_1, a_2 und a_3 . Um mit der Berechnung fortfahren zu können, müssen wir, weil das Tragwerk oben durch die Stäbe 9 und 10 geschlossen ist, diejenigen Festpunktabstände vorläufig schätzen, die uns zur Berechnung der benötigten Drehwinkel fehlen. Um die Festpunktabstände an den Stäben 7 und 8 bestimmen zu können, müssen wir die oberen Festpunkte K der Stäbe 4, 5 und 6 vorläufig schätzen. Zweckmäßig wird gewählt:

$$a \text{ oder } b = 0,2 \text{ bis } 0,3 l, \tag{60}$$

je nach dem Einspannungsgrad an dem zu a oder b gehörigen Stabende.

Um eine möglichst genaue Schätzung zu erhalten, gehen wir unter Beachtung der Tatsache, daß der Einfluß eines unrichtig angenommenen Festpunktabstandes auf die zu berechnenden folgenden Festpunktabstände rasch abnimmt, zweckmäßig wie folgt vor: Anstatt die Abstände b_4, b_5 und b_6 zu schätzen, errechnen wir dieselben, indem wir die dazu nötigen vorhergehenden Festpunktabstände, nämlich in unserem Falle a_9, b_9, a_{10} und b_{10} zwischen 0,2 und 0,3 l annehmen. Auf diese Weise erhalten wir für die Abstände b_4, b_5 und b_6 „geschätzte“ Werte, welche sich bei der späteren Kontrollrechnung kaum ändern werden. Auf Grund dieser Werte von b_4, b_5 und b_6 erhalten wir dann:

$$a_7 = \frac{l_7 \cdot \beta_7}{\alpha_7^2 + \tau_{1-4}^D} \tag{61}$$

und weiter nach rechts fortschreitend

$$a_8 = \frac{l_8 \cdot \beta_8}{\alpha_8^2 + \tau_{2-5-7}^D} \tag{62}$$

Ferner können wir nun anschreiben:

$$b_8 = \frac{l_8 \cdot \beta_8}{\alpha_8^b + \tau_{3-6}^F} \quad (63)$$

und weiter nach links fortschreitend

$$b_7 = \frac{l_7 \cdot \beta_7}{\alpha_7^b + \tau_{2-5-8}^E}. \quad (64)$$

Nun können wir die Lage der Festpunkte J_4 , J_5 und J_6 bestimmen, und zwar ist

$$a_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^a + \tau_{1-7}^D}, \quad (65)$$

$$a_5 = \frac{l_5 \cdot \beta_5}{\alpha_5^a + \tau_{2-7-8}^E}, \quad (66)$$

$$a_6 = \frac{l_6 \cdot \beta_6}{\alpha_6^a + \tau_{3-8}^F}, \quad (67)$$

und die Festpunktabstände an den Balken 9 und 10 ergeben sich nun zu:

$$a_9 = \frac{l_9 \cdot \beta_9}{\alpha_9^a + \tau_4^G} \quad (68)$$

und nach rechts fortschreitend

$$a_{10} = \frac{l_{10} \cdot \beta_{10}}{\alpha_{10}^a + \tau_{5-9}^H}. \quad (69)$$

Ferner

$$b_{10} = \frac{l_{10} \cdot \beta_{10}}{\alpha_{10}^b + \tau_6^I} \quad (70)$$

und nach links fortschreitend

$$b_9 = \frac{l_9 \cdot \beta_9}{\alpha_9^b + \tau_{5-10}^H}. \quad (71)$$

Da wir die Festpunktabstände b_4 , b_5 und b_6 nur geschätzt hatten, so müssen wir nun diese Abstände dadurch kontrollieren, daß wir die Rechnung von oben herunter durchführen unter der Annahme, daß die Festpunktabstände an den Balken 9 und 10 richtig seien. Wurden die Festpunktabstände b_4 , b_5 und b_6 schlecht geschätzt, so werden sich dieselben bei der Rechnung von oben herunter etwas ändern und eine zweite Rechnung von unten hinauf auf Grund der korrigierten „geschätzten“ Abstände b_4 , b_5 und b_6 bringt uns dann dem genau richtigen Resultate derart nahe, daß eine weitere Rechnung in den meisten Fällen überflüssig wird.

An Stelle der Festpunktabstände b_4 , b_5 und b_6 hätten wir auch die Festpunktabstände a_7 , b_7 , a_8 und b_8 an den Balken 7 und 8 als „geschätzte“ annehmen und auf Grund dieser die Lage der Festpunkte an den Säulen 4, 5, 6 und an den Balken 9 und 10 berechnen können. Wir hätten dann aber vier Festpunkte schätzen müssen anstatt drei, und es ist klar, daß je mehr Festpunkte als „geschätzte“ eingeführt werden, desto länger dauert die Rechnung, bis ein bestimmter Genauigkeitsgrad in den Festpunktabständen erreicht ist. Theoretisch können alle Festpunkte zuerst geschätzt und dann durch Durch-

führen der Rechnung allmählich auf den gewünschten Genauigkeitsgrad, d. h. dahin gebracht werden, daß die Werte bei wiederholter Durchrechnung keine Abweichungen mehr zeigen, aber dies wäre Zeitverschwendung.

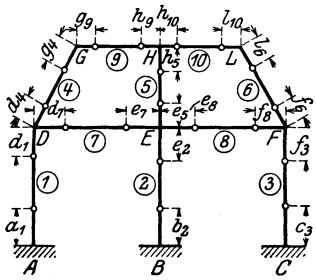


Fig. 70 a.

Wenn alle Festpunkte bekannt sind, werden die erforderlichen Verteilungsmaße μ wie früher beschrieben ermittelt.

Es sei noch erwähnt, daß es ganz gleichgültig ist, an welchem Stabende der Festpunktabstand mit a oder b bezeichnet wird, denn an einem einseitig offenen oder geschlossenen Tragwerk können nie zuerst alle Festpunktabstände a und dann alle Abstände b ermittelt werden. Aus diesem Grunde

kann es bei solchen Tragwerken zweckmäßig sein, die Festpunktabstände nicht mit a und b , sondern mit dem kleinen Buchstaben desjenigen Knotenpunktes zu bezeichnen, von dem aus sie gemessen werden (siehe Fig. 70 a).

9. Festpunkte und Verteilungsmaße am „geschlossenen“ Tragwerk.

Aus dem einseitig offenen Tragwerk der Fig. 70 wird ein „geschlossenes“ Tragwerk, wenn, wie dies in Fig. 71 dargestellt ist, die Auflagerpunkte A , B und C durch zwei Balken 11 und 12 miteinander verbunden sind.

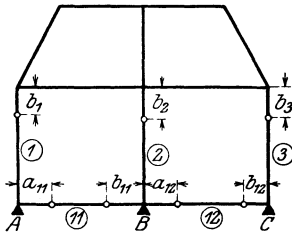


Fig. 71.

In diesem Falle beginnen wir bei der Bestimmung der Festpunkte ebenfalls unten, wir müssen jedoch, da das Tragwerk unten nicht mehr offen ist, auch noch die Festpunktabstände b_1 , b_2 und b_3 vorläufig schätzen, und zwar zweckmäßig analog dem unter „einseitig offenes Tragwerk“ Gesagten, worauf wir in der Lage sind, die Festpunktabstände an den

Balken 11 und 12 zu berechnen. Es ist

$$a_{11} = \frac{l_{11} \cdot \beta_{11}}{\alpha_{11}^a \cdot \tau_1^A} \quad (72)$$

und nach rechts fortschreitend

$$a_{12} = \frac{l_{12} \cdot \beta_{12}}{\alpha_{12}^a \cdot \tau_{2-11}^B} \quad (73)$$

Ferner ist

$$b_{12} = \frac{l_{12} \cdot \beta_{12}}{\alpha_{12}^b \cdot \tau_3^C} \quad (74)$$

und nach links fortschreitend

$$b_{11} = \frac{l_{11} \cdot \beta_{11}}{\alpha_{11}^b \cdot \tau_{2-12}^B} \quad (75)$$

Alle übrigen Festpunktabstände können wir nun wie am einseitig offenen Tragwerk der Fig. 70 bestimmen.

In alle Ausdrücke für a , b und μ sind die in Kap. IV abgeleiteten Werte für die Drehwinkel β , α^a , α^b und τ einzusetzen, und zwar unter Berücksichtigung des Verlaufes des Trägheitsmomentes des betreffenden Stabes. Ist der Verlauf des Trägheitsmomentes symmetrisch zur Stabmitte, so ist $\alpha^a = \alpha^b$.

Es sei hiermit noch auf die Zahlenbeispiele am Schlusse verwiesen, in welchen die Lage der Festpunkte und die Verteilungsmaße zahlenmäßig bestimmt wurden.

10. Sonderfälle.

a) Der durchlaufende Balken auf frei drehbaren Stützen.

In Fig. 72 haben wir einen gewöhnlichen durchlaufenden (kontinuierlichen) Balken dargestellt, und in Fig. 72a einen solchen mit einem Knick an den Auf-

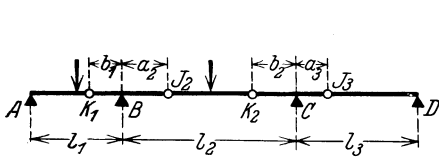


Fig. 72.

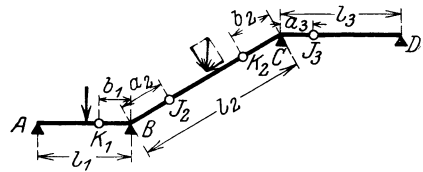


Fig. 72a.

lagern B und C (Treppenlauf); für die Berechnung sind beide Fälle gleich. Der durchlaufende Balken ist dadurch gekennzeichnet, daß an jedem Stützpunkt nur ein Stab „anstößt“. Aus diesem Grunde ist der in den Hauptformeln (7) und (8) für die beiden Festpunktabstände eines Stabes vorkommende Drehwinkel ε identisch mit dem einfachen Drehwinkel τ an dem betreffenden Stabende und die Festpunktabstände erhalten die Werte:

$$a_1 = 0, \tag{76}$$

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + \tau_1^B}, \tag{77}$$

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + \tau_2^C}, \tag{78}$$

$$b_3 = 0, \tag{79}$$

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^b + \tau_3^C}, \tag{80}$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \tau_2^B}. \tag{81}$$

In diese Ausdrücke sind die in Kap. IV abgeleiteten Werte für die Drehwinkel β , α^a , α^b und τ einzusetzen, und zwar sind die Werte verschieden, je nachdem das Trägheitsmoment des betreffenden Stabes konstant oder veränderlich ist. Ist ein Stab symmetrisch zu seiner Mitte ausgebildet, so ist $\alpha^a = \alpha^b$.

Verteilungsmaße gibt es am durchlaufenden Balken auf frei drehbaren Stützen keine zu bestimmen (sie sind gleich 1), da an jedem Knotenpunkt nur ein Stab anstößt. und deshalb das volle Moment in diesen Stab übergeht.

b) Das einfache geschlossene Tragwerk.

Dieser Fall entsteht, wenn wir, wie aus Fig. 73 ersichtlich, einen durchlaufenden Balken auf frei drehbaren Stützen in sich schließen, so daß wir einen endlosen Stabzug mit beliebig vielen Stäben vor uns haben.

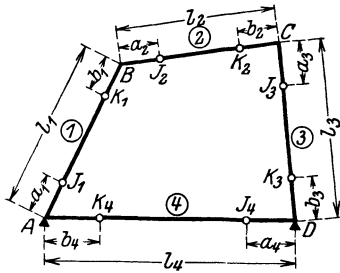


Fig. 73.

Da wir es mit einem geschlossenen Tragwerk zu tun haben, so müssen wir allgemein, um die Berechnung durchführen zu können, wie bereits an Fig. 70 erläutert, einen Festpunktabstand a und einen Festpunktabstand b vorläufig schätzen und dann die Rechnung mit den korrigierten Werten so lange fortsetzen, bis sich keine Abweichung mehr ergibt.

Wir schätzen z. B. den Festpunktabstand a_1 zu $0,25 l_1$ und erhalten nun

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + \tau_1^B} \quad (82)$$

(τ_1^B wird auf Grund des geschätzten Festpunktabstandes a_1 berechnet),

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + \tau_2^C}, \quad (83)$$

$$a_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^a + \tau_3^D}. \quad (84)$$

Weiter im Kreise herum fortschreitend erhalten wir nun für a_1 einen neuen Wert durch Einführung des auf Grund von a_4 zu errechnenden Drehwinkels τ_4^A zu:

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^a + \tau_4^A} \quad (85)$$

und mit diesem neuen Wert von a_1 können wir die obige Rechnung wiederholen, d. h. die Gl. (82), (83) und (84) frisch anschreiben, um dann wieder einen genaueren Wert für a_1 zu erhalten.

Ist die Abweichung von dem vorhergehend erhaltenen Wert noch nicht klein genug, d. h. der gewünschte Genauigkeitsgrad noch nicht erreicht, was selten der Fall ist, so kann derselbe durch Wiederholung der Rechnung beliebig gesteigert werden.

Analog gehen wir zur Bestimmung der Festpunktabstände b vor, indem wir z. B. b_4 vorläufig schätzen und dann in entgegengesetztem Drehsinn des Uhrzeigers so lange fortschreiten, bis der gewünschte Genauigkeitsgrad erreicht ist. Es ist

$$b_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^b + \tau_4^D} \quad (86)$$

(τ_4^D wird auf Grund des geschätzten Festpunktabstandes b_5 berechnet),

$$b_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^b + \tau_3^C}, \quad (87)$$

$$b_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^b + \tau_2^B}, \quad (88)$$

und hierauf erhalten wir den neuen Wert von b_5 zu:

$$b_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^b + \tau_1^A}, \quad (89)$$

mit welchem wir die Rechnung fortsetzen.

Anstatt zunächst je einen Festpunktabstand a und b zu schätzen, können wir am einfachen geschlossenen Rahmen mit beliebig vielen Stäben auch wie folgt vorgehen:

Zur Bestimmung der Festpunktabstände a schreiben wir den Ausdruck für den Abstand a_2 an und lassen in dem darin einzusetzenden Wert für τ_1^B den Abstand a_1 als unbekannt stehen, anstatt dafür einen geschätzten Zahlenwert einzusetzen, dann ist

$$\tau_1^B = Z_1 \cdot a_1 \tag{90}$$

und

$$a_2 = \frac{l_2 \cdot \beta_2}{\alpha_2^a + Z_1 \cdot a_1}, \tag{91}$$

wenn Z_1 der Zahlenwert ist, welcher mit a_1 multipliziert den Drehwinkel τ_1^B ergibt.

Im Kreise herum fortschreitend ergibt sich:

$$a_3 = \frac{l_3 \cdot \beta_3}{\alpha_3^a + Z_2 \cdot a_2}, \tag{92}$$

$$a_4 = \frac{l_4 \cdot \beta_4}{\alpha_4^a + Z_3 \cdot a_3} \tag{93}$$

und

$$a_1 = \frac{l_1 \cdot \beta_1}{\alpha_1^a + Z_4 \cdot a_4}. \tag{94}$$

Zur Bestimmung der 4 unbekanntenen Festpunktabstände a_1, a_2, a_3 und a_4 stehen uns nun die 4 Gleichungen (94), (91), (92) und (93) zur Verfügung.

Wir ermitteln nun hieraus den Wert von a_1 , indem wir in Gl. (94) nacheinander die Werte von a_4 auf Gl. (93), a_3 aus Gl. (92) und a_2 aus Gl. (91) einsetzen, und dann eine quadratische Gleichung von der Form

$$A \cdot a_1^2 + B \cdot a_1 + C = 0$$

erhalten, woraus sich der Festpunktabstand a_1 ergibt.

Nachdem nun der genaue Wert von a_1 bekannt ist, kann nach Gl. (91) der Abstand a_2 , darauf nach Gl. (92) der Abstand a_3 und nach Gl. (93) der Abstand a_4 errechnet werden.

In analoger Weise können die Festpunktabstände b_4, b_3, b_2 und b_1 bestimmt werden.

Aus der Bestimmung der Festpunkte am Zahlenbeispiel Nr. 6 erkennt man, daß es bequemer ist, den ersten Festpunkt zu schätzen, als ihn allgemein bei n Stäben aus einem System von n Gleichungen zu berechnen.

Sind in einem geschlossenen Stabzug, wie z. B. in dem in Fig. 74 dargestellten Behältergrundriß, von sämtlichen aufeinanderfolgenden Stäben die eine Hälfte gleich der anderen Hälfte, d. h.

$$\begin{aligned} \text{Stab } 1 &= \text{Stab } 5, \\ \text{„ } 2 &= \text{„ } 6, \\ \text{„ } 3 &= \text{„ } 7, \\ \text{„ } 4 &= \text{„ } 8, \end{aligned}$$

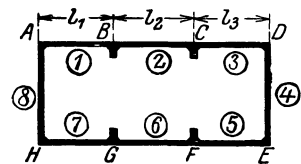


Fig. 74.

so beträgt die Anzahl der zur Bestimmung der Festpunktabstände bei n Stäben benötigten Gleichungen nur $\frac{n}{2}$, aus denen die quadratische Gleichung für den Abstand a des ersten Stabes hervorgeht.

Ist ein geschlossener Stabzug, wie z. B. der in Fig. 75 dargestellte Behältergrundriß, symmetrisch in bezug auf seine Mitte, sowie gleichzeitig symmetrisch belastet (Flüssigkeitsdruck), so vereinfacht sich die Berechnung der Festpunktabstände wesentlich, indem wir von vornherein wissen, daß die Tangente der elastischen Linie in C und H horizontal bleiben muß. Aus diesem

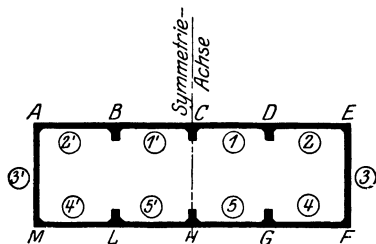


Fig. 75.

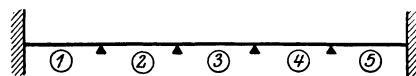


Fig. 75 a.

Grunde können wir den Behälter in C und H als durchgeschnitten und darauf fest eingespannt betrachten, d. h. jede Behälterhälfte wie einen durchlaufenden Balken mit 5 Feldern und voller Einspannung an beiden Enden (siehe Fig. 75 a) berechnen.

c) Das einfache geschlossene Tragwerk mit beliebig vielen gleich langen Stäben und konstantem Trägheitsmoment bzw. der durchlaufende Balken mit unendlich vielen Feldern.

Sind in Fig. 73 alle Stäbe einander gleich, d. h. $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$, so ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Setzen wir in die Hauptformel (7) für den Festpunktabstand a die Werte für die Drehwinkel β , α und τ für konstantes Trägheitsmoment der Stäbe ein, d. h. nach Gl. (207)

$$\beta = \frac{l}{6 EJ},$$

nach Gl. (204)

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha} = \frac{l}{2 EJ}$$

und nach Gl. (42), nachdem die genannten Werte von α^a und β darin eingesetzt wurden

$$\tau = \frac{l(2l - 3a)}{6 EJ(l - a)},$$

so erhalten wir

$$a = \frac{l}{3 + \frac{2l - 3a}{l - a}} \quad (95)$$

oder

$$6a^2 - 6al + l^2 = 0, \quad (96)$$

woraus folgt:

$$a = b = 0,2113 l. \quad (97)$$

Diese Formel gilt nicht etwa nur für ein gleichseitiges Viereck, sondern ganz allgemein für ein gleichseitiges Vieleck bzw. den unendlich langen durchlaufenden Balken mit gleichen Feldern.

III. Graphische Bestimmung der Festpunkte und der Verteilungsmaße.

Das von Wilhelm Ritter-Zürich (Graphische Statik, III. Band) für konstantes Tragheitsmoment angegebene graphische Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Stützen ist gerade für diesen Fall sehr zweckmäßig und Verfasser hat deshalb das Verfahren dahin erweitert, daß es auch am durchlaufenden Balken mit beliebig veränderlichem Tragheitsmoment aller Stäbe angewendet werden kann. Das graphische Verfahren könnte auch an jedem unsymmetrischen Rahmen (Fig. 101) angewendet werden, es führt jedoch bei nicht in einer Geraden liegenden Stäben zu wenig übersichtlichen Darstellungen.

Der Ableitung der graphischen Bestimmung der Festpunkte legen wir den in Fig. 76 dargestellten durchlaufenden Balken $ABCDE$ mit beliebig veränderlichem Tragheitsmoment auf vier mit dem Balken biegungsfest verbundenen Pfeilern $ABCD$ und einer frei drehbaren Stütze E , an welcher der Balken unverschiebbar festgehalten ist, zugrunde. Der Pfeiler A ist an seinem Fuße gelenkig gelagert, während die Pfeiler B , C und D unten fest eingespannt sind. Es sei nur eine Balkenöffnung, beispielsweise die zweite, mit den Kräften P_1 , P_2 und P_3 belastet, es könnte aber ebensogut ein Pfeiler belastet sein (vgl. Fig. 88). Das Verfahren, welches im folgenden abgeleitet wird, gilt sowohl für die Festpunkte am Balken als auch an den Pfeilern. Zur Herleitung aller Formeln und graphischen Konstruktionen gehen wir von der elastischen Linie des Tragwerkes aus.

Um zur elastischen Linie des durchlaufenden Balkens der Fig. 76 zu gelangen, nehmen wir die von der gegebenen äußeren Belastung herrührende, in Fig. 77 schraffierte Momentenfläche des durchlaufenden Balkens vorläufig als bekannt an, betrachten dieselbe nach Mohr (siehe Ableitung im folgenden Kap. IV) als Belastungsfläche und zeichnen zu dieser ein Seileck, welches die elastische Linie des Balkens darstellt, und zwar führen wir im allgemeinsten Falle als Belastungsfläche die $\frac{1}{E \cdot J}$ fache (reduzierte) Momentenfläche ein und zeichnen das Krafteck der elastischen Linie mit der Polweite $H = 1$. Ist der Elastizitätsmodul E am ganzen Tragwerk konstant, so bilden wir nur die $\frac{1}{J}$ fache Momentenfläche und erhalten damit die E fachen Ordinaten der elastischen Linie.

Im vorliegenden Falle handelt es sich nicht um die wirkliche Form der elastischen Linie, sondern es genügt, dieselbe durch einige wenige Tangenten darzustellen. Das Seileck, welches diese Tangenten bilden, bezeichnen wir kurz als „elastisches Tangenteneck“ und die Tangenten der elastischen Linie an den Stützen als „Stützentangenten“.

Zur Bestimmung des elastischen Tangentenecks (Fig. 78) betrachten wir in Fig. 76 die schraffierte Momentenfläche der belasteten Öffnung BC als die Differenz zwischen dem positiven Fünfeck $BGC = F_5$ (in Fig. 76 sind die entsprechenden reduzierten Momentenflächen F'_5 usw. eingetragen) und dem negativen Trapez $BB''C''C$, welches wir überdies durch die Diagonalen $B'C$, $B''C'$

und $B''C'$ in die vier negativen Momentendreiecke $BB'C = F_3$, $B'B''C = F_4$, $B''CC' = F_7$, $B''C'C'' = F_6$ zerlegen. Es ist hervorzuheben, daß die Zerlegung des negativen Trapezes $BB''C''C$ derart erfolgt, daß die Pfeilerkopfmomente $B'B''$ und $C'C''$ die Höhen von zwei besonderen Dreiecken bilden. Ferner betrachten wir in der Öffnung AB die schraffierte Momentenfläche $AA'W_1B'B$, welche ein überschlagenes Viereck bildet, als die Zusammensetzung des positiven Momentendreieckes $AA'B' = F_1$ und des negativen Momentendreieckes $ABB' = F_2$; ebenso betrachten wir das schraffierte überschlagene Momentenviereck $CC'W_3D''D$ der Öffnung CD als die Zusammensetzung des negativen Momentendreieckes $CC'D = F_8$ und des positiven Momentendreieckes $C'DD''$, welches wir noch durch die Diagonale $C'D'$ in die zwei Dreiecke $C'DD' = F_{10}$ und $C'D'D'' = F_9$ teilen.

Zu den auf vorgenannte Weise entstandenen elf Teilmomentenflächen F_1, F_2, \dots, F_{11} denken wir uns die $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen, d. h. die entsprechenden reduzierten Momentenflächen $F'_1 \dots F'_{11}$ gebildet und die Inhalte der letzteren in ihren entsprechenden Schwerpunkten zu den in Fig. 76 eingetragenen Einzelkräften $F'_1 \dots F'_{11}$ vereinigt (in Fig. 76 sind die Begrenzungslinien der reduzierten Momentenflächen weggelassen); diese Kräfte tragen wir unter Einführung der positiven Flächen als nach unten und der negativen Flächen als nach oben gerichtete Kräfte in dem mit der Polweite $H = 1$ gezeichneten Krafteck der Fig. 78a zusammen. Das zu letzterem in Fig. 78 gezeichnete Seileck ist das gesuchte elastische Tangenteneck, welches der Bedingung unterworfen ist, daß jede Stützentangente wegen der vorausgesetzten vertikalen Unverschiebbarkeit der Stützpunkte durch den Schnittpunkt von Balken- und Stützenachse gehen muß. Da nun die Ecken des elastischen Tangenteneckes nach obigem auf den senkrechten Schwerlinien der reduzierten Momentenflächen (Einzelkräfte) $F'_1 \dots F'_{11}$ liegen, so besteht die nächste Aufgabe darin, die Lage dieser Schwerlinien festzulegen. Von vornherein können wir nur die vertikale Schwerlinie der Fläche F'_5 bestimmen, weil wir deren zugeordnete einfache Momentenfläche BGC ohne weiteres zu zeichnen vermögen, die übrigen zehn Schwerlinien, welche Momentendreiecken zugeordnet sind und daher „Drittellinien“ genannt werden (obwohl dieselben bei dem vorliegenden allgemeinen Fall nicht im Drittelpunkt der Öffnung liegen), können wir wie folgt ermitteln, auch ohne die Stützhöhen dieser Momentendreiecke, d. h. ohne die Stützenmomente zu kennen.

1. Drittellinien.

Bezeichnen wir mit d^l den Abstand der linken Drittellinie einer Öffnung vom linken Auflager, und mit d^r den Abstand der rechten Drittellinie vom rechten Auflager dieser Öffnung, ferner mit einem angehängten Zeiger $1 \dots 4$ die Ordnungszahl der Öffnung, so erhalten wir beispielsweise den

Abstand d_1^l der linken Drittellinie

in der ersten Öffnung, d. h. den Schwerpunktsabstand d_1^l der $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche F'_1 vom linken Auflager A aus dem Dreieck $A_5A'_5B_5$

(Fig. 80 oder 76a, letztere ist ein Ausschnitt aus Fig. 80) mit der Stützweite l_1 als Grundlinie und der beliebigen Stützhöhe h (zweckmäßig $h = 1$) in A wie folgt:

a) Analytisch.

Es sei (Fig. 80 oder 76a) AA''_5GB_5 die dem Momentendreieck $A_5A'_5B_5$ entsprechende $\frac{1}{E \cdot J}$ fache (reduzierte) Momentenfläche. Wir teilen dieselbe in verhältnismäßig schmale senkrechte Streifen mit der Breite Δs , dem Schwerpunktabstand z vom linken und z' vom rechten Ende der Öffnung l_1 ; der Inhalt ΔF eines solchen, in Fig. 80 oder 76a durch Schraffur hervorgehobenen Flächenstreifens („elastisches Gewicht“) beträgt:

$$\Delta F = \frac{\Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1}. \quad (98)$$

Dieser Ausdruck für ΔF und die folgenden für d und v sind nur dann richtig, wenn man die Streifen der reduzierten Momentenfläche so schmal macht, daß der Schwerpunkt derselben in ihrer Mitte ($\frac{\Delta s}{2}$) angenommen werden kann, denn sonst müßte man nach Reduktion der Momentenfläche die Inhalte der Flächenstreifen und deren Schwerpunkte ermitteln, wodurch man neue Werte für die Abstände z erhielte. Man sieht aber aus den Zahlenbeispielen in Band II, daß man nur dann die Schwerpunkte nicht in Streifenmitte annehmen darf, wenn man sehr große Streifenbreiten annimmt (Zahlenbeispiel Nr. 1). Auch für die Streifen an den Dreiecksspitzen, z. B. ΔF_7 , darf trotz Dreiecksform der betreffenden reduzierten Momentenfläche Streifenmitte als Schwerpunkt angenommen werden, da das betreffende elastische Gewicht verhältnismäßig klein ist und dasselbe außerdem noch nahe am Auflager wirkt.

Nach der Schwerpunktslehre erhält man aus dem Moment aller Flächenstreifen in bezug auf die Senkrechte durch A , wenn wir

$$\frac{\Delta s}{J} = w$$

setzen:

$$d_1^l = \frac{\sum_0^{l_1} \Delta F \cdot z}{\sum_0^{l_1} \Delta F} = \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z'}. \quad (99)$$

b) Graphisch.

Trägt man die Kräfte ΔF aus Gl. (98) mittels Kraft- und Seileck mit beliebiger Polweite und in beliebigem Kräftemaßstab zusammen (Fig. 80 u. 80a), so erhält man die linke Drittellinie der Öffnung l_1 als Schwerlinie dieser Kräfte. Da es hierbei nicht auf die wirkliche Größe der durch Gl. (98) ausgedrückten Kräfte ΔF , sondern nur auf ihr gegenseitiges Verhältnis ankommt, so trägt man diese Kräfte ΔF in der einfacheren Form

$$\Delta F = w \cdot \frac{z'}{l_1}$$

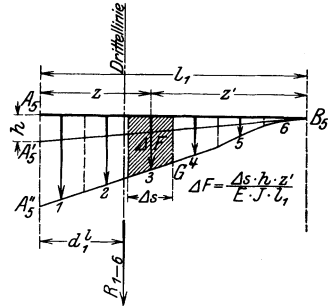


Fig. 76a.

auf, weil h und E konstant sind; obwohl l auch konstant, ist es wegen der späteren Ermittlung der verschränkten Drittellinie zweckmäßig, die Spannweite l in der Formel mitzuführen.

Das hierbei entstehende Seileck benötigen wir später noch bei der Ermittlung der Kreuzlinienabschnitte (Kap. V), jedoch mit waagerechter Schlußlinie, so daß es zweckmäßig ist, dieses Seileck gleich so zu zeichnen, was wir am einfachsten wie folgt erreichen: Nachdem wir das Seileck zuerst mit beliebiger Polweite und damit beliebiger Richtung der Schlußlinie gezeichnet haben, ziehen wir zu der letzteren, eine Parallele durch den Pol, bestimmen den Schnittpunkt derselben mit dem Kräftezuge des Kraftecks, ziehen durch diesen Schnittpunkt eine Waagerechte und tragen auf der letzteren die Polweite ab; dadurch erhalten wir einen neuen Pol, mit welchem nun das endgültige Seileck mit waagerechter Schlußlinie gezeichnet werden kann.

Die Polweite des Kraftecks (Fig. 80a) wählt man zweckmäßig derart, daß man die Endstrahlen des Seilecks (Fig. 80) nicht flacher, sondern eher steiler als die 45° -Neigung erhält wegen des späteren Abgreifens der Abschnitte s . Was den Kräftemaßstab betrifft, so ist es zweckmäßig, wenn für alle Kraftecke, welche zur Bestimmung der Drittellinien am ganzen durchlaufenden Balken dienen, wegen Ermittlung der verschränkten Drittellinien, derselbe Maßstab gewählt wird.

Ist der Balken symmetrisch zu seiner Mitte, so ist

$$d_1^r = d_1^l,$$

und es braucht dann in jeder Öffnung nur die Schwerlinie eines reduzierten Momentendreiecks (mit Spitze am einen oder am andern Ende) bestimmt zu werden; d. h. wenn in Fig. 80 d_1^l ermittelt wurde, wird bei symmetrischem Balken Fig. 83 überflüssig.

Den

Abstand d_1 der rechten Drittellinie

der ersten Öffnung (senkrechte Schwerlinie der reduzierten Momentenfläche F_2') vom rechten Auflager B erhalten wir aus dem Momentendreieck $A_6 B_6 B_6'$ (Fig. 83 oder 76b) mit der Grundlinie l_1 und der beliebigen Stützhöhe h (zweckmäßig $h = 1$) in B auf analoge Weise.

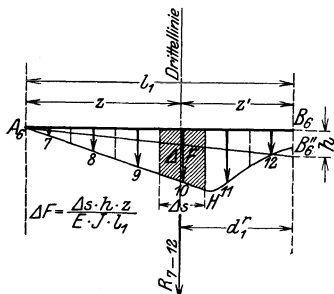


Fig. 76 b.

a) Analytisch.

Es sei (Fig. 83 oder 76b) $A_6 H B_6'' B_6$ die dem Momentendreieck $A_6 B_6 B_6'$ zugeordnete $\frac{1}{E \cdot J}$ -fache (reduzierte) Momentenfläche. Wir teilen dieselbe wieder in schmale senkrechte Streifen mit der Breite Δs , dem Schwerpunktsabstand z vom linken und z' vom rechten Ende der Öffnung l_1 .

Der Inhalt ΔF eines solchen in Fig. 83 oder 76b schraffierten Flächenstreifens beträgt:

$$\Delta F = \frac{\Delta s \cdot h \cdot z}{E \cdot J \cdot l_1}. \quad (100)$$

Bezüglich Wahl der Breite dieser Streifen gilt das für die linke Drittellinie Gesagte.

Nach der Schwerpunktslehre erhält man aus dem Moment aller Flächenstreifen in bezug auf die Senkrechte durch B , wenn wir wieder $\frac{\Delta s}{J} = w$ setzen:

$$d_1^r = \frac{\int_0^{l_1} \Delta F \cdot z'}{\int_0^{l_1} \Delta F} = \frac{\int_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\int_0^{l_1} w \cdot z} \quad (101)$$

b) Graphisch.

Trägt man die Kräfte ΔF aus Gl. (100) mittels Kraft- und Seileck mit beliebiger Polweite und in beliebigem Kräftemaßstab zusammen (Fig. 83 u. 83 a), so erhält man die rechte Drittellinie der Öffnung l_1 als Schwerlinie dieser Kräfte: da es hierbei nicht auf die wirkliche Größe der durch Gl. (100) ausgedrückten Kräfte ΔF , sondern nur auf ihr gegenseitiges Verhältnis ankommt, so trägt man diese Kräfte ΔF in der einfacheren Form:

$$\Delta F = w \cdot \frac{z}{l_1}$$

auf.

Bezüglich Wahl von Polweite und Kräftemaßstab gilt das für die linke Drittellinie Gesagte.

In den übrigen Öffnungen bestimmen wir die Drittellinie ähnlich wie vor.

Da aus den Gleichungen (99) und (101) das Stützenmoment h ausgeschieden ist, so war es richtig, der Bestimmung der Drittellinien ein Dreieck mit beliebiger Stützhöhe zugrunde zu legen, und es folgt weiter, daß die beiden Drittellinien einer Öffnung unabhängig sind von den wirklichen Stützenmomenten und also auch von der Belastung und nur abhängig von den Querschnittsabmessungen und der Stützweite dieser Öffnung.

2. Verschränkte Drittellinien.

Wir betrachten jetzt in Fig. 77 die beiden an der Stütze B zusammenstoßenden Momentendreiecke ABB' und $BB'C$ mit der gemeinschaftlichen Höhe BB' und den beiden zugeordneten reduzierten Momentenflächen F'_2 und F'_3 . Die senkrechte Schwerlinie S^B der gemeinsamen $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche (Fig. 83 u. 84 oder 76 c) geht in der Nähe von B durch den Schnittpunkt B'_2 der die Kräfte F'_2 und F'_3 in Fig. 78 einschließenden Seilseiten

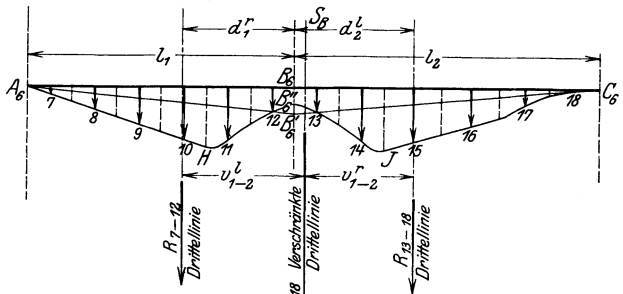


Fig. 76 c.

b und d . Die Schwerlinie S^B nennen wir „verschränkte Drittellinie der Öffnungen l_1 und l'_2 “. In gleicher Weise schneiden sich die Seilseiten g und i , welche die

Kräfte F'_7 und F'_8 einschließen, in der Nähe von C auf der „verschränkten Drittlinie S^C der Öffnungen l_2 und l_3 “, und die die Kräfte F'_{10} und F'_{11} einschließenden Seilseiten k und m auf der „verschränkten Drittlinie S der Öffnungen l_3 und l_4 “.

Um beispielsweise die Lage von S^B zu bestimmen, verfahren wir in folgender Weise:

a) Analytisch.

Wir bezeichnen (Fig. 78) den Abstand der den Öffnungen l_1 und l_2 zugeordneten verschränkten Drittlinie S^B von der nächsten links gelegenen (der zweiten Öffnung) mit v'_{1-2} . Nach der Schwerpunktslehre erhalten wir Drittlinie (rechte Drittlinie der ersten Öffnung) mit v^l_{1-2} und den Abstand derselben von der nächsten rechts gelegenen Drittlinie (linke Drittlinie v^l_{1-2} bzw. v^r_{1-2}) aus dem statischen Moment der Kräfte F'_2 und F'_3 in bezug auf die Richtung von F'_2 bzw. auf die Richtung von F'_3 :

$$v^l_{1-2} = \frac{F'_3}{F'_2 + F'_3} \cdot (d^r_1 + d^l_2), \quad (102)$$

$$v^r_{1-2} = \frac{F'_2}{F'_2 + F'_3} \cdot (d^r_1 + d^l_2). \quad (103)$$

In den Gl. (102) und (103) ersetzen wir die dem wirklichen Momentendreieck $AB'C$ (Fig. 77) entsprechende reduzierte Momentenfläche $F'_2 + F'_3$ durch die aus dem Momentendreieck $A_6B_6C_6$ (Fig. 83 und 84) mit der beliebigen Stützhöhe h hergeleitete reduzierte Momentenfläche $A_6HB_6''JC_6$; ebenso ersetzen wir die reduzierte Momentenfläche F'_2 durch die aus dem Momentendreieck $A_6B_6B'_6$ (Fig. 83 oder 76c) hergeleitete reduzierte Momentenfläche $A_6HB_6''B_6$, und die reduzierte Momentenfläche F'_3 durch die aus dem Momentendreieck $B_6B'_6C_6$ (Fig. 84 oder 76c) hergeleitete reduzierte Momentenfläche $B_6B_6''JC_6$. Durch diese Vertauschung ändern die Verhältnisse

$$\frac{F'_3}{F'_2 + F'_3} \quad \text{und} \quad \frac{F'_2}{F'_2 + F'_3}$$

der Gl. (102) und (103) ihren Wert nicht, denn aus den späteren Gl. (104) und (105) scheidet das Stützenmoment h aus, wodurch ausgedrückt ist, daß v^l_{1-2} und v^r_{1-2} vom Stützenmoment in B unabhängig sind, und daß daher das unbekannte wirkliche Stützenmoment BB' (Fig. 77) durch ein beliebig anderes (zweckmäßig $h = 1$) ersetzt werden durfte. Mit Einführung der aus Fig. 83 und 84 bzw. 76c entnommenen Werte für ΔF in die Gl. (102) und (103) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} v^l_{1-2} &= \frac{\sum_0^{l_2} \Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_2} \cdot (d^r_1 + d^l_2) \\ &= \frac{\sum_0^{l_1} \Delta s \cdot h \cdot z + \sum_0^{l_2} \Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1 + E \cdot J \cdot l_2} \cdot (d^r_1 + d^l_2) \\ &= \frac{\frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'}{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z + \frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'} \cdot (d^r_1 + d^l_2). \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned}
 v_{1-2}^r &= \frac{\sum_0^{l_1} \frac{\Delta s \cdot h \cdot z}{E \cdot J \cdot l_1}}{\sum_0^{l_1} \frac{\Delta s \cdot h \cdot z}{E \cdot J \cdot l_1} + \sum_0^{l_1} \frac{\Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_2}} \cdot (d_1^r + d_2^l) \\
 &= \frac{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z}{\frac{1}{l_1} \sum_0^{l_1} w \cdot z + \frac{1}{l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z'} \cdot (d_1^r + d_2^l). \tag{105}
 \end{aligned}$$

b) Graphisch.

Graphisch erhält man die Lage der verschränkten Drittellinie S^B , indem man die Schwerlinie der beiden reduzierten Momentenflächen $A_6 H B_6'' B_6$ und $B_6 B_6'' J C_6$ bestimmt. Da die rechte Drittellinie der ersten Öffnung die Schwerlinie der reduzierten Momentenfläche $A_6 H B_6'' B_6$ und die linke Drittellinie der zweiten Öffnung die Schwerlinie der reduzierten Momentenfläche $B_6 B_6'' J C_6$ darstellt, so braucht man nur die Resultierende der beiden in den genannten Drittellinien wirkenden Kräfte:

$$R_{1-7} = \sum_8^{14} w \cdot \frac{z}{l_1} \quad \text{und} \quad R_{15-22} = \sum_{15}^{22} w \cdot \frac{z'}{l_2}$$

zu bilden. Dies erfolgte in den Fig. 83 und 84 und 83a und 84a mittels des Kraft- und Seilecks $p - q$ mit beliebiger, jedoch zur Benützung der waagerechten Linie $L'M'$ als mittleren Seilstrahl, waagrecht angenommener Polweite und unter der Voraussetzung, daß die Kraftecke der Fig. 83a und 84a in demselben Kräftemaßstab aufgetragen wurden. Die Polweiten der Kraftecke der Fig. 83a und 84a brauchen nicht, wie es in diesen Figuren teilweise der Fall ist, gleich angenommen zu werden, sondern sie werden, wie unter 1. erwähnt, derart gewählt, daß die Endstrahlen der zugehörigen Seilecke nicht flacher als die 45° -Neigung verlaufen, damit die Abschnitte s möglichst genau abgegriffen werden können.

Ist die Balkenöffnung 1 symmetrisch zu ihrer Mitte, so daß $R_{8-14} = R_{1-7}$, so trägt man R_{1-7} im Abstand $d_1^r = d_1^l$ von B_8 aus ab und bildet darauf, wie oben erwähnt, die Schwerlinie R_{8-22} (Fig. 83/84).

Die verschränkte Drittellinie in der Nähe von C bzw. D erhält man in analoger Weise.

Aus den Gl. (104) und (105), aus welchen die Stützhöhe h ausgeschieden ist, folgt, daß die verschränkte Drittellinie in der Nähe einer Stütze nur abhängig ist von den Stützweiten und Querschnitten der beiden an die betreffende Stütze anschließenden Öffnungen und nicht abhängig von deren Belastungen.

Mit Hilfe der Drittellinien und der verschränkten Drittellinien leiten wir nun das Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte ab, und zwar zunächst für die linken Festpunkte J . Wir beginnen mit der Bestimmung des Festpunktes J_1 in der ersten Öffnung links.

3. Linker Festpunkt J_1 .

Bei freier Auflagerung in A wäre in Fig. 77 $M_1^A = 0$, also auch die Kraft $F_1 = 0$. Dann würde in Fig. 78 die Seilseite b mit der Seilseite a zusammenfallen und die Balkenachse in A_1 schneiden. Ist der Balken jedoch in A eingespannt, wie im vorliegenden Fall, so hat das Tangenteneck wegen der vorhandenen Kraft F'_1 einen Knick in R und die innere Seilseite b schneidet die Balkenachse in einem Punkt J_1 , welcher die feste Strecke d_1^l in die 2 Strecken e und e' teilt, welche wie folgt bestimmt werden: Im überschlagenen Viereck $A_1 A'_1 J_1 R'' R'$ (Fig. 78 oder 76d) besteht

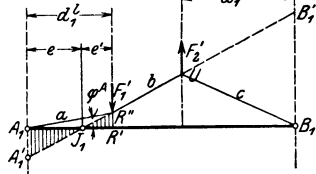


Fig. 76d.

$$\frac{e}{e'} = \frac{A_1 A'_1}{R' R''}, \quad (106)$$

worin $A_1 A'_1$ den Abschnitt der die Kraft F'_1 einschließenden Seilseiten a und b auf der linken Stützensenkrechten bedeutet. Nach dem Satz vom statischen Moment paralleler Kräfte ist das Produkt der Strecke $A_1 A'_1$ mit der Polweite $H = 1$ gleich dem statischen Moment der Kraft F'_1 in bezug auf die Senkrechte durch A , d. h.

$$A_1 A'_1 = F'_1 \cdot d_1^l. \quad (107)$$

Setzen wir noch

$$F'_1 = k_1 \cdot F_1, \quad (108)$$

worin

$$F_1 = \text{Momentendreieck } A A' B' = M_5^A \cdot \frac{l_1}{2}, \quad (109)$$

(da $M_1^A = M_5^A$), so liefert Gl. (107):

$$A_1 A'_1 = k_1 \cdot \frac{M_5^A \cdot l_1 \cdot d_1^l}{2}. \quad (110)$$

Andererseits ist im Dreieck $A_1 R' R''$ (Fig. 78 oder 76d)

$$R' R'' = \operatorname{tg} \varphi^A \cdot d_1^l. \quad (111)$$

Da der Winkel φ^A zwischen der Stützentangente (Seilseite a) und der Balkenachse sehr klein ist, kann die trigonometrische Tangente mit dem Winkel vertauscht werden, so daß

$$R' R'' = \varphi^A \cdot d_1^l. \quad (112)$$

Die waagrechte Balkenachse und die senkrechte Pfeilerachse beschreiben denselben Drehwinkel φ^A in A , den wir nachfolgend bestimmen wollen.

Wir denken uns zu dem Zweck den linken Pfeiler durch einen Schnitt unmittelbar unterhalb A vom Balken getrennt, mit dem Schnittmoment M_5^A belastet, und den Pfeilerkopf zur Sicherung der vorausgesetzten waagrechten Unverschiebbarkeit gelenkartig gelagert.

Es sei weiter τ_5^A der Drehwinkel des Pfeilerkopfes durch ein Moment $M_5^A = 1$; dann beträgt der durch M_5^A bewirkte Drehwinkel:

$$\varphi^A = M_5^A \cdot \tau_5^A. \quad (113)$$

Diesen Wert in Gl. (112) eingesetzt gibt

$$R' R'' = M_5^A \cdot \tau_5^A \cdot d_1^l. \quad (114)$$

Die Division von Gl. (110) durch Gl. (114) ergibt nun:

$$\frac{A_1 A'_1}{R' R''} = k_1 \cdot \frac{M_5^A \cdot l_1 \cdot d_1^l}{2 \cdot M_5^A \cdot \tau_5^A \cdot d_1^l} = k_1 \cdot \frac{l_1}{2 \cdot \tau_5^A}. \quad (115)$$

Und aus Gl. (106) und (115) folgt schließlich

$$\frac{e}{e'} = k_1 \cdot \frac{l_1}{2 \cdot \tau_5^A}, \quad (115a)$$

oder allgemein:

$$\frac{e}{e'} = k \cdot \frac{l}{2 \varepsilon}. \quad (116)$$

Der hierin vorkommende Drehwinkel τ wird nach Kap. II, 6 bestimmt; der Wert für konstantes Trägheitsmoment ist am Schluß des Abschnittes 4 dieses Kapitels angegeben. Den Verhältniswert k_1 erhalten wir wie folgt:

Nach Gl. (108) ist

$$k_1 = \frac{F'_1}{F_1}. \quad (117)$$

Wie aus der folgenden Formel (119) hervorgeht, stehen das unbekannte Momentendreieck $F_1 = A A' B'$ und die zugeordnete reduzierte Momentenfläche F'_1 in demselben Verhältnis zueinander wie das beliebige Dreieck $A_5 A'_5 B_5$ (Fig. 80 oder 76a) und die entsprechende reduzierte Momentenfläche $A_5 A''_5 G B_5$, daher ist

$$k_1 = \frac{\text{Fläche } A_5 A''_5 G B_5}{\text{Fläche } A_5 A'_5 B_5}. \quad (118)$$

Diesen Wert ermitteln wir entweder graphisch durch Planimetrierung der beiden Flächen oder analytisch aus

$$k_1 = \frac{A_5 A''_5 G B_5}{A_5 A'_5 B_5} = \frac{\sum_0^{l_1} \frac{\Delta s \cdot h \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1}}{\frac{h \cdot l_1}{2}} = \frac{2 \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z'}{E \cdot l_1^2}. \quad (119)$$

Aus der Gl. (119) ist das Stützenmoment h ausgeschieden, d. h. der Wert k ist unabhängig von der wirklichen Größe des Stützenmomentes $A A'$, und es war also richtig, k aus einem Dreieck mit beliebiger Höhe zu bestimmen.

Aus Gl. (116) sowie aus den Gleichungen zur Bestimmung von k_1 und von τ_5^A geht jetzt hervor, daß das Verhältnis $\frac{e}{e'}$ unabhängig ist von der Belastungsart und nur abhängt von den Abmessungen des Pfeilers A und des Trägers der ersten Öffnung, d. h. der Punkt J_1 (Fig. 78 oder 76d), welcher die feste Strecke d_1^l in das feste Verhältnis $\frac{e}{e'}$ teilt, ist ein Festpunkt oder Fixpunkt.

Es ist jetzt noch zu beweisen, daß der Festpunkt J_1 der Fig. 78 oder 76d und der Momentennullpunkt W_1 der Fig. 77 zusammenfallen:

In Fig. 78 oder 76d ist das Produkt der Strecke $A_1 A'_1$ mit der Polweite $H = 1$ gleich dem statischen Moment der Kraft F'_1 in bezug auf A , ebenso ist das

Produkt der Strecke $B_1B'_1$ mit der Polweite $H = 1$ gleich dem statischen Moment der Kraft F'_2 in bezug auf B . Wir können daher anschreiben:

$$A_1A'_1 = F'_1 \cdot d_1^l \quad (120)$$

und

$$B_1B'_1 = F'_2 \cdot d_1^r. \quad (121)$$

Daraus folgt durch Division

$$\frac{A_1A'_1}{B_1B'_1} = \frac{F'_1 \cdot d_1^l}{F'_2 \cdot d_1^r}. \quad (122)$$

Hierin kommen die den Momentenflächen $AA'B'$ und ABB' der Fig. 77 entsprechenden $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenflächen F'_1 und F'_2 vor.

Um beispielsweise F'_1 auszudrücken, teilen wir ähnlich wie in Fig. 80 oder 76a die Momentenfläche $AA'B'$ in senkrechte Streifen von dem Inhalt

$$\frac{\Delta s \cdot AA' \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1}$$

und erhalten:

$$F'_1 = \sum_0^{l_1} \frac{AA' \cdot \Delta s \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1} = \frac{AA'}{E \cdot l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z', \quad (123)$$

ebenso

$$F'_2 = \sum_0^{l_1} \frac{BB' \cdot \Delta s \cdot z'}{E \cdot J \cdot l_1} = \frac{BB'}{E \cdot l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z. \quad (124)$$

Die vorstehenden Werte, sowie die Werte von d_1^l und d_1^r aus den Gl. (99) und (101) in die Gl. (122) eingesetzt gibt:

$$\frac{A_1A'_1}{B_1B'_1} = \frac{\frac{AA'}{E \cdot l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z' \cdot \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z'}}{\frac{BB'}{E \cdot l_1} \cdot \sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot \frac{\sum_0^{l_1} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_1} w \cdot z}}}. \quad (125)$$

Daraus folgt :

$$\frac{A_1A'_1}{B_1B'_1} = \frac{AA'}{BB'}, \quad (126)$$

d. h. in den überschlagenen Vierecken $AA'W_1B'B$ (Fig. 77) und $A_1A'_1J_1B'_1B_1$ (Fig. 78 oder 76d) liegen die Punkte W_1 und J_1 auf derselben Senkrechten.

4. Linke Festpunkte J_2 , J_3 und J_4 .

Von den linken Festpunkten der 3 übrigen Öffnungen ermitteln wir noch denjenigen der zweiten Öffnung:

In Fig. 78 oder 76e schneiden die inneren Seilseiten b und e die verschränkte Drittellinie S^B in den Punkten B'_2 und B''_2 . Die Verbindungslinie von B'_2 mit

dem Punkt T' , in welchem sich Balkenachse und Drittelinie rechts von B schneiden, trifft die verlängerte Seilseite e in einem Punkt E , welcher die feste Strecke v'_{1-2} in die zwei Strecken e und e' teilt. Aus dem schraffierten überschlagenen Viereck $B'_2 B''_2 E T' T'$ (Fig. 78 oder 76d) folgt:

$$\frac{e}{e'} = \frac{B'_2 B''_2}{T' T''}. \quad (127)$$

Die Strecken $B'_2 B''_2$ und $T' T''$ bestimmen wir wie folgt:

Zunächst ist $B'_2 B''_2$ der Abschnitt der die Kraft F'_4 einschließenden Seilseiten d und e auf der verschränkten Drittelinie S^B , deshalb ist das Produkt von $B'_2 B''_2$ mit der Polweite $H = 1$ gleich dem statischen Moment der Kraft F'_4 in bezug auf die verschränkte Drittelinie oder

$$B'_2 B''_2 = F'_4 \cdot v'_{1-2}. \quad (128)$$

Ferner ist im Dreieck $B_1 T' T''$ (Fig. 78 oder 76e)

$$T' T'' = d_2^l \cdot \operatorname{tg} \varphi^B, \quad (129)$$

worin φ^B den Drehwinkel der Balkenachse in B bedeutet. Weil φ^B sehr klein ist, kann gesetzt werden

$$\operatorname{tg} \varphi^B = \varphi^B, \quad (130)$$

womit nach Gl. (129)

$$T' T'' = d_2^l \cdot \varphi^B. \quad (131)$$

Da nun Balkenachse und Pfeilerachse denselben Drehwinkel φ^B in B beschreiben, so denken wir uns zur Bestimmung von φ^B einen Schnitt unmittelbar unterhalb der Balkenachse geführt und den vom Balken getrennten Pfeiler am Kopfe in einem Gelenk gelagert und mit dem wirklichen Pfeilerkopfmoment M_6^B belastet. Es sei τ_6^B der Drehwinkel, welcher durch $M_6^B = 1$ am Kopfe entsteht; dann beträgt der durch M_6^B selbst hervorgerufene Winkel

$$\varphi^B = M_6^B \cdot \tau_6^B. \quad (132)$$

Diesen Wert in Gl. (131) eingesetzt gibt:

$$T' T'' = d_2^l \cdot M_6^B \cdot \tau_6^B. \quad (133)$$

Dividieren wir jetzt Gl. (128) durch (133), so folgt:

$$\frac{B'_2 B''_2}{T' T''} = \frac{F'_4 \cdot v'_{1-2}}{M_6^B \cdot \tau_6^B \cdot d_2^l}. \quad (134)$$

Setzen wir:

$$F'_4 = k_2 \cdot F_4 = k_2 \cdot \frac{M_6^B \cdot l_2}{2}, \quad (135)$$

so erhalten wir nach Gl. (127) in Verbindung mit Gl. (134):

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{M_6^B \cdot l_2 \cdot v'_{1-2}}{2 \cdot M_6^B \cdot \tau_6^B \cdot d_2^l}, \quad (136)$$

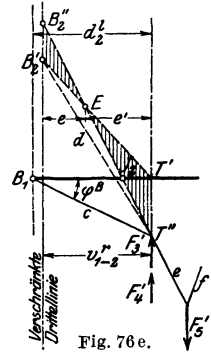


Fig. 76 e.

oder

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{l_2}{2 \cdot \tau_6^B} \cdot \frac{v_{1-2}^r}{d_2^t}, \quad (136a)$$

oder allgemein:

$$\frac{e}{e'} = k \cdot \frac{l}{2 \cdot \varepsilon} \cdot \frac{v^r}{d^t}. \quad (137)$$

Darin sind alle Größen bis auf den Faktor k_2 bekannt oder nach vorhergehendem (τ nach Kap. II) ermittelbar. Den Faktor:

$$k_2 = \frac{F'_4}{F_4} \quad (137a)$$

(nach Gl. 135) ermitteln wir ähnlich wie in der ersten Öffnung an Hand des mit beliebiger Höhe h gezeichneten Dreiecks $B_6 B'_6 C_6$ (Fig. 84) und der entsprechend reduzierten Momentenfläche $B_6 B''_6 J C_6$ zu:

$$k_2 = \frac{\text{Fläche } B_6 B'_6 J C_6}{\text{Fläche } B_6 B''_6 C_6}.$$

Da insbesondere die

Drehwinkel τ bei konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke f von Voutenunterkante bis Balkenachse

für am Fuße eingespannte und gelenkig gelagerte Pfeiler sehr häufig gebraucht werden, so leiten wir nachstehend noch die diesbezüglichen Werte ab.

a) Der Pfeiler ist am Fuße eingespannt (Fig. 89).

Setzen wir in der allgemeinen Gl. (43) für den Drehwinkel τ an dem Stabende mit dem Festpunktabstand b , welche lautet:

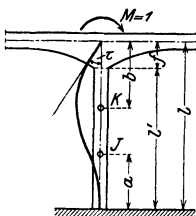


Fig. 89.

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta,$$

nach Gl. (203):

$$\alpha^b = \frac{l'^2}{2 \cdot l \cdot E \cdot J}$$

und nach Gl. (206):

$$\beta = \frac{l'^2(l+2f)}{6 \cdot l^2 \cdot E \cdot J},$$

so ist:

$$\tau = \frac{l'^2(2l' - 3a)}{6l(l-a)E \cdot J}. \quad (138)$$

Kann die starre Strecke f vernachlässigt werden (bei Endpfeilern, sowie bei Mittelpfeilern mit verhältnismäßig großer Höhe), d. h. ist

$$f = 0,$$

so ist in Gl. (138) $l' = l$ und $a = \frac{l}{3}$ zu setzen und wir erhalten für diesen Fall:

$$\tau = \frac{l}{4 \cdot E \cdot J}. \quad (138a)$$

b) Der Pfeiler ist am FuÙe gelenkig gelagert (Fig. 89a).

In diesem Falle ist der untere Festpunktabstand

$$a = 0$$

und wir erhalten dann aus Gl. (138)

$$\tau = \frac{l^3}{3 \cdot l^2 \cdot E \cdot J} \quad (139)$$

Kann die starre Strecke f vernachlässigt werden, so ist in Gl. (139) $l' = l$ zu setzen und es ist in diesem Falle:

$$\tau = \frac{l}{3 \cdot E \cdot J} \quad (139 a)$$

Aus den Gleichungen für $\frac{e}{e'}$, k_2 und τ_6^B geht hervor, daß das Verhältnis $\frac{e}{e'}$, in welches die feste Strecke v_{1-2}^r geteilt wird, nur von den Abmessungen der ersten und zweiten Öffnung und des zwischen ihnen gelegenen Pfeilers B abhängt. Die durch Punkt E gehende Senkrechte, auf welcher sich die Linien $B'_2 T'$ und $B'' T''$ schneiden, hat daher eine feste Lage.

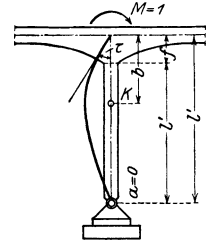


Fig. 89 a.

Nachdem wir im vorhergehenden bewiesen haben, daß die zwei Drittellinien in der Nähe von B , die verschränkte Drittellinie sowie die Senkrechte durch E eine feste Lage haben, so liegen die vier Ecken des Vierecks $U B'_2 E T''$ auf vier festen Senkrechten, während drei Seiten durch feste Punkte gehen, nämlich die Seilseite b durch J_1 , die Seilseite c durch B_1 und die Gerade $B'_2 E$ durch T' (Fig. 78). Aus geometrischen Gründen geht dann auch die vierte Seite, nämlich die Seilseite e durch einen festen Punkt J_2 , welcher mit den drei anderen festen Punkten auf einer Geraden liegt. Deshalb ist J_2 der gesuchte linke Festpunkt der zweiten Öffnung.

Die Festpunkte J_3 und J_4 werden in genau derselben Weise bestimmt wie der Festpunkt J_2 .

5. Rechte Festpunkte K_4, K_3, K_2 und K_1 .

Um die rechten Festpunkte K in den einzelnen Öffnungen zu bestimmen, gehen wir von der letzten Öffnung rechts aus und schreiten nach links vor; die Bestimmung der Festpunkte K erfolgt genau in derselben Weise wie diejenige der Festpunkte J , wenn wir den Balken um 180° aus der Zeichenebene heraus so drehen, daß dessen rechtes Ende nach der linken Seite kommt, d. h. wenn wir dessen Spiegelbild betrachten.

In der vierten Öffnung fällt wegen des frei beweglichen Endauflagers E_1 (Fig. 78) der rechte Festpunkt K_4 mit E_1 zusammen.

In der dritten Öffnung schneidet die innere Seilseite i die Balkenachse im gesuchten Festpunkt K_3 ; denn wie bei der Stütze B ergibt sich auch bei der Stütze D (Fig. 78) ein Viereck $V'' X D'_2 Z$, dessen vier Ecken auf vier festen Senkrechten liegen, nämlich auf den beiden Drittellinien, der verschränkten Drittellinie bei D sowie auf der festen Senkrechten durch den Schnittpunkt X der Seilseite i und der Geraden $V' D'_2$; ferner gehen drei Seiten durch feste

Punkte, nämlich die Seilseite m durch E_1 , l durch D_1 und die Gerade $V'D'_2$ durch V' . Dann geht auch die Seilseite i als vierte Seite aus geometrischen Gründen durch einen festen Punkt K_3 , welcher mit den drei anderen festen Punkten auf einer Geraden liegt, d. h. K_3 ist der gesuchte rechte Festpunkt der dritten Öffnung.

Die Senkrechte durch den Schnittpunkt X der inneren Seilseite i und der Geraden $V'D'_2$ teilt die feste Strecke v'_{3-4} (Abstand der verschränkten Drittellinie bei D von der rechten Drittellinie der dritten Öffnung) in die zwei festen Teilstrecken e und e' , deren Verhältnis sich analog wie früher ergibt zu:

$$\frac{e}{e'} = k_3 \cdot \frac{l_3}{2 \cdot \tau_8^D} \cdot \frac{v'_{3-4}}{d_3^r}, \quad (140)$$

worin die Achsendrehung τ_8^D am Kopfe der Säule D genau wie früher τ_6^B ermittelt wird, und der Faktor k , ähnlich wie früher, folgenden Ausdruck hat:

$$k_3 = \frac{\text{Fläche } C_6 W D'_6 D_6}{\text{Fläche } C_6 D_6 D'_6} \quad (141)$$

(Fig. 85).

Man kann nun noch in analoger Weise, wie es für den Festpunkt J_1 und den Momentennullpunkt W_1 geschehen ist, zeigen, daß der Festpunkt K_3 und der Momentennullpunkt W_3 zusammenfallen.

Die Festpunkte K_2 und K_1 werden in genau derselben Weise bestimmt wie K_3 .

6. Konstruktion der Festpunkte der Balkenfelder 1, 2, 3, 4.

In Fig. 79 ist die Konstruktion der Festpunkte der Balkenfelder 1, 2, 3, 4 dargestellt.

Man zeichnet zunächst in allen Feldern die Drittellinien und verschränkten Drittellinien und ermittelt die Drehwinkel τ an den Köpfen der gegebenenfalls vorhandenen biegungsfest mit dem Balken verbundenen Pfeiler. Wir haben gesehen, daß die Lage der Drittellinien und verschränkten Drittellinien nur von den Balkenabmessungen abhängig ist. Zu ihrer Bestimmung verfährt man deshalb in gleicherweise sowohl am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern, als auch mit freier Auflagerung. Die Drehwinkel τ berechnen wir allgemein nach Kap. II; für konstantes Trägheitsmoment des Pfeilers sowie Berücksichtigung der starren Strecke f zwischen Voutenunterkante und Balkenachse sind die Werte in Abschnitt 4 dieses Kapitels angegeben.

Mit der Bestimmung der

linken Festpunkte J

beginnt man in der ersten Öffnung links und schreitet nach rechts fort.

a) Erste Öffnung (Endfeld links).

Fall 1: Ist der Balken an seinem Ende elastisch eingespannt (Fig. 79), so teilt der Festpunkt J_1 den Abstand d_1^l im Verhältnis $\frac{e}{e'}$ der Gl. (116),

wobei e den Abstand des Festpunktes J_1 von A bedeutet. Der in Gl. (116) vorkommende Faktor k ist nach Gl. (118) oder (119) zu bestimmen.

Da die Pfeilerköpfe als horizontal unverschiebbar vorausgesetzt sind, kann man zur Bestimmung der Festpunkte alle Endpfeiler in die Verlängerung der Balkenachse hinaufklappen und wie ein Endfeld eines gewöhnlichen durchlaufenden Balkens behandeln, wobei in A ein frei drehbares Auflager anzunehmen ist und in welchem Falle dann der Ausdruck $\frac{e}{e'}$ für die Öffnung 1 nicht bestimmt zu werden braucht (siehe Fig. 90).

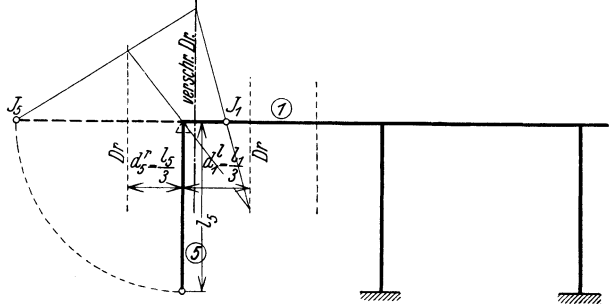


Fig. 90.

Fall 2: Ist der Balken an seinem Ende fest eingespannt (Fig. 91), so ist die Drehung der Endstütze gleich Null, d. h. in Gl. (116) ist $\tau_5^A = 0$ zu setzen, wodurch $\frac{e}{e'}$ unendlich wird, und damit $e' = 0$, d. h. in diesem Falle rückt J_1 in den Schnittpunkt der Balkenachse mit der linken Drittlinie (Fig. 91a).

Fall 3: Liegt der Balken an seinem Ende frei auf, so ist in Gl. (116) $\tau_5^A = \text{unendlich}$ zu setzen; dann ist aber $\frac{e}{e'} = 0$ und daher $e = 0$, d. h. in diesem Falle fällt der Festpunkt J_1 mit dem linken Auflager zusammen.

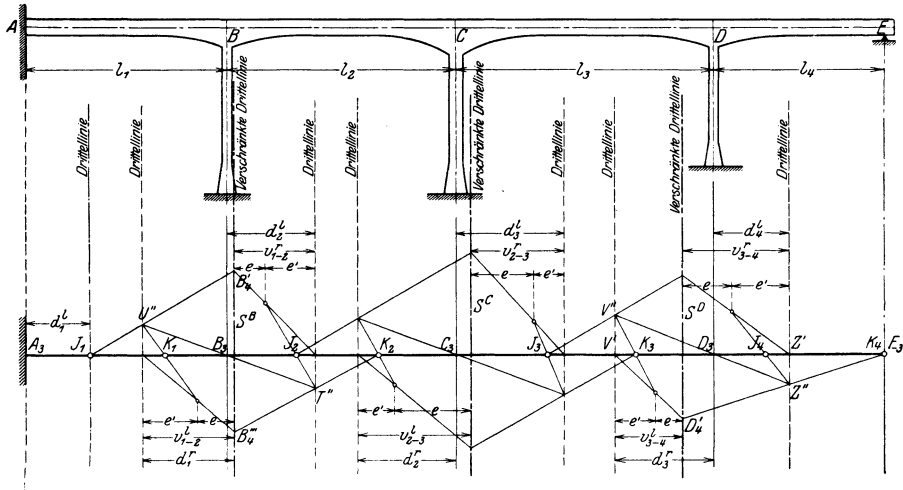


Fig. 91 u. 91a.

b) Beliebige Mittelöffnung und letzte Öffnung (Endfeld rechts).

Fall 1: Besteht die Stütze vor der Öffnung, in welcher J gesucht wird, aus einem elastisch drehbaren Pfeiler (Fig. 79), so muß zuerst der Festpunkt J_1 in der vorhergehenden Öffnung 1 bestimmt werden.

Dann zieht man von J_1 aus (vgl. Fig. 79) die beliebige Gerade $J_1 B'_4$, welche die Drittellinie links von B in U'' und die verschränkte Drittellinie S^B bei B in B'_4 schneidet, verbindet B'_4 mit dem Schnittpunkt T' der Balkenachse und der Drittellinie rechts von B und zieht die Gerade $U'' B_3$ welche die Drittellinie rechts von B in T'' schneidet; die Senkrechte, welche die Strecke v_{1-2}^e im Verhältnis $\frac{e}{e'}$ der Gl. (137) teilt, trifft $B'_4 T'$ in einem Punkt E , welchen man mit T'' verbindet; die Gerade $E T''$ schneidet schließlich die Balkenachse in dem gesuchten Festpunkt J_2 .

Von J_2 ausgehend (Fig. 79) wiederholt man die soeben angegebene Konstruktion und gelangt so zum Festpunkt J_3 der dritten Öffnung, desgleichen erhält man schließlich durch Wiederholung des Verfahrens mit J_3 als Ausgangspunkt J_4 der vierten Öffnung.

Es ist hierbei zu beachten, daß zur Bestimmung der J -Punkte in allen Öffnungen rechts der ersten das Verhältnis $\frac{e}{e'}$ stets nach Gl. (137) zu ermitteln ist, in welche man jeweils die Abmessungen derjenigen Öffnung einsetzt, welcher J angehört und den Drehwinkel τ des Pfeilers zwischen der Öffnung mit dem gesuchten Festpunkt J und der Öffnung unmittelbar links; ferner ist der in Gl. (137) vorkommende Faktor k nach den Gl. (119) oder (139) zu bestimmen, in welche man ebenfalls die Abmessungen der Öffnung mit dem gesuchten J -Punkt einführt. Von den beiden Teilstrecken e und e' des Verhältnisses $\frac{e}{e'}$ geht die Strecke e immer von der in Betracht kommenden verschränkten Drittellinie aus.

Fall 2: Liegt der Balken auf der Stütze vor der Öffnung, in welcher J gesucht wird, frei auf (Fig. 92), so erfolgt sowohl die Bestimmung

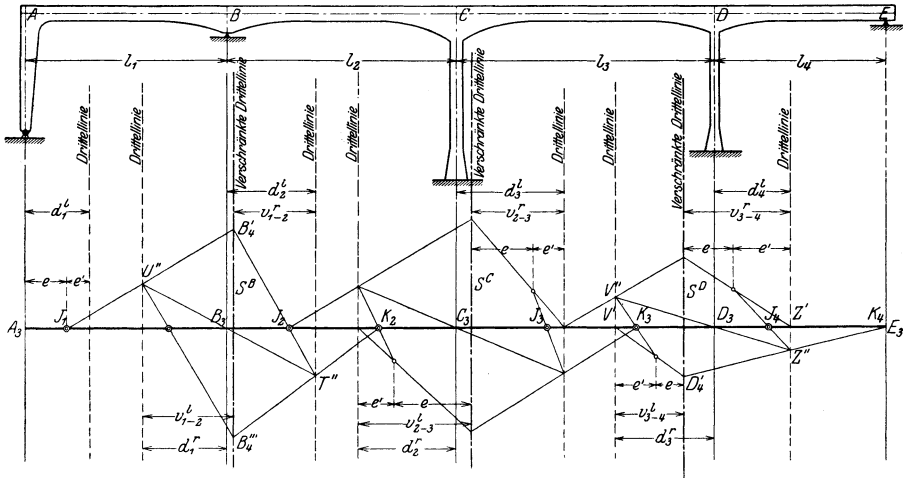


Fig. 92 u. 92a.

des Festpunktes J_1 in der vorhergehenden Öffnung l_1 als auch die Konstruktion der Drittellinien und verschränkten Drittellinien (Fig. 92a) genau wie in Fig. 79. Es soll nun J_2 bestimmt werden. Für den Fall der freien Auflagerung in B (Fig. 92) ist in Gl. (137) $\tau_6^B = \text{unendlich}$ zu setzen; dann ist aber $\frac{e}{e'} = 0$ und daher

$e = 0$. Lassen wir nun in der allgemeinen Fig. 79 die in der Strecke v'_{1-2} enthaltene Teilstrecke abnehmen, bis sie schließlich gleich Null wird, so fällt in diesem Grenzzustande Punkt E mit B'_4 zusammen und der Festpunkt J_2 , welcher im allgemeinen Fall von der Geraden ET'' auf der Balkenachse ausgeschnitten wurde, wird dann von der Geraden B'_4T'' ausgeschnitten. Der Festpunkt J_2 wird daher folgendermaßen ermittelt:

Von dem bekannten Festpunkt J_1 aus zieht man (Fig. 92) die beliebige Gerade $J_1B'_4$, welche die Drittellinie links von B in U'' und die verschränkte Drittellinie S^B bei B in B'_4 schneidet und zieht die Gerade $U''B_3$, welche man bis zu ihrem Schnittpunkt T'' mit der Drittellinie rechts von B verlängert. Die Verbindungslinie B'_4T'' schneidet dann auf der Balkenachse den gesuchten Festpunkt J_2 aus.

Von J_2 aus wird jetzt J_3 und J_4 auf dieselbe Weise ermittelt wie in dem vorhergehenden Fall 1 (Fig. 79).

Mit der Bestimmung der

rechten Festpunkte K

beginnt man in der letzten Öffnung rechts und schreitet nach links fort. Das hierbei einzuschlagende Verfahren (Fig. 79, 91 a und 92 a) ist analog demjenigen, welches auf den vorhergehenden Seiten zur Bestimmung der linken Festpunkte J erläutert wurde. Man kann auch so vorgehen, daß man den Balken aus der Zeichenebene heraus um 180° so dreht, daß dessen rechtes Ende nach der linken Seite kommt; die Festpunkte K werden dann genau wie die Festpunkte J bestimmt.

In den Fig. 79, 91 a und 92 a wurde die Gerade $V''Z''$ bei D , welche schon bei der Bestimmung der Festpunkte J gezogen wurde, der Einfachheit halber wieder benützt. Dasselbe gilt von der analogen Geraden an den übrigen Stützen.

Sonderfall: Liegt der Balken an allen Stützen frei auf, so erhalten wir den gewöhnlichen

durchlaufenden Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment (Fig. 93).

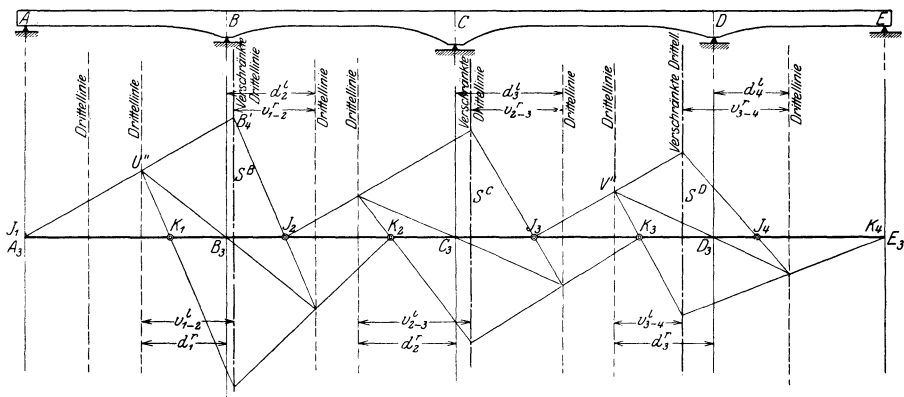


Fig. 93 u. 93 a.

Die in Fig. 93 a dargestellte Bestimmung der Festpunkte ist nach dem Vorhergehenden ohne weiteres verständlich; das Verhältnis $\frac{e}{e'}$ fällt weg, und die Linie B'_4J_2 verläuft geradlinig.

Die graphische Bestimmung der Festpunkte kommt hauptsächlich für die Konstruktionstypen (durchlaufender Balken), insbesondere wegen der Konstruktion der Einflußlinien — Ordinaten —, sowie zur Kontrolle der rechnerisch ermittelten Festpunkte in Betracht.

7. Festpunkte J und K an den Pfeilern.

Da die Pfeiler nichts anderes sind wie die Balkenfelder, nämlich Stäbe des durchlaufenden Balkentragwerks der Fig. 76, so werden die beiden Festpunkte an jedem Pfeiler in der nämlichen Weise wie diejenigen einer Balkenöffnung bestimmt. Da ferner jeder der in Fig. 76 vorhandenen Pfeiler nur aus einer Öffnung besteht, so werden die Festpunkte derselben wie an einem Balkenendfeld ermittelt.

Am Pfeiler 5

fällt der untere Festpunkt J_5 mit dem Fußgelenk zusammen (vgl. 6, a, Fall 3). Der obere Festpunkt K_5 wird wie der Festpunkt J_1 bestimmt, da er an dem für seine Bestimmung maßgebenden Ende A elastisch eingespannt ist, nämlich er steht dort in biegungsfester Verbindung mit dem Balkenfeld 1. Daher ist zunächst die obere Drittellinie, d. h. der Abstand d_5^r nach Gl. (101), worin wir l_1 durch l_5 ersetzen, oder graphisch nach Fig. 83, wenn wir uns dieselbe senkrecht mit B_6 oben, anstatt waagrecht gezeichnet denken, zu bestimmen und diese Strecke dann nach Gl. (116) im Verhältnis

$$\frac{e}{e'} = k_5 \cdot \frac{l_5}{2 \cdot \tau_1^A} \quad (142)$$

zu teilen. In Gl. (142) bedeutet τ_1^A der Drehwinkel in A infolge $M_1^A = 1$ (Fig. 94), wenn der Balken dort durchgeschnitten und frei aufgelagert wird; der Ausdruck dafür ist in Kap. II zu finden. Den in Gl. (142) vorkommenden Verhält-

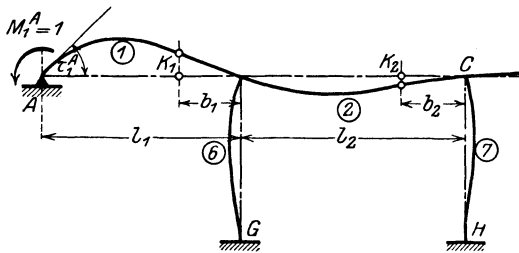


Fig. 94.

niswert k_5 bestimmen wir nach Gl. (119), worin wir l_1 sinngemäß durch l_5 ersetzen.

Wie bereits unter 6, a), Fall 1 gesagt, ist es zweckmäßiger, den Endpfeiler 5 in die Verlängerung der Balkenachse hinaufzuklappen, und als erste Öffnung links zu betrachten. Dann ist die Balkenöffnung 1 als Mittelöffnung zu behandeln.

An den Pfeilern 6, 7 und 8

fällt der untere Festpunkt J in den Schnittpunkt der unteren Drittellinie mit der Balkenachse [vgl. 6, a), Fall 2], da diese Pfeiler an ihrem Fuße fest eingespannt angenommen sind.

Am Pfeiler 7 z. B. ist der Abstand d_7^l der unteren Drittellinie vom Pfeilerfuß entweder analytisch nach Gl. (99), worin wir l_1 durch l_7 ersetzen oder graphisch nach Fig. 80 zu bestimmen, wenn wir uns letztere senkrecht, mit B_5 oben, gezeichnet denken. Wegen der starren Strecke f_7 ($J = \infty$) wird die reduzierte Momentenfläche auf die Länge f_7 gleich Null.

Um den oberen Festpunkt K_7 zu erhalten, bestimmen wir zunächst die obere Drittellinie, d. h. den Abstand d_7 derselben vom Pfeilerkopf, und zwar entweder analytisch nach Gl. (101) oder graphisch nach Fig. 83, wenn wir uns letztere senkrecht, mit B_6 oben, gezeichnet denken und beim Bilden der reduzierten Momentenfläche das unendlich große Trägheitsmoment der starren Strecke f_7 berücksichtigen. Der Abstand d_7^r ist nun wieder im Verhältnis $\frac{e}{e'}$ zu teilen.

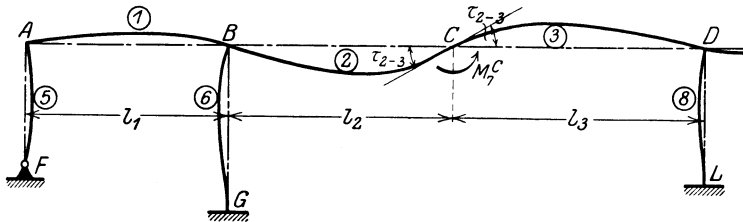


Fig. 95.

Da der Pfeiler 7 oben nicht nur mit einem, sondern mit zwei Stäben (den Balkenfeldern 2 und 3) biegungsfest verbunden ist, so ist in Gl. (116) für $\frac{e}{e'}$ der gemeinsame Drehwinkel τ_{2-3} der beiden biegungsfest miteinander verbundenen Stäbe 2 und 3 einzusetzen, welcher entsteht, wenn der Pfeiler an seinem Kopfe vom Balken getrennt, der Balken in C frei aufgelagert und letzterer in diesem Punkte mit dem Moment $M_7^C = 1$ belastet wird (Fig. 95). Es ist demnach in diesem Falle

$$\frac{e}{e'} = k_7 \cdot \frac{l_7}{2 \cdot \tau_{2-3}^c} \quad (143)$$

Der hierin vorkommende gemeinsame Drehwinkel τ_{2-3}^c hat nach Gl. (36) in Kapitel II den Wert

$$\tau_{2-3}^c = \frac{\tau_2^c \cdot \tau_3^c}{\tau_2^c + \tau_3^c} \quad (144)$$

worin τ_2^c und τ_3^c die Drehwinkel an dem in C durchgeschnittenen und an den beiden Schnittflächen gelenkartig gestützten Balken infolge $M_2^C = 1$ bzw. $M_3^C = 1$ (Fig. 96 und 97) bedeuten, deren Werte aus Kap. II hervorgehen. Der Verhältniswert k_7 wird nach Gl. (119) berechnet, worin l_1 durch l_7 ersetzt wird.

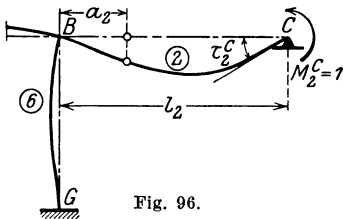


Fig. 96.

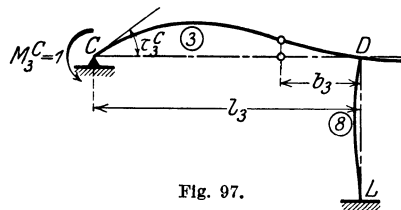


Fig. 97.

Den oberen Festpunkt K_7 des Pfeilers 7 können wir auch auf folgende Weise bestimmen, wobei wir den gemeinsamen Drehwinkel τ_{2-3} nicht zu ermitteln brauchen:

Nachdem wir die Festpunkte J und K in allen Balkenöffnungen bestimmt haben, drehen wir, wie aus Fig. 98 ersichtlich, den rechts von C liegenden Teil des Tragwerks um diesen Punkt um 90° nach oben, wonach wir den Punkt C frei drehbar stützen müssen; die Stäbe 2, 3 und 7 sind nach der Drehung wieder biegungsfest miteinander verbunden wie vorher, und der Pfeiler 7 ist nun zu einer Mittelöffnung geworden.

Die rechte Drittellinie der Öffnung 2 wurde zur Bestimmung des Festpunktes K_2 benötigt und ist daher schon ermittelt. Wir bestimmen nun die linke Drittellinie der Öffnung 7 (Pfeiler), die zugehörige verschränkte Drittellinie in der Nähe von C und darauf das Verhältnis:

$$\frac{e}{e'} = k_7 \frac{l_7}{2 \cdot \tau_3^a}, \tag{145}$$

worin τ_3^a nach Fig. 99 den Drehwinkel bedeutet, welcher am frei drehbar gestützten Ende der Öffnung 3 infolge $M_3^a = 1$ in diesem Punkt entsteht. Der Verhältniswert k_7 wird nach Gl. (119) berechnet, worin l_1 durch l_7 ersetzt wird. — Dieses Umklappen des Pfeilers ist nötig, damit wir das Verteilungsmaß μ aus der Zeichnung abgreifen können.

Wollen wir die Abstände der beiden Festpunkte an einem Pfeiler rechnerisch kontrollieren, so benutzen wir

bei konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke f von Voutenunterkante bis Balkenachse

folgende Ausdrücke.

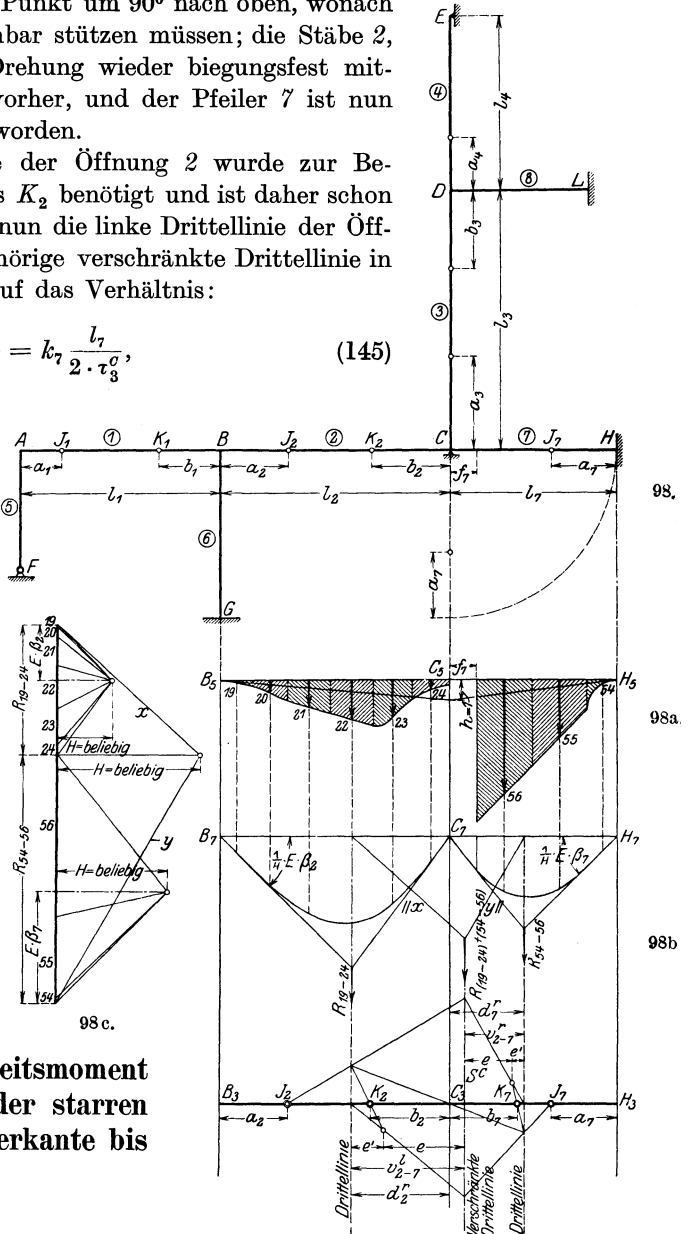


Fig. 98—98 c.

a) Der Pfeiler ist am Fuße eingespannt (Fig. 89).

Setzen wir in die allgemeine Gl. (7) für den

Festpunktsabstand a ,

welche lautet

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a},$$

nach Gl. (206)

$$\beta = \frac{l'^2 (l + 2f)}{6 l'^2 EJ}$$

und nach Gl. (202)

$$\alpha^a = \frac{l' (l' + 2f)}{2 l \cdot EJ},$$

sowie in unserem Fall

$$\varepsilon^a = 0,$$

so ist

$$a = \frac{l'}{3} \cdot \frac{l + 2f}{l' + 2f}. \quad (146)$$

Kann die starre Strecke f vernachlässigt werden (bei Endpfeilern sowie bei Mittelpfeilern mit verhältnismäßig großer Höhe), d. h. ist

$$f = 0,$$

so ist in Gl. (146) $l' = l$ zu setzen, und wir erhalten für diesen Fall

$$a = \frac{l}{3}. \quad (146a)$$

Setzen wir ferner in die allgemeine Gl. (8) für den

Festpunktsabstand b ,

welche lautet

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b},$$

nach Gl. (206)

$$\beta = \frac{l'^2 (l + 2f)}{6 l'^2 EJ}$$

und nach Gl. (203)

$$\alpha^b = \frac{l'^2}{2 l \cdot EJ},$$

so ist

$$b = \frac{l'^2 (l + 2f)}{3 l'^2 + 6 \cdot l \cdot EJ \cdot \varepsilon^b}, \quad (147)$$

z. B. für Pfeiler 7 ist $\varepsilon^b = \tau_{2-3}^c$ (Gl. 144).

Kann die starre Strecke f vernachlässigt werden, so ist in Gl. (147) $l' = l$ und $f = 0$ zu setzen und es ist in diesem Falle:

$$b = \frac{l^2}{3 l + 6 EJ \cdot \varepsilon^b}. \quad (147a)$$

b) Der Pfeiler ist am Fuße gelenkig gelagert (Fig. 90).

Dann ist

$$a = 0,$$

und für den Festpunktsabstand b gelten die Gl. (147) und (147a), worin jedoch für ε^b ein anderer Drehwinkel einzusetzen ist.

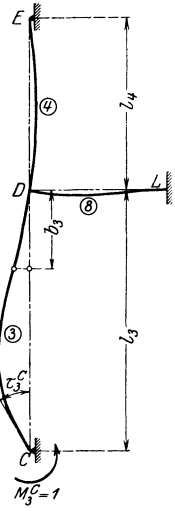


Fig. 99.

8. Verteilungsmaße am durchlaufenden Balkentragwerk der Fig. 76.

Wie in Kap. I auseinandergesetzt, benötigen wir zur Weiterleitung der Momente über Knotenpunkte mit mehr als einem „anstoßenden“ Stab die Verteilungsmaße μ .

Bei Belastung einer Balkenöffnung (Fig. 77) benötigen wir das Verteilungsmaß für den Übergang von einem Balkenfeld zum anderen, während wir bei Belastung eines Pfeilers (Fig. 88) das Verteilungsmaß für den Übergang von einem Pfeiler zu einer Balkenöffnung gebrauchen.

a) Übergang von Balkenöffnung zu Balkenöffnung.

In Fig. 77 spaltet sich das durch die Belastung der Balkenöffnung 2 hervorgerufene Stützenmoment M_2^B beim Überschreiten des Pfeilers nach links in das Balkenmoment M_1^B und das Pfeilerkopfmoment M_6^B . Aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgetrennten Knotenpunkt B (Fig. 77 a) ergibt sich:

$$M_2^B - M_1^B - M_6^B = 0 \quad (148)$$

oder

$$M_1^B = M_2^B - M_6^B. \quad (148a)$$

Bezeichnen wir mit μ_{2-1}^B (gelesen μ in B von 2 nach 1) das Verteilungsmaß, mit welchem das Moment M_2^B beim Überschreiten der Stütze B nach links multipliziert werden muß, um daraus M_1^B zu erhalten, so ergibt sich nach Gl. (148 a)

$$M_1^B = BB' = \mu_{2-1}^B \cdot M_2^B = \mu_{2-1}^B \cdot BB'' \quad (149)$$

und nach Gl. (148)

$$M_6^B = (1 - \mu_{2-1}^B) \cdot M_2^B. \quad (149a)$$

Aus Gl. (149) ergibt sich

$$\mu_{2-1}^B = \frac{BB'}{BB''} \quad (\text{Fig. 77}). \quad (150)$$

Um das Verhältnis der vorläufig noch unbekanntenen Größen BB' und BB'' durch dasjenige von bereits bekannten Konstruktionslinien-Abschnitten allgemein auszudrücken, beachten wir, daß im elastischen Tangenteck (Fig. 78 oder 99 a) das Produkt von B_2B_2' mit der Polweite $H = 1$ gleich dem statischen Moment der Kraft F_3 , und daß das Produkt von B_2B_2'' mit der Polweite $H = 1$ gleich dem statischen Moment der Kraft $(F_3 + F_4)$ in bezug auf die verschränkte Drittellinie bei B ist, d. h.

$$B_2B_2' = F_3 \cdot v_{1-2}^r \quad (151)$$

und

$$B_2B_2'' = (F_3 + F_4) \cdot v_{1-2}^r. \quad (152)$$

Aus den Gl. (151) und (152) folgt durch Division:

$$\frac{B_2B_2'}{B_2B_2''} = \frac{F_3}{F_3 + F_4}. \quad (154)$$

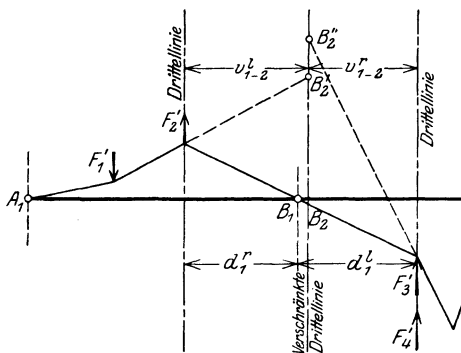


Fig. 99 a.

Die in Gl. (154) vorkommenden reduzierten Momentenflächen F'_3 und $(F'_3 + F'_4)$ der Fig. 77 können wir an Hand der reduzierten Momentenfläche der Fig. 84 ermitteln, wenn wir in der letzteren h durch die der Fig. 77 entnommenen Momentenordinaten $B B'$ bzw. $B B''$ ersetzen. Dann erhalten wir:

$$F'_3 = \sum_0^{l_2} \frac{\Delta s \cdot z' \cdot B B'}{E \cdot J \cdot l_2} = \frac{B B'}{E \cdot l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z' \quad (155)$$

und

$$F'_3 + F'_4 = \sum_0^{l_2} \frac{\Delta s \cdot z' \cdot B B''}{E \cdot J \cdot l_2} = \frac{B B''}{E \cdot l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z'. \quad (156)$$

Setzen wir die Werte dieser beiden Gleichungen in Gl. (154) ein, so folgt:

$$\frac{B_2 B'_2}{B_2 B''_2} = \frac{\frac{B B'}{l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z'}{\frac{B B''}{l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z'} = \frac{B B'}{B B''} = \mu_{2-1}^B. \quad (157)$$

Wir erhalten also

$$\mu_{2-1}^B = \frac{B_2 B'_2}{B_2 B''_2}. \quad (158)$$

Da nun die Konstruktionslinien der Fig. 79 oder 99 b, welche zu den Festpunkten führen, in demselben Verhältnis zueinander stehen wie die entsprechenden Seiten des elastischen Tangentenecks der Fig. 79 oder 99 a, so ist auch:

$$\frac{B_2 B'_2}{B_2 B''_2} = \frac{B_4 B'_4}{B_4 B''_4} \quad (159)$$

und der Wert μ_{2-1}^B ergibt sich schließlich zu:

$$\mu_{2-1}^B = \frac{B_4 B'_4}{B_4 B''_4}, \quad (160)$$

d. h. man erhält graphisch μ_{2-1}^B aus den Konstruktionslinien der Festpunkte (Fig. 79 oder 99 b) durch Abmessen der Strecken $B_4 B'_4$ und $B_4 B''_4$ auf der verschränkten Drittellinie und Einsetzen dieser Strecken in Gl. (160). Dabei ist zu bemerken, daß das Verteilungsmaß μ_{2-1}^B beim Überschreiten der Stütze B nach links aus dem Viereck $U'' B'_4 E T''$ hervorgeht, welches zur Konstruktion des Festpunktes J_2 rechts von B führt.

Analog erhält man das Verteilungsmaß μ_{1-2}^B beim Überschreiten der Stütze B nach rechts aus dem Viereck $T'' B''_4 E' U''$ (Fig. 79), welches zur Konstruktion des Festpunktes K_1 links von B führt, und zwar ist:

$$\mu_{1-2}^B = \frac{B_4 B''_4}{B_4 B'''_4}. \quad (161)$$

Aus den übrigen elastisch drehbaren Mittelpfeilern C und D ergeben sich die Verteilungsmaße beim Überschreiten derselben nach links und rechts in der genau gleichen einfachen Weise aus Fig. 79, in welcher alle nötigen Konstruktionslinien ersichtlich sind.

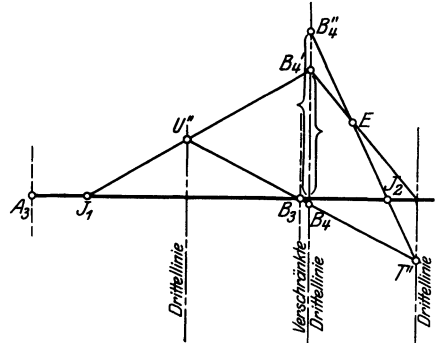


Fig. 99 b.

Liegt der Balken an einer (Fig. 92) Mittelstütze frei auf, beispielsweise in B , so fällt der Punkt E (Fig. 78) mit B'_2 , und damit B''_2 ebenfalls mit B'_2 zusammen; dann erhalten wir für diesen Grenzfall:

$$\mu_{2-1}^B = \frac{B_2 B'_2}{B_2 B'_2} = 1, \quad (162)$$

d. h. die Balkenmomente unmittelbar links und rechts der Auflagersenkrechten durch B sind einander gleich.

Da die zwei Strecken, als deren Verhältnis die Verteilungsmaße μ ausgedrückt sind, sich aus den Konstruktionslinien zur Bestimmung der Festpunkte ergeben, so gilt die vorstehend erläuterte graphische Ermittlung dieser Verteilungsmaße für den durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Stützen mit beliebig veränderlichem, sprungweise veränderlichem und konstantem Trägheitsmoment.

Die Multiplikation des über einen Pfeiler hinweg fortzupflanzenden Stützenmoments mit dem entsprechenden Verteilungsmaß μ kann man entweder rechnerisch vornehmen oder auch graphisch wie folgt ausführen:

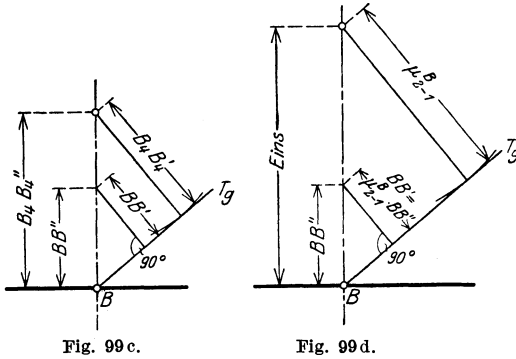


Fig. 99 c.

Fig. 99 d.

α) Wurde μ graphisch als Verhältnis von zwei Strecken aus den Konstruktionslinien zur graphischen Bestimmung der Festpunkte ermittelt, so erhalten wir beispielsweise in Fig. 77 oder 99 c das Produkt $\mu_{2-1}^B \cdot B B'' = B B'$ beim Überleiten des Stützenmomentes $B B''$ über den Pfeiler B in die linke Nachbaröffnung, indem wir (siehe Fig. 77 oder 99 c) auf der Senkrechten durch B die der Fig. 79 oder 99 b entnommene Strecke $B_4 B_4''$ von B aus auftragen, aus dem Endpunkt der letzteren als Mittelpunkt mit einem Radius der aus Fig. 79 oder 99 b entnommenen Strecke $B_4 B_4'$ einen Kreisbogen schlagen und an letzteren von B aus eine Tangente ziehen. Tragen wir jetzt auf der Senkrechten durch B (Fig. 77 oder 99 c) von B aus die Momentenordinate $B B''$ auf, so ist das Lot, welches wir vom Endpunkt dieser Strecke auf die vorgenannte Tangente fallen, gleich dem Produkt $\mu_{2-1}^B \cdot B B''$.

β) Wurde das Verteilungsmaß μ_{2-1}^B im vorgenannten Falle des Überschreitens des Pfeilers B durch das Stützenmoment $B B''$ rechnerisch als Zahl ermittelt, so trägt man zur Bestimmung des vorbeschriebenen Verwandlungswinkels (Fig. 77 oder 99 c) auf der Senkrechten durch B (siehe Fig. 99 d) in beliebigem Maßstabe die Zahl Eins auf, schlägt aus dem Endpunkt dieser Strecke mit der in demselben Maßstab abgegriffenen Zahl μ_{2-1}^B als Radius einen Kreisbogen und zieht an letzteren von B aus eine Tangente; die graphische Multiplikation erfolgt dann wie vorhin unter α .

b) Übergang vom Pfeiler zum Balken.

In Fig. 88 spaltet sich das durch die Belastung des Pfeilers 7 hervorgerufene Pfeilerkopfmoment M_7^C beim Weiterleiten in den Balken in das Moment M_2^C

links von C und M_3^C rechts von C . Aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgetrennten Knotenpunkt C (Fig. 88a) ergibt sich:

$$M_7^C - M_2^C - M_3^C = 0 \quad (163)$$

oder

$$M_2^C = M_7^C - M_3^C. \quad (164)$$

Bezeichnen wir mit μ_{7-2}^C das Verteilungsmaß, mit welchem das Moment M_7^C beim Weiterleiten in die Balkenöffnung 2 multipliziert werden muß, um daraus das Moment M_2^C zu erhalten, so ist nach Gl. (164):

$$M_2^C = \mu_{7-2}^C \cdot M_7^C \quad (165)$$

und

$$M_3^C = (1 - \mu_{7-2}^C) \cdot M_7^C. \quad (166)$$

Hat man den oberen Festpunkt K_7 des Pfeilers 7 graphisch nach Fig. 98 bestimmt, so hat man die verschränkte Drittellinie (Abstand v_{2-7}), auf welcher die Abschnitte $B_4 B_4'$ und $B_4 B_4''$ abgegriffen werden können. Es ist dann laut Gl. (160)

$$\mu_{7-2}^C = \frac{B_4 B_4'}{B_4 B_4''}. \quad (167)$$

Wurde der obere Festpunkt K_7 des Pfeilers 7 mit Hilfe des gemeinsamen Drehwinkels τ_{2-3}^C (nach Gl. 143) als Festpunkt eines Endfeldes ermittelt, so berechnet man μ_{7-2}^C nach Gl. (35) in Kap. II; es ist

$$\mu_{7-2}^C = \frac{\tau_{2-3}^C}{\tau_2^C}, \quad (168)$$

worin τ_2^C den Winkel aus Fig. 96 bedeutet.

Die Verteilungsmaße μ an den Knotenpunkten B und D ermitteln wir in analoger Weise.

Sonderfall: Konsole.

Der durchlaufende Balken besitzt an einem Ende eine belastete Konsole, d. h. es wird an einem Ende ein Moment in die Konstruktion eingeleitet.

Der in Fig. 100 dargestellte durchlaufende Träger $ABCDE$ auf den elastisch drehbaren Pfeilern 5, 6, 7 und 8 und der frei drehbaren Stütze C , an welcher der Balken festgehalten ist, besitzt an seinem linken Ende eine Konsole, an deren Ende die Einzellast P angreift. Dadurch entsteht längs der Konsole bis zur Stütze A das gewöhnliche statisch bestimmte Konsolmoment, das im Querschnitt unmittelbar links von A : $M^A = P \cdot l$ beträgt. Dieses Moment pflanzt sich nun nach rechts über den Balken und die

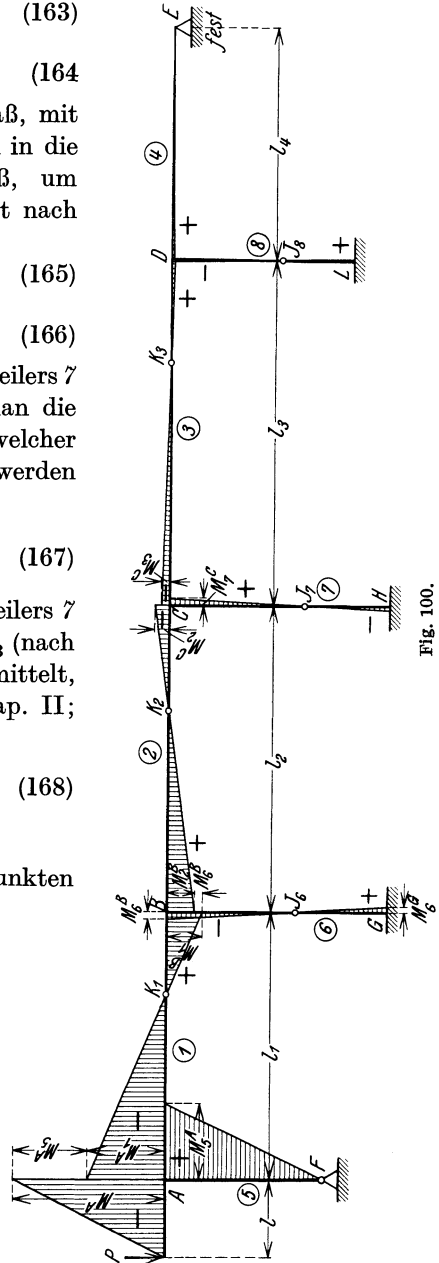


Fig. 100.

Pfeiler fort und ruft dabei die in Fig. 100 gezeichnete Momentenfläche hervor. Beim Überschreiten des Pfeilers A nach rechts spaltet sich M^A in das Stützenmoment unmittelbar rechts von A :

$$M_1^A = \mu_{Kons.-1}^A \cdot M^A$$

und in das Pfeilerkopfmoment

$$M_5^A = (1 - \mu_{Kons.-1}^A) \cdot M^A.$$

In diesem Falle ist es nun nicht möglich, den Wert für $\mu_{Kons.-1}^A$ graphisch zu bestimmen, sondern man ist gezwungen, μ_{1-2}^A nach Gl. (37) (Kap. II) zu berechnen; es ist

$$\mu_{1-2}^A = \frac{\tau_4^A}{\tau_2^A + \tau_4^A}. \tag{169}$$

Würde der Balken in A frei aufliegen, so wären die beiden Stützenmomente unmittelbar links und rechts von A einander gleich.

9. Festpunkte und Verteilungsmaße an allgemeinen Tragwerken.

a) Offenes Tragwerk.

An dem in Fig. 101 dargestellten allgemeinen Tragwerk mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe (Träger) müssen wir, um die Festpunkte J und K und die Verteilungsmaße μ graphisch bestimmen zu können,

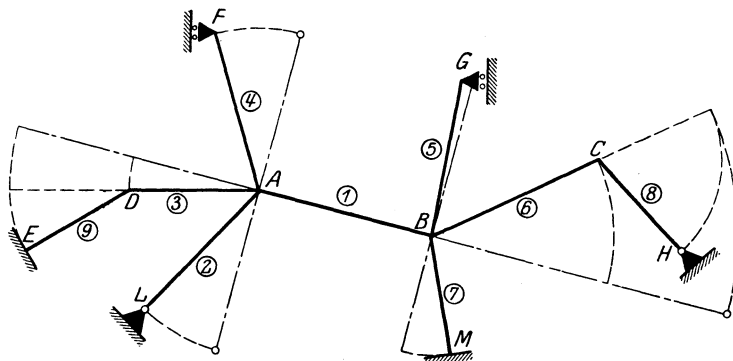


Fig. 101.

zunächst die unregelmäßig aneinandergereihten Stäbe in zweckmäßig rechtwinklig zueinander stehende Gerade ausstrecken bzw. umklappen, wie dies in Fig. 101 geschehen ist. Nach diesem Vorgang stehen alle Stäbe wieder in biegeffester Verbindung miteinander wie vorher. In den Punkten D und C ist der Balken frei drehbar zu stützen.

Zur Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmaße

am Balken $EDABCH$

ermitteln wir zunächst die Drittlinien und verschränkten Drittlinien nach Abschnitt 1 und 2, sowie die Drehwinkel an den vorhandenen, biegeffest mit dem Balken verbundenen Pfeiler. Da sich in Knotenpunkten A nicht nur ein,

sondern zwei Stäbe, nämlich die Pfeiler 2 und 4 anschließen, so ist der gemeinsame Drehwinkel τ_{2-4}^A infolge $M = 1$ in A (Fig. 102) zu ermitteln, welcher nach Gl. (36) den Wert hat:

$$\tau_{2-4}^A = \frac{\tau_2^A \cdot \tau_4^A}{\tau_2^A + \tau_4^A}. \quad (170)$$

Die Bedeutung der Winkel τ_2^A und τ_4^A geht aus Fig. 102a hervor, die Werte derselben werden nach Kap. II berechnet.

Dasselbe gilt für Knotenpunkt B , wo die beiden Pfeiler 5 und 7 angeschlossen sind und deren gemeinsamer Drehwinkel τ_{5-7}^B infolge $M = 1$ in B (Fig. 103) den Wert hat:

$$\tau_{5-7}^B = \frac{\tau_5^B \cdot \tau_7^B}{\tau_5^B + \tau_7^B}. \quad (171)$$

Die Bedeutung der Winkel τ_5^B und τ_7^B geht aus Fig. 103a hervor.

Zur Bestimmung der linken Festpunkte J am ganzen Balken benötigen wir noch die Werte der Verhältnisse $\frac{e}{e'}$ zum Teilen der Abstände v^r in den Balkenöffnungen 1 und 6. Es ist nach Gl. (137):

$$\frac{e}{e'} = k_1 \cdot \frac{l_1}{2 \cdot \tau_{2-4}^A} \cdot \frac{v_{3-1}^r}{d_1^l} \quad (172)$$

und

$$\frac{e}{e'} = k_6 \cdot \frac{l_6}{2 \cdot \tau_{5-7}^B} \cdot \frac{v_{1-6}^r}{d_6^l}, \quad (173)$$

worin die Verhältniswerte k_1 und k_6 einen der Gl. (139) analogen Wert haben. Darauf können wir die Festpunkte J am ganzen Balken konstruieren, was in Fig. 104 dargestellt ist.

Zur Bestimmung der rechten Festpunkte K am ganzen Balken benötigen wir noch die Werte der Verhältnisse $\frac{e}{e'}$ zum Teilen der Abstände v^l in den Balkenöffnungen 1 und 3; e' ist nach Gl. (140):

$$\frac{e}{e'} = k_1 \cdot \frac{l_1}{2 \cdot \tau_{5-7}^B} \cdot \frac{v_{1-6}^l}{d_1^r}, \quad (174)$$

$$\frac{e}{e'} = k_3 \cdot \frac{l_3}{2 \cdot \tau_{2-4}^A} \cdot \frac{v_{3-1}^l}{d_3^r}, \quad (175)$$

worin die Verhältniswerte k_1 und k_3 einen der Gl. (141) analogen Wert haben. Darauf können wir die Festpunkte K am ganzen Balken wie aus Fig. 104 ersichtlich, konstruieren.

Die bei einer

Belastung des Balkens 6 (Fig. 60)

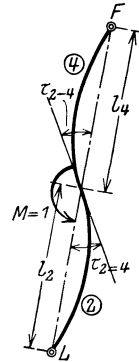


Fig. 102.

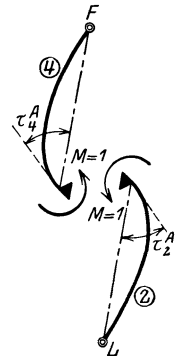


Fig. 102a.

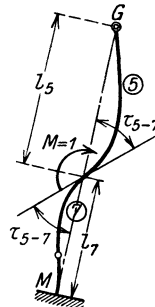


Fig. 103.

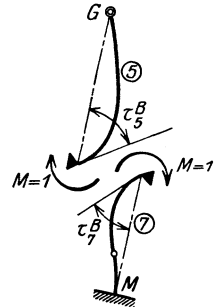


Fig. 103a.

benötigten Verteilungsmaße μ_{6-1} und μ_{1-3} erhalten wir nach Gl. (160) aus Fig. 104 zu:

$$\mu_{6-1} = \frac{B_1 B'_1}{B_1 B'_1}, \quad (176)$$

$$\mu_{1-3} = \frac{A_1 A'_1}{A_1 A'_1}. \quad (177)$$

Multiplizieren wir das Moment M_8^B (Fig. 60) mit μ_{6-1} , so erhalten wir das Moment M_1^B und der Rest $(1 - \mu_{6-1}) \cdot M_8^B$ ist gleich dem auf Pfeiler 5 und 7 zusammen entfallenden Moment M_{5-7}^B , welches wir noch im Verhältnis der

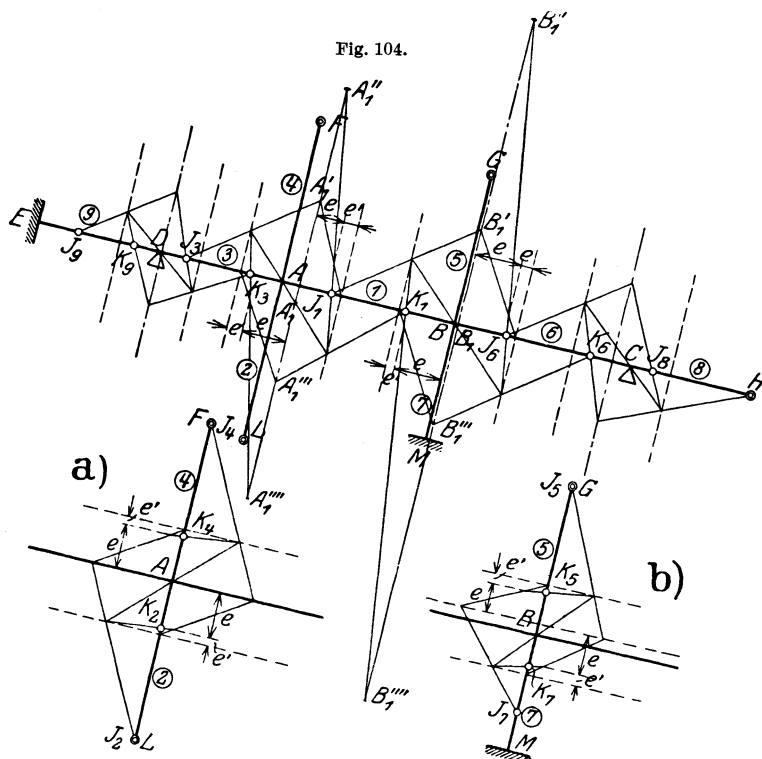


Fig. 104a—104b.

Elastizitätsmaße $\frac{1}{\tau_5^B}$ und $\frac{1}{\tau_7^B}$ (vgl. Kap. II, 5) auf die beiden Pfeiler 5 und 7 verteilen müssen. Es ist nach Gl. (35):

$$M_5^B = \frac{\tau_{5-7}^B}{\tau_5^B} \cdot M_{5-7}^B \quad (178)$$

und

$$M_7^B = \frac{\tau_{5-7}^B}{\tau_7^B} \cdot M_{5-7}^B. \quad (179)$$

Dasselbe gilt für das Moment M_1^A (Fig. 60), welches mit μ_{1-3} multipliziert das Moment M_3^A liefert, während der Rest $(1 - \mu_{1-3}) \cdot M_1^A$ das Gesamtmoment M_{2-4}^A darstellt, welches noch analog M_{5-7}^B auf die Stäbe 2 und 4 zu verteilen ist.

Ist auch noch das Balkenfeld 9 oder 3 belastet, so müssen wir noch die Verteilungsmaße μ_{3-1} und μ_{1-6} ermitteln, welche nach Gl. (161) den Wert haben:

$$\mu_{3-1} = \frac{A_1 A_1'''}{A_1 A_1'''} \quad (180)$$

und

$$\mu_{1-6} = \frac{B_1 B_1'''}{B_1 B_1'''} \quad (181)$$

Zur Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmaße
am Stabzug LAF (Pfeiler)

ermitteln wir zunächst wieder die Drittlinien und verschränkten Drittlinien nach Abschnitt 1 und 2 sowie den gemeinsamen Drehwinkel τ_{1-3}^A (Fig. 105) infolge $M = 1$ in A , welcher nach Gl. (36) den Wert hat:

$$\tau_{1-3}^A = \frac{\tau_1^A \cdot \tau_3^A}{\tau_1^A + \tau_3^A} \quad (182)$$

Die Bedeutung der Winkel τ_1^A und τ_3^A geht aus Fig. 105a hervor.

Zur Bestimmung des unteren Festpunktes K_4 am Pfeiler 4 berechnen wir noch zum Teilen des Abstandes v_{2-4}^r das Verhältnis (nach Gl. 137):

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{l_4}{2 \cdot \tau_{1-3}^A} \cdot \frac{v_{2-4}^r}{d_4^l}, \quad (183)$$

worin k_2 einen der Gl. (138) analogen Wert hat.

Darauf können wir, von J_2 (fällt wegen des Fußgelenkes mit L zusammen) ausgehend, den Festpunkt K_4 konstruieren (Fig. 104a).

Zur Bestimmung des oberen Festpunktes K_2 am Pfeiler 2 benötigen wir noch zum Teilen der Strecke v_{2-4}^l das Verhältnis [nach Gl. (140)]:

$$\frac{e}{e'} = k_2 \cdot \frac{l_2}{2 \cdot \tau_{1-3}^A} \cdot \frac{v_{2-4}^l}{d_2^r}, \quad (184)$$

worin k_2 einen der Gl. (141) analogen Wert hat.

Darauf können wir, von J_4 (fällt wegen des freien Auflagers in F mit F zusammen, ausgehend, den Festpunkt K_2 konstruieren (Fig. 104a).

Das bei einer

Belastung des Pfeilers 2 (Fig. 106)

benötigte Verteilungsmaß μ_{2-4} erhalten wir nach Gl. (161) aus Fig. 104a zu:

$$\mu_{2-4} = \frac{A_2 A_2'''}{A_2 A_2'''} \quad (185)$$

Multiplizieren wir das Moment M_2^A (Fig. 106) mit μ_{2-4} , so erhalten wir das Moment M_4^A , und der Rest $(1 - \mu_{2-4}) \cdot M_2^A$ ist gleich dem auf Balkenöffnung 1 und 3 zusammen entfallenden Moment M_{1-3}^A , welches wir noch im Verhältnis

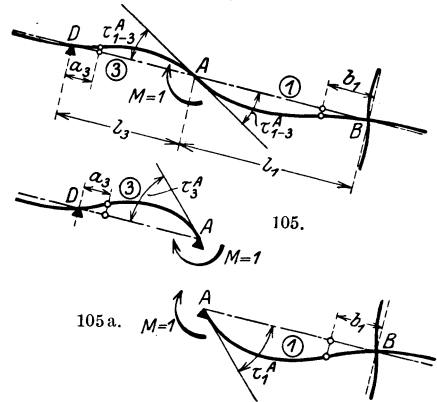


Fig. 105 u. 105a.

der Elastizitätsmaße $\frac{1}{\tau_1^A}$ und $\frac{1}{\tau_3^A}$ (vgl. Kap. II, 5) auf die beiden Balkenöffnungen 1 und 3 verteilen müssen; es ist nach Gl. (35):

$$M_1^A = \frac{\tau_{1-3}^A}{\tau_1^A} \cdot M_{1-3}^A \quad (186)$$

und

$$M_3^A = \frac{\tau_{1-3}^A}{\tau_3^A} \cdot M_{1-3}^A. \quad (187)$$

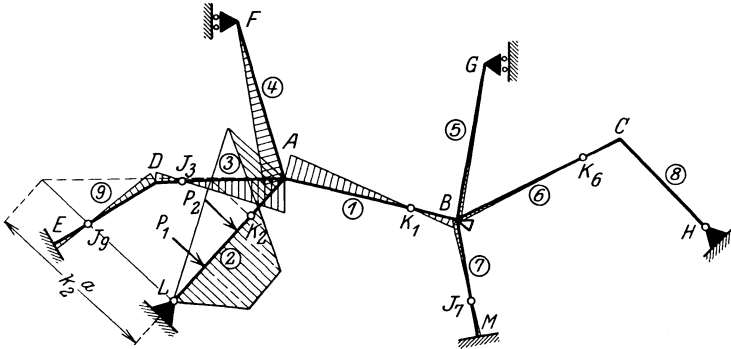


Fig. 106.

Für den Stabzug MBG werden Festpunkte und Verteilungsmaße in analoger Weise ermittelt.

b) Geschlossenes Tragwerk.

Beim einseitig und ganz geschlossenen Tragwerk (Fig. 70 und 71) gehen wir genau so vor wie unter a), nur müssen wir, wie in Kap. II, 8, 9 und 10 ausgeführt, diejenigen Festpunkte schätzen, die wir wegen der Geschlossenheit des Tragwerkes nicht direkt berechnen können und die Berechnung dann wiederholt durchführen, um den Fehler der Schätzung auszuschalten.

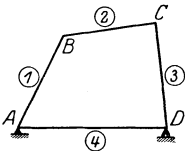


Fig. 107.

Sonderfall: Der einfache geschlossene Rahmen (Fig. 107).

Für diesen Fall ist die graphische Festpunktbestimmung sehr zweckmäßig. Man wickelt den Rahmen ab und trägt ihn mehrmals (es genügt zweimal) hintereinander auf (siehe Fig. 107a).

Um die Festpunktabstände a zu erhalten, bestimmt man zunächst die Drittlinien und verschränkten Drittlinien in allen Öffnungen. Darauf schätzt man den ersten Festpunktabstand a_1 und setzt die Festpunktkonstruktion über alle Öffnungen fort (über zwei- bis dreimal soviel Öffnungen, als der geschlossene Rahmen Stäbe hat). In der dritten Stabreihe würde sich dann zeigen, daß die Festpunktabstände von den entsprechenden der zweiten Stabreihe nicht mehr abweichen, so daß dort die genauen Festpunktabstände a zu finden sind.

Um die Festpunktabstände b zu erhalten, fangen wir am anderen Ende an, schätzen den ersten Festpunktabstand b_1 und führen die Festpunktkonstruktion über die zwei Stabreihen durch. Dann besitzen wir in der ersten Stabreihe die genauen Festpunktabstände b an allen Stäben.

Wir ersehen aus den Ausführungen dieses Abschnittes, daß die graphische Bestimmung der Festpunkte an allgemeinen Konstruktionen nicht so vorteilhaft ist wie am durchlaufenden Balken, außerdem muß man sobald R. II in Betracht

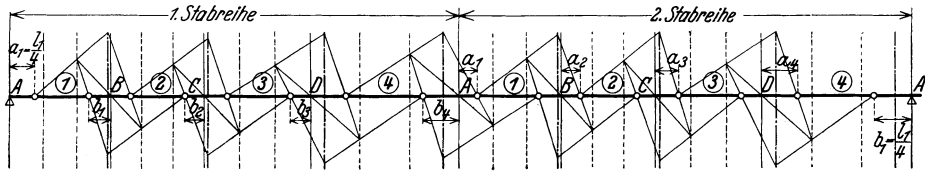


Fig. 107 a.

kommt, d. h. wenn die Säulenköpfe Verschiebungen erleiden können, die Drehwinkel I der Balkenstücke doch ermitteln, so daß man auch in diesem Falle das analytische dem graphischen Verfahren vorziehen wird.

10. Sonderfälle.

Als Sonderfälle des vorhergehend behandelten durchlaufenden Balkens mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Pfeilern betrachten wir den durchlaufenden Balken mit konstantem, jedoch von Öffnung zu Öffnung sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment und den durchlaufenden Balken mit über seiner ganzen Länge konstantem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Stützen.

Das einzuschlagende Verfahren zur Bestimmung der Festpunkte ist in dem eingangs erwähnten Werke von Wilhelm Ritter behandelt, geht aber auch ohne weiteres aus den vorgehend erläuterten allgemeinen Beziehungen hervor.

a) Der Balken hat konstantes, jedoch von Öffnung zu Öffnung sprungweise veränderliches Trägheitsmoment (Fig 108).

Fig. 108.

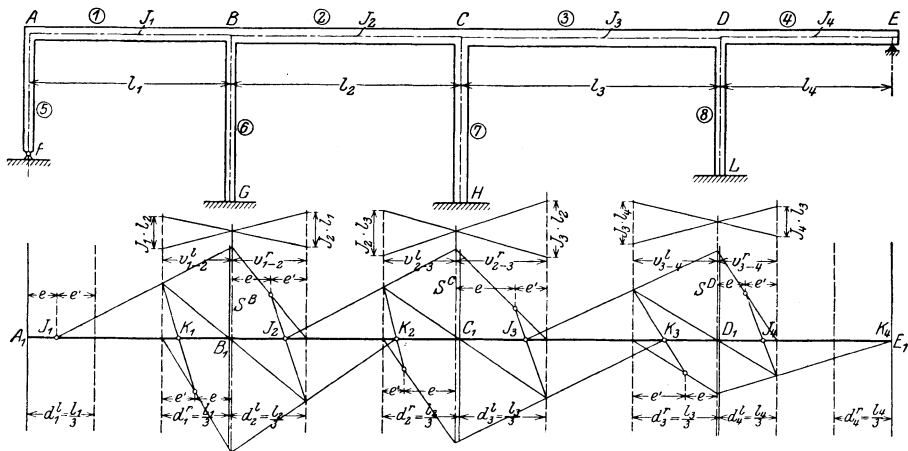


Fig. 108 a.

Wir bezeichnen mit J_1 das konstante Trägheitsmoment der Öffnung l_1 , mit J_2 dasjenige der Öffnung l_2 , usw.

Drittellinie und verschränkte Drittellinien.

Wir beginnen wie immer mit der Ermittlung der Drittellinien, verschränkten Drittellinien und der Drehwinkel τ an den gegebenenfalls vorhandenen, mit dem Balken biegefest verbundenen Pfeilern.

In diesem Falle sind die reduzierten Teilmomentenflächen Dreiecke mit Spitze in den Auflagersenkrechten, so daß die Drittellinien in die Drittelpunkte der Öffnungen fallen; die verschränkte Drittellinie, z. B. S^B in der Nähe der Stütze B (Fig. 108a) teilt den Abstand der beiden benachbarten Drittellinien im Verhältnis $l_2 \cdot J_1 : l_1 \cdot J_2$, was man sofort einsieht, wenn man die entsprechenden Werte für F'_2 , F'_3 , d'_1 und d'_2 in die Gl. (102) und (103) einsetzt und Gl. (102) durch Gl. (103) dividiert. Es ist dann

$$v'_{1-2} = \frac{l_1 + l_2}{3 \left(1 + \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{J_2}{J_1} \right)}, \quad (188)$$

$$v''_{1-2} = \frac{l_1 + l_2}{3 \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{J_1}{J_2} \right)} \quad (189)$$

und

$$\frac{v'_{1-2}}{v''_{1-2}} = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}, \quad (190)$$

d. h. die verschränkte Drittellinie rückt gegen die Öffnung mit dem kleineren Trägheitsmoment hin, weil das reduzierte Momentendreieck bei kleinerem Trägheitsmoment größer wird. Die Teilung des Abstandes der beiden benachbarten Drittellinien in dem durch Gl. (190) angegebenen Verhältnis nehmen wir am einfachsten so vor, daß wir auf derjenigen Drittellinie, an welche die Strecke v'_{1-2} anstößt, das Maß $J_1 \cdot l_2$ und auf der Richtung der Drittellinie, an welche v''_{1-2} anstößt, $J_2 \cdot l_1$ in gleichem Maßstab auftragen und die Endpunkte der beiden Strecken kreuzweise verbinden (vgl. Fig. 108a); die gesuchte verschränkte Drittellinie S^B geht dann durch den Schnittpunkt dieser beiden sich kreuzenden Linien.

Man verfährt zur Ermittlung der Drittellinien und verschränkten Drittellinien in gleicher Weise sowohl am frei aufliegenden durchlaufenden Balken als auch am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern.

Linke Festpunkte J .

Erste Öffnung links.

Fall 1: Ist der Balken an seinem linken Ende elastisch eingespannt (Endpfeiler), so teilt der Festpunkt J_1 den Abstand $d'_1 = \frac{l_1}{3}$ nach Gl. (116) im Verhältnis:

$$\frac{e}{e'} = \frac{l_1}{2 E \cdot J_1 \cdot \tau_3^4}, \quad (191)$$

da

$$k_1 = \frac{1}{E \cdot J_1}.$$

Fall 2: Ist der Balken an seinem linken Ende fest eingespannt, so ist

$$e' = 0,$$

d. h. der Festpunkt J_1 fällt in den ersten Drittelpunkt der Öffnung.

Beliebige Mittelöffnung und letzte Öffnung rechts.

Fall 1: Besteht die Stütze vor der Öffnung, in welcher J gesucht wird, aus einem elastisch drehbaren Pfeiler, so muß zuerst der Festpunkt J in der vorhergehenden Öffnung bestimmt werden. Es ist

$$k_2 = \frac{1}{E \cdot J_2} \quad \text{und} \quad d_2^l = \frac{l_2}{3}.$$

Diese Werte in Gl. (137) eingesetzt gibt:

$$\frac{e}{e'} = \frac{3 \cdot v_{1-2}}{2 E \cdot J_2 \cdot \tau_6^B}. \quad (192)$$

Fall 2: Liegt der Balken auf der Stütze vor der Öffnung, in welcher J gesucht wird, frei auf, so ist

$$e = 0.$$

Rechte Festpunkte K .

Dreht man den Balken aus der Zeichenebene heraus um 180° so, daß dessen rechtes Ende nach der linken Seite kommt, so werden die rechten Festpunkte K genau wie die linken Festpunkte J bestimmt.

Wie beim allgemeinen Fall erwähnt, ist die Lage der Drittellinien und verschränkten Drittellinien dieselbe sowohl am kontinuierlichen Balken auf ela-

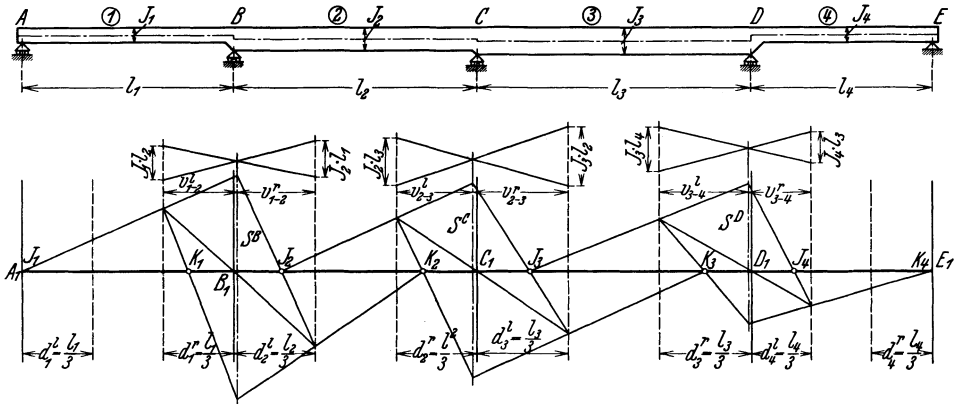


Fig. 108 b.

stisch drehbaren als auch am kontinuierlichen Balken auf frei drehbaren Stützen. Eine Einspannung an den Stützen wird im Verhältnis $\frac{e}{e'}$ berücksichtigt, welches an der Stütze wegfällt, wo der Balken frei aufliegt (siehe Fig. 108 b).

b) Der Balken hat konstantes Trägheitsmoment auf seine ganze Länge
(Fig. 109).

Drittellinien und verschränkte Drittellinien.

Die reduzierten Teilmomentenflächen sind wieder Dreiecke, so daß die Drittellinien auch hier in die Drittelpunkte der Öffnungen fallen. Die ver-

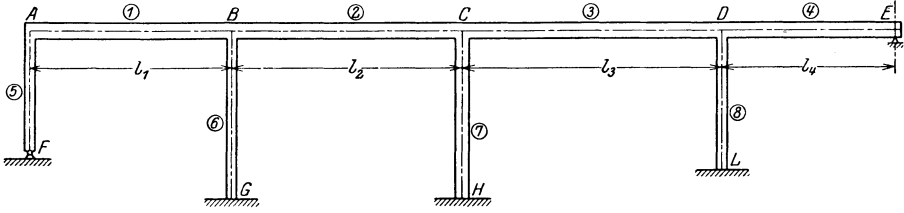


Fig. 109.

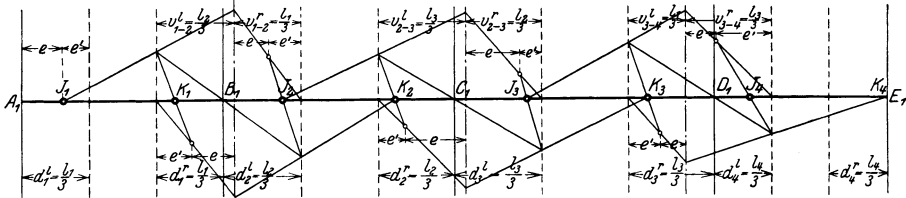


Fig. 109 a.

schränkten Drittellinien erhält man durch Vertauschen der Spannweitendrittel (Fig. 109 a); es ist:

$$v_{1-2}^l = \frac{l_2}{3} \quad (193)$$

und

$$v_{1-2}^r = \frac{l_1}{3}. \quad (194)$$

Will man den Festpunkt J_1 durch Aufklappen der Endsäule in die Balkenachse (siehe Fig. 90) ermitteln, so ist zu beachten, daß die Trägheitsmomente von Endsäule und Balken I verschieden sind (sprungweise veränderlich), was bei der Konstruktion der verschränkten Drittellinie in der Nähe von A nach dem vorhergehenden Absatz (Fig. 108a) zu berücksichtigen ist.

Linke Festpunkte J .

Das Verhältnis $\frac{e}{e'}$ beträgt bei einem an seinem linken Ende elastisch eingespannten Balken (Endpfeiler): für den linken Festpunkt J_1 nach Gl. (116):

$$\frac{e}{e'} = \frac{l_1}{2 \cdot E \cdot J \cdot \tau_5^A}, \quad (195)$$

da

$$k = \frac{1}{E \cdot J}$$

und bei Vorhandensein eines elastisch drehbaren Pfeilers zwischen Öffnung 1 und 2 für den linken Festpunkt J_2 nach Gl. (137):

$$\frac{e}{e'} = \frac{l_1}{2 \cdot E \cdot J \cdot \tau_6^B}, \quad (196)$$

wobei hervorzuheben ist, daß sich im Zähler des Verhältnisses $\frac{e}{e'}$ für J_2 die Spannweite l_1 vorfindet, da in Gl. (137) $v_{1-2}^r = \frac{l_1}{3}$ einzusetzen war.

Bezüglich der

rechten Festpunkte K

gilt das unter a) Gesagte.

Wie beim allgemeinen Fall erwähnt, ist die Lage der Drittellinien und verschränkten Drittellinien dieselbe sowohl am kontinuierlichen Balken auf elastisch drehbaren als auch am kontinuierlichen Balken auf frei drehbaren Stützen.

Eine Einspannung an den Stützen wird im Verhältnis $\frac{e}{e'}$ berücksichtigt, welches an der Stütze wegfällt, wo der Balken frei aufliegt (siehe Fig. 109 b). Die Konsole hat keinen Einfluß auf die Bestimmung der Festpunkte, sie dient nur zur Einleitung des Konsolmomentes in den Stab I .

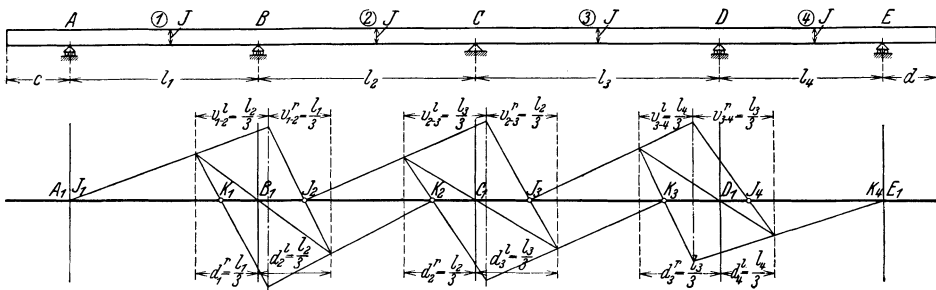


Fig. 109 b.

IV. Bestimmung von Drehwinkeln und Verschiebungen.

Drehwinkel und Verschiebungen bzw. Durchbiegungen am einfachen Balken auf 2 Stützen sowie am fest eingespannten Kragarm werden, besonders weil wir Stäbe mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment betrachten, am einfachsten mit Hilfe des Mohrschen Satzes ermittelt. Verläuft das Trägheitsmoment des Stabes nach einer gesetzmäßigen, leicht integrierbaren Kurve, so braucht man die Momentenfläche, welche man bilden muß, nicht in Streifen zu zerlegen und die Summen zu bilden, sondern man kann in diesem Falle die Arbeitsgleichung anwenden und über den Stab integrieren. Dieser Fall liegt jedoch selten vor; bei einfachen Belastungsfällen und konstantem Trägheitsmoment läßt man die ganze reduzierte Momentenfläche in ihrem Schwerpunkt wirken. Da die Ermittlung der benötigten Festpunkte im Verhältnis zu der ganzen Berechnung eines Tragwerkes wenig Zeit erfordert, sich aber die ganze Berechnung auf die Festpunkte stützt, so ist es richtiger, wenn man die Festpunkte nicht nur überschlägig oder nach komplizierten Formeln, sondern nach dem genauen Verfahren ermittelt, da man sonst auf unsicherer Grundlage weiterbaut.

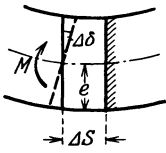
Im folgenden wird zunächst der

allgemeine Mohrsche Satz

und die daraus hervorgehenden besonderen Sätze

für den einfachen Balken und den Kragarm der Vollständigkeit halber abgeleitet.

Es sei Δs die Länge eines Balkenelementes (Fig. 109c), auf welches das gegebene Biegemoment M wirke.



Dann ist die Spannung in der untersten Faser dieses Balkenelementes

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot e,$$

Fig. 109c wenn J das Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes bedeutet. Unter dem Einfluß von σ verlängert sich die unterste Faser um die Strecke

$$\frac{\sigma}{E} \cdot \Delta s,$$

wenn E den Elastizitätsmodul des Baumaterials bezeichnet.

Ist $\Delta \delta$ der Winkel, um den sich der eine Querschnitt in bezug auf den anderen dreht, so ist die Verlängerung der untersten Faser auch gleich

$$e \cdot \Delta \delta$$

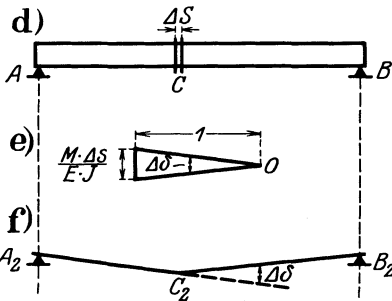
(da der Winkel $\Delta \delta$ sehr klein), daher

$$e \cdot \Delta \delta = \frac{\sigma}{E} \Delta s, \quad (197)$$

woraus

$$\Delta \delta = \frac{\sigma \cdot \Delta s}{e \cdot E}.$$

Durch Einsetzen des Wertes für σ in dieser Gleichung erhalten wir den allgemeinen Ausdruck für den Formänderungswinkel.



$$\Delta \delta = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}.$$

Es sei AB ein belasteter einfacher Balken (Fig. 109d), Δs die Länge eines in C befindlichen Balkenelementes und M das Biegemoment für den Schnitt C . Trägt man nun (Fig. 109e) die Größe $\frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$ senkrecht (in einem beliebigen Kräftemaßstab) auf, und zieht aus ihren Endpunkten Linien

nach einem im Abstände l (im Kräftemaßstab abzutragen) gelegenen Punkte O , so schließen diese Linien den Winkel $\Delta \delta$ ein. Zieht man ferner (Fig. 109f) zwei Linien A_2C_2 und C_2B_2 , die zu den Linien aus O parallel laufen und sich senkrecht unter C schneiden, so stellt $A_2C_2B_2$ die Form dar, in welche die Balkenachse übergeht, wenn nur das Element bei C elastisch gedacht wird.

Denkt man sich nun den ganzen Balken in Elemente zerlegt und jedes von ihnen elastisch, so wird die Balkenachse ebenso viele Knickungen erleiden, und die Wirkungen dieser Knickungen werden sich alle summieren. Die Form, welche die Balkenachse hierbei annimmt, wird daher gefunden, wenn man für jedes Balkenelement Δs die Größen $\frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$ berechnet, wie Kräfte senkrecht aufträgt, mit dem Punkt O als Pol ein Krafteck und mit dem letzteren das Vieleck $A''B''$ als zugehöriges Seileck zeichnet, dessen Ecken senkrecht unter

Fig. 109 d—f.

den entsprechenden Elementen liegen. Auf diese Weise gelangen wir zu dem allgemeinen Mohrschen Satze:

Um die elastische Linie eines Balkens zu erhalten, betrachte man seine Momentenfläche als Belastungsfläche und zeichne zu dieser ein Seileck.

Wir leiten nun noch die für Durchbiegung und Achsendrehung des einfachen Balkens und des Kragarmes geltenden besonderen Sätze ab:

Zu der in Fig. 110 gegebenen beliebigen äußeren Belastung des
einfachen Balkens AB

denken wir uns die zugehörige reduzierte Momentenfläche (Fig. 110a) gebildet, teilen dieselbe in Streifen von der Breite Δs und zeichnen zu den im Schwerpunkt dieser Streifen wirkenden Kräften

$$\Delta F = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$$

mit der Polweite $H = 1$ das Krafteck der Fig. 110c und das Seileck der Fig. 110b. Dann ist die Verschiebung (Durchbiegung) in einem beliebigen Balkenpunkt C gleich der Ordinate y_C zwischen dem Seileck und der Schlußlinie $A''B''$; andererseits ist aber auch

$$H \cdot y_C = 1 \cdot y_C = y_C$$

gleich dem Balkenmoment

in C infolge der Belastung mit den Kräften $\Delta F = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$. Daraus folgt:

Satz I: Die Verschiebung (Durchbiegung) in einem Punkte C eines Balkens auf zwei Stützen ist gleich dem Balkenmoment in diesem Punkte des mit seiner $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche belasteten Balkens.

Ferner ist in Fig. 110b der Winkel α_C , den die Seite b des Seilecks mit der Schlußlinie einschließt, gleich dem Winkel, welchen die Tangente an die elastische Linie in C mit der ursprünglichen Balkenachse bildet; im Krafteck (Fig. 110c) schließen die entsprechenden Polstrahlen ebenfalls den Winkel α_C ein und es folgt:

$$Q_C = H \cdot \operatorname{tg} \alpha_C.$$

Durch Einsetzen von $H = 1$ und $\operatorname{tg} \alpha_C = \alpha_C$ (da α_C sehr klein ist) in diesen Ausdruck folgt:

$$Q_C = \alpha_C, \quad \text{d. h.}$$

Satz II: Der Drehwinkel (Achsendrehung) in einem Punkte C eines Balkens auf zwei Stützen ist gleich der Balkenquerkraft in diesem Punkt des mit seiner $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche belasteten Balkens; insbesondere ist

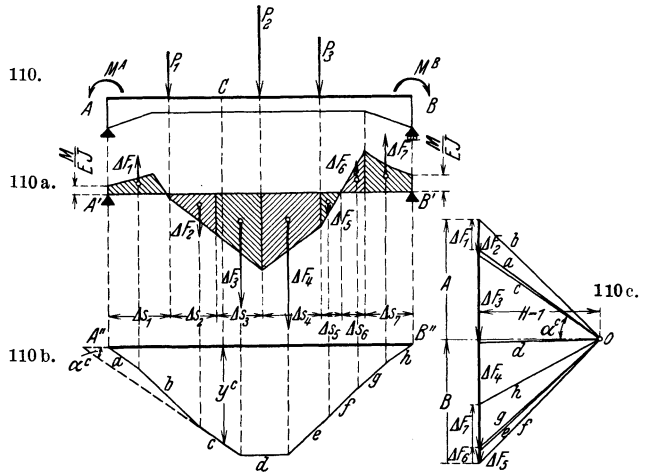


Fig. 110—110 c.

also der Drehwinkel am Auflager gleich dem Auflagerdruck des mit seiner reduzierten Momentenfläche belasteten Balkens.

Zu der in Fig. 111 gegebenen beliebigen äußeren Belastung des

Kragarmes AB

denken wir uns die zugehörige reduzierte Momentenfläche (Fig. 111a) gebildet, teilen dieselbe in Streifen von der Breite Δs und zeichnen zu den im Schwerpunkt dieser Streifen wirkenden Kräften

$$\Delta F = \frac{M \cdot \Delta s}{E \cdot J}$$

mit der Polweite $H = 1$ das Krafteck der Fig. 111c und das Seileck der Fig. 111b. Richten wir es dabei so ein, daß die erste Seileckseite a waagrecht verläuft und daher die Ordinaten der elastischen Linie von dieser Waagrechten aus gemessen werden, so ist y_C gleich der Verschiebung des Punktes C senkrecht Balkenachse; andererseits ist y_C gleich dem statischen Moment M der zwischen der Einspannungsstelle und dem Punkte C gelegenen Kräfte $\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3$ in bezug auf die Verschiebungsrichtung, denn

$$M = H \cdot y_C = 1 \cdot y_C = y_C, \quad \text{d. h.}$$

Satz III: Die Verschiebung in einem Punkt C eines an einem Ende fest eingespannten Kragarmes ist gleich dem statischen Moment der zwischen der Einspannungsstelle und dem Punkte C gelegenen $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche in bezug auf den Punkt C .

Ferner ist in Fig. 111b der Winkel γ_C der Tangente d an die elastische Linie in C gleich dem Winkel zwischen den Polstrahlen a und d der Fig. 111c; aus dieser Figur folgt:

$$\text{Strecke } (\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3) = H \cdot \text{tg } \gamma_C = 1 \cdot \text{tg } \gamma_C,$$

und da γ_C sehr klein, so kann gesetzt werden

$$\text{tg } \gamma_C = \gamma_C,$$

eingesetzt gibt

$$(\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3) = \gamma_C,$$

worin $\Delta F_1, \Delta F_2$ und ΔF_3 die Inhalte der Streifen bedeuten, in welche die reduzierte Momentenfläche zerlegt wurde. Daraus folgt:

Satz IV: Der Drehwinkel (Achsendrehung) in einem Punkte C eines an einem Ende fest eingespannten Kragarmes ist gleich dem Inhalt der zwischen der Einspannungsstelle und dem Punkte C gelegenen $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche.

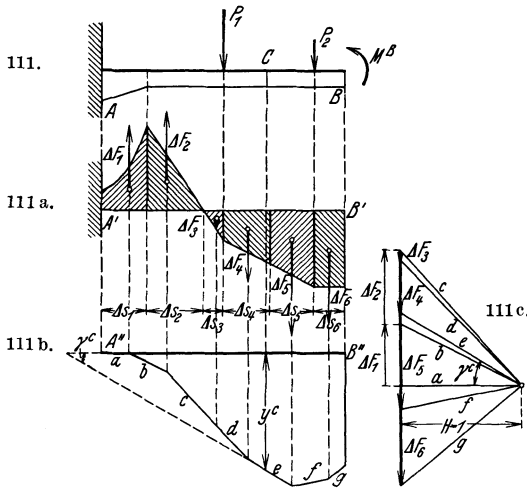


Abb. 111—111c.

Mit Hilfe dieser Sätze ermitteln wir nun die zur Bestimmung der Festpunkte und Verteilungsmasse (Kap. II und III) benötigten Grundwinkel, nämlich die Drehwinkel α^a , α^b und β und zeigen noch die Anwendung dieser Sätze zur Bestimmung von Verschiebungen an statisch unbestimmten Tragwerken.

1. Drehwinkel α^a und α^b .

a) Beliebige veränderliches Trägheitsmoment (Fig. 112).

Zur Bestimmung der Drehwinkel α^a und α^b teilen wir die reduzierte Momentenfläche des an beiden Enden gleichzeitig mit $M = 1$ belasteten einfachen Balkens (Fig. 112a) mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment in senkrechte Streifen von der Breite Δs ; der Inhalt ΔF einer solchen Streifenfläche ist

$$\Delta F = \frac{\Delta s}{E J}.$$

Setzen wir für ΔF , falls E konstant, vereinfacht

$$w = \frac{\Delta s}{J} \text{ (elastisches Gewicht),} \quad (198)$$

so ist nach Satz II $E \cdot \alpha^a$ gleich dem Auflagerdruck V_1 und $E \cdot \alpha^b$ gleich dem Auflagerdruck V_2 des mit den Kräften ΔF belasteten Balkens mit der Stützweite l (Fig. 112b), und wir erhalten

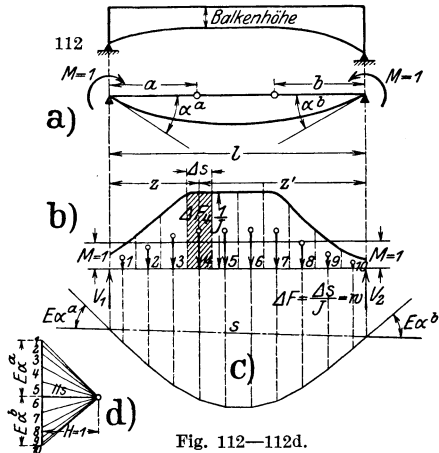


Fig. 112—112d.

Analytisch

$$E \cdot \alpha^a = \frac{1}{l} \sum_0^l w \cdot z' \quad (199)$$

und

$$E \cdot \alpha^b = \frac{1}{l} \sum_0^l w \cdot z, \quad (200)$$

worin z und z' die Abstände der Schwerpunkte der Streifen ΔF , für welche bei schmalen Streifen die Mitten angenommen werden können. Ist der Balken symmetrisch in bezug auf seine Mitte, so ist

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha}. \quad (201)$$

Graphisch

ermitteln wir die Drehwinkel α^a und α^b nicht durch Zusammensetzung der aus Fig. 112b hervorgehenden elastischen Gewichte, sondern wir entnehmen sie aus den im Falle von beliebig veränderlichem Trägheitsmoment ohnehin zur Bestimmung der Drittelllinien benötigten Seilkurven; aus diesen geht auch der Winkel β hervor.

Diese Seilkurven, wie z. B. in Fig. 80 und 83 gezeichnet, sind nichts anderes als die $\frac{1}{H} \cdot E$ fachen Biegelinien ($\frac{1}{H}$ fach, weil die Biegelinien mit beliebiger Polweite H gezeichnet sind und E fach, weil im Ausdruck für die elastischen Ge-

wichte der Wert E fehlt) für die Belastung des einfachen Balkens mit $M = 1$ am linken (Fig. 80) bzw. rechten (Fig. 83) Ende, und es sind daher in den Fig. 80 und 83 die Winkel α^a , α^b und β zu finden. Die Werte für diese Winkel ergeben sich auch aus den Kraftecken der Fig. 80a und 83a als Auflagerdrücke, und zwar nach Ziehen der Parallelen zur Schlußlinie A_7B_7 bzw. A_8B_8 als entsprechenden Abschnitt auf dem Kräftezug.

Für den im Hochbau am häufigsten vorkommenden

Balken mit geraden und parabolischen Vouten

sind im Anhang Tabellen über die Drehwinkel α^a und α^b unter Annahme verschiedener Voutenlänge, und auch nur einseitiger Anordnung, enthalten.

b) Konstantes Trägheitsmoment, jedoch mit starrer Strecke f an einem Ende (Fig. 113).

Dieser Fall tritt bei Mittelpfeilern eines durchlaufenden Balkens auf elastisch drehbaren Pfeilern ein, wo das Stück von Unterkante Voute bis Balkenachse als starr zu betrachten ist; diese starre Strecke f kann nur bei Endpfeilern sowie dann bei Mittelpfeilern gleich Null gesetzt werden, wenn diese Pfeiler eine verhältnismäßig große Höhe l' oder im Verhältnis zum Balken ein großes Trägheitsmoment haben. Ein Versuch wird überzeugen, daß die starre Strecke f auf den Drehwinkel τ am Pfeilerkopf einen ziemlich großen Einfluß hat.

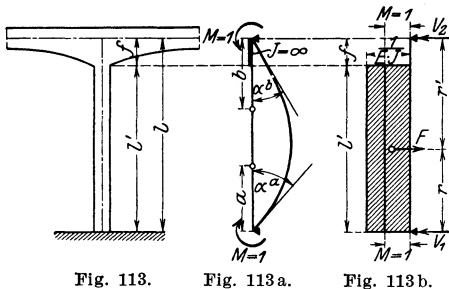


Fig. 113.

Fig. 113 a.

Fig. 113 b.

In diesem Falle ist das Trägheitsmoment auf der Strecke f unendlich groß (Fig. 113a) und deshalb ist die reduzierte Momentenfläche auf dieser Strecke gleich Null (Fig. 113b). Der Inhalt der reduzierten Momentenfläche auf der

Strecke l' ist $F = \frac{l'}{E \cdot J}$, der Schwerpunktsabstand der Kraft F vom oberen Auflager $r' = \frac{l'}{2} + f$ und vom unteren Auflager $r = \frac{l'}{2}$.

Nach Satz II ist dann α^a gleich dem Auflagerdruck V_1 und α^b gleich dem Auflagerdruck V_2 des mit der Kraft F belasteten Stabes mit der Stützweite l . Es ist daher:

$$\alpha^a = \frac{F \cdot r'}{l} \quad \text{und} \quad \alpha^b = \frac{F \cdot r}{l}.$$

Die Werte für F , r' und r eingesetzt gibt:

$$E \cdot \alpha^a = \frac{l' \cdot (l' + 2f)}{2 \cdot l \cdot J} \quad (202)$$

und

$$E \cdot \alpha^b = \frac{l'^2}{2 \cdot l \cdot J}. \quad (203)$$

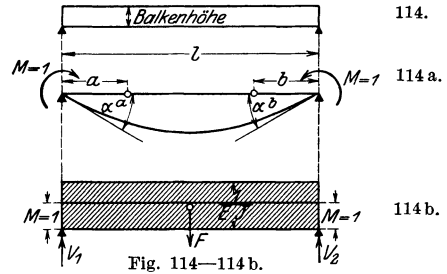
c) **Konstantes Trägheitsmoment auf die ganze Balkenlänge** (Fig. 114).

In diesem Falle ist die reduzierte Momentenfläche (Fig. 114b) ein Rechteck mit dem Inhalt

$$F = \frac{l}{E \cdot J},$$

und daher ist nach Satz II:

$$E \cdot \alpha^a = E \cdot \alpha^b = E \cdot \bar{\alpha} = \frac{l}{2J}. \quad (204)$$



2. Drehwinkel β .

a) **Beliebig veränderliches Trägheitsmoment** (Fig. 115).

Zur Bestimmung des Drehwinkels β teilen wir die reduzierte Momentenfläche des an einem Ende, beispielsweise am linken, mit $M = 1$ belasteten einfachen Balkens (Fig. 115a) mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment in senkrechte Streifen von der Breite Δs ; der Inhalt ΔF einer solchen Streifenfläche ist

$$\Delta F = \frac{\Delta s}{E \cdot J} \cdot z'.$$

Setzen wir wieder

$$w = \frac{\Delta s}{J},$$

so ist $E \cdot \beta$ nach Satz II gleich dem Auflagerdruck V des mit den Kräften ΔF belasteten Balkens mit der Stützweite l (Fig. 115b), und wir erhalten

Analytisch

$$E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \sum_0^l w \cdot z \cdot z', \quad (205)$$

worin z und z' die Abstände der Schwerpunkte der Streifen ΔF , für welche bei schmalen Streifen die Mitten aufgenommen werden können.

Graphisch

ergibt sich der Winkel β , wie bereits unter 1, a) gesagt, aus der für die linke oder rechte Drittlinie einer Öffnung (z. B. Fig. 80 und 83) gezeichneten Seilkurve oder aus dem zugehörigen Krafteck (z. B. Fig. 80a und 83a).

Für den im Hochbau am häufigsten vorkommenden

Balken mit geraden und parabolischen Vouten

sind im Anhang Tabellen über den Drehwinkel β unter Annahme verschiedener Voutenlänge und auch nur einseitiger Anordnung enthalten.

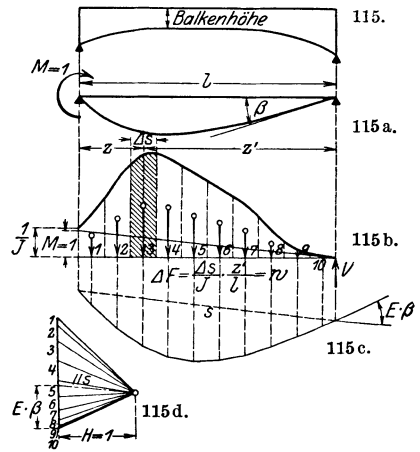
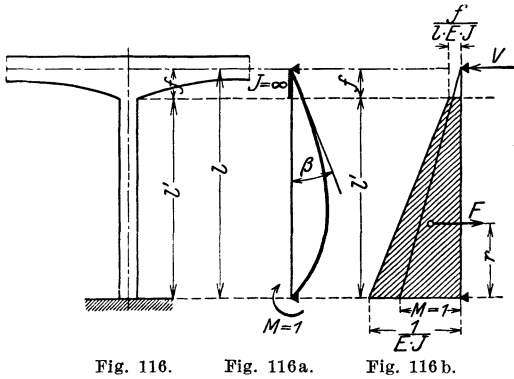


Fig. 115—115 d.

b) Konstantes Trägheitsmoment, jedoch mit starrer Strecke f an einem Ende (Fig. 116).

In diesem Falle ist das Trägheitsmoment auf der Strecke f unendlich groß (Fig. 116a), und deshalb ist die reduzierte Momentenfläche auf dieser Strecke gleich Null (Fig. 116b). Der Inhalt der reduzierten Momentenfläche auf der Strecke l ist



$$F = \frac{V(l+f)}{2l \cdot EJ}$$

und dem Schwerpunktsabstand r der Kraft F vom unteren Auflager:

$$r = \frac{V}{3} \cdot \frac{l+2f}{l+f}.$$

Nach Satz II ist dann β gleich dem Auflagerdruck V des mit der Kraft F belasteten Stabes mit der Stützweite l . Es ist daher:

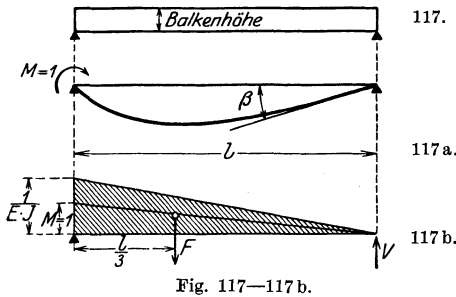
$$\beta = \frac{F \cdot r}{l}.$$

Die Werte für F und r eingesetzt geben:

$$E \cdot \beta = \frac{V^2(l+2f)}{6 \cdot l^2 \cdot J}. \tag{206}$$

c) Konstantes Trägheitsmoment auf die ganze Balkenlänge (Fig. 117).

In diesem Falle ist die reduzierte Momentenfläche (Fig. 117b) ein Dreieck mit dem Inhalt



$$F = \frac{l}{2 EJ}$$

und daher ist nach Satz II:

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 \cdot J}, \tag{207}$$

d. h. bei konstantem Trägheitsmoment eines Balkens ist

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha} = 3 \beta. \tag{207a}$$

3. Bestimmung von Verschiebungen an statisch unbestimmten Tragwerken.

Auch an statisch unbestimmten Tragwerken muß zunächst die Momentenfläche infolge der gegebenen äußeren Belastung an allen Stäben ermittelt werden, bevor der Drehwinkel oder die Verschiebung in irgendeinem Punkte bestimmt werden kann. Sind aber die Momente am ganzen Tragwerk bekannt, so können wir jeden Stab des ganzen Tragwerks für sich betrachten und von den Punkten aus, welche in Ruhe geblieben sind oder in welchen wir die Verschiebung bzw. den Drehwinkel von vornherein kennen, mit dem Zeichnen der

Biegelinie als Seilkurve zu der reduzierten Momentenfläche als Belastung beginnen oder die entsprechende rechnerische Ermittlung nach den Mohrschen Sätzen vornehmen; wir haben es dann immer nur mit einfachen Balken oder Kragarmen zu tun.

Im folgenden erläutern wir die Bestimmung von Verschiebungen und Drehwinkeln an einigen häufig vorkommenden statisch unbestimmten Tragwerken, da die Verschiebungen und Drehwinkel derselben eine Kontrolle für die Richtigkeit der ermittelten Momentenfläche bilden (vgl. Beisp. 11, Bd. II).

a) Durchlaufender Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern.

Als Kontrolle für die Richtigkeit der Momentenfläche der Fig. 87 muß z. B. in *B* sein:

$$\delta' = \delta'' = \delta''' \quad (\text{Fig. 118}). \quad (208)$$

Die Drehwinkel δ' , δ'' , δ''' ermitteln wir nach Satz II, indem wir sowohl die einfachen Balken *AB* und *BC* als auch

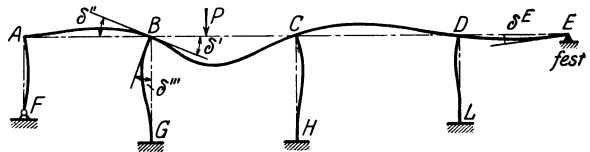


Fig. 118.

