WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

XXV

ÜBER DEN BILDUNGSWERT DER MATHEMATIK

EIN BEITRAG ZUR PHILOSOPHISCHEN PÄDAGOGIK

VON

DR. WILHELM BIRKEMEIER

1923

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

XXV

ÜBER DEN BILDUNGSWERT DER MATHEMATIK

EIN BEITRAG ZUR PHILOSOPHISCHEN PÄDAGOGIK

VON

DR. WILHELM BIRKEMEIER

1923
SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

ISBN 978-3-663-15226-2 ISBN 978-3-663-15789-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-15789-2

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1923

MEINEN ELTERN

IN LIEBE

Vorwort.

Die letzten Jahre haben eine Fülle von Vorschlägen zur Reform des Unterrichtes, im besonderen auch zur Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes aller Schulgattungen gebracht. Die nachfolgende Untersuchung über den Bildungswert der Mathematik will nicht unmittelbar in den Streit der Tagesmeinungen eingreifen; sie erstrebt auch weder eine ausgeführte Philosophie der Mathematik, noch eine spezielle Didaktik des mathematischen Unterrichtes; sie will vielmehr nur einen Beitrag zur philosophischen Pädagogik liefern und sieht ihren Zweck erfüllt, wenn es ihr gelingt, den Leser auf einen höheren philosophischen Standpunkt zu führen, der ihn erkennen läßt, daß alle einzelnen Probleme des mathematischen Unterrichtes in mannigfacher Verschlingung miteinander und mit den Grundproblemen der Bildung überhaupt stehen, so daß eine Entscheidung über Einzelfragen nicht möglich ist ohne Rückgang auf die grundlegenden Prinzipien.

Wie ich manchen positiven und negativen Anstoß in Schrift und Wort fand, hoffe ich auch dem Leser, der über die Einzelheiten der Darstellung hinweg bis zu den leitenden Gesichtspunkten vordringt, solche Anregung geben zu können. Ganz besonders danke ich Herrn Professor Dr. Spranger und Herrn Professor Dr. Bieberbach für das am Werden und Gedeihen dieser Arbeit bewiesene Interesse.

Berlin, den 14. Juni 1922.

Wilhelm Birkemeier.

Inhalt.

Einleitung: Über Bildung, Bildungswert, Bildsamkeit im allgemeinen.

A. Vom Wesen der mathematischen Erkenntnis.

B. Vom Bildungswert der Mathematik.

Einleitung[1]): Bildung, Bildungswert, Bildsamkeit.

Eine Untersuchung, die von der Bildung als einem ausgezeichneten Punkte ihres Bereiches redet, wird zunächst versuchen müssen, den schon infolge so mannigfacher Anwendung auf allen Wissensgebieten mit Unsicherheit und Unbestimmtheit behafteten Begriff der Bildung für ihre Zwecke hinreichend zu klären.

Im Bildungsprozeß flutet das volle Leben der menschlichen Persönlichkeit; biologisch betrachtet erscheint er als veredelter Entwicklungsvorgang. Nur in der Abstraktion läßt sich das Ziel dieser Entwicklung als Bildungsideal scharf dem Bildungsvorgang selbst gegenüberstellen. Die Anerkennung des normativen Charakters des Bildungszieles, die Setzung des Bildungsideales, führt uns aus der Sphäre bloßer Seinserkenntnis hinaus in die Welt der Normen, der Sollensgesetzlichkeit. Die Kulturphilosophie hat eine eindeutige Ordnung der Werte noch nicht aufstellen können; bis dahin hängt die Bestimmung eines Bildungsideales ab von der Weite des geistigen Blickes, von der Tiefe der Welt- und Lebensauffassung und der sich darin offenbarenden „Wertrichtung" seines Vertreters.[2]

---

[1] Unsere einleitenden Bemerkungen sollen vor allem dazu dienen, gewisse vieldeutige Termini in ihrem Sinngehalt fester zu umgrenzen; dabei gewinnen wir zugleich einige für die weiteren Ausführungen notwendige Gesichtspunkte.

[2] G. Lipps: Weltanschauung und Bildungsideal. Leipzig 1911; dazu E. Spranger: Das humanistische und das politische Bildungsideal ... Ber-

Bildung. Bildung als Vorgang und Kulturschaffen hängen eng zusammen; daher ist auch das Wesen der Bildung nur in tiefer kulturphilosophischer Besinnung voll zu erfassen. Während unsere kulturschaffende Tätigkeit darin besteht, daß wir erlebte Werte der physischen Welt gleichsam aufprägen, so daß sie in dieser transsubjektiven Gestalt als reale Gebilde der Kultur, als Kulturgüter räumlich und zeitlich bestimmt vor uns stehen, so besteht der Prozeß der Bildung, der Selbstbildung wie der Fremdbildung — so scheint es zunächst — im wesentlichen darin, daß objektivierte Werte in uns bestimmte Erlebnisse auslösen und damit die „Struktur unserer Persönlichkeit" beeinflussen. Tatsächlich läßt sich jede unserer Verhaltungsweisen von zwei Gesichtspunkten aus betrachten: als Erlebnisvorgang und als kulturschaffende Tätigkeit; nur die Abstraktion, die Theorie, hebt die folgende Akzentverschiebung hervor: sie betont im Kulturschaffen die Objektivation des Wertes als das Wesentliche, als das Unerläßliche; im Erlebnisvorgang dagegen die Subjektivation des Wertes und die dadurch bedingte Änderung der Struktur der Persönlichkeit. Echte Bildung besteht aber nicht nur in der Aufnahme objektiver Werte in den Erlebniszusammenhang, sondern sie umfaßt zugleich die tatkräftige Gestaltung solcher Werte, die nicht minder formend auf die Struktur der Persönlichkeit wirkt.

Wenn so das Wesen echter Bildung schon oberhalb des Gegensatzes von Werterleben und Wertschaffen liegt, so werden auch die wesentlichen Merkmale, die wir im Begriff der Bildung zusammenfassen, hier, d. h. in der Wertung selbst zu suchen sein. Wir werten aber schlechthin alles oder können doch wenigstens alles werten, worauf wir intentional gerichtet sind. Die Weise, wie wir uns in diesem oder jenem Erlebnis sinnvoll auf den Gegenstand beziehen, begründet verschiedene Arten der Wertung bzw. verschiedene Wertklassen.

lin 1916. Ders.: Fünfundzwanzig Jahre deutscher Erziehungspolitik. 2. Aufl. Berlin 1919.

Wir heben sechs solcher Wertklassen heraus: die theoretischen, ästhetischen, ökonomischen, sozialen, politischen, religiösen Werte.

Sehen wir zunächst von den hierdurch angedeuteten Unterschieden der einzelnen Wertungen ab, so liegt das Charakteristische jeder einzelnen Wertung darin, daß sich auf einen Akt des „den-Gegenstand-Meinens", d. h. auf einen intentionalen Akt, ein Akt sui generis aufbaut, in welchem die Beziehung des Gegenstandes zum Subjekt erlebt, d. h. gewertet wird. Diesen Akt nennen wir die Wertung. In der Wertung ist also der Gegenstand nicht selbst oder an sich gemeint, wie er ist oder erscheint, d. h. in seiner theoretischen, ästhetischen usw. Eigengesetzlichkeit, sondern eben seine Wertbeziehung zum erlebenden Subjekt.

Auf primitiven Entwicklungsstufen sind Wertsubjekt und Wertobjekt kaum bewußt und deutlich geschieden; im höher entfalteten Geistesleben aber wird der Gegenstand nicht nur psychophysisch ergriffen, sondern zugleich in ganz bestimmtem Sinn, d. h. theoretisch, ästhetisch, ökonomisch usw. erfaßt und begriffen. Damit streift aber zugleich das Subjekt den Charakter eines biologischen, triebhaft agierenden und reagierenden Wesens ab; es wird zum geistigen Ich, das bewußt den Gegenstand auf einen überindividuellen, von empirischen Ichbestandteilen gereinigten Maßstab bezieht; d. h. der Gegenstand, z. B. eine Aussage oder ein Kunstwerk, wird gemessen am Wahrheitskriterium oder am Gesetz der Form.

Mit zunehmender Entfaltung des geistigen Lebens erfährt also sowohl das Objekt wie das Subjekt der Wertung eine Wandlung. Suchen wir diesen Sachverhalt in mathematischem Bilde festzuhalten, so können wir sagen: die Wertung ist gleichsam eine lebendige Funktion zweier Variablen oder symbolisch: $W = f(o, s)$. Denn in jedem Werterlebnis (W) steckt einerseits ein objektiver Gehalt (o), (der sich ändert von der Erfassung des Gegenstandes als eines geistig noch ungeformten bis zur deutlichen Heraushebung seines wesenhaften Gehaltes) und andererseits auch ein ganz bestimmter subjektiver Gehalt (*s*), (der variiert von den Formen des biologisch agierenden und reagierenden Subjektes bis hinauf zu der rationalen Deutlichkeit der Erkenntnishaltung, der klaren ästhetischen Einstellung usw.).

Durch diese Veränderlichkeit des subjektiven und objektiven Faktors der Wertung wird nicht allein die Schattierung und Färbung des Werterlebnisses in bestimmter Weise bedingt, sondern vor allem auch in doppeltem Sinne der Gültigkeitsanspruch der Wertung beeinflußt; denn Werte wollen in subjektiver und objektiver Hinsicht gelten. Mit der Klärung und Steigerung des objektiven Gehaltes wächst einerseits die objektive Geltung der Wertung von der bloß singulären (nur für diesen hic et nunc gegebenen oder erscheinenden Gegenstand gemeinten) bis zur objektiv allgemeingültigen Wertung, (die fundiert ist in dem rein sachlichen Gehalt des Gegenstandes), andererseits steigt mit zunehmender Klärung des theoretischen, ästhetischen usw. Maßstabes die subjektive Geltung der Wertung von der bloß individuellen (für das wertende biologische Ich allein geltenden) bis zur allgemeinen Gültigkeit schlechthin, (deren Maßstab die von allem Empirischen gereinigte „Idee" ist).

Das Subjekt kann gegenüber jedem beliebigen Gegenstand — gerechtfertigt oder nicht — jede der sechs möglichen Einstellungen bzw. Werthaltungen einnehmen. Wir sprechen von adäquater Wertung, wenn das Subjekt als Grundlage der Wertung wissenschaftlicher, ästhetischer usw. Gegenstände die entsprechende (homogene) theoretische, ästhetische usw. Geisteshaltung gewählt hat. Wird aber einem bestimmten Gegenstande gegenüber eine heterogene Einstellung eingenommen, wird also z. B. eine wissenschaftliche Abhandlung ästhetisch betrachtet und gewertet, so sprechen wir von inadäquater Wertung.

Das sich entwickelnde Geistesleben strebt nach adäquater Wertung, weil nur in ihr der volle Wertgehalt des Gegenstandes ausgeschöpft werden kann. Die realen Kulturgüter sind nun nicht nur Träger von rein theoretischen oder rein ästhetischen oder rein ökonomischen Werten. Vielmehr gehören sie zugleich mehreren Wertklassen an und erheben deshalb den Anspruch, von diesen verschiedenen Gesichtspunkten aus gewertet zu werden. Dazu genügt es aber nicht, daß vom Subjekt in beliebigem Nacheinander die theoretischen, ästhetischen usw. Einstellungen eingenommen werden; vielmehr müssen sich die theoretischen, ästhetischen usw. Akte in einer von dem Gegenstand bedingten, ganz bestimmten Aufeinanderfolge im komplexen Werterlebnis übereinanderschichten; eben weil das Kulturgut nicht ein Chaos, sondern ein Kosmos, eine Hierarchie von Werten ist. Bei dem Versuch, die geforderte eigenartige Verbindung oder Schichtung der Akte zu vollziehen, erlebt das Subjekt sein Können und die dehnbaren Grenzen seiner Leistungsfähigkeit. Hier wurzelt also das Erlebnis der Bildsamkeit, welches die unerläßliche Grundlage für den Durchbruch des Sollenserlebnisses (der Selbstverpflichtung zu normgemäßer Wertung) ist. Dieses Sollenserlebnis wird nun treibendes Motiv für die bewußte Entfaltung der sittlichen Persönlichkeit.[3] Das ethische Subjekt fühlt die Verpflichtung zu adäquater Wertung um so dringender, je schwieriger sich die Ausschöpfung des objektiven Gehaltes und die Innehaltung der homogenen Einstellung gestaltet.

Fraglos hängt nun sowohl die Erreichung des maximalen objektiven Gehaltes der Wertung wie auch die Fähigkeit zu adäquater, klarer Einstellung von der Höhe der geistigen Gesamtentwicklung ab.

Im Streben nach normgemäßer Wertung, das sich offenbart im tatkräftigen Gestalten und adäquaten Erleben objektiver Werte, liegt also für uns der Kern echter Bildung. Und das Erlebnis der autonomen Verpflichtung zu diesem Ziel ist höchstes und tiefstes Bildungserlebnis; es kann in for-

[3] In jenem Sollenserlebnis liegt für mich das wesenhafte, primäre Merkmal echter Bildung.

maler Hinsicht nicht überboten werden. Alles tatkräftige Ringen mit dem Leben kann nur die Gewißheit geben, daß wir auf dem Wege der asymptotischen Annäherung zu jenem Ziele sind und die befreiende Erkenntnis auslösen: Wer immer strebend sich bemüht, den können wir erlösen.

Fassen wir diese Erörterungen zusammen, so können wir als Bildung bezeichnen: diejenige Beschaffenheit der geistig-seelischen Energien, durch die das Individuum fähig wird, Kultursinn und Kulturwerte adäquat zu erleben und normgemäß zu gestalten.

Sicherlich aber nennen wir noch niemanden im betonten Sinne gebildet, der nur in einer ganz bestimmten Richtung die Kräfte seines Werterlebens und Wertgestaltens entfaltet hat oder nur in oberflächlicher Hingabe diesem oder jenem Gebiete sich zuwendet. Vielmehr liegen in Umfang und Tiefe des Werterlebens und Wertgestaltens wichtige, wenngleich sekundäre Merkmale echter Bildung. Bildung ist zunächst nichts anderes als allseitige Hebung und Differenzierung des Werterlebens und Wertbewußtseins; sie beruht auf der Entfaltung aller Seelenkräfte. Darum müssen alle Grundfunktionen einmal einen Gegenstand lustvoller Betätigung gefunden haben. Während Kulturarbeit auch in einer ganz spezialisierten Leistung bestehen kann, ist „der Bildung nichts mehr entgegengesetzt, als jede Einseitigkeit, jede bloße Routine und Spezialisierung“.[4]

Bildung entsteht also auch nicht durch bloße Aufnahme von Kenntnissen, von Wissensstoffen; Bildung ist mehr als bloße Unterrichtetheit, selbst mehr als Gelehrtheit; „bloßes Wissen kann totes Kapital sein; Bildung ist werbendes und wachsendes Kapital“.[5] Bildung ist, sofern ihr Stoff der Wissenschaft entstammt, immer „beseelte Wissenschaft, in der hinter dem Erkenntnistrieb etwas wirksam wird, was sich mit

---

[4] E. Spranger: Gedanken über Lehrerbildung. Leipzig 1920. S. 5.
[5] A. a. O. S. 3.

dem künstlerischen Formtriebe vergleichen läßt. Nur daß diese Form . . . nicht eine feste und geronnene ist, sondern eine Form, die ‚lebend sich entwickelt' ".[5]

So wenig Wissen allein schon Bildung bedeutet, so wenig kennzeichnet technische Geschicklichkeit oder künstlerisches Genießen und Schaffen allein die wahre Bildung. Vielmehr kann und muß alles Erleben und Schaffen zu einer Seite der Bildung werden. Echte Bildung strebt immer nach Überwindung des Spezialismus, nach Ausweitung der Persönlichkeit. Jede unnatürliche Einengung in eine jener Wertrichtungen hemmt die Befriedigung des nie gestillten Wertbedürfnisses des geistigen Menschen, der sich immer mehr objektive Werte zu vermählen und eine immer größere Fülle und Mannigfaltigkeit zu geben sucht[5], und mindert damit die Freude an dem, was man ist und was man kann.[4]

Durch die unendliche Fülle der Kulturgüter droht dem Bildungstrieb das gestaltlose Zerfließen in unfruchtbaren Universalismus und Enzyklopädismus. Echte Bildung aber meistert die auseinanderstrebenden Tendenzen in der Totalität der Persönlichkeit.[6] Es kann keine Bildung geben, die nicht beides vereint: die Vielseitigkeit des Umblicks und die Sicherheit der individuellen Bestimmung.[7] Da nun das Zentrum der Persönlichkeit in irgendeinem der Kulturgebiete liegen muß, gibt es auch so viele Hauptformen echter Bildung wie Arten menschlicher Werte. Aber immer ist Bildung wertvolles Menschentum, oder mit einem Fremdwort: Bildung ist Humanität.[7] Denn um dieses Zentrum der Persönlichkeit lagert sich in harmonischer Ordnung die Fülle der Werte aller Kulturgebiete.

Bildung ist ferner nie etwas Abgeschlossenes; sie zieht vielmehr immer neue Stoffe in sich hinein, die sich nach

---

[6] A. a. O. S. 4.

[7] E. Spranger: Allgemeinbildung und Berufsschule. In „Die deutsche Fortbildungsschule". 29. Jahrg. 1920. S. 313.

einem Gesetz organischen Wachstums in gleichsam immer neuen Jahresringen um den Mittelpunkt der Persönlichkeit lagern.

Wie ferner die Lebenslagen der Menschen verschieden sind, so auch das, was für sie (in jenem sekundären Sinne) Bildung bedeutet. Sie umfaßt aus dem unendlichen Reich kultureller Werte dann gleichsam nur einen Ausschnitt, nämlich gerade diejenigen Werte, die mit dieser Lebenstotalität die innigste Verflechtung eingehen können. So ist Bildung geradezu die Gestalt und Form des in seinem Kreise vollendeten Menschen; sie zeigt sich untrüglich in dem heißen Streben, in den Grenzen der eigenen Leistungsfähigkeit und des sozialethisch Geforderten immer das Höchste zu sein, was man sein kann und sein soll.[8]

Mit vollem Recht definiert daher E. Spranger Bildung (als individuellen Besitz): „Sie ist die lebendig wachsende Aufnahme aller objektiven Werte, die zu der Anlage und dem Lebenskreise eines sich entwickelnden Geistes in Beziehung gesetzt werden können, in das Erleben, die Gesinnung und die Schaffenskräfte dieses Menschen, mit dem Ziel einer geschlossenen, objektiv leistungsfähigen und sich selbst lustvoll genießenden Persönlichkeit.“[9]

Bildungswert. Es gibt wohl kaum einen Gegenstand (im erkenntnistheoretischen Sinne), der nicht für irgendeinen Menschen irgend einmal Wert haben könnte; trotzdem fällt nur eine kleine Anzahl aller Wertgegenstände unter den Begriff des Bildungswertes. Denn Bildungswert haben heißt: Wert für die Bildung haben, für die Entfaltung des werterlebenden und wertschaffenden Bewußtseins. Also hängt der Bildungswert eines Gegenstandes nicht allein von der Wertklasse ab, der er sich eingliedert, sondern zugleich von seiner Bedeutung für die Entwicklung des geistigen Menschen. „Die Auslese der Bildungswerte aus den Werten überhaupt erfolgt

[8] E. Spranger: Lebensformen. 2. Aufl. 1921. S. 316.

[9] Ders.: Gedanken. S. 6.

also nach Maßgabe ihrer Bedeutung für die geistige Entwicklung des werdenden Subjektes."[10]

Ein zweiter Gesichtspunkt, nach dem aus der reichen Fülle solcher für die Entfaltung geistiger Kräfte brauchbaren Kulturwerte eine noch engere Auswahl getroffen wird, liegt in dem Prinzip der Lebensnähe oder Individuallage, das auf das engste mit dem Interessenkreise des werdenden Menschen zusammenhängt. „Nur was einem innern Bedürfnisse — nicht bloß einem vorübergehenden Reize — entgegenkommt, was entweder selbst ein Zweck ist, nach dem es uns treibt, oder was als ein notwendiges Mittel zur Erreichung eines Zweckes erscheint, das erweckt dauerndes Interesse."[11] Selbstbetätigung und Schaffensfreude sind die beiden subjektiven psychologischen Kriterien für den Bildungswert, den ein Gegenstand entfalten kann. „Für den einzelnen, ich wiederhole es, hat den größten Bildungswert die Beschäftigung mit dem, wozu ihn Lust und Liebe ziehen. Das kleinste Stück in spontaner Arbeit erworbener Einsicht, es mag sein auf welchem Gebiet es will, bedeutet für die Bildung des inneren Menschen, für die Entwicklung der geistigen Kräfte mehr als eine ganze Last positiven Wissens, das einem widerwillig durch alle Wissenschaften Gehetzten aufgeladen ist. Ein Universalismus in diesem Sinne, der die freie Betätigung nach individueller Neigung erdrückt, ist der Tod wahrer Bildung."[12]

Entsprechend der Ordnung der Werte in verschiedene Klassen, die den „Hauptrichtungen der menschlichen Kräfte, ihres Wertschaffens und Werterlebens entsprechen"[13], können wir auch die Mannigfaltigkeit der Bildungswerte gruppieren; so unterscheiden wir: intellektuelle oder wissen-

[10] A. a. O. S. 6—7.

[11] G. Kerschensteiner: Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Leipzig 1914. S. 115.

[12] Fr. Paulsen: Das moderne Bildungswesen. In „Die Kultur der Gegenwart" I 1. 1912. S. 63.

[13] E. Spranger: Gedanken. S. 7—19.

schaftliche, technisch-ökonomische, gesellschaftliche und politische, ästhetische und religiöse Bildungswerte. Intellektueller, technischer, ästhetischer usw. Bildungswert kommt also solchen Kulturwerten zu, die geeignet sind, die wissenschaftliche, technische, künstlerische Leistungsfähigkeit des Menschen zu erhöhen und seine sittliche Persönlichkeit zu entfalten.

Während die scharfe Sonderung dieser Wertgebiete erst neueren kulturphilosophischen Untersuchungen gelungen ist, bietet die Geschichte der Erziehung uns einen anderen, längst erkannten Scheidungsgrund der Bildungswerte. „Nennen wir die Akte des Menschen, die eine bestimmte Richtung des Wertens und der Wertverwirklichung ausdrücken, formal, die konkreten Gegenstände aber, an denen sich diese Akte betätigen, material, so müssen wir formale und materiale Bildungswerte unterscheiden. Formalen Bildungswert haben geistige Tätigkeiten, an denen sich die Grundrichtungen des wertvollen Erlebens und Gestaltens üben. Materialen Bildungswert haben die geistigen Inhalte, die in diesen Grundrichtungen des Verhaltens angeeignet werden." [14] Die Gesamtheit der materialen Bildungswerte läßt sich von dem einzelnen Menschen nicht erfassen; ferner steht „der beschränkten Ausweitungsfähigkeit des Individuums die schrankenlose Erfüllungskapazität der Kultur" [15] gegenüber. Um so wichtiger ist es, daß der einzelne den maximalen Bestand formaler Bildungswerte erwirbt. „Die Vollkommenheit des Seelenlebens in seinen einzelnen Vorgängen ist die allgemeine im Menschen gelegene Bedingung, an welche die Erreichung jedes inhaltlichen Zieles gebunden ist." [16] Diese Vollkommenheit ist daher unter allen Umständen anzustreben.

---

[14] E. Spranger: Gedanken. S. 8.

[15] G. Simmel: Philosophische Kultur. Gesammelte Essays. Leipzig 1919.

[16] W. Dilthey: Über die Möglichkeit einer allgemeingültigen pädagogischen Wissenschaft. Abh. d. Königl. Akad. d. Wissenschaften. Berlin 1888. S. 818.

schaftliche, technisch-ökonomische, gesellschaftliche und politische, ästhetische und religiöse Bildungswerte. Intellektueller, technischer, ästhetischer usw. Bildungswert kommt also solchen Kulturwerten zu, die geeignet sind, die wissenschaftliche, technische, künstlerische Leistungsfähigkeit des Menschen zu erhöhen und seine sittliche Persönlichkeit zu entfalten.

Während die scharfe Sonderung dieser Wertgebiete erst neueren kulturphilosophischen Untersuchungen gelungen ist, bietet die Geschichte der Erziehung uns einen anderen, längst erkannten Scheidungsgrund der Bildungswerte. „Nennen wir die Akte des Menschen, die eine bestimmte Richtung des Wertens und der Wertverwirklichung ausdrücken, formal, die konkreten Gegenstände aber, an denen sich diese Akte betätigen, material, so müssen wir formale und materiale Bildungswerte unterscheiden. Formalen Bildungswert haben geistige Tätigkeiten, an denen sich die Grundrichtungen des wertvollen Erlebens und Gestaltens üben. Materialen Bildungswert haben die geistigen Inhalte, die in diesen Grundrichtungen des Verhaltens angeeignet werden.“ [14] Die Gesamtheit der materialen Bildungswerte läßt sich von dem einzelnen Menschen nicht erfassen; ferner steht „der beschränkten Ausweitungsfähigkeit des Individuums die schrankenlose Erfüllungskapazität der Kultur“ [15] gegenüber. Um so wichtiger ist es, daß der einzelne den maximalen Bestand formaler Bildungswerte erwirbt. „Die Vollkommenheit des Seelenlebens in seinen einzelnen Vorgängen ist die allgemeine im Menschen gelegene Bedingung, an welche die Erreichung jedes inhaltlichen Zieles gebunden ist.“ [16] Diese Vollkommenheit ist daher unter allen Umständen anzustreben.

---

[14] E. Spranger: Gedanken. S. 8.

[15] G. Simmel: Philosophische Kultur. Gesammelte Essays. Leipzig 1919.

[16] W. Dilthey: Über die Möglichkeit einer allgemeingültigen pädagogischen Wissenschaft. Abh. d. Königl. Akad. d. Wissenschaften. Berlin 1888. S. 818.

standpunkt", der die Einseitigkeiten des Nativismus und des Empirismus zu überwinden sucht.[18] Doch erheben sich hier um so dringender die Fragen: Was ist angeboren; d. h. was kann nur angeboren, niemals aber erworben sein? Was ist erworben; d. h. was kann nur erworben, niemals aber angeboren sein? Angeboren ist die Grundstruktur, die keimhafte Individualität des lebendigen Wesens, die Anlage. Diese rohe Individualität umfaßt die fundamentalen Dispositionen (die uns zum Vollzug der primitiven theoretischen, ästhetischen usw. Akte befähigen) in ihrer eigenartigen Stärke und Verflechtung. Diese geistigen Grundkräfte können wir nicht aus nichts erzeugen, sondern nur ihre Betätigung und Entfaltung in Erlebnissen und Akten begünstigen. Erworben ist die unter den mannigfachen Einflüssen der Umwelt aus jener keimhaften Individualität sich entwickelnde geistige Struktur mit ihrer eigenartigen Richtung und Schichtung der Werterlebnisse in den Motivationsketten. Diese geistige oder gebildete Individualität ist das Ziel der Erziehung.

Bei „normaler" Ausbildung der Grundstruktur und bei „normalen" Umwelteinflüssen entfaltet sich das Individuum nach den ihm immanenten Entwicklungsgesetzen. Seine Ausweitung vollzieht sich dann ungehemmt und in stets neuer und weiterer Schichtung der Akte bis zur „harmonischen Gestaltung der Persönlichkeit". (Die generelle Psychologie und die allgemeine Entwicklungspsychologie suchen die hier entspringenden Probleme aufzuhellen.) Die normale Grundstruktur kann aber durch außergewöhnliche Einflüsse gewollter und ungewollter Art sich zu einer ganz bestimmt geformten geistigen Individualität entfalten. Gewisse äußere Verhältnisse (Milieu und Schicksal) erfordern vielleicht die unverhältnismäßig häufige und lange technisch-ökonomische Einstellung, oder sie veranlassen zu frühzeitiger und tiefer Ausbildung besonderer intellektueller Fähigkeiten. Dadurch kann einmal

---

[18] W. Stern: Die menschliche Persönlichkeit. 2. Aufl. Leipzig 1919.

eine vorzeitige Reifung in einer dieser Richtungen, zum andern eine Einengung und Verknöcherung der geistigen Individualität bedingt werden.

Sind in der Grundstruktur aber schon gewisse Ausfallserscheinungen zu bemerken, d. h. fallen gewisse Dispositionen aus, die zum Vollzug von Grundakten erforderlich sind, so ist damit nicht allein das Bild der rohen Individualität ein „anormales", sondern auch die Entfaltung der geistigen Individualität nimmt — selbst unter normalen äußeren Verhältnissen — einen individuellen Verlauf. Denn an gewissen Stellen sind bei der Wertung komplexer Kulturgüter immer wieder jene Grundakte erforderlich, deren Ausfall den einzelnen unfähig macht, sie adäquat zu erfassen. Kommen dann noch besonders ungünstige Verhältnisse für die Entfaltung der rohen und anormalen Individualität in Frage, so verläuft der Bildungsprozeß in höchst differenzierten Formen. (Diese Fragen werden von der differentiellen Psychologie und der individuellen Entwicklungspsychologie verfolgt; für die Beleuchtung des Bildungswertes der Mathematik können natürlich nur die normalen Anlagen, Entwicklungs- und Umweltverhältnisse berücksichtigt werden.)

Auf Grund seiner eigenartigen Auffassung des Strukturbegriffes formuliert G. Kerschensteiner als „Grundaxiom des Bildungsprozesses" den Satz: „Die Bildung des Individuums wird nur durch jene Kulturgüter ermöglicht, deren geistige Struktur ganz oder teilweise der Struktur der individuellen Psyche adäquat ist." [19] Es bedarf aber, so scheint mir, noch weiterer Einzeluntersuchungen, als sie Kerschensteiner dort bietet, um hervortreten zu lassen, worin denn nun — bildlich gesprochen — auf den verschiedenen Kulturgebieten diese „adaequatio rei ac intellectus" besteht. Unsere Untersuchung über den Bildungswert der Mathematik will jenes Problem im engeren Gebiet verfolgen.

[19] G. Kerschensteiner: Das Grundaxiom des Bildungsprozesses. Berlin 1917. S. 27.

So lange die Mathematik als ein gesondertes Kulturgebiet existiert, ist auch schon ihr hoher Bildungswert betont worden. In den verschiedenen Kulturkreisen und Kulturepochen ist dieser Bildungswert von verschiedenen Gesichtspunkten aus beurteilt und nach verschiedenen Methoden ausgelöst worden.[20] Wir verfolgen hier nicht diese historische Seite unseres Problems, sondern stellen uns die Aufgabe, die Standpunkte, von denen aus der Bildungswert der Mathematik beleuchtet werden kann, und ebenso die Prinzipien, die für seine zweckmäßige Belebung in Frage kommen, in mehr systematischer Weise darzulegen. Erst wenn das starre Kulturgebilde in dem lebendigen Prozeß individuellen Lebens sich verflüssigt, entfaltet sich sein Bildungswert. Ehe wir nun darlegen können, wie die persönlichen Momente (Seelenstruktur, Entwicklungsstufe, Individuallage) den Bildungswert der Mathematik im einzelnen bedingen, müssen wir über ihren Kulturwert selbst klar sein; denn dieser bestimmt zunächst die Klasse oder die Klassen der Bildungswerte, die dem Individuum durch seine Beschäftigung mit der Mathematik entstehen. Sind dann noch die Arten der Bildungswerte näher untersucht, so werden sich auch die Richtlinien für ihre zweckmäßige Entfaltung darlegen lassen.

A. Vom Wesen der mathematischen Erkenntnis.

Von all denen, die in der Mathematik die Wissenschaft *κατ' ἐξοχήν* sehen, wird vornehmlich ihr unüberbietbarer intellektueller Bildungswert hervorgehoben. Seit den Tagen des Pythagoras gilt die Mathematik vielen als das Reich „absoluter“ Wahrheiten; manchem sogar als das Vorbild jeder Wissenschaft schlechthin. Kants Wort: „Ich behaupte, daß

[20] Vgl. H. E. Timerding: Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung. Leipzig 1914.

in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist“[1], wird heute noch von manchem in voller Schärfe aufrechterhalten, ja überboten. So schreibt Hilbert: „Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik ... Im Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt.“[2] Von anderen dagegen wird nicht allein die Gewißheit und Sicherheit auch der nichtmathematischen Erkenntnis betont, sondern der Mathematik selbst jeder Erkenntnisgehalt bestritten.[3]

Da nun auch die intellektuellen Bildungswerte erst dadurch sich entfalten, daß Erkenntniswerte in die inneren Lebensbeziehungen einer bestimmten Persönlichkeit aufgenommen werden, so gilt es zunächst, die sachliche Struktur der Mathematik selbst und sodann die Bedeutung der persönlichen Momente für die Belebung des Kulturwertes der Mathematik zu erfassen.

Von dem Reichtum und der Eigenart der Probleme und Methoden, welche die mathematische Forschung der Gegenwart charakterisieren, kann die Schule trotz aller Reformen nur einen kleinen Ausschnitt darbieten. Je dürftiger er ausfällt, um so unzulänglicher wird auch das Bild sein, das der Laie vom Wesen der Mathematik sich entwirft. Sucht er aber, vielleicht von irgendeinem interessanten Problem der exakten Naturwissenschaften her, tiefer in das Reich der Mathematik einzudringen, so sieht er sich bald einer bunten Mannigfaltig-

---

[1] I. Kant: Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. Vorrede. Akademieausgabe. Bd. IV. S. 470.

[2] D. Hilbert: Axiomatisches Denken. Math. Annalen. Bd. 78. 1918. S. 415.

[3] O. von der Pfordten: Der Erkenntniswert der Mathematik. 1915. In „Vierteljahrsschrift f. wissensch. Philosophie und Soziologie. Jahrg. 39. Neue Folge 14. S. 278.

keit mathematischer Gegenstände und Beziehungen gegenüber, durch die er nur schrittweise, unter angestrengter und beharrlich fortgesetzter Arbeit seinen Weg vorwärts bahnen kann; weil eine mathematische Wahrheit die andere stützt und trägt, in einer Weise, die uns noch deutlicher werden muß.

Jener Aufwand an Zeit und Kraft, der es ermöglicht, ganze Disziplinen gründlich zu durchdringen oder gar in verschiedenen heimisch zu sein, kann nur noch vom Fachmann aufgebracht werden; selbst das Umfassungsvermögen des Mathematikers aber reicht heute nicht mehr hin, um alle mathematischen Erkenntnisse in gleicher Weise aufzunehmen und zu behalten. Dazu bewegen sich manche mathematischen Untersuchungen auf den Grenzgebieten zwischen Logik und Mathematik oder zwischen Physik und Mathematik; und dann sind Unklarheiten darüber, in welche dieser Wissenschaften jene Ausführungen ganz oder teilweise hineingehören, bei Mathematikern, Physikern und auch Logikern nicht selten. Es bedarf eben zu der Abgrenzung einer Wissenschaft, hier also zur Bestimmung des Wesens der Mathematik, eines über die Grenzen des spezifisch Mathematischen hinausgehenden Blikkes, der auch die Eigentümlichkeiten der angrenzenden Wissenschaften zu erkennen vermag. Wir wundern uns daher nicht, wenn nicht allein unter Laien, sondern auch unter Vertretern jener Wissenschaften die Urteile über Wesen und Wert der Mathematik beträchtlich auseinandergehen. Die Klärung unserer Auffassung vom Wesen der Mathematik ist aber von fundamentaler Bedeutung für die Untersuchung ihres Bildungswertes. Umschließt die Mathematik nämlich durchaus eigenartige Erkenntniswerte, die sich nicht zurückführen lassen auf Erkenntniswerte anderer Wissenschaften, so bietet sie damit auch die Grundlage für die Entfaltung von durchaus eigenartigen intellektuellen Bildungswerten, die für eine bestimmte Persönlichkeitsstruktur durch keine noch so anhaltende und intensive Beschäftigung mit irgendeiner anderen Disziplin erwachsen können. Die eigenartige Struktur der

Mathematik kann uns aber nur dann recht deutlich werden, wenn wir zunächst einen Blick auf das Wesen der Wissenschaft selbst werfen.

a) Über Forschung und Wissenschaft im allgemeinen.

Forschung. Wenn der Kulturphilosoph vom Standpunkt der Welt- und Lebenstotalität die Wissenschaft betrachtet, erscheint sie ihm als ein lebendes, organisches Gebilde, das ähnlich den anderen Kulturgebieten — der Kunst, der Religion, der Wirtschaft, der Gesellschaft, dem Staat — eine eigentümliche Existenz hat.

Wie im Reich der Kunst das Kunstwerk als Gemälde oder Plastik, als Gedicht oder Symphonie usw. körperlich greifbar, räumlich und zeitlich bestimmt vor uns liegt, so hat auch die Wissenschaft eine durchaus „reale" Seite: wissenschaftliche Abhandlungen mit ihrer Symbolik in Worten und Zeichen aller Art, Forschungs- und Veranschaulichungsmittel usw. gehören in diese physische Seite der Wissenschaft. Diese wissenschaftlichen Gegenstände sind als physische Gebilde durchaus den Gesetzen der räumlich-zeitlichen Welt unterworfen.

Wie aber ein physischer Gegenstand z. B. nur Kunstgegenstand ist durch seine Form, so ist ein anderer wissenschaftlicher Gegenstand nur durch seinen ideellen oder gedanklichen Gehalt. Der echte Gedankengehalt der Wissenschaft aber ist von zeitloser Geltung und nur unterworfen den Gesetzen und Kriterien der ideellen Sphäre, die Logik und Erkenntnistheorie behandeln.

Wie nun der geformte Stein erst dann in vollem Sinne zum Kunstwerk wird, wenn seine Form in uns ein bestimmtes, wir sagen „ästhetisches" Erlebnis auslöst, so wird die gedruckte Abhandlung erst dadurch voll zu einer wissenschaftlichen, daß ihr ideeller Gehalt, ihr Sinn, im Denk- oder Erkenntnisprozeß richtig erfaßt wird. Diese besonderen Erlebnisvorgänge haben ihren zeitlich bestimmten Verlauf; sie stehen unter den Gesetzen der psychischen Welt.

Vom Standpunkt des Kulturphilosophen reicht also die lebendige Wissenschaft, nennen wir sie kurz die Forschung, wie jedes der anderen Kulturgebiete durch drei Existenzsphären gleichsam hindurch. Den Wissenschaftsbegriff, der die wesentlichen Merkmale der Forschung vereinigt, wollen wir den umfassenden Wissenschaftsbegriff nennen.

Während der Kulturphilosoph die Verschlingung der einzelnen Seiten der Wissenschaft zum lebendigen Totalzusammenhang der Forschung nicht aus dem Auge läßt, ist der Fachwissenschaftler unmittelbar zunächst nur auf die intendierten Gegenstände, auf ihren reinen Sachzusammenhang, und erst sekundär vielleicht auf seine Denkakte und Erkenntnisprozesse und auf die Besonderheiten seiner Forschungs- und Darstellungsmittel gerichtet. Abgesehen vom Psychologen, der sich gerade auf Selbstbeobachtung bei seiner Arbeit einstellt, und abgesehen vom „Grammatiker" (im weitesten Sinne)[4], der die Eigenheiten sprachlicher Darstellungsmittel untersucht, gelten dem Spezialforscher die Erlebnisvorgänge wie auch die realen Forschungs- und Darstellungsmittel als Begleiterscheinungen oder als methodische Hilfsmittel, die für die Forschung unentbehrlich sind, aber den Wahrheitsgehalt der Wissenschaft nicht beeinflussen dürfen. Nur die reine Wahrheit zu erfassen, das ist hier Ziel; und der Forscher hat volles Recht, wenn er für die Wissenschaft als leitenden Wert nur die Wahrheit anerkennt; jeden anderen Gesichtspunkt aber für die Auswahl und Darstellung seiner Gegenstände streng ablehnt. So ist „die Wissenschaft die Ordnung unserer Erkenntnisinhalte nach einem streng sachlichen, die Forderungen der Gegenstände (im erkenntnistheoretischen Sinne)

[4] Unter „Grammatik im weitesten Sinne" verstehe ich hier die Erforschung der sprachlichen Ausdrucksmittel aller Art (in Laut- und Schriftsprache); also z. B. auch die Erforschung der Eigengesetzlichkeit der mathematischen Symbolik!

unabhängig von den nichttheoretischen Werten rein objektiv zur Geltung bringenden Gesetz".[5]

Wissenschaft. Abstrahiert man nun nicht nur von denjenigen Seiten der Forschung, die durch die physische und durch die psychische Sphäre hindurchgehen, sondern auch von allen Aussagen einer wissenschaftlichen Darlegung, auf die das Kriterium der Wahrheit nicht (unmittelbar) angewandt werden kann, und idealisiert man ferner den bleibenden Bestand und Zusammenhang von Wahrheiten über den erreichten Zustand hinaus, indem man einmal die Forschungsergebnisse als „exakte Wahrheiten von ewiger Geltung" hinstellt und zum andern zwischen ihnen einen „durchgehenden, strengen Begründungszusammenhang" postuliert, so kann man die Wissenschaft definieren als das „Reich absolut gültiger Wahrheiten in strengem Begründungszusammenhang".[6]

Vereinigt der umfassende Wissenschaftsbegriff gleichsam das Maximum der für die Forschung charakteristischen Merkmale, so umschließt der engere Wissenschaftsbegriff (so wollen wir den letztgezeichneten nennen) nur das Minimum, d. h. die notwendigen und hinreichenden Merkmale, die zur Bestimmung des Wesens der Wissenschaft dienen.

Die verschiedenen Wissenschaftsbegriffe, die formuliert worden sind, können hier keine besondere Beachtung finden; doch lassen sie sich wohl im Sinne der Subsumtionslogik „zwischen" unseren engeren und umfassenderen Wissenschaftsbegriff einordnen. In der ungleichen Betonung der physischen und psychischen Seite der Forschung in den einzelnen Definitionen der Wissenschaft prägt sich oft deutlich die verschiedene Bedeutung dieser Komponenten für die Disziplinen aus, deren Vertreter uns jene Definition gibt. Für den Mathematiker hat es immer nahe gelegen, im System seiner Zeichen und Symbole „den" Gegenstand seines Forschens zu erblicken; unsere weiteren Darlegungen werden noch deutlich zeigen, daß

[5] E. Spranger: Gedanken. S. 27.
[6] E. Husserl: Logische Untersuchungen I. 1913. S. 227ff.

auch für die Mathematik, wie für jede andere Wissenschaft, die ideelle Seite den „wesenhaften" Kernbestand der Forschung bildet. Um den gedanklichen Gehalt, den Erkenntniswert der Mathematik klarer zeichnen zu können, präzisieren wir durch einige logisch-erkenntniskritische Bemerkungen unsere Stellung zu den konstitutiven Merkmalen des (engeren) Wissenschaftsbegriffes.[7]

Die logische Struktur der Erkenntnis. Die Logik untersucht die wissenschaftliche Erkenntnis nach ihrer formalen, die Erkenntnistheorie nach ihrer materialen Seite hin.[8] Die neuere Logik hat die Lehre vom Urteil als dem Formelement des Denkens in den Mittelpunkt ihrer Betrachtungen gestellt. Die logische Analyse des Urteils fällt nun keineswegs zusammen mit der grammatischen Zerlegung des Satzes. Während ein Satz z. B. gewöhnlich aus drei sprachlichen Bestandteilen (Subjekt, Prädikat und Objekt) besteht, zerfällt das einfache Urteil in der logischen Analyse in zwei und nur in zwei Glieder. Diese Urteilsbestandteile sind für sich genommen „nicht aussagende Formen des Vorstellens", d. h. Begriffe. Wenngleich Begriffe nicht unabhängig von der Aussage entstehen, so lassen sie sich doch rein für sich betrachten; d. h. ihr Inhalt und ihr Umfang läßt sich mit Hilfe anderer Begriffe darstellen, ohne daß diese Darstellung, die ihre Definition heißt, schon den Wert einer Aussage besäße. Begriff und Definition sind also der Sache nach dasselbe; nur im Gebrauch besteht ein Unterschied zwischen ihnen. Begriffe (die mit einem Wort oder Zeichen verschmolzenen Bedeutungen) sind als solche immer abstrakt, auch allgemein; ihr Gegenstand mag dennoch individuell, ja einzig in seiner Art sein. Daher ist, wie Riehl betont, die übliche Unterscheidung zwischen konkreten und abstrakten Begriffen falsch, wenn sie, statt auf die Anwendung dieser Begriffe, auf diese selbst bezogen wird; doch lassen sich Stufen der Abstraktheit unterscheiden. Abstrakt ist das begrifflich Erfaßte im Gegensatz zum Konkreten, das entweder der Zeit nach oder zugleich dem Raume und der Zeit nach bestimmt gegeben ist. So steht der Wahrnehmung als der unmittelbaren Vorstellung eines Gegenstandes der Begriff als die mittelbare Vorstellung gegenüber; d. h. als Vorstellung desselben Gegenstandes durch andere Vorstellungen oder einen Teil der anschaulichen Gesamtvorstellung. (Bei der Betrachtung der mathematischen Erkenntnis haben wir auf den Charakter der Abstraktheit der mathemati-

[7] Die folgenden Ausführungen lehnen sich enger an die Schriften A. Riehls an; vgl. Anhang.