BG mit der zugehörigen reduzierten Momentenfläche aus Fig. 87 belasten und den davon herrührenden Auflagerdruck in *B* berechnen.

Um z. B. den Drehwinkel δ^E (Fig. 118) zu erhalten, belasten wir den einfachen Balken *DE* mit der aus Fig. 87 hervorgehenden reduzierten Momentenfläche und berechnen nach Satz II den davon herrührenden Auflagerdruck in *E*.

b) Durchlaufender Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern mit Kragarm.

Die Verschiebung δ am Ende des Kragarmes (Fig. 119), wo die Last *P* angreift, setzt sich aus 2 Teilen, δ' und δ'' , zusammen, und zwar rührt δ' von der Durchbiegung des Balkens *AB* und δ'' von der Durchbiegung des Kragarmes her. Es ist

$$\delta' = l_1 \cdot \text{tg } \delta^A,$$

und da δ^A ein sehr kleiner Winkel, ist

$$\delta' = l_1 \cdot \delta^A. \quad (209)$$

Den Drehwinkel δ^A erhalten wir durch Belasten des einfachen Balkens *AB* mit der aus Fig. 100 entnommenen reduzierten Momentenfläche, deren Auflagerdruck in *A* nach Satz II gleich δ^A ist.

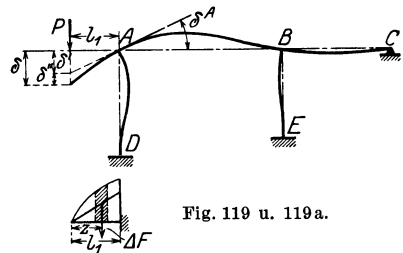


Fig. 119 u. 119a.

Die Teilverschiebung δ'' erhalten wir nach Satz III, indem wir das statische Moment der den Kragarm belasteten reduzierten Momentenfläche aus Fig. 100 in bezug auf die Verschiebungsrichtung bilden; es ist (Fig. 119a)

$$\delta'' = \sum_0^{l_1} \Delta F \cdot z. \quad (210)$$

c) Durchlaufender Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern, von denen sich einer gesenkt hat.

Die Verschiebung δ des Pfeilerkopfes B (Fig. 120) ist von vornherein bekannt; darnach wurde die Momentenfläche am ganzen Tragwerk ermittelt.

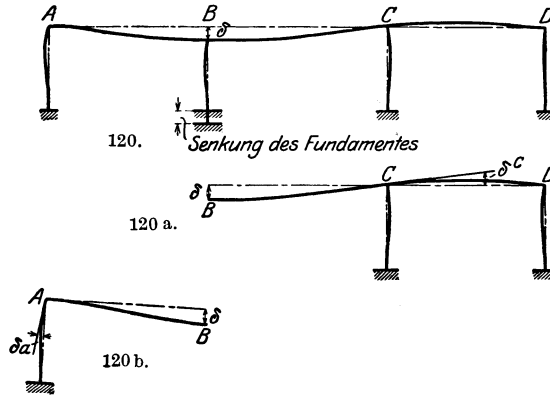
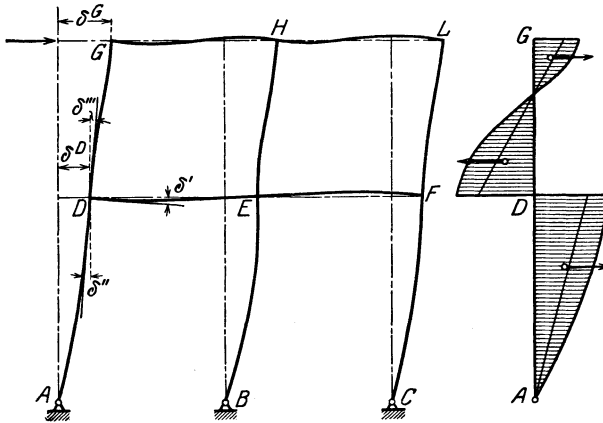


Fig. 120—120 b.

Als Kontrolle für die Richtigkeit dieser Momentenfläche muß sich sowohl am Ende des Kragarmes BC in Fig. 120 a als auch am Ende des Kragarmes AB der Fig. 120 b als Verschiebung des Punktes B der gleiche Wert δ ergeben. An beiden Kragarmen wird δ analog wie unter b) ermittelt.

d) Stockwerkrahmen.

Sowohl bei einer unsymmetrischen senkrechten als bei einer waagrechten Belastung der Säulen des Stockwerkrahmens der Fig. 121 verschiebt sich der untere und obere Riegel.



Als Kontrolle für die Richtigkeit der endgültigen Momentenfläche muß sich ergeben, daß die drei Knotenpunkte am unteren oder am oberen Riegel die gleiche Verschiebung ausführen.

Wenn wir die Biegelinien der drei Säulen zeichnen wollten, so würden wir am Fuß derselben beginnen, da derselbe in Ruhe bleibt. Da wir die waagrechte Verschiebung der Säulen bestimmen wollen, so sind dieselben als Kragarme zu betrachten,

welche jedoch an ihren Füßen nicht fest, sondern nachgiebig eingespannt sind, was jedoch auf die Berechnung der Verschiebungen keinen Einfluß hat, da dies ja durch die Momentenflächen, die wir nach deren Reduktion als Belastung auffassen, schon berücksichtigt ist; wären die Säulen am Fuße fest eingespannt, so erhielten wir eine andere Momentenfläche.

Daher ist z. B. an der Säule ADG (Fig. 121a) die Verschiebung δ^D des Punktes D gleich dem statischen Moment der reduzierten Momentenfläche am Stabe AD in bezug auf den Punkt D ; und die Verschiebung δ^G des Punktes G ist gleich dem statischen Moment der reduzierten Momentenfläche an den Stäben AD und DG in bezug auf den Punkt G oder gleich der Verschiebung δ^D plus dem statischen Moment der reduzierten Momentenfläche an dem Stab DG in bezug auf den Punkt G . In analoger Weise ermitteln wir die waagrechten Verschiebungen der Knotenpunkte E und H sowie F und L ; es kommt nur die Momentenfläche an den Säulen in Betracht. Falls man hierüber einen Zweifel hat, so stelle man sich nur vor, in welcher Weise die Biegelinie gezeichnet werden müßte, und dann hat man sofort Klarheit.

Es müssen auch an jedem Knotenpunkt die Drehwinkel der dort angeschlossenen Stäbe einander gleich sein, also z. B. in Punkt D

$$\delta' = \delta'' = \delta'''.$$

Diese Winkel ermitteln wir wie unter a) (Fig. 118).

4. Annahme der Trägheitsmomente.

Zur Berechnung der Formänderungen von Eisenbetonbauten verwendet man das Trägheitsmoment des vollen Betonquerschnittes (ohne Eiseneinlagen), da man, wie die Versuche gezeigt haben, auf dieser Grundlage der Wirklichkeit am nächsten kommt (siehe Mörsch, Der Eisenbetonbau); ferner wird für den Elastizitätsmodul

$$E = 2100000 \text{ t/qm}$$

eingeführt.

Die Trägheitsmomente selbst werden auf die Schwerachse des betreffenden Betonquerschnittes bezogen, da man die neutrale Achse noch nicht kennt. Dies hat geringe Bedeutung, da es bei solchen statischen Berechnungen hauptsächlich auf das gegenseitige Verhältnis der Trägheitsmomente des ganzen Tragwerkes ankommt. Als Systemachse wählt man jedoch die Trägermitte.

V. Bestimmung der Momente infolge beliebiger Belastung des Tragwerks.

Wir nehmen an, die Festpunkte und Verteilungsmaße am ganzen Tragwerk seien nach den vorgehenden Kapiteln ermittelt; es ist dann, wie wir in Kapitel I gesehen haben, leicht, die gesamte Momentenfläche zu bestimmen, sobald in der belasteten Öffnung die beiden Stützenmomente ermittelt sind, da ja in den unbelasteten Öffnungen die Momentennullpunkte mit den Festpunkten zusammenfallen, und man deshalb die Momentenflächen in allen unbelasteten Öffnungen durch Ziehen ihrer Schlußlinien durch die Festpunkte ohne weiteres erhält.

Wir setzen die beiden Stützenmomente in der belasteten Öffnung der Fig. 122 oder 77 vorläufig als bekannt voraus, ziehen die Schlußlinie $B''C''$, bestimmen deren Schnittpunkte J' und K' mit den Senkrechten zur Balkenachse durch die Festpunkte J und K , ziehen die zwei sich kreuzenden und daher Kreuzlinien genannten Geraden BJ' und CK' und ermitteln die

Strecken $k^a = BB''$ und $k^b = CC''$, welche die Kreuzlinien auf den Auflagersenkrechten (zur Balkenachse) durch B und C abschneiden, und welche daher „Kreuzlinienabschnitte“ genannt werden. Gehen wir jetzt den umgekehrten Weg und tragen (Fig. 122 oder 77) die noch zu bestimmenden Kreuzlinienabschnitte $k^a = BB'''$ und $k^b = CC'''$ auf den Auflagersenkrechten (zur Balkenachse) durch B und C ab, ziehen die Kreuzlinien BC''' und CB''' und bestimmen die Schnittpunkte J' und K' derselben mit den Senkrechten (zur Balkenachse) durch J und K , so schneidet die Verbindungslinie $J'K'$ die Stützmomente BB'' und CC'' auf den Senkrechten (zur Balkenachse) durch B und C ab.

Es ist zur Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte ganz gleichgültig, ob der belastete Stab waagrecht, schief oder senkrecht steht, d. h. die Kreuzlinienabschnitte gelten sowohl am belasteten Balken als auch am belasteten Pfeiler, da ja Pfeiler und Balken nichts anderes sind als Stäbe des Tragwerks.

1. Entwicklung des allgemeinen Ausdruckes für die Kreuzlinienabschnitte.

Wir leiten nun zunächst den allgemeinen Ausdruck für die Kreuzlinienabschnitte bei beliebiger Belastung und beliebig veränderlichem Trägheitsmoment des belasteten Stabes her, und zwar analytisch und graphisch, und bestimmen nachher die Werte der Kreuzlinienabschnitte für verschiedene Belastungsfälle.

a) Analytisch.

Der analytischen Ableitung legen wir das allgemeine Tragwerk der Fig. 122 zugrunde, an welchem Stab δ , wie in der früheren Fig. 48, mit den Kräften P_1 und P_2

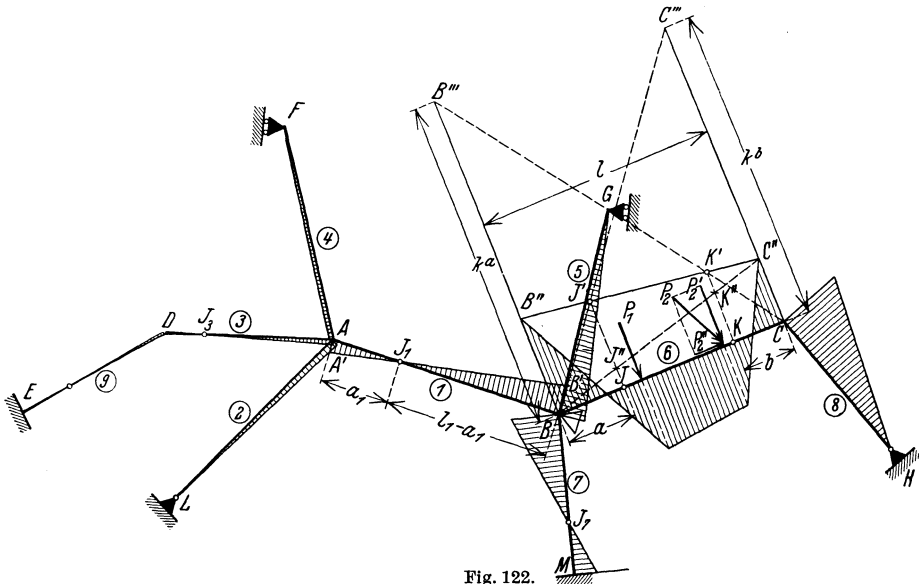


Fig. 122.

belastet sei. Da die Kraft P_2 schief zur Stabachse wirkt, so wird sie zunächst in eine Komponente P_2' in Richtung des belasteten Stabes und in eine Kompo-

nente P'_2 rechtwinklig dazu zerlegt; für letztere wird die Momentenfläche bestimmt.

Wir trennen in Fig. 122 den Stab 6 in den Querschnitten B_6 und C_6 von seinen beiden Widerlagern B und C — sein Widerlager in B wird gebildet durch die drei Stäbe 1, 5 und 7, dasjenige in C durch den Stab 8 — und lagern ihn daselbst frei auf (Fig. 122a). Unter Einwirkung der äußeren Lasten entstehen an den Querschnitten B_6 und C_6 die in Fig. 122a eingetragenen Drehwinkel α^{a0} und α^{b0} . Um die beiden Schnittflächen B_6 von Widerlager und Stab in B wieder zu vereinigen, müssen wir am Stab ein linksdrehendes Moment M^B und am Widerlager das gleich große, aber rechtsdrehende Moment M^B anbringen (Fig. 122a). Wenn beide Querschnittsflächen wieder zur Deckung gekommen sind, haben sie hinsichtlich der geraden Balkenachse denselben Drehwinkel beschrieben; dies gibt den Ansatz zu einer Gleichung. Um ferner die beiden Schnittflächen C_6 von Widerlager und Stab in C wieder zu vereinigen, müssen wir am Stab ein rechtsdrehendes und am Widerlager ein gleich großes, aber linksdrehendes Moment M^C anbringen. Wenn die beiden Querschnittsflächen wieder zur Deckung gekommen sind, haben sie denselben Drehwinkel beschrieben, und wir erhalten hieraus den Ansatz zu einer zweiten Gleichung. Die beschriebenen Drehwinkel betragen unter Berücksichtigung der in Kapitel II eingeführten Bezeichnungen:

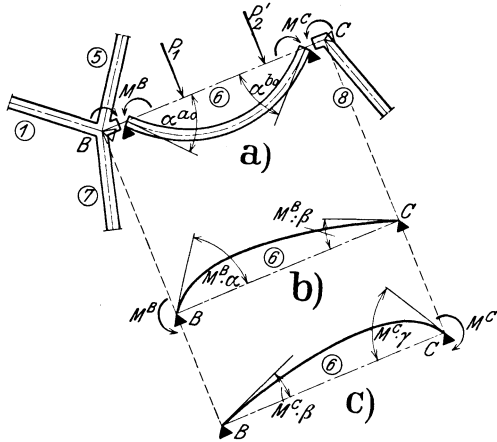


Fig. 122 a—c.

1. In B_6 :

- a) am Stab: durch P_1 und P'_2 : α^{a0} ,
 durch M^B (Fig. 122 b): $M^B \cdot \alpha$,
 durch M^C (Fig. 122 c): $M^C \cdot \beta$;
- b) am Widerlager: durch M^B : $M^B \cdot \varepsilon^a$.

2. In C_6 :

- a) am Stab: durch P_1 und P'_2 : α^{b0} ,
 durch M^C (Fig. 122 c): $M^C \cdot \gamma$,
 durch M^B (Fig. 122 b): $M^B \cdot \beta$;
- b) am Widerlager: durch M^C : $M^C \cdot \varepsilon^b$.

Nach obigem können wir folgende Gleichungen anschreiben:

$$\alpha^{a0} - M^B \cdot \alpha - M^C \cdot \beta = M^B \cdot \varepsilon^a, \tag{211}$$

$$\alpha^{b0} - M^C \cdot \gamma - M^B \cdot \beta = M^C \cdot \varepsilon^b. \tag{212}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen M^B und M^C mit ihren Vorzeichen ein, so erhalten wir die Elastizitätsbedingungen des elastisch eingespannten Stabes

$$\alpha^{a_0} + M^B \cdot \alpha + M^C \cdot \beta + M^B \cdot \varepsilon^a = 0, \quad (213)$$

$$\alpha^{b_0} + M^B \cdot \beta + M^C \cdot \gamma + M^C \cdot \varepsilon^b = 0, \quad (214)$$

worin M^B und M^C die Unbekannten sind. Diese Gleichungen besagen, daß die beiden Momente M^B und M^C so groß sein und solchen Drehsinn haben müssen, daß die Summe der von ihnen am Stabende B_2 und Widerlager B bzw. am Stabende C_2 und Widerlager C hervorgerufenen Drehwinkel je gleich Null wird. Aus diesen beiden Gleichungen könnten wir die beiden Stützenmomente M^B und M^C rechnerisch ermitteln, da uns ja die Winkelwerte α , β , γ , ε^a und ε^b aus den früheren Kapiteln bekannt sind; wir erhalten aus den Gl. (213) und (214):

$$M^B = \frac{-\alpha^{a_0}(\gamma + \varepsilon^b) + \alpha^{b_0} \cdot \beta}{(\alpha + \varepsilon^a)(\gamma + \varepsilon^b) - \beta^2} \quad (213a)$$

und

$$M^C = \frac{-\alpha^{b_0}(\alpha + \varepsilon^a) + \alpha^{a_0} \cdot \beta}{(\alpha + \varepsilon^a)(\gamma + \varepsilon^b) - \beta^2}. \quad (214a)$$

Wir wollen aber die Momente in der belasteten Öffnung nicht nach den Gl. (213a) und (214a) ermitteln, da dies zu umständlich wäre, sondern wir schreiben die Gleichungen (213) und (214) in der Form:

$$M^B(\alpha + \varepsilon^a) + M^C \cdot \beta = -\alpha^{a_0}, \quad (215)$$

$$M^C(\gamma + \varepsilon^b) + M^B \cdot \beta = -\alpha^{b_0}, \quad (216)$$

dividieren diese Gleichungen durch β und erhalten:

$$M^B \cdot \frac{\alpha + \varepsilon^a}{\beta} + M^C = -\frac{\alpha^{a_0}}{\beta}, \quad (217)$$

$$M^C \cdot \frac{\gamma + \varepsilon^b}{\beta} + M^B = -\frac{\alpha^{b_0}}{\beta}. \quad (218)$$

Nun ist aber nach Gl. (4):

$$\frac{\alpha + \varepsilon^a}{\beta} = \frac{l-a}{a}, \quad (219)$$

und analog muß sein

$$\frac{\gamma + \varepsilon^b}{\beta} = \frac{l-b}{b}. \quad (220)$$

Setzen wir die Werte der Gl. (219) und (220) in die Gl. (217) und (218) ein, so ergibt sich:

$$M^B \cdot \frac{l-a}{a} + M^C = -\frac{\alpha^{a_0}}{\beta} \quad (221)$$

und

$$M^C \cdot \frac{l-b}{b} + M^B = -\frac{\alpha^{b_0}}{\beta}. \quad (222)$$

In Fig. 122 ergibt sich aus dem überschlagenen Viereck $BJ'C'''C''B''$:

$$M^B \cdot \frac{l-a}{a} = C''C'''$$

und aus dem überschlagenen Viereck $CK'B'''B''C''$

$$M^C \cdot \frac{l-b}{b} = B''B''',$$

ferner ist

$$M^C = CC'' \quad \text{und} \quad M^B = BB'',$$

und deshalb sind die linken Seiten der Gl. (222) und (221) gleich den gesuchten Kreuzlinienabschnitten k^a und k^b , d. h.

$$k^a = -\frac{\alpha b_0}{\beta}, \quad (223)$$

$$k^b = -\frac{\alpha a_0}{\beta}. \quad (224)$$

Der Kreuzlinienabschnitt k^a bzw. k^b ist an demjenigen Stabende aufzutragen, an welchem sich der Festpunktabstand a bzw. b befindet. Erhalten wir für die auf Grund der Hauptformeln (223) und (224) berechneten Kreuzlinienabschnitte negative Werte, so besagt dies, daß die damit konstruierte Schlußlinie mit der Stabachse und den beiden Auflagersenkrechten ein negatives Momententrapez ($BB''C''C$ in Fig. 122) begrenzt; ergeben sich aber für die Kreuzlinienabschnitte positive Werte, so wird das genannte Momententrapez positiv, was bei Konsolbelastung einer Säule (vgl. Abschnitt 2, d und 3, d dieses Kapitels) der Fall ist.

Aus Fig. 122 ersehen wir, daß wir auch an Stelle der Kreuzlinienabschnitte die Strecken $JJ' = S^a$ und $KK' = S^b$, welche wir die Schlußliniensenkungen nennen, ermitteln und von J respektiv K aus auftragen können.

Aus den ähnlichen Dreiecken BCB'' und KCK' bzw. BCC''' und BJJ' ergeben sich für die Schlußliniensenkungen die Werte:

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b, \quad (225)$$

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a. \quad (226)$$

b) Graphisch.

Der graphischen Ableitung legen wir den durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern der Fig. 76 zugrunde, an welchem die Balkenöffnung 2 mit den Kräften P_1 , P_2 und P_3 belastet ist. Wir führen die Ableitung nur für den Kreuzlinienabschnitt k^a durch, diejenige für den Kreuzlinienabschnitt k^b ist analog.

Zur Bestimmung des Kreuzlinienabschnittes k^a in der belasteten Öffnung 2 stellen wir die folgenden Beziehungen fest zwischen den Strecken BB'' und BB''' der Fig. 77 (oder 122d) und den Strecken B_1B_1'' und $B_1''B_1'''$, welche in Fig. 78 (oder 122e) von der Seilseite e des elastischen Tangentenecks auf der Senkrechten durch B abgeschnitten werden. Aus dem überschlagenen Viereck $BB''J_2C''C'''$ der Fig. 77 (oder 122d) folgt:

$$\frac{BB''}{C''C'''} = \frac{a_2}{l_2 - a_2}. \quad (227)$$

Ferner erhalten wir aus dem überschlagenen Viereck $B_1''B_1J_2C_1C_1'''$ der Fig. 78 (oder 122e):

$$\frac{B_1B_1''}{C_1C_1'''} = \frac{a_2}{l_2 - a_2}, \quad (227a)$$

d. h. es ist:

$$\frac{BB''}{C''C'''} = \frac{B_1B_1''}{C_1C_1'''} \tag{228}$$

oder

$$\frac{B_1B_1''}{BB''} = \frac{C_1C_1'''}{C''C'''} \tag{228a}$$

Diese Strecken müssen nun durch bekannte Größen ausgedrückt werden.

In Fig. 78 (oder 122e) ist die mit der Polweite $H = 1$ multiplizierte Strecke B_1B_1'' , welche durch die zwei von der Kraft (F'_3 und F'_4) ausgehenden Seilseiten c

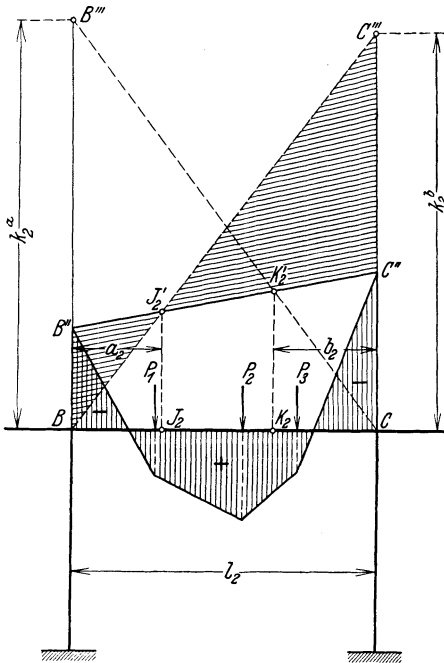


Fig. 122d.

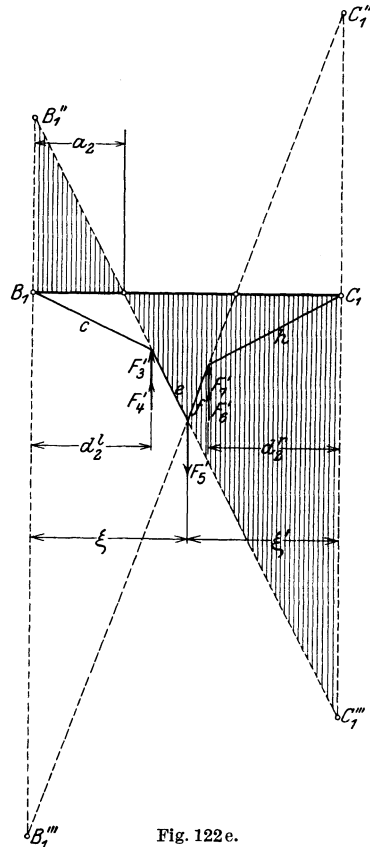


Fig. 122e.

und e auf der Stützensenkrechten durch B abgeschnitten wird, gleich dem statischen Moment der Kraft ($F'_3 + F'_4$) in bezug auf B , d. h.

$$B_1B_1'' = (F'_3 + F'_4) \cdot d_2^l. \tag{229}$$

Die in dieser Gleichung vorkommende, dem gesuchten Stützenmoment BB'' (Fig. 76) entsprechende reduzierte Momentenfläche ($F'_3 + F'_4$) können wir an Hand der Fig. 84 ausdrücken, wenn wir in der letzteren h durch BB'' ersetzen, wir erhalten:

$$(F'_3 + F'_4) = \sum_0^{l_2} \frac{\Delta s \cdot z' \cdot BB''}{E \cdot J \cdot l_2} = \frac{BB''}{E \cdot l_2} \cdot \sum_0^{l_2} w \cdot z'. \tag{230}$$

Setzen wir in Gl. (229) diesen Wert sowie denjenigen von d_2^l nach Gl. (99) ein, so folgt:

$$B_1 B_1'' = \frac{B B''}{E \cdot l_2} \sum_0^{l_2} w \cdot z \cdot z' \cdot \frac{\sum_0^{l_2} w \cdot z \cdot z'}{\sum_0^{l_2} w \cdot z'}$$

oder

$$B_1 B_1'' = B B'' \cdot \frac{\sum_0^{l_2} w \cdot z \cdot z'}{E \cdot l_2}. \quad (231)$$

Setzen wir darin abkürzungsweise:

$$\frac{\sum_0^{l_2} w \cdot z \cdot z'}{E \cdot l_2} = \varkappa, \quad (232)$$

so erhalten wir aus Gl. (231):

$$\frac{B_1 B_1''}{B B''} = \varkappa. \quad (233)$$

Führen wir diesen Wert in Gl. (228 a) ein, so folgt

$$\varkappa = \frac{B_1 B_1''}{B B''} = \frac{C_1 C_1'''}{C'' C'''}; \quad (234)$$

analog kann man zeigen, daß

$$\frac{C_1 C_1'''}{C'' C'''} = \frac{B_1 B_1''}{B'' B'''} = \varkappa, \quad (235)$$

so daß sich aus den Gl. (234) und (235) ergibt:

$$\varkappa = \frac{B_1 B_1'' + B_1 B_1'''}{B B'' + B'' B'''} = \frac{B_1'' B_1'''}{k^a}$$

und

$$\varkappa = \frac{C_1 C_1'' + C_1 C_1'''}{C C'' + C'' C'''} = \frac{C_1'' C_1'''}{k^b}$$

und hieraus

$$k^a = \frac{B_1'' B_1'''}{\varkappa}, \quad (236)$$

$$k^b = \frac{C_1'' C_1'''}{\varkappa}. \quad (237)$$

Die Zähler und Nenner der Gl. (236) und (237) haben folgende Bedeutung:

Zähler:

Die Seilseiten e und f , welche sich auf der bekannten Kraft F_5' kreuzen (Fig. 78 oder 122 e), schneiden auf der Stützensenkrechten durch B und C die Strecken $B_1'' B_1'''$ und $C_1'' C_1'''$ ab; das Produkt dieser Strecken mit der Polweite $H = 1$ ist daher gleich dem statischen Moment der $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) Momentenfläche $F_5 = BGC$ des einfachen Balkens BC in bezug auf die beiden Auflager, d. h.

$$B_1'' B_1''' = F_5' \cdot \xi \quad (238)$$

und

$$C_1'' C_1''' = F_5' \cdot \xi'. \quad (239)$$

Nenner :

Aus Fig. 84 erkennt man, daß der durch Gl. (232) bestimmte Wert von \varkappa gleich ist dem auf die Stützensenkrechte durch B bezogenen statischen Moment des $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen Momentendreieckes $B_6 B'_6 C_6$ mit der Stützenordinate $h = 1$ in B ; desgleichen erkennt man aus Fig. 81, daß \varkappa ebenfalls gleich ist dem auf die Senkrechte durch C bezogenen statischen Moment des $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen Momentendreieckes $B_5 C_5 C'_5$ mit der Stützenordinate $h = 1$ in C .

Jetzt können wir die Gl. (236) und (237) in der folgenden allgemeinen Form anschreiben:

$$k^a = \frac{F'_5 \cdot \xi}{\varkappa} \quad (240)$$

und

$$k^b = \frac{F'_5 \cdot \xi'}{\varkappa}. \quad (241)$$

Dividieren wir Zähler und Nenner durch die Stützweite l der belasteten Öffnung, so erhalten wir, da nach dem Mohrschen Satze II:

$$\frac{F'_5 \cdot \xi}{l} = \alpha^{b_0}, \quad \frac{F'_5 \cdot \xi'}{l} = \alpha^{a_0} \quad \text{und} \quad \frac{\varkappa}{l} = \beta$$

für die gesuchten Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b unter Berücksichtigung, daß dieselben negatives Vorzeichen haben, weil sie dem in Kap. III aus der Anschauung als negativ erkannten Momententrapez $BB''C''C$ der Fig. 77 zugeordnet sind, wie unter a) die Hauptformeln

$$k^a = -\frac{\alpha^{b_0}}{\beta}, \quad (242)$$

$$k^b = -\frac{\alpha^{a_0}}{\beta}. \quad (243)$$

Die in Gl. (242) und (243) vorkommenden

Drehwinkel α^{b_0} und α^{a_0}

bestimmen wir bei veränderlichem Trägheitsmoment des belasteten Stabes am einfachsten indirekt mit Hilfe des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen, da wir in diesem Falle die Biegelinien für die Belastung des frei aufliegenden Stabes mit $M = 1$ an einem Ende benützen können, welche schon zur Bestimmung der Drittellinien (bei graphischer Festpunktbestimmung) sowie der Drehwinkel α^a und α^b (bei analytischer Festpunktbestimmung) aufgezeichnet werden (Fig. 80—86). Nach diesem Satze ist z. B. in Fig. 87 der Drehwinkel α^{a_0} am linken Ende des belasteten frei aufliegenden Stabes infolge der Belastung $P = 1$ gleich der Durchbiegung δ^a im Angriffspunkt der Last P infolge Belastung desselben frei aufliegenden Stabes mit $M = 1$ an seinem linken Ende (wo sich der Festpunktabstand a befindet). Das Analoge gilt für α^{b_0} .

Demnach ist allgemein:

$$\alpha^{a_0} = \sum P \cdot \delta^a, \quad (244)$$

$$\alpha^{b_0} = \sum P \cdot \delta^b. \quad (245)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke f sowie durchweg konstantem Trägheitsmoment ermittelt man α^{b_0} und α^{a_0} direkt nach dem Mohrschen Satz II.

Der in den Gl. (242) und (243) vorkommende

Drehwinkel β

kann nach Kap. IV rechnerisch oder graphisch ermittelt werden. Bei veränderlichem Trägheitsmoment des Stabes wird er ebenfalls aus den zur Bestimmung der Drittlinien benötigten Biegelinien (Fig. 81 oder 84) gewonnen. Wir erhalten z. B. für Balkenöffnung 2 der Fig. 76 aus Fig. 81:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{t^c}{l},$$

und da β ein sehr kleiner Winkel ist, allgemein:

$$\beta = \frac{t}{l}. \quad (246)$$

Für konstantes Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke f sowie durchweg konstantes Trägheitsmoment sind die Werte für β in Kap. IV zu finden.

Da die Seilkurven der Fig. 81 und 84 mit den elastischen Gewichten $w = \frac{\Delta s}{J}$ sowie mit beliebiger Polweite H gezeichnet wurden, so erhalten wir aus diesen Figuren die $\frac{1}{H} \cdot E$ -fachen Werte der Durchbiegungen und Drehwinkel; dies gilt sowohl für α^{a_0} als auch für β . Da nun die beiden Winkel im Ausdruck für die Kreuzlinienabschnitte im Verhältnis vorkommen, so können wir in die Hauptformeln (242) und (243) ohne weiteres die aus den Fig. 84 und 81 entnommenen Werte von δ^a , δ^b und $\beta = \frac{t}{l}$ einsetzen.

In den Hauptformeln (242) und (243) für die Kreuzlinienabschnitte kommen keine Größen vor, welche Bezug auf die biegungsfeste Verbindung zwischen dem Balken und den Stützen haben. Die Kreuzlinienabschnitte sind deshalb dieselben, sowohl am durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern als auch am frei aufliegenden durchlaufenden Balken.

Da wir die Kreuzlinienabschnitte auf Grund der in Fig. 77 aufgetragenen Ordinaten der Momentenfläche erhielten, so sind dieselben in demjenigen Maßstab aufzutragen, in welchem die Ordinaten der M_0 -Fläche (Momentenfläche des einfachen Balkens) in der belasteten Öffnung aufgetragen wurden.

2. Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment.

Wir ermitteln die Kreuzlinienabschnitte für eine Einzellast, eine Gruppe von Einzellasten und für stetige Belastung. Bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment benutzen wir, wie schon unter 1. gesagt, zur Bestimmung der Werte für α^{a_0} , α^{b_0} und β zweckmäßig die Biegelinien für die Belastung $M = 1$ an einem Ende des frei aufliegenden Balkens (Fig. 81 oder 122f und 84 oder 122g).

Für den im Hochbau am häufigsten vorkommenden **Balken mit geraden und parabolischen Vouten** sind im Anhang Tabellen über die Kreuzlinienabschnitte k^a u. k^b für eine wandernde Last $P = 1\text{ t}$, unter Annahme verschiedener Voutenlängen, und auch nur einseitiger Anordnung, enthalten.

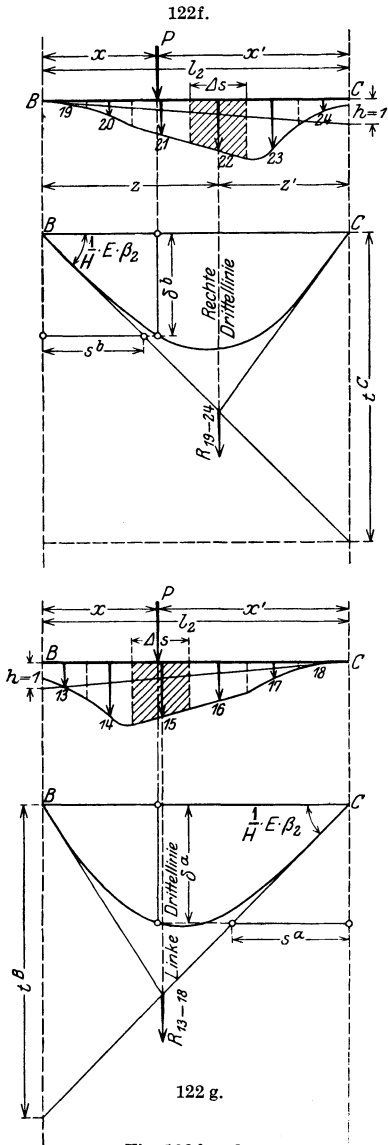


Fig. 122f und g.

und aus Fig. 84 (oder 122g) ist

$$s^a = \delta^a \cdot \frac{l}{t}.$$

Diese Werte in die Gl. (250) und (251) eingesetzt gibt:

$$k^a = -P \cdot s^b, \tag{250a}$$

$$k^b = -P \cdot s^a, \tag{251a}$$

wobei s^b und s^a im Längenmaßstab abzumessen sind.

a) Einzellast.

Das Tragwerk der Fig. 87 sei durch eine einzelne Kraft P belastet. Dann ist nach den Gl. (244) und (245)

$$\alpha^{a_0} = P \cdot \delta^a \tag{247}$$

und

$$\alpha^{b_0} = P \cdot \delta^b, \tag{248}$$

wobei δ^a aus Fig. 84 (oder 122g) und δ^b aus Fig. 81 (oder 122f) zu entnehmen ist.

Ferner ist nach Gl. (246) und Fig. 81 (122f) oder 84 (122g):

$$\beta = \frac{t}{l}. \tag{249}$$

Setzen wir die Werte der Gl. (247), (248) und (249) in die Hauptformeln (242) und (243) ein, so erhalten wir:

$$k^a = -P \cdot \delta^b \cdot \frac{l}{t} \tag{250}$$

und

$$k^b = -P \cdot \delta^a \cdot \frac{l}{t}. \tag{251}$$

Um die Ermittlung der Kreuzlinienabschnitte nach vorstehenden Formeln noch einfacher zu gestalten, bestimmen wir die Strecke s^b , welche in Fig. 81 (oder 122f) von der durch B_7 gehenden ersten Seilseite und der ebenfalls durch B_7 gehenden Senkrechten (zur Balkenachse) auf der Waagrechten (bzw. Parallelen zur Balkenachse) durch den unteren Endpunkt der Strecke δ^b abge schnitten wird; desgleichen ermitteln wir die analoge Strecke s^a in Fig. 84 (oder 122g). Aus dem Dreieck $B_7B_9C_9$ in Fig. 81 (oder 122f) ist:

$$s^b = \delta^b \cdot \frac{l}{t},$$

In Fig. 87 werden die beiden Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b nun in demjenigen Maßstab aufgetragen, in welchem die Ordinaten der einfachen Momentenfläche der belasteten Öffnung aufgetragen wurden.

Wurde die einfache Momentenfläche der belasteten Öffnung nicht analytisch, sondern graphisch mit Kraft- und Seileck mit der beliebigen Polweite H ermittelt, so erhalten wir die aufzutragenden Kreuzlinienabschnitte in ihrem richtigen Maßstab, wenn wir im Krafteck eine Senkrechte im Abstand s^b bzw. s^a vom Pol ziehen und die Strecke, welche auf dieser Senkrechten durch die beiden, die Kraft P einschließenden Polstrahlen abgeschnitten wird, abgreifen (siehe Fig. 87a); denn in diesem Falle bildet die Polweite H den Maßstab, in dem die einfache Momentenfläche gezeichnet ist, und es ist dann

$$k^a = -\frac{P}{H} \cdot s^b \quad (252)$$

und

$$k^b = -\frac{P}{H} \cdot s^a. \quad (253)$$

Bei der analytischen Ermittlung der M_0 -Momente setzen wir stillschweigend $H = 1$ voraus.

Zeichnet man schließlich die einfache Momentenfläche BGC der belasteten Öffnung (Fig. 87) mit der Polweite

$$H = P,$$

so erhält man

$$k^a = -s^b, \quad (252a)$$

$$k^b = -s^a. \quad (253a)$$

Will man die graphisch ermittelten Kreuzlinienabschnitte
analytisch

kontrollieren, so bestimmt man die in den Gl. (247) und (248) vorkommenden Werte von δ^a und δ^b direkt nach dem Mohrschen Satz I; es ist (Fig. 84 oder 122g):

$$\delta^a = \sum_0^l \frac{\Delta F \cdot z \cdot z'}{l},$$

und da nach Gl. (100):

$$\Delta F = \frac{\Delta s}{EJ} \cdot \frac{z'}{l},$$

so ist

$$E \cdot \delta^a = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l w \cdot z \cdot z'^2 \quad (254)$$

und analog (Fig. 81 oder 122f):

$$E \cdot \delta^b = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l w \cdot z^2 \cdot z'. \quad (255)$$

Ferner ist nach Gl. (205):

$$E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l w \cdot z \cdot z'.$$

Diese Werte in die Hauptformeln (242) und (243) unter Berücksichtigung der Gl. (247) und (248) eingesetzt gibt:

$$k^a = -P \cdot \frac{\sum_0^l w \cdot z^2 \cdot z'}{\sum_0^l w \cdot z \cdot z'} \quad (256)$$

und

$$k^b = -P \cdot \frac{\sum_0^l w \cdot z \cdot z'^2}{\sum_0^l w \cdot z \cdot z'} \quad (257)$$

b) Gruppe von Einzellasten.

Ist eine Öffnung mit einer Gruppe von Einzellasten $P_1, P_2, P_3 \dots$ belastet, wie beispielsweise die Öffnung 2 in Fig. 77, so ermittelt man an Hand der elastischen Linien (Biegelinien) $B_7N'C_7$ der Fig. 81 (oder 122f) und $B_8N''C_8$ der Fig. 84 (oder 122g), die den einzelnen Kräften $P_1, P_2, P_3 \dots$ entsprechenden Strecken $s_1^b, s_2^b, s_3^b \dots$ und $s_1^a, s_2^a, s_3^a \dots$ und wendet die Gl. (253) und (254) wiederholt an; man erhält dann

$$k^a = -(P_1 \cdot s_1^b + P_2 \cdot s_2^b + P_3 \cdot s_3^b + \dots), \quad (258)$$

$$k^b = -(P_1 \cdot s_1^a + P_2 \cdot s_2^a + P_3 \cdot s_3^a + \dots). \quad (259)$$

Die Strecken s sind im Längenmaßstab abzumessen und die Summen im gleichen Maßstab wie die Ordinaten der einfachen Momentenfläche (M_0 -Fläche) aufzutragen.

Wurde die einfache Momentenfläche graphisch mittels Kraft- und Seileck (Fig. 77b) mit der beliebigen Polweite H ermittelt, so erhalten wir analog wie unter a) k^a und k^b im richtigen Maßstab aus:

$$k^a = -\left(\frac{P_1}{H} \cdot s_1^b + \frac{P_2}{H} \cdot s_2^b + \frac{P_3}{H} \cdot s_3^b + \dots\right), \quad (260)$$

$$k^b = -\left(\frac{P_1}{H} \cdot s_1^a + \frac{P_2}{H} \cdot s_2^a + \frac{P_3}{H} \cdot s_3^a + \dots\right). \quad (261)$$

Graphisch erhalten wir die einzelnen Summenglieder dieser Gleichung in ihrem richtigen Maßstab analog wie unter a) aus dem Krafteck der Fig. 77b.

c) Stetige Belastung.

Ist eine Öffnung über der ganzen Stützweite oder einem Teil derselben mit einer stetigen, jedoch von Querschnitt zu Querschnitt verschiedenen Belastung p pro Längeneinheit belastet, so teilt man die Belastungsstrecke in womöglich gleiche Teile von der Länge Δs und ermittelt die den Einzelkräften $P = p \cdot \Delta s$ entsprechenden Kreuzlinienabschnitte nach den vorhergehenden Gleichungen.

Dasselbe gilt für gleichmäßig über die ganze Öffnung verteilte Belastung. Bei symmetrisch ausgebildetem Träger ist jedoch wie bei konstantem Trägheitsmoment [siehe Gl. (267)]: $k^a = k^b = -2f$.

Ist die belastete Öffnung eine Endöffnung mit elastisch drehbarem Endpfeiler, wie beispielsweise die erste Öffnung links am durchlaufenden Balken

der Fig. 76, so sind zwei Festpunkte vorhanden, und es sind deshalb auch zwei Kreuzlinienabschnitte k_1^a und k_1^b zu ermitteln; liegt das Balkenende jedoch frei auf, wie in der letzten Öffnung rechts der Fig. 76, so wird zur Konstruktion der Momentenfläche dieser belasteten Öffnung nur der Kreuzlinienabschnitt k_2^b auf der Senkrechten durch das frei aufliegende Balkenende E benötigt und der andere Kreuzlinienabschnitt fällt fort.

d) Konsolbelastung.

Wird zwischen den beiden Enden eines Stabes CD ein Moment in denselben eingeleitet, wie z. B. in Fig. 123 das Moment M , so ersetzen wir dasselbe durch ein Kräftepaar P mit dem Abstand e , wobei letzterer dem Abstand von Zug- und Druckmittelpunkt der lastübertragenden Konsole entspsicht; alsdann haben wir den Fall gleicher, aber entgegengesetzt gerichteter, im Abstand e auf den Stab CD wirkender Einzellasten und ermitteln die Kreuzlinienabschnitte für diesen Fall wie unter b) beschrieben, wir müssen jedoch die den beiden Kräften P entsprechenden Strecken s^b und s^a voneinander subtrahieren, da die beiden Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind. Wie aus den Fig. 136 b, 137 b und 138 b ersichtlich, kann diese Differenz positiv oder negativ sein, je nach der Lage des Angriffspunktes des Momentes.

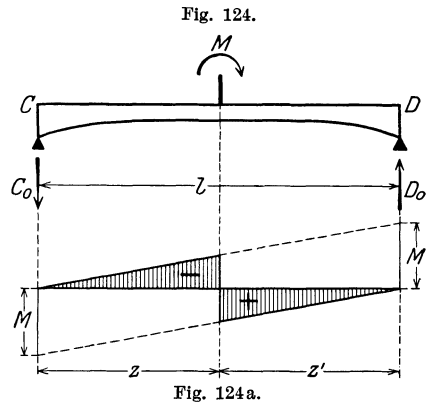
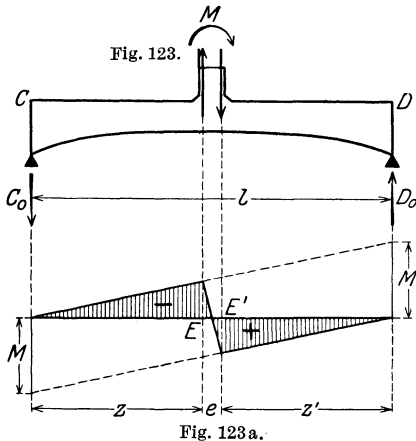
Die von der in Fig. 123 dargestellten Belastung hervorgerufene M_0 -Fläche ist in Fig. 123 a dargestellt. Die Auflagerdrücke am frei aufliegenden Balken CD sind

$$C_0 = -\frac{M}{l} \quad \text{und} \quad D_0 = \frac{M}{l},$$

daher ist das Moment im Schnitt E und E'

$$M_E = -\frac{M}{l} \cdot z \quad \text{und} \quad M_{E'} = \frac{M}{l} \cdot z',$$

d. h. wir erhalten die M_0 -Flächen in der aus Fig. 123 a ersichtlichen Weise durch Auftragen von M bei C und D .



Ist die Höhe der Konsole im Verhältnis zur Stablänge sehr klein, so ist der Abstand

$$e = 0 \quad (\text{Fig. 124});$$

in diesem Falle ergibt sich die aus Fig. 124 a ersichtliche M_0 -Fläche, und die

Drehwinkel α^{a_0} und α^{b_0} in den Hauptformeln für die Kreuzlinienabschnitte werden dann direkt nach dem Mohrschen Satz II durch Zerlegen der reduzierten M_0 -Fläche in Streifen bestimmt.

Häufig wird bei belasteten Balkenöffnungen mit veränderlichem Trägheitsmoment der Einfachheit halber die in folgenden Abschnitt erläuterte Konstruktion der Kreuzlinienabschnitte für konstantes Trägheitsmoment vorgenommen; es sei jedoch an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, daß diese Vereinfachung bei unsymmetrischen Trägern zu ganz unrichtigen Werten führen kann.

3. Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei konstantem Trägheitsmoment.

Wir ermitteln die Kreuzlinienabschnitte für eine Einzellast, eine Gruppe von Einzellasten, stetige Belastung und Konsolbelastung. Bei durchweg konstantem Trägheitsmoment der belasteten Öffnung bestimmen wir die in den Hauptformeln (242) und (243) für die Kreuzlinienabschnitte vorkommenden Drehwinkel α^{a_0} und α^{b_0} direkt nach dem Mohrschen Satz II. Den Wert für den Drehwinkel β finden wir in Kap. IV, und zwar für durchweg konstantes Trägheitsmoment in Gl. (207).

a) Einzellast.

Die Belastung bestehe aus einer Einzellast P im Abstände x vom linken und x' vom rechten Auflager der belasteten Öffnung. Der Momentenfläche AGB des einfachen Balkens AB (Fig. 125) entspricht eine $\frac{1}{EJ}$ fache (reduzierte)

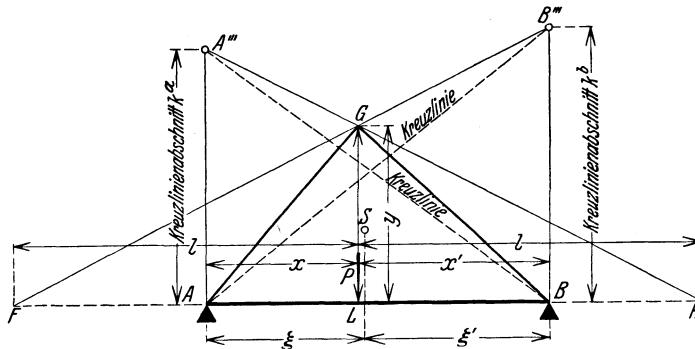


Fig. 125.

Momentenfläche, welche wegen des konstanten Trägheitsmomentes der belasteten Öffnung ebenfalls ein Dreieck mit Spitze auf der Richtung von P ist. Der Inhalt dieser Fläche beträgt:

$$\frac{y \cdot l}{2 E J},$$

ihr Schwerpunktsabstand von A

$$\xi = \frac{x + l}{3}$$

und daher nach Satz II der Drehwinkel α^{b_0} :

$$\alpha^{b_0} = \frac{1}{l} \cdot \frac{y \cdot l}{2 E J} \cdot \frac{x+l}{3} = \frac{y(x+l)}{6 \cdot E \cdot J}, \quad (262)$$

desgleichen beträgt der Schwerpunktsabstand von B

$$\xi' = \frac{x'+l}{3}$$

und daher nach Satz II der Drehwinkel α^{a_0} :

$$\alpha^{a_0} = \frac{1}{l} \cdot \frac{y \cdot l}{2 E \cdot J} \cdot \frac{x'+l}{3} = \frac{y(x'+l)}{6 \cdot E \cdot J}. \quad (263)$$

Ferner ist nach Gl. (207):

$$\beta = \frac{l}{6 \cdot E \cdot J}.$$

Diese Werte für α^{b_0} , α^{a_0} und β in die Hauptformeln (242) und (243) eingesetzt gibt:

$$k^a = -\frac{y(x+l)}{l}, \quad (264)$$

$$k^b = -\frac{y(x'+l)}{l}. \quad (265)$$

In diesen Gleichungen kommt keine Größe vor, welche Bezug hätte auf das Trägheitsmoment der belasteten und der Nachbaröffnungen; deshalb erfolgt die Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte in derselben Weise sowohl am durchlaufenden Balken mit von Öffnung zu Öffnung sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment als auch am durchlaufenden Balken mit durchweg konstantem Trägheitsmoment.

Nach den Gl. (264) und (265) erhalten wir folgende bekannte

Konstruktion der Kreuzlinienabschnitte

k^a und k^b für eine Einzellast bei konstantem Trägheitsmoment, welche besonders bei der Bestimmung der Einflußlinien benutzt wird.

Von der Last P aus tragen wir (siehe Fig. 125) nach beiden Seiten auf der Balkenachse die Spannweite l im Längenmaßstab ab und verbinden die Endpunkte F und H dieser Strecken mit dem Endpunkte G der von der Balkenachse nach oben abgetragenen Ordinate y der einfachen Momentenfläche AGB ; die Geraden HG und FG schneiden auf der Senkrechten durch A und B die gesuchten Kreuzlinienabschnitte $k^a = AA'''$ und $k^b = BB'''$ ab. Die Richtigkeit dieser Konstruktion geht ohne weiteres aus der Ähnlichkeit der Dreiecke HLG und HAA''' bzw. der Dreiecke FLG und $FB B'''$ hervor.

b) Gruppe von Einzellasten.

Besteht die Belastung in einer Öffnung aus einer Gruppe von Einzellasten P , so sind die beiden einer jeder Kraft P entsprechenden Kreuzlinienabschnitte nach den Formeln (264) und (265) zu ermitteln. Durch Addition der Kreuzlinienabschnitte, welche den einzelnen Kräften P auf einer Stützensenkrechten der belasteten Öffnung entsprechen, erhält man den gesamten, auf dieser Senkrechten aufzutragenden Kreuzlinienabschnitt.

Im folgenden werden die Werte der Kreuzlinienabschnitte für verschiedene, häufig vorkommende Belastungsfälle angegeben.

Fall 1: Einzellast in Stabmitte (Fig. 126).

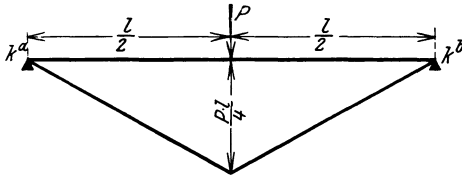


Fig. 126.

$$k^a = -\frac{3}{8} P \cdot l = k^b. \quad (265a)$$

Fall 2: Zwei gleiche Lasten in den Drittelpunkten des Stabes (Fig. 126a).

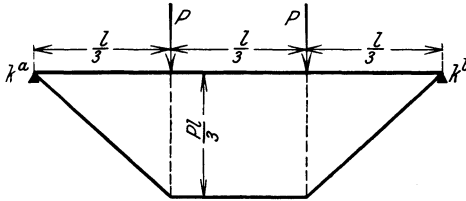


Fig. 126 a.

$$k^a = -\frac{2}{3} P \cdot l = k^b. \quad (265b)$$

Fall 3: Zwei gleiche Lasten in den Viertelpunkten des Stabes (Fig. 126b).

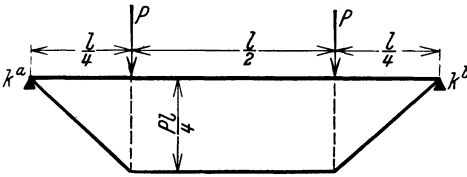


Fig. 126 b.

$$k^a = -\frac{9}{16} P \cdot l. \quad (265c)$$

Fall 4: Drei gleiche Lasten in gleichen Abständen voneinander und von den Auflagern (Fig. 126c).

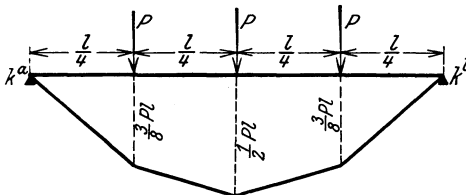


Fig. 126 c.

$$k^a = -\frac{15}{16} P \cdot l = k^b. \quad (265d)$$

Fall 5: n gleiche Lasten in gleichen Abständen voneinander und von den Auflagern (Fig. 126d).

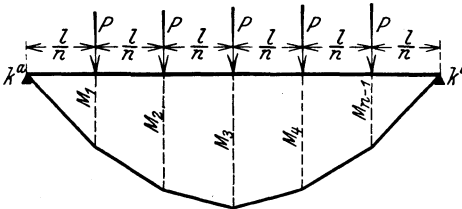


Fig. 126 d.

$$M_1 = (n - 1) \frac{P \cdot l}{2n},$$

$$M_2 = (2n - 4) \frac{P \cdot l}{2n},$$

$$M_3 = (3n - 9) \frac{P \cdot l}{2n},$$

$$M_4 = (4n - 16) \frac{P \cdot l}{2n},$$

$$\text{-----}$$

$$M_k = (n - k) k \frac{P \cdot l}{2n}.$$

$$k^a = -\frac{n^2 - 1}{4n} P \cdot l = -\frac{n + 1}{2} M_1 = k^b. \quad (265e)$$

Fall 6: Einzellast auf einseitiger Auskragung des Stabes (Fig. 126e).

$$k^a = -M_0^A; \quad k^b = -2M_0^A. \quad (265f)$$

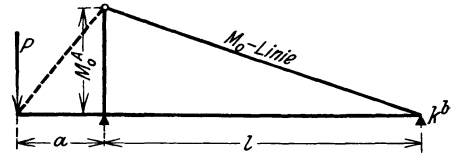


Fig. 126 e.

Fall 7: Gleiche Einzellast auf beidseitiger gleicher Auskragung des Stabes (Fig. 126f.).

$$k^a = -3M_0 = k^b. \quad (265g)$$

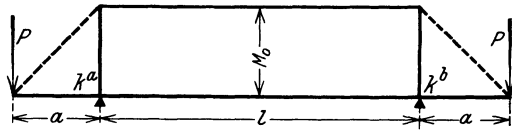


Fig. 126 f.

Fall 8: Verschieden große Einzellast auf beidseitiger gleicher Auskragung des Stabes (Fig. 126g.).

$$\begin{aligned} k^a &= -(M_1 + 2M_2); \\ k^b &= -(M_2 + 2M_1). \end{aligned} \quad (265h)$$

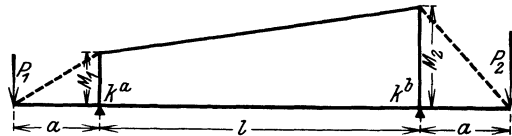


Fig. 126 g.

c) Stetige Belastung.

Ist die belastete Öffnung über der ganzen Stützweite oder einem Teil derselben mit einer stetigen, jedoch von Querschnitt zu Querschnitt verschiedenen Belastung p pro Längeneinheit belastet, so teilt man die Belastungsstrecke in womöglich gleiche Teile von der Länge Δs und ermittelt die den Einzelkräften $P = p \cdot \Delta z$ entsprechenden Kreuzlinienabschnitte wie beim vorhergehenden Belastungsfall.

Im folgenden werden die Werte der Kreuzlinienabschnitte sowie mehrere Ordinaten der zugehörigen einfachen Momentenfläche für verschiedene häufig vorkommende Belastungsfälle angegeben:

Fall 1: Gleichmäßig über den ganzen Stab verteilte Belastung p pro Längeneinheit (Fig. 127).

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{pl^2}{4} = -2f, \quad (266)$$

d. h. die Kreuzlinien gehen durch den Scheitel der Parabel, durch welche die einfache Momentenfläche begrenzt wird.

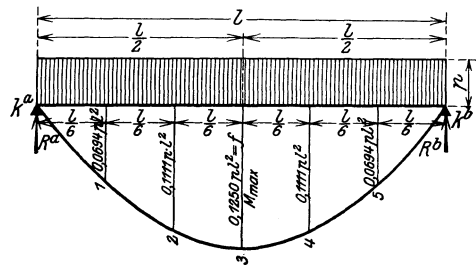


Fig. 127.

Fall 2: Dreiecksbelastung über den ganzen Stab (Fig. 128).

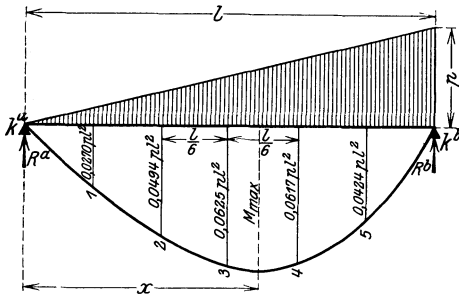


Fig. 128.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{2}{15} p l^2; \quad k^b = -\frac{7}{60} p l^2. \quad (267)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{pl}{6}; \quad R^b = \frac{pl}{3}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = 0,0642 p l^2; \quad x = 0,577 l.$$

Fall 3: Trapezbelastung über den ganzen Stab (Fig. 129).

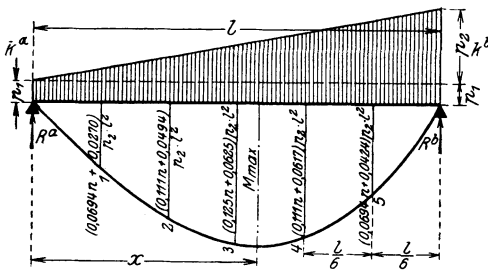


Fig. 129.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{l^2}{4} (p_1 + 0,5333 p_2); \\ k^b &= -\frac{l^2}{4} (p_1 + 0,4666 p_2). \end{aligned} \right\} (268)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{l}{6} (3 p_1 + p_2);$$

$$R^b = \frac{l}{6} (3 p_1 + 2 p_2).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{p_2 l^2}{6} \cdot m \cdot \left[\frac{2}{3} - n(m-2) \right];$$

$$x = l \cdot m;$$

$$m = \sqrt{n(n+1) + \frac{1}{3}} - n; \quad n = \frac{p_1}{p_2}.$$

Fall 4: Gleichmäßig verteilte Last über einen Teil des Stabes (Fig. 130).

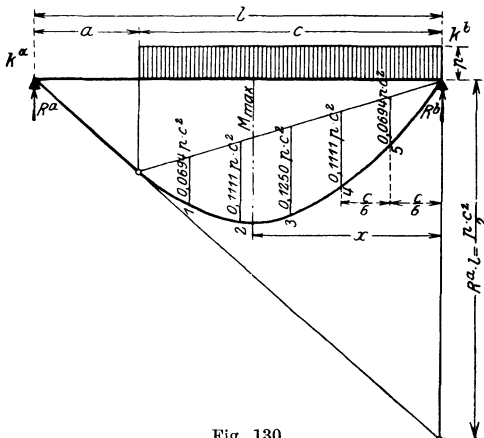


Fig. 130.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{p \cdot c^2}{4 l^2} (2l - c)^2 = -2 M_{\max} \\ k^b &= -\frac{p \cdot c^2}{4 l^2} (2l^2 - c^2) \end{aligned} \right\} (269)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{p c^2}{2l}; \quad R^b = \frac{p c}{l} \left(a + \frac{c}{2} \right).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{R^b \cdot x}{2}; \quad x = \frac{R^b}{p}.$$

Fall 5: Gleichmäßig verteilte Last auf einer Stabhälfte (Fig. 130a).

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{9}{64} p l^2 = -2 M_{\max}; \\ k^b &= -\frac{7}{64} p l^2. \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{pl}{8}; \quad R^b = \frac{3}{8} pl.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{R^b \cdot x}{2}; \quad x = \frac{R^b}{p}$$

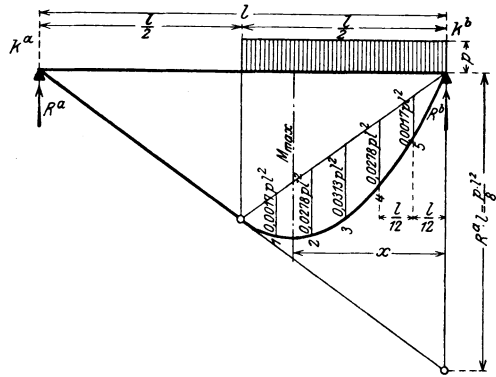


Fig. 130a.

Fall 6: Dreiecksbelastung laut Fig. 131.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{pc^2}{l^2} \left(\frac{l^2}{3} - \frac{cl}{4} + \frac{c^2}{20} \right) \\ k^b &= -\frac{pc^2}{l^2} \left(\frac{l^2}{6} - \frac{c^2}{20} \right) \end{aligned} \right\} \quad (271)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{pc^2}{6l}; \quad R^b = \frac{pc}{6l} (3a + 2c).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = R^a \left(a + \frac{2}{3} x \right);$$

$$x = c \sqrt{\frac{c}{3l}}.$$

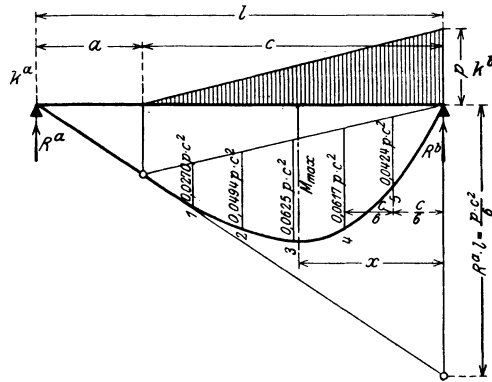


Fig. 131.

Fall 7: Dreiecksbelastung laut Fig. 132.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{pc^2}{l^2} \left(\frac{l^2}{3} - \frac{c^2}{5} \right) \\ k^b &= -\frac{pc^2}{l^2} \left(\frac{2}{3} l^2 - \frac{3}{4} cl + \frac{c^2}{5} \right) \end{aligned} \right\} \quad (272)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{pc}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{3} \right); \quad R^b = \frac{pc^2}{3l}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{2}{3} R^a \cdot x; \quad x = \sqrt{\frac{2 R^a \cdot c}{p}}.$$

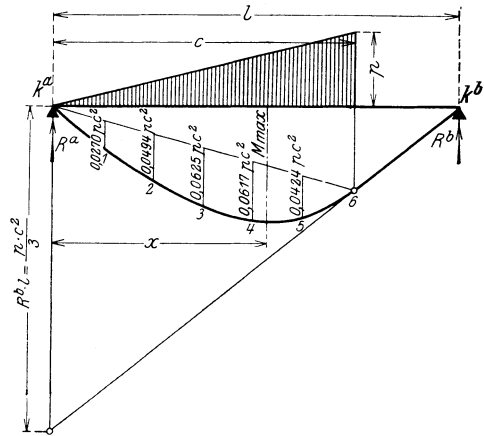


Fig. 132.

Fall 8: Dreiecksbelastung laut Fig. 132a.

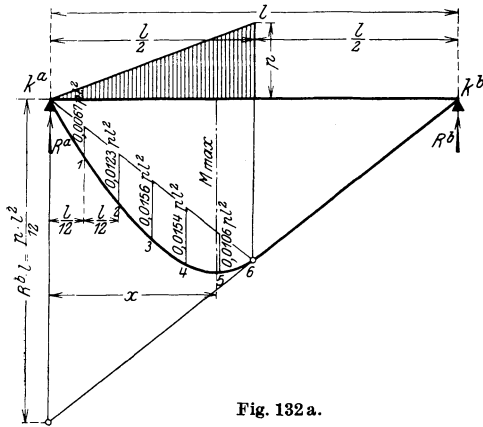


Fig. 132a.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{17}{240} p l^2; \quad k^b = -\frac{41}{480} p l^2. \quad (273)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{p l}{6}; \quad R^b = \frac{p l}{12}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = 0,0454 p l^2; \quad x = 0,408 l.$$

Fall 9: Gleichmäßig verteilte Streckenlast (Fig. 133).

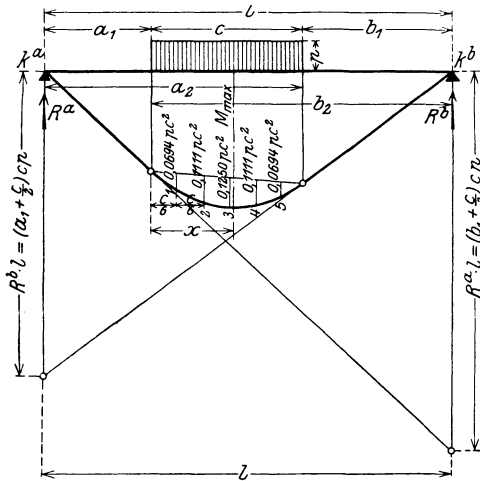


Fig. 133.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{p c}{4 l^2} (a_1 + a_2) (2 l^2 - a_1^2 - a_2^2) \\ k^b &= -\frac{p c}{4 l^2} (b_1 + b_2) (2 l^2 - b_1^2 - b_2^2) \end{aligned} \right\} (274)$$

Bei Symmetrie:

$$k^a = k^b = -\frac{p c}{8 l} (3 l^2 - c^2).$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{p c}{l} \left(b_1 + \frac{c}{2} \right); \quad R^b = \frac{p c}{l} \left(a_1 + \frac{c}{2} \right).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = R^a \left(a_1 + \frac{x}{2} \right); \quad x = \frac{R^a}{p}.$$

Fall 10: Dreiecksbelastung laut Fig. 134.

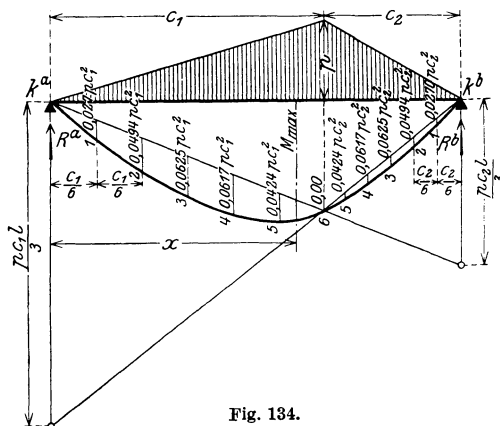


Fig. 134.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{p(l + c_1)}{60 l} (7 l^2 - 3 c_1^2) \\ k^b &= -\frac{p(l + c_2)}{60 l} (7 l^2 - 3 c_2^2) \end{aligned} \right\} (275)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{p}{6} (l + c_2); \quad R^b = \frac{p}{6} (l + c_1).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{2}{3} R^a \cdot x; \quad x = \sqrt{\frac{2 c_1 \cdot R^a}{p}}.$$

Fall 11: Dreiecksbelastung laut Fig. 134a.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{5}{32} p l^2. \quad (276)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = R^b = \frac{p l}{4}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{p l^2}{12}; \quad x = \frac{l}{2}.$$

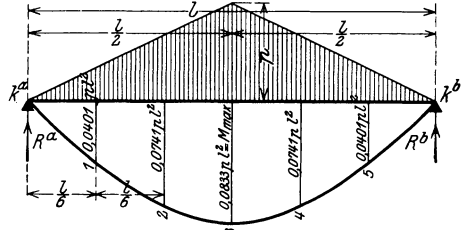


Fig. 134a.

Fall 12: Dreiecksbelastung laut Fig. 135.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= -\frac{l^2}{960} (37 p_1 + 53 p_2) \\ k^b &= -\frac{l^2}{960} (53 p_1 + 37 p_2) \end{aligned} \right\}. \quad (277)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = \frac{l}{24} (5 p_1 + p_2);$$

$$R^b = \frac{l}{24} (p_1 + 5 p_2).$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{R^b}{6} \left(l - \frac{8 x^2}{l + 2 x} \right);$$

$$x = \frac{l}{2} \sqrt{1 - \frac{R^b}{Q_2}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{6 p_2}}.$$

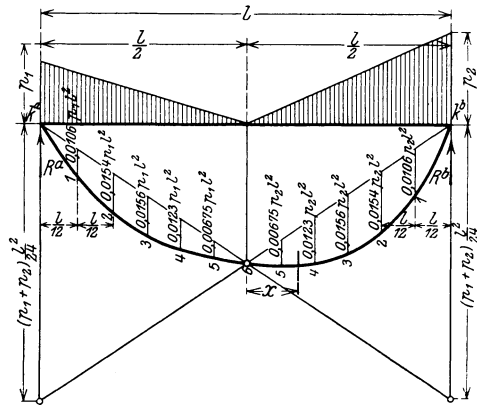


Fig. 135.

Fall 13: Dreiecksbelastung laut Fig. 135a.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{3}{32} p l^2. \quad (278)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = R^b = \frac{p l}{4}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{p l^2}{24}; \quad x = \frac{l}{2}.$$

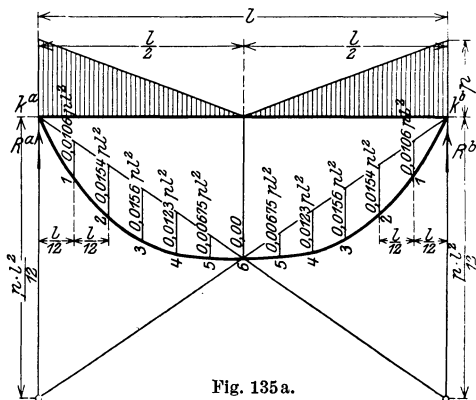


Fig. 135a.

Fall 14: Gleiche Streckenlast an beiden Stabenden (Fig. 135b).

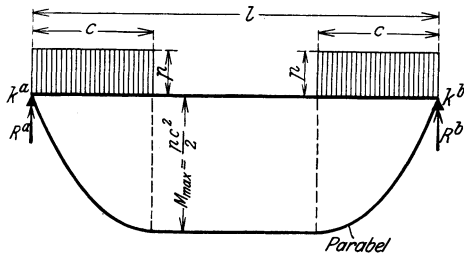


Fig. 135 b.

Kreuzlinienabschnitte:

$$\left. \begin{aligned} k^a &= k^b = -\frac{p \cdot c^2 (3l - 2c)}{2l} \\ &= -M_{\max} \left(\frac{3l - 2c}{l} \right). \end{aligned} \right\} (278 a)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = R^b = p \cdot c.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{p \cdot c^2}{2}.$$

Fall 15: Parabelförmige Belastung (Fig. 135c).

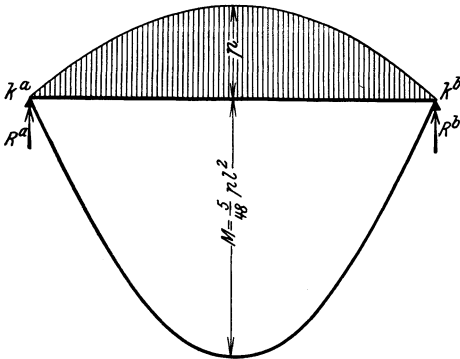


Fig. 135 c.

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{p \cdot l^2}{5}. \quad (278 b)$$

Auflagerdrücke:

$$R^a = R^b = \frac{p l}{3}.$$

Maximalmoment:

$$M_{\max} = \frac{5}{48} p l^2.$$

In einem beliebigen Schnitt:

$$M_x = \frac{p l}{3} x - \frac{p x^3}{3 l^2} (2l - x).$$

d) Konsolbelastung.

Wird zwischen den beiden Enden eines Stabes, z. B. einer Säule, wie in den Fig. 136, 137 und 138 dargestellt, ein Moment M , herrührend von der Belastung Q , eingeleitet, so ergeben sich, wie unter 2 d), die in den Fig. 136a bzw. 137a bzw. 138a dargestellten einfachen Momentenflächen (M_0 -Flächen). Wegen des als konstant angenommenen Trägheitsmomentes der belasteten Säule bestehen die $\frac{1}{E \cdot J}$ fachen (reduzierten) einfachen Momentenflächen wieder aus je 2 Dreiecken, weshalb wir für die Drehwinkel α^{b_0} und α^{a_0} nach Satz II folgende Werte erhalten:

$$\alpha^{b_0} = \frac{+\frac{M \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} - M \cdot z \cdot \frac{z}{2} - M \cdot \frac{e}{2} \left(z + \frac{e}{3} \right)}{l \cdot E \cdot J} = \frac{M}{6 E J} \left(1 - \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l} \right), \quad (279)$$

$$\alpha^{a_0} = \frac{-\frac{M l}{2} \cdot \frac{l}{3} + M \cdot z' \cdot \frac{z'}{2} + M \cdot \frac{e}{2} \left(z' + \frac{e}{3} \right)}{l \cdot E \cdot J} = \frac{M}{6 \cdot E \cdot J} \left(\frac{e^2 + 3z(e+z)}{l} - 1 \right). \quad (280)$$

Ferner ist nach Gl. (207):

$$\beta = \frac{l}{6 \cdot E \cdot J}.$$

Diese Werte für α^{b_0} , α^{a_0} und β in die Hauptformeln (242) und (243) eingesetzt gibt:

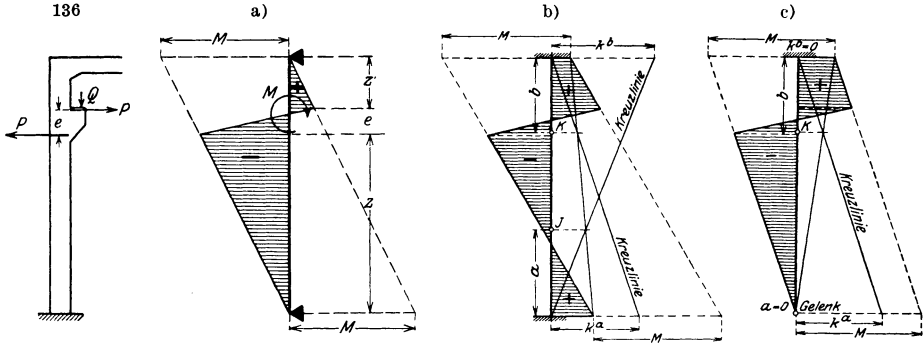


Fig. 136—136 c.

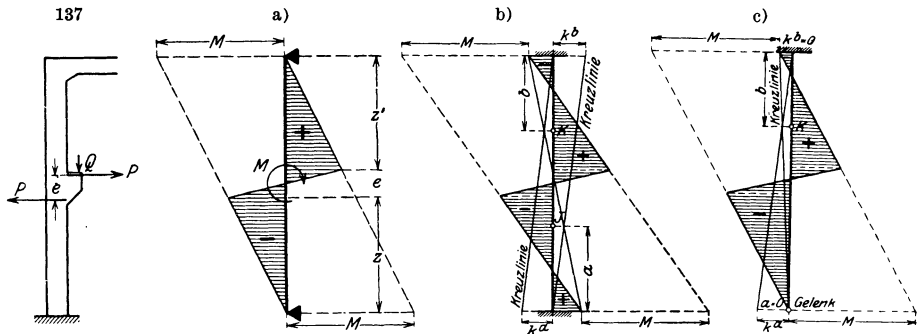


Fig. 137—137 c.

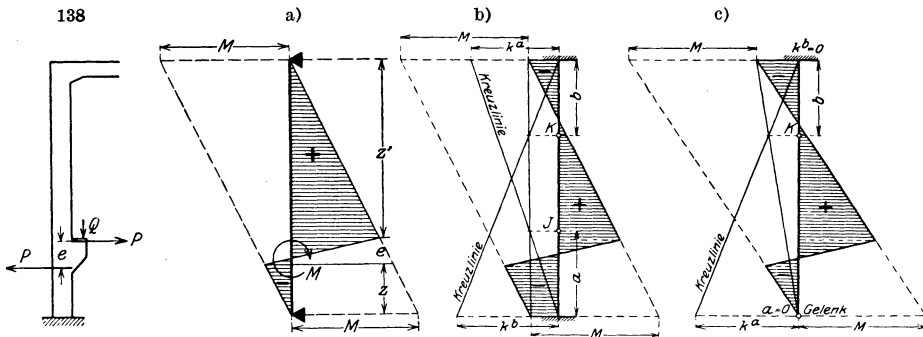


Fig. 138—138 c.

$$k^a = -M \left(1 - \frac{e^2 + 3z(e+z)}{l^2} \right) \quad (281)$$

und

$$\begin{aligned} k^b &= -M \left(\frac{e^2 + 3z'(e+z')}{l^2} - 1 \right) \\ &= +M \left(1 - \frac{e^2 + 3z'(e+z')}{l^2} \right). \end{aligned} \quad (282)$$

Hierin ist M mit seinem Vorzeichen (ein rechtsdrehendes Moment positiv) einzusetzen.

Ist die Höhe der Konsole im Verhältnis zur Säulenhöhe sehr klein, so kann der Abstand

$$e = 0$$

gesetzt werden und wir erhalten in diesem Falle:

$$k^a = -M \left(1 - \frac{3z^2}{l^2} \right), \quad (283)$$

$$k^b = -M \left(\frac{3z'^2}{l^2} - 1 \right) = +M \left(1 - \frac{3z'^2}{l^2} \right). \quad (284)$$

In den Fig. 136b, 137b und 138b wurden die Kreuzlinien und Schlußlinien für die aus den Fig. 136, 137 und 138 ersichtliche Höhenlage der Konsole für feste Einspannung des Säulenfußes eingetragen; die Fig. 136c, 137c und 138c zeigen dasselbe für gelenkartige Lagerung des Säulenfußes, in welchem Falle $k^b = 0$ wird. Dabei wurde wie in Fig. 87b gezeigt (siehe Abschnitt 4c dieses Kapitels) zuerst die Schlußlinie mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte konstruiert und dann die M_0 -Fläche von der Schlußlinie (anstatt Stabachse) aus aufgetragen, so daß die Säulenachse die Trennungslinie für die positiven und negativen Momente bildet; diese Auftragsweise ist bei Konsolbelastung besonders vorteilhaft. Wie aus diesen Figuren ersichtlich, werden die Kreuzlinienabschnitte je nach der Höhenlage der Konsole entweder beide positiv (Fig. 136b), der eine positiv und der andere negativ (Fig. 137b), oder beide negativ (Fig. 138b). Aus dem Vergleich der Fig. 136b mit den Fig. 137b und 138b, sowie der Fig. 136c mit den Fig. 137c und 138c folgt, daß es eine bestimmte Höhenlage der Konsole gibt, für welche sich das Säulenkopfmoment zu Null ergibt. Dieselbe beträgt unter der Annahme, daß $e = 0$:

$$\text{für Säule mit Fuß einspannung: } z = \frac{2}{3}l, \quad (285)$$

$$\text{„ „ „ Fußgelenk: } z = \frac{l}{\sqrt{3}}. \quad (286)$$

Soll eine

starre Strecke an einem Ende des belasteten Stabes

(meistens Pfeilers) berücksichtigt werden bei sonst konstantem Trägheitsmoment, so beachten wir, daß in diesem Falle die reduzierte Momentenfläche auf die Länge der starren Strecke gleich Null wird. Die in den Hauptformeln (242) und (243) für die Kreuzlinienabschnitte vorkommenden Drehwinkel α^{b_0} und α^{a_0} bestimmen wir zweckmäßig direkt nach dem Mohrschen Satz II; der Drehwinkel β ist durch Gl. (206) ausgedrückt.

Da nun aber in den Fig. 127 bis 135a nicht nur die Kreuzlinienabschnitte für die meisten vorkommenden Belastungsfälle für durchweg konstantes Trägheitsmoment angegeben, sondern auch die M_0 -Flächen für diese Belastung durch mehrere Punkte der Momentenlinie festgelegt sind, welche natürlich für konstantes und veränderliches Trägheitsmoment dieselben sind, so können wir die Bestimmung der Kreuzlinienabschnitte bei Berücksichtigung der genannten starren Strecke in der Weise vornehmen, daß wir zunächst die Kreuzlinienabschnitte für durchweg konstantes Trägheitsmoment nach den Formeln (266) bis (278) ermitteln und darauf den Einfluß der starren Strecke

auf die Kreuzlinienabschnitte als Berichtigung dadurch ermitteln, daß wir denjenigen Teil der reduzierten Momentenfläche der Fig. 127 bis 135a, welcher infolge der starren Strecke ($J = \infty$) Null wird, als negative reduzierte Momentenfläche betrachten und hierfür allein die Kreuzlinienabschnitte nach den allgemeinen Hauptformeln bestimmen; diese zur Berichtigung nötige Rechnung gestaltet sich sehr einfach, weil die reduzierte Momentenfläche auf der starren Strecke immer als ein Dreieck angesehen werden darf.

4. Bestimmung der Momentenfläche am ganzen Tragwerk.

In Kap. I wurde der Gang der Rechnung bei der Bestimmung der Momentenfläche am

a) allgemeinen offenen Tragwerk

beschrieben. Man hat also nach Ermittlung der Festpunkte und Verteilungsmaße nach Kap. II oder III die Kreuzlinienabschnitte nach den vorhergehenden Abschnitten 1 bis 3 zu bestimmen. Hierauf werden

graphisch

die beiden Kreuzlinien gezogen (siehe Fig. 122) und deren Schnittpunkte J' und K' mit den beiden Festlinien bestimmt. Die Verbindungslinie $J'K'$ ist dann die gesuchte Schlußlinie in der belasteten Öffnung, welche auf den Normalen über den Stabenden die Stützmomente abschneidet. An diese Schlußlinie wird nun die M_0 -Momentenfläche angehängt, so daß die Balkenachse die Trennungslinie zwischen den positiven und negativen Momenten bildet; dies ist richtig, weil das Momententrapez $BCC''B''$ (negativ) von der M_0 -Fläche (positiv) abgezogen werden muß. Zum Schluß werden die beiden Stützenmomente nach Multiplikation mit den entsprechenden Verteilungsmaßen über die übrigen unbelasteten Stäbe fortgepflanzt, wie dies in Kap. I unter „Gang der Berechnung“ ausführlich erläutert wurde.

Anstatt die Momentenfläche durch Zeichnen der Schlußlinien in allen Öffnungen zu bestimmen, können wir auch die Stützenmomente an den belasteten und unbelasteten Stäben wie folgt

rechnerisch

aus den in Fig. 122 durch die graphische Konstruktion der Momentenfläche gebildeten Dreiecken ermitteln, worauf die Momente am ganzen Tragwerk bekannt sind.

Am Tragwerk der Fig. 122 seien alle Festpunktabstände a und b , und am belasteten Stab außerdem die beiden Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b bekannt.

Wir erhalten dann z. B. die beiden Stützenmomente M^B und M^O

in der belasteten Öffnung 6 der Fig. 122

wie folgt:

Wir ziehen die beiden Kreuzlinien BC''' und CB''' , bestimmen deren Schnittpunkte J' und K' mit den beiden Festlinien und ziehen die Verbindungslinie $J'K'$, welche auf der Stützennormalen durch B und C die gesuchten Stützenmomente BB'' und CC'' abschneidet. Die Diagonale BC'' zerlegt die Strecken

JJ' und KK' in je zwei Teilstrecken, deren Summe wir durch die Ähnlichkeit der Dreiecke BCC'' , BJJ' und BKK'' , sowie die Ähnlichkeit der Dreiecke $C''BB''$, $C''K'K''$ und CJJ'' folgendermaßen ausdrücken können:

$$JJ' = M^B \cdot \frac{l-a}{l} + M^C \cdot \frac{a}{l}, \quad (290)$$

$$KK' = M^B \cdot \frac{b}{l} + M^C \cdot \frac{l-b}{l}. \quad (291)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCC''' und BJJ' , sowie der Ähnlichkeit der Dreiecke $CB B'''$ und CKK' folgt:

$$JJ' = k^b \cdot \frac{a}{l}, \quad KK' = k^a \cdot \frac{b}{l}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gl. (290) und (291) ein, so erhalten wir für die belastete Öffnung 6:

$$M^B = \frac{k^b(l-b) - k^a \cdot b}{l(l-a-b)} \cdot a, \quad (292)$$

$$M^C = \frac{k^a(l-a) - k^b \cdot a}{l(l-a-b)} \cdot b, \quad (293)$$

welche Werte wir auch aus den Gleichungen (213a) und (214a) durch Einsetzen der Werte der Gleichungen (219) und (220) und der Gleichungen (223) und (224) erhalten [vgl. Ableitung der Gleichungen (336) und (337) beim bogenförmigen Stab].

Die in die beiden Gleichungen (292) und (293) einzusetzenden Werte von k^a , k^b , a und b können nach den früheren Kapiteln mathematisch genau berechnet werden.

Ferner erhalten wir z. B. die beiden Stützenmomente M^B und M^A

in der unbelasteten Öffnung 1 der Fig. 122

aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $BB'J$ und $AA'J$ zu:

$$M_1^B = M_6^B \cdot \mu_{6-1}^B, \quad (294)$$

$$M_1^A = M_1^B \cdot \frac{a_1}{l_1 - a_1}. \quad (295)$$

Die in den Gl. (294) u. (295) einzusetzenden Werte von μ , a und b können nach den früheren Kapiteln mathematisch genau berechnet werden.

Das Auftragen der Momente

erfolgt, wie schon in Kap. I erwähnt, grundsätzlich an der Zugseite des Stabes.

Im übrigen bezeichnen wir ein Moment als positiv, wenn es an einem „liegenden“ Stab unten, und an einem „stehenden“ Stab rechts Zugspannungen hervorruft; die Grenze zwischen „liegend“ und „stehend“ bildet die 45°-Neigung, letztere selbst sei noch „liegend“.

Wir zerlegen jede schiefwinklig zur Achse eines Stabes wirkende Belastung zur Bestimmung der Momente in eine Komponente rechtwinklig zur Stabachse und in eine Komponente in Richtung derselben; für die erstere bestimmen wir die Momente und tragen sie rechtwinklig zur Stabachse auf.

Eine Ausnahme hiervon machen wir nur beim Eigengewicht von schiefen Stäben, das immer lotrecht wirkt, sowie bei horizontal wirkendem Wind-, Wasser- oder Erddruck auf schiefe Stäbe, was das Analoge ist.

Wir betrachten das

Eigengewicht von schiefen Stäben:

Diese Belastung wirkt immer lotrecht; man zerlegt sie daher zweckmäßig nicht (Fig. 139), ermittelt dagegen die davon herrührende Momentenfläche mit der Projektion der Stützweite auf die Waagrechte (Fig. 139a) und trägt dann die erhaltene Momentenfläche schiefsymmetrisch, d. h. mit senkrechten Ordinaten und in der Stabrichtung gemessenen Abszissen, oder auch normal, an dem schiefen Stab an; in Fig. 139b ist sie schiefsymmetrisch angetragen. Es ist nämlich in Fig. 139 G das Eigengewicht des Stabes AB pro laufenden Meter Stab schief gemessen. Dann wirkt auf 1 Meter waagrechte Projektion die Last $(G \cdot \frac{1}{\cos \alpha})$ und damit sowie der Stützweite $(l \cdot \cos \alpha)$ erhalten wir (Fig. 139a):

$$M_{\max} = \frac{G \cdot l^2}{8} \cdot \cos \alpha. \quad (298)$$

Dasselbe Moment erhalten wir, wenn wir die Last G , wie im allgemeinen Fall, in G' und G'' (Fig. 139) zerlegen; dann ist

$$G' = G \cdot \cos \alpha, \quad (299)$$

$$G'' = G \cdot \sin \alpha, \quad (300)$$

welch letztere keine Momente am Stab erzeugt. Mit der Last G' nach Gl. (299) und der Stützweite l erhalten wir nun

$$M_{\max} = \frac{G \cdot l^2}{8} \cdot \cos \alpha,$$

wie in Gl. (298).

Als Kontrolle

für das richtige Auftragen der Momente dient die Bedingung, daß an jedem herausgetrennten Knotenpunkt unter den an den Schnittflächen angebrachten Momenten (entgegengesetzt wie an den herausgetrennten anschließenden Stäben) Gleichgewicht nach Gl. (148) und (163) bestehen muß (Fig. 77a und 88a).

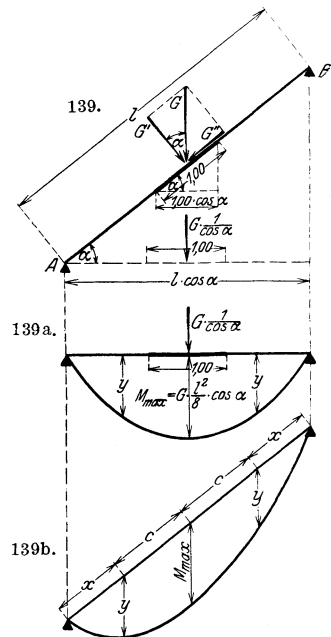


Fig. 139—139 b.

b) Durchlaufender Balken auf elastisch drehbaren Stützen.

Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit dieser Konstruktion wird noch nachstehend die Bestimmung der Momentenfläche am Tragwerk der Fig. 76, und zwar für Balken- und Pfeilerbelastung sowie gleichzeitige Belastung mehrerer Öffnungen vorgeführt.

Balkenbelastung.

Es sei nur die Öffnung 2 mit der Kraft P belastet. Die dadurch hervorgerufene Momentenfläche am ganzen Tragwerk ist in Fig. 77 dargestellt. Sie

wird dadurch gefunden, daß nach Berechnung der Kreuzlinienabschnitte die beiden Kreuzlinien gezogen und deren Schnittpunkte J'_2 und K'_2 mit den beiden Festpunktsenkrechten bestimmt werden; die Verbindungslinie $J'_2K'_2$ ist dann die gesuchte Schlußlinie in der belasteten Öffnung, an welche die M_0 -Fläche angehängt wird, so daß die Balkenachse die Trennungslinie zwischen den positiven und negativen Momenten bildet. Darauf werden die beiden Stützenmomente nach Multiplikation mit den entsprechenden Verteilungsmaßen über die übrigen unbelasteten Felder (Balken und Pfeiler) fortgepflanzt.

Beim Überschreiten des Knotenpunktes B nach links spaltet sich das Moment M_2^B in M_1^B und M_6^B . Es ist

$$M_1^B = \mu_{2-1}^B \cdot M_2^B$$

und

$$M_6^B = (1 - \mu_{2-1}^B) \cdot M_2^B.$$

Diese Momente pflanzen sich über die anschließende Konstruktion fort, und zwar geht nach der Definition der Festpunkte in den unbelasteten Öffnungen die Schlußlinie durch den Festpunkt am anderen Stabende; es besteht kein Unterschied zwischen Balken und Pfeiler, da beides Stäbe des Tragwerkes sind.

Analog erhalten wir beim Übergang des Momentes M_2^C über den Knotenpunkt C nach rechts:

$$M_3^C = \mu_{2-3}^C \cdot M_2^C$$

und

$$M_7^C = (1 - \mu_{2-3}^C) \cdot M_2^C$$

und diese Momente pflanzen sich ebenfalls über die anschließende Konstruktion fort. Das Moment M_3^D spaltet sich am Knotenpunkt D in

$$M_4^D = \mu_{3-4}^D \cdot M_3^D$$

und

$$M_8^D = (1 - \mu_{3-4}^D) \cdot M_3^D,$$

welche Momente sich wieder mit Hilfe der Festpunkte über die unbelasteten Stäbe 4 und 8 fortpflanzen.

Pfeilerbelastung.

Es sei nur der Pfeiler 7 mit der Kraft P belastet. Die dadurch hervorgerufene Momentenfläche am ganzen Tragwerk ist in Fig. 88 dargestellt. Sie wird wieder dadurch gefunden, daß zunächst am belasteten Pfeiler die beiden Stützenmomente mittels Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte ermittelt, und das Pfeilermoment darauf mittels der Festpunkte und der entsprechenden Verteilungsmaße über die übrigen unbelasteten Stäbe (Balken und Pfeiler) fortgepflanzt wird.

Beim Überleiten des Pfeilerkopfmomentes M_7^G in den durchlaufenden Balken spaltet sich dieses Moment in M_2^G und M_3^G ; es ist

$$M_2^G = \mu_{7-2}^G \cdot M_7^G$$

und

$$M_3^G = (1 - \mu_{7-2}^G) \cdot M_7^G.$$

Das Moment M_2^G pflanzt sich nun über die links, und das Moment M_3^G über die rechts vom Pfeilerkopf anschließende Konstruktion (unbelastete Stäbe) fort, genau wie bei der Balkenbelastung.

Belastung mehrerer Öffnungen.

Sind gleichzeitig mehrere Öffnungen (oder Balken und Pfeiler gleichzeitig) des durchlaufenden Balkens belastet, wie z. B. die zweite und vierte Öffnung in Fig. 140, so bestimmt man die Momentenflächen am ganzen Tragwerk für die Belastung der Öffnung l_2 und für diejenige der Öffnung l_4 getrennt voneinander, addiert darauf die Momentenordinaten unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens und hängt erst an die endgültigen Schlußlinien s_2 und s_4 die betreffende M_0 -Fläche an; in Fig. 140 sind die Schlußlinien der Momentenflächen infolge nacheinander folgender Belastung der beiden Öffnungen l_2 und l_4 gestrichelt bzw. strichpunktirt eingezeichnet und mit 2 bzw. 4 bezeichnet.

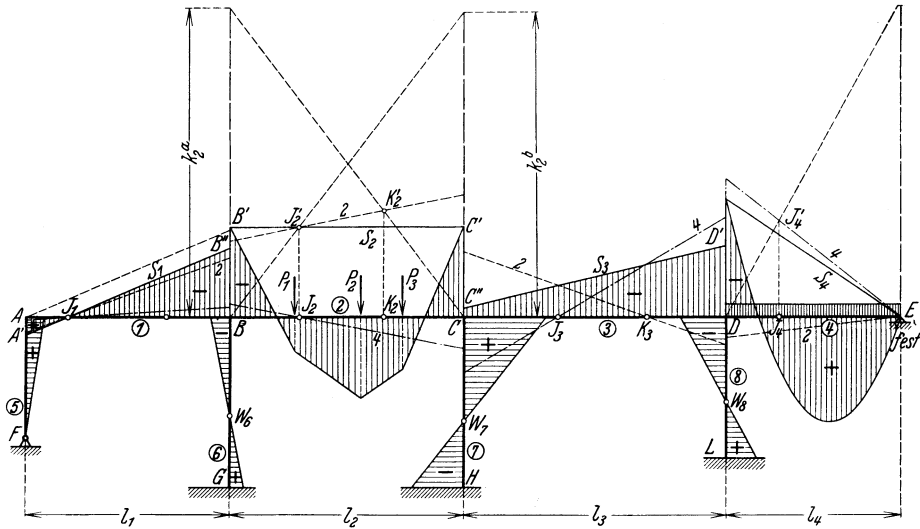


Fig. 140.

Konsolbelastung.

Der in Fig. 100 dargestellte durchlaufende Träger $ABCDE$ auf den elastisch drehbaren Pfeilern 5, 6, 7 und 8 und der frei drehbaren Stütze C , an welcher der Balken festgehalten ist, besitzt an seinem linken Ende eine Konsol, an deren Ende die Einzellast P angreift. Dadurch entsteht längs der Konsol bis zur Stütze A das gewöhnliche statisch bestimmte Konsolmoment, das im Querschnitt unmittelbar links von A : $M^A = P \cdot l$ beträgt. Dieses Moment pflanzt sich nun nach rechts über die übrige Konstruktion fort, und zwar verteilt es sich auf die Stäbe 1 und 5 gemäß den Verteilungsmaßen $\mu_{Kons.-1}^A$ und $\mu_{Kons.-5}^A$ (welche zusammen 1 ergeben), so daß

$$M_1^A = \mu_{Kons.-1}^A \cdot M^A$$

und

$$M_5^A = \mu_{Kons.-5}^A \cdot M^A = (1 - \mu_{Kons.-1}^A) \cdot M^A.$$

Das Moment M_1^A leiten wir weiter durch den Festpunkt K_1 , wodurch wir M_1^B erhalten, und das Moment M_5^A pflanzen wir durch J_5 fort, wodurch sich M_5^F ergibt; usw.

Da der durchlaufende Balken in E ein festes Auflager besitzt, so sind die in den Fig. 87, 88 und 89 dargestellten Momente die endgültigen Momente.

Wäre in E kein festes, sondern ein bewegliches Lager, so würden sowohl bei Balkenbelastung, als auch bei Pfeilerbelastung infolge der horizontalen Verschiebung der Pfeilerköpfe noch Zusatzmomente (Rechnungsabschnitt II) entstehen, welche zu den eben erhaltenen Momenten (Rechnungsabschnitt I) zu addieren wären. Die Zusätze infolge der Balkenbelastung würden gering ausfallen, da das Tragwerk der Fig. 76 vier Pfeiler aufweist (vgl. Teil II) und die Zusätze um so geringer werden, je mehr Pfeiler ein Tragwerk besitzt. Bei Pfeilerbelastung wäre dies jedoch anders; in diesem Falle würden sich die Pfeilerköpfe selbstredend noch verschieben und dadurch Zusatzmomente hervorrufen, welche einen erheblichen Anteil an den endgültigen Momenten haben.

Ferner erläutern wir die Bestimmung der Momentenfläche am

c) geschlossenen Rechteckrahmen

der Fig. 141, dessen oberer Balken (Stab 3) gleichmäßig verteilt belastet ist. Bei der symmetrischen Ausbildung des Tragwerkes und der symmetrischen Belastung

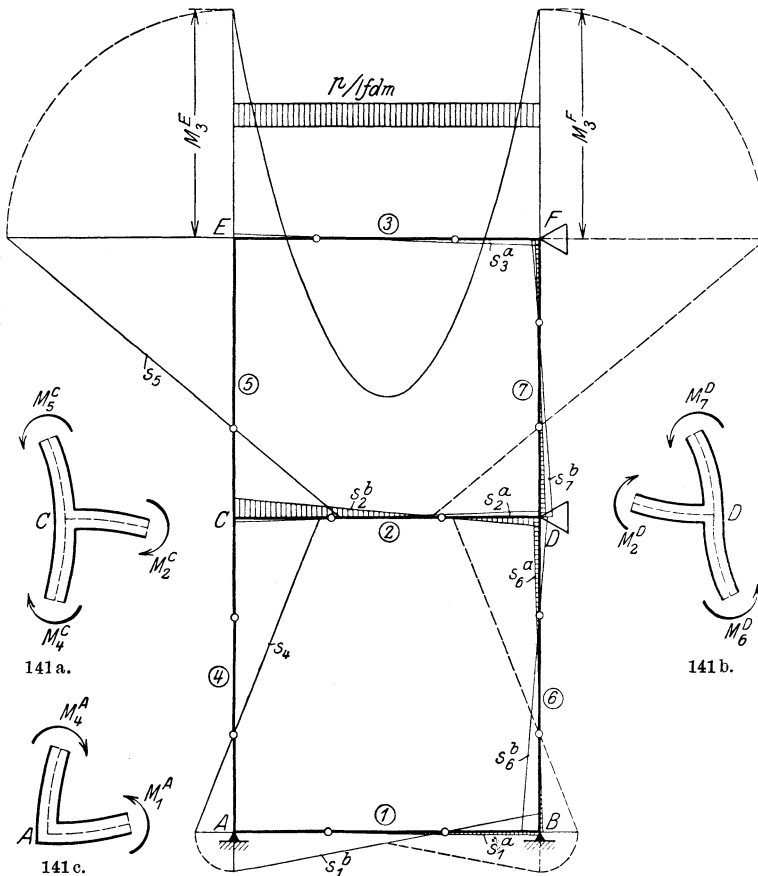


Fig. 141—141 c.

verschieben sich die Balken 2 und 3 nicht, so daß das Tragwerk für den gegebenen Belastungsfall wie ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten

berechnet werden kann, auch wenn die festen Lager an den Knotenpunkten D und F nicht vorhanden wären.

An einseitig offenen und geschlossenen Tragwerken sind die Momente entsprechend dem Wesen des endlosen Stabzuges „endlos“, d. h. auch im Kreise herum so lange fortzupflanzen, bis sie verschwindend klein geworden sind. Zum Glück aber wird die Rechnung nicht endlos, da die Momente beim Weiterleiten rasch abnehmen, so daß es meistens gar nicht zum Kreislauf kommt.

Nachdem die Festpunkte und Verteilungsmaße am ganzen Tragwerk der Fig. 141 bestimmt sind, können die beiden Momente M_3^E und M_3^F des belasteten Stabes mittels der Kreuzlinienabschnitte (Kap. V) bestimmt und darauf weitergeleitet werden.

Wir brauchen der Symmetrie wegen nur das Moment M_3^E weiterzuleiten, da die Fortpflanzung des Momentes M_3^F genau das Spiegelbild der Momentenfläche, erhalten durch Weiterleitung von M_3^E , liefert und darauf die Momente aus den beiden Bildern einfach mit ihren Vorzeichen zu addieren sind.

Zunächst erhalten wir $M_5^E = M_3^E$, weil sich in Knotenpunkt E nur ein Stab anschließt. Durch Ziehen der Schlußlinie s_5 durch den Festpunkt J_5 erhalten wir M_5^C . Dieses Moment zweigt sich nun in die beiden „anstoßenden“ Stäbe 2 und 4 ab. Es ist

$$M_4^C = M_5^C \cdot \mu_{5-4}^C,$$

und da aus der Gleichgewichtsbedingung am herausgetrennten Knotenpunkt C (Fig. 141 a)

$$M_2^C = M_5^C - M_4^C,$$

so ist

$$M_2^C = (1 - \mu_{5-4}^C) \cdot M_5^C.$$

Das Moment M_2^C pflanzt sich über den Stab 2 durch Schlußlinie s_2^b weiter. Letztere schneidet in D das Moment M_2^D ab, das sich dort spaltet in:

$$M_6^D = M_2^D \cdot \mu_{2-6}^D,$$

und

$$M_7^D = M_2^D \cdot (1 - \mu_{2-6}^D).$$

Das Moment M_6^D pflanzt sich durch Schlußlinie s_6^b über Stab 6 weiter, erzeugt in B das Moment M_6^B , welches in voller Größe in den Stab 1 übergeht, wo es sich durch Schlußlinie s_1^f weiterleitet und bei A ein Moment M_1^A ergibt, welches so klein ist, daß es keinen weiteren Einfluß auszuüben vermag.

Bevor wir das Moment M_7^D weiter verfolgen, leiten wir zunächst das am Knotenpunkt C erhaltene Zweigmoment M_4^C weiter. Dieses erzeugt am Stab 4 die durch die Schlußlinie s_4 bestimmte Momentenfläche. Das in Knotenpunkt A hervorgerufene Moment M_4^A geht, weil sich nur ein weiterer Stab anschließt, ohne Spaltung (Fig. 141 c) in den Stab 1 über, wo es die durch die Schlußlinie s_1^b begrenzte Momentenfläche ergibt. Das hierdurch in B erzeugte Moment pflanzt sich ohne weiteres durch Schlußlinie s_6^b über den Stab 6 fort. Die Schlußlinie s_6^b der nicht schraffierten Momentenfläche schneidet in D ein Moment ab, welches sich analog M_5^C in C spaltet in:

$$M_7^D = M_6^D \cdot \mu_{6-7}^D$$

und

$$M_2^D = M_6^D \cdot (1 - \mu_{6-7}^D),$$

welch letzteres sich über Stab 2 durch Schlußlinie s_2^a fortpflanzt und in C ein derart kleines Moment ergibt, daß es nicht mehr weitergeleitet zu werden braucht.

Da sich die beiden Momentenflächen am Stab 7, herrührend von der Weiterleitung der schraffierten bzw. der unschraffierten Momentenflächen am Stab 2 bzw. 6 decken würden, so addieren wir die beiden Momente M_7^D , damit wir nicht eine der beiden Momentenflächen übersehen, und leiten darauf das Gesamtmoment vermittels Schlußlinie s_7 über den Stab 7 weiter. Dieses erzeugt in Punkt F ein Moment, welches ohne weiteres in Stab 3 übergeht und sich dort durch Schlußlinie s_3 fortpflanzt, jedoch in Punkt E so klein geworden ist, daß es keinen weiteren Einfluß auszuüben vermag.

Die Momentenfläche, herrührend von der Fortpflanzung des Stützensmomentes M_3^F der belasteten Öffnung, d. h. das Spiegelbild der Momentenfläche herrührend von M_3^E , wurde in Fig. 141 auf der rechten Hälfte des Tragwerkes gestrichelt eingezeichnet.

Aus dem ganzen Momentenverlauf ersehen wir, daß die Momente beim Weiterleiten tatsächlich sehr schnell abnehmen, was der Berechnungsmethode sehr zugute kommt, wie dies aus den Zahlenbeispielen in Bd. II noch weiter ersichtlich ist.

In Fig. 142 haben wir den Querschnitt durch einen symmetrischen, rechteckigen Kanal mit senkrechter Mittelwand dargestellt. In beiden Abteilungen herrscht der gleiche Wasserdruck, auch der Bodendruck ist symmetrisch verteilt. In diesem Falle bleiben die Tangenten der elastischen

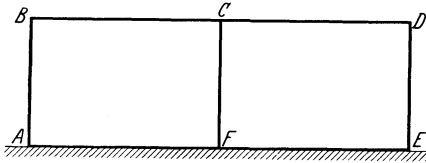


Fig. 142.

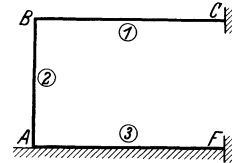


Fig. 142a.

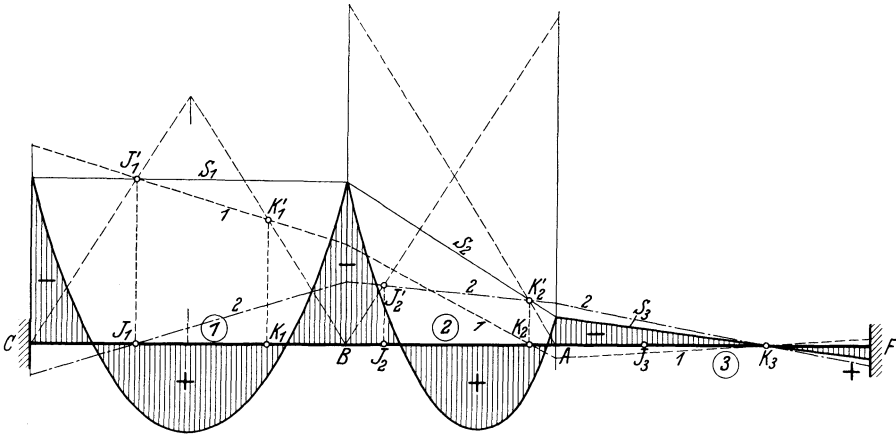


Fig. 142b.

Linien BCD und AFE in C und F waagrecht und damit diejenige des Stabes CF senkrecht, so daß der Stab CF spannungslos bleibt und das Tragwerk in C und F

für die vorausgesetzte symmetrische Belastung der symmetrischen Konstruktion als voll eingespannt betrachtet werden kann. Dann kann der Stabzug $FABC$ (Fig. 142a) ausgestreckt und wie ein gewöhnlicher frei aufliegender durchlaufender Balken mit eingespannten Enden berechnet werden (Fig. 142b), da der Stab AB in senkrechter Richtung unverschiebbar ist, weil er sich in A gegen den Boden stützt und im Kanal die Wasserbelastung nach unten größer ist als diejenige nach oben.

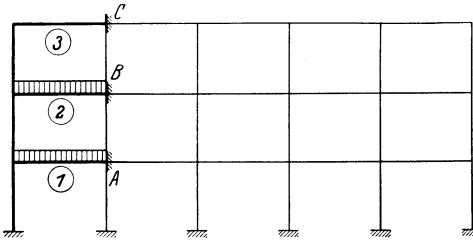


Fig. 143.

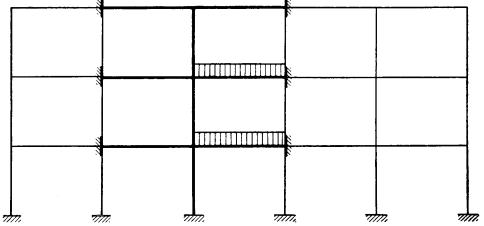


Fig. 143a.

Zur Bestimmung der Biegemomente in den Randsäulen eines vielfachen Stockwerkrahmens eines Gebäudes können wir näherungsweise so vorgehen, daß wir nur die in Fig. 143 stark ausgezogenen Stäbe als zusammenhängend betrachten und die elastische Einspannung der Stäbe 1, 2 und 3 an ihren Enden A bzw. B bzw. C in der Weise berücksichtigen, daß wir die Festpunktabstände b_1 , b_2 und b_3 schätzen (vgl. Kap. II, 8). Analog können wir zur Bestimmung der Biegemomente der Mittelsäulen vorgehen (vgl. Fig. 143a).

In den Fig. 144, 144a und 144b wurde der Horizontalschnitt durch einen Silo dargestellt. Zur Berechnung der Biegemomente und Axialkräfte in den Zellenwänden können wir näherungsweise wieder so vorgehen, daß wir für die Wände einer Mitte-, Außen- oder Eckzelle nur die in Fig. 144 bzw. 144a bzw. 144b stark ausgezogenen Stäbe als zusammenhängend betrachten und die elastische Einspannung durch die abgeschnittene Konstruktion in der Weise berücksichtigen, daß wir die Festpunktabstände an den Einspannstellen nach Kap. II, 8 schätzen.

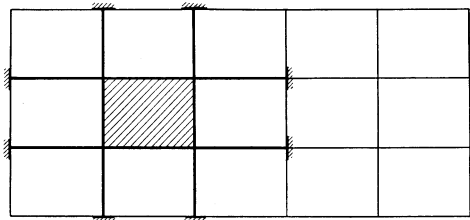


Fig. 144.

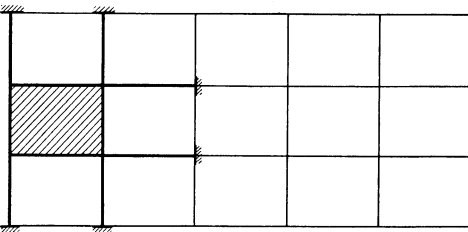


Fig. 144a.

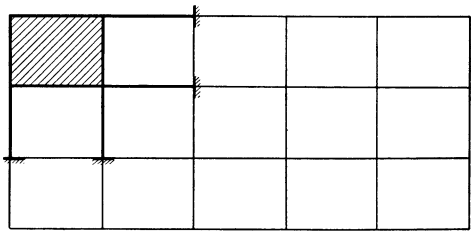
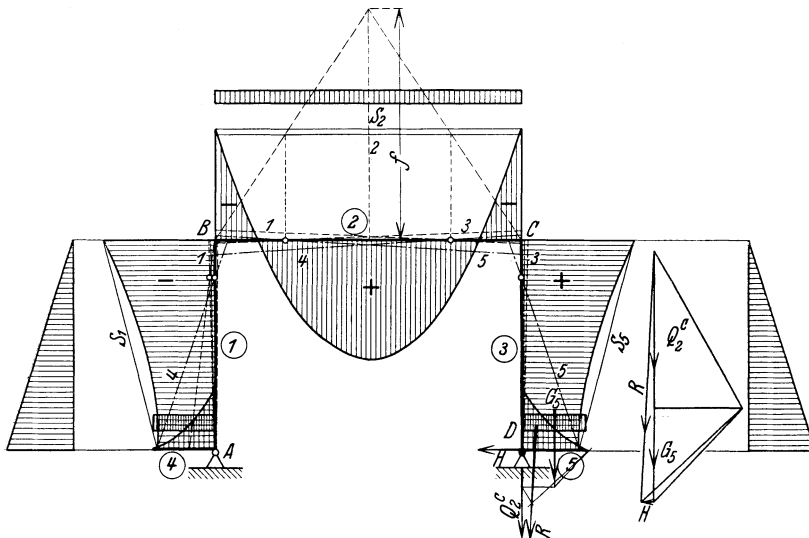
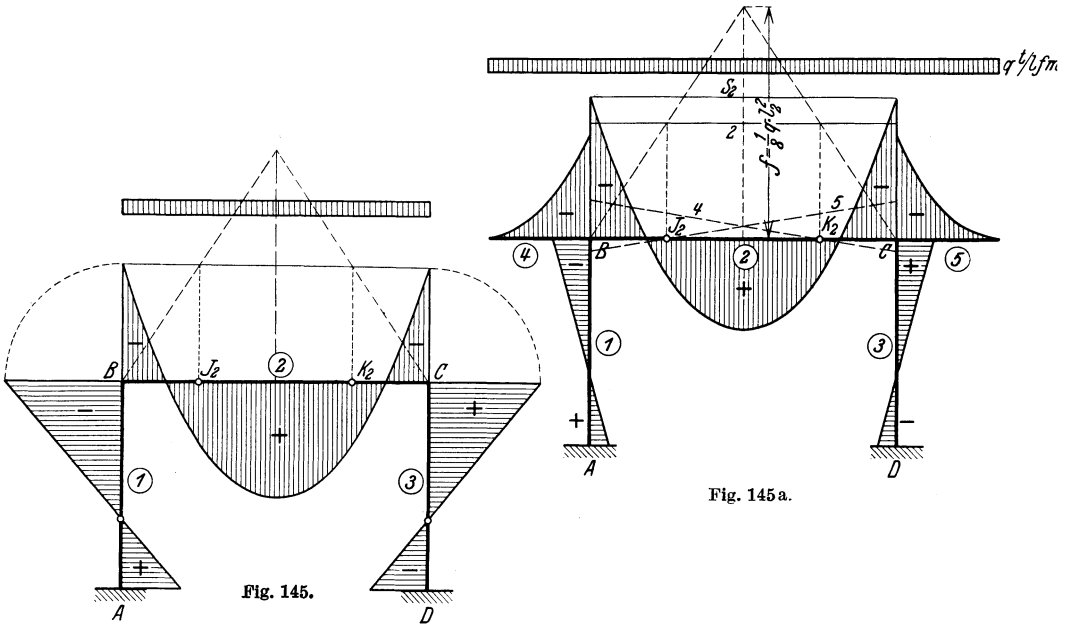


Fig. 144b.

d) Der statisch unbestimmte Balken mit einer Öffnung.

Auch dieser fällt unter den Begriff des durchlaufenden Trägers, und zwar sowohl der einfache Rahmen (Fig. 145 bis 145d) als auch der beidseitig oder einseitig eingespannte Balken (Fig. 145e bis g). In den Fig. 145 bis 145g ist die



Ermittlung der Momentenflächen für diese Fälle dargestellt, welche nach dem vorhergehenden ohne weiteres verständlich ist. Die einfachen Rahmen der Fig. 145 bis 145c sind symmetrisch ausgebildet und symmetrisch belastet, so daß die Säulenköpfe keine Verschiebungen erleiden, weshalb keine Zusatz-

momente (R. II) zu ermitteln sind. Beiläufig sei bemerkt, daß die Konstruktion der Fig. 145b dann gewählt wird, wenn die Resultierende in den Fußgelenken

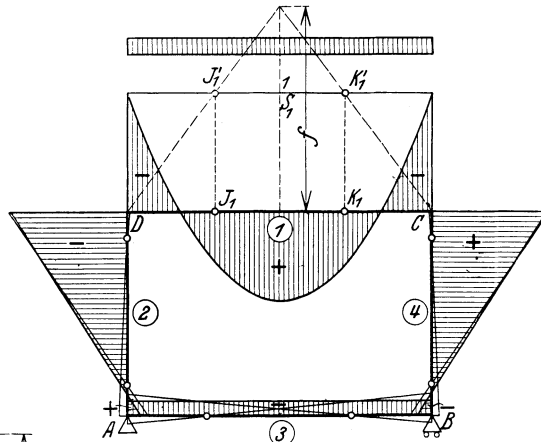


Fig. 145 c.

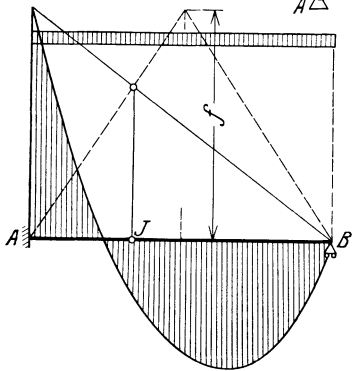


Fig. 145 e.

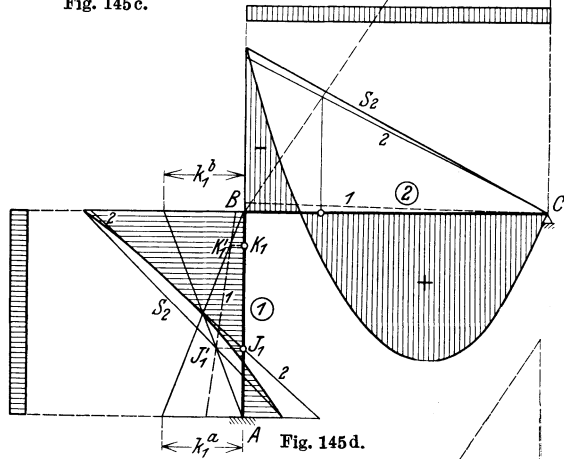


Fig. 145 d.

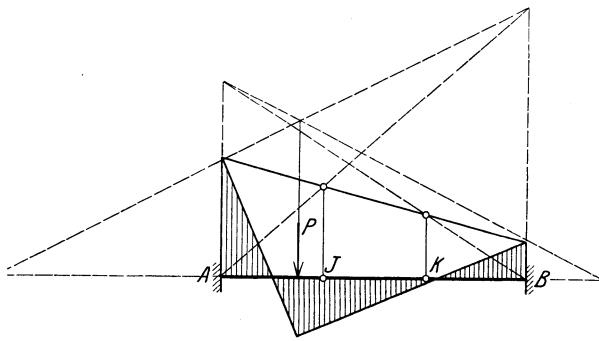


Fig. 145 f.

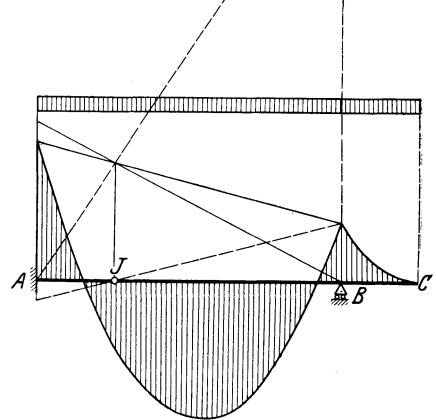


Fig. 145 g.

möglichst senkrecht sein soll (z. B. bei Auflagerung auf Pfählen). Der einhüftige Rahmen der Fig. 145d besitzt am rechten Balkenende ein unbewegliches Lager, so daß die ermittelten Momente ebenfalls die endgültigen sind. Ist ein Träger an einem Ende fest eingespannt (Fig. 145e, f und g), so fällt der anliegende Festpunkt mit der Drittellinie zusammen (vgl. Kap. III, 6, Fall 2), liegt er dagegen an einem Ende frei auf (Fig. 145e und g), so fällt der betreffende Festpunkt in das freie Auflager (vgl. Kap. III, 6, Fall 3).

e) Der frei aufliegende durchlaufende Träger.

Liegt der Balken, wie in Fig. 146 dargestellt, an allen Stützen frei auf, so werden die Kreuzlinienabschnitte genau wie in den vorhergehenden Ab-

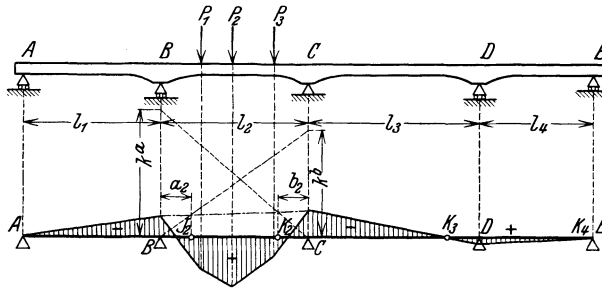


Fig. 146.

schnitten [Gl. (242) und (243)] bestimmt. Nachdem keine biegefest mit dem Balken verbundenen Pfeiler, welche der Verdrehung der Knotenpunkte auch Widerstand entgegensetzen, vorhanden sind, mithin in jedem Knotenpunkt (Auflager) nur ein Stab „anstoßt“ so gibt es keine Verteilungsmaße zu ermitteln, da an jeder Stütze das volle Moment von einem Stab in den einen anstoßenden Stab übergeht. Danach fällt in der Momentenfläche der Sprung an jeder Stütze weg.

Besitzt der durchlaufende Träger, wie in Fig. 146a dargestellt, an einem Ende eine Konsole, auf welcher die gleichmäßig verteilte Last $p/lfdm$ wirkt, so ent-

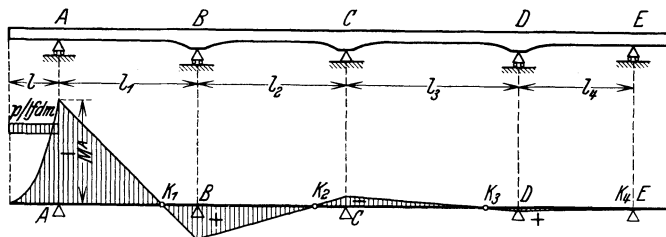


Fig. 146a.

steht längs der Konsole bis zur Stütze A das gewöhnliche statisch bestimmte Konsolmoment, das über der Stütze $A M^A = \frac{pl^2}{2}$ beträgt. Da der Träger an allen Stützen frei aufliegt, so geht jeweils das volle Stützenmoment in die nächste Öffnung über.

5. Grenzwerte der Momente.

Die Grenzwerte der Momente für einen beliebigen Schnitt ergeben sich durch Superposition des Momentes aus ständiger Last und der einzelnen größten positiven, bzw. größten negativen Momentenwerte infolge der vorkommenden veränderlichen Lasten. Zur Bestimmung des größten positiven oder größten negativen Momentes für einen Schnitt infolge einer beweglichen Lastart, muß zuerst dasjenige Belastungsschema gesucht werden, welches die gewünschten extremalen Werte liefert.

a) Gleichmäßig verteilte Last.

Wird der elastisch eingespannte Balken AB (Fig. 147) mit der Last P belastet, so liegen die Nullstellen der Momentenfläche stets je zwischen einem Auflagerpunkt und dem nächstliegenden Festpunkt, und zwar verschiebt sich der eine Momentennullpunkt von A nach J , wenn P von A nach B wandert, während sich gleichzeitig der andere von K nach B bewegt. Es ist dies für variables Trägheitsmoment aus Fig. 122f ersichtlich: Der Kreuzlinienabschnitt links ist nach Gl. (250 a)

$$k^a = -P \cdot s^b.$$

Im einfachen Balken AB (Fig. 147), belastet mit der Einzellast P ist

$$M_0 = P \cdot x \frac{x'}{l}.$$

Liegt P nahe bei B und bewegt sich gegen B , so nähert sich $\frac{x'}{l}$ dem Grenzwerte 1 , während gleichzeitig $s^b = x$ wird (Fig. 122f).

Es wird dann

$$M_0 = P \cdot s^b = -k^a,$$

d. h. die von B ausgehende Kreuzlinie fällt mit der einen Seite der Momentenlinie zusammen, und daher auch der Momentennullpunkt mit dem Festpunkt K . Dies gilt natürlich auch für den Spezialfall des konstanten Trägheitsmomentes auf ganzer Stablänge.

Bei jeder Laststellung von P treten daher innerhalb der Strecke JK nur positive Momente auf. Folglich gibt Totalbelastung für die Balkenstrecke zwischen den Festpunkten die positiven Grenzwerte der Momente.

Ist nur der Einfluß von gleichmäßig verteilter Verkehrslast zu untersuchen, kann man sich daher die Konstruktion der Einflußlinien für die mittlere Strecke JK ersparen.

In den Balkenstrecken zwischen Festpunkten und Auflager hingegen, können bei entsprechender Laststellung sowohl positive, wie negative Momente entstehen. Es ist daher für die Grenzwertbildung Teilbelastung von AB maßgebend. Um die Belastungsscheide S für einen Schnitt C zu finden, müßte diejenige Laststellung S durch Probieren gesucht werden, welche in C ihren Momentennullpunkt hat (Fig. 147a). Liegt C z. B. zwischen K und B , ist die Strecke AS die maßgebende Belastungslänge. Für die Balkenstrecken zwischen Fest-

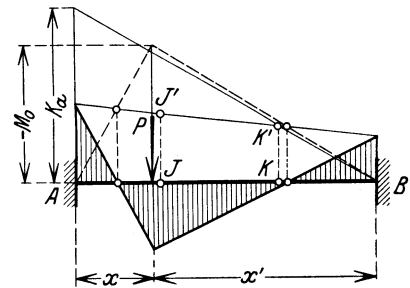


Fig. 147.

punkten und Auflager wird man daher einfacher die Grenzwerte der Momente mittels Einflußlinien bestimmen. Oft wird auch dies umgänglich sein, wenn für die Dimensionierung die Grenzwerte der Momente in der Mitte und über den Stützen genügen.

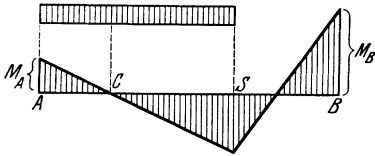


Fig. 147a.

Wie in Fig. 146 ersichtlich, treten bei Belastung einer Öffnung eines durchlaufenden Balkens zwischen den Festpunkten der Anschlußöffnungen abwechselnd negative wie positive Momente auf. Die Anschlußöffnungen müssen daher abwechselnd unbelastet und belastet werden, um auf der Innenstrecke der betrachteten Öffnung die

größten positiven Momente zu erhalten (Fig. 148). Das größte negative Moment tritt stets über einer Stütze auf, und zwar bei Vollbelastung der zwei angrenzenden Öffnungen, sowie Entlastung und Belastung der folgenden Felder (Fig. 148a).

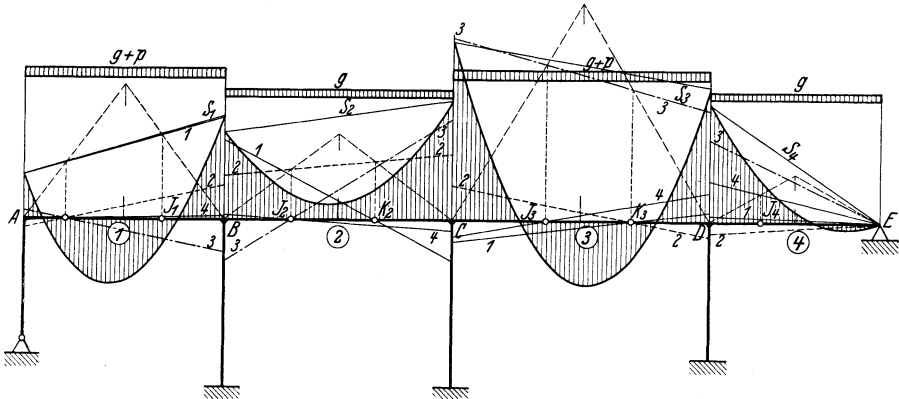


Fig. 148.

größten positiven Momente zu erhalten (Fig. 148). Das größte negative Moment tritt stets über einer Stütze auf, und zwar bei Vollbelastung der zwei angrenzenden Öffnungen, sowie Entlastung und Belastung der folgenden Felder (Fig. 148a).

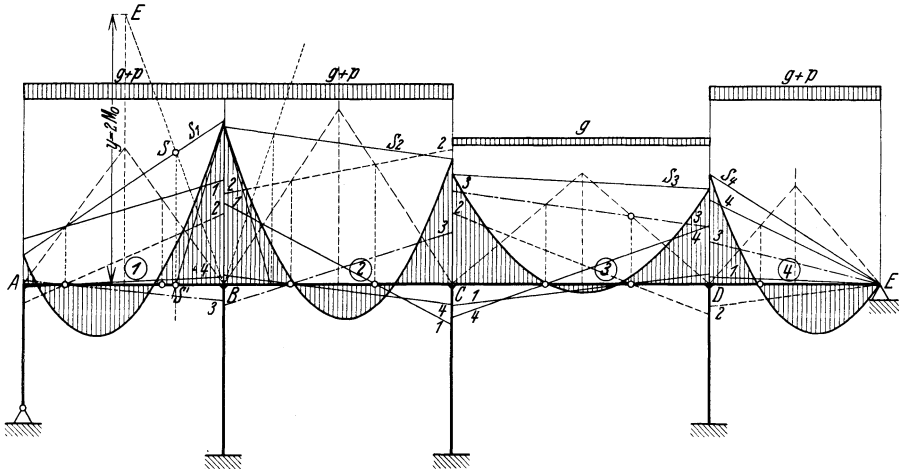


Fig. 148a.

Um die positiven wie negativen Grenzwerte zu erhalten, werden daher der Reihe nach sämtliche Öffnungen mit g resp. $(g + p)$ belastet, und die Stützmomente unter Berücksichtigung eventueller Sprünge infolge elastisch ein-

gespannter Pfeiler weitergeleitet. Die aus einem maßgebenden Belastungsfall herrührenden Schlußlinien werden mit dem Zirkel addiert und von den daraus resultierenden Schlußlinien aus die M_0 -Parabeln der belasteten Öffnungen abgetragen. Jede Momentenfläche, herrührend aus einem bestimmten Belastungsfall, liefert dann ein Stück der positiven und negativen Grenzwertlinien (Fig. 148 b).

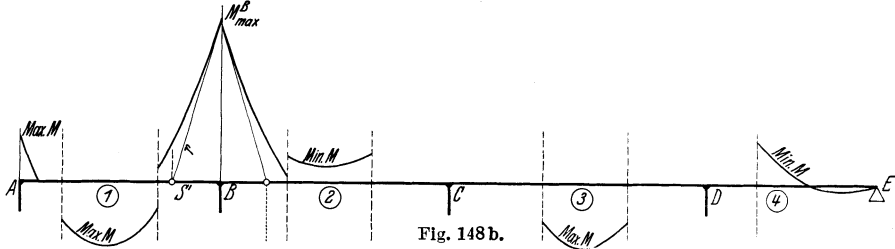


Fig. 148 b.

Der in Fig. 148 aufgezeichnete Belastungsfall liefert die größten positiven Momente zwischen den Festpunkten des 1. und 3. Feldes, und die größten negativen Momente zwischen den Festpunkten des 2. und 4. Feldes. Er gibt ferner das größte negative Moment über der Stütze A, vorausgesetzt, daß horizontal wirkende Lasten nicht vorkommen. Aus dem Belastungsfall der Fig. 148a erhalten wir die größten negativen Momente links und rechts der Stütze B. Die von diesen Belastungsfällen herrührenden Stücke der Grenzwertlinien sind in Fig. 148 b aufgezeichnet.

Über Auflagerpunkten lassen sich leicht die Tangenten an die Min.- M -Linie zeichnen. Verbindet man in Fig. 148a den Endpunkt E der Ordinate $y = 2 M_0$ mit einem Auflagerpunkt, z. B. B, so stellt diese Gerade die Tangente an die nach oben abgetragene M_0 -Parabel dar. Ihr Schnittpunkt mit der zu dem maßgebenden Belastungsfall gehörenden Schlußlinie s ist S . Die Projektion S' von S auf die Balkenachse ist der Schnittpunkt der gesuchten Tangente t mit der Balkenachse (Fig. 148 b).

Bei konstantem Trägheitsmoment über die ganze Stablänge sind die Kreuzlinienabschnitte $k^a = k^b = -2 f$. Dies gilt auch für den Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment, vorausgesetzt, daß er symmetrisch ausgebildet ist. Bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment wird die Belastungsstrecke in einzelne Teile geteilt, und diese wie Einzellasten behandelt.

Für das Tragwerk der Fig. 148 geben die folgenden Belastungsfälle (Fig. 148 c und 148 d) sämtliche Grenzwerte der Momente aller Querschnitte zwischen den Festpunkten eines jeden Feldes.

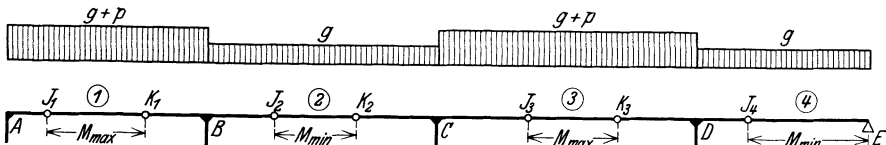


Fig. 148 c.

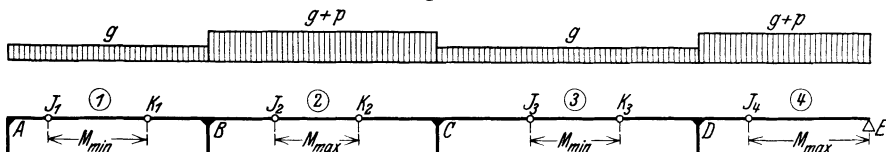


Fig. 148 d.

Für die negativen Grenzwerte der Stützmomente sind die folgenden Belastungsfälle maßgebend (Fig. 148e bis f).

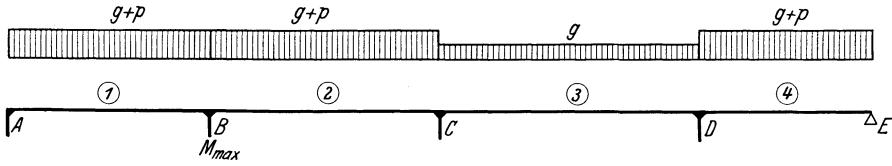


Fig. 148e.

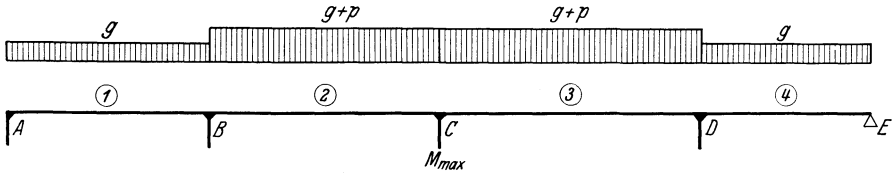


Fig. 148f.

½ Konsolen spielen für die anderen Öffnungen die gleiche Rolle wie Endfelder (Fig. 149).

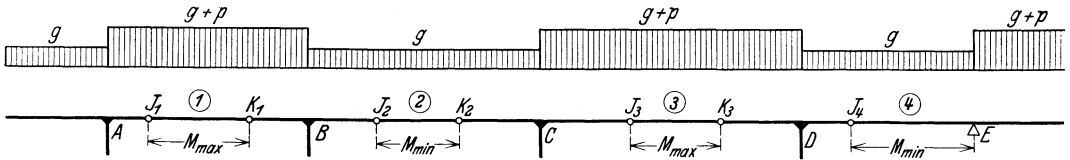


Fig. 149.

Treten noch horizontal wirkende Lasten, z. B. Winddruck auf die seitlichen Stiele auf, sind letztere wie Endfelder zu behandeln (Fig. 150).

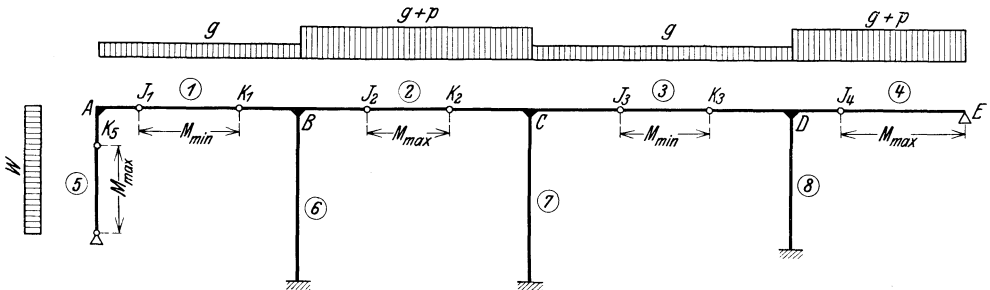


Fig. 150.

b) Bewegliche Einzellasten.

Die größten positiven und negativen Momente infolge beweglicher Einzellasten werden mit Hilfe von Einflußlinien bestimmt.

Belastet man eine Öffnung eines durchlaufenden Balkens mit einer Einzellast $P = 1$, so pflanzen sich die Biegemomente über die andern Öffnungen fort (Fig. 151).

Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt F (Fig. 151), so stellt das Moment M_F die Einflußordinate der gegebenen Laststellung für F dar. Wird also

M_F unter der Last $P = 1$ aufgetragen, und dies für andere Laststellungen wiederholt, erhält man die Einflußlinie des Momentes für Schnitt F (Fig. 151 a),

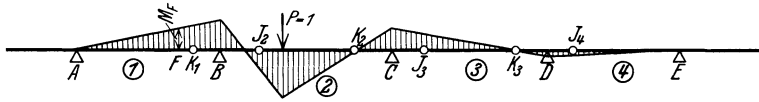


Fig. 151.



Fig. 151 a.

kurz als M_F -Linie bezeichnet. Die Einflußlinien erstrecken sich im allgemeinen über die ganze Balkenlänge. Nur für die Festpunkte J und K fallen sie rechts bzw. links der betrachteten Öffnung weg (Fig. 153 e).

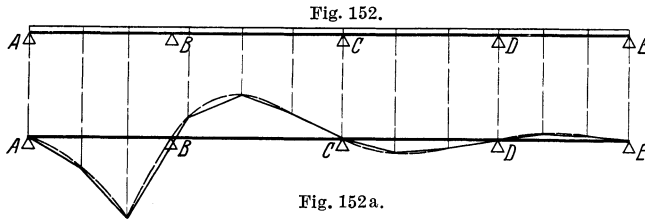


Fig. 152 a.

Die Belastung der linken Konsole ergibt mit Ausnahme der K -Punkte in sämtlichen Schnitten der Balkenfelder Momente. Die Einflußlinien der Momente dieser Schnitte setzen sich daher über die Konsollänge fort (Fig. 151 a). Bei indirekter Belastung sind nur die Einflußordinaten unter den Sekundärträgern zu bestimmen. Die Einflußlinien dazwischen verlaufen geradlinig (Fig. 152 a). Zum Vergleiche ist die entsprechende Einflußlinie bei direkter Belastung punktiert eingezeichnet.

Zur Konstruktion der Einflußlinien braucht man die Kreuzlinienabschnitte für die wandernde Last $P = 1$. Bei konstantem oder von Feld zu Feld sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment werden diese am schnellsten graphisch bestimmt (siehe S. 96). Für Balken mit geraden und parabolischen Vouten liefern die Tabellen im Anhang die Kreuzlinienabschnitte direkt. Bei beliebig veränderlichem Trägheitsmoment (Fig. 153) verwendet man mit Vorteil die Biegelinien des frei aufliegenden Balkens, belastet mit $M = 1$ an einem Ende. Diese liefern nach dem auf S. 92 erläuterten Verfahren die Kreuzlinienabschnitte.

Für den durchlaufenden Balken der Fig. 76, mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment, auf elastisch drehbaren Stützen wird die Konstruktion von Einflußlinien der Momente im folgenden dargestellt (Fig. 153 bis 153 e). Die einzelnen Felder werden durch Schnitte unterteilt. Die Biegelinien der Fig. 153 a und 153 b sind bereits vorhanden von der graphischen Bestimmung der Festpunkte her (Fig. 80 bis 86). Die Konstruktion der Einflußordinaten soll für Schnitt I und II gezeigt werden.

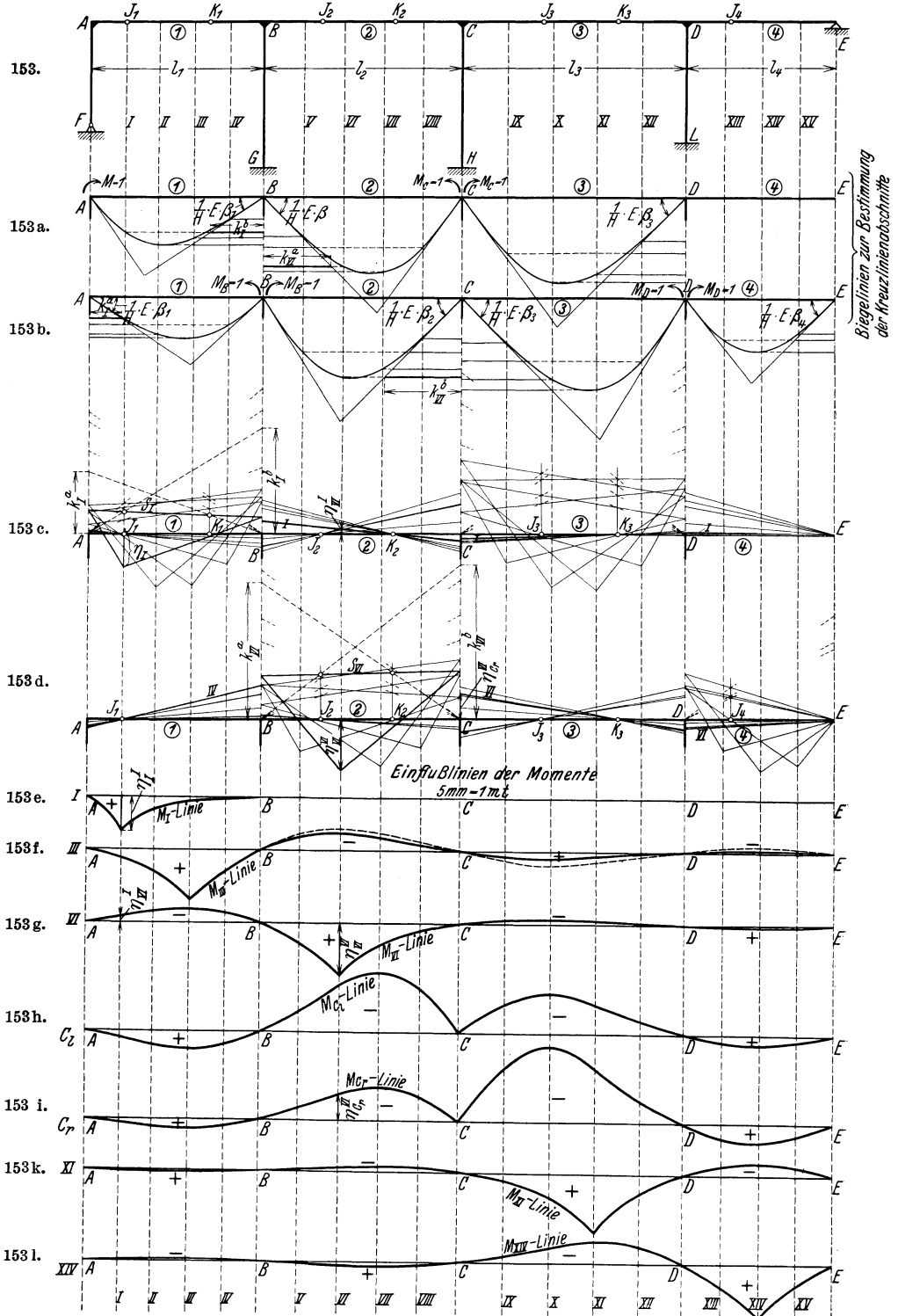


Fig. 153 und 153a-l.

Für die Laststellung $P = 1$ über Schnitt I erhalten wir aus den beiden Biegelinien des einfachen Balkens AB (Fig. 153a und 153b) die Kreuzlinienabschnitte k_I^a und k_I^b . Sie werden in Fig. 153c in demjenigen Maßstabe aufgetragen, in welchem die Momente aufgezeichnet werden sollen. In unserem Falle mußten sie verdoppelt werden. Die Schlußlinie S_I , die wir so erhalten, gibt uns die Stützenmomente M_A und M_B , welche letzteres über die anschließenden Felder weitergeleitet wird. Die so erhaltene Momentenfläche enthält alle Einflußordinaten, η_I für sämtliche Einflußlinien, z. B. η_I^I in I und η_{VI}^I in VI (Fig. 153e).

Für die Laststellung $P = 1$ in VI erhalten wir wieder in Fig. 153a und b die Kreuzlinienabschnitte k_{VI}^a und k_{VI}^b . Diese, im Maßstab der Momentenfläche in Fig. 153d aufgetragen, ergeben die Schlußlinie S_{VI} und damit die Momentenverteilung über das ganze Tragwerk. So erhalten wir sämtliche Einflußordinaten η_{VI} , die unter Schnitt VI aufgetragen sind.

Auf gleiche Weise werden die Einflußordinaten für die anderen Schnitte bestimmt.

Zu erwähnen ist noch, daß beim durchlaufenden Rahmen zwei Einflußlinien für Stützenmomente am selben Stützpunkt vorkommen (Fig. 153h und 153i).

Die Einflußlinien der Momente für den durchlaufenden Balken auf frei drehbaren Stützen verlaufen im wesentlichen wie diejenigen des kontinuierlichen Balkens auf elastisch drehbaren Stützen. Nur ist bei diesen der Übergang über den Stützen stetig, d. h. zwei benachbarte Öffnungen haben im gemeinsamen Auflagerpunkt die gleiche Tangente der Kurven, da das volle Stützenmoment in die nächste Öffnung übergeht. In Fig. 153f ist vergleichsweise eine solche Einflußlinie, bei Annahme gleicher Festpunktabstände punktiert eingezeichnet.

Hat der durchlaufende Balken kein festes Auflager, sind die unter Annahme eines horizontal unverschieblichen Balkens aufgezeichneten Einflußlinien noch nicht die endgültigen. Es muß vielmehr noch der Einfluß der Verschiebungskraft berücksichtigt werden. Die Konstruktion dieser Einflußlinien ist im 2. Teil, Kap. VIII, behandelt.

Die Pfeiler eines durchlaufenden Rahmens sind auf Biegung mit Axialdruck zu dimensionieren. Um diejenige Kombination von Moment und Normalkraft zu finden, die die größten Randspannungen ergibt, verwendet man Einflußlinien für die Kernpunktsmomente der Pfeiler.

Für jeden Pfeilerquerschnitt ist (Fig. 154l)

$$M_{K_r} = M + N \cdot k_r$$

$$M_{K_l} = M - N \cdot k_l$$

Die Einflußordinaten für M_k ergeben sich daher aus der Summation der Einflußordinaten der Momente und der k -fachen Einflußordinaten der Normalkräfte.

Für den durchlaufenden Balken der Fig. 78 sind die Einflußlinien der Kernpunktsmomente für die Pfeiler 5 und 7 (beim Voutenanfang) in Fig. 154 aufgezeichnet.

Die Einflußlinien für N müssen vorerst als bekannt vorausgesetzt werden (siehe S. 143). Die $N \cdot k$ -Linie erhalten wir nun mittels der Reduktionsfiguren (154k) aus der N -Linie.

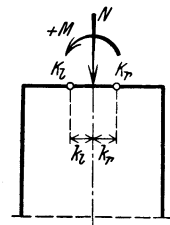


Fig. 154l.

Momentenmaßstab: 5mm = 1m.t

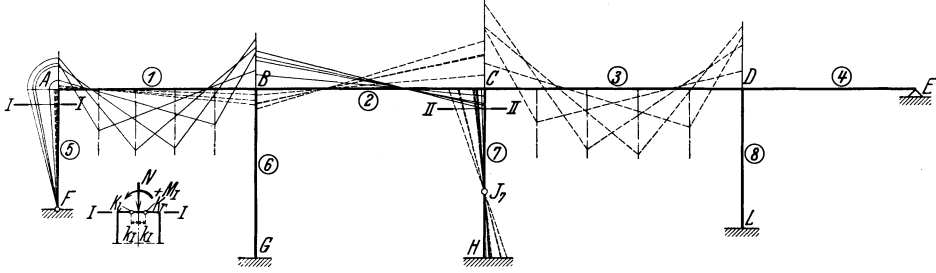


Fig. 154.

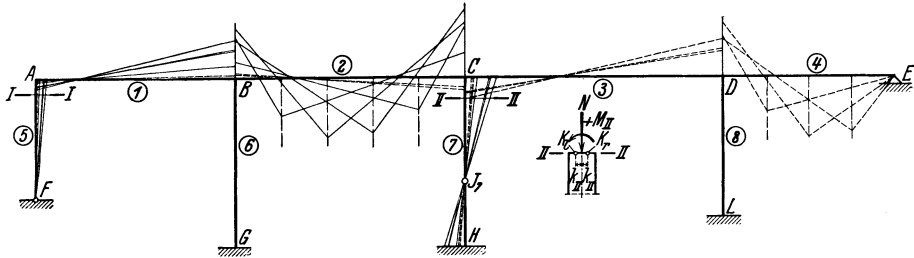


Fig. 154 a.

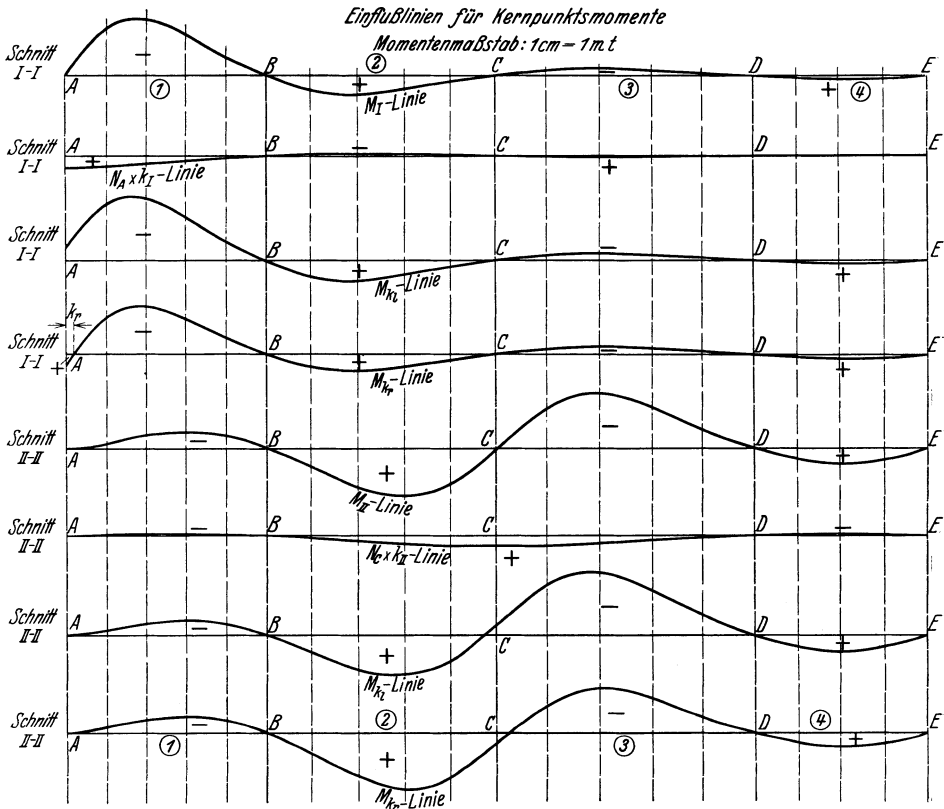


Fig. 154 b-i.

Man trägt (Fig. 154m) den Wert

$$n = \frac{\text{Einheitslänge der Kräfte}}{\text{Einheitslänge der Momente}}$$

im Längenmaßstab auf. Längt man nun auf der Vertikalen in A im Kräftemaßstab N ab, und verbindet den Endpunkt mit B , so schneidet diese Gerade den gesuchten Wert $N \cdot k$ (im Momentenmaßstab) auf der Vertikalen im Kernpunktsabstand k ab.

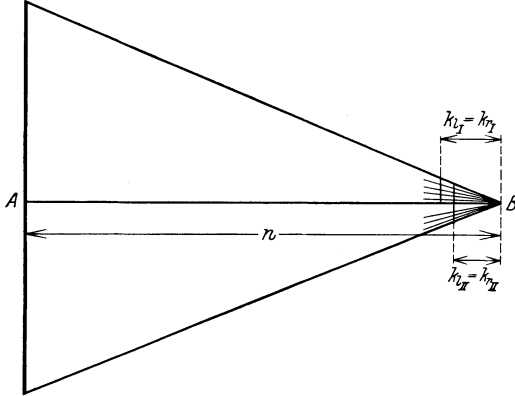


Fig. 154k.

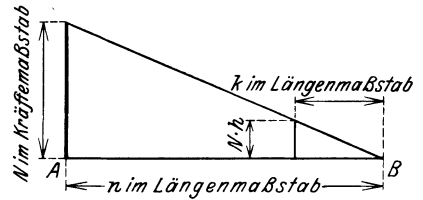


Fig. 154m.

6. Analytische Bestimmung der an einem Knotenpunkt angreifenden Momente infolge beliebiger Belastung des Tragwerks.

Es ist oft wünschenswert, die an einem Knotenpunkt wirkenden Momente, welche auf Grund der Kreuzlinienabschnitte des belasteten Stabes gefunden

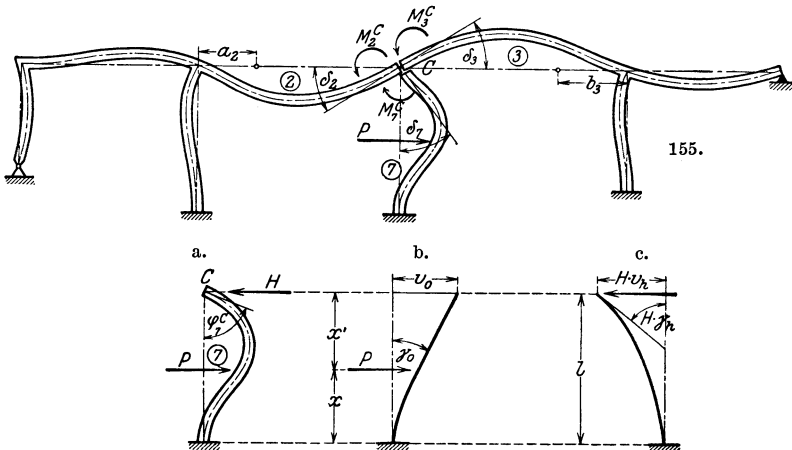


Fig. 155—155c.

wurden, auf einem anderen Weg zu prüfen, und wir erläutern deshalb im folgenden die Bestimmung dieser Momente ohne Zuhilfenahme der Kreuzlinienabschnitte am belasteten Stab.

Am Tragwerk der Fig. 88

seien die Momente M_2^G , M_3^G und M_7^G zu bestimmen, welche durch die Belastung des Stabes 7, schematisch mit P angenommen, hervorgerufen werden.

Bei dieser Belastung erleidet das Tragwerk die in Fig. 155 dargestellte Formänderung und die Winkel δ_2 , δ_3 und δ_7 müssen einander gleich sein, weil die Stäbe in jedem Knotenpunkt biegungsfest miteinander verbunden sind; also muß sein:

$$\delta_7 = \delta_2 \quad \text{und} \quad \delta_7 = \delta_3. \quad (301)$$

Diese Winkel sind nun durch die gesuchten Momente M_2^G , M_3^G und M_7^G auszudrücken. Wir haben zu diesem Zweck je einen Schnitt in den Querschnitten C_2 , C_3 und C_7 unmittelbar links, rechts und unterhalb des Knotenpunktes C geführt, die abgeschnittenen Enden der Stäbe 2, 3 und 7 in je einem festen Gelenk gestützt, von welchem die in dem Schnitt wirkende Quer- und Normalkraft aufgenommen wird, und an diesen Stellen die Stützenmomente M_2^G , M_3^G und M_7^G der drei durchgeschnittenen Stäbe angebracht, welche so groß sein müssen, daß die Schnittflächen wieder aufeinander passen wie vor der Schnittführung; dann haben wir an dem Spannungszustand des Tragwerks nichts geändert.

Am Querschnitt C_7 (Pfeilerkopf) entsteht von der äußeren Kraft P allein ein Drehwinkel φ_7^G (Fig. 155a) und von dem Moment M_7^G (Fig. 155) ein Drehwinkel $M_7^G \cdot \tau_7^G$, wenn τ_7^G der Drehwinkel des Querschnittes C_7 infolge $M_7^G = 1$ am unten eingespannten, oben gelenkartig gestützten Stab 7 bedeutet; es ist deshalb:

$$\delta_7 = \varphi_7^G - M_7^G \cdot \tau_7^G.$$

Am Querschnitt C_2 (Fig. 155) entsteht durch das Moment M_2^G der Drehwinkel

$$\delta_2 = M_2^G \cdot \tau_2^G$$

und am Querschnitt C_3 (Fig. 155) durch das Moment M_3^G der Drehwinkel

$$\delta_3 = M_3^G \cdot \tau_3^G,$$

wenn τ_2^G bzw. τ_3^G den Drehwinkel infolge $M_2^G = 1$ bzw. $M_3^G = 1$ im Querschnitt C_2 bzw. C_3 bedeutet.

Diese Werte von δ_2 , δ_3 und δ_7 in die Gl. (301) eingesetzt gibt:

$$\varphi_7^G - M_7^G \cdot \tau_7^G = M_2^G \cdot \tau_2^G, \quad (302)$$

$$\varphi_7^G - M_7^G \cdot \tau_7^G = M_3^G \cdot \tau_3^G. \quad (303)$$

Am herausgetrennten Knotenpunkt C (Fig. 88b) müssen wir die Momente M_7^G , M_2^G und M_3^G mit entgegengesetztem Drehsinn anbringen wie in Fig. 155 an den Querschnitten C_7 , C_2 und C_3 ; aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ folgt dann:

$$M_7^G = M_2^G + M_3^G \text{ (absolute Werte)}. \quad (304)$$

Setzen wir in den Gl. (302) und (303) diesen Wert von M_7^G ein, so erhalten wir:

$$M_2^G \cdot (\tau_7^G + \tau_2^G) + M_3^G \cdot \tau_7^G = \varphi_7^G, \quad (305)$$

$$M_2^G \cdot \tau_7^G + M_3^G (\tau_7^G + \tau_3^G) = \varphi_7^G. \quad (306)$$

Aus Gl. (306) ist

$$M_3^C = \frac{\varphi_7^C - M_2^C \cdot \tau_7^C}{\tau_7^C + \tau_3^C},$$

in Gl. (305) eingesetzt gibt

$$M_2^C (\tau_7^C + \tau_2^C) + \frac{\tau_7^C \cdot \varphi_7^C}{\tau_7^C + \tau_3^C} - \frac{M_2^C \cdot (\tau_7^C)^2}{\tau_7^C + \tau_3^C} = \varphi_7^C$$

oder

$$M_2^C \left(\tau_7^C + \tau_2^C - \frac{(\tau_7^C)^2}{\tau_7^C + \tau_3^C} \right) = \varphi_7^C \left(1 - \frac{\tau_7^C}{\tau_7^C + \tau_3^C} \right),$$

woraus folgt

$$M_2^C = \frac{\varphi_7^C \cdot \tau_3^C}{(\tau_7^C + \tau_2^C)(\tau_7^C + \tau_3^C) - (\tau_7^C)^2}$$

oder

$$M_2^C = + \frac{[\varphi_7^C]}{\tau_2^C + \tau_7^C + \frac{\tau_2^C \cdot \tau_7^C}{\tau_3^C}}. \quad (307)$$

Analog erhalten wir

$$M_3^C = - \frac{[\varphi_7^C]}{\tau_3^C + \tau_7^C + \frac{\tau_3^C \cdot \tau_7^C}{\tau_2^C}} \quad (308)$$

und aus der Gleichgewichtsbedingung am Knotenpunkt Gl. (304) ist

$$M_7^C = [M_3^C] - [M_2^C]. \quad (309)$$

In den vorstehenden Hauptformeln (307) und (308) ist der (in Klammern gesetzte) von der gegebenen Belastung P abhängige Drehwinkel φ mit seinem Vorzeichen einzuführen, während die nur von den Abmessungen der Konstruktion abhängigen Drehwinkel τ mit ihrem absoluten Werte einzusetzen sind; die Vorzeichen der beiden Momente wurden aus der Anschauung (Fig. 155) bestimmt. In den Klammern der rechten Seite von Gl. (309) sind die beiden Momente mit ihren aus den Formeln (307) und (308) hervorgehenden Vorzeichen einzuführen.