[8] A. Riehl: Logik und Erkenntnistheorie. Leipzig-Berlin 1921. Ders.: Beiträge zur Logik. Leipzig 1912.

schen Begriffe, auf ihre Beziehung zur Wahrnehmungswelt besonders zu achten.)

Untereinander stehen Begriffe in mannigfachen Beziehungen (z. B. der Über-, Unter-, Nebenordnung; des Gegensatzes usw.); dadurch wird es möglich, einen Begriff mit Hilfe anderer darzustellen, zu definieren. Wir weisen hier nur auf zwei Arten der Definition hin: auf die topische und auf die genetische Definition. Die topische oder klassifizierende Definition bestimmt den Begriff durch Angabe seines Ortes im System der Begriffe. Notwendige und hinreichende Bedingung für die einzelne Definition ist die Angabe des genus proximum und der differentia specifica; für die unbeschränkte Anwendbarkeit dieser Definitionsweise aber ist die Kenntnis des vollständigen Systems der Begriffe (vom genus supremum hinab zu den letzten „eidetischen Singularitäten" im Sinne Husserls) nötig.[9] Die genetische Definition entwickelt den Begriff aus seinen Elementen. Besonders zu betonen ist noch mit Riehl, daß wir immer nur unser Wissen von den Objekten, nicht aber die Objekte selbst definieren. Den beiden Hauptarten der Definition entsprechen zwei Arten von Begriffen: die Klassenbegriffe und die Gesetzes- oder Funktionsbegriffe. Jene werden durch generalisierende Abstraktion, diese durch analysierende Abstraktion gebildet. Die Verwendung der Klassenbegriffe in der topischen, der Funktionsbegriffe in der genetischen Definition läßt uns von einem „statischen Gebrauch statischer Begriffe" und von einem „dynamischen Gebrauch dynamischer Begriffe" reden. „Es ist die Aufgabe der fortschreitenden Wissenschaft, Klassenbegriffe auf Gesetzesbegriffe zurückzuführen, alle Begriffe als Funktionen zu gebrauchen."[10]

Von den verschiedenen Urteilsarten heben wir hier nur zwei hervor: Sätze über Begriffe und Aussagen über Dinge. Jene wollen wir schlechthin „Wesensaussagen"[11], diese „Tatsachenurteile" nennen.

Tatsachenurteile beziehen sich als Realbehauptungen auf reale, als Wirklichkeitssätze auf wirkliche (bewußtseinswirkliche) Tatsachen; je nachdem ihr Aussagegehalt Gegenstände der äußeren oder inneren Wahrnehmung meint oder in ihnen fundiert ist.

Wesensaussagen sprechen „ein Verhältnis zwischen zwei oder mehreren Begriffen als allgemeingültig und notwendig aus". Wesensaussagen sind also vom Wahrnehmungsbestand völlig unabhängig (im logischen

---

[9] E. Husserl: Ideen zu einer reinen Phänomenologie ... I. 1913. S. 30.

[10] A. Riehl: Logik und Erkenntnistheorie. S. 76.

[11] Vgl. I. Kant: Vorrede der „Metaphysischen Anfangsgründe . . ." 1. Fußnote. Die Verwendung der Bezeichnung „Wesenswissenschaft" ist für uns nicht mit einer „metaphysischen Hypostasierung" der Begriffe verbunden.

Sinne); darin gründet eben ihre Allgemeingültigkeit, die streng zu scheiden ist von der Allgemeinheit der Tatsachenurteile.

Es scheiden sich also zwei Gebiete von Aussagen; das eine wird gebildet von dem Zusammenhang der Wahrnehmungen; die Bedeutung einer Aussage innerhalb dieses Gebietes liegt in der Behauptung der Realität oder der Wirklichkeit, d. h. Bewußtseinswirklichkeit (im Sinne Külpes) des Wahrgenommenen; das zweite Gebiet besteht in dem Zusammenhang der Begriffe, dem Universum der Bedeutungen als solcher; hier ist der Sinn der Aussage „die Unterordnung eines Begriffsverhältnisses unter die gesetzlichen Formen des Denkens und Anschauens".[12] Die Beziehung der Welt der Wahrnehmungen auf die Welt der Bedeutungen bildet das Erkennen (im engeren Sinne).

Wissenschaften, die nur Wesensaussagen enthalten, nennen wir (mit E. Husserl) reine Wesenswissenschaften; in ihnen kann keine Erfahrung die Funktion der Begründung übernehmen. Für die Wesenswissenschaften ist also die Einbeziehung von Erkenntnisergebnissen empirischer Wissenschaften ausgeschlossen. Dagegen kann keine Tatsachenwissenschaft „voll entwickelt und unabhängig sein, sei es von formaler oder materialer eidetischer Wissenschaft", denn die „Zufälligkeit der Tatsächlichkeit ist korrelativ bezogen auf eine Notwendigkeit oder Wesensallgemeinheit".[13]

Da Urteile untereinander in sinnvolle Beziehung treten können, besteht die Möglichkeit, ein Urteil aus anderen Urteilen abzuleiten. Ein solches Urteil, das durch andere Urteile vermittelt wird, nennen wir einen Schluß. Schließen bedeutet für uns also: mittelbar urteilen. „Das Schließen oder die Urteilsvermittlung bildet einen einheitlichen Denkvorgang, der sich von den vermittelnden Urteilen oder Prämissen zu dem vermittelten Urteile, der Konklusion, aber auch von dieser rückwärts auf jene erstreckt."[14] Weil die Schlußfolgerung einen einheitlichen Denkvorgang bildet, so müssen (nach Riehl) zwischen den durch sie vereinigten Sätzen irgendwelche Identitätsbeziehungen stattfinden; denn „es gibt kein anderes Prinzip des Folgerns und des Beweisens als das Prinzip der Identität".[14]

Wir gehen hier nicht auf Einzelfragen ein, sondern erwähnen nur noch, daß durch die Kombination von Wesensaussagen und Tatsachenurteilen drei Arten von Schlußfolgerungen entstehen[15]:

a) Schlußfolgerungen, die nur begriffliche Sätze oder Wesensaussagen enthalten; hier ist der Schluß von apodiktischer Gewißheit; d. h. not-

---

[12] A. Riehl: Beiträge. S. 18.

[13] E. Husserl: Ideen. S. 17—18; ferner J. Geyser: Neue und alte Wege der Philosophie. 1916. S. 21—26.

[14] A. Riehl: Beiträge. S. 47; 48. [15] A. a. O. S. 55.

wendig und allgemeingültig. Die Zahl der Prämissen ist hier nicht beschränkt.

b) Schlußfolgerungen durch Verbindung eines Tatsachenurteiles mit einer Wesensaussage. Diese Schlußart, Riehl nennt sie nach „ihrem hauptsächlichsten Anwendungsgebiete den Schluß der experimentellen Wissenschaften“ [16], entspricht dem aristotelischen Syllogismus; „sie enthält den Typus des deduktiven Schließens, durch welches Tatsachen entdeckt und zugleich erklärt, d. h. als notwendig erkannt werden“. [15] Diese zweite Schlußweise verknüpft also die Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit mit der Realität oder der Wirklichkeit einer Tatsache; in ihr findet aber auch ein Fortschritt des Erkennens statt.

c) Schlußfolgerungen, deren Prämissen nur aus Tatsachenurteilen bestehen; der Schlußsatz ist dann ebenso ein Tatsachenurteil, das „dem bloßen Stattfinden einer Tatsache Ausdruck“ gibt.[16] Da nun Tatsachenurteile sich nur aus Tatsachenurteilen folgern lassen, so ist „irgendeine Annahme tatsächlicher Art notwendig, um auch nur hypothetisch auf Dasein oder Wirklichkeit zu schließen“.[17]

Unsere Ausführungen über den Wissenschaftsbegriff in seiner umfassenderen und engeren Gestalt, vor allem aber die Beleuchtung der logischen Struktur der Wissenschaft bieten uns sowohl das präzise Begriffsmaterial, wie auch die besonderen Gesichtspunkte für die Untersuchung der Eigenart der mathematischen Erkenntnis. Erst dann, wenn der reine Sachgehalt der Mathematik selbst erfaßt ist, können wir der Frage näher treten, welche Bildungswerte die Aufnahme mathematischen Wissens in die Lebenstotalität des Individuums zur Entfaltung zu bringen vermag.

b) Über die Eigenart der mathematischen Erkenntnis.

Die mathematische Forschung umfaßt gegenwärtig zahlreiche Disziplinen; uns soll hier nicht die Frage nach ihrer Entstehung im ontogenetischen oder phylogenetischen Sinne beschäftigen, sondern die logisch-erkenntnistheoretische Betrachtung ihrer Gegenstände. Die Fülle der Disziplinen schei-

[15] A. a. O. S. 55. [16] Ders.: Logik und Erkenntnistheorie. S. 78

[17] Ders.: Beiträge. S. 54.

den wir zunächst in zwei Gruppen: in arithmetische und geometrische Disziplinen. Die übliche Trennung der Elementarmathematik von der höheren Mathematik können wir nicht verwenden; weil der zugehörige Einteilungsgrund gewöhnlich nach pädagogischen Zwecken gewählt ist und selbst dann, wenn jenes fundamentum divisionis ein spezifisch mathematischer Begriff ist, z. B. der Grenzbegriff, doch dem Gesamtzusammenhang nicht entspricht. In diesem Sinne äußert sich auch F. Klein: „‚Elementar‘ ist in einem Gebiet das, was sich auf Grund einer relativen Einfachheit zu einer naturgemäßen Einführung in den Gegenstand eignet. Die Elementarmathematik wird danach diejenigen Teile der Mathematik umfassen, die nach dem heutigen Stande der Wissenschaft ohne ein fortgesetztes Spezialstudium für einen menschlichen Geist mittlerer Begabung zugänglich sind. Die Schulmathematik aber wird aus dieser Elementarmathematik wieder das herausgreifen müssen, was am besten dem Ziel der höheren Schule entspricht, nämlich: eine allgemeine Grundlage zu bieten für das Verständnis unserer heutigen Kultur.“ [18]

In den Elementen des Euklid haben wir wohl die älteste systematische Darstellung des mathematischen Wissens; fast zwei Jahrtausende hindurch gilt die Euklidische Geometrie als Grundlage aller Mathematik. Im 19. Jahrhundert gelingt es der mathematischen Forschung, die logische Unabhängigkeit der Arithmetik — zum mindesten in ihren Grundlagen, der Lehre von den Zahlen — von der Geometrie nachzuweisen; ferner erkennt man in dem Begriff der Zahl und in den Operationen mit ihr das ausschließliche Fundament der arithmetischen Erkenntnis. Alle Bestrebungen der Logistiker und Mengentheoretiker aber, die Lehre von den Zahlen durch die

[18] F. Klein und R. Schimmack: Vorträge über den mathemat. Unterricht an den höheren Schulen. Teil I; 1907. S. 111; ferner F. Klein und E. Riecke: Neue Beiträge. 1904. S. 8—9; ähnlich H. Weber; Enzyklopädie. Bd. I. 1909. (Vorwort zur ersten Auflage.) H. E. Timerding: Die Verbreitung. S. 139. M. Simon: Rechnen und Mathematik. S. 31.

reine Logik oder durch die Mengenlehre zu begründen, sind als gescheitert anzusehen. Doch gehen wir darauf näher ein.

I. Von der Zahl und von der Arithmetik.

Die arithmetischen Disziplinen sind als solche dadurch gekennzeichnet, daß sie zum Begriff der Zahl oder zu den konstitutiven Merkmalen des Zahlbegriffes in „bestimmter" Beziehung stehen, die erst im folgenden näher angegeben werden kann. Da der Begriff der Zahl von so grundlegender Bedeutung ist für die gesamte Arithmetik und damit auch für die Darlegung ihres Bildungswertes, so gilt es zunächst, das Wesen der Zahl schärfer zu erfassen.

Vom Wesen der Zahl.

Zahlen sind Gegenstände im erkenntnistheoretischen Sinne. Jedem Gegenstand des Denkens kommt eine bestimmte Art des Seins zu. Wir stehen so vor der Frage: sind die Zahlen konkrete oder abstrakte oder gar metaphysische Gegenstände? sind sie vielleicht nur sinnlose Namen oder bedeutungslose Zeichen?

Fast alle angedeuteten Auffassungen vom Wesen der Zahl sind im Laufe der Entwicklung der mathematischen Forschung aufgetreten; wir können unmöglich hier auf die Feinheiten in der Ausgestaltung der einzelnen Theorien eingehen; doch wollen wir durch einen kurzen Überblick unseren Standpunkt genauer zu bestimmen suchen.

Die Zahl als metaphysische Wesenheit. Nach der metaphysischen Ausdeutung der Zahlen — sie tritt uns schon bei den Pythagoreern wirksam entgegen — sind die Zahlen Kern und Wesen der Dinge selbst. Die Prinzipien der Zahlen sind die Prinzipien der Dinge; die Dinge sind Nachahmungen der Zahlen, welche substantielle Wesenheit besitzen; dem Gegensatz der ungeraden und geraden Zahlen entspricht das Entgegengesetzte in der Welt: das Begrenzte (Begrenzende), das Gute, das Ruhende einerseits; das Unbegrenzte, das Böse, das Bewegte andererseits. Bis in die Gegenwart hinein spielt die metaphysische Hypostasierung der Zahlen eine Rolle — auch bei Mathematikern. Hermite schreibt:[19] „J'ajoute que ces notions de l'Analyse ont en dehors de nous leur existence, qu'elles constituent un ensemble dont une partie seulement nous est révélée, mystérieusement mais incontestablement associée à cet autre ensemble de choses que nous percevons par la voie des sens." Und O. Spengler meint:[20] „Jener Ausspruch, daß die Zahlen das Wesen aller sinnlich greifbaren Dinge darstellen, ist der wertvollste der antiken Mathematik geblieben." Wer in der Zahl das Wesen der Dinge sieht, wird der Arithmetik höchsten Erkenntniswert und Bildungswert zusprechen. (Vom Boden der metaphysischen Auffassung der Zahl sucht Platos Lehre von der Anamnesis den Ursprung der Zahlen zu klären.) Der moderne Forscher schließt metaphysisch-transzendente Gegenstände aus dem Bereich seiner Betrachtungen aus, weil ihm das Organ für diese Existenzweise fehlt; er versucht daher auch andere Ausdeutungen des Zahlbegriffes.

Die Zahl als Realität. Die realistische Auffassung vom Wesen der Zahlen, besonders lebhaft von J. St. Mill vertreten, erblickt in den Zahlen physische Dinge, Realitäten. „Alle Zahlen müssen Zahlen von etwas sein; es gibt nichts derart, wie Zahlen in abstracto." „Zehn muß zehn Körper, zehn Töne oder zehn Pulsschläge bedeuten."[21] Alle Dinge besitzen Quantität, bestehen aus Teilen, welche gezählt werden können, und in diesem Charakter besitzen sie alle Eigenschaften, welche man Eigenschaften der Zahlen nennt."[21] „Die in der Definition einer Zahl behauptete Tatsache ist eine physikalische Tatsache. Eine jede Zahl, eins, zwei, drei usw.

---

[19] Hermite in einem Brief an L. Königsberger: Die Mathematik, eine Geistes- oder Naturwissenschaft? Heidelberg 1913.

[20] O. Spengler: Der Untergang des Abendlandes. Bd. I. 1919. S. 93.

[21] J. St. Mill: System der deduktiven und induktiven Logik. 3 Bde. I. Bd., 2. Buch, 6. Kap., § 2.

bezeichnet ein physikalisches Phänomen.“ [22] „In jedem Schritt einer arithmetischen oder algebraischen Rechnung ist eine wirkliche Induktion, eine wirkliche Folgerung von Tatsachen aus Tatsachen enthalten.“ „Die Grundwahrheiten beruhen auf dem sinnlichen Beweis.“ [21] Sie können also nur assertorische, nicht apodiktische Gewißheit beanspruchen; so behauptet Mill auch: „Eine anders geartete Wirklichkeit, eine neue physische Umgebung, in die wir hineinversetzt würden, könnte uns den Satz, daß $2 \times 2 = 5$ ist, ebenso geläufig und selbstverständlich machen, wie er uns jetzt unbegreiflich erscheint.“ [21]

Mills empiristische Auffassung vom Wesen der Zahl hat zahlreiche berufene Kritiker gefunden. (Kritische Bemerkungen finden sich z. B. in den im folgenden zitierten Schriften von G. Frege, J. Cohn, E. Cassirer, P. Natorp, E. Husserl.) Schon der „bloße Hinweis auf psychische Akte, die man doch auch zählen kann wie physische Gegenstände, schlägt Mills Theorie nieder“. [23] In der unzulänglichen Scheidung der psychologischen und logischen Frage nach dem „Ursprung“ des Zahlbegriffes liegt wohl die Hauptquelle ihrer Fehler. Die Entstehung der Zahl im psychologischen Sinne kann durch die „Arithmetik der Kieselsteine und Pfeffernüsse“ nur bis zu einem gewissen Grade erklärt werden; für die quaestio juris, für die Begründung der Zahl im logischen Sinne leistet der Empirismus nichts. Daher ist der realistische Standpunkt in der Arithmetik nirgends konsequent durchgeführt; um so zahlreicher aber begegnen wir den „Verquickungen von rohem Empirismus mit dem Formalismus“. [24]

Die Zahl als bedeutungsleeres Zeichen. Mathematische Erkenntnis kann nicht notwendig und allgemeingültig sein, wenn sie in empirischen Tatsachen begründet ist; es gilt, ihre Strenge zu retten! Der Formalismus sucht

[21] J. St. Mill: A. a. O.

[22] Ders.: II. Bd., 3. Buch, 24 Kap., § 5.

[23] E. Husserl: Philosophie der Arithmetik. Bd. I. 1891. S. 87.

[24] H. Weyl: Das Kontinuum. 1918. Vorwort.

jeden Schein des Empirischen aus dem Lehrgebäude der Arithmetik zu verbannen; ihm aber auf jeden Fall auch die heißbegehrte Sicherheit zu geben. Und zu diesem Zwecke befolgt man ein Verfahren, das P. Natorp[25] treffend beschreibt: „Man setzt an die Spitze Definitionen, die ausdrücklich nur Vereinbarungen über den Gebrauch gewisser Symbole, nicht Urteile, die notwendigerweise wahr oder falsch wären, bedeuten. Man formuliert dann Grundsätze, in Hinsicht dieser Symbole, d. h. gibt Vorschriften über die Zulässigkeit gewisser mannigfach wechselnder Zusammenstellungen derselben; Vorschriften, die, schon weil sie nur die Zusammenstellung von Symbolen unerklärten Sinnes betreffen, ebenfalls nicht Urteile sein können, welche notwendig wahr oder falsch wären. Auch für diese Zusammenstellungen wird in der Tat kein weiterer Sinn angegeben oder vermißt ... Fortan rechnet man, d. h. stellt jene Symbole nach den gegebenen Vorschriften anders und anders zusammen. Ein Verständnis dieses ganzen Tuns wird in keiner Weise geboten, ist auch gar nicht erforderlich, vielleicht eher störend; die Rechnung verläuft genau so und bleibt ganz so zwingend, wenn man nichts dabei versteht, außer daß den Regeln gemäß verfahren wird."

In der neueren Mathematik glaubt man oft, das Streben nach logischer Klarheit und strengerem Aufbau dadurch befriedigen zu können, daß man ausgiebige Anleihen beim Formalismus macht; insbesondere geschieht das auch zur Begründung der sogenannten Erweiterung des Zahlbegriffes; doch kommen wir darauf besonders zurück. Der Formalismus hält die „Theorie der Zeichen", die in der Gesetzlichkeit der realen Seite

---

[25] P. Natorp: Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig-Berlin 1910. S. 6. Über den Formalismus bei Hilbert vergleiche man D. Hilbert: Neubegründung der Mathematik. Abhandl. aus dem mathem. Seminar der hamburgischen Universität. Bd. I, Heft 2. Hamburg 1922, Verlag des mathem. Seminars. P. Bernays: Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik. Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung. XXXI. 1. Abt. Heft 1—4.

der mathematischen Forschung wurzelt, eben in den willkürlich gewählten Zeichen, für den Kern der Mathematik. Hätte er recht, dann müßte es so viele „Mathematiken" geben, als Systeme von Zeichen gebildet werden können: unendlich viele. Tatsächlich aber sind die Zahlen keine sinnlosen Zeichen und die Operationen mit ihnen nicht beliebige Umstellungen und Verknüpfungen sinnloser Zeichen. Wenn alles das sinnlos ist, so sehen wir nicht ein, wo die Sache mit einem Male sinnvoll wird, und warum sie gerade dort sinnvoll wird. Auch der Formalismus ist nirgends streng durchgeführt.[26] Wie für den Ausdruck schlechthin, so ist auch für die Zahl die „Sinnbelebung"[27] wesentlich. Der Nominalismus verkennt das eigentümliche Bewußtsein, welches „sich einerseits im lebendig empfundenen Sinn der Zeichen, in ihrem aktuellen Verstehen, in dem verständigen Sinn des Aussagens bekundet, und andererseits in den korrelativen Akten der Erfüllung, welche das ‚eigentliche' Vorstellen des Allgemeinen ausmachen".[28] „Diese wortfreundliche und denkfeindliche Theorie erhebt seit jenen Tagen der antiken Skepsis immer und überall dort ihr Haupt, wo es mit dem Verstehen (Erklären und Beschreiben) solcher Erkenntnistatsachen, die über das Sehen, Hören, Riechen, Schmecken und Tasten hinausgehen, nicht mehr recht vorwärts will."[29] — Eine transzendente Existenz der Zahl, sei es im Sinne der metaphysischen oder der realistischen Ausdeutung, haben wir verneint; den Formalismus abgelehnt; wie aber stehen wir zu der Frage der „immanenten" Existenz? Sind die Zahlen Bewußtseinswirklichkeiten?

Die Zahl als psychisches Phänomen. Durch die

---

[26] F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Bd. I. 1907. S. 32—36.

[27] Vgl. S. 85 dieser Arbeit.

[28] E. Husserl: Log. Untersuchungen. II 1. § 15. S. 143; vgl. auch S. 85 dieser Arbeit.

[29] A. Höfler: Didaktik des math. Unterrichtes. 1909. S. 435; vor allem aber G. Frege: Grundgesetze der Arithmetik. 1893. p. XIII.

psychologische Hypostasierung der Zahl würde sie zu einem Gegenstande der Bewußtseinswirklichkeit, zu einem psychischen Phänomen; die Mathematik damit zu einem Teile der allgemeinen oder der Denkpsychologie; d. h. eine Tatsachenwissenschaft.[30] Allgemeingültigkeit und Notwendigkeit könnten dann nicht das Charakteristikum ihrer Urteile sein. — Wir bestreiten nicht, daß die Zahlen in uns erst lebendig werden in psychischen Akten; doch sind die in Denkakten intendierten, gemeinten Gegenstände nicht notwendig psychische Gegenstände; wir können ja auch reale Gegenstände meinen. Sollen aber mathematische Urteile notwendig und allgemeingültig sein, so können weder reale noch psychische Gegenstände sie begründen. Nicht um die Frage nach der Entstehung, sondern um die Geltung der Zahl handelt es sich. Geltung kommt konkreten Gegenständen nicht zu. Damit sind wir zur Begründung der Geltung der Zahl nicht auf ein Dasein (Realität oder Wirklichkeit), sondern auf die Bedeutung, auf den Sinn der Zahlen hingewiesen: auf etwas Abstraktes.

Die Zahlen als ideelle Wesenheiten. Die idealistische Auffassung erblickt in den Zahlen abstrakte Gegenstände; Begriffe oder Wesen, denen auch eine Art des Seins zukommt. Diese besondere Art des Seins ist aber kein Dasein im Sinne von Realität oder Wirklichkeit. „Reine Wesen und Bedeutungen haben Dasein nur, wenn und sofern sie gedacht werden. Sie besitzen darum an sich selbst kein ideales Sein, das in einem anderen Sinne ‚Sein' heißen könnte als in dem des ‚Soseins'."[31] „Das Dasein der Wesen, einerlei ob man es als reales oder ideales bezeichnet, kommt erst in Frage, wenn es sich nicht um die logische Begründung eines Urteilsinhaltes als solchen handelt, sondern um die Möglichkeit und Wirklichkeit des betreffenden Aktes und um irgendwelche aktuellen Leistungen der Wesen."[31]

[30] Vgl. E. Cassirer: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. 1910. S. 13.
[31] J. Geyser: Neue und alte Wege der Philosophie. 1916. S. 52, § 10

Wir sehen also in den Zahlen eine ganz bestimmte Art von Gegenständen, genauer von abstrakten Gegenständen; da es nun verschiedene Arten abstrakter Gegenstände gibt, so bleibt uns noch die Aufgabe, die Besonderheiten der Zahlen gegenüber den anderen abstrakten Gebilden vom logisch-erkenntnistheoretischen Standpunkt aus aufzuweisen. Wir kommen zu der

Lehre von den natürlichen Zahlen.

Jedes Wort oder Zeichen ist mit einer Bedeutung verknüpft, die sich auf einen Gegenstand bezieht. „Der Gegenstand ist das, worüber der Ausdruck etwas aussagt; die Bedeutung das, was er darüber aussagt.“ [32] „Die Bedeutung eines Ausdruckes wird selbst zum Gegenstande nur, wenn sich ein Denkakt ihr reflektiv zuwendet.“ [32]

Zahlworte, Zahlzeichen sind nicht die Zahlen; für die Zahl ist es einerlei, ob ein Chinese, Inder oder Ägypter sie mit seinen sprachlichen Mitteln ausdrückt; die Systeme der Bezeichnungen sind hier und dort ganz verschieden. [33] In ganz ungleichem Grade ist es nun den Schöpfern der Zeichensysteme gelungen, diese realen Gebilde den Wesensgesetzlichkeiten der Zahlen anzupassen; daher ist auch die altgriechische oder römische Bezeichnungsweise nicht so denkökonomisch wie das Positionssystem unserer indisch-arabischen Ziffern. Die Forschung wird um so fruchtbarer, bequemer sein, je besser das System der Zeichen die gesetzmäßigen Beziehungen der Zahlen zum Ausdruck bringt. Das gilt von Ziffern und Symbolen der Arithmetik ganz allgemein.

Der Grammatiker scheidet verschiedene Arten von Zahlwörtern: Kardinalia, Ordinalia, Zahladverbia, Distributiva, Multiplikativa, Proportionalia, Zahlsubstantiva; dazu noch verschiedene bei uns gebräuchliche Ziffern: römische und ara-

---

und S. 17, § 5. (Eine metaphysische Ausdeutung der Wesen ist ausdrücklich von uns abgelehnt.) [32] A. a. O. S. 29.

[33] Vgl. E. Löffler: Ziffern und Ziffernsysteme. I. Teil. Leipzig 1918.

bische. Hinter der Verschiedenheit der Zahlwortarten verbirgt sich ein spezifisch verschiedener Sinn; doch deutet die Ähnlichkeit der Wortbildungen schon auf logische Zusammenhänge hin. Die logische Analyse dieser Bedeutungszusammenhänge ergibt, daß die Kardinalzahlen und die Ordinalzahlen grundlegend sind. Wir gehen auf diesen Zusammenhang der Kardinalia und Ordinalia mit den übrigen Zahlworten nicht weiter ein. Wichtig ist die Frage, ob die Kardinalzahlen und die Ordinalzahlen logisch unabhängig voneinander sind. Wir entscheiden, nachdem wir jede dieser Zahlarten für sich betrachtet haben.

Die Ordinalzahlen. Die Theorie der Ordinalzahlen wird seltener geschlossen für sich, d. h. ohne Beziehung auf die Kardinalzahlen begründet.[34] Für uns handelt es sich hier nicht um eine streng axiomatische Begründung, auch nicht um eine Kritik bereits aufgestellter Ausprägungen solcher Theorien; sondern um die Herausstellung prinzipieller Gesichtspunkte, die für die Frage nach dem Bildungswert der Arithmetik entscheidend sind.

Grundlegend für die Ordinalzahlen ist die „Beziehung des einen zum andern" oder die Relation des „Nacheinander". Eines muß erstes sein, damit ein anderes zweites sein kann; eines muß zweites sein, damit ein anderes drittes sein kann, usw. . . . Die Gegenstände, die so geordnet werden zu einer Reihe, gehen in die Zahl nicht ein. Die Eigenart der Ordnungsbeziehung, die wir Relation des Nacheinander nannten, ist sui generis — undefinierbar. Wir suchen durch Aufweisung einiger Merkmale sie näher zu bestimmen:

a) Auf jede Ordinalzahl folgt eine andere; d. h. die Relation des Nacheinander ist „einsinnig" (nichtumkehrbar).

[34] Vgl. L. Couturat: Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Leipzig 1908. S. 46ff.; ferner vor allem B. Russell u. A. Whitehead: Principia mathematica. 3 Bde. Cambridge 1910, 1912, 1913. A. Wernicke: Mathematik und philosophische Propädeutik. IMUK III 7.

b) Auf jede Ordinalzahl folgt eine andere; d. h. die Reihe der Ordinalzahlen ist „unendlich“.

c) Es gibt nur eine Reihe von Ordinalzahlen; sie ist „einzig“ (nicht Ziffern, Namen oder andere Gegenstände, die nach der Relation des Nacheinander geordnet werden können, sind gemeint).

Einsinnigkeit, Unendlichkeit, Einzigkeit sind die charakteristischen Merkmale der Reihe der Ordinalzahlen. Der Relation des Nacheinander können nur diskrete Gegenstände unterworfen werden. Sie ist nicht aus „reinem“ Denken zu erzeugen; in ihr scheint etwas Denkfremdes zu liegen. In der Tat hat man schon seit alter Zeit die Zahl, insbesondere die Ordinalzahl, zu dem Begriff der Zeit in Beziehung gebracht; die Zeit für das logische prius der Zahl erklärt. Wir können nur ganz kurz, ohne historische Seitenblicke darauf eingehen.

Zahl und Zeit. „Zählen als ein seelenmäßiger Akt braucht Zeit; aber Zahl und Zeit haben nichts miteinander zu tun,“ so urteilt Driesch[35] im Gegensatz zu Kant und andern. Zeit ist nach Riehl[36] ein Urbegriff oder Grundbegriff; also undefinierbar; man muß ihn erleben, ihn betätigen, um zu wissen, was Zeit ist. Ist die Zeit Voraussetzung der Ordinalzahl, so müssen ihre Merkmale im Begriff der Ordinalzahl auftreten — unverändert oder doch in logisch einfacherer Form. (Es handelt sich nicht um die Entstehung, sondern um die Begründung der Zahl!) Welche Merkmale kommen nun der Zeit zu?

Kant[37] verfolgt in kritischer Prüfung die von Newton so scharf vollzogene Sonderung der relativen und absoluten Zeit mit dem Ergebnis, daß der absoluten Zeit keine Realität zu-

---

[35] H. Driesch: Ordnungslehre. Jena 1912.

[36] A. Riehl: Der philosophische Kritizismus. Geschichte und System. Bd. I. 2. Aufl. Leipzig 1908. S. 476f.; ferner Bd. II. Leipzig 1879. Abschnitt I. 2. Kap.: „Entstehung und Bedeutung der Vorstellungen von Zeit und Raum.“

[37] I. Kant: Kritik der reinen Vernunft. „Der transzendentalen Ästhetik zweiter Abschnitt.“ Von der Zeit. §§ 4—8.

kommt; der Begriff auch nicht aus der Erfahrung gewonnen sein kann, vielmehr Voraussetzung jeder Erfahrung ist (und somit auch der Erkennbarkeit relativer Zeiten). Die Zeit ist für Kant ein Grundbegriff der sinnlichen Erkenntnis, eine Form der „reinen" Anschauung; das Schema, um die Veränderung, welche die Zeit erfüllt, überhaupt vorstellen zu können. Nur die Vorstellung der Veränderung, nicht ihr Eintreten, setzt die Form der Zeit voraus; die Dinge selbst sind es, welche das Eintreten bestimmen. Die Zeit aber ist unabhängig von den Vorgängen; ihr entspricht kein reales Ding, sondern ein Gesetz, Dinge vorzustellen. Aus der Idealität der Zeit folgt also nicht die Idealität der zeitlichen Vorgänge.

Der Begriff der absoluten Zeit ist also undefinierbar; wir haben daher seine wesentlichen Merkmale anzugeben. Es geschieht, indem wir folgende Axiome der Zeit formulieren:

a) Die Zeit ist stetig.
b) Die Zeit ist einsinnig; d. h. entspricht der nichtumkehrbaren Relation der Nacheinander.
c) Die Zeit ist unendlich.
d) Die Zeit ist einzig.

Stetigkeit, Einsinnigkeit, Unendlichkeit und Einzigkeit sind die konstituierenden Merkmale der absoluten Zeit.

Sind nun alle diese Merkmale der Zeit auch in dem Begriff der Ordinalzahl enthalten? Und vor allem: Ist der Sinn dieser Merkmale hier und dort identisch derselbe? Das dürfte bei den Merkmalen der Einzigkeit und Einsinnigkeit zutreffen. Von der Unendlichkeit der Zeit — die von $-\infty$ bis $+\infty$ verläuft — und der Unendlichkeit der Ordinalzahlreihe — vom 1. bis zum ∞. verlaufend — muß nachgewiesen werden (da beide Begriffe der Unendlichkeit in gewisser Hinsicht verschieden sind), daß die erste logisches prius der anderen ist (der Mengentheoretiker bezeichnet den Ordnungstypus der Ordinalreihe mit ω, den der Zeit mit $^*\omega + \omega$). Ebenso ist zu beweisen, daß die Stetigkeit der Zeit logische Voraussetzung der Diskretheit der Ordinalzahl ist. Wir können hier unsere Darlegung abbrechen, ohne der

Hauptaufgabe unserer Arbeit, der Bestimmung des Bildungswertes der Mathematik, zu schaden.

Wir fassen unser Ergebnis zusammen: den Ordinalzahlen geben wir die Bedeutung, daß die Stellen, die wir mit ihrem Namen bezeichnen, eine absolut einsinnige Reihe festlegen. Alle in der Zeit vorkommenden diskreten Momente, d. h. alle Unterscheidungen in der Zeit besitzen dieses Gesetz der absoluten Einsinnigkeit. Nicht deshalb, weil wir zur Konstruktion der Zahlen Zeit gebrauchen, ist Zeit und Zahl in Verbindung getreten; sondern weil die objektive Reihe der Zahlen die Zeitreihe mit Ausnahme der Stetigkeit darstellt oder abbildet.[38]

Von den zahlreichen Problemen, die schon mit der Lehre von den Ordinalzahlen auftauchen und den Mathematiker wie Philosophen gleicherweise beschäftigen, haben wir nur einige lose streifen können. Wer die endlose Literatur über diese Frage kennt, stimmt vielleicht E. Husserl zu: „Nicht eine Frage von Bedeutung wüßte ich zu nennen, in deren Beantwortung unter den beteiligten Forschern auch nur erträgliche Harmonie bestünde.“[39] Doch wir wenden uns zunächst weiter zu der Theorie der Kardinalzahlen.

Die Kardinalzahlen. Auch hier wollen wir nicht eine axiomatische Untersuchung, sondern eine Aufweisung der für die Feststellung des Erkenntnis- und Bildungswertes der Mathematik wichtigen Fragen vornehmen.

Reflektieren wir auf den schlichten Sinn irgendeiner Kardinalzahl, z. B. der 7 oder 12, so scheint im Moment der Zusammenfassung das Wesentliche zu liegen. Doch genügt es nicht zu sagen, die Anzahl ist eine „Vielheit von Einheiten“; denn mit den Worten: einige, mehrere, viele, alle usw. bezeichnen wir auch Vielheiten von Einheiten; aber keine Kardinalzahlen. Und die weitere Angabe: die Anzahlen sind „De-

[38] Vgl. die axiomatische Begründung der Zeitmessung bei H. Weyl: Raum—Zeit—Materie. Berlin 1921. S. 6.

[39] E. Husserl: Philosophie der Arithmetik I. 1891. Vorwort.

terminationen des unbestimmten Vielheitsbegriffes"[40], weist uns ja zurück auf den Gesichtspunkt der Determination: auf den Begriff der Anzahl selbst. Er ist undefinierbar; ebenso wie die streng korrelativen Begriffe Einheit und Vielheit auch undefinierbar sind; es also unmöglich ist, den Begriff der Vielheit „rein" logisch aus dem Begriff der Einheit abzuleiten. Die Zahl ist „Vielheit von Einheiten" eben nicht in dem Sinne, daß sie eine determinierte Vielheit identischderselben Einheit wäre. Wie oft ein Gegenstand a als identisch-derselbe auch gesetzt werde, die (logische) Zusammenfassung solcher Setzungen: $a + a + a + a \ldots$ ist keine Vielheit; sondern a. Die Vielheit ist also schon eine Zusammenfassung wohl unterschiedener Einheiten; ebenso aber auch die Anzahl.[41]

Die logische Voraussetzung der Zahl — der Ordinalzahl wie der Kardinalzahl — ist also die Gegenstandssetzung und die Unterscheidung der Objekte. In der Ordinalzahl haben wir die Ordnung der unterschiedenen Gegenstände nach der Relation des Nacheinander — nach einem Abbild der zeitlichen Sukzession; in der Kardinalzahl die Zusammenfassung der Gegenstände durch die Relation des Nebeneinander — nach einem Abbild der Simultaneität, d. h. des Nebeneinander in der Zeit oder im Raume und der Zeit. Die Kardinalzahlen stellen so eine höhere Stufe der Abstraktion dar; weil sie an sich von der unverrückbaren Ordnung absehen, gleichsam vermischt sind.

Doch läßt sich die Gesamtheit der Kardinalzahlen ordnen nach der Relation des Nacheinander, und zwar unter der Voraussetzung, daß $x + 1$ definiert sei, wenn x jede beliebige Anzahl bedeutet. (In dieser Anwendung des einen Konstruktionsprinzips, der Relation des Nacheinander, auf die Ergebnisse des anderen, nämlich der Zahlbildung nach der Relation

---

[40] A. a. O. S. 9.

[41] A. Riehl: Logik und Erkenntnistheorie. S. 95. [„Logische Einheiten (Begriffe) sind nicht zu sich selbst addierbar; auf sie läßt sich daher auch nicht die rekurrierende Schlußweise anwenden." ...]

des Nebeneinander, haben wir einen elementaren, fundamentalen Fall fruchtbarer mathematischer Begriffsbildung zu sehen.[42]) Dann entsteht die Reihe der Kardinalzahlen:

$$1;\quad 1+1;\quad (1+1)+1;\quad \{(1+1)+1\}+1;\quad \ldots \text{ in inf.};$$

oder $1;\quad 2\;;\quad 2+1=3;\qquad 4\qquad;\ \ldots$ in inf.[43]

Wir wenden uns weiter. — Die Grundlage aller Arithmetik ist das Rechnen mit ganzen positiven Zahlen, d. h. Anzahlen; wir haben also zunächst die fundamentalen Gesetze des Rechnens zu beleuchten. Gewöhnlich werden sie in allgemeiner oder formalisierter Form ausgesprochen. F. Klein nennt 5 Grundgesetze der Addition:[44]

1. $a+b$ ist stets eine Zahl; d. h. die Addition ist (im Bereich der positiven ganzen Zahlen) unbeschränkt ausführbar.
2. $a+b$ ist eindeutig bestimmt.
3. $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$; das assoziative Gesetz.
4. $a+b=b+a$; das kommutative Gesetz.
5. Wenn $b>c$, so folgt $a+b>a+c$; das Monotoniegesetz.

Nach F. Klein[45] sind diese Eigenschaften sämtlich ohne weiteres einleuchtend, wenn man anschauliche Anzahlbegriffe vor Augen hat; der „moderne", strenge Arithmetiker führt jedes dieser „Gesetze" durch rekurrierendes Verfahren oder analytische Schlüsse[46] auf das Gegebensein der Anzahlen und der Relation $x+1$ zurück. Die Addition zweier Zahlen besteht also „in demselben Prozesse, der zu ihrer Erzeugung geführt hat."[47] Mit H. Hankel sieht man gewöhnlich in jenen „Grundgesetzen" das System der notwendigen und hinreichenden Bedingungen, um die Operation der Addition „formal" zu definieren.

---

[42] Vgl. S. 41 dieser Arbeit; ferner S. 90 ff.; hier können wir auf die Schichtung der Akte nicht eingehen.

[43] Vgl. H. Poincaré: Wissenschaft und Hypothese. 2. Aufl. 1914. S. 3—8.

[44] F. Klein: Elementarmathematik ... Bd. I. S. 14—25.

[45] A. a. O. S. 21—22.

[46] H. Poincaré: A. a. O. S. 3—9.

[47] H. Hankel: Theorie der komplexen Zahlensysteme. Leipzig 1867. S. 2.

Für die Multiplikation stellt man ähnliche Gesetze auf, die der strenge Arithmetiker ebenfalls durch analytische Schlüsse verifiziert.[46] Die 6 Grundgesetze der Multiplikation sind (nach F. Klein formuliert):

1. $a \cdot b$ ist stets eine Zahl; d. h. die Multiplikation ist unbeschränkt ausführbar.
2. $a \cdot b$ ist stets eindeutig bestimmt.
3. $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c = a \cdot b \cdot c$; Gesetz der Assoziativität.
4. $a \cdot b = b \cdot a$; Gesetz der Kommutativität.
5. Wenn $b > c$, folgt $a \cdot b > a \cdot c$; Gesetz der Monotonie.
6. $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; Gesetz der Distributivität, welches den Zusammenhang von Addition und Multiplikation (in einer Aufgabe) fixiert.

Eine „Arithmetik in strenger Begründung" wird diese Formulierungen wohl für notwendig, vielleicht aber nicht für hinreichend halten; wie aber auch diese formalen Gesetze formuliert werden mögen vom Arithmetiker, immer sucht er sie durch das rekurrierende Verfahren zu verifizieren.[48]

Die Potenzierung „geht aus der Multiplikation ebenso hervor wie diese aus der Addition"[49]; aber es gelten nicht dieselben formalen Gesetze; z. B. ist a^b nicht gleich b^a, wenn $a \neq b$ ist; und ebenso ist $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$. „Die wiederholte Potenzierung liefert eine neue Operation, deren weitere Untersuchung sich in der Wissenschaft nicht als notwendig erwiesen hat."[49]

Fassen wir kurz zusammen: Die Anzahlen sind, sowenig wie

---

[48] Man vergleiche die „Strenge" der Begründung bei H. Hankel, H. Poincaré, O. Hölder und D. Hilbert. O. Hölder: Die Arithmetik in strenger Begründung. 1913. S. 6—27.

[49] H. Hankel: A. a. O. S. 3—4; ähnlich H. Weber: Enzyklopädie... I. 1909. S. 31. Der Lehrer der mathematischen Anfangsgründe wird zu beachten haben, welche dieser formalen Gesetze (Axiome) nur haltbar sind vom Boden des Formalismus, welche wiederum nur notwendig sind vom Standpunkt der idealistischen Zahlauffassung, die im System der Zeichen nur einen „Anhalt" sieht für den ideellen Zusammenhang der mathematischen Wahrheiten.

die Ordnungszahlen, aus „reiner" Logik zu gewinnen. Die Operationen der Addition, der Multiplikation und der Potenzierung sind im Bereich der Kardinalzahlen unbeschränkt ausführbar. Zum Beweise der Richtigkeit der Rechnung bedient man sich des rekurrierenden Verfahrens oder des Schlusses von n auf $n+1$.[50]

Die Schlußform der „vollständigen Induktion" (wir setzen ihren Inhalt als bekannt voraus) ist unmittelbar einsichtig für die Folge der ganzen Zahlen; also ein Axiom und keine Induktion. Der Versuch, diese Schlußform „rein" logisch zu begründen, ist öfter gemacht worden; hat aber stets zu einer petitio principii geführt. Ein Beweis mit Hilfe der „geordneten" Menge setzt eben — in der Ordnung der Menge — bereits das Ordnungsprinzip der Zahlreihe voraus.[51] Allein die unmittelbare Anschauung der Wiederholbarkeit (Iteration) ist der eigentliche Grund des Satzes von der vollständigen Induktion.[52]

Damit weisen wir auch den Versuch zurück, von der Mengenlehre aus die Lehre von den ganzen Zahlen zu begründen. Abgesehen von den heiß umstrittenen Paradoxien der Mengenlehre hindert uns der (bereits gerügte) circulus vitiosus, von einer Begründung der Zahl durch die Mengenlehre (selbst durch eine „elementare" Mengenlehre)[53] zu reden. „Die Vorstellung der Iteration der natürlichen Zahlenreihe ist ein letztes Fundament des mathematischen Denkens."[54]

Wir haben die Relation des Nacheinander und auch die Relation des Nebeneinander, d. h. das Schema der Sukzession

---

[50] Vgl. H. Weber: Enzyklopädie ... I. S. 8; ferner A. Voß: Die mathematische Erkenntnis. 1914. S. 23—24. H. Poincaré: Wissenschaft und Hypothese. 1914. S. 9—15. H. Weyl: Das Kontinuum. S. 17, 29.

[51] Das trifft z. B. die Darlegung bei A. Voß und H. Weber.

[52] So auch H. Weyl: A. a. O. S. 37.

[53] H. Weber scheidet die „elementare" Mengenlehre von der „transzendenten", um den Antinomien zu entgehen.

[54] H. Weyl: A. a. O. S. 37.

und das Schema der Koexistenz als undefinierbar, als irreduzibel im logischen Sinne hingestellt; damit ist auch unsere Antwort auf jene Frage gegeben, ob die Ordinalzahl die Kardinalzahl oder die Kardinalzahl die Ordinalzahl begründet; Kardinalzahl und Ordinalzahl stehen logisch gleichwertig nebeneinander.[55] Wir sahen, wie aus der Verbindung der Ordinal- und Kardinalzahlen, besser aus der Ordnung der Kardinalzahlen nach der Relation des Nacheinander, die Reihe der geordneten Anzahlen entsteht, auf die schließlich Addition, Multiplikation, Potenzierung rekurrieren.

Wir haben die Lehre von den natürlichen Zahlen ausführlicher betrachten müssen, weil immer wieder große Mathematiker in ihr die Grundlage der gesamten Mathematik sehen. Kronecker[56] glaubte zuversichtlich, daß „einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff" der „gesamte Inhalt" aller arithmetischen Disziplinen zu gründen sei. Dedekind und Dirichlet[57] dachten ähnlich; und Poincaré schreibt:[58] „Heute haben wir in der Analysis nur noch mit ganzen Zahlen zu tun und mit endlichen und unendlichen Systemen von ganzen Zahlen, die durch ein Netz von Gleichungen und Ungleichungen verbunden sind." Die gesetzmäßigen Beziehungen zwischen ganzen Zahlen zu entschleiern, das ist eine Hauptaufgabe des Zahlentheoretikers. Begeistert schreibt H. Minkowski:[59] „Der Urquell aller Mathematik sind die ganzen Zahlen. Dies verstehe ich nicht bloß in dem althergebrachten Sinne, daß auch der Begriff des Kontinuums sich aus der Betrachtung diskreter Mengen

[55] Anders z. B.: L. Kronecker: Über den Zahlbegriff. H. von Helmholtz: Zählen und Messen. (In den „philosophischen Aufsätzen". Ed. Zeller zu seinem 50. Doktorjubiläum. Leipzig 1887. S. 15—261); ferner A. Voß: A. a. O. S. 34—37. (Formalismus!) und H. Driesch: A. a. O. S. 96.

[56] L. Kronecker: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift zu Kummers 50. Doktorjub. Berlin 1882.

[57] R. Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? 1888. S. XI.

[58] H. Poincaré: Wissenschaft und Methode. 1914. S. 110.

[59] H. Minkowski: Diophantische Approximationen. Leipzig 1907. S. V.

ableitet. Vielmehr denke ich bei diesen Worten an Ergebnisse neueren Datums. Die Beherrschung der Exponentialfunktion von der Kreisteilung aus, die Erfassung der elliptischen Funktionen mittels der Modulargleichungen lassen zuversichtlich glauben, daß die tiefsten Zusammenhänge in der Analysis arithmetischer Natur sind. Diese Zuversicht hat heute schon Erfolge gezeitigt."

Um hierzu Stellung nehmen zu können, betrachten wir kurz die sogenannte Erweiterung des Zahlbegriffes.

Über die Erweiterungen des Zahlbegriffes.

Wir beleuchten im folgenden einen Prozeß der mathematischen Forschung, dessen allgemeine Züge treffend durch ein Wort von A. Riehl[60] charakterisiert werden: „Darin besteht das Wesentliche der Begriffsbildung, daß Vorstellungen aus einem Anschauungsgebiet auf Objekte eines anderen übertragen werden, bei welcher Übertragung sie ihre eigene anschauliche Bedeutung notwendig einbüßen und zu gedanklichen Symbolen der durch sie bezeichneten Dinge werden. Je mehr dieser Prozeß fortschreitet, um so mehr treten Begriff und Anschauung auseinander."

Schon die Elementarschule durchbricht den Rahmen des Rechnens mit (positiven) ganzen Zahlen; sie führt zum mindesten die Brüche als „neue" Zahlen ein. Der Mathematiker spricht von der Null, von den negativen, den gebrochenen, den irrationalen, den imaginären, transzendenten und transfiniten Zahlen — ja, er nennt sogar nach bestimmten Regeln verknüpfte Zahlen voriger Arten wiederum einfach „Zahlen".[61] Gewöhnlich werden zwei „Motive für die Erweiterung des Zahlbegriffes"[62] genannt; einmal die

---

[60] A. Riehl: Beiträge... 1912. S. 8; vgl. S. 75 dieser Arbeit (Zitat von Wundt).

[61] Vgl. H. Weber: Enzyklopädie ... I. S. 165. § 54.

[62] J. Cohn: Voraussetzungen und Ziele des Erkennens. 1908. S. 178; ferner W. Wundt: Logik II. S. 139.

Forderung, daß alle Aufgaben der reinen Arithmetik stets lösbar sein sollen, zum anderen die Forderung, daß Größen geometrischer oder physikalischer Art unter allen Umständen durch Zahlen bestimmbar sein sollen. Bei der Begründung der Erweiterung des Zahlbegriffes, beim Nachweis der ‚Existenz" der neuen Zahlen, treten außer der angedeuteten algebraischen und geometrischen Tendenz noch andere, oft „formal" genannte Gesichtspunkte hervor, die scharf nach ihrem Bedeutungsgehalt gesondert werden müssen. Am Eingang dieses Abschnittes haben wir die verschiedenen Ausdeutungen der Zahl kurz angegeben und unsere Stellung dazu präzisiert; hier wären, in Hinblick auf die erweiterten Zahlen, fast die gleichen Gedankenfolgen geltend zu machen.

Die formalistische Theorie. Die Behauptung der Existenz der erweiterten Zahlen bedeutet uns also nicht ihr Dasein im Sinne metaphysischer, physischer oder psychologischer Ausdeutung; auch können wir diese Zahlen noch weniger als die ganzen Zahlen auf „reine" Logik begründen;[63] ganz entschieden aber müssen wir hier noch einmal den Formalismus ablehnen. Er ist am schnellsten, leichtesten mit der Begründung fertig, denn er gibt — gar keine Begründung! Jene Theorie „nennt Zahlen gewisse durch Schreiben erzeugte Figuren, die nach willkürlichen Regeln behandelt werden. Diese Figuren können zwar in einem anderen Zusammenhang auch Zeichen sein, die etwas bedeuten; aber davon sieht der formale Arithmetiker ganz ab".[64] Durch willkürliche Konstruktion immer neuer sinnloser Zeichen in sinnloser Zusammenstellung kann keine Wissenschaft begründet werden; und doch sehen „moderne" Mathematiker oft in der Theorie der Zeichen den Kern ihrer Wissenschaft. M. Pasch schreibt: „Der mathematische Formalismus muß auf die Spitze getrie-

[63] Ich erinnere an die Bestrebungen von Russel, Couturat, Frege, Natorp, Veronese ...

[64] G. Frege: Grundgesetze der Arithmetik II. 1893. S. 154.

ben werden."[65] Denn „dieser Formalismus ist der Lebensnerv der Mathematik".[65] Wir unterschätzen nicht die hohe Bedeutung eines vollkommenen Ziffern- und Zeichensystemes für die mathematische Forschung; pflichten vielmehr dem Worte von O. Hesse bei: „Es ist in der Algebra und in der Analysis keineswegs gleichgültig, welche Bezeichnungen man für diejenigen Größen wählt, mit welchen man operieren will ... Es ist gewiß nicht zu viel gesagt, wenn man behauptet, daß die Lösung einer großen Zahl von Problemen einzig und allein von der geeigneten Wahl der Bezeichnungen abhängt."[66] Der Anteil des algorithmischen Verfahrens als einer selbständig vorwärts treibenden Kraft der mathematischen Forschung ist wohl vom Geschichtsschreiber der Mathematik, vom Kulturphilosophen und vom Psychologen zu würdigen; nicht aber vom Mathematiker zur logischen Begründung dieser Wissenschaft heranzuziehen. Hilfsmittel der Forschung, so sagten wir schon, berühren den Wahrheitsgehalt nicht; können ihn nicht begründen; ihre Betrachtung vom ökonomischen Gesichtspunkte in Hinblick auf die Ersparnis von Denkarbeit ist scharf zu scheiden von der logisch-erkenntniskritischen Untersuchung des Wahrheitsgehaltes der ihnen aufgeprägten Bedeutungen.[67] F. Klein spricht in seiner kritischen Darlegung der Tendenzen des Formalismus treffend von einem „Programm", dessen Durchführung aber unmöglich ist, zum mindesten aber „sinnlos" bleibt.[68] Wir wenden uns den „inhalt-

---

[65] M. Pasch: Veränderliche und Funktion. S. 120; ähnlich H. Dingler: Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in derMathematik ... 1915; ferner M. Pasch: Mathematik und Logik. Vier Abhandlungen. Archiv für die ges. Psychologie. Bd. 28. 1919. D. Hilbert: Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik. 1913.

[66] O. Hesse, zitiert nach P. B. Fischer: Determinanten. Leipzig 1908. S. 23.

[67] Ein besonderes Eingehen auf Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik muß ich mir hier versagen; meine Stellung zu den S. 28 zitierten Schriften (von Hilbert und Bernays) dürfte aus dieser ganzen Arbeit klar sein; vgl. auch S. 85 dieser Arbeit.

[68] F. Klein: Elementarmathematik ... I. S. 33—36.

lichen" Theorien zur Begründung der Erweiterung des Zahlbegriffes zu.

Die algebraische Theorie. Der Arithmetiker strenger Richtung hält nur die algebraische Theorie der Zahlerweiterung für „einwandfrei". „Die schrittweise Erweiterung des Zahlbegriffes, die Schöpfung der Null, der negativen, der gebrochenen, irrationalen und komplexen Zahlen geschieht stets durch Zurückführung auf frühere Begriffe, und zwar ohne jede Beimischung fremdartiger Vorstellungen wie z. B. der meßbaren Größen, die nach meiner Auffassung erst durch die Zahlwissenschaft zu vollständiger Klarheit erhoben werden können."[69] „Erst mit Hilfe der Stetigkeit der Zahlenreihe wird die Stetigkeit des Raumes erfaßt"[70], so behauptet Dedekind. In schärfster Zuspitzung finden wir den Gedanken, daß geometrische und physikalische Probleme zwar zur Erweiterung des Zahlbegriffes Anlaß gegeben haben mögen, die Begründung der Geltung der neuen Zahlen aber unmöglich leisten können, bei M. Pasch:[71] „Wenn man überdies der Entstehung geometrischer Vorstellungen nachgeht, mit denen Mathematiker tatsächlich zu arbeiten pflegen, z. B. der Vorstellung des geometrischen Punktes, so zeigt sich, daß diese Vorstellung erst mittels arithmetischer Betrachtungen begründet werden kann; so daß z. B. die Figur des Quadrates, wenn sie etwas schärfer sein soll, die Irrationalzahlen schon zur Voraussetzung hat." — Geometrische Begriffe wurzeln in der „Anschauung des Raumes"; diese ist aber in den Augen des „strengen" Arithmetikers längst „diskreditiert".[72] Überdies ist es zweifelhaft, ob z. B. jede „Irrationalzahl auf

[69] G. Frege: A. a. O. S. 154—160.

[70] R. Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? S. X, XIII.

[71] M. Pasch: Veränderliche und Funktion. S. 31.

[72] So A. Wernicke (Mathematik und philos. Propädeutik. IMUK. III 7. 1912. S. 55) infolge gewisser arithmetischer Entdeckungen, z. B. tangentenloser Kurven, einseitiger Flächen.

geometrische Anschauung zurückführt; also mittels einer geometrischen Forderung gewonnen werden kann". [73]

Die geometrische Theorie. Wir wollen den Wahrheitsgehalt der algebraischen Theorie hier nicht von allgemeinen Gesichtspunkten aus beleuchten, sondern uns zunächst der geometrischen Theorie der Zahlerweiterung zuwenden. Fraglos hat die geometrische Aufgabe der Größenbestimmung mit Hilfe der Zahl (Größenmessung) und ebenso wirksam die physikalische Aufgabe numerisch-quantitativer Bestimmung veränderlicher Vorgänge zur Erweiterung des Zahlbegriffes gedrängt; doch ist hier der „Ursprung" der neuen Zahlen nicht in psychologischer Hinsicht zu untersuchen; sondern nach logisch-erkenntnistheoretischen Kriterien zu begründen. Die Geometrie hat es mit räumlichen Größen zu tun; es fragt sich also, wieweit konstitutive Merkmale der Raumgrößen und ihrer Beziehung grundlegend sind für die neuen Zahlen.

Auch in der geometrischen Theorie der Zahlerweiterung können Zahlen nicht als Größen erscheinen. Eine Addition von Größen ist möglich; aber bereits die Multiplikation und Potenzierung von „Größenzahlen" würde jene Annahme ad absurdum führen. Außerdem ist darauf hingewiesen, daß bei der Verschiedenartigkeit der Größen (Zeit-, Raumgrößen, physikalische Größen) entsprechend viele Zahlarten notwendig seien. [74] Wenn die intensiven Größen nur durch das Merkmal der Ungleichheit, die extensiven aber durch Ungleichheit und Teilbarkeit charakterisiert sind, so werden für die geometrische Theorie der Zahlerweiterung nur die letzteren in Frage kommen. [75] Zwei Größen *X, Y* sind dann derselben Gattung, wenn sie sinnvoll in die undefinierbare Beziehung $X \gtreqless Y$

[73] M. Pasch: Veränderliche und Funktion. S. 31.

[74] G. Frege: Grundgesetze. Bd. II. S. 157. Von primitiven Völkern werden öfter verschiedene Klassen von Zahlwörtern für verschiedene Klassen von Gegenständen gebraucht. [75] L. Couturat: A. a. O. S. 104—130.

gestellt werden können. Diese „Relation des Größerseins“ ist nicht aus der Relation des Nacheinander oder der Relation des Nebeneinander ableitbar, sondern durchaus sui generis. (Gleichheit und Identität sind zu sondern!) Nach der geometrischen Theorie liegt nun der „Ursprung und Seinsgrund der verallgemeinerten Zahl lediglich in der Betrachtung der Größen“. „Die Verallgemeinerung der Zahlen vollzieht sich in Etappen, welche darin bestehen, fortschreitend der Zahl die Eigenschaften des Raumes beizulegen.“ [76] Ist die quaestio juris der Erweiterung des Zahlbegriffes vom Boden der geometrischen Theorie allein befriedigend entschieden, so steht Kants Behauptung, daß die Zahl das Schema der Größenbeurteilung sei, um so fester. [77]

Wir prüfen den Wahrheitsgehalt der „inhaltlichen“ Theorien der Zahlerweiterung, indem wir die Art der Begründung der neuen Zahlen von beiden Gesichtspunkten aus kurz beleuchten. [78]

Es ist die Forderung der unbeschränkten Ausführbarkeit der „lytischen“ [79] Operationen, die den Arithmetiker zur Erweiterung des Zahlbegriffes drängt. Um zunächst die Subtraktion unbeschränkt ausführen zu können, postuliert er die Existenz der Null und der negativen Zahlen. Im Bereich der Anzahlen haben diese neuen Zahlbegriffe keinen Platz.[80] Gauß selbst betont: „Positive und negative Zahlen können nur da Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes

[76] A. a. O. S. 124.

[77] I. Kant: Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. („Der bestimmte Begriff von einer Größe ist der Begriff der Erzeugung der Vorstellung eines Gegenstandes durch die Zusammensetzung des Gleichartigen.“) 2. Aufl. 1787. S. 18.

[78] Unsere Erwägungen wollen keine Vollständigkeit anstreben, sondern nur Entscheidung zwischen jenen beiden Theorien in Hinblick auf das Ziel der Arbeit!

[79] Bezeichnung bei H. Hankel: A. a. O.

[80] Vgl. Nic. Cusanus: Vom Wissen des Nichtwissens. 1919. Übersetzt von Schmid. Kap. 5.

hat, was mit ihm vereinigt gedacht, der Vernichtung gleichzustellen ist." Das gilt nach ihm nicht für Substanzen, sondern nur für Relationen.[81] — „Positive und negative Zahlen sind Operationen an (ganzen oder rationalen) absoluten Zahlen"[82] — betont ein moderner Mathematiker. Eine genauere Betrachtung der Ausführung dieser Rechnungen mit negativen Zahlen zeigt, daß Hankels „hodegetisches Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze" durchbrochen wird — damit die negative Zahl auch als Schema der Größenbeurteilung angewandt werden kann. (Man vergleiche F. Klein: Elementarmathematik. Bd. I, S. 60—70.)

So kann die geordnete Reihe der positiven und negativen Zahlen das „Nacheinander und Voreinander" in Zeit und Raum mit Ausnahme der Stetigkeit „abbilden".

Die Forderung der unbeschränkten Durchführbarkeit der zur Multiplikation inversen Operation, der Division, führt auf die „gebrochenen Zahlen". Gewöhnlich definiert der strenge Arithmetiker Brüche als „Zahlenpaare";[83] dann haben die für die Rechnung mit Brüchen festgesetzten Regeln durchaus den Charakter „willkürlicher Vereinbarungen".[84] Tatsächlich aber liegt schon der Definition die Auffassung der rationalen Zahl als Maßzahl oder Verhältniszahl zugrunde.[85] Die geometrische Theorie geht hier von der Größenmessung aus. Die Maßeinheit ist zwar immer willkürlich, nie aber die Meßbarkeit der Größen, die Proportionalität.[86] „Der damit aufgestellte Begriff der Maßzahl hat an sich nichts mit den Zahlen der reinen Zahlenlehre zu tun. Wir erkennen nun aber, daß jene ‚reinen' Zahlen, voran die natürlichen, das unumgängliche Mittel sind, eine Maßzahl festzulegen."[87] Ein

---

[81] C. F. Gauß: Werke. Bd. II. S. 176; dazu vgl. Frege: A. a. O. S. 160.
[82] L. Couturat: A. a. O. S. 85.
[83] Vgl. A. Voß: Über die math. Erkenntnis. 1914. S. 38—39.
[84] Vgl. F. Klein: Elementarmathematik ... I. S. 72—78.
[85] L. Couturat: A. a. O. S. 84. [86] A. a. O. S. 124—131.
[87] H. Weyl: Das Kontinuum. S. 75, § 7.

Grundbegriff der Größenlehre ist dabei übertragen auf die Lehre von den Anzahlen: das metrische Verhältnis![88] Die Darstellung der Gesamtheit aller rationalen Zahlen auf einer Zahlengeraden ergibt das „mathematische Kontinuum erster Ordnung".[89]

„Die Analysis der reellen Zahlen[90] hat bis in die Tiefe ihrer Wurzeln hinein einen völlig anderen Charakter als die Arithmetik der rationalen Zahlen." Es ist das uralte nach Pythagoras benannte Problem der „Darstellung des Kontinuierlichen durch die Zahl", das Veranlassung zur Bildung der irrationalen Zahlen gegeben hat — das Problem selbst beschäftigt den Mathematiker unserer Tage noch.[91] — Der strenge Arithmetiker fordert die unbeschränkte Durchführbarkeit der Radizierung, der zur Potenzierung inversen Operation. „Die innere Harmonie des Lehrgebäudes der Arithmetik fordert eine solche Erweiterung des Zahlbegriffes, ohne die überdies die Ausdrucksweise und die Formulierung vieler Sätze, besonders in der höheren Analysis, äußerst schwerfällig und weitläufig werden würde."[92] „Es ist lediglich eine Zweckmäßigkeitsfrage, ob wir diesen erweiterten Begriff benutzen und Namen dafür gebrauchen wollen oder nicht."[92] Der strenge Arithmetiker sucht die Irrationalzahlen und auch die Gesetze der Rechnung mit solchen allein auf die positiven ganzen Zahlen zu gründen.[93] Scharfsinnige Ableitungen sind gegeben; ebenso scharfer Kritik sind sie unterworfen.[94] —

[88] Um nicht mißverstanden zu werden in diesen kurzen Andeutungen, verweise ich auf die scharfe Sonderung von „Strecke" und „Maßzahl" bei H. Frege: A. a. O. II. S. 155—156.

[89] Vgl. H. Poincaré: Wissenschaft und Hypothese. S. 23—25.

[90] H. Weyl: A. a. O. S. 51.

[91] A. a. O. S. 51; ferner H. Weyl: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. Mathem. Zeitschr. Jahrg. 1921. Bd. 10. Berlin.

[92] So meint H. Weber: Enzyklopädie ... I. S. 71.

[93] Vgl. R. Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? 1893. Ders.: Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872). 1912.

[94] A. Pringsheim: Irrationalzahlen u. Konvergenz unendlicher Prozesse. Enzykl. d. Math. I. 1.

Für alle diese „Begründungen" der Irrationalzahlen kommt es nach Dedekind darauf an, „ein Präzisionsmerkmal der ‚Stetigkeit' anzugeben, welches als Basis für die wirkliche Deduktion gebraucht werden kann." [95] Wenn die Arithmetik aber hier mehr sein will als eine sinnlose „Theorie der Zeichen", so muß auch das „Präzisionsmerkmal der Stetigkeit" einen Sinn haben. Und worin sollte dann das Kriterium des Wahrheitsgehaltes für dieses Präzisionsmerkmal anders gelegen sein als „in der Form der reinen Anschauung", in der Stetigkeit der Zeit und des Raumes? Somit sind wir aufs neue auf die geometrische Theorie der Zahlerweiterung verwiesen. [96] Die Gesamtheit der inkommensurablen (alogischen) oder irrationalen Zahlen bildet „das Kontinuum zweiter Ordnung, welches mit dem eigentlichen mathematischen Kontinuum identisch ist" [97] — wir ergänzen: mit dem arithmetischen, aber nicht geometrischen Kontinuum! — Es würde zu weit führen, wenn wir noch das auf Betrachtung unendlich kleiner Größen verschiedener Ordnung begründete „Kontinuum dritter Ordnung" beleuchten wollten. [98] Der Prozeß der Bildung eines „stetigen" Zahlenreiches läßt uns von einer „Geometrisierung der Arithmetik" sprechen. [99]

Da wir bereits durch unsere Darlegung der Erweiterung des Systems der Zahlen (besonders um die gebrochenen und irrationalen Zahlen) über die „Leistungsfähigkeit" der beiden inhaltlichen Theorien zur Begründung der Zahlerweiterung, der algebraischen und der geometrischen Theorie, uns zugunsten der letzteren entschieden haben, können wir uns kürzer fassen.

---

[95] R. Dedekind: A. a. O. S. 9; dazu H. Weyl: Das Kontinuum. S. 16. § 6, ferner L. Couturat: A. a. O. S. 87.

[96] W. Wundt: Logik II. 1894. S. 91. („Die diskrete Zahl und die kontinuierliche Ausdehnung sind bis auf den heutigen Tag die heterogensten Begriffe geblieben ...").

[97] H. Poincaré: Wissenschaft und Hypothese. S. 27.

[98] A. a. O. S. 29—30; ferner A. Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre. 1919. S. 43.

[99] Vgl. F. Klein: Elementarmathematik ... I. S. 79—92.

Auch die folgenden Erweiterungen des Zahlbegriffes, die komplexen und hyperkomplexen Zahlen, können nicht von der algebraischen Theorie aus befriedigend begründet werden, ohne daß sie neue, dem Gebiet des Rechnens mit ganzen Zahlen fremde Gesichtspunkte einbezieht; das Prinzip der Permanenz vermag auch hier nichts zu begründen, wenn wir unter Arithmetik nicht eine Theorie der Zeichen im Sinne des Formalismus verstehen; es kann also höchstens Anregung geben für die Ausbildung eines „praktischen, denkökonomischen Algorithmus". Gerade die Geschichte der neuen Zahlbildungen zeigt deutlich, wie „bedeutungslos" die auf dem geistesdürren Boden des Formalismus erwachsenen „Zahlkonstruktionen" bleiben, solange jeglicher anschaulich-lebendige Sinn ihnen fernbleibt.[100] Wie will man aber rein logisch aus der Lehre von den ganzen Zahlen die „gerichtete" Zahl — den Vektor — ohne circulus vitiosus ableiten?[101] Eine Zahl, die zugleich Maß und Richtung bestimmt, ist keine „reine" Zahl mehr; die imaginären Zahlen sind aber bereits Vektorzahlen. Da der Richtungsbegriff, der hier in die Arithmetik mit aller Entschiedenheit hineingezogen ist, ein spezifisch „physikalischer" ist, könnte man von einer „Physikalisierung der Arithmetik" reden.

„Die Verallgemeinerung der Zahl zeigt klar, daß die Zahl es ist, welche nach dem Muster der Größe, und nicht umgekehrt die Größe nach dem Muster der Zahl gestaltet wird."[102] Es ist und bleibt also die Zahl (nicht die sinnlose

---

[100] A. a. O. S. 138—174. (Die Algebra der Quaternionen, ebenso die Funktionentheorie der Quaternionen haben sich z. B. „nicht bewährt".)

[101] Vgl. P. Natorp: Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. 1910. (Nach meinem Urteil sind Richtung und Dimension nicht Bestimmungen der „reinen" Zahl, wie Natorp: A. a. O. S. 225—265 darlegen will.)

[102] L. Couturat: A. a. O. S. 130. Doch schließe ich mich seinem Schlußurteil, daß die Verallgemeinerung der Zahl sich heute vollständig unter rein logischen Formen darstellt, nicht an; sondern W. Wundt: Logik II. 1894.

Ziffer!) nach dem Worte Kants das Schema der Größenauffassung. — Die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik, die Zahlen, dürften für eine folgende Betrachtung des Bildungswertes dieser Disziplin hinreichend beleuchtet sein; denn die besonderen Zahlen, die vom Zahlentheoretiker benannt werden, z. B. Primzahlen, vollkommene und befreundete Zahlen, oder vom Algebraiker „konstruiert" werden, z. B. transzendente Zahlen, fallen in den Bereich der oben aufgewiesenen Zahlen (als einzelne oder Komplexionen solcher) hinein. Notwendig aber ist es, daß wir noch einen Blick werfen auf

Die spezifisch arithmetischen Methoden (der Darstellung).

Außer den Fundamentaloperationen — der Addition, Multiplikation, Potenzierung und den inversen Operationen der Subtraktion, Division, Radizierung — nennen wir noch eine „lytische" Operation: das Logarithmieren. Sie erscheint hier von den anderen Operationen getrennt, weil durch sie keine Erweiterung des Zahlbegriffes bedingt ist.

Wir wenden uns zu den Komplexionen dieser Zahlen und Operationen und zu den auf ihnen ruhenden „Erweiterungen" im Gebiete der Algebra und Analysis; doch müssen wir uns hier noch mehr auf eben hinreichende Andeutungen einschränken, die eine schärfere Bestimmung des Bildungswertes der Arithmetik ermöglichen sollen.

Die Algebra wird gewöhnlich als Lehre von den Gleichungen bezeichnet; dabei gilt die Gleichung als ein in arithmetischen Zeichen gegebener Ausdruck fester Beziehungen zwischen Größen, die sämtlich ganz bestimmte Zahlenwerte besitzen, von denen einzelne aber zufällig unbekannt sind. Nach der Anzahl und nach dem „Grade" dieser Unbekannten werden die Gleichungen gewöhnlich „eingeteilt".[103] Die Auf-

S. 149. („Grundlage dieser begrifflichen Konstruktionen bleibt doch die Anschauung ...")

[103] Vgl. W. Wundt: Logik II. S. 154—166. (Es würde den Rahmen

lösung einer Gleichung n-ten Grades in X läuft nun immer darauf hinaus, n Gleichungen ersten Grades zu finden, die den n Wurzeln für X entsprechen. „Diese Untersuchung der Eigenschaften geschieht gewöhnlich auf umgekehrtem Wege als die Entstehung der Gleichung.“ [104] „Die Gleichung als mathematisches Identitätsurteil ist die einzige Form, in welcher der Ausdruck fest bestimmter Relationen zwischen Größen überhaupt möglich ist.“ [105] — Suchen wir ein gegebenes Problem in den symbolisch-arithmetischen Ausdruck zu fassen, d. h. eine Gleichung aufzustellen, so liegt die Bedingung für die Möglichkeit dieser Formulierung des Problems nach Wundt darin, daß die qualitativen Relationen zwischen den Größen sich „auf einfache arithmetische Operationen in begrenzter Zahl zurückführen lassen“. [106] In der neueren Arithmetik wird die Lehre von den Gleichungen gewöhnlich der Theorie der (ganzen) Funktionen eingeordnet; [107] der Funktionsbegriff aber führt uns zu den charakteristischen Methoden und Begriffsbildungen der modernen Mathematik.

In der (höheren) Analysis nimmt der Funktionsbegriff die entscheidende Stellung ein; sein historischer Ursprung kann uns hier nicht beschäftigen; [108] es handelt sich um seine logisch-erkenntnistheoretische Betrachtung. Die übliche Fassung: „Y heißt eine Funktion von X, wenn zu jedem Werte von X ein Wert von Y gehört“ — geht auf Dirichlet zurück. In logischer Beziehung läßt sich der Begriff der Funktion „als diejenige Umgestaltung betrachten, welche der Begriff der logischen Abhängigkeit in der Anwendung auf den allgemeinen Größenbegriff erfahren muß“. [109] Wesentlich aber ist,

---

unserer Arbeit weit überschreiten, wollten wir hier auf die Lösungsmethoden der einzelnen Arten der Gleichungen eingehen; vgl. z. B. H. Weber: Lehrbuch der Algebra. Bd. I. Braunschweig 1895.

[104] W. Wundt: A. a. O. S. 161 (1894).

[105] A. a. O. S. 156.

[106] A. a. O. S. 155.

[107] Vgl. H. Weber: A. a. O. I. S. 207.

[108] W. Wundt: A. a. O. S. 201, ferner H. Weyl: Das Kontinuum. S. 34.

[109] W. Wundt: A. a. O. S. 201.

daß diejenigen Größen, die funktional durch irgendwelche Operationsarten verknüpft sind — es mögen z. B. *X* und *Y* sein — nicht mehr als „konstante", sondern als „variable" Größen betrachtet werden; d. h. während die unabhängige Veränderliche *X* einen (bestimmten) Bereich reeller oder komplexer Zahlen durchläuft, durchwandert die abhängige Veränderliche *Y* einen zugeordneten (ein- oder mehrdeutigen) Bereich anderer Zahlwerte.

Die verschiedenen Arten der Funktionen (z. B. algebraische, transzendente; vernünftige, pathologische) brauchen uns hier nicht zu beschäftigen; für ihre Untersuchung sind der Grenzbegriff und der Begriff der Stetigkeit überaus wichtig. Der strenge Arithmetiker definiert den Grenzbegriff von der Zahlenfolge aus; auf die Zahlenfolge gründet er auch die Lehre von den unendlichen Reihen. „Das mathematische Gesetz der Funktion beherrscht alle Größenbeziehungen, weil seine Anwendung vollkommen in unserer Wahl steht. Es gibt keinerlei Art von Abhängigkeit, welche sich nicht dem Funktionsbegriff unterordnen läßt und in dieser Form der mathematischen Behandlung zugänglich ist". [110].

Aus dem allgemeinen Funktionsbegriff erwächst, als eine innerlich notwendige Weiterbildung, der Differentialbegriff. Die Anschauungen, die sich bei der Ausdeutung und Begründung der Zahl im metaphysischen, realistischen, formalistischen und idealistischen Sinne zeigen, prallen auch hier hart aufeinander.[111] Der geometrische Differentialbegriff geht aus vom Tangentenproblem, der Betrachtung der „unendlich kleinen" Seiten des „charakteristischen Dreieckes"; der arithmetische Differentialbegriff dagegen will frei bleiben von „anschaulichen" Bestandteilen.[112] Wie aber diese „strenge" Ableitung des Differentialquotienten und damit die Begründung

---

[110] A. a. O. S. 206; ferner F. Klein: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie ... 1901.

[111] H. E. Timerding: Die Mathematik in d. phys. Lehrbüchern. IMUK. I 1.

[112] W. Wundt: A. a. O. S. 223—243.

der Infinitesimalrechnung im einzelnen durchgeführt wird, das können wir hier nicht weiter verfolgen.

Die Arithmetik als Wesenswissenschaft. Die wichtigsten Grundbegriffe und Methoden der Arithmetik haben wir in ihrer einfachsten Gestalt berührt;[113] nicht um eine axiomatische Grundlegung der Arithmetik zu geben, sondern um die notwendigen und hinreichenden Klärungen für die Darstellung des Bildungswertes dieser Wissenschaft zu bieten. Um eine Wissenschaft aber handelt es sich, nicht um eine Kunst.[114] Der Forschungsprozeß des Arithmetikers mag dem Erleben und Gestalten des Künstlers in einiger Beziehung ähnlich sein; die arithmetischen Gegenstände unterstehen in ihrem Bedeutungsgehalt nicht dem obersten Gesetz der Kunst, sondern dem Kriterium der Wahrheit. Wenn die einzelne Kunstschöpfung „abgeschlossen in sich" ruht, keiner Ergänzung durch eine andere bedarf, so weist dagegen jede arithmetische Wahrheit über sich hinaus auf den großen Zusammenhang des ideellen Gebäudes, der zunächst erkannt, nicht aber erlebt sein will.[114] Auch eine psychologische Kenntnis der Prozesse des mathematischen Vorstellens, sie mag noch so genau sein, kann uns für die Lösung arithmetischer Probleme keine Hilfsmittel bieten. Die Einsicht in die Notwendigkeit der arithmetischen Gedankenzusammenhänge entsteht uns vielmehr nur „aus der Betrachtung der Verbindung der Sätze durch die Beziehungen der in den Sätzen vorkommenden Begriffe".[115]

Die Begriffe der Arithmetik aber meinen nicht Gegenstände der Erfahrung, nicht Realitäten oder Wirklichkeiten; sondern ideale Gebilde. Sie sind — von den fundamentalen Begriffen der Anzahl und Ordnungszahl an — in vorzüglichem

---

[113] Von weiteren Darlegungen über die Hauptformen der Analysis des Unendlichen und der Algebra sehe ich ab; vgl. dazu A. Voß: Über die math. Erkenntnis. S. 48—49.

[114] Gegen O. Spengler: Der Untergang des Abendlandes. S. 85, 88, 90, 92.

[115] A. Riehl: Logik und Erkenntnistheorie. S. 70—71.

Sinne „Methodenbegriffe“, d. h. Regeln der gedanklichen Vorstellung der Objekte. Die explizite Angabe einer solchen Regel ist die Definition des betreffenden Begriffes. Eine überaus wichtige Rolle spielt in der Arithmetik die „genetische“ Definition; sie erzeugt die Begriffe durch Konstruktion, durch die regelhafte oder bestimmte Zusammensetzung bereits bekannter Gebilde. (Es ist scharf darauf zu achten, daß in der Definition nicht die Gesetzlichkeit im Aufbau des Zeichensystems an die Stelle der Gesetzlichkeit im Aufbau des arithmetischen Sinngefüges tritt! Die „moderne“ Axiomatik neigt dazu, die Gesetze für den formalistischen Aufbau den Axiomen für die sinngemäße Verknüpfung gleichzusetzen.) Nach Frege soll die arithmetische Definition „den Charakter einer für die Unbekannte aufgelösten Gleichung haben, auf deren anderer Seite nichts Unbekanntes mehr vorkommt“.[116] Durch die Definition werden in der Arithmetik neue Begriffe überhaupt erst geschaffen. Obgleich nun Definitionen in Form von Sätzen ausgesprochen werden, sind sie doch keine Aussagen oder Urteile im spezifischen Sinne; vielmehr sucht der Arithmetiker für seine Neubildungen den „Existenzbeweis“ zu erbringen dadurch, daß er die widerspruchsfreie Vereinbarkeit der neuen Konstruktion mit dem alten Gebäude der Arithmetik nachweist. „Was nicht durch mathematisches Denken gerechtfertigt werden kann, darf auch die Mathematik nicht setzen. Die Existenz mathematischer Objekte kann verständlicherweise nichts anderes besagen, als daß sie in den Gesetzen des mathematischen Denkens begründet seien“.[117] Die Einsichtigkeit der arithmetischen Grundsätze, der „Konstruktionsprinzipien“, wurzelt nicht in der sinnlichen Erfahrung des einzelnen oder der Gattung; sondern in den Gesetzen der „reinen“ Anschauung.

Daher sind diese Grundsätze und die „mit“ ihnen (nicht

[116] G. Frege: Grundgesetze ... II. S. 79 (auf die dort angegebenen Merkmale der Definition gehe ich hier nicht ein).

[117] P. Natorp: Die log. Grundlagen ... S. 180.

aus ihnen) abgeleiteten Urteile keine Tatsachenurteile empirischer oder hypothetischer Geltung, sondern Wesensaussagen von rationaler Allgemeinheit und apodiktischer Notwendigkeit! Niemals rekurriert der Arithmetiker, mag er den Existenzbeweis z. B. für Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder den Transzendenzbeweis für e und π[118] oder den Unmöglichkeitsbeweis[119] z. B. für die Auflösung irreduzibler kubischer Gleichungen durch Quadratwurzeln führen, auf Experiment und sinnliche Erfahrung; sondern auf jene im Bereich der natürlichen Zahlen unmittelbar einsichtigen Grundsätze und auf die durch Erweiterung des Zahlbegriffes „gegebenen“ neuen Begriffsbildungen.[120] Nirgends wird die Induktion im Sinne der Tatsachenwissenschaften zur Begründung verwandt; der Schluß von n auf $n+1$, von Poincaré als „raisonnement mathématique par excellence“[121] betrachtet, als „ein Werkzeug, welches uns gestattet, vom Endlichen zum Unendlichen fortzuschreiten“[122], hat bereits oben seine logische Reduktion im Sinne einer Zurückführung auf die Zahlenreihe gefunden.

Von größter Wichtigkeit ist es aber, die mathematische Schlußweise von der syllogistischen zu unterscheiden. Der Syllogismus geht vom Allgemeinen durch Subsumtion auf das Besondere und Einzelne; das mathematische Schlußverfahren führt vom Einfachen zum Zusammengesetzten. Daher sprechen wir mit Kant (Methodenlehre der Kr. d. r. Vernunft) in der Arithmetik von einem konstruierenden Denken. Ansatz und

---

[118] Vgl. G. Hessenberg: Transzendenz von e und π. Leipzig 1912.

[119] Vgl. H. Weber: Enzyklopädie ... I. S. 358.

[120] H. Weyl: Das Kontinuum. 1918. S. 12.

[121] H. Poincaré: Sur la nature du raisonnement mathématique. Revue de Metaphysique ... II. S. 371.

[122] Ders.: Wissenschaft u. Hypothese. 1914. S. 12; ferner A. Höfler: Didaktik des mathem. Unterrichtes. 1909. S. 460—464; W. Lorey: Die vollständige Induktion im mathem. Unterricht. In „Lehrproben und Lehrgänge“. 1921. S. 390—399; ferner auch in der Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht. 1921. S. 205.

Umformung einer Gleichung ist Konstruktion, und „die Analysis konstruiert, indem sie ihre Zeichen nach den arithmetischen Axiomen kombiniert und die Kombination nach Hankels Prinzip der Permanenz verallgemeinert". [123]

Ganz energisch aber betonen wir auch hier — gegen die Tendenzen des Formalismus gewandt —, daß kein wissenschaftlicher Beweisgang, auch nicht ein solcher der Arithmetik, bis zur „Sinnlosigkeit" [124] „atomisiert" und „formalisiert" werden darf, wie es z. B. M. Pasch fordert. Sind die Grundgesetze und Grundbegriffe der Arithmetik durch „bedeutungslose" Wortgebilde oder Zeichen ersetzt und ebenso die abgeleiteten Begriffe, so steht nichts vor uns als das dürre, geistlose Skelett der Zeichen — ohne Sinn, ohne Folgerichtigkeit; ein „hölzernes Schaugerüst im Sinne des Formalismus".[125] Vielmehr ist die Ausfüllung von logischen Leerformen „eine total verschiedene Operation als die echte Spezialisierung bis zur letzten Differenzierung. (So ist z. B. der Übergang vom Raume zur Euklidischen Mannigfaltigkeit keine Generalisierung, sondern eine ‚formale' Verallgemeinerung.)" [126] Selten aber wird das „Unterstehen eines Wesens unter der formalen Allgemeinheit eines rein logischen Wesens" [126] scharf genug von dem „Unterstehen eines Wesens unter seinen höheren Wesensgattungen" [126] geschieden.

Die Arithmetik enthält, wie die gesamte Mathematik, in strengem Sinne „apriorische" Erkenntnisse; d. h. Erkenntnisse von wahrer Allgemeinheit und strenger Notwendigkeit. „Apriorisch sein" bedeutet hier nicht: (zeitlich) vor der Erfahrung im Geist präexistieren; sondern unabhängig von der Erfahrung

---

[123] A. Riehl: Logik u. Erkenntnistheorie. S. 79—80.

[124] M. Pasch: Veränderliche und Funktion. S. 138. Ders.: Über innere Folgerichtigkeit; desgl. Forschen und Darstellen. In „Mathematik u. Logik". Vier Abh. Arch. für die ges. Psych. 1919. Bd. 38. Ähnlich H. Dingler: Das Prinzip d. log. Unabhängigkeit ... 1915.

[125] H. Weyl: A. a. O. Vorwort.

[126] E. Husserl: Ideen zu einer reinen Phänomenologie ... § 13. S. 26.

erkennbar sein, Erfahrung erst ermöglichend. Doch davon reden wir noch, wenn wir die zweite Gruppe der mathematischen Disziplinen, die geometrischen, hinreichend beleuchtet haben.

II. Von dem Raume und von der Geometrie.

Die geometrischen Disziplinen, so wollen wir sie vorläufig bestimmen, stehen zum Begriff des Raumes oder zu einzelnen seiner konstitutiven Merkmale in „bestimmter" Beziehung. Wollen wir ihren Erkenntnis- und Bildungswert ermitteln, so müssen uns diese Beziehungen klar sein. Daher beginnen wir auch hier mit einer erkenntniskritischen Betrachtung der Grundlagen der Geometrie.