Die in den Hauptformeln (307) und (308) vorkommenden Drehwinkel τ werden nach Kap. II, 5 ermittelt.

Zur Bestimmung des Drehwinkels φ (Fig. 155a) denken wir uns das Gelenklager im Querschnitt C_7 entfernt und an dessen Stelle den von ihm auf das obere Stabende (Pfeilerkopf) ausgeübten waagrechten Auflagerdruck H eingeführt. Am unten eingespannten, frei auskragenden Stab 7 lassen wir nun nacheinander die äußere Belastung P (Fig. 155b) und die waagrechte Kraft H (Fig. 155c) angreifen; hierbei werde am oberen Stabende durch P die Verschiebung v_0 und der Drehwinkel γ_0 hervorgerufen, während durch die Kraft H die Verschiebung $H \cdot v_h$ und der Drehwinkel $H \cdot \gamma_h$ erzeugt wird,

wenn v_h und γ_h die Verschiebung und der Drehwinkel des Pfeilerkopfes infolge $H = 1$ bedeutet. H bestimmen wir aus der Bedingung, daß die durch diese Kraft hervorgerufene Verschiebung $H \cdot v_h$ des Pfeilerkopfes die Verschiebung v_0 der äußeren Belastung P rückgängig machen muß; d. h. es muß sein

$$H \cdot v_h + [v_0] = 0,$$

woraus:

$$H = - \frac{[v_0]}{v_h}. \quad (310)$$

Der gesuchte Drehwinkel φ setzt sich jetzt nach den Fig. 155b und 155c wie folgt zusammen:

$$\varphi = H \cdot \gamma_h + [\gamma_0],$$

hierin H aus Gl. (310) eingesetzt gibt:

$$\varphi = [\gamma_0] - [v_0] \cdot \frac{\gamma_h}{v_h}. \quad (311)$$

Diese Gleichung ergibt stets das richtige Vorzeichen von φ , wenn wir darin v_0 und γ_0 mit ihrem Vorzeichen, v_h und γ_h jedoch mit ihrem absoluten Werte einsetzen. Diese Verschiebungen und Drehwinkel ermitteln wir nach den Mohrschen Sätzen III und IV. Es ist bei durchweg konstantem Trägheitsmoment an einem unten fest eingespannten Stabe:

$$\gamma_h = \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot J}, \quad (312)$$

$$v_h = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot J} \quad (313)$$

und z. B. für eine Einzellast P im Abstand z vom unteren und z' vom oberen Stabende:

$$\gamma_0 = \frac{P \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot J}, \quad (314)$$

$$v_0 = \frac{P \cdot z^2(2z + 3z')}{6 \cdot E \cdot J}. \quad (315)$$

Man erkennt, daß man bei diesem Verfahren den dem Knotenpunkt mit den gesuchten Momenten benachbarten Festpunktabstand nicht braucht. Auf demselben Wege könnten wir auch bei Balkenbelastung (Fig. 87) z. B. die Momente M_3^C , M_7^C und M_2^C bestimmen.

Hat der Stab 7 (Pfeiler) ein Fußgelenk, so gelten dieselben Hauptformeln (307) und (308), nur haben dann die darin vorkommenden Drehwinkel τ und φ andere, durch die gelenkartige Lagerung am unteren Stabende bedingte Werte. Der Drehwinkel φ ergibt sich dann durch Belasten eines einfachen Balkens auf 2 Stützen mit den gegebenen äußeren Lasten.

Es seien ferner:

Am Tragwerk der Fig. 122

die Momente M_1^B , M_5^B , M_7^B und M_6^B , hervorgerufen durch die Lasten P_1 und P_2' am Stab 6, zu bestimmen.

Bei dieser Belastung erleidet das Tragwerk die in Fig. 156 dargestellte Formänderung und die Winkel δ_6 und δ_{1-5-7} müssen einander gleich sein, d. h.

$$\delta_6 = \delta_1 = \delta_5 = \delta_7. \quad (316)$$

Diese Winkel sind nun zu bestimmen.

Wir haben zu diesem Zweck den belasteten Stab 6 im Querschnitt B_6 (unmittelbar rechts von B) durchgeschnitten und das abgeschnittene linke Ende dieses Stabes durch ein festes Auflager gestützt, von welchem die in dem

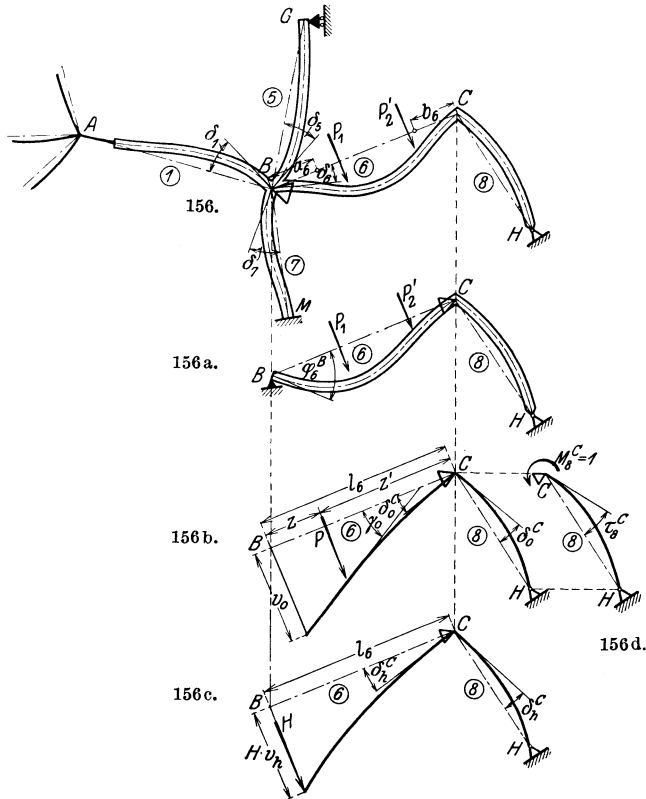


Fig. 156—156d.

Schnitt wirkende Quer- und Normalkraft aufgenommen wird; wir müssen dann, um den Spannungszustand nicht zu ändern, im Schnitt B_6 des belasteten Stabes das Moment M_6^B und am entsprechenden Schnitt B_6 der übrigen Konstruktion das gleiche, aber entgegengesetzt drehende Moment M_6^B anbringen (Fig. 156).

Am Querschnitt B_6 entsteht nun von der äußeren Last P allein ein Drehwinkel φ_6^B (Fig. 156a) und von dem Moment M_6^B (Fig. 156) ein Drehwinkel $M_6^B \cdot \tau_6^B$, wenn τ_6^B der Drehwinkel des Querschnittes B_6 infolge $M_6^B = 1$ am einen (rechten) Ende des elastisch eingespannten, am anderen (linken) Ende gelenkartig gestützten Stab 6 bedeutet; es ist deshalb

$$\delta_6 = \varphi_6^B - M_6^B - \tau_6^B.$$

Am Querschnitt B_6 (Fig. 156) des abgeschnittenen Stabwerkes links entsteht durch das Moment M_6^B der Drehwinkel

$$\delta_1 = \delta_5 = \delta_7 = M_6^B \cdot \tau_{1-5-7}^B,$$

wenn τ_{1-5-7}^B nach Fig. 61 der gemeinsame Drehwinkel der biegungsfest miteinander verbundenen Stäbe 1, 5 und 7 bedeutet.

Diese Werte der Drehwinkel δ in Gl. (316) eingesetzt gibt:

$$\varphi_6^B - M_6^B \cdot \tau_6^B = M_6^B \cdot \tau_{1-5-7}^B, \quad (317)$$

woraus die Hauptformel folgt:

$$M_6^B = - \frac{[\varphi_6^B]}{\tau_6^B + \tau_{1-5-7}^B}. \quad (318)$$

Die Momente M_1^B , M_5^B und M_7^B erhalten wir nun nach Kap. II, 4, Gl. (13) bis (15) zu:

$$M_1^B = M_6^B \cdot \mu_{6-1}^B = M_6^B \cdot \frac{\tau_{1-5-7}^B}{\tau_1^B}, \quad (319)$$

$$M_5^B = M_6^B \cdot \mu_{6-5}^B = M_6^B \cdot \frac{\tau_{1-5-7}^B}{\tau_5^B}, \quad (320)$$

$$M_7^B = M_6^B \cdot \mu_{6-7}^B = M_6^B \cdot \frac{\tau_{1-5-7}^B}{\tau_7^B}. \quad (321)$$

In Gl. (318) ist der in Klammern gesetzte, von der gegebenen Belastung P abhängige Drehwinkel φ_6^B mit seinem Vorzeichen, während die nur von den Abmessungen der Konstruktion abhängigen Drehwinkel τ mit ihrem Absolutwert einzusetzen sind. Das Vorzeichen des Momentes M_6^B wurde aus der Anschauung (Fig. 156) bestimmt.

Die Drehwinkel τ werden nach Kap. II, 4 u. 5 ermittelt. Für den Drehwinkel φ gilt auch in diesem Falle Gl. (311), es haben jedoch die in derselben vorkommenden Größen γ_0 , v_0 (Fig. 156 b), γ_h und v_h (Fig. 156 c) andere, durch die elastische (statt feste) Einspannung in C bedingte Werte; es ist z. B. bei durchweg konstantem Trägheitsmoment des Stabes 6:

$$\gamma_h = \frac{l_6^3}{2 \cdot E \cdot J} + l_6 \cdot \tau_8^C, \quad (322)$$

$$v_h = \frac{l_6^3}{3 \cdot E \cdot J} + l_6^2 \cdot \tau_8^C, \quad (323)$$

(Fig. 156 c) und z. B. für eine Einzellast P im Abstand z vom linken und z' vom rechten Ende des Stabes 6:

$$\gamma_0 = \frac{P \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot J} + P \cdot z \cdot \tau_8^C, \quad (324)$$

$$v_0 = \frac{P \cdot z^2 (2z + 3z')}{6 \cdot E \cdot J} + P \cdot z \cdot l_6 \cdot \tau_8^C, \quad (325)$$

wo τ_8^C aus Fig. 156 d hervorgeht.

Die Hauptformel (318) gilt ganz allgemein, sie könnte deshalb auch am Tragwerk der Fig. 88, wo in jedem Knotenpunkt höchstens 2 Stäbe „anstoßen“,

angewendet werden. In diesem Falle (Fig. 155) würden wir zunächst das Moment M_7^G erhalten und die Momente M_2^G und M_3^G darauf mit Hilfe der betreffenden Verteilungsmaße ermitteln.

7. Schlußfolgerungen.

a) Das entwickelte Verfahren zur Bestimmung der Momente ist am festgehaltenen Tragwerk genau dasselbe sowohl am Balken als auch am Pfeiler, sowohl am waagrechten als auch am schiefen Stab.

b) Sind mehrere Stäbe eines Tragwerkes belastet, so bestimmt man die Momentenfläche am ganzen Tragwerk für die Belastung eines jeden Stabes getrennt voneinander und addiert darauf die Momentenordinaten unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens.

c) Am festgehaltenen durchlaufenden Balken auf elastisch drehbaren Pfeilern bilden die Schlußlinien der Momentenflächen in den einzelnen Öffnungen nicht mehr, wie beim durchlaufenden Balken mit freier Auflagerung einen geschlossenen Linienzug, sondern das Moment ändert sich sprunghaft an den Stützen.

d) Ist am festgehaltenen, durchlaufenden Balken mit elastisch drehbaren Pfeilern nur eine Balkenöffnung belastet, so ist in allen links von dieser Öffnung gelegenen J -Punkten und in allen rechts davon liegenden K -Punkten das Moment gleich Null. Von der belasteten Öffnung ausgehend, nehmen die Stützenmomente nach den beiden Balkenenden hin ihrem absoluten Werte nach ab. Die beiden Stützenmomente der belasteten Öffnung haben gleiches, und die beiden Stützenmomente jeder anderen Öffnung (Balken und Pfeiler) entgegengesetztes Vorzeichen.

e) Am durchlaufenden Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe bewirkt eine Querschnittszunahme gegen die Auflager eines Stabes eine Entlastung seiner Feldmitte; man wird deshalb besonders bei beschränkter Konstruktionshöhe den Querschnitt gegen die Auflager hin gegebenenfalls stark anwachsen lassen.

f) Am durchlaufenden Balken in biegungsfester Verbindung mit den Pfeilern entlasten die Pfeiler den Balken in Feldmitte; deshalb wird man die Pfeiler besonders dann sehr stark machen, wenn für den Balken nur eine beschränkte Konstruktionshöhe zur Verfügung steht. Ist jedoch genügend Konstruktionshöhe vorhanden, so gibt man den Pfeilern aus wirtschaftlichen Gründen ein möglichst kleines Trägheitsmoment, damit nur geringe Momente auf sie entfallen; denn, je größer die Steifigkeit eines Stabes, desto größer ist seine Aufnahmefähigkeit für Biegemomente, und die Steifigkeit eines Stabes wird größer mit wachsendem Trägheitsmoment und abnehmender Länge.

VI. Bestimmung der Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte an einem beliebigen Tragwerk.

An einem biegungsfesten Stabwerk bestimmen wir die Quer- und Normalkräfte rückwärts aus den vorher ermittelten Biegemomenten. Aus diesem Grunde bestimmen wir die Quer- und Normalkräfte auf dieselbe Weise sowohl

an einem Tragwerk mit einem festen Lager (evtl. vorübergehend gedacht), wodurch seine Knotenpunkte unverschiebbar werden, als auch an einem Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten, es muß nur die richtige Momentenfläche zugrunde gelegt werden, d. h. falls das Tragwerk nicht gemäß seiner Ausbildung unverschiebbare Knotenpunkte besitzt, wie z. B. dasjenige der Fig. 158, so müssen zu der nach dem vorhergehenden Kapitel für vorübergehend unverschiebbar gedachte Knotenpunkte ermittelten Momentenfläche noch die Zusatzmomente, herrührend von der wirklichen Verschiebung der Knotenpunkte, hinzugefügt werden. Wir könnten natürlich auch zuerst die Querkräfte für den festgehaltenen Zustand, d. h. auf Grund der Momentenfläche des Rechnungsabschnittes I, dann noch die Zusatzquerkräfte auf Grund der Zusatzmomentenfläche des Rechnungsabschnittes II ermitteln und zum Schluß beide addieren.

1. Querkräfte.

Die Querkraft ist die Resultierende sämtlicher Kräfte (Belastungen und Reaktionen) links von dem betrachteten Stabquerschnitt, und sie wirkt senkrecht zur Stabachse. Am Balken auf 2 Stützen sind die Querkräfte an den Auflagern aus der Gleichgewichtsbedingung ohne weiteres bekannt. Bei statisch unbestimmten Tragwerken reicht jedoch die Gleichgewichtsbedingung zur Bestimmung der Querkräfte an den Stabenden nicht aus, sondern wir erhalten dieselben erst nach Bestimmung der Momentenflächen des betrachteten Stabes.

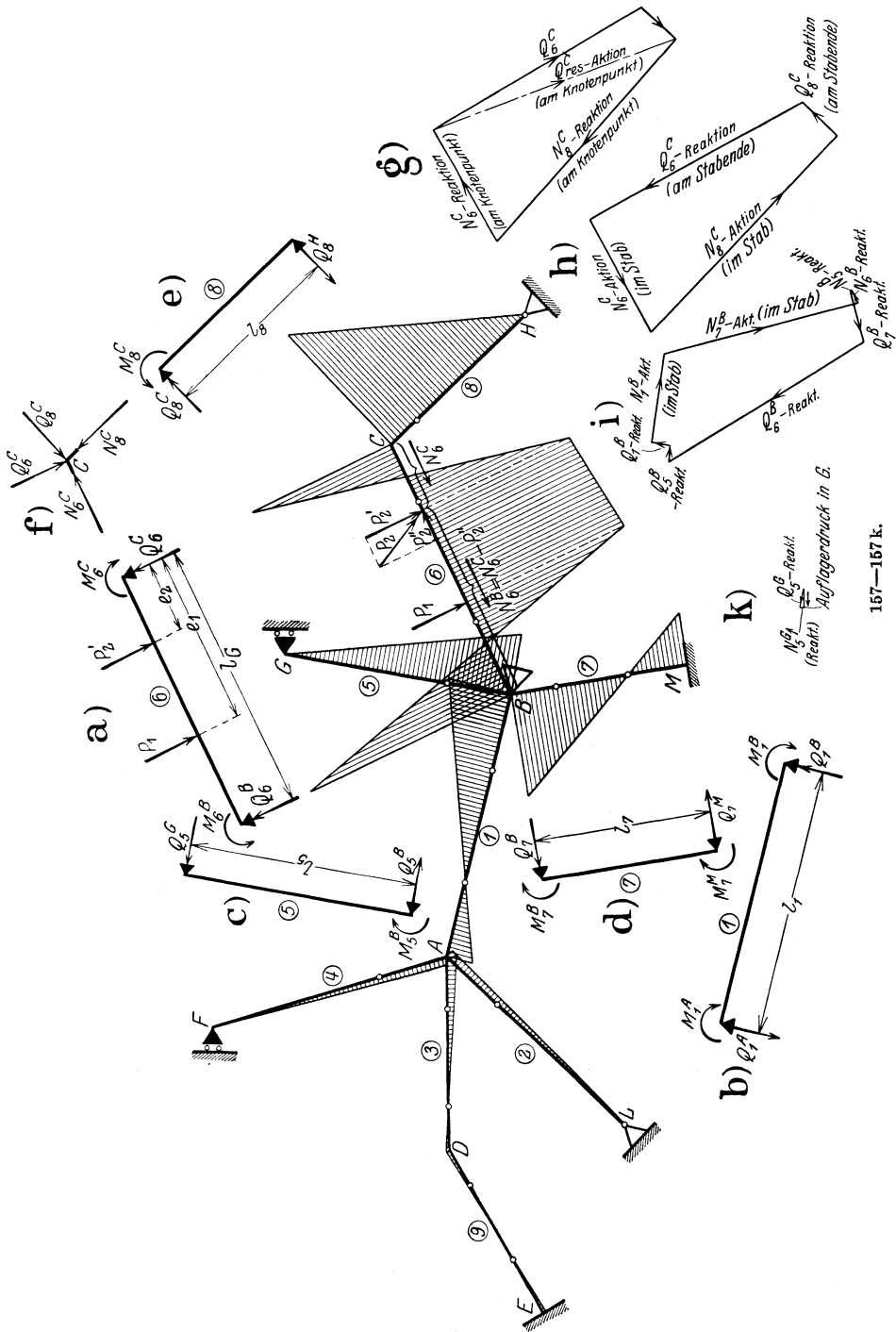
Nachdem die Momentenfläche am ganzen Tragwerk ermittelt wurde, denken wir uns jeden Stab des Tragwerkes an seinen beiden Enden herausgeschnitten, stützen ihn daselbst in je einem freien Auflager und belasten ihn mit den in den Schnittstellen wirkenden Momenten, d. h. mit den beiden Stützenmomenten des betreffenden Stabes, und zwar mit solchem Drehsinn, daß der Spannungszustand des Stabes unverändert bleibt. Dann erhalten wir die Querkräfte an den Enden jedes Stabes als seine normalen Auflagerdrücke, wenn wir einen belasteten Stab mit der gegebenen Belastung und den bekannten Stützenmomenten und einen unbelasteten Stab nur mit den beiden Stützenmomenten belasten. Nach Ermittlung der beiden Querkräfte an den Enden eines jeden Stabes bestimmen wir die Querkräfte in allen Schnitten bzw. die Querkraftsfläche an allen Stäben eines statisch unbestimmten Tragwerkes genau wie am einfachen Balken als Resultante sämtlicher Kräfte links vom Schnitt.

Die Querkräfte berechnen sich wie folgt:

a) Analytisch.

Wir betrachten das in Fig. 157 dargestellte allgemeine Tragwerk, mit der aus dieser Figur ersichtlichen bekannten Momentenfläche (in vorliegendem Falle für das in B gestützte Tragwerk) am ganzen Tragwerk.

Wir denken uns alle Stäbe durch an ihren beiden Enden geführte Schnitte aus dem Tragwerk herausgetrennt, wie einfache Balken auf 2 Stützen gelagert



und mit den gegebenen äußeren Kräften sowie mit den Stützenmomenten bzw. Einspannmomenten belastet. In den Fig. 157a bis d wurden z. B. die Stäbe 1, 5, 6 und 7 in herausgetrenntem Zustande dargestellt. Der einfache Balken AB (Fig. 157b) ist mit den beiden rechtsdrehenden Stützenmomenten M_1^A und M_1^B zu belasten, der einfache Balken BG (Fig. 157c) mit den beiden rechtsdrehenden Stützenmomenten M_5^B und M_5^G , und der einfache Balken BM (Fig. 157d) mit den rechtsdrehenden Stützenmomenten M_7^B und M_7^M . Der einfache Balken BC (Fig. 157a) ist mit den gegebenen äußeren Kräften P_1 und P_2 sowie mit den entgegengesetzt drehenden Stützenmomenten M_6^B und M_6^C zu belasten; die schief zur Stabachse wirkende Kraft P_2 wurde bei der Konstruktion der Momentenfläche (Kap. V) in die Komponente P_2' rechtwinklig zum Stab und in die Komponente P_2'' in Richtung des Stabes zerlegt, welche letztere daher in der Stabachse wirkt und in Richtung des Stabes auf dessen Endpunkte übertragen wird.

Nun sind die normalen Auflagerdrücke an diesen so belastet gedachten einfachen Balken gleich den Querkräften an den Enden der betreffenden Stäbe, es ist also z. B., wenn \mathfrak{Q} den Auflagerdruck an den gedachten einfachen Balken infolge der äußeren Lasten allein bedeutet:

$$Q_6^B = \mathfrak{Q}_6^B + \frac{M_6^B - M_6^C}{l_6}, \quad (326)$$

worin

$$\mathfrak{Q}_6^B = \frac{P_1 \cdot e_1 + P_2' \cdot e_2}{l_6},$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1^B &= \frac{M_1^A + M_1^B}{l_1} \\ Q_5^B &= \frac{M_5^B}{l_5} \\ Q_7^B &= \frac{M_7^B + M_7^M}{l_5} \end{aligned} \right\} \quad (327)$$

(da in vorliegendem Falle $\mathfrak{Q}_6^B, \mathfrak{Q}_5^B, \mathfrak{Q}_7^B$ gleich Null, ferner $M_5^G = 0$).

Eine Querkraft mit positivem Vorzeichen ist an einem liegenden Stab nach oben, an einem stehenden nach rechts gerichtet und hat das Bestreben, den Querschnitt, in welchem die Querkraft angreift, von dem unmittelbar rechts bzw. oberhalb benachbarten Querschnitt abzuscheren.

Wünschen wir die Querkräfte direkt mit ihren Vorzeichen zu erhalten, wenn wir die Momente ebenfalls mit ihren Vorzeichen einsetzen, so gelten bei unbelastetem Stab AB die Formeln:

Für einen „liegenden“ Stab (Balken):

$$Q^l = \mathfrak{Q} + \frac{[M^r] - [M^l]}{l}. \quad (326a)$$

Für einen „stehenden“ Stab (Säule):

$$Q^u = \mathfrak{Q} + \frac{[M^u] - [M^o]}{l}. \quad (327a)$$

b) Graphisch.

Wir betrachten den in Fig. 158 dargestellten durchlaufenden Balken $ABCDE$ auf einer frei drehbaren Stütze und drei biegefest mit dem Balken ver-

Fig. 158.

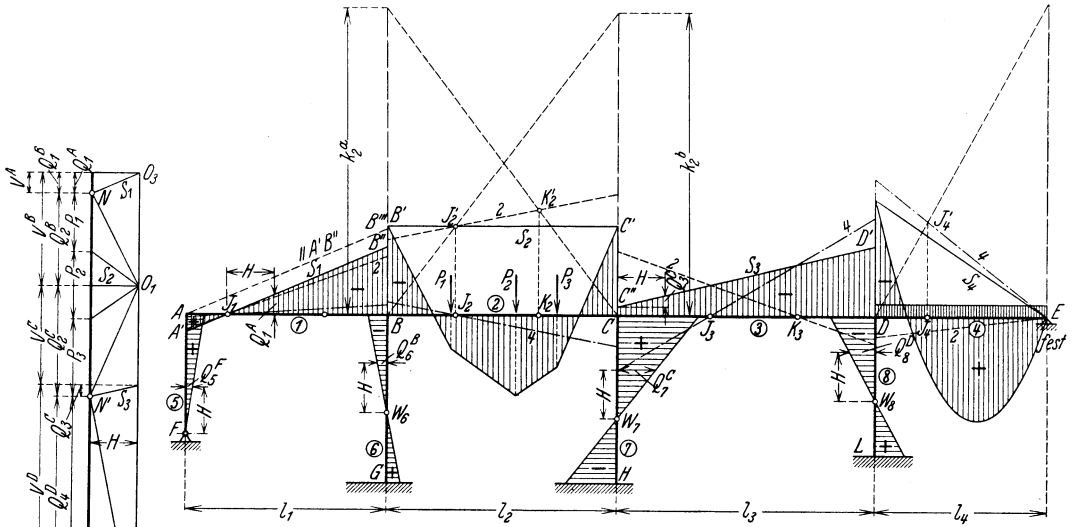


Fig. 158 b.

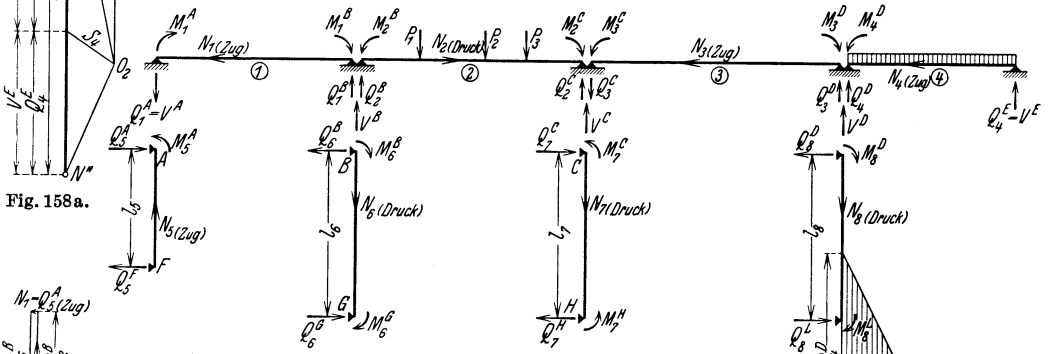


Fig. 158 a.

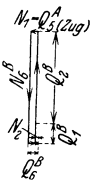


Fig. 158 d.

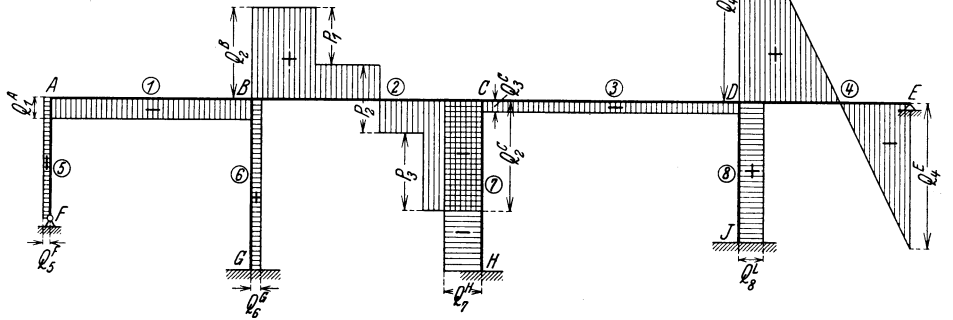


Fig. 158 c.

bundenen Pfeilern mit der in dieser Figur eingezeichneten bekannten Momentenfläche am ganzen Tragwerk. Wir nehmen an, die M_0 -Flächen dieser Momentenfläche seien mit Hilfe der mit gleicher Polweite H gezeichneten Kraftecke

NO_1N' und $N'O_2N''$ (Fig. 158a) aufgetragen worden. Wurden die Ordinaten der M_0 -Flächen rechnerisch ermittelt und unter stillschweigender Annahme einer gewissen Polweite aufgetragen, so zeichnen wir rückwärts ein Krafteck, welches aus der äußeren Belastung und den beiden Endstrahlen (Parallelen zu den Endseiten des die M_0 -Fläche begrenzenden Seilecks) besteht.

Nun denken wir uns alle Stäbe, Balken und Pfeiler des Tragwerkes, wie in Fig. 158b dargestellt, in einfache Balken auf 2 Stützen zerlegt und mit den gegebenen äußeren Lasten sowie mit den Stützenmomenten der betreffenden Stäbe belastet. Dann sind die normalen Auflagerdrücke an diesen Balken gleich den Querkräften an den Enden der betreffenden Stäbe und werden wie folgt erhalten:

a) Belastete Stäbe: Die beiden Auflagerdrücke Q_2^B und Q_2^C des gedachten einfachen Balkens der zweiten Öffnung werden im Krafteck NO_1N' (Fig. 158a) durch die vom Pol O_1 aus gezogene Parallele zur Schlußlinie s_2 auf dem Kräftezug $P_1P_2P_3$ abgeschnitten; analog werden die Auflagerdrücke Q_4^D und Q_4^E im Krafteck $N'O_2N''$ durch die von O_2 aus gezogene Parallele zu s_4 auf dem Kräftezug $p \cdot l_4$ abgeschnitten.

b) Unbelastete Stäbe: Die beiden Auflagerdrücke Q_1^A und Q_1^B des gedachten einfachen Balkens der ersten Öffnung, in welcher keine äußeren Kräfte vorkommen, sind einander gleich und entgegengesetzt. Es genügt daher Q_1^A zu ermitteln. Es ist aus der Anschauung

$$Q_1^A = - \frac{M_1^A + M_1^B}{l_1}.$$

Setzen wir hierin nach Fig. 158:

$$M_1^A = H \cdot A A' \quad \text{und} \quad M_1^B = H \cdot B B'' \quad (H = \text{Polweite der Fig. 158a}),$$

so folgt:

$$Q_1^A = - \frac{H(AA' + BB'')}{l_1}. \quad (328)$$

Diesen Ausdruck können wir im überschlagenen Momentenviereck $AA'J_1B''B$ (Fig. 158) als Strecke ermitteln: Wir ziehen im Abstände H (Polweite, im Kräftemaßstab abzutragen) links oder rechts von J_1 eine Senkrechte; dann ist Q_1^A gleich der im Kräftemaßstab abgegriffenen Strecke, welche auf dieser Vertikalen von der Schlußlinie s_1 und der durch J_1 gehenden Waagrechten abgeschnitten wird; denn, ziehen wir von A aus die Gerade AB'' parallel zu s_1 , so verhält sich in den ähnlichen Dreiecken BJ_1B'' und $BA B''$

$$Q_1^A : H = (BB'' + B''B''') : l_1, \quad \text{wobei} \quad B''B''' = AA'.$$

Diese Konstruktion wird mit Vorteil bei der Auftragung der Einflußlinien verwendet.

Auch im Krafteck (Fig. 158a) können wir Q_1^A graphisch ermitteln, indem wir vom Punkte N aus die Parallele zur Schlußlinie s_1 ziehen. Ihr Schnittpunkt mit der Vertikalen im Abstand H ist O_3 . Die Waagrechte durch O_3 bestimmt Q_1^A auf der Kraftlinie. Ebenso wird Q_3^C ermittelt. Dadurch ist der Kräftezug (Fig. 158a) so vervollständigt, daß in demselben auch alle Auflagerdrücke des durchlaufenden Balkens gebildet werden können; es ist nämlich

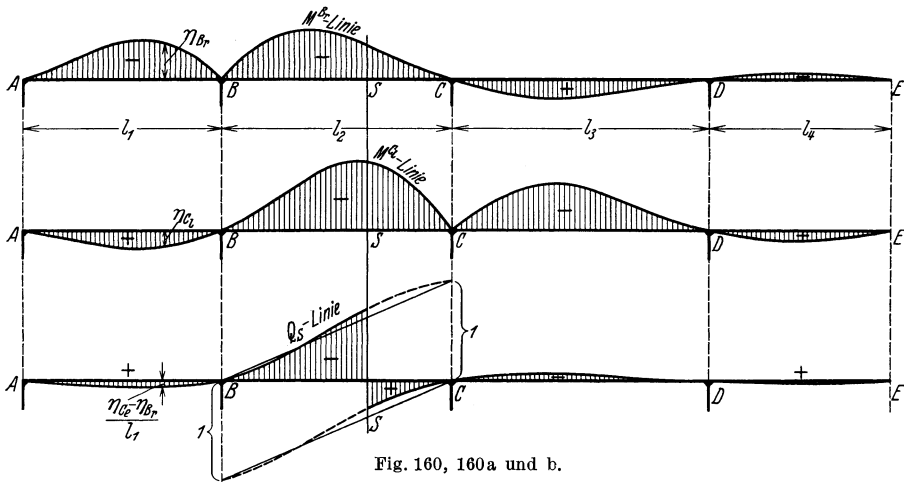
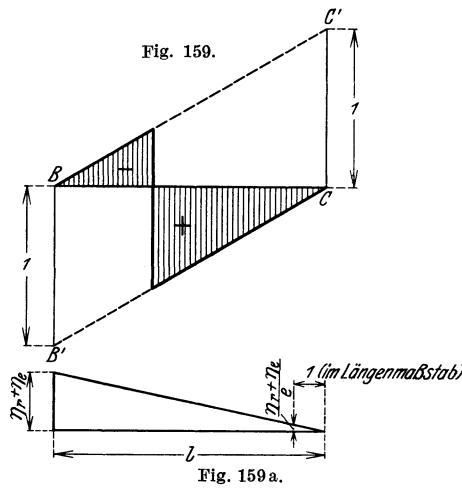
$$\begin{aligned} V^A &= Q_1^A; & V^B &= Q_1^B + Q_2^B; \\ V^C &= Q_2^C - Q_3^C; & V^D &= Q_3^D + Q_4^D; & V^E &= Q_4^E. \end{aligned}$$

Die Querkräfte an Kopf und Fuß der 4 unbelasteten Pfeiler (Stäbe 5, 6, 7, 8) erhalten wir in genau derselben Weise wie diejenigen der unbelasteten ersten Öffnung. In Fig. 158b wurden die 4 Pfeiler herausgezeichnet. Die Querkräfte an deren Enden können in Fig. 158 im Abstand H von der Balkenachse abgegriffen werden.

In Fig. 158c ist die Querkraftsfläche für die ganze Konstruktion dargestellt, wobei am Balken (liegender Stab) positive Querkräfte nach oben und an den Pfeilern (stehende Stäbe) positive Querkräfte nach rechts aufgetragen wurden. Mit dem Auftragen wurde beim Balken links, und bei den Pfeilern unten angefangen.

c) Grenzwerte.

Die Bestimmung der Querkräfte für ruhende Einzel- und Streckenlasten ist unter a) und b) behandelt.



Sind bewegliche Einzellasten vorhanden, werden analog wie bei den Momenten Einflußlinien verwendet, um die größten positiven, wie negativen Querkräfte zu erhalten.

Die Querkraft in einem beliebigen Schnitt eines elastisch eingespannten Balkens ist (326a)

$$Q^1 = Q + \frac{[M^r] - [M^l]}{l}.$$

Man erhält daher die Einflußlinien der Querkräfte nach dieser Beziehung ohne weiteres, wenn diejenigen der bei den Stützenmomente bekannt sind.

Die Einflußlinie für Q ist diejenige des einfachen Balkens (Fig. 159). Wählt man als Maßstab für die Q -Einflußlinie den gleichen wie für die Momenten-

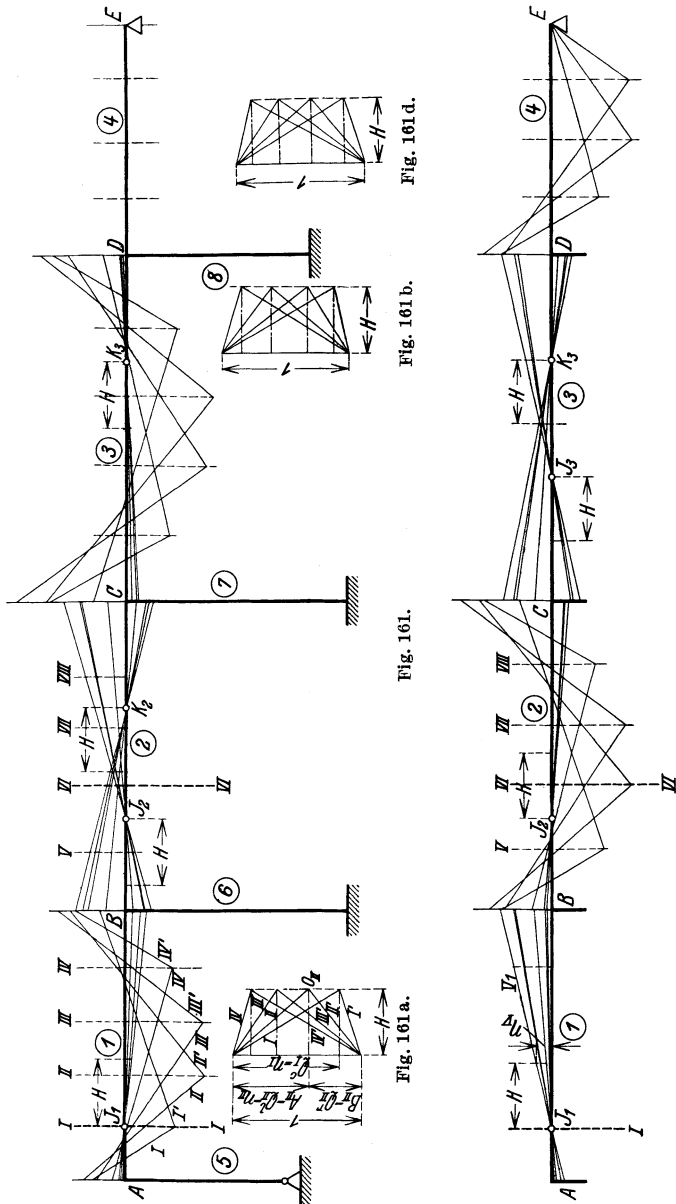


FIG. 161c.

einflußlinien, also z. B. 1 cm = 1 mt = 1 t, so erhält man die Werte $\frac{[M^r] - [M^l]}{l}$ auf einfache Weise aus der Reduktionsfigur 159 a. Auf der Vertikalen im Abstände l trägt man die mit dem Zirkel aus den Momenteneinflußlinien abgegriffene Summe $\eta_r + \eta_l$ ab. Die Verbindungsgerade des Endpunktes mit dem Nullpunkt schneidet auf der Vertikalen im Abstände l den gesuchten Wert $\frac{\eta_r - \eta_l}{l}$ ab. Beim kontinuierlichen Rahmen sind für die beiden Stützenmomente M^r und M^l diejenigen zu nehmen, die zu dem betrachteten Felde gehören,

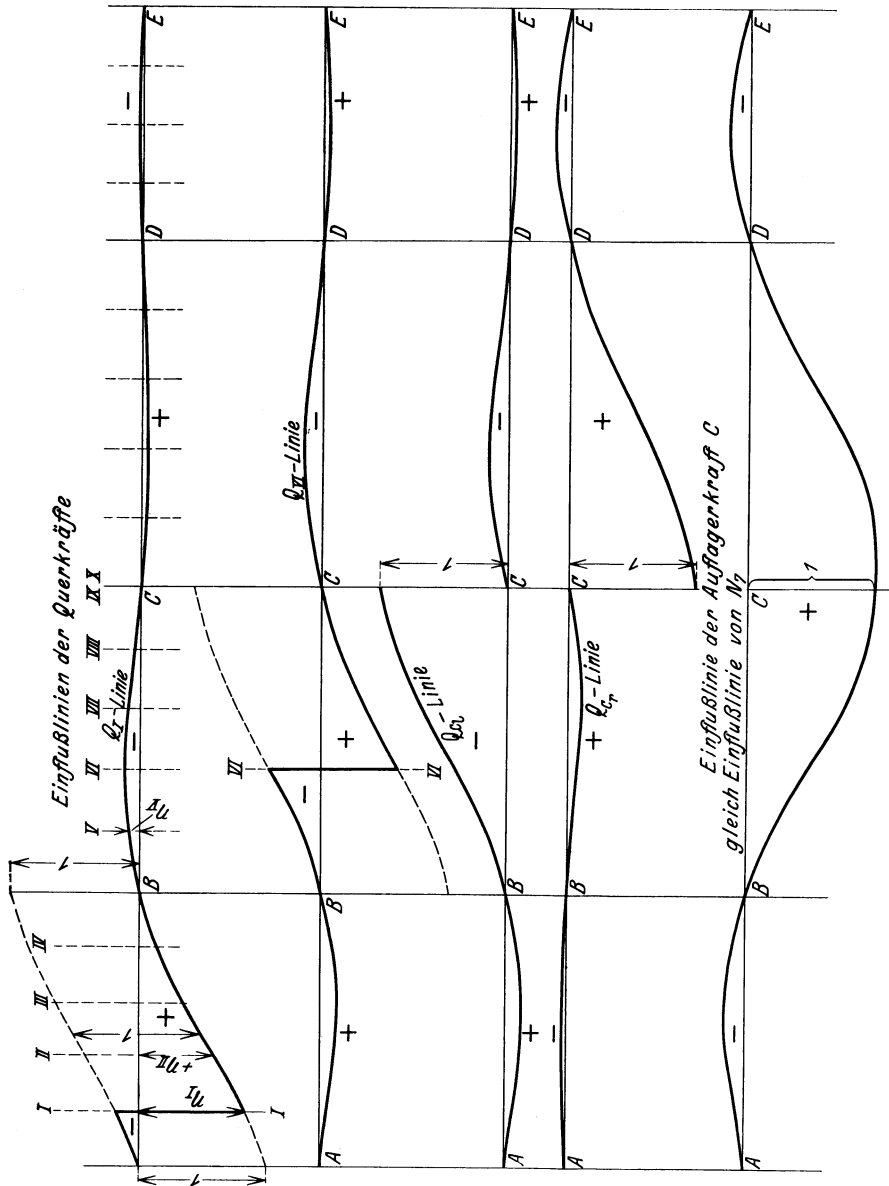


Fig. 161 e-i.

also für Feld 2 (Fig. 160 bis 160b) bei C das linke, bei B das rechte. Die Einflußlinie für die Querkraft in einem Schnitt S des Feldes 2 der Fig. 158 ist in Fig. 160b dargestellt. Die Ordinaten $\frac{\eta^{C_i} - \eta^{B_r}}{l}$ im Maßstab der Querkraftseinheit zu den Σ -Ordinaten addiert ergeben die Q_s -Linie.

Die Einflußlinien der Querkräfte können auch direkt konstruiert werden, aus den Momentenflächen der wandernden Last $P = 1$ (Fig. 161 bis 161i).

Für einen Schnitt in einem belasteten Feld, z. B. Schnitt I in Fig. 161 erhält man $Q_I^r + Q_I^l$ aus dem Krafteck Fig. 161b. Für die Laststellung $P = 1$ über Schnitt II sind II und II' die Seiten der Momentenfläche, wenn der ganze Balken sonst unbelastet ist. Die parallelen Seilstrahlen dazu im Krafteck Fig. 161b schneiden sich im Pol O_{II} . Die Waagrechte (= Parallele zur Schlußlinie) durch O_{II} schneidet auf der Krafteinheit die beiden Auflagerkräfte $A_{II} = Q_2^l = \eta_{II}$ und $B_{II} = Q_{II}^r$ ab. η_{II} ist die Einflußordinate von Q_1^l und wird in Fig. 161e unter Schnitt II abgetragen.

Liegt der betrachtete Schnitt außerhalb der belasteten Öffnung, erhält man die Querkraft wie in Fig. 158 in der Distanz H vom Festpunkt, als Abschnitt der Momentenfläche. Für die Laststellung $P = 1$ z. B. über Schnitt V (Fig. 161e) ist V_1 die Momentenlinie im betrachteten Feld I , und η_V die Einflußordinate von Q_1^l für den Schnitt V (Fig. 161e).

Die Einflußlinien für den durchlaufenden Balken sind über den Auflagerpunkten stetig. Beim durchlaufenden Rahmen ist dies nicht der Fall (Fig. 161e bis i).

Hat der kontinuierliche Rahmen kein festes Auflager, sind die so ermittelten Einflußlinien noch nicht die endgültigen. Es muß noch der Zusatz durch die Verschiebungskraft berücksichtigt werden. Meistens wird man dann die Einflußlinien der Querkräfte aus den Einflußlinien der endgültigen Stützenmomente bestimmen.

Bei gleichmäßig verteilter Verkehrslast gibt Streckenbelastung die größten positiven und negativen Querkräfte. Aus der Form der Einflußlinien ist ersichtlich, welche Strecken belastet werden müssen. Um die größte positive Querkraft für einen Feldschnitt F zu erhalten, ist nach Fig. 161f die Strecke von F bis zum rechten Auflager zu belasten und die anschließenden Felder abwechselnd zu entlasten und belasten. Die Strecke von F bis zum linken Auflager muß unbelastet, die anschließenden Felder belastet und entlastet werden (Fig. 162).

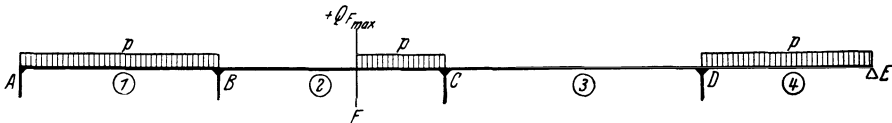


Fig. 162.

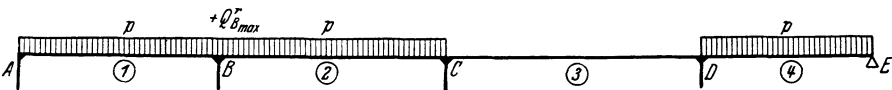


Fig. 162a.

2. Normalkräfte.

Die Normalkräfte wirken in Richtung der Stabachse und sind in unbelasteten (und gewichtslosen) Stäben auf deren ganzen Länge konstant. Da an jedem Knotenpunkt eines biegungsfesten Stabwerkes nicht nur zwischen den Momenten einerseits, sondern auch zwischen den Quer- und Normalkräften andererseits Gleichgewicht bestehen muß, so erhalten wir die Normalkräfte nach Bestimmung der Querkräfte dadurch, daß an jedem Knotenpunkt die Querkräfte der dort zusammentreffenden Stäbe zu einer Resultierenden $Q_{res.}$ zusammengesetzt werden, und letztere dann nach den sich in diesem Knotenpunkt schneidenden Stabrichtungen zerlegt wird. Die Knotenpunkte des Tragwerkes können festgehalten oder verschiebbar sein, die Normalkräfte richten sich nur nach den aus der entsprechenden Momentenfläche ermittelten Querkräften.

Betrachten wir z. B. den herausgetrennt gedachten Knotenpunkt C (Fig. 157f) des

Tragwerkes mit beliebig gerichteten Stäben

der Fig. 157 mit der gegebenen Momentenfläche (in vorliegendem Falle für das in B gestützte Tragwerk). An diesem greifen die Querkräfte Q_6^C und Q_8^C in umgekehrter Richtung (als „Aktionen“) wie an den herausgeschnitten gedachten Stäben an, und die Normalkräfte N_6^C und N_8^C , welche sich durch Zusammensetzen von Q_6^C und Q_8^C zu $Q_{res.}^C$ und Zerlegen der letzteren nach den Richtungen der Stäbe 6 und 8 ergeben, halten den durch die „Aktion“ $Q_{res.}^C$ belasteten Knotenpunkt im Gleichgewicht. Die Kräftezusammensetzung und -zerlegung ist in Fig. 157g vorgenommen. Die in den Stäben 6 und 8 wirkenden Normalkräfte sind „Aktionen“ und den am Knotenpunkt angebrachten Normalkräften entgegengesetzt gerichtet.

In praxi tragen wir nun aber zweckmäßig die Querkräfte so auf, wie wir sie am Stabende ermittelt haben (als „Reaktionen“), welche dann mit den in den Stäben wirkenden Normalkräften N_6^C und N_8^C („Aktionen“) im Gleichgewicht stehen, so daß die Pfeilrichtung der Kräfte $Q_{res.}^C$, N_6^C und N_8^C im Kräfteplan ebenfalls geschlossen ist (siehe Fig. 157h).

Um die Normalkräfte in den Stäben 1, 5, 6 und 7, welche im Knotenpunkt B vereinigt sind, zu erhalten, setzen wir die sich in diesem Punkte schneidenden Querkräfte Q_1^B , Q_5^B , Q_6^B und Q_7^B zusammen (Fig. 157i). Nun sollten wir $Q_{res.}^B$ in die Richtungen der Stäbe 1, 5, 6 und 7 zerlegen, was jedoch nicht möglich ist, da wir eine Kraft in der Ebene nur in zwei sich auf dieser Kraft schneidende Richtungen zerlegen können. Wir müssen deshalb zwei von den vier in B zusammenstoßenden Normalkräften auf andere Weise ermitteln, was uns bei denjenigen der Stäbe 5 und 6 möglich ist. Die Normalkraft N_6^B erhalten wir aus der mit Hilfe von Fig. 157h ermittelten Normalkraft N_6^C , wenn wir von N_6^C die in die Richtung des Stabes 6 fallende Komponente P_2'' der Belastung P_2 abziehen. N_5^B erhalten wir durch Zerlegung von Q_5^B in die Richtungen des Stabes 5 und der Auflagervertikalen (Fig. 157h). Nun können wir die 2 noch fehlenden Normalkräfte N_1^B und N_7^B bestimmen, indem wir im Kräfteplan der Fig. 157i die „Reaktionen“ der Normalkräfte N_6^B und N_5^B mit den Querkräften zusammensetzen und die daraus hervorgehende Resultierende nach den Stabrichtungen 1

und 7 zerlegen, und zum Schluß dafür sorgen, daß die Pfeilrichtung der 2 Normalkräfte mit derjenigen der Querkräfte geschlossen ist.

Um die Normalkräfte in den im Knotenpunkt A verbundenen Stäben zu erhalten, gehen wir analog vor. Wir bestimmen zunächst N_3^D ; es ist dann $N_3^A = N_3^D$. N_4^F wird aus Q_4^F gefunden wie N_5^G aus Q_5^G . Durch Zusammensetzen von Q_{res}^A mit den „Reaktionen“ der Normalkräfte N_3^A und N_4^A und Zerlegen der hieraus hervorgehenden Resultierenden nach den Stabrichtungen 1 und 2 erhalten wir noch N_1^A und N_2^A . Als Probe besteht am frei verschiebbaren Tragwerk die Bedingung $N_1^A = N_1^B$ und am unverschiebbar festgehaltenen Tragwerk die Bedingung: $N_1^A = N_1^B - F$.

Wir ersehen daraus, daß man bei der Bestimmung der Normalkräfte von denjenigen Knotenpunkten ausgehen muß, in welchen sich nicht mehr als 2 Stäbe vereinigen.

An einem

Tragwerk mit rechtwinklig aufeinanderstehenden Stäben,

wie z. B. an demjenigen der Fig. 158, brauchen wir (an den Knotenpunkten ABC und D) die Querkräfte der senkrecht aufeinanderstehenden Stäbe nicht zuerst zu Q_{res} . zusammensetzen und dann wieder in dieselben Richtungen zu zerlegen. Anstatt z. B. Q_{res}^A . (Resultierende aus Q_1^A und Q_5^A) in die Richtungen der Stäbe 1 und 5 zu zerlegen, können wir es auch mit den einzelnen Querkräften Q_1^A und Q_5^A vor deren Zusammensetzung zu Q_{res}^A . tun; wir sehen dann, daß Q_1^A ganz in die Richtung des Stabes 5 und Q_5^A ganz in diejenige des Stabes 1 fällt. Dasselbe gilt vom Knotenpunkt B . Auch hier wird man, statt zuerst Q_{res}^B . wie in Fig. 158d zu konstruieren, die einzelnen Querkräfte direkt in die dazu senkrechten Stabrichtungen zerlegen. Am herausgetrennten Knotenpunkt muß die Summe der horizontalen und der vertikalen Kräfte gleich Null sein. Also erhält man die Normalkraft im gewichtslosen Stab 6 aus der Gleichung $N_6 + Q_1^B + Q_2^B = 0$ und diejenige im Stab 2 aus der Gleichung

$$N_2 + N_1 + Q_6^B = 0.$$

N_1 ist der von der Säule auf den Balken übertragene Horizontalschub.

Die Einflußlinie für die Normalkraft eines Pfeilers erhält man durch graphische Addition der Einflußlinien für die Querkräfte in den anschließenden Balken beim Stützenquerschnitt. Die Einflußordinaten für N_7 ergeben sich daher als Summe der Einflußordinaten von Q_2^B und Q_3^B (Fig. 161i). Die Einflußlinie von N_1 ist gleich derjenigen von Q_1^A .

Die Einflußlinie für den Auflagerdruck einer Stütze hat die Form derjenigen Biegelinie des Balkens, die entsteht, wenn die betreffende Stütze fehlt.

3. Fundamentkräfte.

Wir kennen jetzt die auf das Fundament eines Stabes wirkenden Kräfte.

a) Feste Einspannung im Fundament (Fig. 163).

Auf das Fundament wird übertragen (siehe Fig. 163a): das Einspannmoment M_6^G (mit entgegengesetztem Drehsinn wie in Fig. 158), die Normalkraft N_6^G , ferner die Querkraft Q_6^G (als „Aktion“, also in entgegengesetzter Richtung wie in Fig. 158b).

Bilden wir die Resultante R aus diesen Kräften einschließlich dem Gewicht G des Fundamentkörpers (Fig. 163b), so erhalten wir die auf der Fundamentsohle wirkende Resultierende; die Resultante R' der Kräfte N_6^G und Q_6^G wird durch das Moment M_6^G parallel verschoben, und zwar um

$$r = \frac{M_6^G}{R'}$$

Als Kontrolle muß sich ergeben, daß R' durch den Momentennullpunkt W des Stabes hindurchgeht.

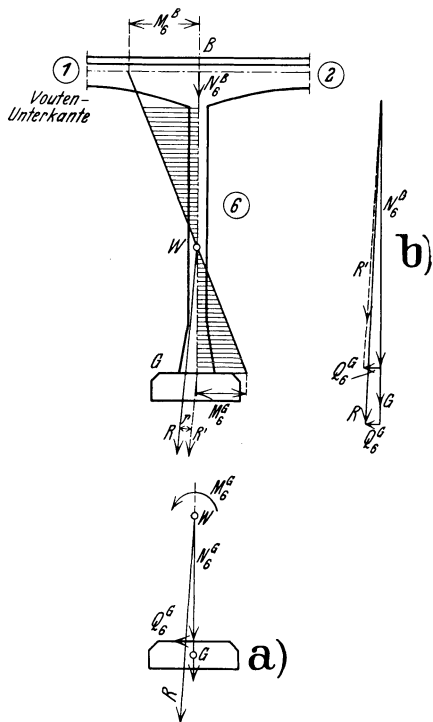


Fig. 163, 163a und b.

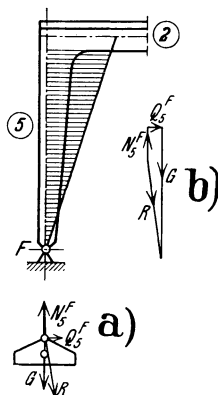


Fig. 164, 164a und b.

b) Gelenkartige Lagerung auf dem Fundament (Fig. 164).

Auf das Fundament wird in diesem Falle übertragen (Fig. 164a): Die Normalkraft N_5^F und die Querkraft Q_5^F (als „Aktion“). Bilden wir die Resultante aus diesen Kräften einschließlich dem Gewicht G des Fundamentkörpers (Fig. 164b), so erhalten wir die auf die Fundamentsohle wirkende Resultierende R .

VII. Bestimmung der Festhaltungskraft.

Diejenige innere Kraft, welche in der Lage ist, ein einstöckiges Tragwerk oder an einem mehrstöckigen Tragwerk ein Stockwerk desselben, unverschiebbar festzuhalten, oder das Tragwerk, falls es sich verschoben hatte, in die ursprüngliche Lage zurückzuverschieben, nennen wir die Festhaltungskraft („Reaktion“).

An einem Tragwerk mit durch die Konstruktion (von Haus aus) bedingten unverschiebbaren Knotenpunkten (siehe z. B. Fig. 76) tritt in dem festen Lager die Festhaltungskraft (Auflagerreaktion) auf, deren Größe wir dort zur Berechnung der erforderlichen Verankerung der Konstruktion in dem festen Lager benötigen.

An einem Tragwerk (ein- oder mehrstöckig) mit durch gedachte Lager bedingten unverschiebbaren Knotenpunkten tritt in diesen Lagern ebenfalls je eine Festhaltungskraft auf, welche wir in umgekehrter Richtung wirkend, nämlich als Verschiebungskraft, zur Berechnung der Zusätze zu den inneren Kräften für den festgehaltenen Zustand benötigen; aus letzterem Grunde fällt der Bestimmung der Festhaltungskraft eine große Wichtigkeit zu.

1. Einstöckiger Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.

Alle Knotenpunkte des in Fig. 165 dargestellten allgemeinen Tragwerks sind unverschiebbar vorausgesetzt, und die in genannter Figur eingetragene Momentenfläche bezieht sich auf diesen Zustand.

Wir suchen nun diejenige innere Kraft, welche die Knotenpunkte des Tragwerkes in ihrer ursprünglichen Lage (wenn keine äußere Belastung auf das Tragwerk einwirkt) gerade unverschiebbar festzuhalten imstande ist.

a) Erste Lösung.

Zur Bestimmung der Festhaltungskraft denken wir uns alle Stäbe, wie dies in Kap. VI zur Bestimmung der Querkräfte geschehen ist, an ihren Enden durchgeschnitten, in festen Lagern gestützt und mit den in den Schnittstellen wirkenden Kräften belastet (Fig. 165a bis e). Auf die herausgetrennten Knotenpunkte wirken diese Kräfte dann als „Aktionen“. Die Kraft, welche also auf einen herausgetrennt gedachten Knotenpunkt einwirkt, setzt sich zusammen aus den rechtwinklig zu den Stäben wirkenden „Aktionen“ der Querkräfte, gewonnen aus der für das vorübergehend unverschiebbar gedachte Tragwerk ermittelten Momentenfläche (Rechnungsabschnitt I) und den in Richtung der Stäbe wirkenden Komponenten („Aktionen“) von schief zur Stabachse angreifenden äußeren Lasten.

Auf den herausgetrennt gedachten Knotenpunkt C (Fig. 165f) wirkt die Resultierende Q_{res}^C der „Aktionen“ der beiden Querkräfte Q_6^C und Q_8^C . Die Kraft, welche diesen Knotenpunkt unter Einwirkung der genannten Kräfte in Ruhe hält, ist die Reaktion von Q_{res}^C , welche durch ihre beiden Komponenten N_6^C und N_8^C („Reaktionen“) auf den Knotenpunkt wirkt und denselben im Gleichgewicht hält. Die Komponenten N_6^C und N_8^C sind nichts anderes als die Normalkräfte am festgehaltenen Tragwerk. Die Kräftezusammensetzung und -zerlegung wurde in Fig. 165g vorgenommen.

Da die äußere Last P_2 schief zur Stabrichtung angreift, so liefert dieselbe eine Komponente P_2'' in Richtung des Stabes δ , welche auf die an seinen beiden Enden liegenden Knotenpunkte übertragen wird. Die Anteile von P_2'' , welche hierbei auf die Knotenpunkte B und C entfallen, stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die an diesen beiden Knotenpunkten ermittelten Querkräfte; wir erhalten diese Anteile dadurch, daß wir (siehe Fig. 165a) die beiden Querkräfte Q_6^B und Q_6^C (als „Aktionen“) auftragen und durch den einen Endpunkt derselben eine Parallele zu P_2 ziehen, worauf die Anteile L_6^B und L_6^C von P_2'' auf der Parallelen zur Stabachse durch den anderen Endpunkt abgeschnitten werden. Wir brauchen jedoch diese Verteilung von P_2'' in den meisten Fällen

nicht vorzunehmen, sondern berücksichtigen P_2'' getrennt als unzerlegte Kraft, wie dies aus dem folgenden hervorgeht.

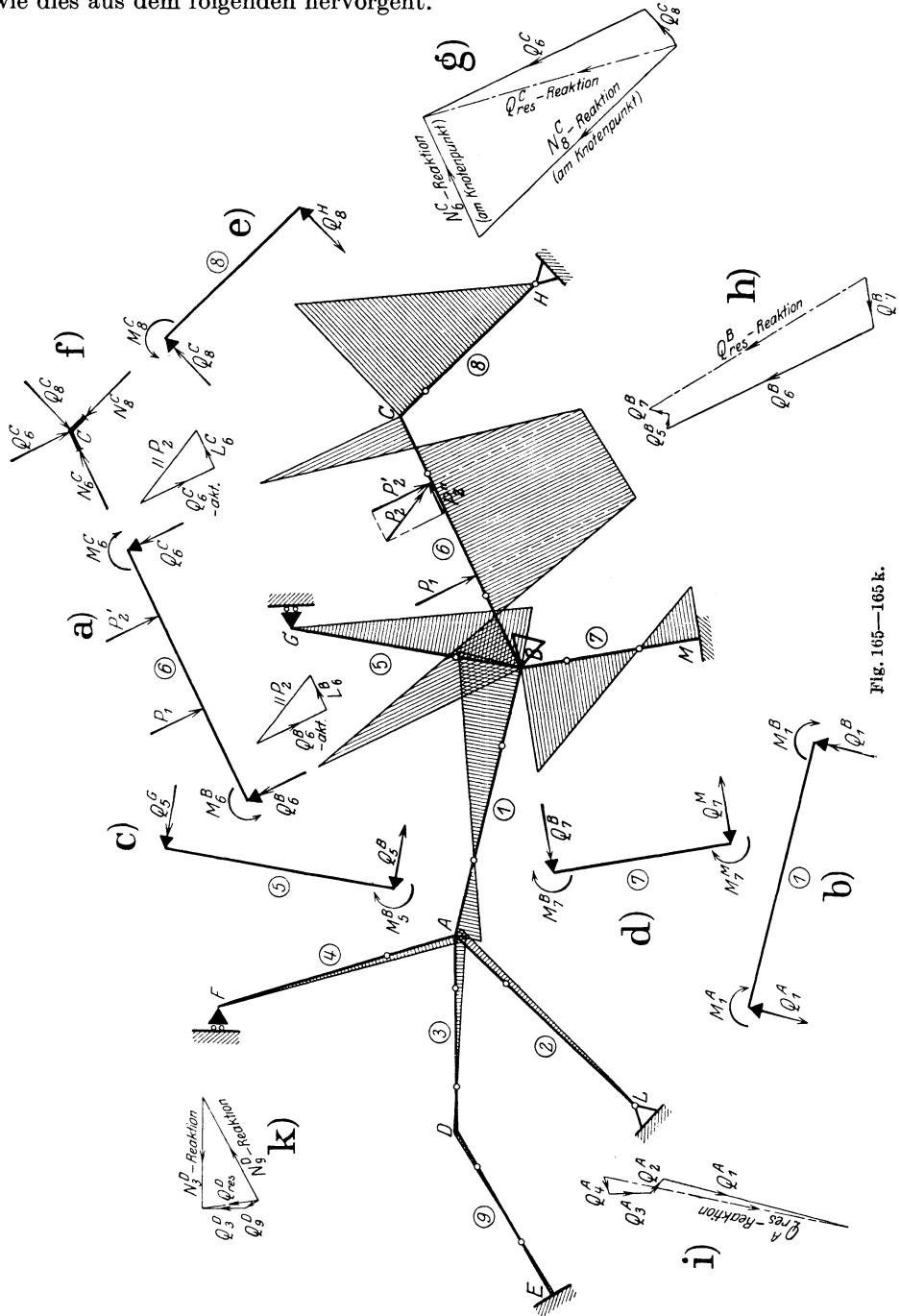


Fig. 165—165 k.

Auf den herausgetrennt gedachten Knotenpunkt B wirkt die Resultierende Q_{res}^B (Fig. 165h) der „Aktionen“ der Querkräfte Q_1^B , Q_5^B , Q_6^B und Q_7^B . Die Kraft,

welche diesen Knotenpunkt unter Einwirkung der genannten Kräfte in Ruhe hält, ist die „Reaktion“ Q_{res}^B . Der ferner auf den Knotenpunkt B wirkende Anteil L_6^B der Komponente P_2'' der schiefen äußeren Last P_2 wird gleichzeitig mit L_6^C später berücksichtigt.

Auf den herausgetrennt gedachten Knotenpunkt D wirkt die Resultierende Q_{res}^D (Fig. 165k) der „Aktionen“ Q_3^D und Q_9^D . Die Kraft, welche diesen Knotenpunkt in Ruhe hält, ist deshalb die „Reaktion“ Q_{res}^D , die durch ihre beiden Komponenten N_3^D und N_9^D („Reaktion“) auf den Knotenpunkt wirkt (Fig. 165k), welche letztere nichts anderes als die Normalkräfte am festgehaltenen Tragwerk sind.

Wir können jedoch, wie wir später sehen werden, zur weiteren Berechnung des Tragwerkes diese vielen Reaktionen, welche die Unverschiebbarkeit der einzelnen Knotenpunkte gewährleisten, und die wir in Fig. 165l herausgezeichnet haben, nicht gebrauchen, müssen dieselben vielmehr durch eine einzige Kraft in einer beliebig gewählten Richtung und an einem beliebigen Knotenpunkt des „Balkens“ wirkend ersetzen, welche die von der äußeren Belastung angestrebte Verschiebung des ganzen Tragwerkes aufhält, und dies ist die sog. Festhaltungskraft. Diese Kraft können wir nun als Reaktion eines an einem Knotenpunkt, beispielsweise am Knotenpunkt B (Fig. 165) des „Balkens“ (gebildet durch die Stäbe 1, 3 und 6) des einstöckigen Tragwerkes, gedachten Lagers betrachten, welches die Unverschiebbarkeit aller Knotenpunkte des einstöckigen Tragwerkes bewirkt, weil die übrigen Knotenpunkte (A , C und D) mit B durch geradlinige Stäbe verbunden sind. Die Festhaltungskraft F bestimmen wir wie folgt:

An dem gewichtslos vorausgesetzten Tragwerk der Fig. 165 wählen wir als Richtung der Festhaltungskraft diejenige des Stabes 1. Da die Reaktionen N_9^D und N_8^C in die Richtung von Auflagerstäben fallen, um deren Fußpunkte das Tragwerk sich bei einer Verschiebung zu bewegen bestrebt ist, so scheiden diese Reaktionen aus der Berechnung aus. Das Tragwerk wird daher festgehalten durch die Reaktionen N_3^D , Q_{res}^A , Q_{res}^B , N_6^C an den Knotenpunkten A , B , C , D und die Reaktion von P_2'' , alle herrührend von der gegebenen äußeren Belastung (Fig. 165l).

Um hieraus eine einzige Kraft F in Richtung des Stabes 1 zu bilden, setzen wir zunächst die beiden sich in A schneidenden Reaktionen N_3^D und Q_{res}^A zusammen und sollten nun die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten N_2 , N_1 und N_4 in Richtung der Auflagerstäbe zerlegen. N_4 ist bestimmt (S. 144) als Komponente des senkrechten Auflagerdruckes in F . Die Zerlegung von Q_{res}^A und N_3 ist in Fig. 165m vorgenommen. N_2 scheidet aus demselben Grunde wie N_9^D aus der Berechnung aus, ebenso N_4 , da diese mit der Querkraft Q_4^F zusammen einen vertikalen Auflagerdruck in F erzeugt. Hierauf gehen wir am Knotenpunkt B in analoger Weise vor. Wir setzen die drei sich in B schneidenden Reaktionen N_1 (von Knotenpunkt A herrührend), N_6^C , P_2'' und Q_{res}^B zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten N_7 , N_1 und N_5 in Richtung der Auflagerstäbe (Fig. 166n). N_5 ist wieder wie N_4 bekannt. N_7 und N_5 scheidet aus der Berechnung aus, und die allein übrigbleibende Komponente in Richtung des Stabes 1 ist gleich der gesuchten Festhaltungskraft F , welche als einzige Kraft das Tragwerk ebenso

in Ruhe hält, wie es vorher die Knotenpunktreaktionen der Fig. 165l getan haben.

Die Kräftepläne der Fig. 165i und 165m einerseits und die Kräftepläne der Fig. 165h und 165n andererseits vereinigen wir zweckmäßig in eine Figur

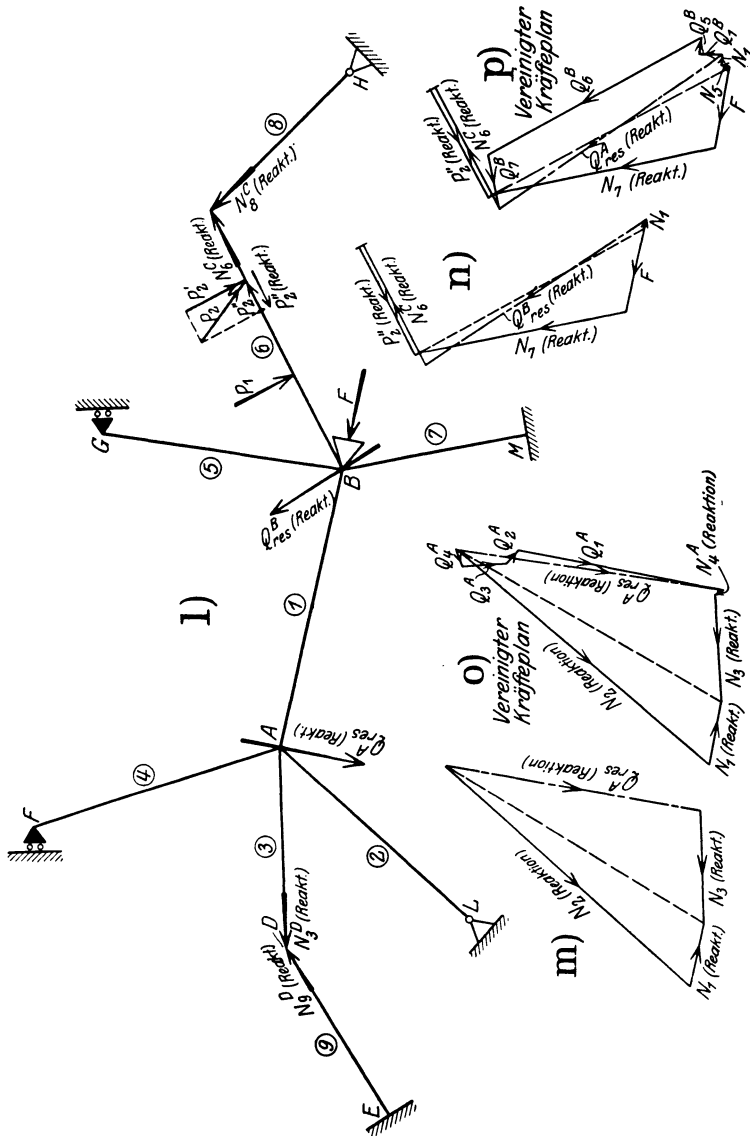


Fig. 165l—p.

und tragen die Querkräfte Q als Reaktionen auf (als welche wir sie an den Stabenden ermitteln); aus den Fig. 165o und 165p sind diese vereinigten Kräftepläne ersichtlich, die wir in unseren Beispielen immer verwenden.

b) Zweite Lösung.

Wie schon unter a) erwähnt, können wir die während Rechnungsabschnitt I vorausgesetzte Unverschiebbarkeit aller Knotenpunkte des einstöckigen Tragwerkes der Fig. 165 durch Anbringen eines festen Lagers am Knotenpunkt B zustande gebracht denken, wodurch Stab 1 und damit wegen der geradlinigen

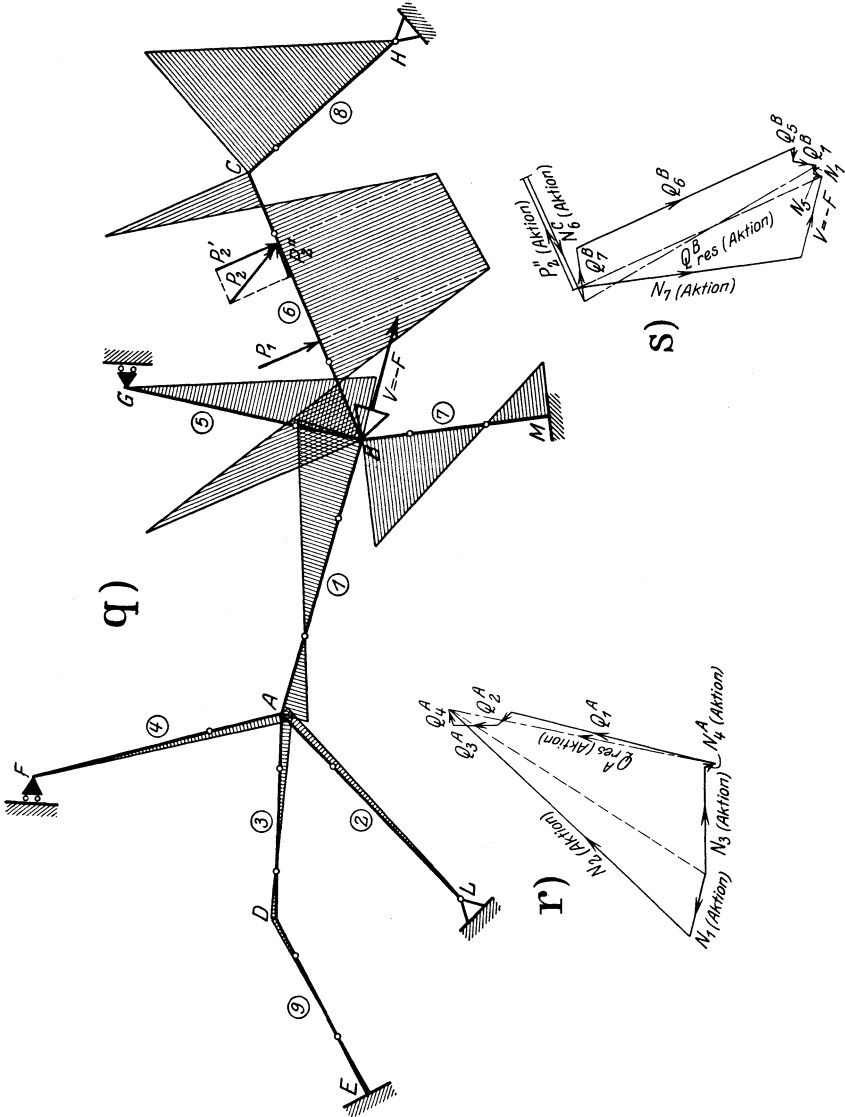


Fig. 165 q—s.

Stabverbindungen alle Knotenpunkte unverschiebbar festgehalten sind. Wir können darauf diejenige Kraft bestimmen, welche den Knotenpunkt B und damit alle übrigen Knotenpunkte des Tragwerkes zu verschieben bestrebt ist, und die wir als die sog. Verschiebungskraft („Aktion“) bezeichnen; die Festhaltungskraft ist dann die Reaktion davon.

Um die Verschiebungskraft am Knotenpunkt B des Tragwerkes der Fig. 165q zu ermitteln, denken wir uns alle Knotenpunkte herausgetrennt und mit den Schnittkräften belastet. Auf den Knotenpunkt A werden dann übertragen (Fig. 165r): die „Aktionen“ der Querkräfte Q_1^A, Q_2^A, Q_3^A und Q_4^A sowie die im Stab 3 wirkende Normalkraft N_3^D (Aktion). Diese Kräfte setzen wir zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten N_1, N_2 und N_4 , wobei letztere wie vorher wieder durch den vertikalen Auflagerdruck von F bestimmt ist (Aktionen). Auf den Knotenpunkt B werden übertragen (Fig. 165s): die „Aktionen“ der Querkräfte Q_1^B, Q_5^B, Q_6^B und Q_7^B , die Aktion P_2'' , die im Stab 6 wirkende Normalkraft N_6^G (Aktion) und die vom Knotenpunkt A herrührende Kraft N_1 (Aktion). Diese Kräfte setzen wir zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten N_5 und N_7 in Richtung der Auflagerstäbe 5 und 7 und eine Komponente in Richtung des Stabes 1 („Aktionen“). Da die Komponenten N_2, N_4, N_5 und N_7 keine Verschiebungen des Stabes 1 und damit des Knotenpunktes B bewirken können, so scheidet dieselben aus der Berechnung aus (N_5 erzeugt mit Q_5^G einen vertikalen Auflagerdruck in G). Die allein übrigbleibende Komponente („Aktion“) in Richtung des Stabes 1 ist gleich der Verschiebungskraft V („Aktion“). Der Auflagerdruck („Reaktion“) in dem in B zur Festhaltung des Tragwerkes angebrachten Lager, infolge Einwirkung der Verschiebungskraft auf das Tragwerk, ist gleich der gesuchten Festhaltungskraft, welche gleich groß ist wie die Verschiebungskraft, jedoch entgegengesetzt gerichtet.

Die Kräfte $N_9, N_3, N_2, N_4, N_1, N_5, N_7, N_6^B = N_6^G - P_2'', N_6^G$ und N_8 sind die Normalkräfte („Aktionen“) in den betreffenden Stäben für den festgehaltenen Zustand, und am Stab 1 muß sein $N_1^A = N_1^B - F$, da $N_1^B - N_1^A = F$. Würden wir die Verschiebungs- bzw. Festhaltungskraft auf Grund der endgültigen Momentenfläche bestimmen, so müßte sein

$$V = F = 0$$

und daher N_1^A gleich und entgegengesetzt N_1^B , was später als Probe für die endgültige Momentenfläche dient.

Anmerkung: Wir hätten ebensogut die Festhaltungskraft in Richtung des Stabes 6 bestimmen können, welche auch als einzige Kraft das ganze Tragwerk in Ruhe halten würde. Ferner könnte man an Stelle der Stabrichtung 1 oder 6 eine beliebige, durch einen der Knotenpunkte gehende Richtung wählen; wünschten wir z. B. die Festhaltungskraft in Richtung der Horizontalen durch den Knotenpunkt B , so würden wir einfach F noch in Richtung des Auflagerstabes 7 und die Horizontale zerlegen. Die Hauptsache ist, daß später bei der Bestimmung der Erzeugungskraft Z (Rechnungsabschnitt II) für eine gegebene Verschiebung des während Rechnungsabschnitt I unverschiebbar festgehaltenen Tragwerkes die gleiche Richtung wie für die Festhaltungskraft gewählt wird, da die beiden Kräfte F und Z im Verhältnis zueinander gebraucht werden, um die Zusätze zu den inneren Kräften des Tragwerkes zu erhalten. Wie wir später sehen werden, ist die Erzeugungskraft Z genau wie die Festhaltungskraft F eine „Reaktion“; deshalb bestimmen wir letztere immer nach der ersten Lösung, d. h. wir tragen die **Querkräfte** und die sich durch Zerlegung ergebenden **Normalkräfte** (für den festgehaltenen Zustand) bei **Be-**

stimmung der Festhaltungskraft, und später ebenso bei Bestimmung der Erzeugungskraft, als „Reaktionen“ auf, wodurch wir bei der Zerlegung direkt die Festhaltungskraft (in ihrer Richtung) erhalten.

Sonderfall: Eigengewicht der Stäbe.

Das Eigengewicht geneigter Stäbe, welches immer senkrecht wirkt, zerlegen wir wie zur Berechnung der zugehörigen M_0 -Fläche auch zur Bestimmung der Festhaltungskraft zweckmäßig nicht und ermitteln an den beiden Enden des geneigten Stabes an Stelle der Querkräfte Q (Auflagerdrücke normal zur Achse des herausgeschnitten gedachten Stabes) die senkrechten Auflagerdrücke A an den Enden der herausgeschnitten gedachten geneigten Stäbe, die wir in der weiteren Rechnung verwenden. Es wäre ein Umweg, wenn wir in diesem Falle zur Bestimmung der Festhaltungskraft die Querkräfte ermitteln und dann im weiteren Verlauf der Rechnung noch die in die Stabrichtung fallende Komponente des Eigengewichtes gesondert berücksichtigen würden; denn in den senkrechten Auflagerdrücken (des herausgeschnitten gedachten geneigten Stabes) ist diese Komponente bereits enthalten.

2. Mehrstöckiger Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.

Am mehrstöckigen Rahmen gibt es nicht nur eine einzige Festhaltungskraft, sondern für jedes Stockwerk eine Festhaltungskraft, da bei einer angenommenen Verschiebung eines Stockwerkes die übrigen Stockwerke Verschiebungen ausführen, welche sich nicht ohne weiteres aus denjenigen des um ein bestimmtes Maß verschobenen Stockwerkes berechnen lassen.

In Fig. 166 haben wir ein dreistöckiges geschlossenes Tragwerk dargestellt, dessen Knotenpunkte unverschiebbar vorausgesetzt sind; die in dieser Figur an das Tragwerk angetragene Momentenfläche bezieht sich auf den unverschiebbaren Zustand, und zur Bestimmung derselben wurden die schief gerichteten Einzellasten P_1 und P_2 wie früher in die Komponenten P'_1 und P''_1 bzw. P'_2 und P''_2 senkrecht und parallel zur betreffenden Stabachse zerlegt.

Es ist einleuchtend, daß es nicht möglich wäre, den ganzen Rahmen der Fig. 166 entweder durch eine einzige Festhaltungskraft am Knotenpunkt C oder durch eine einzige Festhaltungskraft am Knotenpunkt F oder eine solche am Knotenpunkt J in Ruhe zu halten. In allen drei Fällen würden sich die beiden anderen Stockwerke noch bewegen können. Wir müssen daher alle drei Stockwerke unverschiebbar festhalten, und zwar durch die Festhaltungskräfte F_I , F_{II} und F_{III} . Wie früher unter 1. erwähnt, ist die Wahl der Richtung dieser Festhaltungskräfte beliebig, nur müssen im weiteren Verlauf der Rechnung (im R. II) für die Erzeugungskräfte Z die gleichen Richtungen angenommen werden.

Zur Bestimmung dieser drei Festhaltungskräfte ermitteln wir die Querkräfte an allen Stabenden nach Kap. VI, 1 auf Grund der Momentenfläche aus R. I und bilden die Resultierende Q_{res} („Reaktion“) an jedem Knotenpunkt. Nun scheiden wir wieder die Komponenten aus, welche in die Richtung von Auflagerstäben fallen. Für das oberste Stockwerk sind die Stäbe 7, 8 und 9 Auflagerstäbe, da es in den Knotenpunkten D , E und F sein Auflager findet;

für das mittlere Stockwerk sind die Stäbe 10, 11, 12, und für das unterste Stockwerk sind die Stäbe 13, 14 und 15 Auflagerstäbe.

Um die Festhaltungskraft F_I am Knotenpunkt C des obersten „Stockwerkbalkens“ zu erhalten, müssen wir am Knotenpunkt A beginnen. Wir

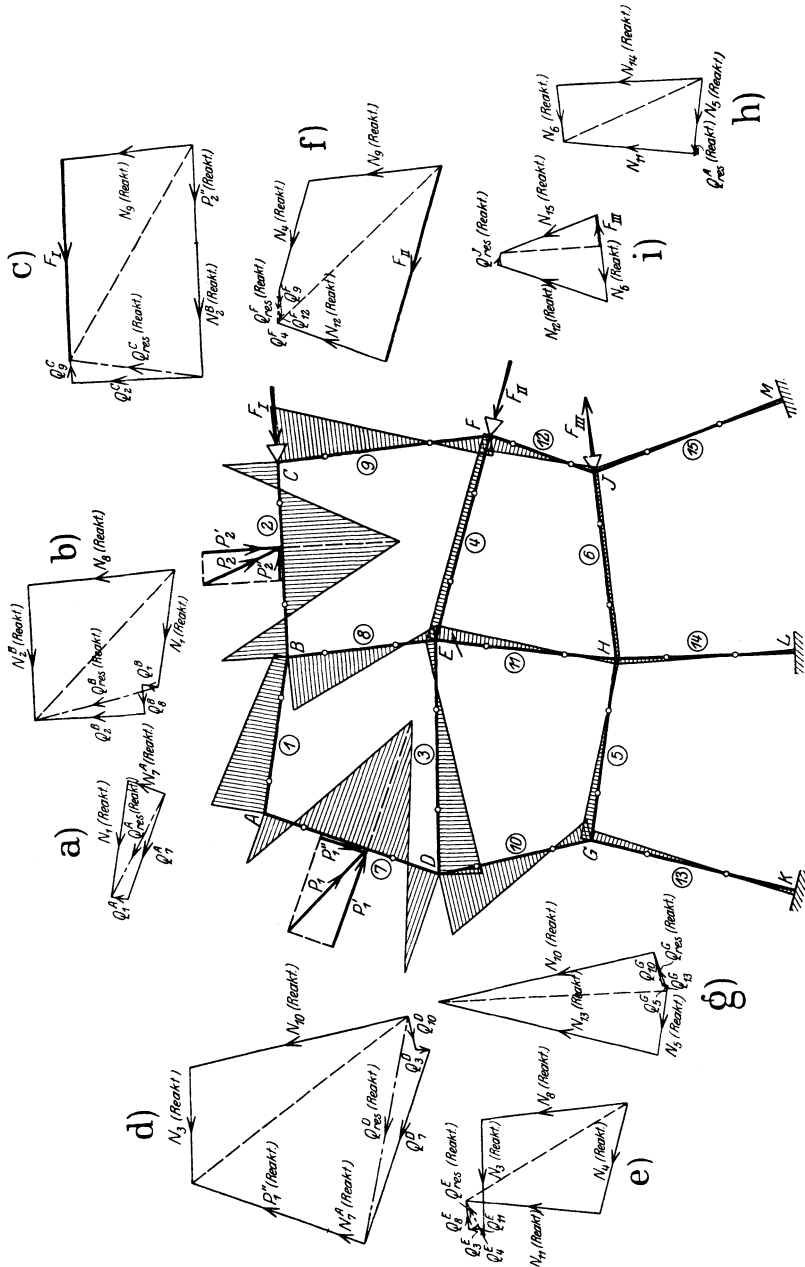


Fig. 100—1061.

zerlegen die Resultierende Q_{res}^A (Fig. 166a) in die Komponenten N_7^A und N_1 (Reaktionen am Knotenpunkt), von welchen letztere in das Auflager D dieses Stockwerkes übertragen wird, daher keine Verschiebung desselben hervorrufen

kann, und aus diesem Grunde aus der Berechnung für die Festhaltungskraft F_I ausscheidet. Darauf setzen wir die Resultierende Q_{res}^B (Fig. 166b) mit der Komponente N_1 („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten N_2^B und N_8 , von welchen letztere wieder keinen Anteil zu der Festhaltungskraft F_I liefert. Nun wirken in dem Lager am Knotenpunkt C die „Reaktionen“ Q_{res}^C und N_2^B sowie die „Reaktion“ der in die Stabrichtung 2 fallenden Komponente P_2'' der äußeren Kraft P_2 (Fig. 166c); setzen wir diese Reaktionen zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Stabrichtungen 2 und 9, so ist die erstere Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_I , während die Komponente N_9 aus der Berechnung derselben ausscheidet.

Um die Festhaltungskraft F_{II} am Knotenpunkt F des mittleren „Stockwerkbalkens“ zu erhalten, setzen wir Q_{res}^D (Fig. 166d) zunächst mit der durch den Auflagerstab 7 des obersten Stockwerkes auf den Knotenpunkt D übertragenen, in Fig. 166a bestimmten Komponente N_7^A (N_7^A wirkt am Knotenpunkt A als Reaktion, im Stab 7 als Aktion und am Knotenpunkt D wieder als Reaktion) sowie mit der „Reaktion“ der in die Stabrichtung 7 fallenden Komponente P_1'' der äußeren Kraft P_1 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende (Fig. 166d) in die Komponenten N_3 und N_{10} (Reaktionen am Knotenpunkt), von denen letztere aus der Berechnung der Festhaltungskraft F_{II} ausscheidet. Ferner setzen wir Q_{res}^E (Fig. 166a) mit der vom Auflagerstab 8 des obersten Stockwerkes auf den Knotenpunkt E übertragenen, in Fig. 166b bestimmten Komponente N_8 (Reaktion) und mit der vom Stab 3 auf denselben Knotenpunkt übertragenen Komponente N_3 („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende (Fig. 166e) in die Komponenten N_4 und N_{11} („Reaktionen“), von denen letztere aus der Berechnung von F_{II} ausscheidet.

Endlich setzen wir am Knotenpunkt F die „Reaktionen“ Q_{res}^F , N_9 und N_4 zusammen (Fig. 166f) und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Stabrichtungen 4 und 12; dann ist die in die Richtung des Stabes 4 fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_{II} .

Um schließlich die Festhaltungskraft F_{III} am Knotenpunkt J des untersten Stockwerkes zu erhalten, setzen wir Q_{res}^G (Fig. 166g) zunächst mit der durch den Auflagerstab 10 des mittleren Stockwerkes auf den Knotenpunkt G übertragenen, in Fig. 166d bestimmten Komponente N_{10} zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende (Fig. 166g) in die Komponenten N_5 und N_{13} (Reaktionen am Knotenpunkt), von denen letztere aus der Berechnung der Festhaltungskraft F_{III} ausscheidet. Ferner setzen wir Q_{res}^H (Fig. 166h) mit der vom Auflagerstab 11 des mittleren Stockwerkes auf den Knotenpunkt H übertragenen, in Fig. 166e bestimmten Komponente N_{11} (Reaktion) und mit der vom Stab 5 auf denselben Knotenpunkt übertragenen Komponente N_5 („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende (Fig. 166h) in die Komponenten N_6 und N_{14} („Reaktionen“), von denen letztere aus der Berechnung von F_{III} ausscheidet. Endlich setzen wir am Knotenpunkt J die „Reaktionen“ Q_{res}^J , N_{12} und N_6 zusammen (Fig. 166i) und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Stabrichtungen 6 und 15; dann ist die in die Richtung des Stabes 6 fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_{III} .

Wir ersehen daraus, daß wir zur Bestimmung der Festhaltungskräfte an einem Stockwerkrahmen oben und in den einzelnen Stockwerken an dem vom gedachten Lager am meisten entfernten Knotenpunkt beginnen müssen.

3. Rahmenträger mit beliebig gerichteten Stäben.

Wie in Kap. I des Teiles II ausgeführt, ist der Rahmenträger für die Berechnung nichts anderes wie ein mehrstöckiger Rahmen. Der in Fig. 167 dar-

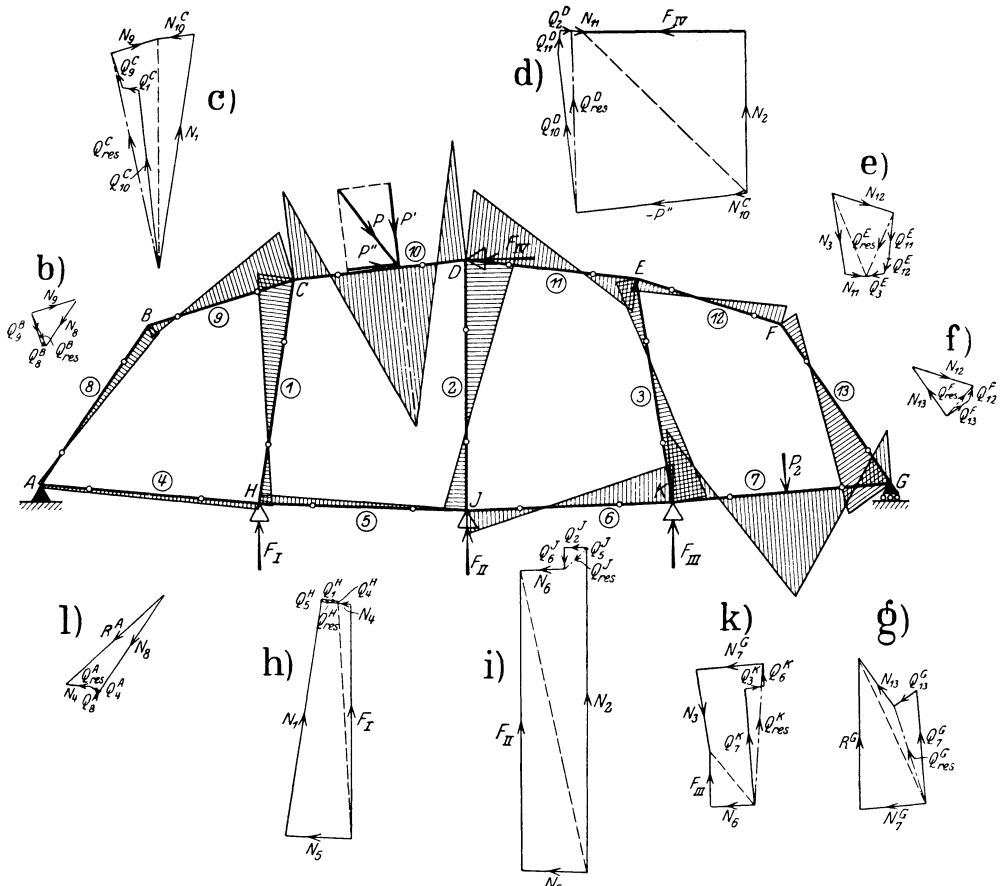


Fig. 167—167 l.

gestellte Rahmenträger muß während R. I in seinen Knotenpunkten D, H, J und K unverschiebbar festgehalten werden, damit sich keiner seiner Knotenpunkte verschieben kann; die in Fig. 167 an das Tragwerk angetragene Momentenfläche bezieht sich auf den unverschiebbaren Zustand.

Die in den gedachten Lagern an den Knotenpunkten D, H, J und K auftretenden Festhaltungskräfte bestimmen wir analog wie diejenigen am mehrstöckigen Rahmen. Wir ermitteln daher zuerst die Querkräfte an allen Stabenden nach Kap. VI, 1 auf Grund der Momentenfläche aus R. I und bilden die Resultierende Q_{res} („Reaktion“) an jedem Knotenpunkt (Fig. 167 b bis k).

Dann müssen wir mit der Bestimmung der Festhaltungskraft F_{IV} beginnen. In Fig. 167 b zerlegen wir Q_{res}^B in N_9 und N_8 , von denen letztere Komponente aus der Berechnung von F_{IV} ausscheidet. Darauf setzen wir Q_{res}^C (Fig. 167 c) mit N_9 („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in N_{10} und N_1 , von denen letztere aus der Berechnung von F_{IV} ausscheidet. Wir zerlegen ferner in Fig. 167 f Q_{res}^F in N_{12} und N_{13} , von denen letztere aus der Berechnung von F_{IV} ausscheidet. Hierauf setzen wir in Fig. 167 e Q_{res}^E mit N_{12} („Reaktion“) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in N_{11} und N_3 , von denen letztere aus der Berechnung von F_{IV} ausscheidet. Nun setzen wir in Fig. 167 d Q_{res}^D mit N_{11} , N_{10}^G und der „Reaktion“ der in die Stabrichtung 10 fallenden Komponente P_2'' der äußeren Last P_2 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in N_2 und die Horizontale. Dann ist die in die Horizontale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_{IV} .

Nun bestimmen wir die Festhaltungskraft F_{III} . In Fig. 167 g setzen wir Q_{res}^G mit N_{13} zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in N_7^G und die Vertikale, da sich bei G das bewegliche Lager des Rahmenträgers befindet. Darauf setzen wir in Fig. 167 k Q_{res}^K mit $N_7^K = N_7^G$ (da die äußere Kraft P_2 normal zum Stab 7 angreift) und N_3 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in N_6 und die Vertikale; dann ist die in die Vertikale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_{III} .

Die Festhaltungskraft F_{II} erhalten wir durch Zusammensetzen von Q_{res}^J (Fig. 167 i) mit N_6 und N_2 und Zerlegen der daraus hervorgehenden Resultierenden in N_5 und die Vertikale; die letztere Komponente ist dann gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_{II} .

Die Festhaltungskraft F_I ergibt sich in analoger Weise durch Zusammensetzen von Q_{res}^H (Fig. 167 h) mit N_5 und N_1 und Zerlegen der daraus hervorgehenden Resultierenden in N_4 und die Vertikale; die letztere Komponente ist dann gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_I .

Schließlich erhalten wir nun noch den Auflagerdruck R^A („Reaktion“) in dem festen Lager A des Rahmenträgers durch Zusammensetzen von Q_{res}^A (Fig. 167 l) mit N_4 und N_8 .

4. Beispiele.

Im Hinblick auf die wichtige Rolle, welche die Festhaltungskraft bzw. die ihr gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete „Verschiebungskraft“ bei der Berechnung von Rahmentragwerken spielt, wird im folgenden noch die Ermittlung der Festhaltungskraft an mehreren in der Praxis häufig vorkommenden Tragwerken gezeigt.

1. Rechteckrahmen mit 2 Öffnungen (Balkenbelastung, Fig. 168).

Die Balkenöffnung 1 sei mit der beliebig schief gerichteten Kraft P belastet. Wir zerlegen P in die Komponente P' rechtwinklig zur Stabrichtung und in die Komponente P'' in Richtung des Stabes, und ermitteln die in Fig. 168 dargestellte Momentenfläche für die Belastung P' am ganzen Rahmen unter der Voraussetzung unverschiebbarer Knotenpunkte, bewirkt durch ein gedachtes festes Lager am Knotenpunkt C (R. I).

Zur Bestimmung der in dem gedachten Lager in C auftretenden Festhaltungskraft ermitteln wir die Querkräfte an allen Knotenpunkten des Rahmens nach Kap. VI (Fig. 168 a), und wir sollten nun nach dem allgemeinen Fall an jedem Knotenpunkt die Resultierende Q_{res} derselben bilden. Die Resultierende Q_{res}^A am Knotenpunkte A ist eine durch A gehende schief gerichtete Kraft, welche sich aus der Zusammensetzung von Q_1^A und Q_3^A ergibt; diese schief gerichtete Kraft Q_{res}^A ist dann in Richtung des Auflagerstabes 3 und in eine passend gewählte andere Richtung zu zerlegen, als welche wir die Richtung des horizontalen Balkens annehmen. Anstatt aber Q_{res}^A in die Richtung der Stäbe 3 und 1 zu zerlegen, können wir dies auch mit den einzelnen Querkräften Q_1^A und Q_3^A vor deren Zusammensetzung zu Q_{res}^A tun; wir sehen dann, daß Q_1^A ganz in die Richtung des senkrechten Auflagerstabes 3 und Q_3^A ganz in diejenige des waagrechten Balkens 1 fällt; im vorliegenden Fall haben wir also nicht nötig, erst Q_1^A und Q_3^A zu Q_{res}^A zusammzusetzen und diese dann wieder in dieselben Komponenten zu zerlegen. Die Komponente Q_1^A kann keine Verschiebung des Rahmens hervorrufen, und deshalb hat sie auch keinen Anteil an der Festhaltungskraft; es bleibt daher als eine Komponente der Festhaltungskraft nur Q_3^A übrig. Die Reaktion Q_{res}^B ist gleich der Resultante der Querkräfte Q_1^B, Q_2^B und Q_4^B (Fig. 168 a); auch Q_{res}^B brauchen wir nicht erst zu bilden, weil deren Komponente Q_1^B und Q_2^B in die Richtung des Auflagerstabes 4 fällt und mithin nur Q_4^B übrigbleibt als eine Komponente der Festhaltungskraft. Ebenso ist von den Komponenten Q_2^C und Q_5^C in C nur die letztere eine Komponente der Festhaltungskraft. Es bleibt nun noch die Berücksichtigung der Horizontalkomponente P'' der äußeren Belastung; diese erzeugt in dem gedachten Lager in C eine Reaktion gleich und entgegengesetzt P'' (also $-P''$). Im gedachten Lager in C wirken also als Komponenten der Festhaltungskraft die Kräfte $-P'', Q_3^A$, und Q_4^B und Q_5^C (Fig. 168 b), welche wir zu einer einzigen Kraft, der gesuchten Festhaltungskraft F zusammensetzen können, weil sie in derselben Geraden laufen. Die drei schief gerichteten Reaktionen in den unverschiebbar vorausgesetzten Knotenpunkten A, B und C , welche die von der äußeren Belastung P angestrebte Verschiebung des Rahmens aufhalten, haben wir daher durch eine einzige Kraft in Richtung des Balkens mit derselben Wirkung ersetzt.

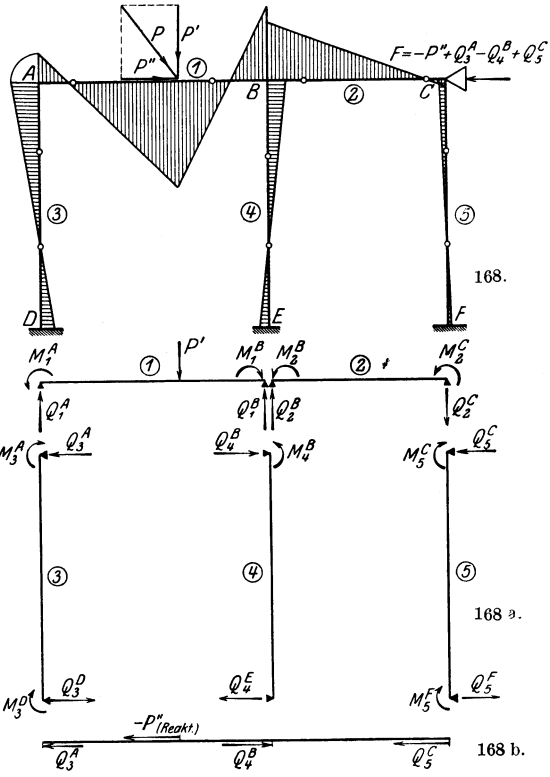
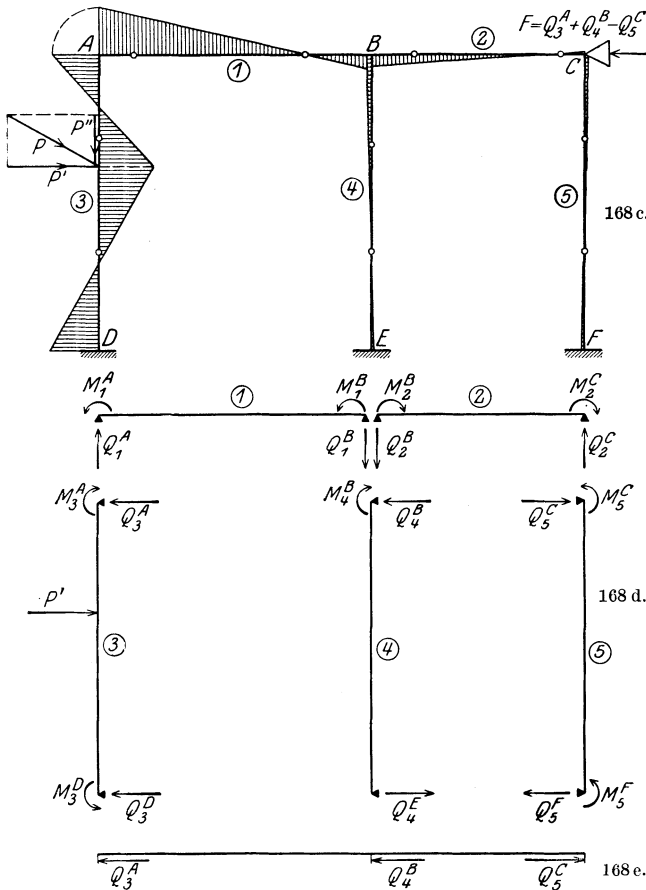


Fig. 168—168 b.

2. Rechteckrahmen mit 2 Öffnungen (Pfeilerbelastung, Fig. 168c).

In Fig. 168c haben wir denselben Rechteckrahmen dargestellt, jedoch mit einer schief gerichteten Kraft P am Vertikalstab 3. Wir zerlegen P in eine Komponente P' rechtwinklig zur Stabrichtung und eine Komponente P'' in Richtung des Stabes; letztere wird durch den Stab auf das Fundament in D übertragen. Die



Momentenfläche für die Belastung P' (aus R. I) nehmen wir als gegeben an (Fig. 168c), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Knotenpunkten des Rahmens (Fig. 164d) und erhalten genau wie unter 1. Q_3^A, Q_4^B und Q_5^C (Fig. 168e) als diejenigen Komponenten der Reaktionen in A, B und C , welche die von der Kraft P' angestrebte Verschiebung des Rahmens aufhalten; durch Zusammensetzung dieser 3 Komponenten ergibt sich die gesuchte Festhaltungskraft F .

3. Rechteckrahmen mit nach oben fortgesetzten Säulen (Fig. 169).

Die Balkenöffnung I sei gleichmäßig verteilt belastet, und die in Fig. 169 angelegene Momentenfläche bezieht sich auf den vorübergehend durch ein gedachtes Lager in D unverschiebbar festgehaltenen Zustand (Rechnungsabschnitt I).

Aus diesen Momenten ermitteln wir die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 169a). Wir brauchen nun wie im vorhergehenden Beispiel die Querkräfte in den einzelnen Knotenpunkten nicht erst zusammzusetzen und dann wieder in ihre Richtungen zu zerlegen, sondern es scheiden alle normal zum Balken angreifenden Querkräfte aus, und die im gedachten festen Lager in D auftretende Festhaltungskraft setzt sich nur aus den in die Richtung des Balkens fallenden Querkräften zusammen (Fig. 169 b). Haben die Stäbe 4, 5, 6 und 7 gleiche Länge und gleiches Trägheitsmoment sowie dieselbe Lagerung an ihren Enden, so wird $Q_4^B = Q_5^B$ und $Q_6^B = Q_7^B$ und damit $F = 0$, und zwar trotz einseitiger Belastung, so daß in diesem Fall die Momente aus R. I gleich die endgültigen Momente sind.

Fig. 168 c—168 e.

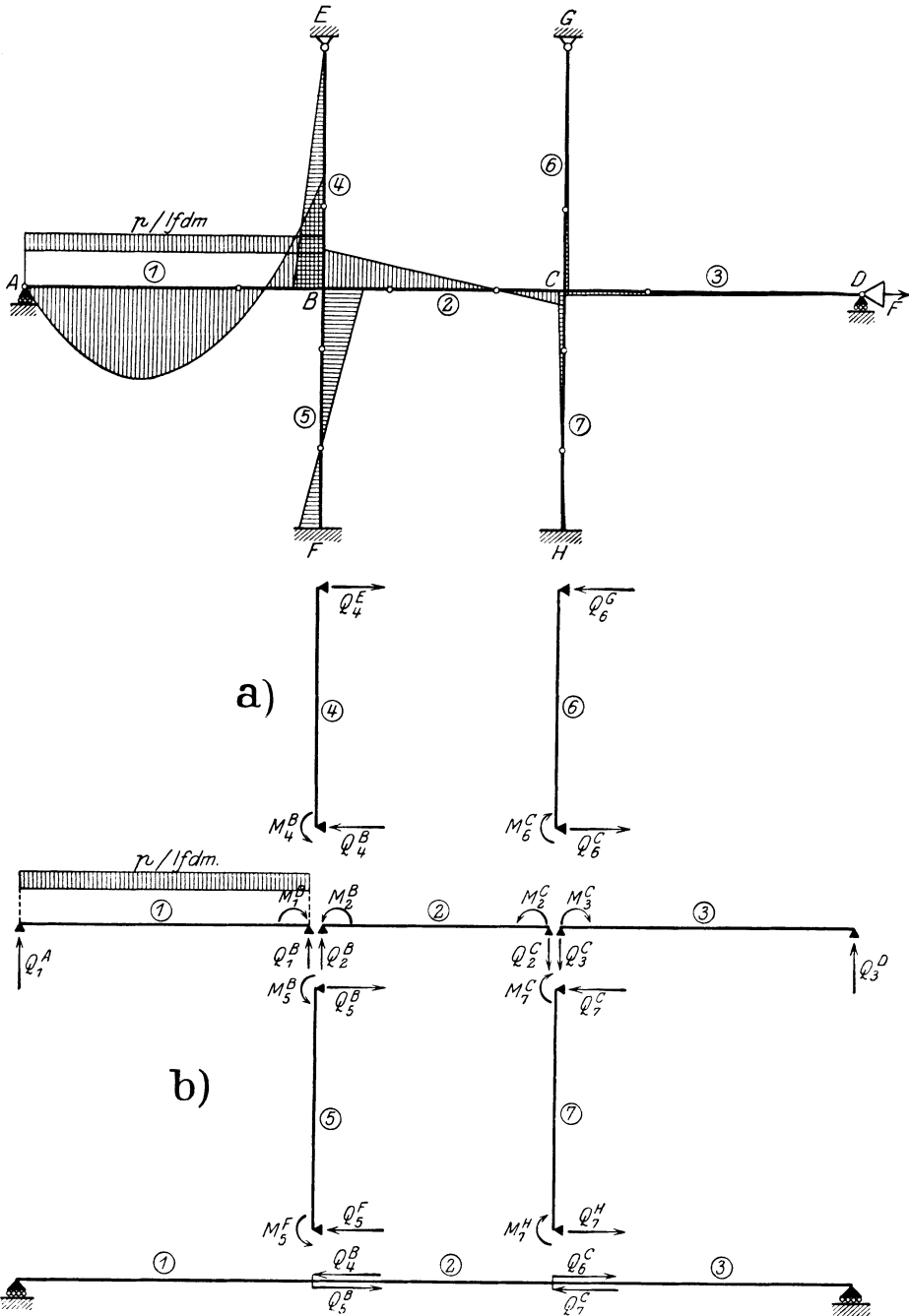


Fig. 169—169 b.

4. Rechteckrahmen mit Aufsatz (Fig. 170).

Der Stab 2 des Aufsatzes sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir zur Berechnung des Tragwerks in eine Komponente P' normal zum Stab 2 und eine Komponente P'' in Richtung desselben zerlegen. Das Trag-

werk sei während R. I durch ein festes Lager in D horizontal unverschiebbar festgehalten (dadurch werden auch die Knotenpunkte B und C unverschiebbar gemacht), und die in Fig. 170 angetragenen Momente beziehen sich auf diesen

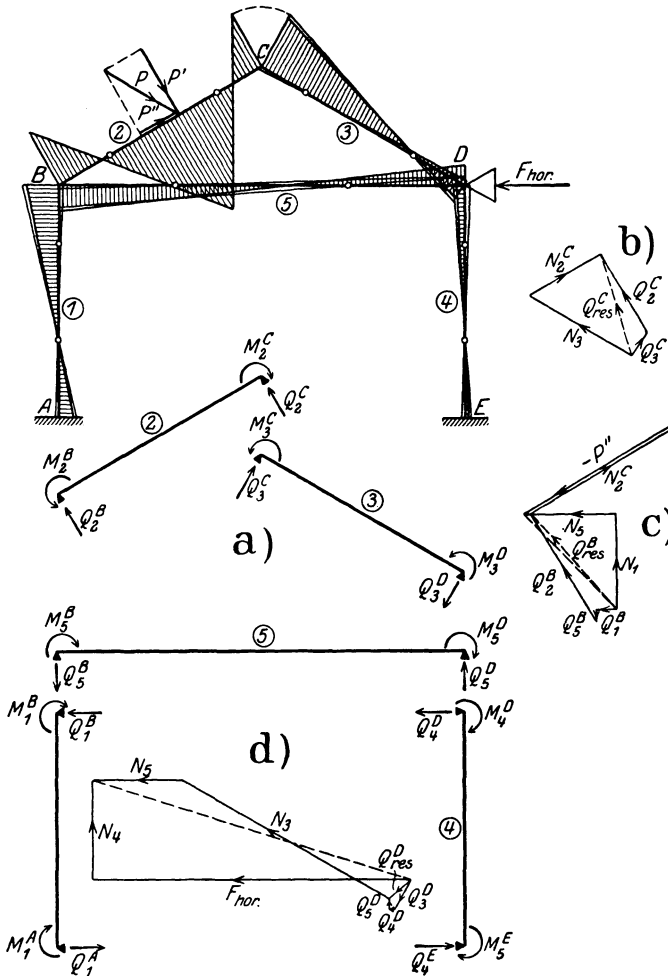


Fig. 170—170 d.

Zustand. Aus diesen Momenten ermitteln wir die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 170a) und setzen dieselben an jedem Knotenpunkt zu Q_{res} zusammen. In Fig. 170b zerlegen wir nun zunächst Q_{res}^C in N_2^C und N_3^C („Reaktionen“), von welchen letztere im Lager in D auftritt. Hierauf setzen wir in Fig. 170c Q_{res}^B mit N_2^C sowie mit der „Reaktion“ von P'' , also mit $-P''$, zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in N_5 und N_1 , von denen erstere am Lager in D auftritt und letztere aus der Berechnung der Festhaltungskraft ausscheidet. Zum Schluß setzen wir in D (Fig. 170d) Q_{res}^D mit N_3 und N_5 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des in D anschließenden Auflagerstabes 4 und die Horizontale; dann ist die letztere Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_{hor} .

5. Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigtem Balken (Fig. 171).

Die geneigte Balkenöffnung 1 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir, wie immer, in eine Komponente P' normal zum belasteten

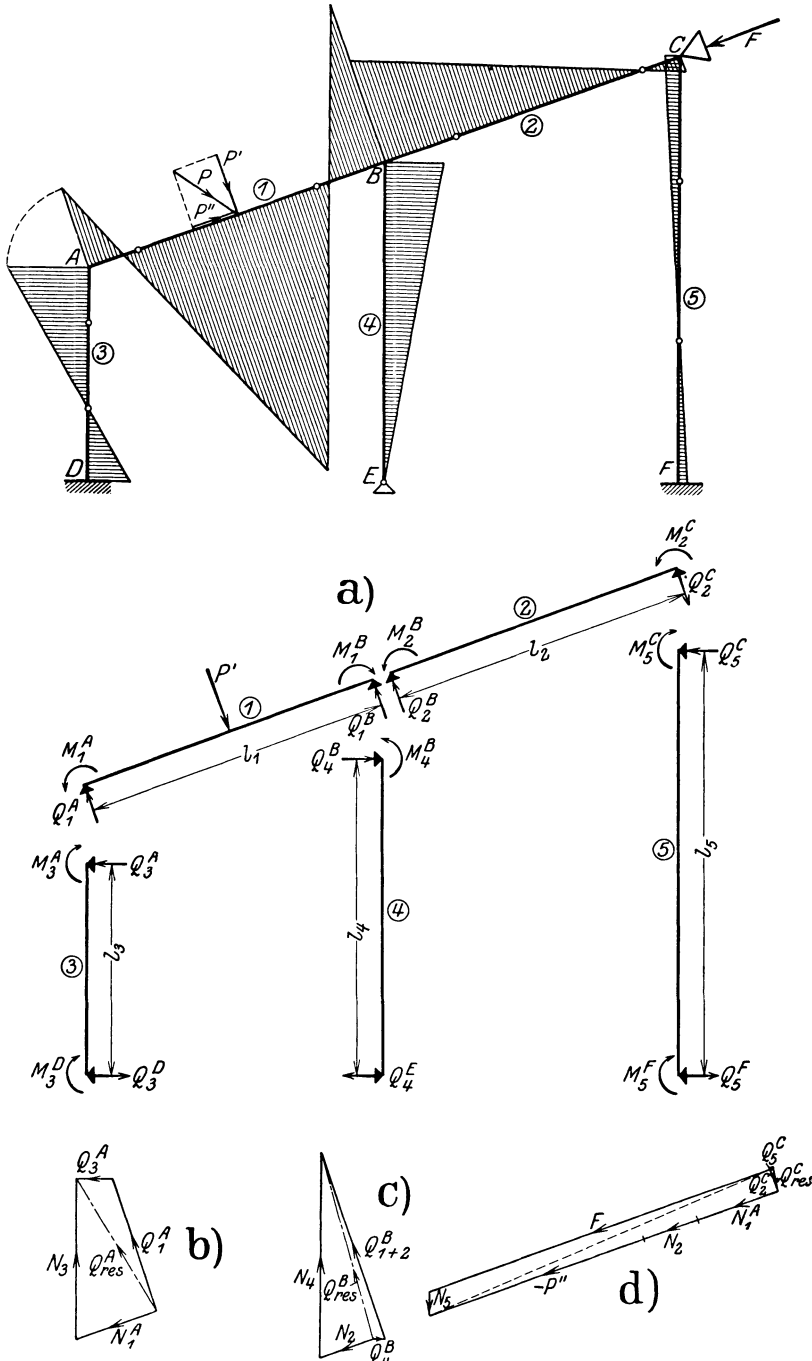


Fig.171—171 d.

Balken und eine Komponente P'' in Richtung des Balkens zerlegen. Der Rahmen sei während R. I durch ein in C gedachtes festes Lager unverschiebbar festgehalten, und wir suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft in Richtung des geneigten Balkens.

Die Momentenfläche für diesen Zustand infolge der Belastung P' (Fig. 171) nehmen wir als gegeben an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden des Rahmens (Fig. 171a) und bilden die Resultierende Q_{res} an jedem Knotenpunkt. Im Knotenpunkt A (Fig. 171b) zerlegen wir nun zunächst Q_{res}^A in die Komponenten N_3 und N_1^A , von welchen nur N_1^A eine Komponente der gesuchten Festhaltungskraft ist. Ferner zerlegen wir in Fig. 171c Q_{res}^B in die Komponente N_4 in Richtung des Auflagerstabes 4, welche ausscheidet, und in N_2 in Richtung des geneigten Balkens. Schließlich setzen wir im Knotenpunkt C (Fig. 171d) Q_{res}^C mit N_1^A , N_2 und der Reaktion der Komponente P'' der äußeren Last, also $-P''$, zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 5 und die Balkenrichtung; dann ist die letztere Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft in Richtung des Balkens. Wünscht man die Festhaltungskraft in horizontaler Richtung, so zerlegt man in Fig. 171d die Resultierende aus Q_{res}^C , N_1^A , N_2 und $-P''$ in Richtung des Auflagerstabes 5 und die Horizontale.

6. Rahmen mit senkrechten Säulen und einem sattelförmigen Balken (Fig. 172).

Der Balken I sei mit der beliebig geneigten Kraft P belastet, welche wir in eine Komponente P' normal zum belasteten Balken und eine Komponente P'' in Richtung des Balkens zerlegen. Der Rahmen sei während R. I durch ein in B gedachtes festes Lager unverschiebbar festgehalten, und wir suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft F_{hor} in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für diesen Zustand infolge der Belastung P' (Fig. 172) nehmen wir als gegeben an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden des Rahmens (Fig. 172a) und bilden die Resultierende Q_{res} an jedem Knotenpunkt. Im Knotenpunkt A (Fig. 172b) zerlegen wir nun Q_{res}^A in die Komponenten N_3 und N_1^A , von welchen erstere keinen Beitrag zur Festhaltungskraft liefert. Ferner zerlegen wir in Knotenpunkt C (Fig. 172c) Q_{res}^C in die Komponenten N_5 und N_2 , von welchen erstere ausscheidet. Die in den Balken I und 2 wirkenden Komponenten N_1 und N_2 , die Resultierende Q_{res}^B und die Reaktion $-P''$ von der äußeren Last herrührend, haben wir in Fig. 170d an die Konstruktion angetragen. Die drei in den Balkenrichtungen 1 und 2 laufenden Komponenten verschieben wir nun in ihrer Richtung bis zum Knotenpunkt B und setzen sie dort mit der Resultierenden Q_{res}^B zur Resultante R^B zusammen (Fig. 172e); zerlegen wir nun R^B in Richtung des Auflagerstabes 4 und die Horizontale, so ist letztere Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_{hor} in horizontaler Richtung.

Anmerkung betreffend Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigtem Balken.

Am Rahmen der Fig. 173 seien für Eigengewicht des Balkens I sowohl die senkrechten Auflagerdrücke A an den Enden dieser Stäbe (vgl. Sonderfall zu

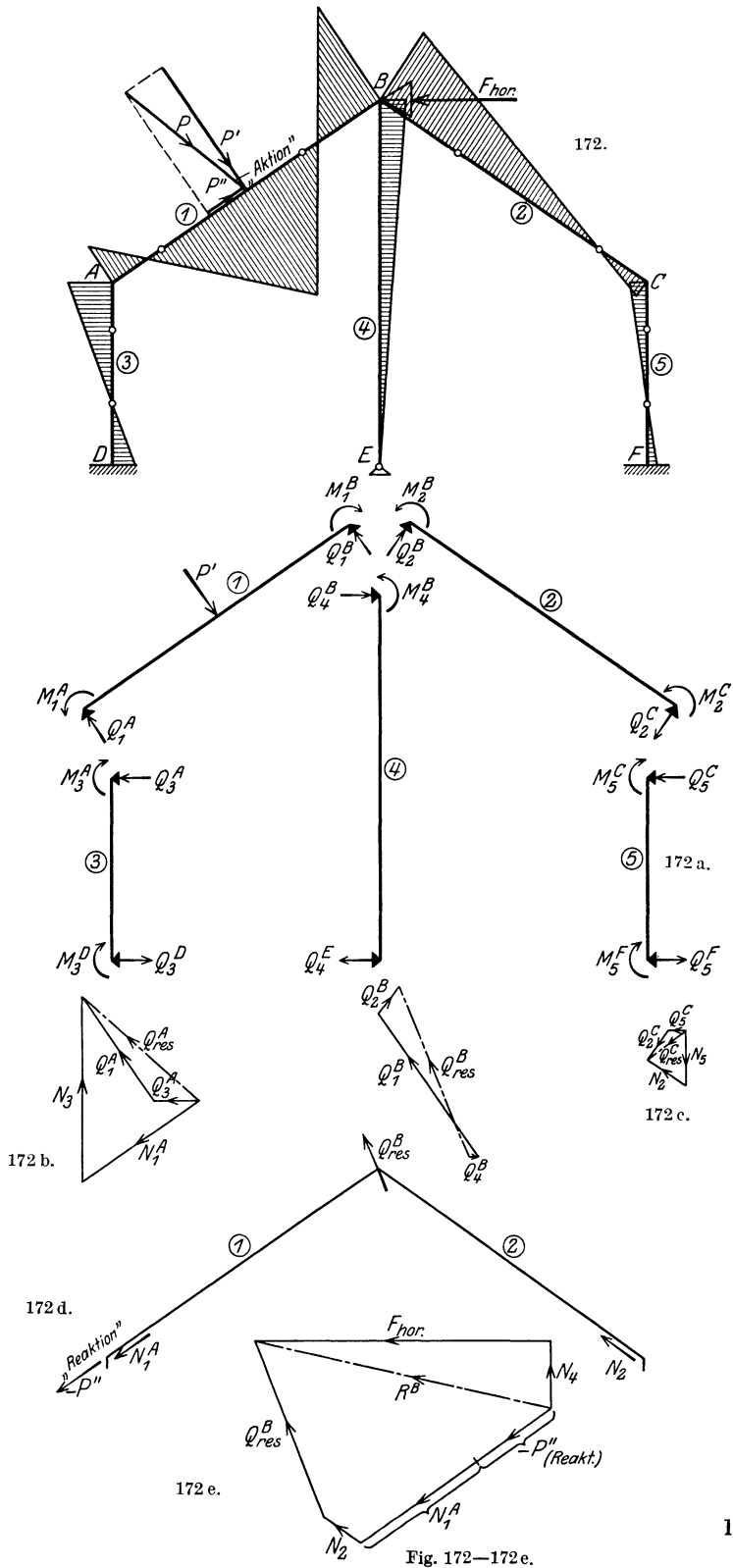


Fig. 172—172 e.

Abschnitt 1) als auch die Querkräfte an den Köpfen aller Säulen ermittelt worden (Fig. 173a). Da die inneren Knotenpunktskräfte senkrecht aufeinanderstehen, wählen wir als Richtung der Festhaltungskraft die Waagrechte durch einen der beiden Knotenpunkte. Die senkrechten Kräfte an den Knotenpunkten A und B fallen in die betreffenden Auflagerstäbe, scheiden damit aus, und es

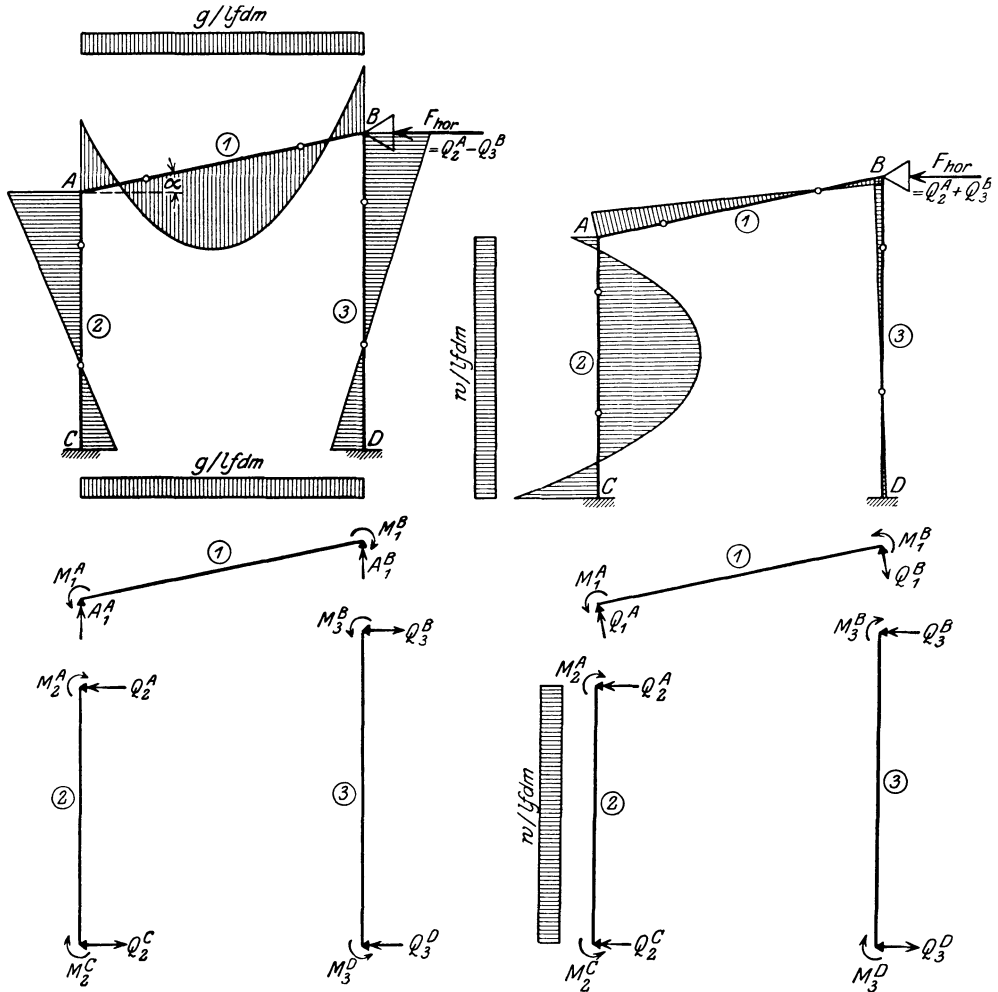


Fig. 173 — 173c.

bleiben nur die waagrechten Kräfte Q_2^A und Q_3^B als Komponenten der Festhaltungskraft F_{hor} übrig. Zerlegen wir nun sowohl Q_2^A als auch Q_3^B in den betreffenden Auflagerstab (die Senkrechte), und den unter dem Winkel α zur Waagrechten geneigten Balken I , so erhalten wir

$$N_1^A = \frac{Q_2^A}{\cos \alpha} \quad \text{und} \quad N_1^B = \frac{Q_3^B}{\cos \alpha},$$

wodurch die Festhaltungskraft F_1 in Richtung des Balkens I

$$F_1 = N_1^A + N_1^B = \frac{Q_2^A + Q_3^B}{\cos \alpha}$$

erhalten. Verschieben wir nun die Kraft F_1 in ihrer Richtung an einen der beiden Knotenpunkte und zerlegen dieselbe in Richtung des betreffenden Auflagerstabes (die Senkrechte) und die Waagrechte, so erhalten wir die horizontale Festhaltungskraft

$$F_{hor} = F_1 \cdot \cos \alpha = Q_2^A + Q_3^B, \quad (329)$$

d. h. an einem Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigten Balken ist die horizontale Festhaltungskraft für senkrechte Belastung des geneigten Balkens gleich der Summe der Querkräfte an den Säulenköpfen. Dies gilt nicht nur für den Rahmen der Fig. 173, sondern auch z. B. für die Rahmen der Fig. 171 und 172.

Ist eine Säule des Rahmens durch horizontalen Winddruck oder Erddruck belastet (Fig. 173 b), so ermitteln wir wieder die Querkräfte an den Knotenpunkten (Fig. 173 c).

Als Richtung für die gesuchte Festhaltungskraft wählen wir die Waagrechte durch einen Knotenpunkt. Wir zerlegen die an den Knotenpunkten angreifenden Querkräfte einzeln in die Senkrechte und Waagrechte. Die beiden Querkräfte Q_1^A und Q_2^B sind gleich und entgegengesetzt, ergeben also auch Horizontalprojektionen, die gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Da an den Knotenpunkten A und B nur waagrechte Kräfte angreifen, so ist die waagrechte Festhaltungskraft nach Gl. (329) einfach gleich der Summe dieser Kräfte; es ist also, da sich die beiden, von den Querkräften am unbelasteten Balken herrührenden waagrechten Komponentengeneinander aufheben:

$$F_{hor} = Q_2^A + Q_3^B. \quad (329a)$$

Als Kontrolle muß sein:

$$\sum w + Q_2^A + Q_2^C + Q_3^B + Q_3^D = 0.$$

Das Analoge gilt auch z. B. für die Rahmen der Fig. 171 und 172.

Steht die durch horizontalen Winddruck oder Erddruck belastete Säule schief (Fig. 174) anstatt senkrecht, so bestimmen wir an den Enden derselben wohl analog wie an dem durch senkrechte Kräfte (z. B. Eigengewicht) belasteten Balken (Fig. 173) an Stelle der Querkräfte die senkrechten Auflager-

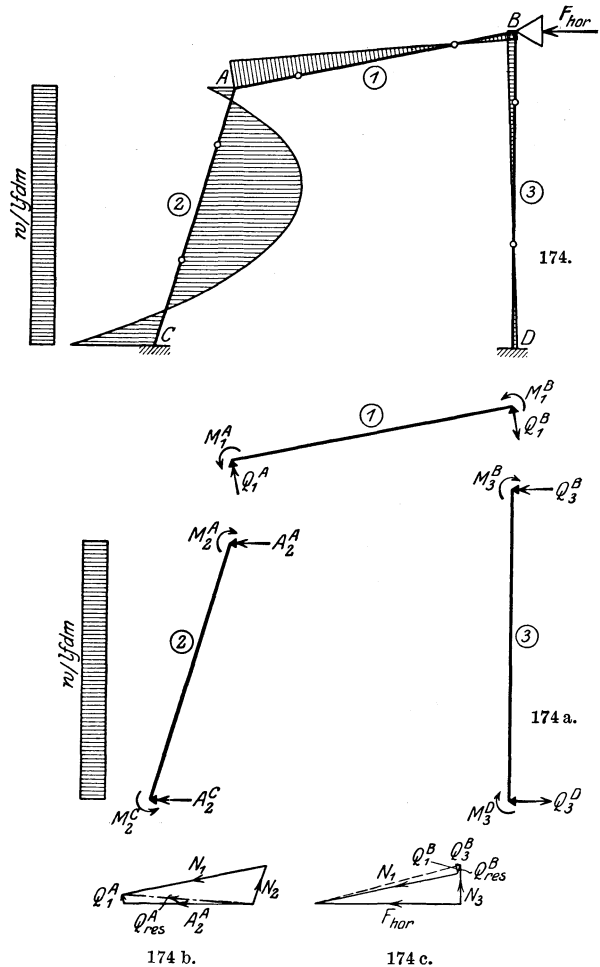


Fig. 174—174 c.

drücke A (Fig. 174a), wir müssen jedoch die Bestimmung der Festhaltungskraft, wie z. B. am Rahmen der Fig. 176, nach dem allgemeinen Verfahren vornehmen, da die Säulen nicht mehr parallel verlaufen. Wir bilden am Knotenpunkt A die Resultierende Q_{res}^A aus A_2^A und Q_1^A und zerlegen dieselbe in Richtung des Auflagerstabes 2 und des Balkens (Fig. 174b). Dann setzen wir am Knotenpunkt B Q_1^B und Q_3^B zu Q_{res}^B zusammen (Fig. 174c) und bilden die Resultierende von Q_{res}^B und der in Fig. 174b bestimmten „Reaktion“ N_1 ; durch Zerlegung derselben in Richtung des Auflagerstabes 3 und die Horizontale erhalten wir darauf die gesuchte Festhaltungskraft F_{hor} .

7 Rahmen mit schiefen Endsäulen und waagrechttem Balken (Fig. 175).

Die Balkenöffnung I sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir wieder in eine Komponente P' normal zum belasteten Stab und eine Komponente P'' in Richtung dieses Stabes zerlegen. Der Rahmen sei während

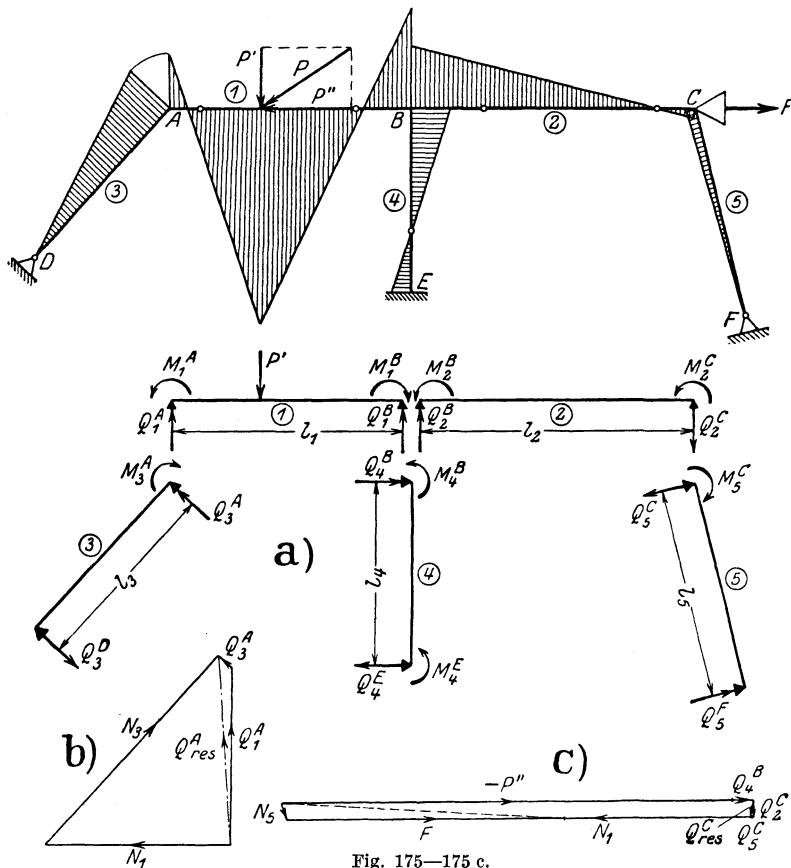


Fig. 175—175 c.

R. I durch ein in C gedachtes, festes Lager unverschiebbar festgehalten und wir suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft in Richtung des Balkens. Die Momentenfläche für diesen Zustand infolge der Belastung P' (Fig. 175) nehmen wir als gegeben an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden des Rahmens (Fig. 175a) und bilden die Resultierende Q_{res} an jedem

Knotenpunkt. In Knotenpunkt A zerlegen wir nun Q_{res}^A (Fig. 175b) in die Komponenten N_1^A und N_3 , von welchen nur N_1^A eine Komponente der Festhaltungskraft ist. Im Knotenpunkt B ist eine Zusammensetzung der Querkräfte $(Q_1^B + Q_2^B)$ und Q_4^B zu Q_{res}^B und eine Zerlegung der letzteren in Richtung des Auflagerstabes 4 und in Richtung des horizontalen Balkens nicht erforderlich, weil ja die Komponenten $(Q_1^B + Q_2^B)$ bereits in die Richtung des Auflagerstabes 4 und die Komponente Q_4^B in die Richtung des horizontalen Balkens fällt. Im Knotenpunkt C setzen wir (Fig. 175c) nun Q_{res}^C mit N_1^A , Q_4^B und der Reaktion der Komponente P'' der äußeren Last, also $-P''$, zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 5 und in die Balkenrichtung; dann ist die letztere Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft in Richtung des Balkens.

Wäre der Rahmen der Fig. 175 durch horizontalen Winddruck auf eine Endsäule belastet, so würden wir diese Belastung analog dem unter Sonderfall zu Abschnitt I Gesagten zweckmäßig nicht zerlegen, sondern die Momentenfläche mit der Projektion der Säulenlänge auf die Senkrechte ermitteln und schiefssymmetrisch oder rechtwinklig an die Säule antragen. Ferner würden wir dann zur Bestimmung der Festhaltungskraft am Säulenkopf nicht die Querkraft (normal zur Säulenachse), sondern den waagrechten Auflagerdruck A ermitteln und diesen in der weiteren Berechnung verwenden.

8. Rahmen mit schiefen Säulen und geneigtem Balken

(Fig. 176).

Der Balken sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir wieder in die Komponenten P' und P'' normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Der Rahmen sei während R. I durch ein in B gedachtes Lager unverschiebbar festgehalten und wir suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft in Richtung des geneigten Balkens. Die Momentenfläche für diesen Zustand (R. I) infolge der Belastung P' (Fig. 175) nehmen wir als gegeben an und

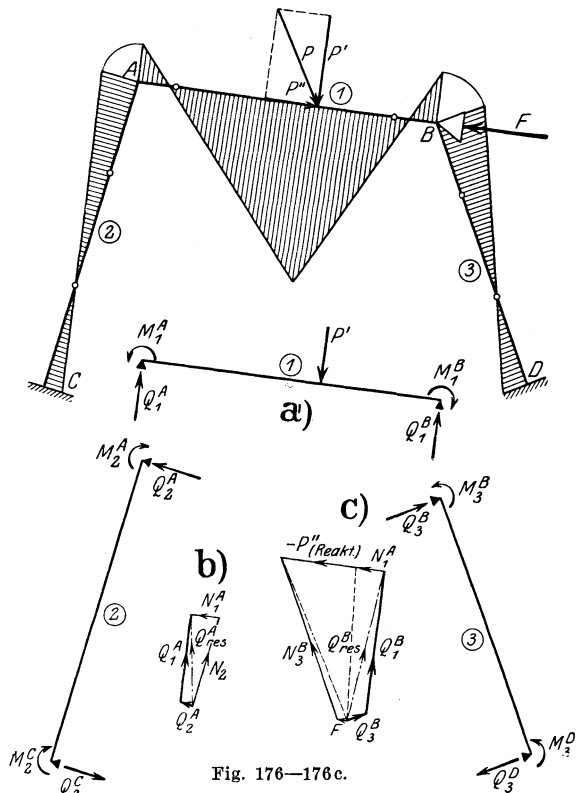


Fig. 176—176c.

ermitteln die zugehörigen Querkräfte an beiden Knotenpunkten des Rahmens (Fig. 175a) und bilden die Resultierenden Q_{res}^A und Q_{res}^B . Im Knotenpunkt A zerlegen wir Q_{res}^A (Fig. 175b) in die Komponenten N_2 und N_1^A , von welchen nur N_1^A eine Komponente der Festhaltungskraft ist. Im Knotenpunkt B

setzen wir (Fig. 175c) Q_{res}^B mit N_1^A sowie der Reaktion der Komponente P'' der äußeren Last, also $-P''$, zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 3 und diejenige des geneigten Balkens (Stab 1); dann ist die in Richtung des Balkens fallende Kom-

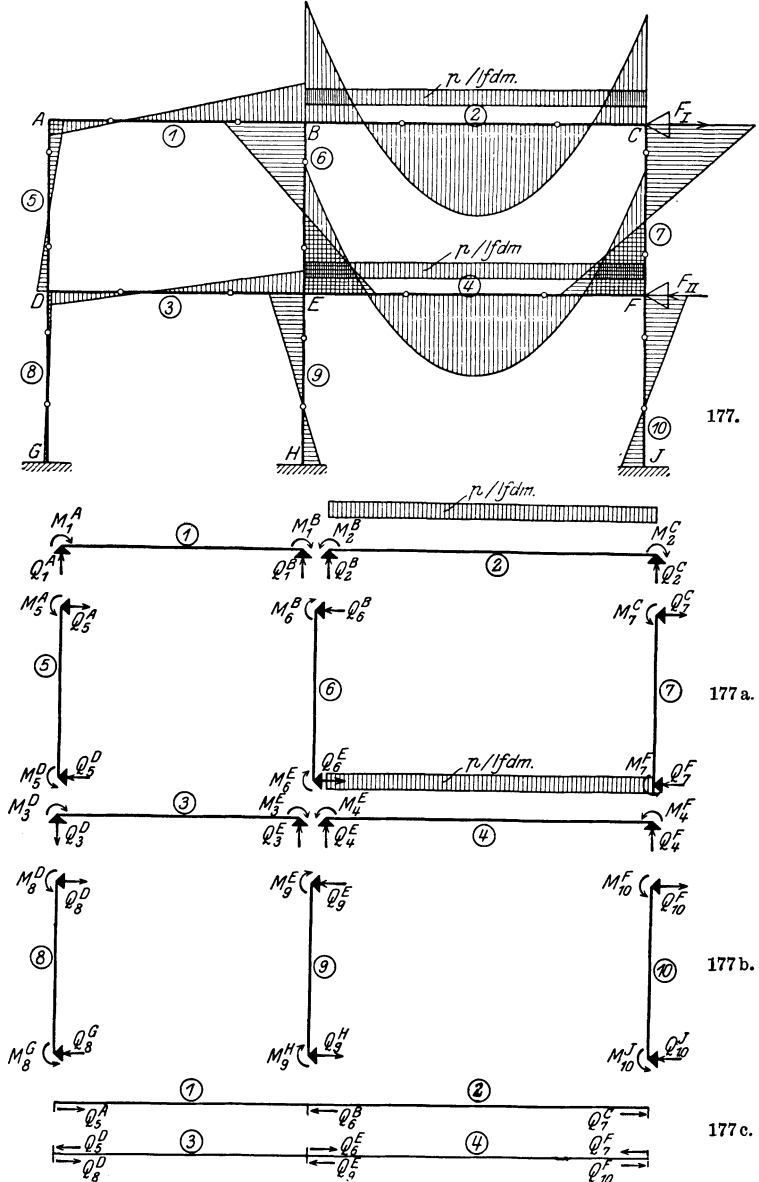


Fig. 177—177 c.

ponente die gesuchte Festhaltungskraft in Richtung des geneigten Balkens. Wünschen wir die Festhaltungskraft F_{hor} in Richtung der Horizontalen durch den Knotenpunkt B, so zerlegen wir in Fig. 175 b die Resultierende aus Q_{res}^B , N_1^A und $-P''$ in Richtung des Auflagerstabes 3 und die Horizontale.

9. Zweistöckiger Rechteckrahmen (Fig. 177).

Der Stab 10 des Rahmens sei mit gleichmäßig verteilter Last p pro lfd. m belastet. Der Stockwerkrahmen sei ferner (während R. I) durch je ein gedachtes festes Lager in den Knotenpunkten J und F unverschiebbar festgehalten und wir suchen die in denselben auftretenden Festhaltungskräfte F_I und F_{II} . Die Momentenfläche für diesen Zustand (R. I) infolge der gegebenen Belastung (Fig. 177) nehmen wir als gegeben an und ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 177). Genau wie am einstöckigen Rechteckrahmen der Fig. 168 setzen wir die senkrecht aufeinander stehenden Querkräfte an den einzelnen Knotenpunkten nicht erst zu Q_{res} zusammen und zerlegen diese dann in dieselben Richtungen, sondern wir sehen, daß alle Querkräfte an den Enden der waagrechten Balken ganz in die senkrechten Säulen und die Querkräfte an den Enden der die Säulen bildenden Stäbe ganz in die waagrechten Balken fallen. Die in die Säulen fallenden Querkräfte werden von diesen in die Fundamente A , B und C übertragen und scheiden daher aus. Um die beiden an einem zweistöckigen Rahmen auftretenden Festhaltungskräfte F_I und F_{II} zu bestimmen, brauchen wir nur die waagrechten Querkräfte („Reaktionen“) der Knotenpunkte, welche in die betreffende Balkenrichtung fallen, zu vereinigen. In der Balkenrichtung 9—10 wirken die Reaktionen Q_6^G , Q_7^H und Q_8^J (Fig. 177 b), welche zusammengesetzt die Festhaltungskraft F_I ergeben; in der Balkenrichtung 4—5 wirken die Reaktionen Q_6^D , Q_7^E , Q_8^F sowie Q_1^D , Q_2^E und Q_3^F (Fig. 177 c), welche zusammengesetzt die Festhaltungskraft F_{II} ergeben.

10. Zweistöckiger unsymmetrischer Jochrahmen (Fig. 178).

Der Stab 3 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir wieder in die Komponenten P' und P'' normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Der Rahmen sei (während R. I) durch je ein gedachtes festes Lager in den Knotenpunkten B und D unverschiebbar festgehalten und wir suchen die in denselben auftretenden Festhaltungskräfte F_I und F_{II} . Die Momentenfläche für diesen Zustand (Fig. 178) infolge der gegebenen Belastung nehmen wir als gegeben an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden und bilden die Resultierende Q_{res} an jedem Knotenpunkt. Im Knotenpunkt A zerlegen wir Q_{res}^A (Fig. 178 a) in die Komponenten N_1 und N_3^A , von welchen nur N_1 eine Komponente der Festhaltungskraft F_I ist, während N_3^A bei der Bestimmung der Festhaltungskraft F_{II} in Betracht kommt. Nun setzen wir am Knotenpunkt B Q_{res}^B mit N_1 zusammen (Fig. 178 b) und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Stabes 4 und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_I . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_{II} setzen wir in Fig. 178 c Q_{res}^C mit der in Fig. 178 a bestimmten „Reaktion“ N_3^A sowie der „Reaktion“ von P'' zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Komponenten N_2 und N_5 , von denen nur N_2 eine Komponente der Festhaltungskraft F_{II} ist. Schließlich setzen wir in Fig. 178 d Q_{res}^D mit der in Fig. 178 c bestimmten „Reaktion“ N_2 sowie der in Fig. 178 b bestimmten „Reaktion“ N_4 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende

Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 6 und die Horizontale; die in die Horizontale fallende Komponente ist dann die gesuchte Festhaltungskraft F_{II} .

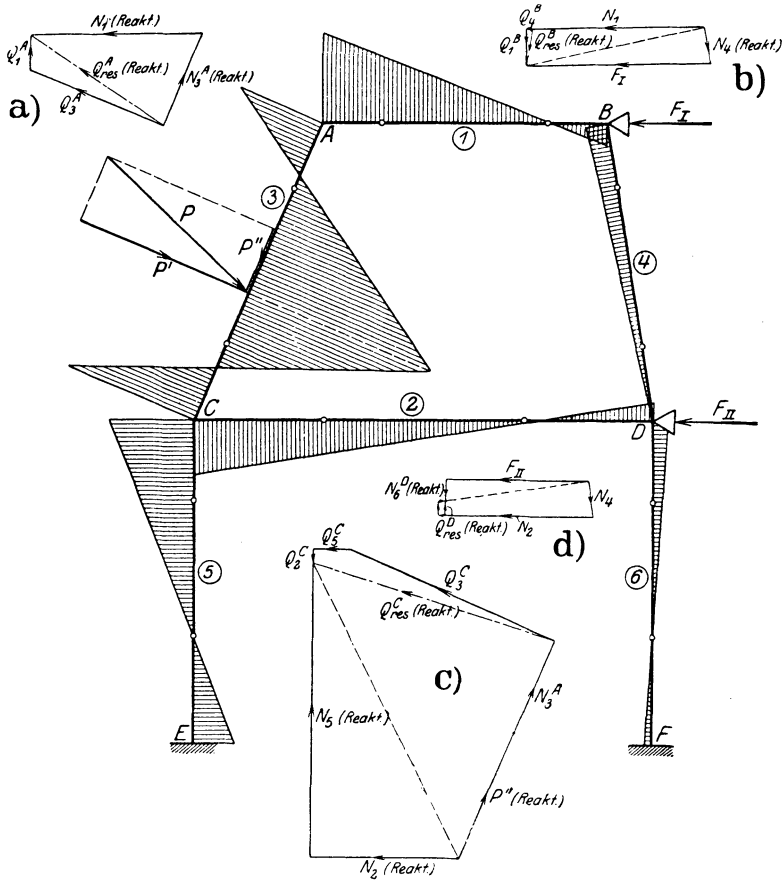


Fig. 178—178 d.

11. Dachrahmen, einstöckig (Fig. 179).

Der Stab 2 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir wieder in die Komponenten P' und P'' normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Am Rahmen muß während R. I, damit sich seine Knotenpunkte nicht verschieben können, in B oder C ein festes Lager angebracht werden. Wir bringen dieses Lager beispielsweise am Knotenpunkt B an und suchen die in demselben auftretende Festhaltungskraft (Auflagerdruck) in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für diesen Zustand (R. I) infolge der Belastung P' nehmen wir als gegeben (Fig. 179) an, ermitteln die zugehörigen Querkräfte an den Knotenpunkten B und C (Fig. 179 a) und bilden die Resultierenden Q_{res}^B und Q_{res}^C . Im Knotenpunkt C zerlegen wir nun Q_{res}^C (Fig. 179 b) in die Komponenten N_3 und N_2^C , von welchen nur N_2^C eine Kom-

ponente der gesuchten Festhaltungskraft ist. Darauf setzen wir im Knotenpunkt BQ_{res}^B (Fig. 179c) mit der in Fig. 179b bestimmten „Reaktion“ N_2^C

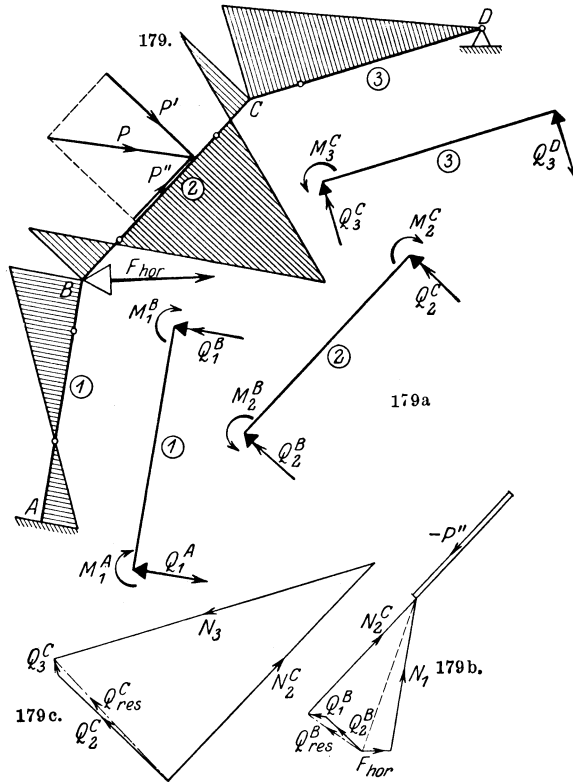


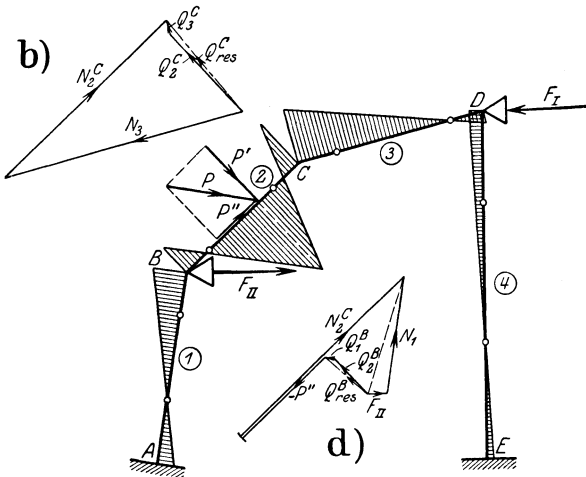
Fig. 179—179 c.

und der „Reaktion“ von P'' , also $-P''$, zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 1 und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_{hor} .

12. Dachrahmen, „nach der Seite“ zweistöckig (Fig. 180).

Der Stab 2 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir wieder in die Komponenten P' und P'' normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Am Rahmen muß während R. I, damit sich seine Knotenpunkte nicht verschieben können, in den Knotenpunkten B und D je ein festes Lager angebracht werden. Wir suchen nun die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte F_I und F_{II} in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der Belastung P' nehmen wir als gegeben an (Fig. 180), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 180a) und bilden die Resultierende Q_{res} an jedem Knotenpunkt. Im Knotenpunkt C zerlegen wir nun Q_{res}^C (Fig. 180b) in die Komponenten N_3 und N_2^C , von welchen die erstere eine Komponente von F_I

und letztere eine Komponente von F_{II} ist. Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_I setzen wir in Fig. 180c Q_{res}^D mit der in Fig. 180b bestimmten „Reaktion“ N_3 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende



in Richtung des Auflagerstabes 4 und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_I . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_{II} setzen wir in Fig. 180d Q_{res}^B mit der in Fig. 180b bestimmten „Reaktion“ N_2^C sowie der „Reaktion“ von P'' (also nach abwärts gerichtet) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 1 und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_{II} .

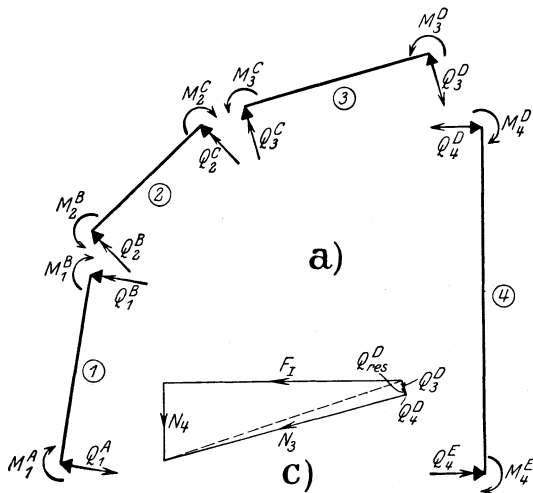


Fig. 180—180 d.

13. Einfacher Hallenrahmen, „nach der Seite“ zweistöckig (Fig. 181).

Der Stab 2 sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir wieder in die Komponenten P' und P'' normal und parallel zum belasteten Stab

zerlegen. Am Rahmen muß während R. I, damit sich seine Knotenpunkte nicht verschieben können, in den Knotenpunkten B und D je ein festes Lager angebracht werden. Wir suchen die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte F_I und F_{II} in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der Belastung P' nehmen wir als gegeben an (Fig. 181), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 181a) und bilden die Resultierende Q_{res} an jedem Knotenpunkt. In Fig. 181b zerlegen wir darauf Q_{res}^C in die Komponenten N_2^C und N_3 , von welchen erstere einen Anteil zu F_I und letztere einen solchen zu F_{II} liefert. Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_I setzen wir in Fig. 181c Q_{res}^B mit der in

Fig. 181 b bestimmten „Reaktion“ N_2^C und der „Reaktion“ von P'' (also nach abwärts gerichtet) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 1 und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_I . Zur

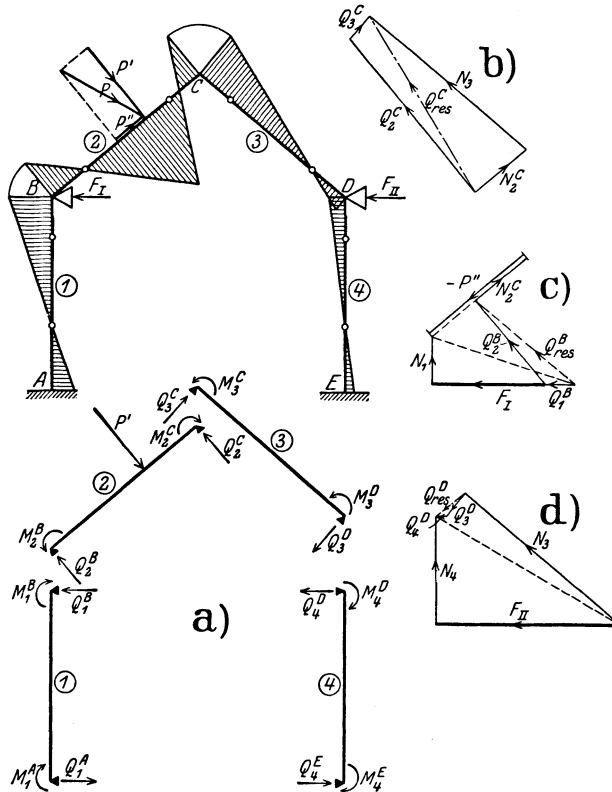


Fig. 181—181 d.

Bestimmung der Festhaltungskraft F_{II} setzen wir in Fig. 181 d Q_4^D mit der in Fig. 181 b bestimmten „Reaktion“ N_3 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 4 und die Horizontale; die in die letztere fallende Komponente ist dann gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_{II} .

14. Doppelter Hallenrahmen, „nach der Seite“ dreistöckig (Fig. 182).

Der Stab 4 sei mit einer vertikalen Kraft P_1 und der Stab 6 mit einer beliebig gerichteten Kraft P_2 belastet; beide zerlegen wir zur Durchführung der Berechnung in je eine Komponente normal und parallel zum belasteten Stab. Damit sich die Knotenpunkte des Rahmens während Rechnungsabschnitt I nicht verschieben können, müssen wir an den Knotenpunkten B, D und F je ein festes Lager anbringen (Fig. 182); wir suchen die in diesen Lagern

infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte F_I , F_{II} und F_{III} in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der Belastung P'_1 und P'_2 nehmen wir als gegeben an (siehe Fig. 182), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden und bilden die Resultierende Q_{res} an jedem Knotenpunkt. Darauf zerlegen wir in Fig. 182a Q_{res}^C in die Komponenten N_4^C und N_5 , von welchen erstere einen Anteil zu F_I und letztere einen solchen zu F_{II} liefert. Ferner zerlegen wir in Fig. 182b Q_{res}^E in die Komponenten N_6^E und N_7 , von denen erstere einen Anteil zu F_{II} und letztere einen solchen zu F_{III} liefert. Zur Bestimmung der Festhaltungsk-

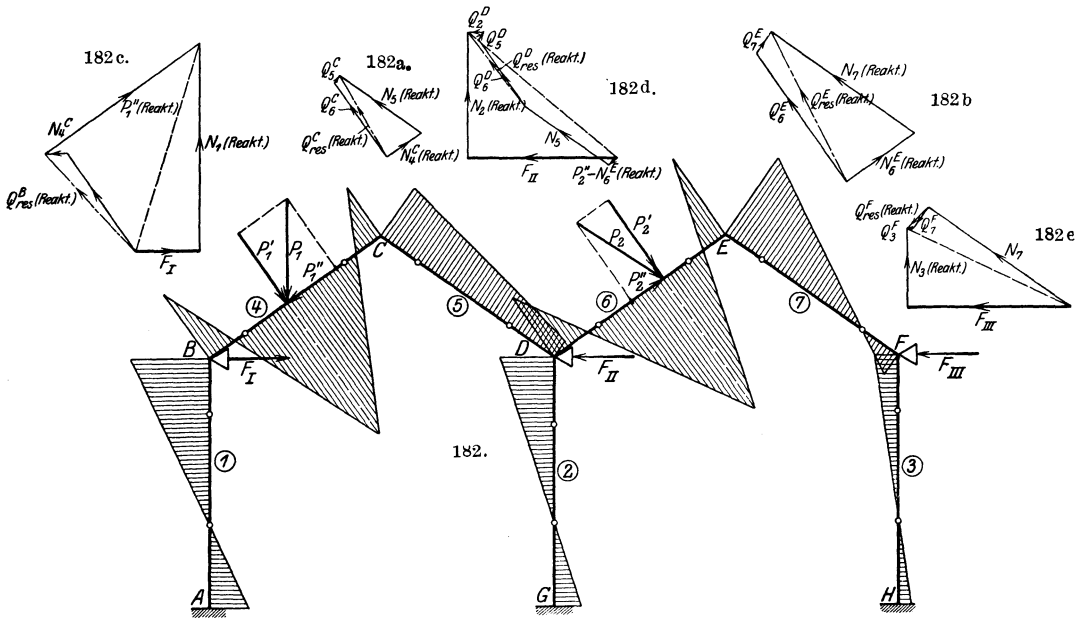


Fig. 182—182e.

kraft F_I setzen wir in Fig. 182c Q_{res}^B mit der in Fig. 182a bestimmten „Reaktion“ N_4^C und der „Reaktion“ von P'_1 (also nach aufwärts gerichtet) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 1 und die Horizontale; dann ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_I . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_{II} setzen wir in Fig. 182d Q_{res}^D mit der „Reaktion“ N_5 aus Fig. 182a, der „Reaktion“ N_6^E aus Fig. 182b und der „Reaktion“ von P'_2 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 2 und die Horizontale; die in die letztere fallende Komponente ist dann die gesuchte Festhaltungskraft F_{II} . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_{III} setzen wir in Fig. 182e Q_{res}^F mit der in Fig. 182b bestimmten „Reaktion“ N_7 zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 3 und die Horizontale; die in die letztere fallende Komponente ist dann die gesuchte Festhaltungskraft F_{III} .