Vom Wesen des Raumes.

Auch der Raumbegriff hat, ähnlich dem Begriff der Zahl, Ausdeutungen in ganz verschiedenem Sinne erfahren.[127] Die metaphysischen Spekulationen[128] über den Raum können wir hier übergehen; genauer aber müssen wir auf die realistischen[129] und idealistischen[129] Ausdeutungen eingehen.

Die Wahrnehmung räumlicher Dinge ist für uns durchaus an die Tätigkeit unserer Sinne gebunden. Der Anteil, der den Leistungen der einzelnen Sinnesorgane für die Bildung „anschaulicher", d. h. konkreter Vorstellungen realer Dinge zukommt, ist schwer abzugrenzen. Die Psychologie lehrt, daß unser subjektiver Raum der Wahrnehmung und Vorstellung in seinen verschiedenen Ausprägungen als Gesichtsraum, Tastraum, Bewegungsraum, Schallraum durchaus besondere Qualitäten aufweist, auf die wir hier nicht näher eingehen.[130]

---

[127] Vgl. A. Riehl: Der philosophische Kritizismus. II. 1. 1879. S. 80.

[128] Vgl. J. Cohn: Voraussetzungen ... 1908. S. 202.

[129] Beide Bezeichnungen sind nicht so scharf präzisiert angewandt; die Erweiterung erhellt aus dem Nachfolgenden.

[130] Die neuere Literatur hat gut beachtet A. Titius: Kants transz. Ästhetik im Lichte der heutigen Wissenschaft. 1920. (Festg. für D. Dr. Julius Kaftan. S. 343—375.)

Der empiristisch-nativistische Standpunkt von Poincaré. Von den neueren Mathematikern hat sich besonders H. Poincaré mit der Frage nach der Bedeutung der Raumwahrnehmung für die Geometrie beschäftigt; er äußert sich im Sinne des (erkenntnistheoretischen) Empirismus und des (psychologischen) Nativismus. Den Raum führt er auf ein „komplexes System" von Bewegungsassoziationen zurück. „Was wir unsere Anschauung von der geraden Linie und von der Entfernung nennen, ist der Begriff, den wir von diesen Assoziationen und von ihrem zwingenden Charakter haben."[131] Diese Assoziationen aber sind nicht allein Erwerbungen des Individuums, sondern vor allem Erwerbungen der Rasse. „Die natürliche Zuchtwahl mußte diese Erwerbungen um so schneller herbeiführen, je notwendiger sie sind."[131] Indem sich unser Verstand durch natürliche Zuchtwahl den Bedingungen der äußeren Welt angepaßt hat, hat er „diejenige Geometrie angenommen, welche für die Gattung am vorteilhaftesten war, oder mit anderen Worten: die am bequemsten war".[132] Die Evidenz der geometrischen Wahrheiten „ist nichts anderes als die Abneigung, die man empfindet, mit uralten Gewohnheiten zu brechen, in denen man sich bisher sehr wohl fühlte".[131] Unsere Erfahrungen aber erstrecken sich zunächst nur auf einen kleinen Raum, „nicht größer als meine Armeslänge beträgt; man benötigt die Vermittlung des Gedächtnisses, um die Grenze dieses Raumes zu erweitern".[131] Der eingeschränkte Raum ist nicht homogen; die Punkte des erweiterten Raumes aber erscheinen uns gleichwertig; zum großen Raum, in dem wir „das Universum unterbringen, gelangen wir durch einen Akt unserer Einbildungskraft".[131] Alle seine Eigenschaften aber sind nach Poincaré aus der Erfahrung entnommen, indem wir „den Raum der Welt, in der wir lebten, anpaßten";[131] selbst die Dreidimensionalität

---

131 H. Poincaré: Wissenschaft und Methode, S. 90—102.
132 Ders.: Wissenschaft und Hypothese. S. 90, 81.

ist „eine interne Eigenschaft menschlicher Intelligenz"[131], die Zerstörung unserer „Ideenassoziation" würde vielleicht eine vierte Dimension für uns erschaffen.[131] „Die Erfahrungstatsachen lassen uns nur die gegenseitigen Beziehungen der Körper erkennen; keine von ihnen bezieht sich (oder kann sich auch nur beziehen) auf die Beziehungen der Körper zum Raume oder auf die wechselseitigen Beziehungen der verschiedenen Raumteile."[133] „Es gibt keinen absoluten Raum; es gibt nur den in Beziehung zu einer gewissen Anfangslage des Körpers relativen Raum."[134]

Nur mit wenigen Worten können wir an dem von so vielen modernen Mathematikern vertretenen Standpunkt des Empirismus in Sachen der Geometrie Kritik üben.[135]

Die Frage, wie das Individuum zur Raumanschauung gelangt, gehört in die genetische Psychologie; doch kann sie auch dort nicht ohne erkenntniskritische Überlegungen untersucht werden; denn die psychologische Analyse setzt ja selbst den Raumbegriff voraus. Eine Wissenschaft aber, die den Raum voraussetzt, kann nicht den Rechtsgrund für die Geltung der räumlichen Axiome bieten.[136] Es ist unmöglich, den Raum aus Bewegungen abzuleiten; denn Bewegungen sind ja nur im Raume möglich. Wer den Raum, nicht die Orientierung im Raume, aus Bewegungen ableiten will, muß immer einen Zirkelschluß begehen. Wie die Bewegung, die als objektiver Vorgang in der realen Welt entsteht, nur im Raume möglich ist, ihn also voraussetzt, so setzt auch die Vorstellung der Bewegung (nicht psychologisch, sondern erkenntniskritisch) subjektiv die Vorstellung des Raumes voraus; der Raum ist also „ursprünglich". Die Vorstellung des Nebeneinander gleichzeitiger Eindrücke läßt sich nicht weiter zerlegen; sie kann daher auch nicht schrittweise entwickelt worden sein.

---

133 Ders.: A. a. O. S. 90. 134 Ders.: Wiss. u. Meth. S. 93.

135 Außer Poincaré sind noch Enriques, Hölder, Pasch, Wellstein, Dingler zu nennen. 136 Vgl. J. Cohn: Voraussetzungen. S. 205.

„Bei den alten Ägyptern war die Geometrie eine induktive Wissenschaft; aber sie war in wesentlichen Stücken falsch. Den Grund zur Geometrie als Wissenschaft haben die Griechen gelegt, indem sie den induktiven Weg bewußt verließen und ihre Begründung in reiner Deduktion suchten."[137] Ideierende Abstraktion, durch welche die Grundbegriffe der Geometrie entstehen, ist nicht Induktion! „Die Korrektur der Erfahrung, die sie einschließt, würde in induktiver Wissenschaft schlechterdings unzulässig sein."[138] Die Grundbegriffe sind Ideen im Sinne Platos, nach denen die Erfahrung sich zu richten hat; sie gehören zu einem Wissen, das der Geist von sich aus hat. — Damit aber sind wir auf den Standpunkt Kants getreten, der trotz der scharfen, klaren Darlegungen, die er z. B. in den Schriften von A. Riehl[139] gefunden hat, von vielen Mathematikern immer wieder „mißverstanden" wird.

Kants Lehre vom Raume. Kant scheidet — mit Newton — den relativen materiellen Raum, der selbst beweglich ist, von dem reinen, absoluten Raum, in welchem alle Bewegungen zuletzt gedacht werden. Alle Bewegung, die ein Gegenstand der Erfahrung ist, ist nur relativ; der „Raum, in dem sie wahrgenommen wird, ist ein relativer Raum, der selbst wiederum, und vielleicht in entgegengesetzter Richtung, in einem erweiterten Raume bewegt . . . genannt werden kann". „Einen absoluten Raum, d. i. einen solchen, der, weil er nicht materiell ist, auch kein Gegenstand der Erfahrung sein kann, als für sich gegeben annehmen, heißt etwas, das weder an sich, noch in seinen Folgen (der Bewegung im absoluten Raum) wahrgenommen werden kann, um der Möglichkeit der Erfahrung willen annehmen, die doch jederzeit ohne ihn angestellt werden muß. Der absolute Raum ist also an sich nichts und gar kein Objekt, sondern bedeutet nun einen jeden

[137] P. Natorp: Die log. Grundlagen. S. 317.

[138] P. Natorp: A. a. O. S. 317.

[139] A. Riehl: Der philos. Kritizismus. Bd. I. 1908; Bd. II. 1879. Ders.: Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. 1919. S. 92—101.

andern relativen Raum, den ich mir außer dem gegebenen jederzeit denken kann, und den ich nur über jeden gegebenen ins Unendliche hinausrücke, als einen solchen, der diesen einschließt und in welchem ich den ersteren als bewegt annehmen kann ... Ihn zum wirklichen Dinge zu machen, heißt die logische Allgemeinheit irgendeines Raumes, mit dem ich jeden empirischen als darin eingeschlossen bezeichnen kann, in eine physische Allgemeinheit des wirklichen Umfanges verwechseln, und die Vernunft in ihrer Idee mißverstehen."[140] So ist der Raum, d. h. der absolute Raum im Sinne Kants eine reine Form der Anschauung. — Wir wenden uns den wesentlichen Merkmalen des Raumbegriffes zu.

Vom Raume der Geometrie und von den geometrischen Axiomen.

Die konstitutiven Merkmale des Raumes — gewöhnlich werden Stetigkeit, Unendlichkeit, Dreidimensionalität, Homogeneität, Isotropie als solche genannt[141] — erinnern uns an die Merkmale der Zeit.

Die Stetigkeit des Raumes wird nach Riehl[142] mittels der Stetigkeit der Zeit erkannt. Der Begriff der Stetigkeit ist für Raum und Zeit derselbe; der Unterschied beruht allein auf dem Unterschied der Vorstellungsarten (auf der intuitiven Erfüllung des Gemeinten). Um eine Linie wirklich vorzustellen, müssen wir sie in Gedanken ziehen; um zur Vorstellung einer bestimmten Gestalt zu gelangen, müssen wir die Teile der Gestalt sukzessiv entwickeln, d. h. konstruieren. Wir müssen also die räumliche Vorstellung zeitlich entwickeln. Somit muß das, was von der Zeit gültig ist, in dieses Produkt zeitlicher Synthese, in die Konstruktion eingehen. Der

---

[140] I. Kant: Metaph. Anfangsgründe der Naturwissenschaft. 1787. Anmerkung 2; S. 2—3; ferner vor allem Ders.: Kritik der reinen Vernunft. (Der transz. Ästhetik erster Abschnitt. §§ 2—4.)

[141] H. Poincaré: Wiss. u. Hyp. 1914. S. 54. (Anmerkung.)

[142] A. Riehl: Der philos. Kritizismus. Bd. II.

Satz, daß eine Gerade zwischen zwei Punkten die kürzeste Verbindung darstellt, läßt sich so als ein zeitlich begründeter Satz betrachten. Das zeitlich und auch das räumlich Kürzeste gehen auf einen gemeinschaftlichen Ursprung zurück. — Es ist unmöglich, aus Punkten eine Linie, aus Linien eine Fläche, aus Flächen einen Raum anschaulich aufzubauen. Schon einmal betonten wir, daß es niemals gelingen kann, die Stetigkeit aus reinen Zahlen abzuleiten.[143] Aus einer Beziehung zwischen reinen Zahlen läßt sich niemals eine geometrische ableiten; nur soweit der Raum arithmetisiert ist, gilt von ihm das Analytische. Was den Raum darüber hinaus charakterisiert, bleibt völlig unbestimmt.

Die Unendlichkeit ist von der Unbegrenztheit scharf zu scheiden. Geben wir die Gerade als Raumelement zu, so haben wir gleich den unendlichen Raum. Die Unendlichkeit kann nur zeitlich in der Reihenform vorgestellt werden; daher ist die Unendlichkeit der Zeit nach Riehl[144] Grund der Unendlichkeit des Raumes. Der Begriff der Geraden ist gleich dem Begriff der Richtungsidentität. Richtung aber kann nicht aus reiner Logik, aus reinem Denken abgeleitet werden; sie ist das Schema für unsere Konstruktion (S. 50!).

Die Homogeneität bezeichnet die Eigenschaft des Raumes, daß jeder seiner Punkte mit jedem anderen zur Deckung gebracht werden kann. Nach Riehl[144] ist die Homogeneität der Zeit die Voraussetzung der Homogeneität des Raumes. Die Gleichförmigkeit des Raumes an allen Orten und nach allen Richtungen setzt beim Fortgang und Rückgang von Teil zu Teil nicht nur den allgemeinen Begriff der Identität, sondern auch seine bestimmte Anwendung auf Zeit und Raum voraus. Kontinuität und Homogeneität gehen hier immer zusammen; weil sie die gemeinschaftliche Quelle in der Einheit und Sichselbstgleichheit des denkenden Subjektes haben, dieses Subjektes, das in jeder Tätigkeit, die eine Unter-

[143] Vgl. S. 49 dieser Arbeit.
[144] A. Riehl: A. a. O.

brechung erfährt, sich selbst interpoliert und dadurch einen stetigen Zusammenhang hervorbringt. Aus der stetigen Gleichförmigkeit des Raumes ins Unendliche folgt die Kongruenz aller im Raume in gleicher Weise erzeugten Figuren, die anschauliche Wirkung der Kongruenz ist die Deckung.

Die Dreidimensionalität ist nicht logisch ableitbar.[145] „Für diese innere Beschränkung des Raumes läßt sich kein apriorischer Grund namhaft machen. Der Raum, die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, ist ja nicht die einzig denkbare, wohl aber die einzig tatsächliche Ausdehnungsform."[146] Die Dreidimensionalität des Raumes ist aber auch keine „Hypothese"; sondern Grundanschauung des Raumes.

Die Isotropie bezeichnet diejenige Eigenschaft des Raumes, daß alle durch einen Punkt des Raumes gehenden Geraden durch Drehung um den Punkt zur Deckung gebracht werden können. — Der Raum, der durch die Merkmale der Stetigkeit, der Unendlichkeit, der Homogeneität, der Dreidimensionalität und der Isotropie als der absolute gekennzeichnet ist, ist nur einer. Die Einzigkeit des Raumes können wir deshalb nicht aufheben, weil das Gesetz, nach dem wir räumliche Vorstellungen gewinnen, das Gesetz eines einheitlich denkenden Wesens ist.

Somit ist auch der Raum — wie die Zeit — nicht durch reine Denkbestimmungen charakterisiert, wie die Marburger Schule behauptet.[147] Der Raum ist und bleibt vielmehr die Anschauungsform im Sinne Kants, d. h. die gesetzliche Verfahrungsweise, äußere Dinge (anschaulich) zu konstruieren. Jene aufgewiesenen Merkmale des Raumes sind daher auch von aller Erfahrung unabhängig! Aus undefinierbaren Grundgebilden — aus Punkten, Geraden, Ebenen — konstruiert der Geometer seine Gestalten, indem er sie nach den Axiomen der Geometrie verknüpft.

---

[145] Vgl. P. Natorp: A. a. O. S. 303.
[146] A. Riehl: A. a. O. [147] Vgl. P. Natorp: A. a. O.

Bei dem Aufbau eines geometrischen Lehrgebäudes werden diese Axiome gewöhnlich mit den undefinierbaren Grundbegriffen vorangestellt, als Grundlage des „deduktiven" Aufbaues benutzt. Wir treiben hier keine Axiomatik; doch müssen wir das Wesen der Axiome der Geometrie näher beleuchten, um den Erkenntniswert und Bildungswert dieser Disziplin beurteilen zu können.

Von den geometrischen Axiomen. Jede deduktive Wissenschaft stützt sich auf gewisse Grundsätze. Wer die Axiome der Geometrie „notwendige Voraussetzungen der Deduktion" nennt, kennzeichnet ihre logische Bedeutung im System der geometrischen Sätze; er gibt aber kein Kriterium dafür, daß diese Axiome spezifisch geometrische Grundsätze sind. Die Axiome der Geometrie sind auch keineswegs „willkürliche", auf „Übereinkommen" beruhende Festsetzungen[148] oder nur „verkleidete Definitionen". Definitionen sind, so sagten wir bereits früher (S. 21), ausführliche Begriffe; Begriffe aber sind nichtaussagende Formen des Vorstellens;[149] sie unterstehen also nicht dem Kriterium der Wahrheit. Jedes Axiom der Geometrie aber wird als unmittelbar gewiß, als wahr angenommen. — Außerdem hat das Moment der Willkür in einer strengen Wissenschaft keinen Platz. Zu einem sinnvollen Aufbau braucht man auch bestimmte sinnvolle Grundsätze, nicht Voraussetzungen beliebiger Art. — Auch die Angabe: Axiome sind Sätze, die weder des Beweises fähig noch bedürftig sind — gibt keine hinreichende Charakterisierung der Axiome der Geometrie; sie bedarf vielmehr der Erklärung, um nicht mißverstanden zu werden. Wenn ich sage, ein Axiom ist des Beweises nicht bedürftig, so ist nicht jene „subjektive Bedürftigkeit" gemeint; d. h. nicht die Ansicht, daß dieses Axiom für mich nicht des Beweises bedürftig sei; vielleicht aber doch für einen anderen, tiefer dringenden Geist sich

[148] H. Poincaré: Wiss. u. Hyp. S. 51—52.
[149] A. Riehl: Beiträge zur Logik. 1912. S. 14.

die Notwendigkeit und Möglichkeit des Beweises dieses Axiomes ergibt. So kann der Zusatz: des Beweises nicht fähig — in positiver Wendung nur besagen: das Axiom ist durch sich selbst gewiß; daher bedarf es keiner Begründung. Eine Erkenntnis aber kann nur klar einsichtig sein vermöge ihrer Einfachheit. Gerade aus der Einfachheit einer Erkenntnis folgt also ihre axiomatische Natur — nicht umgekehrt. Solche einfachen Erkenntnisse sind des Beweises weder fähig noch bedürftig.

Auch im Streit um das Wesen der Axiome lebt der alte Gegensatz von Empirismus und Rationalismus wieder auf.[150] „Axiome sind Tatsachen der Anschauung," d. h. der sinnlichen Wahrnehmung — so behauptet der empiristische Mathematiker. Jede sinnliche Wahrnehmung ist aber mit einem gewissen „Unsicherheitskoeffizienten" behaftet; so werden diese Tatsachen der Anschauung für den „exakten" Mathematiker zu „Hypothesen". Der Empirismus führt unweigerlich zum Konventionalismus, zumeist sogar zum Formalismus. Die „Tatsachen" der Geometrie aber sind niemals Tatsachen der äußeren Erfahrung; sondern Tatsachen, welche äußere Erfahrung erst möglich machen. Es sind Tatsachen, die aus den wesenhaften Eigenschaften der Raumvorstellung stammen. Ihre inneren Beziehungen werden in einer Anzahl von Sätzen (Axiomen) klargelegt.

Niemand wird bestreiten, daß die Geometrie durch die äußere Wahrnehmung fester Körper sich entwickelt. Die Existenz des starren Körpers aber für die Begründung der Geometrie voraussetzen[151], heißt die Geometrie zur Naturwissenschaft von den festen Körpern stempeln. Da es nach der heutigen Naturwissenschaft keine absolut starren Körper gibt, verwandelt sich so die Geometrie in eine „Annäherungswis-

---

150 Es ist unmöglich, hier zu den Formulierungen einzelner Forscher (Riemann, Helmholtz, Hölder, Pasch, Couturat, Veronese) genauer Stellung zu nehmen.

151 H. Poincaré: Wiss. u. Hyp. S. 51; H. Dingler: A. a. O. S. 116.

senschaft". Man redet von einer „natürlichen Geometrie".[152] Sie ist aber nur soweit Wissenschaft, als sie streng bezogen ist auf jene einzige „Präzisionsgeometrie", die sich in uns entwickelt an Gegenständen, die gar nicht fest zu sein brauchen; wenn „nur der Verstand, der ihre Gesetze aufstellt, fest ist und fest bleibt"[153], d. h. das Prinzip der Einheitlichkeit des Denkens bei der Betrachtung der geometrischen Beziehungen gewahrt bleibt. Mit diesen Ausführungen sind wir auf den Kantischen Anschauungsbegriff zurückgekommen, wie ihn besonders A. Riehl herausgearbeitet hat.

Die geometrischen Axiome sind also keineswegs reine Denkgesetze, d. h. Ausfluß des Prinzipes der Identität;[154] denn die Annahme ihres Gegenteiles schließt, logisch gesehen, durchaus keinen Widerspruch ein. Das müßte aber der Fall sein, wenn die Axiome eine Folge des Identitätssatzes wären. Nur die Denknotwendigkeiten und die Denkmöglichkeiten kann die Logik feststellen; welche besonderen Objekte gemeint sind, das muß hinzugefügt werden. Zur Wissenschaft gehört immer m e h r als reine Logik; zu einer Tatsachenwissenschaft gehört vor allem Erfahrung. Aber selbst für die Idealwissenschaft der Mathematik reicht reine Logik nicht hin zur Begründung. Die Annahme, daß die Arithmetik auf Logik begründet werden könne, beruht — nach den früheren Darlegungen — auf einer Verwechslung der „Logik der Zeichen" mit der Arithmetik. Ebenso muß zur Logik ein „Zusatz" hinzutreten, damit Geometrie „möglich" ist. Kant bezeichnet ihn als „reine Anschauung". Wir wissen, daß nicht s i n n l i c h e Wahrnehmung, nicht Phantasievorstellung gemeint ist; sie alle können aus psychophysischen Gründen nicht exakt sein.[155] An-

[152] Vgl. M. Pasch: Vorlesungen über neuere Geometrie; J. Wellstein: Enzyklopädie II. S. 111.

[153] Nach einem Worte von A. Riehl.

[154] Über „reine Denkgesetze" vgl. die genannten Schriften von A. Riehl; ferner auch N. Ach: Über die Erkenntnis a priori insbesondere in der Arithmetik. Leipzig 1913.

[155] Vgl. z. B. O. Klemm: Sinnestäuschungen. 1919.

schauung bedeutet im Sinne Kants: das unmittelbare Bewußtsein der Formgesetze des Anschauens! Diese formale Anschauung muß zur Logik treten, damit Mathematik möglich ist. Wer diese Anschauung für inexakt erklärt, der übersieht die immanente Logik der Anschauungsform. Es ist also scharf zwischen der empirischen Anschauung und der reinen Anschauung im Sinne Kants zu unterscheiden! Woher wissen wir denn, daß Gesichtsraum, Tastraum, Bewegungsraum nicht mit dem geometrischen Raume zusammenfallen? Wir müssen doch die Raumanschauung, den Begriff des Raumes voraussetzen, um so die Abweichungen des empirischen Raumes vom geometrischen konstatieren zu können.

Fassen wir die Axiome der Geometrie als Ausdruck für die Formgesetze der Anschauung, so ergibt sich eine wichtige Folgerung: es ist unmöglich, aus dem System der Axiome einzelne herauszulösen oder andere hinzuzufügen; geschieht das, so wird das geschlossene System der Axiome durchbrochen. Sieht man z. B. von dem Axiom der Stetigkeit ab (wie es die nichtarchimedischen Geometrien tun), so hat man eben keinen Raum mehr, sondern höchstens ein Zahlengebiet. Die geometrischen Axiome gehören also zusammen; weil sie in ihrer Gesamtheit die Gesetze der Raumanschauung abbilden. Auch das Parallelenaxiom kann nicht „abgelöst" werden; der Raum ist einzig schlechthin. Es kann also keinen Raum geben, in dem das Euklidische Postulat nicht gilt.[156]

Aber wie gelangen wir, wie kommt der Geometer zur Kenntnis dieser Axiome? — Alles beweisbare Wissen ist „vermitteltes" Wissen; die Wissensvermittlung aber beruht auf unmittelbarem Wissen; weiter kann keine Wissensvermittlung zurückgreifen. Der logische Satz vom Grunde sagt keineswegs aus, daß alles eine Folge sein müsse; sondern nur, daß das, was eine Folge sein kann, eben begründet wer-

[156] Vgl. die folgenden Bemerkungen über die Axiomatik der Geometrie, S. 73 dieser Arbeit.

den muß. Die Begründung hat also einen Anfang; damit auch der Beweis ein Ziel. Welches ist nun das Kriterium dafür, daß ein „Satz", besser ein Urteil als Axiom hingestellt werden kann? Es geht nicht an, das „Gefühl der Evidenz" zur Grundlage der logischen Geltung zu machen. Wir suchen ein objektives Kriterium für die „Echtheit" eines Axioms; eine Möglichkeit, jene vorausgesetzte, unmittelbare Einsicht unabhängig vom „Evidenzgefühl" als wahr nachzuweisen.[157]

Folgender Gedankengang von A. Riehl scheint uns die Existenz der Axiome zu erhärten und die Methoden ihrer Auffindung zu beleuchten. Was uns gegeben ist, sind Erkenntnisse; diese sind aber etwas Zusammengesetztes. Schon die Auffassung, daß sie zusammengesetzt sind, ist Beurteilung eines Gegebenen. Auch beim Sehen und Hören, beim sinnlichen Wahrnehmen überhaupt, haben wir Eindrücke, die nicht willkürlich gesehen und gehört werden, sondern in bestimmter Ordnung, Qualität usw. gegeben sind. Die Zerlegung dieses Zusammengesetzten, z. B. die Analyse des gegebenen Farben- oder Tonkomplexes in seine letzten Elemente, kann aber nicht ins Unendliche fortgesetzt werden, wenn sie von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus erfolgt. (Wir reden hier nicht von einer Zerstückung!) Haben wir dieses Einfache gefunden, so können wir „darunter" nicht noch weiter analysieren. Jeder Zusammenhang der Natur wird so vom Physiker und Chemiker und Biologen auf letzte Einfachheiten zurückgeführt.

Ähnlich liegt es in der geometrischen Forschung. Auch hier wollen wir den ganzen Gedankenaufbau zerlegen[158] in der absoluten Gewißheit, daß diese Zerlegung nicht grenzenlos weitergeführt werden kann; sondern daß sie auf letzte Einfachheiten führt. Diese Einfachheiten bilden die Elemente

---

[157] Vgl. E. Husserl: Ideen zu einer Phänomenologie. 1913. S. 39. J. Volkelt: Gewißheit und Wahrheit. 1918. S. 422—454.

[158] D. Hilbert: Grundlagen 1913; dazu J. Cohn: Voraussetzungen. S. 228 u. f.

des Gedankenbaues; auf diese schlechthin letzten Gegebenheiten kann also auch der Gedankengang nur reduziert werden. Bei der Analyse der Zahlenreihe können wir nicht unter die Einheit und die einfachsten Beziehungen des Nacheinander und des Nebeneinander zurückgehen. Nicht die „Eins", nur die Größe, welche durch die Einheit bezeichnet wird, kann geteilt werden. Solche letzten Elemente und ihre einfachen Beziehungen sind die Grundbestandteile auch der Geometrie.[159] Nicht also das Evidenzgefühl, sondern die objektive Analyse bietet das Kriterium für die Echtheit eines Axiomes; den Begriff der Einfachheit haben wir dabei als den Begriff der letzten Zusammenhänge entdeckt. Diejenigen Aussagen nun, die sich auf diese Zusammenhänge beziehen, nennen wir Axiome. — Die entsprechenden einfachen, elementaren Vorstellungen für den sinnlichen Zusammenhang[159], für die Tatsachenurteile, finden wir in den unzerlegbaren Tatsachen, die wir den unzerlegbaren Einsichten entsprechend „axiomatische Tatsachen" nennen. Sie bilden die Voraussetzung für den realen Aufbau der Natur (und der Produkte der Technik). Zwischen den axiomatischen Tatsachen und den Axiomen bestehen fundamentale Unterschiede. Jene liegen in der realen, diese in der ideellen Sphäre; jene wollen verstanden **und** realisiert, diese nur verstanden sein. Die axiomatischen Tatsachen lassen sich nie vollkommen verwirklichen;[160] in der Mathematik ist das Problem der Auffindung der Axiome aber lösbar. Über den Zusammenhang der Gedanken, in den die Axiome eingehen, verfügen wir ganz anders als über den Komplex der Sinneseindrücke, der den axiomatischen oder realen Tatsachen entspricht. Die ideellen Objekte, die wir nach den Gesetzen des Denkens und Anschauens erschaffen, sind von uns bis in ihre letzten Elemente zerlegbar. Wir können die Axiome also gewinnen; wir können sie aber auch nicht entbehren. Fassen wir die Axiome im dargelegten Sinne, so hat

---

[159] H. Dingler: Die Grundlagen der angewandten Geometrie. 1911.
[160] Vgl. H. Dingler: A. a. O.

kein Zweifel an ihrer Existenz mehr Raum. Die Herausstellung der Axiome ist eine Aufgabe des Forschers, der hier um so leichter in die Irre geht, je mehr er dem Evidenzgefühl und je weniger er jenem objektiven Kriterium der Einfachheit folgt.

Ganz kurz blicken wir noch auf die Ergebnisse der axiomatischen Bestrebungen in der geometrischen Forschung. Die Axiomatik der Geometrie bemüht sich, die konstruktive Tragweite, die logische Schichtung der Axiome und ihrer Folgerungen zu ermitteln.[161] Öfter sind ihre Aufgaben dargelegt worden.[162] Streng deduktiv ist von den Grundbegriffen und Grundsätzen aus das Gebäude der Geometrie zu errichten; das System der Grundbegriffe und Grundsätze aber ist auf die Widerspruchslosigkeit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit der Grundbegriffe und Grundsätze zu untersuchen. Dabei sind rein geometrische Methoden, später Methoden der analytischen Geometrie des Descartes, der Differentialgeometrie; ferner „Abbildungen" eines Lehrgebäudes in einem anderen geometrischen angewandt worden. Doch kann die Methodenfrage hier unter diesem Gesichtspunkt nicht weiter verfolgt werden.

Seit den Tagen des Proclus ist eifrig die Frage nach der Unabhängigkeit des fünften Euklidischen Postulates untersucht worden.[163] „Wenn es möglich wäre, das Euklidische Postulat auf andere Axiome zurückzuführen, so würde man offenbar bei Verneinung dieses Postulates und bei Zulassung der anderen Axiome auf widerstreitende Folgerungen stoßen; es würde also unmöglich sein, auf solche Voraussetzungen eine zusammenhängende Geometrie zu stützen."[164]

[161] Vgl. J. Cohn: A. a. O. S. 209—228.

[162] K. Th. Vahlen: Abstrakte Geometrie. Leipzig 1905. S. 1; ferner M. Pasch: Über innere Folgerichtigkeit. 1915; ferner H. Dingler: A. a. O. D. Hilbert: A. a. O.

[163] R. Bonola: Die nichteuklidische Geometrie. Leipzig 1908. F. Enriques: Fragen der Elementargeometrie. Teil I u. II.

[164] H. Poincaré: Wiss. u. Hyp. S. 37.

Die sogenannten Nichteuklidischen Geometrien stellen solche Systeme in sich völlig widerspruchsfreier Aussagen dar; aber es sind damit nicht verschiedene Räume gewonnen, sondern nur verschiedene Bestimmungsarten eines und desselben Raumes. Daß diese verschiedenen Bestimmungsarten aber möglich sind, liegt daran, daß sie auf die nicht anschaulichen, gedanklichen, absoluten Bedingungen der reinen Anschauung reflektieren. Eine experimentelle Entscheidung über die Frage, welches der Lehrgebäude — von Euklid, Lobatschefskij oder Riemann — wahr ist, kann nicht getroffen werden; denn alle Messungen sind stets Messungen von Dingen im Raume, nie Messungen des Raumes.[165]

Unter Ausschaltung des Archimedischen Axiomes der Stetigkeit haben Veronese[166] und Hilbert[167] ein in sich widerspruchsfreies System von Sätzen abgeleitet, eine „Nichtarchimedische Geometrie". „Der Nichtarchimedische Raum ist nicht mehr ein Kontinuum zweiter, sondern ein Kontinuum dritter Ordnung";[168] d. h. ein Zahlenbereich. Hilbert hat dann noch eine „Nichtpascalsche Geometrie" konstruiert, die „notwendig zugleich auch eine Nichtarchimedische Geometrie ist".[169]

Gerade die modernen Arbeiten über die Axiome der Geometrie sind großenteils mit den methodischen Hilfsmitteln der analytischen Geometrie durchgeführt; d. h. unter weitgehender Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie. Im folgenden haben wir die seit Descartes und Fermat energisch in Angriff genommene Arithmetisierung der Geometrie noch zu verfolgen.

---

[165] Weber-Wellstein: Enzyklopädie II. 1915. S. 77.
[166] G. Veronese: Grundzüge der Geometrie. 1894.
[167] D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie. 1913.
[168] H. Poincaré: A. a. O. S. 49.
[169] D. Hilbert: A. a. O. S. 95.

Über die Erweiterungen des Raumbegriffes.

Schon die letzten Bemerkungen über die Axiomatik der Geometrie erklären uns, warum die Mathematiker in ganz ähnlichem Sinne wie von einer Erweiterung des Zahlbegriffes auch von einer Erweiterung des Raumbegriffes sprechen. Die Begründung der Nichteuklidischen Geometrien, besonders aber der Aufbau der Nichtarchimedischen, der Nichtdesargueschen, der Nichtpascalschen „Geometrie" ist wesentlich durch die Arithmetisierung der Geometrie vollzogen. Nicht neue Räume sind damit entdeckt, sondern Systeme von geometrischen Aussagen aufgestellt, die logische Beziehungen zwischen geometrischen Axiomen und ihren Folgerungen zum Ausdruck bringen.

Die Arithmetisierung der Geometrie. Die analytische Geometrie sucht, im Gegensatz zur synthetischen Geometrie, die Beziehungen der räumlichen Gebilde unter weitgehender Verwendung aller Hilfsmittel der Analysis zu formulieren.[170] Jeder Zahl „ist" ein bestimmter Punkt einer Geraden, jedem geordneten Zahlenpaare ein Punkt einer Ebene, jedem Tripel geordneter Zahlen ein bestimmter Punkt des Raumes umkehrbar eindeutig zugeordnet. Die Bewegung, das Grundprinzip der analytischen Geometrie, führt einen Punkt in den anderen über; der Punkt beschreibt eine Kurve[171], die Kurve eine Fläche, die Fläche einen Raum. Aber die Bewegung bezeichnet hier „lediglich einen idealen Vorgang: sie ist der Ausdruck der Synthese, in welcher eine sukzessive Mannigfaltigkeit von Lagebestimmungen, die durch irgendein Gesetz zusammenhängen, zur Einheit eines räumlichen Gebildes zusammengefaßt wird".[172] „Die anschauliche geometrische Linie löst sich auf in eine reine Wertfolge von Zahlen, die durch eine bestimmte arithmetische Regel miteinander ver-

[170] Vgl. F. Klein: Elementarmathematik II. S. 111.
[171] Vgl. H. Weyl: Das Kontinuum. S. 77.
[172] E. Cassirer: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. S. 94.

knüpft werden."[173] Die Vermittlung des Bewegungsbegriffes dient also tatsächlich nicht den Zwecken der Veranschaulichung, sondern denen der fortschreitenden Rationalisierung. Bei der Behandlung der algebraischen, transzendenten, mechanischen usw. Kurven und Flächen entfaltet der Funktionsbegriff seine volle Kraft; mit den Methoden der Infinitesimalrechnung, der Gruppen- und Invariantentheorie wird die Arithmetisierung der Geometrie dann „restlos" durchgeführt. An die Stelle der Konstruktion der synthetischen Geometrie tritt die Transformation von Gleichungen. Nach Cassirer ist der Anschluß der Geometrie an die Gruppentheorie für die Gesamtcharakteristik entscheidend. „Im Begriff der Gruppe ist ein allgemeines Klassifikationsprinzip gewonnen, durch welches die verschiedenen möglichen Formen der Geometrie unter einen einheitlichen Gesichtspunkt vereint und in ihrem symmetrischen Zusammenhang überschaut werden können."[174]

Bei der Arithmetisierung der Geometrie werden nicht allein reelle Zahlen, sondern auch komplexe Zahlen benutzt. Um dann noch allgemeine, ausnahmslose Sätze aufstellen zu können, werden den eigentlichen, anschaulich erfaßbaren Punkten des Raumes „uneigentliche Punkte" adjungiert.[175] Imaginäre Kreispunkte und Kugelkreise, imaginäre Ebenen und Kegelschnitte usw. treten so als „neue" Gebilde im „Raum" der komplexen Geometrie auf.

M e h r d i m e n s i o n a l e G e o m e t r i e n. Daneben ist die formale Verallgemeinerung, die vom zwei- und dreidimensionalen Gebilde zum vier-, mehr- und unendlichdimensionalen Raume führt, nur noch zu erwähnen. „Zwischen den verschiedenen Räumen, welche die Geometrie betrachtet, und den Zahlenmengen, die man an ihre Seite setzt, besteht eine formale Analogie; aber keine Identität" — soweit stimmen wir Couturat zu;[176] doch ist es unmöglich, logisch die Existenz dieser

[173] Ders.: A. a. O. S. 95. [174] Ders.: A. a. O. S. 116—118.
[175] Vgl. F. Klein: A. a. O. II. Die Imaginärtheorie. S. 243—271.
[176] L. Couturat: A. a. O. S. 224—226.

Räume zu erweisen, „ohne irgendein Postulat der Anschauung“ heranzuziehen; diese Räume sind und bleiben — luftige, wenn auch sichere Gebäude arithmetischer Konstruktion, die immer der Belebung durch die Anschauung harren.

Überblicken wir den Weg sowohl der Erweiterung des Zahlbegriffes wie auch der Erweiterung des Raumbegriffes, so konstatieren wir mit W. Wundt: „Die Begriffserweiterungen der analytischen Geometrie und der geometrischen Analyse treffen sich. Es handelt sich also hier nicht um willkürliche Erfindungen, sondern um eine naturgemäße Entwicklung, die sich aus den dem Zahlbegriff wie der geometrischen Anschauung immanenten Eigenschaften vollzogen hat.“ [177] Zum Schluß unserer Darlegungen über Raum und Geometrie blicken wir noch — schon Erwähntes mit zusammenfassend — auf

Die Methoden der Darstellung in der Geometrie.

Für die Betrachtung der Methoden der Geometrie kommen hier weder spezifisch technische Gesichtspunkte (wie z. B. Art und Zahl der Konstruktionsmittel) noch ökonomische Gesichtspunkte (wie z. B. das Minimum der Denk- und Konstruktionsschritte), sondern allein logische Kriterien in Frage. Schon die axiomatischen Untersuchungen zur Geometrie haben uns gezeigt, daß man verschiedene Systeme geometrischer Aussagen gewinnt, wenn man eine ungleiche Kombination von Grundbegriffen und Axiomen zugrunde legt.

Auf die Topologie oder Analysis situs — die geniale Schöpfung Riemanns — die die „Zusammenhänge der Flächen oder allgemeiner die Beziehungen der Nachbarschaft und Stetigkeit zwischen den Punkten der Linien und Flächen behandelt, dabei aber ganz von der Größe dieser Figuren und selbst von ihrer Gestalt absieht“ [178], wollen wir nicht weiter eingehen. Wichtig ist für uns die Scheidung der Geometrie

[177] W. Wundt: Logik II. S. 198.

[178] Vgl. L. Couturat: A. a. O. S. 134.

des Maßes von der Geometrie der Lage;[179] beide können synthetisch (anschaulich-konstruktiv) oder analytisch (unter weitgehender Verwendung der Analysis) aufgebaut werden. Hier und dort werden auch beide Methoden der Darstellung verbunden (Fusion von Arithmetik und Geometrie).[180]

Die synthetische Geometrie des Maßes konstruiert immer die einzelne Figur aus den Grundgebilden. „Jeder Differenz im anschaulichen Gesamtverhalten der Figuren entspricht eine Differenz der Auffassung und Ableitung."[181] Die synthetische Geometrie der Lage sucht durch eine einzige allgemein anwendbare Konstruktion alle projektiv verwandten Figuren zu beherrschen; nicht die Betrachtung der einzelnen Figur, sondern die „freie konstruktive Erzeugung von Gestalten nach einem bestimmten einheitlichen Prinzip"[182] wird betont. Die Lehre von den projektiven Eigenschaften der Figuren will aber nicht nur Neubau und Erweiterung der Geometrie sein, sondern vor allem noch eine Methode der Entdeckung, ein Prinzip der geometrischen Forschung bieten.[183]

Sowohl die metrische wie auch die projektive Geometrie kann analytisch behandelt werden; d. h. im Sinne der Koordinatengeometrie. Und wieder zeigt sich ein gleicher Unterschied: die analytische Metrik behandelt Einzelfälle, die analytische Geometrie der Lage Zusammenhänge zwischen verwandten Figuren. So ist tatsächlich nach Caleys Ausspruch: „projektive geometry all geometry"; d. h. es läßt sich ein umfassendes Lehrgebäude der Geometrie auf projektiv-analytischer Basis errichten.[184] Die projektive Konstruktion ist „vom genetischen Gesichtspunkt aus die vollendetste Methode".[185]

---

179 Vgl. A. Wernicke: Mathematik u. philosophische Propädeutik. S. 15.
180 Vgl. S. 45 dieser Arbeit.
181 Vgl. E. Cassirer: A. a. O. S. 89. 182 Ders.: A. a. O. S. 102.
183 Ders.: A. a. O. S. 104; ferner W. Wundt: Logik II. S. 179.
184 Vgl. die ausgezeichneten Darlegungen bei F. Klein: A. a. O. II.
185 W. Wundt: A. a. O. S. 186.

Das Prinzip der Dualität der projektiven Geometrie hat vielleicht den Mathematikern den „grundlegenden Gedanken nahe gelegt, daß die Wahrheit der Sätze der Geometrie (und der Mathematik überhaupt) nicht von dem Sinn der Grundbegriffe abhängt, sondern ausschließlich von ihren Grundbeziehungen"[186] — wir haben diesen Gedanken schon einmal als irrig ablehnen müssen; die Geometrie kann den Sinn ihrer Grundbegriffe und Grundsätze nicht entbehren.[187] Sie zieht sogar die Bewegung so weit in ihre Aussagen hinein, daß man von einer „Physikalisierung der Geometrie" reden kann.[188]

Und doch ist und bleibt die Geometrie unabhängig von jeder empirischen Tatsache; denn ihre Grundbegriffe — Punkt, Gerade, Ebene — meinen nicht Gegenstände der sinnlichen Wahrnehmung, sondern in ideierender Abstraktion erfaßte ideelle Gebilde, aus denen nach den Grundsätzen (Axiomen) die komplexen geometrischen Gestalten aufgebaut werden, die wiederum niemals in irgendeiner sinnlichen Wahrnehmung oder Phantasievorstellung so gegeben sind, wie wir sie meinen. Die geometrischen Urteile sind demnach nicht Tatsachenurteile, sondern Wesensaussagen; und ihre Verknüpfung in Schlußformen führt nicht aus dem Rahmen der Wesenswissenschaft hinaus.

III. Reine und angewandte, Präzisions- und Approximationsmathematik.

Fassen wir die arithmetischen und geometrischen Disziplinen, deren Gegenstände und Methoden wir beleuchtet haben, unter dem Namen „reine" Mathematik zusammen, so können wir einige andere Disziplinen als sogenannte „angewandte" Mathematik jenen entgegenstellen. Indessen stimmen wir Wernicke zu: „Den Unterschied zwischen reiner und

---

[186] L. Couturat: A. a. O. S. 164; ähnlich M. Pasch: A. a. O. S. 98.

[187] gegen L. Couturat: A. a. O. S. 223; vgl. Wernicke: A. a. O. S. 75.

[188] Z. B. die Verwendung „astatischer" Koordinaten; vgl. E. Study: Geometrie der Dynamen. 1903.

angewandter Mathematik im Sinne der zum Teil üblichen Koordination können wir nicht anerkennen. Es gibt nur eine Mathematik; aber sie hat, um mit Kant zu reden, einen reinen und einen empirischen Gebrauch."[189] Alle Aussagen der Arithmetik und auch der Geometrie beziehen sich auf vollkommen scharfe Begriffe; im empirischen Gebrauch aber muß die Mathematik sich mit Annäherungen begnügen.[190] Alle Messungen des Empirischen liefern nur Zahlen von angenäherter Genauigkeit, selbst bei Verwendung der „vollkommensten" Instrumente. Für den praktischen Physiker, Techniker usw. ist die präzise Ermittlung eines Resultates oft nicht erforderlich; er kann sich dann mit Näherungsmethoden begnügen. Aber jede approximative Rechnung oder Konstruktion findet ihre Begründung in der Präzisionsmathematik, die somit keineswegs allein „zum Vergnügen derer da ist, die sich mit ihr beschäftigen".[191]

Der Versuch, die besondere Ausgestaltung mathematischer Methoden in den einzelnen Anwendungsgebieten — möge es sich um angewandte Arithmetik (bürgerliche und politische Arithmetik usw.) oder um angewandte Geometrie (darstellende Geometrie, Geodäsie, Kartographie, Photogrammetrie usw.) handeln — ausreichend zu charakterisieren, würde den Rahmen unserer Arbeit sprengen und auch wohl die Leistungsfähigkeit des einzelnen überschreiten. Gegenstand und Methode kennzeichnen die Mathematik als Wissenschaft, und zwar als Wesenswissenschaft. Damit ist auch die Gewißheit gewonnen, daß die Aufnahme mathematischer Erkenntnis in die innere Lebensbewegung des Individuums intellektuelle Bildungswerte zur Entfaltung bringen muß, deren Betrachtung wir uns jetzt zuwenden.

---

[189] A. Wernicke: Mathematik u. philosophische Propädeutik. S. 15.

[190] Auf Darlegungen anderer Art kann ich hier nicht weiter eingehen; vgl. z. B. L. Couturat: A. a. O. S. 3—5.

[191] Zur Ergänzung verweise ich auf die Schriften von F. Klein: Elementarmathematik; ferner Ders.: Anwendung der Differential- und Integralrechnung.

B. Vom Bildungswert der Mathematik im besonderen.

Τόδε ἤδη ἐπεσκέψω, ὡς οἵ τε φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα ὡς ἔπος εἰπεῖν ὀξεῖς φύονται, οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασι; Ἔστιν, ἔφη, οὕτως.

Plato, *ΠΟΛΙΤΕΙΑ*. 526. B.

a) Vom intellektuellen Bildungswert der Mathematik.

Bildung bedeutet für uns im weitesten Sinne die auf persönlicher Wesensformung beruhende kulturelle Leistungsfähigkeit. Daher ist der gedächtnismäßige Besitz zusammenhanglosen mathematischen Wissensstoffes, ja selbst die Beherrschung eines streng wissenschaftlich verknüpften arithmetischen oder geometrischen Gedankenkomplexes noch keine mathematische Bildung. Zusammenhangloses Wissen ist tot, und „reiner" Wissenschaft mangelt eben noch die Beziehung zum vollen, flutenden Leben, zum kulturellen Schaffen. Wissenschaftliche oder intellektuelle Bildung ist beseelte Wissenschaft. Der intellektuelle Bildungswert der Mathematik entfaltet sich also erst bei inniger Verflechtung mathematischer Erkenntnis mit der Lebenstotalität. Zwischen zwei Polen flutet in kulturschaffender Tätigkeit wie auch im Bildungsprozeß im Hinblick auf die Mathematik die geistige Kraft hin und her: zwischen dem Reich mathematischer Wahrheiten einerseits und der „plastischen" Individualität andererseits.[1] Demnach kann auch die klarste Einsicht in die Eigenart der Mathematik allein weder einen Maßstab für die Be-

[1] Vgl. die einleitenden Ausführungen über „Bildung, Bildungswert, Bildsamkeit".

wertung dieses Bildungsgutes bieten noch Leitstern für das kulturelle Wollen sein, das jene hochentwickelten Forschungszweige zu neuer Gestaltung fortzuführen trachtet. Aus der vollen Lebenstotalität heraus muß die Bewertung und Fortführung jedes Kultur- und Bildungsvorganges entfließen. Ehe wir aber die Bedeutung der persönlichen Momente (Struktur, Entwicklungsstufe, Individuallage) für die Aufstellung der „Stufenfolge" materialer und formaler intellektueller Bildungswerte der Mathematik verfolgen können, haben wir noch unsere Stellung zum Begriff des formalen und materialen intellektuellen Bildungswertes selbst zu präzisieren.[1]

Materialen (intellektuellen) Bildungswert hat schlechthin jede Erkenntnis, die als solche gesucht wird; im Bereich der Mathematik sind es Lehrsätze und Formeln, Beweisgänge und Ableitungen, arithmetische und geometrische Methoden und Konstruktionsprinzipien, die als solche materiale Bildungswerte darstellen können. Trotz verschiedenster Schätzung ist der Mathematik niemals ihr materialer Bildungswert bestritten worden. Um die Möglichkeit der Entfaltung formaler Bildung durch den Erwerb mathematischer Erkenntnis tobt dagegen der Kampf.

Der Grund für die Anerkennung oder Ablehnung der Möglichkeit formaler intellektueller Bildung liegt in der Auffassung von ihrem Wesen. Formale Bildung — wir greifen nur einige[2] wichtige Definitionen heraus — ist bestimmt worden als:

1. Ausbildung der geistigen Grundakte (bzw. der ihnen entsprechenden Dispositionen);
2. Bildung durch „Mitübung" verwandter Akte;[3]
3. Ausbildung in der Methode.[3]

[1] Vgl. die einleitenden Ausführungen über „Bildung, Bildungswert, Bildsamkeit".

[2] Eine Auseinandersetzung mit allen möglichen und „unmöglichen" Bestimmungen kann hier nicht erfolgen.

[3] Vgl. die folgenden Ausführungen.

Wenn wir als formal die Bildung bezeichnen, die auf eine bestimmte Art des Wertens und der Wertverwirklichung, also auf Grundakte gerichtet ist, so haben „formalen Bildungswert“ alle geistigen Tätigkeiten, an denen sich die Grundrichtungen des wertvollen Erlebens und Gestaltens üben. Formale „intellektuelle“ Bildungswerte entfalten sich dann in solchen Erkenntnisvorgängen, in denen die Entwicklung und Übung der intellektuellen Grundakte erfolgt. Daß formale Bildung in diesem Sinne auch durch die Mathematik „möglich“ ist, beweist uns die alltägliche Erfahrung: die Steigerung der Leistungsfähigkeit unserer Dispositionen, die zunehmende Sicherheit und Leichtigkeit im Vollzug der Grundakte und Erkenntnisprozesse arithmetischer und geometrischer Art. Eine solche formale intellektuelle Bildung ist aber auch wertvoll; weil in ihr die wesentliche Grundlage liegt für die Ausbildung der Fähigkeiten zu beliebiger Verwendung.[4] Welche mathematischen Grundakte hier in Frage kommen, das hat die weitere Untersuchung festzustellen.

Nur das „Phänomen der Mitübung“ unter den Begriff der formalen Bildung zu fassen, erscheint mir unzweckmäßig. Neuerdings ist diese Auffassung öfter vertreten worden; so redet auch Th. Litt von „formalem Bildungswert“ überall da, „wo gewisse Bildungswirkungen aus der Gesamtwirkung eines Bildungsgutes herausanalysiert werden, die nicht an dessen inhaltlichen Sondercharakter gebunden sind, sondern über einen weiteren Bereich von Kulturleistungen hinweg gleichmäßig sich fruchtbar erweisen, und zwar deshalb, weil die Arbeit an dem betreffenden Bildungsgut zur „Mitübung“ jener allgemeinen Funktionen führt“.[5] (Als solche allgemeinen Funktionen nennt Litt die Intelligenz und den Willen.) Dieses Phänomen der Mitübung ist nun geleugnet worden; besonders

[4] J. Cohn: Geist der Erziehung. 1918. S. 64—65.

[5] Th. Litt: Pädagogik. In „Die Kultur der Gegenwart“. I. 6. 1921; dazu vgl. S. 119 dieser Arbeit.

von Anhängern der „atomisierenden Psychologie".[6] Die neuere Forschung hat die Möglichkeit der Mitübung gewisser Funktionen bei Betätigung anderer zweifelsfrei festgestellt. Nach W. Stern übt auch „die Beschäftigung mit der Mathematik plastische Ausstrahlungen weit über das spezielle mathematische Denken hinaus aus".[7] Darin liegt für uns der „allgemeine" formale Bildungswert der Mathematik, den wir noch genauer zu betrachten haben werden.

Unsere Darlegung der Eigenart der mathematischen Erkenntnis hat bereits gezeigt, daß der Terminus „Methode" schon allein im Gebiet der Mathematik mit zahlreichen Äquivokationen behaftet ist; denn der „reine" Logiker, der Formalist, der Arithmetiker, der Geometer — jeder deutet den Begriff „Methode" in seinem Sinne. Diese Vieldeutigkeit des Wortes Methode kann bei der Rede vom formalen Bildungswert der Mathematik leicht zu Unklarheit und fehlerhafter Metabasis Veranlassung geben. „Ausbildung in der Methode" besagt für uns mehr als ein bloßes Wissen um die bestimmte Aufeinanderfolge der Denk- und Konstruktionsschritte, die zur Lösung einer gewissen Art arithmetischer und geometrischer Probleme führen; solches Wissen rechnen wir zum materialen Bildungswert der Mathematik. Zur „Ausbildung in der Methode" gehört — außer jener materialen Erkenntnis — noch das Können, eben die geistige Kraft, jene Schritte zu vollziehen. Darin liegt für uns der Kern der formalen intellektuellen Bildung. Sie kann nie wirksam werden, ohne daß gleichzeitig ein bestimmter Erkenntnisstoff „bearbeitet" wird. Er ist hier dem Reich mathematischer Wahrheiten entnommen, in dem schon die einfachsten Begriffe „Methoden-

[6] Man vgl. die Äußerungen von Herbart u. Schmeding bei H. Thieme: Der Bildungswert der Mathematik. Pädag. Archiv 1897. Bd. 39. Ferner: W. Schmiedeberg: Die Bedeutung des mathem. Unterrichtes für die Erziehung unserer Jugend. Berlin 1917. Preisschrift des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes.

[7] W. Stern: Die menschliche Persönlichkeit. Leipzig 1919. S. 165.

begriffe“ sind. — Ehe wir aber an die Beleuchtung des materialen intellektuellen Bildungswertes der Mathematik gehen, wenden wir uns zu der Frage, welche „spezifisch“ mathematischen Grundfunktionen und welche „allgemeineren“ Dispositionen durch die ernste Beschäftigung mit der Mathematik ihre Ausbildung erfahren.

I. Über den formalen intellektuellen Bildungswert der Mathematik.

1. Vom spezifischen formalen intellektuellen Bildungswert der Mathematik.

Die Ermittelung des formalen intellektuellen Bildungswertes der Mathematik setzt vor allem die Kenntnis derjenigen psychischen Prozesse voraus, in denen mathematische Wahrheiten in uns lebendig werden.[8] Wie die mathematischen Gegenstände aus dem Gesamtgebiet der „Gegenstände überhaupt“ nur einen fest umgrenzten Ausschnitt bilden, so läßt sich auch erwarten, daß die mathematischen Erkenntnisprozesse und die zugehörigen Dispositionen aus dem Gesamtgebiet psychischen Lebens und Erlebens ausgeschieden werden können, vielleicht als eine ganz bestimmte Gruppe von Erkenntnisvorgängen und zugehörigen Dispositionen.

Wir bezeichnen ein Erlebnis, in dem wir theoretisch bestimmend auf einen Gegenstand gerichtet sind, ihn meinen oder intendieren, als einen Denkakt. Eine zusammenhängende Folge solcher Denkakte nennen wir Denkverlauf oder Erkenntnisprozeß. Alle wissenschaftliche Arbeit vollzieht sich nun in Denkakten und Erkenntnisprozessen. Wir fragen hier nicht, wie die Denkvorgänge in den Gesamtbestand des psychischen Lebens verwoben sind; sondern zunächst, wie die Denkprozesse, die die mathematische Arbeit begleiten, selbst genauer zu charakterisieren sind. Verfügten wir über eine

[8] Über die „zwei Arten der Psychologie“ vgl. E. Spranger: Lebensformen. Halle 1921. II. S. 3—20.

gesicherte Psychologie des Denkens, so wäre diese Frage wohl bald beantwortet; zur Zeit besitzen wir aber weder eine anerkannte „allgemeine" Psychologie, noch eine Denkpsychologie, die all unseren Fragen restlos gerecht werden könnte.[9]

Wer auf die unerschöpfliche, bunte Mannigfaltigkeit psychischer Phänome blickt, wird vielleicht das Mühen des Psychologen, die feinen Regungen des Erlebens in starre Begriffe zu fassen, für aussichtslos halten. Im Grunde steht jede Tatsachenwissenschaft einer solchen Schwierigkeit gegenüber. Und die Psychologie kann ebensowenig wie eine andere Disziplin fester Begriffe und eindeutiger Sätze entbehren. Aber weder für den Aufbau einer Wissenschaft in sich, noch für die Anwendbarkeit ihrer Ergebnisse und Methoden ist es ohne Belang, wie sie ihre Begriffe bildet, ihre Gegenstände abgrenzt und verknüpft. Eine Psychologie, die nach naturwissenschaftlichen Prinzipien das Seelenleben analysiert und atomisiert, bietet ein anderes Bild und andere Hilfsmittel für geisteswissenschaftliche Betrachtungen als eine Strukturpsychologie, die bei der isolierenden Betrachtung der Erlebnismomente nicht ihren sinnvollen, teleologischen Zusammenhang mit der Persönlichkeit durchschneidet. Doch in den Streit um die Methoden der Psychologie können wir hier nicht eingreifen;[10] vielmehr treten wir sofort an die Darlegung der

a) Bedeutung der Arithmetik für die formale Bildung.

Der sinnbelebte arithmetische Ausdruck.

Zunächst gilt es, die Eigenart der spezifisch arithmetischen Denkakte und Denkprozesse zu erfassen. In den Ziffern, Zahlensymbolen, Operationszeichen und den bestimmten Komplexionen aus den dreien besitzt die Arithmetik ein höchst bedeutsames, eigenes sprachliches Darstellungsmittel.

Erblicken wir die physische Seite solcher Ausdrucksmittel, z. B. die Zeichen oder Zeichenverbindungen

---

[9] Vgl. B. Erdmann: Reproduktionspsychologie. 1920. Vorwort!
[10] E. Spranger: A. a. O.

$$5;\quad \frac{3}{7};\quad a^n;\quad e;\quad \pi;$$

$$s = a\frac{q^n-1}{q-1};\ \int\frac{dx}{x} = ln\,x + C;\ li(e^{-x}) - C - \log x = \int_0^x \frac{e^{-x}-1}{t}\,dt\text{[11]};$$

hören oder lesen wir die Worte: Primzahl, Permutation, geometrische Reihe, Konvergenz, Einheitswurzel, Thetafunktion . . ., so „verbindet" sich sofort mit der Wahrnehmung der Zeichen und Worte eine Reihe assoziativ damit verknüpfter Erlebnisse, die Zeichen und Wort zum „Ausdruck von etwas" machen. Im Umkreise dieser Erlebnisse scheiden wir mit E. Husserl die bedeutungverleihenden Akte oder Bedeutungsintentionen von den bedeutungerfüllenden Akten. Die physische Ausdruckserscheinung, die Bedeutungsintention und die Bedeutungserfüllung bilden „im Bewußtsein eine innig verschmolzene Einheit von eigentümlichem Charakter";[12] nur die Abstraktion trennt diese Momente.

Durch „Blickwendung" können wir unser Interesse zwar auch auf die bedeutungslosen Zeichen lenken. Aber der Mathematiker operiert in der Sphäre symbolisch-arithmetischen Denkens und Rechnens — das sei gegen die Tendenzen des Formalismus auch hier betont — keineswegs mit solchen bedeutungslosen Zeichen.[13] Da das Interesse durchaus auf den Sinn, auf die Bedeutung der Zeichen gerichtet ist, kann man auch nicht von einer stellvertretenden Funktion der Zeichen reden. Vielmehr ist die physische Erscheinung nur Träger der Bedeutungsintention, in welcher das begriffliche Objekt intendiert wird. Aufgabe des Wortes oder Zeichens ist es, in uns

[11] Vgl. Niels Nielsen: Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. Leipzig-Berlin 1906.

[12] E. Husserl: Logische Untersuchungen II. 1913. S. 37.

[13] Der Leser wende sich von hier aus noch einmal zur Kritik des Formalismus; z. B. zur Beleuchtung der These Hilberts: „Am Anfang ist das Zeichen" und seiner Annahme, daß „diese Zahlzeichen die Zahlen sind und die Zahlen vollständig ausmachen", sonst aber „keinerlei Bedeutung haben". D. Hilbert: Neubegründung der Mathematik. S. 163. A. a. O.

den bedeutungverleihenden Akt zu erregen und auf das, was in ihm intendiert wird und vielleicht durch erfüllende Anschauung gegeben ist, hinzuweisen.

Stellt sich der bedeutungverleihende Akt nicht ein (beim Erscheinen des Zeichens), so fehlt das Verständnis. Wort und Bedeutung müssen also untrennbar verbunden sein „wie Organ und Funktion".[14] „Man könnte das Zeichen als den Ausstrahlungspunkt für die betreffenden anschaulichen Vorstellungen betrachten. Müßten aber diese letzteren jedesmal über die Schwelle des Bewußtseins gehoben werden, um das Verständnis der Zeichen zu vermitteln, so würden wir niemals zu jener abgekürzten, verdichteten, und darum der Wahrnehmung und Phantasie so überlegenen Art des Vorstellens befähigt sein, die wir, im Unterschied vom Anschauen, Denken nennen."[14] Die Bedeutung eines arithmetischen Ausdruckes liegt aber keineswegs in der Erweckung gewisser, ihm konstant zugeordneter Phantasiebilder; wir verstehen vielmehr in bedeutungverleihenden Akten algebraische Zeichen, ganze Formeln und verbale Sätze ohne die geringste Spur von Phantasiebildern.[15] Solche bedeutungverleihenden Akte, die durch keinen Wahrnehmungs- oder Phantasiegehalt an den gemeinten Gegenstand direkt heranführen, sondern am sinnlichen Zeichen nur eine „anschauliche" Stütze haben, nennen wir mit Husserl „signitive Intentionen". Von ihnen sind die „intuitiven Intentionen" zu sondern, welche als Wahrnehmungen den Gegenstand selbst (in Seitenansicht, perspektivischer Verkürzung, Abschattung) gegenwärtigen oder als Imaginationen mit größerer oder geringerer Treue sein Bild vergegenwärtigen. „So gut das Bedeutungsbewußtsein sich auf Grund inadäquater und schließlich von eigentlicher Exemplifizierung weit entfernter Anschauung entfalten kann, so gut auch auf Grund der bloßen Namen."[16] Aber solche

---

[14] A. Riehl: Logische Beiträge. S. 2 u. 3.

[15] Vgl. E. Husserl: Logische Untersuchungen II 1. S. 66.

[16] Ders.: A. a. O. II 1. S. 174; vgl. auch II 2. S. 54.

signitiven Akte vermitteln nur ein bloßes Wortverständnis, in denen zwar ein Bedeuten vollzogen, aber dennoch nichts erkannt wird.[17]

Suchen wir die Bedeutungsintentionen zu klären, zu beleben, zu bekräftigen, so treten zu jenen intentionalen Akten noch bedeutungerfüllende Akte hinzu. Die bedeutungerfüllenden Akte, d. h. die in der Erfüllungssynthesis sich anschmiegenden, der Intention die „Fülle" gebenden Akte, stellen das, was die Intention zwar meint, „aber in mehr oder minder ungeeigneter und unangemessener Weise vorstellig macht, direkt vor uns hin, oder mindestens relativ direkter als die Intention selbst".[18] Suchen wir nun einen arithmetischen Gedanken zu klären, d. h. dem Inhalt des Gedankens erkenntnismäßige Fülle zu verschaffen, so kann das in gewisser Weise auch durch signitive Akte geschehen. „Jede in einer Identifikationskette sich entfaltende mathematische Begriffsbildung zeigt uns die Möglichkeit zu Erfüllungsketten, die sich Glied für Glied aus signitiven Intentionen aufbauen."[19] Doch vollzieht sich keineswegs in jeder Identifikation eine Annäherung an das Erkenntnisziel; es gibt sogar ziellos ins Unendliche fortlaufende Identifikationsketten; wie z. B. unendlich viele Ausdrücke für den Wert „3" denkbar sind. Führt aber die Erfüllung wirklich näher an den Gegenstand heran, so liegt das Eigenartige arithmetischer Erfüllungsketten gerade darin, daß in ihnen ein bestimmter Gang der Erfüllung apriori vorgeschrieben ist; d. h. zu jeder Bedeutungsintention gehört eine ganz bestimmte als folgende, zu dieser wieder eine bestimmte folgende usw. . . . (Wir sprechen hier von Aktschichtung, von Vorstellungsschachtelung und von Vorstellungsvorstellungen.) Je nach dem Sinn des arithmetischen Ausdruckes und nach der „determinierenden

[17] Vgl. S. 22 dieser Arbeit.
[18] E. Husserl: Logische Untersuchungen II 2. S. 65.
[19] Ders.: A. a. O. S. 69.

Tendenz"[20], die den Prozeß der Erfüllung leitet, sind Art und Folge der bedeutungerfüllenden Akte so mannigfaltig, daß eine ausführliche analytische Betrachtung selbst der wenigen oben angeführten arithmetischen Namen und Zeichen unter dem Gesichtspunkt möglicher Bedeutungserfüllung den Rahmen unserer Arbeit durchbrechen würde.

Außerdem machen sich Einflüsse der nächsten Umwelt, der überlieferten lautsprachlichen und schriftlichen Bezeichnungsweise geltend, so daß selbst die Bedeutungserfüllung einfachster arithmetischer Wahrheiten bei jungen und alten Trägern primitiver und hochentwickelter Kulturen höchst verschieden ist.[21] In der phylogenetischen wie in der ontogenetischen Entwicklung der Mathematik zeigt sich deutlich das Streben, in bedeutungerfüllenden Akten „denkökonomische" Veranschaulichungen zu verwenden, die möglichst nur den in ideierender Abstraktion zu erfassenden Sinn beleben und illustrieren, und auch die heterogenen Tendenzen, die in den verschiedenartigen Darstellungs- und Veranschaulichungsmitteln auftreten, auszugleichen.

Sucht der Leser selbst den Sinn (vielleicht oben aufgezeichneter) arithmetischer Ausdrücke zu klären, so entdeckt er, daß die Zunahme an Fülle in nichts anderem besteht, als darin, daß schrittweise alle Vorstellungsvorstellungen durch realisierende Konstruktion und durch die Anschauung dieser realisiert werden.[22] Dabei führt die Erfüllung mittelbarer Intentionen schließlich immer zurück auf die intuitive Erfüllung einer unmittelbaren Intention. Doch meint die arithmetische Intention niemals einen sinnlich wahrnehmbaren Gegenstand — wie uns die Ausführungen des Abschnittes über die Zahl und die Arithmetik bereits gezeigt haben — sondern einen ideellen Gegenstand. Aber arithmetische Urteile, welche

[20] N. Ach: Über die Willenstätigkeit und das Denken. 1905. S. 193f.

[21] Zahlreiche Beispiele bei E. Löffler: Ziffern und Ziffernsysteme. 1918. Teil I.

[22] E. Husserl: A. a. O. II 2. S. 73.

keine bestimmte Beziehung auf individuelle, durch irgendeine sinnliche Anschauung zu gebende Einzelheiten haben, sondern in genereller Weise Beziehungen zwischen ideellen Einheiten setzen, können dennoch sich auf Grund korrespondierender Anschauung erfüllen; aber die Anschauung des einzelnen ist hierbei nicht das Gemeinte; sie fungiert nur als singulärer Fall oder als Analogon.[23] Wo nun generelle Gedanken in der Anschauung ihre Erfüllung finden, da bauen sich auf die Wahrnehmung oder auf die Imagination gewisse neue Akte auf, und zwar Akte, die sich auf den erscheinenden Gegenstand in ganz anderer Weise beziehen als diese ihn jeweils konstituierenden Anschauungen. Denn die signitive Intention geht hier statt auf ein anschaulich Vorzustellendes vielmehr auf ein Allgemeines, durch Anschauung nur zu Belegendes. Von arithmetischem Erkennen reden wir jedesmal dann, wenn eine Bedeutungsintention sich angemessen erfüllt. Der Akt der Erkenntnis umschließt also die signitive Intention und die (intuitive) Erfüllung. Entfällt die anschauliche Erfüllung, so ist von Erkenntnis nicht mehr die Rede.

Arithmetische Grundakte und Erkenntnisprozesse.

Wie die einfachen „thetischen" Akte, in denen Gegenstände überhaupt „gesetzt" werden, und auch die elementaren Akte des Unterscheidens und Vergleichens die Grundvoraussetzungen alles Denkens sind, so auch im besonderen die Voraussetzungen alles Rechnens und Konstruierens in Arithmetik und Geometrie.

Spezifisch arithmetische Akte. Durch das „Abbilden" entsteht keine Zahl;[24] dazu bedarf es eines spezifisch arithmetischen „Aktes der Synthesis", der die Setzungen durch die Relation des Nacheinander oder des Nebeneinander (im bereits oben S. 36 dargelegten Sinne) verknüpft. Im

---

[23] Ders.: A. a. O. S. 132—134.

[24] Anders R. Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? S. VIII u. X.

Gegensatz zu den gewöhnlichen synthetischen Akten, welche auch auf die Gegenstände der fundierenden Wahrnehmungen (Imaginationen) mitgerichtet sind, sind die spezifisch arithmetischen Grundakte gerade dadurch charakterisiert, daß die Gegenstände der fundierenden Akte in die Intentionen der fundierten Akte nicht mit eintreten.

Durch die „Akte der Anordnung" entsteht die Reihe der Ordinalzahlen; durch die „Akte der Zusammenfassung" das Reich der Kardinalzahlen. Die Akte der Zusammenfassung richten sich in primitivster Gestalt auf die Vereinigung von Einheiten, auf das Hinzuzählen. Den Akten der Zusammenfassung entsprechen korrelativ die ebenso fundamentalen „Akte der Trennung", die sich in ihrer primitivsten Weise auf das „Wegzählen" der Einheit richten. Ohne die Akte der Synthesis entsteht also keine Zahl; keine Ordinalzahl und keine Kardinalzahl, noch weniger ein arithmetisches Gebilde „höherer Ordnung".

Erst nach erfolgter Synthesis können sich „nominale Akte" entfalten, die dem Neuzusammengefaßten einen bestimmten Namen (Zeichen, Wort) geben. Und diese Akte des Bezeichnens sind von größter Bedeutung; denn „ein Begriff ohne jedes sprachliche Zeichen könnte im Bewußtsein nicht festgehalten werden".[25] Die Namengebung ist also „ganz eigentlich die Begriffsschöpfung".[25]

Betätigen wir die Akte der Anordnung an den symbolischen Ergebnissen der Akte der Zusammenfassung, d. h. hier an den Kardinalzahlen, so entsteht die geordnete Reihe der Anzahlen. (Primitiver Fall der Aktschichtung!) An ihnen entfalten sich die „Akte der operativen Verknüpfung". Sie liegen gleichsam in einer höheren Schicht des sich entwikkelnden Geistes und dienen — je nach weiterer Anwendung der Grundrelation des Zusammenfassens oder des Trennens

---

[25] A. Riehl: A. a. O. S. 3, 4. Ich darf von hier aus noch einmal an die These Hilberts erinnern: „Am Anfang ist das Zeichen".

— in erster Stufe der Ausführung der Addition oder Subtraktion, in zweiter Stufe der Erledigung der Multiplikation oder Division, in dritter Stufe dem Potenzieren oder Radizieren und Logarithmieren. In der streng stufenmäßigen Entfaltung der spezifisch arithmetischen Akte liegt ein Gesetz geistiger Entwicklung, das nicht durchbrochen werden kann. (Das Gesetz der Fundierungszusammenhänge.)

Von grundlegender Bedeutung für die Entfaltung der arithmetischen Erkenntnis sind ferner die „Akte der Formalisierung", in denen arithmetische Fundamentalrelationen und operative Zusammenhänge von (positiven ganzen) Zahlen übertragen werden auf „logische Leerformen". Der klare, reinliche Vollzug solcher Akte der Formalisierung ist erst dann möglich, wenn die arithmetischen (rechnerischen) Beziehungen scharf erfaßt sind. In diesem Sinne bildet der Rechenunterricht die Propädeutik der Arithmetik. Die Formalisierung aber eröffnet nun dem konstruktiven arithmetischen Denken ein unbeschränktes, unendliches Gebiet für neue operative Verknüpfungen, für nominale und für formalisierende Akte.

Das sogenannte „funktionale" Denken[26] umfaßt im Bereich des Reinarithmetischen, soweit ich sehe, nur spezifisch arithmetische Akte bereits gekennzeichneter Art; durch seinen gesetzlichen Zusammenhang charakterisiert es sich als „arithmetischen Denkprozeß".

Arithmetische Denkprozesse. Die psychologische Forschung ist kaum über nennenswerte Anfänge in der Aufhellung der Denkverläufe im elementaren Rechnen und konstruktiven Denken hinausgekommen. Die ungeheure Kompliziertheit der Gedankenzusammenhänge in den fundierten Operationen und verwickelten Methoden erfordert die volle Aufmerksamkeit des Mathematikers und erschwert die Selbstbeobachtung.

---

[26] Auf die besondere Art des „anschaulich-funktionalen" Denkens kommen wir bei der Betrachtung der geometrischen Akte.

Im arithmetischen Denkprozeß ist das Verhalten des Mathematikers durchaus charakterisiert durch das „Bestreben zu rechnen"; d. h. operative, funktionelle Beziehungen zwischen Zahlen herzustellen. Die Bedeutung der Aufgabe im Sinne der reinen Erkenntnisbedeutung wie auch ihrer Stellung zur Lebenstotalität, beherrscht als „determinierende Tendenz" den Ablauf der Erkenntnisprozesse bis in feinste Verzweigungen. Ebenso ist die Art der Auffassung der Zahlen und Operationsbeziehungen von großem Einfluß auf die Prozesse der Aufgabenlösung. „Unsere Additions- und Subtraktionsprozesse [27] stellen sich uns dar als vielfach recht verwickelte, manchmal kunstvoll abgekürzte, fast immer aber leicht verständliche und übersehbare Komplexe aus den einfachen Additions- und Subtraktionsprozessen. Sie tragen größtenteils den Charakter des Systematischen, Wohlgeordneten an sich. Doch kann von einer ganz einfachen gesetzmäßigen Aufeinanderfolge der aufgezählten Bewußtseinsinhalte bei einer bestimmten Rechnungsart keine Rede sein. Denn nahezu jede Aufgabe besitzt in dieser Beziehung einen eigenen Charakter; wenngleich Ähnlichkeiten in den Verfahren bei den einzelnen Typen von Operationen zu beachten sind." „Bei der Multiplikation treten die akustischen, seltener die optischen Assoziationen des Einmaleins in den Vordergrund, machen aber bei weitem nicht alles aus. Es kommen einfache Additionen hinzu, und auch das denkende Konstruieren spielt eine beträchtliche Rolle." „Viel weniger einheitlich, abgehackter und zufälliger sehen die Divisionsprozesse aus. Einen einfachen Divisionsprozeß gibt es gar nicht. Wir finden nur, daß einfache Multiplikationen und Additionen (und ganz sporadisch auch Subtraktionen) zu einem Komplex zusammentreten. Keine einfache Regel ordnet diesen Komplex; vielfach ist das Ganze ein tastendes, mehr oder minder geschicktes Probieren." [28]

[27] B. Schanoff: Die Vorgänge des Rechnens. Experim. Beitr. zur Psychologie des Rechnens. 1911. S. 118.

[28] Ders.: A. a. O. S. 118—119.

Schon hier zeigt also die psychologische Analyse des arithmetischen Denkverlaufes, daß zu den bedeutungverleihenden Akten nicht allein die apriorisch geforderten bedeutungerfüllenden Akte, sondern auch zahlreiche Akte der Bezeichnung und Formalisierung treten. Außerdem fließen in den elementaren Rechenprozeß noch andere und zum Teil sehr komplizierte Erlebnisse: Willensakte, die bei „der Überwindung einer antizipierten Operationstendenz zum Vorschein kommen"; emotionale Akte (Gefühle der Lust und der Unlust), die durch ihren aktiven Charakter eine Beschleunigung oder Hemmung der Denkprozesse bewirken. Die reelle Erlebniseinheit der Bedeutungsintentionen, Bedeutungserfüllungen, emotionalen und volitionalen Momente ist also eine total andere als die in ihr bewußte Einheit arithmetischer Zusammenhänge; den primitiven arithmetischen Formen entsprechen — wie den logischen — eigene Weisen des Bewußtseins, des Vorstellens. Von einem „Parallelismus" zwischen der Einheit arithmetischer Gegenstände und der konstituierenden Bewußtseinshaltung mag man (mit dem nötigen Vorbehalt) sprechen; doch scheint mir die Rede von der „Kongruenz"[29] des „ordo et connexio rerum" mit dem „ordo et connexio idearum" einer fehlerhaften Metabasis mindestens Vorschub zu leisten. — Die generelle Psychologie hat also in der Erforschung der arithmetischen Denkprozesse noch zahlreiche und schwierige Probleme zu lösen; es kann uns daher nicht wundern, wenn die genetische Psychologie nur über die Entwicklung der einfachsten arithmetischen Dispositionen einiges zu sagen hat.

Die Entwicklung arithmetischer Dispositionen.

Schon lange vor Beginn des sinnvollen Sprechens setzen die Denkleistungen des Kindes ein, und zwar sind die intentionalen Akte vor der Entwicklung der Sprache intuitioer Art.[30] Die

[29] Vgl. E. Husserl: Ideen. S. 204. G. Kerschensteiner: Das Grundaxiom. S. 31.

[30] Vgl. K. Reumuth: Die logische Beschaffgnheit der kindlichen Sprachanfänge. Leipzig 1919.

Heraushebung einzelner Empfindungen aus dem verworrenen psychischen Gesamtbestande — das Setzen der Gegenstände — und das Herausstellen erster, einfachster transsubjektiver Beziehungen — das Unterscheiden und Vergleichen der Gegenstände — sind solche vorsprachlichen Denkleistungen. Die individuellen Gegenstände, auf welche sich das Kind in der Zeit der Erlernung der Sprache bezieht, sind immer zugleich reale Gegenstände. Erst sehr spät treten die Beziehungen auf ideale Gegenstände ein; denn das Begriffsbewußtsein setzt zweierlei voraus: einmal muß das Kind die verschiedenen Anwendungsfälle des Wortes gedächtnismäßig festhalten und vergleichen können; sodann aber Verständnis für die Vielheit der Dinge haben.

Die ersten Begriffe des Zählens lernt das Kind ganz allmählich vom zweiten Lebensjahre an im Beschäftigungsspiel mit Steinchen, Perlen, Stäbchen.[31] Beim Papierfalten, Flechten, Zeichnen, Formen usw. „betätigen" sich die fundamentalen Denkakte, in denen jene Gegenstände nach der Relation des Nacheinander[32] zu Reihen geordnet oder nach der Relation des Nebeneinander[32] zu Mengen (und geometrisch charakterisierten Gruppen) verknüpft werden. Dabei genügen Wahrnehmungen eines einzigen Sinnesgebietes, um die Zahl dem Bewußtsein zu vermitteln.[33] Ordinalzahlen und Kardinalzahlen scheinen sich durchaus gleichzeitig zu entwickeln.[34] Vermißt das Kind ein Mengenelement (z. B. einen von mehreren Spielgegenständen), so verrät es dadurch die sich entwickelnde Fähigkeit der Mengenauffassung; im Versuch der räumlichen Umlagerung der Gegenstände zu einer bestimmten Gruppe

---

[31] W. Lietzmann: Methodik des math. Unterrichtes. 1919. Bd. II. S. 6.

[32] Vgl. D. Katz: Psychologie und mathem. Unterricht. 1913. S. 23. K. Brandenburger: Die Zahlauffassung beim Schulkinde. 1914. S. 15. K. Bühler: Die geistige Entwicklung des Kindes. 1921. II. S. 195.

[33] Vgl. B. Branford: Betrachtungen über mathem. Erziehung. Leipzig u. Berlin 1913.

[34] Vgl. D. Katz: A. a. O.; ferner K. Bühler: A. a. O.

zeigt sich die Wirksamkeit der Gruppenauffassung. Die Zahlwörter werden durch die Nachahmung der Erwachsenen erworben und zuerst mechanisch gebraucht; sie bezeichnen dann eine Reihe assoziierter Klänge, bei deren Reproduktion bald hier bald dort einzelne ausfallen. Das erste Zahlwort, das sinnvolle Anwendung findet, ist nicht die „Eins", sondern die „Zwei". Es kommt vor, daß sich der richtige Gebrauch eines Zahlwortes zunächst nur auf ganz bestimmte reale Objekte beschränkt und bei anderen versagt. Die Gleichartigkeit der realen Gegenstände ist eines der elementarsten Erfordernisse für das glückliche Gelingen des Zählprozesses; auch ist die Auswahl der der Zählung zugänglichen Objekte eng mit dem affektiv-volitionalen Charakter des Kindes verbunden. Wo das Kind mit persönlichem Interesse beteiligt ist, können ihm — auch in folgenden Jahren — Aufgaben gelingen, bei denen es sonst versagt. Langsam und schrittweise vollzieht sich der Abstraktionsprozeß, in dem sich die „reine" Zahl von den konkreten Gegenständen löst. Immer aber muß zu vielen Malen an Gegenständen der Sinneswahrnehmung und an konkret vorgestellten Gegenständen dieses Ordnen im Nacheinander, dieses Zusammenfassen im Nebeneinander geübt sein, ehe das schlichte Zahlwort oder die Ziffer die entsprechende Bedeutungsintention erweckt. So führt der Weg von „äußerer Wahrnehmung" über „innere Vorstellung" zum „abstrakten Begriff". In diesem Sinne hebt auch die mathematische Erkenntnis mit der Erfahrung an; nicht aber in dem anderen Sinne, daß die Verknüpfungsweisen durch die Gegenstände oder in den Gegenständen „gegeben" seien.

Beim Eintritt in die Schule zeigen sich bereits ganz beträchtliche Unterschiede in der Fähigkeit zur Ausführung rechnerischer Leistungen; d. h. im Zählen, Addieren und Subtrahieren; während der ersten Schuljahre bleiben sie immer fühlbar. Den ersten Schritt zum Addieren bildet wohl die Entdeckung, daß man das Zählen an einer zweiten Menge fortsetzen kann; die Möglichkeit der Subtraktion aber wird erkannt dadurch, daß eine ganz bestimmte Anzahl von Gegenständen zurückbleibt, wenn man von einer beliebigen Menge von Dingen einige „fortnimmt". Auch der Sinn für das Malnehmen und die Fähigkeit zum Teilen entwickeln sich früh an praktischen Tätigkeiten. Jede neue operative Verknüpfung von Zahlen wird also zunächst an anschaulichen, d. h. sinnlich wahrnehmbaren und konkret vorstellbaren Gegenständen vollzogen und erst allmählich dann auf „reine" Zahlen und „leere" Buchstaben übertragen. Unterstützt von dem äußeren Mechanismus unseres Positionssystems wächst allmählich die Kraft im operativen Verknüpfen der reinen Zahlen.[35]

Die Entfaltung der Anlage zum Rechnen erfolgt bei Kindern zwischen dem 10. bis 14. Jahre sprunghaft, und zwar bei Knaben und Mädchen in verschiedener Weise.[36] In der Pubertät vollzieht sich der „Übergang vom assoziativen zum abstrakten Denken" und die „Anlagen und Neigungen differenzieren"[37] sich. Erst nach der Pubertät erlangen Knaben und Mädchen die Fähigkeit Aufgaben zu lösen, die selbständiges Denken erfordern; vorher wird mehr mechanisch gerechnet. „Geleitete Substitutionen auszuführen sind alle normal befähigten Zehnjährigen schon imstande, ebenso geleitete Analogien. Dagegen können selbständige Substitutionen in den Jahrgängen vor der Pubertät nur von intelligenten Kindern ausgeführt werden. Selbständige Analogien vermögen auch diese nicht zu erledigen."[38] „Selbst geistige Regsamkeit, Aufmerksamkeit, straffe Schuldisziplin vermögen hinsichtlich der Rechenfähigkeit die vom Alter bzw. von der physischen Entwicklung gezogenen Schranken nicht zu durchbrechen."[38]

---

[35] Zu einer genauen Kenntnis der einzelnen Entwicklungsstufen arithmetischer Dispositionen (nach W. Stern ihrer „Latenz, Knospung, Reifung, Einordnung) bedarf es noch zahlreicher Einzeluntersuchungen.

[36] Vgl. Voigt: Über die Anlage zum Rechnen. Archiv f. Pädag. II. Teil. S. 168. 1913.

[37] W. Lietzmann: A. a. O. Bd. I. S. 135.

[38] Voigt: A. a. O. S. 168.

Typische Forschungs- und Arbeitsweisen.

Besondere Begabung und reges Interesse tragen den „erwachten“ Geist bald mehr oder weniger weit in die Gebiete der „höheren“ Arithmetik. Nach dem Grade der Rezeptivität und Spontaneität wie auch nach dem Umfange, der Ausdehnung arithmetischen Wissens treten deutliche Unterschiede hervor. Die Vorliebe für einzelne Gebiete der Arithmetik — für Algebra oder Analysis, Funktionen oder Zahlentheorie, für reine oder angewandte Arithmetik — scheint bei Forschern wie bei Schülern auf typische Verschiedenheiten hinzudeuten, die wahrscheinlich auf die in den Sonderdisziplinen besonders hervortretenden Methoden, bzw. auf die ihnen entsprechenden Dispositionen zurückzuführen sind. Unsere Ausführungen über den Zahlbegriff haben bereits gezeigt, daß einzelne Mathematiker von ganz verschiedenen Gesichtspunkten aus die Begründung und den Aufbau der arithmetischen Disziplinen anstreben. Alle Arithmetiker beschäftigen sich ja mit den Gesetzen der Zahlenwelt; und doch ist es eine grundandere Weise beim Formalisten, beim „reinen“ Arithmetiker und beim „anschaulichen Zahlendenker“.

Die Formalisten suchen eine vollendete „Theorie der Zeichen“ unter möglichster Beachtung des ästhetisch-ökonomischen Prinzips der Permanenz der formalen Gesetze aufzubauen. Diese „gedankenlosen Denker“ — wie sie Thomae[39] spottend nannte — scheinen immer wieder Denkanstöße in der Ähnlichkeit der realen Seite der arithmetischen Zeichen und Zeichenkomplexionen zu suchen; und es ist nicht zu leugnen, daß solche „formalen“, besser formalistischen Analogien zu neuen Problemstellungen führen können. Nach M. Pasch[40] verfährt jeder Mathematiker bei seiner Arbeit in formalistischem Sinne. Doch dürfte diese Behauptung aus dem Übersehen der intentionalen Akte, das jedem Empiristen und No-

---

[39] Vgl. F. Klein: Elementarmathematik. Bd. I. S. 36.

[40] M. Pasch: Veränderliche und Funktion. S. 137.

minalisten so nahe liegt, zu erklären sein. Die Bedeutung des Formalismus haben wir bereits dargelegt (vgl. S. 42); hier handelt es sich nicht um logische oder arithmetische Zusammenhänge, sondern um häufige von der äußeren Ähnlichkeit der physischen Ausdruckserscheinungen ausgehende Denkanstöße. Vielleicht bildet ein besonderes ausgeprägtes visuelles Gedächtnis und Vorstellungsvermögen die psychische Grundlage dieser Arbeits- und Forschungsweise.[41]

Während die Formalisten sich durchaus von äußeren Analogien der Zeichen und Formen leiten lassen, suchen die „reinen" Arithmetiker immer neuen Denkanstoß von der inneren Ähnlichkeit im Aufbau einzelner arithmetischer Disziplinen zu gewinnen. H. Poincaré deutet auf diese Art des Forschens im Bereich der Arithmetik hin: „Der Arithmetiker muß sich die Analogien mit der Algebra zum Führer nehmen."[42] Man spricht „beispielsweise von transzendenten Zahlen und gibt sich Rechenschaft davon, daß die künftige Klassifikation dieser Zahlen schon die Klassifikation der transzendenten Funktionen zum Vorbild hat, und dennoch sieht man nicht klar, welcher Weg von der einen Klassifikation zu der andern führt."[42] Nach solchen inneren Analogien ist z. B. die Theorie der Kongruenzen in vollkommenem Parallelismus mit der Theorie der algebraischen Gleichungen aufgebaut.