15. Doppelter Dachrahmen, „nach der Seite“ dreistöckig (Fig. 183).

Der Stab 2 des Rahmens sei mit einer beliebig gerichteten Kraft P belastet, welche wir wieder in die Komponenten P' und P'' normal und parallel zum belasteten Stab zerlegen. Damit sich kein Knotenpunkt des Rahmens während Rechnungsabschnitt I verschieben kann, müssen wir an den Knotenpunkten B , E und F je ein festes Lager anbringen (siehe Fig. 183); wir suchen die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden Festhaltungskräfte F_I ,

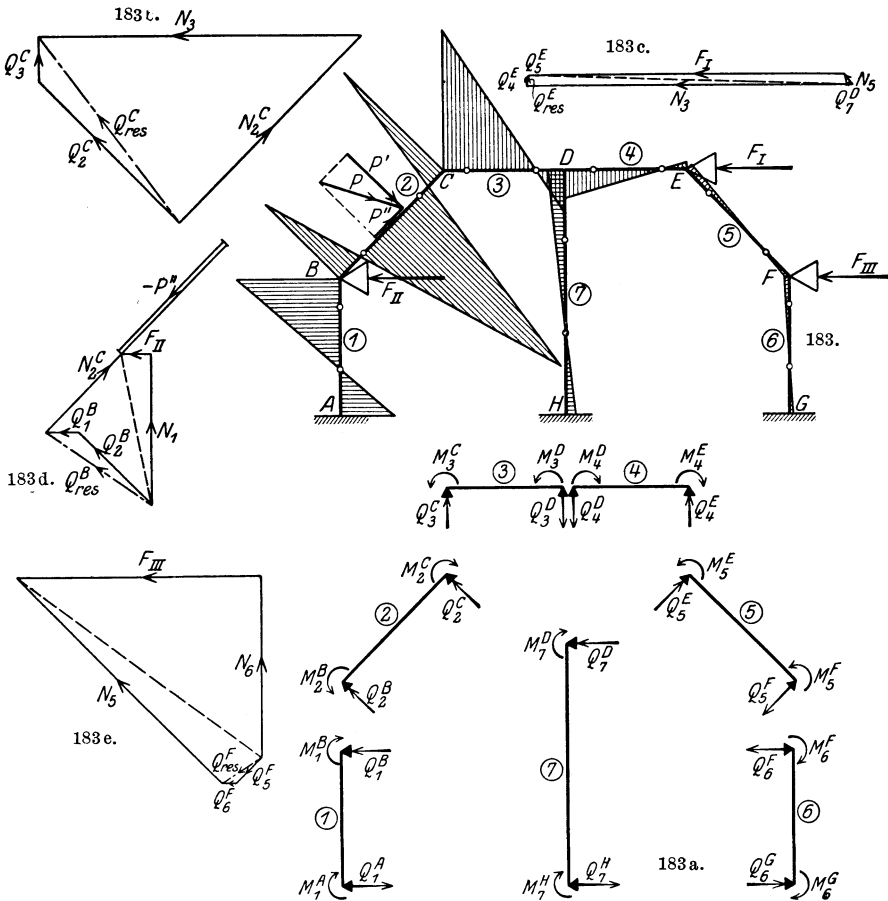


Fig. 183—183e.

F_{II} und F_{III} in horizontaler Richtung. Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand infolge der Belastung P' nehmen wir als gegeben an (siehe Fig. 183), ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden (Fig. 183a) und bilden die Resultierende Q_{res} an jedem Knotenpunkt. Darauf zerlegen wir in Fig. 183b Q_{res}^C in die Komponenten N_2^C und N_3 , von welchen erstere einen Anteil zu F_{II} und letztere einen solchen zu F_I liefert. Die im Knotenpunkt D angreifenden Querkräfte brauchen wir nicht erst zusammzusetzen und dann nachher in ihre eigenen Richtungen zu zerlegen, sondern wir erkennen,

daß Q_3^D und Q_4^D ganz in den Auflagerstab 7 fallen und damit ausscheiden und daß Q_7^D ganz von dem Lager in E aufgenommen wird. Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_I setzen wir daher in Fig. 183c Q_{res}^E mit der in Fig. 183b bestimmten „Reaktion“ N_3 sowie Q_7^D zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Richtung des Stabes 5 und die Horizontale; dann ist die horizontale Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_I . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_{II} setzen wir in Fig. 183d Q_{res}^B mit der in Fig. 183b bestimmten „Reaktion“ N_2^G und der „Reaktion“ von P'' (also nach abwärts gerichtet) zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 1 und die Horizontale; dann ist die horizontale Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_{II} . Zur Bestimmung der Festhaltungskraft F_{III} setzen wir in Fig. 183e Q_{res}^F mit der in Fig. 183c bestimmten „Reaktion“ N_5 zusammen und zerlegen die dadurch erhaltene Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 6 und die Horizontale; es ist dann die horizontale Komponente gleich der gesuchten Festhaltungskraft F_{III} .

16. Rechtwinkliger Rahmenträger auf Säulen (Fig. 184).

Die Stäbe 3 und 4 des Rahmenträgers seien mit p pro lfd. m gleichmäßig verteilt belastet. Damit sich kein Knotenpunkt des Tragwerks während Rechnungsabschnitt I verschieben kann, müssen wir an den Knotenpunkten G , H , J , E und K je ein festes Lager anbringen (siehe Fig. 184), und zwar bei G , H und J Lager mit horizontaler und bei E und K Lager mit vertikaler Auflagerfläche. Wir suchen die in diesen Lagern infolge der äußeren Belastung auftretenden

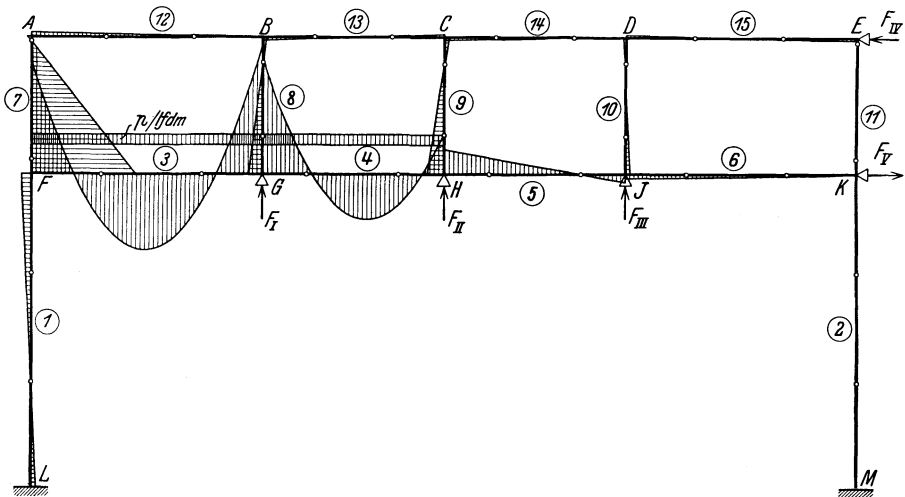


Fig. 184.

Festhaltungskräfte F_I bis F_V . Die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand nehmen wir als gegeben an (siehe Fig. 184) und wir ermitteln die zugehörigen Querkräfte an allen Stabenden. Da es sich um ein Tragwerk mit rechtwinklig zueinander stehenden Stäben handelt, so sind zur Bestimmung

der Festhaltungskräfte F_I bis F_V genau wie z. B. am Rechteck-Stockwerkrahmen der Fig. 177 keine Kräftepläne zu zeichnen, sondern es ist

- F_I gleich Resultierende aus $Q_{12}^B, Q_{13}^B, Q_3^G$ und Q_4^G ;
 F_{II} gleich Resultierende aus $Q_{13}^C, Q_{14}^C, Q_4^H$ und Q_5^H ;
 F_{III} gleich Resultierende aus $Q_{14}^D, Q_{15}^D, Q_5^J$ und Q_6^J ;
 F_{IV} gleich Resultierende aus $Q_7^A, Q_8^B, Q_9^G, Q_{10}^D$ und Q_{11}^E ;
 F_V gleich Resultierende aus $Q_7^F, Q_1^F, Q_8^G, Q_9^H, Q_{10}^J, Q_{11}^K$ und Q_2^K .

VIII. Bestimmung der inneren Kräfte an einem Tragwerk mit bogenförmigen Stäben.

1. Gang der Berechnung.

In Fig. 185 haben wir ein Tragwerk dargestellt, welches nicht nur aus geradlinigen, sondern auch aus bogenförmigen Stäben besteht, deren Trägheitsmoment beliebig veränderlich ist. Zunächst setzen wir voraus, daß die Knotenpunkte A, B, C, D dieses Tragwerkes unverschiebbar festgehalten seien (Rechnungsabschnitt I); die Bestimmung der inneren Zusatzkräfte, welche bei einer Verschiebung dieser Knotenpunkte auftreten (Rechnungsabschnitt II), ist in Kap. VIII des zweiten Teiles vorgeführt.

Der Gang der Berechnung eines solchen Tragwerkes ist im Prinzip derselbe, wie wenn nur geradlinige Stäbe vorhanden wären (Kap. I).

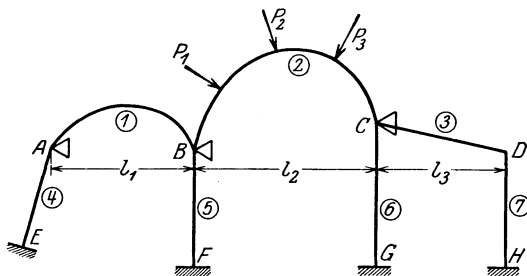


Fig. 185.

Es sei nur ein Stab, beispiels-

weise der bogenförmige Stab 2 des gewichtslosen Tragwerkes mit den beliebig gerichteten Kräften P_1, P_2 und P_3 belastet. Um die Momentenfläche am ganzen Tragwerk zu erhalten, müssen wir von dem belasteten Bogen 2 ausgehen, an welchem wegen seiner elastischen Einspannung in den Knotenpunkten B und C an letzteren sog. Kämpfermomente auftreten.

Zur Bestimmung der Momente am belasteten Bogen trennen wir denselben in den Querschnitten B_2 und C_2 von seinen beiden Widerlagern B und C (sein Widerlager in B wird gebildet durch die zwei Stäbe 1 und 5, dasjenige in C durch die zwei Stäbe 3 und 6) und stützen ihn daselbst wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte durch je ein festes Gelenklager (Fig. 185a). Um am Spannungszustand des Bogens und seiner Widerlager nichts zu ändern, müssen wir an den Schnittstellen die in denselben wirkenden Spannungen als äußere Kräfte anbringen, und zwar an den festen Gelenklagern B_2 und C_2 des Bogens 2 die Kämpfermomente M_2^B und M_2^C , wie in Fig. 185a eingetragen, und an seinen Widerlagern B und C die gleich großen, aber entgegengesetzt drehenden Momente; die Wirkung der in B und C auftretenden Kämpferresultierenden auf das Tragwerk brauchen wir vorläufig nicht zu verfolgen, da

wir ja die Knotenpunkte B und C als unverschiebbar vorausgesetzt haben. Die Kämpferresultierenden werden von den festen Gelenklagern in B_2 und C_2 aufgenommen.

Wir erkennen nun, daß die Momente am belasteten bogenförmigen Stab 2 als diejenigen des Zweigelenkbogens (Fig. 185a) belastet mit den äußeren Lasten P_1, P_2, P_3 sowie mit den Kämpfermomenten M_2^B und M_2^C erhalten werden. Am Zweigelenkbogen treten aber sowohl durch die Belastung desselben mit P_1, P_2 und P_3 als auch mit den Kämpfermomenten Bogenschübe (der allgemeine Ausdruck für Horizontalschub) auf, welche bei

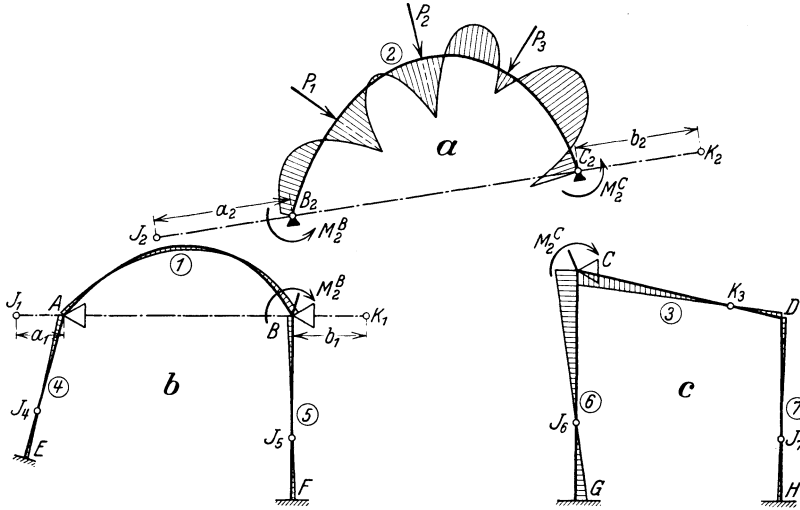


Fig. 185 a — 185 c.

der Bestimmung der Momente am Bogen berücksichtigt werden müssen und welche die Berechnung des bogenförmigen Stabes gegenüber derjenigen des geraden Stabes verwickelter gestalten.

Da die Stäbe in ihren Knotenpunkten biegungsfest miteinander verbunden sind, pflanzen sich die Momente von dem belasteten Stab aus über das ganze Tragwerk fort. Das Kämpfermoment M_2^B (Fig. 185 b) spaltet sich beim Überschreiten des Knotenpunktes B nach links in die Momente

$$M_1^B = \mu_{2-1}^B \cdot M_2^B$$

und

$$M_5^B = \mu_{2-5}^B \cdot M_2^B,$$

wenn μ wie früher die Verteilungsmaße bedeuten, welche den Momentenanteil (in Prozenten) angeben, der auf die einzelnen am Knotenpunkt anstoßenden Stäbe entfällt (siehe Kap. II). Es ist nach Formel (37) und (38)

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_5^B}{\tau_1^B + \tau_5^B},$$

$$\mu_{2-5}^B = 1 - \mu_{2-1}^B.$$

Der hierin vorkommende Drehwinkel τ_5^B des geraden Stabes 5 wird nach Kap. II, 6 bestimmt, während der Drehwinkel τ_1^B des Bogens 1 nach der gleichen Formel,

in welcher jedoch die am Zweigelenkbogen auftretenden Einheitsdrehwinkel vorkommen, ermittelt wird (siehe Abschnitt 5).

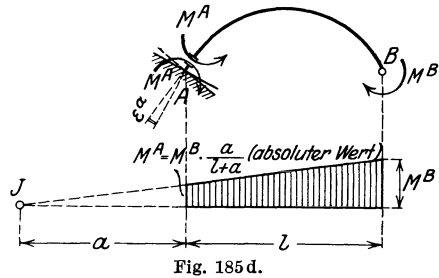
Die Momente M_1^B und M_5^B pflanzen sich nun über die unbelasteten Stäbe fort. Die Weiterleitung der Momente über die geraden Stäbe erfolgt wie früher mit Hilfe der Festpunkte des elastisch eingespannten geraden Stabes und die Weiterleitung über die bogenförmigen, an beiden Enden unverschiebbaren Stäbe mit Hilfe der Festpunkte des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes. In beiden Fällen ziehen wir vom Endpunkt des an einem Stabende als Ordinate aufgetragenen Momentes eine Gerade durch den betreffenden Festpunkt, welche dann auf der am anderen Stabende errichteten Ordinate das an diesem gesuchte Moment abschneidet. Es sei aber hervorgehoben, daß die Festpunkte beim geraden Stab innerhalb der Öffnung (positive Abstände) und diejenigen des bogenförmigen Stabes außerhalb der Öffnung (negative Abstände) liegen (vgl. Fig. 185a, b und c). Es ist also rechnerisch in beiden Fällen

$$M^A = - M^B \cdot \frac{a}{l-a}, \tag{329 a}$$

wobei jedoch zu beachten ist, daß der Wert für a beim elastisch eingespannten bogenförmigen Stab negatives Vorzeichen hat, so daß an letzterem dem absoluten Wert nach:

$$M^A = M^B \cdot \frac{a}{l+a} \quad (\text{vgl. Fig. 185 d}).$$

Während an einem unbelasteten geraden Stab durch die durch den Festpunkt gezogene Gerade der Momentenverlauf am ganzen Stab festgelegt ist, erhalten wir am unbelasteten bogenförmigen Stab I durch die durch den Festpunkt J_1 gezogene Gerade erst das Kämpfermoment am anderen Ende des Stabes; der Momentenverlauf am unbelasteten bogenförmigen Stab I ergibt sich darauf als derjenige des Zweigelenkbogens belastet mit den Kämpfermomenten M_1^A und M_1^B .



Wir erkennen, daß das durch die Kämpferverbindungsline, die Momentenordinaten M_1^B und M_1^A sowie die Verbindungsline der letzteren gebildete Momententrapez nichts anderes ist als die Balkenmomentenfläche (M_0 -Fläche) für diesen Belastungszustand, welche noch mit der Momentenfläche herrührend vom Bogenschub des Zweigelenkbogens infolge Belasten desselben mit den Kämpfermomenten M_1^A und M_1^B zusammen gesetzt werden muß, um die Momentenfläche (Fig. 185b) am ganzen Stab I zu erhalten.

Das Moment M_1^A wird nun mit Hilfe des unteren Festpunktes über den unbelasteten geraden Stab 4 weitergeleitet.

Die rechts von C abgetrennte Konstruktion (Fig. 185c) besteht nur aus geraden Stäben. Das Kämpfermoment M_2^C wird deshalb in bekannter Weise unter Benutzung der Festpunkte des geraden Stabes über die unbelasteten Stäbe 3, 6 und 7 fortgepflanzt.

Sind mehrere Stäbe gleichzeitig belastet, so bestimmt man die Momentenflächen am ganzen Tragwerk für die Belastung dieser Stäbe getrennt voneinander

und addiert darauf die Momente unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen; die daraus hervorgehenden totalen Kämpfermomente sind dann der weiteren Berechnung, besonders der Bestimmung des Bogenschubes H an den bogenförmigen Stäben zugrunde zu legen.

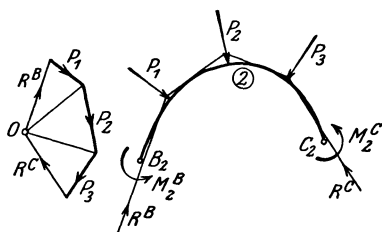


Fig. 185 e.

Um die Quer- und Normalkräfte am belasteten bogenförmigen Stab 2 zu erhalten, zeichnen wir für den mit den äußeren Lasten und den (bei Belastung mehrerer Stäbe totalen) Kämpfermomenten belasteten Zweigelenkbogen die Stützlinie (Fig. 185 e), welche gleichzeitig eine Probe für die Rechnung bildet; am unbelasteten bogenförmigen Stab 1 ist die Stütz-

linie eine Gerade in einem gewissen Abstand von den beiden Gelenken, sie wird jedoch nicht gebraucht, da es einfacher ist, die inneren Kräfte am unbelasteten Bogen analytisch zu bestimmen.

Die Quer- und Normalkräfte an den geradlinigen Stäben bestimmen wir in bekannter Weise nach Kap. VI.

Zum Schluß ermitteln wir an einem Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten, welches in letzteren nur vorübergehend festgehalten gedacht ist, die sog. Festhaltungskräfte, welche alle Knotenpunkte in Ruhe halten. Ein Tragwerk mit bogenförmigen Stäben, wie z. B. dasjenige der Fig. 185 kann nicht durch eine einzige Festhaltungskraft unverschiebbar festgehalten werden, genau wie dies auch beim Stockwerkrahmen (Kap. VII, 2) nicht möglich ist. Wir erhalten eine Festhaltungskraft F^A im Knotenpunkt A , eine Festhaltungskraft F^B im Knotenpunkt B und eine Festhaltungskraft F^C im Knotenpunkt C , welche letztere wegen des geradlinigen Stabes 3 auch den Knotenpunkt D in Ruhe hält; diese Festhaltungskräfte werden aus den in den Knotenpunkten wirkenden Kämpferresultierenden der anschließenden bogenförmigen Stäbe und den Quer- und Normalkräften der anschließenden geraden Stäbe gewonnen.

Sind die Kämpfer der bogenförmigen Stäbe des zu berechnenden Tragwerkes durch elastische Zugbänder miteinander verbunden, so ändert sich der Rechnungsvorgang während R. I nicht. Am Rahmen der Fig. 185 f z. B. müssen während R. I wie am Rahmen der Fig 185 die Knotenpunkte (Bogenkämpfer) A , B und C durch je ein festes Lager an denselben unverschiebbar festgehalten werden.

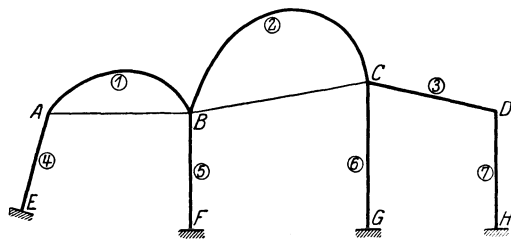


Fig. 185 f.

Anmerkung: Der größeren Übersichtlichkeit wegen haben wir den Berechnungsgang des Rahmens der Fig. 185 unter der Voraussetzung vorgeführt, daß der Stab 4 als ein geradliniger und der Stab 1 als ein bogenförmiger Stab betrachtet wird, wodurch wir genötigt sind, während R. I auch am Knotenpunkt A ein gedachtes festes Lager anzubringen. Aus Teil II werden wir ersehen, daß die Berechnung um so mehr Zeitaufwand erfordert, je mehr Knotenpunkte während R. I mit einem gedachten festen Lager versehen werden müssen. Aus diesem Grunde wäre es auch zweckmäßig, den geraden

bogenförmiger Stab betrachtet wird, wodurch wir genötigt sind, während R. I auch am Knotenpunkt A ein gedachtes festes Lager anzubringen. Aus Teil II werden wir ersehen, daß die Berechnung um so mehr Zeitaufwand erfordert, je mehr Knotenpunkte während R. I mit einem gedachten festen Lager versehen werden müssen. Aus diesem Grunde wäre es auch zweckmäßig, den geraden

Stab EA und den bogenförmigen Stab AB zusammen als einen unsymmetrischen bogenförmigen Stab zu betrachten, der eben noch ein gerades Stück aufweist, was aber für die Berechnung nichts zu sagen hat.

Sind die Kämpfer eines bogenförmigen Stabes jedoch durch ein Zugband miteinander verbunden (Fig. 185f), so muß ein solcher Stab für sich allein betrachtet werden.

2. Bestimmung der Festpunkte des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes.

Die beiden Festpunkte eines elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes, dessen Enden keine Verschiebungen ausführen, sind wie beim geraden Stab diejenigen Punkte, in welchen die Verbindungslinie der Kämpfermomente herührend von einem an einem Stabende eingeleiteten Moment die Kämpferverbindungsline schneidet.

Wir wissen aus der Anschauung, daß an einem elastisch eingespannten bogenförmigen Stab, an dessen einem Ende ein Moment eingeleitet wird, das dadurch am anderen Ende hervorrgeufene Kämpfermoment, im Gegensatz zum geraden Stab, das gleiche Vorzeichen hat; demgemäß muß der Festpunkt, in welchem die Verbindungsgerade der beiden Kämpfermomente die Kämpferverbindungsline schneidet, im Gegensatz zu demjenigen des elastisch eingespannten geraden Stabes, außerhalb der Öffnung liegen, und ist daher nicht gleichzeitig Momentennullpunkt des Stabes für den genannten Belastungszustand (vgl. Fig. 185d).

Diese Festpunkte haben eine von der äußeren Belastung unabhängige Lage.

Die Ableitung des Ausdruckes für die Festpunktabstände a und b des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes gestaltet sich genau gleich wie diejenige des geraden Stabes (Kap. II, 3).

Bezeichnen wir analog wie bei den Ableitungen für den geraden Stab mit:

φ^a bzw. φ^b (Fig. 186a) den Drehwinkel am linken bzw. rechten Ende des Zweigelenkbogens infolge der äußeren Belastung oder einer Temperaturänderung des Bogens;

α bzw. β (Fig. 186b) den Drehwinkel am linken bzw. rechten Ende des Zweigelenkbogens infolge Belastung des linken Endes mit dem Moment $M = 1$ (der Drehwinkel β ist an dem Ende angenommen, wo das Moment nicht eingeleitet wird);

β bzw. γ (Fig. 186c) den Drehwinkel am linken bzw. rechten Ende des Zweigelenkbogens infolge Belastung des rechten Endes mit dem Moment $M = 1$ (der Winkel β in Fig. 186c ist nach dem Satze von der Gegenseitigkeit der Formänderungen gleich dem Winkel β in Fig. 186b);

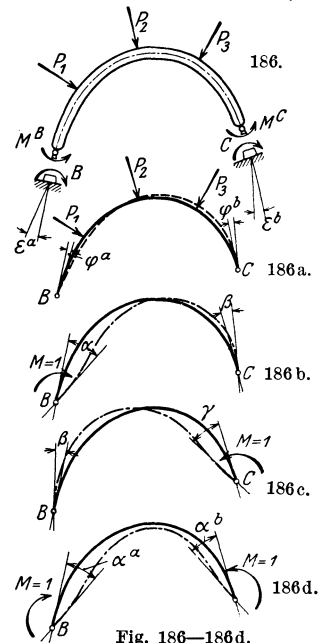


Fig. 186—186d.

α^a bzw. α^b (Fig. 186d) den Drehwinkel am linken bzw. rechten Ende des Zweigelenkbogens infolge der gleichzeitigen Belastung des linken und des rechten Endes mit dem Moment $M = 1$,

ε^a bzw. ε^b (Fig. 186) die Drehung des Widerlagers B bzw. C des bogenförmigen Stabes infolge Belastung des betreffenden Widerlagers mit dem Moment $M = 1$,

so erhalten wir für den Festpunktabstand a des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes die allgemeine Hauptformel:

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a}. \quad (330)$$

Analog erhalten wir für den Festpunktabstand b des bogenförmigen Stabes die allgemeine Hauptformel:

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b}. \quad (330a)$$

Die Werte der hierin vorkommenden Drehwinkel am Zweigelenkbogen werden nach Abschnitt 4 und 5 ermittelt; für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind diese Drehwinkel im Anhang angegeben.

Aus Fig. 186b und 186c ersehen wir, daß der Drehwinkel β stets negativ ist, so daß die Werte für die Festpunktabstände ebenfalls negativ werden, d. h. von den Kämpfern nach außen abzutragen sind.

Ist der Einspannungsgrad in A sehr klein, so fällt der Festpunkt J beinahe mit dem Kämpfer A zusammen. Mit wachsendem Einspannungsgrad des Kämpfers sowie auch mit abnehmendem Pfeilverhältnis $\frac{f}{l}$ des Bogens entfernt sich der Festpunkt vom Kämpfer.

3. Bestimmung der Kämpfermomente infolge beliebiger Belastung des elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes.

Zur Bestimmung der beiden Kämpfermomente M^B und M^C am bogenförmigen Stab 2 mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment erhalten wir, genau wie in Kap. V, Abschnitt 1a, für den geraden Stab abgeleitet, aus der Bedingung, daß die Summe der von ihnen am Stabende B_2 und Widerlager B bzw. am Stabende C_2 und Widerlager C (Fig. 186) des Zweigelenkbogens hervorgerufenen Drehwinkel je gleich Null sein muß und unter Berücksichtigung der im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Bezeichnungen die Elastizitätsbedingungen des belasteten bogenförmigen Stabes, analog denjenigen für den geraden Stab [Gl. (213) und (214)]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^a + M^B \cdot \alpha + M^C \cdot \beta + M^B \cdot \varepsilon^a &= 0, \\ \varphi^b + M^B \cdot \beta + M^C \cdot \gamma + M^C \cdot \varepsilon^b &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (331)$$

woraus sich

analytisch

die beiden Kämpfermomente ergeben zu:

$$M^B = \frac{-\varphi^a(\gamma + \varepsilon^b) + \varphi^b \cdot \beta}{(\alpha + \varepsilon^a) \cdot (\gamma + \varepsilon^b) - \beta^2}, \quad (332)$$

$$M^C = \frac{-\varphi^b(\alpha + \varepsilon^a) + \varphi^a \cdot \beta}{(\alpha + \varepsilon^a) \cdot (\gamma + \varepsilon^b) - \beta^2}. \quad (333)$$

Nun ist nach Gl. (4), welche auch für den bogenförmigen Stab gilt:

$$(\alpha + \varepsilon^a) = \frac{l-a}{a} \cdot \beta,$$

und analog muß sein:

$$(\gamma + \varepsilon^b) = \frac{l-b}{b} \cdot \beta;$$

setzen wir diese Werte in die Gl. (332) und (333) ein, so erhalten wir:

$$M^B = \frac{-\varphi^a \cdot \frac{l-b}{b} \cdot \beta + \varphi^b \cdot \beta}{\frac{l-a}{a} \cdot \beta \cdot \frac{l-b}{b} \cdot \beta - \beta^2} = \frac{-\varphi^a \cdot a(l-b) + \varphi^b \cdot a \cdot b}{(l-a)(l-b)\beta - \beta \cdot a \cdot b}$$

oder

$$M^B = \frac{-\varphi^a(l-b) + \varphi^b \cdot b}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot a, \quad (334)$$

und analog:

$$M^C = \frac{-\varphi^b(l-a) + \varphi^a \cdot b}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot b. \quad (335)$$

Setzt man hierin nach den Gl. (339) und (340):

$$-\frac{\varphi^b}{\beta} = k^a \quad \text{und} \quad -\frac{\varphi^a}{\beta} = k^b,$$

so erhalten wir

$$M^B = \frac{k^b(l-b) - k^a \cdot b}{l(l-a-b)} \cdot a, \quad (336)$$

$$M^C = \frac{k^a(l-a) - k^b \cdot a}{l(l-a-b)} \cdot b. \quad (337)$$

Durch Einsetzen der im folgenden Abschnitt bestimmten Werte für die einzelnen Drehwinkel in obige Ausdrücke sowie in diejenigen für die Festpunkt-abstände a und b erhalten wir die Kämpfermomente M^B und M^C .

Bei Symmetrie und symmetrischer Belastung wird

$$M^B = \frac{k^{a-b}}{l} \cdot a,$$

$$M^C = \frac{k^{a-b}}{l} \cdot b.$$

Graphisch

erhalten wir die beiden Kämpfermomente analog wir für den geraden Stab (Kap. V, 1) mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte oder der Schlußliniensenkungen.

Die Ableitung der Ausdrücke derselben für den bogenförmigen Stab ist genau gleich wie für den geraden Stab, d. h. es ist unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2 eingeführten Bezeichnungen für die Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{\varphi^b}{\beta} = -\frac{\Sigma P \cdot \delta^b}{\beta} \quad (339)$$

und

$$k^b = -\frac{\varphi^a}{\beta} = -\frac{\Sigma P \cdot \delta^a}{\beta} \quad (340)$$

und für die Schlußliniensenkungen:

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b, \quad (341)$$

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a. \quad (342)$$

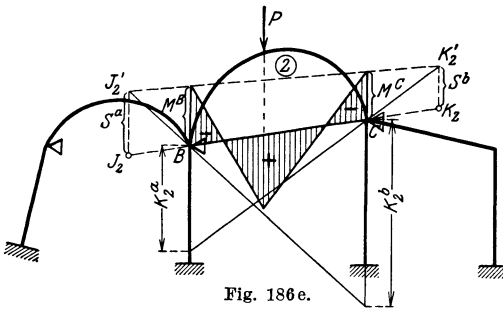


Fig. 186e.

Die in den Gl. (339) bis (342) vorkommenden Drehwinkel am Zweigelenkbogen werden nach dem folgenden Abschnitt 4 ermittelt.

In Fig. 186e wurden die Kämpfermomente des mit einer Einzelkraft belasteten bogenförmigen Stabes 2

mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte konstruiert; dabei wurde zuerst die Schlußlinie konstruiert und die M_0 -Fläche nachher an diese angehängt.

Haben wir es mit mehreren Lasten oder einer wandernden Last (mehreren Laststellungen derselben) zu tun, so ermitteln wir sowohl bei veränderlichem als auch konstantem Trägheitsmoment des bogenförmigen Stabes die Kreuzlinienabschnitte nicht mit Hilfe von φ^a und φ^b , sondern auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen mit Hilfe der Biegelinie des Zweigelenkbogens für die Belastung $M = 1$ mt am Stabende, wie dies in Abschnitt 2 des Kap. V für den geraden Stab beschrieben wurde; wir erhalten dann

$$k^a = - \sum P \cdot s^b, \quad (343)$$

$$k^b = - \sum P \cdot s^a. \quad (344)$$

Die Werte s^a gehen aus der Biegelinie für $M^a = 1$ (am Stabende mit dem Festpunktabstand a) und die Werte s^b aus der Biegelinie für $M^b = 1$ (am Stabende mit dem Festpunktabstand b) hervor; ist der Stab symmetrisch, so ist die Biegelinie für $M^b = 1$ das Spiegelbild der Biegelinie für $M^a = 1$, und wir brauchen daher nur eine Biegelinie zu zeichnen, um sowohl s^a als auch s^b zu erhalten.

Die Biegelinie des Zweigelenkbogens beispielsweise für die Belastung $M^a = 1$ erhalten wir nach dem Mohrschen Satze durch Zeichnen eines Seilecks zu den elastischen Gewichten

$$E \cdot \Delta F = \left(\frac{x}{l} - \frac{B}{2} \cdot y \right) w.$$

Die Polweite des zugehörigen Kraftecks kann beliebig gewählt werden, da sie keinen Einfluß auf die Größe der Werte s^a und s^b besitzt; man wählt sie aber zweckmäßig so, daß man die Endstrahlen des Seilecks nicht flacher, sondern eher steiler als die 45° -Neigung erhält, damit man die Werte s^a und s^b genauer abgreifen kann.

Für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind die Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b für eine wandernde Last $P = 1$ t im Anhang angegeben.

4. Bestimmung der Drehwinkel β , α^a , α^b , φ^a und φ^b am Zweigelenkbogen.

Um die Drehwinkel am Zweigelenkbogen berechnen zu können, müssen wir zunächst die Größe des für eine gegebene Belastung sowie eine gegebenenfalls eintretende Temperaturänderung am Zweigelenkbogen auftretenden

Bogenschubes

ermitteln.

Der Zweigelenkbogen ist einfach statisch unbestimmt, und zwar ist sein Bogenschub, in der Verbindungslinie der beiden Gelenke wirkend, die einzige statisch unbestimmte Größe X_a . Zur Bestimmung derselben benutzen wir die auf Grund des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen abgeleitete Arbeitsgleichung für den Zustand $X_a = 1$, wobei wir diese Einheitsbelastung als nach außen gerichtet annehmen, damit die davon herrührenden Momente M_a positiv werden. Die Arbeitsgleichung lautet¹:

$$1 \cdot \delta_a + \sum C_a \cdot \Delta c = \int \frac{M \cdot M_a \cdot ds}{EJ} + \int \frac{N \cdot N_a \cdot ds}{EF} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t_0 \cdot ds - \int M_a \varepsilon \frac{\Delta t}{h} ds, \quad (345)$$

worin :

- δ_a die gegenseitige Verschiebung der Angriffspunkte von X_a in Richtung von $X_a = 1$ (d. h. δ_a wird positiv in Richtung von $X_a = 1$ gerechnet), am statisch unbestimmten System;
 Δc die Verschiebung des Angriffspunktes der Auflagerkraft C_a in Richtung von C_a am statisch unbestimmten System;
 M und N Biegemoment und Normalkraft infolge der wirklichen Belastung am statisch unbestimmten System; M ist positiv, wenn an der unteren Stabkante Zugspannungen auftreten, N ist positiv, wenn Druckkraft;
 „Eins“ die gedachte Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem (einfacher Balken);
 C_a , M_a und N_a Auflagerkraft, Moment und Normalkraft infolge der Belastung $X_a = 1$ am statisch bestimmten Hauptsystem;
 ε der Temperatur-Ausdehnungskoeffizient des Materials, aus dem der bogenförmige Stab besteht; für Beton ist $\varepsilon = 0,000012$;
 $\Delta t = t_1 - t_2$ (wobei $t_1 > t_2$ angenommen) die Differenz zwischen der Temperaturerhöhung der oberen und unteren Querschnittsfaser (Fig. 186f), welche einerseits einen konstanten Temperaturzuwachs t_0 über die ganze Querschnittsfläche

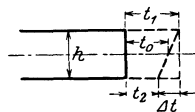


Fig. 186f.

und andererseits eine Drehung des Querschnittes um $\frac{\Delta v}{h}$, wenn h die Querschnittshöhe, verursacht; Δt ist positiv, wenn die Temperatur an der oberen Faser größer ist als an der unteren.

Wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Kämpfer ist nun

$$\delta_a = 0$$

und daher

$$\sum C_a \cdot \Delta c = L_a = \int \frac{M M_a ds}{EJ} + \int \frac{N N_a ds}{EF} + \int N_a \varepsilon t_0 ds - \int M_a \varepsilon \frac{\Delta t}{h} ds, \quad (346)$$

hierin bedeutet L_a die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X_a = 1$; auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt das erste Glied den Einfluß der Momente, das zweite denjenigen der Normalkräfte und die beiden letzten Glieder den Einfluß einer ungleichmäßigen Temperaturerhöhung der oberen und unteren Faser dar.

¹ Müller-Breslau: Neuere Methoden der Festigkeitslehre, 3. Aufl., §§ 12 und 14.

Ist die Temperaturerhöhung für alle Punkte eines Stabquerschnittes konstant und gleich t , welches der am häufigsten vorkommende Fall ist, so ist in Gl. (346)

$$\Delta t = 0 \quad \text{und} \quad t_0 = t$$

zu setzen; dann erhalten wir unter Berücksichtigung, daß wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte auch

$$L_a = 0$$

$$0 = \int \frac{M M_a ds}{EJ} + \int \frac{N N_a ds}{EF} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds. \quad (347)$$

In die Gl. (347) sind nun an Stelle der unbekanntenen Momente M und N des statisch unbestimmten Systems die Werte

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} M &= M_o - M_a \cdot X_a \\ N &= N_o - N_a \cdot X_a \end{aligned} \right\} \quad (348)$$

des statisch bestimmten Hauptsystems zu setzen, worin M_o und N_o Moment und Normalkraft am statisch bestimmten Hauptsystem (einfacher Balken) sind, wenn dasselbe nur mit den gegebenen Kräften belastet ist, also gleichzeitig $X_a = 0$.

Setzen wir diese Werte (Gl. 348) in Gl. (347) ein, so folgt:

$$0 = \int \frac{M_o M_a ds}{EJ} + \int \frac{N_o N_a ds}{EF} - X_a \left[\int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \int \frac{N_a^2 ds}{EF} \right] + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds, \quad (349)$$

worin M_o und N_o Moment und Normalkraft infolge der gegebenen Belastung M_a und N_a Moment und Normalkraft infolge der Belastung $X_a = -1$, alle vier am statisch bestimmten Hauptsystem, bedeuten.

In dieser Gleichung ist nun

$$\int \frac{M_o M_a ds}{EJ} + \int \frac{N_o N_a ds}{EF} = \delta_{ao}, \quad (350)$$

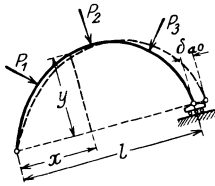


Fig. 187.

wenn δ_{ao} die gegenseitige Verschiebung der Gelenke in Richtung von $X_a = -1$ und infolge der gegebenen äußeren Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem (einfacher Balken), dessen eines Auflager in Richtung der Kämpferverbindungsline beweglich ist (Fig. 187);

$$\int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \int \frac{N_a^2 ds}{EF} = \delta_{aa}, \quad (351)$$

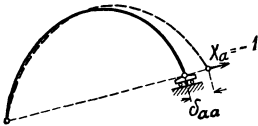


Fig. 188.

wenn δ_{aa} die gegenseitige Verschiebung der Gelenke in Richtung von $X_a = -1$ und infolge von $X_a = -1$ am statisch bestimmten Hauptsystem (Fig. 188)

$$\int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds = \delta_{at}, \quad (352)$$

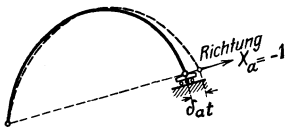


Fig. 189.

wenn δ_{at} die gegenseitige Verschiebung der Gelenke in Richtung von $X_a = -1$ und infolge einer Temperaturerhöhung um t^0 (Fig. 189).

Diese Ausdrücke in Gl. (349) eingesetzt ergibt die Elastizitätsgleichung zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größe X_a :

$$0 = \delta_{ao} - X_a \cdot \delta_{aa} + \delta_{at}, \quad (353)$$

woraus sich der Horizontalschub des Zweigelenkbogens infolge der äußeren Lasten allein ergibt zu:

$$X_a = \frac{\delta_{a_0}}{\delta_{a_a}} \quad (354)$$

und infolge einer Temperaturerhöhung des Zweigelenkbogens um t^0 gegenüber der Herstellungstemperatur

$$X_a = \frac{\delta_{a_t}}{\delta_{a_a}}. \quad (355)$$

In diese Gl. (354) und (355) sind also die aus den Gl. (350), (351) und (352) erhaltenen Werte für δ_{a_0} , δ_{a_a} und δ_{a_t} einzusetzen, um den Bogenschub am Zweigelenkbogen infolge der gegebenen Belastung und evtl. Temperaturänderung zu erhalten.

Die

Drehwinkel

am Zweigelenkbogen für eine gegebene Belastung ermitteln wir ebenfalls mit Hilfe der Arbeitsgleichung¹; sie lautet:

$$1 \cdot \tau_m + \bar{L} = \int \frac{M \bar{M} ds}{EJ} + \int \frac{N \bar{N} ds}{EF} + \int \bar{N} \varepsilon t_0 ds - \int \bar{M} \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} ds, \quad (356)$$

worin

τ_m der gesuchte Drehwinkel, um welchen sich die im Punkte m an die Stabachse gelegte Tangente bei der Formänderung des statisch unbestimmten Systems dreht;

M und N Biegemoment und Normalkraft infolge der wirklichen Belastung am statisch unbestimmten System;

\bar{M} und \bar{N} Biegemoment und Normalkraft für irgendeinen Querschnitt des auf irgendeine Weise statisch bestimmt gemachten Systems, falls auf letzteres ein im Punkte m angreifendes Kräftepaar wirkt, dessen Moment $\mathfrak{M}_m = 1$ ist;

\bar{L} die virtuelle Arbeit der gleichzeitig mit \bar{M} und \bar{N} infolge der gedachten Belastung $\mathfrak{M}_m = 1$ am statisch bestimmt gemachten System entstehenden Auflagerkräfte \bar{C} ;

ε , t_0 und $\frac{\Delta t}{h}$ sich auf eine Temperaturerhöhung des Stabes beziehen und dieselbe Bedeutung haben wie in Gl. (345).

Wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte ist wieder

$$\bar{L} = 0;$$

ist ferner die Temperaturerhöhung für alle Punkte eines Stabquerschnittes konstant und gleich t , so ist in Gl. (356) wieder

$$\Delta t = 0 \quad \text{und} \quad t_0 = t$$

zu setzen, und wir erhalten:

$$\tau_m = \int \frac{M \cdot \bar{M} \cdot ds}{EJ} + \int \frac{N \cdot \bar{N} \cdot ds}{EF} + \int \bar{N} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds. \quad (357)$$

¹ Müller-Breslau: Neuere Methoden der Festigkeitslehre, 3. Aufl., §§ 12 und 15.

In diese Gleichung sind nun die nach Gl. (348) ermittelten Werte von M und N des statisch unbestimmten Systems einzusetzen.

Da wir beliebig veränderliches Trägheitsmoment des bogenförmigen Stabes angenommen haben, können wir die Integrale der Gl. (349) und (357) nicht auflösen und dieselben sind näherungsweise zu bestimmen. Man teilt den Bogen in beliebige Teile ein von der Länge Δs , wobei man die Angriffspunkte großer konzentrierter Lasten mit Teilpunkten zusammenfallen läßt, rechnet dann die elastischen Gewichte $w = \frac{\Delta s}{J}$ für die Mitten der Teile aus und addiert darauf einfach die Produkte $M_o \cdot M_a \cdot w$, usw., wobei sich dann alle Größen auf die Mitten der Bogenstücke beziehen; daher setzen wir an Stelle des Integralzeichens das Summenzeichen.

Für die Bogenschübe und die Drehwinkel leiten wir im folgenden noch geschlossene Ausdrücke ab, und zwar für den unsymmetrischen und den symmetrischen Zweigelenbogen. Der größeren Übersichtlichkeit wegen bezeichnen wir die Kämpfer des zu untersuchenden Bogens allgemein mit A und B .

a) Der unsymmetrische Zweigelenbogen.

Wir berechnen wieder zunächst die

Bogenschübe am Zweigelenbogen für die verschiedenen Belastungen desselben.

Bogenschub $B_{(M^A=1)}$

für die Belastung des Zweigelenkbogens mit $M^A = 1$ (Fig. 190).

Der in Gl. (354) vorkommende Wert δ_{a_o} ist nach Gl. (350):

$$\delta_{a_o} = \left. \begin{aligned} & \sum_0^l M_o \cdot M_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} \\ & + \sum_0^l N_o \cdot N_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \end{aligned} \right\} \quad (358)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen nach Fig. 190a und 190b:

$$\left. \begin{aligned} M_o &= \frac{l-x}{l}, \\ N_o &= +\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s, \\ N_o &= -\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l \end{aligned} \right\} \quad (359)$$

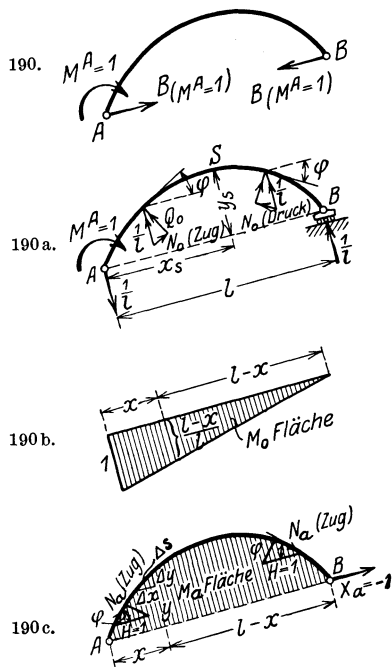


Fig. 190—190c.

und nach Fig. 190c:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= y, \\ N_a &= +1 \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (360)$$

Zu den Vorzeichen der Werte für N_o und N_a sei bemerkt, daß eine Zugkraft im Bogen denselben zu verlängern bestrebt ist und daher einen positiven Beitrag zu der in Richtung von $X_a = 1$ als positiv angenommenen Verschiebung δ_{a_o} liefert.

Es ist nun:

$$\delta_{a0} = \sum_0^l y \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^{x_s} \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} - \sum_{x_s}^l \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (361)$$

Die Summationen der von den Normalkräften herrührenden Glieder sind wie aus Fig. 190a hervorgeht, links und rechts vom Scheitel getrennt durchzuführen, da die Normalkraft N_o im Scheitel ihr Vorzeichen wechselt.

Die Winkelfunktionen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ können wir durch die bekannten Lamellenlängen Δs und deren Projektionen Δx und Δy auf die x - und y -Achse ersetzen. Es ist nach Fig. 190c:

$$\sin \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta s} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s},$$

ferner ist

$$\Delta y = \sqrt{\Delta s^2 - \Delta x^2}$$

und daher

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{\Delta s^2 - \Delta x^2}}{\Delta s}. \quad (362)$$

Es ist nun:

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{\Delta x \sqrt{\Delta s^2 - \Delta x^2}}{\Delta s^2} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \sqrt{1 - \frac{\Delta x^2}{\Delta s^2}}. \quad (363)$$

Diesen Wert in Gl. (361) eingesetzt, gibt

$$\begin{aligned} \delta_{a0} = \frac{1}{l} \sum_0^l y(l-x) \frac{\Delta x}{E \cdot J} + \frac{1}{l} \sum_0^{x_s} \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ - \sum_{x_s}^l \frac{\Delta x}{\Delta s} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \end{aligned} \quad (364)$$

Der in Gl. (354) vorkommende Wert δ_{aa} ist nach Gl. (351):

$$\delta_{aa} = \sum_0^l M_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (365)$$

Setzen wir die Werte von M_a und N_a aus den Gl. (360) in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (366)$$

und da $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$:

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (367)$$

Nun ist nach Gl. (354):

$$X_a = \frac{\delta_{a0}}{\delta_{aa}} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l y(l-x) \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^{x_s} \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta s}{F} - \sum_{x_s}^l \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2} \cdot \frac{\Delta s}{F}}{\sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{F}}. \quad (368)$$

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta s}{J} &= w, \\ \frac{\Delta s}{F} &= v, \\ \frac{\Delta x}{\Delta s} &= \xi, \end{aligned} \right\} \quad (369)$$

so erhalten wir den Bogenschub $B_{(M^A=1)}$ am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu

$$B_{(M^A=1)} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l y(l-x) \cdot w + \sum_0^{x_s} \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v - \sum_{x_s}^l \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v} \quad (370)$$

Bogenschub $B_{(M^B=1)}$ für die Belastung des Zweigelenkbogens mit $M^B = 1$ (Fig. 191).

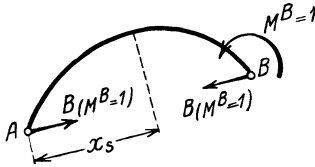


Fig. 191.

Den Bogenschub $B_{(M^B=1)}$ infolge $M^B = 1$ erhalten wir analog wie den Bogenschub $B_{(M^A=1)}$. Er geht auch ohne weiteres aus Gl. (370) hervor, wenn wir in derselben $(l-x)$ durch x ersetzen und das Vorzeichen der beiden von den Normalkräften herrührenden Glieder im Zähler umkehren; es ist dann der Bogenschub $B_{(M^B=1)}$ am unsymmetrischen Zweigelenkbogen

$$B_{(M^B=1)} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l x \cdot y \cdot w - \sum_0^{x_s} \xi \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot v + \sum_{x_s}^l \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v} \quad (371)$$

Bogenschub B für die gleichzeitige Belastung des Zweigelenkbogens

mit $M^A = 1$ und $M^B = 1$ (Fig. 192).

Der in Gl. (354) vorkommende Wert δ_{a_0} ist nach Gl. (350):

$$\delta_{a_0} = \sum_0^l M_o \cdot M_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o \cdot N_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (372)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen:
nach Fig. 192a und 192b:

$$\left. \begin{aligned} M_o &= 1, \\ N_o &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

und nach Fig. 192c:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= y, \\ N_a &= +1 \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (374)$$

Bezüglich des Vorzeichens des Wertes von N_a gilt das für den Wert N_a der Gl. (360) Gesagte.

Es ist nun:

$$\delta_{a_0} = \sum_0^l y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + 0. \quad (375)$$

Der in Gl. (354) vorkommende Wert von δ_{a_a} ist nach Gl. (351):

$$\delta_{a_a} = \sum_0^l M_a^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (376)$$

Setzen wir die Werte von M_a und N_a aus den Gl. (374) in diese Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\delta_{a_a} = \sum_0^l y^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}, \quad (377)$$

und da

$$\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s};$$

$$\delta_{a_a} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (378)$$

Nun ist nach Gl. (354):

$$X_a = \frac{\delta_{a_0}}{\delta_{a_a}} = \frac{\sum_0^l y \cdot \frac{\Delta s}{J}}{\sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{F}}, \quad (379)$$

und mit den Bezeichnungen der Gl. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi$$

folgt der Bogenschub B am unsymmetrischen Zweigelenkbogen:

$$B = \frac{\sum_0^l y \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v}. \quad (380)$$

Dieser Wert ergibt sich auch direkt durch Addition der Gl. (370) und (371).

Wie wir aus Gl. (380) ersehen, verschwindet bei gleichzeitiger Belastung des Zweigelenkbogens mit $M^A = 1$ und $M^B = 1$ im Zähler der Einfluß der Normalkräfte.

Ferner erkennen wir aus den Gl. (370), (371) und (380) für die Bogenschübe $B_{(M^A=1)}$, $B_{(M^B=1)}$ und B , daß diese Größen unabhängig von der äußeren Belastung und nur abhängig von den Abmessungen des bogenförmigen Stabes sind.

Bogenschub \mathfrak{S} für die Belastung des Zweigelenkbogens mit den gegebenen äußeren Lasten sowie für eine gleichmäßige Temperaturerhöhung des Zweigelenkbogens um t^0 (Fig. 193).

Nach Gl. (354) ist

$$\mathfrak{S} = \frac{\delta_{a_0}}{\delta_{a_a}}, \quad (381)$$

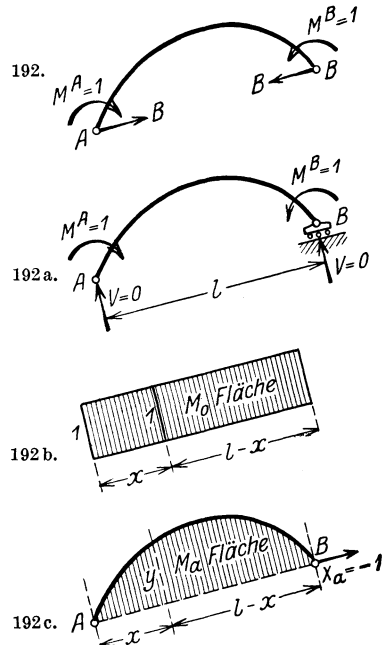
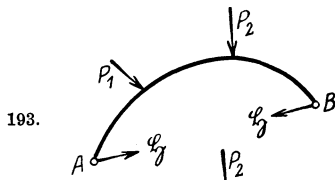


Fig. 192—192c.

und nach Gl. (355)

$$\mathfrak{S}_t = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}. \quad (381a)$$

Der hierin vorkommende Wert von δ_{ao} ist nach Gl. (350):



$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot M_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o \cdot N_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (382)$$

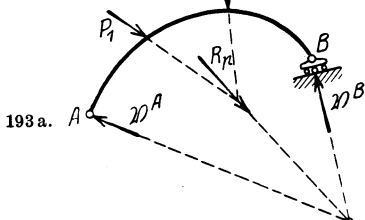
In diese Gleichung ist einzusetzen: nach Fig. 193 a:

$$\left. \begin{aligned} M_o &= M_o, \\ N_o &= N_o, \end{aligned} \right\} \quad (383)$$

und nach Fig. 193 b:

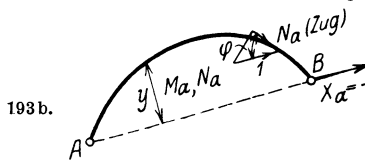
$$\left. \begin{aligned} M_a &= y, \\ N_a &= +1 \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (384)$$

Bezüglich des Vorzeichens des Wertes von N_a gilt das für den Wert N_a der Gl. (360) Gesagte:



$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}, \quad (385)$$

und da $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$:



$$\delta_{ao} = \sum_0^l M_o \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} - \sum_0^l N_o \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (386)$$

Fig. 193—193 b.

Der in Gl. (381) vorkommende Wert von δ_{aa} ist nach Gl. (351):

$$\delta_{aa} = \sum_0^l M_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (387)$$

Setzen wir die Werte von M_a und N_a aus den Gln. (384) in diese Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}, \quad (388)$$

und da $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$:

$$\delta_{aa} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (389)$$

Der in Gl. (381a) vorkommende, von der Temperaturänderung herrührende Wert von δ_{at} ist nach Gl. (352):

$$\delta_{at} = \varepsilon \cdot t \cdot \sum_0^l N_a \cdot \Delta s, \quad (390)$$

hierin den Wert von N_a aus Gl. (384) eingesetzt gibt

$$\delta_{at} = \varepsilon \cdot t \cdot \sum_0^l \cos \varphi \cdot \Delta s \quad (391)$$

für eine Temperaturerhöhung; für eine Temperaturerniedrigung wäre das Vorzeichen negativ.

Da $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$, so ist

$$\delta_{at} = \varepsilon \cdot t \cdot \sum_0^l \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \Delta s = \varepsilon \cdot t \cdot l. \quad (392)$$

Die Werte der Gln. (386) und (389) in die Gl. (381) eingesetzt, gibt:

$$\mathfrak{S} = \frac{\sum_0^l M_o \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^l N_o \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}}{\sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}}, \quad (393)$$

und mit den Bezeichnungen der Gln. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi$$

folgt der Bogenschub \mathfrak{S} infolge der äußeren Lasten allein:

$$\mathfrak{S} = \frac{\sum_0^l M_o \cdot y \cdot w + \sum_0^l N_o \cdot \xi \cdot v}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v}. \quad (394)$$

In dieser Gleichung kann das zweite Glied im Zähler wegen seines geringen Einflusses meistens vernachlässigt werden.

Haben wir es mit mehreren Lasten oder einer wandernden Last (mehreren Laststellungen derselben) zu tun, so ermitteln wir die dadurch am Zweigelenkbogen hervorgerufenen Bogenschübe \mathfrak{S} zweckmäßig mit Hilfe der Einflußlinie für denselben. Diese erhalten wir am einfachsten graphisch auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen, indem wir die Biegelinie für den Zustand $\mathfrak{S} = -1$ zeichnen, welche sich nach dem Mohrschen Satze als Seileck, mit beliebiger Polweite zu den elastischen Gewichten

$$E \cdot \Delta F = y \cdot w$$

gezeichnet, ergibt. Sind η die im Längenmaßstab gemessenen Ordinaten der mit der Polweite H gezeichneten Biegelinie (δ_{ao}), so ist der Bogenschub \mathfrak{S} für eine gegebene Einzellast P :

$$\mathfrak{S} = \frac{\delta_{ao}}{\delta_{aa}} = \frac{P \cdot H \cdot \eta}{\sum_0^l y^2 w}. \quad (394a)$$

Der Bogenschub \mathfrak{S}^t infolge einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um t^0 allein beträgt:

$$\mathfrak{S}^t = \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v}. \quad (395)$$

Für eine Temperaturerniedrigung um t^0 gegenüber der Herstellung-

temperatur des Tragwerkes ist der Horizontalschub ξ^t gleich groß, jedoch entgegengesetzt gerichtet.

Aus den Gln. (370), (371), (380), (394) und (395) für die Bogenschübe $B_{(M^A=1)}$, $B_{(M^B=1)}$, B , ξ und ξ_t ersehen wir, daß dieselben den gleichen Nenner haben, was für die Berechnung des bogenförmigen Stabes von Vorteil ist.

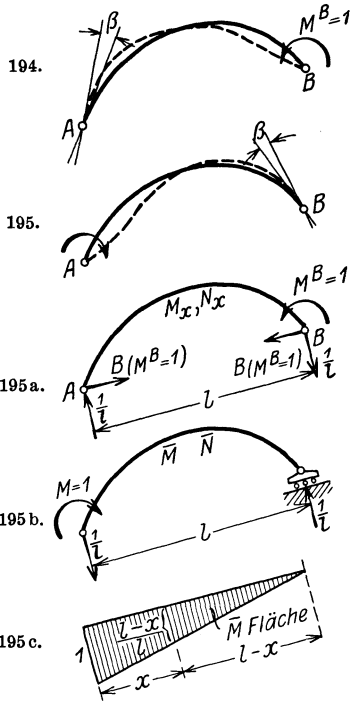


Fig. 194, 195—195c.

Nach Ermittlung der benötigten Bogenschübe erhalten wir nun die

Drehwinkel β , α^a , α^b , φ^a und φ^b

am unsymmetrischen Zweigelenkbogen mit Hilfe der Arbeitsgleichung wie folgt:

Der Drehwinkel β infolge der Belastung des Zweigelenkbogens mit $M^A = 1$ oder $M^B = 1$ (Fig. 194 und 195).

Nach Gl. (357) ist

$$\beta = \sum_0^l M \cdot \bar{M} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N \cdot \bar{N} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \quad (396)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen nach Gl. (348) und Fig. 195a:

$$M = M_o - M_a \cdot X_a,$$

$$N = N_o - N_a \cdot X_a.$$

Mit den Werten von M_o , N_o , M_a und N_a aus den Gl. (359) und (360) und $X_a = B_{(M^A=1)}$ folgt:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{l-x}{l} - B_{(M^A=1)} \cdot y, \\ N &= + \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi - B_{(M^A=1)} \cdot \cos \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s \\ &\quad - \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi - B_{(M^A=1)} \cdot \cos \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l. \end{aligned} \right\} \quad (397)$$

Ferner ist nach Fig. 195b und 195c:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= \frac{x}{l}, \\ \bar{N} &= - \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s \\ &\quad + \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l. \end{aligned} \right\} \quad (398)$$

Bezüglich des Vorzeichens der Werte von \bar{N} gilt das für den Wert N_o der Gl. (359) Gesagte.

Die Werte der Gln. (397) und (398) in Gl. (396) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_0^l \left(\frac{l-x}{l} - B_{(M^A=1)} \cdot y \right) \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} \\ &+ \sum_0^{x_s} \left(\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi - B_{(M^A=1)} \cdot \cos \varphi \right) \left(-\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ &+ \sum_{x_s}^l \left(-\frac{1}{l} \sin \varphi - B_{(M^A=1)} \cdot \cos \varphi \right) \left(\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} E \cdot \beta &= \frac{1}{l^2} \sum_0^l x(l-x) \cdot \frac{\Delta s}{J} - \frac{1}{l} \sum_0^l x \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{J} - \frac{1}{l^2} \sum_0^l \sin^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{F} \\ &+ \frac{1}{l} B_{(M^A=1)} \left[\sum_0^{x_s} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{\Delta s}{F} - \sum_{x_s}^l \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{F} \right] \end{aligned}$$

oder mit den Bezeichnungen der Gln. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi,$$

sowie unter Berücksichtigung, daß nach den Gln. (362) und (363):

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{\Delta s^2 - \Delta x^2}{\Delta s^2} = 1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 = 1 - \xi^2, \\ \sin \varphi &= \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{und da} \quad \cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi, \\ \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}, \end{aligned}$$

ergibt sich der Drehwinkel β am unsymmetrischen Zweigelenkbogen:

$$\left. \begin{aligned} &\underbrace{E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l x(l-x) \cdot w - \frac{1}{l} \cdot B_{(M^A=1)} \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w}_{\text{Einfluß der Momente.}} \\ &- \frac{1}{l^2} \sum_0^l (1 - \xi^2) \cdot v + \frac{1}{l} \cdot B_{(M^A=1)} \left[\sum_0^{x_s} \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v - \sum_{x_s}^l \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v \right] \end{aligned} \right\} (399)$$

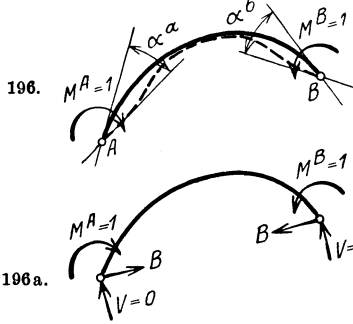
Einfluß der Normalkräfte.

Die Drehwinkel α^a und α^b infolge der gleichzeitigen Belastung des Zweigelenkbogens mit $M^A = 1$ und $M^B = 1$ (Fig. 196).

Nach Gl. (357) ist:

$$\alpha^a = \sum_0^l M \cdot \bar{M} \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N \cdot \bar{N} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (400)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen nach Gl. (348) und Fig. 196 a:

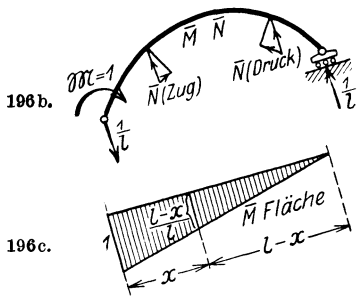


$$\begin{aligned} M &= M_o - M_a \cdot X_a, \\ N &= N_o - N_a \cdot X_a. \end{aligned}$$

Mit den Werten von M_o , N_o , M_a und N_a aus den Gl. (373) und (374) und $X_a = B$ folgt:

$$\left. \begin{aligned} M &= l - B \cdot y, \\ N &= B \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (401)$$

Ferner ist nach Fig. 196 b und 196 c:



$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= \frac{l-x}{l}, \\ \bar{N} &= + \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s \\ &= - \frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l. \end{aligned} \right\} \quad (402)$$

Bezüglich des Vorzeichens der Werte von \bar{N} gilt das für den Wert N_o der Gl. (359) Gesagte:

Die Werte der Gl. (401) und (402) in Gl. (400) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} \alpha^a &= \sum_0^l (1 - B \cdot y) \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^{x_s} B \cdot \cos \varphi \left(\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ &\quad - \sum_{x_s}^l B \cdot \cos \varphi \left(\frac{1}{l} \sin \varphi \right) \frac{\Delta s}{E \cdot F} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} E \cdot \alpha^a &= \frac{1}{l} \sum_0^l (l-x) \cdot \frac{\Delta s}{J} - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \sum_0^l (l-x) \cdot y \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ &\quad + \frac{1}{l} \cdot B \left[\sum_0^{x_s} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{F} - \sum_{x_s}^l \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{F} \right] \end{aligned}$$

oder mit den Bezeichnungen der Gl. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi,$$

sowie unter Berücksichtigung, daß nach Gl. (363):

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2},$$

ergibt sich der Drehwinkel α^a am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \alpha^a &= \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l (l-x) w - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \sum_0^l (l-x) y \cdot w \\ &\quad + \frac{1}{l} \cdot B \cdot \left[\sum_0^{x_s} \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v - \sum_{x_s}^l \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v \right] \end{aligned} \right\} \quad (403)$$

Analog ergibt sich der Drehwinkel α^b am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \alpha^b &= \frac{1}{l} \sum_0^l x \cdot w - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w \\ &- \frac{1}{l} \cdot B \cdot \left[\sum_0^{x_s} \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v - \sum_{x_s}^l \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v \right], \end{aligned} \right\} \quad (404)$$

das Minuszeichen vor dem von den Normalkräften herrührenden Glied kommt daher, weil für den Zustand $\mathfrak{N} = 1$ am rechten Ende:

$$\bar{N} = -\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s, \quad (405)$$

$$\bar{N} = +\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l. \quad (406)$$

Die Drehwinkel φ^a und φ^b infolge der äußeren Belastung des Zweigelenkbogens (Fig. 197).

Nach Gl. (357) ist:

$$\varphi^a = \sum_0^l M \cdot \bar{M} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N \cdot \bar{N} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (407)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen nach Gl. (348) und Fig. 197:

$$M = M_o - M_a \cdot X_a,$$

$$N = N_o - N_a \cdot X_a.$$

Mit den Werten von M_o , N_o , M_a und N_a aus den Gln. (383) und (384) und $X_a = \xi$ folgt:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_o - \xi \cdot y, \\ N &= N_o - \xi \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (408)$$

Ferner ist nach Fig. 197a und 197b:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= \frac{l-x}{l}, \\ \bar{N} &= +\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } 0 \text{ bis } x_s, \\ \bar{N} &= -\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \quad \text{von } x_s \text{ bis } l. \end{aligned} \right\} \quad (409)$$

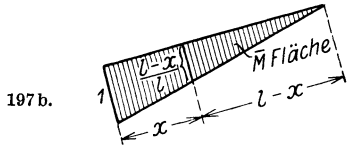
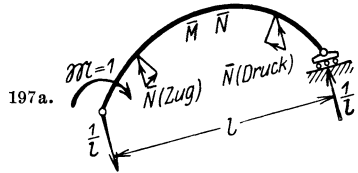
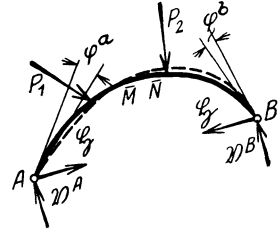


Fig. 197—197b.

Bezüglich des Vorzeichens der Werte von \bar{N} gilt das für den Wert N_o der Gl. (359) Gesagte.

Die Werte der Gln. (408) und (409) in Gl. (407) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} \varphi^a &= \sum_0^{x_s} (M_o - \xi \cdot y) \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^{x_s} (N_o - \xi \cdot \cos \varphi) \left(\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} \\ &- \sum_{x_s}^l (N_o - \xi \cdot \cos \varphi) \left(-\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}; \end{aligned}$$

oder

$$E \cdot \varphi^a = \frac{1}{l} \sum_0^l M_o(l-x) \cdot \frac{\Delta s}{J} - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l y(l-x) \frac{\Delta s}{J} + \frac{1}{l} \sum_0^l N_o \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F} - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}$$

oder mit den Bezeichnungen der Gl. (369):

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi$$

und unter Berücksichtigung, daß nach den Gln. (362) und (363):

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2},$$

ergibt sich der Drehwinkel φ^a am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \varphi^a &= \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_o(l-x) \cdot w - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l y(l-x) \cdot w \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Einfluß der Momente.}} \\ &+ \frac{1}{l} \sum_0^l N_o \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l \xi \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v. \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Einfluß der Normalkräfte.}} \end{aligned} \right\} \quad (410)$$

Analog ergibt sich der Drehwinkel φ^b am unsymmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \varphi^b &= \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_o \cdot x \cdot w - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w \\ &- \frac{1}{l} \sum_0^l N_o \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v + \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{H} \cdot \sum_0^l \xi \sqrt{1 - \xi^2} \cdot v. \end{aligned} \right\} \quad (411)$$

Um die Winkel φ^a und φ^b am unsymmetrischen Zweigelenkbogen infolge einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um t^0 zu erhalten, setzen wir in den Gln. (410) und (411) den Wert von \mathfrak{H}^t aus Gl. (395) ein.

b) Der symmetrische Zweigelenkbogen.

Der symmetrische Zweigelenkbogen kommt in der Praxis am meisten vor, er bildet einen Sonderfall des unsymmetrischen Zweigelenkbogens.

Um die gesuchten Drehwinkel am symmetrischen Zweigelenkbogen bestimmen zu können, berechnen wir wieder zunächst

die Bogenschübe.

Bei Symmetrie fällt sowohl in Gl. (370) für den Bogenschub $B_{(M^A=1)}$ (Fig. 198) infolge $M^A = 1$, als auch in Gl. (371) für den Bogenschub $B_{(M^B=1)}$ (Fig. 199) infolge $M^B = 1$ am Zweigelenkbogen das zweite und dritte Glied

im Zähler, herrührend von den Normalkräften, weg, da die Werte der beiden Summen $\sum_0^{x_s}$ und $\sum_{x_s}^l$ gleich groß werden; ferner ist bei Symmetrie

$$\sum_0^l x \cdot y \cdot w = \sum_0^l (l - x) \cdot y \cdot w, \quad (411a)$$

und da das statische Moment der einzelnen Kräfte (yw) gleich dem statischen Moment ihrer Resultierenden, so ist bei Symmetrie:

$$\sum_0^l xyw = \sum_0^l (l - x)y \cdot w = \frac{l}{2} \sum_0^l yw. \quad (411b)$$

Berücksichtigen wir nun noch, daß wir am symmetrischen Bogen die Summierung bloß über den halben Bogen vorzunehmen brauchen, da bei Symmetrie

$$\sum_0^l = 2 \cdot \sum_0^{l/2},$$

so folgt für Symmetrie:

$$B_{(M^A=1)} = B_{(M^B=1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_0^{l/2} y \cdot w}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w + \sum_0^{l/2} \xi^2 \cdot v}. \quad (412)$$

Der Ausdruck der Gl. (380) für den Bogenschub B (Fig. 200) am Zweigelenkbogen bleibt bei Symmetrie derselbe, nur brauchen wir bloß über den halben Bogen zu summieren; es ist:

$$B = \frac{\sum_0^{l/2} y \cdot w}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w + \sum_0^{l/2} \xi^2 \cdot v}, \quad (413)$$

worin

$$w = \frac{\Delta s}{J}, \quad v = \frac{\Delta s}{F}, \quad \xi = \frac{\Delta x}{\Delta s}.$$

Beim Vergleich der beiden Gln. (412) und (413) erkennen wir, daß bei Symmetrie:

$$B_{(M^A=1)} = B_{(M^B=1)} = \frac{1}{2} B, \quad (414)$$

was sich auch ohne weiteres aus dem Gesetz der Superposition ergibt.

Der Ausdruck der Gl. (394) für den Bogenschub ξ (Fig. 201) am Zweigelenkbogen infolge der äußeren Lasten bleibt bei Symmetrie derselbe; es ist

$$\xi = \frac{\sum_0^l M_o \cdot y \cdot w + \sum_0^l N_o \cdot \xi \cdot v}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v}. \quad (415)$$

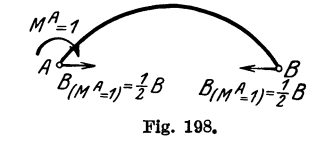


Fig. 198.

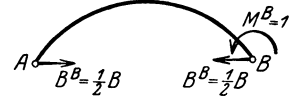


Fig. 199.



Fig. 200.

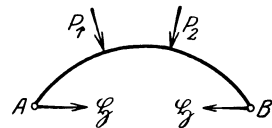


Fig. 201.

Haben wir es mit mehreren Lasten oder einer wandernden Last (mehreren Laststellungen derselben) zu tun, so ermitteln wir die dadurch am Zweigelenk-

bogen hervorgerufenen Bogenschübe ξ wieder, wie schon unter a) beim unsymmetrischen Zweigelenkbogen nach Gl. (394) beschrieben, zweckmäßig mit Hilfe der Einflußlinie (Biegelinie für den Zustand $\xi = -1$) für denselben.

Für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind der Bogenschub B sowie die Ordinaten der Einflußlinie für den Bogenschub ξ im Anhang angegeben.

Der Ausdruck der Gl. (395) für den Bogenschub ξ^t am Zweigelenkbogen infolge einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um t^0 bleibt bei Symmetrie ebenfalls derselbe; es ist

$$\xi^t = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v} \quad (416)$$

Es sei auch an dieser Stelle hervorgehoben, daß die Ausdrücke für alle zur Berechnung der Drehwinkel am Zweigelenkbogen benötigten Bogenschübe den gleichen Nenner haben.

Nach Ermittlung dieser Bogenschübe erhalten wir nun die Drehwinkel β , α^a , α^b , φ^a und φ^b , am symmetrischen Zweigelenkbogen wie folgt:

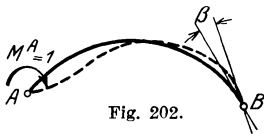


Fig. 202.

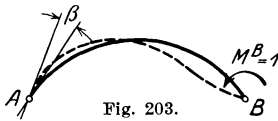


Fig. 203.

Der Drehwinkel β infolge $M^A = 1$ oder $M^B = 1$ am symmetrischen Zweigelenkbogen (Fig. 202 und

203) ergibt sich aus Gl. (399), wenn wir berücksichtigen, daß

1. das letzte Glied derselben wegfällt, da die Werte der beiden Summen

$$\sum_0^l x_s \quad \text{und} \quad \sum_0^l x_s$$

gleich groß werden,

2. nach Gl. (414) $B_{(M^A=1)} = \frac{1}{2} B$,

3. nach Gl. (411 b) $\sum_0^l x y w = \frac{l}{2} \sum_0^l y w$,

4. bei Symmetrie die Summierung nur über den halben Bogen zu erfolgen braucht.

Daher ist bei Symmetrie:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot \beta &= \frac{2}{l^2} \cdot \sum_0^{l/2} x(l-x) \cdot w - \frac{B}{2} \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w \\ &\quad \text{Einfluß der Momente.} \\ &- \frac{2}{l^2} \cdot \sum_0^{l/2} (1 - \xi^2) \cdot v. \\ &\quad \text{Einfluß der Normalkräfte.} \end{aligned} \right\} \quad (417)$$

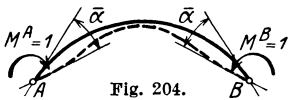


Fig. 204.

Die Drehwinkel α^a und α^b infolge $M^A = 1$ und gleichzeitig $M^B = 1$ am symmetrischen Zweigelenkbogen (Fig. 204) ergeben sich aus den Gln. (403) und (404), wenn wir berücksichtigen, daß

1. die zweite Zeile (Einfluß der Normalkräfte) wegfällt,
2. der Symmetrie wegen $\sum_0^l (l-x) \cdot w = \sum_0^l x \cdot w$,
3. nach dem Satz vom statischen Moment

$$\sum_0^l x \cdot w = \frac{l}{2} \sum_0^l w \quad \text{und} \quad \sum_0^l x \cdot y \cdot w = \frac{l}{2} \cdot \sum_0^l y \cdot w,$$

4. bei Symmetrie die Summierung nur über den halben Bogen zu erfolgen braucht.

Daher ist bei Symmetrie:

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha}$$

und

$$E \cdot \bar{\alpha} = \sum_0^{l/2} w - B \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w. \tag{418}$$

Für symmetrische Parabolbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind die Drehwinkel $\bar{\alpha}$ und β im Anhang angegeben.

Die Drehwinkel φ^a und φ^b

infolge der äußeren Belastung des symmetrischen Zweigelenkbogens (Fig. 205) ergeben sich aus den Gln. (410) und (411), wenn wir berücksichtigen, daß deren drittes und viertes Glied (Einfluß der Normalkräfte) Null wird, da die Werte $\sum_0^l \sin \varphi$ und $\sum_0^l \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ bei Symmetrie Null werden (weil jedem Bogenelement Δs auf der linken Bogenhälfte mit positivem $\sin \varphi$ ein gleiches rechts mit negativem $\sin \varphi$ entspricht) und daß nach Gl. (411 b)

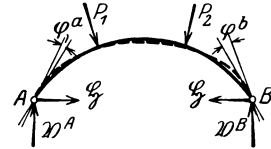


Fig. 205.

$$\sum_0^l x y w = \frac{l}{2} \sum_0^l y w; \tag{419}$$

es ist daher bei Symmetrie:

$$E \cdot \varphi^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_o (l-x) \cdot w - \frac{\mathfrak{S}}{2} \sum_0^l y w, \tag{420}$$

$$E \cdot \varphi^b = \frac{1}{l} \sum_0^l M_o \cdot x \cdot w - \frac{\mathfrak{S}}{2} \sum_0^l y w. \tag{421}$$

Um die Winkel φ^a und φ^b am symmetrischen Zweigelenkbogen infolge einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um t^0 zu erhalten, setzen wir in den Gln. (420) und (421) $M_o = 0$ und an Stelle von \mathfrak{S} den Wert von \mathfrak{S}^t aus Gl. (395) ein.

5. Bestimmung der Drehwinkel ε^a und ε^b der beiden Widerlager eines bogenförmigen Stabes.

In den Hauptformeln (330) und (330 a) für die Festpunktabstände kommen nicht nur die im vorhergehenden Abschnitt ermittelten Drehwinkel des Zwei-

gelenkbogens, sondern auch die Drehwinkel ε^a und ε^b der Widerlager eines bogenförmigen Stabes vor, welche wir nachstehend bestimmen:

Wir bezeichnen, wie in Kap. II, mit

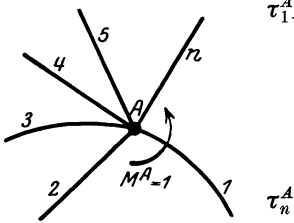


Fig. 206.

$\tau_{1-2-3 \dots n}^A$ (Fig. 206) den gemeinsamen gleichen Drehwinkel der Stäbe 1, 2, 3...n, welche gerade oder bogenförmig sein können, an der Stelle A, an welcher die Stäbe biegefest miteinander verbunden sind, infolge der Belastung in A mit dem Moment $M^A = 1$; mit den (einfachen) Drehwinkel des geraden oder bogenförmigen Stabes n (Fig. 207 und Fig. 208) an der Stelle A infolge der Belastung $M^A = 1$,

unter der Voraussetzung, daß Stab n in A in einem Gelenklager frei drehbar gestützt ist und daß an seinem Endpunkt die Verbindung mit der übrigen Konstruktion wie vorher bestehen bleibt.

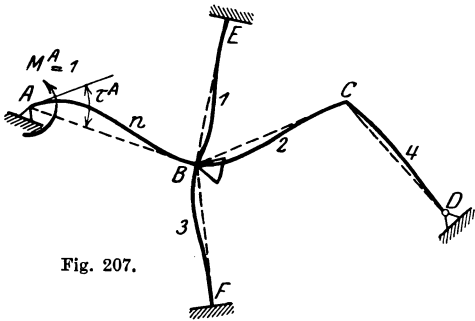


Fig. 207.

Dann ist für Fig. 185 laut Definition z. B. am linken Widerlager B des Stabes 2 (Fig. 209)

$$\varepsilon_2^B = \tau_{1-5}^B.$$

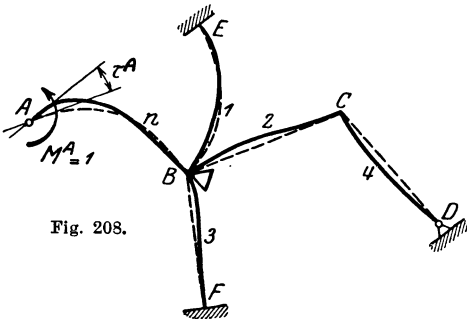


Fig. 208.

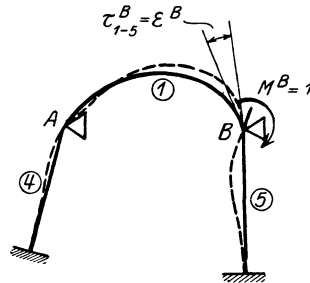


Fig. 209.

In Kap. II, 4 wurde der Wert des gemeinsamen gleichen Drehwinkels der an einem Knotenpunkt A biegefest miteinander verbundenen geraden Stäbe infolge Belastung dieses Knotenpunktes mit $M^A = 1$, bestimmt. Da nun, wie aus Gl. (18) ersichtlich, dieser Wert nur abhängig ist von den einfachen Drehwinkeln τ , so ist diese Gleichung auch gültig, wenn einzelne oder auch alle der in A verbundenen Stäbe bogenförmig sind; in diesem Falle brauchen wir in Gl. (18) nur für die bogenförmigen Stäbe die Drehwinkel τ nach Gl. (441) oder (442) einzusetzen, worin der Bogenschub der bogenförmigen Stäbe zur Geltung kommt. Es ist also allgemein:

$$\tau_{1-2-3 \dots n}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1^A} + \frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\tau}}, \quad (422)$$

und im besonderen für das linke Widerlager B des bogenförmigen Stabes 2:

$$\varepsilon_2^a = \tau_{1-5}^B = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1^B} + \frac{1}{\tau_5^B}}, \quad (423)$$

worin τ_1^B nach Gl. (442) und τ_5^B nach Gl. (43) einzusetzen ist; die beiden Gln. (442) und (443) sind identisch, nur sind in dieselben die dem bogenförmigen bzw. gradlinigen Stab entsprechenden Werte für Festpunktabstand und Drehwinkel einzusetzen.

Da das Widerlager B nur aus 2 Stäben besteht, so wenden wir, wie in Kap. II unter Sonderfall zu Abschnitt 5 ausgeführt, zweckmäßig die ausmultiplizierte Form des Ausdrucks für τ_{1-5}^B an, und zwar:

$$\tau_{1-5}^B = \frac{\tau_1^B \cdot \tau_5^B}{\tau_1^B + \tau_5^B}. \quad (424)$$

Für den Drehwinkel

$$\varepsilon_2^b = \tau_{3-6}^C$$

(Fig. 195c) gelten die Gln. (422), (423) und (424) ebenfalls.

6. Bestimmung der Verteilungsmaße μ .

Die Kämpfermomente M_2^B und M_2^C (Fig. 185a), welche wir nach den vorhergehenden Abschnitten bestimmt haben, pflanzen sich über die links (Fig. 185b) und rechts (Fig. 185c) anschließende Konstruktion weiter.

Das Moment M_2^B spaltet sich beim Übergang über den Knotenpunkt B in die 2 Momente

$$M_1^B = M_2^B \cdot \mu_{2-1}^B$$

und

$$M_5^B = M_2^B \cdot \mu_{2-5}^B,$$

wenn die Faktoren μ die Anteile angeben, welche auf die Stäbe 1 und 5 entfallen.

Sind in einem Knotenpunkt A , auf welchen ein Moment $M = 1$ wirkt, n Stäbe vereinigt, welche gradlinig oder bogenförmig sein können (Fig. 206), so geben die sog. Verteilungsmaße μ die Momentenanteile an, welche auf die einzelnen Stäbe entfallen.

Die in Kap. II, 5 abgeleiteten Hauptformeln (24 bis 26) gelten nicht nur für einen Knotenpunkt, gebildet durch lauter gradlinige Stäbe, sondern auch für „anstoßende“ bogenförmige Stäbe, wenn wir in diese Hauptformeln für die gebogenen Stäbe den einfachen Drehwinkel τ nach Gl. (441) oder (442) einsetzen; es ist also allgemein:

$$\mu_{1-n}^A = \frac{\tau_{2-3 \dots n}^A}{\tau_n^A} \quad (425)$$

(lies μ von Stab 1 nach Stab n), worin $\tau_{2-3 \dots n}^A$ nach Gl. (422) den Wert hat:

$$\tau_{2-3 \dots n}^A = \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}. \quad (426)$$

Setzen wir diesen Wert in Gl. (425) ein, so erhalten wir die schon durch die Gln. (31) bis (33) ausgedrückte Form der Verteilungsmaße μ :

$$\mu_{1-n}^A = \frac{\frac{1}{\tau_n^A}}{\frac{1}{\tau_2^A} + \frac{1}{\tau_3^A} + \dots + \frac{1}{\tau_n^A}}, \quad (427)$$

welche besagt, daß sich das am Knotenpunkt A angreifende Moment im Verhältnis der Elastizitätsmaße $\frac{1}{\tau}$ der dort anstoßenden Stäbe $2, 3 \dots n$ auf dieselben verteilt.

Im besonderen ist nun für den Knotenpunkt B (Fig. 185b):

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_{1-5}^B}{\tau_1^B} = \frac{\frac{1}{\tau_1^B}}{\frac{1}{\tau_1^B} + \frac{1}{\tau_5^B}} \quad (428)$$

oder ausmultipliziert (vgl. Kap. II, 5 Sonderfall),

$$\mu_{2-1}^B = \frac{\tau_5^B}{\tau_1^B + \tau_5^B}, \quad (429)$$

worin τ_1^B nach Gl. (442) und τ_5^B (da Stab 5 gradlinig) nach Gl. (43) einzusetzen ist. Ferner ist

$$\mu_{2-5}^B = 1 - \mu_{2-1}^B. \quad (430)$$

Das Moment M_2^C spaltet sich beim Übergang über den Knotenpunkt C in die beiden Momente

$$M_3^C = M_2^C \cdot \mu_{2-3}^C$$

und

$$M_6^C = M_2^C \cdot \mu_{2-6}^C,$$

worin die Verteilungsmaße μ_{2-3}^C und μ_{2-6}^C die Werte haben:

$$\mu_{2-3}^C = \frac{\tau_6^C}{\tau_3^C + \tau_6^C} \quad (431)$$

und

$$\mu_{2-6}^C = 1 - \mu_{2-3}^C. \quad (432)$$

Nachdem wir die Momente M_1^B , M_5^B , M_3^C und M_6^C (Fig. 185b und 185c) bestimmt haben, können wir dieselben mit Hilfe der Festpunkte über die in B und C anschließenden Stäbe weiterleiten.

7. Bestimmung der einfachen Bogendrehwinkel τ .

Nach der Definition des einfachen Drehwinkels τ^A (siehe Abschnitt 5) bildet sich derselbe, wenn wir (Fig. 210) den in B elastisch eingespannten, in A in

einem festen Gelenk gestützten beliebigen bogenförmigen Stab AB mit dem Moment $M^A = 1$ belasten.

Die Ableitung des Ausdruckes für den einfachen Drehwinkel τ am bogenförmigen Stab gestaltet sich genau gleich (vgl. Fig. 211 bis 213) wie diejenige am geraden Stab (Kap. II, 6).

Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2 dieses Kapitels eingeführten Bezeichnungen erhalten wir für den Bogendrehwinkel τ^A eines beliebigen bogenförmigen Stabes die Hauptformel:

$$\tau^A = \alpha^a - \frac{l}{l-b} \cdot \beta. \quad (441)$$

Analog ergibt sich der Bogendrehwinkel τ^B am anderen Ende des bogenförmigen Stabes AB , falls wir den in A elastisch eingespannten, in B in einem festen Gelenk gestützten Bogen mit $M^B = 1$ belasten, zu:

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta, \quad (442)$$

die Werte der in den Hauptformeln (441) und (442) vorkommenden Drehwinkel α^a , α^b und β am Zweigelenkbogen werden nach Abschnitt 4 und die Festpunktabstände a und b (negative Werte) nach Abschnitt 2 dieses Kapitels ermittelt.

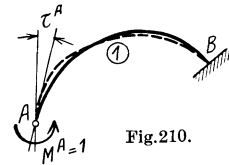


Fig. 210.

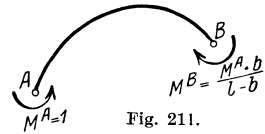


Fig. 211.

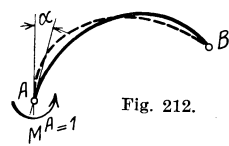


Fig. 212.

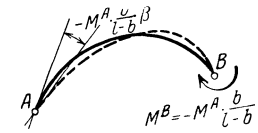


Fig. 213.

8. Bestimmung der Momente, Normalkräfte und Querkräfte am Tragwerk mit bogenförmigen Stäben infolge beliebiger Belastung.

Um die in den bogenförmigen Stäben eines Tragwerkes, z. B. desjenigen der Fig. 185, wirkenden inneren Kräfte aus Rechnungsabschnitt I (unter der Voraussetzung unverschiebbar festgehaltener Knotenpunkte) angeben zu können, müssen wir zunächst die in den Kämpferverbindungslineien der elastisch eingespannten Bogen wirkenden resultierenden Bogenschübe H , sowie die an den Kämpfern derselben wirkenden resultierenden Auflagerdrücke V^l und V^r berechnen.

a) Bogenschub H und Auflagerdrücke V^l und V^r .

Am belasteten Bogen (z. B. Stab 2)

ist der Bogenschub H identisch mit dem resultierenden Bogenschub am Zweigelenkbogen (Fig. 214) unter Einwirkung der gegebenen äußeren Lasten sowie der beiden (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C . Dementsprechend setzt sich der Bogenschub H zusammen aus (Fig. 215, 216, 217) dem für den Zweigelenkbogen im Abschnitt 3 berechneten Horizontal-schub ξ und den Bogenschüben am Zweigelenkbogen herrührend von den beiden

Kämpfermomenten, welche sich durch Multiplikation des Bogenschubes $B_{(M^B=1)}$ für $M_2^B = 1$ mit M^B und des Bogenschubes $B_{(M^C=1)}$ für $M_2^C = 1$ mit M^C ergeben; d. h. es ist für den unsymmetrischen belasteten Bogen

$$H = \mathfrak{H} + M^B \cdot B_{(M^B=1)} + M^C \cdot B_{(M^C=1)}, \quad (443)$$

worin $B_{(M^B=1)}$ nach Gl. (370) $B_{(M^C=1)}$ nach Gl. (371) und die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; und für den symmetrischen belasteten Bogen:

[da nach Gl. (414) bei Symmetrie $B_{(M^B=1)} = B_{(M^C=1)} = \frac{1}{2} B$]:

$$H = \mathfrak{H} + \frac{1}{2} B (M^B + M^C), \quad (444)$$

worin B den Wert der Gl. (413) besitzt und die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C wieder mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Ist der Bogen anstatt der äußeren Belastung einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um t^0 gegenüber seiner Herstellungstemperatur unterworfen, so ist in obigen Gln. (443) und (444) an Stelle von \mathfrak{H} der Wert \mathfrak{H}^t aus Gl. (395) einzusetzen.

Die Auflagerdrücke V^l und V^r am belasteten Bogen sind identisch mit den resultierenden Auflagerdrücken am Zweigelenkbogen (Fig. 200) unter Einwirkung der gegebenen äußeren Lasten sowie der beiden (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C .

Dementsprechend erhalten wir den Auflagerdruck V_2^B durch Zusammensetzen des bei schiefgerichteten Lasten (und Annahme des einfachen Balkens mit Rollenlager am rechten Ende als statisch bestimmtes Hauptsystem) ebenfalls schiefgerichteten Auflagerdruckes \mathfrak{B}_2^B

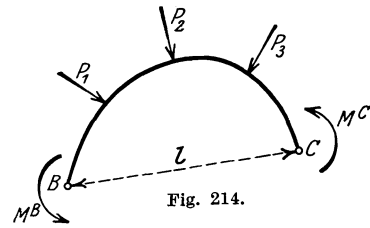


Fig. 214.

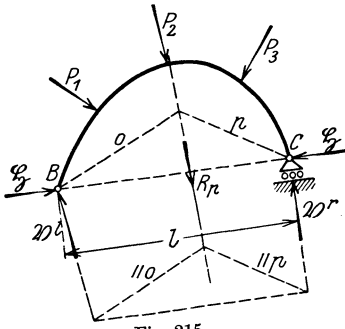


Fig. 215.

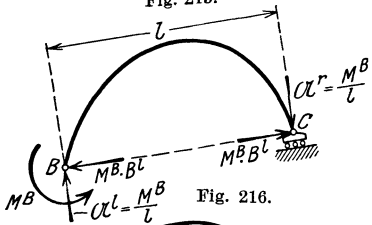


Fig. 216.

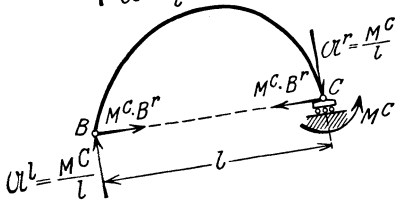


Fig. 217.

(Fig. 215) infolge der äußeren Belastung mit dem Auflagerdruck \mathfrak{A}_2^B am einfachen Balken herrührend von den beiden Kämpfermomenten (Fig. 216 und 217), welcher sich ergibt zu:

$$\mathfrak{A}_2^B = -\frac{1}{l} (M^B - M^C), \quad (445)$$

worin die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; ein nach oben (senkrecht zur Kämpferverbindungsline) gerichteter Auflagerdruck wird dann positiv.

Den Auflagerdruck V_2^C erhalten wir auf analoge Weise durch Zusammensetzen des Auflagerdruckes \mathfrak{B}_2^C (Fig. 215) infolge der äußeren Belastung am

einfachen Balken mit dem Auflagerdruck \mathfrak{Q}_2^C herrührend von den beiden Kämpfermomenten (Fig. 216 und 217), welcher sich ergibt zu:

$$\mathfrak{Q}_2^C = + \frac{1}{l} (M^B - M^C), \quad (446)$$

worin wieder die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Liegen die Kämpfer des belasteten Bogens gleich hoch und ist die Belastung desselben senkrecht gerichtet, so sind alle Auflagerdrücke senkrecht gerichtet und es ist:

$$V_2^B = \mathfrak{Q}_2^B - \frac{1}{l} (M^B - M^C), \quad (447)$$

$$V_2^C = \mathfrak{Q}_2^C + \frac{1}{l} (M^B - M^C), \quad (448)$$

worin wieder die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Ist der Bogen anstatt der äußeren Belastung einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um t^0 gegenüber seiner Herstellungstemperatur unterworfen, so ist $\mathfrak{Q}^B = 0$ und $\mathfrak{Q}^C = 0$ und

$$\left. \begin{aligned} V_t^B &= \mathfrak{Q}^B, \\ V_t^C &= \mathfrak{Q}^C. \end{aligned} \right\} \quad (449)$$

Am unbelasteten Bogen (z. B. Stab 1)

ist $\mathfrak{Q} = 0$ und der Bogenschub H ist deshalb nach Gl. (443) am unsymmetrischen unbelasteten Bogen:

$$H = M^A \cdot B_{(M^A=1)} + M^B \cdot B_{(M^B=1)}, \quad (450)$$

worin $B_{(M^A=1)}$ nach Gl. (370), $B_{(M^B=1)}$ nach Gl. (371) und die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind, und nach Gl. (444) für den symmetrischen unbelasteten Bogen:

$$H = \frac{1}{2} B (M^A + M^B). \quad (451)$$

Desgleichen ist am unbelasteten Bogen $\mathfrak{Q}^A = 0$ und $\mathfrak{Q}^B = 0$, so daß die Auflagerdrücke V_1^A und V_1^B sich nach Gl. (445) und 446) ergeben zu:

$$\left. \begin{aligned} V_1^A &= - \frac{1}{l} (M^A - M^B), \\ V_1^B &= + \frac{1}{l} (M^A - M^B), \end{aligned} \right\} \quad (452)$$

welche senkrecht zur Kämpferverbindungsline gerichtet sind.

b) Moment, Normalkraft und Querkraft

aus Rechnungsabschnitt I am belasteten Bogen (z. B. Stab 2) erhalten wir am einfachsten

graphisch

durch Zeichnen der Stützlinie, ausgehend von einer der beiden Kämpferresultierenden R , was gleichzeitig eine Rechnungsprobe bildet.

Die Größe der Kämpferresultierenden R^B erhalten wir durch Zusammensetzung von H und V_2^B und letztere ist die Resultante aus \mathfrak{R}_2^B und \mathfrak{U}_2^B (Fig. 218 und 218a). Die Lage von R^B erhalten wir durch Zusammensetzung dieser Kraft mit dem (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermoment M^B ; der Abstand r der Resultierenden R^B vom Kämpfer B ergibt sich aus der Gleichung

$$R^B \cdot r = M^B \quad \text{zu} \quad r = \frac{M^B}{R^B}. \quad (453)$$

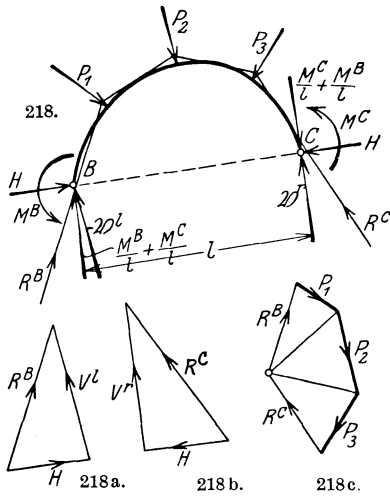


Fig. 218—218c.

R^B ist also Tangente an einem um den Knotenpunkt B mit dem Radius r beschriebenen Kreis, wobei die Drehrichtung von M^B angibt, auf welcher Seite die Tangente an den Kreis zu legen ist.

In analoger Weise erhalten wir die Kämpferresultierende R^C (Fig. 218 und 218b).

Tragen wir nun von einem beliebigen Pol O ausgehend die Kräfte R^B , P_1 , P_2 , P_3 und R^C fortlaufend auf (Fig. 218c), so muß sich der Kräftezug schließen, da diese Kräfte miteinander im Gleichgewicht sein müssen, was eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung bildet. Durch Vervollständigung des Seilecks in Fig. 218 durch Ziehen der Parallelen zu den zwischen P_1 und P_2 einerseits, sowie zwischen P_2 und P_3

andererseits liegenden Polstrahlen im Kräfteck (Fig. 218c) erhalten wir die gesuchte Stützlinie des an beiden Kämpfern elastisch eingespannten bogenförmigen Stabes 2 des Tragwerkes der Fig. 185,

welche bei der vorliegenden Belastung eine Drucklinie ist und die wir in Fig. 219 herausgezeichnet haben.

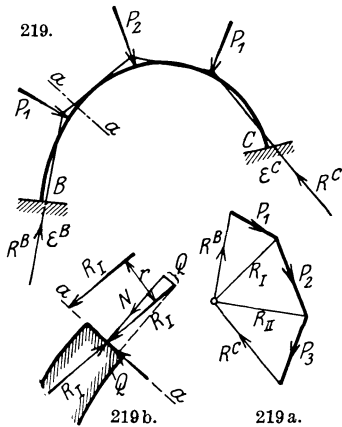


Fig. 219—219b.

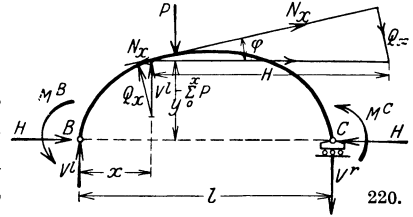
Nun erhalten wir das Moment, die Normalkraft und die Querkraft in einem beliebigen Schnitt $a - a$ des Bogens aus Fig. 219b. Auf den Schnitt $a - a$ wirkt in einem gewissen Abstand die Resultierende R_I ; die Größe und Richtung derselben ergibt sich aus dem Kräfteck der Fig. 219a, die Lage derselben ist durch die Stützlinie in Fig. 219 gegeben. Bringen wir im Schwerpunkt des Querschnittes $a - a$ zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte R_I an, so ist das im Schnitt $a - a$ wirkende Biegemoment M durch das Kräftepaar R_I mit dem Abstand r bestimmt (Fig. 219b), d. h.

$$M = R_I \cdot r. \quad (454)$$

Zerlegen wir die übriggebliebene Kraft R_I im Schwerpunkt des Querschnittes senkrecht und parallel zum Schnitt $a - a$, so ist N die Normalkraft und Q die Querkraft im Schnitt $a - a$; N ist im vorliegenden Fall eine Druckkraft und Q will den oberen Querschnitt vom unteren nach unten abscheren.

Es sei noch erwähnt, daß wir genau dieselben inneren Kräfte am belasteten Bogen erhalten haben würden, wenn wir am einfachen Balken (statisch bestimmtes Hauptsystem) das linke Auflager als beweglich und das rechte als festes Gelenk angenommen hätten.

Bei senkrechter Belastung (Fig. 220) eines elastisch eingespannten Bogens mit gleich hochliegenden Kämpfern kann man Moment und Normalkraft in einem beliebigen Querschnitt des Bogens auch



analytisch

ermitteln.

Das Biegemoment in einem Querschnitt im Abstand x (Fig. 220a) vom linken Kämpfer ist:

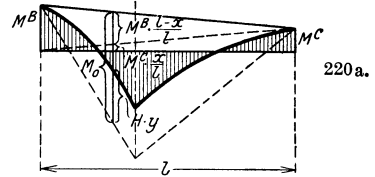


Fig. 220, 220a.

$$M_x = M_o + M^B \cdot \frac{l-x}{l} + M^C \cdot \frac{x}{l} - H \cdot y, \tag{455}$$

wenn M_o das Moment im Schnitt x am frei aufliegenden Balken (statisch bestimmtes Hauptsystem) infolge der äußeren Lasten bedeutet und worin die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^B und M^C mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Die Normalkraft in einem Schnitt mit dem Abstand x vom linken Kämpfer ist:

$$N_x = (V_2^B - \sum_0^x P) \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi. \tag{456}$$

Die Querkraft in einem Schnitt mit dem Abstand x vom linken Kämpfer ist:

$$Q_x = (V_2^B - \sum_0^x P) \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi. \tag{457}$$

Am unbelasteten Bogen (z. B. Stab I)

erhalten wir Moment, Normalkraft und Querkraft am einfachsten analytisch; sie sind die inneren Kräfte am Zweigelenkbogen (Fig. 221), belastet durch die (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomente M^A und M^B sowie die Reaktionen H und V . Der Bogenschub H wird nach Gl. (450), die Auflagerdrücke V^A und V^B nach Gl. (452) ermittelt. Nun berechnen sich Moment, Normalkraft und Querkraft nach den Gln. (455), (456) und (457), wenn wir darin $M_o = 0$ und

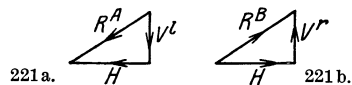
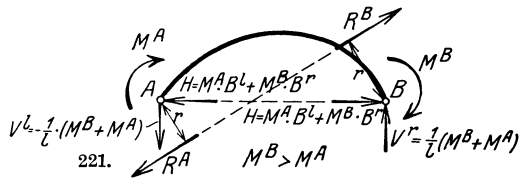


Fig. 221—221 b.

$\sum_0^x P = 0$ setzen.

Die Stützlinie am unbelasteten Bogen läßt sich natürlich auch zeichnen, sie ist eine schiefe Gerade, welche nach Gl. (453)

$$\text{im Abstand } r^A = \frac{M^A}{R^A} \text{ vom Kämpfer } A$$

$$\text{und im Abstand } r^B = \frac{M^B}{R^B} \text{ vom Kämpfer } B$$

verläuft und deren Größe durch Zusammensetzen von H und V an jedem Kämpfer (Fig. 221 a und b) erhalten wird.

Sonderfall: Das symmetrische Brückengewölbe.

Das Eigengewicht von Brückengewölben ist so groß, daß der Einfluß der Verkehrsbelastung auf die inneren Kräfte desselben zurücktritt. Ferner ist die Ermittlung der Eigengewichtsbeanspruchung mit Hilfe der Einflußlinien oder der Stützlinie der großen Lasten wegen ungenau. Daher empfiehlt es sich, dem Brückengewölbe eine solche Form zu geben, daß seine Achse mit einer Stützlinie

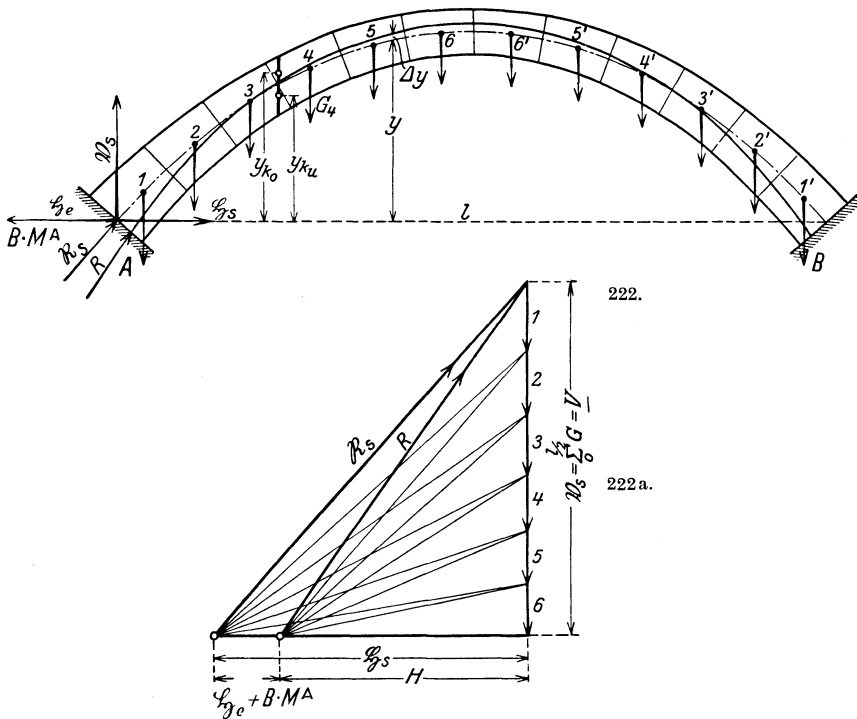


Fig. 222, 222a.

für die ständige Last zusammenfällt, und die noch infolge Verkürzung der Gewölbeachse durch die Normalkräfte entstehende Zusatzbeanspruchung wie folgt zu bestimmen¹.

Es seien \mathfrak{S}_s und \mathfrak{R}_s die waagrechte und senkrechte Komponente der Kämpferresultierenden \mathfrak{R}_s (Fig. 222), welche bei der mit der Bogenachse zusammen-

¹ Mörsch: Berechnung eingespannter Gewölbe, Sonderabdruck der Schweiz. Bauztg. 1906.

fallenden Stützlinie für die ständige Last am von seinen Widerlagern getrennten und in zwei festen Gelenken gestützten Gewölbe entsteht. Da der Bogen sich aber unter dem Einfluß der Normalkräfte verkürzt, während der Abstand l der beiden Kämpfer unverändert bleibt, so kann \mathfrak{S}_s nicht der richtige Bogenschub (am Zweigelenkbogen) sein, sondern er vermindert sich um den Bogenschub \mathfrak{S}_e , dessen Größe wir wie folgt erhalten:

Nach Gl. (355) ist der statisch unbestimmte Bogenschub X_a :

$$X_a = \frac{\delta_{a_o}}{\delta_{a_a}}. \quad (458)$$

Der hierin vorkommende Wert von δ_{a_o} ist nach Gl. (350):

$$\delta_{a_o} = \sum_0^l M_o \cdot M_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_o N_a \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (459)$$

In dieser Gleichung ist einzusetzen:

$$\left. \begin{array}{l} M_o = 0 \\ N_o = N_s \end{array} \right\} \text{ infolge der äußeren Belastung} \quad (460)$$

und nach Fig. 222.

$$\left. \begin{array}{l} M_a = y \\ N_a = -1 \cdot \cos \varphi \end{array} \right\} \text{ infolge der Belastung } X_a = 1 \text{ nach außen.} \quad (461)$$

Es ist nun:

$$\delta_{a_o} = - \sum_0^l N_s \cdot \cos \varphi \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (462)$$

Da wir vorausgesetzt haben, die Stützlinie falle mit der Bogenachse zusammen, so ist aus dem Krafteck der Fig. 222a:

$$N_s \cdot \cos \varphi = \mathfrak{S}_s$$

eingesetzt gibt:

$$\delta_{a_o} = - \mathfrak{S}_s \cdot \sum_0^l \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (463)$$

Der in Gl. (355) vorkommende Wert von δ_{a_a} ist nach Gl. (351)

$$\delta_{a_a} = \sum_0^l M_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (464)$$

Setzen wir die Werte von M_a und N_a aus den Gln. (461) in diese Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\delta_{a_a} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}, \quad (465)$$

und da $\cos \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta s}$:

$$\delta_{a_a} = \sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}. \quad (466)$$

Nun ist nach Gl. (458)

$$X_a = \frac{\delta_{a o}}{\delta_{a a}} = - \frac{\mathfrak{S}_s \cdot \sum_0^l \frac{\Delta s}{F}}{\sum_0^l y^2 \cdot \frac{\Delta s}{J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 \cdot \frac{\Delta s}{F}} \quad (467)$$

oder mit den früheren Bezeichnungen:

$$\frac{\Delta s}{J} = w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v, \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi$$

und unter Berücksichtigung, daß wir bei Symmetrie nur über den halben Bogen zu summieren brauchen, folgt der Ergänzungsbogenschub \mathfrak{S}_e zu:

$$\mathfrak{S}_e = - \frac{\mathfrak{S}_s \cdot \sum_0^{l/2} v}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w + \sum_0^{l/2} \xi^2 \cdot v} \quad (468)$$

Da \mathfrak{S}_e als Ergänzungskraft klein ist, kann das zweite Glied im Nenner gegenüber dem viel größeren ersten Glied vernachlässigt werden. Wir möchten jedoch darauf hinweisen, daß der Nenner der Gl. (468) derselbe ist wie derjenige des Ausdruckes für den Bogenschub B und man deshalb den Nenner obiger Gleichung nicht mehr neu aufzustellen braucht.

Die Randspannungen am Zweigelenkbogen infolge ständiger Last ergeben sich als Summe der gleichmäßig verteilten Druckspannungen von der mit der Achse zusammenfallenden Stützlinie und der von \mathfrak{S}_e erzeugten Biegungsbeanspruchung. Da \mathfrak{S}_e negativ ist, so wirkt diese Kraft nach außen und erzeugt positive Biegemomente, d. h. Druckspannungen im Gewölberücken.

Nun erhalten wir die Drehwinkel φ^a und φ^b der Kämpfertangenten infolge der ständigen Last, welche wir zur Bestimmung der Kämpfermomente des elastisch eingespannten symmetrischen Gewölbes benötigen, aus den Gln. (420) und (421), wenn wir darin $M_o = 0$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_e$ setzen, zu:

$$E \cdot \varphi^a = - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{S}_e \cdot \sum_0^l y(l-x) w, \quad (469)$$

$$E \cdot \varphi^b = - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{S}_e \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w. \quad (470)$$

Nun ist aber bei symmetrischem Bogen und daher symmetrischem Eigengewicht

$$\varphi^a = \varphi^b = \varphi;$$

beachten wir ferner, daß bei Symmetrie nach Gl. (411 b)

$$\sum_0^l y(l-x) \cdot w = \sum_0^l x \cdot y \cdot w = \frac{l}{2} \sum_0^l y \cdot w,$$

und daß wir bei Symmetrie nur über den halben Bogen zu summieren brauchen, so erhalten wir:

$$E \cdot \varphi = \mathfrak{S}_e \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w. \quad (471)$$

Die in dem nach der Stützlinie für Eigengewicht geformten Bogen infolge der Verkürzung der Bogenachse durch die Normalkräfte hervorgerufenen Kämpfermomente erhalten wir nun durch Einsetzen des Wertes von φ in Gl. (334) oder (335). Es ist

$$M^l = M^r = \frac{-\varphi(l-a) + \varphi \cdot a}{l \cdot \beta(l-2a)} = \frac{-\varphi(l-2a)}{l \cdot \beta(l-2a)} = \frac{-\varphi \cdot a}{l \cdot \beta}. \quad (472)$$

Nun ist aber am fest eingespannten symmetrischen Bogen nach Gl. (7):

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\bar{\alpha}} \quad (\text{da dann } \alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha} \quad \text{und } \varepsilon^a = 0),$$

daher

$$M^l = M^r = \frac{-\varphi}{\bar{\alpha}}. \quad (473)$$

Den Wert von φ aus Gl. (471) eingesetzt gibt:

$$M^l = M^r = \frac{\mathfrak{S}_e}{E \cdot \bar{\alpha}} \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w. \quad (474)$$

Der am eingespannten symmetrischen Bogen infolge Eigengewicht auftretende endgültige Bogenschub H ist nach Gl. (444) unter Berücksichtigung, daß

$$\begin{aligned} M^l &= M^r = M, \\ H &= \mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_e + B \cdot M, \end{aligned} \quad (475)$$

worin alle Größen mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind (ein nach innen gerichteter Bogenschub ist positiv).

Ferner ist am eingespannten symmetrischen Bogen infolge Eigengewicht nach den Gleichungen (447) und (448):

$$V^l = V^r = \mathfrak{B}_s. \quad (475a)$$

Schließlich ist das Moment in einem beliebigen Schnitt des symmetrischen eingespannten Gewölbes unter Berücksichtigung, daß $M^l = M^r = M$

$$M_x = M_o + M - H \cdot y, \quad (476)$$

worin das nach Gl. (475) berechnete H einzusetzen ist, oder einfacher:

$$M_x = M - (\mathfrak{S}_e + B \cdot M) y, \quad (477)$$

da für jeden Schnitt des nach der Stützlinie für eine gegebene Belastung geformten Bogens: $M_o - \mathfrak{S}_s \cdot y = 0$, indem die von der Stützlinie = Bogenachse (Seileck mit Polweite \mathfrak{S}_s gezeichnet) und der Kämpferverbindungsline eingeschlossene Fläche die M_o -Fläche darstellt, so daß für jeden Schnitt:

$$M_o = \mathfrak{S}_s \cdot y. \quad (478)$$

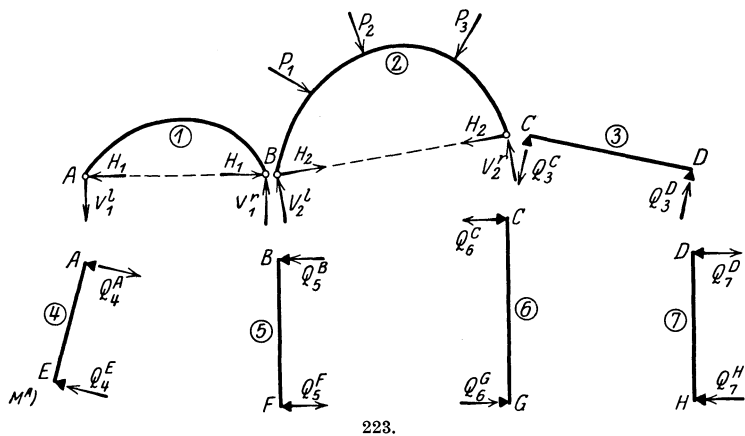
Die Abweichung Δy (siehe Fig. 222) der Stützlinie für Eigengewicht infolge \mathfrak{S}_e beträgt:

$$\Delta y = \frac{M_x}{H}. \quad (479)$$

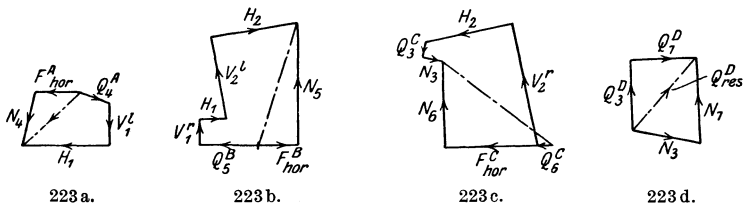
9. Bestimmung der Festhaltungskräfte.

Ein Tragwerk mit bogenförmigen Stäben, dessen Knotenpunkte verschiebbar sind, kann genau wie ein Stockwerkrahmen nicht durch eine einzige Festhaltungskraft in Ruhe gehalten werden.

Zum Beispiel am Tragwerk der Fig. 185 müssen wir an den Knotenpunkten A , B , und C je eine Festhaltungskraft anbringen, damit das ganze Tragwerk unverschiebbar festgehalten und dadurch die Voraussetzung für den Rechnungsabschnitt I erfüllt ist.



223.



223 a.

223 b.

223 c.

223 d.

Fig. 223—223 d.

Zur Bestimmung dieser Festhaltungskräfte F^A , F^B und F^C denken wir uns alle Stäbe an den Knotenpunkten durchgeschnitten, deren Enden wegen der vorausgesetzten Unverschiebbarkeit der Knotenpunkte in festen Gelenklagern gestützt und mit den in den Schnittstellen wirkenden inneren Kräften (Reaktionen) belastet (Fig. 223). Auf die herausgetrennten Knotenpunkte wirken diese Kräfte dann als „Aktionen“, während die Festhaltungskraft als „Reaktion“ am Knotenpunkt diesen „Aktionen“ das Gleichgewicht hält. Deshalb verwenden wir auch am Tragwerk mit bogenförmigen Stäben zur Bestimmung der Festhaltungskräfte, wie im Kap. VII, 1a) erwähnt, der Einfachheit halber die „Reaktionen“ an den Stabenden.

Am Knotenpunkt A (Fig. 223) wirken die Reaktionen:

H_1 der Bogenschub am unbelasteten Bogen 1 nach Gl. (450),

Q_4^A herrührend von Stab 4 ,

V_1^A der linke Auflagerdruck des unbelasteten Bogens 1 bei freier Auflagerung.

Setzen wir diese Kräfte zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 4 und die Horizontale (Fig. 223 a),

so ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_{hor}^A am Knotenpunkt A , da die in den Stab 4 fallende Komponente N_4 , die Normalkraft des Stabes 4 auf den Knotenpunkt A aus Rechnungsabschnitt I, weder verschieben noch festhalten kann und daher ausscheidet.

Am Knotenpunkt B (Fig. 223) wirken die Reaktionen:

- Q_5^B herrührend von Stab 5,
- V_1^C der rechte Auflagerdruck des unbelasteten Bogens 1 bei freier Auflagerung,
- H_1 der Bogenschub am unbelasteten Bogen 1 nach Gl. (450),
- V_2^B der linke Auflagerdruck des belasteten Bogens 2 bei freier Auflagerung,
- H_2 der Bogenschub am belasteten Bogen 2 nach Gl. (443).

Setzen wir diese Kräfte zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in Richtung des Auflagerstabes 5 und die Horizontale (Fig. 223b), so ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_{hor}^B am Knotenpunkt B .

Am Knotenpunkt C (Fig. 223) wirken die Reaktionen:

- Q_6^C herrührend von Stab 6,
- V_2^C der rechte Auflagerdruck des belasteten Bogens 2 bei freier Auflagerung,
- H_2 der Bogenschub am belasteten Bogen 2 nach Gl. (443),
- Q_3^C herrührend vom geraden Stab 3.

Ferner wirkt am Knotenpunkt C , da derselbe mit dem Knotenpunkt D durch einen geraden Stab verbunden ist, die aus Fig. 223d hervorgehende Komponente N_3 von Q_{res}^D (N_3 wirkt am Knotenpunkt D als „Reaktion“, im Stab 3 als „Aktion“ und am Knotenpunkt C wieder als „Reaktion“).

Setzen wir diese 5 Kräfte zusammen und zerlegen die daraus hervorgehende Resultierende in die Richtung des Auflagerstabes 6 und die Horizontale (Fig. 223c), so ist die in die Horizontale fallende Komponente die gesuchte Festhaltungskraft F_{hor}^C , welche die Knotenpunkte C und D in Ruhe hält.

10. Sonderfall: Der Bogen wird durch zwei oder mehr geradlinige Stäbe gebildet.

Den in Fig. 224 dargestellten Rahmen könnte man auch nach dem vorhergehenden berechnen, indem man

den Stabzug 2—3 als bogenförmigen Stab betrachtet. Dies ist jedoch, wie in Teil II, Kap. I, Sonderfälle, ausgeführt, nicht zweckmäßig, sondern dieser Rahmen wird einfacher als „nach der Seite“ mehstöckiger Rahmen berechnet. Da nun dieser Rahmen während R. I in den Knotenpunkten B und D unverschiebbar festgehalten werden muß, damit alle seine Knotenpunkte keine Verschiebungen ausführen können, so ist er wie ein zweistöckiger Rahmen zu behandeln.

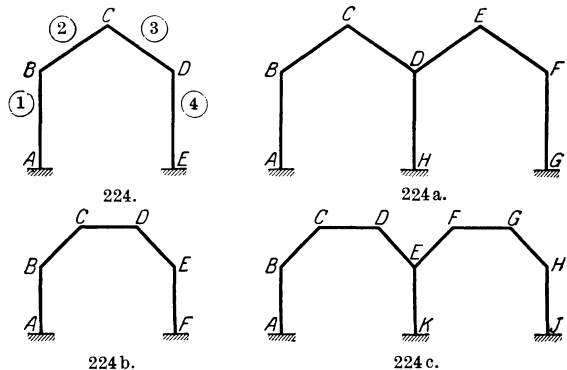


Fig. 224—224 c.

Ist der Rahmen mehrfach (Fig. 224a), so muß er während R. I in den Knotenpunkten A , C und E unverschiebbar festgehalten werden und ist daher wie ein dreistöckiger Rahmen zu berechnen.

Das Analoge gilt für die Rahmen der Fig. 224b und c, bei welchen jedoch außer der Säulenköpfe noch die oberen Stäbe 1 bzw. 1 und 2 , während R. I unverschiebbar festzuhalten sind, so daß der Rahmen der Fig. 224b wie ein dreistöckiger und der Rahmen der Fig. 224c wie ein fünfstöckiger Rahmen zu berechnen ist.

Wegen weiterer ähnlicher Konstruktionsformen, welche zweckmäßig nach dem Verfahren für Rahmen mit nur geradlinigen Stäben berechnet werden, sei hiermit auf Teil II, Kap. I, Sonderfälle, verwiesen.

Berechnung des Tragwerkes mit verschiebbaren Knotenpunkten nach der Methode der Festpunkte.

I. Gang der Berechnung.

Wir unterscheiden vier verschiedene Gattungen von Tragwerken mit verschiebbaren Knotenpunkten und geradlinigen Stäben, und zwar:

1. der einstöckige Rahmen,
2. der mehrstöckige Rahmen,
3. der Rahmenträger (Vierendeelträger) und
4. das biegungsfeste Fachwerk,

deren Berechnung nach der Methode der Festpunkte wir nachstehend erläutern.

Des leichteren Verständnisses wegen behandeln wir ausnahmsweise jeweils zuerst das Tragwerk mit parallelen Stützen und dann erst das allgemeine Tragwerk mit beliebig gerichteten Stützen.

1. Der einstöckige Rahmen.

Die Berechnung gestaltet sich verschieden, je nachdem die Stützen parallel zueinander oder schief gerichtet sind.

a) Rahmen mit parallelen Stützen.

Der in Fig. 225 dargestellte Rahmen mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe ist in keinem Punkte festgehalten, d. h. er besitzt verschiebbare Knotenpunkte; irgendwelche äußeren oder inneren waagrechten Kräfte sind imstande, dem Balken und damit auch den Pfeilerköpfen (Knotenpunkten) waagrechte Verschiebungen zu erteilen, deren Größe von der Steifigkeit der Stäbe und ihrer Einspannung abhängt. Die Balkenöffnung l sei mit der beliebig gerichteten Kraft P belastet.

Wir teilen den Gang der Berechnung des Rahmens in folgende zwei getrennte Hauptabschnitte ein:

Rechnungsabschnitt I.

Während des R. I nehmen wir an, die Verschiebbarkeit des Balkens sei vorübergehend durch gedachte Lager an den Knotenpunkten aufgehoben (Fig. 225a), welche jedoch die elastische Drehbarkeit der Knotenpunkte nicht behindern. Der Rahmen geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten über, dessen Berechnung wir im „Ersten Teil“ vorgeführt

haben. Wir bestimmen also zuerst die Festpunkte an allen Stäben, dann mit Hilfe der Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente am ganzen Tragwerk infolge der gegebenen äußeren Belastung und zum Schluß aus den Momenten die Festhaltungskraft, welche gerade imstande ist, die Knotenpunkte des Rahmens in ihrer ursprünglichen Lage zu halten.

Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen jetzt die während des R. I an den Knotenpunkten gedachten Lager, und dadurch auch die Festhaltungskraft, welche den Balken des Rahmens und damit auch alle Knotenpunkte während des R. I unverschiebbar festhielt.

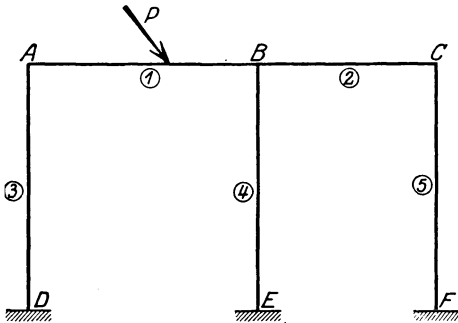


Fig. 225.

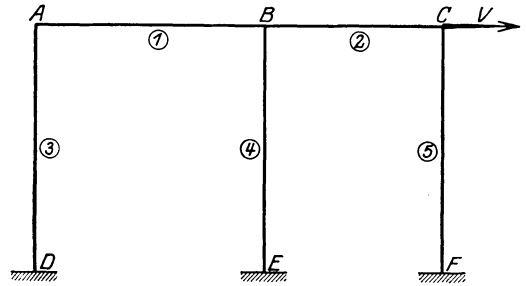


Fig. 225 b.

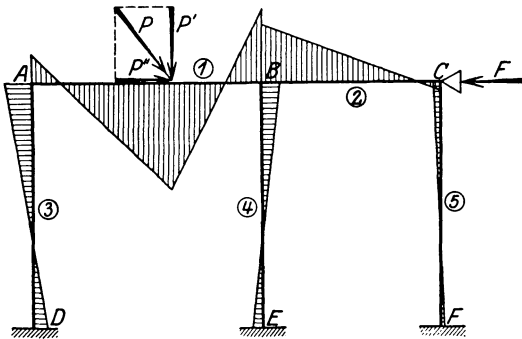


Fig. 225 a.

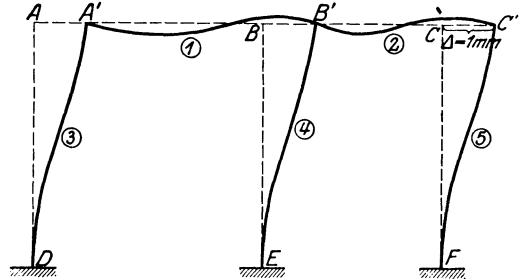


Fig. 225 c.

Hierauf tritt die der Festhaltungskraft („Reaktion“) gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Verschiebungskraft („Aktion“) in Tätigkeit (Fig. 215b), welche dem Balken des Rahmens und damit sämtlichen Knotenpunkten eine waagrechte Verschiebung Δ genau wie eine äußere, den Rahmen belastende Horizontalkraft erteilt, und daher am ganzen Rahmen Momente hervorruft, welche wir als Zusätze bezeichnen.

Um diese Zusätze zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Momente M' für eine gegebene Verschiebung, z. B. $\Delta = 1 \text{ mm}$, des Balkens und damit sämtlicher Pfeilerköpfe (Fig. 215c) in Richtung der Kraft $H = +1t$ (von links nach rechts, Fig. 215f). Durch diese Verschiebung erleiden bei parallelen Pfeilern nur diese eine „gegenseitige Verschiebung der Stabenden“, welche überdies bei allen Pfeilern gleich groß ist, während die Enden der den Balken bildenden

Stäbe in der Balkenrichtung verbleiben (Fig. 225d). Wir müssen also, um die Momente M' zu erhalten, für alle Pfeiler (für alle Stäbe, deren Enden sich gegenseitig verschieben) die Momente an beiden Enden, herührend von ihrer gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung, nach den allgemeinen Gln. (515) und (520) berechnen (siehe Teil II, Kap. III), diese Momente über das ganze Tragwerk mittels der Festpunkte und Verteilungsmaße weiterleiten und zum Schluß mit ihren Vorzeichen addieren. Aus den Momenten M' (Fig. 225e) ermitteln wir die zugehörige Erzeugungskraft Z , d. h. diejenige Kraft, welche die angenommene Verschiebung des Balkens zu erzeugen in der Lage ist. Hierauf berechnen wir durch Division der Momente M' durch die Erzeugungskraft Z die Momente M^* infolge der Belastung $H = +1 t$ (Fig. 225f), aus welcher wir durch Multiplikation mit dem Werte der Verschiebungskraft, unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens, die gesuchten Zusatzmomente (Fig. 225g) erhalten. Zum Schluß addieren wir die mit ihrem Vorzeichen zu nehmenden Zusätze aus R. II zu den Momenten aus R. I; die Summe ergibt die genauen resultierenden Momente usw., welche am Rahmen infolge der gegebenen äußeren Lasten entstehen (Fig. 225h).

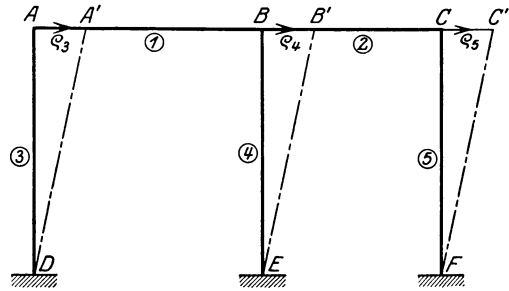


Fig. 225 d.

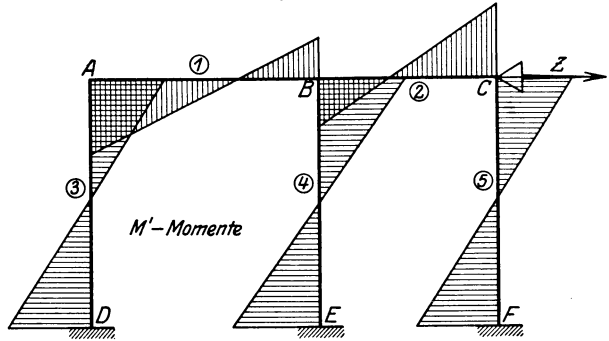


Fig. 225 e.

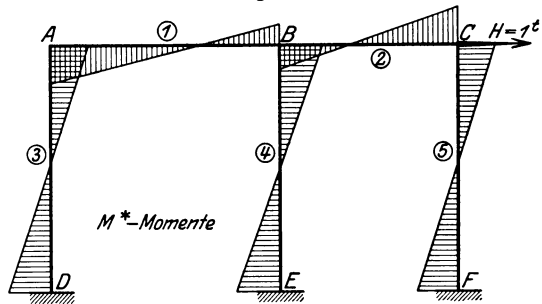


Fig. 225 f.

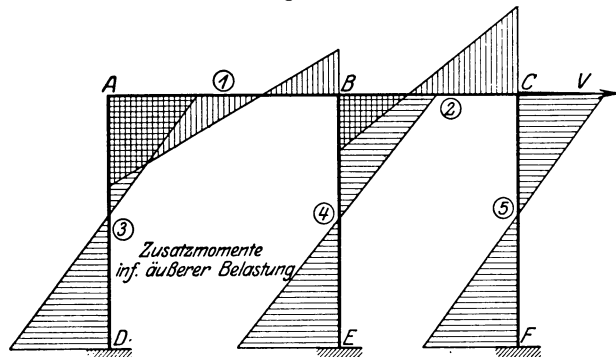


Fig. 225 g.

Da die Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte aus den Momenten hervorgehen, so ermitteln wir diese Kräfte zweckmäßig erst aus der resultierenden Momentenfläche.

Die vorstehend beschriebene Berechnungsweise des Rahmens mit senkrechten Stützen ist nicht nur bei beliebiger ruhender Balken- oder Pfeilerbelastung vorteilhaft, sondern eignet sich in gleich guter Weise zur Berechnung des Rahmens für wandernde Lasten nach dem Verfahren der Einflußlinien.

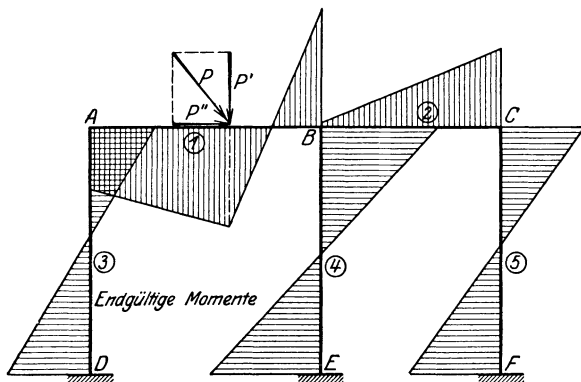


Fig. 225 h.

linie der Verschiebungskraft („Aktion“) und der M^* -Momentenfläche des Rahmens ermittelt.

Da man den Rahmen während des R. I als vorübergehend an seinen Knotenpunkten festgehalten betrachtet, kann man bei Bestimmung der Momente aus R. I die Endpfeiler in die Verlängerung der Balkenachse hinaufklappen und wie Endfelder eines durchlaufenden Balkens behandeln, was besonders bei belasteten Endpfeilern vorteilhaft ist; dabei sind an den Köpfen der aufgeklappten Pfeiler frei drehbare Lager anzunehmen. Ergibt sich die Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft zu Null, d. h. heben sich die in die Balkenrichtung fallenden Reaktionen (obere Querkräfte an den Pfeilern) in den einzelnen Knotenpunkten gegenseitig auf, was bei symmetrischer Tragkonstruktion und symmetrischer Belastung zutrifft, so treten am Rahmen keine „Zusätze“ auf, und R. I liefert schon die endgültigen Momente und übrigen inneren Kräfte. Man erhält z. B. am Rahmen der Fig. 226 sowohl für gleichmäßig verteilte Belastung des Balkens auf seine ganze Länge (Fig. 226a) als auch für gleichzeitige Belastung der beiden

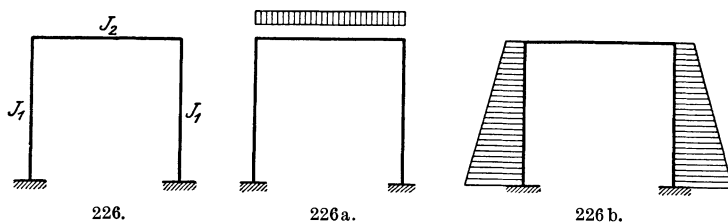


Fig. 226—226 b.

Pfeiler mit gleich großem Erd- oder Wasserdruck (Fig. 226b) durch Aufklappen der Pfeiler in die Verlängerung der Balkenachse und Durchführung der Berechnung wie für einen an beiden Enden eingespannten durchlaufenden Balken mit drei Öffnungen genau dieselben Momente und übrigen inneren Kräfte, wie sie eine Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen liefern würde. Dasselbe gilt z. B. für den einstielligen Rahmen der Fig. 227 (Vordach eines Gebäudes),

der in B ein festes Lager besitzt, und zwar für beliebige Balken- und Pfeilerbelastung, da die im Balken auftretende Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft vom festen Balkenaufleger aufgenommen wird, weshalb keine zusätzlichen Momente usw. auftreten.

Die Grundlage für die Ermittlung der „Zusätze“ aus R. II bilden die Momente M^* infolge einer äußeren, in Balkenachse angreifenden Horizontalkraft $H = 1 t$. Da die Momente M^* allein abhängig sind von

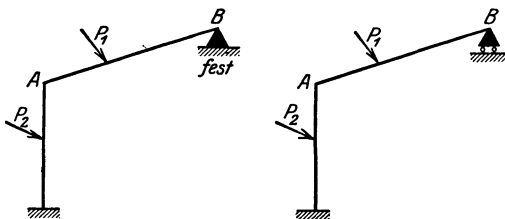


Fig. 227 u. 227a.

den Abmessungen des Rahmens, so hat man bei der Berechnung eines Rahmens für mehrere Belastungsfälle diese Momente M^* nur einmal zu ermitteln, und man erhält die „Zusätze“ dadurch, daß man die jedem einzelnen Belastungsfall entsprechende Verschiebungskraft mit den Momenten M^* multipliziert. Hieraus ist ersichtlich, daß die vorliegende Berechnungsmethode des Rahmens gegenüber derjenigen nach den Elastizitätsgleichungen, wo für jeden Belastungsfall die Ermittlung der statisch unbestimmten Größen, eine sehr zeitraubende Arbeit, von neuem vorgenommen werden muß, sehr vorteilhaft ist. In Kap. IV, 1, a) sind die Momente M^* für den einfachen symmetrischen Rahmen ermittelt, so daß solche Rahmen für beliebige Belastung sehr rasch berechnet werden können.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man bei senkrechter Belastung des Balkens die inneren Kräfte herrührend von den Säulenkopfverschiebungen, d. h. die Zusätze, erst bei Rahmen mit vier und mehr Pfeilern vernachlässigen kann, bei vier Pfeilern auch nur dann, wenn das Tragwerk nicht unsymmetrisch ist. Die größten Zusätze für senkrechte Belastung treten bei einem durchlaufenden Balken mit zwei ungleich großen Öffnungen auf, dessen Enden frei drehbar sind und dessen Mittelstütze aus einem mit dem Balken biegungsfest verbundenen Pfeiler besteht; hier erreichen die Zusätze (bei senkrechter Belastung) Werte bis zu einem Drittel der inneren Kräfte, die man ohne Berücksichtigung der Säulenkopfverschiebungen erhält.

Was die Momente, herrührend von einer Temperaturänderung des Tragwerkes gegenüber der Herstellungstemperatur, oder einer Stützensenkung, oder der Längenänderung der Stäbe infolge der in denselben wirkenden Normalkräfte, wodurch Knotenpunktverschiebungen eintreten, betrifft, so können dieselben nach Kap. V bzw. VI bzw. VII ermittelt und entsprechend ihren Vorzeichen zu den von der äußeren Belastung hervorgerufenen Momenten addiert werden.

Der in Fig. 228 dargestellte Rahmen mit parallelen Pfeilern und beliebig geneigtem Balken wird in

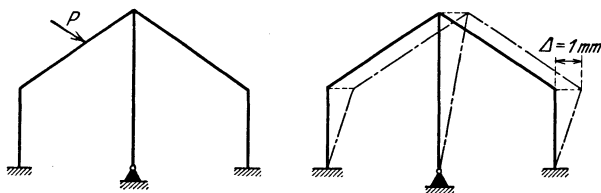
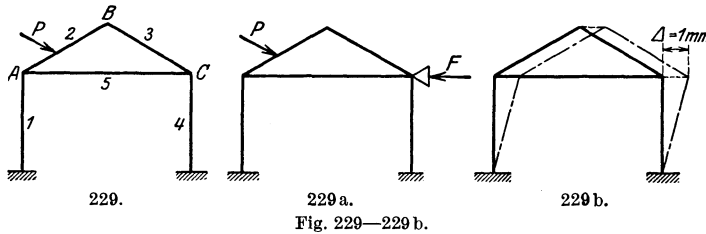


Fig. 228 u. 228a.

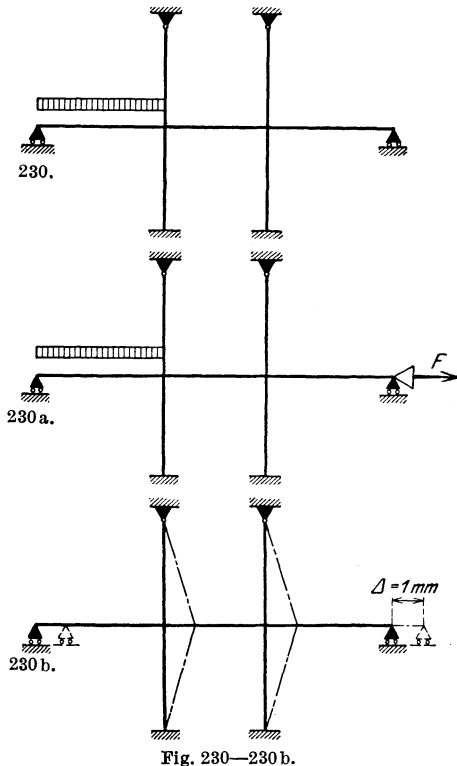
gleicher Weise berechnet wie der Rahmen mit waagrechtem Balken; der Unterschied liegt nur in der sich etwas länger gestaltenden Bestimmung der Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft (siehe Teil I, Kap. VII). Wenn die Pfeiler

parallel sind, so ergibt sich wieder nur für die letzteren eine gegenseitige Verschiebung der Stabenden (Fig 228a), die Balkenstäbe können beliebig gerichtet sein, sie verschieben sich nur parallel.

Dasselbe gilt für den in Fig. 230a dargestellten einstieligen Rahmen mit geneigtem Balken und horizontal laufendem Rollenlager an einem Ende.



In Fig. 229 wurde ein einstöckiges Tragwerk mit Aufsätzen dargestellt; Stab 5 ist biegefest ausgebildet. Die Berechnung dieses Rahmens gestaltet sich analog derjenigen des Rahmens der Fig. 225. Die Bestimmung der Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft wurde in Teil I, Kap. VII gezeigt. Bei der Verschiebung des Balkens (Stab 5) um eine beliebige Strecke Δ (Fig. 229b) erleiden nur die beiden Säulen gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, da diese Säulen, welche den Balken stützen, parallel zueinander sind.



In Fig. 230 wurde ein Rahmen dargestellt, wie er bei Berechnung von Silozellenwänden (als Grundriß) vorkommt. Die Berechnung dieses Rahmens gestaltet sich analog wie diejenige des Rahmens der Fig. 225. Die Bestimmung der Festhaltungs- (Fig. 230a) bzw. Verschiebungskraft wurde in Teil I, Kap. VII gezeigt. Bei der Verschiebung des Balkens (Fig. 230b) um eine gegebene Strecke erleiden nur die vier Säulen gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, während die Enden der den Balken bildenden Stäbe in der Balkenrichtung verbleiben.

b) Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen.

Die Berechnung des in Fig. 231 dargestellten allgemeinen einstöckigen Rahmens mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe teilen wir wieder in R. I und R. II; es sei nur der Stab 6 mit den Kräften P_1 und P_2 belastet.

Rechnungsabschnitt I.

liefert uns die Momente und übrigen inneren Kräfte für den Fall, daß die Knotenpunkte vorübergehend unverschiebbar festgehalten sind, was wir in

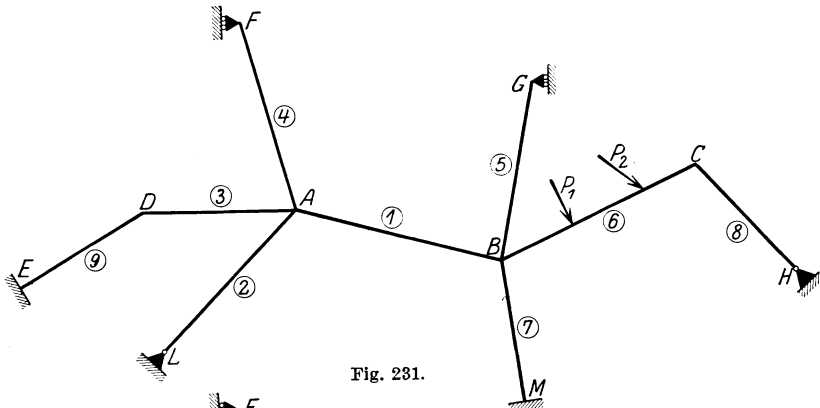


Fig. 231.

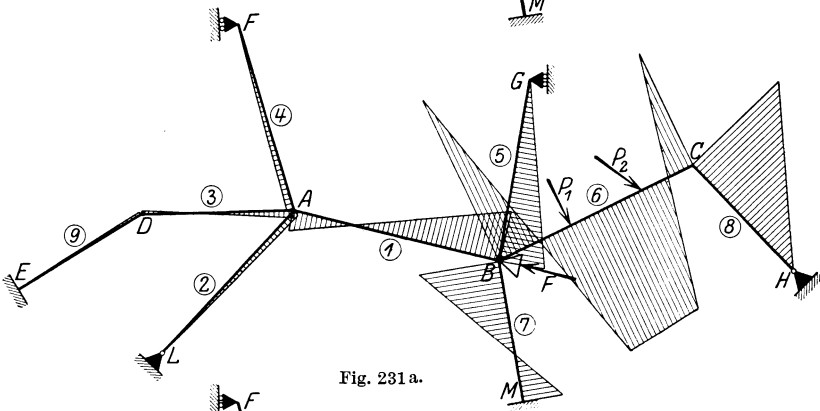


Fig. 231 a.

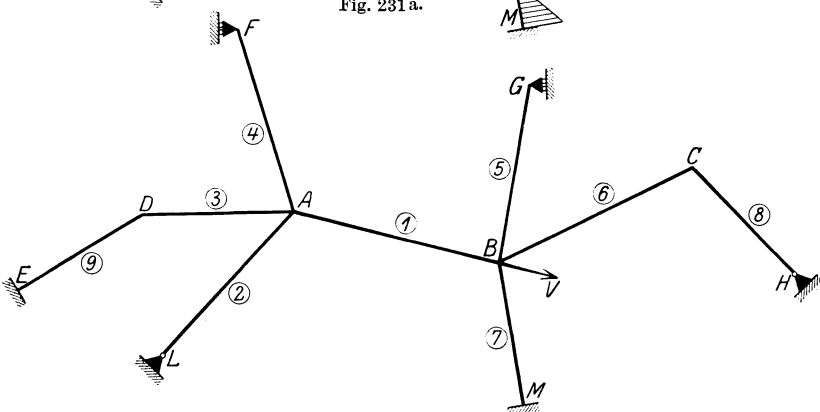


Fig. 231 b.

Fig. 231 a durch ein Lager in B in Richtung des Stabes 1 angedeutet haben; diese Momente (Fig. 231 a) werden nach dem „Ersten Teil“ ermittelt. Aus den Momentenflächen für den festgehaltenen Zustand bestimmen wir noch nach Kap. VII, 1 des „Ersten Teiles“ die Festhaltungskraft, welche eine Verschiebung der Knotenpunkte unter Einwirkung der äußeren Belastung verhindert,

oder falls die Verschiebung der Knotenpunkte schon eingetreten ist, dieselbe wieder rückgängig macht.

Rechnungsabschnitt II

besteht darin, daß wir die in Wirklichkeit nicht vorhandene Festhaltungskraft entfernen, worauf sich der Rahmen unter der Wirkung der äußeren Belastung

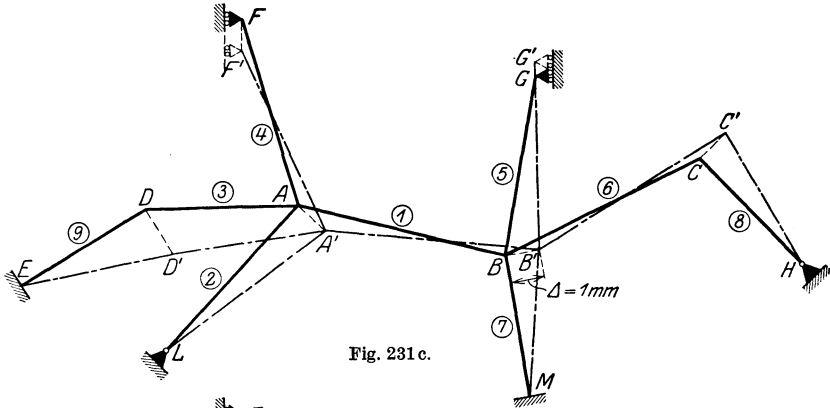
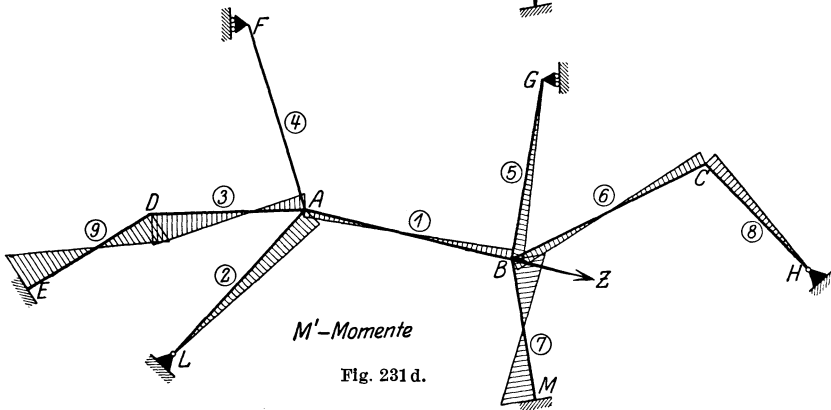
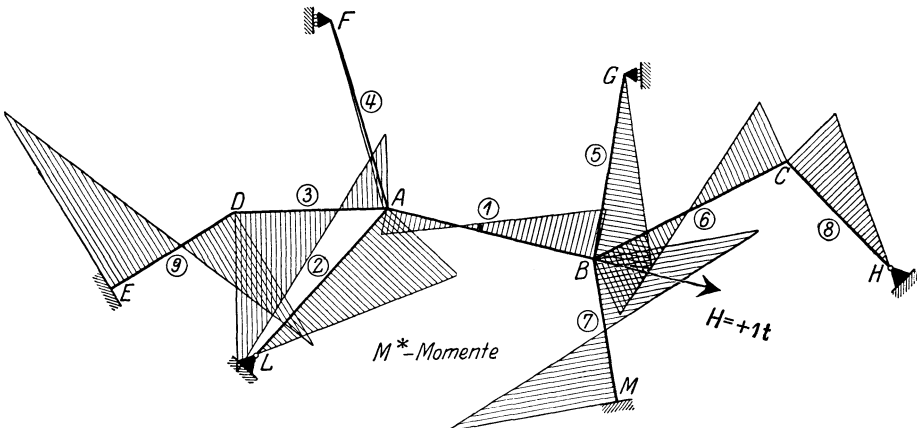


Fig. 231 c.



M'-Momente

Fig. 231 d.



M-Momente*

Fig. 231 e.

verschiebt. Die Verschiebung der Knotenpunkte des Rahmens infolge der äußeren Belastung ist gleich groß wie diejenige, welche entsteht, wenn der Rahmen nur

durch die sog. Verschiebungskraft (die entgegengesetzt gerichtete Festhaltungskraft) belastet ist. Die Verschiebungskraft (Fig. 231b) erzeugt daher die „Zusätze“, welche zu den Momenten und übrigen inneren Kräften aus R. I zu addieren sind, um die wirklichen Momente (Fig. 231g) und übrigen inneren Kräfte am Rahmen zu erhalten.

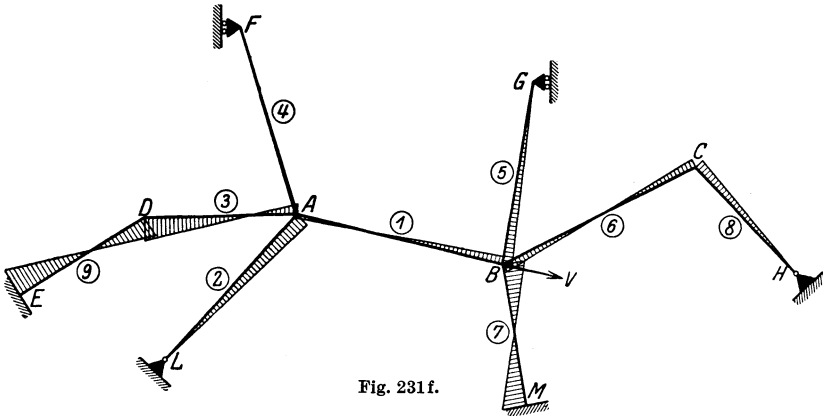


Fig. 231f.

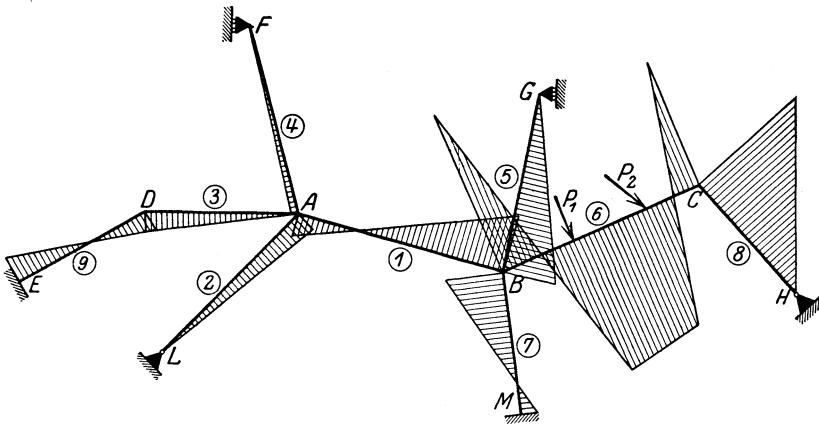


Fig. 231g.

Um die Zusätze zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Momente M' für eine gegebene Verschiebung, z. B. $\Delta = 1 \text{ mm}$, des Stabes 1 in Richtung der Kraft $H = + 1 t$ (von links nach rechts, Fig. 231e), darauf die zu den Momenten M' (Fig. 231d) gehörige Erzeugungskraft Z , d. h. diejenige Kraft, welche die angenommene Verschiebung des Balkens und damit die Momente M' erzeugt, und endlich die Momente M^* (Fig. 231e) infolge der Belastung $H = + 1 t$. Durch Multiplikation der Momente M^* mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der Verschiebungskraft erhalten wir dann die gesuchten Zusätze (Fig. 231f).

Da die Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte aus den Momenten hervorgehen, so ermitteln wir diese Kräfte zweckmäßig erst aus der resultierenden Momentenfläche.

Bei der Bestimmung der Momente M' an einem Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen (Auflagerstäben) ist gegenüber derjenigen an einem Rahmen mit parallelen Pfeilern zu beachten, daß am Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen (Fig. 231) bei einer Verschiebung des Stabes 1 (in dessen Richtung die Festhaltungskraft bestimmt wurde) erstens sich nicht nur an den Pfeilern, sondern auch

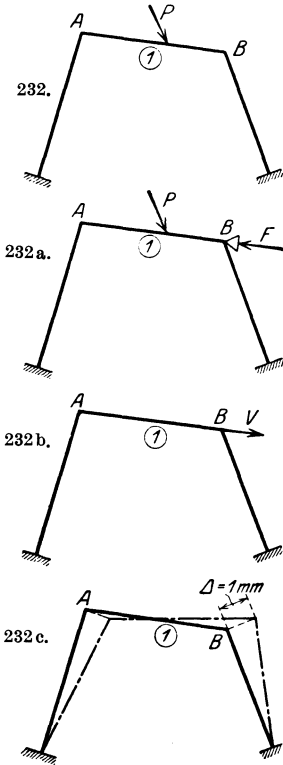


Fig. 232—232c.

an den übrigen Stäben eine gegenseitige Verschiebung der Stabenden ergibt, und zweitens die Knotenpunkte sich nicht alle um das gegebene Maß verschieben, die Verschiebungen der nicht auf dem Stab 1 liegenden Knotenpunkte vielmehr (nach dem folgenden Kapitel) bestimmt werden müssen.

An dem in Fig. 232 dargestellten Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben ist der Gang der Rechnung noch besser erkennbar. R. I liefert uns die Momente unter der Annahme, daß die Knotenpunkte des Rahmens unverschiebbar seien, was wir durch Anbringen eines festen Lagers in B erreichen (Fig. 232a); dadurch ist auch der Knotenpunkt A von selbst in Ruhe gehalten. Als Richtung der Festhaltungskraft, welche im gedachten Lager in B auftritt, wählen wir zweckmäßig die Richtung des Stabes 1; in Teil I, Kap. VII, 4 wurde diese Festhaltungskraft ermittelt. Um die Zusätze aus R. II (Fig. 232b) zu erhalten, verschieben wir den Balken (Fig. 232c) um eine beliebige Strecke in Richtung der Kraft $H = +1t$ und ermitteln die Momente M' infolge dieser Verschiebung sowie die zugehörige Erzeugungskraft Z derselben in Richtung des Stabes 1. Durch eine Verschiebung des Balkens erleiden sämtliche Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, daher müssen wir für jeden Stab die davon herrührenden Momente nach Kap. III, 1 ermitteln, dieselben weiterleiten und darauf mit ihren Vorzeichen

addieren, um die Momente M' zu erhalten. Durch Division der Momente M' durch den Wert der Erzeugungskraft Z erhalten wir die Momente M^* infolge der Kraft $H = +1t$ in Richtung des Balkens, aus welchem wir durch Multi-

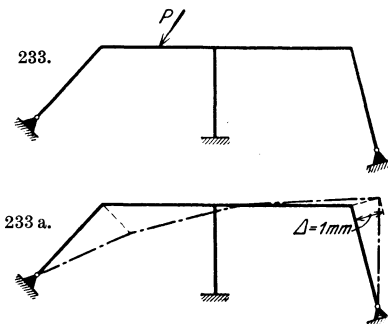


Fig. 233 u. 233a.

plikation mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Wert (falls die Verschiebungskraft nach links gerichtet ist, hat ihr Wert das negative Vorzeichen) der Verschiebungskraft die gesuchten Zusätze erhalten. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen erhalten wir die endgültigen Momente und aus diesen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) am Rahmen.

Der Rahmen der Fig. 233 wird in analoger Weise berechnet. Durch eine Verschiebung des Balkens erleiden ebenfalls sämtliche Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden (Fig. 233a).

In Fig. 234 wurde ein einstöckiger Rahmen mit Aufsatz dargestellt, dessen Säulen beliebig gerichtet sind; Stab 5 ist biegungsfest vorausgesetzt. Dieser Rahmen wird in analoger Weise wie derjenige der Fig. 232 berechnet. Die Bestimmung der Festhaltungskraft F (Fig. 234a) erfolgt in analoger Weise wie am Rahmen der Fig. 229. Bei der Verschiebung des Balkens (Stabes 5) um eine beliebige Strecke Δ (Fig. 234b) erleiden der beliebig gerichteten Säulen wegen nicht nur diese, sondern sämtliche Stäbe des Rahmens, also auch die Stäbe des Aufsatzes, gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden; darin besteht der Unterschied in der Berechnung der Rahmen der Fig. 229 und 234.