Natürlich kommen diese beiden Forschungsweisen, die wir hier in abstrakter Sonderung nebeneinandergestellt haben, in dieser reinen Form im Leben nicht als konstante Arbeits- und Forschungsweisen vor; es finden sich vielmehr Wechseleinstellungen, Übergangsformen zwischen beiden.[43] Auch die dritte Art arithmetischen Denkens stellt eigentlich eine „Zwischenform" dar. Der „anschauliche Zahlendenker" unterscheidet sich eben darin von dem Formalisten und

[41] D. Katz: Psychologie und math. Unterricht. 1913. S. 23.

[42] H. Poincaré: Wissenschaft und Methode. S. 30.

[43] Vgl. Ph. Maennchen: Geheimnisse der Rechenkünstler. Math.-Phys. Bibliothek. Bd. 13. Leipzig.

reinen Arithmetiker, daß alle seine Denkprozesse Zahl- und Raumgebilde in innigster Verflechtung zeigen; daher sind auch die Methoden der geometrischen Analysis und der analytischen Geometrie „seine“ unerläßlichen Hilfsmittel. — Auf die analytisch-geometrischen Arbeitsweisen kommen wir zurück nach der Betrachtung der

b) Bedeutung der Geometrie für die formale Bildung.

Auch hier suchen wir zunächst die Eigenart der geometrischen Akte und sodann ihr Auftreten im geometrischen Denkverlauf zu beleuchten.

Der sinnbelebte geometrische Ausdruck.

Der sinnbelebte geometrische Ausdruck zeigt in der Analyse manche Ähnlichkeiten mit dem arithmetischen Ausdruck. Wir können uns also hier etwas kürzer fassen. Die physische Seite geometrischer Ausdruckserscheinungen stellt sich uns im Akt des Erscheinens als Zeichen oder als Bild dar. Während das Zeichen (Wort, Symbol, Formel) durch keinerlei Ähnlichkeitsbeziehung an den gemeinten Gegenstand gebunden ist, weist das Bild (Zeichnung, Modell) immer durch irgendeine Art der Ähnlichkeit auf den gemeinten Gegenstand hin. Fehlt diese Ähnlichkeit ganz und gar, so ist auch nicht mehr von einem Bilde zu reden. Die physische Seite geometrischer Ausdruckserscheinungen — diese mögen Grundbegriffe und Grundsätze, Lehrsätze und Folgerungen, formelhafte Ausdrücke und konstruktive Zusammensetzungen bezeichnen — empfängt in bedeutungverleihenden Akten ihren Sinn. Stellt sich beim Erscheinen des Zeichens (Bildes) der bedeutungverleihende Akt nicht ein, so fehlt das Verständnis.[44] Suchen wir die Bedeutungsintention, die durch irgendwelche Zeichen oder Zeichenkomplexionen gegeben sein möge (z. B. Parallelogramm, Kreis, Tangentialebene, Kugelgebüsch, Satz des Pythagoras, reduziertes uneigentliches Dreieck, $c \cdot c' = a \cdot a'$

---

[44] Vgl. S. 85 dieser Arbeit.

$+ b \cdot b'$[45], $s = 2r \cdot \sin\varphi$[46] zu klären, zu beleben, so treten zu dem intentionalen Akte noch bedeutungerfüllende Akte mannigfacher Art hinzu. Je nach dem Sinn des Ausdruckes, je nach der determinierenden Tendenz, die den Prozeß der Bedeutungserfüllung leitet, sind Art und Folge der bedeutungerfüllenden Akte sehr verschieden. Die Bedeutungserfüllung mancher geometrischer Intentionen kann — wie sich auch durch einige der oben angeführten Beispiele verdeutlichen läßt — zunächst durch rein signitive Akte geschehen. Dabei ist das Charakteristische, daß ein bestimmter Gang der Erfüllung hier zumeist apriori vorgeschrieben ist. (Fundierungszusammenhang.) Doch wird durch diese Aneinanderreihung rein signitiver Akte nur ein Bedeuten, kein Erkennen (im strengen Sinne) vollzogen. (Wir sprechen daher von unechter Erfüllung.) Erst durch Rückgang auf intuitive Akte kommen wir zu echter Erfüllung. Die schrittweise Erfüllung mittelbarer Intentionen führt schließlich immer auf unmittelbare Intentionen zurück, die ihre Erfüllung in intuitiven Akten finden. In verwickelten geometrischen Aktfolgen bedienen wir uns, schon zur Stütze des Gedächtnisses, der sinnlichen Darstellung in Zeichnung oder Modell; doch läßt sich kein geometrischer Begriff adäquat versinnlichen. „Wir imaginieren oder zeichnen den Strich und sagen, bzw. denken eine Gerade. Und so bei allen Figuren. Überall dient das Bild nur als Anhalt für die intellectio."[47] Da die geometrische Intention also niemals sinnlich wahrnehmbare Gegenstände meint, so kann auch jene unmittelbare Intention nicht in einem Akt der sinnlichen oder schlichten Wahrnehmung (Imagination) ihre adäquate Erfüllung finden. Flüchtige Vorstellungsbilder oder ungenaue Wahrnehmungen fungieren auch hier nur als Verständnishilfen. Wohl sind die sinnlichen Gestalten die naturgemäßen Ausgangspunkte für die geometrischen „Idealisierungen". Aber weil die Figuren

[45] Gemeint ist der Satz des Ptolemäus.
[46] Gemeint ist der „trigonometrische Peripheriewinkelsatz".
[47] E. Husserl: Logische Untersuchungen II 1. 1913. S. 65.

und Modelle nicht die intentionalen Gegenstände sind, werden „aus" ihnen auch nicht in empirischer Tätigkeit die Grundbegriffe abgezogen;[48] sie werden gleichsam „auf" sie übertragen. Dabei schichtet sich über den Akt der sinnlichen Wahrnehmung ein durchaus neuer Akt, der den erscheinenden Gegenstand nicht in seinen singulären Bestimmtheiten meint, sondern ein Allgemeines, durch sinnliche Anschauung nur zu Belegendes intendiert. „In den intellektiven Prozessen geometrischen Denkens konstitutiert sich die Idee des geometrischen Gebildes, die ihre Ausprägung findet in der festen Bedeutung des definitorischen Ausdruckes."[49] Findet eine geometrische Intention echte Erfüllung in einem angemessenen intuitiven Akte, so reden wir von Erkennen (in strengem Sinne). Der Erkenntnisakt umschließt also immer einen intentionalen und einen intuitiven Akt (von gleicher Materie oder Bedeutung). Nicht alle geometrischen Intentionen lassen aber intuitive Erfüllung zu; vielmehr führen manche Intentionen bei dem Versuch der Erfüllung ihrer Bedeutung durch die „anschauliche", d. h. nach den Gesetzen der reinen Anschauung verlaufende Konstruktion des Gemeinten, zu dem Erlebnis des Widerstreites (das dem Erlebnis des Erkennens korrelativ gegenübersteht). Vierdimensionale oder unendlichdimensionale Raumgebilde, geschlossene Geraden, einseitige Flächen, tangentenlose Kurven, (ebene) Dreiecke, deren Winkelsumme kleiner oder größer als $2R$ ist — das sind „Absurditäten" im Sinne Husserls, die sich nicht adäquat versinnlichen oder veranschaulichen lassen. Anschauungen solcher Art sind nicht wirkliche Veranschaulichungen der genannten Begriffe, noch weniger können sie als Inhaber der Wortbedeutungen gelten.[50] Wir bemerken noch, daß sich in dreifacher Hinsicht

[48] Vgl. O. Hölder: Anschauung und Denken in der Geometrie. 1900. S. 8. K. Th. Vahlen: Abstrakte Geometrie. 1905. S. 3.

[49] E. Husserl: Logische Untersuchungen. Bd. II 1. S. 65.

[50] Ders.: A. a. O. S. 64.

eine Steigerung der Fülle durch intuitive Akte herbeiführen läßt: nämlich in Hinblick auf den Umfang (Reichtum), auf die Lebendigkeit und auf den Realitätsgehalt.[51]

Geometrische Grundakte und Erkenntnisprozesse.

Die einfachen Akte des Setzens, des Unterscheidens und Vergleichens sowie die Akte des Benennens sind auch Voraussetzungen des geometrischen Denkens. Hinzu gesellen sich aber spezifisch geometrische Grundakte; nämlich Akte der ideierenden Abstraktion, in denen die Grundeigenschaften des Raumes und seine Grundgebilde (Punkt, Ebene, Gerade) erfaßt werden, und die Akte der geometrischen Konstruktion. Diese Akte sind verschiedener Art. In den „Akten der Verknüpfung" setzen wir Grundbegriffe (besser intuitiv erfaßte Grundgebilde) in Beziehungen, die wir durch die Redewendungen: „liegen auf, bestimmen, gehen durch, verbinden, haben gemeinsam" sprachlich wiedergeben. In den geometrischen „Akten der Anordnung" ordnen wir die Grundgebilde in einer bestimmten Weise, die wir sprachlich durch das Wort „zwischen" festhalten. In den geometrischen „Akten des Vergleichens" stellen wir die Gleichheit oder die Verschiedenheit der Größe (von Strecken, Winkeln, Flächen, Volumen)oder der Form (Gestalt) fest. — Das Problem der Schichtung der Akte können wir hier nicht genauer verfolgen; weisen nur darauf hin, daß in einem Erkenntnisprozeß sowohl nur geometrische Akte wie auch geometrische, physikalische und arithmetische in Verbindung auftreten können. So verschlingt sich z. B. beim „Messen" das geometrische Vergleichen nach der Größe mit der arithmetischen Ordnungsrelation. Das „funktionale Denken" im Sinne der modernen Reformbewegung, das sich als Denkverlauf darstellt, umschließt mathematische Akte (geometrische und arithmetische) in besonderer Art.

[51] E. Husserl: A. a. O. II 2. S. 83.

Auch im geometrischen Erkenntnisprozeß beherrscht die Aufgabe, das Problem, als determinierende Tendenz den Ablauf der psychischen Vorgänge. Die intentionalen Akte bilden das Gerüst, das Skelett des Denkprozesses. Deskriptive Bewußtseinsinhalte — sinnliche Wahrnehmungen, Phantasievorstellungen — begleiten die aufeinanderfolgenden intentionalen Akte, geben dem geometrischen Denken anschauliche Fülle und Lebendigkeit, niemals aber Gültigkeit und Exaktheit. Auch affektive und volitionale Bewußtseinsinhalte fließen in den geometrischen Gedankengang öfter ein; daß sie den Sinngehalt der Aussagen nicht umbiegen dürfen, versteht sich von selbst; daß sie — und mit ihnen die anschaulichen Bedeutungserfüllungen — in jedem geometrischen Erkenntnisprozeß unbedingt ausgeschaltet sein sollen, ist eine übertriebene Forderung „strenger" Arithmetiker und am Empirismus kränkelnder Geometer. Wie die Folge der Denkakte im Verlaufe einer größeren Rechnung „gewissen Regeln" untersteht, so auch die Konstruktion des Geometers. Aber auch hier ist es kein starres Schema in der psychologischen Abfolge, sondern ein Suchen und Umhertasten, ein Beziehen und Trennen, Konstruieren und Auflösen, ein „Experimentieren" in Gedanken, auf „Grund dessen wir schließlich vorhersagen, wie die Messungen ausfallen müssen, die wir an einer genau ausgeführten Zeichnung oder an einem Modell vornehmen".[52] Die sinnlichen Wahrnehmungen an der Zeichnung, an dem festen oder an dem beweglichen Modell bieten aber weder die Elemente der Deduktion noch die Regeln, nach denen jene Elemente kombiniert werden. Sie können auch hier nur als Stütze des Gedächtnisses, als Fixationspunkt für die Bedeutungsintentionen dienen. Niemals beruft sich ein Geometer auf die deskriptiven Bewußtseinsinhalte, auf die Anschauung im Sinne der Psychologie; sondern immer auf die Gesetze einer gültigen Konstruktion, die in der reinen Anschauung im

[52] O. Hölder: A. a. O. S. 10.

Sinne Kants wurzeln. In diesen Gesetzen liegt jeder geometrische Denkakt fundiert; auf sie muß daher jeder bedeutungerfüllende Akt auch zurückgreifen können.

Werden diese Bedeutungsintentionen aber im Sinne einer Arithmetisierung umgebogen, so treten wir auch aus dem reinen geometrischen Denken hinaus. Mit dem Eintreten arithmetischer und kombinatorischer Begriffe in den geometrischen Denkverlauf gestalten sich auch (in psychologischem Sinne) die Schlußfolgen noch verwickelter.[53] Besonders ist es das „anschaulich-funktionale Denken", bei dem rein geometrische Bedeutungsintentionen mit Akten konkreter Bedeutungserfüllung, aber auch mit arithmetischen Akten — je nach der Art der Aufgabe verschieden — auf das innigste verflochten sind.[54] Die wirkliche Einheit der Erlebnisvorgänge, der Bedeutungsintentionen und Bedeutungserfüllungen, der emotionalen und volitionalen Akte, ist also auch hier eine total andere als die in ihr bewußte ideale Einheit der geometrischen Zusammenhänge, und es hat keinen Sinn, von einer Kongruenz des Bildungsgutes und der Struktur der Persönlichkeit zu reden.[55]

Die Entwicklung geometrischer Dispositionen.

Die räumlichen Vorstellungen scheinen dem Kinde müheloser zuzuwachsen als die Zahlvorstellungen. Die Wurzel vieler geometrischer Grundbegriffe reicht weit in die Kindheit zurück.[56] Der Weg der psychologischen Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe führt „vom Konkreten zum Abstrakten".[57] Auch das geometrische Denken entzündet sich also an den Sinneswahrnehmungen. Zunächst werden die Bezeichnungen: Punkt, Gerade, Ebene, Linie, Kreis, Dreieck,

---

[53] O. Hölder: A. a. O. S. 19.

[54] Vgl. G. Rudert: Die Grundlagen des funktionalen Denkens in ihrer Bedeutung für den ersten mathematischen Unterricht. Berlin 1919.

[55] Vgl. S. 13 dieser Arbeit und Kerschensteiners „Grundaxiom".

[56] D. Katz: A. a. O. S. 11.

[57] H. E. Timerding: Die Erziehung der Anschauung. S. 166.

Kugel, Würfel usw. durchaus nur für konkrete Gegenstände gebraucht („natürliche Geometrie"); erst allmählich vollzieht sich in Akten der ideierenden Abstraktion die Herausbildung der reinen geometrischen Begriffe. Dabei ist und bleibt die Wahrnehmung immer nur ein bedeutungbestimmender, nicht ein bedeutungenthaltender Akt.[58] Auch die Richtungen des Raumes — oben, unten; links, rechts; vorn, hinten — kommen nur „an" Erfahrungen im Raume zum Bewußtsein. Nach K. Bühler ist „die reinliche Abgrenzung der Wahrnehmung von dem, was sich in der Seele an sie anschließt"[59], der Psychologie noch nicht gelungen. Jedenfalls sind die meisten Ausführungen über die psychologische Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe ebenso problematisch wie die über den Fortschritt vom Urraum (Mundraum) zum Nahraum (Tastraum) zum Fernraum.[60]

Im Hantieren mit den konkreten Gegenständen vollzieht das Kind jene Akte geometrischer Konstruktion, d.h. stellt es jene Beziehungen zwischen den Dingen her, die in den geometrischen Grundsätzen abstrakt formuliert sind. Für das Verständnis dieser Relationen ist es gleichgültig, ob sie an Gesichts- oder Tastwahrnehmungen „ausgelöst" werden; daher stimmt auch die Geometrie der Blinden durchaus mit der Geometrie der Vollsinnigen überein.[61] Die genetische Psychologie hat den Anteil der einzelnen Sinnesleistungen an der Entwicklung der geometrischen Relationen, die in den Axiomen ausgesprochen sind, noch nicht befriedigend herauslösen und auch noch nicht feststellen können, wie sich die verschiedenen Sinneswerkzeuge (Druck-, Tast-, Gesichtssinn, statischer Sinn) beim ganz jungen Kinde aufeinander einstellen.[62] An den visuellen Vorstellungen lassen sich Farben- und

[58] Vgl. E. Husserl: Logische Untersuchungen II 2. S. 21.

[59] K. Bühler: Die geistige Entwicklung des Kindes. 1921. S. 125.

[60] D. Katz: A. a. O. S. 7; K. Bühler: A. a. O. S. 94; H. Poincaré: S. 59 dieser Arbeit.

[61] W. Steinberg: Psychologie der Blinden. Hamburg 1919.

[62] Vgl. K. Bühler: A. a. O.

Formelemente unterscheiden; für die Geometrie ist das visuelle Formgedächtnis, das sich auf Gestalt (Form), Größe und Lage der Gebilde bezieht, von großer Bedeutung.

Mit der allmählichen Erstarkung der „geometrischen Urteilskraft" bildet sich auch zugleich das geometrische Schlußvermögen. Sobald das Gedächtnis eine Reihe geometrischer Erkenntnisse umfaßt, ist ja eine wichtige Bedingung für die Herstellung geometrischer Schlußfolgen gegeben. Nach dem Grade der in den einzelnen Sätzen enthaltenen „Sinnlichkeit", d. h. Anschauungsfülle, unterscheidet Branford[63] verschiedene Stufen der Beweisführung und Beweisschwierigkeit: den „experimentellen", den „intuitiven" und den „rein logischen" Beweis. (Während der experimentelle Beweis sich auch auf Empfindungen des Tast- und Bewegungssinnes stützt, sucht der intuitive Beweis nur mit Gesichtswahrnehmungen [und zugehörigen Erinnerungen] als fundierender Grundlage auszukommen.)

Sinnlich wahrnehmbar sind natürlich nur die konkreten Gegenstände bzw. ihre Veränderungen. Die Beziehungen aber zwischen den durch ideierende Abstraktion gewonnenen Grundgebilden „setzt" das Denken selbst, „überträgt" es auch auf die mehr oder minder scharf wahrgenommenen oder klar vorgestellten konkreten Gegenstände. Ebenso stellt es auch die bestimmte Ordnung der Urteile zu der Schlußfolge selbst her. Der „Anstoß" für die Aneinanderreihung der Schlußsätze kann hin und wieder von Handlungen, Wahrnehmungs- und Vorstellungsfolgen ausgehen — solche Beweisgänge scheinen dann dem Kinde näher zu liegen —, aber die Begründung kann nicht in ihnen liegen, d. h. nicht in der assoziativen Verflechtung experimenteller und intuitiver Momente. Es gibt in der Geometrie nur ein Beweisverfahren, und das stützt sich auf den Sinn der geometrischen Sätze, der Grundgebilde und Axiome. Diese Behauptung schließt nicht aus, daß in der

---

[63] Branford: Betrachtungen über mathematische Erziehung. 1913.

Methode der Darbietung (oder in der Arbeits- und Forschungsweise) geometrischer Beweisgänge ein experimentelles oder intuitives Verfahren vor dem rein logischen, das sich mit dem Minimum der erforderlichen abstrakten Denk- und Konstruktionsschritte begnügt, um so mehr den Vorzug verdient, je unentwickelter das Denken in diesem Bereich sich zeigt. Daher sind Kinder für experimentelle und intuitive Beweisführungen (in engeren Grenzen vielleicht zu selbständigen) schon vor der Pubertät zugänglich; selbständige „reine" Beweisgänge treten aber erst später auf. Sie setzen eine hochentwickelte Schlußfähigkeit voraus, die Kennzeichen spezifisch mathematischer Begabung zu sein scheint.

Typische Forschungs- und Arbeitsweisen.

Während die Geometrie schlechthin die gesetzmäßigen Beziehungen räumlicher Gebilde darlegt und untersucht, bestimmen die einzelnen Geometer, wie bereits unsere Ausführungen über die Axiomatik und über die geometrischen Methoden zeigten, doch in typisch verschiedener Weise „ihren" Forschungskreis. Gewiß kann man auch hier nach dem Grade der Spontaneität und Rezeptivität wie auch nach dem Umfange, nach der Ausdehnung des persönlichen Forschungskreises bestimmte typische Verschiedenheiten herausheben. Wichtiger ist für uns die Abgrenzung nach dem Problemkreise und den dort vorherrschend angewandten Methoden der Forschung und Darstellung.

Die in reiner Anschauung konstruktiv erzeugten oder ewig gleichbleibend gedachten Raumgebilde, die Grundformen des Seins gleichsam, sind Ausgangspunkt und Zielpunkt der Forschungsweise des „Euklidischen Geometers"; während der „projektive Geometer" die in reiner Anschauung gegebenen Zusammenhänge zwischen verwandten Figuren zu erfassen sucht. Hier wie dort kann sinnliche Wahrnehmung den Forschungsprozeß auslösen und unterstützen; bei der projektiven Betrachtungsweise aber belebt sich der Forschungsprozeß durch das in ganz bestimmter Weise hineingezogene Bewegungsmoment, das ein Ausdruck größerer innerer Lebendigkeit und freierer Beweglichkeit der (geometrischen) Anschauungskraft zu sein scheint. — Wir sahen bereits, wie die Axiomatiker in die Geometrie (und in die Arithmetik) eine „rein logische" — d. h. oft formalistische — Forschungsweise (bzw. Darstellungsweise) hineinzutragen versuchen; die reine Bedeutungsintention wird entschieden als Kernpunkt der Aufeinanderfolge der Gedanken betont. Natürlich begegnen uns diese durch Abstraktion und Idealisierung herausgehobenen Einstellungen selten rein; sondern zumeist treffen wir auf „Mischformen". Durch die Fusion von Arithmetik und Geometrie sind eine weitere Reihe „gemischter" Forschungsweisen bedingt, die wir kurz als „analytisch-geometrische Arbeitsweisen" zusammenfassen wollen. Auch hier zeigen sich der schärferen Beobachtung charakteristische Ausprägungen. — Zahlreiche Mathematiker aber schöpfen neue Probleme immer wieder aus den einzelnen Zweigen der Physik und Technik; gerade bei den „Anwendungen" wird das mathematische Denken weitgehend von sinnlichen Wahrnehmungen, bildlichen Vorstellungen getragen und belebt. Nach der zunehmenden Konkretheit der Begriffe läßt sich eine Stufenfolge von Arbeitsweisen aufstellen, die von der Einstellung des Axiomatikers hinabführt bis zu der des Technikers (soweit diese Einstellung noch mathematisch ist).[64] Den Kern aller mathematischen Forschungs- und Arbeitsweisen bilden die spezifisch arithmetischen und geometrischen Grundakte bzw. Dispositionen. In ihrer Belebung und Kräftigung liegt daher der spezifische formale intellektuelle Bildungswert der Mathematik. Die Grenzen der Entfaltung dieser Dispositionen sind durch die Bildsamkeit des Individuums be-

[64] H. E. Timerding: A. a. O. S. 166—185. R. Crain: Über Wesen und Bedeutung technischer Anschauung. 1913.

stimmt; in der Struktur der einzelnen Persönlichkeit liegt auch der Grund für die eigenartige Verflechtung der mathematischen Erkenntnisprozesse in der Lebenstotalität.

c) *Über mathematische Bildsamkeit.*

Die mathematische Begabung. Nach fast allgemeiner Ansicht ist die Entfaltung der Grundakte mathematischer Erkenntnis bei jedem „normal" begabten Menschen möglich; daher besitzt auch „nach Meinung aller Einsichten jeder normal begabte Schüler ein genügendes Maß geistiger Fähigkeiten, um dem Unterricht in der Mathematik das nötige Verständnis entgegenzubringen".[65] Demgegenüber will es zunächst fast unverständlich erscheinen, daß die uralte Mathematik doch die unpopulärste Wissenschaft geblieben ist. „Daß nicht jeder zu neuen Entdeckungen befähigt ist, gilt als selbstverständlich. Daß nicht jeder einen einmal gelernten Beweis behalten kann, ist noch begreiflich. Daß aber nicht jeder eine mathematische Entwicklung in dem Momente versteht, in dem man sie ihm auseinandersetzt, das erscheint uns bei näherem Nachdenken sehr überraschend."[66] Wenn schon die Aufnahme mathematischen Wissens manche Schwierigkeit bereitet, so wird zu tieferem Eindringen zum mindesten eine gewisse Übung im mathematischen Denken, zu selbständigem mathematischem Schaffen vielleicht sogar eine spezifisch mathematische Begabung erforderlich sein.

Doch hat Herbart[67] energisch betont: „Daß die Anlage zur Mathematik seltener sei als zu anderen Studien, ist bloßer Schein, der von verspäteten und vernachlässigten Anfängen herrührt." Auf verspäteten, vor allem häufig unterbrochenen oder schlecht geleiteten Anfangsunterricht hat man die mangelhaften Leistungen der Schüler oberer Klassen, ihre völlige

[65] A. Pringsheim: Über den Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. 1904.
[66] H. Poincaré: Wissenschaft und Methode. S. 36.
[67] J. F. Herbart: Umriß pädagogischer Vorlesungen III 1.

Interesselosigkeit oder gar böswillige Abneigung gegen mathematische Studien öfter zurückgeführt.[68] Gewiß ist „das Lehren eine schwere Kunst und das Lehren der mathematischen Anfangsgründe der schwersten eine".[69] Geschickt erteilter Anfangsunterricht vermag sicherlich das Interesse zu erwecken und auch das Eindringen in die schwierigeren Probleme zu erleichtern.[70] Aber selbst gute Einführung in die Grundlagen und reges Interesse für die weiteren Gebiete der Mathematik können nicht verdecken, daß „für einen im höchsten Sinne erfolgreichen mathematischen Unterricht eine gewisse spezifische Begabung erforderlich ist".[71] M. Pasch[72], der bei vielen, die die höhere Schule durchgemacht haben, eine „tiefere Einwirkung des genossenen mathematischen Unterrichtes" vermißt, möchte für diese Erscheinung weniger die Beschaffenheit des Unterrichtes verantwortlich machen, sondern die Eigenart des mathematischen Denkens selbst, das nach seiner Meinung der menschlichen Natur zuwiderläuft; d. h. nicht das Denken über mathematische Gegenstände, sondern die Form des Denkens, das an diesen Gegenständen geübt wird.

Die Wurzel der mathematischen Begabung nach Poincaré. H. Poincaré, der sich öfter von den neueren Mathematikern diesem Probleme zugewandt hat, hebt drei Faktoren als ganz besonders kennzeichnend für die mathematische Begabung heraus: ein hervorragendes Gedächtnis, starke Konzentrationsfähigkeit und ein besonderes „Feingefühl für mathematische Zusammenhänge". Poincaré nennt dieses Feingefühl „Intuition". „Wenn ich die Intuition, d. h. das Gefühl für diese Ordnung besitze, so kann ich mit einem Blick das Ganze der Beweisführung überschauen und brauche

[68] Zahlreiche Belege dazu in den Abhandlungen der IMUK.

[69] A. Pringsheim: A. a. O.

[70] Über die Entfaltung der formalen Bildungswerte vgl. S. 127 dieser Arbeit.

[71] H. Weber: Enzyklopädie I. Vorwort.

[72] M. Pasch: Mathematik und Logik. 1919.

nicht zu befürchten, ein einzelnes Element zu vergessen."[73] „Nicht jeder kann offenbar diese Intuition besitzen, welche uns die verborgenen Relationen und Harmonien erraten läßt, noch eine über das Gewöhnliche hinausgehende Gedächtnisstärke und Konzentrationskraft."[73] Nach dem Grade, in dem diese Fähigkeiten in den einzelnen Menschen ausgebildet sind, lassen sich nach Poincaré *drei Klassen der mathematischen Begabung* unterscheiden. „Die einen besitzen weder dies feine und schwer zu definierende Gefühl, noch eine über das Gewöhnliche hinausgehende Gedächtnisstärke und Konzentrationskraft, und dann sind sie gänzlich unfähig, über die Anfangsgründe hinaus mathematische Entwicklungen zu verstehen; zu dieser Klasse gehören die meisten Menschen. Die anderen haben das Gefühl für die mathematische Ordnung nur in geringem Grade; aber sie verfügen über eine ungewöhnliche Gedächtnisschärfe und über eine große Konzentrationskraft. Sie lernen die Einzelheiten nacheinander auswendig und können die Mathematik verstehen, manchmal auch anwenden. Aber sie sind außerstande, selbst etwas zu schaffen. Andere endlich besitzen die erwähnte Intuition in größerem oder geringerem Grade, und dann können sie Mathematik nicht nur verstehen, selbst wenn ihr Gedächtnis nicht besonders stark ist, sondern sie können auch schöpferisch tätig sein und mit größerem oder geringerem Erfolge versuchen, Neues zu finden . . ."[74]

Die *Konzentrationskraft* ist sicherlich kein hinreichendes Kennzeichen für die spezifisch mathematische Begabung; ist doch Aufmerksamkeit und Interesse zu jeder hochwertigen Kulturarbeit, mag sie nun auf wissenschaftlichem oder künstlerischem, auf technischem oder politischem Gebiet liegen, erforderlich. Aus der Gesamtenergie der Persönlichkeit entströmt gleichsam die geistige Kraft zur Betätigung an allen,

---

[73] H. Poincaré: Wissenschaft und Methode. S. 38—40.

[74] Ders.: A. a. O. S. 38—40.

auch an mathematischen Sonderaufgaben. Je leichter an ihnen Selbsttätigkeit und Schaffensfreude sich auslösen, um so intensiver wird auch wieder die Konzentration auf diese Probleme. Der Aufwand an Aufmerksamkeit und Interesse muß aber um so größer sein, je neuartiger, je ausgedehnter und abstrakter die zu lösenden Fragen sind. Für die mathematische Begabung ist also nicht die Konzentrationskraft schlechthin, sondern nur das Maß geistiger Energie (Aufmerksamkeit, Interesse) charakteristisch, das gerade mathematischer Arbeit zugewandt wird. — Die Gedächtnisstärke ist ebenfalls kein Charakteristikum spezifisch mathematischer Begabung; vielmehr erfordert jede wissenschaftliche Arbeit Gedächtniskraft. Außerdem lehrt die Psychologie, daß im „Gedächtnis" nicht eine einheitliche Funktion vor uns liegt; sondern daß die Gedächtnisleistungen einer und derselben Person je nach den Gegenstandsgebieten ganz verschieden sein können. Für den Mathematiker kann also nur das Gedächtnis für arithmetische und geometrische Gegenstände in Betracht kommen: für mathematische Zeichen, Bedeutungen und Bedeutungserfüllungen. Das Behalten dieser Gegenstände wird nun wesentlich erleichtert durch eine immanente Gesetzlichkeit; durch die Eigengesetzlichkeit mathematischer Symbolik wie durch die Gesetze arithmetischer und geometrischer Konstruktion. — So bleibt als charakteristisches Moment mathematischer Begabung jenes „Feingefühl für mathematische Zusammenhänge". Wie dem Blinden die Welt der Farben, dem Tauben die Welt der Töne verschlossen ist, so steht derjenige, dem diese „Intuition" fehlt, verständnislos vor der Welt der höheren Mathematik. Wie weit dieses Feingefühl in der „rohen Individualität" wurzelt, wie weit es durch Übung geschärft werden kann — das ist noch offene Frage der Psy-

[75] Für die erfolgreiche Durchdringung dieser Frage reichen die Methoden der sog. „naturwissenschaftlichen Psychologie" dann natürlich nicht aus; vielmehr müssen „strukturpsychologische" Gesichtspunkte herangezogen werden.

chologie. Mir scheint, daß es sich hier mehr um die Ausbildung einer „Strukturdisposition" handelt[75], die dadurch erfolgt, daß sich durch mannigfache Betätigung arithmetischer und geometrischer Grundakte im Individuum ein Ausschnitt der mathematischen Welt aufbaut — eine geistige Struktur —, welche es ermöglicht, neu auftretende mathematische Probleme sofort an ihrem „Ort" in diesem großen Gedankengebäude einzuordnen und damit die Methoden zu ihrer Lösung zu finden. In der verschiedenen Stärke der Grunddispositionen liegt dann vielleicht (neben den äußeren Einflüssen) der Grund der ungleichartigen Entfaltung der Strukturdisposition, die sich in der Verschiedenheit der mathematischen Begabungen zeigt. Denn das Feingefühl äußert sich, wie wir schon bei der kurzen Betrachtung arithmetischer und geometrischer Erkenntnisprozesse sahen, in den einzelnen Gebieten in typisch verschiedener Weise.

Über mathematische „Erfindung". Auf diesem Feingefühl beruht wohl auch der „Mechanismus der mathematischen Erfindung" — beim Forscher wie beim Schüler. Poincaré schildert im Hinblick auf seine eigenen Forschungsweisen besonders lebhaft die Tätigkeit des „sublimen Ich", dem er eine Hauptrolle bei der mathematischen Erfindung zuspricht. Erfinden heißt nach Poincaré „ausscheiden, auswählen"; die „wertvollen" mathematischen Tatsachen ausscheiden, „welche uns unvermutete Verbindungen mit anderen Tatsachen offenbaren, die wir schon lange kennen, aber mit Unrecht als einander fremd hielten".[76] Das unbewußte Ich arbeitet nach Poincaré nicht rein automatisch; es kann sogar besser ahnen als das bewußte Ich; denn „es hat dort Erfolg, wo jenes versagt". Mit Nachdruck weist Poincaré aber auch auf die Grenzen des sublimen Ich hin. Seine fruchtbare Tätigkeit kann erst beginnen, nachdem eine Periode ernster, erfolgloser Arbeit voranging; d. h. nachdem ein lebhaftes, brennendes Problembewußtsein sich eingestellt hat.

[76] H. Poincaré: Wissenschaft und Methode. 1914. S. 40.

„Niemals liefert uns die unbewußte Arbeit das Resultat einer längeren Rechnung, bei der man feste Regeln anzuwenden hat, ganz fertig."[77] „Alles, was man von den Inspirationen erwarten kann, die als Früchte der unbewußten Arbeit erscheinen, sind neue Ausgangspunkte"[78] für die Rechnungen und Konstruktionen. Diese selbst aber muß man „in der zweiten Periode bewußter Arbeit ausführen; d. h. in derjenigen Periode, welche der plötzlichen Eingebung folgt und in der man die Resultate dieser Eingebung verifiziert und ihre Folgerungen zieht".[78] Diese Arbeit aber fordert „Disziplin, Aufmerksamkeit, Willenskraft".[78]

Das besondere Gedächtnis und das lebendige Interesse für mathematische Gegenstände sind also nur notwendige, nicht aber hinreichende Merkmale mathematischer Begabung; diese liegen in dem „Feingefühl" für die in konstruktivem Denken entworfenen Zusammenhänge mathematischer Gebilde. Sie leuchten hervor bei dem leichten Vollzug der Grundakte im Auffassen dargebotener mathematischer Gedanken, bei dem selbständigen Finden von Lösungsmöglichkeiten gegebener Probleme und bei dem selbständigen Stellen neuer mathematischer Probleme.

Den typisch verschiedenen Arten mathematischer Produktion entsprechen ebenso verschiedene Arten der mathematischen Begabung.[79] Nach F. Klein[80] führt die strenge Befolgung einer bestimmten Forschungsweise zu einem „gewissen Versteinerungsprozeß"; „erst outsider wirken dann wieder belebend" auf den Gang der Forschung durch Übertragung von

---

[77] H. Poincaré: A. a. O. S. 46. [78] Ders.: A. a. O. S. 51.

[79] Von diesen Gedanken aus ergibt sich ein anderer methodischer Gang zu tieferem Eindringen in das Problem der mathematischen Begabung. Die durch „psychologische Analyse" mathematischer Originalarbeiten ermittelten typischen Forschungs- und Arbeitsweisen erfahren bei ihrer Entfaltung im jugendlichen Seelenleben charakteristische „Spiegelung", „Brechung", die für die Didaktik der Mathematik bedeutungsvoll sind.

[80] F. Klein: Elementarmathematik. Bd. II. S. 112.

„Vorstellungen aus einem Anschauungsgebiet auf Objekte eines anderen".[81] So haben z. B. Physiker die Vektorenrechnung ausgebaut, Funktionentheoretiker den Unterschied zwischen analytischen und nichtanalytischen Kurven zur Geltung gebracht. Aus diesem Grunde fordert F. Klein eine innige Durchdringung (Fusion) der einzelnen mathematischen Disziplinen im Unterricht; wollte man sich hier dogmatisch an ein Schema binden, so würde z. B. die „Geometrie bald langweilig werden und allen Reiz verlieren; vor allem aber neues erfindungsreiches Denken hindern, das ja stets unabhängig von jeder Systematik vorgeht".[82] So scheinen auch in der mathematischen Forschung selbst immer diejenigen Mathematiker am fruchtbarsten gewesen zu sein, die nicht in einer Disziplin „versteinert" waren. Branford behauptet in diesem Sinne geradezu: „Die größten Fortschritte in der Mathematik sind von Philosophen gemacht worden."[83] Das Erfinden und Entdecken aber lehrt man nicht; man kann es auch nicht lernen.[84] Wir können nur das Feingefühl für mathematische Gedankenzusammenhänge durch ernste Beschäftigung mit mathematischen Problemen in uns entwickeln und schärfen. Die „freie Initiative des Mathematikers" läßt sich auch nicht durch einen mechanischen Vorgang ersetzen; die „Maschine kann die Tatsache verarbeiten, mit der Seele der Tatsache kann sie nichts anfangen".[85] Die lehrbuchmäßig verarbeiteten Sätze der Mathematik verraten kaum noch eine Spur von jenem lebendigen Forschungsprozeß, in dem sie einst geboren wurden: nichts mehr von dem erstmaligen Auftauchen der Probleme, von dem Ringen um die Durchführung dieser oder jener Lösung, von dem Mühen um die möglichste Vereinfachung des Beweisganges. Die Rücksicht auf leichte Faß-

[81] A. Riehl: Beiträge. S. 8. [82] F. Klein: A. a. O. S. 321.
[83] B. Branford: Betrachtungen. S. 354.
[84] Vgl. A. Riehl: Humanistische Ziele. 1908. S. 7.
[85] H. Poincaré: Wissenschaft und Methode. S. 22; ferner auch F. Klein: A. a. O. Bd. I. S. 43—54.

lichkeit oder systematische Gliederung führt die Darstellung des Wahrheitszusammenhanges weit ab von jenem vielgestaltigen Gedankenverlauf; nur der strenge Fundierungszusammenhang, das „Minimum der Denkschritte" zwischen Ausgangs- und Zielpunkt der Forschung bleibt stehen, damit neues Leben sich an ihm entzünde. In den Originalschriften — darin liegt einer ihrer unersetzlichen Werte — tritt uns zumeist eine lebendige Persönlichkeit im Ringen um mathematische Erkenntnis entgegen; ihr Studium regt daher auch nicht allein die spezifisch mathematischen Erkenntnisfunktionen an, sondern belebt — je nach Eigenart des Forschers — außer den intellektuellen Funktionen noch die ästhetischen, technischen, sozialen und religiösen Erlebnisweisen. Und durch die „Interessenausstrahlung" führt hier für manchen „geborenen Nichtmathematiker" ein anderer Weg in die Vorhalle der mathematischen Wissenschaft, vielleicht auch noch weiter.

2. Vom allgemeinen formalen intellektuellen Bildungswert der Mathematik.

Der Vollzug der spezifisch mathematischen Akte geschieht immer auf dem Grunde der Lebenstotalität. Hier treten die mathematischen Akte zu einem mehr oder minder sachlich geordneten, d. h. ihrem intentionalen Gehalt nach verbundenen Gedankenverlauf zusammen. Alle mathematischen Gegenstände, die ja bis auf die elementarsten Grundgebilde der Arithmetik und Geometrie zusammengesetzter Natur sind, erfordern zu ihrer scharfen Erfassung stets einen Denkprozeß, der den Sinn der mathematischen Begriffe und das Gesetz ihrer Konstruktion belebt. Zur Durchführung der verwickelten Erkenntnisprozesse genügt daher auch nicht eine momentane theoretische Einstellung; es ist vielmehr eine über den Augenblick hinausgehende, bis zum Erkenntnisabschluß dauernde Geisteshaltung erforderlich.

Die häufige Einengung der Lebenstotalität auf die Erkenntnishaltung charakterisiert eine bestimmte Formung der Struktur der Persönlichkeit, nämlich den Forscher oder den „theoretischen Menschen". Zwar scheiden sich typische Formen der theoretischen Geisteshaltung nach den Gegenstandsgebieten bzw. nach den entsprechenden Grundakten. Was aber für den Forscher schlechthin kennzeichnend ist, liegt in einer gleichsam übergeordneten Schicht struktureller Dispositionen, deren Entfaltung von Art und Grad der sich betätigenden fundamentalen Erkenntnisdispositionen wesentlich beeinflußt wird. In der durch die Eigenart des konstruktiven mathematischen Denkens und Anschauens ganz besonders bedingten Geisteshaltung, in der strengen Abfolge der in ihr verbundenen Akte liegt das Moment, das die „geistige Zucht"[86] als wesentliche Frucht trägt.

a) Vom Wesen der geistigen Zucht.

Mit der theoretischen Einstellung, d. h. mit dem Auftauchen eines Problemes verbindet sich auch oft die Vermutung zu seiner Lösung. Zahl und Art solcher auftauchenden Vermutungen hängen dabei sowohl von dem Erkenntnisgebiet wie auch von der Begabung, der Reife, dem Interesse usw. des nachdenkenden Subjektes ab.

Die skeptische Geisteshaltung. Werden die Vermutungen mit Zweifel aufgenommen und geprüft, d. h. in ihren denknotwendigen Folgen für das Problem selbst und für die Verschlingung des Problemes in einem größeren Gedankenzusammenhang konsequent entwickelt, so zeigt das Individuum, daß es im Besitz „geistiger Zucht" ist. Unter geistiger Zucht verstehen wir mit G. Kerschensteiner[87] „jene Disziplinierung des Geistes, vermöge welcher der Mensch immer mehr in den Stand gesetzt wird, längere Gedankenreihen unter beständiger Skepsis gegen die eigenen Einfälle vernunftgemäß (d. h. durch einwandfreie Syllogismen, durch hypo-

[86] G. Kerschensteiner: Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterichtes. 1914. S. 16—38.
[87] Ders.: A. a. O. S. 38.

thetische und disjunktive Schlüsse, durch Schlußketten und Kettenschlüsse, durch Induktionen oder Schlüsse aus dem Zeichen) durchzuarbeiten und das schließlich gewonnene endgültige Urteil so lange der Verifikation zu unterziehen, bis alle Gedanken aneinander angepaßt sind".

In den Wesenswissenschaften ist die „hypothetische Begriffserörterung" notwendige und hinreichende Bedingung für die Entscheidung über die Richtigkeit der Vermutung, des Ansatzes der Lösung; in allen Tatsachenwissenschaften dagegen muß zu den rein begrifflichen Erörterungen die Befragung der unter diese Begriffe fallenden Erscheinungen durch Beobachtung, Experiment, Statistik usw. treten. Keineswegs aber spielt sich in jedem einzelwissenschaftlichen Forschungsprozeß das Auftreten des Problemes, das Auftauchen der Vermutungen zu seiner Lösung, die konsequente Entwicklung ihrer Folgen, die evtl. Befragung der Tatsachen im Experiment (im weitesten Sinne) in einer unserer Aufzählung immer zeitlich und eindeutig entsprechenden Folge ab; vielmehr können in gleichsam „rückläufiger" Bewegung des Geistes bei der Durchprüfung der Vermutungen z. B. bereits Verschiebungen, Einengungen oder Erweiterungen der ursprünglichen Problemstellung, ferner neue Lösungsmöglichkeiten sich bieten. Auch im mathematischen Denkverlauf treten die Akte der Begriffsbildung, der Urteilsformulierung und des Schließens nicht in einer schematischen Folge auf; erst nachträglich wird ja auf das Minimum der Denkschritte reduziert, was auf vielen Umwegen und in „Sprüngen" entdeckt wurde. Daher faßt jede der sogenannten „didaktischen Normalformen" auch nur einen „idealen" Fall der Gedankenbewegung im Unterricht.[88]

Mitübung. Die skeptische Geisteshaltung gegenüber allen auftauchenden Lösungsmöglichkeiten — der Kern

[88] Vgl. die Ausführungen von P. Natorp: Zur Unterrichtslehre. In „Gesammelte Abhandlungen zur Sozialpädagogik". 1922. Drittes Heft. S. 36—132.

aller geistigen Zucht — ist das Ergebnis intellektueller Erziehung; ohne diese stellt sie sich selbst nicht durch die bittersten Erfahrungen ein.[89] Die in ernster Arbeit erworbene Fähigkeit zu konsequenter Durchhaltung der theoretischen Einstellung, die Belebung und Stärkung des beharrlich auf das Ziel gerichteten Willens zur Erkenntnis, der auch anscheinend hoffnungslose Schwierigkeiten zu überwinden sucht, bezeichnet das Wesentliche der „allgemeinen" formalen intellektuellen Bildung, zu der wir auch eine evtl. „Mitübung" intellektueller Dispositionen bei der Betätigung anderer rechnen.[90] Sicherlich erfolgt ja z. B. eine Bildung des Willens durch die Forschungsarbeit; fraglich ist nur, ob diese Willensbildung dann sich bei der theoretischen Geisteshaltung und bei der sozialen Einordnung, bei der künstlerischen Produktion und beim politischen Tun in gleichem Grade zeigt. Der Begriff der Intelligenz ist auch durch die neuere Psychologie noch nicht so eindeutig festgelegt, daß wir in der Intelligenz eine „einheitliche Funktion zu beliebiger Verwendung" sehen könnten. Wesentliche Aufschlüsse über das Phänomen der Mitübung gerade in bezug auf die mathematischen Funktionen erwarten wir noch von der Korrelationspsychologie. Für unsere Untersuchung des Bildungswertes der Mathematik erscheint die plastische Ausstrahlung vorläufig von sekundärer Bedeutung. Wir sehen also den formalen intellektuellen Bildungswert im engeren Sinne in der Entfaltung der spezifisch mathematischen Grundakte, im weiteren Sinne aber in der Ausbildung der übergeordneten strukturellen Dispositionen.

Für die Ausübung eines jeden höheren gelehrten Berufes ist die geistige Zucht das Grunderfordernis. Keineswegs ist aber entsprechend der Dringlichkeit dieser Forderung zugleich ihre Erfüllung gegeben. Unsere höheren Schulen sehen oder sollen sehen ein sehr hohes Ziel ihrer Wirksamkeit in der

---

89 G. Kerschensteiner: A. a. O. S. 27.

90 Vgl. S. 81 dieser Arbeit.

Erziehung zu wissenschaftlichem, zu objektivem Denken. Erst mit der vorbehaltlosen Hingabe an die Gegenstände, mit der Unterordnung des eigenen Denkens unter das Gesetz der Sache entfaltet sich das Ethos der Wahrheit (und Wahrhaftigkeit)[91], in welchem dem Wahrheitswert gegenüber allen anderen Kulturwerten im Konfliktsfalle unbedingt der Vorzug gegeben wird. Bei der Darlegung des allgemeinen formalen intellektuellen Bildungswertes der Mathematik ist also die Frage zu erwägen, was diese Wissenschaft zu der Entfaltung der geistigen Zucht, für die Erziehung zum sachlichen Denken wie für die Belebung des Ethos der Wahrheit beitragen kann.

b) Bedeutung der Mathematik für die geistige Zucht.

Die einzelnen Wissenschaften dienen nach ihrem sachlichen Gehalt und nach ihrer Entwicklungsstufe in ganz verschiedenem Grade der Entfaltung der geistigen Zucht. Uns scheint, daß gerade die Mathematik vor allen anderen Unterrichtsfächern große Vorzüge hat in Hinblick auf logische Schulung und Erziehung zum Ethos der Wahrheit. Die Mathematik ist Wesenswissenschaft von höchster Vollendung und ermöglicht daher

1. die scharfe Erfassung ihrer Gegenstände im Anschauen und Denken und die eindeutige Bezeichnung derselben mit sprachlichen Symbolen;
2. die größte Präzision in der Formulierung der Beziehungen der Gegenstände in Urteilen bzw. sprachlichen Sätzen;
3. die feste Verkettung der Urteile zu geschlossenen Gedankenzusammenhängen.

Die Gewöhnung zu scharfer Begriffsbildung, zu präzisem sprachlichen Ausdruck und zu folgerichtiger Gedankenverknüpfung sind aber die wesentlichen Hilfsmittel zur Erreichung geistiger Zucht.

Scharfe Begriffsbildung und eindeutige Be-

[91] Vgl. E. Spranger: Lebensformen. 1921. II. S. 261.

zeichnung. Die mathematischen Begriffe sind überwiegend Gesetzesbegriffe. Das Prinzip der Konstruktion der in ihnen intendierten Gegenstände, das in genetischer Definition des Begriffes ausgesprochen wird, liegt also, wenn es einmal klar erfaßt ist, unverlierbar in unserer Hand. (Wo identisch derselbe Begriff durch mehrere Definitionen festgelegt werden kann [z. B. die Kegelschnitte], da ist die Gleichwertigkeit dieser „Konstruktionen" zu erweisen.) Zwar gibt es in der Mathematik auch Klassenbegriffe; sie stehen sogar an Klarheit und Deutlichkeit in nichts den Gesetzesbegriffen nach; denn die Angabe ihrer wesentlichen Merkmale durch die topische Definition ist immer möglich; weil wir sämtliche Arten der unter den genannten Begriff fallenden Einzelfälle (Unterarten) in konstruktivem Denken selbst erzeugen können.

Bei der Anwendung der Mathematik auf Gegenstände der Erfahrung handelt es sich nun darum, festzustellen, ob diese Gegenstände außer den konstitutiven Merkmalen der ihnen entsprechenden reinen mathematischen Begriffe nur noch solche mit diesen verträgliche außerwesentliche Merkmale enthalten [92], die dann den reinmathematischen Urteils- bzw. Begründungszusammenhang nicht berühren. Diese Entscheidung darüber, ob die Tatsachen der Erfahrung unter diesen oder jenen mathematischen Begriff fallen, durch diese arithmetische oder geometrische Relation verknüpft werden „können", kann nicht durch Begriffserörterung allein, sondern nur durch Beobachtung der Tatsachen, durch eineindeutige Zuordnung der Merkmale der analysierten Tatsachen und der Begriffe erfolgen.

Da die rein mathematischen Begriffe durchaus eindeutig, klar und deutlich sind, können wir ihnen zur Erleichterung unseres Denkens, das ja weitgehend an sprachliche Formulierungen gebunden ist, durchaus ebenso eindeutige sprachliche Bezeichnungen zuordnen.

[92] Vgl. H. Poincaré: A. a. O. S. 5.

In dieser Möglichkeit der eineindeutigen Zuordnung von Begriff und Symbol liegt einer der größten Vorzüge der Mathematik in Hinblick auf die Entfaltung der geistigen Zucht; weil mit ihr die erste und allgemeinste Voraussetzung aller exakten Denktätigkeit erfüllt ist.[93] „In dem unerläßlichen Zwang zu exakter Begriffsbildung und der damit verbundenen Nötigung zu einer unter allen Umständen präzisen Ausdrucksweise“[94] liegt einer der großen Erziehungswerte der Mathematik, in dem sie alle anderen Unterrichtsdisziplinen — auch Physik und Chemie — übertrifft. Natürlich ist der mathematische Unterricht nur e i n Hilfsmittel zur Ausbildung sprachlicher Fähigkeiten; schon weil er ein sachlich begrenztes Gebiet behandelt und weil die Strenge der Schlußfolgerung der Gewandtheit im sprachlichen Ausdruck und der freieren Gruppierung der Gedanken hemmend sein kann; zumeist ist aber doch der mathematische Gehalt verschiedener „wörtlicher“ Formulierung fähig. Der korrekte Ausdruck der Wahrheit ist nicht bloß ein Prüfstein für das richtige Verständnis derselben; sondern er erleichtert auch und ermöglicht nicht selten erst das Verstehen.

Viel schwieriger gestaltet sich die scharfe Begriffsbildung in den Tatsachenwissenschaften. Zumeist fehlt auch hier das eindeutige Prinzip der Konstruktion der Tatsachen aus letzten Elementen und damit die notwendige Grundlage für die genetische Definition bzw. für die Bildung der Gesetzesbegriffe. Außerdem ist jeder Erscheinungskomplex in extensiver und intensiver Hinsicht unausschöpfbar; die Herauslösung der Summe seiner wesentlichen Merkmale (durch generalisierende Abstraktion) ist eine der schwierigsten Aufgaben aller Tatsachenforschung. Bietet die Bestimmung der wesentlichen

---

[93] Über die Vereinheitlichung der Bezeichnungen in der Mathematik, besonders im mathematischen Unterricht vergleiche A. Gutzmer: Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den Jahren 1908—1913. (Heft 17; Vorschläge.)

[94] G. Kerschensteiner: A. a. O. S. 17.

Merkmale eines begrifflich zu erfassenden Erscheinungskomplexes in den exakten Naturwissenschaften schon große Schwierigkeiten, so erhöhen sich diese in den Geisteswissenschaften noch mehr (wegen der zunehmenden „Flüchtigkeit" und „Ungreifbarkeit" der Erscheinungen). Daher ist auch die eindeutige Zuordnung von Begriff (Gegenstand) und Symbol hier wesentlich schwieriger als in der Mathematik. Der Welt fließender Erscheinungen steht das Reich ewig beharrender Wesen gegenüber. Die Begriffe der Mathematik werden immer das Schema sein und bleiben, von dem aus die Erfassung wenigstens der „äußeren" Seite jener Tatsachen erst möglich wird. Je intensiver der Geist die Erkenntnis des flüchtigen Scheines nach den Gesetzen des Anschauens und Denkens betreibt, um so lebendiger entfaltet sich in ihm das Bedürfnis nach klarster Erfassung der Gegenstände (in Begriffen und Definitionen), nach eindeutiger Fixierung mit Hilfe sprachlicher Mittel. Das Denken duldet — besonders im Gebiet der Mathematik — keine Verwischung, keine „Umgestaltung" des Gegenstandes und keine fehlerhafte Metabasis; weil es nur dem Gesetze der Sache zu folgen sich müht.

Präzision der Urteile. Die Strenge des logischen Denkens zeigt sich nicht nur in der Begriffsbildung, sondern auch in der Formulierung und Verknüpfung der Urteile. Die Strenge kann aber in die Beweisgänge nur eingeführt werden, wenn sie bereits in den Begriffen und Urteilen herrscht.[95] Gerade hinsichtlich der Präzision der Urteile hat nun die Mathematik wieder einen bedeutenden Vorzug vor den Tatsachenwissenschaften. Denn die Beziehungen, die zwischen den mathematischen Gegenständen bestehen und die in den Urteilen ihren Ausdruck finden, lassen sich in höchster, zumeist vollster Schärfe erfassen und formulieren. Das scharfe Erfassen der sachlichen Zusammenhänge ist Voraussetzung für die Präzision im sprachlichen Ausdruck; daher ist in der

[95] H. Poincaré: A. a. O. S. 5.

Mathematik weitgehende Übereinstimmung zwischen Urteilsgehalt und sprachlicher Form möglich. Selbst in der angewandten Mathematik sind die Urteilsbeziehungen durchaus präzise, eindeutig und klar. Da aber die in den Urteilen der angewandten Mathematik auftretenden rein mathematischen Begriffe auf konkrete Tatsachen bezogen werden (durch eine Zuordnung, die der Rechtfertigung bedarf und doch dieser zumeist nur „annähernd" fähig ist), ist auch die Übertragung der Urteilsbeziehung auf diese Gegenstände nur „approximativ" feststellbar und gültig. Die Diskussion über den Geltungsbereich dieser angewandten Urteile ist ein wichtiges Mittel zur Erziehung des „Gegenstandsbewußtseins" und zur Belebung des Ethos der Wahrheit! Die Tatsachenwissenschaften können diese Präzision der Urteile, die die reine Mathematik auszeichnet, niemals erreichen. Die Naturwissenschaften streben mit allen Mitteln die exakte, nach Zahl und Maß bestimmte Erfassung der Erscheinungen an; sie beschränken sich daher oft auf die quantitativ faßbaren Beziehungen und suchen nach Möglichkeit alle qualitativen Verschiedenheiten an den Erscheinungen auf quantitative zurückzuführen. Die Erscheinungskomplexe der Geisteswissenschaften widerstreben noch mehr dieser quantitativen Betrachtungsweise (des konstruierenden Denkens); die den Geisteswissenschaften zugrunde liegenden Wesenswissenschaften sind — im Vergleich zu der reinen Mathematik — kaum über Ansätze zu ihrer Entwicklung hinausgekommen. Weil die Begriffe der Tatsachenwissenschaften nicht so exakt sind (wie die Begriffe der Mathematik), werden auch die zwischen ihnen hergestellten Urteilsbeziehungen oft der Präzision entbehren. Somit erscheint die Mathematik auch als das vorzüglichste Mittel der Erziehung zu klarem, deutlichem Urteilen und zu präziser sprachlicher Gedankenformulierung.

Urteilsverknüpfung. Wesentliche Vorteile gegenüber allen anderen Disziplinen bietet die Mathematik aber auch hinsichtlich der Anleitung zur Verknüpfung von Urteilen zu geschlossenen Gedankenzusammenhängen. Schon die Gedankenverknüpfung in syllogistischer Form führt uns zu neuer Erkenntnis, da ja der Schluß „ein vermitteltes Urteil über den Zusammenhang von Urteilen"[96] ist. „Auch die Erkenntnis eines analytischen Zusammenhanges ist Erkenntnis; vermehrt sie auch nicht unser Wissen nach außen hin, so klärt sie es doch nach innen hin auf."[96] Für die Fruchtbarkeit nichtsyllogistischer Formen des Schließens dient die gesamte Mathematik als Beispiel. Zur Nachprüfung, ob die konstruierten arithmetischen und geometrischen Gebilde sich widerspruchsfrei dem bereits anerkannten Gedankengebäude eingliedern, bedarf das Denken keiner Erfahrung als Erfahrung; auch die Entscheidung über die Möglichkeit (Zahl und Art) verschiedener „Konstruktionswege" (zu einem „Gebilde") kann durch reines, d. h. erfahrungsfreies Denken getroffen werden. Die Klarheit und Deutlichkeit der mathematischen Begriffe, die Präzision der Urteile spiegelt sich wider in der engen Verkettung der Gedanken, die von keiner nichtmathematischen Disziplin erreicht, geschweige überboten wird.

Die mathematische Gedankenarbeit schärft das „logische Gewissen", das „Bewiesenes und Unbewiesenes gehörig trennt"[97], die präzise Urteilsverknüpfung erfordert zu ihrer Realisierung im lebendigen Denkprozeß scharfe Aufmerksamkeit und reges Interesse; sie erzieht zu gewissenhafter Selbstkritik, zu einem geduldigen Einleben in weitgespannte Gedankenzusammenhänge; sie erweckt vor allem das sichere Bewußtsein, daß man durch Denken Wahrheit finden kann, und damit das Vertrauen auf die eigene Geisteskraft.

Die Problemstellungen entspringen der Fragelust, dem „Verwundern"; die auftauchenden Vermutungen und Lösungsmöglichkeiten bietet der Scharfsinn. Das spontane Hervortreten

[96] A. Riehl: Logik und Erkenntnistheorie. S. 76. Anders G. Kerschensteiner: A. a. O. S. 18—20.

[97] H. E. Timerding: Die Verbreitung. S. 159.

der Fragen wie der Vermutungen ist in der Mathematik wie in jeder anderen Wissenschaft von größter Bedeutung, weil die Schaffensfreude auf das engste damit verknüpft ist. Vermutungen, hypothetische Annahmen können leicht in die Irre führen. Die geistige Zucht zeigt sich darin, daß in oft mühseligen logischen Operationen die gewaltige Arbeit der Entwicklung der Folgerungen aus den Annahmen, die Einordnung des Gedankenganges in den theoretischen Gesamtzusammenhang durchgeführt ist. Da jedes richtig formulierte mathematische Problem eine bestimmte Anzahl von Lösungen oder nachweisbar keine Lösung hat, da ferner die Einordnung eines Sonderproblemes in den Systemzusammenhang immer möglich ist, entfalten sich in der mathematischen Arbeit das Gefühl der Verantwortung für die Richtigkeit der eigenen Gedankenarbeit und der Wille, die in eigenem Denken gefundenen Erkenntnisse nicht nach Autoritäts- oder Majoritätsbeschluß, sondern nur nach „besserer" Einsicht umzugestalten. Die Entwicklung der mathematischen Forschung wie der eigenen mathematischen Einsichten zeigt zwar, daß der Irrtum im mathematischen Erkennen nicht ausgeschlossen ist, aber auch, daß er immer durch geistige Zucht überwunden werden kann. „Nur dem Ernst, den keine Mühe bleichet, rauscht der Wahrheit tief versteckter Born."

Gerade in der Mathematik weist jede erkannte Wahrheit über sich hinaus auf einen größeren Zusammenhang von Problemen. Diese Erkenntnis belebt im Forschenden die Sehnsucht, auch in diesen weiteren Erkenntniszusammenhang einzudringen. In dem echten Forscher ist die freie, wissenschaftliche Geisteshaltung, das rastlose Streben nach Erkenntnis zur Grundstimmung der Persönlichkeit geworden, die ihren schönsten Ausdruck wohl in dem Worte Lessings gefunden hat: „Wenn Gott in seiner Rechten alle Wahrheit und in seiner Linken den einzigen, immer regen Trieb nach Wahrheit, obschon mit dem Zusatze, mich immer und ewig zu irren, verschlossen hielte und spräche zu mir: „Wähle!"

— ich fiele ihm mit Demut in seine Linke und sagte: „Vater, gib! die reine Wahrheit ist ja doch nur für dich allein!“[98]

Die Erziehung zur Objektivität, zu streng sachlichem Denken ist durch die Ausbildung in der Mathematik allein noch nicht gewährleistet; denn objektives Denken erfordert oft den Vollzug fundamentaler Erkenntnisakte, die nicht zu den spezifisch mathematischen Akten zählen. So groß also auch die Bedeutung der Mathematik für die geistige Zucht ist, zur Ermöglichung eines jedem Gegenstandsgebiet gewachsenen Denkens und Erkennens gehört zum mindesten noch die Entfaltung aller außermathematischen Grundakte. In den Geisteswissenschaften sind die fundamentalen Erkenntnisakte in ästhetischen, religiösen, sozialen und politischen Erlebnissen fundiert; d. h. auf das engste mit dem Wertleben der Persönlichkeit verflochten. Daher ist hier — im Gegensatz zu allen mathematischen (und naturwissenschaftlichen) Disziplinen — die Ausschaltung der subjektiven, d. h. der nichterkenntnismäßigen Faktoren im Denkverlauf so schwierig. Ob der mathematische Unterricht sein Ziel oder eines seiner Ziele erreicht: das Maximum formaler intellektueller Bildung zur Entfaltung bringt, indem er die produktiven Geisteskräfte belebt, zur Gewandtheit und Sicherheit in der Durchführung der Erkenntnisprozesse wie zu geistiger Zucht führt, das hängt wesentlich ab von der Bildsamkeit (Begabung, Interesse) des Schülers, von dem geistigen Leben des Lehrers[100] und von der Art des Unterrichtsbetriebes.

3. Zur Entfaltung der formalen intellektuellen Bildungswerte der Mathematik.

Eine Unterrichtsstunde soll, so sagt man heute oft, ein „Erlebnis“ sein. Wir verstehen dann darunter nicht ein ästheti-

---

[98] G. E. Lessing: Eine Duplik. Hesses Klassiker-Ausgaben 6. S. 147.

[99] Vgl. G. Kerschensteiner: Wesen und Wert. S. 92—94.

[100] Ders.: Die Seele des Erziehers und das Problem der Lehrerbildung. Leipzig-Berlin 1921.

sches Genießen, ein kontemplatives Hinnehmen; sondern das Erlebnis der Arbeit, der Bildung und des Kulturschaffens; denn „eine leichte Schule ist ein soziales Verbrechen“.[101] So wird dann eine mathematische Lehrstunde zu einer Bildungsreise in das Gebiet mathematischer Forschung. In das Reich mathematischer Wahrheiten aber führt seit Euklid noch immer kein „Königsweg“, auch kein „Demokratenweg“; sondern allein die ernste Arbeit.

Es kann für uns hier nicht auf eine kritische Erörterung der verschiedensten Probleme der Didaktik der Mathematik ankommen; wir haben nur eine kurze Betrachtung der Frage zu geben, wie der formale intellektuelle Bildungswert der Mathematik wirksam zur Entfaltung gebracht werden kann. Dabei setzen wir voraus, daß das Maximum dieses Bildungswertes erstrebt wird. Dann wird die Darbietung und Erarbeitung der mathematischen Erkenntnis in der einzelnen Unterrichtsstunde wie auch die Auswahl[102] und Anordnung des Stoffes im Lehrplan hierauf Rücksicht zu nehmen haben. Es gilt also, sowohl die Methode des Unterrichtes wie auch die Art der Anordnung des Lehrstoffes im Lehrplan auf ihre Zweckmäßigkeit für die Belebung des formalen intellektuellen Bildungswertes der Mathematik zu betrachten. Unter dem formalen Bildungswert verstehen wir — nach den vorausgehenden Erörterungen — im engeren Sinne die Entfaltung der mathematischen Grundakte, im weiteren Sinne die Stärkung der theoretischen Geisteshaltung, d. h. die Entwicklung der produktiven Geisteskräfte im Selbstfinden von Problemen und Lösungen, die Erziehung zu geistiger Zucht und die Weckung des Ethos der Wahrheit.

Wir betrachten zunächst zwei Methoden der Darbietung bzw. Erarbeitung des mathematischen Lehrstoffes: 1. die dozierende

---

[101] Zitiert nach A. Höfler: Didaktik des mathematischen Unterrichtes. 1910. § 5.

[102] Über die Auswahl des Stoffes unter dem Gesichtspunkt seines materialen Bildungswertes vgl. S. 150 dieser Arbeit.

oder vortragende Lehrweise; 2. die heuristische oder entwikkelnd-darstellende Unterrichtsform; dann verfolgen wir zwei Arten der Anordnung des Lehrstoffes im Lehrplan: 1. den systematischen Aufbau nach dem Prinzip der Reinheit der Methoden; 2. die Verflechtung der einzelnen Disziplinen nach dem Prinzip der Fusion.

a) Unterrichtsform und formale intellektuelle Bildung.

Die dozierende Lehrform. „Ob das Verständnis eines Lehrstoffes dem Schüler leichter oder schwerer fällt, das hängt in hohem Maße von der Darstellungsweise ab." [103] Bei der dozierenden Unterrichtsweise trägt der Lehrer den Unterrichtsstoff in seiner abgeklärten, wissenschaftlichen Fassung vor; ungefähr in der Weise, wie ihn die meisten systematischen Hand- und Lehrbücher bieten. Denken wir, es handle sich z. B. um die Vermittlung der Kenntnis des Pythagoreischen Lehrsatzes, so spricht der Lehrer zunächst (vielleicht unter Hinweis auf eine gegebene Zeichnung) den Lehrsatz selbst, formuliert dann die Voraussetzung und die Behauptung und führt schließlich den strengen Beweis. Auch mögliche Folgerungen, Zusätze, Anwendungen werden vom Lehrer gegeben. Seit den Tagen des Euklid hat dieses Schema (Lehrsatz, Voraussetzung, Behauptung, Beweis; Zusatz) viele Jahrhunderte hindurch den mathematischen Unterricht aller Schulgattungen beherrscht. — Welche Bedeutung hat nun die dozierende Methode für die Entfaltung der formalen Bildung?

„Die Genauigkeit der Sätze, die Schärfe und Vollständigkeit der Beweise, in denen sorgfältig alle möglichen Fälle der Figur untersucht werden, die bewundernswürdige Ordnung, gemäß der die Lehrsätze in einer logischen Verkettung aufeinanderfolgen, machen die hervorstechenden Vorzüge der Euklidischen Behandlungsweise aus." [104] Doch werden die

---

[103] F. Klein: Vorträge über den mathematischen Unterricht. Teil I. S. 112.

[104] F. Enriques: Fragen der Elementargeometrie. Teil I. 1911. S. 25.

scharfen Begriffe, die präzisen Formulierungen und die engen Gedankenverknüpfungen hier vom Lehrer gegeben; der Schüler hat nur „rezeptiv" die erforderlichen Akte zu vollziehen, um dem Unterrichte „folgen" zu können. Daher fehlt beim rein dozierenden Unterrichtsverfahren dem Lehrer zunächst jedes Kriterium dafür, ob das Prinzip der Begriffsbildung, ob der Grund gerade solcher Formulierung des Urteils, ob die Notwendigkeit gerade dieser Aufeinanderfolge von Aussagen erkannt ist; die einzige Kontrolle bietet die Wiederholung des Gelernten und die Anwendung des Erkannten, die aber beide schon jenseit des „rein" dozierenden Verfahrens liegen. Oft scheint sich trotz der Wiederholung des Gedankenganges durch den Lehrer im Schüler nicht das Bewußtsein von der Notwendigkeit gerade dieser Aufeinanderfolge von Denkschritten im Beweisgange einzustellen. Dann führt die vortragende Lehrweise leicht zu mechanischem Auswendiglernen; und dieses Auswendiglernen mathematischer Lehrsätze und Beweise „wirkt nicht geistbildend, sondern geisttötend".[105] Mit vollem Recht eifert A. Höfler[106] gegen das „hirndörrende Auswendiglernen des Lehrtextes". Immer soll im mathematischen Unterricht das Verständnis (z. B. der Ableitung einer Formel oder des Beweisganges eines Lehrsatzes) dem Einprägen durch Anwendung des Erlernten oder durch Wiederholung (unter steter Beachtung der Psychologie des Gedächtnisses) vorausgehen.

Durch die vortragende Lehrform wird ferner die Eigentätigkeit des Schülers auf das Minimum eingeschränkt, das bei jeder Aufnahme neuen Wissensstoffes gerade noch vorhanden sein muß. Der Schüler lernt die Schwierigkeiten der scharfen Begriffsbildung, der präzisen Urteilsformulierung und der engen Urteilsverkettung nicht sehen und nicht überwinden; denn „fertige Begriffe, die durch lange induktive Prozesse sich ergeben, werden in der vollendetsten und abstrak-

[105] Reidt-Schotten: Anleitung zum mathematischen Unterricht. 1906. S. 25.
[106] A. Höfler: Didadik. 1910. S. 52. § 7.

testen Gestalt geboten. Das gilt für die Ausdrucksweise der Lehrsätze und für ihre Beweise". [107] Vor allem aber verhüllt die Euklidische Behandlungsweise, „indem sie lange Zeit auseinanderliegende Ergebnisse nach ihren Beziehungen nebeneinanderstellt und in einem deduktiven System darbietet, unter der dogmatischen Gestalt den Weg zu ihren Entdeckungen" [108] Mit der Beschränkung der Selbsttätigkeit des Schülers mindert sich aber zusehends die Schaffensfreude.

Nur bei Anwendungsaufgaben bietet sich dann die Möglichkeit zur Entfaltung der produktiven Geisteskräfte des Schülers. Die vom Lehrer dargebotene reine mathematische Erkenntnis ist ja mannigfacher Anwendung fähig. Reine Zahlenaufgaben und einfache Zeichnungen und Modellfertigungen, kleine arithmetische und geometrische Beweise dienen der Übung der mathematischen Grundakte; eingekleidete Aufgaben darüber hinaus der Entfaltung des Scharfsinnes durch Auffindung von Lösungsmöglichkeiten. Die neueren Lehrbücher und Aufgabensammlungen bieten dem Mathematiklehrer reichen Übungsstoff für alle Stufen des Unterrichtes, so daß er das Wurzelgestrüpp mancher arithmetischer Übungsbücher sowie die geometrischen Konstruktionen „aus möglichst unzweckmäßigen Stücken" [109] im Interesse eines lebensvollen Unterrichtes meiden kann.

Die rein dozierende Unterrichtsmethode setzt nicht nur voraus, daß der Schüler die Grundakte bereits reinlich vollziehen, sondern sogar, daß er die mathematische Erkenntnishaltung bereits selbständig einnehmen und durchführen kann; der Lehrer achtet hier nur auf die wissenschaftlich einwandfreie, d. h. dem reinen Gesetz der Sache entsprechende Übermittlung des neuen Lehrstoffes. Für den „grundlegenden" Un-

[107] F. Enriques: Fragen der Elementargeometrie. I. S. 25.

[108] Ders.: A. a. O. S. 25.

[109] Vgl. A. Schülke: Welche Ziele hat der Unterricht in der Geometrie? Zeitschrift für mathemat. und naturwissenschaftl. Unterricht. Jahrg. 39.

terricht[110], der die fundamentalen Dispositionen erst entfalten will, kann diese Unterrichtsweise also nicht in Frage kommen; hier würde Höflers Wort sie treffen: „Die Definitionslernmethoden lassen das Kind mathematisch verhungern.“[111] Wo aber die genannten Voraussetzungen erfüllt sind, wo die mathematischen Fundamentaldispositionen ausgebildet sind und wo die geistige Zucht herrscht, wo es ferner nur auf die Darbietung wissenschaftlich geformter Erkenntnis ankommt, da erfreut sich die vortragende Lehrweise mit Recht großer Beliebtheit; hier kann ja der Lehrer vom Standpunkt der Wissenschaft dozieren, ohne Furcht davor, nicht verstanden oder mißverstanden zu werden; hier kann er seine Selbsttätigkeit entfalten und weitgehend in die Sonderfragen seiner Forschung einführen. In unseren Elementarschulen und höheren Schulen handelt es sich aber um die Erziehung der Jugend zur Selbsttätigkeit, zu eigenem Denken und Tun. Die pädagogische Geschicklichkeit ihrer Lehrer zeigt sich nicht im zusammenhängenden Lehrvortrag, sondern in der stets regen Kunst, dem „Haschen der Natur nach ihrer eigenen Entwicklung Handbietung zu leisten“;[112] d. h. in jedem Moment des Unterrichtes die produktiven Kräfte des Schülers zu beleben. Dazu eignet sich der dozierende Unterricht nicht.

Die heuristische Unterrichtsform. Ganz anders aber gestaltet sich der Erwerb neuer mathematischer Erkenntnisse im entwickelnd-darstellenden Unterrichtsgange. Man hat die heuristische Unterrichtsform mit Recht als „Methode der Wiederentdeckung“ bezeichnet. Nehmen wir wieder den Pythagoreischen Lehrsatz als Beispiel, um ganz kurz auf ihre wesentlichen Merkmale hinzuweisen. Aus dem bereits behandelten Unterrichtsstoff erwächst zunächst das Problem des Lehrsatzes; vielleicht aus dem Spezialfall der Verwandlung der Summe zweier gleicher Quadrate in ein drittes

[110] E. Spranger: Kultur und Erziehung. 1919. S. 27.
[111] A. Höfler: A. a. O. S. 489.
[112] J. H. Pestalozzi: Sämtliche Werke. (Seyffarth.) Bd. IX. S. 28.

Quadrat. Ist das Problem hinreichend scharf formuliert, vielleicht in die Frage gefaßt: Wie beweisen wir, daß die Summe der Kathetenquadrate gleich ist dem Hypotenusenquadrat? — so kann der Scharfsinn der Schüler diese oder jene der zahlreichen Lösungen vermuten.[113] Von den Vermutungen aus wird dann in gemeinsamer Arbeit der Beweis erstrebt; dabei tritt die Leitung des Lehrers möglichst zurück, die Selbsttätigkeit des Schülers überall hervor.[114] Ist die Lösung des Problems auf eine Art oder mehrere Arten gelungen, so folgt vielleicht eine vergleichende Betrachtung zweier Beweismethoden hinsichtlich ihrer Zweckmäßigkeit und ihrer Grenzen; auch eine Verallgemeinerung der ursprünglichen Problemstellung kann eintreten. . . . Die heuristische Unterrichtsform läßt sich nicht als ein allgemein anwendbares Schema, als „didaktische Normalform" für alle Disziplinen in Regeln pressen. Das Wesentliche an ihr ist, daß der Lehrer in jedem Augenblick des Unterrichtsganges sich und den Lehrstoff der Fassungskraft des Schülers anpaßt, damit der Schüler möglichst rein und spontan alle die Akte vollziehe, die den Erkenntniszusammenhang tragen.

Damit aber erlangt das entwickelnd-darstellende Unterrichtsverfahren für die Entfaltung der mathematischen Grundakte wie für die Belebung der geistigen Zucht die größte Bedeutung. Das Interesse des Lehrers ist hier nicht auf den Unterrichtsstoff allein eingestellt, sondern auf die Erzielung des innigen Kontaktes zwischen Schüler und Erkenntnisgebiet. Die gemeinsame Unterrichtsarbeit ermöglicht es dem Erzieher, die Schärfe der Begriffsbildung, die Präzision der Urteilsformulierung, die Geschlossenheit des Gedankenzusammenhanges und den methodischen Gehalt des Beweisganges bis zu dem Grade zu betonen, der dem Ziel des Unterrichtes (dieser Schulstufe) und dem Entwicklungsstandpunkt seines Schülers entspricht; da ihm die Eigentätigkeit des Schülers jederzeit die

[113] Vgl. W. Lietzmann: Der pythagoräische Lehrsatz. 1917.
[114] Vgl. zu diesen Ausführungen G. Rudert: A. a. O.

Kontrolle über den reinlichen Vollzug der Grundakte im Erkenntnisprozeß des Lernenden gewährt.

Damit auch die mathematischen Begriffe „aus einem Begreifen mit Händen und Augen hervorgehen" können[115], wird der Lehrer im Unterricht sich dem Prozeß der „natürlichen Begriffsbildung"[116] angleichen; d. h. in methodischer Veranschaulichung und Besinnung den Schüler vom Konkreten, von „äußerer" Wahrnehmung über „innere" Vorstellung zum Abstrakten, zum deutlichen Begriff führen. Ausgangspunkt und Anknüpfungspunkt des Unterrichtes wird immer das vorhandene Wissen und Können des Schülers sein. Zunächst gilt es, das neue Problem geeignet in dem Wertleben des Schülers zu verankern, d. h. hier, sein Interesse für die erforderte geistige Leistung zu erwecken. Das Bewußtsein von dem einheitlichen, sinnvollen Zweck des ganzen Tuns erhöht dabei wesentlich die Leistung des Schülers.[117] Aus den einfachsten Verhältnissen seiner Umwelt müssen auch die Grundlagen für die mathematischen Formulierungen stammen;[118] bietet später der Vollzug der rein signitiven Akte im arithmetischen oder geometrischen Denkprozeß Schwierigkeiten, so wird der Lehrer die Veranschaulichung so einfach und so angemessen wie möglich zu gestalten und so oft wie unbedingt nötig zu wiederholen suchen. „Es wird heute in der Veranschaulichung mathematischer Begriffe oft reichlich viel getan"[119], ... schlimmer aber noch ist es, wenn die Veranschaulichungs- und Darstellungsmittel nicht scharf und klar hervortreten lassen, was herausgelöst und ausgesprochen werden soll.

Die „Laboratoriumsmethode" — die besonders in England

[115] W. Lietzmann: Methodik. Bd. I. 1916. S. 57.

[116] G. Kerschensteiner: Wesen und Wert. S. 17—18.

[117] Vgl. als Beispiel die „Einführung in die Logarithmen" bei W. Dieck. Stoffwahl und Lehrkunst. 1918. S. 142.

[118] Vgl. A. Gerlach: Von schönen Rechenstunden. Leipzig 1922, oder G. Rudert: A. a. O.

[119] W. Lietzmann: Methodik. I. S. 57.

geübt wird — führt planmäßig den Schüler den Weg von „konkreter Geschicklichkeit zu abstrakter Einsicht"; [120] von der Selbstfertigung der Modelle und Zeichnungen und der damit verbundenen Auffassung der festen, starren Größen zu dem Verständnis des Zusammenhanges beweglicher, variabler Größen. Stufenweise kann sich so die Einsicht in die Erzeugung mathematischer Gebilde, in die Konstruktion der Begriffe in genetischer Definition und in die Zusammenfassung wesentlicher Merkmale von Einzelfällen zu einem Klassenbegriff (und damit die Übung in ideierender und generalisierender Abstraktion) klären und heben. Nirgends läuft der entwickelnd-darstellende Unterricht Gefahr, Worte oder leere Zeichen statt sinnvoller Gebilde zu geben; denn Sache und Wort treten innig miteinander verschmolzen auf. Der Schüler kann hier nicht mathematisch verhungern; vielmehr wird „durch Ausgehen von den mathematischen Dingen und Beziehungen" in ihm „ein Hunger nach konkreten Begriffen und Urteilsinhalten, nach den auf Definitionen und Axiomen ruhenden Lehrsätzen erweckt". [121] Ist die Definition aber richtig erfaßt, so kann in strengem Sinne dann keine weitere Klärung des Begriffes stattfinden; [122] das schließt nicht aus, daß eine Vertiefung der mathematischen Erkenntnis dadurch möglich ist, daß der Geltungsbereich des Begriffes (durch Feststellung der mit dem Begriff verträglichen außerwesentlichen Merkmale) im weiteren Erkenntnisverlauf genauer umgrenzt wird. Überall steht hier das Urteil im Dienst exakter Begriffsbildung und umgekehrt der Begriff im Dienst präziser Urteilsformulierung. Auch die Übung im mündlichen und schriftlichen Ausdruck kann ja im darstellend-entwickelnden Unterricht beim Vorrechnen von Aufgaben und erklärenden Konstruieren nicht vernachlässigt werden; dabei sollte der Lehrer zwischen der wissenschaftlichen Terminologie und der

[120] Branford: A. a. O. S. 30.
[121] A. Höfler: A. a. O. S. 471.
[122] Vgl. G. Kerschensteiner: A. a. O. S. 17.

Bezeichnungsweise der Schule nur dann eine Abweichung bestehen lassen, wenn gewichtige pädagogische Gründe sie rechtfertigen.[123] Von selbst fällt im heuristischen Unterrichtsbetriebe alle ungesunde Formalistik fort;[124] nicht zu vergessen aber ist, daß jede gewonnene Erkenntnis, die den weiteren Aufbau stützen soll, durch reichliche Übung und Anwendung festes Eigentum des jugendlichen Geistes werden muß. „Mathematik läßt sich nur durch konzentriertes Studium erlernen; es gibt bei ihr keinen ‚Königsweg'" — schreibt auch F. Klein.[125]

Da das Problem im entwickelnd-darstellenden Unterricht aus dem Interessenkreis des Kindes herausspringt, vom Schüler öfter selbsttätig gefunden und formuliert wird, bestimmt es — weit dringlicher als ein vom Lehrer „gegebener" Satz im dozierenden Verfahren — den ganzen Gedankengang. Daß zur Entfaltung des Problembewußtseins, zur „Reizung des logischen Appetites", einige geschickt dem Unterricht eingestreute „Sophismen" oder „Paradoxa" wesentlich beitragen können, sei nur nebenher erwähnt.[126] Selbsttätigkeit und Schaffensfreude wachsen im Schüler mit dem Auftauchen jeder neuen Lösungsmöglichkeit; mit der Übung im vorsichtigen Erwägen und Prüfen der Gedanken- und Konstruktionsschritte entfaltet sich auch die geistige Zucht immer mehr.

Während bei der dozierenden Methode die Figur als „Stütze des Gedächtnisses" auftritt, verflicht sich die Konstruktion derselben im entwickelnd-darstellenden Verfahren als „heuristisches Prinzip" in den Gang des Unterrichtes. An die Stelle der beim Lehrvortrag zumeist gewählten Folge: Lehr-

[123] Vgl. die „Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht". DAMNU 1913. Heft 17.

[124] A. Höfler: A. a. O. S. 466.

[125] F. Klein: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. 1907. S. 482.

[126] Vgl. Höfler: A. a. O. W. Lietzmann u. A. Trier: Wo steckt der Fehler? Math.-physik. Bibliothek. Bd. 10. Leipzig-Berlin.

satz, Voraussetzung, Behauptung, Beweis — tritt im heuristischen Unterricht vielleicht die Ordnung: Problem (Aufgabe), Untersuchung, Lehrsatz, Folgerung, Anwendung; analog den bekannten Stufen im Verfahren zur Lösung von Konstruktionsaufgaben: Aufgabe, Analysis, Konstruktion, Determination.[127] Von größter Wichtigkeit ist immer die Determination der Aufgabe; weil in ihr die Überlegungen über Lösbarkeit und Mehrdeutigkeit der Aufgabe anknüpfen an die Variabilität der gegebenen Größen. Daher ist die Determination vortrefflich geeignet, mit dem Begriff der Variablen und der Funktion vertraut zu machen.

Ehe der Schüler jedoch „völlig" selbständige Verknüpfungen von mathematischen Gedanken ausführen kann, muß natürlich die Fähigkeit, der mathematischen Entwicklung zu folgen (und damit das Feingefühl für konstruktive Zusammenhänge), im langsamen Durchlaufen von Schlußketten entfaltet und geübt werden. Daher wird der Lehrer anfangs öfter den gemeinsam zurückgelegten Gedankengang knapper zusammenfassen (lassen) oder gar einzelne Schritte „vormachen" müssen und dann mit der Wiederholung der Beweise und Ableitungen zufrieden sein. Hat sich das Gefühl für den Zusammenhang mathematischer „Gebilde" gestärkt, so wird der Lehrer immer sparsamer mit seinen Hindeutungen zum Beweise sein können, auf letzter Stufe schließlich nur noch den Lehrsatz geben oder zur Entdeckung des Problemes „führen". Dann muß im Schüler zu der Fähigkeit des reinlichen Vollzuges der Grundakte noch die „Erfindung" hinzutreten, welche die Begriffe zweckmäßig definiert und die Urteile richtig verknüpft.

Auch wenn es sich um die Entwicklung der Folgerungen aus einem bereits bewiesenen Lehrsatz handelt, kann eine Steigerung der Anforderungen an die Selbsttätigkeit des Schülers

[127] Im heuristischen Unterricht erfahren die Konstruktionsaufgaben eine andere Bewertung als im dozierenden Verfahren; dazu vgl. F. Klein-Schimack: Vorträge 1907. S. 122.

eintreten dadurch, daß zunächst noch eine genauere Umgrenzung des Gebietes angedeutet wird, zu dem dieser Lehrsatz in Beziehung gesetzt werden soll; der begabte Schüler wird bald wissen, „wo man mathematische Wahrheiten entdecken kann", und dann völlig selbständig die Verknüpfung des Neuen mit früher Gelerntem vollziehen können.

Wenngleich in den oberen Klassen unserer höheren Lehranstalten das Verständnis für die Grundlagen der Mathematik angestrebt wird, so kann doch — selbst in den für die Schule ausgewählten Disziplinen — nicht die Strenge und Geschlossenheit der mathematischen Wissenschaft herrschen.[128] Vor der Forderung nach axiomatischer Strenge und systematischer Geschlossenheit steht hier die Pflicht des Unterrichtes zur Verständlichkeit; weder der Eifer einiger begabter Schüler noch der verständliche Wunsch, vom eigenen Wissen und Können möglichst viel im Schüler aufleben zu lassen, sollten den guten Lehrer über die Grenzen der Verständlichkeit drängen. „Strenge im Unterricht heißt nicht, daß man alles beweist, soweit es sich überhaupt beweisen läßt; sondern daß man klar zum Ausdruck bringt, was man bewiesen hat und was nicht."[129] Die Erweckung und Stärkung des „logischen Gewissens" wird im mathematischen Unterricht um so sicherer erfolgen, je genauer man diesem Worte Timerdings nachkommt.[130]

---

[128] Vgl. H. E. Timerding: Die Verbreitung. S. 139; außerdem W. Lietzmann: IMUK I 1. S. 27; über „Beweismanie", Ders.: Erkenntnislehre im mathematischen Unterricht der Oberklassen. Charlottenburg 1921. Der Begriff der Strenge hat verschiedene Auslegungen erfahren. Der Formalist glaubt streng zu verfahren, wenn er die mechanische Gesetzlichkeit für den Aufbau seines Zeichensystems konsequent beachtet. Der reine Mathematiker aber verknüpft die mathematischen Aussagen „streng" nach ihrem Sinngehalt. Wir reden von Strenge nur im letzten Sinne.