Der in Fig. 235 dargestellte Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben ist auch einstöckig wie der Rahmen der Fig. 232 und wird in analoger Weise berechnet. Um die Momente aus R. I zu erhalten, denken wir uns den Rahmen durch ein festes Lager im Knotenpunkt B unverschiebbar festgehalten (Fig. 235a); dadurch ist auch der Knotenpunkt C von selbst in Ruhe gehalten, da das Tragwerk in D ein festes Auflager besitzt. Als Richtung der Festhaltungskraft, welche im gedachten Lager in B auftritt, wählen wir zweckmäßig die waagrechte Richtung; im Teil I, Kap. VII, 4 wurde diese Festhaltungskraft F_{hor} ermittelt. Um die Zusätze aus R. II (Fig. 235b) zu erhalten, verschieben wir den Knotenpunkt B (Fig. 235c) im Sinne der Kraft $H = +1 t$ und ermitteln die Momente M' infolge dieser Verschiebung, d. h. infolge der davon herrührenden gegenseitigen Verschiebung der Enden sämtlicher Stäbe,

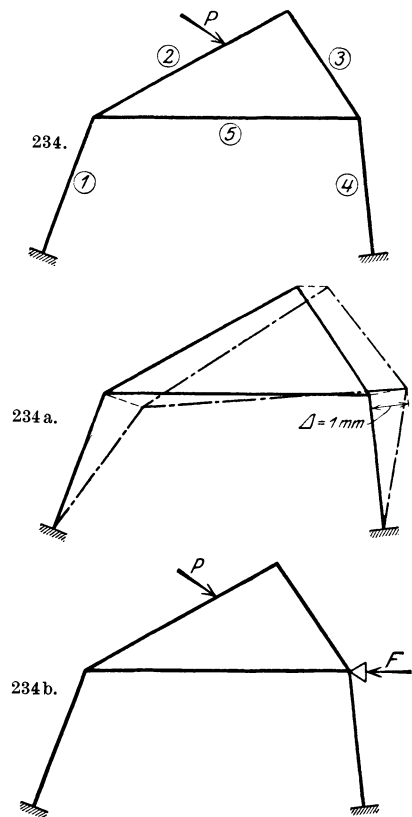


Fig. 234—234 b.

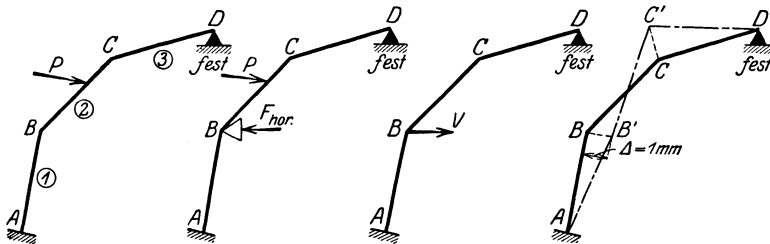


Fig. 235—235 c.

sowie die waagrechte Erzeugungskraft Z dieser Momente. Durch Division der Momente M' durch den Wert der Erzeugungskraft erhalten wir die Momente M^* infolge der waagrechten Kraft $H = +1 t$ am Knotenpunkt B , aus welchen wir durch Multiplikation mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Wert der Verschiebungskraft die gesuchten Zusätze erhalten. Durch Addition der

Momente aus R. I und R. II mit ihren Vorzeichen erhalten wir die endgültigen Momente und hieraus die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) am Rahmen.

Das in Fig. 236 dargestellte Kragdach stellt einen einstöckigen Rahmen mit Aufsatz dar, was wir sofort erkennen, wenn wir uns das Dach aufgestellt (um 90° im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers gedreht) denken. Die Berechnung desselben bietet gegenüber derjenigen der vorher behandelten ein-

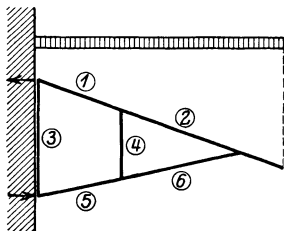
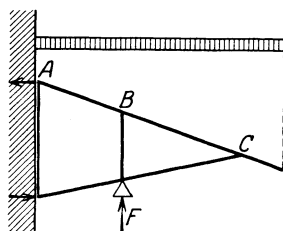


Fig. 236 u. 236 a.



stöckigen Rahmen nichts Neues; während R. I müssen wir am Pfosten 4 eingedachtes Lager anbringen (Fig. 236 a), der Knotenpunkt C des Aufsatzes ist dann auch unverschiebbar, da die Stäbe 2 und 6 ein Dreieck bilden, dessen

Grundstab unverschiebbar ist. Die Berücksichtigung des Einflusses der Verkürzung der Stäbe infolge der in denselben wirkenden Normalkräfte kann nach Kap. VII dieses Teiles zusätzlich erfolgen.

2. Der mehrstöckige Rahmen.

Die Berechnung gestaltet sich verschieden, je nachdem die Stützen parallel zueinander oder schief gerichtet sind.

a) Der mehrstöckige Rahmen mit parallelen Stützen.

Die Berechnung des in Fig. 237 dargestellten, einseitig gleichmäßig verteilt belasteten zweistöckigen Rahmens teilen wir wieder in die beiden Rechnungsabschnitte I und II ein:

Rechnungsabschnitt I.

Während des R. I nehmen wir an, die Verschiebbarkeit der Balken I und II sei vorübergehend durch gedachte Lager an den Enden derselben (Fig. 237 a) aufgehoben; durch diese Lager werden auch die anderen auf dem betreffenden Balken liegenden Knotenpunkte von selbst unverschiebbar festgehalten. Der Rahmen geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten über, dessen Berechnung wir im „Ersten Teil“ vorgeführt haben. Demgemäß ermitteln wir auf Grund der Festpunkte, Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente an allen Stäben und daraus die Festhaltungskräfte der beiden Stockwerke.

Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun die während des R. I an den Enden der Balken I und II gedachten Lager und damit die darin wirkenden Festhaltungskräfte. Hierauf treten die den Festhaltungskräften („Reaktionen“) gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte („Aktionen“) in Tätigkeit (Fig. 237 b),

welche den Rahmen, d. h. die einzelnen Stockwerksbalken desselben noch verschieben und dadurch am ganzen Rahmen Zusatzmomente hervorrufen. Aus den Zusatzmomenten könnte man auch die Zusätze zu den Quer- und Nor-

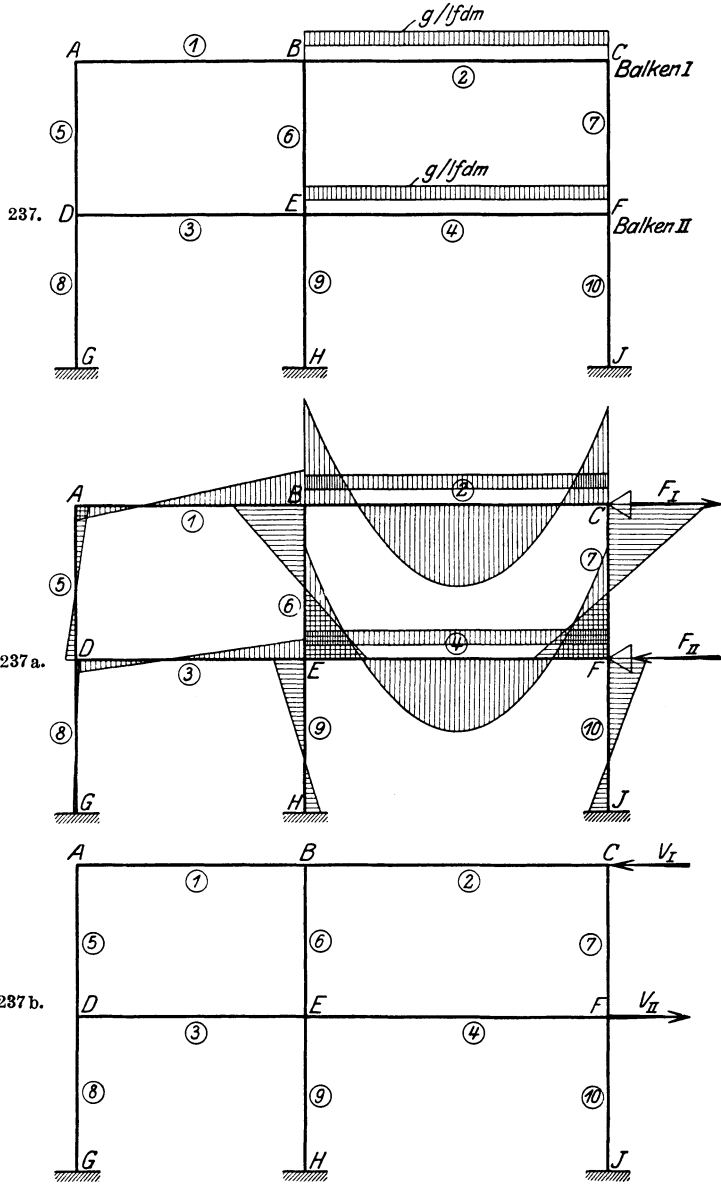


Fig. 237—237 b.

malkräften aus R. I ermitteln; da jedoch für die Dimensionierung nur die endgültigen Quer- und Normalkräfte benötigt werden, so addiert man zuerst die Momente aus R. I und R. II und bestimmt erst hierauf die endgültigen Quer- und Normalkräfte.

Um die Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir den Einfluß der Verschiebungskräfte V_I und V_{II} getrennt voneinander und bestimmen demgemäß die beiden Momentenbilder M_I^* und M_{II}^* am Rahmen (Fig. 237 g und h) infolge der an den einzelnen Stockwerkbalken angreifenden Last $H = +1 t$. Diese brauchen wir dann nur mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft zu multiplizieren, und darauf die beiden daraus hervorgehenden Momentenbilder für V_I und V_{II} zu addieren.

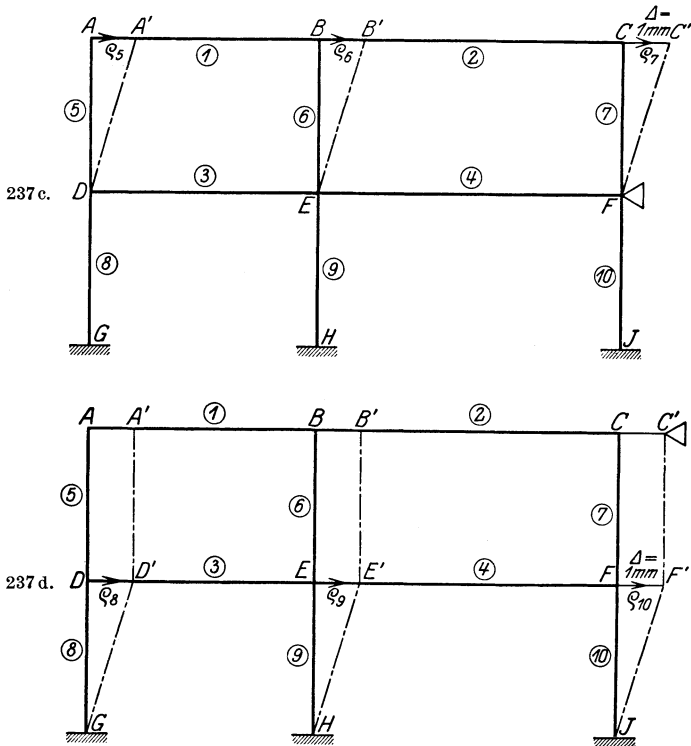
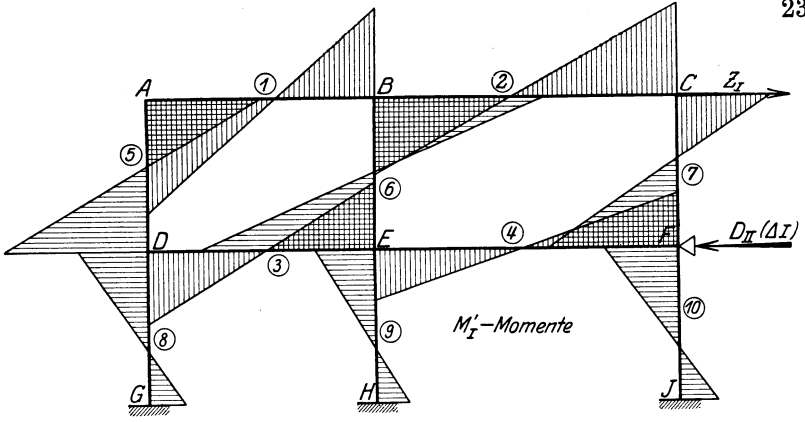


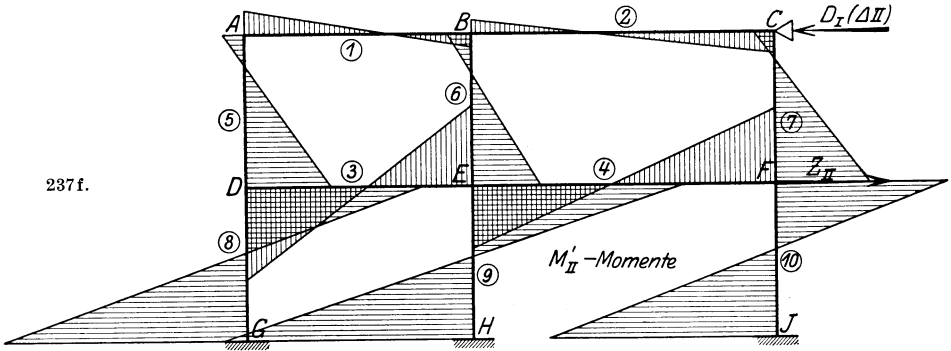
Fig. 237 c u. d.

Die M^* -Momente am Stockwerkrahmen mit parallelen Säulen erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 2 in der Weise, daß wir die einzelnen Stockwerkbalken um eine gegebene Strecke, z. B. $\Delta = 1 \text{ mm}$, nacheinander verschieben (Fig. 237 c und d), während wir, um die Festpunkte zur Weiterleitung der Momente benutzen zu können, die darunterliegenden Stockwerkbalken unverschiebbar festgehalten und die darüberliegenden derart mitverschoben denken, daß ihre Knotenpunkte senkrecht über denjenigen des verschobenen Stockwerks bleiben; damit dieser Zustand erhalten bleibe, müssen wir nach beendigter Verschiebung auch an den über dem verschobenen Stockwerk liegenden Stockwerkbalken ein Lager und damit eine Festhaltungskraft F anbringen. Wir könnten die über dem verschobenen Stockwerkbalken liegenden Stockwerkbalken auch (wie die evtl. darunterliegenden Stockwerkbalken) unverschiebbar festhalten, es würde aber dann, wie aus Fig. 237 l und 237 m ersichtlich, nicht nur die Stützen des unmittelbar unter dem verschobenen Stockwerkbalken liegenden Stockwerks,

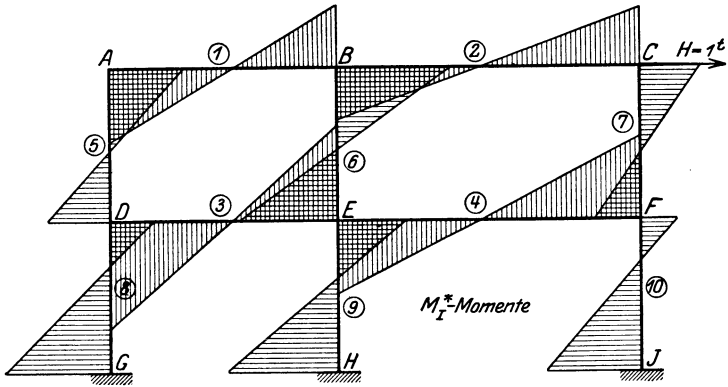
237 e.



237 f.



237 g.



237 h.

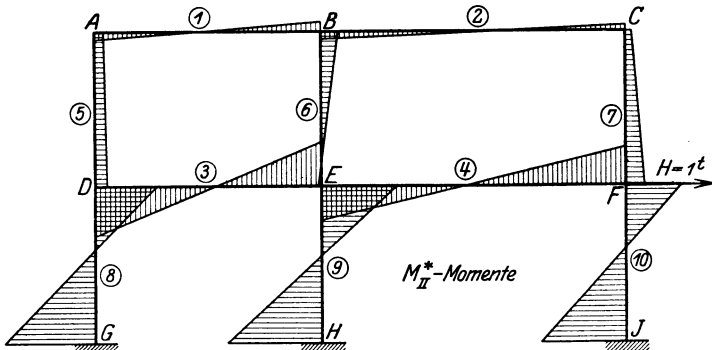


Fig. 237 e—237 h.

sondern auch die Stützen des unmittelbar darüberliegenden Stockwerkes gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden erleiden, wodurch an beiden Enden weitere

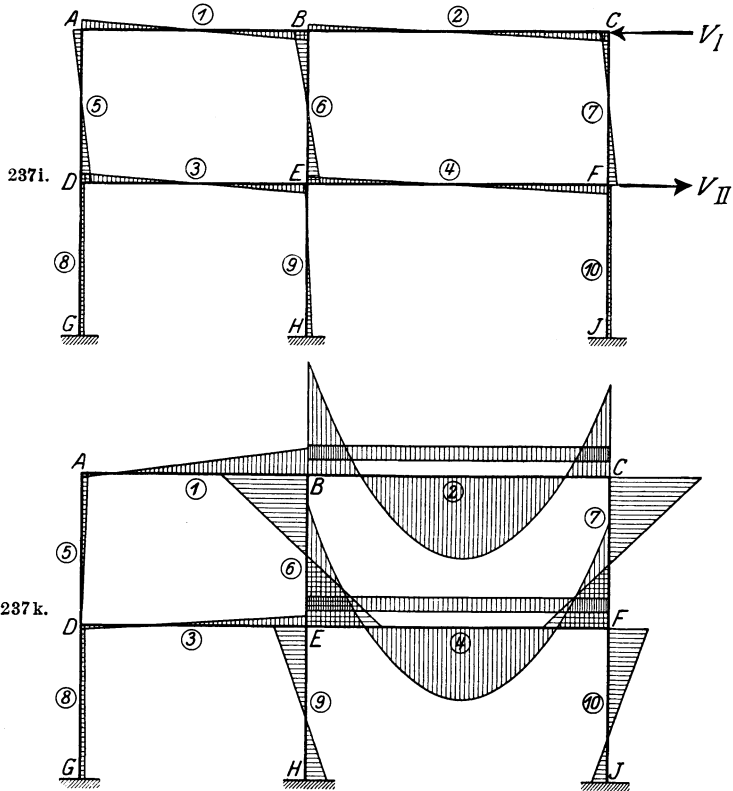


Fig. 237i u. k.

Momente entstehen würden, deren Berechnung und Weiterleitung erforderlich wäre.

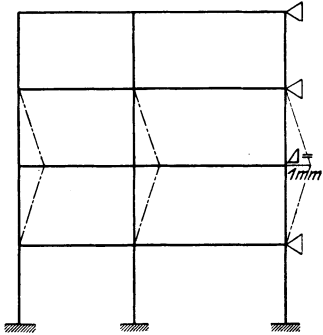


Fig. 237l.

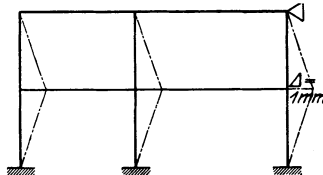


Fig. 237m.

Durch diese Verschiebungen erhalten wir am Stockwerkrahmen der Fig. 237 die 2 M' -Momentenbilder (Fig. 237e und f) für eine gegebene Verschiebung der einzelnen Stockwerkbalken mit je einer Erzeugungskraft Z am verschobenen und je einer Festhaltungskraft D an dem festgehaltenen bzw. parallel mitverschobenen Stockwerkbalken, aus deren Kombination die Momente M_I^* und M_{II}^* (Fig. 237g und h) hervorgehen. Am Stockwerkrahmen verschieben wir wegen des weiteren Verlaufes der Rechnung zweckmäßig alle Balken bzw. Knotenpunkte in derselben Richtung (in der Richtung von $V = +1$, von links nach rechts). Es sei noch erwähnt, daß auch am Stockwerkrahmen mit parallelen Stützen bei Verschiebung eines Stockwerkbalkens sich bei den Balken keine gegenseitigen Verschiebungen der Stabenden ergeben.

Zum Schluß addieren wir die Momente aus R. I (Fig. 237 a) und die Zusatzmomente (Fig. 237i) aus R. II mit ihren Vorzeichen, wodurch wir die resultierenden Momente (Fig. 237k) am Stockwerkrahmen infolge der äußeren Belastung erhalten.

Der in Fig. 238 dargestellte Rahmen ist „nach der Seite“ dreistöckig, da man, um alle Knotenpunkte desselben während R. I unverschiebbar zu halten,

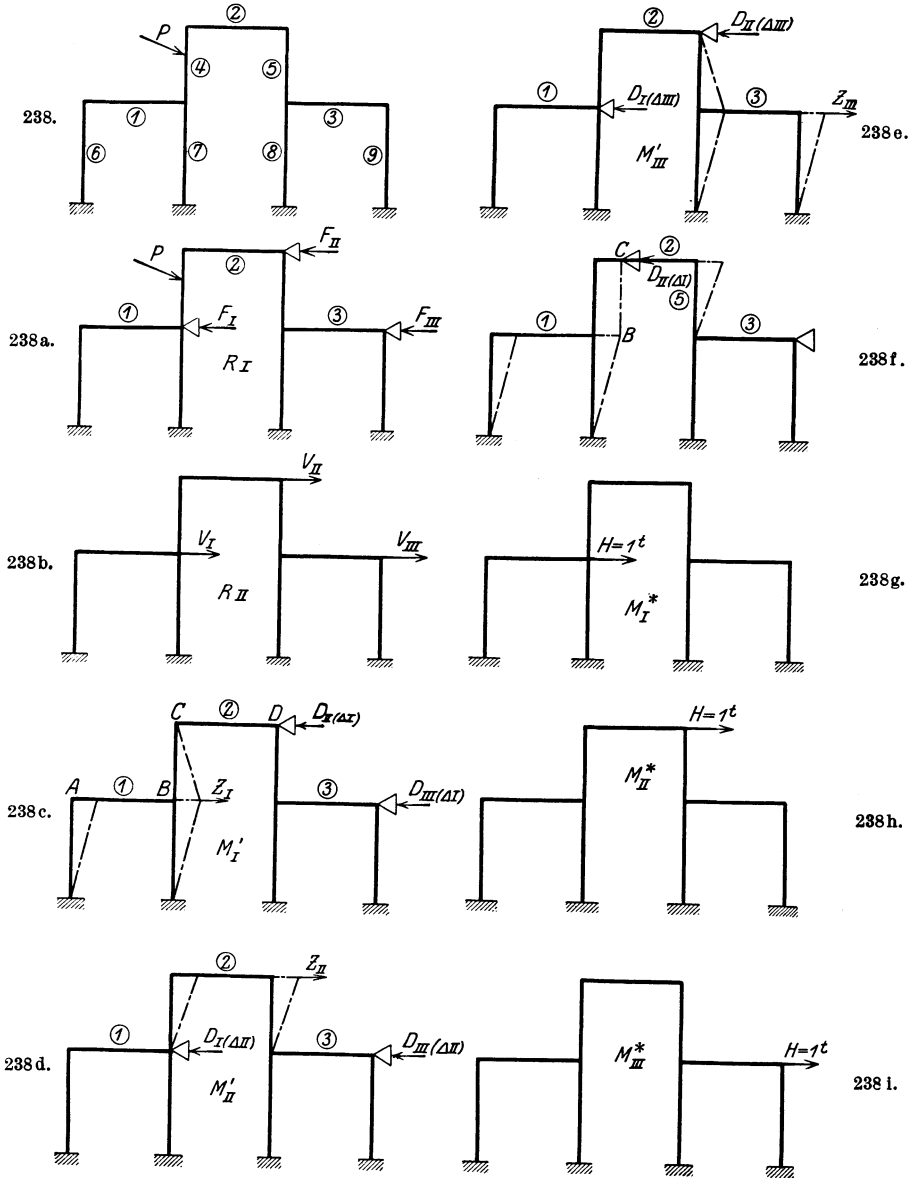


Fig. 238—238i.

an jedem Balken ein Lager anbringen muß (Fig. 238a). Der „nach der Seite“ mehrstöckige Rahmen wird in gleicher Weise wie der gewöhnliche Stockwerk-

rahmen berechnet; beim nach der Seite mehrstöckigen Rahmen liegen die Stockwerke nur nebeneinander anstatt übereinander. R. I liefert die Momente für den festgehaltenen Zustand und die daraus hervorgehenden Festhaltungskräfte. Zur Bestimmung der Zusatzmomente des R. II, herrührend von den am Rahmen wirkenden Verschiebungskräften (Fig. 238b), verschieben wir nacheinander die Balken 1, 2 und 3 um eine beliebige Strecke, während wir die beiden andern Balken festhalten, ermitteln jeweils die davon herrührenden Momente M' und aus diesen die zugehörigen Erzeugungskräfte Z in Richtung der Festhaltungskräfte F aus R. I sowie die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D (Fig. 238c, d und e). Bei der Verschiebung des Balkens 1 kann der Balken 2 anstatt in seiner ursprünglichen Lage festgehalten auch derart parallel mitverschoben werden, daß der Knotenpunkt C senkrecht über B bleibt (Fig. 238f); in diesem Falle erleidet anstatt Stab 4 der Stab 5 eine gegenseitige Verschiebung seiner Enden, so daß durch die Parallelverschiebung keine Arbeitersparnis erzielt wird. Bei Parallelverschiebung tritt am Balken 2 (Fig. 238f) ebenfalls eine Festhaltungskraft D auf, welche aber naturgemäß bedeutend kleiner ist als diejenige in Fig. 238c. Auch bei der Verschiebung des Balkens 3 (Fig. 238e) kann der Balken 2 in obenerwähnter Weise parallel mitverschoben werden. Durch Kombination der drei M' -Momentenbilder erhalten wir nun die Momente M^* (Fig. 238g, h und i) und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente die gesuchten Zusatzmomente. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir die endgültigen Momente, aus denen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen.

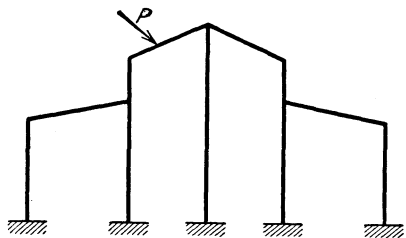


Fig. 239.

Der in Fig. 239 dargestellte Rahmen ist „nach der Seite“ dreistöckig und wird in gleicher Weise berechnet wie der Stockwerkrahmen mit waagrecht Balken; der Unterschied liegt nur in der sich etwas länger gestaltenden Bestimmung der Festhaltungskräfte (Fig. 239a).

Dasselbe gilt von dem in Fig. 239b dargestellten „nach der Seite“ zweistöckigen Rahmen.

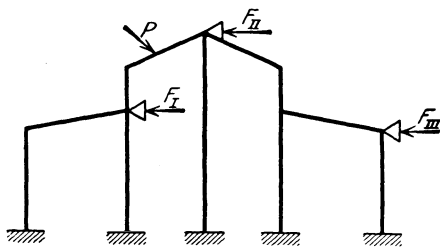


Fig. 239a.

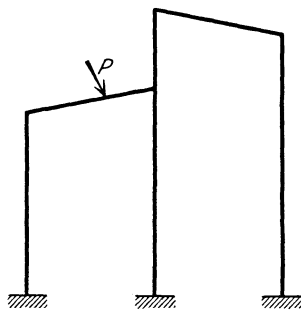


Fig. 239b.

b) Der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen.

Die Berechnung des in Fig. 240 dargestellten allgemeinen dreistöckigen Rahmens mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment seiner Stäbe teilen wir wieder in die Rechnungsabschnitte I und II; die Stäbe 1 und 2 seien durch die Kräfte P_1 und P_2 belastet.

Rechnungsabschnitt I.

Während R. I nehmen wir an, die Verschiebbarkeit der Knotenpunkte sei vorübergehend durch gedachte Lager an den Knotenpunkten C, F und J (Fig. 240a) aufgehoben; da die Knotenpunkte A, B bzw. D, E bzw. G, H durch geradlinige Stäbe mit den Knotenpunkten C bzw. F bzw. J verbunden sind, so sind die ersteren durch die Lager in C, F und J auch festgehalten. Der Rahmen geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten über, dessen Berechnung wir im „Ersten Teil“ vorgeführt haben. Demgemäß ermitteln wir auf Grund der Festpunkte, Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente (Fig. 240a) an allen Stäben und daraus die Festhaltungskräfte der drei Stockwerke, und zwar zweckmäßig die Festhaltungskraft F_I in Richtung des Stabes 2, F_{II} in Richtung des Stabes 4 und F_{III} in Richtung des Stabes 6 (siehe Teil I, Kap. VII, 2).

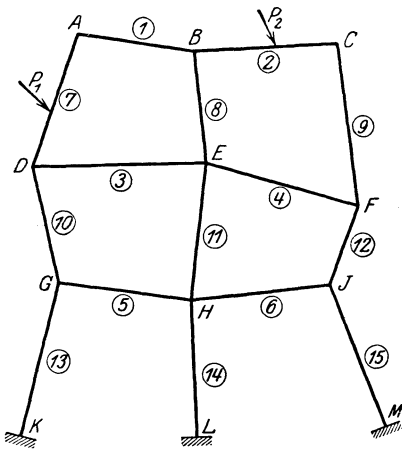


Fig. 240.

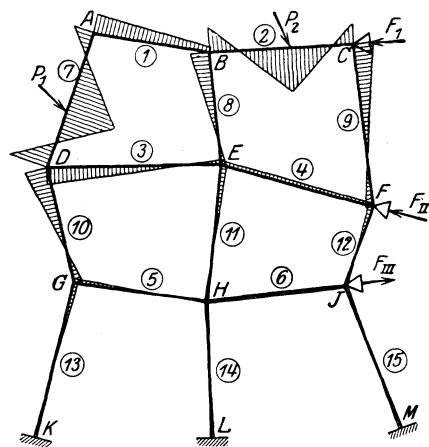


Fig. 240a.

Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun die während des R. I an den Knotenpunkten C, F und J gedachten Lager, worauf die den Festhaltungskräften gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte in Tätigkeit treten (Fig. 240b), welche den Stockwerkrahmen verschieben und dadurch an diesem noch Zusatzmomente (Fig. 240i) hervorrufen.

Um die Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir den Einfluß der Verschiebungskräfte V_I, V_{II} und V_{III} getrennt voneinander und bestimmen dementsprechend die Momente M_I^*, M_{II}^* und M_{III}^* am Stockwerkrahmen (Fig. 240c, d und e) infolge der an den Knotenpunkten C, F und J angreifenden und in

Richtung der Stäbe 2, 4 und 6 wirkenden Lasten $H = +1 t$. Hieraus erhalten wir dann durch Multiplikation mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden (Richtung von links nach rechts ist positiv) Werte der betreffenden Verschiebungskraft und durch Addition der daraus hervorgehenden Momente für V_I , V_{II} und V_{III} die Zusatzmomente.

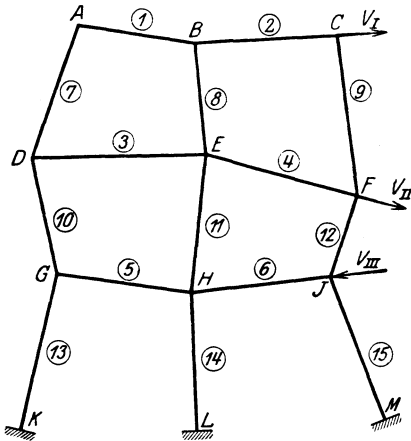


Fig. 240 b.

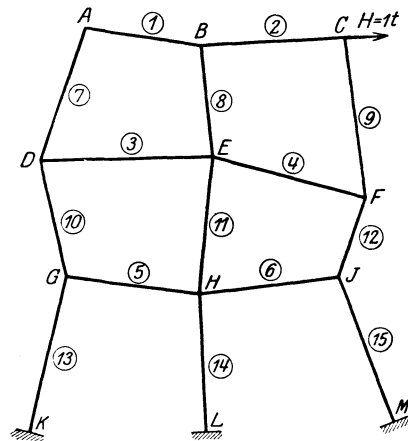


Fig. 240 c.

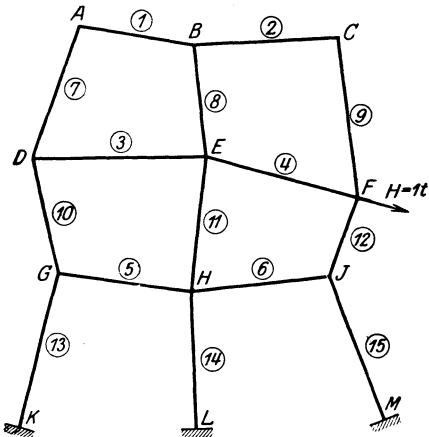


Fig. 240 d.

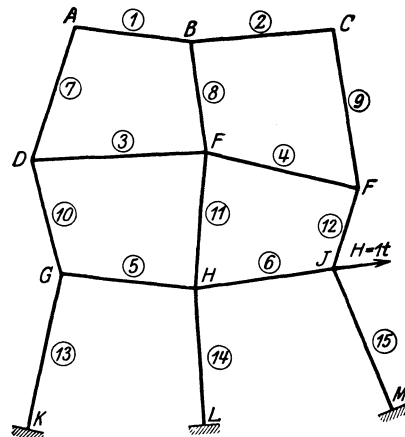


Fig. 240 e.

Die M^* -Momente am Stockwerkrahmen erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 2 in der Weise, daß wir jedes Stockwerk um eine beliebige Strecke, z. B. $\Delta = 1 \text{ mm}$, verschieben (Fig. 240f, g und h), und, um die Festpunkte zur Weiterleitung der durch die Verschiebungen erzeugten Momente benützen zu können, bei Verschiebung eines Stockwerks die übrigen Stockwerke nach der Seite unver-schiebbar festhalten, und zwar die unteren durch feste Lager und die oberen durch Rollenlager; letztere deshalb, weil sonst bei der vorausgesetzten beliebigen Richtung der Stäbe und festen Lagern an den oberen Stockwerken die Verschiebung eines darunter gelegenen evtl. unmöglich wäre (vgl. Teil II, Kap. II, 2).

Diese Verschiebungszustände liefern drei M' -Momentenbilder mit je einer Erzeugungskraft Z (in Richtung der im gleichen Punkte angreifenden Festhaltungskraft aus R. I) am verschobenen und zwei Festhaltungskräften D an

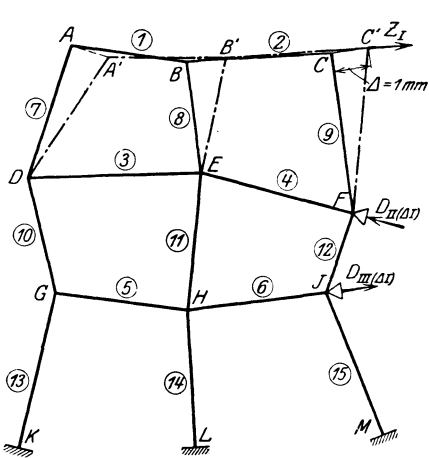


Fig. 240f.

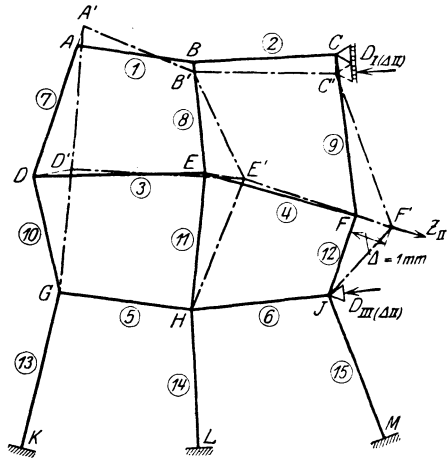


Fig. 240g.

den festgehaltenen (durch festes oder bewegliches Lager) Stockwerken, aus deren Kombination die Momente M_{I}^* , M_{II}^* und M_{III}^* hervorgehen. Am Stockwerkrahmen verschieben wir, wie wir später sehen werden, zweckmäßig alle Stockwerke bzw. Knotenpunkte nach derselben Seite hin (von links nach rechts wie $H = +1t$). Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß am Stockwerkrahmen mit beliebig gerichteten Stützen bei Verschiebung eines Stockwerkes die Stäbe der darüberliegenden Stockwerke ebenfalls (vgl. auch Teil II, Kap. II) gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden erleiden, im Gegensatz zum unter a) behandelten Stockwerkrahmen mit parallelen Stützen, bei welchem sich nur die Enden der Stützen des verschobenen Stockwerkes gegenseitig verschieben.

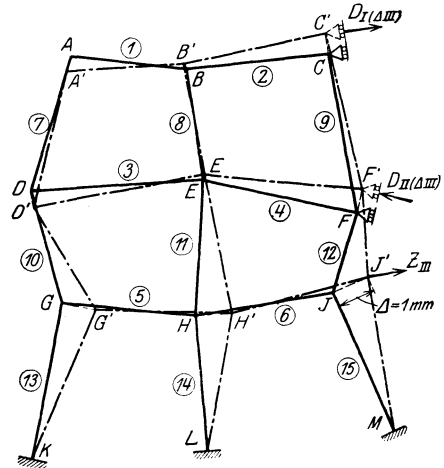


Fig. 240h.

Zum Schluß addieren wir wieder die mit ihren Vorzeichen zu nehmenden Momente aus R. I (Fig. 240a) und R. II (Fig. 240i), wodurch wir die endgültigen Momente am Stockwerkrahmen infolge der äußeren Belastung (Fig. 240k) erhalten, auf Grund deren wir nun auch die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte nach Teil I, Kap. VI bestimmen können.

Der in Fig. 241 dargestellte, durch Winddruck belastete dreistöckige Rahmen mit geneigten Ständern wird in analoger Weise wie der allgemeine Stockwerkrahmen der Fig. 240 berechnet. Aus R. I erhalten wir die Momente für den Fall, daß die Knotenpunkte unverschiebbar sind, was dann zutrifft, wenn wir an

den Enden der Balken 1, 2 und 3 feste Lager anbringen (Fig. 241a); in diesen entstehen dann die Festhaltungskräfte („Reaktionen“), welche das System in seiner ursprünglichen Lage in Ruhe halten.

Nehmen wir diese Lager weg, so treten die umgekehrt gerichteten Festhaltungskräfte, die sog. Verschiebungskräfte („Aktionen“) in Tätigkeit (Fig. 241b), welche, allein am System wirkend, die Zusatzmomente hervorrufen, die wir aus R. II wie folgt erhalten:

Wir bestimmen den Einfluß der drei Verschiebungskräfte V_I , V_{II} und V_{III} getrennt voneinander und ermitteln dementsprechend die Momente M^* (Fig. 241f, g und h), welche am frei verschiebbaren (nicht festgehaltenen) Stockwerkrahmen durch die an den einzelnen Stockwerkbalken wirkende Last $H = +1t$ entstehen. Durch Multiplikation der M^* -Momente mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft erhalten wir die Momente, herrührend von den einzelnen Verschiebungskräften, und durch Addition derselben die Zusatzmomente am Stockwerkrahmen, welche zu den Momenten aus R. I zu addieren sind, um die endgültigen Momente und daraus die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte am Stockwerkrahmen infolge der äußeren Belastung zu erhalten.

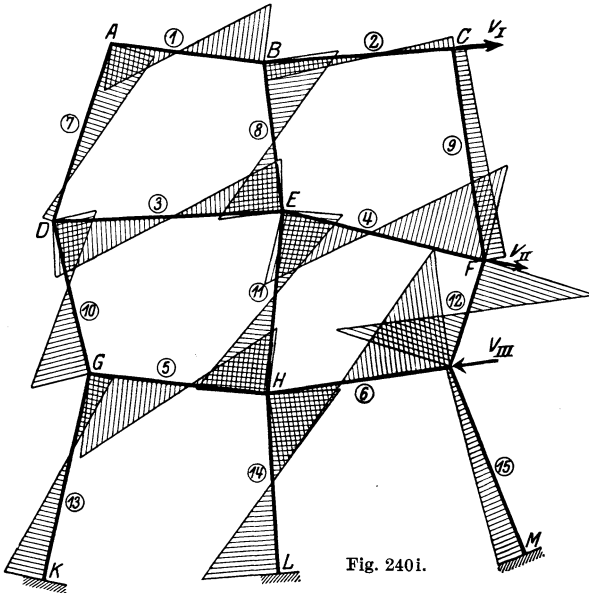


Fig. 240i.

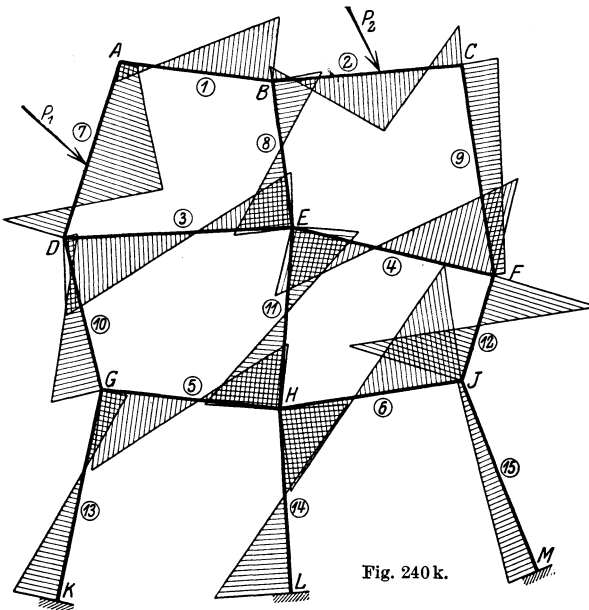


Fig. 240k.

Die Momente M^* ihrerseits erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 2 wieder indirekt aus den Momenten M' für eine gegebene Verschiebung, beispielsweise $\Delta = 1 \text{ mm}$, eines jeden Stockwerks (Fig. 241c, d, e), unter Festhaltung der unteren und oberen Stockwerke (letztere durch Rollenlager); dabei benötigen wir noch die aus den Momenten M' sich ergebenden zugehörigen Erzeugungs-

kräfte Z in Richtung der Festhaltungskräfte des R. I, sowie die bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D . Bei einer Verschiebung irgendeines Stockwerkbalkens erleiden der geneigten Ständer wegen sämtliche über dem verschobenen Stockwerk liegenden Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden. Für alle diese Stäbe sind die Momente an beiden Enden,

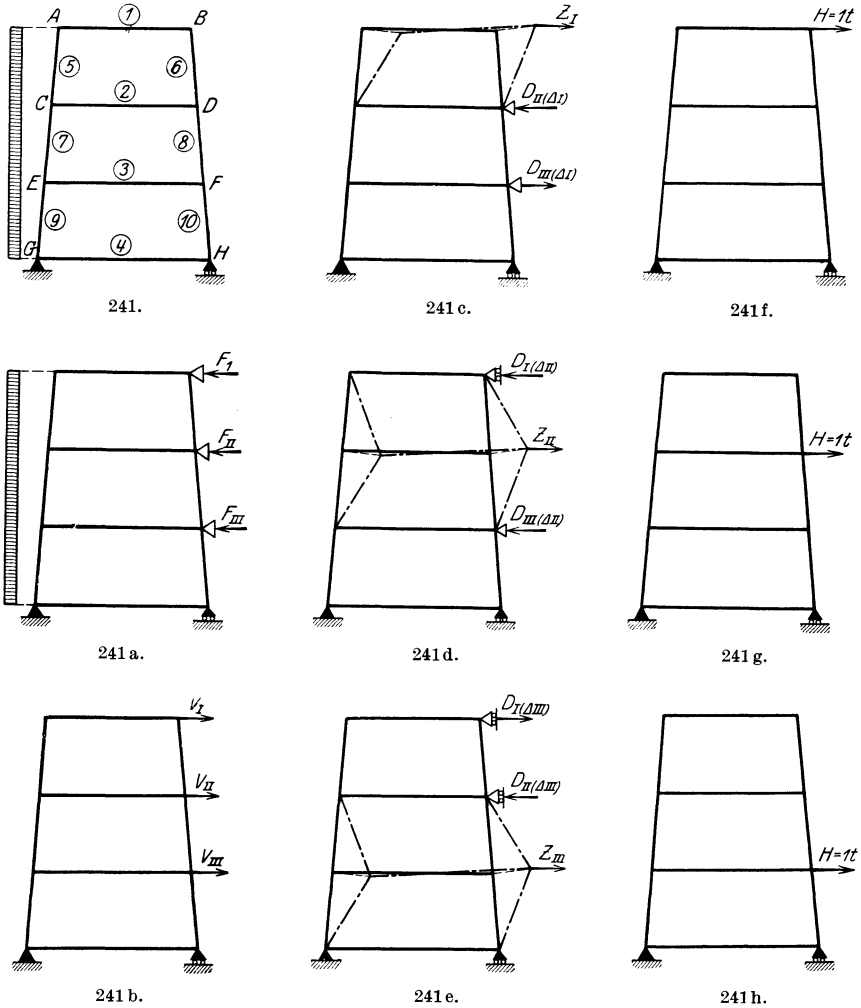


Fig. 241—241 h.

herrührend von ihrer gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung nach den allgemeinen Gln. (515) und (520) zu berechnen, über das ganze Tragwerk mittels der Festpunkte und Verteilungsmaße weiterzuleiten und zum Schluß mit ihren Vorzeichen zu addieren, wodurch wir die Momente M' für die Verschiebung des betreffenden Stockwerkbalkens erhalten.

Der Rahmen der Fig. 242 ist zweistöckig, da man, um seine Knotenpunkte in Ruhe zu halten, am Balken 1 und 2 je ein Lager anbringen muß (Fig. 242a). Die Stützen des unteren Stockwerks sind parallel zueinander, während die-

jenigen des oberen beliebig gerichtet sind. R. I liefert wieder die Momente für den festgehaltenen Zustand sowie die daraus hervorgehenden beiden Festhaltungskräfte F_I und F_{II} . Um die Zusatzmomente aus R. II herrührend von den

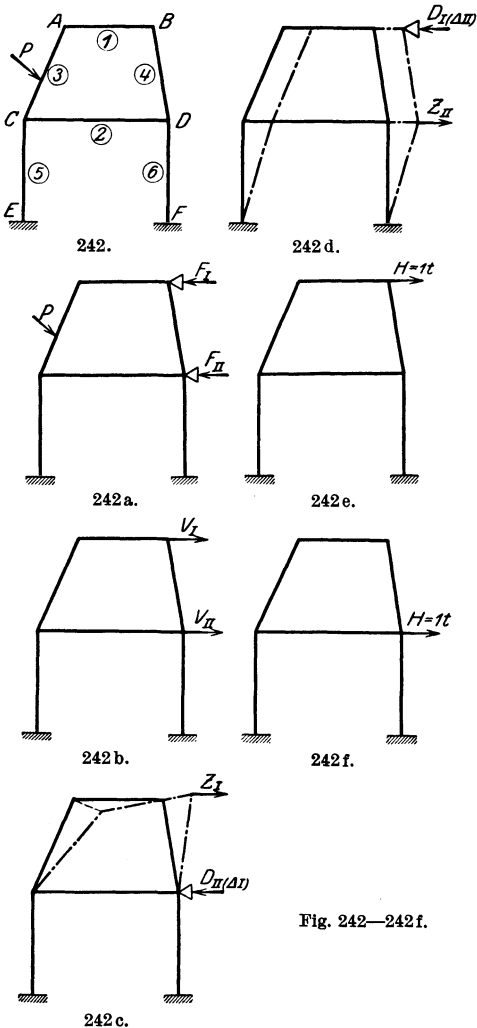


Fig. 242—242f.

am Rahmen wirkenden Verschiebungskräften V_I und V_{II} (Fig. 242b) zu erhalten, verschieben wir zunächst den Balken 1 um eine beliebige Strecke, während wir den unteren Balken 2 unverschiebbar festhalten (Fig. 242c), und dann verschieben wir den Balken 2 um eine beliebige Strecke (braucht nicht die gleiche zu sein), wobei wir das obere Stockwerk parallel mit verschieben (Fig. 242d). Wir ermitteln darauf die von denjenigen Stäben, deren Enden eine gegenseitige Verschiebung erlitten haben, herrührenden Momente M' für beide Verschiebungszustände und aus diesen die zugehörigen Erzeugungskräfte Z in Richtung der Festhaltungskräfte aus R. I sowie die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D ; um das obere Stockwerk in der parallel verschobenen Lage zu halten, ist auch eine Kraft D erforderlich. Wie wir sehen, erleiden bei Verschiebung des unteren Stockwerkes am ganzen Rahmen nur die Stützen 5 und 6 gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, weil die Stützen des verschobenen Stockwerkes parallel zueinander sind. Durch Kombination der beiden M' -Momentenbilder erhalten wir nun die Momente M^* (Fig. 242e und f), und durch Multiplikation derselben mit dem

mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente die gesuchten Zusatzmomente. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir die endgültigen Momente, aus denen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen.

Sind die Stützen eines zweistöckigen Rahmens im unteren Stockwerk beliebig gerichtet und im oberen Stockwerk parallel zueinander, wie aus Fig. 243 ersichtlich, so ist der Berechnungsgang analog wie für den Rahmen der Fig. 242. Zu beachten ist, daß wir an diesem Rahmen gegenüber demjenigen der Fig. 242 andere Verschiebungsbilder erhalten. Verschieben wir den Balken 1 unter Festhaltung des unteren Stockwerkes (Fig. 243a), so erleiden nur die beiden Stützen

des oberen Stockwerkes eine gegenseitige Verschiebung ihrer Enden; verschieben wir aber den Balken 2 nach Anbringung eines Rollenlagers am Balken 1 (Fig. 243b),

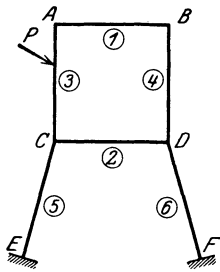


Fig. 243.

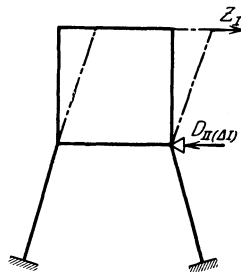


Fig. 243a.

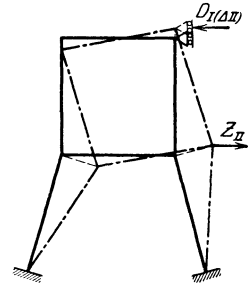


Fig. 243b.

so erleiden sämtliche Stäbe des Rahmens gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden.

Sonderfälle von mehrstöckigen Tragwerken.

Fall I: Wie schon in Kap. VIII, 10 ausgeführt, wird das Tragwerk der Fig. 244, dessen Stäbe 2 und 3 zusammen einen „Bogen“ mit den Kämpfern B und D bilden, zweckmäßig als „nach der Seite“ mehrstöckiges Tragwerk mit geradlinigen Stäben berechnet. Das in Fig. 244 dargestellte Tragwerk ist „nach der Seite“ zweistöckig, da man sowohl am Knotenpunkt B als auch am Knotenpunkt D ein Lager anbringen muß (Fig. 244a), umsämtliche Knotenpunkte unverschiebbar zu halten; der Knotenpunkt C ist dann auch unverschiebbar, da er durch die beiden Stäbe 2 und 3 mit den durch die gedachten Lager festgehaltenen Knotenpunkten verbunden ist.

R. I liefert wieder die Momente für den festgehaltenen Zustand, und aus diesen bestimmen wir nach Teil I, Kap. VII, 2 die beiden in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte, für welche wir die waagrechte Richtung wählen. Wir entfernen darauf die gedachten Lager und gehen damit zum R. II über: nun treten die Verschiebungskräfte (entgegengesetzte Festhaltungskräfte) am Rahmen in Tätigkeit, welche Zusatzmomente hervorrufen (Fig. 244b). Um diese Zusatzmomente zu erhalten, bestimmen wir

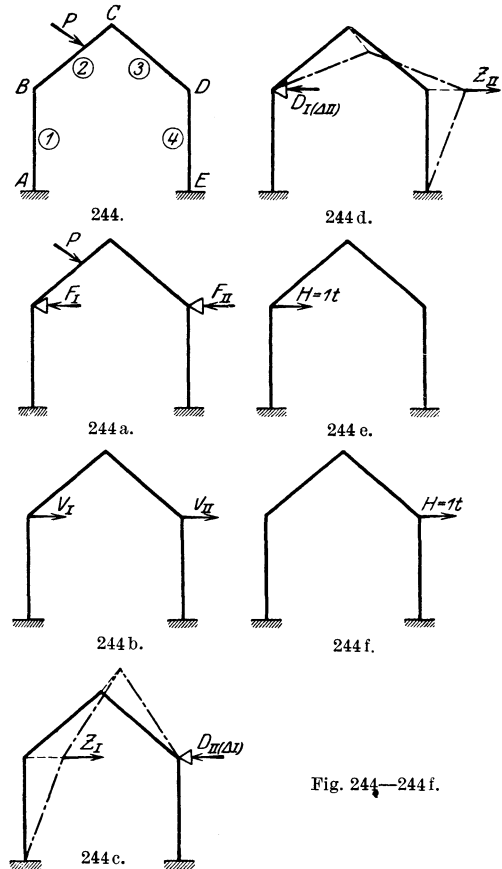


Fig. 244—244 f.

zunächst die Momente M' für eine gegebene Verschiebung, beispielsweise $\Delta = 1 \text{ mm}$, eines jeden der beiden in R. I durch gedachte Lager in waagrechter

Richtung gestützten Knotenpunkte, wobei jeweils der andere noch festgehalten wird (Fig. 244c und d); bei Verschiebung des Knotenpunktes B erleiden die Stäbe 1, 2 und 3, bei Verschiebung des Knotenpunktes D die Stäbe 2, 3 und 4 gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, wodurch Momente an diesen Stäben verursacht werden, die wir nach den Gln. (515) und (520) bestimmen, mittels der Festpunkte und Verteilungsmaße weiterleiten und darauf addieren.

Aus den Momenten M' berechnen wir die zugehörigen Erzeugungskräfte Z in Richtung der Festhaltungskräfte des R. I und die bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D . Nun erhalten wir durch Kombination der beiden M' -Momentenbilder die Momente M^* infolge der Belastung $H = +1t$ in B bzw. $H = +1t$ in D am nirgends festgehaltenen Rahmen (Fig. 244e und f), und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente erhalten wir die gesuchten Zusatzmomente; zur leichteren Berechnung der Momente M^* ist es zweckmäßig, die beiden Verschiebungen der im R. I durch gedachte Lager gestützten Knotenpunkte in derselben Richtung vorzunehmen (in Richtung der Kräfte $H = +1t$, von links nach rechts).

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II mit ihren Vorzeichen erhalten wir die endgültigen Momente, aus welchen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen.

Besitzt der betrachtete Rahmen nicht parallele, sondern beliebig gerichtete Ständer (Fig. 245), so ändert sich der vorstehend geschilderte Gang der Berechnung nicht.

Der Rahmen der Fig. 246 ist ebenfalls zweistöckig, und, um denselben in Ruhe zu halten, müssen wir uns an den Knotenpunkt B und D je ein Lager denken (Fig. 246a). Der Gang der Berechnung dieses Rahmens gestaltet sich genau gleich wie derjenige des Rahmens der Fig. 234. Die bei einer Verschiebung der Knotenpunkte B und D um eine gegebene Strecke hervorgerufenen Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte gehen aus Fig 246b und c hervor.

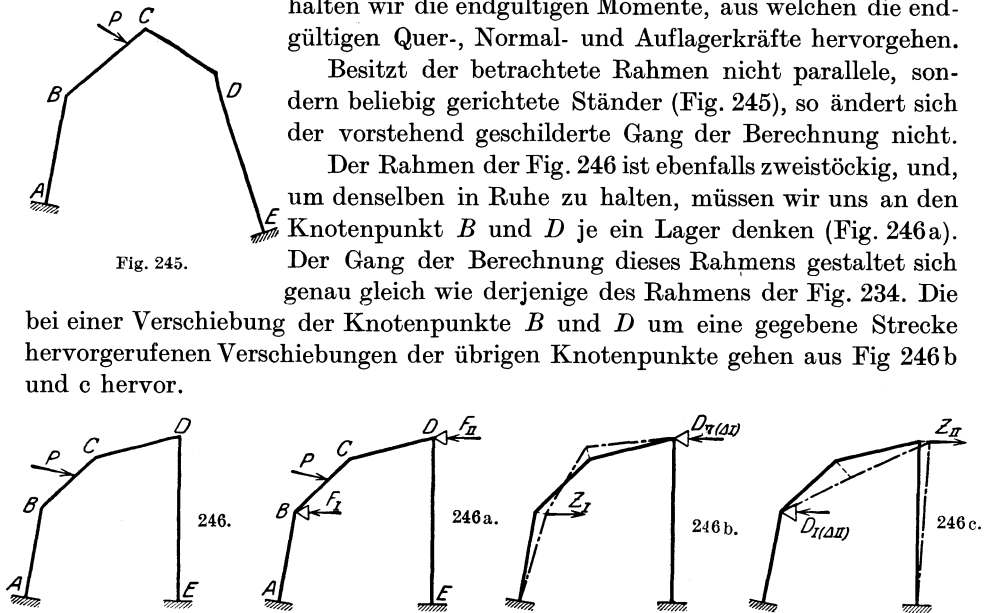


Fig. 246—246 c.

Das in Fig 247 dargestellte Tragwerk wird wie ein dreistöckiger Rahmen berechnet, da man, um dasselbe in Ruhe zu halten, an den Knotenpunkten B , D und E je ein Lager anbringen muß (Fig. 247 a); der Knotenpunkt C ist dann auch unverschiebbar, da er durch die beiden Stäbe 2 und 3 mit den durch die gedachten Lager festgehaltenen Knotenpunkten verbunden ist. Der Gang der Berechnung dieses Tragwerkes gestaltet sich analog demjenigen des zweistöckigen Rahmens der Fig. 234. R. I liefert die Momente bei unverschiebbaren Knotenpunkten sowie die Festhaltungskräfte F_I , F_{II} und F_{III} (nach Teil I, Kap. VII, 2).

Zur Bestimmung der Zusatzmomente des R. II, herrührend von den am Rahmen wirkenden Verschiebungskräften (Fig. 247 b), verschieben wir nacheinander den Knotenpunkt B , den Stab 3 und den Knotenpunkt E um eine beliebige Strecke, beispielsweise $\Delta = 1$ mm, ermitteln jeweils die davon herrührenden Momente M' und aus diesen die zugehörigen Erzeugungskräfte Z in Richtung der Festhal-

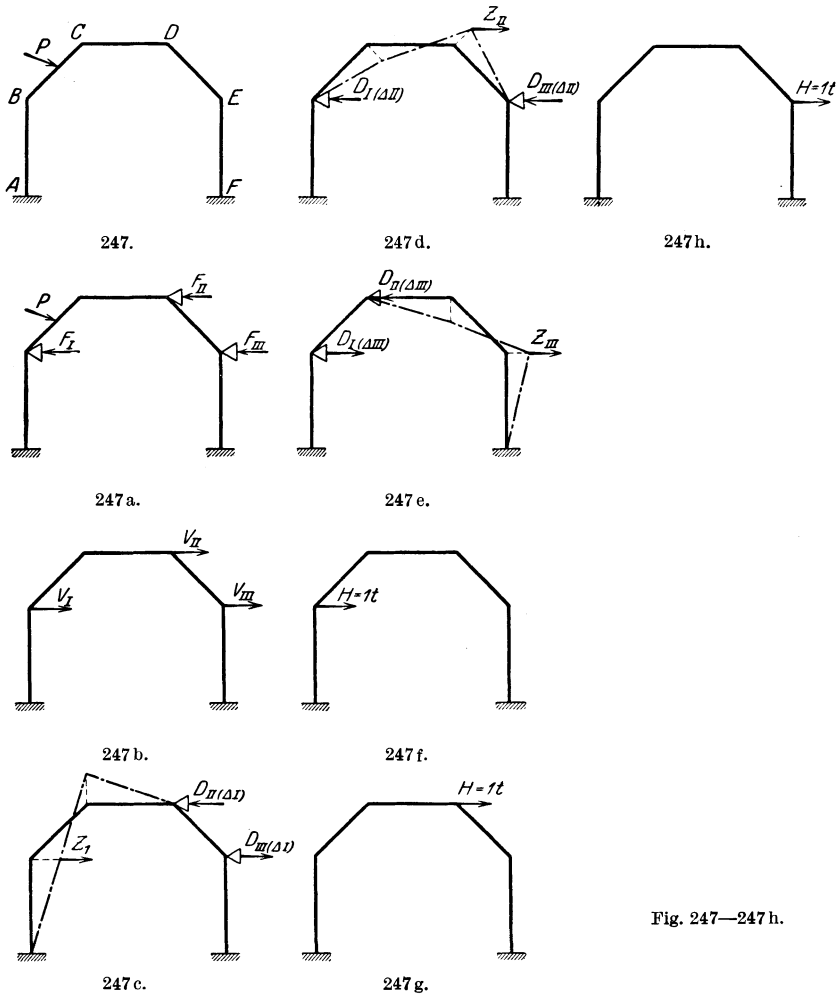


Fig. 247—247 h.

tungskräfte aus R. I sowie die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D (Fig. 247 c, d und e). Bei der Verschiebung des Knotenpunktes E halten wir nicht den Knotenpunkt D , sondern den nächstvorhergehenden, den Knotenpunkt C , unverschiebbar fest, weil sonst gar keine Verschiebung von D möglich wäre; dies hat auf die Berechnung keinen Einfluß, da die dabei auftretende Festhaltungskraft $D_{II}(\Delta III)$ wie $D_{II}(\Delta I)$ in den Stab 3 fällt. Durch Kombination der drei M' -Momentenbilder erhalten wir nun die Momente M^* (Fig. 247 f, g, h) und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente die gesuchten Zusatz-

momente. Durch Addition der Momente aus R. I und der Zusatzmomente aus R. II erhalten wir die endgültigen Momente, aus denen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen.

Besitzt der betrachtete Rahmen nicht parallele, sondern beliebig gerichtete Ständer und geneigten Mittelstab 3 (Fig. 248), so ändert sich der Gang der Berechnung nicht; die Festhaltungskräfte F_I und F_{III} werden in waagrechter Richtung, und die Festhaltungskraft F_{II} zweckmäßig in Richtung des Stabes 3 angenommen (Fig. 248a), letzteres deshalb, damit die bei Verschiebung des Knotenpunktes D in C entstehende Festhaltungskraft $D_{C(\Delta II)}$ wie $D_{D(\Delta I)}$ in die Richtung des Stabes 3 fällt.

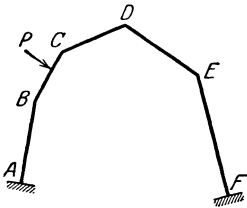


Fig. 248.

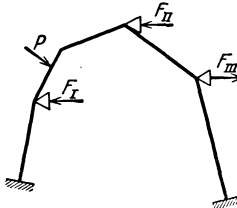


Fig. 248a.

Der Rahmen der Fig. 249 könnte ebenfalls als mehrstöckiges Tragwerk berechnet werden, und zwar als fünfstöckiges Tragwerk, da, wie aus Fig. 249a

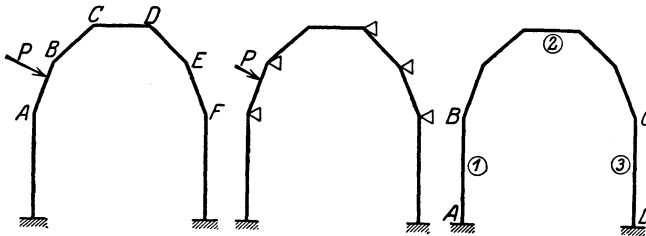


Fig. 249.

Fig. 249a.

Fig. 249b.

ersichtlich, 5 Lager anzubringen wären, um seine Knotenpunkte während R. I unverschiebbar festzuhalten. Da aber die Bestimmung der Momente M^* um so verwickelter wird, je mehr Lager anzubringen sind, um ein System während R. I unverschiebbar festzuhalten (vgl. Teil II, Kap. III, 2), so wird der Stabzug $ABCDEF$ zweckmäßiger als „Bogen“ aufgefaßt, und der Rahmen dann aus den geradlinigen Stäben 1 und 3 und dem bogenförmigen Stab 2 bestehend (Fig. 249b), nach Kap. VIII der Teile I und II berechnet.

Fall II: Das in Fig. 250 dargestellte Tragwerk ist „nach der Seite“ dreistöckig, da man an den Knotenpunkten B , D und F gedachte Lager anbringen muß, um sämtliche Knotenpunkte unverschiebbar zu halten; die Knotenpunkte C und E sind dann auch unverschiebbar, da sie durch die Stäbe 2 und 3 bzw. 4 und 5 mit den durch die gedachten Lager festgehaltenen Knotenpunkten verbunden sind. Der Gang der Berechnung dieses Tragwerkes gestaltet sich analog demjenigen des zweistöckigen Rahmens der Fig. 244. R. I liefert die Momente für den festgehaltenen Zustand (Fig. 250a), und aus diesen bestimmen wir nach Teil I, Kap. VII, 2 die drei Festhaltungskräfte F_I , F_{II} und F_{III} , für welche wir die waagrechte Richtung wählen. Um die Zusatzmomente des R. II, herrührend von den am Rahmen wirkenden Verschiebungskräften (Fig. 250b), zu erhalten, bestimmen wir die Momente M' für eine gegebene Verschiebung, beispielsweise $\Delta = 1$ mm, eines jeden der drei im R. I durch gedachte Lager festgehaltenen Knotenpunkte B , D und F , wobei jeweils die andern beiden noch festgehalten

werden (Fig. 250c, d und e); bei Verschiebung des Knotenpunktes B erleiden die Stäbe 1, 2 und 3, bei Verschiebung des Knotenpunktes D die Stäbe 2, 3, 4, 5 und 7, und bei Verschiebung des Knotenpunktes F die Stäbe 4, 5 und 6 gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, wodurch Momente an diesen Stäben ver-

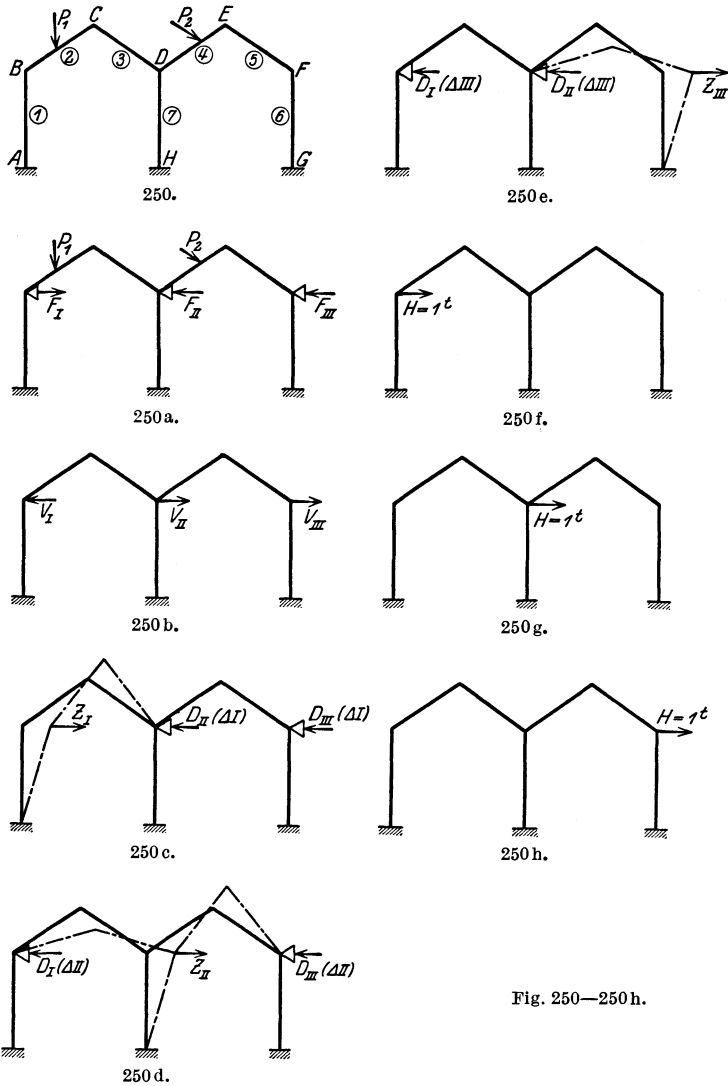


Fig. 250—250h.

ursacht werden, die wir nach den Gln. (515) und (520) bestimmen, mittels Festpunkte und Verteilungsmaße weiterleiten und darauf addieren. Aus den Momenten M' berechnen wir die zugehörigen Erzeugungskräfte Z in Richtung der Festhaltungskräfte aus R. I und die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D . Darauf erhalten wir durch Kombination der drei M' -Momentenbilder die Momente M^* (Fig. 250f, g und h), und durch Multiplikation derselben mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte

der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente ergeben sich die gesuchten Zusatzmomente.

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II erhalten wir wieder die endgültigen Momente, aus welchen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen.

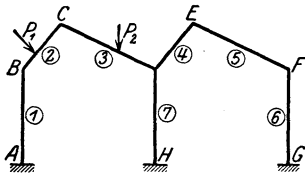


Fig. 251.

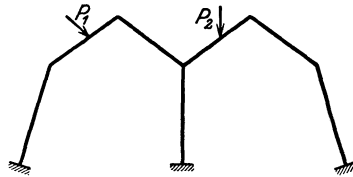


Fig. 252.

Besitzt der betrachtete Rahmen einen unsymmetrischen Überbau (Sägedach, Fig. 251) oder nicht parallele, sondern beliebig gerichtete Ständer (Fig. 252), so ändert sich der vorstehende geschilderte Gang der Berechnung nicht.

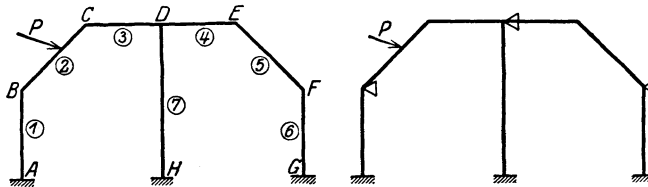


Fig. 253 u. 253 a.

Das Tragwerk der Fig. 253 ist ebenfalls wie ein dreistöckiger Rahmen zu berechnen, da wir, um dasselbe in Ruhe zu halten, sowohl an den Knotenpunkten *B* und *F* als auch an dem durch die Stäbe 3 und 4 gebildeten Balken je ein Lager anbringen müssen (Fig. 253a). Der Gang der Berechnung gestaltet sich analog demjenigen des Rahmens der Fig. 250; wir brauchen uns nur die Stäbe 3 und 4 nach oben in die Waagrechte gedreht und verkürzt und die mittlere Stütze entsprechend verlängert zu denken.

Dasselbe gilt vom Tragwerk der Fig. 254, an welchem wir während R. I in den Knotenpunkten *B*, *D* und *F* ein Lager anbringen müssen (Fig. 254a).

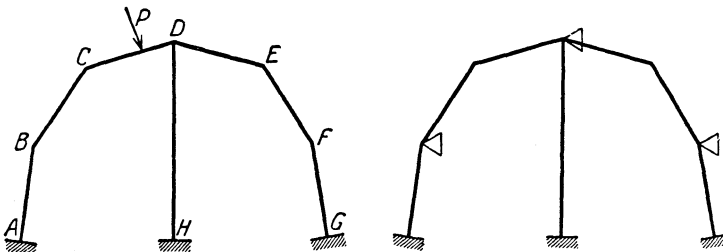


Fig. 254 u. 254 a.

Das Tragwerk der Fig. 255 berechnen wir wegen der vielen in R. I anzubringenden Lager (Fig. 255a) und der dadurch länger werdenden Bestimmung der *M**-Momente zweckmäßig nicht als Tragwerk mit nur geradlinigen Stäben,

sondern wir fassen die Stabzüge AB und BC als je einen bogenförmigen Stab auf und berechnen diese Tragwerke als solche, bestehend aus 3 gerad-

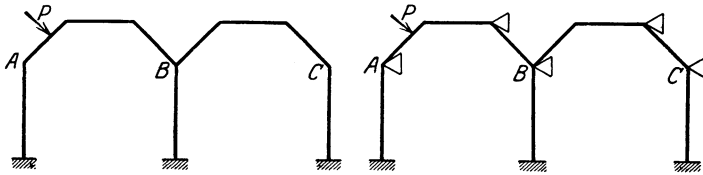


Fig. 255 u. 255 a.

linigen und 2 bogenförmigen Stäben AB und BC nach Kap. VIII der Teile I und II.

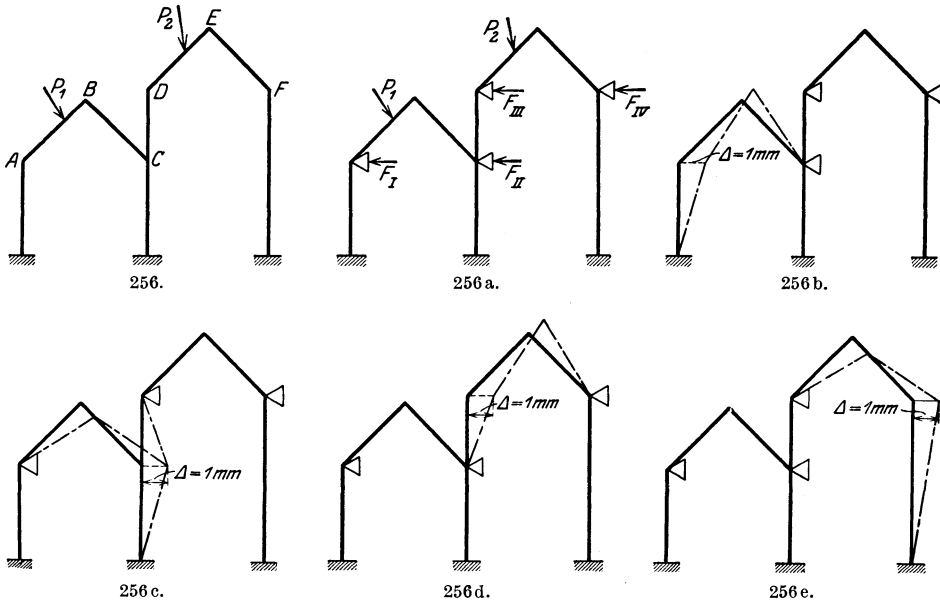


Fig. 256—256 e.

Das in Fig. 256 dargestellte Tragwerk wird wie ein vierstöckiger Rahmen berechnet, da man, um dasselbe in Ruhe zu halten, an den 4 Knotenpunkten A, C, D und F je ein Lager anbringen muß (Fig. 256 a). Die Berechnung gestaltet sich analog derjenigen des Tragwerkes der Fig. 250. Die in R. II zur Bestimmung der Zusatzmomente benötigten Verschiebungsbilder haben wir in den Fig. 256 b, c, d und e dargestellt.

Fall III: Besitzen die Tragwerke der Fig. 244 und 250 elastische Zugbänder (z. B. Rundeisenstangen), welche keine Momente aufnehmen können, so gestaltet sich die Berechnung analog, es ergeben sich nur dadurch gewisse Eigentümlichkeiten, daß die Säulenköpfe miteinander durch ein Konstruktionsglied verbunden sind, welches wohl Zug- aber keine Druckkräfte von einem Säulenkopf auf den anderen übertragen kann.

Den Gang der Berechnung des durch eine beliebig gerichtete Kraft P belasteten Rahmens der Fig. 257 teilen wir wieder in die beiden Rechnungsab-

schnitte I und II ein. R. I liefert die Momente für den festgehaltenen Zustand (Fig. 257 a), und aus diesen bestimmen wir genau wie am Rahmen der Fig. 244 (ohne Zugband) die beiden in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte F , für welche wir die waagrechte Richtung wählen. Wir entfernen darauf die gedachten Lager und gehen damit zum R. II über.

Nun treten die Verschiebungskräfte V (entgegengesetzte Festhaltungskräfte) am Rahmen in Tätigkeit (Fig. 257 b), welche Zusatzmomente hervor-

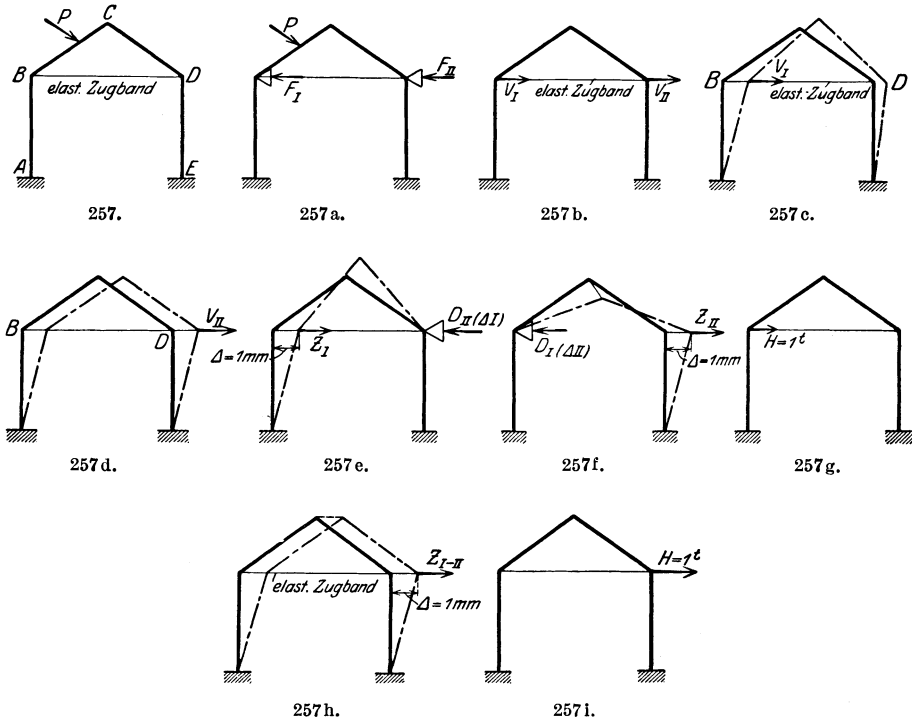


Fig. 257—257i.

rufen. Um diese Zusatzmomente zu bestimmen, verfolgen wir, wie früher, die Wirkung der beiden Verschiebungskräfte getrennt voneinander. Wir erkennen aus den Fig. 257 c und d, daß sich durch die alleinige Wirkung der Verschiebungskraft V_I der Säulenkopf D sich weniger als der Säulenkopf B verschiebt, während sich bei alleiniger Wirkung der Verschiebungskraft V_{II} des Zugbandes wegen beide Säulenköpfe B und D um gleichviel verschieben. Um nun die Momente M^* , welche durch die Belastung des Säulenkopfes B bzw. D mit $H = 1 t$ (Fig. 257 g bzw. i) hervorgerufen werden, zu erhalten, verschieben wir zunächst (Fig. 257 e) den Säulenkopf B um eine beliebige Strecke, z. B. $\Delta = 1 mm$, während wir den anderen Säulenkopf D unverschiebbar festhalten, und ermitteln die davon herrührenden Momente M'_I , aus denen wir die zugehörige Erzeugungskraft Z_I und die bei der Verschiebung im gedachten Lager am Säulenkopf D gleichzeitig auftretende Festhaltungskraft $D_{II(\Delta I)}$ berechnen. Die Momente M_I^* (Fig. 257 g) können wir, wie wir später sehen werden, nur ermitteln, wenn wir auch die Momente M'_{II} sowie die zugehörige Erzeugungskraft Z_{II} und Fest-

haltungskraft $D_{I(\Delta II)}$ kennen infolge Verschiebung des Säulenkopfes D und gleichzeitiger Festhaltung des anderen Säulenkopfes B , d. h. also unter der Annahme, daß das Zugband nicht vorhanden sei (Fig. 257f); daher werden noch diese Momente M'_{II} bestimmt.

Durch Kombination der beiden M' -Momentenbilder erhalten wir die Momente M_I^* (Fig. 257g). Die Momente M_{II}^* (Fig. 257i) ergeben sich des Zugbandes wegen wie an einem einstöckigen Rahmen, indem wir die Momente M'_{I-II} , welche wir durch gleichzeitige Verschiebung der Säulenköpfe B und D um die gleiche Strecke (Fig. 257h) erhalten, durch die zugehörige Verschiebung der beiden Säulenköpfe dividieren; bei gleichzeitiger Verschiebung der beiden Säulenköpfe erleiden bei parallelen Säulen nur die letzteren gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden, während bei schiefen Säulen dies auch noch bei den Dachstäben der Fall ist. Durch Multiplikation der M^* -Momente mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente erhalten wir wie früher die Zusatzmomente.

Durch Addition der Momente aus R. I und R. II ergeben sich die endgültigen Momente, aus denen die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte hervorgehen.

Wollen wir noch den Einfluß einer Verkürzung der Dachstäbe sowie einer Verlängerung des Zugbandes infolge der in diesen Stäben wirkenden Normalkräfte berücksichtigen, so können wir dies nach Kap. VII dieses Teiles zusätzlich vornehmen.

In Fig. 258 haben wir einen unsymmetrischen Doppelrahmen mit elastischem Zugband dargestellt. Die Berechnung desselben erfolgt nach den gleichen Grundsätzen wie diejenige des einfachen Rahmens mit Zugband (Fig. 257). Während R. I müssen wir, wie wenn der Rahmen keine Zugbänder hätte, alle drei Säulenköpfe unverschiebbar festhalten. Zur Bestimmung der Zusatzmomente (R. II) benötigen wir erstens die Momente M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* am Rahmen ohne Zugband (Fig. 258a, b und c), da z. B. bei Windbelastung die Zugbänder schlaff werden und die Verschiebungskräfte wie an einem Rahmen ohne Zugband wirken, und zweitens die Momente M'_{I-II} , M'_{II-III} und $M'_{I-II-III}$ am Rahmen mit Zugbänder (Fig. 258d, e und f), da bei gewissen Belastungsfällen die Verschiebungskräfte so wirken, daß infolge der Zugbänder mehrere Säulenköpfe gleichzeitig verschoben werden; der Zugbänder wegen ergibt sich für die an ein und demselben Knotenpunkt von links nach rechts und die von rechts nach links gerichtete Kraft $H = 1 t$ eine verschiedene Momentenfläche. Zur Bestimmung der genannten M^* -Momente benötigen wir die M' -Momentenflächen für die verschiedenen Verschiebungszustände; und zwar brauchen wir:

1. zur Bestimmung der M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* -Momente wie am Rahmen ohne Zugbänder (Fall II) die M' -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte Z und Festhaltungskräfte D für die in den Fig. 258g, h und i dargestellten Verschiebungszustände;

2. zur Bestimmung der M'_{I-II} -Momente (Fig. 258d) die M' -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte Z und Festhaltungskräfte D für die in den Fig. 258k und i dargestellten Verschiebungszustände;

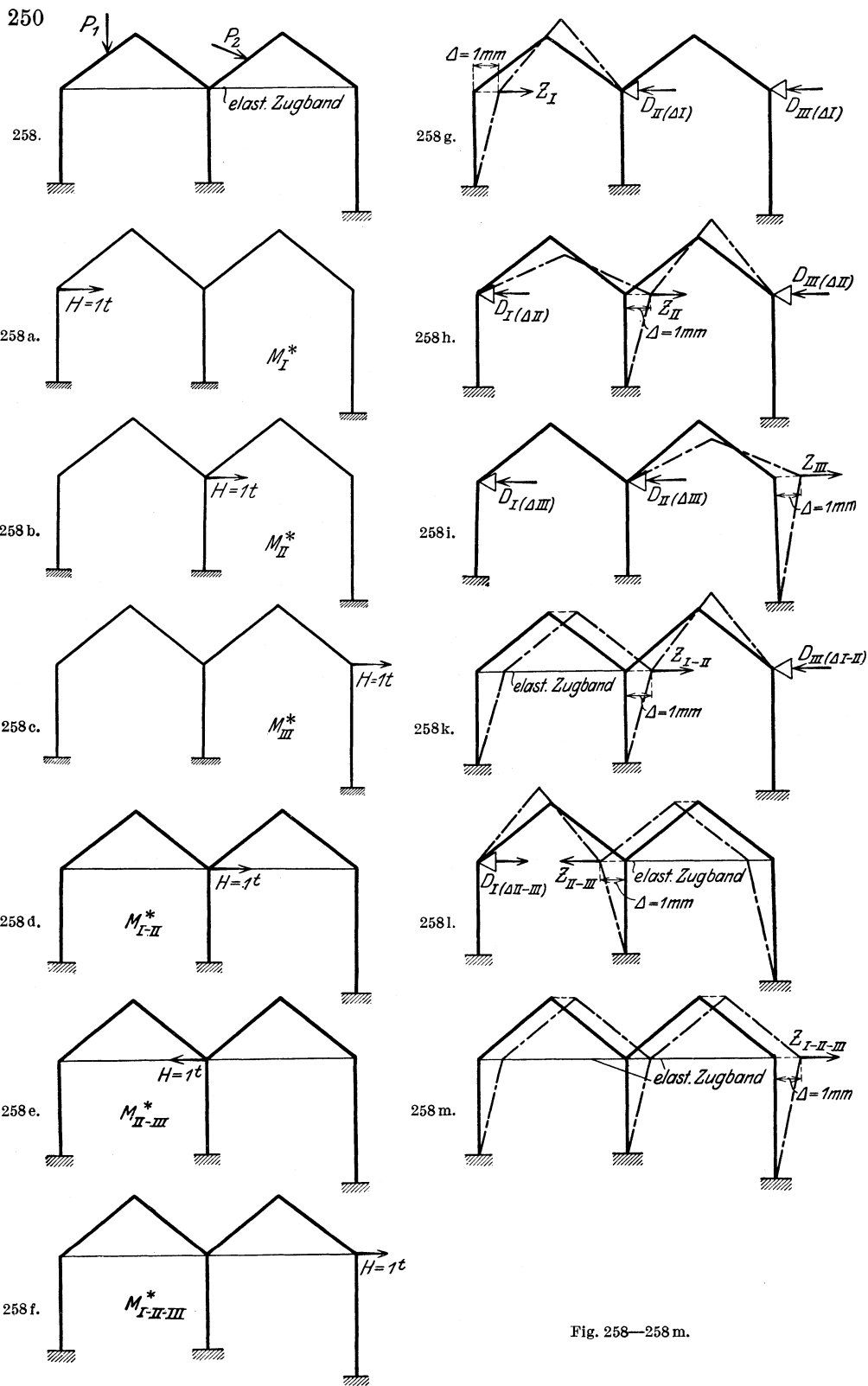


Fig. 258—258 m.

3. zur Bestimmung der M_{II-III}^* -Momente (Fig. 258e) die M' -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte Z und Festhaltungskräfte D für die in den Fig. 258l und g dargestellten Verschiebungszustände, und

4. zur Bestimmung der $M_{I-II-III}^*$ -Momente (Fig. 258f) die M' -Momente und die zugehörige Erzeugungskraft $Z_{I-II-III}$ für den in Fig. 258m dargestellten Verschiebungszustand.

Die $M_{I-II-III}^*$ -Momentenfläche ergibt sich nach Kap. IV, 1 dieses Teiles durch Division der M' -Momentenfläche für Fig. 258 m durch die zugehörige Erzeugungskraft $Z_{I-II-III}$; für jede der übrigen zu bestimmenden M^* -Momentenflächen ergibt sich nach Kap. IV, 2 dieses Teiles ein Gleichungssystem mit ebenso vielen Gleichungen als nach obigem Verschiebungszustände benötigt werden. Der übrige Rechnungsgang gestaltet sich analog wie für den Rahmen ohne Zugbänder.

3. Der Rahmenträger.

(Vierendeel-Träger.)

Der Rahmenträger kann ebenfalls nach der Methode der Festpunkte berechnet werden, und zwar nach dem gleichen Prinzip wie der mehrstöckige Rahmen; der Rahmenträger ist nichts anderes wie ein „liegender“ Stockwerkrahmen. Bisher konnte der Rahmenträger mit mehr als 2—3 Feldern nur näherungsweise berechnet werden. Die nachfolgende Berechnung nach der Methode der Festpunkte liefert jedoch genau richtige Ergebnisse, wie sie eine Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen liefern würde, die aber wegen der sehr hohen Zahl von statisch unbestimmten Größen praktisch undurchführbar ist.

Die Berechnung gestaltet sich verschieden, je nachdem die Gurtungen des Rahmenträgers parallel oder in gebrochener Linie (geknickt) verlaufen.

a) Der Rahmenträger mit parallelen Gurtungen.

Der in Fig 259 dargestellte

Rahmenträger über eine Öffnung

ist 12fach statisch unbestimmt; seine Berechnung nach den Elastizitätsgleichungen würde die Auflösung eines Systems von 12 Gleichungen mit 12 Unbekannten erfordern.

Die Berechnung des Rahmenträgers nach der Methode der Festpunkte teilen wir wieder in die beiden Rechnungsabschnitte I und II ein.

Rechnungsabschnitt I.

Während des R. I nehmen wir an, die Pfosten des Rahmenträgers seien vorübergehend durch gedachte Lager an denselben in senkrechter Richtung und die obere Gurtung desselben in waagrechter Richtung unverschiebbar festgehalten (Fig. 259a). Der Rahmenträger geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten über, dessen Berechnung im Teil I vorgeführt wurde. Demgemäß ermitteln wir auf Grund der Festpunkte, Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaß die Momente an allen Stäben und daraus die drei

senkrechten Festhaltungskräfte F_I , F_{II} und F_{III} sowie die waagrechte Festhaltungskraft F_{IV} nach Teil I, Kap. VII, 3.

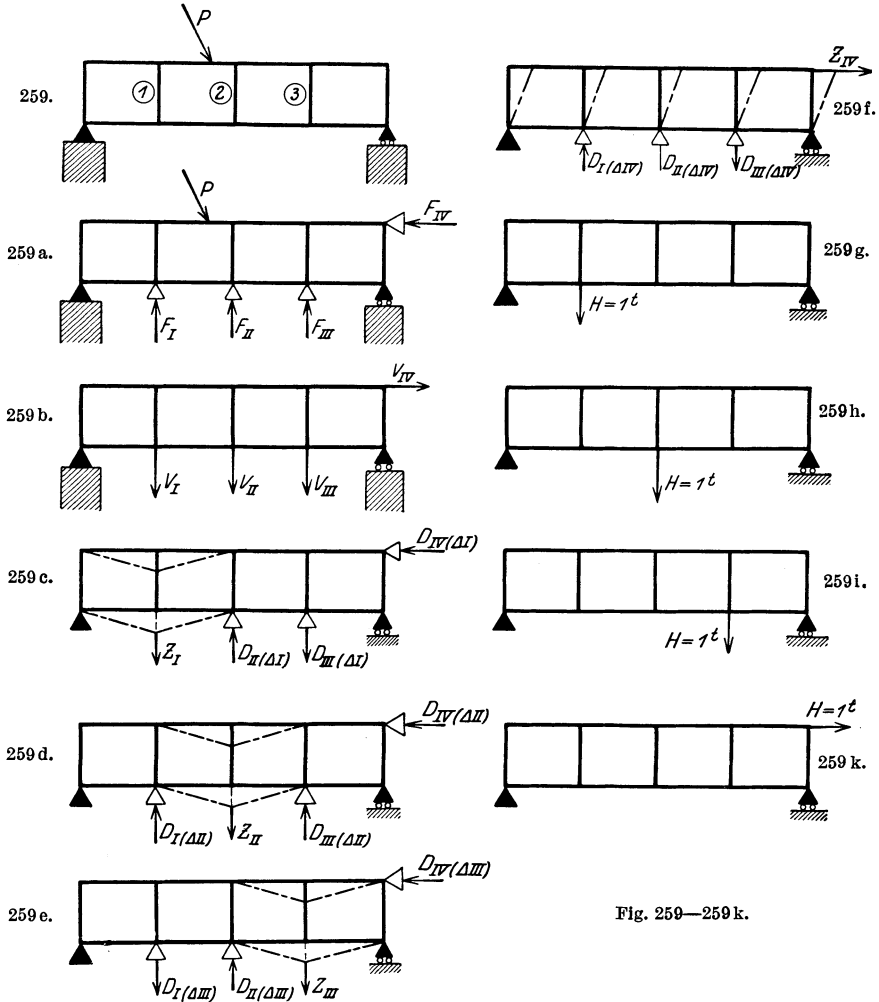


Fig. 259—259 k.

Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun die während des R. I an den Pfosten und der oberen Gurtung gedachten Lager, worauf die den Festhaltungskräften gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte in Tätigkeit treten (Fig. 259 b) welche den Rahmenträger verschieben und dadurch an diesem noch Zusatzmomente hervorrufen.

Um diese Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir die Wirkung der einzelnen Verschiebungskräfte V_I , V_{II} , V_{III} und V_{IV} getrennt voneinander und bestimmen dementsprechend die Momente M_I^* , M_{II}^* , M_{III}^* und M_{IV}^* am frei verschiebbaren Rahmenträger (Fig. 259 g, h, i und k) infolge der an den einzelnen Pfosten und der oberen Gurtung in Richtung derselben angreifenden

Last $H = 1 t$. Durch Multiplikation der M^* -Momente mit dem Werte der betreffenden Verschiebungskraft erhalten wir die Momente herrührend von den einzelnen Verschiebungskräften, und durch Addition derselben die Zusatzmomente am Rahmenträger.

Die M^* -Momente am Rahmenträger erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 3 in der Weise, daß wir sowohl die einzelnen Pfosten als auch die obere Gurtung desselben nacheinander um eine gegebene Strecke, beispielsweise $\Delta = 1 mm$, verschieben (Fig. 259c, d, e, f), während wir, um die Festpunkte zur Weiterleitung der durch die Verschiebung in den Stäben erzeugten Momente benutzen zu können, die nicht verschobenen Stäbe unverschiebbar festhalten. Dadurch erhalten wir vier M' -Momentenbilder mit je einer Erzeugungskraft Z am verschobenen Stab und drei bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräften D an den festgehaltenen Stäben, aus deren Kombination nach Teil II, Kap. IV, 3 die Momente M_I^* , M_{II}^* , M_{III}^* und M_{IV}^* hervorgehen.

Zum Schluß addieren wir die Momente aus R. I und R. II mit ihren Vorzeichen, wodurch wir die endgültigen Momente und daraus die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte am Rahmenträger infolge der äußeren Belastung erhalten.

Ist der Rahmenträger nicht frei aufgelagert, sondern in biegungsfester Verbindung mit Säulen, wie z. B. in Fig. 260 dargestellt, so gestaltet sich die Berechnung analog wie diejenige des frei aufliegenden Rahmenträgers (Fig. 259), es ist jedoch während R. I noch ein Lager an der unteren Gurtung anzubringen (Fig. 260a), weil diese sonst nicht (wie in Fig. 259 durch das feste Auflager) unverschiebbar ist. Rechnungsabschnitt I liefert wieder die Momente für den festgehaltenen Zustand, aus denen wir die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte berechnen. Um die Zusatzmomente des R. II, herrührend von den am Rahmenträger wirkenden Verschiebungskräften V (Fig. 260b) zu erhalten, müssen wir außer den Pfosten 1, 2 und 3 und der oberen Gurtung (Fig. 259c, d, e, f) auch die untere Gurtung um eine beliebige Strecke verschieben (Fig. 260c), wobei wir die Lager 1, 2 und 3, die in waagrechter Richtung beweglich sind, belassen und die obere Gurtung parallel mit verschieben; dabei muß aber trotzdem an der oberen Gurtung eine Kraft $D_{IV}(\Delta V)$ angebracht werden, um

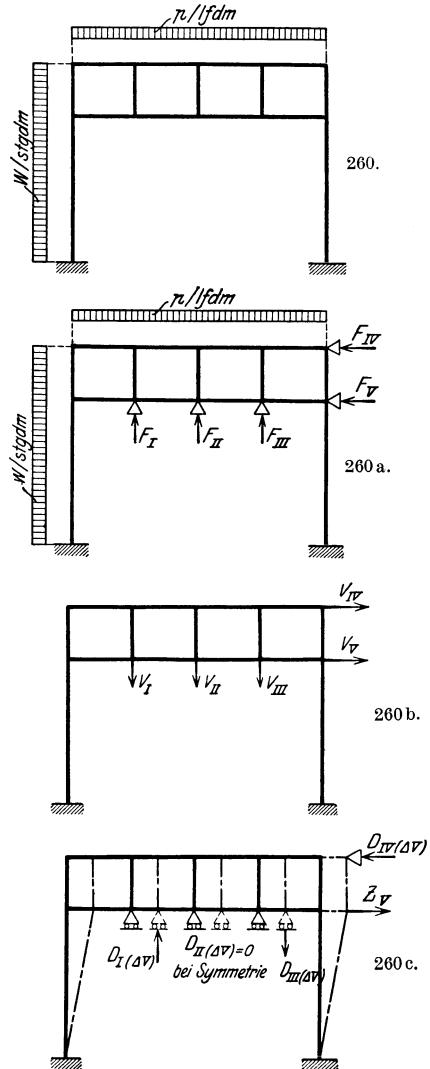


Fig. 260—260 c.

die Knotenpunkte dieser Gurtung senkrecht über denjenigen der unteren Gurtung zu halten, die Parallelverschiebung der oberen Gurtung ergibt aber den Vorteil, daß nur die beiden Säulen gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden erleiden. Daraus ergeben sich die Momente M'_v , aus denen wir die zugehörige Erzeugungskraft Z_v und die bei der Verschiebung der unteren Gurtung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D berechnen. Durch Kombination der fünf M' -Momentenbilder ergeben sich die Momente M_I^* , M_{II}^* , M_{III}^* , M_{IV}^* und M_v^* , aus welchen wir durch Multiplikation mit dem Werte der betreffenden Verschiebungskraft und Addition der daraus hervorgehenden Momente die gesuchten Zusatzmomente erhalten. Durch Addition der Momente aus R. I und R. II gelangen wir wieder zu den endgültigen Momenten und daraus zu den endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräften am Rahmenträger.

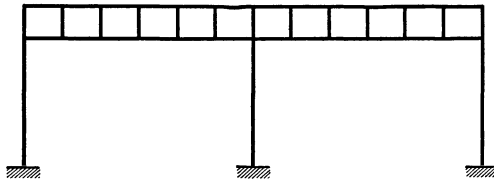


Fig. 261.

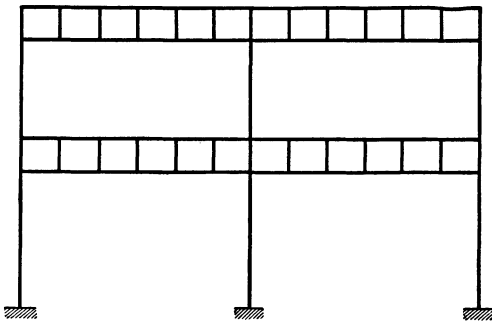


Fig. 262.

Der durchlaufende Rahmenträger auf elastisch drehbaren Stützen (Fig. 261), sowie der Stockwerkrahmen, dessen Balken aus Rahmenträgern bestehen (Fig. 262), werden in analoger Weise berechnet. Die Berechnung liefert die genau richtigen Momente, Quer- und Normalkräfte,

so daß man in der Lage ist, diese Tragwerke richtig zu armieren, d. h. die Eiseneinlagen so einzulegen, daß keine Risse entstehen, wie dies bei den meisten bis jetzt ausgeführten Vierendeel-Trägern leider der Fall ist.

b) Der Rahmenträger mit beliebig gerichteten Stäben.

Der in Fig. 263 dargestellte, durch eine beliebig gerichtete Kraft P belastete Rahmenträger wird analog wie der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stützen berechnet; den Gang der Berechnung teilen wir wieder in die beiden Rechnungsabschnitte I und II ein.

Rechnungsabschnitt I.

Während des R. I nehmen wir an, die Pfosten des Rahmenträgers seien vorübergehend durch gedachte Lager an denselben in senkrechter Richtung und die obere Gurtung desselben in waagrechter Richtung unverschiebbar festgehalten (Fig. 263a); die untere Gurtung wird durch das feste Auflager in A unverschiebbar festgehalten. Der Rahmenträger geht dann in ein Tragwerk mit unverschiebbaren Knotenpunkten über, dessen Berechnung im Teil I vorgeführt wurde. Demgemäß ermitteln wir auf Grund der Festpunkte, Kreuzlinienabschnitte und Verteilungsmaße die Momente an allen Stäben und daraus nach Teil I, Kap. VII, 3 die drei senkrechten Festhaltungskräfte F_I , F_{II} und F_{III}

sowie die waagrechte Festhaltungskraft F_{IV} ; für die Festhaltungskräfte F_I und F_{III} könnten wir ebensogut die Richtung der Stäbe 1 und 3 wählen.

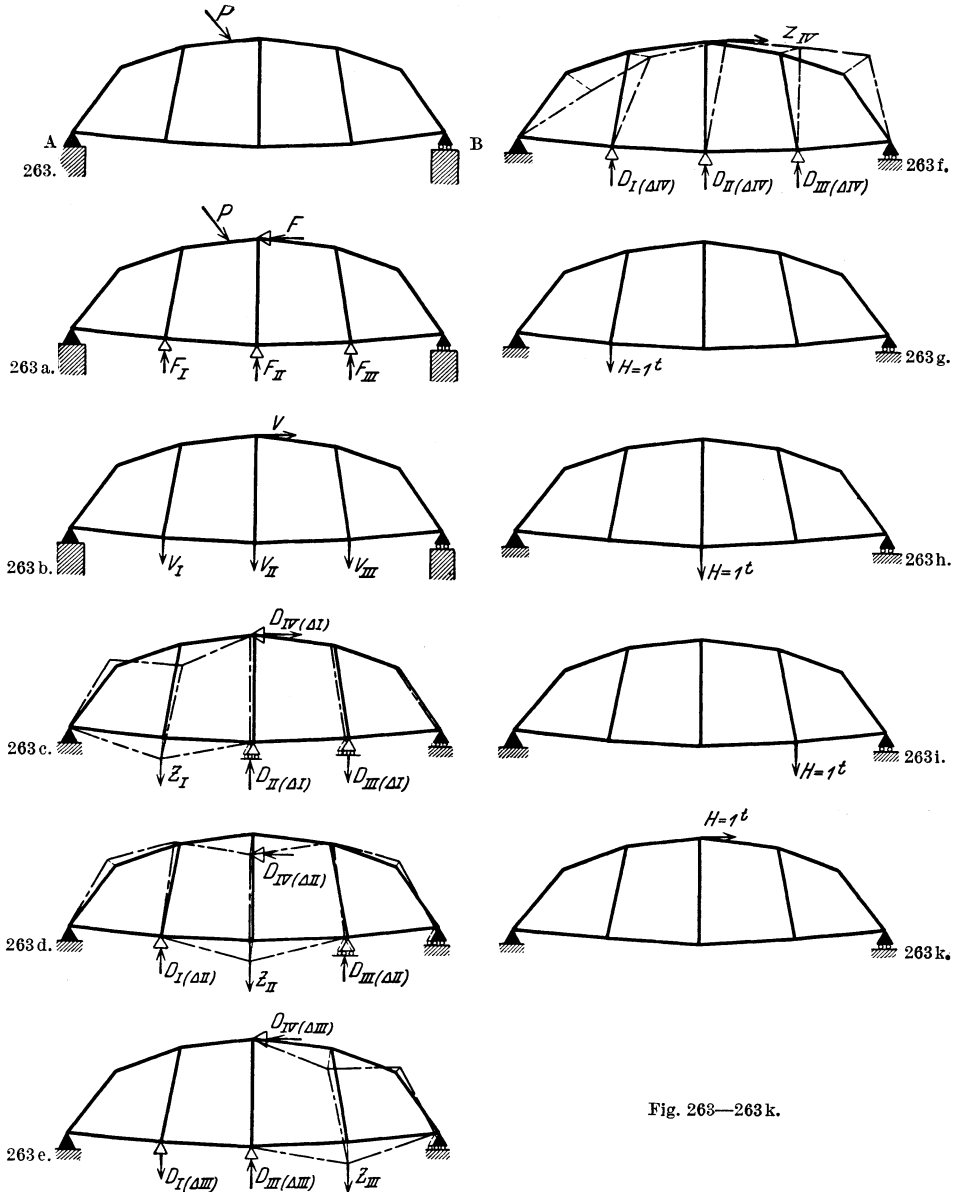


Fig. 263—263 k.

Rechnungsabschnitt II.

Wir entfernen nun die während des R. I an den Pfosten und der oberen Gurtung gedachten Lager, worauf die den Festhaltungskräften gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte in Tätigkeit treten (Fig. 263 b), welche Verschiebungen der Knotenpunkte des Rahmenträgers und dadurch noch Zusatzmomente hervorrufen.

Um diese Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir die Wirkung der einzelnen Verschiebungskräfte V_I , V_{II} , V_{III} und V_{IV} getrennt voneinander, und bestimmen dementsprechend die Momente M_I^* , M_{II}^* , M_{III}^* und M_{IV}^* am frei verschiebbaren Rahmenträger (Fig. 263 g, h, i, k) infolge der an den einzelnen Pfosten und an der oberen Gurtung in Richtung der Festhaltungskräfte des R. I angreifenden Last $H = 1 t$. Durch Multiplikation der M^* -Momente mit dem Werte der betreffenden Verschiebungskraft erhalten wir die Momente herührend von den einzelnen Verschiebungskräften und durch Addition derselben die Zusatzmomente am Rahmenträger.

Die M^* -Momente am Rahmenträger erhalten wir nach Teil II, Kap. IV, 3 in der Weise, daß wir sowohl die einzelnen Pfosten als auch die obere Gurtung desselben nacheinander um eine gegebene Strecke, beispielsweise $\Delta = 1 \text{ mm}$, verschieben (Fig. 263 c, d, e, f). Um die Festpunkte zur Weiterleitung der durch die Verschiebung in den Stäben erzeugten Momente benutzen zu können, halten wir bei Verschiebung eines Pfostens die beiden anderen in senkrechter Richtung unverschiebbar fest (in waagrechter Richtung ist die untere Gurtung durch das feste Auflager A gehalten, die übrigen Knotenpunkte des Untergurtes müssen sich in waagrechter Richtung verschieben können, da sonst eine Verschiebung eines Knotenpunktes des Untergurtes nicht möglich wäre), während von der oberen Gurtung derjenige Knotenpunkt, an dem in R. I das feste Lager angenommen wurde, bei der Verschiebung senkrecht über dem darunterliegenden Knotenpunkt der unteren Gurtung bleiben soll. Wir erkennen aus den Fig. 263 c, d und e, daß bei Verschiebung der einzelnen Pfosten jeweils alle Stäbe, mit Ausnahme von zwei Stäben des Untergurtes, gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden erleiden. Bei Verschiebung des Obergurtes (des Knotenpunktes C , welcher im R. I festgehalten wurde) erleiden nur die Pfosten und die Obergurtstäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden (siehe Fig. 263 f). Durch diese vier Verschiebungen erhalten wir vier M' -Momentenbilder mit je einer Erzeugungskraft Z (in Richtung der in demselben Punkte angreifenden Festhaltungskraft aus R. I) am verschobenen und drei bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräften D an den durch gedachte Lager festgehaltenen Knotenpunkten, aus deren Kombination nach Teil II, Kap. IV, 3 die Momente M_I^* , M_{II}^* , M_{III}^* und M_{IV}^* hervorgehen.

Zum Schluß addieren wir die Momente aus R. I und R. II mit ihren Vorzeichen, wodurch wir die endgültigen Momente, und daraus die endgültigen Quer-, Normal- und Auflagerkräfte am Rahmenträger infolge der äußeren Belastung erhalten.

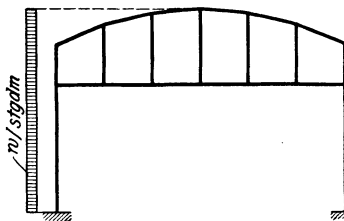


Fig. 264.

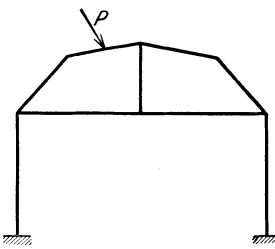


Fig. 265.

Ist der Rahmenträger nicht frei aufgelagert, sondern in biegungsfester Verbindung mit Säulen, wie z. B. in Fig. 264 und 265 dargestellt, so gestaltet sich die Berechnung analog wie diejenige des

frei aufliegenden Rahmenträgers (Fig. 263), es ist jedoch während R. I noch ein Lager an der unteren Gurtung anzubringen, weil diese sonst nicht unverschiebbar festgehalten ist (vgl. die Berechnung des Rahmenträgers der Fig. 260).

Der zweistöckige Rahmenträger der Fig. 266 wird ebenfalls analog wie der gewöhnliche Rahmenträger der Fig. 263 berechnet, es ist jedoch wie beim Rahmenträger der Fig. 264 während R. I sowohl am Balken *I* als auch am Balken *II* ein Lager anzubringen, damit der ganze Aufbau horizontal unverschiebbar festgehalten ist; wir haben also im R. I im ganzen drei Festhaltungskräfte (Fig. 266 a) zu bestimmen. Um im R. II zu den Momenten M^* zu gelangen, verschieben wir, genau wie unter 2, b) dieses Kapitels erläutert, zunächst den Balken *I* (Fig. 266 b)

unter Festhaltung des Balkens *II* (in waagrechter Richtung) und des Ständers *III* (in senkrechter Richtung). Dann verschieben wir den Balken *II* unter Festhaltung des Ständers *III* (in senkrechter Richtung) und des Balkens *I* (in waagrechter Richtung) (Fig. 266 c); das Lager am Balken *I* braucht kein Rollenlager zu sein, weil der Ständer *III* eine senkrecht zur Verschiebungsrichtung des Balkens *II* stehende Gerade bildet. Zum Schluß verschieben wir noch den Ständer *III* um eine beliebige Strecke, wobei wir sowohl das untere als auch das obere Stockwerk so mitgehen lassen, daß die Knotenpunkte *C* und *E* senkrecht über dem verschobenen Knotenpunkt *H* bleiben (Fig. 266 d). Aus diesen Verschiebungszuständen erhalten wir die Momente M'_I , M'_{II} und M'_{III} , aus denen wir dann die zugehörigen Erzeugungskräfte Z sowie die bei der betreffenden Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D berechnen können. Aus den Fig. 266 b, c und d erkennen wir, daß bei Verschiebung des Balkens *I* alle Stäbe des oberen Stockwerkes, bei Verschiebung des Balkens *II* alle Ständer-Stäbe, und bei Verschiebung des Ständers *III* alle Balken-Stäbe des Tragwerkes gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden erleiden.

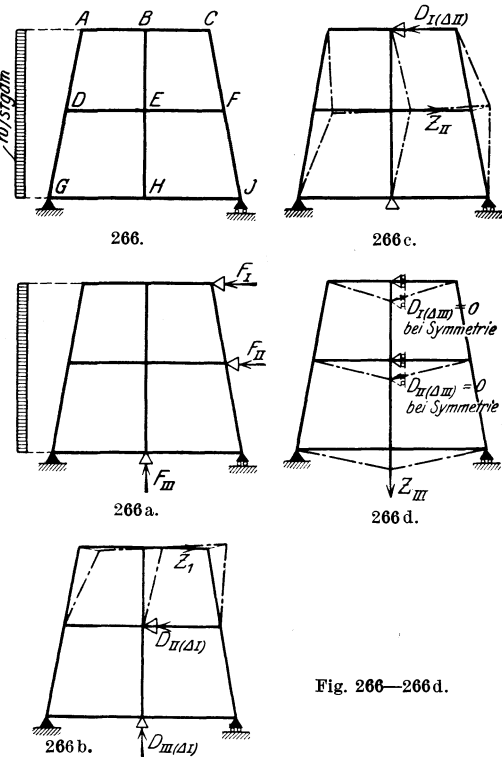


Fig. 266—266 d.

4. Das biegungsfeste Fachwerk.

Nach der Methode der Festpunkte ist es auch möglich, die Biegemomente in den Stäben eines Fachwerkes zu ermitteln, dessen Stäbe in den Knotenpunkten nicht gelenkartig, sondern biegungsfest miteinander verbunden sind. Besonders sei darauf hingewiesen, daß man nach vorliegender Methode mit Leichtigkeit die Nebenspannungen in Eisenfachwerken, herrührend von der biegungsfesten Verbindung der Stäbe in den Knotenpunkten infolge Vernietung derselben mit den Knotenblechen nicht nur näherungsweise, wie dies bisher erfolgte, sondern genau nachweisen kann.

Die Berechnung des in Fig. 267 dargestellten biegungsfesten Fachwerkes (Dachbinder) gestaltet sich wie folgt:

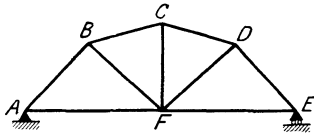


Fig. 267.

Da das Stabwerk aus lauter Dreiecken besteht, so sind alle Knotenpunkte unverschiebbar (wenn wir, wie immer, zunächst von den Knotenpunktverschiebungen infolge durch die Normalkräfte bewirkter Längenänderung der Stäbe absehen), und wir erhalten nur einen R. I. Da nun aber bei einem Fachwerk nicht die Momente, sondern die Normalkräfte den Hauptteil der Spannungen in den Stäben verursachen, so dürfen die Knotenpunktverschiebungen infolge Längenänderung der Stäbe, hervorgerufen durch die Normalkräfte, nicht ohne weiteres vernachlässigt werden.

Nachdem wir die Festpunkte an allen Stäben und die Verteilungsmaße an allen Knotenpunkten bestimmt haben, ermitteln wir in bekannter Weise (nach Teil I) die Momentenfläche am ganzen Tragwerk (mit unverschiebbaren Knotenpunkten) infolge der äußeren Belastung, sowie die Normalkräfte (nach Teil I, Kap. IV) in allen Stäben. Um die Momente am biegungsfesten Fachwerk infolge der Normalkräfte, d. h. herrührend von einer Längenänderung der Stäbe und dadurch verursachten Verschiebung der Knotenpunkte, zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Längenänderungen aller Stäbe nach der Gleichung:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \quad (480)$$

wenn

- N die Normalkraft in irgendeinem Stabe,
- l die anfängliche Länge des Stabes,
- E der Elastizitätsmodul des Baumaterials und
- F der Querschnitt des Stabes,

und zeichnen darauf einen Williot'schen Verschiebungsplan¹, wodurch wir die von den Längenänderungen der Stäbe herrührenden wirklichen Knotenpunktverschiebungen erhalten. Der Williot'sche Verschiebungsplan liefert die Knotenpunktverschiebungen für den Fall, daß die Stäbe an den Knotenpunkten gelenkig anschließen; der Einfluß der biegungsfesten Knotenpunktverbindung auf die Größe dieser Verschiebungen ist jedoch so gering, daß er vernachlässigt werden kann, es genügt, zu wissen, daß die Knotenpunktverschiebungen bei biegungsfester Verbindung der Stäbe um ein geringes Maß kleiner sind als bei gelenkigem Anschluß an die Knotenpunkte.

Nun bilden wir die Projektionen jeder Knotenpunktverschiebung auf die Normalen zu den in dem betreffenden Knotenpunkt vereinigten Stäben, und gelangen auf diese Weise zu der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung der Enden eines jeden Stabes. Für jeden Stab, dessen Enden gegenseitig verschoben wurden, können wir alsdann nach den allgemeinen Gln. (515) und (520) die dadurch hervorgerufenen Momente an beiden Enden berechnen, dieselben mittels Festpunkte und Verteilungsmaße über das ganze Tragwerk weiterleiten und zum Schluß die Momentenflächen herrührend von allen Stäben, deren Enden

¹ Müller-Breslau: Die graphische Statik Bd. 2 (1903) 1 S. 57.

gegenseitig verschoben wurden, addieren; die daraus hervorgehende Momentenfläche stellt den Einfluß der Normalkräfte dar.

Wirkt die äußere Belastung nicht auf die Gurtungsstäbe, sondern direkt auf die Knotenpunkte des Fachwerkes, wie dies bei Eisenkonstruktionen meistens der Fall ist (zur Vermeidung von Biegung in den Fachwerkstäben), so wird mit diesen Knotenpunktslasten und den Auflagerreaktionen ein Cremonaplan gezeichnet, woraus die Normalkräfte (Stabkräfte) in allen Stäben hervorgehen. Hierauf wird der Einfluß der Normalkräfte bzw. der davon herrührenden Längenänderung der Stäbe und dadurch verursachten Verschiebung der Knotenpunkte, wie vorstehend beschrieben, bestimmt.

Handelt es sich darum, die Spannungen in den Stäben, herrührend von einer über den Stabquerschnitt gleichmäßig verteilten Temperaturänderung um t^0 gegenüber der Herstellungstemperatur, zu ermitteln, so bestimmen wir für jeden Stab die davon herrührende Verlängerung bzw. Verkürzung nach der Gleichung

$$\Delta l = E \cdot t \cdot l,$$

worin

t die für alle Punkte des Stabes gleiche Temperaturänderung,

E der Temperatúrausdehnungskoeffizient des Baumaterials bei einer Temperaturänderung um 1^0 C,

l die anfängliche Stablänge,

und zeichnen hiermit einen Williot'schen Verschiebungsplan, aus welchem die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, und damit die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen aller Stabenden hervorgehen, welche wegen der biegungsfesten Knotenpunktverbindung Momente am ganzen Tragwerk verursachen, die in bekannter Weise ermittelt werden.

5. Rechnungsproben.

Ein wesentlicher Vorteil der Berechnung eines Tragwerkes nach der Methode der Festpunkte gegenüber derjenigen nach den Elastizitätsgleichungen besteht darin, daß man die Berechnung von Stufe zu Stufe leicht nachprüfen kann, weil sie sich aus mehreren Teilen zusammensetzt, deren jeder für sich abgeschlossen ist, d. h. von welchen jeder die Momentenfläche für einen bestimmten Belastungszustand des Tragwerkes liefert.

Zur Berechnung eines Tragwerkes nach der Methode der Festpunkte müssen die Momente für folgende Belastungszustände ermittelt werden:

a) Belastung des vorübergehend durch gedachte Lager unverschiebbar gemachten Tragwerkes durch die äußere Belastung, wodurch die Momente des R. I entstehen;

b) Belastung des Tragwerkes durch die zu dem betreffenden Verschiebungszustand gehörige Erzeugungskraft unter Belassung der übrigen gedachten Lager, wodurch die M' -Momente entstehen;

c) Belastung des frei verschiebbaren Tragwerkes durch die Kraft $H = 1 t$ an den Stellen, wo die gedachten Lager angebracht waren, wodurch die M^* -Momente entstehen;

d) Belastung des frei verschiebbaren Tragwerkes durch sämtliche Verschiebungskräfte V gleichzeitig, wodurch die Zusatzmomente entstehen;

e) Belastung des frei verschiebbaren Tragwerkes durch die äußere Belastung, wodurch die endgültigen Momente entstehen.

Bestimmen wir nun für jeden Belastungszustand aus den für denselben mit Hilfe der Festpunkte ermittelten Momenten die Quer- und Normalkräfte an den Knotenpunkten und in den Stäben, und aus diesen die Auflagerreaktionen (nach Teil I, Kap. VI) — die bei Belastungszustand a) und b) vorkommenden Festhaltungskräfte sind auch nichts anderes als Auflagerreaktionen, und zwar in den gedachten Lagern —, so müssen als

Hauptprobe,

geltend für alle Belastungszustände, die äußeren Kräfte mit den Auflagerreaktionen im Gleichgewicht stehen, d. h. es müssen die analytischen und graphischen Bedingungen des Gleichgewichts von Kräften in derselben Ebene erfüllt sein.

Die drei analytischen notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen sind ausgedrückt in dem

Satz: *Zum Gleichwichte von Kräften in einer Ebene ist erforderlich, daß die Summe ihrer Projektionen auf zwei zueinander senkrechte Achsen der Ebene gleich Null sei und daß die Summe ihrer statischen Momente in bezug auf einen beliebigen Pol in der Ebene verschwinde, d. h. es muß bestehen:*

$$\left. \begin{aligned} \sum(P \cdot \cos \alpha) &= 0, \\ \sum(P \cdot \sin \alpha) &= 0, \\ \sum(P \cdot a) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (481)$$

Die ersten beiden Gleichungen heißen die Projektionsgleichungen, die letzte die Momentengleichung.

Die beiden Projektionsachsen brauchen nicht aufeinander senkrecht zu stehen, dürfen aber nicht zueinander parallel sein.

Die drei genannten Gleichgewichtsbedingungen können auch in besonderen Fällen mit Vorteil durch drei andere ersetzt werden. So kann man z. B. eine Projektionsgleichung und zwei Momentengleichungen benutzen, welche sich auf verschiedene Pole beziehen, d. h. ein System

$$\left. \begin{aligned} \sum(P \cdot \cos \alpha) &= 0, \\ \sum(P \cdot a) &= 0, \\ \sum(P \cdot c) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (482)$$

Doch darf die Verbindungslinie der beiden Pole nicht zu der Projektionsachse senkrecht sein, weil das Kräftesystem sich in diesem Falle auf eine in der Verbindungslinie liegende Resultierende reduzieren könnte, und somit die genannten Bedingungen erfüllt wären, ohne daß Gleichgewicht bestehen würde.

Schließlich kann man die Gleichgewichtsbedingungen durch drei Momentengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sum(P \cdot a) &= 0, \\ \sum(P \cdot b) &= 0, \\ \sum(P \cdot c) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (483)$$

darstellen, welche sich auf Pole beziehen, die nicht in einer geraden Linie liegen dürfen.

Die graphische Gleichgewichtsbedingung erfordert, daß der von der äußeren Belastung und den Auflagerreaktionen gebildete Kräftezug sowie die Pfeilrichtung desselben geschlossen ist. Von den Seilstrahlen zu diesem Kräfteck wird ein Seileck gebildet, welches die sog. Stützlinie für den betreffenden Belastungsfall ist, und diese muß natürlich die Stäbe des Tragwerkes in den Momentennullpunkten schneiden.

Die Anwendung der Hauptprobe sei nachstehend an einem einfachen Beispiel für den Belastungszustand e) (endgültige Momente) gezeigt.

Der Balken des Rahmens der Fig. 268 sei durch eine gleichmäßig verteilte Last g_1 und g_2 pro lfd. m belastet; die Stäbe des Rahmens setzen wir im übrigen gewichtslos voraus.

Die in den Fig. 268 und 268a dargestellte Momentenfläche sei die endgültige am frei verschiebbaren Rahmen. Aus den Momenten ermitteln wir nach Teil I, Kap. VI, 3 die Auflagerreaktionen in D , E und F , welche sich aus der Querkraft Q („Reaktion“), der Normalkraft N („Reaktion“) und, wegen der Ein-

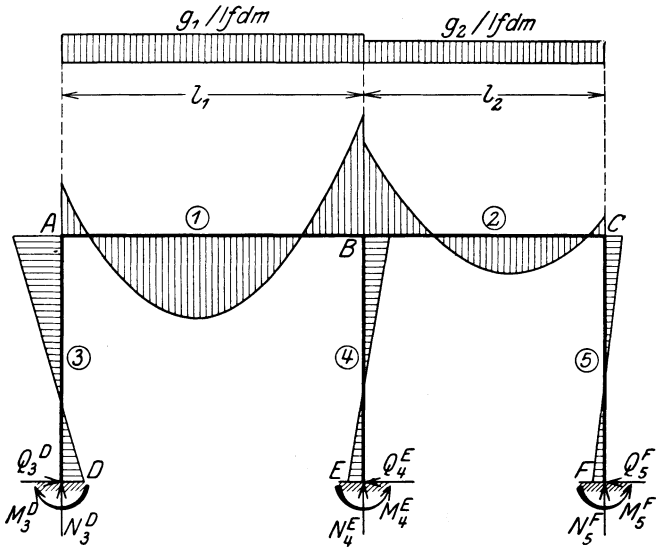


Fig. 268.

spannung, dem Moment M (am Stabende) in dem betreffenden Auflagerpunkt zusammensetzen. Es müssen nun die äußeren Kräfte $\sum g_1$ und $\sum g_2$ mit den Auflagerreaktionen R^D , R^E und R^F im Gleichgewicht stehen.

Zur Aufstellung der analytischen Gleichgewichtsbedingungen, z. B. der Gleichungen (481), brauchen wir die Reaktionen R in den Auflagerpunkten nicht zu bilden, sondern wir operieren mit deren Komponenten; es müssen die beiden Projektionsgleichungen bestehen:

$$(1) \quad Q_3^D - Q_4^E - Q_5^F = 0$$

(die Horizontalprojektion der äußeren Belastung ist Null, da letztere senkrecht wirkt)

$$(2) \quad \sum g_1 + \sum g_2 - N_3^D - N_4^E - N_5^F = 0.$$

Um die Momentengleichung anzuschreiben, wählen wir zweckmäßig einen der Auflagerpunkte, z. B. den Punkt D , als Pol; es muß dann sein:

$$\sum g_1 \cdot \frac{l_1}{2} + \sum g_2 \cdot \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) - N_4^E \cdot l_1 - N_5^F \cdot (l_1 + l_2) + M_3^D - M_4^E - M_5^F = 0$$

(die Momente der Kräfte Q_3^D , N_3^D , Q_4^E und Q_5^F fallen weg, da ihre Hebelarme Null sind).

Die graphische Gleichgewichtsbedingung ist auch erfüllt, was durch die in Fig. 268a auf Grund des Kräftecks, bestehend aus den Kräften $\sum g_1$, $\sum g_2$, R^D , R^E und R^F , eingezeichnete Stützlinie dargetan wird.

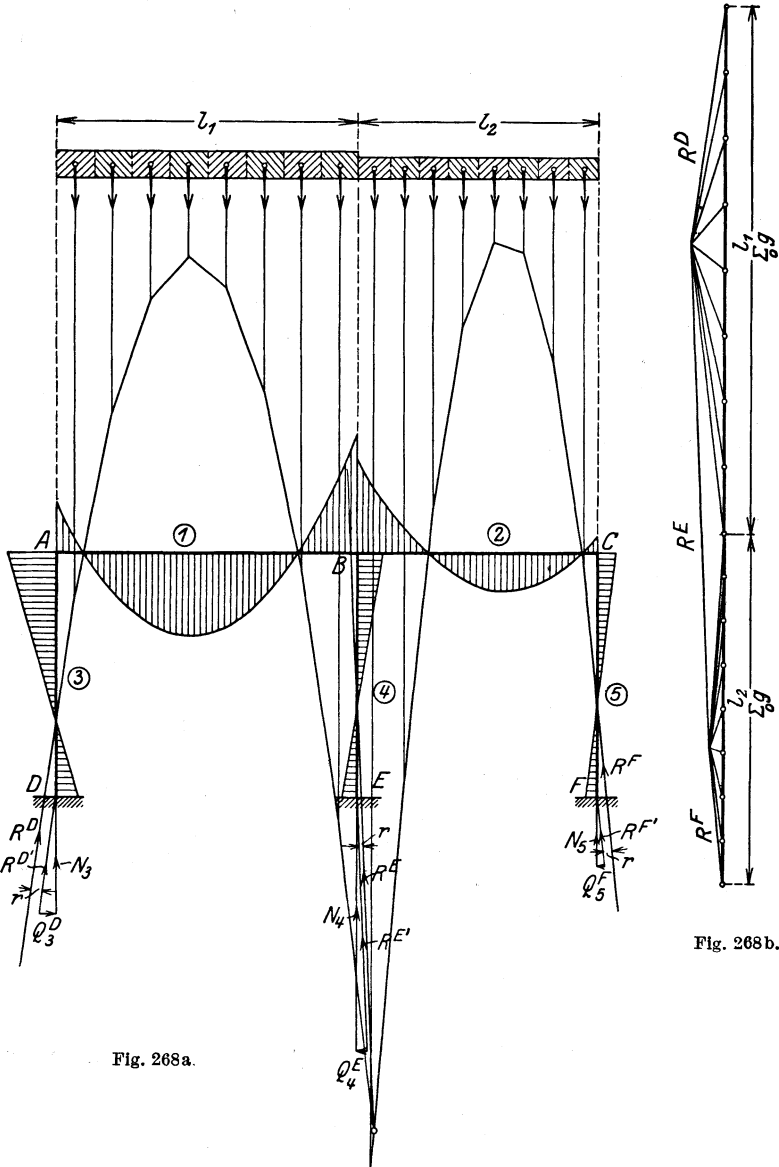


Fig. 268a.

Fig. 268b.

Will man die vollständige Hauptprobe, welche eine absolute Gewähr für die Richtigkeit der Rechnung (bei gegebenen Festpunkten) bietet, nicht für alle Belastungszustände durchführen, so begnügt man sich meistens mit folgenden

Teilproben.

Für den Belastungszustand a): Aus der Momentenfläche des R. I müssen zur weiteren Berechnung ohnedies die Festhaltungskräfte (Auflagerkräfte in

den gedachten Lagern) ermittelt werden, und man sieht nun zur Probe nach, ob die eine der drei Gleichgewichtsbedingungen, nämlich die Projektionsgleichung für die Horizontale, erfüllt ist. Die Resultierende der Horizontalprojektionen der äußeren Kräfte, der Festhaltungskräfte F (bei einem einstöckigen Tragwerk ist nur eine vorhanden) und der Resultierenden an den natürlichen Auflagern des Tragwerkes muß Null sein, damit Gleichgewicht besteht.

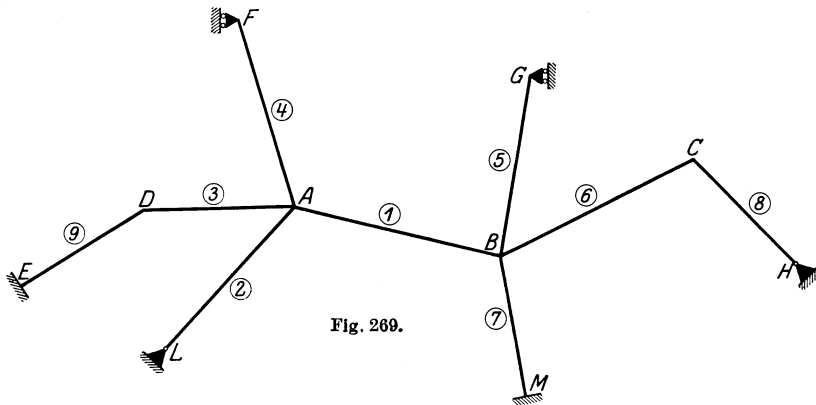


Fig. 269.

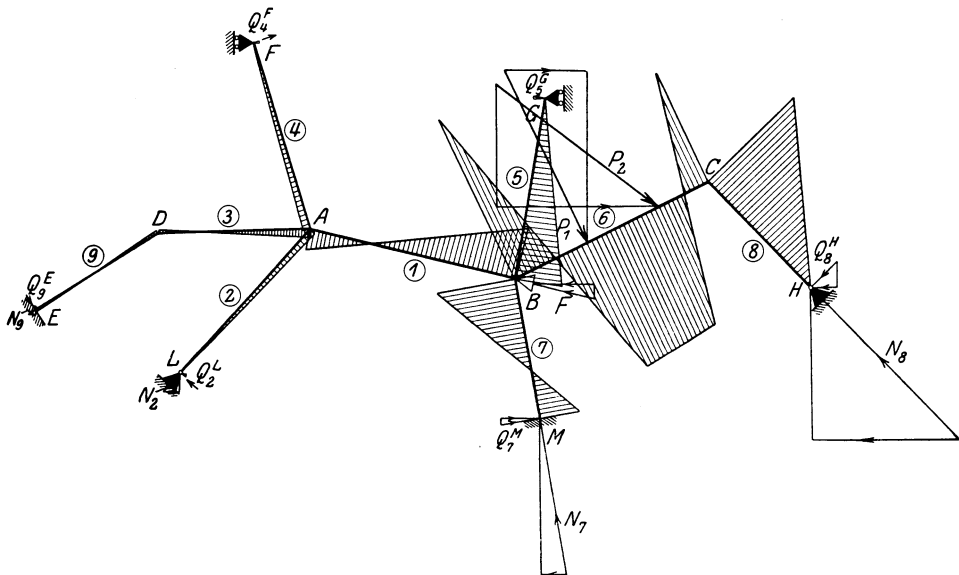


Fig. 269 a.

An den Tragwerken der Fig. 269 (einstöckig) und 270 (dreistöckig), für welche in Fig. 269a bzw. 270a die Momentenfläche für den festgehaltenen Zustand dargestellt ist, wurden die Horizontalprojektionen der genannten Kräfte konstruiert; an Stelle der Horizontalprojektionen der Resultierenden an den Auflagern wurden diejenigen der Komponenten Q und N derselben gebildet.

Für den Belastungszustand b): Aus der M' -Momentenfläche für die Verschiebung desjenigen Stabes oder Knotenpunktes, an welchem während R. I ein Lager gedacht ist, muß zur weiteren Berechnung die zugehörige Er-

zeugungskraft Z (als äußere Belastung aufzufassen) sowie (bei mehrstöckigen Tragwerken) die an den verbliebenen Lagern bei der Verschiebung gleichzeitig auftretenden Festhaltungskräfte D (Auflagerkräfte in den gedachten Lagern) ermittelt werden. Man sieht nun zur Probe wieder nach, ob die eine der drei Gleichgewichtsbedingungen, nämlich die Projektionsgleichung für die Horizontale erfüllt ist. Die Resultierende der Horizontalprojektionen der Erzeugungskraft Z , der Festhaltungskräfte D und der Resultierenden an den natürlichen Auflagern des Tragwerkes muß Null sein, damit Gleichgewicht besteht.

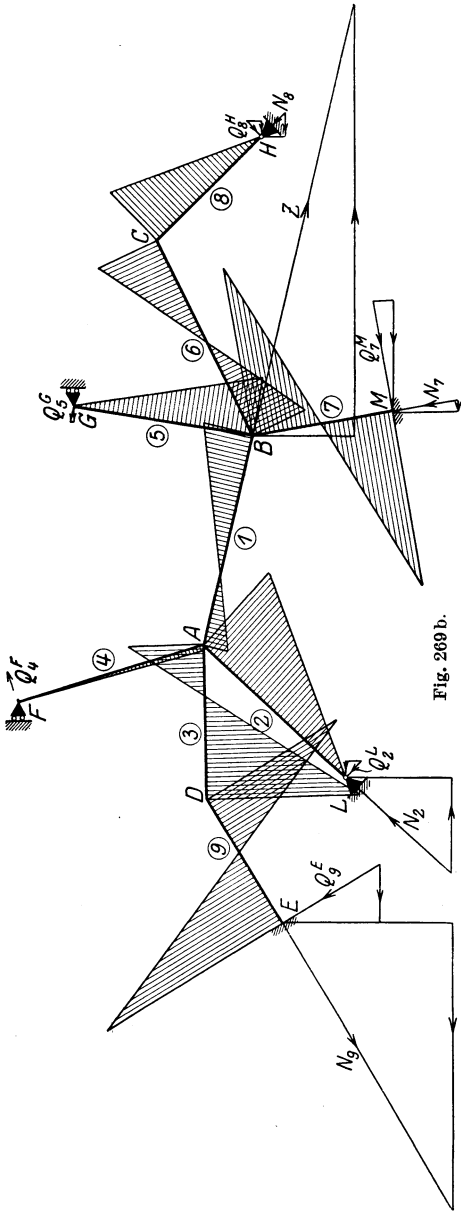


Fig. 269 b.

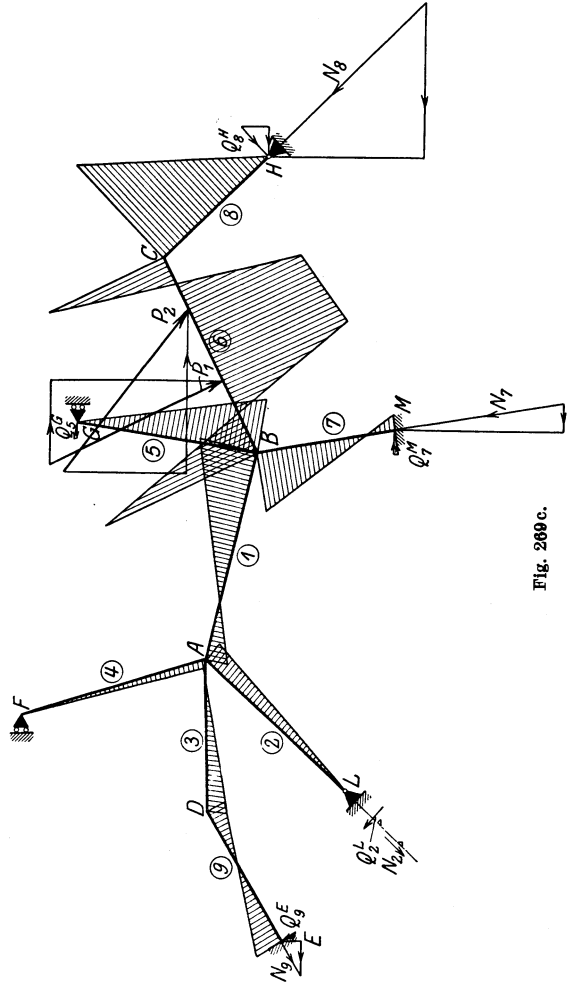


Fig. 269 c.

füllt ist. Die Resultierende der Horizontalprojektionen der Erzeugungskraft Z , der Festhaltungskräfte D und der Resultierenden an den natürlichen Auflagern des Tragwerkes muß Null sein, damit Gleichgewicht besteht.

In Fig. 269 b wurde diese Probe als Beispiel für den allgemeinen einstöckigen Rahmen, und in den Fig. 270 b, c und d für den allgemeinen Stockwerksrahmen durchgeführt.

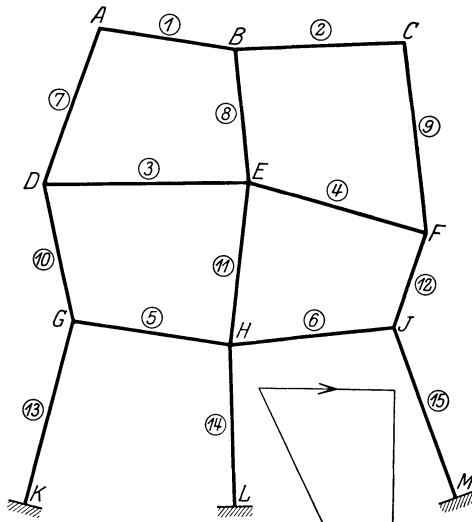


Fig. 270.

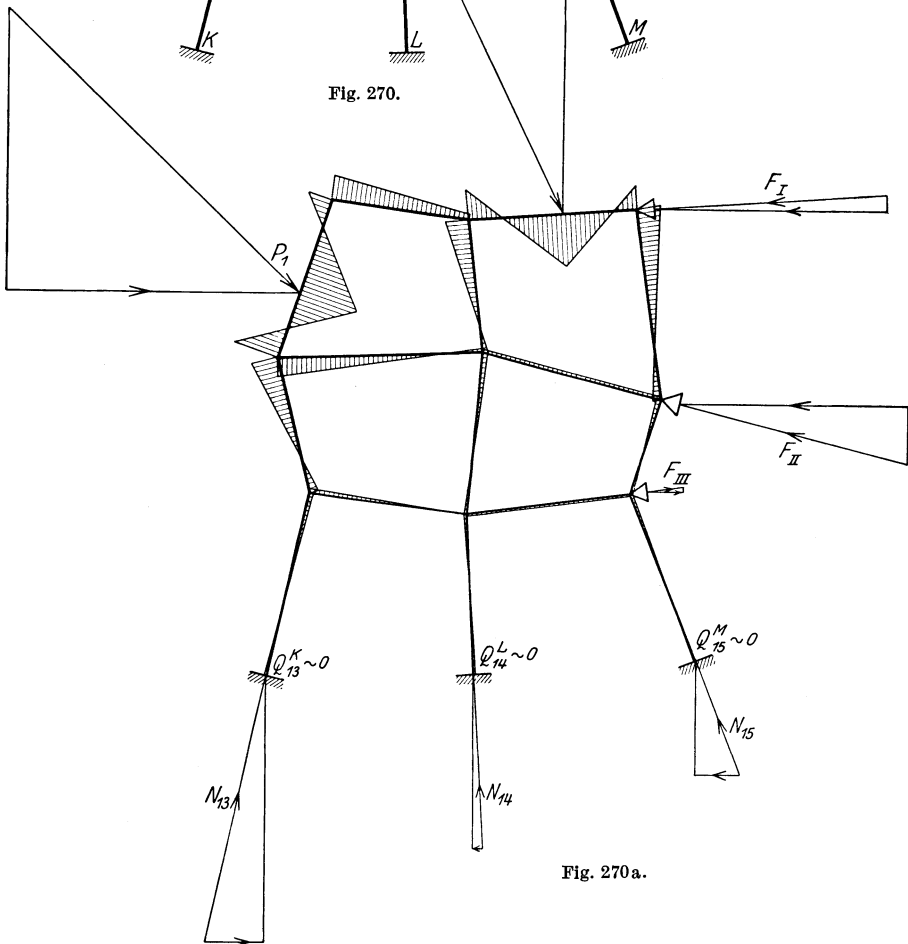


Fig. 270a.

Für den Belastungszustand c): Die M^* -Momente werden am frei verschiebbaren Tragwerk durch die Belastung $H = 1 t$ hervorgerufen. Aus diesem Grunde muß die Resultierende der Projektionen der Resultanten an

den Auflagern des Tragwerkes (d. h. der Projektionen der Quer- und Normalkräfte [„Reaktionen“] in den Auflagerpunkten) auf die Richtung von $H = 1 t$

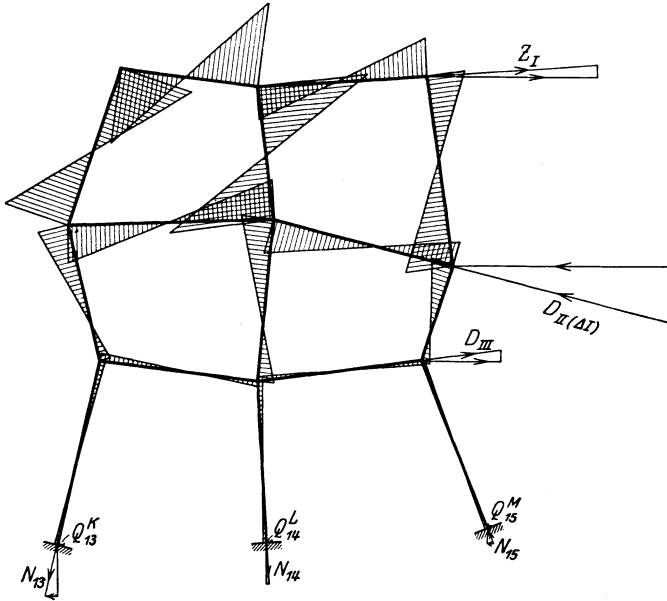


Fig. 270 b.

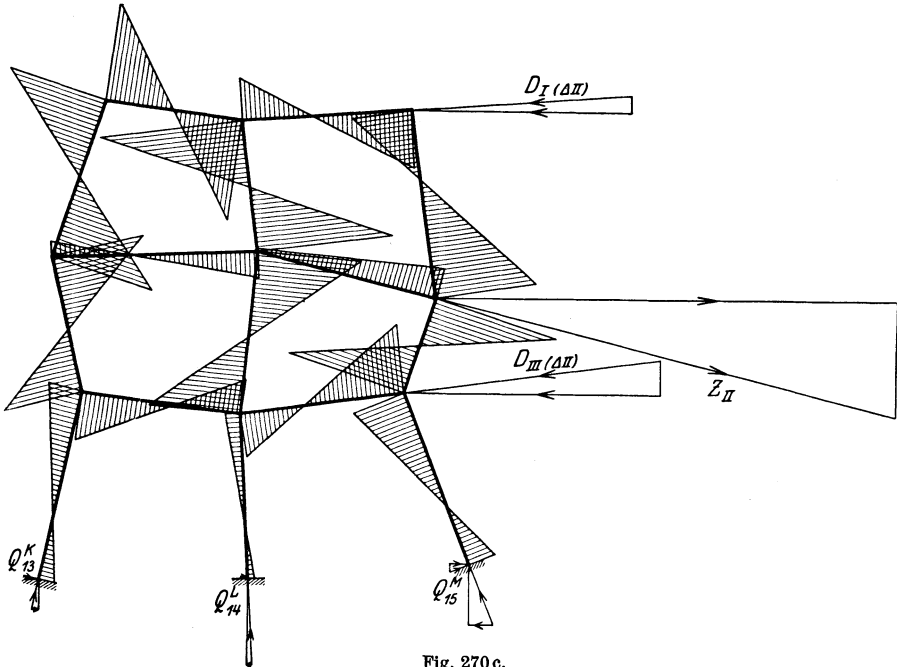


Fig. 270 c.

gleich und entgegengesetzt der äußeren Last $H = 1 t$ sein; ferner muß die Resultierende der Projektionen der Quer- und Normalkräfte an den Enden der Stäbe, welche sich an den Stab mit der Last $H = 1 t$ anschließen, auf die Richtung von $H = 1 t$ nach Größe und Richtung gleich dieser Kraft sein,

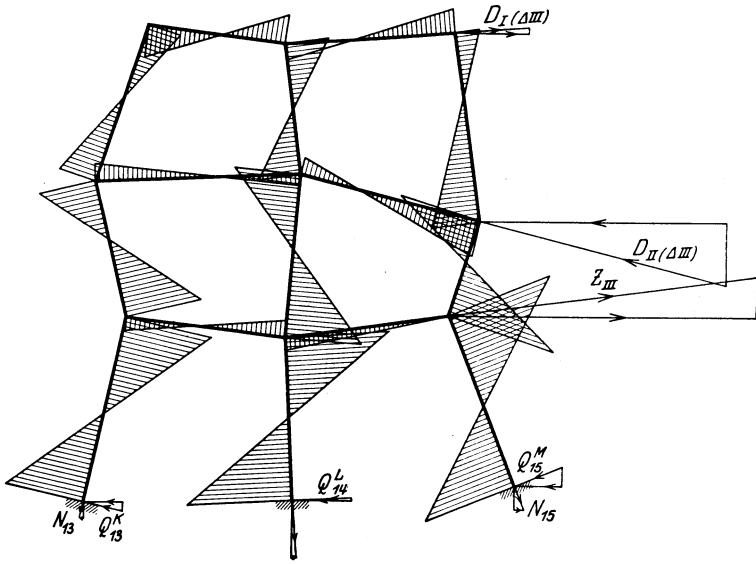


Fig. 270d.

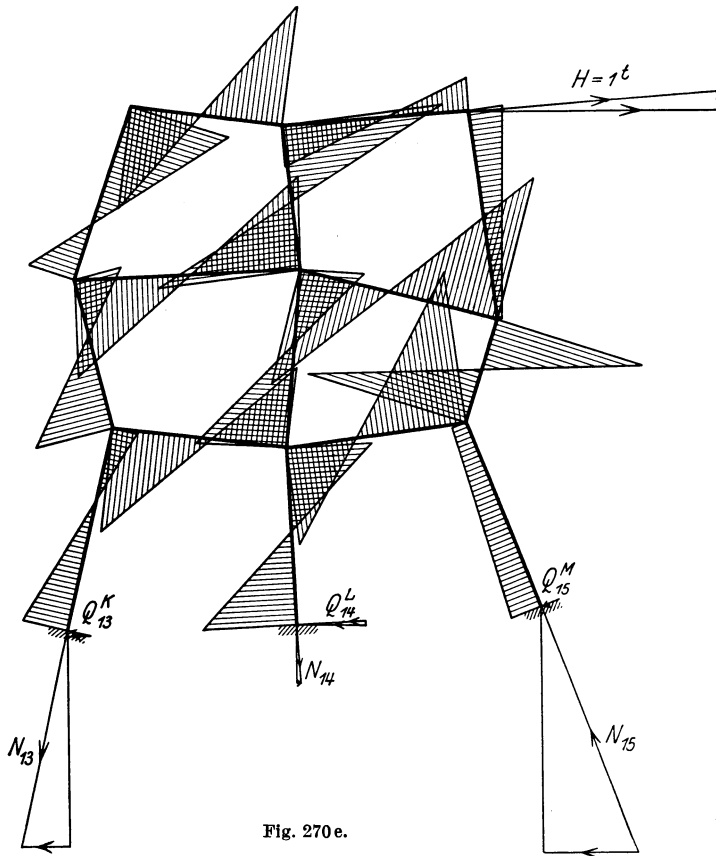


Fig. 270e.

da ja die Kraft $H = 1 t$ vom Stab, an dem sie angreift, auf die sich an diesen Stab anschließenden Stabenden gemeinsam übertragen wird. Besitzt das Trag-

werk mehrere Stockwerke, so muß außerdem die Resultierende der Projektionen der Quer- und Normalkräfte an den Enden der Stäbe, welche sich an diejenigen Stockwerkbalken anschließen, an welchen die Kraft $H = 1t$ nicht wirkt, auf

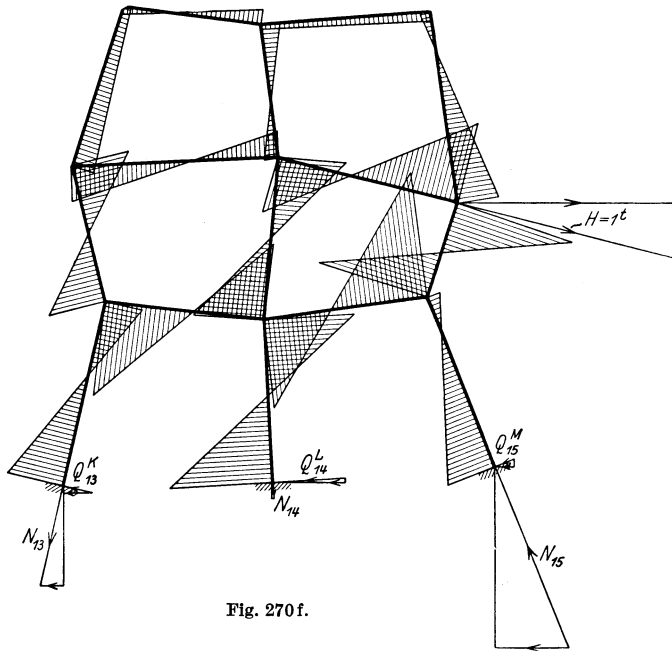


Fig. 270 f.

die Richtung dieses Stockwerkbalkens, gleich Null sein, weil sich dieser Balken noch verschieben würde, wenn dies nicht der Fall wäre.

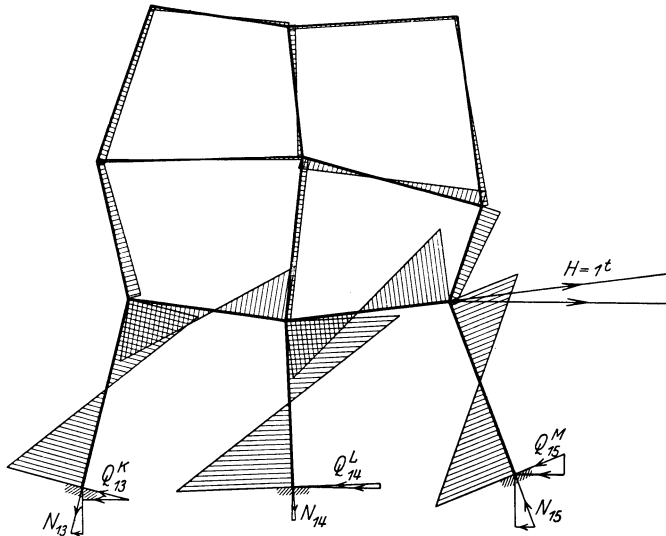


Fig. 270 g.

Eine weitere Probe am frei verschiebbaren Tragwerk, dessen Säulenköpfe durch gerade Stäbe miteinander verbunden sind, ergibt sich aus der selbstverständlichen Bedingung, daß die Verschiebungen dieser Säulenköpfe, welche

wir auf Grund der Momentenfläche für den betreffenden Belastungszustand nach Teil I, Kap. IV, 3 ermitteln können, gleich groß sein müssen.

In den Fig. 270 e, f und g wurde diese Probe als Beispiel für den allgemeinen mehrstöckigen Rahmen durchgeführt.

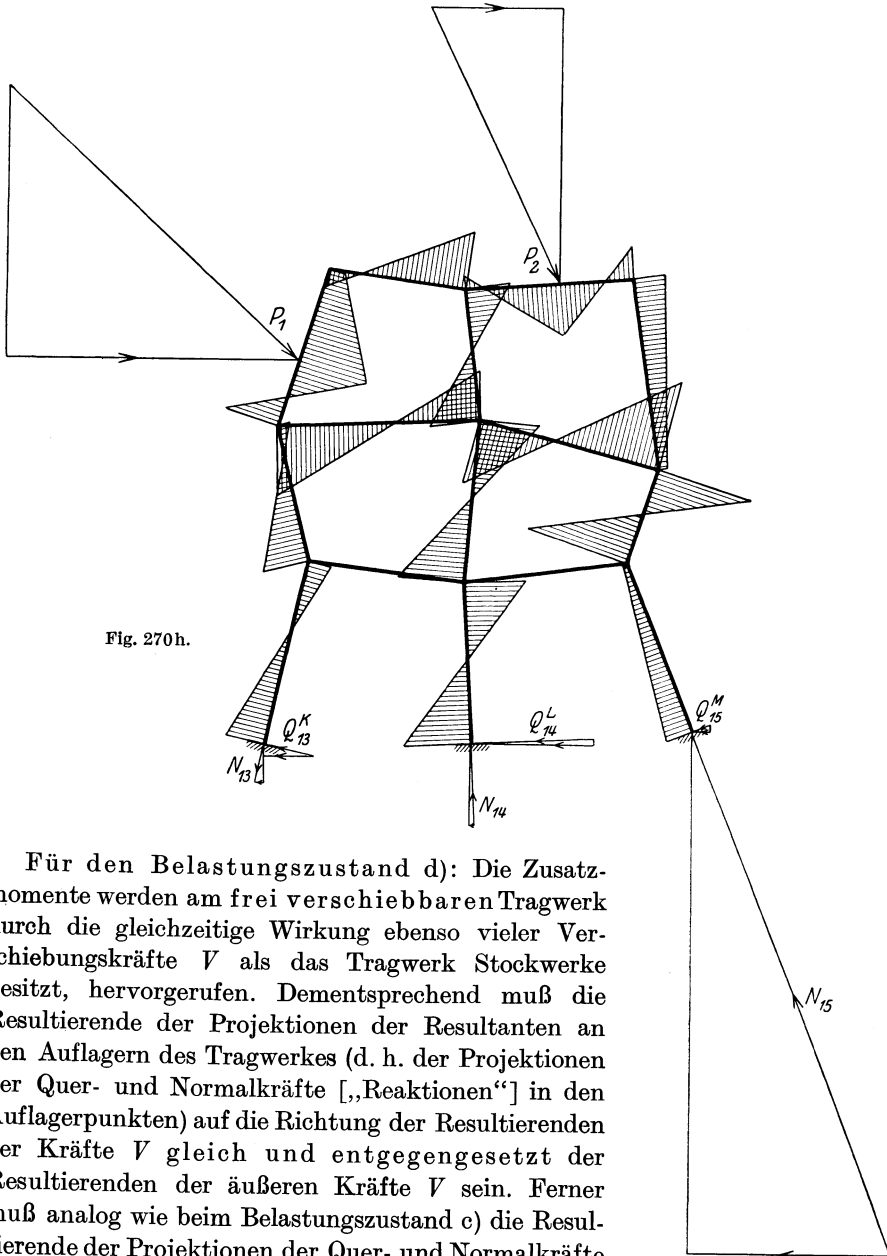


Fig. 270h.

Für den Belastungszustand d): Die Zusatzmomente werden am frei verschiebbaren Tragwerk durch die gleichzeitige Wirkung ebenso vieler Verschiebungskräfte V als das Tragwerk Stockwerke besitzt, hervorgerufen. Dementsprechend muß die Resultierende der Projektionen der Resultanten an den Auflagern des Tragwerkes (d. h. der Projektionen der Quer- und Normalkräfte [„Reaktionen“] in den Auflagerpunkten) auf die Richtung der Resultierenden der Kräfte V gleich und entgegengesetzt der Resultierenden der äußeren Kräfte V sein. Ferner muß analog wie beim Belastungszustand c) die Resultierende der Projektionen der Quer- und Normalkräfte an den Enden der Stäbe, welche sich an den Stab mit einer Verschiebungskraft V anschließen, auf die Richtung dieser Kraft, nach Größe und Richtung gleich dieser Kraft sein.

An Tragwerken, deren Säulenköpfe durch gerade Stäbe miteinander verbunden sind, ergibt sich wieder die Probe, daß die Verschiebungen der Säulenköpfe gleich groß sein müssen.

Für den Belastungszustand e): Die endgültigen Momente, welche am frei verschiebbaren Tragwerk durch die gegebene äußere Belastung hervorgerufen werden, prüfen wir in erster Linie dadurch, daß wir aus der Momentenfläche wie bei Belastungszustand a) die Festhaltungskräfte bestimmen, welche sich zu Null ergeben müssen, weil sich das Tragwerk noch verschieben würde, wenn dies nicht der Fall wäre. Ferner muß die Resultierende der Projektionen der Resultanten an den Auflagern des Tragwerkes (d. h. der Projektionen der Quer- und Normalkraftreaktionen in den Auflagerpunkten) auf die Horizontale gleich und entgegengesetzt der Resultierenden aus den Horizontalprojektionen der äußeren Belastung sein. Es empfiehlt sich, die endgültigen Momente noch durch Einzeichnen der Stützlinie, ausgehend von den Auflagerresultierenden, zu prüfen; die Stützlinie muß die Stäbe des Tragwerkes in den Momentennullpunkten schneiden und ihre Knickstellen müssen auf den Kräften liegen, welche auf das Tragwerk einwirken.

In Fig. 269c wurde diese Probe als Beispiel für den allgemeinen einstöckigen Rahmen, und in Fig. 270h für den allgemeinen mehrstöckigen Rahmen durchgeführt.

II. Bestimmung der wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte sowie der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung der Stabenden eines Tragwerkes infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes desselben.

Im vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, daß wir zur Bestimmung der Zusatzmomente des R. II diejenigen Stäbe bzw. Knotenpunkte um eine beliebige Strecke, beispielsweise $\Delta = 1 \text{ mm}$, verschieben müssen, welche in R. I durch gedachte Lager unverschiebbar festgehalten waren; daraus gehen die Momente M' hervor.

Zur Bestimmung der Momente M' nach dem folgenden Kapitel benötigen wir aber die bei der genannten gegebenen Verschiebung auftretenden „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ aller Stabenden, welche ihrerseits aus den wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte gewonnen werden.

Das Verfahren zur Bestimmung der wirklichen Knotenpunktverschiebungen ist dasselbe wie dasjenige der Williot'schen Verschiebungspläne¹ mit dem Unterschied, daß wir die Längenänderungen der Stäbe infolge der durch die Verschiebung in den Stäben entstehenden Normalkräfte (Axialkräfte) außer Betracht lassen, da der Einfluß derselben nach Kap. VII dieses Teiles getrennt berücksichtigt wird; das Verfahren gründet sich auf die

¹ Müller-Breslau: Die graphische Statik, Bd. 2 (1903) 1 S. 58.

Aufgabe :

Der Knotenpunkt C (Fig. 271) sei mit den Knotenpunkten A und B durch zwei Stäbe 1 und 2 verbunden, welche in A und B eingespannt oder gelenkig gelagert sein können; die Knotenpunkte A und B (oder nur einer davon) sollen sich in die neuen Lagen A' und B' verschieben, wobei wir die Annahme machen, daß die Verschiebungen AA' und BB' im Verhältnis zu den Längen der Stäbe 1 und 2 verschwindend klein seien, was bei elastischen Knotenpunktverschiebungen stets der Fall ist; in Fig. 271 wurden dieselben in verzerrtem Maßstab aufgetragen.

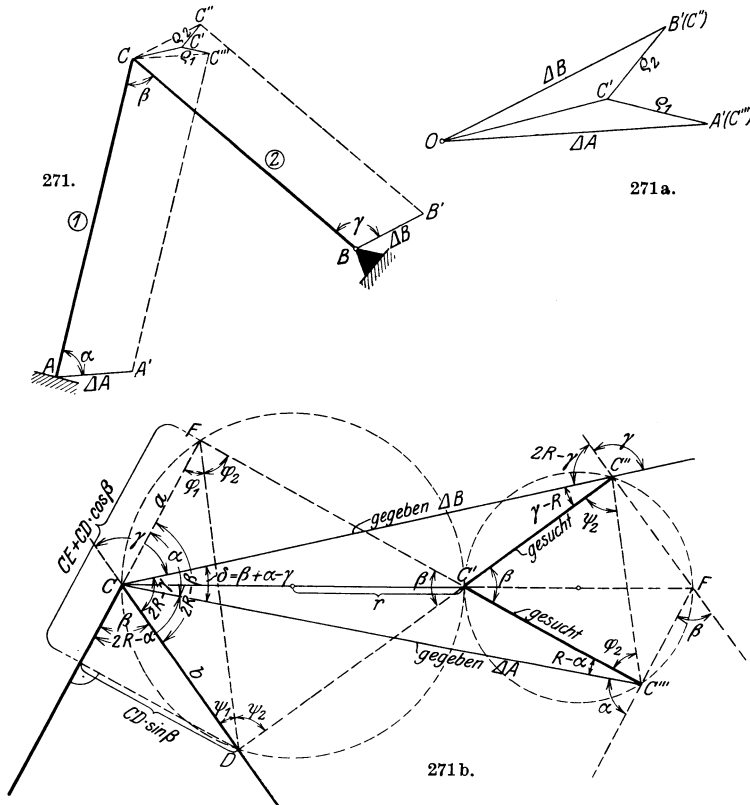


Fig. 271—271 b.

Gesucht ist die Verschiebung CC' des Knotenpunktes C (der mit A und B nicht auf derselben Geraden liegen darf) nach Größe und Richtung.

Um die neue Lage von C zu erhalten, denkt man sich bei C die Verbindung beider Stäbe gelöst, verschiebt den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage $A'C'''$ und den Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage $B'C''$. Nun schlägt man mit den Stablängen AC und BC als Radius Kreisbögen, deren Mittelpunkte A' und B' sind. Der Schnittpunkt C' dieser Bögen ist die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes C . In dem hier vorausgesetzten Falle verschwindend kleiner Verschiebungen dürfen die Kreisbögen $C''C'$ und $C'''C'$ durch die auf den Geraden $A'C'''$ und $B'C''$ errichteten Normalen ersetzt werden.

Aus den in Fig. 271 enthaltenen Konstruktionslinien bzw. den von ihnen gebildeten Dreiecken können wir nun die Größe der wirklichen Verschiebung des Knotenpunktes C , sowie der „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung“ der Endpunkte der Stäbe 1 und 2, welche wir im folgenden Kapitel benötigen,

analytisch

bestimmen, wodurch wir die gesuchten Verschiebungen mathematisch genau erhalten.

In Fig. 271a haben wir die Konstruktionslinien, welche zur Bestimmung der neuen Lage des Knotenpunktes C gedient haben, größer herausgezeichnet; dabei haben wir die Gerade $C''C'$ bis zu ihrem Schnitt mit der Stabrichtung 1, die Gerade $C''C'$ bis zu ihrem Schnitt mit Stab 2 und die Gerade $A'C''$ bis zu ihrem Schnitt mit der Geraden $B'C''$ verlängert. Da die Gerade $C''C'''$ gemäß Annahme normal zur Stabrichtung 1 und die Gerade $C''C'''$ normal zur Stabrichtung 2 ist, so besitzt das Viereck $CD C'E$ in D und E , und das Viereck $CC''C'''$ in C'' und C''' rechte Winkel, und die beiden Vierecke sind daher Kreisvierecke. Diese beiden Kreisvierecke sind einander ähnlich, da sie zwei gemeinsame Seiten haben, die sich im Berührungspunkt der beiden umgeschriebenen Kreise kreuzen. Aus diesem Grunde fallen auch die den rechten Winkeln der beiden Kreisvierecke gegenüberliegenden Diagonalen in ein und dieselbe Gerade $CC'F$, und die Verbindungsgeraden DE und $C''C'''$ sind zueinander parallel. Nun ist es klar, daß der Winkel $DEC' = C''C''C'' = \varphi_2$ und der Winkel $EDC' = C''C''C'' = \varphi_2$.

Gegeben sind nun die Winkel α , β und γ sowie die Verschiebungen $CC'' = \Delta A$ und $C''C'' = \Delta B$; gesucht ist die Größe der wirklichen Verschiebung CC' sowie diejenige der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen $C'C'' = \varrho_2$ und $C''C'' = \varrho_1$.

Da in einem Kreise ein rechtwinkliges Dreieck nur über einen Durchmesser errichtet werden kann, so ist

$$CC' = 2r. \quad (484)$$

Nach den Sätzen vom schiefwinkligen Dreieck ergibt sich nun aus dem Dreieck CDE :

$$2r = CC' = \frac{CD}{\sin \varphi_1} \quad (485)$$

für die wirkliche Verschiebung des Punktes C .

Ferner ergibt sich nach den Sätzen vom schiefwinkligen Dreieck aus dem Dreieck $C'C''C'''$:

$$\varrho_2 = C'C'' = \frac{C''C''' \cdot \sin \varphi_2}{\sin \beta}, \quad (485a)$$

$$\varrho_1 = C''C'' = \frac{C''C''' \cdot \sin \varphi_2}{\sin \beta} \quad (485b)$$

für die gegenseitigen „rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte der Stäbe 1 und 2.

Die in den Gln. (485), (485a) und (485b) vorkommenden Werte von φ_1 , φ_2 und ϱ_2 erhalten wir nach den Sätzen vom schiefwinkligen Dreieck aus:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{ctg} \varphi_2 = \frac{CD \cdot \sin(2R - \beta)}{CE - CD \cdot \cos(2R - \beta)} = \frac{CD \cdot \sin \beta}{CE - CD \cdot \cos \beta}, \quad (486)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{ctg} \varphi_2 = \frac{CE \cdot \sin(2R - \beta)}{CD - CE \cdot \cos(2R - \beta)} = \frac{CE \cdot \sin \beta}{CD - CE \cdot \cos \beta}. \quad (486a)$$

Die hierin vorkommenden Strecken CD und CE erhalten wir aus:

$$\left. \begin{aligned} CD &= \Delta B \cdot \cos \gamma, \\ CE &= \Delta A \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (486b)$$

Die in den Gln. (485a) und (485b) vorkommende Strecke $C''C'''$ erhalten wir nach einem Satz vom schiefwinkligen Dreieck aus dem Dreieck $C''C'''C''''$ zu:

$$C''C''' = \sqrt{C''C''''^2 + C'''C''''^2 - 2 \cdot C''C'''' \cdot C'''C'''' \cdot \cos(\beta + \alpha - \gamma)}. \quad (486c)$$

Graphisch

erhalten wir die Größe der gesuchten Verschiebungen entweder durch Abgreifen derselben in Fig. 271 oder, falls dieselbe nicht groß genug aufgetragen wurde, vergrößert aus folgendem besonderen Verschiebungsplan:

Von einem beliebigen Pol O aus (Fig. 271b) trägt man die gegebenen Verschiebungen $OA' = AA'$ und $OB' = BB'$ der Knotenpunkte A und B nach Größe, Richtung und Sinn auf. Durch die Endpunkte dieser Strecken zieht man darauf Normale zu der betreffenden Stabrichtung, deren Schnittpunkt C' dann die gesuchte wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes C bestimmt; dieselbe wird nach Größe, Richtung und Sinn durch den Polstrahl OC' dargestellt.

Die Lösung der gestellten Aufgabe gilt natürlich auch für den Fall, daß nur einer der beiden Knotenpunkte A und B , beispielsweise nur der Knotenpunkt A , verschoben wird (Fig. 272). In diesem Fall wird die neue Lage des Knotenpunktes C durch die in den Punkten C'' und C' zu den Stabrichtungen AC und BC errichteten Normalen bestimmt.

Aus den in Fig. 272 enthaltenen Konstruktionslinien, welche wir in Fig. 272a größer herausgezeichnet haben, können wir die Größe der wirklichen Verschiebung des Knotenpunktes C sowie der „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung“ der Endpunkte der Stäbe 1 und 2, welche wir im folgenden Kapitel benötigen,

analytisch

bestimmen, wodurch wir die gesuchten Verschiebungen mathematisch genau erhalten. In Fig. 272 haben wir die Gerade $C''C'$ bis zu ihrem Schnitt mit der Stabrichtung 1 verlängert, worauf wir die beiden rechtwinkligen Dreiecke $CC''C'''$ und $CC'C''''$ erhalten, aus denen wir die gesuchten Größen ermitteln können.

Gegeben sind nun die Winkel α und β sowie die Verschiebung $CC'' = \Delta A$; gesucht ist die Größe der wirklichen Verschiebung CC' , welche gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_2 ist, sowie die Größe der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung $C''C' = \varrho_1$.

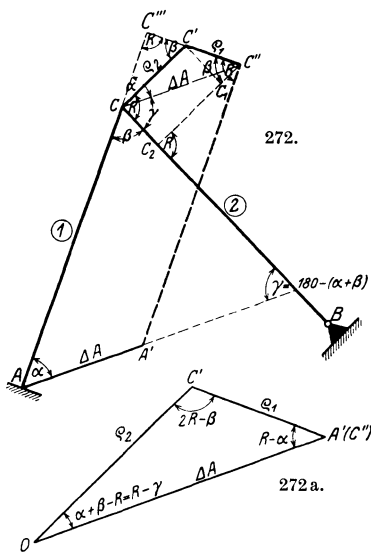


Fig. 272 u. 272a.

Im rechtwinkligen Dreieck $CC'C''$ ist:

$$\varrho_2 \cdot \sin \beta = CC''$$

nun ist aber im rechtwinkligen Dreieck $CC''C'''$:

$$CC''' = AA' \cdot \cos \alpha,$$

also ist

$$\varrho_2 = \frac{AA' \cdot \cos \alpha}{\sin \beta} \quad (487)$$

für die wirkliche Verschiebung des Punktes C und gleichzeitig ϱ_2 .

Um ϱ_1 zu erhalten, verlängern wir die gegebene Strecke AA' bis zum Schnitt mit Stab 2, mit welchem dieselbe den Winkel $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ einschließt; alsdann findet sich dieser Winkel γ auch am Punkte C zwischen der Richtung von AA' und dem Stab 2. Nun fällen wir noch aus dem Punkte C'' das Lot $C''C_2$ auf den Stab 2 und aus dem Punkte C' das Lot $C'C_1$ auf die vorgenannte Strecke $C''C_2$. Dann ist $C''C_2 \parallel C'C$ und $C'C_1 \parallel CC_2$ und daher

$$C'C_1 = CC_2. \quad (488)$$

Im rechtwinkligen Dreieck $C'C''C_1$ ist nun:

$$C'C_1 = \varrho_1 \cdot \sin \beta$$

und im rechtwinkligen Dreieck $CC''C_2$:

$$CC_2 = AA' \cdot \cos \gamma,$$

so daß nach Gl. (488):

$$\varrho_1 = \frac{AA' \cdot \cos \gamma}{\sin \beta}. \quad (489)$$

Graphisch

erhalten wir die Größe der gesuchten Verschiebungen entweder durch Abgreifen derselben in Fig. 272 oder, falls dieselbe nicht groß genug aufgetragen wurde, vergrößert aus einem besonderen Verschiebungsplan (Fig. 272a).

1. Der einstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.

An dem allgemeinen Tragwerk der Fig. 273 müssen wir laut dem vorhergehenden Kapitel zur Bestimmung der Zusatzmomente (R. II) den während R. I festgehaltenen Knotenpunkt B und damit den „Balken“ des einstöckigen Tragwerkes, welcher durch die Stäbe 1, 3 und 6 gebildet wird, um eine beliebige Strecke, beispielsweise $\Delta = 1$ mm, verschieben, wodurch die Momente M' entstehen. Wir wählen die Strecke im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend klein, damit wir das zur Lösung der vorhergehenden Aufgabe verwendete Verfahren (Ersetzen der Kreisbögen durch die Normalen) benutzen können. Wir verschieben also den Knotenpunkt B (Fig. 273a) um das gegebene Maß und tragen dieses in demselben rechtwinklig zu Stab 7 auf, letzteres deshalb, weil sich der Knotenpunkt B bei seiner Verschiebung auf einem Kreisbogen um den unverschiebbar vorausgesetzten Auflagerpunkt M bzw. wegen der im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend klein an-

genommenen Verschiebung auf einer Normalen zum Stab 7 bewegt. Durch die Verschiebung des Knotenpunktes B nach B' gelangen auch die übrigen Knotenpunkte A , C und D sowie die beiden verschiebbaren Auflagerpunkte F und G

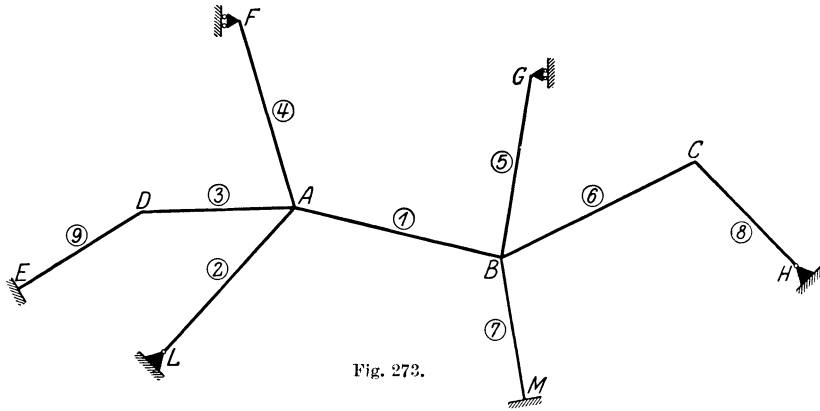


Fig. 273.

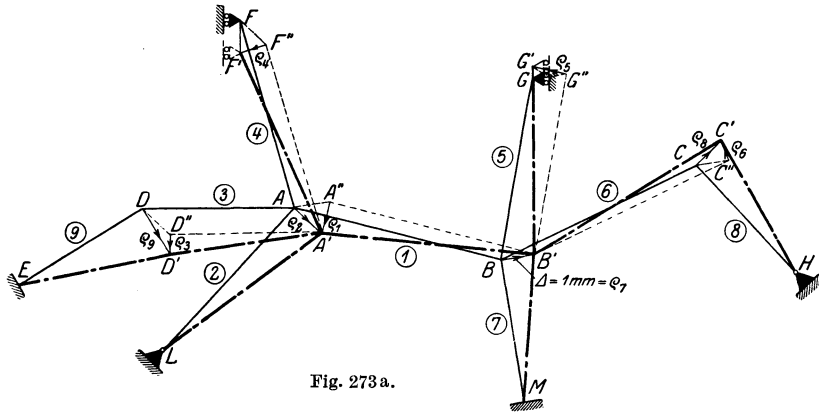


Fig. 273 a.

in neue Lagen, und wir erkennen aus Fig. 273a, daß wir die vorstehende Aufgabe wiederholt zu lösen haben, und zwar für den Fall, daß die Verschiebung des Fußpunktes des einen Stabes Null ist. Aus den gegebenen Verschiebungen der Punkte L und B (diejenige von L ist Null) erhalten wir die Verschiebung des Knotenpunktes A ; aus der nunmehr gegebenen Verschiebung des Punktes A und derjenigen des Punktes E (gleich Null) ergibt sich die Verschiebung des Punktes D ; usw.

Da die Auflagerpunkte E , L und H unverschiebbar vorausgesetzt sind, und die Verschiebung des Knotenpunktes B im Verhältnis zur Länge aller Stäbe verschwindend klein ist, so bewegen sich die Knotenpunkte A , C und D auf den in ihnen zu den Stäben 2 bzw. 8 bzw. 9 errichteten Normalen (Fig. 273a).

Die Auflagerpunkte F und G , welche infolge ihrer Rollenlager in Richtung der Auflagerfläche der letzteren, welche im vorliegenden Fall (Fig. 273a) senkrecht angenommen ist, verschiebbar sind, bewegen sich gleichzeitig auf den durch

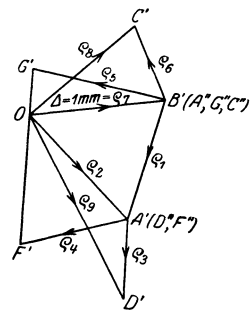


Fig. 273 b.

die Punkte F und G gezogenen Senkrechten. Wir wissen ferner, daß der verschobene Verbindungspunkt zweier Stäbe auch auf der Normalen zum anderen der beiden betrachteten Stäbe liegen muß, und zwar in einem Abstand gleich der Länge dieses Stabes.

Wir verschieben daher den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage $A''B'$, wobei der Endpunkt B auf der Geraden BB' gleitet, und ziehen durch den Endpunkt A'' eine Normale zum Stab 1; der Schnittpunkt A' derselben mit der durch A gezogenen Normalen zum Stab 2 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes A . Darauf verschieben wir den Stab 3 parallel zu sich selbst in die Lage $D''A'$ und ziehen durch den Endpunkt D'' eine Normale zum Stab 3; der Schnittpunkt D' derselben mit der durch D gezogenen Normalen zum Stab 9 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes D . Endlich verschieben wir den Stab 6 parallel zu sich selbst in die Lage $C''B'$ und ziehen durch den Endpunkt C'' eine Normale zum Stab 6; der Schnittpunkt C' derselben mit der durch C gezogenen Normalen zum Stab 8 ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes C . Um noch die durch die Verschiebung des Knotenpunktes B verursachte neue Lage des beweglichen Auflagerpunktes F zu erhalten, verschieben wir den Stab 4 parallel zu sich selbst in die Lage $F''A'$ und ziehen durch den Endpunkt F'' eine Normale zum Stab 4; der Schnittpunkt F' derselben mit der Senkrechten durch F ist dann die gesuchte verschobene Lage des Auflagerpunktes F . Analog erhält man auch die verschobene Lage G' des beweglichen Auflagerpunktes G .

Aus der Fig. 273a gehen nun sowohl die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, hervorgerufen durch die gegebene Verschiebung des Knotenpunktes B , als auch die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte aller Stäbe hervor, welche wir zur Berechnung der M' -Momente nach dem folgenden Kapitel benötigen: Es ist die Strecke:

$A''A'$	$= \varrho_1$	die gegenseitige rechtwkl. Verschiebung der Endpunkte des Stabes 1							
AA'	$= \varrho_2$	„	„	„	„	„	„	„	2
$D''D'$	$= \varrho_3$	„	„	„	„	„	„	„	3
$F''F'$	$= \varrho_4$	„	„	„	„	„	„	„	4
$G''G'$	$= \varrho_5$	„	„	„	„	„	„	„	5
$C''C'$	$= \varrho_6$	„	„	„	„	„	„	„	6
BB'	$= \varrho_7$	„	„	„	„	„	„	„	7
CC'	$= \varrho_8$	„	„	„	„	„	„	„	8
DD'	$= \varrho_9$	„	„	„	„	„	„	„	9

Die in der Fig. 273a an den Strecken ϱ eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich auf eine Regel betreffend des Drehsinnes bzw. Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden, deren Berechnung im folgenden Kapitel gezeigt wird.

Die Größe der wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte sowie diejenige der Strecken ϱ kann leicht mathematisch genau, wie eingangs gezeigt, aus den in Fig. 273a enthaltenen Dreiecken (an jedem Knotenpunkt) berechnet werden.

Aus der Fig. 273a kann man ferner, wenn man sie groß genug zeichnet, die Strecken ϱ abgreifen, andernfalls muß man, wie durch Fig. 271 und 271b dar-

gestellt, die in Fig. 273a enthaltenen Dreiecke in größerem Maßstab herauszeichnen, wobei man sie der Linienersparnis wegen aneinanderreicht. Aus Fig. 273b ist dies zu ersehen:

Von einem Pol O aus haben wir zunächst die gegebene Verschiebung $\Delta = 1\text{ mm}$ in einem bestimmten Maßstab abgetragen; darauf ziehen wir durch O eine Normale zum Stab 2, auf welcher der verschobene Knotenpunkt A in erster Linie liegen muß, und durch den Punkt B' eine Normale zum anderen Stab, welcher mit dem ersteren im Knotenpunkt A zusammengeschlossen ist, nämlich zum Stab 1; der Schnittpunkt A' der beiden Normalen begrenzt auf der Normalen durch O die wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes A und auf der Normalen durch B' die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_1 der Endpunkte des Stabes 1, was aus der Ähnlichkeit des Dreiecks $OA'B'$ in Fig. 273b und des Dreiecks $AA'B'$ in Fig. 273a hervorgeht. Ziehen wir ferner durch O eine Normale zum Stab 9 und durch A' eine Normale zum Stab 3, so begrenzt der Schnittpunkt D' derselben auf der ersteren die wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes D und auf der letzteren die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 3. Machen wir dies für alle Knotenpunkte, so stellen in Fig. 273b die von O ausgehenden Strecken die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, welche für diejenigen Stäbe, deren Auflagerpunkte unverschiebbar, gleichzeitig gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen sind, und die übrigen Strecken, welche die Endpunkte der wirklichen Verschiebungen miteinander verbinden, die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe des Tragwerkes dar.

In Fig. 273a haben wir der besseren Übersicht halber strichpunktiert die Stäbe in ihrer neuen Lage eingetragen, wobei jedoch deren Formänderungen herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt haben.

Das Verfahren wird im folgenden noch an einigen einfachen Beispielen gezeigt.

Beispiele.

Beispiel I: Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigtem Balken (Fig. 274).

Der Knotenpunkt C werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1\text{ mm}$ verschoben. Dann verschieben sich, weil alle Säulen (Stäbe, welche zum Drehpunkt führen) parallel zueinander sind, die Knotenpunkte A und B ebenfalls um 1 mm in der selben Richtung wie Knotenpunkt A (rechtwinklig zu der Säulenrichtung), so daß sich die Stäbe 1 und 2 nur parallel zu sich selbst verschieben und keine gegen-

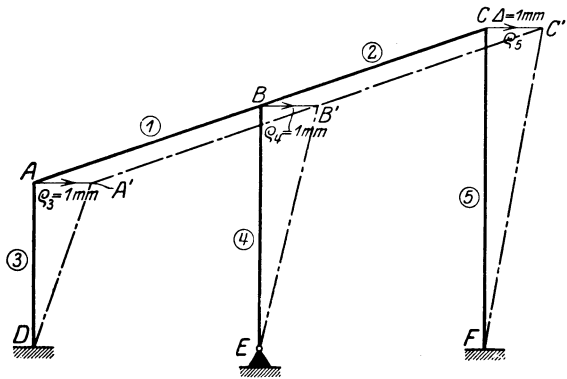


Fig. 274.

seitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 3, 4 und 5 sind alle gleich groß, näm-

lich $q_3 = q_4 = q_5 = 1 \text{ mm}$, auch wenn die Säulen ungleich lang sind. Dasselbe gilt für den Fall, daß an Stelle des Knotenpunktes C der Knotenpunkt A oder B um die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$ verschoben wird.

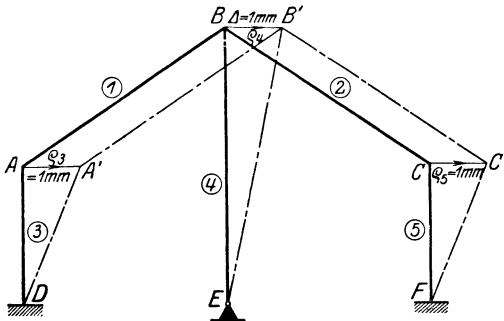


Fig. 275.

Ist der Balken, wie in Fig. 275, sattelförmig, so gilt genau dasselbe wie für den Rahmen der Fig. 274; die Stäbe 1 und 2 verschieben sich z. B. bei gegebener Verschiebung des Knotenpunktes B ebenfalls nur parallel zu sich selbst und erleiden deshalb keine gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen ihrer Endpunkte.

Beispiel II: Der einfache Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben und Aufsatz (Fig. 276).

Der Knotenpunkt D werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$ verschoben. Gesucht ist die wirkliche Verschiebung der Knotenpunkte B und C sowie die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen aller Stäbe.

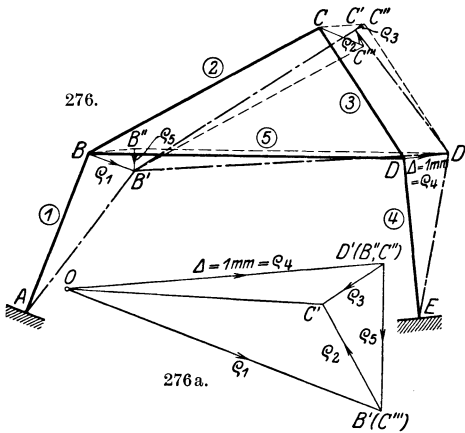


Fig. 276 u. 276a.

Die Lösung erfolgt wieder genau nach dem am allgemeinen Tragwerk der Fig. 273 erläuterten Verfahren. Die gegebene Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$ tragen wir vom Stab D aus rechtwinklig zum Stab 4, um dessen Fußpunkt das Tragwerk sich dreht, auf. Darauf verschieben wir den Stab 5 parallel zu sich selbst in die Lage $D'B''$ und ziehen durch den Endpunkt B'' eine Normale zum Stab 5; der Schnittpunkt B' derselben mit der durch B gezogenen Normalen zum Stab 1 ist dann die gesuchte verschobene Lage

des Knotenpunktes B und die Strecke BB' daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung q_1 der Endpunkte des Stabes 1; die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung q_5 des Stabes 5 ist gleich der Strecke $B''B'$. Um die neue Lage des Knotenpunktes C zu erhalten, müssen wir beachten, daß beide Fußpunkte (B und D) der beiden in C verbundenen Stäbe 2 und 3 Verschiebungen erlitten haben, welche beide bekannt sind, und dieser Fall daher der Aufgabe in ihrer allgemeinen Form entspricht.

Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung q_4 des Stabes 4 ist gleich der gegebenen Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$.

2. Der mehrstöckige Rahmen mit beliebig gerichteten Stäben.

Am allgemeinen mehrstöckigen Tragwerk (Fig. 277) müssen wir zur Bestimmung der Zusatzmomente (R. II) laut dem vorhergehenden Kapitel die

während R. I festgehaltenen Knotenpunkte C , F und J und damit die einzelnen „Stockwerkbalken“, welche im obersten Stockwerk durch die Stäbe 1 und 2, im mittleren durch die Stäbe 3 und 4 und im untersten durch die Stäbe 5 und 6 gebildet werden, nacheinander um eine beliebige Strecke, beispielsweise $\Delta = 1 \text{ mm}$, verschieben, wobei wir die „Stockwerkbalken“ unterhalb des verschobenen durch ein festes Lager und diejenigen oberhalb des verschobenen durch ein Rollenlager, beweglich normal zur Richtung der in R. I bestimmten Festhal-

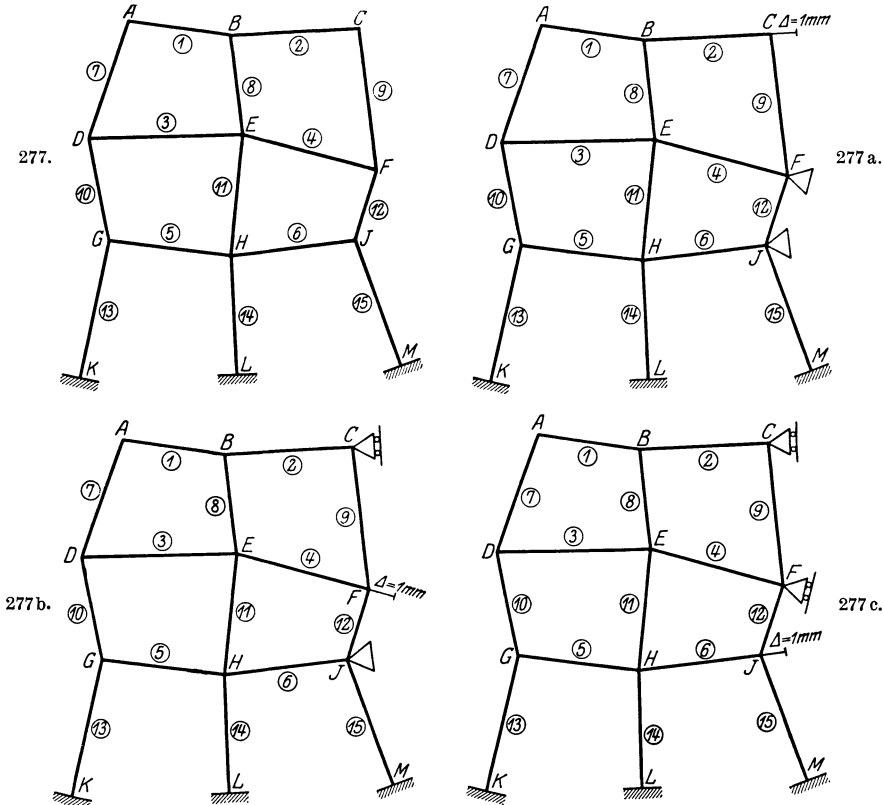


Fig. 277—277 c.

tungskraft des betreffenden Stockwerkes, unverschiebbar festhalten; hierdurch entstehen die der Verschiebung der einzelnen Stockwerke entsprechenden Momente M' .

In den Fig. 277 a, b und c wurden die 3 Verschiebungszustände für den allgemeinen Stockwerkrahmen der Fig. 277 dargestellt, welche man auch als Belastungszustände betrachten kann, wenn man von der die gegebene Verschiebung hervorrufenden Erzeugungskraft Z ausgeht.

Beim Stockwerkrahmen mit beliebig gerichteten Stäben können die Stockwerke oberhalb des verschobenen nicht vollständig festgehalten werden, da die gegebene Verschiebung sonst gegebenenfalls gar nicht möglich wäre (in einem Dreieck mit festen Fußpunkten kann der Scheitelpunkt nicht verschoben werden); aus diesem Grunde müssen an diesem Stockwerkbalken auf beliebig gerichteter Bahn verschiebbare, gegen Abheben von derselben gesicherte Rollen-

lager angebracht werden, welche die betreffenden Stockwerke seitlich unverschiebbar festhalten. Diese Rollenlager müssen wir an denjenigen Knotenpunkten anbringen, welche während R. I festgehalten werden, und die Bahn der Rollenlager wählen wir zweckmäßig normal zu der Festhaltungskraft aus R. I in diesen Knotenpunkten.

Es sei noch erwähnt, daß man bei jedem Verschiebungszustand ein und denselben Tragwerkes eine andere Strecke als gegebene Verschiebung wählen kann,

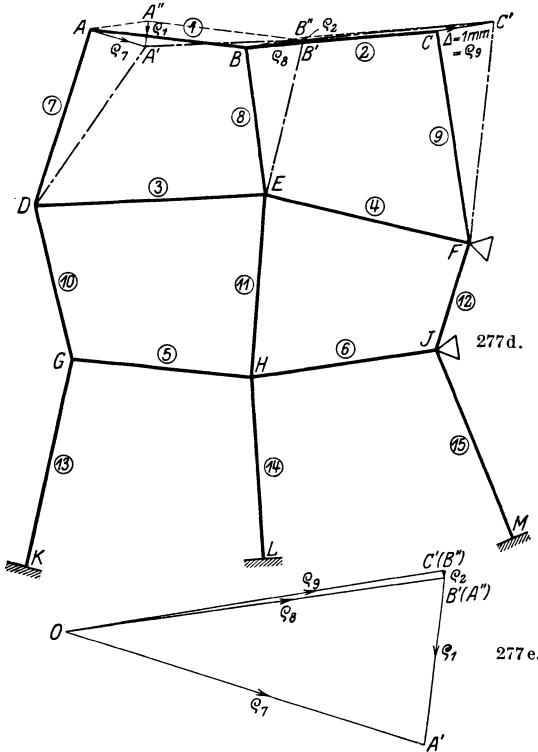


Fig. 277 d u. e.

Die gegebene Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$ tragen wir in Fig. 277d vom Punkt C aus rechtwinklig zum Stab 9, um dessen Fußpunkt dieser Stab sich dreht (da Knotenpunkt F durch das gedachte Lager in demselben während dieses Verschiebungszustandes unverschiebbar festgehalten ist), auf. Darauf verschieben wir Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage C'B' und ziehen durch den Endpunkt B' eine Normale zum Stab 2; der Schnittpunkt B' derselben mit der durch B gezogenen Normalen zum Stab 8 ist dann die gesuchte neue Lage des Punktes B und die Strecke BB' daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung q_8 der Endpunkte des Stabes 8. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung q_2 der Endpunkte des Stabes 2 ist gleich der Strecke B'B'. Um die neue Lage des Knotenpunktes A zu erhalten, verschieben wir den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage B'A' und ziehen durch den Endpunkt A' eine Normale zum Stab 1; der Schnittpunkt A' derselben mit der durch A gezogenen Normalen zum Stab 7

ohne daß sich die Werte der aus den zugehörigen M'-Momentengewonnenen M*-Momente ändern. Wie beim einstöckigen Rahmen (Abschnitt I) nehmen wir die gegebene Verschiebung im Verhältnis zur Länge aller Stäbe des Tragwers verschwindend klein an, so daß wir an Stelle der Kreisbögen die Normalen zu den Stabrichtungen verwenden dürfen.

Fall I: Um die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte und daraus die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe in Folge der

Verschiebung des Knotenpunktes C um die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$

unter Festhaltung der unteren Stockwerke, zu erhalten, verfahren wir genau wie beim einstöckigen Rahmen der Fig. 273, und zwar wie folgt:

ist dann die gesuchte verschobene Lage des Knotenpunktes A und die Strecke AA' daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_7 der Endpunkte des Stabes 7. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_1 der Endpunkte des Stabes 1 ist gleich der Strecke $A''A'$ und diejenige des Stabes 9 ist gleich der gegebenen Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$. Die Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte sind gleich Null, da die beiden unteren Stockwerke festgehalten sind. In Fig. 277d können aus dem Dreieck $BB'B''$ die Strecken ϱ_8 und ϱ_2 und aus dem Dreieck $AA'A''$ die Strecken ϱ_7 und ϱ_1 analytisch ermittelt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 277e, in welchem die beiden genannten Dreiecke in größerem Maßstab aneinandergereiht sind.

Fall II: Um die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte und daraus die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe infolge der

Verschiebung des Knotenpunktes F um die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$

unter Festhaltung des unteren Stockwerkes durch ein festes Lager in J und unter Festhaltung des oberen Stockwerkes durch ein normal zum Stab 2 verschiebbares Rollenlager in C zu erhalten, verfahren wir genau nach der Lösung der eingangs gestellten Aufgabe, und zwar wie folgt:

Die gegebene Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$ tragen wir in Fig. 277f vom Punkt F aus rechtwinklig zum Stab 12 auf. Darauf verschieben wir Stab 4 parallel zu sich selbst in die Lage $E''F'$ und ziehen durch den Endpunkt E'' eine Normale zum Stab 4; der Schnittpunkt derselben mit der durch E gezogenen Normalen zum Stab 11 ist dann die gesuchte neue Lage des Punktes E und die Strecke EE' daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_{11} der Endpunkte des Stabes 11. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_4 der Endpunkte des Stabes 4 ist gleich der Strecke $E''E'$. Um die neue Lage des Knotenpunktes D zu erhalten,

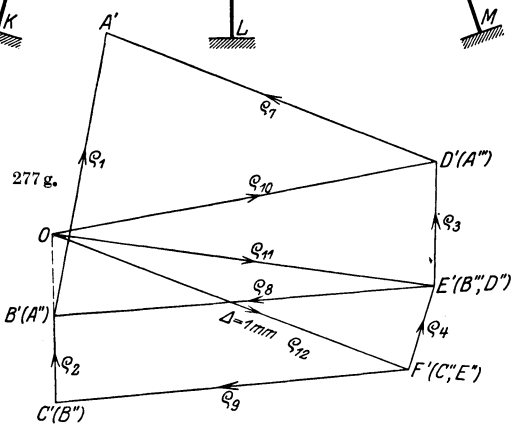
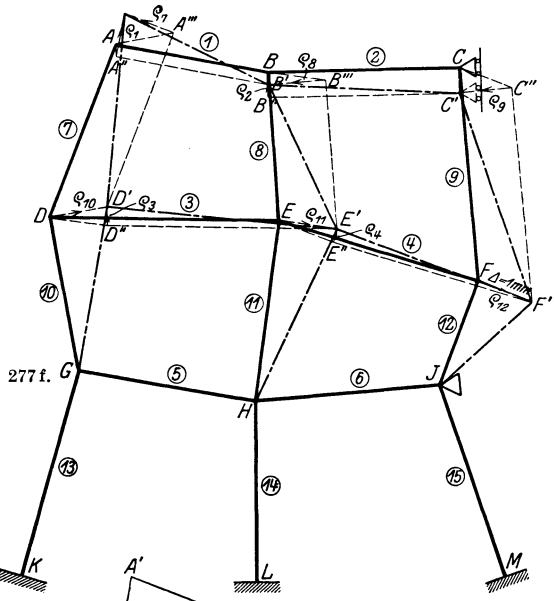


Fig. 277 f u. g.

verschieben wir den Stab 3 parallel zu sich selbst in die Lage $E'D''$ und ziehen durch den Endpunkt D'' eine Normale zum Stab 3; der Schnittpunkt D' derselben mit der durch D gezogenen Normalen zum Stab 10 ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes D und die Strecke DD' daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes und gleichzeitig die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_{10} der Endpunkte des Stabes 10. Die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 3 ist gleich der Strecke $D''D'$ und diejenige des Stabes 12 ist gleich der gegebenen Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$.

Nun können wir auf Grund der bekannten Verschiebungen der Knotenpunkte D , E und F diejenigen der Knotenpunkte A , B und C bestimmen; da wir in C ein Rollenlager angebracht haben, welches nur eine Verschiebung von C normal zur Stabrichtung 2 zuläßt, so können wir von F' ausgehend zunächst die neue Lage des Punktes C konstruieren und dann nach links fortschreiten. Diese Bestimmung gestaltet sich wie folgt:

Wir verschieben den Stab 9 parallel zu sich selbst in die Lage $F'C''$. Darauf ziehen wir durch den Endpunkt C'' eine Normale zum Stab 9 und durch den Knotenpunkt C eine Parallele zur Bahnrichtung des Rollenlagers in C (d. h. eine Normale zum Stab 2); der Schnittpunkt C' dieser beiden Normalen ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes C und die Strecke CC' daher die wirkliche Verschiebung des Knotenpunktes C . Ferner ist die Strecke $C''C' = \varrho_9$ die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 9. Von der neuen Lage C' des Knotenpunktes C aus können wir nun auch die Verschiebungen der beiden Knotenpunkte B und A , die auf demselben „Stockwerkbalken“ liegen, in gleicher Weise wie folgt bestimmen:

Wir verschieben den Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage $C'B''$ und den Stab 8 parallel zu sich selbst in die Lage $E'B'''$. Darauf ziehen wir durch den Endpunkt B'' eine Normale zum Stab 2 und durch den Endpunkt B''' eine Normale zum Stab 8; der Schnittpunkt B' dieser beiden Normalen ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes B und die Strecke BB' daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes. Ferner ist die Strecke $B''B' = \varrho_2$ die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 2 und die Strecke $B'''B'$ die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_8 der Endpunkte des Stabes 8. Nun verschieben wir noch den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage $B'A''$ und den Stab 7 parallel zu sich selbst in die Lage $D'A'''$. Darauf ziehen wir durch den Endpunkt A'' eine Normale zum Stab 1 und durch den Endpunkt A''' eine Normale zum Stab 7; der Schnittpunkt A' dieser beiden Normalen ist dann die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes A und die Strecke AA' daher die wirkliche Verschiebung dieses Knotenpunktes. Ferner ist die Strecke $A''A' = \varrho_1$ die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Endpunkte des Stabes 1 und die Strecke $A'''A'$ die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_7 der Endpunkte des Stabes 7.

Die Verschiebungen der Knotenpunkte des untersten „Stockwerkbalkens“ sind gleich Null, da derselbe gemäß Voraussetzung unverschiebbar festgehalten ist.

Aus den in Fig. 277f an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke ϱ analytisch bestimmt werden; graphisch

erhält man diese Strecke aus dem Verschiebungsplan der Fig. 277g, welcher nichts anderes ist als eine Aneinanderreihung der genannten Dreiecke aus Fig. 277f in größerem Maßstabe.

Fall III: Um die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte und daraus die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe infolge der

Verschiebung des Knotenpunktes J um die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$

unter Festhaltung der beiden oberen Stockwerke durch Rollenlager, zu erhalten, verfahren wir wieder genau nach der Lösung der eingangs gestellten Aufgabe, und analog wie beim vorhergehenden Fall:

Die gegebene Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$ tragen wir in Fig. 277h vom Punkt J aus rechtwinklig auf und verfahren zur Bestimmung der Verschiebungen der Knotenpunkte H und G in der gleichen Weise wie in Fig. 277d bei Bestimmung der Verschiebungen der Knotenpunkte B und A infolge gegebener Verschiebung des Punktes C . Dann ist die Strecke $G'G'' = \varrho_{13}$,
 „ „ „ $HH' = \varrho_{14}$,
 „ „ „ $H''H' = \varrho_6$,
 „ „ „ $JJ' = \varrho_{15} = 1 \text{ mm}$,
 „ „ „ $G''G' = \varrho_5$.

Nun können wir in Fig. 277h auf Grund der bekannten Verschiebungen der Knotenpunkte G , H und J diejenigen der Knotenpunkte F , E und D bestimmen; da der Knotenpunkt F in Richtung des Stabes 4 unverschiebbar ist und sich nur senkrecht zu demselben verschieben kann, so können wir von J' aus F' konstruieren, und dann nach links weiterschreiten. Die Verschiebungen der Knotenpunkte D , E und F und die davon herrührenden gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe des betreffenden Stockwerks erhalten wir in der gleichen Weise wie diejenigen der Knoten-

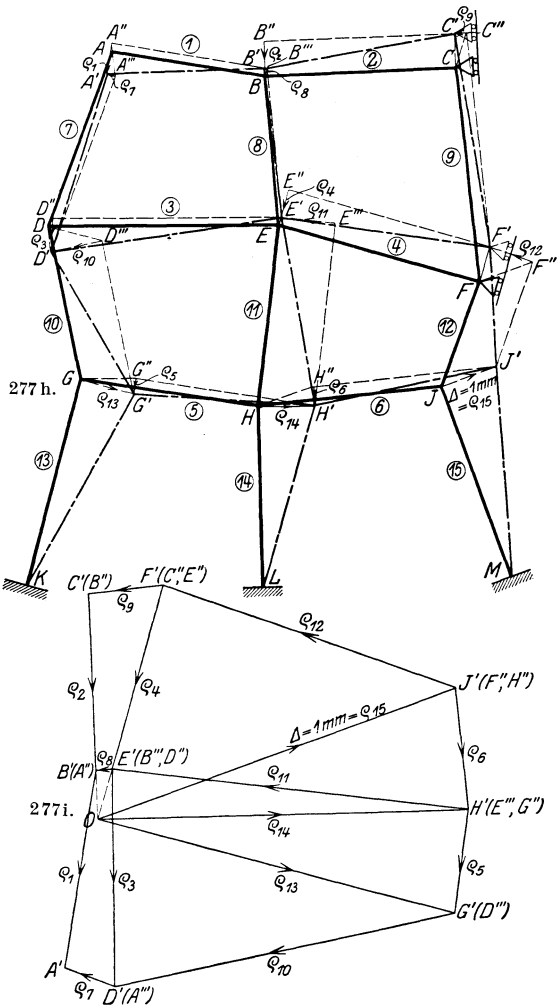


Fig. 277h u. 277i.

punkte C , B und A in Fig. 277f infolge gegebener Verschiebung des Punktes F . Dann ist:

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } D''D' &= \varrho_{10}, \\ \text{,, ,, } E'''E' &= \varrho_{11}, \\ \text{,, ,, } F''F' &= \varrho_{12}, \\ \text{,, ,, } D''D' &= \varrho_3, \\ \text{,, ,, } E''E' &= \varrho_4. \end{aligned}$$

Die Verschiebungen der Knotenpunkte C , B und A des obersten Stockwerkes können wir nun in der gleichen Weise wie diejenigen der Knotenpunkte F , E und D in Fig. 277h auf Grund der nun bekannten Verschiebungen der letzteren bestimmen, da der Knotenpunkt C in Richtung des Stabes 2 auch unverschiebbar ist und sich nur senkrecht zu demselben verschieben kann, so daß wir von F' aus C' konstruieren und dann nach links fortschreiten können. Als gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe des obersten Stockwerkes erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{die Strecke } A'''A' &= \varrho_7, \\ \text{,, ,, } B'''B' &= \varrho_8, \\ \text{,, ,, } C''C' &= \varrho_9, \\ \text{,, ,, } A''A' &= \varrho_{11}, \\ \text{,, ,, } B''B' &= \varrho_{12}. \end{aligned}$$

Aus den in Fig. 277h an jedem verschobenen Knotenpunkt ersichtlichen Dreiecken kann die betreffende Strecke ϱ analytisch bestimmt werden; graphisch erhält man diese Strecken aus dem Verschiebungsplan der Fig. 277i, welcher nichts anderes ist als eine Aneinanderreihung der genannten Dreiecke aus Fig. 277h in größerem Maßstab.

Die in den Fig. 277d bis i an den Strecken ϱ eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich auf eine Regel betreffend des Drehsinns bzw. Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden, deren Berechnung im folgenden Kapitel gezeigt wird.

In den Fig. 277d, f und h haben wir der besseren Übersicht halber noch strichpunktiert die Stäbe in ihrer verschobenen Lage eingetragen, wobei wir jedoch deren Formänderungen herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt haben.

Das Verfahren wird im folgenden noch an einigen einfacheren Beispielen gezeigt.

Beispiel I: Nach der Seite zweistöckiger Rahmen mit senkrechten Säulen und geneigten Balken (Fig. 278).

Fall I: Der Knotenpunkt B werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1$ mm verschoben (Fig. 278a), während der danebenliegende Balken 2 des (nach der Seite) zweiten Stockwerkes unverschiebbar festgehalten sei. Dann verschiebt sich, weil die beiden Stäbe 3 und 6, um deren Fußpunkte sich die Punkte A und B

drehen, parallel zueinander sind, der Knotenpunkt A ebenfalls um 1 mm in derselben Richtung wie Knotenpunkt B (rechtwinklig zur Säulenrichtung), so daß sich der Stab 1 nur parallel zu sich selbst verschiebt und keine gegenseitigen Verschiebungen seiner Endpunkte erleidet. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Stäbe 3 und 6 sind gleich groß, nämlich $\varrho_3 = \varrho_6 = 1$ mm.

Fall II: Der Knotenpunkt D werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1$ mm verschoben (Fig. 278 b), während der danebenliegende Stockwerkbalken 1 parallel mitgehe, d. h. so, daß der Knotenpunkt A senkrecht über dem Knotenpunkt D bleibt. Dann verschieben sich die Knotenpunkte C , A und B , weil alle Säulen parallel zueinander sind, ebenfalls um 1 mm in derselben Richtung wie Knotenpunkt D (rechtwinklig zur Säulenrichtung), so daß sich die Balken 2 und 1 nur parallel zu sich selbst verschieben und keine gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte erleiden; auch der Stab 3 erleidet keine gegen-

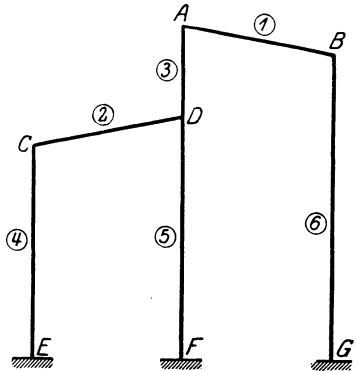


Fig. 278.

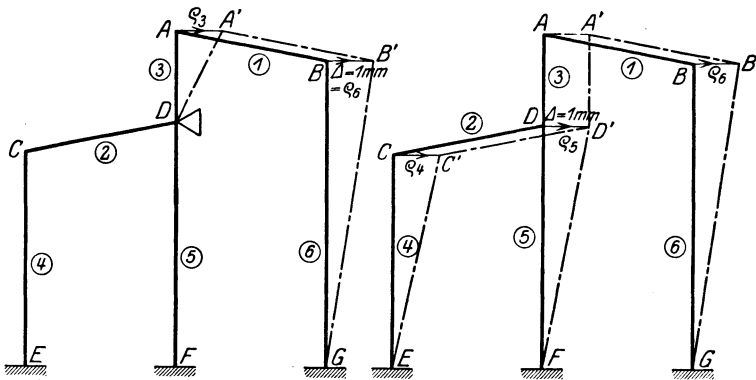


Fig. 278 a.

Fig. 278 b.

seitige Verschiebung seiner Endpunkte, da ja laut Voraussetzung Punkt A über D bleiben soll. Die gegenseitigen Verschiebungen der Endpunkte der Säulen 4, 5 und 6 sind alle gleich groß, nämlich der gegebenen Verschiebung $\Delta = 1$ mm. Dasselbe gilt für den Fall, daß an Stelle des Knotenpunktes D der Knotenpunkt C um die gegebene Strecke $\Delta = 1$ mm verschoben wird.

Beispiel II: Der zweistöckige Jochrahmen (Fig. 279).

Fall I: Der Knotenpunkt B werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1$ mm verschoben (Fig. 279 a), während der untere Stockwerkbalken 2 unverschiebbar festgehalten wird. Dann verschiebt sich der Knotenpunkt A wie am einstöckigen Rechteckrahmen ebenfalls um 1 mm, d. h.

$$\varrho_3 = \varrho_4 = 1 \text{ mm} .$$

Fall II: Der Knotenpunkt D werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1$ mm verschoben (Fig. 279 b), während das obere Stockwerk durch ein auf senkrechter

Bahn laufendes Rollenlager in B horizontal unverschiebbar festgehalten wird. Die Verschiebung des Knotenpunktes C erhalten wir in bekannter Weise, und es ist

die Strecke $C''C' = \varrho_2$,
 „ „ $CC' = \varrho_5$,
 „ „ $DD' = \varrho_6 = 1 \text{ mm}$.

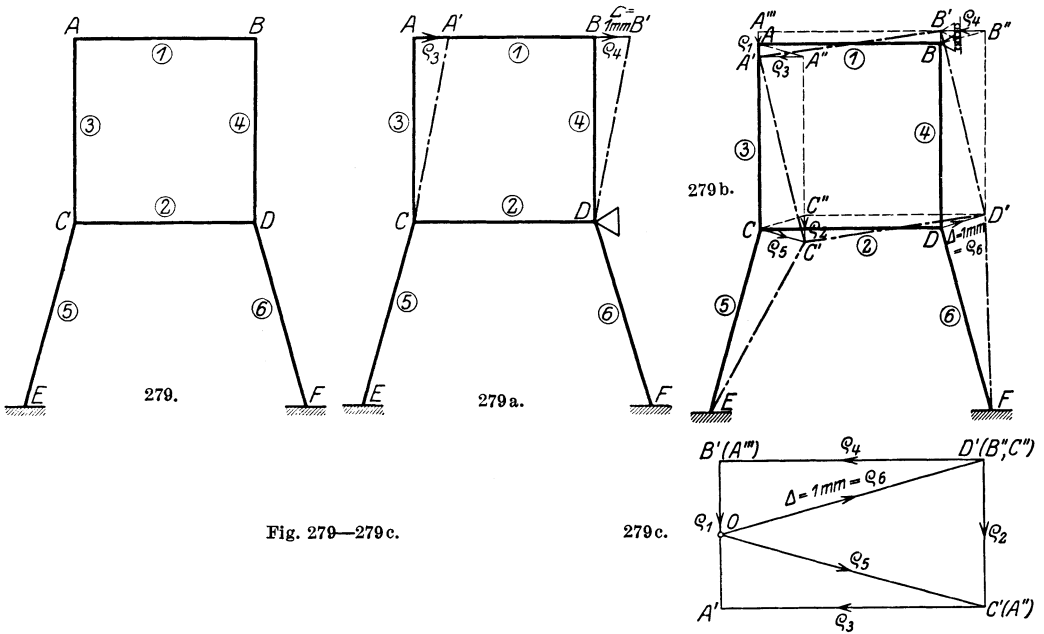


Fig. 279—279 c.

279 c.

Auf Grund der gegebenen Verschiebung des Punktes D und der nunmehr bekannten Verschiebung des Punktes C erhalten wir in gleicher Weise wie in Fig. 277h des allgemeinen mehrstöckigen Rahmens die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Stäbe 1, 3 und 4 des oberen Stockwerkes; es ist

die Strecke $A''A' = \varrho_3$,
 „ „ $A'''A' = \varrho_1$,
 „ „ $B''B' = \varrho_4$.

Es erleiden also alle Stäbe gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte. Die Strecken ϱ können aus Fig. 279 b analytisch bestimmt oder aus dem zugehörigen Verschiebungsplan der Fig. 279c graphisch erhalten werden.

Beispiel III: Hallenrahmen mit 2 Öffnungen und 2 Dachstäben in jeder Öffnung (Fig. 280).

Fall I: Der Knotenpunkt B werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$ verschoben (Fig. 280a), während die Knotenpunkte D und F unverschiebbar fest-

gehalten sind Es ist:

- die Strecke $C''C' = \varrho_2$,
- „ „ $CC' = \varrho_3$,
- „ „ $BB' = \varrho_1 = 1 \text{ mm}$.

Fig. 280 b stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

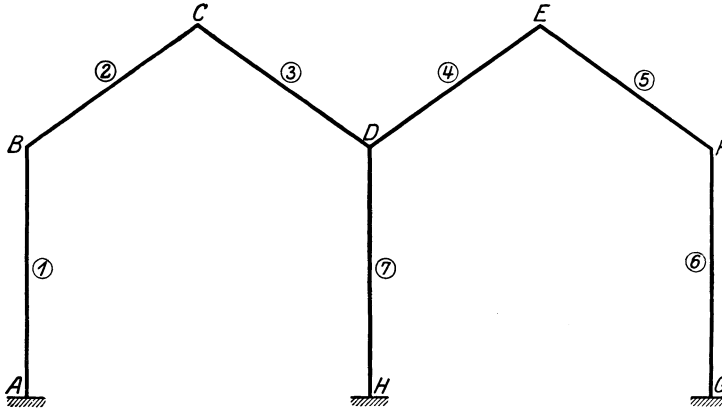


Fig. 280.

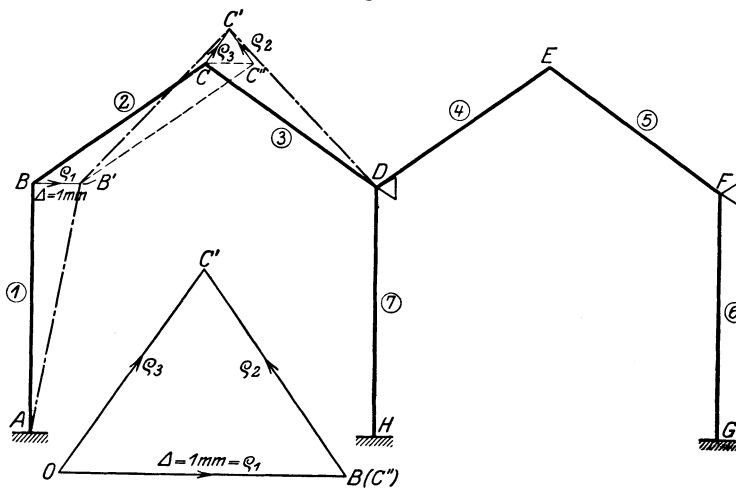


Fig. 280 a u. b.

Fall II: Der Knotenpunkt D werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$ verschoben (Fig. 280c), während die Knotenpunkte B und F unverschiebbar festgehalten sind.

Sowohl die Bestimmung der Verschiebung des Knotenpunktes C als auch diejenige des Knotenpunktes E erfolgt von D aus nach links und rechts vorgehend. Es sind:

- die Strecke $CC' = \varrho_2$,
- „ „ $C''C' = \varrho_3$,
- „ „ $DD' = \varrho_7 = 1 \text{ mm}$,
- „ „ $E''E' = \varrho_4$,
- „ „ $EE' = \varrho_5$,

ferner ist

$$\varrho_1 = \varrho_6 = 0.$$

Fig. 280d stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

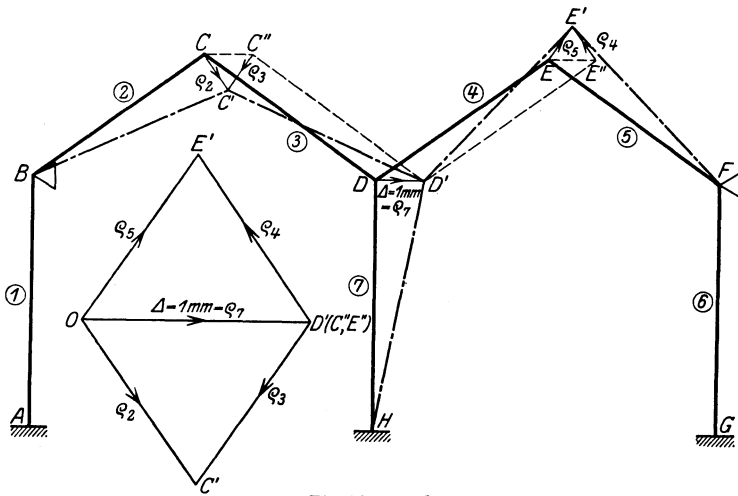


Fig. 280 c u. d.

Fall III: Der Knotenpunkt F werde um die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$ verschoben (Fig. 280e), während die Knotenpunkte B und D unverschiebbar festgehalten sind.

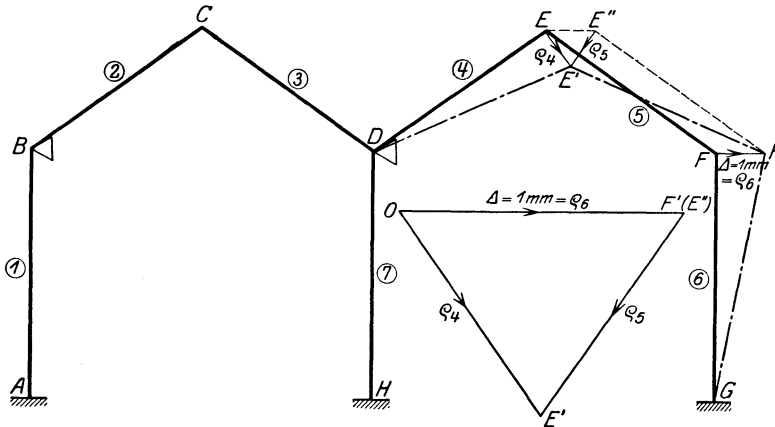


Fig. 280 e u. f.

Es sind:

- die Strecke $EE' = q_4$,
- „ „ $E''E' = q_5$,
- „ „ $FF' = q_6 = 1 \text{ mm}$.

Fig. 280f stellt den zugehörigen Verschiebungsplan dar.

3. Der Rahmenträger.

(System Vierendeel.)

Wie schon im vorhergehenden Kapitel ausgeführt, wird der Rahmenträger nach demselben Prinzip wie der mehrstöckige Rahmen berechnet. Zur Bestim-

mung der Zusatzmomente (R. II) am allgemeinen Rahmenträger der Fig. 281 mit beliebig gerichteten Stäben und festem Lager in A müssen wir die einzelnen Pfosten sowie die obere Gurtung, oder, was gleichbedeutend ist, je einen der auf dem betreffenden Pfosten bzw. auf der oberen Gurtung liegenden Knotenpunkte, um eine beliebige Strecke, beispielsweise $\Delta = 1 \text{ mm}$, nacheinander verschieben. Wir verschieben zweckmäßig die auf der unteren Gurtung liegenden

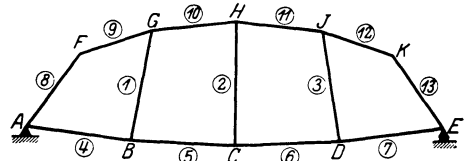


Fig. 281.

die auf der unteren Gurtung liegenden Knotenpunkte der Pfosten, sowie den Knotenpunkt H der oberen Gurtung. Bei Verschiebung eines Knotenpunktes der unteren Gurtung werden, um die Festpunkte zur Weiterleitung der davon herrührenden Momente benutzen zu können, alle übrigen Knotenpunkte dieser Gurtung in senkrechter Richtung durch horizontal bewegliche Lager (beweglich, weil sonst bei beliebig gerichteten Stäben die Verschiebung eines Knotenpunktes der unteren Gurtung nicht möglich wäre) unverschiebbar festgehalten, während die obere Gurtung bzw. der Knotenpunkt H derselben so mitverschoben wird, daß er senkrecht über dem Knotenpunkt C verbleibt und darauf durch ein festes Lager in jenem Punkt unverschiebbar festgehalten wird.

Bei Verschiebung der oberen Gurtung werden alle Knotenpunkte der unteren Gurtung unverschiebbar festgehalten. Hierdurch entstehen die den Verschiebungen der genannten Knotenpunkte entsprechenden Momente M' . Wie früher nehmen wir die gegebenen Verschiebungen im Verhältnis zur Länge aller Stäbe des Tragwerks verschwindend klein an. Das Verfahren zur Bestimmung der wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, sowie der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen sämtlicher Stäbe des Tragwerks infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes ist dasselbe wie beim mehrstöckigen Rahmen.

III. Bestimmung der Momente M' infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes sowie der zugehörigen Erzeugungskraft Z und Festhaltungskräfte D .

Nachdem wir die Verschiebungen aller Knotenpunkte eines Tragwerks bzw. die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes desselben kennen, d. h. nach dem vorhergehenden Kapitel ermittelt haben, sind wir in der Lage, die davon hervorgerufenen Momente M' am ganzen Tragwerk, beispielsweise an demjenigen der Fig. 282, wie folgt zu bestimmen:

Wir behandeln die einzelnen Stäbe getrennt voneinander, betrachten daher zunächst einen einzelnen Stab, z. B. den Stab AB und ermitteln die Momente $M_{(q)}$, welche durch die Verschiebungen AA' und BB' bzw. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung q der beiden Endpunkte dieses Stabes erzeugt werden,

und zwar einerseits im Stabe AB selbst und andererseits in allen übrigen Stäben des Tragwerkes. Darauf ermitteln wir auf dieselbe Weise die Momente $M_{(\varrho)}$ infolge der Verschiebungen der beiden Endpunkte des zweiten, sodann des dritten, vierten usw. und endlich des letzten Stabes. Zum Schluß addieren wir die so erhaltenen Momente $M_{(\varrho)}$ in jedem Stabe und erhalten dadurch die Momente M' infolge der gleichzeitigen Verschiebung aller Knotenpunkte des Tragwerkes. Die zugehörigen Quer- und Normalkräfte erhalten wir auf Grund der Momente nach Kap. VI des ersten Teiles.

Es sei noch hervorgehoben, daß wir nicht einzelne Knotenpunktverschiebungen, sondern stets paarweise die Verschiebungen der beiden Endpunkte eines Stabes betrachten, von denen wir zur Einsetzung in die nachfolgend abgeleiteten Hauptformeln (515) und (520) im besonderen die Summe ϱ ihrer beiden Komponenten rechtwinklig zur Stabrichtung benötigen, die wir, wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt, ermitteln.

1. Momente $M_{(\varrho)}$, welche durch die Verschiebungen AA' und BB' der Endpunkte des Stabes AB in diesem Stabe selbst entstehen.

In Fig. 282 haben wir die Formänderungen dargestellt, welche am ganzen Tragwerk durch die gleichzeitige Verschiebung aller Knotenpunkte desselben entstehen, während die Lage der Stäbe vor der Verschiebung ihrer Endpunkte in dünneren Linien eingetragen ist.

Wie wir aus Teil I wissen, kennen wir den Momentenverlauf am ganzen Stab, sobald die beiden Stützenmomente bekannt sind; da der betrachtete Stab wohl an seinen Enden verschoben, nicht aber durch äußere Kräfte belastet ist, so wird die Momentenfläche dieses Stabes begrenzt durch seine Achse und die Verbindungsgerade der Endpunkte der beiden von der Stabachse aus entsprechend ihren Vorzeichen aufgetragenen Stützenmomente.

Um nun die beiden

Stützenmomente M^A und M^B

zu ermitteln, welche durch die Verschiebungen AA' und BB' im Stabe AB selbst entstehen, untersuchen wir, wie dieser Stab aus seiner ursprünglichen spannungslosen Lage AB (Fig. 282) in die endgültige verschobene Lage $A'B'$ kommt. Zu diesem Zwecke halten wir alle Knotenpunkte des Tragwerkes in ihrer in Fig. 282 dargestellten Endlage frei drehbar, aber unverschiebbar fest und trennen dann den Stab $A'B'$ durch 2 dicht an seinen Endpunkten geführte Schnitte heraus, wodurch der Stab $A'B'$ wieder in die frühere spannungslose gerade Form übergeht, wie in Fig. 282a dargestellt, während im übrigen Stabsystem derjenige Teil der gesamten Formänderung verschwindet, welcher speziell der Verschiebung AA' und BB' der Endpunkte des Stabes AB entspricht. Aus der ursprünglichen, ebenfalls in Fig. 282a dargestellten Lage AB gelangt nun dieser Stab durch folgende Zwischenstufen in die endgültige Lage $A'B'$ der Fig. 282.

I. Durch eine Parallelverschiebung des geraden Stabes AB (Fig. 282a) in die Lage $A''B'$, wobei der Endpunkt B auf der Geraden BB' gleitet.

II. Durch eine Drehung des geraden Stabes: Wir drehen den parallel verschobenen Stab $A''B'$ (Fig. 282a) um seinen Endpunkt B' so, bis A'' nach A' gelangt. Hierbei beschreibt Endpunkt A'' einen Kreisbogen $A''A'$ um B' als Zentrum, und zwar eine Linksdrehung, wie aus Fig. 282a hervorgeht. Weil nun nach der im vorhergehenden Kapitel gemachten Voraussetzung die in Frage kommenden Knotenpunktverschiebungen im Verhältnis zur Länge

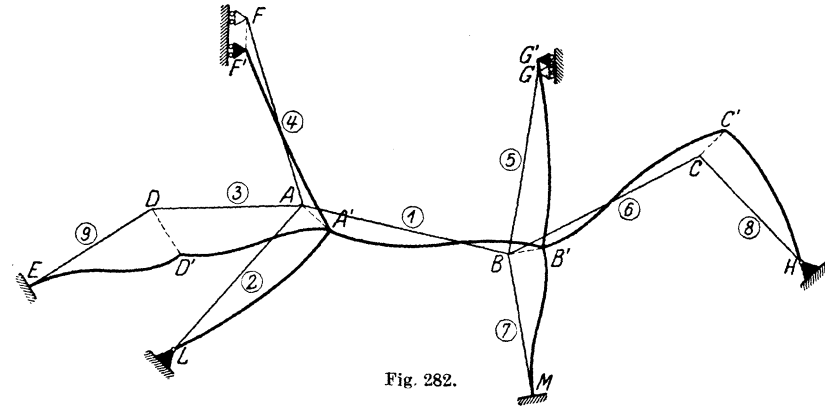


Fig. 282.

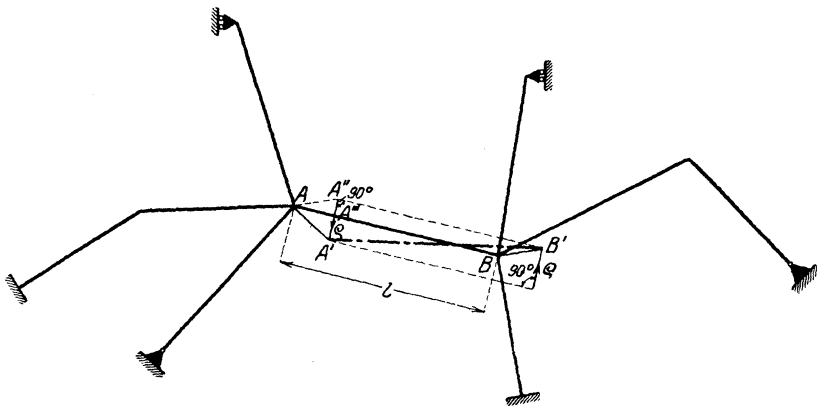


Fig. 282a.

sämtlicher Stäbe des Tragwerks verschwindend klein sind, so kann an Stelle der Bogenstrecke $A''A'$ die Kreistangente in A'' gesetzt werden, d. h. $A''A' = \rho$ ist eine gerade Strecke, welche zu $A''B'$ und damit auch zur ursprünglichen Stabrichtung AB rechtwinklig steht und die Drehung des geraden Stabes AB nach Größe und Drehsinn darstellt. Größe und Drehsinn der Drehung ρ müssen für jeden Fall in sorgfältiger Weise bestimmt werden, da nach der späteren Hauptformel (515) und (520) die Größe von ρ auch die Größe der beiden Stützenmomente des Stabes AB bestimmt und vom Drehsinn von ρ das Vorzeichen dieser Momente abhängt. Für den Stab AB erhalten wir

a) Größe der Drehung $\rho = A''A'$: Im vorhergehenden Kapitel wurde die Konstruktion von ρ gezeigt. Nach Fig. 282a ist:

$$\rho = A''A' = A''A''' + A'''A',$$

worin $A''A'''$ gleich der Komponente der wirklichen Verschiebung BB' rechtwinklig zur Stabrichtung, und $A'''A'$ gleich der Komponente der wirklichen Verschiebung AA' ebenfalls rechtwinklig zur Stabrichtung ist. ϱ ist also gleich der Summe dieser beiden Komponenten, oder schließlich gleich der „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung der Endpunkte des Stabes I'' “.

b) Drehsinn der Drehung ϱ : Aus Fig. 282a ergibt sich, daß der Pfeil, welcher den Drehsinn von ϱ angibt, stets von der zur Stabrichtung gezogenen Parallelen abgewendet ist, wobei es gleichgültig ist, ob man zur Konstruktion von ϱ diese Parallele durch B' oder durch A' zieht. Im vorliegenden Falle deutet der Pfeil an, daß der Stab AB eine Linksdrehung ausführt.

III. Durch eine Verdrehung der beiden Endquerschnitte des Stabes AB . Nachdem der Stab AB aus seiner ursprünglichen Lage durch die unter (I) beschriebene Parallelverschiebung und die unter (II) beschriebene Drehung des geraden Stabes in die geradlinige Richtung $A'B'$ übergeführt worden ist (Fig. 282a), bleibt noch übrig, den Endquerschnitt A' (Fig. 283 und 283a) durch ein Stützenmoment M^A und den Endquerschnitt B' durch ein Stützenmoment M^B so zu verdrehen, daß die vor der Schnittführung bestandene Vereinigung mit der übrigen Rahmenkonstruktion, d. h. die elastische Einspannung des Stabes an der übrigen Konstruktion wieder hergestellt wird, wodurch die in Fig. 282 dargestellte Formänderung (Verbiegung) des Stabes zu-

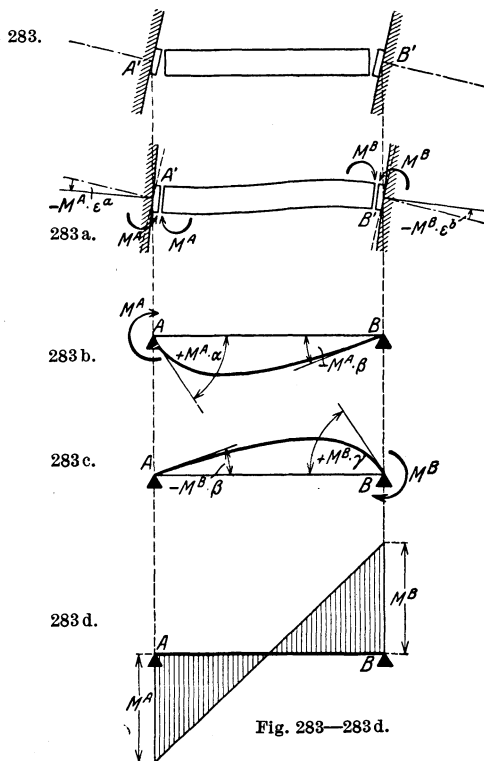


Fig. 283—283 d.

stande kommt. Der unmittelbar nach der vollzogenen Parallelverschiebung und Drehung des geraden Stabes bestehende Zustand ist in Fig. 283 und der Zustand nach der vollendeten Wiedervereinigung mit der übrigen Rahmenkonstruktion in Fig. 283a dargestellt; in beiden Fig. 283 und 283a ist die übrige Rahmenkonstruktion schematisch durch je ein elastisch drehbares Widerlager in A' und B' dargestellt.

Die gesuchten Stützenmomente (Einspannmomente) M^A und M^B erhalten wir nun nach Drehsinn und Größe in folgender Weise:

a) Der Drehsinn der Stützenmomente M^A und M^B geht rein mechanisch aus der Anschauung hervor. Aus Fig. 283 erkennen wir nämlich, daß wir zur Wiedervereinigung der beiden klaffenden Querschnitte in A' ein rechtsdrehendes Moment M^A am Stab AB und ein gleich großes, aber linksdrehendes Moment M^A am Wider-

lager daselbst anbringen müssen; gleichzeitig müssen wir zur Wiedervereinigung der beiden klaffenden Querschnitte in B' (Fig. 283) ein rechtsdrehendes Moment

M^B am Stabe AB und ein gleich großes, aber linksdrehendes Moment M^B am Widerlager daselbst anbringen. Diese Momente und die entsprechende Formänderung sind in Fig. 283a dargestellt. Wir können aus der Anschauung folgende Regel aufstellen, welche nicht im Stiche läßt, möge der betreffende Stab waagrecht, senkrecht oder beliebig geneigt sein:

Die beiden an den Enden eines Stabes AB infolge gegenseitiger Verschiebung derselben auftretenden Stützenmomente (Einspannmomente) M^A und M^B haben am herausgetrennten Stab (Fig. 283a) denselben Drehsinn, welcher entgegengesetzt ist wie die Drehung des geraden Stabes AB , d. h. die beiden Momente erzeugen an entgegengesetzten Stabkanten Zugspannungen, haben daher entgegengesetztes Vorzeichen (Fig. 284), und aus der Pfeilrichtung der Drehung ρ ergibt sich die Zugkante (an welcher das Moment aufzutragen ist) am Knotenpunkt, um den sich die Drehung ρ vollzieht. Am anderen Ende des Stabes ist dann das Moment auf der entgegengesetzten Stabkante aufzutragen.

Diese Regel macht es überflüssig, den nachfolgend entwickelten Hauptformeln für M^A und M^B ein Vorzeichen beizugeben.

b) Die Größe der Stützenmomente (Einspannmomente) M^A und M^B erhalten wir folgendermaßen aus den Drehwinkeln, welche die Stabendquerschnitte A_1 und B_1 beschreiben, wobei wir eine Rechtsdrehung als positiv und eine Linksdrehung als negativ einführen:

Der Drehwinkel des Stabendquerschnittes A_1

setzt sich zusammen aus dem

1. Drehwinkel infolge der Drehung des Stabes aus der Lage $A''B'$ (Fig. 282a) in die Lage $A'B'$:

$$= - \frac{\rho}{l} \quad (490)$$

(da dieser Winkel sehr klein, kann an Stelle des Tangens der Winkel selbst gesetzt werden).

2. Drehwinkel infolge Belastung des einfachen Balkens AB mit dem Moment M^A nach Fig. 283b:

$$= + M^A \cdot \alpha, \quad (491)$$

wenn α der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 52 ist.

3. Drehwinkel infolge Belastung des einfachen Balkens AB mit dem Moment M^B nach Fig. 283c:

$$= - M^B \cdot \beta, \quad (492)$$

wenn β der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 52 ist.

Aus den Gln. (490), (491) und (492) erhalten wir durch Addition den gesamten Drehwinkel des Querschnittes A_1 zu:

$$- \frac{\rho}{l} + M^A \cdot \alpha - M^B \cdot \beta. \quad (493)$$

Dieser Drehwinkel des Stabquerschnittes A_1 muß gleich sein dem Drehwinkel des Widerlagers von Stab AB an der Einspannstelle A infolge Belastung dieses Widerlagers mit dem Moment M^A (Fig. 283a), nämlich:

$$- M^A \cdot \varepsilon^a, \quad (494)$$

wenn ε^a der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 59a ist, woraus wir folgende Gleichung erhalten:

$$-\frac{\varrho}{l} + M^A \cdot \alpha - M^B \cdot \beta = -M^A \cdot \varepsilon^a. \quad (495)$$

Der Drehwinkel des Stabendquerschnittes B_1

setzt sich zusammen aus dem

1. Drehwinkel infolge der Drehung des Stabes aus der Lage $A''B'$ (Fig. 282a) in die Lage $A'B'$:

$$= -\frac{\varrho}{l}. \quad (496)$$

2. Drehwinkel infolge Belastung des einfachen Balkens AB mit dem Moment M^A nach Fig. 283b:

$$= -M^A \cdot \beta, \quad (497)$$

wenn β der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 52 ist.

3. Drehwinkel infolge Belastung des einfachen Balkens AB mit dem Moment M^B nach Fig. 283c:

$$= +M^B \cdot \gamma, \quad (498)$$

wenn γ der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 53 ist.

Aus den Gln. (496), (497) und (498) erhalten wir durch Addition den gesamten Drehwinkel des Stabendquerschnittes B_1 zu:

$$-\frac{\varrho}{l} - M^A \cdot \beta + M^B \cdot \gamma. \quad (499)$$

Dieser Drehwinkel des Stabendquerschnittes B_1 muß gleich sein dem Drehwinkel des Widerlagers von Stab AB an der Einspannstelle B infolge Belastung dieses Widerlagers mit dem Moment M^B (Fig. 283a), nämlich:

$$-M^B \cdot \varepsilon^b, \quad (500)$$

wenn ε^b der Einheitsdrehwinkel aus Fig. 59b ist, worauf wir folgende Gleichung erhalten:

$$-\frac{\varrho}{l} - M^A \cdot \beta + M^B \cdot \gamma = -M^B \cdot \varepsilon^b. \quad (501)$$

Durch Auflösen des Systems der beiden Gleichungen (495) und (501) erhalten wir nun die gesuchten Stützenmomente M^A und M^B , und zwar wie folgt:

Durch Ordnen gehen diese beiden Gleichungen über in:

$$M^A (\alpha + \varepsilon^a) - M^B \cdot \beta = \frac{\varrho}{l}, \quad (502)$$

$$-M^A \cdot \beta + M^B (\gamma + \varepsilon^b) = \frac{\varrho}{l}. \quad (503)$$

Durch Division beider Seiten von Gl. (502) und (503) durch β folgt:

$$M^A \cdot \frac{\alpha + \varepsilon^a}{\beta} - M^B = \frac{\varrho}{l \cdot \beta}, \quad (504)$$

$$-M^A + M^B \cdot \frac{\gamma + \varepsilon^b}{\beta} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta}. \quad (505)$$

Nun ist nach Gl. (4)

$$\frac{\alpha + \varepsilon^a}{\beta} = \frac{l - a}{a}, \quad (506)$$

und analog muß sein:

$$\frac{\gamma + \varepsilon^b}{\beta} = \frac{l - b}{b}. \quad (507)$$

Setzen wir den Wert von Gl. (506) in Gl. (504) und den Wert von Gl. (507) in Gl. (505) ein, so erhalten wir:

$$M^A \cdot \frac{l - a}{a} - M^B = \frac{\varrho}{l \cdot \beta}, \quad (508)$$

$$-M^A + M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta}. \quad (509)$$

Um M^B zu eliminieren, multiplizieren wir Gl. (508) mit $\frac{l - b}{b}$ und schreiben Gl. (509) unverändert wieder an; es folgt:

$$M^A \cdot \frac{l - a}{a} \cdot \frac{l - b}{b} - M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{l - b}{b}, \quad (510)$$

$$-M^A + M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta}. \quad (511)$$

Nun addieren wir die Gln. (510) und (511) und erhalten:

$$M^A \left(\frac{l - a}{a} \cdot \frac{l - b}{b} - 1 \right) = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \left(\frac{l - b}{b} + 1 \right), \quad (512)$$

woraus folgt:

$$M^A \cdot \frac{l^2 - al - bl + ab - ab}{ab} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{l - b + b}{b} \quad (513)$$

oder:

$$M^A \cdot \frac{l(l - a - b)}{a \cdot b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{l}{b}. \quad (514)$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit $\frac{b}{l}$ ergibt sich M^A zu:

$$M^A = \frac{\varrho}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot a. \quad (515)$$

Um ferner den gesuchten Wert von M^B zu erhalten, setzen wir in Gl. (509) den Wert von M^A aus Hauptformel (515) ein; wir erhalten:

$$-\frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{a}{(l - a - b)} + M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \quad (516)$$

oder:

$$M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \left(1 + \frac{a}{l - a - b} \right) \quad (517)$$

oder:

$$M^B \cdot \frac{l - b}{b} = \frac{\varrho}{l \cdot \beta} \cdot \frac{l - a - b + a}{l - a - b}. \quad (518)$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $\frac{b}{l - b}$, so folgt schließlich: (519)

$$M^B = \frac{\varrho}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot b. \quad (520)$$

Aus den Gleichungen (515) und (520) ersehen wir, daß der Faktor von a bzw. b derselbe und für einen gegebenen Stab konstant ist; daher ist

$$\left. \begin{aligned} M^A &= k \cdot a, \\ M^B &= k \cdot b, \end{aligned} \right\} \quad (521)$$

worin

$$k = \frac{\varrho}{l \cdot \beta (l - a - b)} \quad (522)$$

und a und b die beiden Festpunktabstände des betrachteten Stabes sind.

Aus den Gleichungen (515) und (520) ersehen wir ferner, daß die Stützmomente eines Stabes, dessen Enden verschoben wurden, proportional der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung ϱ der Endpunkte dieses Stabes sind, so daß also durch eine Parallelverschiebung des Stabes keine Momente in demselben hervorgerufen werden.

In bezug auf den Drehsinn der Stützmomente M^A und M^B gilt die vorstehend gegebene Regel. Für den Fall, daß man mit Vorzeichen arbeiten will, sei erwähnt, daß dann vor die rechte Seite der Gleichung (515) das „Minus“- und vor die rechte Seite der Gleichung (520) das „Plus“-Zeichen zu setzen ist, und daß von allen auf der rechten Seite dieser Gleichungen vorkommenden Größen nur die Drehung ϱ ein Vorzeichen erhält, und zwar „Plus“ bei Rechtsdrehung und „Minus“ bei Linksdrehung. Die Gleichungen (515) und (520) ergeben dann die Stützmomente in den Stabendquerschnitten mit positivem

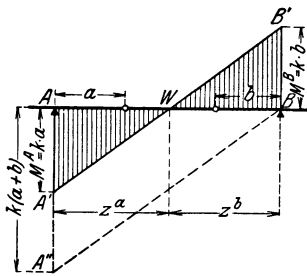


Fig. 283e.

Vorzeichen, wenn diese Momente an den Endquerschnitten des herausgetrennten Stabes rechts (im Sinne des Uhrzeigers) drehen; erhalten wir für die Momente jedoch ein negatives Vorzeichen, so drehen dieselben an den Endquerschnitten des herausgetrennten Stabes links herum (entgegengesetzt dem Uhrzeiger).

Trägt man nun die beiden errechneten Stützmomente als Ordinaten an den beiden Stabenden (Fig. 283d) auf, und zwar jeweils an der Zugkante, und verbindet die beiden Endpunkte dieser Ordinaten

geradlinig, so erhält man in raschester Weise die Momentenfläche am ganzen Stab. Eine vorhergehende Bestimmung des Momentennullpunktes ist überflüssig; der Abstand desselben von einem Stabende kann jedoch leicht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (Fig. 283e) berechnet werden. Ziehen wir BA'' parallel $A'B'$, so verhält sich in den beiden ähnlichen Dreiecken $AA'W$ und $AA''B$:

$$z^a : l = k \cdot a : k(a + b),$$

woraus

$$z^a = \frac{a \cdot l}{a + b}; \quad (522a)$$

analog erhält man:

$$z^b = \frac{b \cdot l}{a + b}. \quad (522b)$$

2. Momente $M_{(\varrho)}$, welche durch die Verschiebungen AA' und BB' der Endpunkte des Stabes AB in allen übrigen Stäben des Tragwerkes entstehen.

Nach Ermittlung der Momente M^A und M^B mittels der Hauptformeln (515) und (520) in den Endquerschnitten desjenigen Stabes AB , dessen gegenseitige

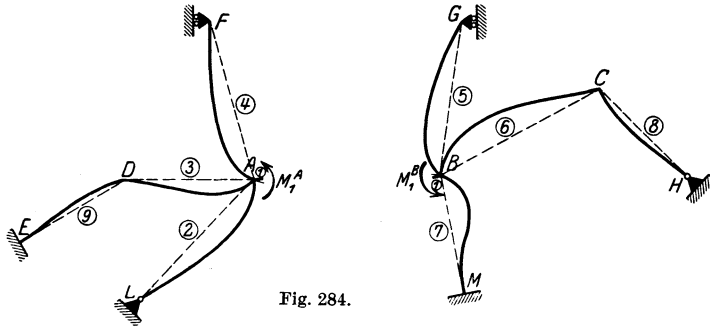


Fig. 284.

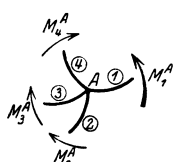


Fig. 285.

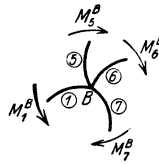


Fig. 285 a.

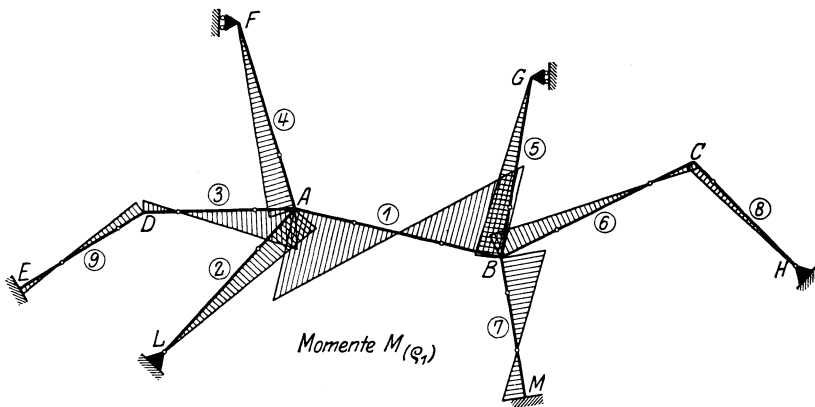


Fig. 286.

rechtwinklige Endpunktverschiebung ϱ betrachtet wurde, verbleibt jetzt noch die Bestimmung der Momente in allen übrigen Stäben infolge dieser Verschiebung ϱ .

Nachdem die Formänderungen des Tragwerkes infolge der Verschiebung ϱ des Stabes AB vollendet sind und die Momente M^A und M^B in den Endquerschnitten desselben sich ausgebildet haben, können wir diesen Stab herausgeschnitten denken und seine Widerlager A und B mit den Stützenmomenten (Einspannmomenten) M^A und M^B belasten (Fig. 284). Da alle Knotenpunkte des Tragwerkes in ihren Endlagen in Ruhe sind und sich nicht mehr verschieben,

so kann das Tragwerk nach vollzogener Verschiebung als in seinen Knotenpunkten unverschiebbar, jedoch frei drehbar festgehalten betrachtet werden, und die Momente M^A und M^B pflanzen sich daher genau wie im Teil I, Kap. II vorgeführt, über die übrigen Stäbe des Tragwerkes fort.

Durch die Belastung der Widerlager A und B des Stabes I mit den Momenten M_1^A und M_1^B entsteht die in Fig. 284 dargestellte Formänderung des Tragwerkes; da wir nur die infolge der Verschiebung der Knotenpunkte A und B im Stab I auftretenden Momente und die sich von diesem Stab aus über die übrige Konstruktion fortpflanzenden Momente betrachten, so haben wir in Fig. 284 der Einfachheit halber die ursprüngliche (unverschobene) Lage der übrigen Stäbe zugrunde gelegt.

Das Moment M_1^A erzeugt in den Querschnitten A_2, A_3, A_4 die Momente

$$M_2^A = \mu_{1-2}^A \cdot M_1^A, \quad \text{wolin} \quad \mu_{1-2}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_2^A}, \quad (523)$$

$$M_3^A = \mu_{1-3}^A \cdot M_1^A, \quad \text{wolin} \quad \mu_{1-3}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_3^A}, \quad (524)$$

$$M_4^A = \mu_{1-4}^A \cdot M_1^A, \quad \text{wolin} \quad \mu_{1-4}^A = \frac{\tau_{2-3-4}^A}{\tau_4^A}, \quad (525)$$

deren Drehsinn aus der Gleichgewichtsbedingung am herausgetrennten Knotenpunkt A (Fig. 285) hervorgeht.

Das Moment M_1^B erzeugt in den Querschnitten B_5, B_6 und B_7 die Momente

$$M_5^B = \mu_{1-5}^B \cdot M_1^B, \quad \text{wolin} \quad \mu_{1-5}^B = \frac{\tau_{5-6-7}^B}{\tau_5^B}, \quad (526)$$

$$M_6^B = \mu_{1-6}^B \cdot M_1^B, \quad \text{wolin} \quad \mu_{1-6}^B = \frac{\tau_{5-6-7}^B}{\tau_6^B}, \quad (527)$$

$$M_7^B = \mu_{1-7}^B \cdot M_1^B, \quad \text{wolin} \quad \mu_{1-7}^B = \frac{\tau_{5-6-7}^B}{\tau_7^B}, \quad (528)$$

deren Drehsinn aus der Gleichgewichtsbedingung am herausgetrennten Knotenpunkt B (Fig. 285a) hervorgeht.

Diese Momente tragen wir in den betreffenden Querschnitten als Ordinaten rechtwinklig zur Stabrichtung auf (stets an die Zugkante) und verbinden den Ordinatenpunkt mit dem Festpunkt in der Nähe des anderen Stabendes (Fig. 286), wodurch sich die Momente $M_{(e_1)}$ an den Stäben $2, 3, 4, 5, 6$ und 7 ergeben. Die auf diese Weise erhaltenen Momente M_3^D und M_6^C pflanzen wir in bekannter Weise noch über den betreffenden anschließenden Stab fort, so daß wir nun die $M_{(e_1)}$ -Momente am ganzen Tragwerk besitzen.

3. Momente M' , welche durch die gleichzeitige Verschiebung aller Knotenpunkte am ganzen Tragwerk entstehen.

Auf dieselbe Weise wie in den vorhergehenden Abschnitten 1 und 2 für den Stab I beschrieben, ermitteln wir nacheinander die Momente $M_{(e_2)}, M_{(e_3)}, M_{(e_4)}, M_{(e_5)}, M_{(e_6)}, M_{(e_7)}, M_{(e_8)}, M_{(e_9)}$ in allen Stäben des Tragwerkes infolge der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen $\rho_2, \rho_3 \dots \rho_9$. Zum Schluß addieren wir die so erhaltenen neun Teilmomentenflächen $M_{(e_1)}, M_{(e_2)} \dots M_{(e_9)}$ in jedem

Stab, wodurch wir die M' -Momentenfläche am ganzen Tragwerk infolge gegebener Verschiebung des Knotenpunktes B und infolgedessen gleichzeitig hervorgerufener Verschiebung aller übrigen Knotenpunkte erhalten, welche in Fig. 287 dargestellt ist.

Die Bestimmung der M' -Momente haben wir der Einfachheit halber am allgemeinen einstöckigen Tragwerk gezeigt. Sowohl am mehrstöckigen Rahmen als auch am Rahmenträger gestaltet sich die Bestimmung der M' -Momente genau gleich, nachdem alle Verschiebungen ϱ nach dem im vorhergehenden Kapitel gezeigten Verfahren bestimmt wurden.

4. Erzeugungskraft Z der Momente M' am einstöckigen Rahmen.

Nachdem wir die Momente M' am allgemeinen einstöckigen Tragwerk der Fig. 287 infolge einer gegebenen Verschiebung, z. B. $\Delta = 1$ mm, des während R. I festgehaltenen Knotenpunktes oder anschließenden Stabes nach dem vorhergehenden berechnet haben, bestimmen wir nun, um zu den Momenten M^* zu gelangen, diejenige Kraft, in Richtung der Verschiebungskraft bzw. der umgekehrten Festhaltungskraft des R. I, welche die gegebene Verschiebung zu erzeugen imstande ist, und dies ist die sog. Erzeugungskraft Z .

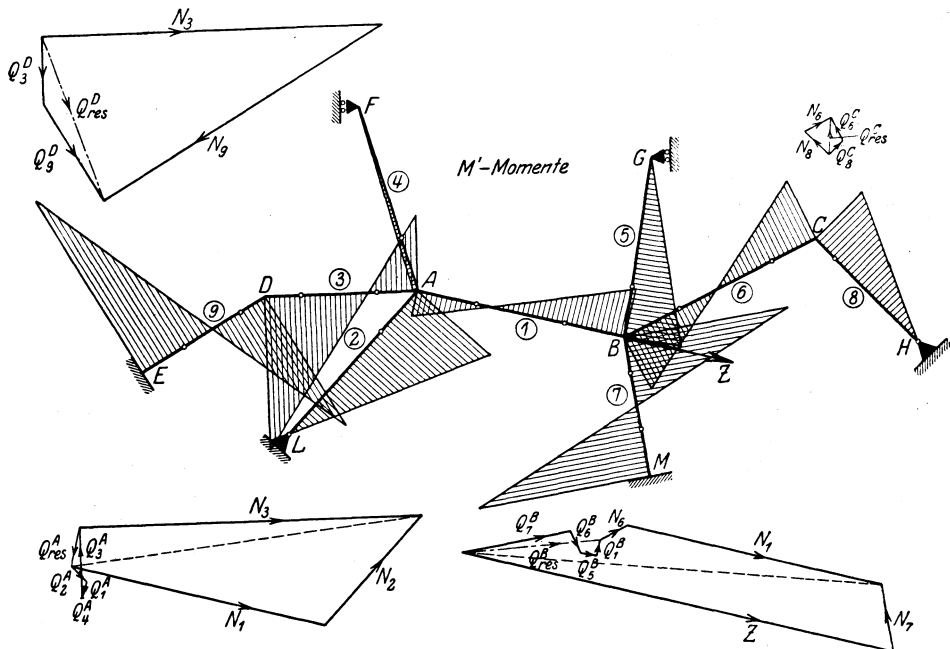


Fig 287.

Zur Bestimmung der Erzeugungskraft Z stellen wir folgende Betrachtung an: Nach vollzogener Verschiebung des Knotenpunktes B bzw. des Stabes I des Tragwerkes der Fig. 287 muß am verschobenen Knotenpunkt bzw. an dem an diesen anschließenden Stab ein gedachtes Lager angebracht werden, damit

sich das ganze Tragwerk nicht wieder in seine ursprüngliche Lage zurückverschiebt. Und der in diesem Lager auftretende Auflagerdruck („Reaktion“) ist nun nichts anderes als die zu den Momenten M' gehörige Erzeugungskraft Z .

Wir erkennen, daß die Aufgabe der Bestimmung der Erzeugungskraft Z auf diejenige der Bestimmung der Festhaltungskraft F (Teil I, Kap. VII) zurückgeführt ist, mit dem die Berechnung vereinfachenden Unterschied, daß bei der Bestimmung der Erzeugungskraft Z keine äußeren Belastungen zu berücksichtigen sind.

Die Bestimmung der Erzeugungskraft Z am einstöckigen Tragwerk gestaltet sich daher genau gleich wie diejenige der Festhaltungskraft F am einstöckigen Tragwerk, welche in Kap. VII, Abschnitt 1 des Teiles I ausführlich behandelt wurde, so daß es sich erübrigt, an dieser Stelle nochmals darauf einzugehen.

5. Erzeugungskraft Z der Momente M' und Festhaltungskräfte D am mehrstöckigen Rahmen.

Wie in Kap. I dieses Teiles ausgeführt, benötigen wir zur Bestimmung der Momente M^* am mehrstöckigen Tragwerk die Momente M' für so viele Verschiebungszustände, als das Tragwerk Stockwerke besitzt.

Am allgemeinen dreistöckigen Tragwerk der Fig. 288 zum Beispiel müssen wir die Momente M'_I (Fig. 288a), M'_{II} (Fig. 288b) und M'_{III} (Fig. 288c) für die in Fig. 277f bzw. 277h bzw. 277k dargestellten Verschiebungszustände ermitteln, wobei jeweils ein „Stockwerkbalken“ verschoben wird, während die darunterliegenden „Stockwerkbalken“ durch feste oder Rollenlager und die darüberliegenden „Stockwerkbalken“ durch Rollenlager unverschiebbar festgehalten werden.

Um die Momente M^*_I , M^*_{II} und M^*_{III} nach dem folgenden Kapitel bestimmen zu können, benötigen wir aber wie am einstöckigen Rahmen die zu den Momenten M'_I , M'_{II} und M'_{III} gehörigen Erzeugungskräfte Z_I bzw. Z_{II} bzw. Z_{III} in Richtung der Festhaltungskraft F aus R. I am dem betreffenden Stockwerkbalken. Außerdem müssen wir noch für jeden Verschiebungszustand diejenigen Kräfte ermitteln, welche bei Wirkung der Erzeugungskraft gleichzeitig an den übrigen Stockwerkbalken, die gemäß Voraussetzung durch feste bzw. Rollenlager unverschiebbar festgehalten werden, auftreten; diese Kräfte sind die sog. Festhaltungskräfte D des R. II.

Aus demselben Grunde wie beim einstöckigen Rahmen werden am mehrstöckigen Rahmen die Erzeugungskräfte Z_I , Z_{II} und Z_{III} der Momente M' des betreffenden Verschiebungszustandes genau gleich (Fig. 288a, 288b und 288c) wie die Festhaltungskräfte F des R. I, deren Ermittlung in Kap. VII, 2 des Teiles I ausführlich behandelt wurde, bestimmt; ferner ist ohne weiteres klar, daß die Festhaltungskräfte D auch genau gleich wie die Festhaltungskräfte F des R. I erhalten werden.

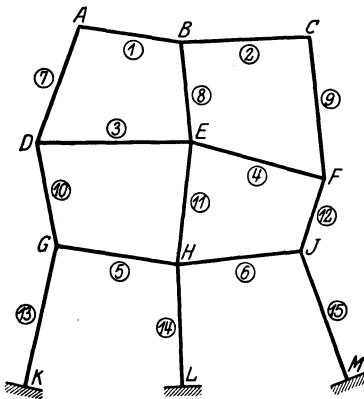


Fig. 288.

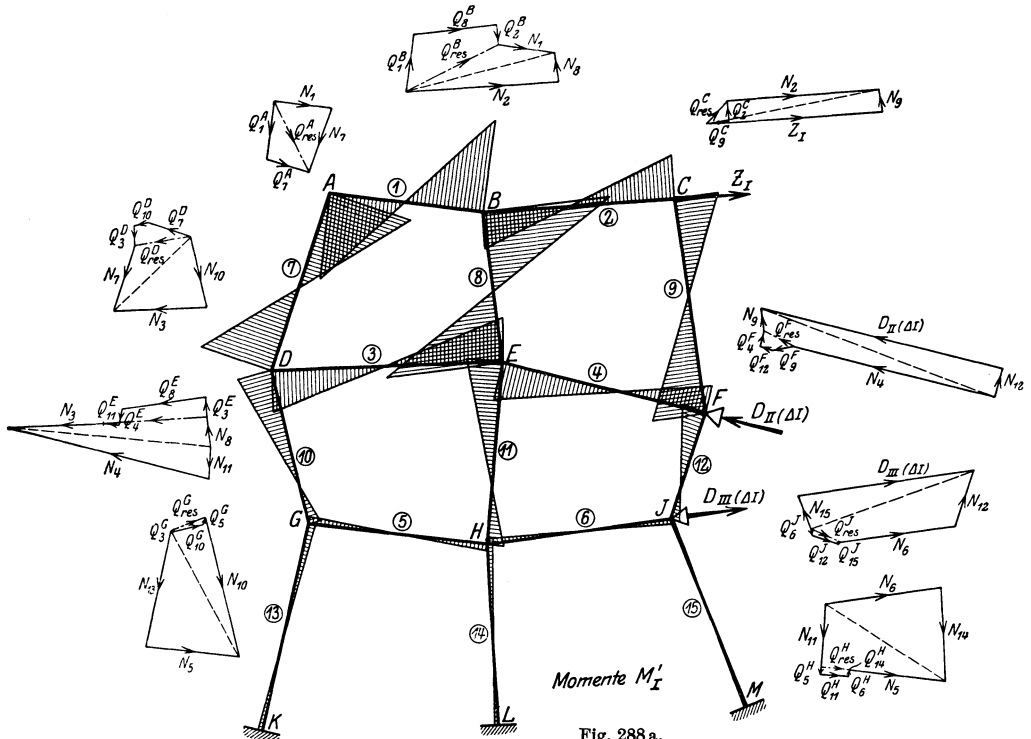


Fig. 288 a.

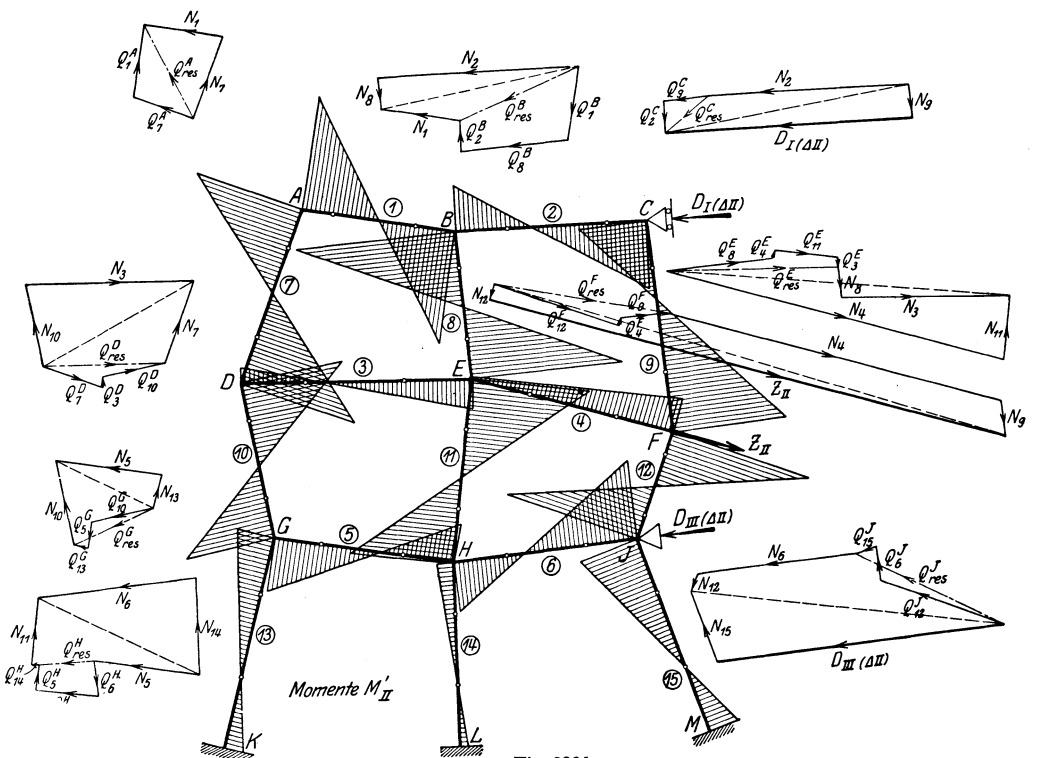


Fig. 288 b.

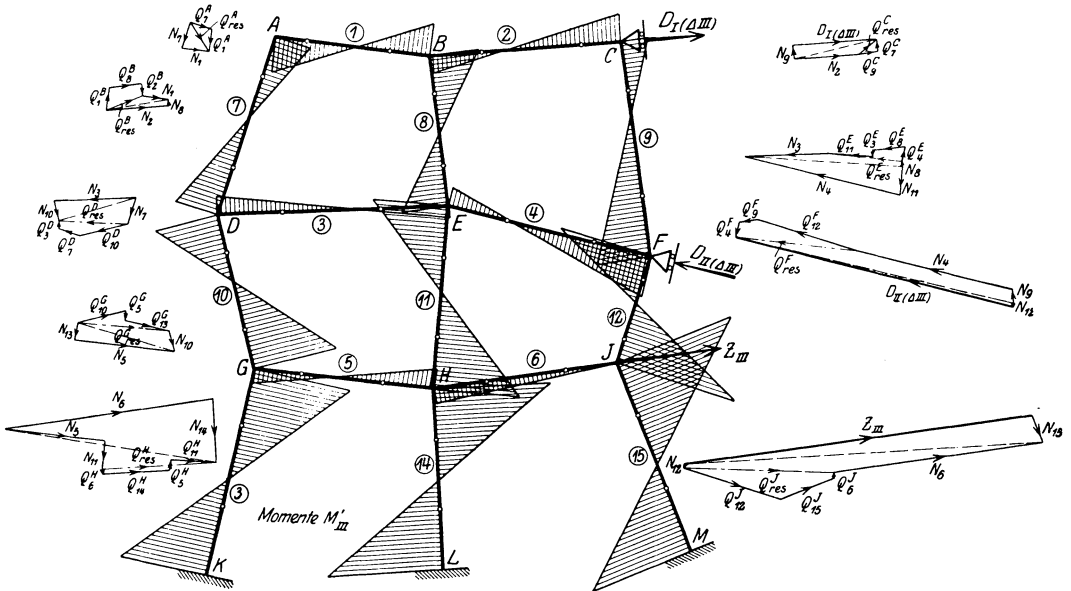


Fig. 288 c.

Die zu den Knotenpunkten G, H u. J gehörigen Kräftepläne sind in doppelt so großem Maßstab als die übrigen aufgetragen.

6. Erzeugungskraft Z der Momente M' und Festhaltungskräfte D am Rahmenträger.

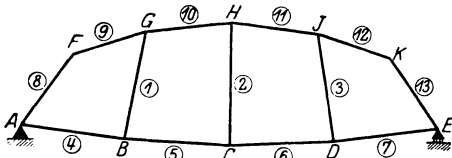


Fig. 289.

Da die Berechnung des beispielsweise in Fig. 289 dargestellten Rahmenträgers sich analog wie diejenige des mehrstöckigen Rahmens gestaltet, so gilt das unter 5 Gesagte auch sinngemäß für den Rahmenträger.

IV. Bestimmung der Momente M^* infolge einer Last $H=1t$ sowie der Zusatzmomente M_{zus} infolge der betreffenden Verschiebungskraft am frei verschiebbaren Rahmen.

Die Bestimmung der Momente M^* gestaltet sich verschieden, je nachdem der Rahmen ein- oder mehrstöckig ist; die Momente M^* am Rahmenträger werden analog wie am mehrstöckigen Rahmen berechnet.

Nachdem wir die Momente M' und die zugehörige Erzeugungskraft Z am einstöckigen Rahmen bzw. die Momente $M'_I, M'_{II}, \dots M'_n$ und die zugehörigen Erzeugungskräfte $Z_I, Z_{II} \dots Z_n$ und Festhaltungskräfte D am n -stöckigen Rahmen nach dem vorhergehenden Kapitel ermittelt haben, sind wir in der Lage, die Momente M^* an dem betreffenden Rahmen wie folgt zu bestimmen.

1. Der einstöckige Rahmen¹.

Der gegebenen Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ eines Knotenpunktes des „Balkens“ des allgemeinen Rahmens der Fig. 290 entsprechen die Momente M' der Fig. 287 und die in Fig. 287 a ermittelte zugehörige Erzeugungskraft Z . Umgekehrt können wir jetzt sagen: Die als äußere Belastung am Rahmen angebrachte Erzeugungskraft Z erzeugt die Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ und die Momente M' ; daher erzeugt eine äußere, in Richtung der Erzeugungskraft Z wirkende Kraft „ $H = 1$ “ eine Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ und die Momente $\frac{M'}{Z}$.

Nachdem wir also die Momente M' am Rahmen infolge der Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ ermittelt haben, erhalten wir durch Multiplikation derselben mit dem Faktor $\frac{1}{Z}$ die gesuchten Momente M^* am einstöckigen Rahmen, welche wir in Fig. 290 dargestellt haben, d. h.

$$M^* = \frac{M'}{Z}. \tag{529}$$

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Momente M^* nur abhängig von den Abmessungen eines Rahmens sind, und daher für einen gegebenen Rahmen feste Werte haben; diese Tatsache vereinfacht die Berechnung eines Rahmens für mehrere Belastungsfälle wesentlich.

Die Zusatzmomente M_{zus} für jeden Belastungsfall erhalten wir durch Multiplikation der Momente M^* mit der betreffenden Verschiebungskraft V ,

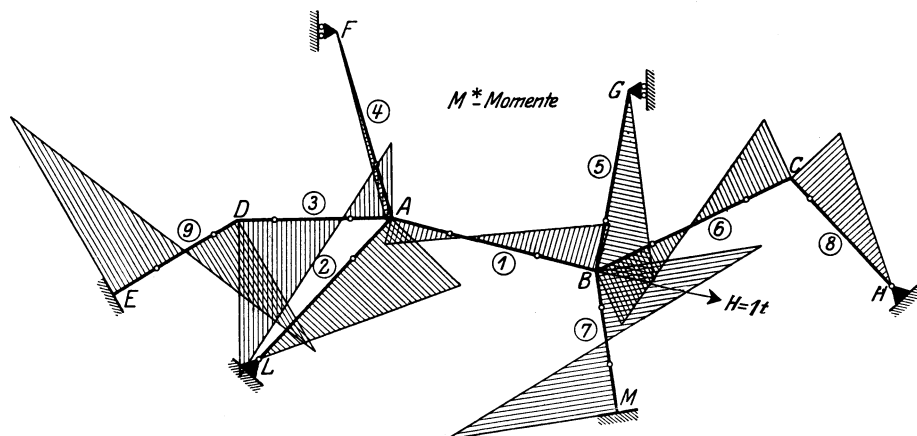


Fig. 290.

Die M^* -Momente sind 5 mal kleiner aufgetragen als die M' -Momente (Fig. 287).

welche gleich und entgegengesetzt ist der aus R. I gewonnenen Festhaltungskraft F für den betreffenden Belastungsfall; d. h. es ist am einstöckigen Rahmen

$$M_{zus} = V \cdot M^*, \tag{529a}$$

¹ Vgl. Dr.-Ing. Max Ritter: Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen, Schweiz. Bauztg. Bd. 57, H. 4.

worin V mit seinem Vorzeichen (von links nach rechts gerichtet positiv) einzusetzen ist.

Nachstehend seien noch die Werte der

Momente M^* am einfachen symmetrischen Rahmen mit geradem Balken

angegeben. Das Trägheitsmoment J_b des Balkens mit der Stützweite l sei konstant; beide Pfeiler haben gleiche Höhe h sowie gleiches konstantes Trägheitsmoment J_s , und die starre Strecke f der Pfeilerhöhe wird vernachlässigt. Ferner setzen wir:

$$\frac{J_b}{J_s} = n.$$

Am einfachen Rahmen mit Einspannung an den Pfeilerfüßen (Fig. 291)

ist:

$$M_1^A * = M_3^D * = -\frac{h(l + 3hn)}{2(l + 6hn)}, \quad (530)$$

$$M_2^B * = M_1^B * = +\frac{3h^2n}{2(l + 6hn)}, \quad (531)$$

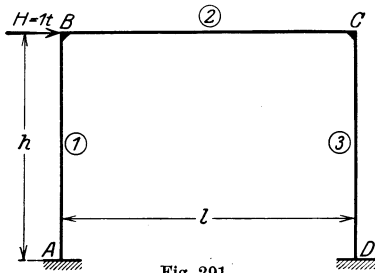


Fig. 291.

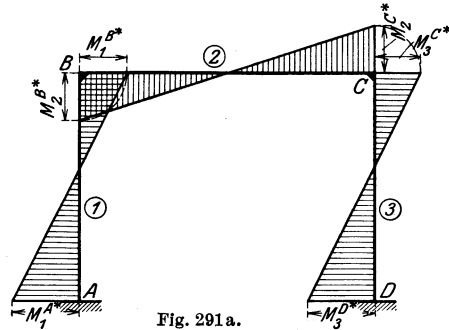


Fig. 291a.

$$M_2^C * = -\frac{3h^2n}{2(l + 6hn)}, \quad (532)$$

$$M_3^C * = +\frac{3h^2n}{2(l + 6hn)}. \quad (533)$$

In Fig. 291a wurden diese Momente aufgetragen.

Am einfachen Rahmen mit Fußgelenken (Fig. 292)

ist:

$$M_1^A * = M_3^D * = 0, \quad (534)$$

$$M_2^B * = M_1^B * = +\frac{h}{2}, \quad (535)$$

$$M_2^C * = -\frac{h}{2}, \quad (536)$$

$$M_3^C * = +\frac{h}{2}. \quad (536a)$$

In Fig. 292a wurden diese Momente aufgetragen.

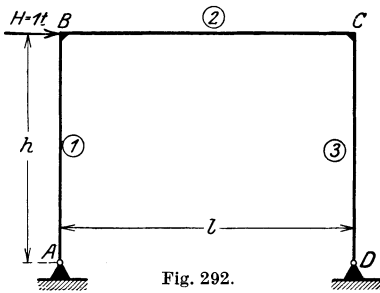


Fig. 292.

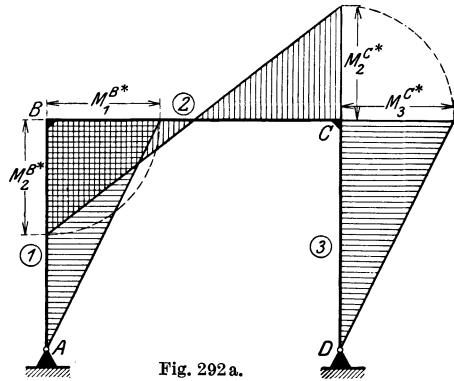


Fig. 292a.

Am symmetrischen geschlossenen Rahmen (Fig. 292b) sind alle Eckmomente ihrem absoluten Werte nach gleich

$$\frac{h}{4}$$

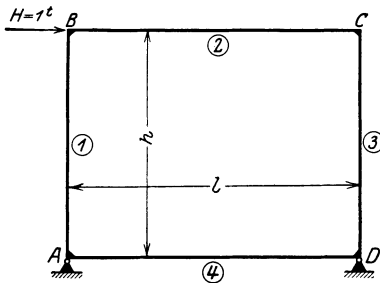


Fig. 292b.

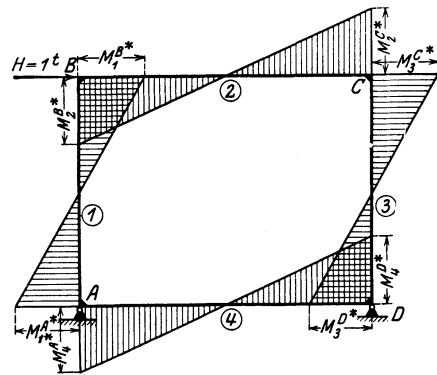


Fig. 292c.

und die Vorzeichen der einzelnen Eckmomente gehen aus der in Fig. 292c aufgetragenen Momentenfläche hervor.

2. Der mehrstöckige Rahmen.

Da die Zusatzmomente am mehrstöckigen Rahmen, wie in Kap. I dieses Teiles ausgeführt wurde, durch ebensoviele Verschiebungskräfte V hervorgerufen werden, als Stockwerke vorhanden sind, so müssen wir zur Bestimmung derselben auch ebensoviele Momentenflächen M^* ermitteln.

Am allgemeinen mehrstöckigen Rahmen der Fig. 293 müssen wir daher die Momente M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* bestimmen, welche durch die in Richtung der Erzeugungskraft Z_I bzw. Z_{II} bzw. Z_{III} wirkende Kraft $H = +1t$ am frei verschiebbaren Rahmen hervorgerufen werden (vgl. Fig. 293a, b und c).

Die Zusatzmomente M_{zus} für jeden Belastungsfall erhalten wir darauf durch Multiplikation der Momente M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* mit der mit ihrem Vor-

zeichen zu nehmenden Verschiebungskraft V_I bzw. V_{II} bzw. V_{III} , welche gleich und entgegengesetzt sind den aus R. I gewonnenen Festhaltungskräften F_I bzw. F_{II} bzw. F_{III} für den betreffenden Belastungsfall, und durch schließliche Addition der daraus hervorgehenden Momente. Am n -stöckigen Rahmen ist also

$$M_{zus} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* + \dots + V_n \cdot M_n^*, \quad (537)$$

worin $V_I, V_{II} \dots V_n$ mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind (von links nach rechts gerichtet positiv).

Während wir beim einstöckigen Rahmen die Momente M' infolge der Verschiebung „ $\Delta = 1$ “ des „Balkens“ nur durch die zugehörige Erzeugungskraft Z zu dividieren brauchen, um die Momente M^* zu erhalten, gestaltet sich die Bestimmung der letzteren am mehrstöckigen Rahmen bedeutend verwickelter.

a) Bestimmung der Momente M_I^* .

Zur Bestimmung der Momente M_I^* verschieben wir, wie beim einstöckigen Rahmen, zunächst den „Stockwerkbalken“ I, an welchem die Last $H = 1 \text{ t}$

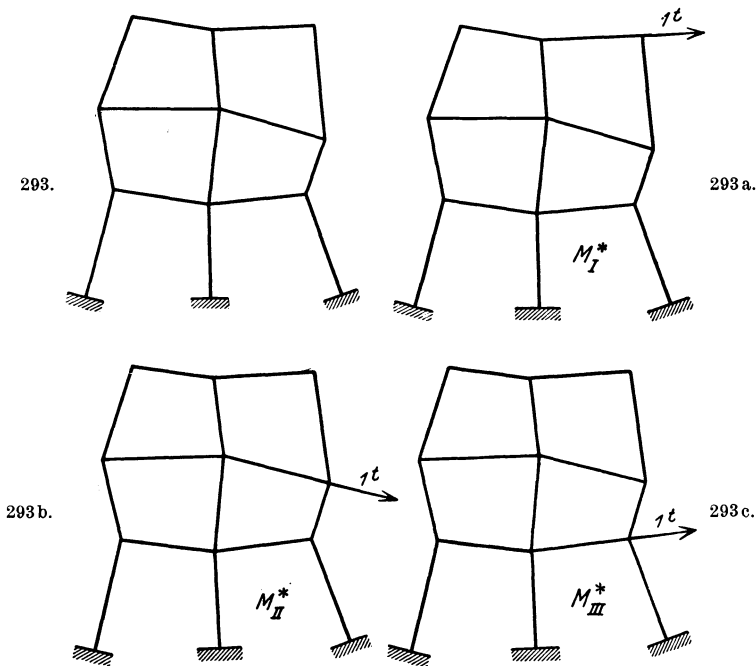


Fig. 293—293 c.

angreift, oder, was gleichbedeutend ist, einen auf demselben liegenden Knotenpunkt, um eine gegebene Strecke, beispielsweise $\Delta = 1 \text{ mm}$, wobei wir aber die darunterliegenden „Stockwerkbalken“ analog wie im Rechnungsabschnitt I vorübergehend unverschiebbar festhalten, um die davon herrührenden Momente M_I^* mit Hilfe der Festpunkte bestimmen zu können (vgl. Fig. 277 f); dabei entstehen in den gedachten Lagern an den beiden unteren „Stockwerkbalken“ die

Festhaltungskräfte $D_{II(\Delta I)}$ und $D_{III(\Delta I)}$ (vgl. Fig. 294), welche mit der Erzeugungskraft Z_I und den Reaktionen an den natürlichen Auflagern des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den beiden unteren Stockwerkbalken gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten M_I^* aus Verschiebungszustand I (Fig. 294) zusätzliche Momente hervorrufen. Die Momente M_I^* setzen sich also aus den Momenten für die in den Fig. 294, 294a und 294b dargestellten Belastungszustände zusammen.

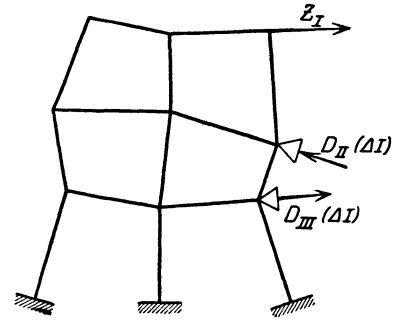


Fig. 294.

Um aber die Momente für den in Fig. 294a dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den mittleren „Stockwerkbalken“, oder, was gleichbedeutend ist, einen auf demselben liegenden Knotenpunkt, an welchem die Belastung angreift, wieder zunächst um eine gegebene Strecke, z. B. $\Delta = 1 \text{ mm}$, verschieben, wobei wir aber vorübergehend den darunterliegenden „Stockwerkbalken“ unverschiebbar festhalten und den darüberliegenden „Stockwerkbalken“ durch ein Rollenlager nach der Seite unverschiebbar machen, um die

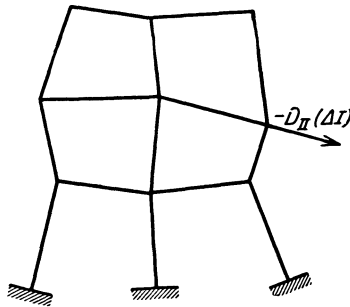


Fig. 294 a.

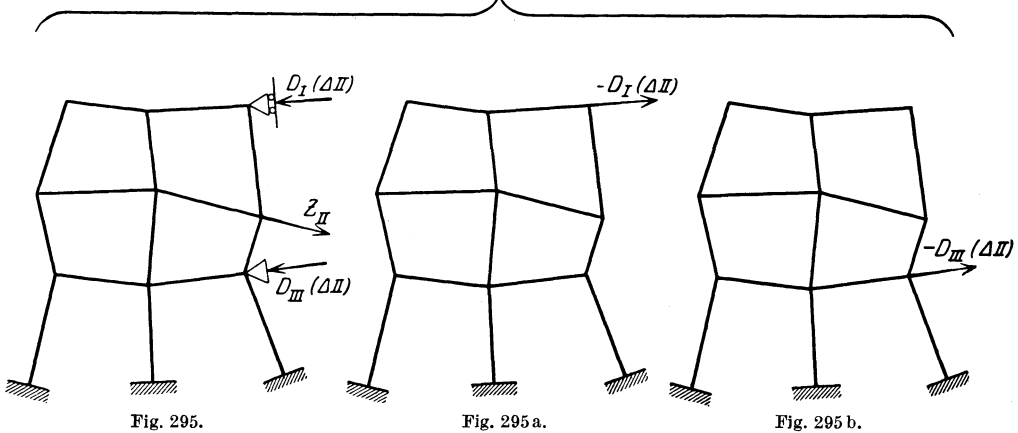


Fig. 295.

Fig. 295 a.

Fig. 295 b.

davon herrührenden Momente mit Hilfe der Festpunkte bestimmen zu können (vgl. 277h); dabei entsteht am obersten „Stockwerkbalken“ die Festhaltungskraft $D_{I(\Delta II)}$, und am untersten „Stockwerkbalken“ die Festhaltungskraft $D_{III(\Delta I)}$

(vgl. Fig. 295), welche mit der Erzeugungskraft Z_{II} und den Reaktionen an den natürlichen Auflagern des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die am obersten und untersten „Stockwerkbalken“ gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D wieder in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten M'_{II} aus Verschiebungszustand II (Fig. 295) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 295a und b).

Um ferner die Momente für den in Fig. 294b dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den untersten „Stockwerkbalken“, an welchem die Belastung angreift, oder was gleichbedeutend ist, einen auf demselben liegenden

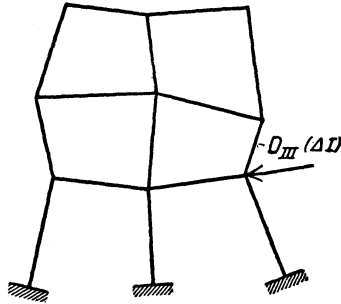


Fig. 294 b.

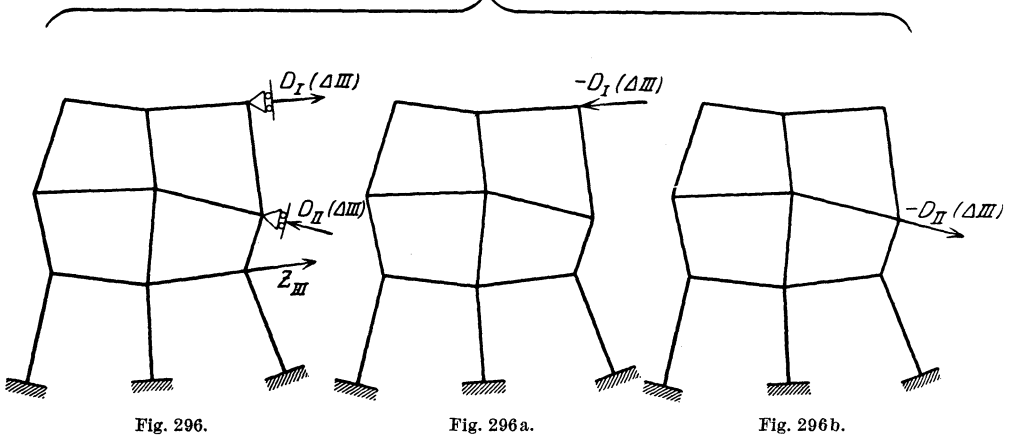


Fig. 296.

Fig. 296 a.

Fig. 296 b.

Knotenpunkt, wieder zunächst um eine gegebene Strecke, z. B. $\Delta = 1$ mm, verschieben, wobei wir aber die beiden darüberliegenden „Stockwerkbalken“ durch Rollenlager nach der Seite unverschiebbar gestalten, um die davon herrührenden Momente mit Hilfe der Festpunkte bestimmen zu können (Fig. 277 k); dann sind an den beiden festgehaltenen „Stockwerkbalken“ nach Wegnahme der Rollenlager die Festhaltungskräfte $D_{I(\Delta III)}$ und $D_{II(\Delta III)}$ anzubringen (vgl. Fig. 296), welche mit der Erzeugungskraft Z_{III} und den Reaktionen an den natürlichen Auflagern des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den beiden oberen Stockwerkbalken gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten M'_{III} aus Verschiebungszustand III (Fig. 296) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 296a und b).

Wir haben nun von den in Fig. 294, 294a und 294b dargestellten drei Belastungszuständen, welche zusammen die gesuchten Momente M_I^* liefern, den Zustand der Fig. 294a durch die in den Fig. 295, 295a und 295b, und den Zustand der Fig. 294b durch die in den Fig. 296, 296a und 296b dargestellten Belastungszustände ersetzt. Aus diesen letzteren Figuren ersehen wir, daß der Zustand der Fig. 295a wieder durch die Zustände der Fig. 294, 294a und 294b, der Zustand der Fig. 295b durch die Zustände der Fig. 296, 296a und 296b, der Zustand der Fig. 296a wieder durch die Zustände der Fig. 294, 294a und 294b und der Zustand der Fig. 296b durch die Zustände der Fig. 295, 295a und 295b ersetzt werden kann.

Wir erkennen daraus, daß die Gleichung für das Moment M_I^* in irgendeinem Querschnitt des Rahmens die Form hat:

$$M_I^* = X_{I(I)} \cdot M_I' + X_{II(I)} \cdot M_{II}' + X_{III(I)} \cdot M_{III}', \quad (538)$$

worin $X_{I(I)}$, $X_{II(I)}$ und $X_{III(I)}$ die unbekanntenen Maßzahlen der zu den einzelnen Verschiebungszuständen gehörigen Momente M' bei Bestimmung der Momente M_I^* sind, die nun zu bestimmen sind.

Aus obiger Hauptgleichung für das Moment M_I^* in irgendeinem Rahmenquerschnitt geht hervor, daß die Größen X den Maßstab angeben, in welchem die Momente M' der einzelnen Verschiebungszustände übereinandergelegt werden müssen, um daraus die Momentenfläche M^* zu erhalten. Würden wir in vor-

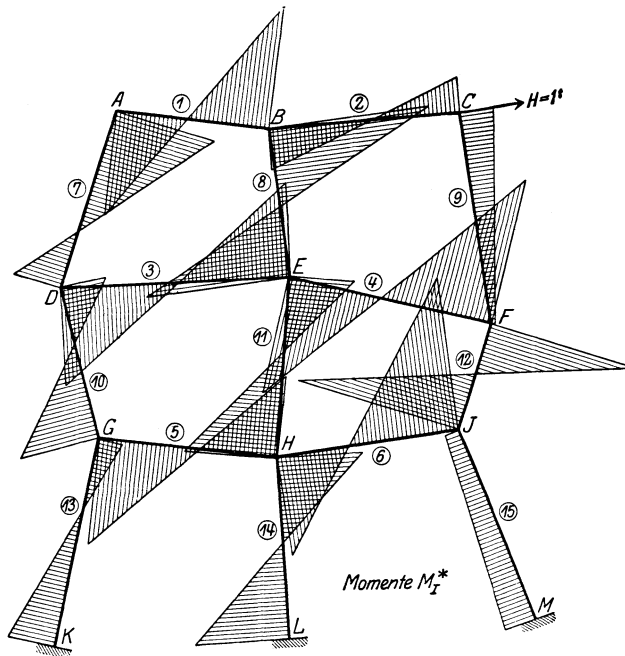


Fig. 296c.

liegendem Falle die Momentenflächen M_I' (Fig. 294), M_{II}' (Fig. 295) und M_{III}' (Fig. 296) in gleichem Maßstab übereinanderlegen, d. h. algebraisch addieren, so würden sich auch die in diesen Figuren eingetragenen Kräfte an den einzelnen „Stockwerkbalken“ addieren. Nun wissen wir aber aus Kap. V, 5 (Rechnungs-

proben), daß die aus den Momenten für den frei verschiebbaren Rahmen infolge $H = 1 \text{ t}$ am Balken I gewonnene Reaktion eines gedachten Lagers.

am „Stockwerkbalken“, an welchem die Kraft $H = 1 \text{ t}$ angreift, gleich dieser Kraft, und

an jedem Stockwerkbalken, an welchem die Kraft $H = 1 \text{ t}$ nicht angreift, gleich Null sein muß.

Daraus ergeben sich nun zur Ermittlung der drei Maßzahlen $X_{I(I)}$, $X_{II(I)}$ und $X_{III(I)}$ zur Bestimmung der Momente M_I^* die drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_{I(I)} \cdot Z_I &+ X_{II(I)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 1, \\ X_{I(I)} \cdot D_{II(\Delta I)} + X_{II(I)} \cdot Z_{II} &+ X_{III(I)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 0, \\ X_{I(I)} \cdot D_{III(\Delta I)} + X_{II(I)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot Z_{III} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (539)$$

Es sei noch erwähnt, daß die Momente M'_I , M'_{II} und M'_{III} , aus denen sich die Kräfte Z und D ergeben, auf Grund von verschiedenen großen Verschiebungen ermittelt sein können; die Hauptsache ist, daß sich bei den einzelnen Verschiebungszuständen (Fig. 294, 295 und 296) die Kräfte Z und D mit den Reaktionen in den Auflagerpunkten des Rahmens im Gleichgewicht befinden. Es sei aber darauf aufmerksam gemacht, daß man die gegebenen Verschiebungen zweckmäßig bei allen Verschiebungszuständen in derselben Richtung annimmt, weil sonst beim Anschreiben der Gln. (539) leicht Vorzeichenverwechslungen vorkommen können. Die Momente M_I^* haben wir in Fig. 296c dargestellt.

b) Bestimmung der Momente M_{II}^* .

Die Bestimmung der Momente M_{II}^* gestaltet sich analog wie diejenige der Momente M_I^* . Wir verschieben zunächst den „Stockwerkbalken II “, an welchem die Kraft $H = 1 \text{ t}$ angreift, d. h. einen Knotenpunkt desselben um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a) (so daß wir die bereits ermittelte M'_{II} -Momentenfläche verwenden können), wobei wir den darunterliegenden „Stockwerkbalken III “ unverschiebbar festhalten und den darüberliegenden „Stockwerkbalken I “ durch ein Rollenlager nach der Seite unverschiebbar gestalten (vgl. Fig. 277h); dabei entstehen am Stockwerkbalken I und III die in Fig. 297 eingetragenen Festhaltungskräfte D , welche mit der Erzeugungskraft Z_{II} und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den beiden Stockwerkbalken I und III gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten

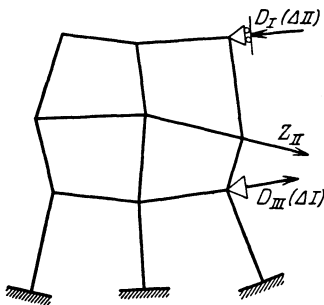


Fig. 297.

und zu den Momenten M'_{II} aus Verschiebungszustand II (Fig. 297) zusätzliche Momente hervorrufen. Die Momente M_{II}^* setzen sich also aus den Momenten für die in den Fig. 297, 297a und 297b dargestellten Belastungszustände zusammen.

Um aber die Momente für den in Fig. 297a dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den Stockwerkbalken I bzw. einen Knotenpunkt desselben, wieder zunächst um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke

wie unter a) verschieben, wobei wir die beiden darunterliegenden Stockwerkbalken *II* und *III* unverschiebbar festhalten (vgl. Fig. 277f); dabei entstehen an diesen beiden Stockwerkbalken die in Fig. 298 eingetragenen Festhaltungskräfte D , welche mit der Erzeugungskraft Z_I und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den Stockwerkbalken *II* und *III* gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D wieder in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten M'_I aus

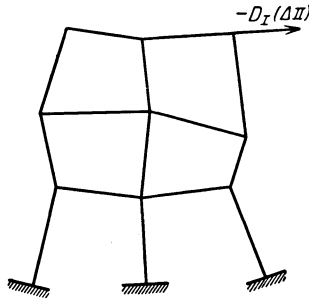


Fig. 297 a.

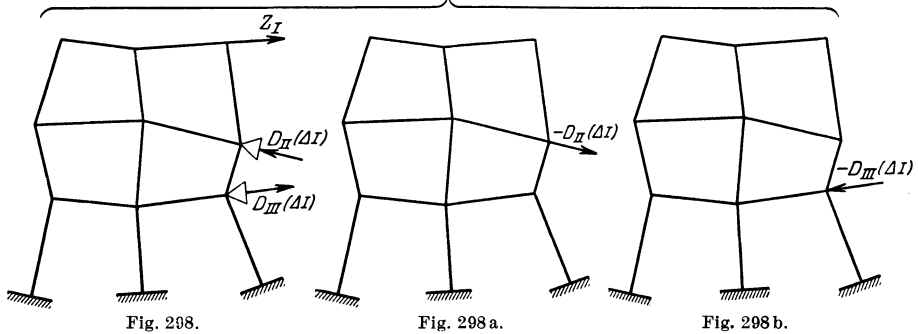


Fig. 298.

Fig. 298 a.

Fig. 298 b.

Verschiebungszustand *I* (Fig. 298) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 298 a und b).

Um ferner die Momente für den in Fig. 297 b dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den Stockwerkbalken *III*, an welchem die Belastung angreift bzw. einen Knotenpunkt desselben, um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a), verschieben, wobei wir die beiden darüberliegenden Stockwerkbalken *I* und *II* durch Rollenlager nach der Seite unverschiebbar gestalten (vgl. Fig. 277k); dann sind an den beiden festgehaltenen Stockwerkbalken nach Wegnahme der Rollenlager die in Fig. 299 eingetragenen Festhaltungskräfte D anzubringen, welche mit der Erzeugungskraft Z_{III} und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den Stockwerkbalken *I* und *II* gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten M'_{III} aus Verschiebungszustand *III* (Fig. 299) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 299 a und b).

Wir erkennen, daß die Momente M_{II}^* wie die Momente M_I^* sich aus den Momenten M'_I , M'_{II} und M'_{III} für die Verschiebungszustände *I*, *II* und *III* zu-

sammensetzen, und daß die Gleichung für das Moment M_{II}^* in irgendeinem Querschnitt des Rahmens daher ebenfalls die Form hat:

$$M_{II}^* = X_{I(II)} \cdot M'_I + X_{II(II)} \cdot M'_{II} + X_{III(II)} \cdot M'_{III}, \quad (540)$$

worin $X_{I(II)}$, $X_{II(II)}$ und $X_{III(II)}$ andere Maßzahlen als diejenigen in Gl. (538) bedeuten.

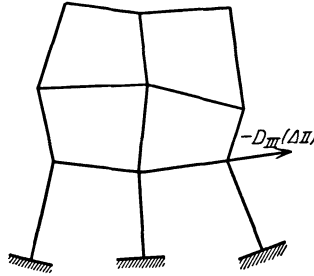


Fig. 297 b.

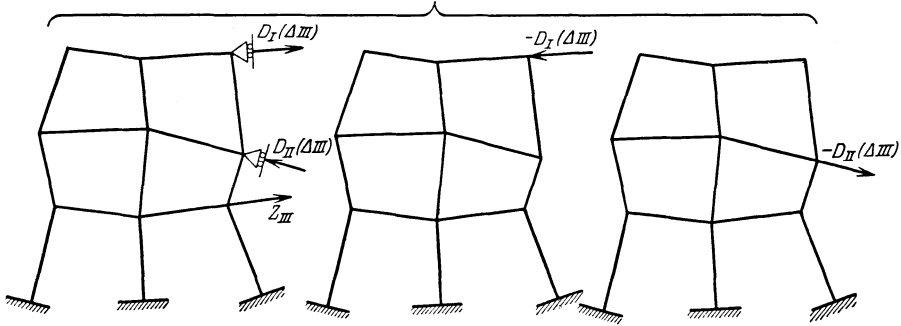


Fig. 299.

Fig. 299 a.

Fig. 299 b.

Die Größen X geben wieder den Maßstab an, in welchem die Momentenflächen M'_I , M'_{II} und M'_{III} übereinandergelegt werden müssen. Da laut Kap. V, 5 die aus den Momenten für den frei verschiebbaren Rahmen infolge $H = 1$ t am Balken II gewonnene Reaktion eines gedachten Lagers

am Stockwerkbalken, an welchem die Kraft $H = 1$ t angreift, gleich dieser Kraft, und

an jedem Stockwerkbalken, an welchem die Kraft $H = 1$ t nicht angreift, gleich Null sein muß,

so ergeben sich zur Ermittlung der drei Maßzahlen $X_{I(II)}$, $X_{II(II)}$ und $X_{III(II)}$ zur Bestimmung der Momente M_{II}^* die 3 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_{I(II)} \cdot Z_I &+ X_{II(II)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(II)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 0, \\ X_{I(II)} \cdot D_{II(\Delta I)} + X_{II(II)} \cdot Z_{II} &+ X_{III(II)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 1, \\ X_{I(II)} \cdot D_{III(\Delta I)} + X_{II(II)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(II)} \cdot Z_{III} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (541)$$

In diesem System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten sind die linken Seiten genau gleich wie im System der Gln. (539), was die Auflösung derselben vereinfacht; dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß als M' -Momentenflächen

dieselben verwendet werden, wie bei Bestimmung der Momente M_I^* . Die Momente M_{II}^* haben wir in Fig. 299c dargestellt.

c) Bestimmung der Momente M_{III}^* .

Die Bestimmung der Momente M_{III}^* gestaltet sich analog wie diejenige der Momente M_I^* und M_{II}^* . Wir verschieben zunächst den Stockwerkbalken III , an welchem die Kraft $H = 1\text{ t}$ angreift bzw. einen Knotenpunkt desselben, um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a) (so daß wir die bereits ermittelte M'_{III} -Momentenfläche verwenden können), wobei wir die beiden darüberliegenden Stockwerkbalken I und II durch Rollenlager nach der Seite unverschiebbar festhalten (vgl. Fig. 277k); dann sind an den beiden

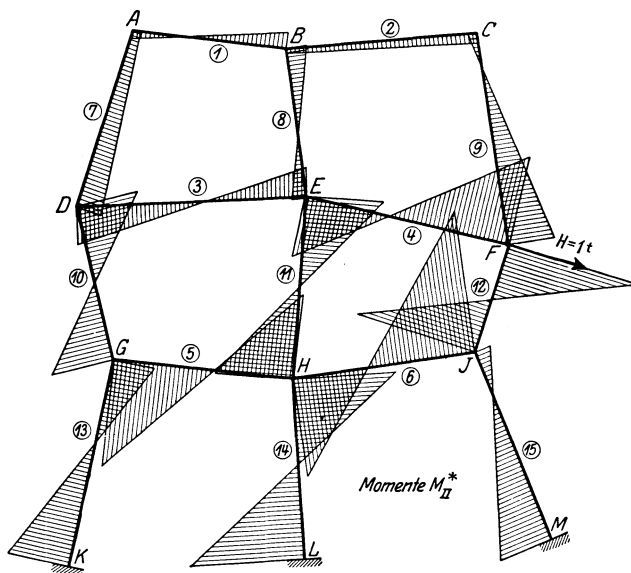


Fig. 299 c.

festgehaltenen Stockwerkbalken nach Wegnahme der Rollenlager die in Fig. 300 eingetragenen Festhaltungskräfte D anzubringen, welche mit der Erzeugungskraft Z_{III} und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den Stockwerkbalken I und II gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten M'_{III} aus Verschiebungszustand III (Fig. 300) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 300a und b). Die Momente M_{III}^* setzen sich also aus den Momenten für die in den Fig. 300, 300a und 300b dargestellten Belastungszustände zusammen.

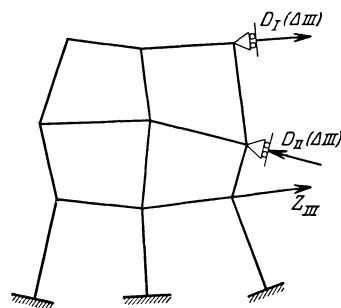


Fig. 300.

Um aber die Momente für den in Fig. 300a dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den Stockwerkbalken I bzw. einen Knotenpunkt des-

selben wieder zunächst um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleiche Strecke wie unter a) verschieben, wobei wir die beiden darunterliegenden Stockwerkbalken *II* und *III* unverschiebbar festhalten (vgl. Fig. 277f); dabei entstehen an diesen beiden Stockwerkbalken die in Fig. 301 eingetragenen Festhaltungskräfte D , welche mit der Erzeugungskraft Z_1 und den Auflagerreaktionen des

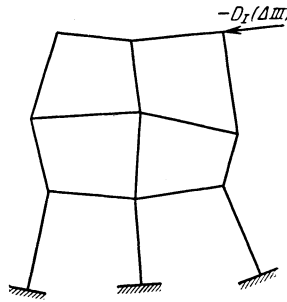


Fig. 300a.

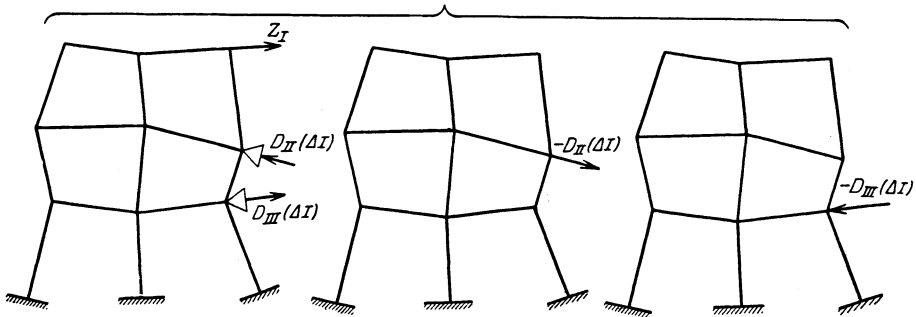


Fig. 301.

Fig. 301 a.

Fig. 301 b.

Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den Stockwerkbalken *II* und *III* gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D wieder in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten und zu den Momenten M'_I aus Verschiebungszustand *I* (Fig. 301) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 301a und b).

Um ferner die Momente für den in Fig. 300b dargestellten Belastungszustand zu erhalten, müssen wir den Stockwerkbalken *II*, an welchem die Belastung angreift bzw. einen Knotenpunkt desselben, um eine beliebige, jedoch zweckmäßig gleich groß wie unter a) gewählte Strecke verschieben, wobei wir den darunterliegenden Stockwerkbalken *III* unverschiebbar festhalten, und den darüberliegenden Stockwerkbalken *I* durch ein Rollenlager nach der Seite unverschiebbar machen (vgl. 277h); dabei entstehen am Stockwerkbalken *I* und *III* die in Fig. 302 eingetragenen Festhaltungskräfte D , welche mit der Erzeugungskraft Z_{II} und den Auflagerreaktionen des Rahmens im Gleichgewicht stehen. Wir entfernen nun die an den beiden Stockwerkbalken *I* und *III* gedachten Lager, worauf die Festhaltungskräfte D in umgekehrter Richtung in Tätigkeit treten, und zu den Momenten M'_{II}

aus Verschiebungszustand *II* (Fig. 302) zusätzliche Momente hervorrufen (Fig. 302a und b).

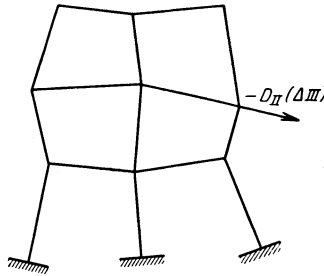


Fig. 300b.

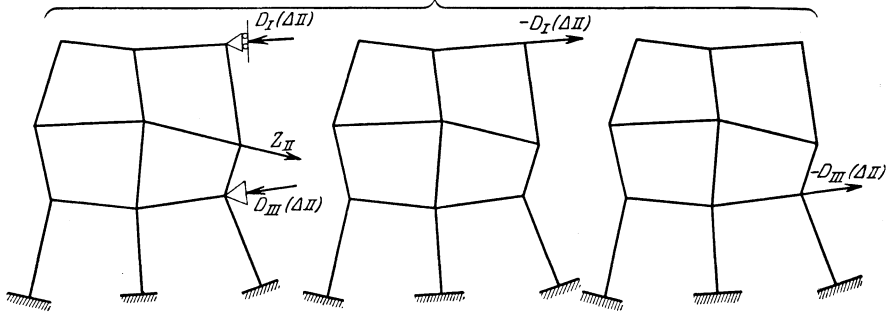


Fig. 302.

Fig. 302a.

Fig. 302b.

Wir erkennen nun, daß die Momente M_{III}^* wie die Momente M_I^* und M_{II}^* sich aus den Momenten M'_I , M'_{II} und M'_{III} für die Verschiebungszustände *I*, *II* und *III* zusammensetzen, und daß die Gleichung für das Moment M_{III}^* in irgendeinem Querschnitt des Rahmens daher ebenfalls die Form hat:

$$M_{III}^* = X_{I(III)} \cdot M'_I + X_{II(III)} \cdot M'_{II} + X_{III(III)} \cdot M'_{III}, \quad (542)$$

worin $X_{I(III)}$, $X_{II(III)}$ und $X_{III(III)}$ jedoch wieder andere Maßzahlen als diejenigen in Gl. (538) und (540) sind.

Die Größen X geben wieder den Maßstab an, in welchem die Momentenflächen M'_I , M'_{II} und M'_{III} übereinandergelegt werden müssen. Da laut Kap. V, 5 die aus den Momenten für den frei verschiebbaren Rahmen infolge $H = 1 \text{ t}$ am Balken *III* gewonnene Reaktion eines gedachten Lagers

am Stockwerkbalken, an welchem die Kraft $H = 1 \text{ t}$ angreift, gleich dieser Kraft, und

an jedem Stockwerkbalken, an welchem die Kraft $H = 1 \text{ t}$ nicht angreift, gleich Null sein muß,

so ergeben sich zur Ermittlung der drei Maßzahlen $X_{I(III)}$, $X_{II(III)}$ und $X_{III(III)}$ zur Bestimmung der Momente M_{III}^* , welche wir in Fig. 302c dargestellt haben, die 3 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_{I(III)} \cdot Z_I &+ X_{II(III)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(III)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 0, \\ X_{I(III)} \cdot D_{II(\Delta I)} + X_{II(III)} \cdot Z_{II} &+ X_{III(III)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 0, \\ X_{I(III)} \cdot D_{III(\Delta I)} + X_{II(III)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(III)} \cdot Z_{III} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (543)$$

In diesem System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten sind die linken Seiten wieder gleich wie in den beiden Gleichungssystemen (539) und (541), was die Auflösung derselben vereinfacht; dabei ist natürlich wieder vorausgesetzt, daß als M' -Momentenflächen dieselben verwendet werden wie bei Bestimmung der Momente M_I^* und M_{II}^* .

Wir können daher die 3 Gleichungssysteme (539), (541) und (543) in folgender abgekürzter Form schreiben:

				Zur Bestimmung von		
				M_I^*	M_{II}^*	M_{III}^*
$X_I \cdot Z_I$	$+ X_{II} \cdot D_{I(\Delta II)}$	$+ X_{III} \cdot D_{I(\Delta III)}$	$=$	1	0	0
$X_I \cdot D_{II(\Delta I)}$	$+ X_{II} \cdot Z_{II}$	$+ X_{III} \cdot D_{II(\Delta III)}$	$=$	0	1	0
$X_I \cdot D_{III(\Delta I)}$	$+ X_{II} \cdot D_{III(\Delta II)}$	$+ X_{III} \cdot Z_{III}$	$=$	0	0	1

Bezüglich der Vorzeichen gilt das beim n -stöckigen Rahmen Gesagte.

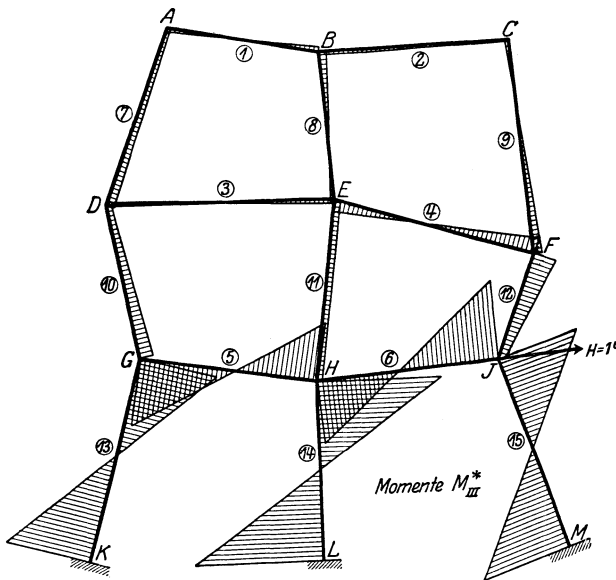


Fig. 302c.

Am 2-stöckigen Rahmen

können wir die Werte von $X_{I(I)}$ und $X_{II(I)}$ in die Gleichung für M_I^* sowie $X_{I(II)}$ und $X_{II(II)}$ in die Gleichung für M_{II}^* einsetzen, wodurch wir geschlossene Ausdrücke für M_I^* und M_{II}^* an zweistöckigen Rahmen erhalten.

Nach Gl. (538) ist:

$$M_I^* = X_{I(I)} \cdot M_I + X_{II(I)} \cdot M_{II}^*.$$

Die beiden Maßzahlen $X_{I(I)}$ und $X_{II(I)}$ erhalten wir nach Gl. (539) aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} X_{I(I)} \cdot Z_I + X_{II(I)} \cdot D_{I(\Delta II)} &= 1, \\ X_{I(I)} \cdot D_{II(\Delta I)} + X_{II(I)} \cdot Z_{II} &= 0, \end{aligned}$$

zustände $H = 1 t$ des frei verschiebbaren Rahmens benötigen. Eine Ausnahme machen nur die „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen mit Zugbändern, bei welchen mehr M^* -Momente zu bestimmen, dafür z. T. Systeme mit weniger Gleichungen aufzulösen sind (vgl. Rahmen der Fig. 258).

Die Auflösung

der n Systeme von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten kann als bekannt vorausgesetzt werden; da das vorliegende Werk jedoch vor allem dem in der Praxis stehenden Ingenieur dienen soll, so werden folgende Hinweise gegeben¹.

Die Auflösung kann erfolgen

- a) mittels Determinanten oder
- b) mittels Gaußschem Algorithmus oder
- c) mittels Elimination oder
- d) auf graphischem Wege².

Das gebräuchlichste Verfahren ist dasjenige der

a) Determinanten.

Um z. B. ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

aufzulösen, bildet man zuerst die Nennerdeterminante N , welche für x , y und z dieselbe ist, aus den Koeffizienten der Glieder mit Unbekannten in der Reihenfolge, wie sie in der Gleichung stehen, also

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = N. \quad (550)$$

Die Zählerdeterminanten erhält man dadurch, daß man in der Nennerdeterminante die a , die b oder die c durch d ersetzt, je nachdem es sich um die Berechnung der Zählerdeterminante für x , für y oder für z handelt. Dann ist:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} : N, \quad (551)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} : N, \quad (552)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} : N. \quad (553)$$

¹ Foerster: Taschenbuch für Bauingenieure, 4. Aufl., S. 49—51.

² Mehmkke: Leitfaden zum graphischen Rechnen, 1915.

Der Wert einer Determinante wird meistens nach dem allgemeinen Satz über die Auflösung von Determinanten durch fortgesetzte Zerlegung in Unterdeterminanten berechnet; es lautet dieser

Satz: Eine n -reihige Determinante ist die algebraische Summe von n Produkten, deren erste Faktoren die n Elemente einer beliebigen waagrechten oder senkrechten Reihe, und deren zweite Faktoren die n Unterdeterminanten von $(n - 1)$ Reihen, für deren Bildung aus der ursprünglichen Determinante je die beiden Reihen zu streichen sind, in welcher der erste Faktor steht; die Produkte sind abwechselungsweise positiv und negativ zu nehmen.

Es ist daher:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{oder} = c_3 \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 d_1 \\ a_2 b_2 c_2 d_2 \\ a_3 b_3 c_3 d_3 \\ a_4 b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} c_2 d_2 a_2 \\ c_3 d_3 a_3 \\ c_4 d_4 a_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 c_2 b_2 \\ d_3 c_3 b_3 \\ d_4 c_4 b_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \\ a_4 b_4 c_4 \end{vmatrix}$$

$$\text{oder} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 d_3 \\ b_4 c_4 d_4 \\ b_1 c_1 d_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_4 c_4 d_4 \\ b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_2 d_2 \\ b_3 c_3 d_3 \end{vmatrix}.$$

Ferner hat man folgende

Nebensätze: 1. Bei Vertauschung einer Zeile (waagrechte Reihe) und einer Kolonne (senkrechte Reihe) ändert die Determinante ihren Wert nicht,

$$\text{also: } \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Bei Vertauschung zweier paralleler Reihen (waagrechte oder senkrechte) behält die Determinante denselben absoluten Wert, ändert aber ihr Vorzeichen,

$$\text{z. B. } \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 c_1 b_1 \\ a_2 c_2 b_2 \\ a_3 c_3 b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 b_3 c_3 \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix}.$$

3. Multipliziert man alle Elemente einer Reihe mit demselben Faktor, so wird dadurch die Determinante selbst mit diesem Faktor multipliziert,

$$\text{z. B. } \begin{vmatrix} -6 & -8 & -3 \\ -12 & -16 & 0 \\ -12 & -29 & -5 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 2 & -16 & 0 \\ 2 & -29 & -5 \end{vmatrix}.$$

4. Ändert man die Vorzeichen sämtlicher Elemente irgendeiner Reihe, so behält die Determinante denselben absoluten Wert, ändert aber ihr Vorzeichen,

$$\text{z. B. } -6 \begin{vmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 2 & -16 & 0 \\ 2 & -29 & -5 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & 16 & 0 \\ 2 & 29 & -5 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 16 & 0 \\ 2 & 29 & 5 \end{vmatrix}$$

Es sei nun auf folgende

Reduktions-Sätze¹

aufmerksam gemacht, mit deren Hilfe die Berechnung des Wertes einer Determinante sich ganz bedeutend vereinfacht.

1. Sind alle Elemente einer Reihe (Zeile oder Kolonne) mit Ausnahme eines einzigen gleich Null, so reduziert sich die Determinante auf das Produkt dieses einen Elementes mit der zu ihm gehörigen Unterdeterminante.

$$\begin{aligned} \text{So ist z. B. } & \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \\ \text{ebenso} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (553a)$$

2. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man in dem System der Elemente an Stelle jedes Gliedes einer beliebigen Reihe (Zeile oder Kolonne) die Summe desselben Gliedes und des Produktes des entsprechenden Gliedes einer parallelen Reihe mit demselben beliebigen Faktor setzt.

$$\text{Also z. B. } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ (a_2 + k \cdot a_1) & (b_2 + k \cdot b_1) & (c_2 + k \cdot c_1) \\ (a_3 + m \cdot a_1) & (b_3 + m \cdot b_1) & (c_3 + m \cdot c_1) \end{vmatrix}. \quad (553b)$$

Wählen wir nun die Werte k und m derart, daß

$$a_2 + k \cdot a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 + m \cdot a_1 = 0,$$

also

$$k = -\frac{a_2}{a_1} \quad \text{und} \quad m = -\frac{a_3}{a_1},$$

so reduzieren wir damit die Determinante auf diejenige der Gl. (553a), auf welche wir den Reduktionssatz 1 anwenden können und erhalten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & (b_2 + k \cdot b_1) & (c_2 + k \cdot c_1) \\ 0 & (b_3 + m \cdot b_1) & (c_3 + m \cdot c_1) \end{vmatrix} = a_1 \{(b_2 + k \cdot b_1)(c_3 + m \cdot c_1) - (b_3 + m \cdot b_1)(c_2 + k \cdot c_1)\}. \quad (553c)$$

Diese Beziehung verwendet man zweckmäßig beim Auflösen von Gleichungen mittels der Determinanten; an Stelle der Zeilen können auch die Kolonnen mit dem beliebigen Faktor multipliziert werden.

¹ Schlömilch: Handb. d. Mathem., 2. Aufl., I. Bd., Erstes Buch, § 39.

Um beispielsweise die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 3 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{matrix}$$

zu berechnen, kann man die erste Zeile der Reihe nach mit -2 , -3 und -4 multiplizieren und dann entsprechend zu der zweiten, dritten und vierten Kolonne addieren; die Faktoren schreiben wir zweckmäßig in die Flucht derjenigen Reihe, zu welcher das Produkt addiert werden soll. Man erhält dann

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & 3 \\ 0 & -12 & -16 & 0 \\ 0 & -12 & -29 & -5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -6 & -8 & -3 \\ -12 & -16 & 0 \\ -12 & -29 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -2 \end{matrix}$$

Multipliziert man jetzt die erste Zeile der neuen Determinante mit -2 und addiert das Produkt zu der zweiten und dritten Zeile, so erhält man

$$\begin{vmatrix} -6 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & +6 \\ 0 & -13 & +1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 0 & +6 \\ -13 & +1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 6 \cdot 13 = -468.$$

Da in der Praxis an mehrstöckigen Tragwerken (auch „nach der Seite“ mehrstöckig) vor allem 2-, 3-, 4- und 5stöckige Rahmen vorkommen, so werden im folgenden noch die Werte der Unbekannten (Maßzahlen) für die zur Berechnung der M^* -Momente an diesen Rahmen anzuschreibenden

$$\begin{array}{l} 2 \text{ Systeme von } 2 \text{ Gleichungen mit } 2 \text{ Unbekannten} \\ 3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 3 \quad \text{,,} \\ 4 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 4 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 4 \quad \text{,,} \\ 5 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 5 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad 5 \quad \text{,,} \end{array}$$

in geschlossenen Ausdrücken angegeben.

a) 2 Systeme von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x_1 + b_1 y_1 = 1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 = 0 \end{array} \right\} \text{System 1,}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x_2 + b_1 y_2 = 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 = 1 \end{array} \right\} \text{System 2.}$$

Lösung:

$$x_1 = \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad y_1 = \frac{-a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (554)$$

$$x_2 = \frac{-b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad y_2 = \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (555)$$

b) 3 Systeme von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 = 1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 = 0 \\ a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 = 0 \end{array} \right\} \text{System 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 &= 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 &= 1 \\ a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 2.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 &= 0 \\ a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3 &= 0 \\ a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{System 3.}$$

Lösung:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1}{N}, & y_1 &= \frac{Y_1}{N}, & z_1 &= \frac{Z_1}{N} \\ x_2 &= \frac{X_2}{N}, & y_2 &= \frac{Y_2}{N}, & z_2 &= \frac{Z_2}{N} \\ x_3 &= \frac{X_3}{N}, & y_3 &= \frac{Y_3}{N}, & z_3 &= \frac{Z_3}{N} \end{aligned} \right\} \quad (556)$$

worin:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + (b_2 c_3 - b_3 c_2) \\ Y_1 &= - (a_2 c_3 - a_3 c_2) \\ Z_1 &= + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \end{aligned} \right\} \quad (557)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= - (b_1 c_3 - b_3 c_1) \\ Y_2 &= + (a_1 c_3 - a_3 c_1) \\ Z_2 &= - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \end{aligned} \right\} \quad (558)$$

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ Y_3 &= - (a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ Z_3 &= + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned} \right\} \quad (559)$$

$$\left. \begin{aligned} N &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \\ &= b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 \\ &= c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3 \\ &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \end{aligned} \right\} \quad (560)$$

c) 4 Systeme von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten.

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1 v_1 &= 1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 + d_2 v_1 &= 0 \\ a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 + d_3 v_1 &= 0 \\ a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4 v_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1 v_2 &= 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 + d_2 v_2 &= 1 \\ a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 + d_3 v_2 &= 0 \\ a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4 v_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 2.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 + d_1 v_3 &= 0 \\ a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3 + d_2 v_3 &= 0 \\ a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 + d_3 v_3 &= 1 \\ a_4 x_3 + b_4 y_3 + c_4 z_3 + d_4 v_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 3.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1 z_4 + d_1 v_4 &= 0 \\ a_2 x_4 + b_2 y_4 + c_2 z_4 + d_2 v_4 &= 0 \\ a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3 z_4 + d_3 v_4 &= 0 \\ a_4 x_4 + b_4 y_4 + c_4 z_4 + d_4 v_4 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{System 4.}$$

Lösung:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1}{N}, & y_1 &= \frac{Y_1}{N}, & z_1 &= \frac{Z_1}{N}, & v_1 &= \frac{V_1}{N} \\ x_2 &= \frac{X_2}{N}, & y_2 &= \frac{Y_2}{N}, & z_2 &= \frac{Z_2}{N}, & v_2 &= \frac{V_2}{N} \\ x_3 &= \frac{X_3}{N}, & y_3 &= \frac{Y_3}{N}, & z_3 &= \frac{Z_3}{N}, & v_3 &= \frac{V_3}{N} \\ x_4 &= \frac{X_4}{N}, & y_4 &= \frac{Y_4}{N}, & z_4 &= \frac{Z_4}{N}, & v_4 &= \frac{V_4}{N} \end{aligned} \right\} \quad (561)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= +b_2 \underbrace{(c_2 d_4 - c_4 d_3)}_{= k_2} - b_3 \underbrace{(c_2 d_4 - c_4 d_2)}_{= k_3} + b_4 \underbrace{(c_2 d_3 - c_3 d_2)}_{= k_4} \\ Y_1 &= -a_2 \cdot k_2 + a_3 \cdot k_3 - a_4 \cdot k_4 \\ Z_1 &= +d_2 \underbrace{(a_3 b_4 - a_4 b_3)}_{= m_2} - d_3 \underbrace{(a_2 b_4 - a_4 b_2)}_{= m_3} + d_4 \underbrace{(a_2 b_3 - a_2 b_2)}_{= m_4} \\ V_1 &= -c_2 \cdot m_2 + c_3 \cdot m_3 - c_4 \cdot m_4 \end{aligned} \right\} \quad (562)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= -b_1 \underbrace{(c_3 d_4 - c_4 d_3)}_{= n_1 = k_2} + b_3 \underbrace{(c_1 d_4 - c_4 d_1)}_{= n_3} - b_4 \underbrace{(c_1 d_3 - c_3 d_1)}_{= n_4} \\ Y_2 &= +a_1 \cdot n_1 - a_3 \cdot n_3 + a_4 \cdot n_4 \\ Z_2 &= -d_1 \underbrace{(a_3 b_4 - a_4 b_3)}_{= p_1} + d_3 \underbrace{(a_1 b_4 - a_4 b_1)}_{= p_3} - d_4 \underbrace{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}_{= p_4} \\ V_2 &= +c_1 \cdot p_1 - c_3 \cdot p_3 + c_4 \cdot p_4 \end{aligned} \right\} \quad (563)$$

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= +b_1 \underbrace{(c_2 d_4 - c_4 d_2)}_{= q_1 = k_2} - b_2 \underbrace{(c_1 d_4 - c_4 d_1)}_{= q_2 = n_3} + b_4 \underbrace{(c_1 d_2 - c_2 d_1)}_{= q_4} \\ Y_3 &= -a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_2 - a_4 \cdot q_4 \\ Z_3 &= +d_1 \underbrace{(a_2 b_4 - a_4 b_2)}_{= r_1} - d_2 \underbrace{(a_1 b_4 - a_4 b_1)}_{= r_2} + d_4 \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{= r_4} \\ V_3 &= -c_1 \cdot r_1 + c_2 \cdot r_2 - c_4 \cdot r_4 \end{aligned} \right\} \quad (564)$$

$$\left. \begin{aligned} X_4 &= -b_1 \underbrace{(c_2 d_3 - c_3 d_2)}_{= s_1} + b_2 \underbrace{(c_1 d_3 - c_3 d_1)}_{= s_2} - b_3 \underbrace{(c_1 d_2 - c_2 d_1)}_{= s_3 = q_4} \\ Y_4 &= +a_1 \cdot s_1 - a_2 \cdot s_2 + a_3 \cdot s_3 \\ Z_4 &= -d_1 \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{= t_1} + d_2 \underbrace{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}_{= t_2} - d_3 \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{= t_3} \\ V_4 &= +c_1 \cdot t_1 - c_2 \cdot t_2 + c_3 \cdot t_3 \end{aligned} \right\} \quad (565)$$

$$\left. \begin{aligned} N &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 ; \\ &= b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4 ; \\ &= c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3 + c_4 Z_4 ; \\ &= d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 V_3 + d_4 V_4 ; \\ &= a_1 (b_2 \cdot k_2 - b_3 \cdot k_3 + b_4 \cdot k_4) \\ &\quad - a_2 (b_1 \cdot n_1 - b_3 \cdot n_3 + b_4 \cdot n_4) \\ &\quad + a_3 (b_1 \cdot q_1 - b_2 \cdot q_2 + b_4 \cdot q_4) \\ &\quad - a_4 (b_1 \cdot s_1 - b_2 \cdot s_2 + b_3 \cdot s_3) . \end{aligned} \right\} \quad (566)$$

d) 5 Systeme von 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten.

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1 v_1 + e_1 w_1 &= 1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 + d_2 v_1 + e_2 w_1 &= 0 \\ a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 + d_3 v_1 + e_3 w_1 &= 0 \\ a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4 v_1 + e_4 w_1 &= 0 \\ a_5 x_1 + b_5 y_1 + c_5 z_1 + d_5 v_1 + e_5 w_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1 v_2 + e_1 w_2 &= 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 + d_2 v_2 + e_2 w_2 &= 1 \\ a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 + d_3 v_2 + e_3 w_2 &= 0 \\ a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4 v_2 + e_4 w_2 &= 0 \\ a_5 x_2 + b_5 y_2 + c_5 z_2 + d_5 v_2 + e_5 w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 2.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 + d_1 v_3 + e_1 w_3 &= 0 \\ a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3 + d_2 v_3 + e_2 w_3 &= 0 \\ a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 + d_3 v_3 + e_3 w_3 &= 1 \\ a_4 x_3 + b_4 y_3 + c_4 z_3 + d_4 v_3 + e_4 w_3 &= 0 \\ a_5 x_3 + b_5 y_3 + c_5 z_3 + d_5 v_3 + e_5 w_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 3.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1 z_4 + d_1 v_4 + e_1 w_4 &= 0 \\ a_2 x_4 + b_2 y_4 + c_2 z_4 + d_2 v_4 + e_2 w_4 &= 0 \\ a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3 z_4 + d_3 v_4 + e_3 w_4 &= 0 \\ a_4 x_4 + b_4 y_4 + c_4 z_4 + d_4 v_4 + e_4 w_4 &= 1 \\ a_5 x_4 + b_5 y_4 + c_5 z_4 + d_5 v_4 + e_5 w_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{System 4.}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_5 + b_1 y_5 + c_1 z_5 + d_1 v_5 + e_1 w_5 &= 0 \\ a_2 x_5 + b_2 y_5 + c_2 z_5 + d_2 v_5 + e_2 w_5 &= 0 \\ a_3 x_5 + b_3 y_5 + c_3 z_5 + d_3 v_5 + e_3 w_5 &= 0 \\ a_4 x_5 + b_4 y_5 + c_4 z_5 + d_4 v_5 + e_4 w_5 &= 0 \\ a_5 x_5 + b_5 y_5 + c_5 z_5 + d_5 v_5 + e_5 w_5 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{System 5.}$$

Lösung:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1}{N}, & y_1 &= \frac{Y_1}{N}, & z_1 &= \frac{Z_1}{N}, & v_1 &= \frac{V_1}{N}, & w_1 &= \frac{W_1}{N} \\ x_2 &= \frac{X_2}{N}, & y_2 &= \frac{Y_2}{N}, & z_2 &= \frac{Z_2}{N}, & v_2 &= \frac{V_2}{N}, & w_2 &= \frac{W_2}{N} \\ x_3 &= \frac{X_3}{N}, & y_3 &= \frac{Y_3}{N}, & z_3 &= \frac{Z_3}{N}, & v_3 &= \frac{V_3}{N}, & w_3 &= \frac{W_3}{N} \\ x_4 &= \frac{X_4}{N}, & y_4 &= \frac{Y_4}{N}, & z_4 &= \frac{Z_4}{N}, & v_4 &= \frac{V_4}{N}, & w_4 &= \frac{W_4}{N} \\ x_5 &= \frac{X_5}{N}, & y_5 &= \frac{Y_5}{N}, & z_5 &= \frac{Z_5}{N}, & v_5 &= \frac{V_5}{N}, & w_5 &= \frac{W_5}{N} \end{aligned} \right\} (567)$$

hierin ist einzusetzen:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= + b_2 C_1 - b_3 C_2 + b_4 C_3 - b_5 C_4 \\ Y_1 &= - a_2 C_1 + a_3 C_2 - a_4 C_3 + a_5 C_4 \\ Z_1 &= + a_2 C_5 - a_3 C_6 + a_4 C_7 - a_5 C_8 \\ V_1 &= - a_2 C_9 + a_3 C_{10} - a_4 C_{11} + a_5 C_{12} \\ W_1 &= + a_2 C_{13} - a_3 C_{14} + a_4 C_{15} - a_5 C_{16} \end{aligned} \right\} \text{System 1.} \quad (568)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= - b_1 C_1 + b_3 C_{17} - b_4 C_{18} + b_5 C_{19} \\ Y_2 &= + a_1 C_1 - a_3 C_{17} + a_4 C_{18} - a_5 C_{19} \\ Z_2 &= - a_1 C_5 + a_3 C_{20} - a_4 C_{21} + a_5 C_{22} \\ V_2 &= + a_1 C_9 - a_3 C_{23} + a_4 C_{24} - a_5 C_{25} \\ W_2 &= - a_1 C_{13} + a_3 C_{26} - a_4 C_{27} + a_5 C_{28} \end{aligned} \right\} \text{System 2.} \quad (569)$$

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= + b_1 C_2 - b_2 C_{17} + b_4 C_{29} - b_5 C_{30} \\ Y_3 &= - a_1 C_2 + a_2 C_{17} - a_4 C_{29} + a_5 C_{30} \\ Z_3 &= + a_1 C_6 - a_2 C_{20} + a_4 C_{31} - a_5 C_{32} \\ V_3 &= - a_1 C_{10} + a_2 C_{23} - a_4 C_{33} + a_5 C_{34} \\ W_3 &= + a_1 C_{14} - a_2 C_{26} + a_4 C_{35} - a_5 C_{36} \end{aligned} \right\} \text{System 3.} \quad (570)$$

$$\left. \begin{aligned} X_4 &= - b_1 C_3 + b_2 C_{37} - b_3 C_{38} + b_5 C_{39} \\ Y_4 &= + a_1 C_3 - a_2 C_{37} + a_3 C_{38} - a_5 C_{39} \\ Z_4 &= - a_1 C_7 + a_2 C_{21} - a_3 C_{31} + a_5 C_{40} \\ V_4 &= + a_1 C_{11} - a_2 C_{24} + a_3 C_{33} - a_5 C_{41} \\ W_4 &= - a_1 C_{15} + a_2 C_{27} - a_3 C_{35} + a_5 C_{42} \end{aligned} \right\} \text{System 4.} \quad (571)$$

$$\left. \begin{aligned} X_5 &= + b_1 C_4 - b_2 C_{43} + b_3 C_{44} - b_4 C_{45} \\ Y_5 &= - a_1 C_4 + a_2 C_{43} - a_3 C_{44} + a_4 C_{45} \\ Z_5 &= + a_1 C_8 - a_2 C_{22} + a_3 C_{32} - a_4 C_{40} \\ V_5 &= - a_1 C_{12} + a_2 C_{25} - a_3 C_{34} + a_4 C_{41} \\ W_5 &= + a_1 C_{16} - a_2 C_{28} + a_3 C_{36} - a_4 C_{42} \end{aligned} \right\} \text{System 5.} \quad (572)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= b_1 c_2 - b_2 c_1 & k_{11} &= d_1 e_2 - d_2 e_1 \\ k_2 &= b_1 c_3 - b_3 c_1 & k_{12} &= d_1 e_3 - d_3 e_1 \\ k_3 &= b_1 c_4 - b_4 c_1 & k_{13} &= d_1 e_4 - d_4 e_1 \\ k_4 &= b_1 c_5 - b_5 c_1 & k_{14} &= d_1 e_5 - d_5 e_1 \\ k_5 &= b_2 c_3 - b_3 c_2 & k_{15} &= d_2 e_3 - d_3 e_2 \\ k_6 &= b_2 c_4 - b_4 c_2 & k_{16} &= d_2 e_4 - d_4 e_2 \\ k_7 &= b_2 c_5 - b_5 c_2 & k_{17} &= d_2 e_5 - d_5 e_2 \\ k_8 &= b_3 c_4 - b_4 c_3 & k_{18} &= d_3 e_4 - d_4 e_3 \\ k_9 &= b_3 c_5 - b_5 c_3 & k_{19} &= d_3 e_5 - d_5 e_3 \\ k_{10} &= b_4 c_5 - b_5 c_4 & k_{20} &= d_4 e_5 - d_5 e_4 \end{aligned} \right\} \quad (573)$$

$$\left. \begin{array}{lll}
 C_1 = c_3 k_{20} - c_4 k_{19} + c_5 k_{18} & C_{16} = d_2 k_8 - d_3 k_6 + d_4 k_5 & C_{31} = b_1 k_{17} - b_2 k_{14} + b_5 k_{11} \\
 C_2 = c_2 k_{20} - c_4 k_{17} + c_5 k_{16} & C_{17} = c_1 k_{20} - c_4 k_{14} + c_5 k_{13} & C_{32} = b_1 k_{16} - b_2 k_{13} + b_4 k_{11} \\
 C_3 = c_2 k_{19} - c_3 k_{17} + c_5 k_{15} & C_{18} = c_1 k_{19} - c_3 k_{14} + c_5 k_{12} & C_{33} = e_1 k_7 - e_2 k_4 + e_5 k_1 \\
 C_4 = c_2 k_{18} - c_3 k_{16} + c_4 k_{15} & C_{19} = c_1 k_{18} - c_3 k_{13} + c_4 k_{12} & C_{34} = e_1 k_6 - e_2 k_3 + e_4 k_1 \\
 C_5 = b_3 k_{20} - b_4 k_{19} + b_5 k_{18} & C_{20} = b_1 k_{20} - b_4 k_{14} + b_5 k_{13} & C_{35} = d_1 k_7 - d_2 k_4 + d_5 k_1 \\
 C_6 = b_2 k_{20} - b_4 k_{17} + b_5 k_{16} & C_{21} = b_1 k_{19} - b_3 k_{14} + b_5 k_{12} & C_{36} = d_1 k_6 - d_2 k_3 + d_4 k_1 \\
 C_7 = b_2 k_{19} - b_3 k_{17} + b_5 k_{15} & C_{22} = b_1 k_{18} - b_3 k_{13} + b_4 k_{12} & C_{37} = c_1 k_{19} - c_3 k_{14} + c_5 k_{12} \\
 C_8 = b_2 k_{18} - b_3 k_{16} + b_4 k_{15} & C_{23} = e_1 k_{10} - e_4 k_4 + e_5 k_3 & C_{38} = c_1 k_{17} - c_2 k_{14} + c_5 k_{11} \\
 C_9 = e_3 k_{10} - e_4 k_9 + e_5 k_8 & C_{24} = e_1 k_9 - e_3 k_4 + e_5 k_2 & C_{39} = c_1 k_{15} - c_2 k_{12} + c_3 k_{11} \\
 C_{10} = e_2 k_{10} - e_4 k_7 + e_5 k_6 & C_{25} = e_1 k_8 - e_3 k_3 + e_4 k_2 & C_{40} = b_1 k_{15} - b_2 k_{12} + b_3 k_{11} \\
 C_{11} = e_2 k_9 - e_3 k_7 + e_5 k_5 & C_{26} = d_1 k_{10} - d_4 k_4 + d_5 k_3 & C_{41} = e_1 k_5 - e_2 k_2 + e_3 k_1 \\
 C_{12} = e_2 k_8 - e_3 k_6 + e_4 k_5 & C_{27} = d_1 k_9 - d_3 k_4 + d_5 k_2 & C_{42} = d_1 k_5 - d_2 k_2 + d_3 k_1 \\
 C_{13} = d_3 k_{10} - d_4 k_9 + d_5 k_8 & C_{28} = d_1 k_8 - d_3 k_3 + d_4 k_2 & C_{43} = c_1 k_{18} - c_3 k_{13} + c_4 k_{12} \\
 C_{14} = d_2 k_{10} - d_4 k_7 + d_5 k_6 & C_{29} = c_1 k_{17} - c_2 k_{14} + c_5 k_{11} & C_{44} = c_1 k_{16} - c_2 k_{13} + c_4 k_{11} \\
 C_{15} = d_2 k_9 - d_3 k_7 + d_5 k_5 & C_{30} = c_1 k_{16} - c_2 k_{11} + c_4 k_{11} & C_{45} = c_1 k_{15} - c_2 k_{12} + c_3 k_{11}
 \end{array} \right\} (573a)$$

$$\left. \begin{array}{ll}
 N = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5; & N = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3 + b_4 Y_4 + b_5 Y_5; \\
 N = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3 + c_4 Z_4 + c_5 Z_5; & N = d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 V_3 + d_4 V_4 + d_5 V_5; \\
 N = e_1 W_1 + e_2 W_2 + e_3 W_3 + e_4 W_4 + e_5 W_5. &
 \end{array} \right\} (574)$$

b) Gaußscher Algorithmus.

Das allgemein unter dem Namen Gaußscher Algorithmus bekannte Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten beruht auf der systematischen Elimination der Unbekannten. Durch bestimmte Rechnungsvorschriften ist es Gauß gelungen, die Auflösungsarbeit solcher Systeme auf ein Minimum zu reduzieren. Weiter hat diese Methode die großen Vorteile der Übersichtlichkeit (vgl. Tabellen Tafel II und XI)¹ der Rechnungskontrollen und des Herabsetzens der Rechnungsungenauigkeiten. Auf diese einzelnen Punkte wird weiter unten während der Entwicklung des Verfahrens eingegangen.

Schon ein oberflächlicher Vergleich zwischen der Determinanten- und der Gaußschen Methode läßt diese für Systeme von 4 und mehr Unbekannten als die geeignetere erscheinen.

Vorerst soll die Auflösung des folgenden allgemeinen Systemes gezeigt werden, ohne Berücksichtigung der speziellen Verhältnisse bei der Ermittlung der M^* -Momente.

$$(a) X_1 + (ab) X_2 + (ac) X_3 + \dots + (ak) X_k + \dots + (an) X_n + (ao) = 0, \quad (1)$$

$$(b) X_1 + (bb) X_2 + (bc) X_3 + \dots + (bk) X_k + \dots + (bn) X_n + (bo) = 0, \quad (2)$$

$$(c) X_1 + (cb) X_2 + (cc) X_3 + \dots + (ck) X_k + \dots + (cn) X_n + (co) = 0, \quad (3)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$(k) X_1 + (kb) X_2 + (kc) X_3 + \dots + (kk) X_k + \dots + (kn) X_n + (ko) = 0, \quad (k)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$(n) X_1 + (nb) X_2 + (nc) X_3 + \dots + (nk) X_k + \dots + (nn) X_n + (no) = 0. \quad (n)$$

¹ Die Tafeln II von Band I und XI von Band II befinden sich am Schluß des Buches.

In der gewählten Bezeichnung der Koeffizienten zeigt der erste Buchstabe die Zeile an, der zweite die Kolonne in der sich die Vorzahl befindet.

In der allgemein üblichen abgekürzten Form lautet obiges Gleichungssystem:

Unbekannte								Absolutglieder
	X_1	X_2	X_3	...	X_k	...	X_n	
(1)	(aa)	(ab)	(ac)	...	(ak)	...	(an)	(ao)
(2)	(ba)	(bb)	(bc)	...	(bk)	...	(bn)	(bo)
(3)	(ca)	(cb)	(cc)	...	(ck)	...	(cn)	(co)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(k)	(ka)	(kb)	(kc)	...	(kk)	...	(kn)	(ko)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(n)	(na)	(nb)	(nc)	...	(nk)	...	(nn)	(no)

Für die ganze folgende Untersuchung wird diese übersichtliche Darstellung verwendet, die klar die Matrix (Vorzahlen der Unbekannten) von den Absolutgliedern trennt.

Wir zeigen nun den allgemeinen Gaußschen Algorithmus oder das allgemeine Gaußsche Reduktionsverfahren an einem Beispiel mit 3 Unbekannten, um dann die erkannten Regeln für den allgemeinen Fall umzuarbeiten.

Die 3 Gleichungen mit den 3 Unbekannten lauten:

	X_1	X_2	X_3	Absolutglieder
(1)	(aa)	(ab)	(ac)	(ao)
(2)	(ba)	(bb)	(bc)	(bo)
(3)	(ca)	(cb)	(cc)	(co)

Gleichung (1), die wir konsequenterweise als nullte Reduktionsstufe bezeichnen, wird mit $-\frac{(ba)}{(aa)}$ multipliziert und dazu Gleichung (2) addiert. Die einmal reduzierte zweite Gleichung lautet:

$$\left\{ -\frac{(ba)}{(aa)} \cdot (aa) + (ba) \right\} X_1 + \left\{ -\frac{(ba)}{(aa)} \cdot (ab) + (bb) \right\} X_2 + \left\{ -\frac{(ba)}{(aa)} \cdot (ac) + (bc) \right\} X_3 + \left\{ -\frac{(ba)}{(aa)} \cdot (ao) + (bo) \right\} = 0. \quad (I)$$

In dieser Gleichung verschwindet X_1 und sie lautet unter Verwendung der gebräuchlichen Bezeichnung der einmal reduzierten Koeffizienten:

$$(bb \cdot 1) X_2 + (bc \cdot 1) X_3 + (bo \cdot 1) = 0. \quad (I)$$

Wird nun Gleichung (1) mit $-\frac{(ca)}{(aa)}$ multipliziert und zu Gleichung (3) addiert, so lautet die einmal reduzierte dritte Gleichung:

$$(cb \cdot 1) X_2 + (cc \cdot 1) X_3 + (co \cdot 1) = 0. \quad (Ia)$$

Aus den beiden Gleichungen (I) und (Ia) wird X_2 eliminiert, indem die mit $-\frac{(cb \cdot 1)}{(bb \cdot 1)}$ multiplizierte Gleichung (I) zu (Ia) addiert wird. Das Resultat dieser Operation ist die zweimal reduzierte Gleichung:

$$\left\{ -\frac{(cb \cdot 1)}{(bb \cdot 1)} \cdot (bc \cdot 1) + (cc \cdot 1) \right\} X_3 + \left\{ -\frac{(cb \cdot 1)}{(bb \cdot 1)} \cdot (bo \cdot 1) + (co \cdot 1) \right\} = 0 \quad (II)$$

oder mit den üblichen Bezeichnungen:

$$(cc \cdot 2) \cdot X_3 + (co \cdot 2) = 0. \quad (II)$$

Diese zweimal reduzierte Gleichung wird direkt erhalten, ohne Anschreiben der Gleichung (Ia), wenn zu der Gleichung (3) die mit $-\frac{(ac)}{(aa)}$ multiplizierte nullte Reduktionsstufe und die mit $-\frac{(cb \cdot 1)}{(bb \cdot 1)}$ multiplizierte erste Reduktionsstufe addiert wird. Das Gaußsche Eliminationsverfahren verlangt also nicht die Kenntnis aller Zwischenkoeffizienten, sondern es genügt allein den Koeffizienten $(cb \cdot 1)$ dieser Zwischenreduktionsstufe zu ermitteln.

Aus Gleichung (II) ist $X_3 = -\frac{(co \cdot 2)}{(cc \cdot 2)}$ bekannt. Durch Einsetzen von X_3 in die erste Reduktionsstufe wird X_2 erhalten.

$$X_2 = -\frac{(bo \cdot 1)}{(bb \cdot 1)} \frac{(bc \cdot 1)}{(bb \cdot 1)} \cdot X_3.$$

Aus der nullten Reduktionsstufe ergibt sich endlich

$$X_1 = -\frac{(ao)}{(aa)} - \frac{(ab)}{(aa)} \cdot X_2 - \frac{(ac)}{(aa)} \cdot X_3.$$

Die am speziellen Beispiel gemachten Erfahrungen lassen sich in folgenden Sätzen verallgemeinern:

1. Die Gleichung der k -Reduktionsstufe beginnt mit X_k .
2. Die Vorzahlen von $X_k, X_{k-1} \dots X_n$ werden erhalten durch Addition der darüberstehenden Vorzahlen, der mit den Reduktionskoeffizienten multiplizierten Gleichungen der nullten bis $(k-1)$ ten Reduktionsstufe.
3. Der Nenner der Reduktionskoeffizienten enthält die Vorzahlen der rechtsfallenden Diagonalen (Hauptdiagonalen), der Zähler ergibt sich aus der negativ genommenen Reduktion der folgenden Gleichungen links der Hauptdiagonalen.
4. Die aufeinanderfolgenden reduzierten Gleichungen der nullten bis $(n-1)$ ten Reduktionsstufe bilden ein System von Rekursionsgleichungen mit dreieckförmiger Matrix.
5. Aus der letzten Gleichung ergibt sich die Unbekannte rechts außen X_n , und durch schrittweises Rückwärtseinsetzen in die Reduktionsgleichungen folgen die übrigen Unbekannten in der Reihenfolge von X_{n-1} bis X_1 . (Durch Vertauschen der Kolonnen kann die Reihenfolge, in der die Unbekannten ermittelt werden, beliebig festgelegt werden.)

Einleitend wurde hervorgehoben, daß ein bedeutender Vorteil der Gaußschen Methode die leicht durchzuführenden Rechnungsproben sind. Jede Reduktionsgleichung kann auf Rechnungsfehler geprüft werden durch Ermittlung ihrer Quersummen und durch deren Reduktion nach demselben Prinzip, wie die der Vorzahlen und Belastungsglieder. Wir bezeichnen die Quersummen der einzelnen Zeilen durch den zweiten Buchstaben s . Es bedeutet demnach (as) die Quersumme der Gleichung (1), (bs) diejenige der Gleichung (2) usw. bis (ns) diejenige der Gleichung n . Ebenso bezeichnet $(bs \cdot 1)$ die Quersumme der ersten Reduktionsgleichung, $(cs \cdot 2)$ diejenige der zweiten Reduktionsgleichung usw.

Es läßt sich leicht einsehen, daß in dem gewählten Beispiel für die erste Reduktionsstufe gelten muß:

$$(bs \cdot 1) = (bb \cdot 1) + (bc \cdot 1) = (bs) - \frac{(ba)}{(aa)} \cdot (as)$$

und analog für die zweite Reduktionsstufe:

$$(cs \cdot 2) = (cc \cdot 2) = (cs) - \frac{(ca)}{(aa)} \cdot (as) - \frac{(cb \cdot 1)}{(bb \cdot 1)} \cdot (bs \cdot 1).$$

Selbstredend können in die Kontrolle auch die Absolutglieder einbezogen werden; doch wird es sich empfehlen, wenn mehrere Systeme mit derselben Matrix zu behandeln sind, diese Kontrolle nur auf die linke Seite der Tabelle auszudehnen, da die Reduktion der Absolutglieder leicht für sich nachgerechnet werden können.

Als weiterer Vorteil der Gaußschen Reduktionsmethode wurde oben die Verminderung der Fehlerempfindlichkeit aufgeführt. Es ist klar, daß je kleiner die Reduktionskoeffizienten werden, um so geringer auch die Rechnungsungenauigkeiten werden müssen. Ordnen wir die größten Vorzahlen in der Hauptdiagonalen an, so fallen die Reduktionskoeffizienten klein aus, da sie im Nenner (aa) , $(bb \cdot 1)$ usw. enthalten. Durch Umstellen der Zeilen und Kolonnen kann dieser Forderung immer Rechnung getragen werden.

Wir gehen nun über zur Betrachtung der speziellen Verhältnisse wie sie bei der Ermittlung der M^* -Momente vorliegen. Im allgemeinen Fall tritt die Aufgabe auf, n Systeme mit n Gleichungen mit n Unbekannten aufzulösen. Diese n Systeme zeichnen sich aber dadurch aus, daß in jedem System nur ein Absolutglied von 0 verschieden ist. Ermitteln wir die M^* -Momente für eine Kraft $H = 1$ t, so können wir die $n \cdot n$ Gleichungen in folgender abgekürzten Form schreiben.

Unbekannte							Absolutglieder						
X_1	X_2	X_3		X_k		X_n	I	II	III		k		n
(aa)	(ab)	(ac)	...	(ak)	...	(an)	1	0	0	...	0	...	0
(ba)	(bb)	(bc)	...	(bk)	...	(bn)	0	1	0	...	0	...	0
(ca)	(cb)	(cc)	...	(ck)	...	(cn)	0	0	1	...	0	...	0
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
(ka)	(kb)	(kc)	...	(kk)	...	(kn)	0	0	0	...	1	...	0
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
(na)	(nb)	(nc)	...	(nk)	...	(nn)	0	0	0	...	0	...	1

Die Gleichungssysteme werden nun nach dem in Tabelle I Tafel II¹ beigegebenen Schema aufgelöst. Wir ersehen aus der Tabelle, daß die einmal reduzierte Matrix für alle Systeme gültig ist. Die Arbeit der Lösung aller n Systeme beschränkt sich also nur noch auf die Durchführung der Reduktion der n Absolutglieder und auf die Bestimmung der X durch Rekursion. Da die Absolutglieder rechts der Hauptdiagonalen der Absolutglieder alle gleich 0 sind, so vermindert sich die Reduktionsarbeit für jedes System, bis endlich die Lösung für das n te System direkt als $\frac{X_{n-1}}{(nn \cdot (n-1))}$ angeschrieben werden kann.

Bei symmetrischen Gebilden (z. B. symmetrische Rahmenträger) können die M' -Momente symmetrisch auftreten. Die M^* -Momente werden dann aus folgendem Gleichungsschema ermittelt:

Unbekannte							Absolutglieder						
X_1	X_2	X_3		X_{n-2}	X_{n-1}	X_n	I	II	III		$n+2$	$n+1$	n
(aa)	(ab)	(ac)	...	$(an-2)$	$(an-1)$	(an)	1	0	0	...	0	0	0
(ba)	(bb)	(bc)	...	$(bn-2)$	$(bn-1)$	(bn)	0	1	0	...	0	0	0
(ca)	(cb)	(cc)	...	$(cn-2)$	$(cn-1)$	(cn)	0	0	1	...	0	0	0
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
(cn)	$(cn-1)$	$(cn-2)$...	(cc)	(cb)	(ca)	0	0	0	...	1	0	0
(bn)	$(bn-1)$	$(bn-2)$...	(bc)	(bb)	(ba)	0	0	0	...	0	1	0
(an)	$(an-1)$	$(an-2)$...	(ac)	(ab)	(aa)	0	0	0	...	0	0	1

¹ Die Tafel II von Band I befindet sich am Schluß des Buches.

In diesem Fall mit zentraler Symmetrie der Matrix und der Absolutglieder müssen natürlich auch die M^* -Momente symmetrisch auftreten, da X_n des n ten Systemes gleich X_1 des ersten Systemes, X_1 des n ten Systemes identisch mit X_n des ersten Systemes sein muß usw.

Ist n eine gerade Zahl, dann sind die Unbekannten nur für die ersten $n/2$ Systeme zu ermitteln. Das bedeutet aber, daß nur die ersten $n/2$ Absolutglieder reduziert werden müssen, um sämtliche $n \cdot n$ Unbekannte zu erhalten. Liegt der Fall einer ungeraden Anzahl Gleichungen vor, so sind $\frac{n+1}{2}$ Systeme zu reduzieren. Dafür ist im $\frac{n+1}{2}$ ten System die Rekursion nur bis zu $\frac{X_{n+1}}{2}$ durchzuführen, da in diesem System $X_1 = X_n, X_2 = X_{n-1}$ usw. sein muß. (Natürlich könnte dieses eine System auch von vorneherein reduziert werden auf $\frac{n+1}{2}$ Unbekannte, es wird sich jedoch kaum lohnen von der Gaußschen Tabelle, in der schon die Matrix reduziert vorliegt, wegzugehen.)

Auf ein besonders einfach zu behandelndes System soll noch kurz hingewiesen werden. Für die Ermittlung der M^* -Momente hat es zwar keine Bedeutung, es tritt jedoch in der Statik häufig auf. Werden statisch unbestimmte Größen aus den Elastizitätsgleichungen ermittelt, so tritt, wegen der Gültigkeit des Satzes von Maxwell, eine zur Hauptdiagonalen symmetrische Matrix auf.

Die Matrix hat dann die nebenstehende Form:

X_1	X_2	X_3	X_4
(aa)	(ab)	(ac)	(ad)
(ab)	(bb)	(bc)	(bd)
(ac)	(bc)	(cc)	(cd)
(ad)	(bd)	(cd)	(dd)

Unter Verwendung der gebräuchlichen Abkürzung für solche Systeme lautet die allgemeine Gleichung:

Unbestimmte								Absolutglieder	
X_1	X_2	X_3	X_4	...	X_k	...	X_n	I	II usw.
(aa)	(aa)	(ac)	(ad)	...	(ak)	...	(an)	(ao)	(ao)
.	(bb)	(bc)	(bd)	...	(bk)	...	(bn)	(bo)	(bo)
.	.	(cc)	(cd)	...	(ck)	...	(cn)	(co)	(co)
⋮	⋮	⋮	(dd)	...	(dk)	...	(dn)	(do)	(do)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	...	(kk)	...	(kn)	(ko)	(ko)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
.	(nn)	(no)	(no)

Für diese bedeutend einfacher zu behandelnden Systeme sei ohne weitere Ausführung das Lösungsschema in Tabelle I Tafel II von Band I beigegeben.

3. Der Rahmenträger.

Da der Rahmenträger, wie in Kap. I dieses Teiles ausgeführt, für die Berechnung nichts anderes ist wie ein mehrstöckiger Rahmen, so werden die Momente M^* des Rahmenträgers analog wie im vorhergehenden Abschnitt für den mehrstöckigen Rahmen beschrieben, ermittelt.

Der allgemeine Rahmenträger der Fig. 303 z. B. ist für die Berechnung ein vierstöckiger Rahmen, da an demselben während Rechnungsabschnitt I vier gedachte Lager (Fig. 303a) angebracht werden müssen, um sämtliche Knotenpunkte vorübergehend unverschiebbar festzuhalten. Es sind daher zur Bestimmung der Momente M_I^* , M_{II}^* , M_{III}^* und M_{IV}^* 4 Systeme von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten aufzulösen, deren Koeffizienten sich aus den Momentenflächen M'_I , M'_{II} , M'_{III} und M'_{IV} ergeben.

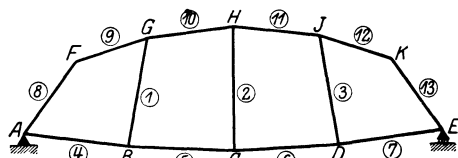


Fig. 303.

Die Zusatzmomente M_{zus} für jeden Belastungsfall erhalten wir darauf durch Multiplikation der Momente M^* mit der betreffenden Verschiebungskraft V und Addition der daraus hervorgehenden Momente.

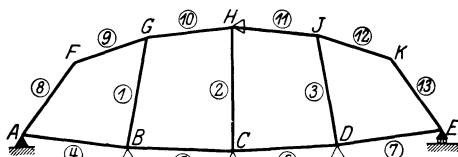


Fig. 303a.

V. Bestimmung der Momente infolge einer Temperaturänderung des Baumaterials.

Ändert sich die Temperatur des Baumaterials eines Tragwerkes gegenüber der Herstellungstemperatur, so ändern sich die Längen der einzelnen Stäbe desselben und wir untersuchen nun den Einfluß dieser Längenänderungen auf die Spannungen des Tragwerkes.

Bei einer gleichmäßigen Erwärmung um t^0 verlängert sich ein Stab von der Länge l um

$$\Delta l = \alpha \cdot t \cdot l, \tag{575}$$

wenn α der Wärmeausdehnungskoeffizient des betreffenden Baumaterials; es ist für Eisenbeton:

$$\alpha = 0,000012.$$

Wird der Stab um t^0 abgekühlt, so verkürzt er sich um dasselbe Maß.

Durch die Längenänderungen, welche jeder Stab bei einer Temperaturänderung erleidet, verschieben sich alle Knotenpunkte des Tragwerkes, und durch diese Verschiebungen bzw. die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Enden aller Stäbe (Teil II, Kap. II) entstehen die gesuchten „Temperaturmomente“ am ganzen Tragwerk.

Das Verfahren zur Bestimmung dieser Knotenpunktverschiebungen ist genau dasselbe wie dasjenige der Williot'schen Verschiebungspläne¹, wenn wir an Stelle der Längenänderungen der Stäbe infolge der Normalkräfte diejenigen infolge der Temperaturänderung setzen. Das Verfahren gründet sich auf die

Aufgabe:

Der Knotenpunkt C (Fig. 304) sei mit den Knotenpunkten A und B durch zwei Stäbe 1 und 2 verbunden, welche in A und B eingespannt oder gelenkig gelagert sein können. Die Knotenpunkte A und B (oder nur einer davon) sollen sich in die neuen Lagen A' und B' verschieben und die Längen der Stäbe 1 und 2

¹ Müller-Breslau: Die graphische Statik Bd. II 1 (1903) S. 58.

um die gegebenen Strecken $\Delta 1$ und $\Delta 2$ ändern, wobei wir die Annahme machen, daß die Verschiebungen AA' und BB' und die Längenänderungen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ im Verhältnis zu den Längen der Stäbe 1 und 2 verschwindend klein seien, was bei Verschiebungen und Längenänderungen infolge Temperaturänderung stets der Fall ist; in Fig. 304 wurden dieselben in vergrößertem Maßstab aufgetragen. Gesucht ist die Verschiebung CC' des Knotenpunkt es C (der mit A und B nicht in derselben Geraden liegen darf) nach Größe und Richtung.

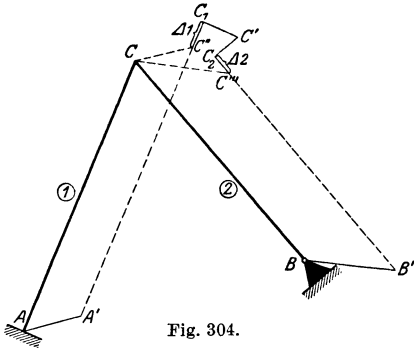


Fig. 304.

Um die neue Lage von C zu erhalten, denkt man sich bei C die Verbindung beider Stäbe gelöst, verschiebt den Stab 1 parallel zu sich selbst in die Lage $A'C''$ und den Stab 2 parallel zu sich selbst in die Lage $B'C'''$. Bei einer Temperaturerhöhung sind $\Delta 1$ und $\Delta 2$ Verlängerungen; man verlängert daher $A'C''$ um $C''C_1 = \Delta 1$ und $B'C'''$ um $C'''C_2 = \Delta 2$. Nun schlägt man mit den Stablängen $A'C_1$ und $B'C_2$ als Radius Kreisbögen, deren Mittelpunkte A' und B' sind. Der Schnittpunkt C' dieser Bögen ist die gesuchte neue Lage des Knotenpunktes C . Da die angenommenen Verschiebungen verschwindend klein sind, dürfen die Kreisbögen C_1C' und C_2C' durch die auf den Geraden $A'C_1$ und $B'C_2$ errichteten Normalen ersetzt werden.

Da die Temperaturmomente im Vergleich zu denjenigen infolge der äußeren Belastung gering sind, so hat es keinen Zweck, einen besonderen Verschiebungsplan zu zeichnen, sondern man kann die Knotenpunktverschiebungen bzw. die zur weiteren Berechnung benötigten „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte der Stäbe in Fig. 304 direkt abgreifen.

Die Lösung gilt selbstverständlich auch für den Fall, daß nur einer der beiden Knotenpunkte A und B , beispielsweise nur A , verschoben wird (Fig. 305). In

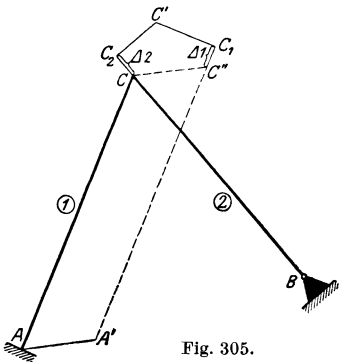


Fig. 305.

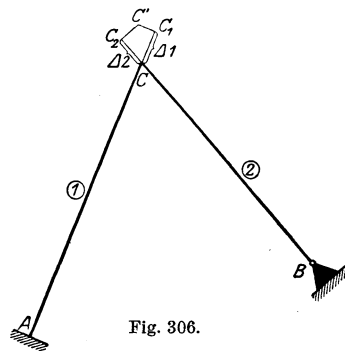


Fig. 306.

diesem Falle wird die neue Lage des Knotenpunktes C durch die in den Punkten C_1 und C_2 zu den Stabrichtungen AC und BC errichteten Normalen bestimmt.

Ferner gilt die Lösung auch für den Fall, daß die Knotenpunkte A und B nicht verschoben werden und nur Längenänderungen der beiden Stäbe 1 und 2 eintreten (Fig. 306). Dann wird die neue Lage von C durch die in den Punkten C_1 und C_2 zu den Stabrichtungen AC und BC errichteten Normalen bestimmt.

1. Der einstöckige Rahmen.

Wir betrachten zunächst den allgemeinen, unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen der Fig. 307

mit beliebig gerichteten Stäben.

Um die Verschiebungen aller Knotenpunkte infolge der gegebenen Längenänderungen der Stäbe zu bestimmen, sollten wir wissen, von welchem Punkte des „Balkens“ die Verschiebungen ausgehen; dies können wir jedoch am unsymmetrischen und in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen nicht von vornherein angeben und wir müssen daher einen Knotenpunkt des „Balkens“ vor-

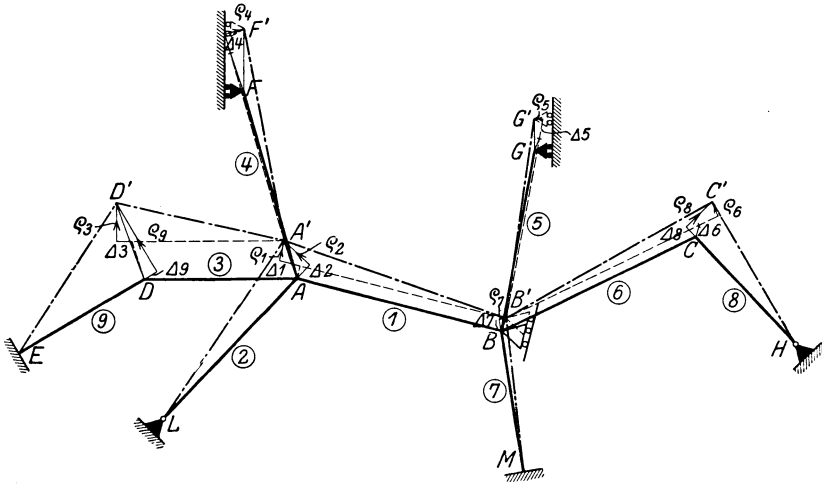


Fig. 307.

übergehend unverschiebbar festhalten, d. h. vorübergehend als denjenigen Punkt betrachten, welcher bei der vorausgesetzten Temperatur- und damit Längenänderung aller Stäbe in Ruhe bleibt. In dem an diesem Knotenpunkt gedachten Lager wird dann aber, wenn dieser nicht zufällig mit dem in Wirklichkeit in Ruhe bleibenden Punkt zusammenfällt, eine Festhaltungskraft F^t entstehen, genau wie bei Belastung des Rahmens mit einer äußeren Kraft. Entfernen wir das gedachte Lager an dem vorübergehend unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkt, so tritt die Verschiebungskraft V^t (die entgegengesetzt gerichtete Festhaltungskraft F^t) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Rahmen erzeugt, die zu denjenigen für den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Temperaturänderung zu erhalten.

Da wir schon bei der Bestimmung der Zusatzmomente für die äußere Belastung die Momente M^* infolge Belastung eines Knotenpunktes des Rahmens mit der Kraft $H = 1$ t ermitteln müssen, so halten wir bei Bestimmung der Temperaturmomente nicht einen beliebigen Knotenpunkt des „Balkens“ vorübergehend unverschiebbar fest, sondern genau denselben wie bei der Berechnung der Momente herrührend von der äußeren Belastung, nämlich am vorliegenden Rahmen den Knotenpunkt B .

Nachdem wir die Verlängerung aller Stäbe infolge einer gegebenen Temperaturerhöhung derselben nach Gl. (575) berechnet haben, bestimmen wir nun in Fig. 307 von B ausgehend die Verschiebung aller Knotenpunkte durch wieder-

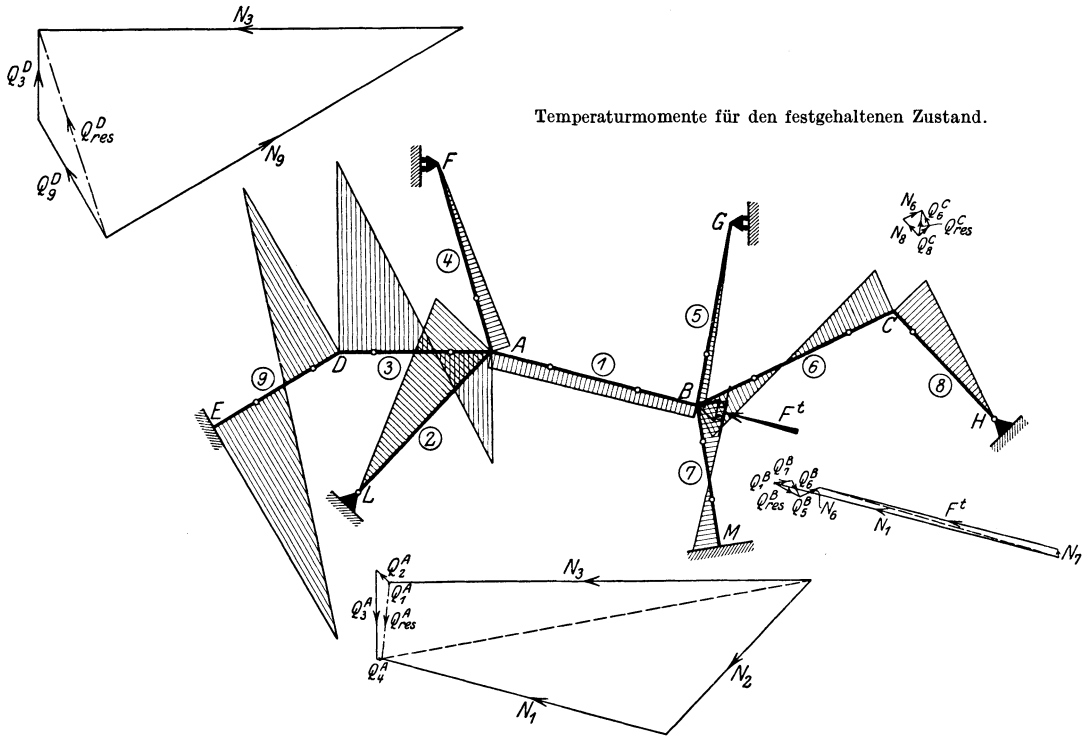


Fig. 307 a.

holte Anwendung des eingangs gezeigten Verfahrens. Die Bestimmung gestaltet sich ähnlich wie diejenige infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes

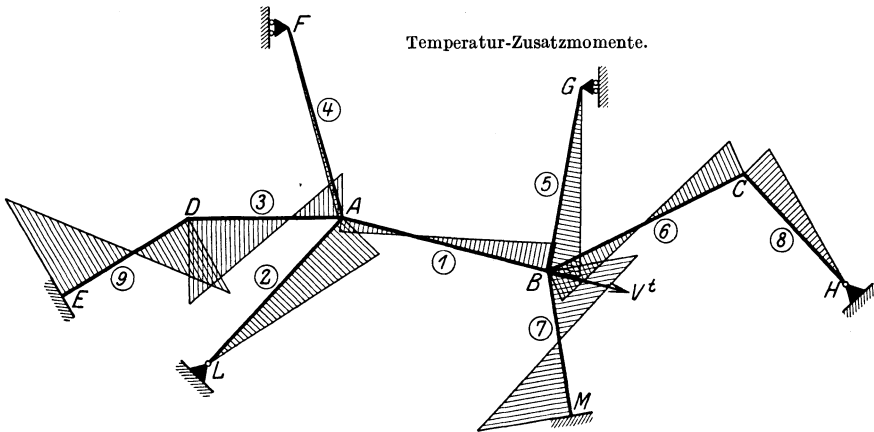


Fig. 307 b.

in Kap. II, 1 dieses Teiles, weshalb sich weitere Erläuterungen erübrigen. Es sei nur erwähnt, daß wir den Knotenpunkt B nicht in seiner ursprünglichen Lage unverschiebbar festhalten, sondern erst, nachdem der Auflagerstab 7 seine Länge

geändert hat. Dies hat jedoch nichts zu sagen, da unseren Zwecken schon genügt ist, wenn wir für die Lage des festgehaltenen Knotenpunktes B eine gewisse Annahme treffen. Wir können also vorschreiben, der Punkt B solle sich

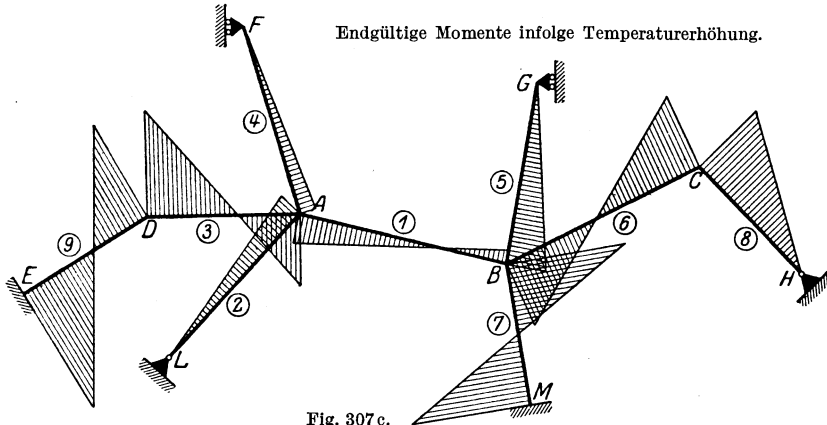


Fig. 307c.

bei Ausdehnung des Stabes 7 in Richtung des letzteren, oder auf einer Senkrechten oder auf einer Normalen zum Stab 1 bewegen. Am anschaulichsten

ist es, die letztgenannte Annahme zu machen, und zwar dadurch, daß wir als gedachtes Lager am Knotenpunkt B ein Rollenlager anbringen, welches sich bei Ausdehnung des Stabes 7 auf seiner Bahn, normal zum Stab 1, bewegt und gegen Abheben von derselben gesichert gedacht ist. Hätten wir für die Lage des Punktes B etwas anderes vorgeschrieben, so entstünden andere Momente für den festgehaltenen Zustand, aber nachher auch eine andere Festhaltungskraft F^t und damit andere Zusatzmomente; die Summe derselben bleibt aber immer dieselbe. In Fig. 307 haben wir der besseren Übersicht halber strichpunktiert die Stäbe in ihrer neuen Lage eingetragen, wobei wir jedoch deren Formänderungen herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt haben.

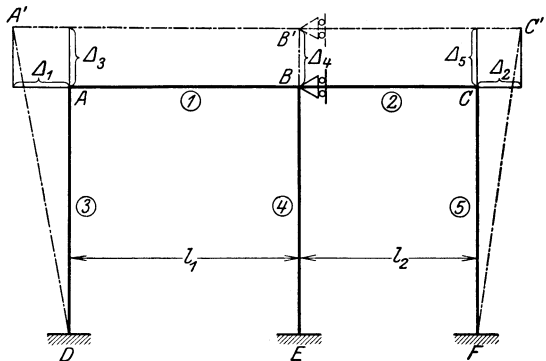


Fig. 308.

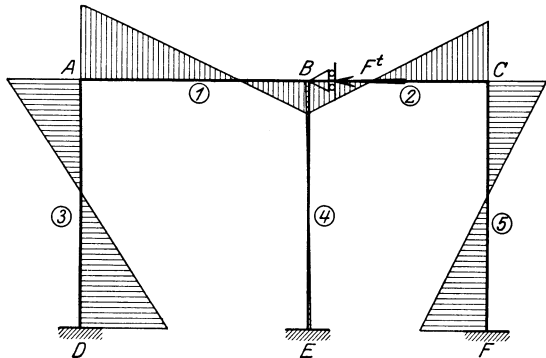


Fig. 308a.

Nun besitzen wir, wie früher, nicht nur die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, sondern auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“

q der Endpunkte aller Stäbe, auf Grund deren sich nach Kap. III dieses Teiles die Momente infolge der Längenänderung der Stäbe für den festgehaltenen Zustand ergeben (Fig. 307 a).

Die in Fig. 307 an den Strecken eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich wieder auf die Regel betreffend des Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden.

Aus den Temperaturmomenten für den festgehaltenen Zustand (Fig. 307 a)

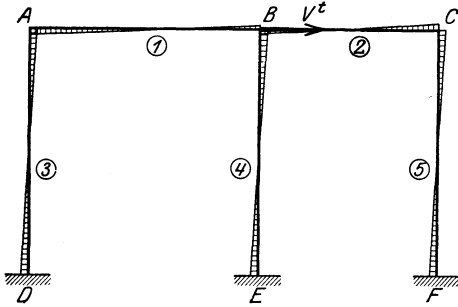


Fig. 308 b.

bestimmen wir nun die im gedachten Lager am Knotenpunkt B auftretende Festhaltungskraft F^t nach Kap. VII, 1 des I. Teiles (Fig. 307 a) und erhalten darauf die Temperatur-Zusatzmomente (Fig. 307 b), indem wir die nach Kap. IV, 1 dieses Teiles bestimmte M^* -Momentenfläche (Fig. 290) für die im Knotenpunkt B von links nach rechts in Richtung des Stabes 1 wirkende Kraft $H = 1 \text{ t}$, mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft V^t (umgekehrte Festhaltungskraft F^t) multiplizieren.

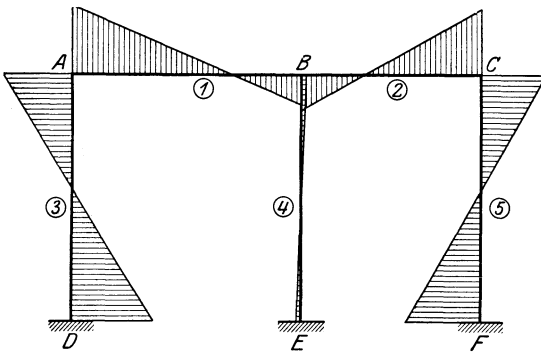


Fig. 308 c.

Durch Addition der Temperaturmomente für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Temperaturmomente (Fig. 307 c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Temperaturänderung.

Die Bestimmung der Temperaturmomente am unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen

Rechteckrahmen

der Fig. 308 gestaltet sich bedeutend einfacher, indem man dabei nicht nötig hat, erst die Knotenpunktverschiebungen zu konstruieren. Wenn die Stützen gleich lang sind, so ist außerdem eine gleichmäßige Temperaturänderung derselben ohne Einfluß auf die Temperaturmomente.

Um die Temperaturmomente am Rahmen der Fig. 308 zu bestimmen, halten wir den Knotenpunkt B durch ein normal zum Balken bewegliches Rollenlager vorübergehend unverschiebbar fest. Wir könnten ebensogut den Knotenpunkt A oder C wählen, wir würden jedoch dann stark verschieden große Momente am Rahmen (für den festgehaltenen Zustand) erhalten, was die Genauigkeit der Berechnung nachteilig beeinflusst.

Bei einer Temperaturerhöhung des Rahmens um t^0 verschiebt sich dann der Knotenpunkt A (unter Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte, welcher nach Kap. VII dieses Teiles gesondert berücksichtigt werden kann)

nach links um die Strecke

$$\Delta 1 = -\alpha \cdot t \cdot l_1$$

und der Knotenpunkt C nach rechts um die Strecke:

$$\Delta 2 = +\alpha \cdot t \cdot l_2.$$

Da die Säulen des Rahmens gleich lang sind, so dehnen sich dieselben alle um das gleiche Maß nach oben und es treten am Rahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“

$$\varrho_3 = \Delta 1 \quad \text{und} \quad \varrho_5 = \Delta 2$$

auf, für welche wir die Momente (Fig. 308a) nach Kap. III dieses Teiles und die zugehörige Festhaltungskraft F^t (Fig. 308a) nach Kap. VII des I. Teiles bestimmen. Bringen wir jetzt die umgekehrte Festhaltungskraft F^t , d. h. die Verschiebungskraft V^t , als äußere, in Balkenachse wirkende Kraft an, so entstehen durch diese Belastung die Temperatur-Zusatzmomente (Fig. 308b), welche wir einfach durch Multiplikation der M^* -Momentenfläche dieses Rahmens mit Größe und Vorzeichen von V^t erhalten.

Durch Addition der Temperaturmomente für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Temperaturmomente (Fig. 308c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte,

(nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Temperaturänderung. Ist aber z. B. die rechte Säule (Stab 5) länger als die beiden übrigen (Fig. 308d), so erleidet nicht nur die Säule 3 und die Säule 5, sondern auch noch der Balken 2 eine gegenseitige Verschiebung seiner Endpunkte; die weitere Berechnung gestaltet sich analog wie beschrieben.

Wünschen wir am Rahmen der Fig. 308 den Punkt des Balkens zu kennen, welcher bei der gegebenen Temperaturerhöhung in Ruhe bleibt, so gehen wir wie folgt vor:

Wir bringen die aus den Momenten für den festgehaltenen Zustand ermittelte Kraft V^t am Rahmen als äußere Kraft an und berechnen die dadurch hervorgerufene Verschiebung λ des Balkens; diese ist eine Rechtsverschiebung und gleich

$$\lambda = \frac{\Delta 1}{Z} \cdot V^t.$$

Da wir zuerst angenommen haben, B bleibe in Ruhe und nun infolge der Verschiebungskraft V^t noch eine Rechtsverschiebung dazukommt, so muß der wirkliche Ruhepunkt links von B liegen, und zwar in einem Abstand x von B , welchen wir dadurch erhalten, daß wir im Diagramm der Temperaturverschie-

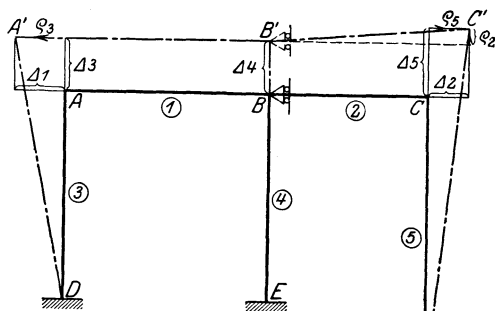


Fig. 308 d.

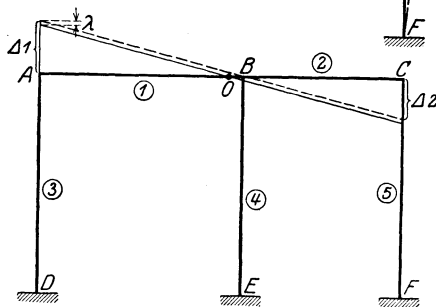


Fig. 308 e.

bungen bei festgehaltenem Punkt B (vgl. Fig. 308e) die Strecke λ nach abwärts tragen und eine Parallele zur Diagrammlinie ziehen; letztere ist dann die wirkliche Diagrammlinie, und der von ihr auf der Balkenachse herausgeschnittene Punkt O bleibt bei der gegebenen Temperaturerhöhung in Ruhe.

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Temperaturmomente am

symmetrischen Rahmen, wenn symmetrisch gelegene Stäbe die gleiche Temperaturänderung erleiden, und am festgehaltenen Rahmen für beliebige Temperaturänderungen seiner Stäbe,

weil an diesen Rahmen — z. B. Fig. 315, 316, 317, 318 — keine Temperatur-Zusatzmomente zu bestimmen sind, und zwar deshalb, weil man bei beiden Konstruktions-typen den Punkt kennt, von welchem die Verschiebungen ausgehen bzw. welcher bei der Temperaturänderung keine seitliche Bewegung ausführt.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 315 hat man also einfach die Momente herrührend von den Verschiebungen:

$$Q_2 = \frac{\Delta l}{2} = -\alpha \cdot t \cdot \frac{l}{2}, \quad Q_3 = \frac{\Delta l}{2} = +\alpha \cdot t \cdot \frac{l}{2}$$

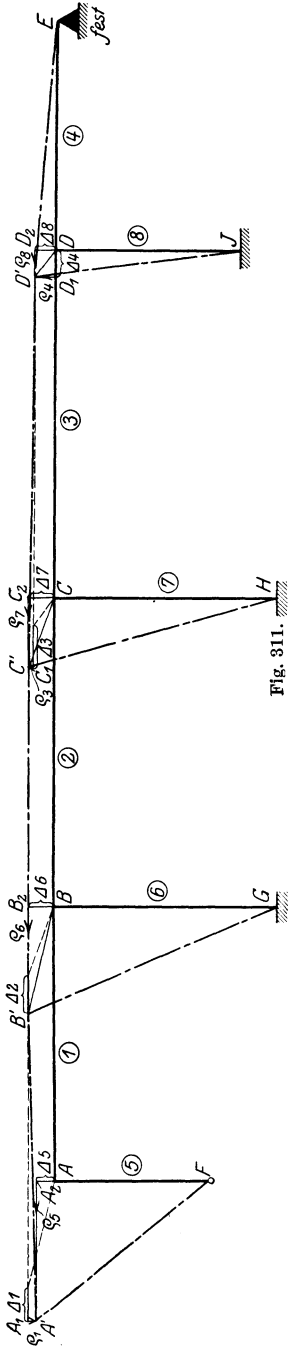


Fig. 311.

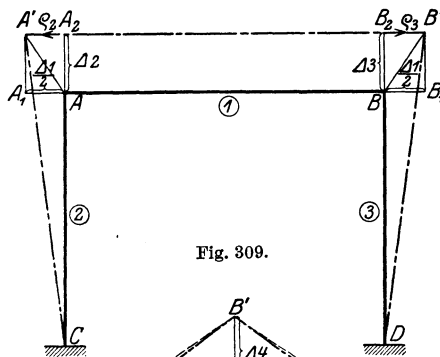


Fig. 309.

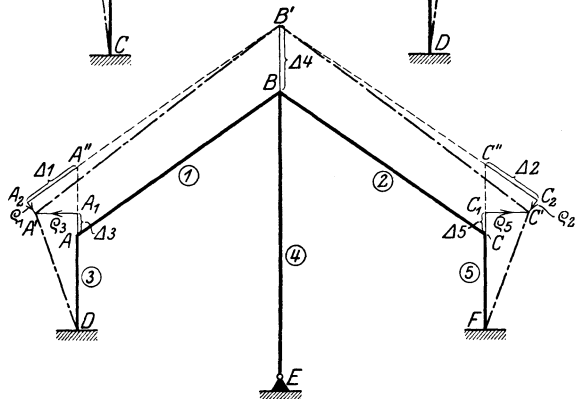


Fig. 310.

nach Kap. III dieses Teiles zu bestimmen, um damit die endgültigen Momente für eine gegebene Temperaturerhöhung zu besitzen.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 316 müssen wir zunächst die der vorausgesetzten Temperaturerhöhung entsprechende neue Lage des Knotenpunktes A , welche der Symmetrie wegen gleich derjenigen des Knotenpunktes C ist, bestimmen (siehe Fig. 310). Hierauf kennen wir die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe, nämlich

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= A_2 A', \\ \varrho_2 &= C_2 C', \\ \varrho_3 &= A_1 A', \\ \varrho_4 &= 0, \\ \varrho_5 &= C_1 C'\end{aligned}$$

und bestimmen nach Kap. III dieses Teiles die zugehörigen Momente, welche die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung sind.

Der Rahmen der Fig. 311 ist unsymmetrisch, besitzt jedoch an einem Ende ein festes Lager, von welchem aus sich die Längenänderungen des Balkens vollziehen. In Fig. 311 haben wir in bekannter Weise die neuen Lagen aller Knotenpunkte bestimmt, und kennen nun auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte aller Stäbe, welche durch die gegebene Temperaturerhöhung hervorgerufen werden; es ist:

$$\begin{aligned}\varrho_4 &= D_1 D' = \Delta 8, \\ \varrho_3 &= C_1 C' = -\Delta 8, \\ \varrho_2 &= \Delta 6 - \Delta 7 = 0, \\ \varrho_1 &= A_1 A' = \Delta 6 - \Delta 5, \\ \varrho_8 &= D_2 D' = \Delta 4 = \alpha \cdot t \cdot l_4, \\ \varrho_7 &= C_2 C' = \Delta 4 + \Delta 3 = \alpha \cdot t (l_4 + l_3), \\ \varrho_6 &= B_2 B' = \Delta 4 + \Delta 3 + \Delta 2 = \alpha \cdot t (l_4 + l_3 + l_2), \\ \varrho_5 &= A_2 A' = \Delta 4 + \Delta 3 + \Delta 2 + \Delta 1 = \alpha \cdot t (l_4 + l_3 + l_2 + l_1).\end{aligned}$$

Wir erkennen, daß wir die Größe der Strecken ϱ auch ohne weiteres anschreiben können, da die Stäbe rechtwinklig aufeinander stehen. Nun können wir nach Kap. III dieses Teiles die diesen Verschiebungen entsprechenden Momente ermitteln, welche die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung sind.

2. Der mehrstöckige Rahmen.

Wir betrachten zunächst den allgemeinen unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen der Fig. 312

mit beliebig gerichteten Stäben.

Um die Verschiebungen aller Knotenpunkte infolge der gegebenen Längenänderungen der Stäbe zu bestimmen, sollten wir wissen, von welchem Punkte eines jeden „Stockwerkbalkens“ die Verschiebungen ausgehen und wie sich die einzelnen Stockwerkbalken im Verhältnis zueinander verschieben; dies können wir jedoch auch am unsymmetrischen und in keinem Punkte festgehaltenen Stockwerkrahmen nicht von vornherein angeben und wir müssen daher einen

Nun besitzen wir, wie in Kap. II, nicht nur die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, sondern auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschie-

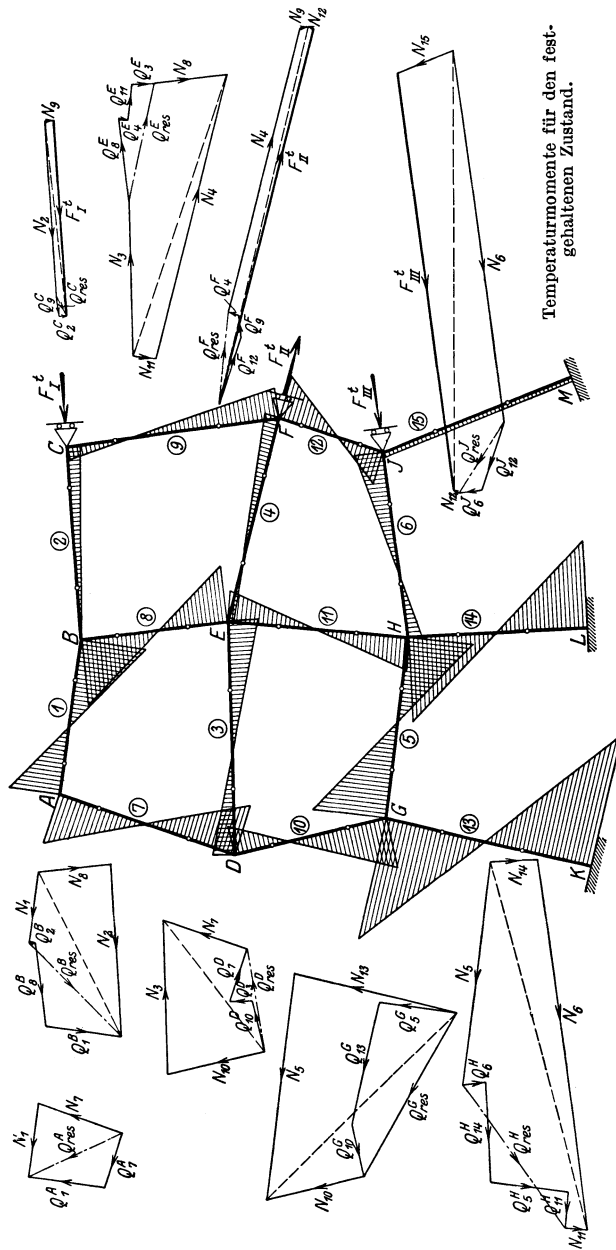


Fig. 312a.

bungen“ ϱ der Endpunkte aller Stäbe, auf Grund deren wir nach Kap. III dieses Teiles die Momente infolge der Längenänderungen der Stäbe für den festgehaltenen Zustand bestimmen können; diese Momente haben wir in Fig. 312a dargestellt.

Die in Fig. 312 an den Strecken ρ eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich wieder auf die Regel betreffend des Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden.

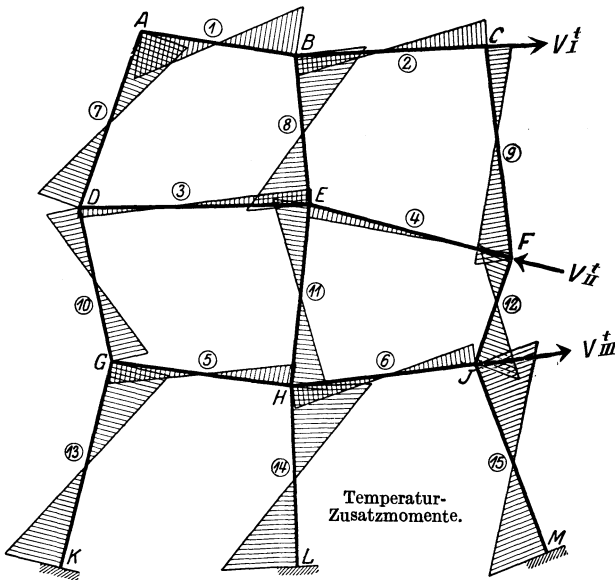


Fig. 312 b.

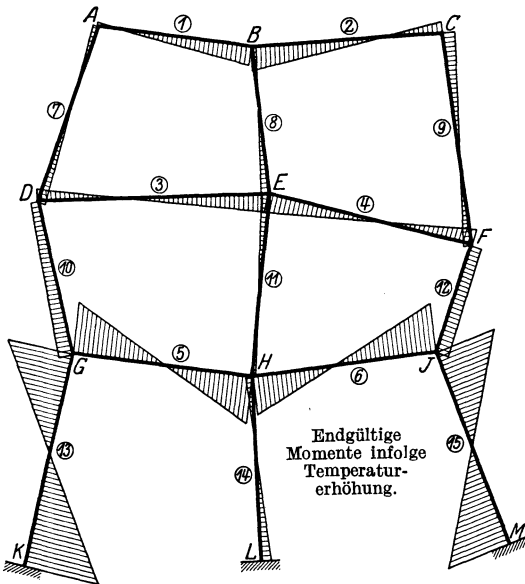


Fig. 312 c.

Aus den Temperaturmomenten für den festgehaltenen Zustand (Fig. 312 a) bestimmen wir nun die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte F_I^t , F_{II}^t und F_{III}^t nach Kap. VII, 2 des I. Teiles (siehe Fig. 312 a) und erhalten darauf die Temperatur-Zusatzmomente (Fig. 312 b), indem wir die nach Kap. IV, 2 dieses Teiles bestimmten M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* -Momente (Fig. 296 d, 299 d, 302 d) für die im Knotenpunkt C bzw. F bzw. J von links nach rechts in Richtung des anschließenden Balkenstabes 2 bzw. 4 bzw. 6 wirkende Kraft $H = 1 t$ mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft V_I^t bzw. V_{II}^t bzw. V_{III}^t multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Durch Addition der Temperaturmomenten für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Temperaturmomente (Fig. 312 c) und aus ihnen die endgültigen

Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Temperaturänderung.

Die Bestimmung der Temperaturmomente am unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen

Rechteck-Stockwerkrahmen

der Fig. 313 gestaltet sich bedeutend einfacher, indem man dabei nicht nötig hat, erst die Knotenpunktverschiebungen zu konstruieren.

Um die Temperaturmomente am Stockwerkrahmen der Fig. 313 zu bestimmen, bringen wir an den Knotenpunkten B und E vorübergehend Rollenlager an, die normal zu den Stockwerkbalken beweglich sind und wodurch der Rahmen seitlich unverschiebbar festgehalten ist.

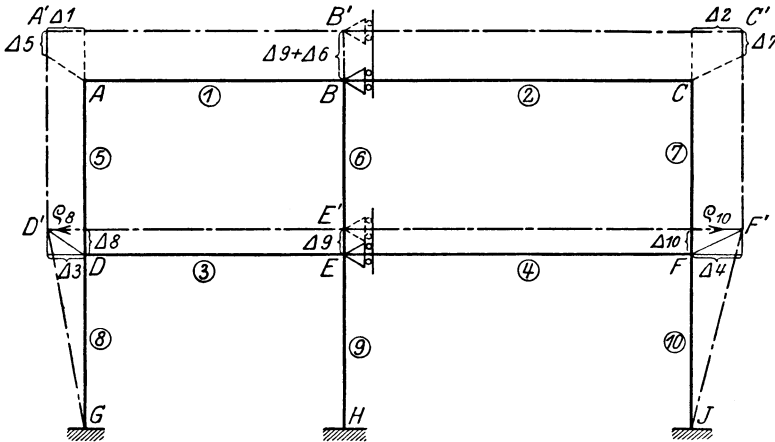


Fig. 313.

Bei einer Temperaturerhöhung des Stockwerkrahmens um t^0 verschieben sich (unter Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte) die Knotenpunkte A und D nach links um die Strecke

$$\Delta 1 = \Delta 3 = -\alpha \cdot t \cdot l_1 = -\alpha \cdot t \cdot l_3,$$

und die Knotenpunkte C und F nach rechts um die Strecke

$$\Delta 2 = \Delta 4 = +\alpha \cdot t \cdot l_2 = +\alpha \cdot t \cdot l_4.$$

Da die drei Säulen jedes Stockwerkes gleich lang sind, so dehnen sich dieselben um das gleiche Maß nach oben und es treten am Stockwerkrahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“

$$\rho_8 = \Delta 2 \quad \text{und} \quad \rho_{10} = \Delta 4$$

auf, für welche wir die Momente nach Kap. III dieses Teiles und die zugehörigen Festhaltungskräfte nach Kap. VII, 2 des I. Teiles bestimmen (Fig. 313a). Bringen wir jetzt die Verschiebungskräfte V_I^t und V_{II}^t (umgekehrte Festhaltungskräfte F_I^t bzw F_{II}^t) als äußere, in Balkenachse wirkenden Kräfte an, so entstehen durch diese Belastung die Temperatur-Zusatzmomente (Fig. 313b), welche wir durch Multiplikation der M_I^* - und M_{II}^* -Momente mit Größe und Vorzeichen von V_I^t bzw V_{II}^t und Addition der daraus hervorgehenden Momente erhalten.

Durch Addition der Temperaturmomente für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Temperatur-

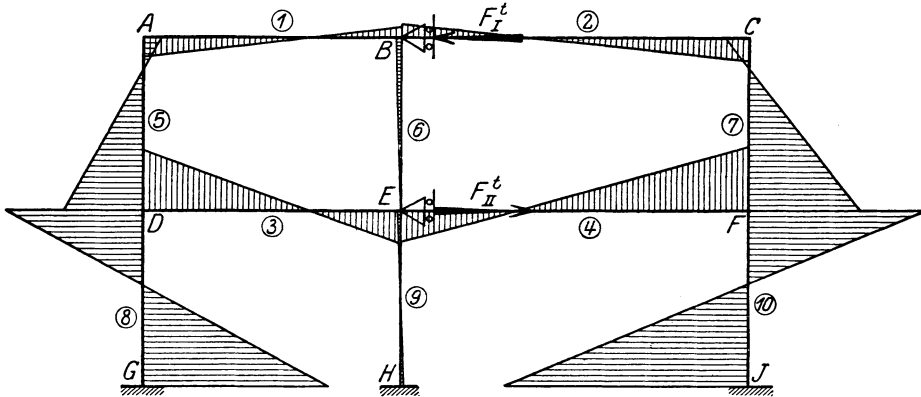


Fig. 313 a.

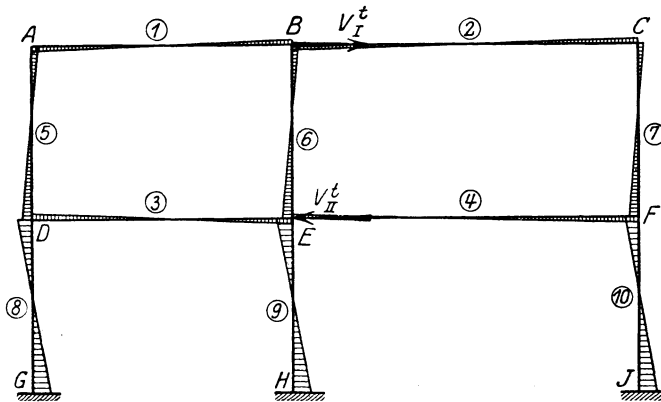


Fig. 313 b.

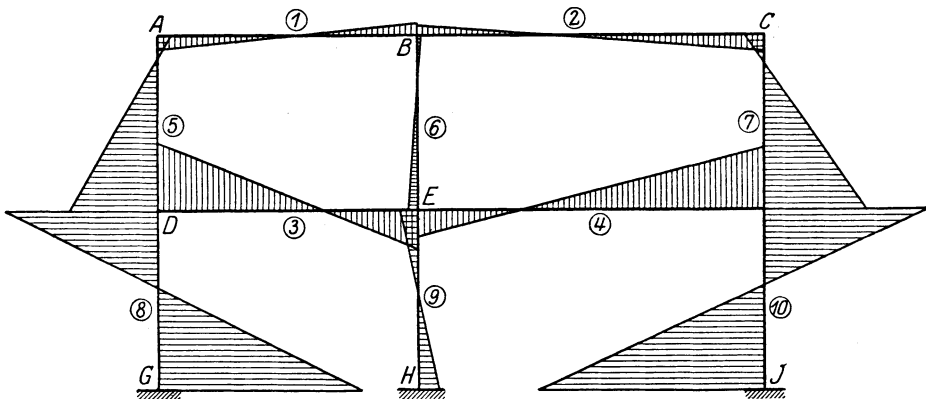


Fig. 313 c.

momente (Fig. 313c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI, 2) für die gegebene Temperaturänderung.

Ist z. B. die rechte Säule des unteren Stockwerkes (Stab 10) länger als die beiden anderen (Fig. 313d), so erleiden nicht nur die Stäbe 8 und 10, sondern

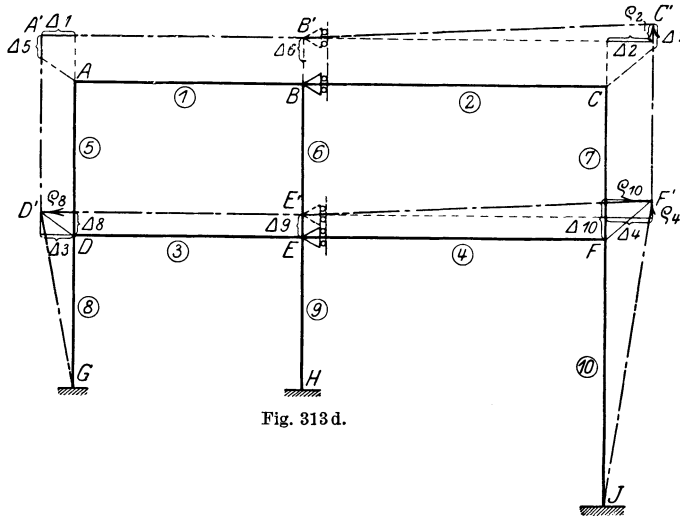


Fig. 313 d.

auch die Stäbe 2 und 4 gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte; der weitere Gang der Berechnung ist analog wie oben beschrieben.

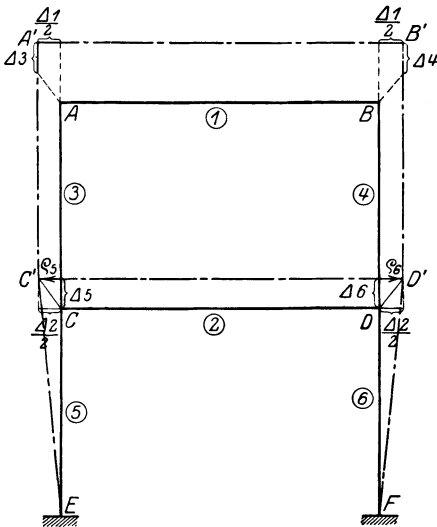


Fig. 314.

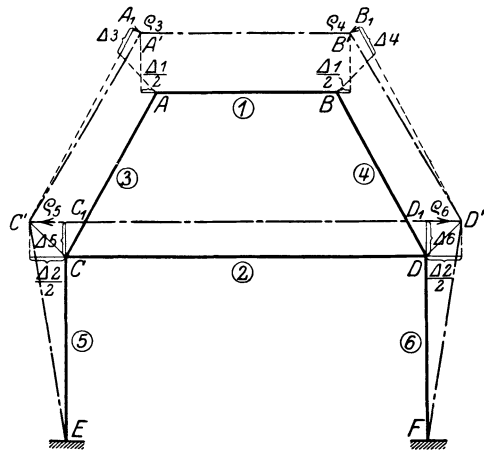


Fig. 315.

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Temperaturmomente am symmetrischen Stockwerkrahmen, weil an diesem Rahmen — z. B. Fig. 314 und 315 — keine Temperatur-Zusatzmomente zu bestimmen sind, und zwar deshalb nicht, weil man bei beiden Konstruktionstypen den Punkt kennt, von welchem die Verschiebungen ausgehen bzw. welcher bei der Temperaturänderung keine seitliche Bewegung ausführt;

eine Ausnahme machen die „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen, wie z. B. Fig. 316 und 317.

Am symmetrischen Stockwerkrahmen der Fig. 314 hat man also einfach die Momente herrührend von den Verschiebungen:

$$\varrho_5 = \frac{\Delta 2}{2} \quad \text{und} \quad \varrho_6 = \frac{\Delta 2}{2}$$

nach Kap. III zu bestimmen, und hat damit die endgültigen Momente für eine gegebene Temperaturerhöhung.

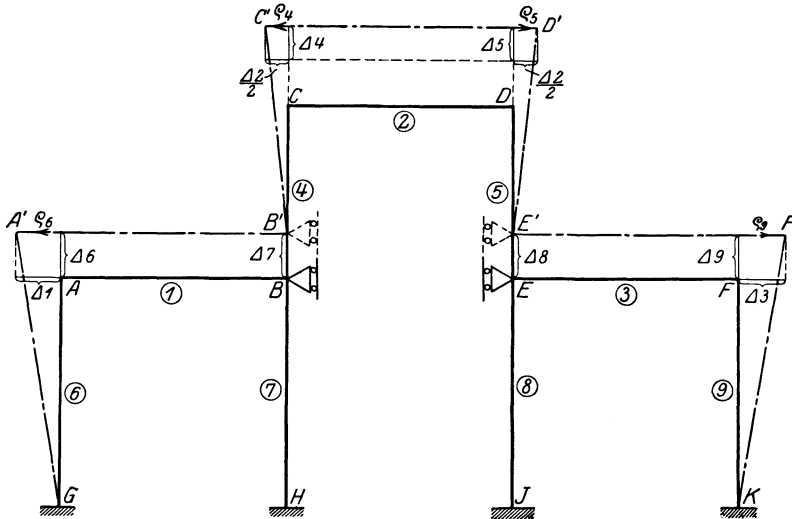


Fig. 316.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 315 müssen wir zunächst die der vorausgesetzten Temperaturerhöhung entsprechende neue Lage der Knotenpunkte C und A , welche der Symmetrie wegen gleich derjenigen der Knotenpunkte D und B ist, bestimmen (siehe Fig. 315). Hierauf kennen wir die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte aller Stäbe, nämlich:

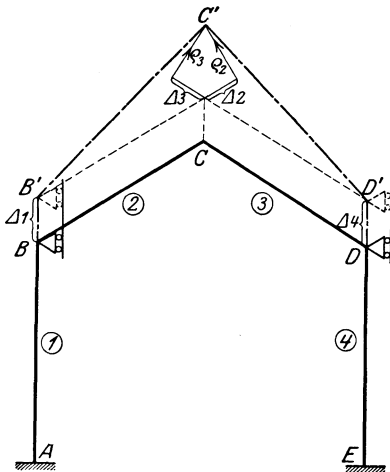


Fig. 317.

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 0, & \varrho_2 &= 0, \\ \varrho_3 &= A_1 A', & \varrho_4 &= B_1 B', \\ \varrho_5 &= C_1 C', & \varrho_6 &= D_1 D' \end{aligned}$$

und bestimmen nach Kap. III dieses Teiles die zugehörigen Momente, welche die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung sind.

Am symmetrischen, „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen der Fig. 316 müssen wir zur Berechnung der Temperaturmomente trotz der Symmetrie die Stockwerkbalken 1 und 3 vorübergehend horizontal unver-schiebbar festhalten und darauf zu den Momenten für diesen Zustand die Zu-

satzmomente herrührend von den allein auf den Rahmen wirkenden beiden Verschiebungskräften V_I^t und V_{II}^t addieren.

Dasselbe gilt für den symmetrischen Rahmen der Fig. 317 (Sonderfälle der Stockwerkrahmen).

Ist ein mehrstöckiger Rahmen an jedem Stockwerkbalken von Haus aus festgehalten, wie z. B. derjenige in Fig. 318, so ist er für die Berechnung kein

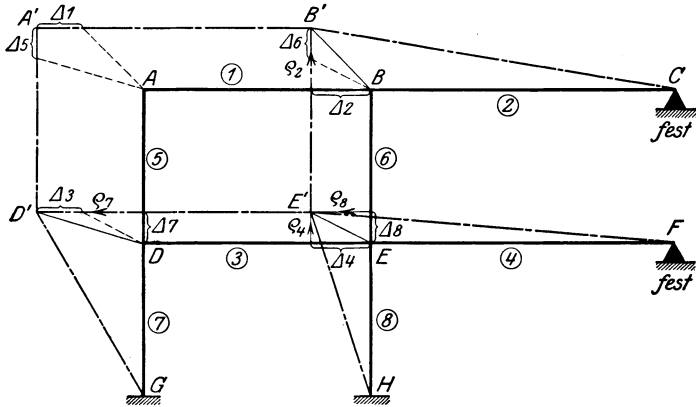


Fig. 318.

Stockwerkrahmen mehr, er wird dann vielmehr genau wie ein einstöckiger Rahmen behandelt. Die Momente herrührend von den Verschiebungen

$$\begin{aligned} \varrho_2 + \Delta 8 + \Delta 6, & \quad \varrho_4 = \Delta 8, \\ \varrho_7 + \Delta 4 + \Delta 3, & \quad \varrho_8 = \Delta 4 \end{aligned}$$

sind dann die endgültigen Momente für die gegebene Temperaturerhöhung.

3. Der Rahmenträger.

Da der Rahmenträger, wie in Kap. I dieses Teiles ausgeführt, für die Berechnung nichts anderes ist als ein mehrstöckiger Rahmen, so werden die Momente infolge einer gegebenen Temperaturänderung analog wie im vorhergehenden Abschnitt für den mehrstöckigen Rahmen beschrieben, ermittelt.

Da wir z. B. am Rahmenträger der Fig. 319 nicht von vornherein wissen, wieviel sich die Knotenpunkte B , C und D bei der Temperaturänderung senken, so müssen wir diese Punkte vorübergehend vertikal unverschiebbar festhalten (durch Rollenlager mit horizontaler Bahn) und für den Knotenpunkt H der oberen Gurtung vorschreiben, daß er bei der Ausdehnung der Stäbe (bzw. Verkürzung bei Temperaturniedrigung)

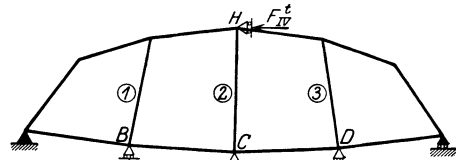


Fig. 319.

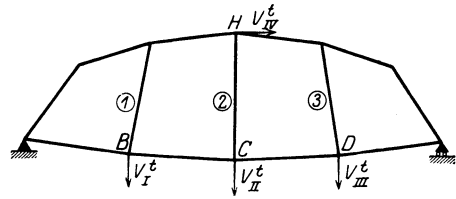


Fig. 319a.

senkrecht über dem Knotenpunkt C bleibe, sich aber in senkrechter Richtung bewegen könne; ist die Konstruktion vollkommen symmetrisch, so wird sich

die obere Gurtung von selbst so einstellen, ohne daß die Anbringung einer Kraft F_{IV}^t nötig wird. Bei unsymmetrischer Ausbildung (auch wenn nur symmetrisch liegende Stäbe nicht dasselbe Trägheitsmoment haben) treten bei diesem Zustand vier Festhaltungskräfte F^t auf, welche in Wirklichkeit den Wert Null haben sollen. Daher müssen wir den Rahmenträger noch mit den vier Verschiebungskräften V^t (entgegengesetzte Festhaltungskräfte F^t) belasten (Fig. 319a), wodurch sich die Temperatur-Zusatzmomente ergeben, welche zu den Temperaturmomenten für den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die wirklichen Momente infolge der gegebenen Temperaturänderung zu erhalten.

VI. Bestimmung der Momente infolge Senkungen der Auflager.

Senkt sich ein Auflager eines Tragwerkes gegenüber seiner planmäßigen Lage um ein gegebenes, jedoch im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend kleines Maß in beliebiger Richtung, so werden dadurch Verschiebungen der Knotenpunkte des Tragwerkes bzw. „gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen“ der Endpunkte seiner Stäbe hervorgerufen, welche, wie immer, Momente am ganzen Tragwerk verursachen, die zu bestimmen sind. Senken sich mehrere Auflager gleichzeitig, so ist jede einzelne Senkung für sich zu behandeln und am Schluß die Summe der erhaltenen Momentenflächen zu bilden.

Das Verfahren zur Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen infolge der gegebenen Senkung eines Auflagers ist genau dasselbe wie dasjenige, welches wir in Kap. II dieses Teiles zur Bestimmung der Knotenpunktverschiebungen infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes benützt haben, da ja eine Senkung auch eine gegebene Verschiebung eines Stabendpunktes ist.

1. Der einstöckige Rahmen.

Wir betrachten zunächst wieder den allgemeinen, unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen der Fig. 320

mit beliebig gerichteten Stäben

und nehmen an, das Auflager L desselben habe sich um die gegebene Strecke Δ in senkrechter Richtung gesenkt.

Um die Verschiebungen aller Knotenpunkte infolge der gegebenen Senkung und die dadurch hervorgerufenen Momente am ganzen Rahmen zu bestimmen, sollten wir wieder wissen, welcher Punkt des „Balkens“ bei der Senkung in Ruhe bleibt; dies können wir jedoch am unsymmetrischen und in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen nicht von vornherein angeben, und wir müssen daher einen Knotenpunkt des „Balkens“ vorübergehend unverschiebbar festhalten, d. h. vorübergehend als denjenigen Punkt betrachten, welcher bei der vorausgesetzten Senkung des Auflagers L in Ruhe bleibt. In dem an diesem Knotenpunkt gedachten Lager wird dann aber, wenn dieser nicht zufällig mit dem in Wirklichkeit in Ruhe bleibenden Punkt zusammenfällt, eine Festhaltungskraft F^s entstehen, genau wie bei Belastung des Rahmens mit einer äußeren Kraft. Entfernen wir das gedachte Lager an dem vorübergehend unverschiebbar fest-

gehaltenen Knotenpunkt, so tritt die Verschiebungskraft V^s (die entgegengesetzt gerichtete Festhaltungskraft F^s) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Rahmen erzeugt, die zu denjenigen für den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Senkung zu erhalten.

Da wir schon bei der Bestimmung der Zusatzmomente für die äußere Belastung die Momente M^* infolge Belastung eines Knotenpunktes des „Balkens“ mit der Kraft $H = 1 t$ ermitteln müssen, so halten wir bei Bestimmung der Momente infolge gegebener Senkung nicht einen beliebigen Knotenpunkt des „Balkens“ vorübergehend unverschiebbar fest, sondern genau denselben wie bei

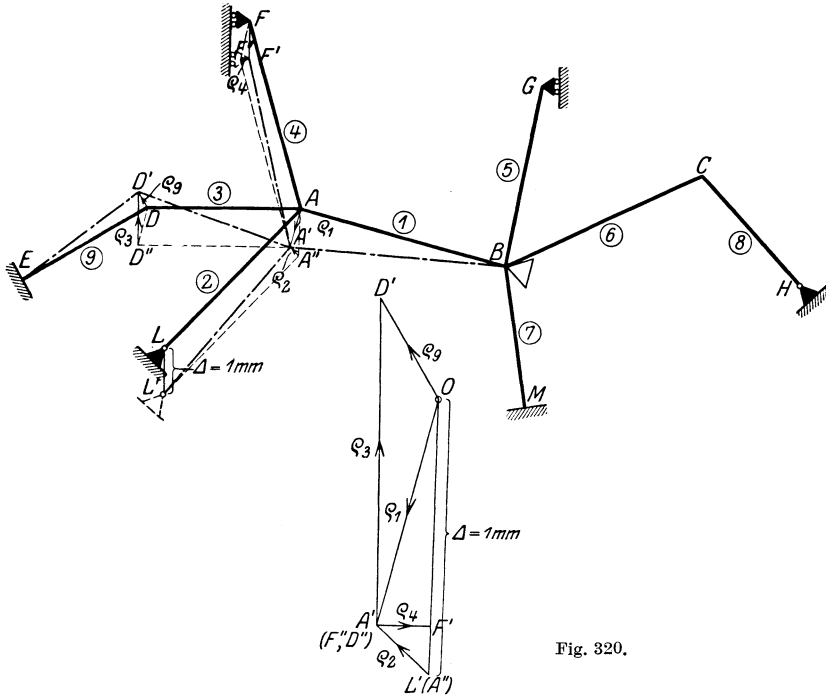


Fig. 320.

der Berechnung der Momente herrührend von der äußeren Belastung, nämlich am vorliegenden Rahmen den Knotenpunkt B .

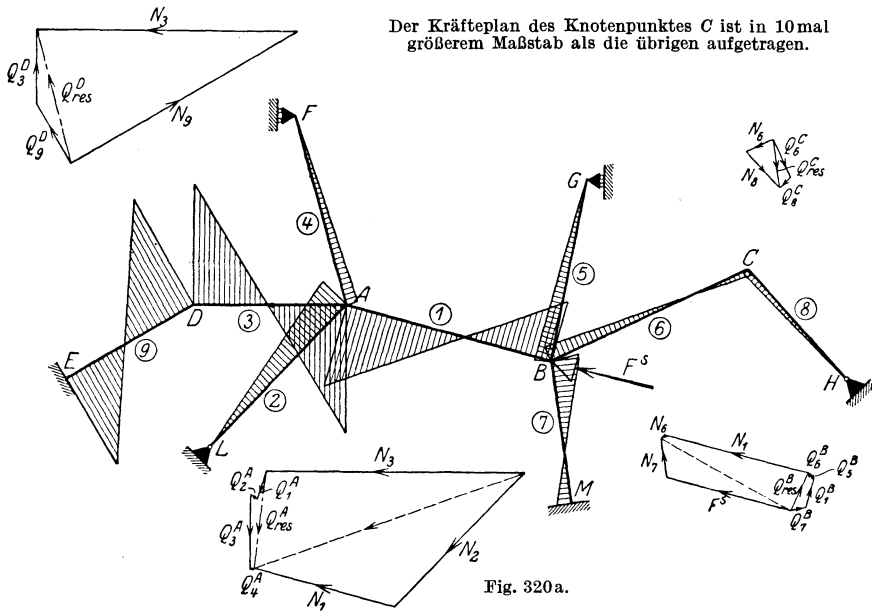
Würde sich an Stelle des Auflagers L das Auflager M senken, so wäre als gedachtes Lager, womit der „Balken“ des Rahmens vorübergehend seitlich unverschiebbar festgehalten wird, am Knotenpunkt B nicht ein festes, sondern wie im vorhergehenden Kapitel ein Rollenlager anzubringen, mit zweckmäßig normal zum Stab I gerichteter Bahn, weil sich sonst das Auflager M gar nicht voraussetzungsgemäß senken könnte.

In Fig. 320 bestimmen wir nun von L' und B ausgehend die neue Lage A' des Punktes A , von dieser und dem Auflager E ausgehend die neue Lage D' des Knotenpunktes D und endlich von A' ausgehend die neue Lage F' des beweglichen Auflagers F . Der Knotenpunkt C und das bewegliche Auflager G bleiben in Ruhe, da sich in B das gedachte feste Lager befindet. Die Konstruktion der neuen Lagen der einzelnen Knotenpunkte erfolgt genau wie diejenige infolge

gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes in Kap. II, 1 dieses Teiles, weshalb sich weitere Erläuterungen erübrigen. In Fig. 320 haben wir der besseren Übersicht halber strichpunktiert die Stäbe in ihrer neuen Lage eingetragen, wobei wir jedoch deren Formänderungen herrührend von den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt haben.

Nun besitzen wir nicht nur die wirklichen Verschiebungen aller Knotenpunkte, sondern auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ ϱ der Endpunkte aller Stäbe, auf Grund deren sich nach Kap. III dieses Teiles die Momente infolge der gegebenen Senkung für den festgehaltenen Zustand ergeben (Fig. 320 a).

Momente infolge Senkung des Auflagers L für den festgehaltenen Zustand.



Die in Fig. 320 an den Strecken ϱ eingetragenen Pfeilrichtungen beziehen sich wieder auf die Regel, betreffend des Vorzeichens der davon herrührenden Momente an beiden Stabenden.

Aus den „Senkungsmomenten“ für den festgehaltenen Zustand (Fig. 320 a) bestimmen wir nun die im gedachten Lager am Knotenpunkt B auftretende Festhaltungskraft F^s nach Kap. VII, 1 des I. Teiles (Fig. 320 a) und erhalten darauf die Senkungs-Zusatzmomente (Fig. 320 b), indem wir die nach Kap. IV, 1 dieses Teiles bestimmte M^* -Momentenfläche (Fig. 290) für die im Knotenpunkt B von links nach rechts in Richtung des Stabes 1 wirkende Kraft $H = 1$ t mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft V^s (umgekehrte Festhaltungskraft F^s) multiplizieren.

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Momente (Fig. 320 c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Senkung des Auflagers L .

Die Bestimmung der Momente infolge gegebener Senkung eines Auflagers am unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen

Rechteckrahmen

der Fig. 321 gestaltet sich bedeutend einfacher, indem man dabei nicht nötig hat, erst die Knotenpunktverschiebungen zu konstruieren.

Um die Momente infolge der Senkung Δ des Auflagers E des Rahmens der

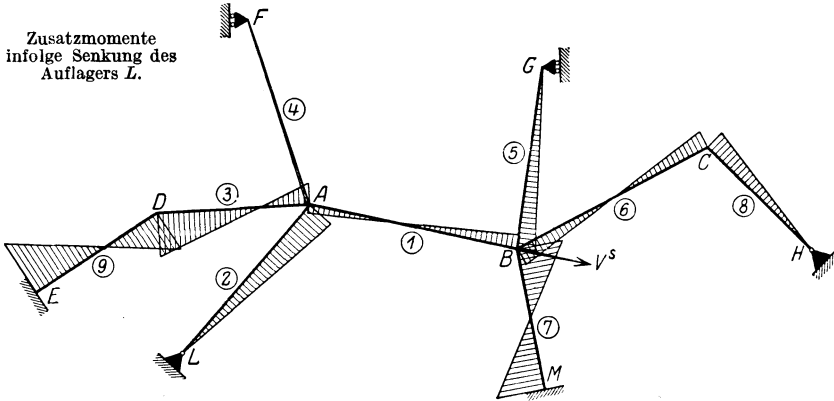


Fig. 320 b.

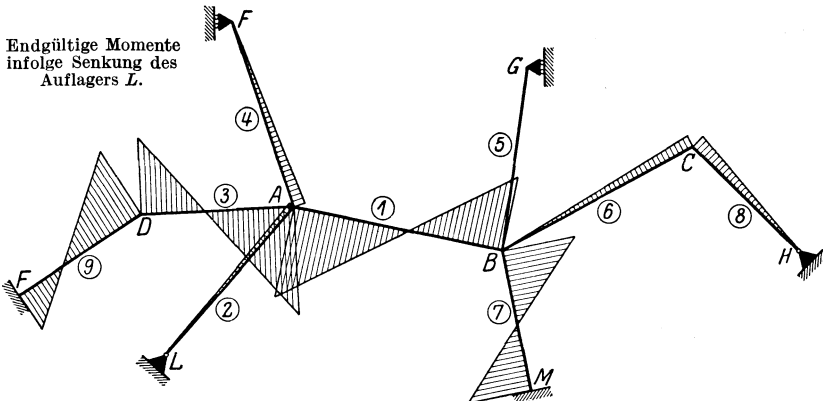


Fig. 320 c.

Fig. 321 zu bestimmen, gehen wir analog vor, wie am allgemeinen Rahmen der Fig. 320 beschrieben. Wir halten zunächst den Balken, oder was gleichbedeutend ist, den Knotenpunkt C horizontal unverschiebbar fest. Tritt die Senkung Δ (senkrecht angenommen) des Auflagerpunktes E dann ein, so senkt sich der Knotenpunkt B um gleichviel senkrecht nach unten, während die Knotenpunkte A und C in ihrer ursprünglichen Lage verbleiben (und zwar deshalb, weil die Senkung des Punktes B normal zum Balken $1-2$ erfolgt und die Senkung des Auflagerpunktes F im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend klein angenommen wurde), und es treten am festgehaltenen Rahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“

$$q_1 = \Delta \quad \text{und} \quad q_2 = \Delta$$

auf, für welche wir die Momente (Fig. 321a) nach Kap. III dieses Teiles und die dazugehörige Festhaltungskraft F nach Kap. VII des I. Teiles bestimmen. Bringen wir jetzt die umgekehrte Festhaltungskraft F^s , d. h. die Verschiebungskraft V^s als äußere, in Balkenachse wirkende Kraft an, so entstehen durch diese Belastung die Senkungs-Zusatzmomente (Fig. 321b), welche wir einfach durch Multiplikation der M^* -Momentenfläche dieses Rahmens mit Größe und Vorzeichen von V^s erhalten.

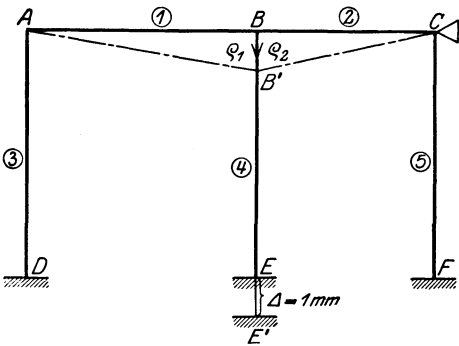


Fig. 321.

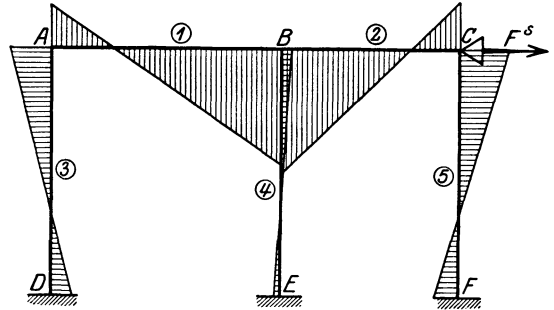


Fig. 321 a.

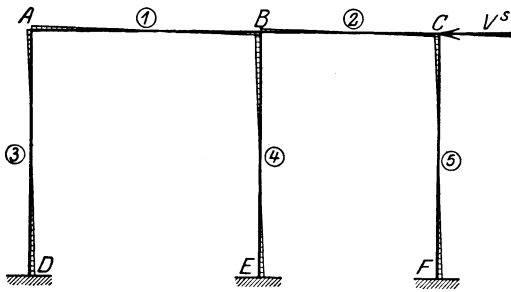


Fig. 321 b.

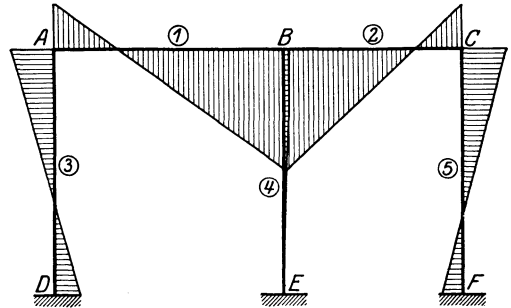


Fig. 321 c.

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Momente (Fig. 321c) und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Senkung des Auflagerpunktes E . — Es sei noch erwähnt, daß bei Senkung eines Endauflagers größere Zusatzmomente entstehen als bei Senkung eines mittleren Auflagers.

Hat sich der Auflagerpunkt E nicht in senkrechter, sondern in beliebiger Richtung gesenkt (Fig. 321d), so erleiden nicht nur die Stäbe 1 und 2, sondern auch noch die Säule 4 eine gegenseitige Verschiebung ihrer Endpunkte. Wegen des gedachten Lagers in C ist die Verschiebung des Punktes B trotzdem senkrecht und gleich der Projektion der gegebenen Senkung auf die Senkrechte; die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung der Säule 4 ist gleich der Projektion der gegebenen Senkung auf die Waagrechte. Die Berechnung gestaltet sich im übrigen analog wie für die Senkung in senkrechter Richtung beschrieben.

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Momente infolge gegebener Senkung

am symmetrischen Rahmen,

wenn die Senkung in dessen Symmetrieachse liegt, und

am festgehaltenen Tragwerk

für beliebig gerichtete Senkungen, weil an diesen Tragwerken — z. B. Fig. 322 bzw. 323 — keine Senkungs-Zusatzmomente zu bestimmen sind, und zwar deshalb nicht, weil man bei beiden Konstruktionsarten den Punkt kennt, welcher bei der vorausgesetzten Senkung keine seitliche Bewegung ausführt und man daher von vornherein die endgültige Verschiebung eines jeden Knotenpunktes angeben kann.

Am symmetrischen Rahmen der Fig. 322, dessen mittlere Säule sich um die Strecke Δ senkrecht gesenkt habe, wissen wir, daß der Punkt B , trotzdem an keinem der drei Knotenpunkte A, B, C ein Lager angebracht wurde, sich nicht seitlich, sondern nur senkrecht nach unten verschiebt, und zwar um das Maß $BB' = \Delta$. Vom Punkte B' aus können wir nun in bekannter Weise die neue Lage des Knotenpunktes A und diejenige von C bestimmen (siehe Fig. 322). Hierauf kennen wir die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen der Endpunkte aller Stäbe, nämlich

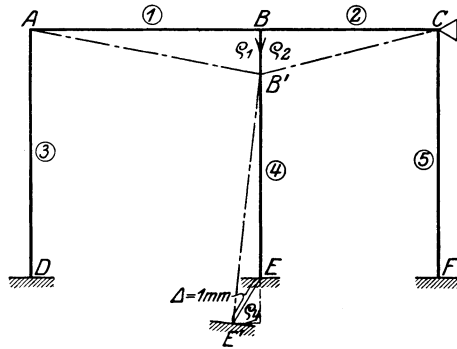


Fig. 321 d.

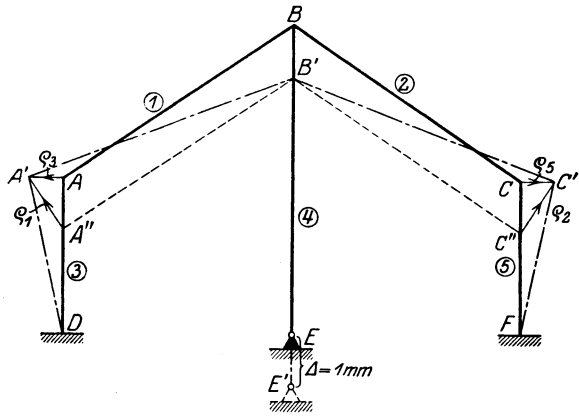


Fig. 322.

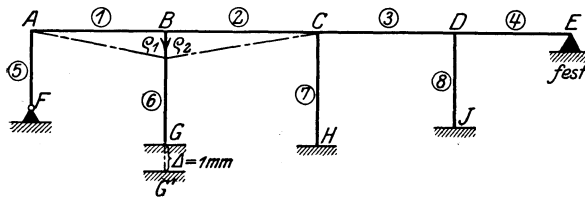
$$\begin{aligned} \varrho_1 &= A''A', \\ \varrho_2 &= C''C', \\ \varrho_3 &= AA', \\ \varrho_4 &= 0, \\ \varrho_5 &= CC', \end{aligned}$$

und bestimmen nach Kap. III dieses Teiles die zugehörigen Momente, welche die endgültigen Momente für die gegebene Senkung sind.

Das Tragwerk der Fig. 323 ist unsymmetrisch, besitzt jedoch an einem Ende ein festes Lager, weshalb das Tragwerk bei Senkung einer Säule keine seitlichen

Bewegungen ausführen kann und mithin auch keine Zusatzmomente auftreten können.

Senkt sich z. B. Säule 6 um das Maß Δ in senkrechter Richtung, so verschiebt sich Knotenpunkt B um dasselbe Maß senkrecht nach unten und die



Stäbe 1 und 2 erleiden dadurch gegenseitige Verschiebungen ihrer Endpunkte, auf Grund deren wir nach Kap. III die durch die gegebene Senkung am ganzen Tragwerk hervorgerufenen Momente ermitteln können.

Fig. 323.

Spezialfall: Der durchlaufende Balken.

Nach denselben Grundsätzen ermitteln wir auch die an einem gewöhnlichen durchlaufenden Balken infolge Senkung seiner Auflager entstehenden Momente.

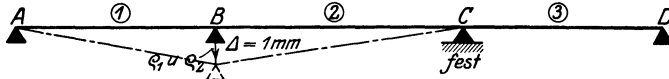


Fig. 324.

Senkt sich am durchlaufenden Balken der Fig. 324 z. B. dessen Auflager B um das gegebene Maß Δ , so erleiden die Balkenöffnungen (Stäbe) 1 und 2 gegenseitige Verschiebungen ihrer Enden. Wir erhalten

$$q_1 = \Delta, \quad q_2 = \Delta, \quad q_3 = 0,$$

auf Grund deren wir nach Kap. III die durch die gegebene Senkung am ganzen Tragwerk hervorgerufenen Momente ermitteln können.

2. Der mehrstöckige Rahmen.

Wir betrachten wieder zunächst den allgemeinen unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen Rahmen der Fig. 325

mit beliebig gerichteten Stäben

und nehmen an, das Auflager L desselben habe sich um die gegebene Strecke Δ in senkrechter Richtung gesenkt.

Da wir wieder nicht wissen, welcher Punkt der einzelnen „Stockwerkbalken“ bei der gegebenen Senkung in Ruhe bleibt, so müssen wir zur Bestimmung der dadurch hervorgerufenen Momente am ganzen Rahmen wie im vorhergehenden Kapitel einen Knotenpunkt eines jeden „Stockwerkbalkens“ vorübergehend nach der Seite unverschiebbar festhalten. In den an diesen Knotenpunkten gedachten Lagern treten Festhaltungskräfte F^s auf, genau wie bei Belastung des Rahmens mit äußeren Kräften. Entfernen wir die gedachten Lager, so treten an den vorübergehend unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten die Verschiebungskräfte V^s (die entgegengesetzt gerichteten Festhaltungskräfte F^s) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Stockwerkrahmen erzeugen, die zu denjenigen für den festgehaltenen Zustand zu

Aus den Senkungsmomenten für den festgehaltenen Zustand bestimmen wir darauf die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte F_I^s , F_{II}^s und F_{III}^s nach Kap. VII, 2 des ersten Teiles und erhalten hiernach die Senkungs-Zusatzmomente, indem wir die nach Kap. IV, 2 dieses Teiles bestimmten M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* -Momente (Fig. 296c, 299c, 302c) für die im Knotenpunkt C bzw. F bzw. J von links nach rechts in Richtung des anschließenden Balkenstabes 2 bzw. 4 bzw. 6 wirkende Kraft $H = 1$ t mit Größe und Vorzeichen der Ver-

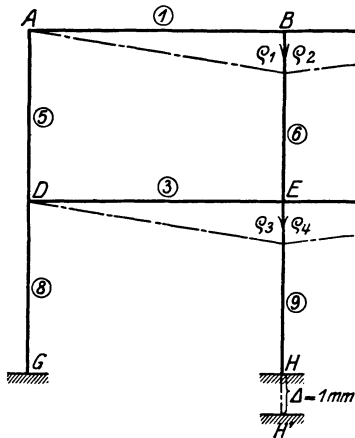


Fig. 326.

schiebungskraft V_I^s bzw. V_{II}^s bzw. V_{III}^s multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Momente und aus ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Senkung des Auflagerpunktes L .

Die Bestimmung der Momente infolge gegebener Senkung eines Auflagers am unsymmetrischen, in keinem Punkte festgehaltenen

Rechteckrahmen

der Fig. 326 gestaltet sich bedeutend einfacher, indem man dabei nicht nötig hat, erst die Knotenpunktverschiebungen zu konstruieren.

Um die Momente infolge der senkrechten Senkung Δ des Auflagers H des Rahmens der Fig. 326 zu bestimmen, müssen wir an den Knotenpunkten C und F vorübergehend feste Lager anbringen, wodurch der Rahmen seitlich unverschiebbar festgehalten wird. Infolge der gegebenen Senkung des Auflagerpunktes H senken sich die Knotenpunkte E und B ebenfalls um das Maß Δ , während die übrigen Knotenpunkte in ihrer ursprünglichen Lage verbleiben. Es treten daher am festgehaltenen Stockwerkrahmen nur die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ ρ_1, ρ_2, ρ_3 und ρ_4 auf, welche alle gleich der gegebenen Senkung Δ sind, und für welche wir die Momente nach Kap. III dieses Teiles und die zugehörigen Festhaltungskräfte F_I^s und F_{II}^s nach Kap. VII, 2 des I. Teiles bestimmen. Bringen wir jetzt die Verschiebungskräfte V_I^s und V_{II}^s (umgekehrte Festhaltungskräfte F_I^s bzw. F_{II}^s) als äußere, in Balkenachse wirkende Kräfte an, so entstehen durch diese Belastung die Senkungs-Zusatzmomente, welche wir durch Multiplikation der M_I^* - und M_{II}^* -Momente mit Größe und Vorzeichen von V_I^s bzw. V_{II}^s und Addition der daraus hervorgehenden Momente erhalten.

Durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente erhalten wir die endgültigen Momente und aus

ihnen die endgültigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte (nach Teil I, Kap. VI) für die gegebene Senkung des Auflagerpunktes H .

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der Momente infolge gegebener Senkung

am symmetrischen Stockwerkrahmen,

wenn die Senkung in dessen Symmetrieachse liegt, und

am festgehaltenen Stockwerkrahmen

für beliebig gerichtete Senkungen, weil an diesen Tragwerken keine Senkungs-Zusatzmomente zu bestimmen sind (vgl. das für den einstöckigen symmetrischen oder festgehaltenen Rahmen Gesagte).

3. Der Rahmenträger.

Da der Rahmenträger äußerlich ein einfacher Balken ist, so ruft eine Senkung eines seiner Auflager keine Spannungen in demselben hervor.

Was die durchlaufenden Rahmenträger betrifft, so werden die Momente infolge einer Senkung eines seiner Auflager nach den für den mehrstöckigen Rahmen geltenden Grundsätzen ermittelt.

VII. Bestimmung der Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderungen der Stäbe.

Infolge der in den Stäben eines Tragwerkes auftretenden Normalkräfte (Achskräfte) ändern sich die Längen der einzelnen Stäbe um

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \quad (576)$$

wenn

N die Normalkraft in irgendeinem Stabe,

l die anfängliche Länge dieses Stabes,

E der Elastizitätsmodul des Baumaterials, und

F der Querschnitt des Stabes,

und zwar verkürzt sich der Stab, wenn N eine Druckkraft, und er verlängert sich, wenn N eine Zugkraft ist.

Durch diese Längenänderungen verschieben sich die Knotenpunkte des Tragwerkes, und durch diese Verschiebungen bzw. die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ der Endpunkte aller Stäbe (T. II, Kap. II) entstehen die gesuchten Momente infolge der Normalkräfte am ganzen Tragwerk.

Wir erkennen, daß die Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderung der Stäbe genau gleich bestimmt werden wie die Momente infolge der durch eine Temperaturänderung des Baumaterials (Kap. V dieses Teiles) hervorgerufenen Längenänderung der Stäbe.

An Stelle der nach Gl. (575) für eine Temperaturänderung berechneten Δl treten die nach obiger Gl. (576) bestimmten Werte von Δl ; nur ist zu beachten, daß letzterer am einen Stab eine Verkürzung und am anderen eine Verlängerung

ist, je nachdem die Normalkraft in dem betreffenden Stab eine Druck- oder Zugkraft ist. Dementsprechend ist Δl dann im Verschiebungsplan als Verkürzung oder Verlängerung abzutragen.

1. Der einstöckige Rahmen.

Wir betrachten als Beispiel den allgemeinen einstöckigen Rahmen der Fig. 327.

Die Kräftepläne der Knotenpunkte A und D sind in 5 mal größerem Maßstabe aufgetragen als diejenige der Knotenpunkte B und C .

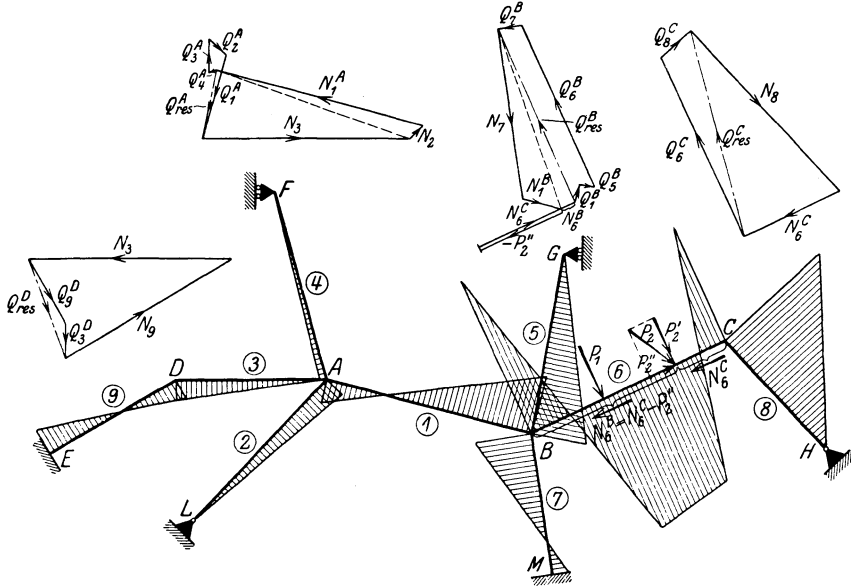


Fig. 327.

Nachdem wir die endgültige Momentenfläche für den betreffenden Belastungsfall (kann auch eine Temperaturänderung oder Senkung sein) nach den vorhergehenden Kapiteln bestimmt und aus dieser die zugehörigen Normalkräfte nach Kap. VI des I. Teiles ermittelt haben (siehe Fig. 327), berechnen wir für jeden Stab die dadurch hervorgerufene Längsänderung Δl desselben nach Gl. (576). Da wir nicht wissen, welcher Punkt des Rahmens bei den durch die Längenänderung Δl der Stäbe hervorgerufenen Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte in Ruhe bleibt, so können wir die wirklichen Verschiebungen der Knotenpunkte nicht angeben. Wir müssen daher, wie im vorhergehenden Kapitel, den „Balken“ des Rahmens vorübergehend in einem Knotenpunkte seitlich unverschiebbar festhalten und danach die für den festgehaltenen Zustand erhaltenen Momente durch Addition der Zusatzmomente, hervorgerufen durch Belastung des Rahmens mit der Verschiebungskraft V^N (umgekehrte Festhaltungskraft F^N in dem vorübergehend festgehaltenen Knotenpunkt) in die endgültigen Momente überführen.

Da wir schon bei der Bestimmung der Zusatzmomente für den gegebenen Belastungsfall (kann auch eine Temperaturänderung oder Senkung sein) die Momente M^* infolge Belastung eines Knotenpunktes des Rahmens mit der Kraft

$H = 1 t$ ermitteln müssen, so halten wir bei Bestimmung der Momente infolge der Normalkräfte nicht einen beliebigen Knotenpunkt des „Balkens“ vorüber-

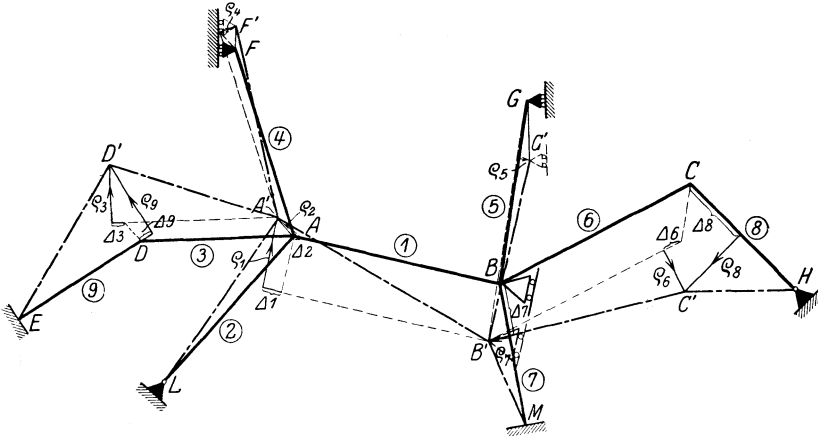


Fig. 327 a.

gehend unverschiebbar fest, sondern genau denselben wie bei der Berechnung der Momente für den gegebenen Belastungsfall, nämlich am vorliegenden Rahmen den Knotenpunkt B . Außerdem bringen wir an diesem Knotenpunkt nicht ein

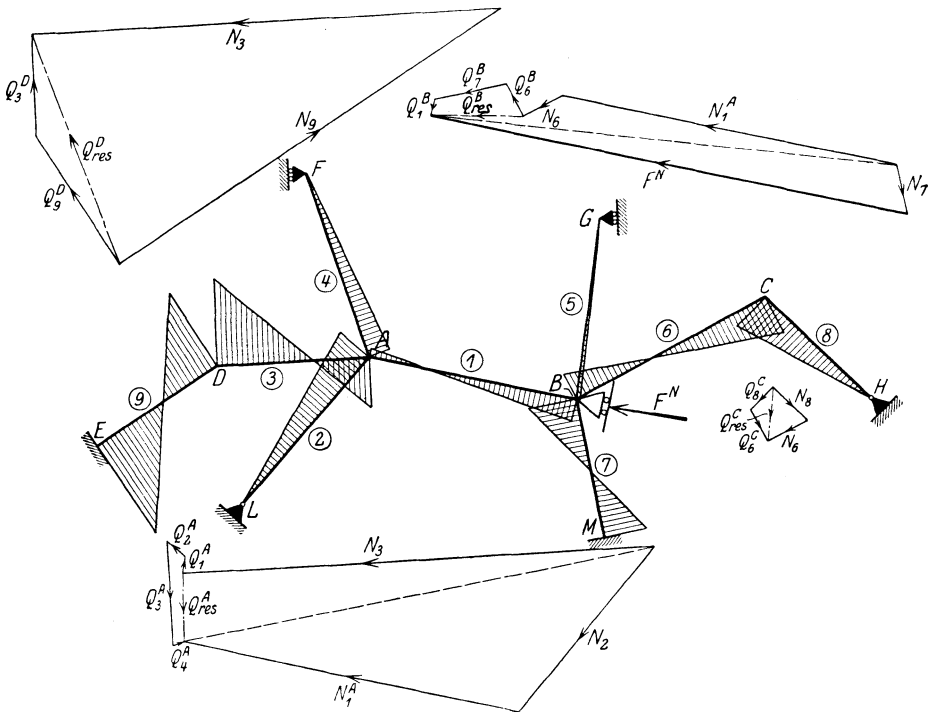


Fig. 327 b.

festes Lager, sondern ein Rollenlager (vgl. Teil II, Kap. V, 1) mit zweckmäßig normal zum Stab 1 gerichteter Bahn an, weil sonst der Stab 7 seine Länge nicht ändern könnte.

Auf Grund der nach Gl. (576) berechneten Längenänderungen Δl konstruieren wir nun in Fig. 327 a von B ausgehend die Verschiebung aller Knotenpunkte analog wie dies im vorhergehenden Kapitel geschehen ist; in jenem Kapitel waren nur Verlängerungen, hier sind Verlängerungen und Verkürzungen

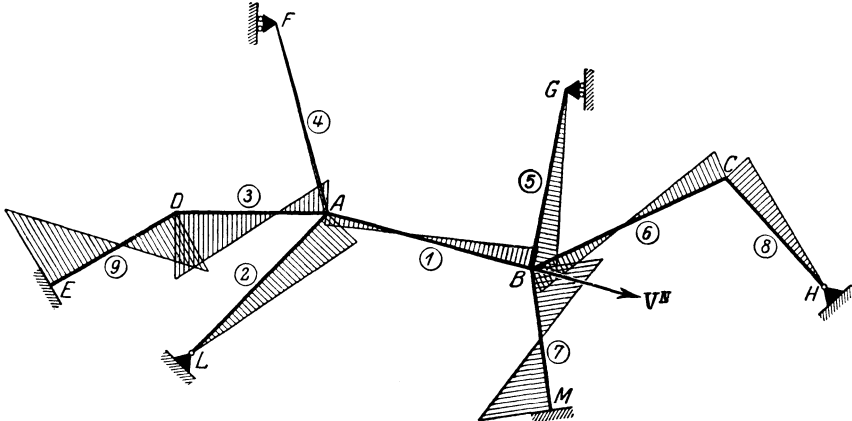


Fig. 327 c.

abzutragen, was zu beachten ist. Da in den Stäben 4 und 5 wegen der beweglichen Lager in F und G keine Normalkräfte auftreten, so erleiden dieselben keine Längenänderungen.

Die verschobene Lage der einzelnen Stäbe wurde in Fig. 327 a strichpunktiert eingetragen, wobei der Einfachheit halber deren Formänderung herrührend von

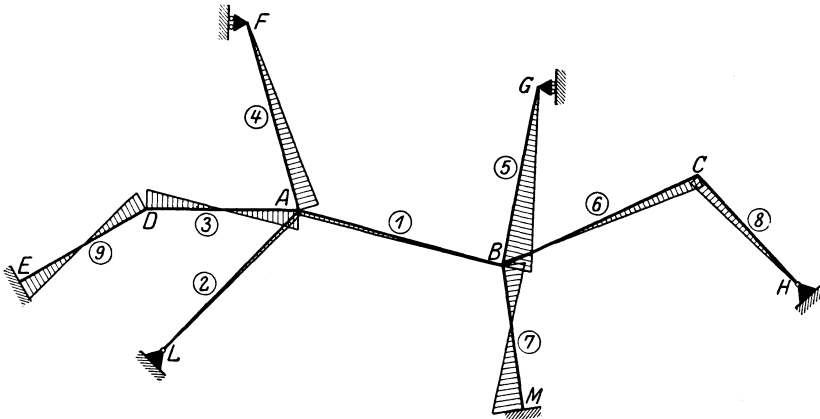


Fig. 327 d.

den infolge der Knotenpunktverschiebungen in denselben auftretenden Momenten nicht dargestellt wurde.

Nun besitzen wir, wie früher, nicht nur die Verschiebungen aller Knotenpunkte, sondern auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ ρ der Endpunkte aller Stäbe, auf Grund deren sich nach Kap. III dieses Teiles die Momente infolge der Längenänderung der Stäbe für den festgehaltenen Zustand ergeben (Fig. 327 b). Aus diesen Momenten bestimmen wir nun (Fig. 327 b) die im gedachten Lager am Knotenpunkt B auftretende Festhaltungskraft F^N nach

Kap. VII, 1 des I. Teiles und erhalten darauf die zugehörigen Zusatzmomente (Fig. 327 c), indem wir die nach Kap. IV, 1 dieses Teiles bestimmte M^* -Momentenfläche (Fig. 290) für die im Knotenpunkt B von links nach rechts in Richtung des Stabes I wirkende Kraft $H = 1 t$ mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft V^N (umgekehrte Festhaltungskraft F^N) multiplizieren.

Durch Addition der Momente für den festgehaltenen Zustand und der Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Momente infolge der Normalkräfte (Fig. 327 d).

Zu diesen Momenten gehören nun aber wieder Normalkräfte, welche das erhaltene Resultat um ein geringes Maß verändern, und man könnte nun mit den berichtigten Normalkräften die Berechnung wiederholen. Dies ist jedoch praktisch nicht nötig, da die Momente infolge der Normalkräfte im Vergleich zu den übrigen Momenten überhaupt gering sind.

Bei in einem Punkte festgehaltenen Tragwerken sowie bei symmetrischen Tragwerken, welche symmetrisch belastet sind, gestaltet sich die Berechnung einfacher, weil die Zusatzmomente wegfallen.

2. Der mehrstöckige Rahmen.

Am mehrstöckigen Rahmen gestaltet sich die Bestimmung der Momente infolge der Längenänderungen der Stäbe, hervorgerufen durch die Normalkräfte in denselben, ebenfalls genau gleich wie die Bestimmung der Momente infolge der Längenänderungen der Stäbe, hervorgerufen durch eine Temperaturänderung des Baumaterials (siehe Kap. V dieses Teiles); es ist nur zu beachten, daß die Werte Δl , hervorgerufen durch die Normalkräfte, Verkürzungen oder Verlängerungen sein können.

Wir berechnen daher zunächst die Werte Δl nach Gl. (576) für alle Stäbe auf Grund der aus der endgültigen Momentenfläche für den betreffenden Belastungsfall hervorgehenden Normalkräfte. Darauf konstruieren wir wieder von den an den einzelnen Stockwerkbalken angebrachten Rollenlagern ausgehend die durch die Längenänderungen Δl verursachten Verschiebungen aller Knotenpunkte, wobei wir auch die „gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen“ ϱ der Endpunkte aller Stäbe erhalten. Mittels der Verschiebungen ϱ bestimmen wir nach Kap. III dieses Teiles die Momentenfläche am ganzen Stockwerkrahmen für den festgehaltenen Zustand und konstruieren aus letzterer nach Kap. VII, 2 des I. Teiles die zugehörige Festhaltungskraft F^N an jedem gedachten Rollenlager.

Entfernen wir die gedachten Rollenlager an den Stockwerkbalken, so treten die den Festhaltungskräften F^N entgegengesetzt gleichen Verschiebungskräfte V^N in Tätigkeit, welche am ganzen Rahmen noch Zusatzmomente hervorrufen. Diese werden dadurch erhalten, daß wir die Verschiebungskräfte V^N mit der betreffenden M^* -Momentenfläche multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momentenflächen (ebensoviel als Stockwerke vorhanden sind) addieren.

Durch Addition der Momente für den festgehaltenen Zustand und der Zusatzmomente erhalten wir nun die endgültigen Momente infolge der Normalkräfte, welche nicht mehr korrigiert zu werden brauchen, obwohl durch dieselben die ursprünglich gegebenen Normalkräfte sich um ein geringes Maß verändern.

3. Der Rahmenträger.

Da der Rahmenträger für die Berechnung nichts anderes ist als ein mehrstöckiger Rahmen, so werden die Momente infolge der Längenänderungen seiner Stäbe, hervorgerufen durch die Normalkräfte in denselben, analog wie im vorhergehenden Abschnitt für den mehrstöckigen Rahmen beschrieben, ermittelt.

VIII. Bestimmung der Grenzwerte der Momente, Querkräfte und Normalkräfte.

1. Grenzwerte der Momente.

Beim Tragwerk mit verschiebbaren Knotenpunkten gelten bezüglich der Grenzwertbildung wieder die Ausführungen unter Kap. V, 5 (1. Teil) in sinngemäßer Erweiterung, indem noch der Einfluß der Verschiebungskraft zu berücksichtigen ist.

a) Gleichmäßig verteilte Last.

Beim einfachen Rahmen der Fig. 328 erzeugt eine Last P am festgehaltenen Tragwerk die schwach ausgezogene Momentenlinie. Die Momentenlinie infolge der Verschiebungskraft ist punktiert eingetragen. Die endgültige, stark ausgezogene Momentenlinie ergibt sich durch Addition der beiden ersteren. Im Schnitt F zwischen den beiden Festpunkten wird das resultierende Moment negativ.

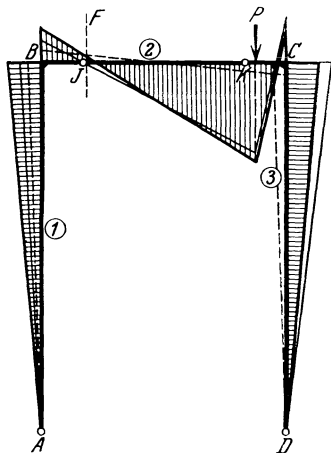


Fig. 328.

Im Gegensatz zu den festgehaltenen Tragwerken können bei denjenigen mit verschiebbaren Knotenpunkten auch zwischen den Festpunkten negative Momente entstehen, wenn das betreffende Feld unsymmetrisch belastet wird.

Vollbelastung des Balkens BC (Fig. 328) erzeugt nicht mehr positive Grenzwerte der Momente längs der ganzen Strecke $J-K$. Es müssen daher für die Grenzwertbildung eventuell auch für Schnitte zwischen den Festpunkten, und nahe diesen gelegen, Einflußlinien konstruiert werden. Meistens genügen aber für die Dimensionierung die maximalen Momente um die Feldmitte, für die auch weiterhin Totalbelastung maßgebend ist.

Zudem verschwindet der Einfluß der Verschiebungskraft auf die Feldmomente stark, sobald am Rahmen mehrere Stützen vorhanden sind.

b) Bewegliche Lasten.

Zur Ermittlung der Grenzwerte der Momente werden wieder Einflußlinien verwendet. Ihre Konstruktion ist anfänglich die gleiche wie in Kap. V, 1, 1. Teil. Es wird zuerst die Einflußlinie für das festgehaltene Tragwerk bestimmt. Nun muß noch der Einfluß der Verschiebungskraft berücksichtigt werden. Dazu ist

deren Einflußlinie zu konstruieren, sowie die Momentenfläche M^* infolge einer Verschiebungskraft $V = 1 \text{ t}$.

Der Einfluß der Verschiebungskraft auf eine Einflußlinie wird nun folgendermaßen berücksichtigt:

Für alle Laststellungen $P = 1$ wird die Größe der Verschiebungskraft bestimmt, durch Abgreifen in deren Einflußlinie. Diese Werte V werden multipliziert mit dem Momente M^* , welches in dem Schnitte auftritt, für den die Einflußlinie konstruiert werden soll. Die Ordinaten $V \cdot M^*$ stellen den Anteil der Verschiebungskraft an der Einflußlinie dar. Sie werden unter den ihnen zugehörigen Laststellungen zu den M -Ordinaten addiert und liefern die endgültige Momentenfläche.

Die Verschiebungskraft ist gleich der Summe der Pfeilerquerkräfte. Die Konstruktion der Querkräfte erfolgt graphisch nach Kap. VI, 1b (1. Teil).

Für den durchlaufenden Rahmen der Fig. 153 mit veränderlichem Trägheitsmoment, aber verschiebbarem Auflager E , ist die Einflußlinie in Fig. 329 bis 329b konstruiert. Für die Laststellung $P = 1$ in Schnitt 2 ist die Momentenfläche des festgehaltenen Tragwerkes in Fig. 329 aufgetragen. Die Querkraft am Pfeilerkopf ist gleich dem Abschnitt, den die Schlußlinie der Momentenfläche am Pfeiler auf einer Senkrechten zur Pfeilerachse im Abstände H (Polweite) von einem Festpunkt aus abschneidet.

Für die Laststellung $P = 1$ in Schnitt 2 sind daher die Pfeilerquerkräfte zwischen den Schlußlinien 2 und den Pfeilerachsen abzugreifen. Alle diese Abschnitte mit dem Zirkel unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens addiert, ergeben die Einflußordinate η_2 der Verschiebungskraft in Schnitt 2. Ebenso wird die Einflußordinate η_6 für Schnitt 6 aus Fig. 329a erhalten, durch Addition der Abschnitte zwischen den Schlußlinien 6 und den Pfeilerachsen.

Der Pfeil gibt die Richtung der Verschiebungskraft an.

Die Konstruktion der Momentenfläche M^* erfolgt nach Kap. IV (2. Teil).

Zuerst wird die Momentenfläche M' (Fig. 330) infolge einer Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$ bestimmt. Dazu wird das Moment, das an jedem Pfeilerkopf infolge der Verschiebung $\Delta = 1 \text{ mm}$ entsteht, in den Horizontalbalken eingeleitet. Die Momentenlinien infolge M_5^A sind ausgezogen, infolge M_6^B gestrichelt, infolge M_7^C strichpunktirt und infolge M_8^B punktiert eingetragen. Durch Addition sämtlicher Momentenlinien erhält man die gesuchte M' -Momentenlinie, die stark ausgezogen ist. Hierauf wird die dazugehörige Festhaltungskraft F bestimmt. Durch Division der Momentenfläche M' durch F erhält man die Momentenfläche M^* infolge einer Verschiebungskraft $V = 1 \text{ t}$ (Fig. 331).

Die Konstruktion der Einflußlinien der Momente ist in Fig. 332—332g durchgeführt. Die punktierten Einflußlinien sind diejenigen für den festgehaltenen Zustand. Die zusätzlichen Momente z. B. für die Einflußlinie M_I sind wie folgt bestimmt: Eine Last $P = 1$ in Schnitt 3 erzeugt eine Verschiebungskraft V_3 , deren Größe aus der Einflußlinie Fig. 329b entnommen wird. Das Moment M_I^* infolge $V = 1 \text{ t}$ wird aus Fig. 331 in Schnitt 1 abgegriffen. Das Produkt $V_3 \cdot M_I^*$ ergibt nun den gesuchten Wert ΔM_3 , der zu der Momentenordinate unter Schnitt 3 addiert wird.

Das Produkt $V \cdot M^*$ wird am einfachsten mittels des Reduktionswinkels Fig. 332e erhalten. Im Abstände V_3 vom Nullpunkt greift man direkt den Wert

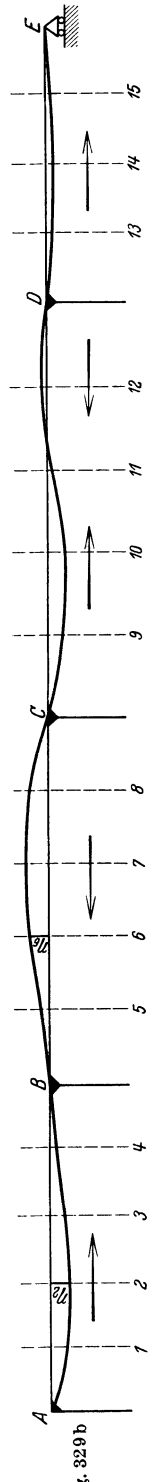
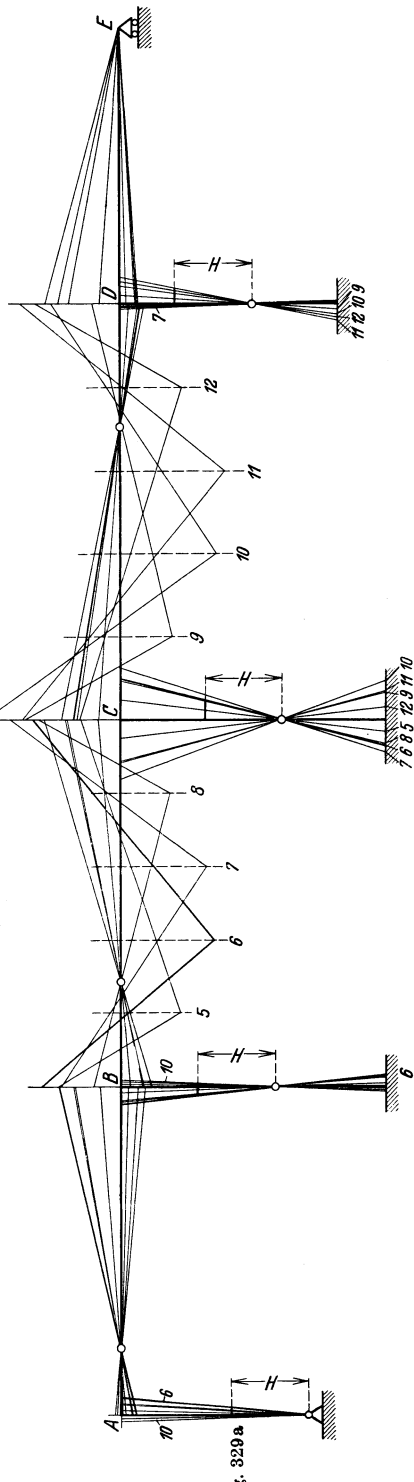
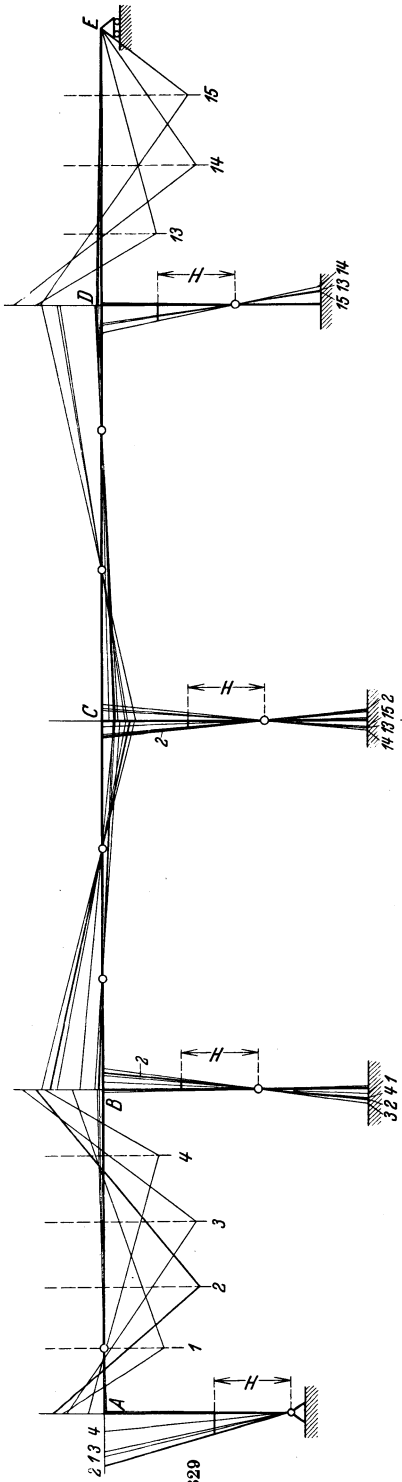


Fig. 329—329 b.

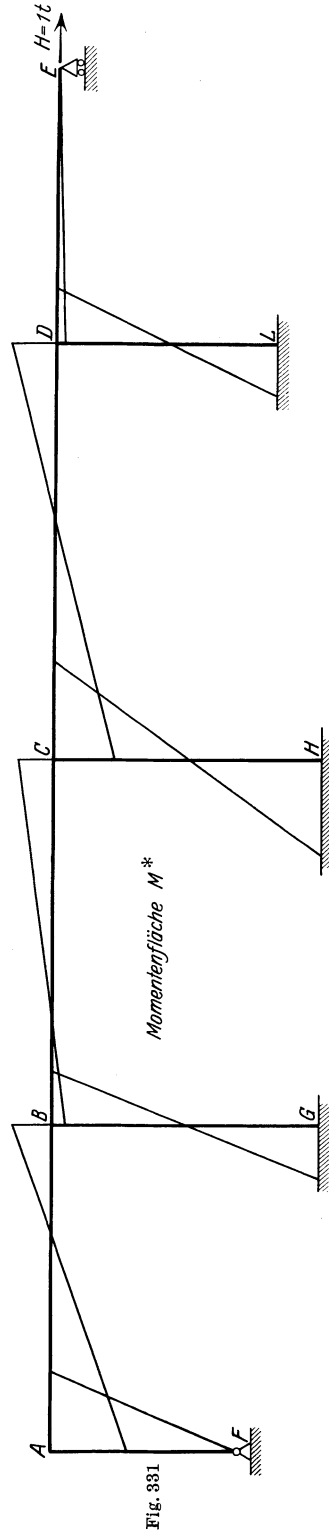
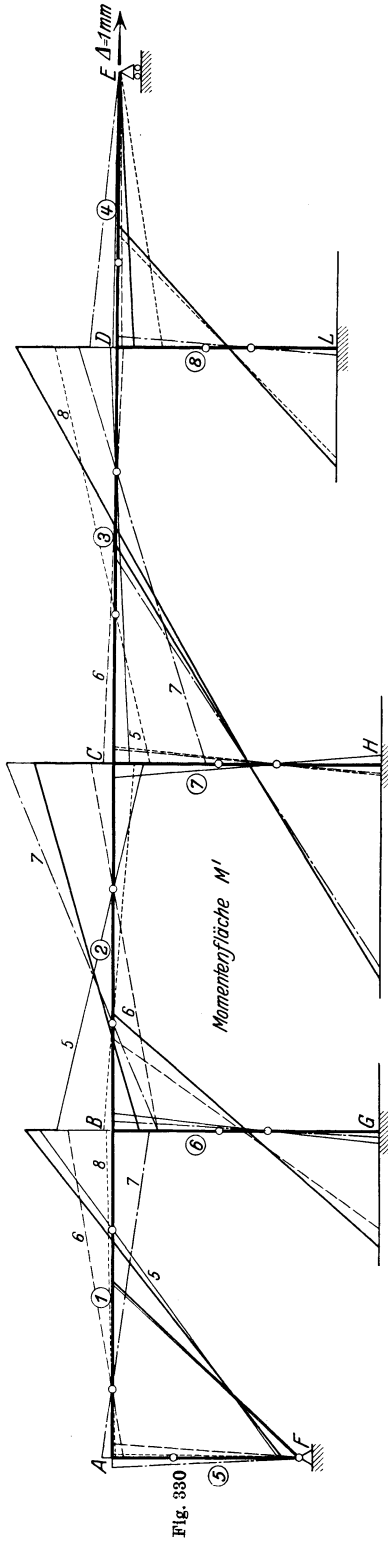
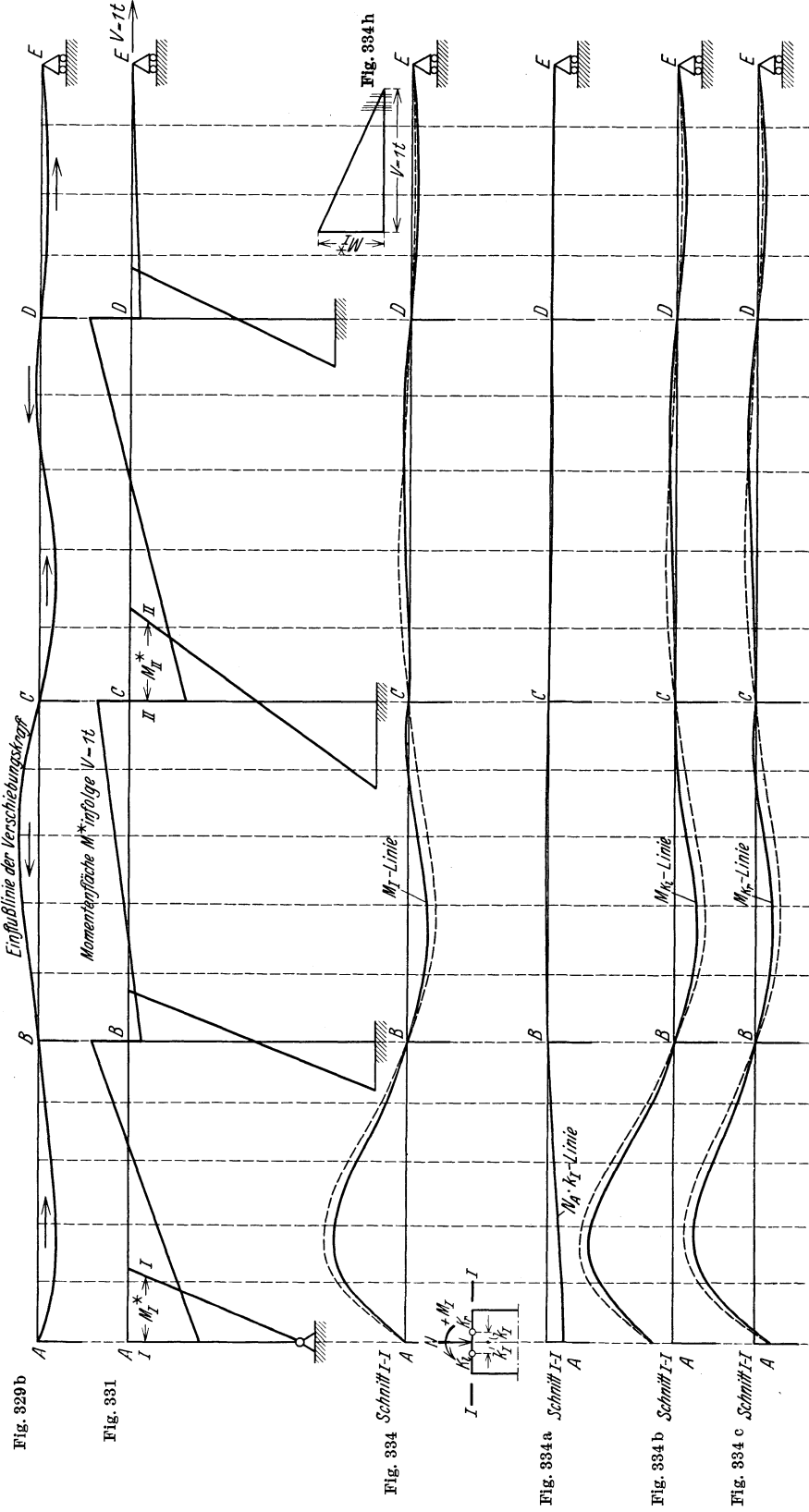


Fig. 330—331.

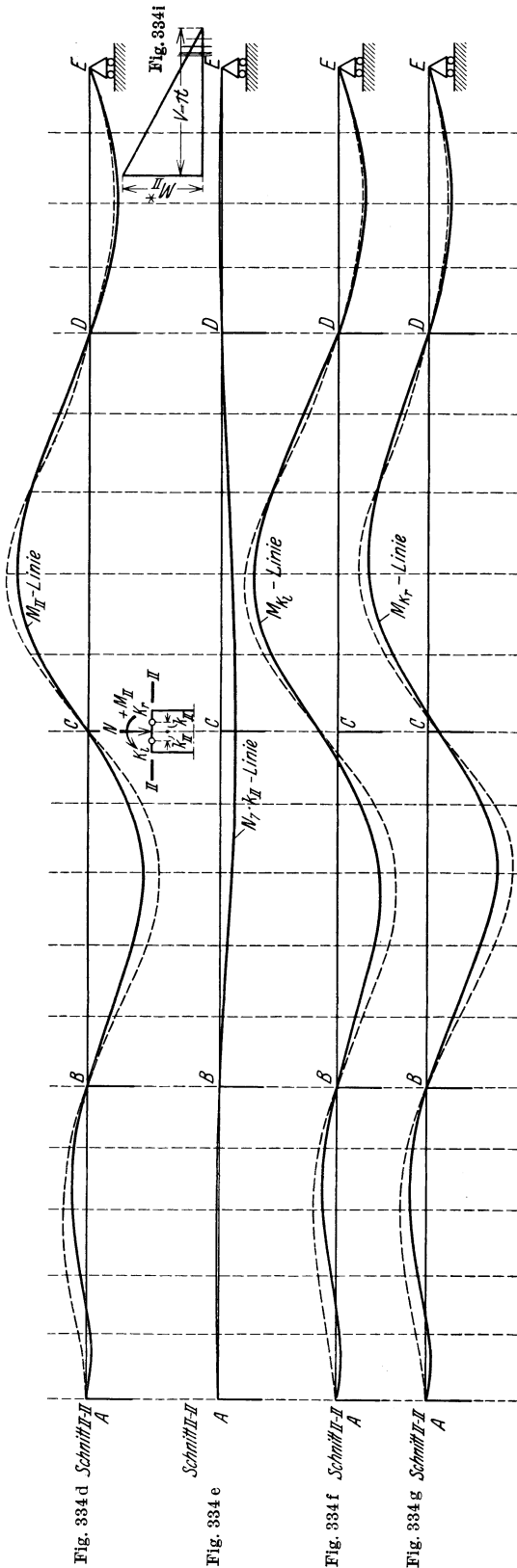


2. Grenzwerte der Querkräfte.

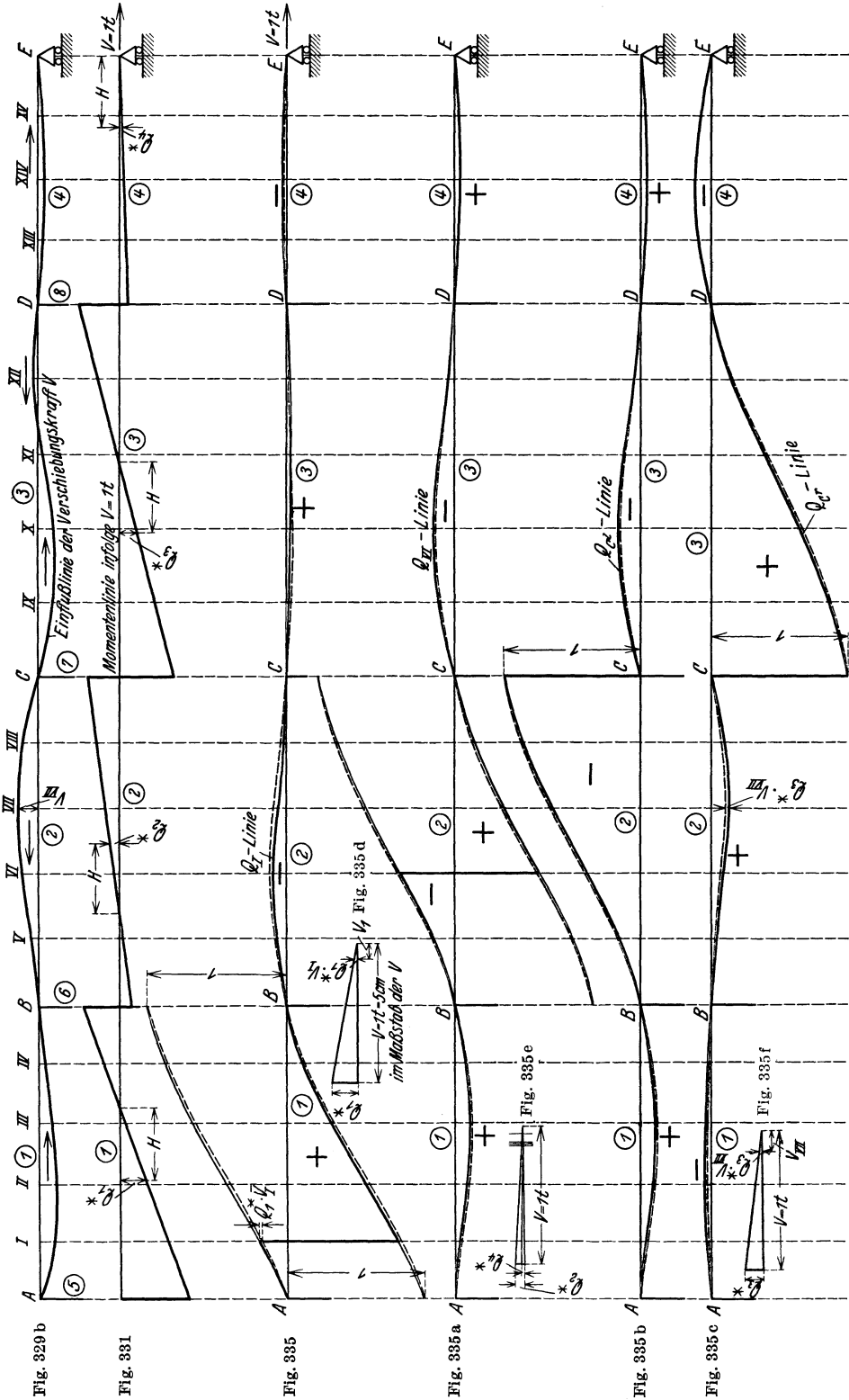
Die Einflußlinien der Querkräfte für das verschiebbare Tragwerk ermittelt man auf genau gleiche Weise aus den endgültigen Einflußlinien der Stützenmomente, wie unter Kap. VI 1c (1. Teil) die Bestimmung der Querkraftseinflußlinien für das festgehaltene Tragwerk geschah.

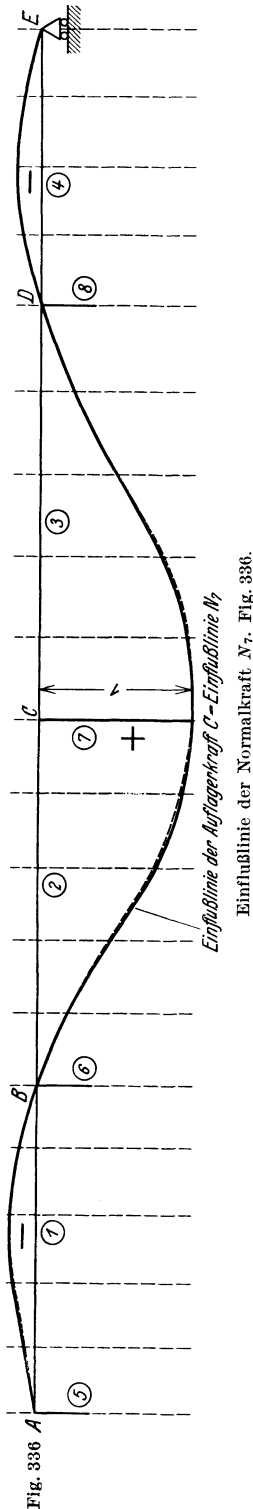
An Stelle der Momenteneinflußlinien für das festgehaltene Tragwerk sind einfach die endgültigen Momenteneinflußlinien des Tragwerkes mit verschiebbaren Knotenpunkten zu verwenden.

Die Querkraftseinflußlinien können auch analog Kap. VI, 1 (1. Teil) direkt aus den Momentenflächen der wandernden Last $P = 1$ bestimmt werden. Sie setzen sich zusammen aus denjenigen für das festgehaltene Tragwerk und dem Einfluß der Verschiebungskraft. Um den Einfluß der Verschiebungskraft zu berücksichtigen, wird die Einflußlinie der Verschiebungskraft ermittelt; sowie die Momentenfläche M^* infolge $V = 1$ t. Die Verschiebungskraft $V = 1$ t erzeugt im Schnitte, für den die Einflußlinie gesucht wird, eine Verschiebungskraft Q^* , die aus der M^* -Fläche in bekannter Weise erhalten wird. Die Einflußlinie der Verschiebungskraft liefert für jede Laststellung $P = 1$ den zugehörigen Wert V . Das Produkt $Q^* \cdot V$ gibt den Einfluß der Verschiebungskraft an. Es sind daher die Ordinaten $Q^* \cdot V$ zu den Q -Ordinaten im festgehaltenen Zustand zu addieren, um die endgültigen Einflußlinien der Querkräfte zu erhalten. Die ersterwähnte Konstruktion



Einflußlinien der Kernpunktmomente M_{kI} und M_{kII} . Fig. 334—334I.





aus den endgültigen Momentenflächen ist aber die einfachere.

In Fig. 335–335c sind Einflußlinien der Querkräfte für den festgehaltenen Zustand punktiert eingetragen. Für die Laststellung $P = 1$ in Schnitt VII erhält man aus Fig. 329b die Verschiebungskraft V_{VII} . Die Verschiebungskraft $V = 1$ t erzeugt in Feld 3 die Querkraft Q_3^* , die aus Fig. 331 entnommen wird. Das Produkt $Q_3^* \cdot V_{VII}$ wird mittels des Reduktionswinkels Fig. 335f bestimmt. Dieser Wert in Schnitt VII zur Ordinate der Querkraft für den festgehaltenen Zustand addiert, ergibt die endgültige Querkraftordinate η_{VII} und durch Wiederholung für andere Schnitte die endgültige Querkrafteinflußlinie M_C t. Da die Querkräfte für die einzelnen Felder konstant sind, ist für jede Querkrafteinflußlinie der zusätzliche Wert $V \cdot Q^*$ proportional der Einflußlinie der Verschiebungskraft.

Wie aus den Fig. 335–335c ersichtlich, ist der Einfluß der Verschiebungskraft auf die Querkräfte gering, sobald mehrere Stiele vorkommen.

3. Grenzwerte der Normalkräfte.

Die endgültigen Einflußlinien für die Normalkräfte ergeben sich durch Addition der endgültigen Einflußlinien der Querkräfte links und rechts des Säulenkopfes. In Fig. 336 ist die Einflußlinie für die Normalkraft der Säule 7 durch Addition der Einflußlinien von Q_C^l und Q_C^r erhalten werden. Der Einfluß der Verschiebungskraft ist verschwindend klein. Die punktierte Linie gilt für den festgehaltenen Zustand.

IX. Bestimmung der inneren Kräfte an einem Tragwerk mit bogenförmigen Stäben und verschiebbaren Knotenpunkten.

1. Gang der Berechnung.

In Kap. VIII des „Ersten Teiles“ haben wir die Berechnung eines Tragwerkes, das nicht nur aus geradlinigen, sondern auch aus bogenförmigen Stäben besteht, für den Fall vorgeführt, daß die Knotenpunkte A , B und C (und mit letzterem auch D) durch gedachte Lager unverschiebbar festgehalten seien (Rechnungsabschnitt I).

Besitzt dieses Tragwerk (Fig. 337) in Wirklichkeit frei verschiebbare Knotenpunkte, so sind die nach

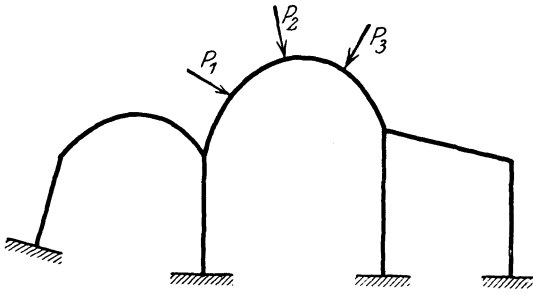


Fig. 337.

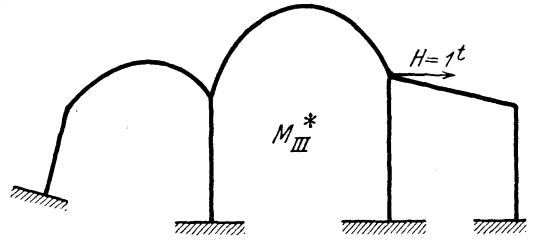


Fig. 337e.

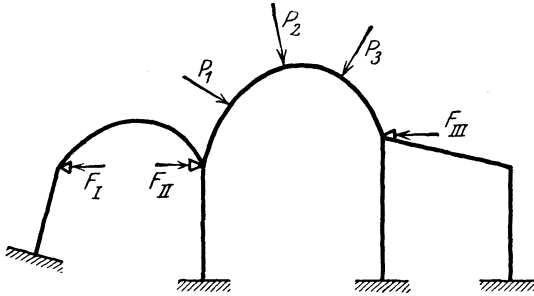


Fig. 337a.

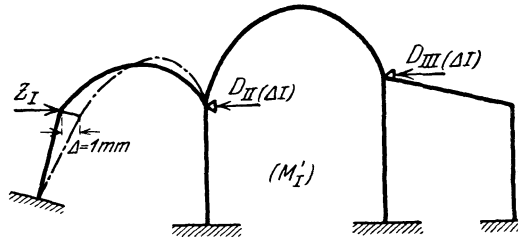


Fig. 337f.

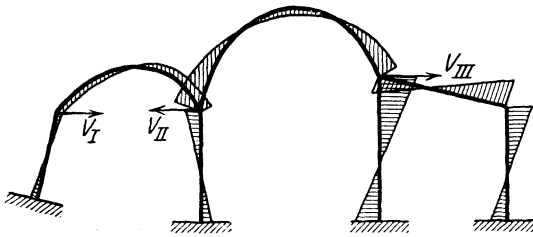


Fig. 337b.

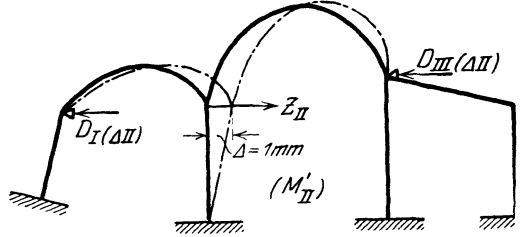


Fig. 337g.

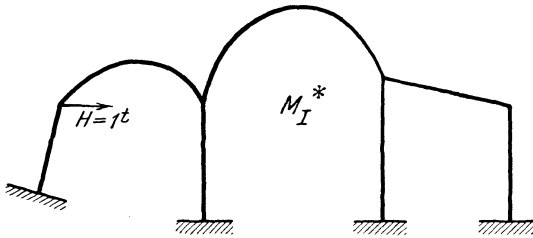


Fig. 337c.

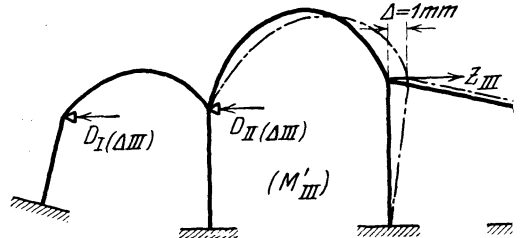


Fig. 337h.

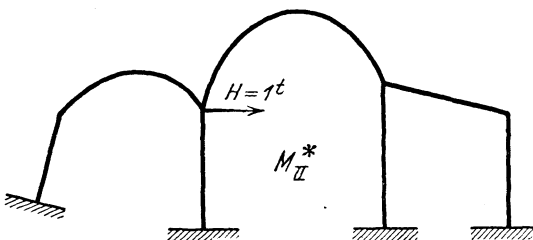


Fig. 337d.

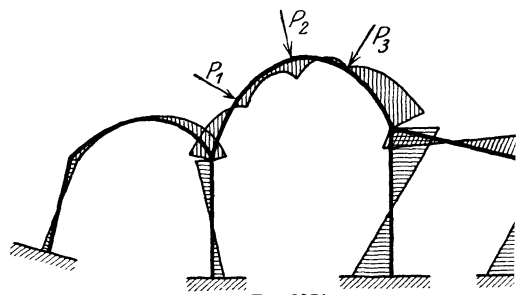


Fig. 337i.

Kap. VIII bestimmten Momente nicht die endgültigen, sondern sie müssen noch durch die

Zusatzmomente (Rechnungsabschnitt II)

ergänzt werden.

Entfernen wir nämlich die vorübergehend an den Knotenpunkten A , B und C gedachten Lager (vgl. Kap. VIII des I. Teiles) und damit die darin wirkenden Festhaltungskräfte, welche die Knotenpunkte des Rahmens während Rechnungsabschnitt I in Ruhe hielten (Fig. 337a), so treten die den Festhaltungskräften („Reaktionen“) gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungskräfte („Aktionen“) in Tätigkeit (Fig. 337b), welche den Rahmen, d. h. die einzelnen Knotenpunkte desselben, noch verschieben und dadurch am ganzen Rahmen Zusatzmomente hervorrufen. Man könnte nun auch die Quer- und Normalkräfte für diesen Belastungszustand (Fig. 337b) bestimmen und diese dann zu denjenigen aus Rechnungsabschnitt I addieren; da jedoch für die Dimensionierung nur die endgültigen Quer- und Normalkräfte in Betracht kommen, so bestimmen wir sowohl an den bogenförmigen als an den geradlinigen Stäben zuerst die endgültigen Momente, und erst hierauf die endgültigen Quer- und Normalkräfte.

Um die Zusatzmomente zu erhalten, ermitteln wir den Einfluß der Verschiebungskräfte V_I , V_{II} und V_{III} getrennt voneinander und bestimmen demgemäß die drei Momentenflächen M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* am frei verschiebbaren Rahmen (Fig. 337c, d und e) infolge der an den Knotenpunkten A bzw. B bzw. C angreifenden Lasten $H = 1$ t. Hieraus erhalten wir dann durch Multiplikation mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der betreffenden Verschiebungskraft und durch Addition der daraus hervorgehenden Momente für V_I , V_{II} und V_{III} die Zusatzmomente (Fig. 337b).

Wir erkennen, daß ein Tragwerk mit bogenförmigen Stäben und verschiebbaren Knotenpunkten in gleicher Weise berechnet wird wie ein mehrstöckiger Rahmen, insbesondere wie ein „nach der Seite“ mehrstöckiger Rahmen (vgl. Teil II, Kap. I, 2 Sonderfälle).

Die M^* -Momente des Rahmens erhalten wir daher in der Weise, daß wir jeden, während R. I festgehaltenen Knotenpunkt um eine beliebige Strecke, z. B. $\Delta = 1$ mm (von links nach rechts) verschieben (Fig. 337f, g und h), jeweils aber nur einen dieser Punkte verschieben und die beiden übrigen gleichzeitig unverschiebbar festhalten. Diese Verschiebungszustände liefern drei M' -Momentenflächen mit je einer Erzeugungskraft Z , in Richtung der in demselben Punkte angreifenden Festhaltungskraft aus R. I, am verschobenen, und zwei Festhaltungskräfte D an den festgehaltenen Knotenpunkten, aus deren Kombination die Momente M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* hervorgehen.

Zum Schluß addieren wir die mit ihrem Vorzeichen zu nehmenden Momente aus R. I und R. II, wodurch wir die endgültigen Momente (Fig. 337i) infolge der gegebenen äußeren Belastung erhalten.

Die endgültigen Quer- und Normalkräfte an den bogenförmigen Stäben erhalten wir aus der Stützlinie (vgl. Teil I, Kap. VIII) für den betreffenden Belastungsfall, nachdem dieselbe auf Grund des endgültigen Bogenschubes H , den endgültigen Auflagerkräften V an den beiden Kämpfern sowie der endgültigen Kämpfermomente gezeichnet wurde. An den geraden Stäben erhalten wir

die endgültigen Quer- und Normalkräfte in bekannter Weise aus den endgültigen Momenten nach Teil I, Kap. VI.

Sind die Kämpfer der bogenförmigen Stäbe des zu berechnenden Tragwerkes durch elastische Zugbänder miteinander verbunden (siehe z. B. Fig. 338),

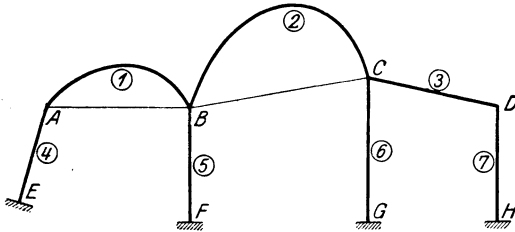


Fig. 338.

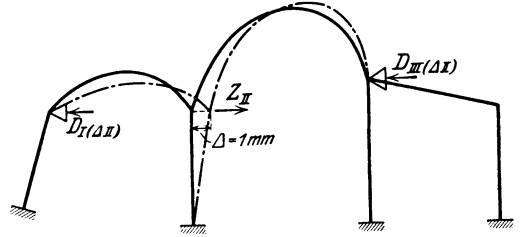


Fig. 338 e.

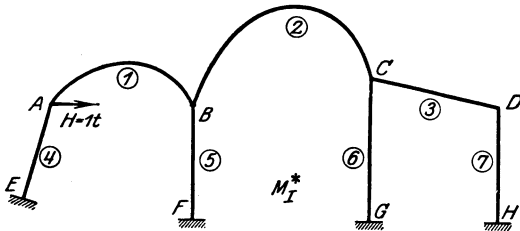


Fig. 338 a.

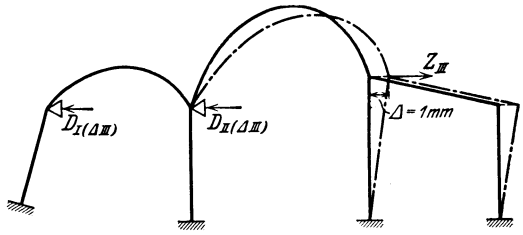


Fig. 338 f.

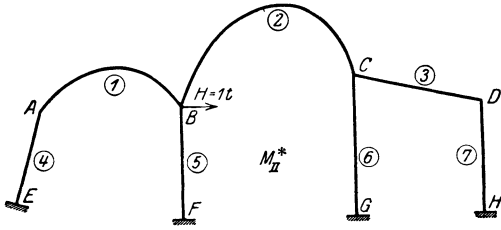


Fig. 338 b.

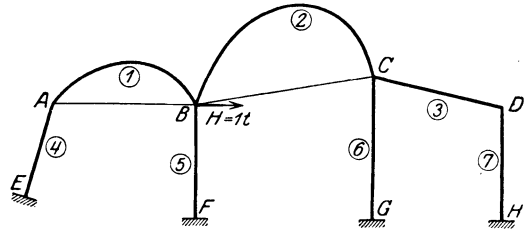


Fig. 338 g.

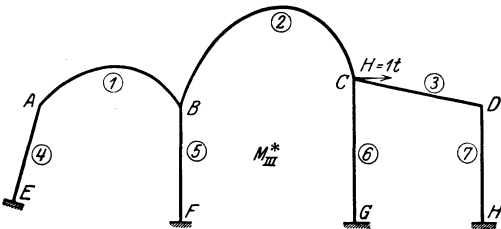


Fig. 338 c.

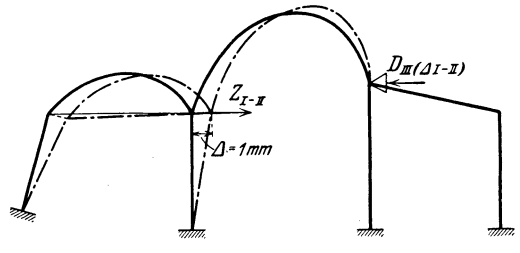


Fig. 338 h.

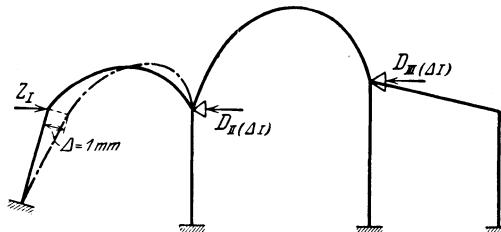


Fig. 338 d.

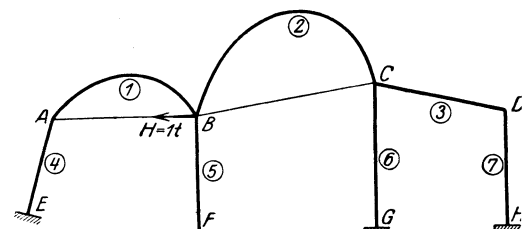


Fig. 338 i.

so bleibt R. I, wie in Teil I, Kap. VIII, 1 erwähnt, genau gleich wie beim Rahmen der Fig. 337. Zur Bestimmung der Zusatzmomente des R. II benötigen wir, wie für den „nach der Seite“ mehrstöckigen Rahmen (vgl. Teil II, Kap. I, 2 Sonderfälle), erstens die Momente M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* am Rahmen ohne Zugband (Fig. 338a, b und c) und zweitens die Momente M_{I-II}^* , M_{II-III}^* und $M_{I-II-III}^*$ am Rahmen mit Zugband (Fig. 338g, i und l); der Zugbänder wegen ergibt sich für die am gleichen Knotenpunkt von links nach rechts und die von rechts nach links gerichtete Kraft $H = 1t$ eine verschiedene Momentenfläche. Zur Bestimmung der genannten M^* -Momentenflächen benötigen wir wieder die M' -Momentenflächen für die verschiedenen Verschiebungszustände, und zwar brauchen wir:

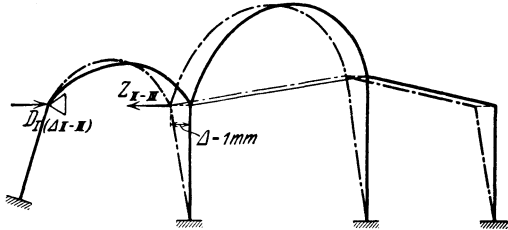


Fig. 338k.

1. zur Bestimmung der M_I^* -, M_{II}^* - und M_{III}^* -Momente wie am Rahmen ohne Zugbänder die M' -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte Z und Festhaltungskräfte D für die in den Fig. 338d, e und f dargestellten Verschiebungszustände;

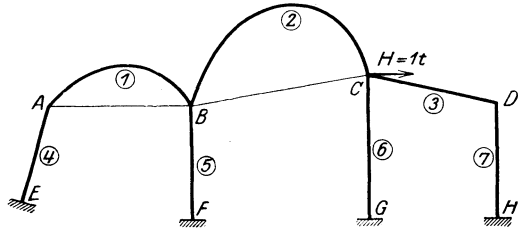


Fig. 338l.

2. zur Bestimmung der M_{I-II}^* -Momente (Fig. 338g) die M' -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte Z und Festhaltungskräfte D für die in den Fig. 338h und f dargestellten Verschiebungszustände;

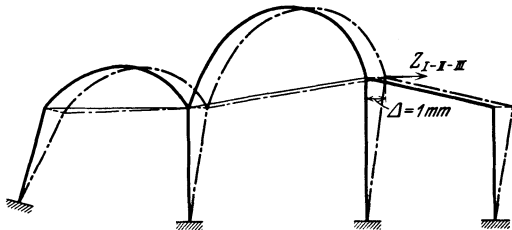


Fig. 338m.

3. zur Bestimmung der M_{II-III}^* -Momente (Fig. 338i) die M' -Momente und zugehörigen Erzeugungskräfte Z und Festhaltungskräfte D für die in den Fig. 338k und d dargestellten Verschiebungszustände; und

4. zur Bestimmung der $M_{I-II-III}^*$ -Momente (Fig. 338l) die M' -Momente und die zugehörige Erzeugungskraft $Z_{I-II-III}$ für den in Fig. 338m dargestellten Verschiebungszustand.

Die $M_{I-II-III}^*$ -Momentenfläche ergibt sich nach Kap. IV, 1 dieses Teiles durch Division der M' -Momentenfläche für den Verschiebungszustand der Fig. 338m durch die zugehörige Erzeugungskraft $Z_{I-II-III}$, und für jede der übrigen zu bestimmenden M^* -Momentenflächen ergibt sich nach Teil II, Kap. IV ein Gleichungssystem mit ebensovielen Gleichungen, als nach obigem Verschiebungszustände benötigt werden. — Der übrige Rechnungsgang gestaltet sich analog wie für den Rahmen ohne Zugbänder.

2. Bestimmung der Momente M' infolge gegebener Verschiebung eines Knotenpunktes, sowie der zugehörigen Erzeugungskraft Z und Festhaltungskräfte D .

Wie im vorhergehenden Kapitel erläutert, benötigen wir zur Berechnung der Zusatzmomente am allgemeinen Tragwerk mit bogenförmigen Stäben (Fig. 337) die Momente M'_I , M'_{II} und M'_{III} für die drei in den Fig. 337f, g, h dargestellten Verschiebungszustände.

Um diese

Momente M'

zu bestimmen, gehen wir genau so vor wie am Rahmen mit nur geradlinigen Stäben (Teil II, Kap. III). Wir behandeln die einzelnen Stäbe (geradlinig oder bogenförmig) getrennt voneinander, betrachten daher zunächst einen einzelnen Stab, z. B. den Stab AB , und ermitteln die Momente, welche durch die gegenseitige Verschiebung seiner beiden Endpunkte (Kämpfer) entstehen, und zwar einerseits im Stabe AB selbst und andererseits in allen übrigen Stäben (geradlinig oder bogenförmig) des Tragwerkes. Darauf ermitteln wir auf dieselbe Weise die Momente infolge der Verschiebungen der beiden Endpunkte des zweiten, sodann des dritten, vierten usw. und endlich des letzten Stabes. Zum Schluß addieren wir die so erhaltenen Momente in jedem Stabe und erhalten dadurch die Momente M' für den betrachteten Verschiebungszustand. Die zugehörigen Quer- und Normalkräfte erhalten wir an den geradlinigen Stäben auf Grund der Momente nach Teil I, Kap. VI, an den bogenförmigen Stäben auf Grund der Momente und Bogenschübe nach Teil I, Kap. VIII; wir bestimmen jedoch, wie bereits erwähnt, die Quer- und Normalkräfte erst am Schluß für R. I und R. II zusammen.

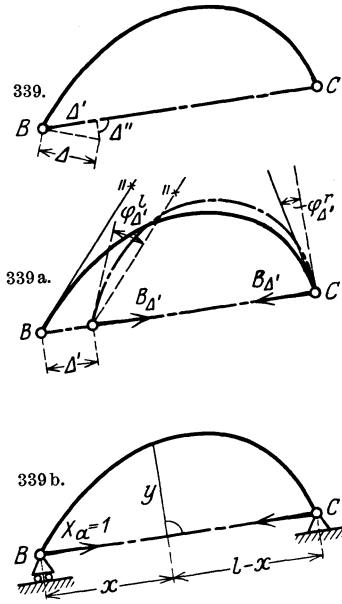


Fig. 339—339 b.

Die Momente infolge der gegenseitigen Verschiebung der Endpunkte eines **geradlinigen** Stabes bestimmen wir nach Kap. III, 1 dieses Teiles, d. h. nach den allgemeinen Gln. (515) und (520).

Die Momente infolge der gegenseitigen Verschiebung der Endpunkte (Kämpfer) eines **bogenförmigen** Stabes bestimmen wir wie folgt:

Die gegebene beliebige Verschiebung Δ eines Endpunktes des herausgetrennten und an jedem Ende in einem festen Gelenk gestützten bogenförmigen Stabes, d. h. des Zweigelenkbogens (Fig. 339) zerlegen wir in die Richtung der Kämpferverbindungsline und normal zu dieser, und ermitteln die Momente für die beiden Verschiebungskomponenten Δ' und Δ'' getrennt voneinander.

a) Gegenseitige Verschiebung Δ' der Kämpfer des Zweigelenkbogens in Richtung ihrer Verbindungslinie.

Verschieben wir den Kämpfer B des unsymmetrischen Zweigelenkbogens der Fig. 339a mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment um die gegebene Strecke Δ (bei einer Verkleinerung des Kämpferabstandes positiv angenommen) in Richtung der Kämpferverbindungslinie, so entstehen dadurch bei elastischer Einspannung Kämpfermomente, die wir aus den allgemeinen Gln. (332) und (333) erhalten, wenn wir darin für φ^a und φ^b die Werte der durch die Verschiebung hervorgerufenen Drehwinkel an den Kämpfern des Zweigelenkbogens einsetzen. Um nun die Größen φ^a und φ^b zu erhalten, müssen wir den an Stelle von ξ in die Gln. (410) und (411) einzusetzenden Bogenschub $B_{\Delta'}$ bestimmen, welcher bei der gegebenen gegenseitigen Verschiebung der Kämpfer auftritt. Mit den Abkürzungen der Gln. (350) und (351) muß die Gleichung bestehen:

$$\Delta' = \delta_{a_0} + X_a \cdot \delta_{a_a}, \quad (579)$$

da keine äußere Belastung vorhanden, so ist $\delta_{a_0} = 0$ und daher

$$X_a = B_{\Delta'} = \frac{\Delta'}{\delta_{a_a}}. \quad (580)$$

Der in dieser Gleichung vorkommende Wert von δ_{a_a} ist nach Gl. (351):

$$\delta_{a_a} = \sum_0^l M_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l N_a^2 \cdot \frac{\Delta s}{E \cdot F}, \quad (581)$$

worin M_a und N_a sich auf den Zustand $X_a = 1$ (die Kraft wird in Richtung und im Sinne der gegebenen Verschiebung angenommen) beziehen; es ist nach Fig. 339b:

$$\left. \begin{aligned} M_a &= -y, \\ N_a &= +1 \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (582)$$

Bezüglich des Vorzeichens von N_a gilt sinngemäß das für den Wert N_a der Gl. (360) Gesagte.

Es ist nun

$$\delta_{a_a} = \sum_0^l y^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \frac{\Delta s}{E \cdot F}, \quad (583)$$

und da

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\Delta x}{\Delta s} \\ \delta_{a_a} &= \sum_0^l y^2 \frac{\Delta s}{E \cdot J} + \sum_0^l \left(\frac{\Delta x}{\Delta s} \right)^2 \frac{\Delta s}{E \cdot F} \end{aligned} \quad (584)$$

oder mit den Bezeichnungen der Gl. (369)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{J} &= w, \quad \frac{\Delta s}{F} = v \quad \text{und} \quad \frac{\Delta x}{\Delta s} = \xi, \\ \delta_{a_a} &= \frac{1}{E} \left(\sum_0^l y^2 w + \sum_0^l \xi^2 v \right). \end{aligned} \quad (585)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. (580) erhalten wir für den

Bogenschub $B_{A'}$ am unsymmetrischen und symmetrischen Zweigelenkbogen:

$$B_{A'} = \frac{E \cdot \Delta'}{\sum_0^l y^2 w + \sum_0^l \xi^2 v}, \quad (586)$$

worin die Verschiebung Δ' mit ihrem Vorzeichen einzusetzen ist; sie ist positiv für ein Zusammendrücken und negativ für ein Auseinanderziehen des Bogens angenommen.

$B_{A'}$ ist auch gleich ξ^j , wenn bei gleichmäßiger Temperaturerhöhung für $\Delta' = \varepsilon \cdot t \cdot l$ gesetzt wird.

$$\xi^j = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\sum_0^l y^2 \cdot w + \sum_0^l \xi^2 \cdot v} \quad (586a)$$

Es sei wieder hervorgehoben, daß am Zweigelenkbogen mit ungleich hohen Kämpfern die Abszissen x parallel zur Kämpferverbindungsline und die Ordinaten y normal dazu zu messen sind.

Setzen wir nun obigen Wert von $B_{A'}$ in die Gln. (410) und (411) an Stelle des Wertes ξ ein, so erhalten wir, unter Berücksichtigung, daß $M_o = 0$ und $N_o = 0$, für die Drehwinkel $\varphi_{A'}^a$ und $\varphi_{A'}^b$ am unsymmetrischen Zweigelenkbogen:

$$E \cdot \varphi_{A'}^a = -\frac{1}{l} B_{A'} \left(\sum_0^l y (l-x) w + \sum_0^l \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v \right), \quad (587)$$

$$E \cdot \varphi_{A'}^b = -\frac{1}{l} B_{A'} \left(\sum_0^l x y w - \sum_0^l \xi \sqrt{1-\xi^2} \cdot v \right). \quad (588)$$

Vernachlässigen wir die von den Normalkräften herrührenden Glieder, was nur bei sehr flachen Bögen nicht zulässig ist, so ist nach Gl. (370)

$$\sum_0^l y (l-x) w = l \cdot B_{(MA=1)} \cdot \sum_0^l y^2 w,$$

und da nach Gl. (586)

$$\sum_0^l y^2 w = \frac{E \cdot \Delta'}{B_{A'}},$$

so ist

$$\sum_0^l y (l-x) w = \frac{l \cdot E \cdot \Delta' \cdot B_{(MA=1)}}{B_{A'}};$$

analog ist

$$\sum_0^l x y w = l \cdot B_{(MB=1)} \cdot \sum_0^l y^2 w = \frac{l \cdot E \cdot \Delta' \cdot B_{(MB=1)}}{B_{A'}},$$

so daß mit diesen Werten am unsymmetrischen Zweigelenkbogen:

$$\varphi_{A'}^a = -\Delta' \cdot B_{(MA=1)}, \quad (587a)$$

$$\varphi_{A'}^b = -\Delta' \cdot B_{(MB=1)}. \quad (588a)$$

Durch Einsetzen des Wertes von $B_{A'}$ aus Gl. (586) an Stelle von ξ in den Gln. (420) und (421) und unter Berücksichtigung, daß $M_o = 0$, erhalten wir die Drehwinkel $\varphi_{A'}^a$ und $\varphi_{A'}^b$ am symmetrischen Zweigelenkbogen zu:

$$E \cdot \varphi_{A'}^a = E \cdot \varphi_{A'}^b = E \cdot \varphi_{A'} = -\frac{1}{l} B_{A'} \cdot \sum_0^l x y w. \quad (589)$$

Vernachlässigen wir wieder die von den Normalkräften herrührenden Glieder, was nur bei sehr flachen Bögen nicht zulässig ist, so erhalten wir nach den Gleichungen (587a) und (588a) unter Berücksichtigung von Gl. (414):

$$\varphi_{A'}^a = \varphi_{A'}^b = \varphi_{A'} = -A' \cdot \frac{B}{2}. \quad (589a)$$

Ebenso ist bei gleichmäßiger Temperaturerhöhung

$$\varphi_t^a = \varphi_t^b = \varphi_t = -\frac{\xi^t}{2 \cdot E} \sum_0^l y \cdot w, \quad (589b)$$

$$= -\frac{B}{2} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l. \quad (589c)$$

Durch Einsetzen der Werte $\varphi_{A'}^a$ und $\varphi_{A'}^b$ an Stelle der Größen φ^a und φ^b (herührend von der äußeren Belastung) in die Gln. (334) und (335) erhalten wir die zugehörigen Kämpfermomente am unsymmetrischen Bogen aus:

$$M_{A'}^B = \frac{-\varphi_{A'}^a(l-b) + \varphi_{A'}^b \cdot b}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot a, \quad (590)$$

$$M_{A'}^C = \frac{-\varphi_{A'}^a(l-a) + \varphi_{A'}^b \cdot b}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot b. \quad (591)$$

Vernachlässigen wir den Einfluß der Normalkräfte auf die Drehwinkel, was nur bei sehr flachen Bögen nicht zulässig ist, so erhalten wir durch Einsetzen der Werte von $\varphi_{A'}^a$ und $\varphi_{A'}^b$ aus den Gln. (587a) und (588a) in obige Gln. am unsymmetrischen Bogen:

$$\begin{aligned} M_{A'}^B &= \frac{A' [B_{(M^A=1)}(l-b) - B_{(M^B=1)} \cdot b]}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot a & (590)I \\ &= \frac{A' [B_{(M^A=1)} \cdot l - (B_{(M^A=1)} + B_{(M^B=1)}) \cdot b]}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot a \end{aligned}$$

oder, da laut Definition:

$$\begin{aligned} B_{(M^A=1)} &= B_{(M^B=1)} = B, \\ M_{A'}^B &= \frac{(B_{(M^A=1)} \cdot l - B \cdot b) \cdot A'}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot a, & (590a) \end{aligned}$$

analog folgt

$$M_{A'}^C = \frac{(B_{(M^B=1)} \cdot l - B \cdot a) \cdot A'}{l \cdot \beta(l-a-b)} \cdot b. \quad (591a)$$

Die Kämpfermomente am symmetrischen Bogen ergeben sich, da dann $\varphi_{A'}^a = \varphi_{A'}^b = \varphi_{A'}$ zu:

$$M_{A'}^B = \frac{-\varphi_{A'}(l-2b) \cdot a}{l \cdot \beta(l-a-b)}, \quad (592)$$

$$M_{A'}^C = \frac{-\varphi_{A'}(l-2a) \cdot b}{l \cdot \beta(l-a-b)}. \quad (593)$$

Vernachlässigen wir den Einfluß der Normalkräfte auf die Drehwinkel, was nur bei sehr flachen Bögen nicht zulässig ist, so erhalten wir durch Einsetzen des Wertes von $\varphi_{A'}$ aus Gl. (589a) in obige Gln. am symmetrischen Bogen:

$$M_{A'}^B = \frac{B \left(\frac{l}{2} - b \right) \cdot A' \cdot a}{l \cdot \beta (l - a - b)}, \quad (592a)$$

$$M_{A'}^C = \frac{B \left(\frac{l}{2} - a \right) \cdot A' \cdot b}{l \cdot \beta (l - a - b)}. \quad (593a)$$

Gln. (592a) und (593a) gelten auch für gleichmäßige Temperaturzunahme, wenn für

$$B_{A'} = \xi^t \cdot \frac{\sum_0^l y w}{E}$$

gesetzt wird.

Den Gesamtbogenschub $H_{A'}$ infolge der gegenwärtigen Verschiebung der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie erhalten wir durch Einsetzen von $B_{A'}$ an Stelle von ξ in Gl. (443),

am unsymmetrischen Bogen zu:

$$H_{A'} = B_{A'} + M_{A'}^B \cdot B_{(M^B=1)} + M_{A'}^C \cdot M_{(M^C=1)} \quad (594)$$

und durch Einsetzen von $B_{A'}$ an Stelle von ξ in Gl. (444)

am symmetrischen Bogen zu:

$$H_{A'} = B_{A'} + \frac{1}{2} B (M_{A'}^B + M_{A'}^C). \quad (595)$$

Da keine äußere Belastung vorhanden ist, so ergeben sich die Auflagerdrücke $V_{A'}^B$ und $V_{A'}^C$ ohne weiteres aus Gl. (445) und (446) zu:

$$V_{A'}^B = -\frac{1}{l} (M_{A'}^B - M_{A'}^C) \quad (596)$$

und

$$V_{A'}^C = +\frac{1}{l} (M_{A'}^B - M_{A'}^C), \quad (597)$$

worin die Momente $M_{A'}^B$ und $M_{A'}^C$ mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; ein nach oben (senkrecht zur Kämpferverbindungslinie) gerichteter Auflagerdruck wird dann positiv.

Das Moment in einem beliebigen Querschnitt des Bogens BC ergibt sich nun nach Gl. (455), wenn wir darin $M_o = 0$ setzen, zu:

$$M_x = M_{A'}^B \cdot \frac{l-x}{l} + M_{A'}^C \cdot \frac{x}{l} - H_{A'} \cdot y, \quad (598)$$

worin die Kämpfermomente $M_{A'}^B$ und $M_{A'}^C$ mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; am Bogen mit ungleich hohen Kämpfern sind wieder die Abszissen x parallel zur Kämpferverbindungslinie und die Ordinaten y normal dazu zu messen.

b) Gegenseitige Verschiebung A' der Kämpfer des Zweigelenkbogens normal zu ihrer Verbindungslinie.

Verschieben wir den Kämpfer B des unsymmetrischen (oder symmetrischen) Zweigelenkbogens der Fig. 340 mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment

um die gegebene Strecke Δ'' (sehr klein im Verhältnis zur Spannweite l) normal zur Verbindungslinie der beiden Kämpfer, so entstehen am Zweigelenkbogen keine Formänderungen.

Die Drehwinkel der Kämpfertangenten sind

$$\varphi_{\Delta''}^a = -\varphi_{\Delta''}^b = \operatorname{tg} \frac{\Delta''}{l} = \frac{\Delta''}{l} \quad (599)$$

(da $\varphi_{\Delta''}^a$ und $\varphi_{\Delta''}^b$ sehr kleine Winkel) und die Kämpfermomente ergeben sich daher durch Einsetzen dieses Wertes an Stelle von φ^a und φ^b in die Gl. (334) und (335) sowohl am unsymmetrischen als auch am symmetrischen Bogen zu:

$$M_{\Delta''}^B = \frac{\Delta'' \cdot a}{l \cdot \beta (l - a - b)}, \quad (600)$$

$$M_{\Delta''}^C = \frac{\Delta'' \cdot b}{l \cdot \beta (l - a - b)}. \quad (601)$$

Das Vorzeichen der Momente ergibt sich aus der Anschauung wie bei den Systemen mit geraden Stäben.

Wir erkennen, daß die Ausdrücke für die Momente an den Enden eines bogenförmigen und eines geradlinigen Stabes für eine Verschiebung Δ'' resp. ρ normal zur Verbindungslinie der Endpunkte genau die gleichen sind. Ferner haben die Gleichungen für die Kämpfermomente infolge Δ' und Δ'' den gleichen Nenner.

Der Gesamtbogenschub $H_{\Delta''}$ infolge der gegenseitigen Verschiebung der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie ist

am unsymmetrischen Bogen:

$$H_{\Delta''} = M_{\Delta''}^B \cdot B_{(M^B=1)} + M_{\Delta''}^C \cdot B_{(M^C=1)} \quad (602)$$

und am symmetrischen Bogen:

$$H_{\Delta''} = \frac{1}{2} B (M_{\Delta''}^B + M_{\Delta''}^C). \quad (602a)$$

Da keine äußere Belastung vorhanden ist, so ergeben sich die Auflagerdrücke $V_{\Delta''}^B$ und $V_{\Delta''}^C$ zu:

$$V_{\Delta''}^B = -\frac{1}{l} (M_{\Delta''}^B - M_{\Delta''}^C), \quad (603)$$

$$V_{\Delta''}^C = +\frac{1}{l} (M_{\Delta''}^B - M_{\Delta''}^C), \quad (603a)$$

worin die Momente mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind; ein nach oben (senkrecht zur Kämpferverbindungslinie) gerichteter Auflagerdruck wird dann positiv.

Das Moment in einem beliebigen Querschnitt des Bogens ergibt sich nun nach Gl. (598), wenn wir darin die Kämpfermomente aus den Gl. (600) und (601) und die Gesamtbogenkraft aus Gl. (602) einsetzen, d. h.

$$M_x = M_{\Delta''}^B \cdot \frac{l-x}{l} + M_{\Delta''}^C \cdot \frac{x}{l} - H_{\Delta''} \cdot y. \quad (604)$$

Wir erhalten also die Momente für die in den Fig. 337f, g und h dargestellten Verschiebungszustände, welche wir zur Berechnung des Rahmens der Fig. 337 benötigen, wie folgt:

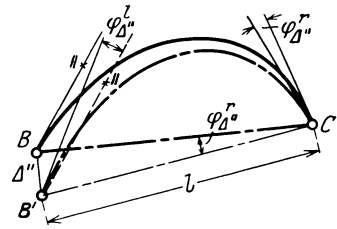


Fig. 340.

Verschiebungszustand I:

Der Knotenpunkt A , welcher während R. I unverschiebbar festgehalten wurde, ist um eine beliebige Strecke, z. B. $\Delta = 1 \text{ mm}$ (von links nach rechts) zu verschieben (Fig. 341), während die beiden Knotenpunkte B und C gleichzeitig unverschiebbar festgehalten werden.

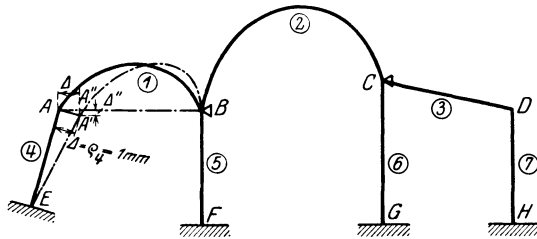


Fig. 341.

Die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$ tragen wir vom Punkt A aus rechtwinklig zum Stab 4 auf, da sich der Knotenpunkt A bei seiner Verschiebung auf einem Kreisbogen um den unverschiebbar vorausgesetzten Auflagerpunkt E bzw. wegen der im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend klein angenommenen Verschiebung auf einer Normalen zum Stab 4 bewegt. Ziehen wir nun die Verbindungslinie AB der

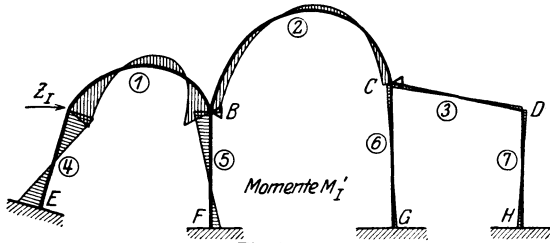


Fig. 341 a.

beiden Kämpfer des bogenförmigen Stabes 1 und fällen vom Punkt A' (neue Lage des Knotenpunktes A) aus ein Lot auf diese Kämpferverbindungslinie, so erkennen wir, daß die Momente M_I' hervorgerufen werden durch:

1. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ρ_4 der Endpunkte des Stabes 4,

2. die gegenseitige Verschiebung $\Delta' = AA''$ der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 1 in Richtung ihrer Verbindungslinie, und

3. die gegenseitige Verschiebung $\Delta'' = A'A''$ der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 1 normal zu ihrer Verbindungslinie.

Die Momentenflächen, herührend von den drei genannten Ursachen, werden nach den vorhergehend abgeleiteten Gleichungen getrennt ermittelt; die Summe derselben ist die gesuchte M_I' -Momentenfläche (Fig. 341a).

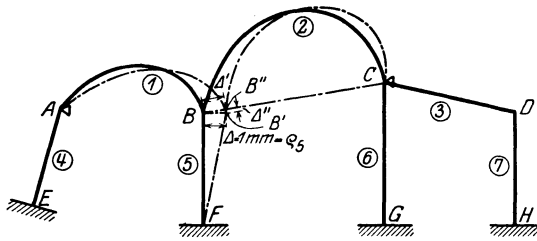


Fig. 342.

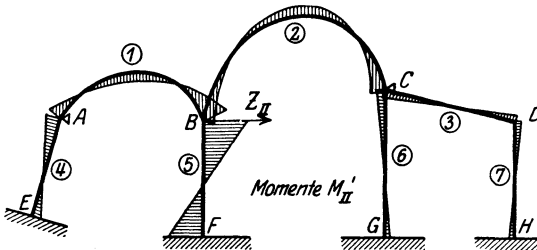


Fig. 342 a.

Verschiebungszustand II:

Der Knotenpunkt B , welcher während R. I unverschiebbar festgehalten wurde, ist um eine beliebige Strecke, z. B. $\Delta = 1 \text{ mm}$ (von links nach rechts) zu verschieben (Fig. 342), während die beiden Knotenpunkte A und C gleichzeitig unverschiebbar festgehalten werden.

Die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$ tragen wir vom Punkt B aus rechtwinklig zum Stab 5, um dessen Fußpunkt sich der Punkt B bei seiner Verschiebung dreht, auf. Ziehen wir nun die Verbindungslinie BC der beiden Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 und fällen vom Punkt B' aus ein Lot auf diese Kämpferverbindungslinie, so erkennen wir, daß die Momente M'_{II} hervorgerufen werden durch:

1. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_5 der Endpunkte des Stabes 5,
2. die gegenseitige Verschiebung $\Delta = \Delta' = 1 \text{ mm}$ ($\Delta'' = 0$) der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 1 in Richtung ihrer Verbindungslinie;
3. die gegenseitige Verschiebung $\Delta' = BB''$ der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 in Richtung ihrer Verbindungslinie, und
4. die gegenseitige Verschiebung $\Delta'' = B'B''$ der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 normal zu ihrer Verbindungslinie.

Die Momentenflächen, herrührend von den vier genannten Ursachen, werden nach den vorhergehend abgeleiteten Gleichungen getrennt ermittelt; die Summe derselben ist die gesuchte M'_{II} -Momentenfläche (Fig. 342a).

Verschiebungszustand III:

Der Knotenpunkt C , welcher während R. I unverschiebbar festgehalten wurde, ist um eine beliebige Strecke, z. B. $\Delta = 1 \text{ mm}$ (von links nach rechts) zu verschieben (Fig. 343), während die beiden Knotenpunkte A und B gleichzeitig unverschiebbar festgehalten werden.

Die gegebene Strecke $\Delta = 1 \text{ mm}$ tragen wir vom Punkt C aus rechtwinklig zum Stab 6, um dessen Fußpunkt sich der Punkt C bei seiner Verschiebung dreht, auf. Dann verschiebt sich der Knotenpunkt D gleichzeitig um 1 mm waagrecht, da er mit C durch einen geradlinigen Stab verbunden und die Säule 7 parallel zur Säule 6 ist; der Stab 3 verschiebt sich daher parallel zu sich selbst, und seine Endpunkte verschieben sich gegenseitig nicht. Ziehen wir nun die

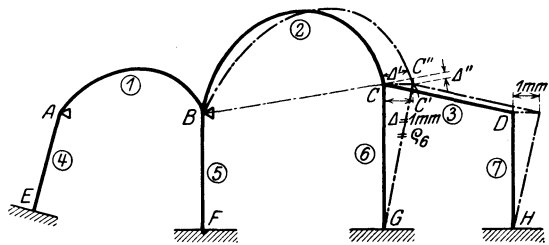


Fig. 343.

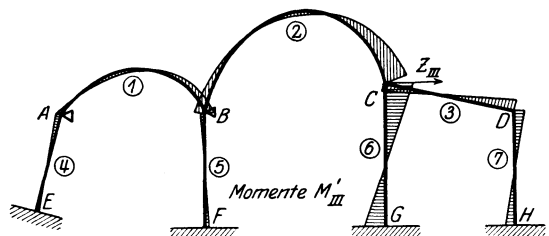


Fig. 344.

Verbindungslinie BC der beiden Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 und fällen vom Punkt C' aus ein Lot auf die Verlängerung dieser Kämpferverbindungslinie bei C , so erkennen wir, daß die Momente M'_{III} hervorgerufen werden durch

1. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_6 der Endpunkte des Stabes 6,
2. die gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_7 der Endpunkte des Stabes 7,
3. die gegenseitige Verschiebung $\Delta' = CC'$ der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 in Richtung ihrer Verbindungslinie,
4. die gegenseitige Verschiebung $\Delta'' = C'C''$ der Kämpfer des bogenförmigen Stabes 2 normal zu ihrer Verbindungslinie.

Die Momentenflächen infolge der genannten vier Ursachen werden nach den vorhergehend abgeleiteten Gleichungen getrennt ermittelt; die Summe derselben ist die gesuchte M'_{III} -Momentenfläche (Fig. 344).

Die Bestimmung der zu den einzelnen Verschiebungszuständen gehörigen

Erzeugungskraft Z und Festhaltungskräfte D .

in Richtung der Festhaltungskräfte F aus R. I an dem betreffenden Knotenpunkt, welche wir wie beim mehrstöckigen Rahmen (Teil II, Kap. III, 5) zur Berechnung der M^* -Momente benötigen, gestaltet sich genau gleich (Fig. 341a, 342a und 343) wie diejenige der Festhaltungskräfte F des Rechnungsabschnittes I (vgl. Teil I, Kap. VIII, 9).

3. Bestimmung der Momente M^* infolge einer Last $H = 1 t$ sowie der Zusatzmomente M_{zus} am frei verschiebbaren Rahmen.

Nachdem wir die Momente M'_I , M'_{II} und M'_{III} sowie die zugehörigen Erzeugungskräfte Z und Festhaltungskräfte D bestimmt haben, sind wir in der Lage, die M^* -Momente zu ermitteln, und zwar genau gleich, wie in Kap. IV, 2 dieses Teiles vorgeführt, da ein Rahmen mit bogenförmigen Stäben für die Berechnung nichts anderes ist als ein „nach der Seite“ mehrstöckiger Rahmen.

Wir erhalten also die Momente M^*_I , M^*_{II} und M^*_{III} aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} M^*_I &= X_{I(I)} \cdot M'_I + X_{II(I)} \cdot M'_{II} + X_{III(I)} \cdot M'_{III}, \\ M^*_{II} &= X_{I(II)} \cdot M'_I + X_{II(II)} \cdot M'_{II} + X_{III(II)} \cdot M'_{III}, \\ M^*_{III} &= X_{I(III)} \cdot M'_I + X_{II(III)} \cdot M'_{II} + X_{III(III)} \cdot M'_{III}, \end{aligned} \right\} \quad (605)$$

worin die Größen X die Maßzahlen der Momente M'_I , M'_{II} und M'_{III} sind, welche angeben, in welchem Verhältnis diese Momentenflächen übereinander zu legen sind.

Die Maßzahlen X erhalten wir bei vorliegendem Tragwerk („nach der Seite“ dreistöckig) durch Auflösen der folgenden drei Systeme von drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\left. \begin{aligned} X_{I(I)} \cdot Z_I &+ X_{II(I)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 1, \\ X_{I(I)} \cdot D_{II(\Delta I)} &+ X_{II(I)} \cdot Z_{II} + X_{III(I)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 0, \\ X_{I(I)} \cdot D_{III(\Delta I)} &+ X_{II(I)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(I)} \cdot Z_{III} = 0, \end{aligned} \right\} \text{I. System (für } M^*_I) \quad (606)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{I(II)} \cdot Z_I &+ X_{II(II)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(II)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 0, \\ X_{I(II)} \cdot D_{II(\Delta I)} &+ X_{II(II)} \cdot Z_{II} + X_{III(II)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 1, \\ X_{I(II)} \cdot D_{III(\Delta I)} &+ X_{II(II)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(II)} \cdot Z_{III} = 0, \end{aligned} \right\} \text{II. System (für } M^*_{II}) \quad (607)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{I(III)} \cdot Z_I &+ X_{II(III)} \cdot D_{I(\Delta II)} + X_{III(III)} \cdot D_{I(\Delta III)} = 0, \\ X_{I(III)} \cdot D_{II(\Delta I)} &+ X_{II(III)} \cdot Z_{II} + X_{III(III)} \cdot D_{II(\Delta III)} = 0, \\ X_{I(III)} \cdot D_{III(\Delta I)} &+ X_{II(III)} \cdot D_{III(\Delta II)} + X_{III(III)} \cdot Z_{III} = 1, \end{aligned} \right\} \text{III. System (für } M^*_{III}) \quad (608)$$

worin die Größen Z und D die zu den Momenten M'_I , M'_{II} und M'_{III} gehörigen Erzeugungs- und Festhaltungskräfte sind (Fig. 345, 345a und 345b).

Die auf diese Weise erhaltenen Momente M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* sind in Fig. 346, 347 und 348 dargestellt.

An einem Rahmen mit bogenförmigen Stäben, zu dessen Berechnung während R. I zwei Lager angebracht werden müssen, d. h. an einem

„nach der Seite“ 2-stöckigen Rahmen

erhalten wir die M^* -Momente nach den in Kap. IV, 2 dieses Teiles abgeleiteten Gln. (544) und (545).

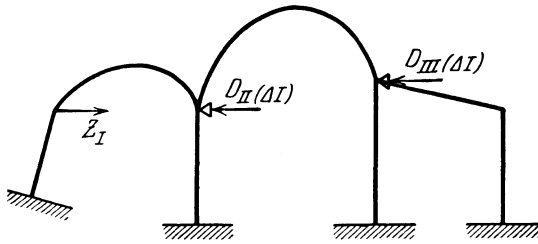


Fig. 345.

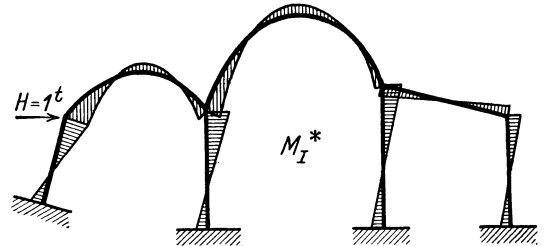


Fig. 346.

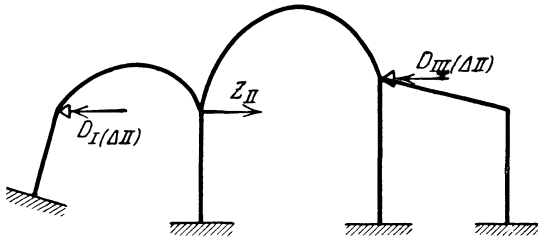


Fig. 345 a.

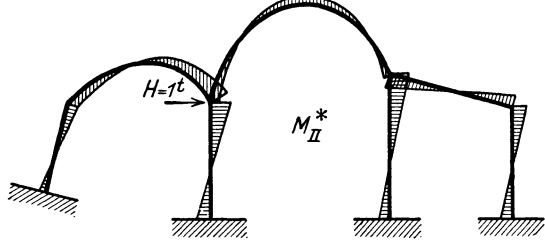


Fig. 347.

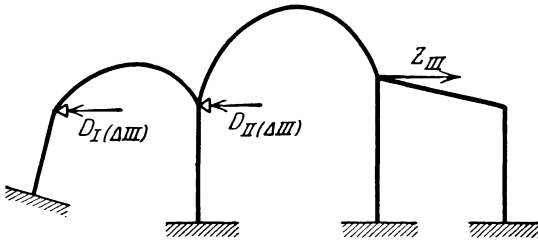


Fig. 345 b.

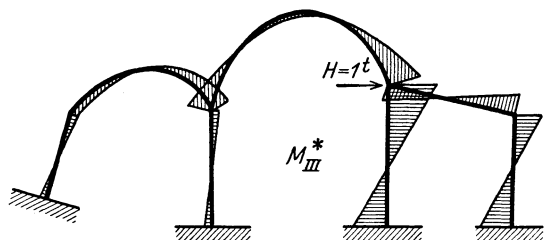


Fig. 348.

Die zu den M^* -Momenten gehörigen

Gesamtbogenschübe H^*

setzen sich, genau wie die Momente M^* aus den Momenten M' , aus den zu letzteren gehörigen Bogenschüben H_A im Verhältnis der Maßzahlen X zusammen. Es ist daher bei vorliegendem Tragwerk für jeden Bogen desselben:

$$\left. \begin{aligned} H_I^* &= X_{I(I)} \cdot H_{\Delta I} + X_{II(I)} \cdot H_{\Delta II} + X_{III(I)} \cdot H_{\Delta III}, \\ H_{II}^* &= X_{I(II)} \cdot H_{\Delta I} + X_{II(II)} \cdot H_{\Delta II} + X_{III(II)} \cdot H_{\Delta III}, \\ H_{III}^* &= X_{I(III)} \cdot H_{\Delta I} + X_{II(III)} \cdot H_{\Delta II} + X_{III(III)} \cdot H_{\Delta III}, \end{aligned} \right\} \quad (609)$$

worin $H_{\Delta I}$, $H_{\Delta II}$, $H_{\Delta III}$ die den Momenten M_I' bzw. M_{II}' bzw. M_{III}' entsprechenden Bogenschübe bedeuten.

Die Zusatzmomente M_{zus} für jeden Belastungsfall erhalten wir nun wie an einem mehrstöckigen Rahmen durch Multiplikation der Momente M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* mit dem mit seinem Vorzeichen zu nehmenden Werte der Verschiebungskraft V_I bzw. V_{II} bzw. V_{III} für den betreffenden Belastungsfall und Addition der daraus hervorgehenden Momente, d. h.

$$M_{zus} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* + V_{III} \cdot M_{III}^*. \quad (610)$$

Die zu den Zusatzmomenten gehörigen Gesamtbogenschübe H_{zus} ergeben sich für jeden Bogen aus der Gl.

$$H_{zus} = V_I \cdot H_I^* + V_{II} \cdot H_{II}^* + V_{III} \cdot H_{III}^*. \quad (611)$$

4. Bestimmung der Momente infolge einer Temperaturänderung des ganzen Tragwerkes.

Durch die Längenänderungen, welche jeder Stab (gerader und bogenförmiger) des allgemeinen Rahmens der Fig. 337 bei der Änderung seines Wärmegrades gegenüber der Herstellungstemperatur erleidet, und die dadurch hervorgerufenen Knotenpunktverschiebungen, entstehen die gesuchten „Temperaturmomente“. Sie setzen sich zusammen aus:

a) den Momenten, welche durch die Veränderung der Bogenachse bei Temperaturänderung der bogenförmigen Stäbe allein, unter Voraussetzung unverschiebbarer Kämpfer, am ganzen Rahmen entstehen,

b) den Momenten, welche durch die Knotenpunktverschiebungen bei Temperaturänderung der geraden Stäbe allein, unter Voraussetzung horizontal unverschiebbarer Knotenpunkte A , B und C , am ganzen Rahmen hervorgerufen werden, und

c) den Temperatur-Zusatzmomenten, welche durch die in den vorübergehend horizontal unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten wirkenden Verschiebungskräfte V^t am frei verschiebbaren Rahmen erzeugt werden.

Um die Temperaturmomente am allgemeinen Rahmen der Fig. 337 nach der Methode der Festpunkte zu bestimmen, halten wir, wie am mehrstöckigen Rahmen (Teil II, Kap. V, 2) diejenigen Knotenpunkte, welche während R. I (bei Bestimmung der Momente infolge der äußeren Belastung) unverschiebbar festgehalten wurden, nämlich die Knotenpunkte A , B und C , vorübergehend durch Rollenlager (keine festen Lager, damit sich die Säulen verlängern bzw. verkürzen können) horizontal unverschiebbar fest. In den an diesen Knotenpunkten gedachten Lagern treten dann Festhaltungskräfte F^t auf, genau wie bei Belastung des Rahmens mit äußeren Kräften. Entfernen wir die gedachten Lager, so treten an den vorübergehend horizontal unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten die Verschiebungskräfte V^t (die entgegengesetzt gerichteten Festhaltungskräfte F^t) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Rahmen erzeugen, die zu denjenigen für den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Temperaturänderung zu erhalten.

Wir nehmen, wie einleitend erwähnt, an, es würden zunächst nur die bogenförmigen Stäbe 1 und 2 die gegebene Temperaturerhöhung erleiden, wobei sich die Kämpfer derselben nicht verschieben. Dann weicht die Bogenachse dieser

Stäbe infolge Ausdehnung der letzteren nach oben aus, und die dadurch entstehenden unter a) genannten Momente erhalten wir nach Kap. VIII des I. Teiles, indem wir wie bei der Bestimmung der Momente infolge äußerer Belastung verfahren, jedoch in die Gleichungen für φ^a und φ^b als ξ den Wert aus Gl. (395) einsetzen.

Hierauf sollen auch die geraden Stäbe die gegebene Temperaturerhöhung erleiden.

Nachdem wir die Verlängerung aller geraden Stäbe infolge der gegebenen Temperaturerhöhung derselben nach Gl. (575) berechnet haben, bestimmen wir in Fig. 349, genau wie in Kap. V dieses Teiles erläutert, die Verschiebungen aller Knotenpunkte und die davon herrührenden gegenseitigen rechtwinkligen

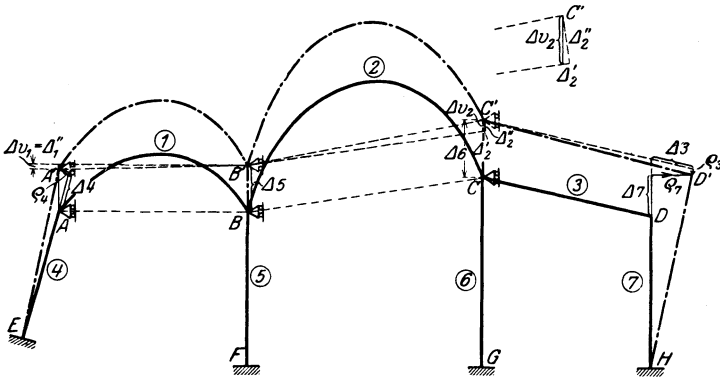


Fig. 349.

Verschiebungen der Endpunkte der geraden Stäbe und die gegenseitigen Verschiebungen der Kämpfer der bogenförmigen Stäbe in Richtung der Kämpferverbindungslinie und normal dazu.

Von den geraden Stäben erleiden die Stäbe 3, 4 und 7 die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen ρ_1 , ρ_4 und ρ_7 ihrer Endpunkte, während die Endpunkte der geraden Stäbe 5 und 6 in deren Richtung verbleiben; von den bogenförmigen Stäben erleidet Stab 1, da seine Kämpfer gleich hoch liegen und in senkrechter Richtung geführt sind, nur eine gegenseitige Verschiebung $\Delta v_1 = \Delta_1''$ seiner Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie; der bogenförmige Stab 2 erleidet auch eine gegenseitige Verschiebung, nämlich Δv_2 seiner Kämpfer in senkrechter Richtung, dagegen muß diese, weil die Kämpfer ungleich hoch liegen, zur Ermittlung der dadurch im Stab 2 hervorgerufenen Spannungen in die Komponenten Δ_2' und Δ_2'' in Richtung der Kämpferverbindungslinie und normal dazu zerlegt werden.

Die dadurch im ganzen Tragwerk hervorgerufenen Momente erhalten wir in bekannter Weise, und zwar diejenigen infolge der gegenseitigen Verschiebungen ρ der Endpunkte der geraden Stäbe nach Kap. III dieses Teiles und diejenigen infolge der gegenseitigen Verschiebung Δv_1 am Bogen 1 sowie infolge der gegenseitigen Verschiebungen Δ_2' und Δ_2'' am Bogen 2 nach Abschnitt 2, a) und b) dieses Kapitels; durch Addition dieser Teilmomente erhalten wir die unter b) genannten Momente.

Addieren wir nun die beiden Momentenflächen, nämlich diejenige infolge der Ausdehnung der bogenförmigen Stäbe und diejenige infolge der Ausdehnung der geraden Stäbe, so erhalten wir die Momentenfläche für den angenommenen festgehaltenen Zustand. Aus diesen Momenten bestimmen wir noch die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte F_I^t , F_{II}^t und F_{III}^t nach Kap. VIII, 9 des I. Teiles.

Nun erhalten wir die unter c) genannten Temperatur-Zusatzmomente, indem wir die nach dem vorhergehenden Abschnitt bestimmten M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* -Momente mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft V_I^t bzw. V_{II}^t bzw. V_{III}^t multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Zum Schluß erhalten wir durch Addition der Temperaturmomente für den festgehaltenen Zustand und der Temperatur-Zusatzmomente die endgültigen Temperaturmomente.

5. Bestimmung der Momente infolge Senkungen der Auflager.

Senkt sich ein Auflager des allgemeinen Tragwerkes der Fig. 350 um ein gegebenes, jedoch im Verhältnis zu den Stablängen des Tragwerkes verschwindend kleines Maß Δ in beliebiger Richtung, so werden dadurch Verschiebungen der Knotenpunkte des Tragwerkes bzw. „gegenseitige rechtwinklige Verschiebungen“ der Endpunkte der geraden Stäbe sowie gegenseitige Verschiebungen der Kämpfer der bogenförmigen Stäbe in Richtung der Kämpferverbindungsline und normal dazu, hervorgerufen, welche Momente am ganzen Tragwerk erzeugen, die zu bestimmen sind. Senken sich mehrere Auflager gleichzeitig, so ist jede einzelne Senkung für sich zu behandeln und am Schluß die Summe der erhaltenen Momentenflächen zu bilden.

Um die Momente infolge Senkung des Auflagerpunktes F des allgemeinen Rahmens der Fig. 350 um die Strecke Δ , beispielsweise in senkrechter Richtung, zu bestimmen, halten wir, wie am mehrstöckigen Rahmen (Teil II, Kap. VI, 2) diejenigen Knotenpunkte, die schon während R. I unverschiebbar festgehalten wurden und für welche wir bereits die M^* -Momente (infolge $H = 1$ t in dem betreffenden Knotenpunkt) bestimmt haben, nämlich die Knotenpunkte A , B und C vorübergehend durch gedachte Lager an denselben horizontal unverschiebbar fest, da wir wieder nicht wissen, von welchem Punkt des Rahmens aus sich die Verschiebungen der Knotenpunkte infolge der Senkung vollziehen. Am Knotenpunkt B müssen wir ein Rollenlager (auf senkrechter Bahn beweglich) anbringen, weil sonst die vorausgesetzte Senkung nicht stattfinden könnte (siehe Fig. 350). In den an diesen Knotenpunkten gedachten Lagern treten Festhaltungskräfte F^s auf, genau wie bei Belastung des Rahmens mit äußeren Kräften. Entfernen wir diese Lager, so treten an den vorübergehend horizontal unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten die Verschiebungskräfte V^s (die entgegengesetzt gerichteten Festhaltungskräfte F^s) in Tätigkeit, welche noch zusätzliche Momente am ganzen Rahmen erzeugen, die zu denjenigen für den festgehaltenen Zustand zu addieren sind, um die genau richtigen Momente infolge der gegebenen Senkung zu erhalten.

In Fig. 350 bestimmen wir nun die Verschiebungen der Knotenpunkte infolge der gegebenen Senkung. Da die Senkung Δ des Auflagerpunktes F in Rich-

tung des anschließenden Stabes 5 erfolgt, so verschiebt sich der Punkt B um dasselbe Maß, und zwar senkrecht nach unten, da das an diesem Punkt gedachte Rollenlager in senkrechter Richtung beweglich ist. Dabei senkt sich nun der Bogen 1 einseitig an seinem Kämpfer B um das Maß Δ , da sein anderer Kämpfer wegen des dort gedachten festen Lagers in Ruhe bleibt, und Bogen 1 erleidet daher eine gegenseitige Verschiebung Δ_1'' seiner Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie von der Größe der gegebenen Senkung Δ . Der Bogen 2 senkt sich ebenfalls einseitig an seinem linken Kämpfer B um das Maß Δ in senkrechter Richtung, da sein rechter Kämpfer wegen des dort gedachten festen Lagers in Ruhe bleibt. Da jedoch die Kämpfer des Bogens 2 ungleich hoch liegen, so erleidet derselbe durch die Senkung des Kämpfers B nach B' sowohl eine gegenseitige Verschiebung Δ_2' seiner Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie

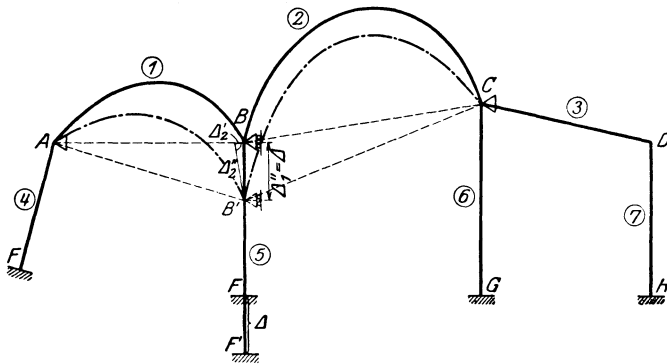


Fig. 350.

als auch eine gegenseitige Verschiebung Δ_2'' normal zur Kämpferverbindungsline, welche wir durch Zerlegung der Senkung $BB' = \Delta$ in der Richtung der Kämpferverbindungsline BC und normal zu dieser erhalten (siehe Fig. 350). Die dadurch am ganzen Rahmen hervorgerufenen Momente erhalten wir in bekannter Weise, und zwar sowohl diejenigen infolge der gegenseitigen Verschiebungen Δ_1'' am Bogen 1 als auch jene infolge Δ_2' und Δ_2'' am Bogen 2 nach Abschnitt 2, a) und b) dieses Kapitels; die sich durch Addition dieser Teilmomentenflächen ergebende Momentenfläche ist diejenige für den festgehaltenen Zustand. Aus diesen Momenten bestimmen wir noch die in den gedachten Lagern auftretenden Festhaltungskräfte F_I^s , F_{II}^s , und F_{III}^s nach Kap. VIII, 9 des I. Teiles.

Nun erhalten wir die Senkungs-Zusatzmomente, indem wir die nach Abschnitt 3 dieses Kapitels bestimmten M_I^* -, M_{II}^* - und M_{III}^* -Momente mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft V_I^s bzw. V_{II}^s bzw. V_{III}^s multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Zum Schluß erhalten wir durch Addition der Senkungsmomente für den festgehaltenen Zustand und der Senkungs-Zusatzmomente die endgültigen Momente infolge der gegebenen Senkung des Auflagerpunktes F . Die zugehörigen Querkräfte, Normalkräfte und Auflagerkräfte an den bogenförmigen Stäben ergeben sich nach Kap. VIII, 8 des I. Teiles aus der Stützlinie, diejenige an den geradlinigen Stäben nach Kap. VI des I. Teiles.

Erfolgt die gegebene Senkung nicht in senkrechter, sondern in beliebiger anderer Richtung, so erleidet außerdem Stab 5 eine gegenseitige rechtwinklige Verschiebung ϱ_5 seiner Endpunkte, und die Verschiebung des Knotenpunktes B ist dann nicht mehr gleich der gegebenen Senkung, sondern gleich der Projektion derselben auf die Senkrechte (da Punkt B senkrecht geführt ist).

6. Bestimmung der Momente infolge der durch die Normalkräfte verursachten Längenänderungen der Stäbe.

Durch die Längenänderungen, welche jeder Stab (gerader und bogenförmiger) des allgemeinen Rahmens der Fig. 337 infolge der Normalkräfte erleidet und die dadurch hervorgerufenen Knotenpunktverschiebungen, entstehen die gesuchten „Momente infolge der Normalkräfte“. Diese Momente werden auch am Tragwerk mit bogenförmigen Stäben analog wie diejenigen infolge Temperaturänderung (Abschnitt 4 dieses Kapitels) bestimmt und setzen sich zusammen aus:

a) den Momenten, welche durch die Veränderung der Bogenachse infolge Wirkung der Normalkräfte in den bogenförmigen Stäben allein, unter Voraussetzung unverschiebbarer Kämpfer, am ganzen Rahmen entstehen;

b) den Momenten, welche durch die Knotenpunktverschiebungen infolge Wirkung der Normalkräfte in den geraden Stäben allein, unter Voraussetzung horizontal unverschiebbarer Knotenpunkte A , B und C (durch gedachte Rolllager mit vertikaler Bahn), am ganzen Rahmen hervorgerufen werden, und

c) den Zusatzmomenten (infolge Wirkung der Normalkräfte), welche durch die in den vorübergehend horizontal unverschiebbar festgehaltenen Knotenpunkten wirkenden Verschiebungskräfte V^N (umgekehrte Festhaltungskräfte F^N) am frei verschiebbaren Rahmen erzeugt werden.

Die unter a) genannten Momente sind verhältnismäßig sehr gering und werden, falls man sie zu berücksichtigen wünscht, schon bei der Bestimmung der Momente für die betreffende äußere Belastung, unter Voraussetzung horizontal unverschiebbarer Säulenköpfe (siehe drittes und viertes Glied der Formeln in Teil I, Kap. VIII) mitberechnet.

Zur Ermittlung der unter b) genannten Momente konstruieren wir zunächst wie in Abschnitt 4 dieses Kapitels die Verschiebungen der einzelnen Knotenpunkte unter der Voraussetzung senkrecht geführter Knotenpunkte A , B und C ; hierbei ist zu beachten, daß die nach Gl. (576) zu berechnenden Längenänderungen der geraden Stäbe Verlängerungen oder Verkürzungen sein können und dementsprechend abzutragen sind. Dadurch erhalten wir für die geraden Stäbe die gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebungen ϱ ihrer Endpunkte und für die bogenförmigen Stäbe die gegenseitigen Verschiebungen Δ' und Δ'' ihrer Kämpfer in Richtung der Kämpferverbindungsline und normal dazu. Die durch die Verschiebungen ϱ erzeugten Momente berechnen wir nach Kap. III dieses Teiles, und diejenigen infolge der gegenseitigen Verschiebungen Δ' und Δ'' der Kämpfer der bogenförmigen Stäbe nach Abschnitt 2, a) und b) dieses Kapitels; durch Addition dieser Teilmomente erhalten wir die unter b) genannten Momente.

Durch Addition der unter a) und b) genannten Momente erhalten wir die Momente für den festgehaltenen Zustand, aus welchen wir die in den gedachten

Lagern an den Knotenpunkten A , B und C auftretenden Festhaltungskräfte F_I^N , F_{II}^N bzw. F_{III}^N nach Kap. VIII, 9 des ersten Teiles bestimmen.

Die unter c) genannten Zusatzmomente infolge Wirkung der Normalkräfte erhalten wir nun, indem wir die nach Abschnitt 3 dieses Kapitels bestimmten M_I^* , M_{II}^* und M_{III}^* -Momente mit Größe und Vorzeichen der Verschiebungskraft V_I^N bzw. V_{II}^N bzw. V_{III}^N (umgekehrte Festhaltungskräfte F_I^N , F_{II}^N und F_{III}^N) multiplizieren und die daraus hervorgehenden Momente addieren.

Addieren wir nun zum Schluß die unter a), b) und c) genannten Momente, so erhalten wir die endgültigen Momente infolge der Wirkung der Normalkräfte, welche nicht mehr korrigiert zu werden brauchen, obwohl durch dieselben die ursprünglich gegebenen Normalkräfte sich um ein geringes Maß verändern.

X. Bestimmung der Grenzwerte der Momente, Querkräfte und Normalkräfte.

1. Grenzwerte der Momente.

Die bogenförmigen Tragwerke sind im allgemeinen auf Biegung mit Axialdruck zu dimensionieren. Zur Bestimmung der max. Beanspruchungen werden daher mit Vorteil die Kernpunktmomente verwendet, aus denen man die Randspannungen direkt erhält. Zur Bestimmung der Grenzwerte der Kernpunktmomente infolge beweglicher Lasten werden wieder Einflußlinien verwendet.

a) Einflußlinien der Kernpunktmomente.

Das Kernpunktmoment setzt sich zusammen aus dem Balkenmoment und dem Moment infolge des Bogenschubes des Zweigelenkbogens (R.I). Dazu kommt bei beweglichen Knotenpunkten noch das Zusatzmoment infolge der Verschiebungskräfte (R. II).

$$M_{zus} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* + V_{III} \cdot M_{III}^* + \dots + H_{zus} \cdot y, \quad (612)$$

wobei

$$H_{zus} = V_I \cdot H_I^* + V_{II} \cdot H_{II}^* + \dots + V_n \cdot H_n^* .$$

Es ist nun zweckmäßig zuerst nur die Momentenfläche aus dem Balkenmoment und dem Zusatzmoment infolge der Verschiebungskräfte (letzteres ohne Berücksichtigung des zusätzlichen Bogenschubes) zu bestimmen. Diese Momentenfläche gibt die endgültigen Werte für die geraden Stäbe und die Kämpfermomente. Für die Schnitte zwischen den Kämpfern werden zuletzt noch die Momente infolge des endgültigen Bogenschubes bestimmt und zur Momentenfläche addiert. Dadurch erhalten wir die endgültige Momentenfläche des ganzen Tragwerkes.

Die Gleichung der Kernpunktmomente lautet daher in dieser Reihenfolge:

$$M_k = M_0 + M^A \cdot \frac{1-x}{1} + M^B \cdot \frac{x}{1} + V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^* + \dots + V_n \cdot M_n^* - H_{tot} \cdot y, \quad (613)$$

wobei

$$H_{tot} = \mathfrak{S} + M^A \cdot B_{(m^a=1)} + M^B \cdot B_{(m^b=1)} + V_I \cdot H_I^* + V_{II} \cdot H_{II}^* + \dots + V_n \cdot H_n^* . \quad (614)$$

Für das bogenförmige, symmetrische Tragwerk der Fig. 351 werden im folgenden die Einflußlinien der Kernpunktmomente für einige Schnitte bestimmt.

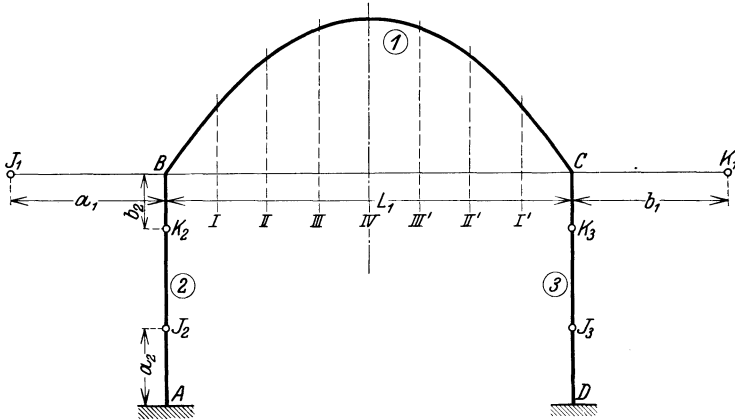
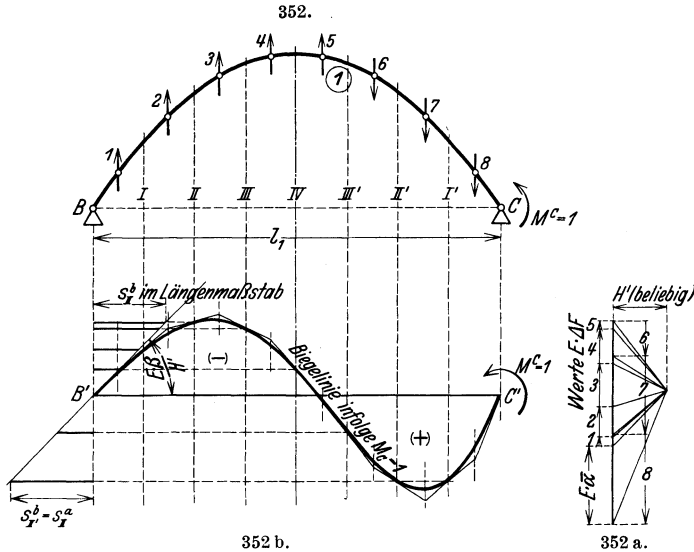


Abb. 351.

Die Balkenmomente für die Laststellungen $P = 1$ in Schnitt I—IV sind in Fig. 353 aufgetragen. Die Kreuzlinienabschnitte für jede Laststellung wurden dabei analog wie beim geraden Stab, mit Hilfe der Biegelinie des Zweigelenkbogens ermittelt, belastet mit $M = 1$ an einem Stabende. Auf Grund des Satzes



352 b.

352 a.

Fig. 352—352 b.

von der Gegenseitigkeit der Formänderungen ist diese Biegelinie die Einflußlinie der Kreuzlinienabschnitte. Wir erhalten sie nach Mohr durch Belasten des Zweigelenkbogens mit den elastischen Gewichten $E \cdot \Delta F = \left(\frac{x}{l} - \frac{B}{2} \cdot y \right) \cdot w$ infolge $M = 1$ und Zeichnen eines Seilpolygons dazu. (Fig. 352, 352a und 352b). Die Polweite H' ist beliebig.

Die Kreuzlinienabschnitte erhalten wir in Fig. 352b in gleicher Weise wie beim geraden Balken; es ist nach den Gl. (339) und (340) sowie (343) und (344)

$$k^a = -\frac{\delta^b}{\beta} = -s^b,$$

$$k^b = -\frac{\delta^a}{\beta} = -s^a.$$

Die Werte s^b gehen aus der Biegelinie für $M^G = 1$ hervor. Infolge der Symmetrie des Bogens ist die Biegelinie für $M^B = 1$ das Spiegelbild der in Fig. 352b

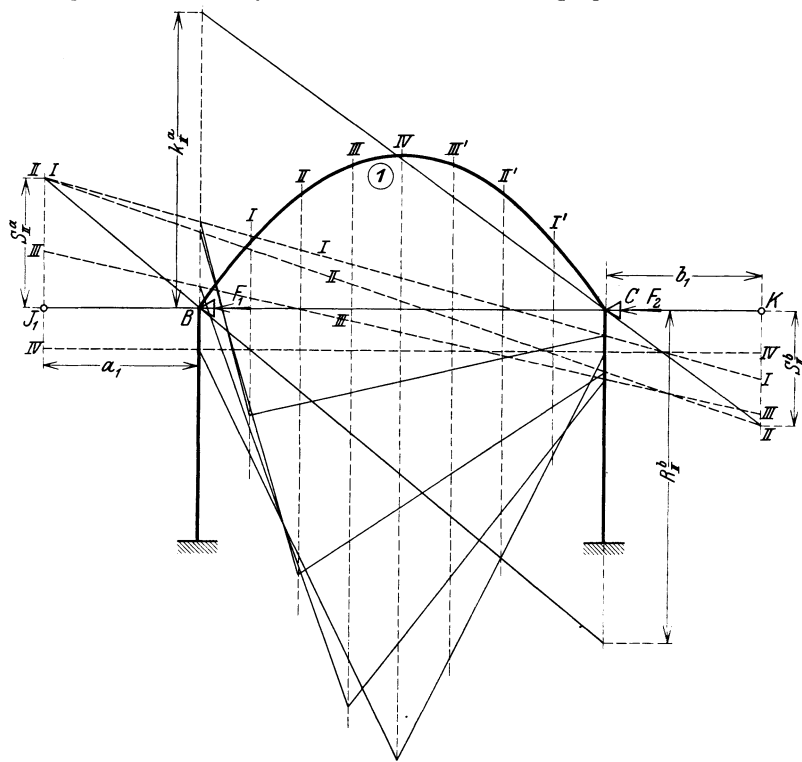


Fig. 353.

gezeichneten. Wir erhalten daher z. B. den Abschnitt s_{II}^a für Schnitt II beim symmetrisch liegenden Schnitt II'

$$s_{II}^a = s_{II}^b.$$

Die Kreuzlinienabschnitte $k^a = -s^b$ und $k^b = -s^a$ werden dabei im Längenmaßstab erhalten. Sie werden nun in Fig. 353 im Momentenmaßstab aufgetragen, z. B. k_{II}^a und k_{II}^b , und ergeben die Schlußliniensenkungen S_{II}^b und S_{II}^a . Die Schlußliniensenkungen können auch errechnet werden:

$$S^a = \frac{-a}{l} \cdot s^a, \quad S^b = \frac{-b}{l} \cdot s^b.$$

An die so erhaltenen Schlußlinien werden nun die M_o -Momentenflächen angehängt, und ergeben die Balkenmomentenflächen. Für die tatsächlichen Momente bei festgehaltenen Knotenpunkten wäre für Schnitte zwischen den Kämpfern noch das Moment $H \cdot y$ abzuziehen.

Zur Bestimmung der Zusatzmomente brauchen wir die Verschiebungskräfte V_I und V_{II} ; für letztere den Bogenschub ξ des Zweigelenkbogens infolge $P = 1$. Die in den einzelnen Laststellungen von $P = 1$ hervorgerufenen Bogenschübe ξ ermittelt man zweckmäßig mit Hilfe der Einflußlinie für ξ . Auf Grund des Satzes von der Gegenseitigkeit der Formänderungen ist die Einflußlinie für ξ gleich der Biegelinie des Zweigelenkbogens für den $\frac{1}{\delta a \cdot a}$ -fachen Zustand $\xi = -1$.

Die Biegelinie des Zweigelenkbogens belastet mit $\xi = -1$ (Fig. 354) ist das Seilpolygon der elastischen Gewichte $1 \cdot y \cdot w$. In Fig. 354 a ist das Kräftepolygon

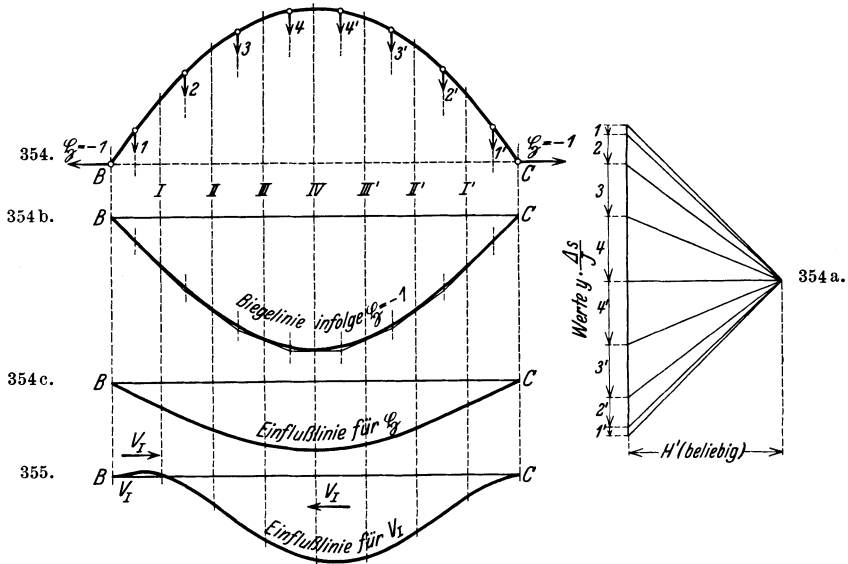


Fig. 354—354 c, 355.

aufgetragen, in Fig. 354 b daraus die Biegelinie konstruiert. Die Polweite H' ist dabei beliebig. Die Ordinaten η der Biegelinie werden im Längenmaßstab gemessen. Für jede Ordinate η erhält man die entsprechende Einflußordinate von ξ durch Multiplikation mit $\frac{H'}{\sum_0^l y^2 \cdot w}$ (H' dabei im Kräftemaßstab der

Werte $y \cdot w$ gemessen). Die Einflußlinie für ξ ist in Fig. 354 c aufgetragen.

Für jede Laststellung $P = 1$ berechnet man die Verschiebungskraft

$$V_I = \xi + \frac{B}{2} (M^B + M^C) + Q_2^B. \tag{615}$$

Ihre Einflußlinie ist in Fig. 355 aufgetragen. Die Werte für V_{II} sind gleich denjenigen von V_I für die spiegelsymmetrischen Laststellungen.

Die Momente M_I^* und M_{II}^* ergeben sich aus den Momentenlinien M_I' , M_{II}' der Fig. 356 und 357.

In Fig. 356 ist mit 1 die Momentenlinie infolge der Verschiebung Δ' des Kämpfers B nach innen bezeichnet. Die Momentenlinie 2 ist diejenige infolge der gegenseitigen rechtwinkligen Verschiebung Δ' der beiden Endpunkte des Stabes 2.

Der entstehende Horizontalschub ist $+H'_A$. Für Schnitte zwischen den Kämpfern wäre noch $H'_A \cdot y$ in Abzug zu bringen. Dieselben Koeffizienten, welche die Momente M^* liefern, ergeben auch H_I^* .

$$\left. \begin{aligned} M_I^* &= X_{I(I)} \cdot M_I' \\ &+ X_{II(I)} \cdot M_{II}' \end{aligned} \right\} (616)$$

$$\left. \begin{aligned} H_I^* &= X_{I(I)} \cdot H_A' \\ &+ X_{II(I)} \cdot H_A'' \end{aligned} \right\} (617)$$

Die Momentenlinien M_I^* und M_{II}^* sind in Fig. 358 und 359 aufgetragen. Für Schnitte zwischen den Kämpfern wäre noch $H_I^* \cdot y$ in Abzug zu bringen.

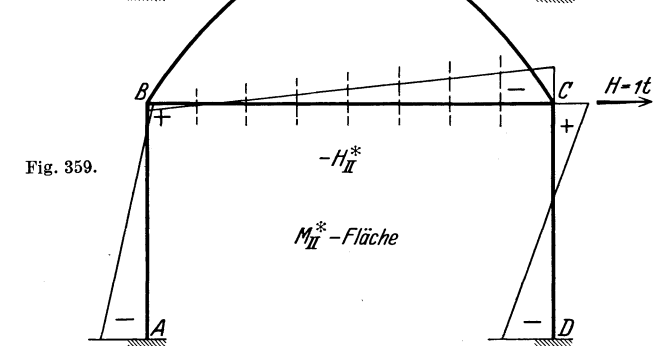
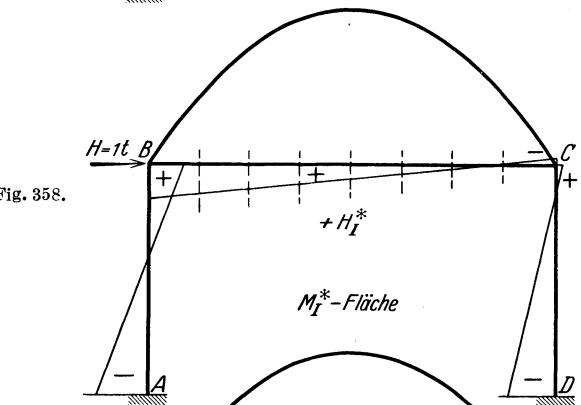
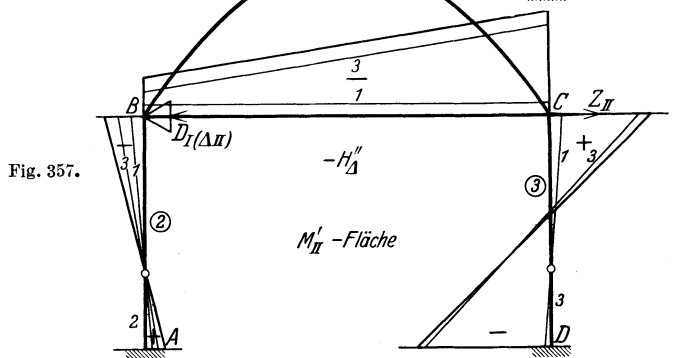
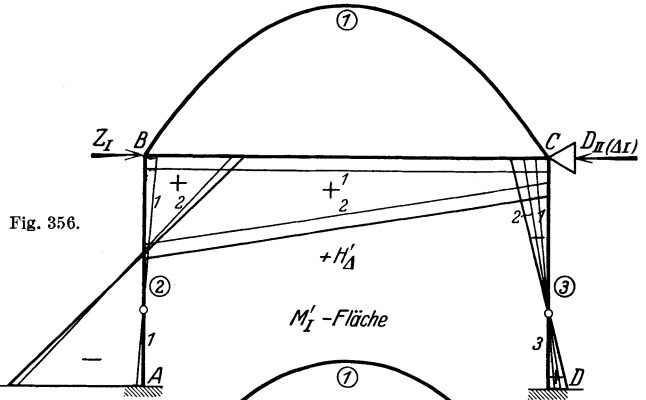
Es kann nun für jede Laststellung $P = 1$ der Wert von H_{tot} berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} H_{tot} &= \xi + \frac{B}{2} (M^B + M^C) \\ &= V_I \cdot H_I^* \\ &+ V_{II} \cdot H_{II}^* \end{aligned} \right\} (618)$$

und endlich die endgültigen Kernpunktsmomente

$$\left. \begin{aligned} M_k &= M_0 + M^B \cdot \frac{l-x}{l} \\ &+ M^C \cdot \frac{x}{l} + V_I \cdot M_I^* \\ &+ V_{II} \cdot M_{II}^* \\ &- H_{tot} \cdot y \end{aligned} \right\} (619)$$

In Fig. 360 ist die Einflußlinie für das Kämpfermoment M^B aufgetragen. Die punktierte Linie zeigt den Einfluß der Balkenmomente allein. Dazu werden die Ordinaten $M_{zus} = V_I \cdot M_I^* + V_{II} \cdot M_{II}^*$ addiert. Die punktierte Linie in Folge der Balkenmomente allein ist zugleich die Einflußlinie des



Kämpfermomentes im festgehaltenen Zustand. Es zeigt sich, daß der Einfluß der Verschiebungskraft auf das Kämpfermoment vor allem sehr groß ist. Infolge

der Beweglichkeit der Kämpfer treten bei vertikaler Belastung überhaupt keine positiven Kämpfermomente mehr auf.

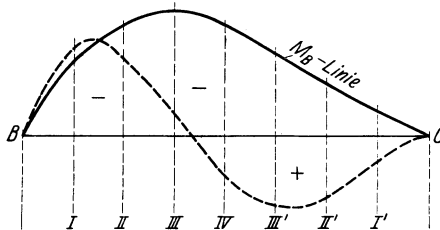


Fig. 360.

In Fig 361 sind die Einflußlinien für die Kernpunktmomente M_k^o und M_k^u für Schnitt II konstruiert. Die punktierte Einflußlinie ist wieder diejenige infolge der Balkenmomente allein. Dazu werden die Momente M_{zus} und $H \cdot y^o$ bzw. $H \cdot y^u$ addiert. Vergleichsweise ist strichpunktiert die Einflußlinie für M_k^o eingetragen, bei Annahme unverschieblicher Knotenpunkte.

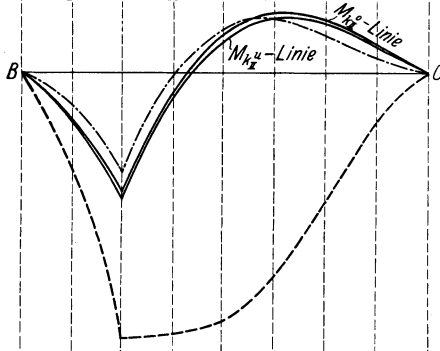


Fig. 361.

Ebenso sind in Fig. 362 die Kernpunktmomente für den Scheitel aufgetragen. Die strichpunktierte Linie stellt vergleichsweise das Kernpunktmoment M_k^o im festgehaltenen Zustand dar. Auch hier zeigt sich der Einfluß der Beweglichkeit der Knotenpunkte auf die Momente als sehr groß.

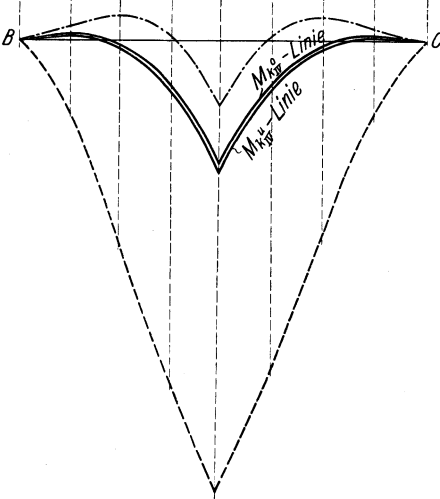


Fig. 362.

b) Die Einflußlinien der Kernpunktmomente für die Pfeiler ergeben sich aus den endgültigen

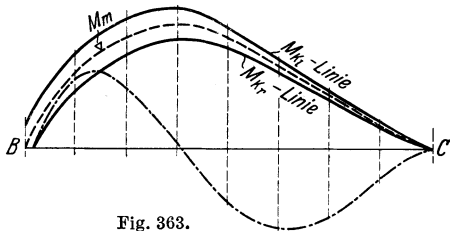


Fig. 363.

Einflußlinien der Momente M_m für die Stabachse und dem Moment der endgültigen Normalkraft

$$M_k = M_m \pm N \cdot k . \tag{620}$$

In Fig. 363 sind die Einflußlinien der Kernpunktmomente für einen Schnitt des Pfeilers auf Kämpferhöhe aufgetragen. Die punktierte Einflußlinie M_m ist diejenige des Kämpfermomentes M_B (Fig. 360). Die Einflußlinie der endgültigen Normalkraft ist in Fig. 366 aufgetragen. Die strichpunktierte Einflußlinie ist diejenige für M_{kr} im festgehaltenen Zustand.

c) Einflußlinie des endgültigen Bogenschubes.

Die Ordinaten dieser Einflußlinie ergeben sich aus der oben angeschriebenen Gleichung für H total.

Die Einflußlinie ist in Fig. 364 aufgetragen. Die punktierte Einflußlinie des Bogenschubes ist diejenige im festgehaltenen Zustand. Der Bogenschub wird im Falle beweglicher Kämpfer stark vermindert.



2. Einflußlinien für die endgültigen Querkräfte an den Säulen.

Für seitlich unbelastete Säulen ist die Querkraft auf die ganze Höhe konstant. Für einen stehenden, unbelasteten Stab gilt allgemein nach T. I, Kap. VI₁ 1 (Gl. 327 a)

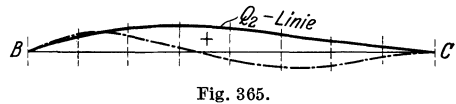
$$Q_u = \frac{M_u - M_o}{l} \tag{621}$$

Es ist aber

$$M_u = - \frac{M_o}{l - a} \cdot a \tag{622}$$

und daher

$$Q_u = - \frac{M_o}{l - a} \tag{621 a}$$



Die Einflußlinie für Q_u wird daher direkt aus der endgültigen Einflußlinie von M_o (Fig. 360) erhalten, indem alle Ordinaten mit dem Koeffizienten $-\frac{1}{l - a}$ multipliziert werden.

Die Einflußlinie für die Querkraft an der Säule 2 ist in Fig. 365 aufgezeichnet. Die strichpunktierte Einflußlinie ist wieder diejenige für den festgehaltenen Zustand. Der Einfluß der Beweglichkeit der Kämpfer auf die Säulenquerkraft ist groß. Zugbänder reduzieren daher die Horizontalschübe der Säulenfüße, vor allem bei Totalbelastung, stark.

3. Einflußlinien der endgültigen Normalkräfte der Säulen.

Die Normalkraft in den Säulen ist abgesehen vom Säuleneigengewicht gleich dem vertikalen Auflagerdruck des Bogens. Es gilt daher wie für die geradlinigen Tragwerke

$$N = \mathfrak{B} + \frac{M_r - M_l}{l} \tag{623}$$

wobei für M_r und M_l die endgültigen Momente einzusetzen sind.

Fig. 366 zeigt die Einflußlinie für die Normalkraft der Säule 2.

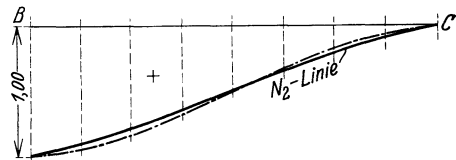


Fig. 366.

Im festgehaltenen Zustand gilt die strichpunktierte Einflußlinie. Die Einflußlinie für die Normalkraft der Säule 3 ist symmetrisch zu derjenigen der Säule 2.

Anhang.

I. Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen.

A. Geradliniger Stab.

1. Kräfte.

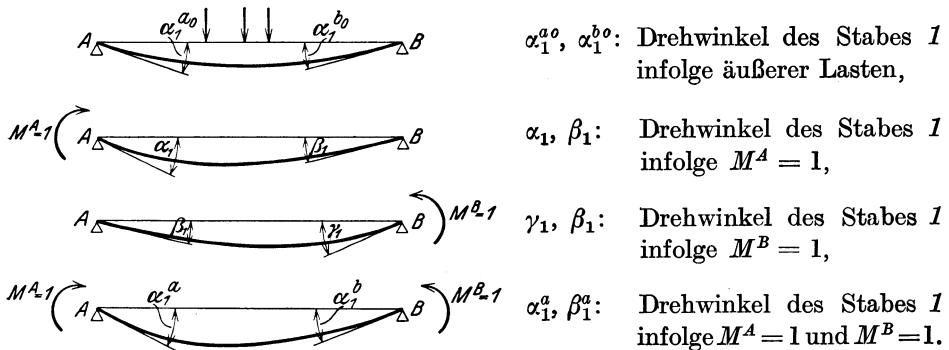
- N_n^B : Normalkraft im Knotenpunkt B auf Stab n ,
- Q_n^B : Querkraft im Knotenpunkt B auf Stab n ,
- F : Festhaltungskraft infolge äußerer Lasten, Temperaturänderung und Stützensenkung,
- V : Verschiebungskraft infolge Lasten, Temperatureinfluß und Stützensenkung (entgegengesetzt gleich F),
- Z : Erzeugungskraft der angenommenen Verschiebung.
- D : Festhaltungskraft infolge Z am festgehaltenen Knotenpunkt.

2. Momente.

- M_n^C : Stützenmoment im Knotenpunkt C auf Stab n ,
- M' : Moment infolge einer Verschiebung (z. B. $\Delta = 1$ mm),
- M^* : Moment infolge $H = 1$ t,
- M^a : Moment infolge gegenseitiger, rechtwinkliger Verschiebung der beiden Stabenden auf Seite des Festpunktabstandes a ,
- M_{zus} : Zusatzmoment infolge der Verschiebungskräfte.

3. Drehwinkel.

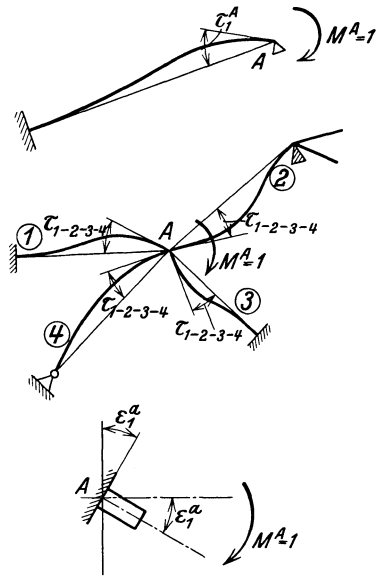
a) Am einfachen Balken:



b) Am elastisch eingespannten Balken:

τ_1^A : Drehwinkel des Stabes I in A infolge $M^A = 1$,

$\tau_{1-2-3-4}^A$: Gemeinsamer Drehwinkel der Stäbe $1, 2, 3$ und 4 in A infolge $M^A = 1$.



c) Am Widerlager:

ϵ_1^a : Drehwinkel des Widerlagers (oft Knotenpunkt) von Stab I auf Seite des Festpunktsabstandes a infolge $M^A = 1$.

4. Verteilungsmaß.

μ_{1-n}^A : Verteilungsmaß des Momentenüberganges in Knotenpunkt A „von Stab 1 nach Stab n “.

B. Bogenförmiger Stab.

1. Kräfte.

a) Bogenschübe am Zweigelenkbogen:

\mathfrak{S} : infolge äußerer Lasten und Temperatureinwirkung,

$B_{(M^a=1)}$: infolge $M^a = 1$,

B : infolge $M^a = 1$ und $M^b = 1$,

$B_{A'}$: infolge gegenseitiger Verschiebung Δ' der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie,

$B_{A''}$: infolge gegenseitiger Verschiebung Δ'' der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie.

b) Bogenschübe am elastisch eingespannten bogenförmigen Stab:

$H_{A'}$: infolge gegenseitiger Verschiebung Δ' der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie,

$H_{A''}$: infolge gegenseitiger Verschiebung Δ'' der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie,

H_{zus} : infolge der Verschiebungskräfte,

H : Totaler Bogenschub.

2. Momente.

$M_{A'}^a$: Kämpfermoment auf Seite des Festpunktsabstandes a infolge Verschiebung Δ' der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie,
 $M_{A''}^a$: Kämpfermoment infolge Verschiebung Δ'' der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie.

3. Drehwinkel.

a) Am Zweigelenkbogen:

φ_1^a, φ_1^b : Drehwinkel des Stabes 1 infolge äußerer Belastung oder Temperatureinwirkung.

α_1, β_1 : Drehwinkel des Stabes 1 infolge $M^B = 1$.

γ_1, β_1 : Drehwinkel des Stabes 1 infolge $M^C = 1$.

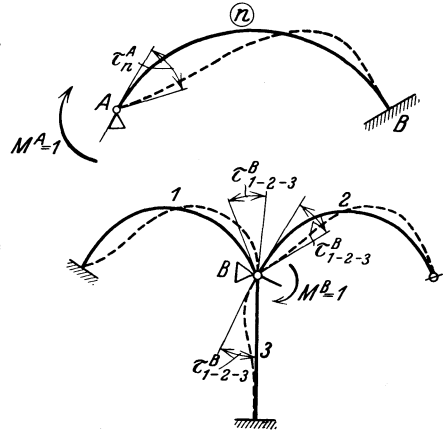
α_1^a, α_1^b : Drehwinkel des Stabes 1 infolge $M^B = 1$ und $M^C = 1$ (bei Symmetrie: $\alpha_1^a = \alpha_1^b = \bar{\alpha}_1$).

$\varphi_{\Delta'}^a, \varphi_{\Delta'}^b$: Drehwinkel infolge gegenseitiger Verschiebung Δ' der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie.

$\varphi_{\Delta''}^a, \varphi_{\Delta''}^b$: Drehwinkel infolge gegenseitiger Verschiebung Δ'' der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie.

b) Am elastisch eingespannten Bogen:

τ_n^A : Drehwinkel des Stabes n im Knotenpunkt A infolge $M^A = 1$.



τ_{1-2-3}^B : Gemeinsamer Drehwinkel der Stäbe 1, 2, 3 im Knotenpunkt B infolge $M^B = 1$.

II. Zusammenstellung der im ersten und zweiten Teil abgeleiteten Hauptformeln.

Rechnungsabschnitt I.

A. Geradliniger Stab.

Festpunktabstände (positiv):

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a}, \quad (7)$$

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b}, \quad (8)$$

bei konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$a = \frac{l}{3 + \frac{\varepsilon^a}{\beta}}, \quad (7a)$$

$$b = \frac{l}{3 + \frac{\varepsilon^b}{\beta}}, \quad (8a)$$

bei voller Einspannung am einen Stabende, konstantem Trägheitsmoment und unter Berücksichtigung der starren Strecke f (Säulenkopf)

$$a = \frac{l' l + 2f}{3 l' + 2f}, \quad (146)$$

$$b = \frac{l'^2 (l + 2f)}{3 l'^2 + 3 l E J \cdot \varepsilon^b}, \quad (147)$$

bei voller Einspannung am einen Stabende und konstant. Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge ($f = 0$)

$$a = \frac{l}{3}, \quad (146a)$$

$$b = \frac{l^2}{3 l + 6 E J \cdot \varepsilon^b}, \quad (147a)$$

404 Zusammenstellung der im ersten und zweiten Teil abgeleiteten Hauptformeln.

bei gelenkartiger Lagerung am einen Stabende und konstantem Trägheitsmoment:

$$a = 0,$$

b nach Formel (147) bzw. (147a) wobei ε^b jedoch einen anderen Wert besitzt.

Gemeinsamer Drehwinkel:

$$\varepsilon = \tau_{1-2-3-\dots-n} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \dots + \frac{1}{\tau_n}}, \quad (18)$$

$$\tau_{2-3} = \frac{\tau_2 \cdot \tau_3}{\tau_2 + \tau_3}. \quad (36)$$

Verteilungsmaß:

$$\mu_{1-n} = \frac{\tau_{2-3-4-\dots-n}}{\tau_n}, \quad (26a)$$

$$\mu_{1-2} = \frac{\tau_3}{\tau_2 + \tau_3} \text{ (bei 3 Stäben 1, 2, 3)}. \quad (37)$$

Einfacher Drehwinkel:

$$\tau^A = \alpha^a - \frac{l}{l-b} \cdot \beta, \quad (42)$$

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta; \quad (43)$$

bei elastischer Einspannung am anderen Stabende und konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$\tau^A = \beta \left(3 - \frac{l}{l-b} \right), \quad (42a)$$

$$\tau^B = \beta \left(3 - \frac{l}{l-a} \right); \quad (43a)$$

bei voller Einspannung am anderen Stabende und konstantem Trägheitsmoment:

$$\tau = \frac{3}{2} \beta; \quad (42b)$$

bei gelenkiger Lagerung am anderen Stabende und konstantem Trägheitsmoment:

$$\tau = 2 \cdot \beta; \quad (43b)$$

bei voller Einspannung am anderen Stabende, konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke f (Säule):

$$E \cdot \tau = \frac{l^2(2l - 3a)}{6l(l-a) \cdot J}; \quad (138)$$

bei voller Einspannung am anderen Stabende und konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge ($f = 0$)

$$E \cdot \tau = \frac{l}{4J}; \quad (138a)$$

bei gelenkartiger Lagerung am anderen Stabende, konstantem Trägheitsmoment und Berücksichtigung der starren Strecke f :

$$E \cdot \tau = \frac{l^3}{3l^2 \cdot J}; \quad (139)$$

bei gelenkartiger Lagerung am anderen Stabende und konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge ($f = 0$):

$$E \cdot \tau = \frac{l}{3J}. \quad (139a)$$

Drehwinkel α^a und α^b :

$$E \cdot \alpha^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l w \cdot z', \quad w = \frac{\Delta s}{J}, \quad (199)$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l w \cdot z; \quad (200)$$

bei symmetrischem Stab:

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha} = 3\beta; \quad (207a)$$

bei konstantem Trägheitsmoment, jedoch mit starrer Strecke f an einem Stabende:

$$E \cdot \alpha^a = \frac{l'(l' + 2f)}{2l \cdot J}, \quad (202)$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{l'^2}{2l \cdot J}; \quad (203)$$

bei konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$E \cdot \alpha^a = E \cdot \alpha^b = E \cdot \bar{\alpha} = \frac{l}{2J}, \quad (204)$$

$$\alpha^a = \alpha^b = \bar{\alpha} = 3\beta. \quad (207a)$$

Drehwinkel β :

$$E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l w \cdot z \cdot z'; \quad (205)$$

bei konstantem Trägheitsmoment, jedoch mit starrer Strecke f an einem Stabende:

$$E \cdot \beta = \frac{l'^2(l' + 2f)}{6l^2 \cdot J}; \quad (206)$$

bei konstantem Trägheitsmoment auf die ganze Stablänge:

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6J}, \quad (207)$$

$$\beta = \frac{\alpha^a}{3} = \frac{\alpha^b}{3} = \frac{\bar{\alpha}}{3}. \quad (207a)$$

Für den Balken mit geraden und parabolischen Vouten sind im Abschnitt III dieses Anhangs Tabellen über die Drehwinkel α^a , α^b und β enthalten.

Drehwinkel α^{a0} und α^{b0} :

$$\alpha^{a0} = \sum P \cdot \delta^a, \quad (244)$$

$$\alpha^{b0} = \sum P \cdot \delta^b. \quad (245)$$

Stützenmomente,

konstruiert mit Hilfe der

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{\alpha^{b0}}{\beta} = -\frac{\sum P \cdot \delta^b}{\beta}, \quad (223)$$

$$k^b = -\frac{\alpha^{a0}}{\beta} = -\frac{\sum P \cdot \delta^a}{\beta}. \quad (224)$$

Schlußliniensenkungen:

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b, \quad (225)$$

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a. \quad (226)$$

Für die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle sind die Werte der Kreuzlinienabschnitte für den Balken mit konstantem Trägheitsmoment auf Seite 97ff. zu finden. Für den Balken mit geraden und parabolischen Vouten sind im Abschnitt III dieses Anhangs die Ordinaten der Einflußlinien der Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b enthalten.

Die Momente am belasteten Stab werden erhalten als Momente am einfachen Balken, belastet durch die (bei Belastung mehrerer Öffnungen, totalen) Stützenmomente und die äußeren Lasten, d. h. es ist

$$M_x = M_0 + M^a \cdot \frac{l-x}{l} + M^b \cdot \frac{x}{l}. \quad (1)$$

B. Bogenförmiger Stab.**Festpunktabstände (negativ):**

$$a = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^a + \varepsilon^a}, \quad (330)$$

$$b = \frac{l \cdot \beta}{\alpha^b + \varepsilon^b}. \quad (330 a)$$

Gemeinsamer Drehwinkel:

$$\varepsilon = \tau_{1-2-3-\dots-n} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} + \dots + \frac{1}{\tau_n}}, \quad (422)$$

$$\tau_{1-5} = \frac{\tau_1 + \tau_5}{\tau_1 \cdot \tau_5}. \quad (424)$$

Verteilungsmaß:

$$\mu_{1-n} = \frac{\tau_{2-3-4-\dots-5}}{\tau_n}, \quad (425)$$

$$\mu_{1-2} = \frac{\tau_3}{\tau_2 + \tau_3} \quad (\text{bei 3 Stäben } 1, 2, 3). \quad (429)$$

Einfacher Drehwinkel:

$$\tau^A = \alpha^a - \frac{l}{l-b} \cdot \beta, \quad (441)$$

$$\tau^B = \alpha^b - \frac{l}{l-a} \cdot \beta. \quad (442)$$

Drehwinkel α^a und α^b

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$E \cdot \alpha^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l (l-x) w - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \sum_0^l (l-x) y \cdot w, \quad (403)$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l x \cdot w - \frac{1}{l} \cdot B \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w; \quad (404)$$

bei symmetrischem Stab (der Einfluß der Normalkräfte fällt weg):

$$E \cdot \alpha^a = E \cdot \alpha^b = E \cdot \bar{\alpha} = \sum_0^{l/2} w - B \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w. \quad (418)$$

Drehwinkel β

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$E \cdot \beta = \frac{1}{l^2} \cdot \sum_0^l x (l-x) w - \frac{1}{l} \cdot B_{(M^a=1)} \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w; \quad (399)$$

bei symmetrischem Stab (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$E \cdot \beta = \frac{2}{l^2} \cdot \sum_0^{l/2} x (l-x) w - \frac{B}{2} \cdot \sum_0^{l/2} y \cdot w. \quad (417)$$

Drehwinkel φ^a und φ^b

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$E \cdot \varphi^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_0 (l-x) w - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{S} \cdot \sum_0^l y \cdot (l-x) w, \quad (410)$$

$$E \cdot \varphi^b = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_0 \cdot x \cdot w - \frac{1}{l} \cdot \mathfrak{S} \cdot \sum_0^l x \cdot y \cdot w; \quad (411)$$

bei symmetrischem Stab (der Einfluß der Normalkräfte fällt weg):

$$E \cdot \varphi^a = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_0 (l-x) w - \frac{\mathfrak{S}}{2} \cdot \sum_0^l y \cdot w, \quad (420)$$

$$E \cdot \varphi^b = \frac{1}{l} \cdot \sum_0^l M_0 \cdot x \cdot w - \frac{\mathfrak{S}}{2} \cdot \sum_0^l y \cdot w. \quad (421)$$

Bogenschub $B_{(M^a=1)}$

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$B_{(M^a=1)} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l y(l-x) \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w}. \quad (370)$$

Bogenschub $B_{(M^b=1)}$

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$B_{(M^b=1)} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\sum_0^l x \cdot y \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w}; \quad (371)$$

bei symmetrischem Stab (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$B_{(M^a=1)} = B_{(M^b=1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_0^{l/2} y \cdot w}{\sum_0^{l/2} y^2 \cdot w} = \frac{1}{2} B. \quad (412)$$

Bogenschub B

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$B = \frac{\sum_0^l y \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w}; \quad (380)$$

bei symmetrischem Stab dasselbe.

Bogenschub \mathfrak{S}

infolge äußerer Belastung (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$\mathfrak{S} = \frac{\sum_0^l M_0 \cdot y \cdot w}{\sum_0^l y^2 \cdot w}; \quad (394)$$

bei symmetrischem Stab dasselbe. (415)

Für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind die Drehwinkel $\bar{\alpha}$ und β sowie der Bogenschub B und die Ordinaten der Einflußlinie des Bogenschubes \mathfrak{S} im Abschnitt III dieses Anhangs angegeben.

Bogenschub \mathfrak{S}^t

infolge gleichmäßiger Temperaturerhöhung (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$\mathfrak{S}^t = \frac{E \cdot \varepsilon \cdot t \cdot l}{\sum_0^l y^2 \cdot w}; \quad (395)$$

bei symmetrischem Stab dasselbe. (416)

Kämpfermomente

konstruiert mit Hilfe der

Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = -\frac{\varphi^b}{\beta} = -\frac{\sum P \cdot \delta^b}{\beta}, \quad (339)$$

$$k^b = -\frac{\varphi^a}{\beta} = -\frac{\sum P \cdot \delta^a}{\beta}. \quad (340)$$

Schlußliniensenkungen:

$$S^a = \frac{a}{l} \cdot k^b, \quad (341)$$

$$S^b = \frac{b}{l} \cdot k^a; \quad (342)$$

oder berechnet nach folgenden Gleichungen:

$$M^a = \frac{k^b(l-b) - k^a \cdot b}{l(l-a-b)} \cdot a, \quad (336)$$

$$M^b = \frac{k^a(l-a) - k^b \cdot a}{l(l-a-b)} \cdot b. \quad (337)$$

Für symmetrische Parabelbögen, deren Stärke vom Scheitel zum Kämpfer gesetzmäßig zunimmt, sind im Abschnitt III dieses Anhanges die Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b angegeben.

Die Momente am belasteten Stab werden erhalten als Momente am Zweigelenkbogen, belastet mit den äußeren Lasten und den beiden (bei Belastung mehrerer Stäbe, totalen) Kämpfermomenten, d. h. es ist am Bogen mit gleich hoch liegenden Kämpfern und senkrechter Belastung

$$M_x = M_o + M^a \cdot \frac{l-x}{l} + M^b \cdot \frac{x}{l} - H \cdot y. \quad (455)$$

Gesamtbogenschub H

am belasteten Bogen:

$$H = \xi + M^a \cdot B_{(M^a=1)} + M^b \cdot B_{(M^b=1)}, \quad (443)$$

bei Symmetrie:

$$H = \xi + \frac{1}{2} B(M^a + M^b). \quad (444)$$

Wirkt an Stelle einer äußeren Belastung eine gleichmäßige Temperaturänderung, so ist in den Gl. (443) und (444) an Stelle von ξ der Wert ξ^t einzusetzen. Am unbelasteten Bogen ($\xi = 0$) ist:

$$H = M^a \cdot B_{(M^a=1)} + M^b \cdot B_{(M^b=1)}, \quad (450)$$

bei Symmetrie:

$$H = \frac{1}{2} B(M^a + M^b). \quad (451)$$

Stützlinie als Probe.

B. Bogenförmiger Stab.**Momente M' .**

a) **Kämpfermomente infolge der Verschiebung Δ' der Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungslinie** (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte) (β , a und b mit Vorzeichen eingesetzt):

$$M_{\Delta'}^a = \frac{(B_{(M^a=1)} \cdot l - B \cdot b) \cdot \Delta'}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot a, \quad (590a)$$

$$M_{\Delta'}^b = \frac{(B_{(M^b=1)} \cdot l - B \cdot a) \cdot \Delta'}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot b; \quad (591a)$$

am symmetrischen Bogen (ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$M_{\Delta'}^a = \frac{B \left(\frac{l}{2} - b \right) \cdot \Delta'}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot a, \quad (592a)$$

$$M_{\Delta'}^b = \frac{B \left(\frac{l}{2} - a \right) \cdot \Delta'}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot b. \quad (593a)$$

Bogenschub $B_{\Delta'}$:

(ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte):

$$B_{\Delta'} = \frac{E \cdot \Delta'}{\sum_0^l y^2 \cdot w} \quad (586)$$

(Δ' bei Zusammendrücken des Bogens positiv); bei Symmetrie dasselbe.

Momente am Stab,

dessen Kämpfer in Richtung ihrer Verbindungsgeraden verschoben wurden:

$$M_x = M_{\Delta'}^a \cdot \frac{l-x}{l} + M_{\Delta'}^b \cdot \frac{x}{l} - H_{\Delta'} \cdot y. \quad (598)$$

Gesamtbogenschub $H_{\Delta'}$,

infolge obiger Kämpferverschiebung:

$$H_{\Delta'} = B_{\Delta'} + M_{\Delta'}^a \cdot B_{(M^a=1)} + M_{\Delta'}^b \cdot B_{(M^b=1)}, \quad (594)$$

bei Symmetrie:

$$H_{\Delta'} = B_{\Delta'} = \frac{1}{2} B (M_{\Delta'}^a + M_{\Delta'}^b). \quad (595)$$

b) **Kämpfermomente infolge der Verschiebung Δ'' der Kämpfer normal zu ihrer Verbindungslinie:**

$$M_{\Delta''}^a = \frac{\Delta''}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot a, \quad (600)$$

$$M_{\Delta''}^b = \frac{\Delta''}{l \cdot \beta (l - a - b)} \cdot b. \quad (601)$$

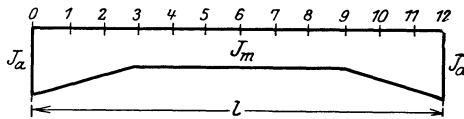
Momente am Stab,

dessen Kämpfer normal zu ihrer Verbindungsgeraden verschoben wurden:

$$M_x = M_{\Delta''}^a \cdot \frac{l-x}{l} + M_{\Delta''}^b \cdot \frac{x}{l} - H_{\Delta''} \cdot y. \quad (604)$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$												
	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,080	0,100	0,125	0,150	0,200	0,250	0,350	0,500
$\frac{l}{2}$	0,172 0,234	0,204 0,271	0,229 0,302	0,250 0,327	0,271 0,349	0,307 0,389	0,339 0,423	0,375 0,460	0,407 0,492	0,462 0,545	0,512 0,593	0,596 0,668	0,705 0,760
$\frac{l}{3}$	0,448 0,610	0,468 0,631	0,485 0,647	0,500 0,660	0,513 0,672	0,538 0,692	0,559 0,710	0,583 0,729	0,602 0,743	0,639 0,770	0,673 0,797	0,728 0,835	0,803 0,881
$\frac{l}{4}$	0,585 0,767	0,601 0,779	0,614 0,789	0,625 0,797	0,635 0,804	0,653 0,817	0,669 0,827	0,688 0,839	0,701 0,847	0,729 0,864	0,756 0,879	0,797 0,901	0,850 0,931
$\frac{l}{5}$	0,668 0,846	0,680 0,853	0,691 0,860	0,700 0,866	0,708 0,870	0,722 0,878	0,734 0,885	0,750 0,894	0,761 0,900	0,784 0,910	0,804 0,921	0,838 0,935	0,881 0,954
$\frac{l}{6}$	0,725 0,891	0,734 0,896	0,742 0,900	0,750 0,904	0,756 0,908	0,769 0,914	0,779 0,919	0,792 0,925	0,801 0,929	0,820 0,937	0,837 0,944	0,864 0,954	0,901 0,968

Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b .



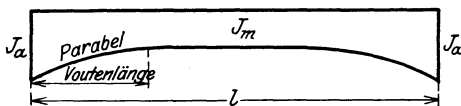
$$k^a = -l \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -l \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_a}$	Last $P = 1$ in										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
—	1,0	0,083 0,146	0,162 0,255	0,234 0,328	0,296 0,370	0,344 0,385	0,375 0,375	0,385 0,344	0,370 0,296	0,328 0,234	0,255 0,162	0,146 0,083
$\frac{l}{2}$	0,20	0,083 0,117	0,165 0,220	0,242 0,304	0,313 0,365	0,369 0,401	0,402 0,402	0,401 0,369	0,365 0,313	0,304 0,242	0,220 0,165	0,117 0,083
	0,10	0,083 0,110	0,166 0,212	0,244 0,298	0,318 0,364	0,375 0,405	0,408 0,408	0,405 0,375	0,364 0,318	0,298 0,244	0,212 0,166	0,110 0,083
	0,05	0,084 0,106	0,166 0,206	0,246 0,294	0,319 0,364	0,379 0,407	0,412 0,412	0,407 0,379	0,364 0,319	0,294 0,246	0,206 0,166	0,106 0,084
$\frac{l}{3}$	0,20	0,083 0,117	0,165 0,223	0,243 0,310	0,312 0,370	0,364 0,398	0,395 0,395	0,398 0,364	0,370 0,312	0,310 0,243	0,223 0,165	0,117 0,083
	0,10	0,083 0,112	0,166 0,218	0,244 0,307	0,315 0,370	0,368 0,401	0,398 0,398	0,401 0,368	0,370 0,315	0,307 0,244	0,218 0,166	0,112 0,083
	0,05	0,084 0,110	0,166 0,215	0,245 0,305	0,316 0,370	0,370 0,402	0,400 0,400	0,402 0,370	0,364 0,316	0,294 0,245	0,206 0,166	0,110 0,084
$\frac{l}{4}$	0,20	0,083 0,122	0,165 0,232	0,242 0,318	0,308 0,372	0,358 0,394	0,388 0,388	0,394 0,358	0,372 0,308	0,318 0,242	0,232 0,165	0,122 0,083
	0,10	0,083 0,118	0,165 0,229	0,243 0,317	0,309 0,372	0,360 0,395	0,390 0,390	0,395 0,360	0,372 0,309	0,317 0,243	0,229 0,165	0,118 0,083
	0,05	0,084 0,117	0,166 0,227	0,243 0,316	0,310 0,372	0,361 0,398	0,391 0,391	0,398 0,361	0,372 0,310	0,316 0,243	0,227 0,166	0,117 0,084
$\frac{l}{5}$	0,20	0,083 0,126	0,165 0,239	0,240 0,322	0,304 0,372	0,354 0,391	0,384 0,384	0,391 0,354	0,372 0,304	0,322 0,240	0,239 0,165	0,126 0,083
	0,10	0,083 0,124	0,165 0,237	0,241 0,321	0,306 0,372	0,355 0,392	0,385 0,385	0,392 0,355	0,372 0,306	0,321 0,241	0,237 0,165	0,124 0,083
	0,05	0,084 0,123	0,165 0,236	0,241 0,321	0,306 0,372	0,356 0,393	0,386 0,386	0,393 0,356	0,372 0,306	0,321 0,241	0,236 0,165	0,123 0,084
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083 0,130	0,164 0,244	0,239 0,324	0,302 0,371	0,351 0,390	0,382 0,382	0,390 0,351	0,371 0,302	0,324 0,239	0,244 0,164	0,130 0,083
	0,10	0,083 0,128	0,165 0,243	0,239 0,324	0,303 0,371	0,352 0,391	0,382 0,382	0,391 0,352	0,371 0,303	0,324 0,239	0,243 0,165	0,128 0,083
	0,05	0,084 0,127	0,165 0,242	0,240 0,323	0,304 0,372	0,352 0,391	0,383 0,383	0,391 0,352	0,372 0,304	0,323 0,240	0,242 0,165	0,127 0,084

2. Balken mit beidseitig gleicher parabolischer Voute.

Drehwinkel $\bar{\alpha}$ und β .



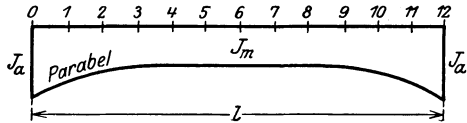
$$E \cdot \bar{\alpha} = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 J_m} \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

414 Tabellen zur raschen Ermittlung der Festpunkte und Kreuzlinienabschnitte.

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$													
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50	
$\frac{l}{2}$	0,354 0,479	0,387 0,515	0,412 0,542	0,435 0,565	0,454 0,584	0,486 0,615	0,514 0,643	0,545 0,670	0,570 0,692	0,616 0,732	0,656 0,763	0,720 0,812	0,800 0,872	
$\frac{l}{3}$	0,569 0,742	0,591 0,761	0,608 0,774	0,622 0,786	0,635 0,795	0,657 0,811	0,677 0,825	0,696 0,839	0,714 0,849	0,744 0,868	0,769 0,884	0,813 0,909	0,869 0,938	
$\frac{l}{4}$	0,676 0,847	0,693 0,858	0,706 0,866	0,717 0,873	0,727 0,879	0,743 0,888	0,757 0,897	0,772 0,905	0,785 0,911	0,808 0,922	0,828 0,932	0,860 0,946	0,902 0,964	
$\frac{l}{5}$	0,741 0,899	0,754 0,907	0,764 0,912	0,773 0,916	0,780 0,920	0,794 0,927	0,806 0,932	0,818 0,938	0,829 0,942	0,847 0,949	0,861 0,955	0,888 0,965	0,922 0,976	
$\frac{l}{6}$	0,784 0,928	0,795 0,933	0,803 0,938	0,811 0,941	0,818 0,943	0,829 0,947	0,839 0,952	0,848 0,956	0,857 0,958	0,872 0,964	0,886 0,968	0,906 0,975	0,932 0,983	

Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b .



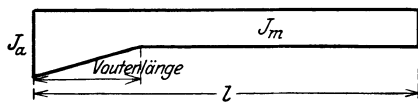
$$k^a = -l \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -l \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_a}$	Last $P = 1$ in										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
—	1,0	0,083 0,146	0,162 0,255	0,234 0,328	0,296 0,370	0,344 0,385	0,375 0,375	0,385 0,344	0,370 0,296	0,328 0,234	0,255 0,162	0,146 0,083
$\frac{l}{2}$	0,20	0,083 0,123	0,164 0,230	0,241 0,312	0,308 0,368	0,361 0,396	0,393 0,393	0,396 0,361	0,368 0,308	0,312 0,241	0,230 0,164	0,123 0,083
	0,10	0,083 0,119	0,165 0,225	0,242 0,309	0,311 0,368	0,364 0,398	0,396 0,396	0,398 0,364	0,368 0,311	0,309 0,242	0,225 0,165	0,119 0,083
	0,05	0,083 0,117	0,165 0,223	0,243 0,308	0,312 0,368	0,366 0,399	0,398 0,398	0,399 0,366	0,368 0,312	0,308 0,243	0,223 0,165	0,117 0,083
$\frac{l}{3}$	0,20	0,083 0,125	0,164 0,234	0,240 0,317	0,307 0,371	0,358 0,394	0,388 0,388	0,394 0,358	0,371 0,307	0,317 0,240	0,234 0,164	0,125 0,083
	0,10	0,083 0,122	0,165 0,230	0,241 0,315	0,309 0,371	0,360 0,395	0,389 0,389	0,395 0,360	0,371 0,309	0,315 0,241	0,230 0,165	0,122 0,083
	0,05	0,083 0,120	0,165 0,229	0,242 0,314	0,309 0,371	0,361 0,396	0,391 0,391	0,396 0,361	0,371 0,309	0,314 0,242	0,229 0,165	0,120 0,083
$\frac{l}{4}$	0,20	0,083 0,129	0,164 0,240	0,239 0,322	0,304 0,371	0,353 0,391	0,384 0,384	0,391 0,353	0,371 0,304	0,322 0,239	0,240 0,164	0,129 0,083
	0,10	0,083 0,127	0,165 0,238	0,240 0,321	0,305 0,371	0,354 0,392	0,385 0,385	0,392 0,354	0,371 0,305	0,321 0,240	0,238 0,165	0,127 0,083
	0,05	0,083 0,126	0,165 0,237	0,240 0,321	0,305 0,372	0,355 0,392	0,385 0,385	0,392 0,355	0,372 0,305	0,321 0,240	0,237 0,165	0,126 0,083
$\frac{l}{5}$	0,20	0,083 0,132	0,164 0,245	0,238 0,324	0,302 0,371	0,350 0,389	0,381 0,381	0,389 0,350	0,371 0,302	0,324 0,238	0,245 0,164	0,132 0,083
	0,10	0,083 0,131	0,164 0,243	0,239 0,324	0,302 0,371	0,351 0,390	0,382 0,382	0,390 0,351	0,371 0,302	0,324 0,239	0,243 0,164	0,131 0,083
	0,05	0,083 0,130	0,164 0,243	0,239 0,324	0,303 0,371	0,352 0,390	0,382 0,382	0,390 0,352	0,371 0,303	0,324 0,239	0,243 0,164	0,130 0,083
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083 0,135	0,164 0,248	0,237 0,325	0,300 0,371	0,349 0,388	0,379 0,379	0,388 0,349	0,371 0,300	0,325 0,237	0,248 0,164	0,135 0,083
	0,10	0,083 0,134	0,164 0,247	0,238 0,325	0,301 0,371	0,349 0,389	0,380 0,380	0,389 0,349	0,371 0,301	0,325 0,238	0,247 0,164	0,134 0,083
	0,05	0,083 0,133	0,164 0,246	0,238 0,325	0,301 0,371	0,350 0,389	0,380 0,380	0,389 0,350	0,371 0,301	0,325 0,238	0,246 0,164	0,133 0,083

3. Balken mit einseitiger gerader Voute.

Drehwinkel α^a , α^b und β .



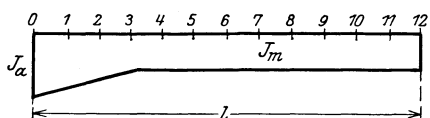
$$E \cdot \alpha^a = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{mittlere Zahl})$$

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 J_m} \cdot c_3 \quad (c_3 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$													
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50	
l	0,074 0,272 0,125	0,097 0,311 0,157	0,117 0,342 0,184	0,136 0,368 0,208	0,154 0,392 0,230	0,185 0,430 0,268	0,215 0,464 0,303	0,249 0,512 0,341	0,282 0,531 0,376	0,342 0,585 0,438	0,395 0,647 0,490	0,492 0,698 0,580	0,625 0,787 0,703	
$\frac{l}{2}$	0,355 0,818 0,617	0,376 0,827 0,636	0,394 0,836 0,651	0,410 0,842 0,664	0,421 0,845 0,676	0,451 0,858 0,695	0,474 0,866 0,712	0,500 0,875 0,730	0,524 0,883 0,746	0,567 0,896 0,774	0,600 0,907 0,797	0,670 0,925 0,835	0,758 0,946 0,882	
$\frac{l}{3}$	0,530 0,919 0,805	0,546 0,922 0,815	0,560 0,926 0,823	0,572 0,929 0,830	0,583 0,932 0,836	0,603 0,937 0,846	0,620 0,941 0,855	0,639 0,944 0,864	0,657 0,947 0,872	0,688 0,954 0,887	0,716 0,958 0,898	0,757 0,966 0,917	0,827 0,976 0,941	
$\frac{l}{4}$	0,632 0,955 0,884	0,645 0,957 0,890	0,655 0,959 0,895	0,666 0,961 0,899	0,674 0,962 0,902	0,690 0,967 0,909	0,704 0,968 0,914	0,719 0,971 0,916	0,733 0,971 0,924	0,758 0,974 0,933	0,781 0,979 0,940	0,816 0,981 0,951	0,865 0,985 0,964	
$\frac{l}{5}$	0,699 0,971 0,923	0,709 0,972 0,927	0,718 0,973 0,930	0,726 0,975 0,933	0,733 0,976 0,935	0,746 0,977 0,940	0,758 0,978 0,943	0,770 0,981 0,947	0,782 0,982 0,950	0,803 0,984 0,956	0,819 0,986 0,961	0,861 0,989 0,968	0,891 0,992 0,977	
$\frac{l}{6}$	0,746 0,979 0,944	0,754 0,980 0,948	0,762 0,981 0,950	0,768 0,981 0,952	0,775 0,982 0,954	0,782 0,983 0,957	0,795 0,984 0,961	0,805 0,987 0,962	0,816 0,987 0,964	0,833 0,989 0,968	0,848 0,990 0,972	0,878 0,992 0,977	0,908 0,994 0,983	

Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b .



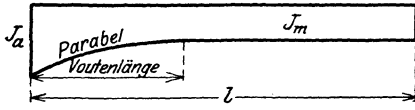
$$k^a = -l \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -l \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_a}$	Last $P = 1$ in										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
l	0,20	0,082 0,103	0,165 0,185	0,242 0,249	0,313 0,292	0,373 0,316	0,419 0,321	0,446 0,306	0,448 0,273	0,416 0,223	0,340 0,158	0,207 0,082
	0,10	0,083 0,088	0,165 0,161	0,244 0,219	0,317 0,261	0,382 0,286	0,435 0,294	0,470 0,285	0,479 0,259	0,455 0,215	0,381 0,155	0,239 0,082
	0,05	0,083 0,075	0,166 0,139	0,245 0,192	0,321 0,231	0,390 0,257	0,448 0,269	0,490 0,265	0,509 0,244	0,492 0,206	0,423 0,152	0,273 0,081
$\frac{l}{2}$	0,20	0,083 0,094	0,165 0,176	0,244 0,244	0,318 0,296	0,382 0,329	0,429 0,339	0,451 0,323	0,442 0,286	0,396 0,230	0,311 0,161	0,180 0,083
	0,10	0,083 0,080	0,166 0,153	0,247 0,217	0,323 0,269	0,393 0,307	0,447 0,315	0,474 0,281	0,467 0,228	0,421 0,160	0,331 0,160	0,192 0,083
	0,05	0,083 0,069	0,166 0,135	0,248 0,195	0,327 0,247	0,401 0,288	0,461 0,312	0,493 0,308	0,489 0,278	0,442 0,227	0,349 0,160	0,203 0,082
$\frac{l}{3}$	0,20	0,083 0,106	0,165 0,199	0,244 0,277	0,315 0,332	0,371 0,359	0,409 0,359	0,422 0,335	0,408 0,291	0,363 0,232	0,283 0,161	0,163 0,083
	0,10	0,083 0,095	0,166 0,183	0,246 0,261	0,320 0,320	0,380 0,351	0,419 0,354	0,434 0,332	0,421 0,290	0,374 0,232	0,292 0,161	0,168 0,083
	0,05	0,083 0,087	0,166 0,171	0,248 0,247	0,324 0,309	0,386 0,344	0,427 0,351	0,443 0,330	0,430 0,289	0,383 0,231	0,302 0,161	0,174 0,083
$\frac{l}{4}$	0,20	0,083 0,115	0,165 0,216	0,243 0,298	0,310 0,349	0,363 0,371	0,396 0,366	0,408 0,339	0,393 0,294	0,349 0,233	0,271 0,162	0,156 0,083
	0,10	0,083 0,107	0,166 0,205	0,245 0,288	0,314 0,343	0,368 0,366	0,403 0,363	0,415 0,338	0,400 0,293	0,355 0,233	0,276 0,162	0,159 0,083
	0,05	0,083 0,100	0,166 0,196	0,246 0,281	0,317 0,337	0,372 0,362	0,408 0,361	0,420 0,336	0,406 0,292	0,360 0,233	0,280 0,162	0,161 0,083
$\frac{l}{5}$	0,20	0,083 0,118	0,165 0,223	0,243 0,306	0,308 0,356	0,360 0,375	0,391 0,369	0,403 0,340	0,387 0,295	0,344 0,232	0,266 0,161	0,153 0,083
	0,10	0,083 0,112	0,166 0,214	0,245 0,299	0,312 0,352	0,363 0,342	0,397 0,367	0,407 0,340	0,392 0,294	0,348 0,233	0,270 0,162	0,156 0,083
	0,05	0,083 0,105	0,166 0,206	0,247 0,295	0,314 0,348	0,367 0,369	0,401 0,365	0,411 0,338	0,397 0,293	0,351 0,234	0,271 0,162	0,156 0,083
$\frac{l}{6}$	0,20	0,083 0,120	0,165 0,228	0,243 0,311	0,307 0,361	0,358 0,378	0,387 0,371	0,400 0,340	0,385 0,296	0,341 0,230	0,263 0,160	0,150 0,083
	0,10	0,083 0,115	0,166 0,220	0,245 0,306	0,311 0,358	0,360 0,359	0,393 0,370	0,402 0,341	0,387 0,294	0,343 0,233	0,266 0,162	0,154 0,083
	0,05	0,083 0,108	0,166 0,213	0,247 0,304	0,312 0,355	0,374 0,374	0,396 0,368	0,405 0,339	0,391 0,293	0,345 0,234	0,265 0,162	0,153 0,083

4. Balken mit einseitiger parabolischer Voute.

Drehwinkel α^a , α^b und β .



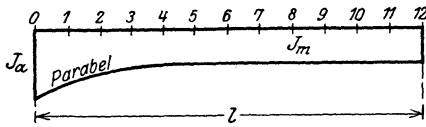
$$E \cdot \alpha^a = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$E \cdot \alpha^b = \frac{l}{2 J_m} \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{mittlere Zahl})$$

$$E \cdot \beta = \frac{l}{6 J_m} \cdot c_3 \quad (c_3 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$												
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
	0,172 0,536 0,309	0,203 0,571 0,349	0,230 0,597 0,380	0,253 0,619 0,407	0,272 0,636 0,430	0,308 0,665 0,469	0,340 0,689 0,501	0,374 0,714 0,536	0,407 0,735 0,566	0,464 0,770 0,617	0,512 0,792 0,657	0,601 0,838 0,741	0,632 0,910 0,881
$\frac{l}{2}$	0,471 0,884 0,740	0,495 0,893 0,758	0,514 0,899 0,771	0,532 0,905 0,783	0,545 0,909 0,792	0,570 0,916 0,808	0,593 0,923 0,821	0,615 0,928 0,834	0,637 0,933 0,846	0,674 0,943 0,866	0,706 0,950 0,886	0,757 0,959 0,905	0,824 0,972 0,933
$\frac{l}{3}$	0,622 0,949 0,871	0,640 0,952 0,880	0,653 0,954 0,887	0,661 0,957 0,893	0,677 0,959 0,898	0,695 0,962 0,905	0,711 0,965 0,912	0,728 0,968 0,918	0,743 0,970 0,925	0,770 0,974 0,935	0,792 0,978 0,942	0,829 0,982 0,953	0,879 0,988 0,968
$\frac{l}{4}$	0,706 0,971 0,924	0,721 0,973 0,930	0,732 0,974 0,934	0,741 0,976 0,937	0,750 0,977 0,940	0,764 0,979 0,945	0,777 0,980 0,949	0,791 0,982 0,953	0,803 0,983 0,956	0,823 0,986 0,962	0,839 0,987 0,966	0,868 0,987 0,973	0,906 0,992 0,981
$\frac{l}{5}$	0,760 0,982 0,950	0,772 0,983 0,954	0,782 0,984 0,956	0,790 0,985 0,959	0,796 0,985 0,961	0,808 0,986 0,964	0,818 0,987 0,966	0,830 0,988 0,969	0,839 0,990 0,971	0,856 0,991 0,975	0,869 0,991 0,978	0,892 0,992 0,982	0,922 0,993 0,987
$\frac{l}{6}$	0,799 0,988 0,964	0,807 0,988 0,967	0,816 0,989 0,969	0,823 0,989 0,970	0,828 0,990 0,972	0,839 0,990 0,974	0,847 0,991 0,976	0,856 0,991 0,978	0,864 0,993 0,980	0,879 0,994 0,982	0,889 0,995 0,985	0,910 0,997 0,987	0,935 0,997 0,991

Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b .



$$k^a = -l \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -l \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_a}$	Last $P = 1$ in										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
l	0,20	0,083 0,098	0,165 0,180	0,243 0,245	0,315 0,292	0,377 0,319	0,424 0,325	0,450 0,312	0,449 0,278	0,412 0,226	0,330 0,159	0,196 0,082
	0,10	0,083 0,082	0,166 0,154	0,246 0,213	0,321 0,259	0,387 0,289	0,442 0,301	0,476 0,294	0,482 0,276	0,449 0,221	0,366 0,158	0,220 0,082
	0,05	0,083 0,069	0,166 0,131	0,247 0,185	0,324 0,230	0,396 0,261	0,455 0,278	0,498 0,276	0,512 0,256	0,436 0,215	0,404 0,156	0,247 0,082
$\frac{l}{2}$	0,20	0,083 0,106	0,165 0,199	0,243 0,274	0,314 0,327	0,372 0,354	0,411 0,356	0,426 0,333	0,413 0,291	0,368 0,232	0,287 0,161	0,165 0,083
	0,10	0,083 0,094	0,166 0,180	0,246 0,254	0,319 0,309	0,381 0,342	0,424 0,348	0,441 0,329	0,429 0,288	0,383 0,231	0,299 0,161	0,173 0,083
	0,05	0,083 0,085	0,166 0,164	0,247 0,236	0,323 0,294	0,389 0,330	0,435 0,340	0,455 0,344	0,444 0,286	0,397 0,230	0,311 0,161	0,180 0,083
$\frac{l}{3}$	0,20	0,083 0,117	0,165 0,219	0,242 0,299	0,308 0,349	0,362 0,371	0,395 0,366	0,407 0,339	0,392 0,294	0,348 0,233	0,271 0,162	0,155 0,083
	0,10	0,083 0,109	0,166 0,207	0,244 0,288	0,313 0,342	0,367 0,366	0,402 0,366	0,415 0,338	0,400 0,292	0,356 0,233	0,276 0,162	0,159 0,083
	0,05	0,083 0,101	0,166 0,197	0,246 0,278	0,316 0,333	0,372 0,360	0,408 0,360	0,421 0,336	0,407 0,291	0,362 0,232	0,282 0,162	0,162 0,083
$\frac{l}{4}$	0,20	0,083 0,125	0,165 0,232	0,240 0,311	0,305 0,359	0,355 0,377	0,388 0,370	0,398 0,342	0,384 0,295	0,340 0,234	0,264 0,162	0,152 0,083
	0,10	0,083 0,118	0,165 0,224	0,242 0,305	0,308 0,354	0,359 0,374	0,392 0,368	0,403 0,341	0,388 0,294	0,344 0,234	0,267 0,162	0,154 0,083
	0,05	0,083 0,113	0,166 0,217	0,243 0,300	0,310 0,351	0,362 0,372	0,396 0,367	0,407 0,340	0,392 0,294	0,348 0,233	0,270 0,162	0,156 0,083

Ordinaten der Einflußlinien für die Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b (Fortsetzung).

Voutenlänge	$n = \frac{J_m}{J_a}$	Last $P = 1$ in										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{l}{5}$	0,20	0,083 0,128	0,165 0,237	0,240 0,316	0,304 0,363	0,352 0,379	0,385 0,371	0,395 0,343	0,381 0,295	0,337 0,234	0,261 0,162	0,152 0,083
	0,10	0,083 0,122	0,165 0,231	0,241 0,312	0,306 0,359	0,356 0,377	0,388 0,369	0,398 0,342	0,383 0,295	0,339 0,234	0,263 0,162	0,157 0,083
	0,05	0,083 0,118	0,166 0,225	0,242 0,309	0,308 0,358	0,358 0,377	0,391 0,370	0,402 0,342	0,386 0,295	0,343 0,233	0,265 0,162	0,154 0,083
6	0,20	0,083 0,130	0,165 0,240	0,240 0,319	0,304 0,366	0,350 0,380	0,382 0,371	0,393 0,343	0,279 0,295	0,335 0,234	0,259 0,162	0,152 0,083
	0,10	0,083 0,125	0,165 0,236	0,241 0,317	0,305 0,362	0,354 0,379	0,385 0,369	0,395 0,342	0,380 0,295	0,336 0,234	0,260 0,162	0,159 0,083
	0,05	0,083 0,121	0,166 0,230	0,242 0,315	0,307 0,363	0,355 0,380	0,388 0,372	0,399 0,343	0,382 0,295	0,340 0,233	0,262 0,162	0,153 0,083

5. Sonderfall: Gleichmäßig verteilte Belastung der unter 1. bis 4. behandelten Balken.

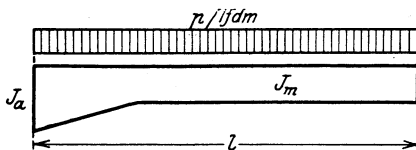
Wie in Kap. V, 2, c) auf Seite 94 erwähnt, sind für einen beliebigen symmetrischen Balken, also auch für die unter 1. und 2. behandelten Balken, für gleichmäßig verteilte Belastung auf der ganzen Länge die Kreuzlinienabschnitte:

$$k^a = k^b = -\frac{p l^2}{4} = -2f,$$

d. h. genau gleich groß wie wenn das Trägheitsmoment auf die ganze Balkenlänge konstant wäre.

Für die unter 3. und 4. behandelten Balken mit einseitiger Voute sind die Werte der Kreuzlinienabschnitte k^a und k^b in nachstehenden beiden Tabellen zusammengestellt, damit man die unter 3. und 4. angegebenen Einflußlinien der Kreuzlinienabschnitte für diesen häufig vorkommenden Belastungsfall nicht auszuwerten braucht.

a) Balken mit einseitiger gerader Voute.

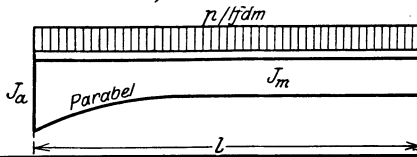


$$k^a = -p l^2 \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -p l^2 \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$												
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
l	0,344 0,157	0,335 0,166	0,328 0,172	0,323 0,177	0,318 0,182	0,311 0,189	0,306 0,194	0,304 0,196	0,297 0,197	0,289 0,203	0,285 0,215	0,278 0,222	0,269 0,231
$\frac{l}{2}$	0,318 0,182	0,313 0,187	0,310 0,190	0,308 0,193	0,305 0,195	0,301 0,199	0,298 0,203	0,294 0,206	0,291 0,209	0,286 0,215	0,281 0,219	0,275 0,225	0,268 0,233
$\frac{l}{3}$	0,287 0,213	0,285 0,215	0,283 0,217	0,282 0,218	0,281 0,219	0,279 0,221	0,277 0,223	0,275 0,225	0,274 0,227	0,271 0,229	0,269 0,231	0,265 0,235	0,260 0,239
$\frac{l}{4}$	0,273 0,227	0,272 0,228	0,271 0,229	0,270 0,230	0,270 0,231	0,269 0,232	0,267 0,233	0,265 0,234	0,265 0,235	0,263 0,237	0,262 0,238	0,260 0,241	0,257 0,243
$\frac{l}{5}$	0,266 0,234	0,265 0,235	0,265 0,236	0,264 0,237	0,263 0,237	0,263 0,238	0,262 0,238	0,261 0,239	0,260 0,240	0,259 0,241	0,258 0,242	0,257 0,243	0,255 0,245
$\frac{l}{6}$	0,260 0,239	0,260 0,240	0,260 0,240	0,260 0,240	0,259 0,241	0,259 0,241	0,259 0,241	0,258 0,242	0,257 0,243	0,256 0,244	0,255 0,245	0,255 0,245	0,254 0,246

b) Balken mit einseitiger parabolischer Voute.



$$k^a = -p l^2 \cdot c_1 \quad (c_1 = \text{obere Zahl})$$

$$k^b = -p l^2 \cdot c_2 \quad (c_2 = \text{untere Zahl})$$

Voutenlänge	Werte von $n = \frac{J_m}{J_a}$												
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50
l	0,338 0,160	0,332 0,168	0,326 0,174	0,321 0,179	0,317 0,183	0,310 0,189	0,306 0,195	0,301 0,200	0,296 0,204	0,289 0,211	0,285 0,216	0,277 0,223	0,267 0,233
$\frac{l}{2}$	0,296 0,204	0,293 0,208	0,290 0,210	0,288 0,212	0,286 0,214	0,283 0,217	0,281 0,220	0,278 0,222	0,276 0,224	0,273 0,228	0,270 0,230	0,266 0,234	0,261 0,239
$\frac{l}{3}$	0,275 0,225	0,273 0,227	0,272 0,228	0,270 0,229	0,269 0,230	0,268 0,232	0,267 0,233	0,265 0,234	0,265 0,235	0,263 0,237	0,261 0,239	0,259 0,241	0,256 0,244
$\frac{l}{4}$	0,266 0,235	0,264 0,236	0,263 0,237	0,263 0,237	0,262 0,238	0,261 0,239	0,261 0,240	0,260 0,240	0,259 0,241	0,258 0,242	0,257 0,243	0,255 0,245	0,254 0,246
$\frac{l}{5}$	0,261 0,239	0,260 0,240	0,259 0,241	0,259 0,241	0,258 0,242	0,258 0,242	0,257 0,243	0,257 0,243	0,256 0,244	0,255 0,245	0,255 0,245	0,254 0,246	0,253 0,246
$\frac{l}{6}$	0,258 0,242	0,257 0,243	0,256 0,244	0,256 0,244	0,256 0,245	0,256 0,245	0,255 0,245	0,255 0,245	0,254 0,246	0,254 0,246	0,254 0,246	0,254 0,246	0,253 0,246

6. Der symmetrische Parabelbogen mit vom Scheitel zu den Kämpfern zunehmendem Trägheitsmoment.

Nachstehenden Tabellen liegt eine Zunahme des Trägheitsmomentes vom Scheitel zu den Kämpfern nach dem Gesetz von Dr.-Ing. Max Ritter¹⁾:

$$\frac{J_s}{J_x \cdot \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \left(1 - \frac{x}{l/2}\right)^2$$

zugrunde, worin

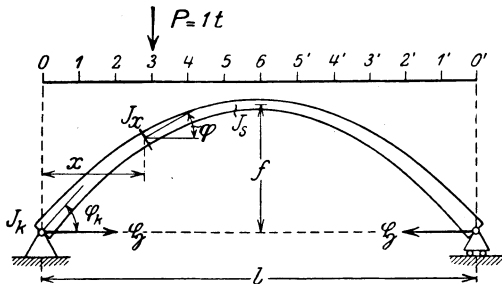
hierin bedeuten:

$$n = \frac{J_s}{J_k \cdot \cos \varphi_k};$$

J_s das Trägheitsmoment am Scheitel,

J_k das Trägheitsmoment an den Kämpfern,

φ_k der Neigungswinkel der Bogenachse an den Kämpfern.



Drehwinkel $\bar{\alpha}$ und β sowie Bogenschub B .

n	$E \cdot \bar{\alpha}$	$E \beta$	B
0,1	0,0285	-0,0241	1,1762
0,2	0,0347	-0,0260	1,1855
0,3	0,0409	-0,0279	1,1944
0,4	0,0471	-0,0298	1,2031
0,5	0,0532	-0,0317	1,2115
0,6	0,0593	-0,0337	1,2197
0,8	0,0714	-0,0377	1,2353
1,0	0,0833	-0,0417	1,2500
$\frac{l}{J_s}$	$\frac{l}{J_s}$	$\frac{l}{J_s}$	$\frac{1}{f}$

a) Senkrechte wandernde Einzellast. Ordinaten der Einflußlinie für den Bogenschub \bar{B} .

n	Last $P = 1$ in					
	1	2	3	4	5	6
0,1	0,0487	0,0960	0,1378	0,1709	0,1925	0,1954
0,2	0,0490	0,0964	0,1379	0,1708	0,1920	0,1963
0,3	0,0494	0,0967	0,1381	0,1706	0,1916	0,1973
0,4	0,0498	0,0971	0,1383	0,1705	0,1911	0,1978
0,5	0,0500	0,0974	0,1386	0,1703	0,1907	0,1983
0,6	0,0503	0,0978	0,1387	0,1702	0,1903	0,1989
0,8	0,0508	0,0984	0,1389	0,1699	0,1895	0,1994
1,0	0,0514	0,0990	0,1391	0,1697	0,1888	0,2000

¹ Vgl. Dr.-Ing. Max Ritter: Beiträge zur Theorie der vollständigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk.

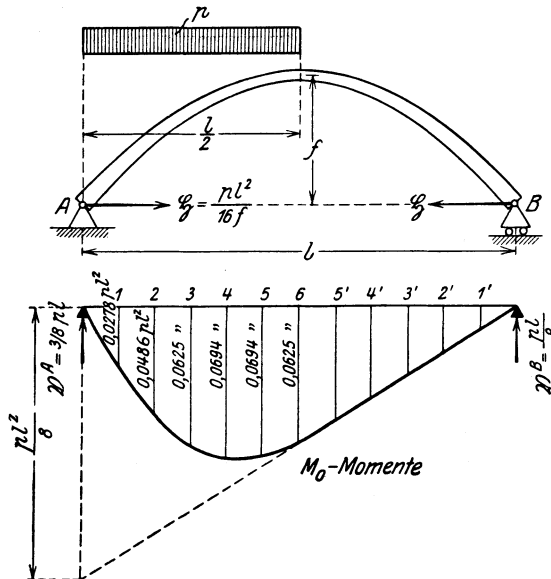
Ordinaten der Einflußlinien für Schlußliniensenkungen S^a und S^b .

$S^a = a \cdot$ obere Zahl } worin die Festpunktabstände a und b mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.
 $S^b = b \cdot$ untere Zahl }

n	Last P = 1 in										
	1	2	3	4	5	6	5'	4'	3'	2'	1'
0,1	+0,1569 -0,0821	+0,2371 -0,1533	+0,2329 -0,1995	+0,1602 -0,1986	+0,0504 -0,1521	-0,0631 -0,0631	-0,1521 +0,0504	-0,1986 +0,1602	-0,1995 +0,2329	-0,1533 +0,2371	-0,0821 +0,1569
0,2	+0,1606 -0,0818	+0,2363 -0,1516	+0,2276 -0,1936	+0,1540 -0,1947	+0,0464 -0,1495	-0,0635 -0,0635	-0,1495 +0,0464	-0,1947 +0,1540	-0,1936 +0,2276	-0,1516 +0,2363	-0,0818 +0,1606
0,3	+0,1637 -0,0815	+0,2354 -0,1502	+0,2229 -0,1906	+0,1485 -0,1911	+0,0430 -0,1470	-0,0637 -0,0637	-0,1470 +0,0430	-0,1911 +0,1485	-0,1906 +0,2229	-0,1502 +0,2354	-0,0815 +0,1637
0,4	+0,1663 -0,0813	+0,2344 -0,1487	+0,2186 -0,1879	+0,1437 -0,1878	+0,0400 -0,1452	-0,0638 -0,0638	-0,1452 +0,0400	-0,1878 +0,1437	-0,1879 +0,2186	-0,1487 +0,2344	-0,0813 +0,1663
0,5	+0,1684 -0,0810	+0,2334 -0,1475	+0,2147 -0,1854	+0,1394 -0,1848	+0,0375 -0,1425	-0,0637 -0,0637	-0,1425 +0,0375	-0,1848 +0,1394	-0,1854 +0,2147	-0,1475 +0,2334	-0,0810 +0,1684
0,6	+0,1702 -0,0808	+0,2323 -0,1464	+0,2111 -0,1832	+0,1356 -0,1817	+0,0352 -0,1405	-0,0636 -0,0636	-0,1405 +0,0352	-0,1817 +0,1356	-0,1832 +0,2111	-0,1464 +0,2323	-0,0808 +0,1702
0,8	+0,1727 -0,0804	+0,2300 -0,1444	+0,2047 -0,1792	+0,1290 -0,1771	+0,0316 -0,1367	-0,0632 -0,0632	-0,1367 +0,0316	-0,1771 +0,1290	-0,1792 +0,2047	-0,1444 +0,2300	-0,0804 +0,1727
1,0	+0,1745 -0,0801	+0,2278 -0,1428	+0,1992 -0,1758	+0,1235 -0,1728	+0,0237 -0,1333	-0,0625 -0,0625	-0,1333 +0,0237	-0,1728 +0,1235	-0,1758 +0,1992	-0,1428 +0,2278	-0,0801 +0,1745

b) Senkrechte, auf der Bogenhälfte gleichmäßig verteilte Belastung p/l fdm.

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	
ϕ	für alle Werte von $n: \phi = \frac{p l^2}{16 j}$								
S^a	+0,0692	+0,0682	+0,0670	+0,0664	+0,0657	+0,0649	+0,0636	+0,0625	.apl } a und b mit Vor-
S^b	-0,0692	-0,0682	-0,0670	-0,0664	-0,0657	-0,0649	-0,0636	-0,0625	.bpl } zeichen einsetzen



c) Senkrechte, auf dem ganzen Bogen gleichmäßig verteilte Belastung.

$$\xi = \frac{p l^2}{8 f} \text{ (unabhängig von } n),$$

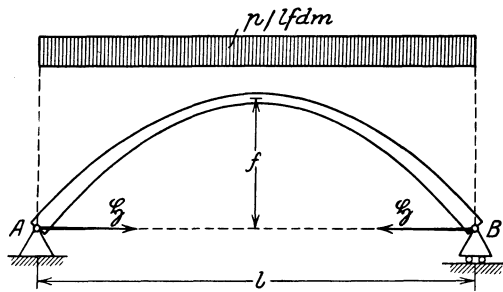
$$S^a = S^b = 0,$$

da bei Parabelform des Bogens und gleichmäßig verteilter Belastung:

$$M_0 - \xi \cdot y = 0 \text{ [vgl. Gl. (478)]}$$

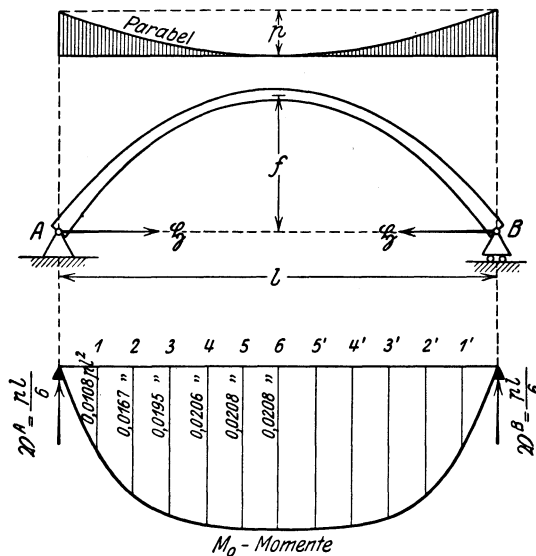
und damit

$$\varphi = 0.$$



d) Senkrechte, symmetrische, parabelförmige Belastung.

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	
ξ	0,0307	0,0304	0,0300	0,0296	0,0293	0,0289	0,0283	0,0277	$\frac{p l^2}{f}$
S^a	0,0083	0,0086	0,0088	0,0090	0,0091	0,0093	0,0094	0,0095	$\cdot a p l$ } a und b mit Vor-
S^b	0,0083	0,0086	0,0088	0,0090	0,0091	0,0093	0,0094	0,0095	$\cdot b p l$ } zeichen einsetzen



e) Waagrechte, gleichmäßig verteilte Belastung (Wind).

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	
δ	0,3689	0,3643	0,3598	0,3555	0,3513	0,3472	0,3394	0,3320	$\cdot w f$
S^a	+0,6117	+0,6164	+0,6177	+0,6184	+0,6185	+0,6184	+0,6167	+0,6143	$\cdot \frac{a}{l} w f^2$
S^b	-0,4152	-0,4105	-0,4064	-0,4026	-0,3992	-0,3960	-0,3905	-0,3857	$\cdot \frac{b}{l} w f^2$

} a und b mit Vorzeichen einsetzen