[129] E. H. Timerding: Die Verbreitung. 1914. S. 140.

[130] Daß der Unterricht der höheren Schulen damit nicht auf dem Standpunkt einer „physikalischen" Mathematik (die mit „experimentellen" und „intuitiven" Beweisen sich begnügt) beharren kann, glaube ich durch Hinweis auf den ersten Teil dieser Arbeit betonen zu müssen; es gibt im lo-

Im entwickelnd-darstellenden Unterrichtsgange kann der Lehrer auch der Forderung (von F. Klein) genügen, die „mathematischen Fähigkeiten nicht isoliert auszubilden, sondern in lebendiger Verbindung mit der Raumanschauung, Naturauffassung und praktischen Betätigung".[131] Noch tiefer und schöner hat G. Kerschensteiner diesen Gedanken in seinem zweiten Grundaxiom des Bildungsprozesses formuliert: „Das Bildungsverfahren muß immer und in jedem Akte die ganze Individualität im Auge haben, nicht einzelne psychische Elemente der menschlichen Seele. Es muß immer auf die Totalität des Individuums eingestellt sein, auf sein ganzes Seelenrelief, auf seine gesamte Lebensverfassung. . . .[132] Dann wird der mathematische Unterricht nicht allein die theoretische Geisteshaltung entfalten, sondern auch das logische Gewissen und das Ethos der Wahrheit beleben und stärken.

Nach unseren wenigen Andeutungen erscheint also schon die heuristische Unterrichtsform als vorzügliches Mittel zur Entfaltung der formalen intellektuellen Bildungswerte der Mathematik; denn Belebung und Stärkung der fundamentalen Erkenntnisdispositionen, Erziehung zu geistiger Zucht und zum Ethos der Wahrheit sind im entwickelnd-darstellenden Unterricht möglich. Das Maximum formaler Bildung wird um so sicherer im Schüler in Erscheinung treten, je mehr der Gang des Unterrichtes sich einem natürlich verlaufenden Forschungsprozeß angleicht.

Doch nicht jede mathematische Erkenntnis kann vom Schüler „selbsttätig" gefunden werden; dazu würde auch wohl die Kraft und Lebenszeit des begabtesten Mathematikers nicht hinreichen. Und selbst von dem Ausschnitt mathematischer Erkenntnis, den die einzelne Schule nach ihrem allgemeinen

---

gischen Sinne nur ein Beweisverfahren; im psychologischen Sinne aber lassen sich nach Art und Reichtum der bedeutungerfüllenden Akte im Beweis „Stufen" unterscheiden.

[131] F. Klein u. E. Riecke: Über angewandte Mathematik. 1902. S. 15.

[132] G. Kerschensteiner: Das Grundaxiom. 1917. S. 33.

Lehrziel für ihre Schüler bestimmt, muß noch ein großer Teil dozierend „gegeben“ werden; weil die eigentätige Erfindung der genannten Beweise die Leistungsfähigkeit des Schülers übersteigt.[133] So wird in den entwickelnd-darstellenden Unterricht der Schule hier und dort immer noch ein dogmatisches Moment eindringen. Sorge des echten Jugendbildners wird es sein, das Dogmatische im Unterricht auf ein Minimum zu beschränken und die Selbsttätigkeit und Leistungsfähigkeit der Schüler auf ein Maximum zu bringen. Alles Andozierte und nicht mit eigenen Kräften Durchdrungene verfliegt dem Schüler wie Spreu im Wind. „Die Mathematik muß sich der Schüler selbst erwerben; der Lehrer ist ihm nur der Hebel, der ihm hilft, diese Schätze aus der Tiefe des Ichs in diejenige Höhe des Bewußtseins zu heben, wo sie die Klarheit der Anschauung empfangen.“[134]

Die nach dem Grundsatz der maximalen formalen Schulung im mathematischen Unterricht erzielten Resultate sind zumeist „außerordentlich günstig“ gewesen.[135] Für die praktische Durchführung des Gedankens der formalen Bildung erhebt sich aber die Schwierigkeit, daß keine Erkenntnisfunktion geübt werden kann, ohne an einen bestimmten Stoff gebunden zu sein. Eine rein formale Bildung des Intellektes ist also unmöglich; gewisse Erkenntnisinhalte müssen immer gegeben sein. Damit sind wir auf das unendliche Reich mathematischer Wahrheiten verwiesen, um aus ihm jene Stoffe herauszuwählen, die der Entfaltung formaler Bildung im mathematischen Unterricht dienen sollen. Die Suche nach den Kriterien für diese Auswahl führt uns auf die Frage nach dem materialen intellektuellen Bildungswert der Mathematik; ihrer Beleuchtung können wir uns aber erst nach einer kurzen Betrachtung der Prinzipien der Anordnung des mathematischen Unterrichtsstoffes im Lehrplan zuwenden.

---

[133] Vgl. W. Lietzmann: A.a.O. S. 64; H. E. Timerding: A.a.O. S. 139.
[134] M. Simon: Rechnen und Mathematik. München 1895. S. 26.
[135] Vgl. H. E. Timerding: A. a. O. S. 135.

b) Stoffanordnung und formale Bildung.

Auch die Anordnung des Lehrstoffes im Lehrplan ist für die Entfaltung des formalen Bildungswertes der Mathematik von Bedeutung; diese Stoffverteilung ist ja ein Bild des voraussichtlichen, d. h. geplanten, über die Schuljahre hin ausgedehnten Unterrichtsverlaufes. Bei der Betrachtung der logischen Struktur der mathematischen Erkenntnis sahen wir bereits, daß die systematische Zusammenfassung arithmetischen und geometrischen Wissens von verschiedenen Gesichtspunkten geschieht.

Über den deduktiven Aufbau. Einmal wird der streng deduktive Aufbau aller mathematischen Erkenntnis im Sinne der aristotelischen Subsumtionslogik als Ideal hingestellt und der Versuch gemacht, von den allgemeinsten mathematischen Begriffen zu den primitivsten vorzudringen. Am Beginn der Schulmathematik stehen dann etwa Erörterungen aus der Gegenstandstheorie oder Mannigfaltigkeitslehre, aus der Funktionentheorie oder Mengenlehre; zuletzt folgt dann das Rechnen mit positiven ganzen Zahlen bzw. die Behandlung der Planimetrie und Stereometrie (im Sinne Euklids). Im Hinblick auf diese „geplante" Anordnung sagt H. Poincaré: „Wenn der Pädagoge sich von der Logik allein leiten ließe, so müßte er mit den allgemeinsten, d. h. bizarrsten Funktionen beginnen."[136]

Für die gesamte Mathematik wird sich dieser deduktive Aufbau niemals verwirklichen lassen; denn die Mathematik ist und wird nie das hier vorausgesetzte geschlossene System; sie bleibt ein „fieri", ein ewiges Werden; weil die Möglichkeit der Bildung immer neuer Begriffe, Kombinationen und Konstruktionen besteht und damit Veranlassung zur Bildung weiterer Gattungsbegriffe gegeben ist. Einzelne mathematische Disziplinen sind aber bereits so durchgearbeitet, daß sie je als ein in sich geschlossenes System gelten und daher auch deduk-

[136] H. Poincaré: Wiss. u. Meth. S. 112.

tiv dargestellt werden können. Auch die Gebiete, die üblicherweise zur Schulmathematik zählen, sind großenteils von so hoher Vollendung.

Trotzdem ist der deduktive Aufbau im Sinne der Subsumtion völlig ungeeignet für den einführenden Unterricht. Er setzt zunächst — genau wie die dozierende Lehrweise — im Schüler bereits die Fähigkeit zum reinlichen Vollzug mathematischer Denkakte voraus und erfordert darüber hinaus — da er mit den abstraktesten und kompliziertesten Begriffen beginnt — eine große Kunst zur theoretischen Geisteshaltung. Da dieser deduktive Aufbau mathematischer Erkenntnis der natürlichen Entwicklung geistiger Kräfte im Schüler geradezu entgegenläuft, kann eine entsprechende Anordnung mathematischen Stoffes im Lehrplan der Schule nicht gebilligt werden. Erst dann, wenn die Wanderung erfolgreich durch ein in sich geschlossenes Gebiet geführt hat, ist rückschauend eine Deduktion im Sinne obiger Ausführungen für den Schüler verständlich. Wenn aber der Zusammenhang mathematischer Erkenntnis von Stufe zu Stufe immer bewußter werden soll[137], so wird jene „deduktive Überschau" bereits an geeigneten Fällen auf allen Stufen und nicht erst im abschließenden Unterricht der Oberstufe anzustreben sein. Hier wird ja (auf der höheren Schule) der Zusammenhang der Probleme und Problemkreise selbst zu einem Problem; und ich wüßte kein Beispiel[138], daß so klar wie die Entwicklung und Systematik mathematischer Erkenntnisse im philosophisch-propädeutischen Unterricht der Schule veranschaulichen könnte, wie Wissenschaft überhaupt entsteht und sich zu erhabener Höhe entfaltet.

Doch handelt es sich für uns noch um die Frage nach der Anordnung des mathematischen Lehrstoffes in der Schule; diese Anordnung in der Schule kann keine andere sein als die in der Wissenschaft: die genetische oder konstruk-

[137] Vgl. Klein-Schimmack: A. a. O. S. 208.

[138] R. Most: Über den Bildungswert der Mathematik. Jahresbericht des Städt. Realgymnasiums zu Coblenz. 1894/95. Programm Nr. 482. 1895.

tive[139], die wir bei der Beleuchtung der Eigenart der Mathematik herausstellten. Sie führt von den Elementen zu den Komplexionen, von den einfachsten Gebilden der Arithmetik (den positiven ganzen Zahlen) und der Geometrie (Punkt, Gerade, Ebene) zu den kompliziertesten „Zahlen" und Raumgebilden. Dieser Aufbau der Mathematik — wie jener auch oft der deduktive genannt — rückt mit Entschiedenheit den Begriff als Gesetzesbegriff in den Vordergrund. Hier beginnt nun ein neues pädagogisch bedeutungsvolles Problem: die Errichtung des mathematischen Lehrgebäudes kann unter der Herrschaft der Methodenbegriffe doch noch gleichsam in doppelter Weise vollzogen werden: nach dem Prinzip der Reinheit der Methoden und nach dem Prinzip der Fusion.[140]

Über Reinheit der Methoden. Nach dem Prinzip der Reinheit der Methoden wird die Behandlung einer mathematischen Disziplin oder der Aufbau eines engeren Gebietes so vollzogen, daß eine und nur eine bestimmte Methode dabei bis zur Grenze ihrer Leistungsfähigkeit ausgenutzt wird. Dann folgt entweder 1. die Übertragung dieser Methode auf ein neues Gebiet oder 2. die Behandlung des früheren oder eines neuen Problemkreises nach einer anderen Methode. Ein Beispiel aus dem Rahmen der Geometrie mag das verdeutlichen. Zunächst wird die Planimetrie vielleicht in der Weise Euklids behandelt; dann folgt entweder 1. die Behandlung der Stereometrie nach dem Muster Euklids oder 2. die Bearbeitung der ebenen bzw. der räumlichen Geometrie nach dem Muster des Descartes. Energisch hat sich die moderne Re-

[139] Es gibt nur eine Methode des Aufbaues der Mathematik für Wissenschaft und Schule (die genetisch-konstruktive); aber das fertige Gebäude bzw. die ausgebaute Disziplin kann — nach dem Aufbau von „unten nach oben" — gleichsam auch von „oben nach unten" durchlaufen werden.

[140] Vgl. F. Klein: Elementarmathematik I und II; bes. I. S. 180. R. Schimmack: Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichtes. Habilitationsvortrag. 1911. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die IMUK. Herausgegeben von W. Lietzmann. In zwei Folgen. Leipzig-Berlin 1917.

formbewegung, besonders unter Führung von F. Klein, auch gegen die Anordnung des Lehrstoffes der Mathematik nach dem Prinzip der Reinheit der Methoden gewandt. „Das Prinzip der Reinheit der Methoden, das in höheren Spezialvorlesungen an der Universität ein interessantes Ding sein mag, wird leider bisweilen auch an der Schule hochgehalten: ‚geometrica geometrice'; in die Geometrie nur ja keinen Zahlbegriff hineinbringen; die Algebra hat zum Glück die ‚Krücken der Geometrie' nicht nötig; in der Arithmetik nur ja keine Figuren! — das sind die oft gehörten Schlagworte, mit denen die allgemeine Durchbildung zur höheren Ehre der Reinheit der Methode geopfert wird."[141]

Uns interessieren hier die Einwände die der Vertreter der formalen intellektuellen Bildung der Mathematik gegen jene Stoffanordnung erhebt. Erfolgt die Verteilung in strengster Weise nach jenem Prinzip, wird der mathematische Lehrstoff gleichsam „in einer Reihe angeordnet" auf die Schuljahre verteilt, so kann keine Rücksicht genommen werden auf die Schwierigkeiten, die das Verständnis der mathematischen Konstruktionen dem sich allmählich steigernden und entfaltenden Fassungsvermögen des jugendlichen Geistes bietet. Schwierige Gebiete der Arithmetik stehen vor elementaren Teilen der Geometrie; verwickelte planimetrische Gedankenzusammenhänge vor einfacheren Erkenntnissen der Stereometrie. Während so die arithmetischen Dispositionen auf das stärkste entfaltet werden sollen, treten die geometrischen (schon zeitlich) zurück, und die Ausbildung der Raumanschauung wird fast übersehen.

Über Fusion. Diesen Gefahren könnte man nur entgehen, wenn man die nach dem Prinzip der Reinheit der Methoden aufgebauten Disziplinen jede für sich — unter Beachtung aller Schwierigkeiten, die sie dem Schüler bieten — vom Beginn

[141] Klein-Schimmack: Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. 1907. S. 38.

des mathematischen Unterrichtes an auf die Schuljahre verteilt. Die Reformbewegung sucht diese Zersplitterung der Mathematik in methodisch reinlich gesonderte Disziplinen zu vermeiden und doch zugleich den Lehrgang der natürlichen geistigen Entwicklung des Schülers anzupassen, indem sie eine innige Verschmelzung aller Stoffe und Methoden der Schulmathematik zu einem organischen Ganzen anstrebt, dessen Verteilung auf die Schuljahre möglichst weitgehend jenem Prinzip der Anpassung (an die geistige Entwicklung des Schülers) genügt.

Nach dem Prinzip der Fusion soll 1. eine bestimmte Methode in verschiedenen Stoffkreisen „gleichzeitig" Anwendung finden; es werden also einzelne Gebiete verschmolzen; 2. ein bestimmter, sachlich begrenzter Problemkreis „gleichzeitig" nach verschiedenen Methoden behandelt werden. Bei einer vollständigen Fusion der einzelnen Disziplinen und Methoden würde ein einheitlicher „Gesamtunterricht" alles mathematische Schulwissen und -können umfassen und vermitteln. Sicherlich können so einzelne Gebiete und Methoden, die dem Schüler annähernd gleiche Schwierigkeiten bieten, dem Prinzip der Anpassung gemäß leichter angeordnet werden. Die Behandlungsweise des Unterrichtes selbst kann durch den Wechsel der Gebiete und Methoden lebendiger werden. Außerdem „präzisieren wir die geometrischen Ideen, indem wir sie mit analytischen Entwicklungen begleiten; beleben wir die Analysis durch Hinblick auf die geometrischen Figuren".[142] Die Mathematik erscheint dem Schüler nicht mehr als „starres Fächerwerk", sondern als ein lebendiger Organismus, in dem der logische Zusammenhang das feste Skelett bildet. „Die Mathematik ist durchaus eine lebendige Wissenschaft, die fortwährend neue Probleme aufnimmt und verarbeitet, die Veraltetes wegwirft und sich so immer wieder und wieder verjüngt. Und das gilt nicht bloß von der hohen

[142] F. Klein: Anwendung auf Geometrie. S. 210.

Wissenschaft, wo es ja selbstverständlich ist, sondern es soll auch entsprechend mit der Schulmathematik sein; auch sie muß sich immer erneut umbilden. . . ."[143] Dem Schüler bieten sich bei dieser Durchdringung leichter Probleme und Lösungsmöglichkeiten. Die entwicklungstreue Entfaltung aller mathematischen Dispositionen scheint gesichert; denn die „rohe Individualität", das Fundament aller Grunddispositionen wird gleichmäßig ausgestaltet; vor allem droht keine Vernachlässigung in der Ausbildung der Anschauung. Das heuristische Unterrichtsverfahren bietet dem Lehrer Gewähr dafür, daß die Fusion der Stoffe und Methoden nicht zu einer Konfusion der Schüler führt; während bei dozierender Lehrweise und fusionistischer Anordnung des Stoffes diese Gefahr naheliegt. Die Fusion schließt aber — das sei nachdrücklich betont — nicht aus, daß jeder Gedankenschritt in Beweisgang und Konstruktion mit voller Bewußtheit seiner Bedeutung vom Schüler vollzogen wird.

Die Anordnung der Lehrstoffe nach dem Prinzip der Fusion scheint allmählich an Boden zu gewinnen; doch stehen wir vorläufig noch am Anfange der Schöpfung einer Schulmathematik, die auch nur annähernd jenen Prinzipien der Anpassung entspricht.[144] Der Funktionsbegriff und der Koordinatenbegriff werden von der Reformbewegung immer mehr in den Mittelpunkt der Schulmathematik gestellt; in richtiger methodischer Steigerung sollen sie den gesamten mathematischen Unterricht beeinflussen. „Um den Funktionsbegriff gruppiert sich zwanglos der gesamte mathematische Lehrstoff und gewinnt, was bisher zu vermissen ist, einen planvollen Zusammenhang."[145]

[143] Klein-Schimmack: A. a. O. S. 4.

[144] Vgl. H. E. Timerding: Die Verbreitung. S. 54—55. Die unendliche Fülle der einschlägigen Literatur kann nur durch Hinweis auf die „Schriften des deutschen Unterausschusses der internationalen mathematischen Unterkommission" hier angegeben werden.

[145] Klein-Schimmack: A. a. O. S. 34. Vgl. auch G. Rudert: Die Grundlagen des funktionalen Denkens.

Jede Schulart wird bei der Aufstellung ihrer Lehrpläne zu erwägen haben, bis zu welcher ihrer Unterrichtsstufen die Stoffverteilung von dem Prinzip der Fusion beherrscht sein kann. Für die Elementarschule scheint nichts dagegen zu sprechen, daß dieses Prinzip voll durchgeführt wird; die Schüler werden hier ja eben bis an die Schwelle der Pubertätsjahre geführt, in denen eine Sonderung der Begabungs- und Interessenrichtungen sich deutlich zeigt. Späterhin wird das Prinzip der Reinheit der Methoden sich immer mehr geltend machen; an die Stelle der Fusion tritt dann die nach „materialen" Gesichtspunkten geforderte Konzentration.[146] Auf den oberen Stufen der höheren Lehranstalten hat sich längst eine den Begabungs- und Interessenrichtungen der Schüler möglichst entgegenkommende freiere Gestaltung des Unterrichtes angebahnt und zum Teil schon durchgesetzt, die sich in der Art der häuslichen Arbeiten und in der Gewährung von Studientagen, in der Anregung durch besondere Vorträge und Ausgestaltung der Schulbücherei, in der Gruppenbildung und Veranstaltung von Sonderkursen usw. anzeigt.

Wesentlich für die Entfaltung des formalen intellektuellen Bildungswertes ist demnach vor allem die Art des Unterrichtes, der Stofferarbeitung; herrscht im Unterricht das entwickelnd-darstellende Verfahren, so kann auch die Anordnung des Lehrstoffes nach dem Prinzip der Reinheit der Methoden kaum eine Gefahr für die Entwicklung geistiger Kräfte im Schüler bedeuten. Daß die Unterrichtsmethode, soweit sie eine technische Seite hat, erlernt und geübt sein will wie alle Technik, das brauche ich kaum zu erwähnen; aber die Methode bleibt kalt, solange nicht Lehrer und Schüler in echter Freude am Stoff und an gemeinsamer Bildungsarbeit diesen Weg beschreiten.[147]

Rückblickend auf unsere Betrachtung des formalen intellektuellen Bildungswertes der Mathematik und auf einige

---

[146] Vgl. S. 174 dieser Arbeit.

[147] E. Spranger: Lebensformen. 1921. S. 336—341.

wichtige Gesichtspunkte für seine Entfaltung können wir sagen: ein sorgsam geleiteter, auf formale (d. h. nicht formalistische!) Schulung des Geistes bedachter mathematischer Unterricht vermag im Schüler nicht allein die fundamentalen arithmetischen und geometrischen Dispositionen in entwicklungstreuer Weise zu beleben und zu stärken, die Kraft des funktionalen Denkens und das räumliche Anschauungsvermögen zu entfalten und damit die Grundlagen für die quantitative Erfassung aller Naturvorgänge und für die mathematisch exakte, d. h. nach Zahl, Maß und Form bestimmte technische Gestaltung realer Dinge zu bieten; sondern darüber hinaus die Selbsttätigkeit und Schaffensfreude (im Finden und Lösen mathematischer Probleme) zu erregen, den Willen zur Erkenntnis zu kräftigen, zu geistiger Zucht durch die oft mühsame Arbeit klarer Begriffsbildung, prägnanter Urteilsformulierung und engster Gedankenverkettung zu erziehen; das Vertrauen auf die eigene Kraft im Durchdenken immer komplizierterer Probleme und zugleich das Gefühl der Verantwortung für die Richtigkeit der eigenen Denkleistungen zu nähren; das logische Gewissen, das Bewiesenes und Unbewiesenes gehörig trennt, zu wecken und — vielleicht — das Ethos der Wahrheit zu entflammen, das allein die Seele des echten Forschers durchglüht.

Formale Bildungswerte können nie wirksam entfaltet werden, ohne daß zugleich ein „Stoff" von der Lebenstotalität ergriffen wird. Soll der mathematische Unterricht nicht zu öder Geistesgymnastik ausarten, so wird er aus dem unendlichen Bereich mathematischer Erkenntnisse gerade diejenigen auslesen müssen, die nicht allein zur Entfaltung der geistigen Kräfte des Schülers geeignet sind, sondern darüber hinaus noch höchsten materialen intellektuellen Bildungswert für ihn besitzen. Damit kommt unsere Betrachtung an einen neuen, schon öfter berührten Problemkreis, für dessen Durchdringung hier auch nur Richtlinien gegeben werden können.

II. Über den materialen intellektuellen Bildungswert der Mathematik.

In der eigenartigen Existenzweise der Mathematik liegt es begründet, daß ganz wesenhaft Verschiedenes an ihr als „material" wertvoll bezeichnet werden kann; andererseits bedingt die Eigenart der Persönlichkeit, die Lebensform, die Tiefe der individuellen Verflechtung mit den mathematischen Gegenständen — und damit ihre „stufenmäßige" Wertung.

Die ideelle, die psychische und die physische Seite der Mathematik berühren in ganz verschiedener Weise nicht allein — wie wir bereits sahen — den formalen intellektuellen Bildungswert, sondern auch den materialen. Es kann die ideelle Seite der Mathematik gewertet werden, die reine Erkenntnis — und zwar als Selbstwert vom Standpunkt des Forschers, der nur den Zusammenhang der Wahrheiten sucht, und als „Mittelwert" vom Standpunkt des ökonomischen Menschen, der durch die mathematische Erkenntnis die Beherrschung der Natur und ihre Umgestaltung durch die Technik erstrebt. Ebenso kann die physische Seite der Mathematik (von der Logarithmen- und Funktionentafel bis zum Rechenschieber, Integraphen und Stereoautographen) sowohl vom Forscher, d. h. in Erkenntniseinstellung gewertet werden, wie auch Grundlage ökonomischer und ästhetischer Wertung sein. Selbst die psychische Seite der mathematischen Erkenntnis, der Denkprozeß, kann — so überraschend es scheinen mag — nicht allein theoretischer, sondern auch ökonomischer, ästhetischer und sogar religiöser Wertung unterliegen.

Die nur angedeutete mannigfache Verschlingung der Probleme zeigt, daß die wesentlichen Gesichtspunkte für die Betrachtung des materialen intellektuellen Bildungswertes der Mathematik in der Struktur der Persönlichkeit wurzeln, weil ihre Lebensform die Wertung der mathematischen Erkenntnis bedingt. Zur Vereinfachung der Darlegung nehmen wir an, daß die individuelle Struktur weitgehend dem Berufe entspricht, den der einzelne im Kulturganzen ausübt. Mathematisches Kennen und Können geht aber in fast alle Berufsleistungen ein. Daher wird schon zur Sicherung der vitalen Existenz von dem Individuum die Beherrschung eines bestimmten Maßes mathematischen Stoffes gefordert. Der Umfang dieses Stoffkreises (der materialen Allgemeinbildung) wird bedingt durch die Höhe der Gesamtkultur (Individuallage). Wir haben also zunächst zu erwägen, welche Bedeutung die Mathematik für die Berufsbildung hat und sodann, welcher Wert ihr für die materiale Allgemeinbildung zukommt.

a) Mathematik und Berufsbildung.

Forscher, Techniker und Künstler bemessen den materialen intellektuellen Bildungswert der Mathematik durchaus in Abhängigkeit von ihrer Persönlichkeitsstruktur, von ihrer besonderen Lebensform.

Mathematik und Forscher. Höchsten materialen intellektuellen Bildungswert wird allezeit der Forscher der mathematischen Erkenntnis zuschreiben; seine Lebensform ist ja durchaus beherrscht vom Streben nach Erkenntnis, nach Wahrheit. Aber längst ist im weiten Kreise der Forschung eine der Scheidung der Gegenstandsgebiete entsprechende Trennung beruflicher Betätigungen eingetreten, die mehr oder minder weitgehend sich den Anlagen und Interessen des einzelnen Forschers anschmiegt. Diese Differenzierung ist nun wieder nicht ohne Bedeutung für die Wertung der Mathematik.

Nur für den Mathematiker von Beruf (in doppeltem Sinne) hat alle und jede mathematische Erkenntnis Wert, und zwar Eigenwert. Und doch verflicht sich nur ein Ausschnitt aus dem unendlichen Bereich mathematischer Wahrheiten auf das innigste mit seiner Lebenstotalität. Nur dieser Ausschnitt entfaltet in seiner Persönlichkeit den vollen materialen Bildungswert. Solange der Mathematiker in der spezifisch mathematischen Einstellung beharrt, d. h. nur das Kriterium der Wahrheit an die mathematische Erkenntnis legt, fehlt ihm jede Möglichkeit der Bildung einer Stufenfolge materialer Bildungswerte. Der Satz des Pythagoras ist genau so wertvoll wie der Satz des Pascal; der Cauchysche Integralsatz genau so wichtig wie der Weierstraßsche Konvergenzsatz; denn am leitenden Werte der Forschung gemessen, ist jede Erkenntnis wahr oder falsch; nicht wahrer oder falscher. Außerdem ist jede mathematische Erkenntnis für den inhaltlichen Aufbau des geschlossenen Systemzusammenhanges unentbehrlich. Alles also, was in der reinen, ideellen Sphäre mathematischer Wahrheiten liegt, hat für den Mathematiker gleichen Erkenntniswert.

Oft nimmt er auch gegenüber Ausschnitten der physischen oder der psychischen Seite seiner Forschung die strenge Erkenntnishaltung ein; er wertet dann Figuren, Modelle oder deskriptive Bewußtseinsinhalte nach dem Grade ihrer Adäquatheit oder Angemessenheit an die idealen Konstruktionen. Im wesentlichen aber würdigt der reine Mathematiker jene Seiten seiner Forschung von außertheoretischen Einstellungen aus.

Wäre der erfolgreiche Fortgang mathematischer Forschung immer an die Kenntnis aller Einzelheiten eines Gebietes gebunden, so würde er sicherlich um so langsamer werden, je mehr die Gedächtniskraft durch die steigende Aufnahme neuen Wissensstoffes bis zur oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit angespannt wird. Wir wissen aber bereits, daß — psychologisch gesprochen — das Feingefühl für große Gedankenzusammenhänge oder hier anders ausgedrückt: die sichere Beherrschung der Methoden und Konstruktionsprinzipien den Mathematiker leicht in jedem Augenblick in den Besitz nicht gedächtnismäßig präsenter Einzelheiten bringen können. Die Einsicht in die Methoden ist daher auch viel inniger mit der teleologischen Struktur der Persönlichkeit verflochten als diese oder jene nach der betreffenden Methode zu ermittelnde Einzelkenntnis. Diese Wertung mathematischer Erkenntnis stammt aber schon nicht mehr aus rein erkenntnismäßiger Geisteshaltung; an die Stelle des Kriteriums der Wahrheit ist das Kriterium der Fruchtbarkeit für den Fortgang mathematischer Forschung getreten; nicht der reine Erkenntniswert, sondern eben der materiale intellektuelle Bildungswert der Mathematik steht in Frage. Deutlich fließt hier aus dem Untergrunde der Lebenstotalität bei der Bewertung des materialen intellektuellen Bildungswertes ein „denkökonomisches Moment" ein. — Mit vollem Recht wird der ökonomische Maßstab der Wertung der physischen und der psychischen Seite mathematischer Erkenntnis zugrunde gelegt; d. h. die Frage aufgeworfen: Was bedeutet dieses Ziffern- oder Symbolsystem, diese Darstellung in Zeichnung oder Modell, dieses maschinelle Hilfsmittel zur Ausführung mathematischer Konstruktionen, diese ganz bestimmte Gewohnheit der Bedeutungserfüllung für den Fortgang der Forschung? Daß die physische und die psychische Seite mathematischer Forschung durch ihre immanente Gesetzlichkeit nicht bloß eine denkökonomische Formulierung und elegante Lösung der Probleme, ein leichtes Einprägen und Überliefern mathematischer Erkenntnis ermöglichen, sondern darüber hinaus zur Entdekkung neuer Wahrheiten Anlaß geben, haben wir öfter erwähnt. Es ist nach allem daher verständlich, wenn der Mathematiker gerade denjenigen Seiten der mathematischen Forschung höchsten materialen Bildungswert zuspricht, die ihm zugleich höchst wertvoll für den Fortgang seiner eigenen Arbeit erscheinen. Diese Wertung mathematischer Forschung, die in dem komplexen Phänomen jene drei Seiten untrennbar verschmolzen erlebt, erfolgt daher auch nicht aus der künstlichen Einengung des Ich auf die reine Erkenntnishaltung oder spezifisch ökonomische Einstellung, sondern aus der vollen Lebenstotalität heraus, die eine ebenso innige Verwebung theoretischer und ökonomischer Tendenzen der Persönlichkeit in sich birgt; ja auch des ästhetischen und religiösen Einschlags oft nicht entbehrt.

Das ästhetische Moment in der Wertung mathematischer Erkenntnis verrät sich nicht allein durch die anschauliche

Konzeption (in sinnlicher Wahrnehmung oder Phantasievorstellung), sondern vor allem durch die Betonung der harmonischen Anordnung der Gedanken, Symbole, Figuren. Immer, wenn von „Eleganz der Darstellung" die Rede ist, fließt der ästhetische Faktor in die Werthaltung ein und verbindet sich mit dem theoretisch-ökonomischen; und überall, wo die mathematische Forschung das Wesen der Dinge, den Kern des Seins entschleiert, da hüllt sich in Zahl und Form, in stumme, ewige arithmetische und geometrische Gesetzlichkeit das religiöse Sehnen. So fließt aus der geschlossenen Lebenstotalität, in der die theoretische, ästhetische, ökonomische und religiöse Komponente der Wertung individuell und doch strukturgemäß verschmolzen sind, natürlich eine durchaus eigenartige, persönliche Stellung zur Mathematik; aber wie der echte Mathematiker die mathematische Erkenntnis nach ihren drei Seiten auch verschieden werten mag — im Grunde erstrebt er sie aus religiöser Sehnsucht, allein als Selbstwert, zu dem alles andere nur als Mittel dient.

Anders aber beurteilen Naturforscher und Geisteswissenschaftler den materialen intellektuellen Bildungswert der Mathematik. Auch sie erblicken ja als Forscher den Wahrheitsgehalt mathematischer Erkenntnis; damit aber erlangt mathematisches Wissen für sie noch keinen Bildungswert. Beide sind ja zunächst ihrem eigenen Problemkreise zugewandt; die auf diese Gegenstandssphäre bezüglichen Wahrheiten gelten ihnen als die höchsten und andere Erkenntnisse immer nur als Mittel zur Erlangung solcher Tatsachenwahrheiten. So kann mathematische Erkenntnis hier nur gewürdigt werden als Mittelwert. Da nun mathematisches Wissen in ganz verschiedenem Ausmaß in die Lebensform des Naturforschers und Geisteswissenschaftlers eingeht, so wird auch der materiale intellektuelle Bildungswert der Mathematik als ganz verschieden erlebt.

Der Naturforscher ist primär eingestellt auf die „Erforschung der Natur", sowohl auf die Erkenntnis des Immer-soseienden wie auf die Kenntnis des Einmal-so-gewesenen. Längst hat sich hier dem gewaltigen Tatsachenmaterial gegenüber die Forschungsarbeit differenziert. Welchem Problemkreise sich nun der Naturwissenschaftler auch zuwende, das Sammeln und Ordnen des Gegebenen kann nur zu einem systematischen Aufbau naturkundlichen Wissens im Sinne der Subsumtionslogik führen; erst da, wo die kausale Verknüpfung eingeführt wird, wo die Naturbeschreibung in Naturerklärung umbiegt, muß — als unentbehrliches Hilfsmittel der Forschung — zur hypothetischen Begriffserörterung noch die Befragung der Tatsachen durch das Experiment (im weitesten Sinne) hinzutreten. Die größte Schärfe erreicht das naturwissenschaftliche Denken aber erst dann, wenn es die kausal verknüpften Erscheinungen mit Hilfe des mathematisch funktionalen Denkens erfaßt, präzisiert. Daher erblühten die größten Erfolge der Naturforschung seit den Tagen Galileis. „Die Methode Galileis: die experimentelle Methode, welche Induktion und Deduktion, Erfahrung und Denken vereinigt, bedeutet, wie dies namentlich Kant betont hat, eine Revolution der wissenschaftlichen Denkart."[148] Seit jenen Tagen feiert die „exakte" Naturwissenschaft durch Anwendung mathematischer Methoden immer neue Triumphe. Gewiß „mag zwar eine reine Philosophie der Natur überhaupt, d. i. diejenige, die nur das, was den Begriff einer Natur im allgemeinen ausmacht, untersucht, auch ohne Mathematik möglich sein, aber eine reine Naturlehre über bestimmte Naturdinge (Körperlehre und Seelenlehre) ist nur vermittelst der Mathematik möglich".[149]

Es ist ein reizendes Schauspiel, die fortschreitende Mathe-

---

[148] A. Riehl: Zur Einführung in die Philosophie. 1919. S. 31. Ders.: Die humanistischen Ziele des mathematischen Unterrichtes. 1908. Ders.: Über den Begriff der Wissenschaft bei Galilei. In der Viertelj. f. wissenschaftl. Philos. XVII. S. 413.

[149] I. Kant: Metaphysische Anfangsgründe. S. IX. (Absichtlich nicht bis zum Ende zitiert!)

matisierung der einzelnen Disziplinen der Naturforschung zu verfolgen.[150] Die Möglichkeit der Anwendung mathematischer Erkenntnis zur Erforschung naturwissenschaftlicher Tatsachen und zur Darstellung der Untersuchungsergebnisse beruht darauf, daß auch in der Naturforschung sich das konstruierende Denken als richtig erweist; d. h. die Zusammensetzung komplexer Erscheinungen aus axiomatischen Tatsachen oder Elementen nach den mathematischen Fundamentalrelationen möglich ist.

Wir würden den Rahmen der Arbeit durchbrechen, wollten wir Bedeutung und Leistungsfähigkeit der vielen mathematischen Methoden, die bereits bei der Erforschung naturwissenschaftlicher Probleme und bei der Darstellung der Untersuchungsergebnisse Anwendung gefunden haben, hier in systematischer Ordnung erwägen; außerdem bietet der fortschreitende Prozeß der Mathematisierung der Naturwissenschaft solcher Betrachtung kein starres, letztes Ziel. Nur einige Beispiele sollen gleichsam die Richtung jenes Prozesses verdeutlichen, der rastlos weitergeht, solange die Forschung lebt.

Der Physiker versucht die exakte Erklärung der Erscheinungen der Natur durch quantitative Bestimmung aller funktional verbundenen Momente eines gegebenen Erscheinungskomplexes zu erreichen; d. h. durch die Bestimmung derselben nach Zahl, Maß und Form. Dabei bedient er sich heute aller möglichen Methoden der Arithmetik und der Geometrie, von der einfachen Addition und Subtraktion bis hinauf zu den letzten Entdeckungen des Infinitesimalkalküls und der Funktionentheorie, von der elementaren Planimetrie Euklids bis zu den Hilfsmitteln mehrdimensionaler und Nichteuklidischer Geometrien.

Zunächst führt die mathematische Behandlung der Probleme zu genauester Erklärung längst bekannter Erschei-

---

[150] Hier liegen zahlreiche Einzelfragen von hoher Bedeutung, die noch der Bearbeitung harren.

nungen. Die wunderbare Tatsache z. B., daß „die Krümmung der Erdoberfläche, die eine Fortpflanzung des Lichtes hindert, für die Ausbreitung der Wellen der drahtlosen Telegraphie kein Hindernis darstellt, daß diese vielmehr auf der Erdoberfläche von Europa bis Amerika zu laufen vermögen, findet ihre Erklärung erst durch Betrachtung der partiellen Differentialgleichungen des Problems".[151] — Dazu ist die Präzision mathematischer Formulierungen — man denke z. B. an die Maxwellschen Gleichungen, in denen die Elektrodynamik alle Äußerungen der ruhenden und bewegten Elektrizität umfaßt — so groß, daß sie „den Effekt jedes Experimentes zahlenmäßig" vorauszusagen gestattet. — Ferner läßt sich dieselbe mathematische Behandlungsweise oft auf ganz verschiedene Problemkreise übertragen. „Es ergibt sich dieselbe Differentialgleichung, ob ich nun die Ausbreitung der Wärme in einem Stabe untersuche oder nach der Ausbreitung einer elektrischen Störung in einem Kabel frage".[152] Gerade dieser umfassende Charakter der mathematischen Behandlungsweise gibt ihr höchste Bedeutung für den Physiker. „Eine mathematische Theorie, die über die Schwingungen eines Pendels unter der Wirkung einer periodischen Störung Auskunft gibt, bleibt bestehen, mag der oszillierende Körper eine Panzerplatte oder ein Wasserstoffatom oder ein Elektron sein, mag die störende Kraft die Welle des Atlantik oder der elektrische Stoßimpuls sein, der in einer Sekunde billionenmal auftrifft."[153] — Ferner führt die mathematische Behandlungsweise auch zur Entdeckung neuer physikalischer Phänomene. Ich erinnere nur an die Elektrodynamik, welche die Gesetze aller optischen Erscheinungen so umfassend ausspricht, daß die „bloße Betrachtung ihrer Formeln wiederholt zur erfüllten Voraussage noch nicht gesehener Erscheinungen

[151] E. Jahnke: Mathematische Forschung und Technik. 1910. S. 9.
[152] Ders.: A. a. O. S. 16.
[153] E. Jahnke: A. a. O. S. 15.

geführt hat".[154] Wer denkt nicht z. B. an die von W. R. Hamilton aus der berechneten Gestalt der Wellenfläche des Lichtes „unter einer ganz besonderen Versuchsanordnung bei zweiachsigen Kristallen vorausgesagte äußere konische Brechung, die von H. Lloyd sofort am Arragonit unzweifelhaft nachgewiesen wurde".[154] Welche Umwälzung hat die Berechnung des Wärmeäquivalentes von R. Mayer der Thermodynamik, die mathematische Theorie der Wirbelbewegung von H. Helmholtz der Hydrodynamik gebracht! Doch genug solcher Beispiele, die alle besagen: „Wer auf die analytischen Entwicklungen verzichten wollte, würde das schärfste und zuverlässigste Werkzeug zur Verarbeitung der Beobachtungstatsachen aus der Hand geben."[155] — Bei dieser weitgehenden Anwendung mathematischer Methoden in der physikalischen Forschung wundert es uns auch nicht, daß selbst zur Darstellung ihrer Ergebnisse und zu ihrem Verständnis eine Fülle mathematischen Wissens erforderlich ist. Mag es die übersichtliche Zahlentabelle sein, die den Inhalt der Formel expliziert; das Kurvenbild, das die funktionale Abhängigkeit der gesetzmäßig verbundenen Größen graphisch veranschaulicht; die Grundriß- und Aufriß- oder die „Durchschnittszeichnung"; das Diagramm oder das Modell — alle erfordern zu ihrer Herstellung und zum Verständnis mathematisches Wissen und Können.[156] Der enge Zusammenhang physikalischer Erkenntnisse reizt den Forscher immer wieder zu jenem geschlossenen Aufbau seiner Disziplin, der in der Darstellung der Geometrie durch Euklid sein leuchtendes Vorbild hat. Kant hat „more geometrico" die „metaphysischen Anfangsgründe der Naturwissenschaft" demonstriert; heute regt sich wieder die Arbeit zu strengem, axiomatischem Aufbau der Phy-

[154] A. Voß: Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. 1914. S. 19; 17.

[155] So A. Föppl; zitiert bei F. Jahnke: A. a. O. S. 9.

[156] Vgl. H. E. Timerding: Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. 1910. IMUK.

sik. Wenn der exakte Aufbau mathematischer Disziplinen gelingen kann, so bleibt er doch in einer Tatsachenwissenschaft — die vor der extensiv und intensiv unausschöpfbaren Mannigfaltigkeit der Erscheinungen steht — eine „ewige Aufgabe". Wirkliche Anwendung aber erfährt mathematische Erkenntnis überall da in der Physik, wo Bestimmungen nach Zahl, Maß und Form getroffen werden. — Oft aber reichen die vorhandenen Methoden der Mathematik gar nicht aus zur exakten Erfassung der physikalischen Phänomene; dann stellt der Physiker dem Mathematiker die Aufgabe, neue mathematische Methoden zur geeigneten Behandlung dieser Tatsachen zu schaffen, oder er entwickelt selbst solche Methoden. „Fourier hat die Probleme der Wärmeleitung auf die nach ihm benannten Reihenentwicklungen zurückgeführt."[157] „Laplace wurde durch astronomische Probleme auf die Kugelfunktion geführt."[157] „Die Theorie der Fernkräfte führt bei Green, Gauß, Dirichlet zur Ausbildung der Potentialtheorie, und diese gab Veranlassung zu der Riemannschen Grundlegung der Funktionentheorie."[158] „In der allerneusten Zeit hat die Ausbildung der Theorie der Integralgleichungen gezeigt, zu welchen Höhen der mathematischen Spekulation ursprünglich physikalische Probleme schließlich hinaufführen können."[158] So läßt sich denn für das Maß mathematischen Rüstzeuges, das dem Physiker heute zur Verfügung stehen muß, keine obere Grenze angeben: es erstreckt sich über alle mathematischen Disziplinen hinweg und umfaßt die arithmetischen und geometrischen Konstruktionsmethoden (mit ihrem ausgebildeten Formalismus) ebensowohl wie die mathematischen Veranschaulichungsmittel und die Hilfsmittel mechanischer Ausführung von Rechnungen (Tabellen, Funktionentafeln, Rechenstäbe und Rechenmaschinen) und Konstruktionen (Zeichnungen, Modellbauten usw.).

Der Ausschnitt mathematischer Erkenntnis, der sich in der

[157] Ders.: A. a. O. S. 17. [158] Ders.: A. a. O. S. 18.

Lebenstotalität des Forschers auf das innigste mit dem physikalischen Problemkreis vermählt, besitzt und entfaltet hier den höchsten materialen intellektuellen Bildungswert. Der Forscher wird immer denjenigen mathematischen Methoden usw. den höchsten Bildungswert zusprechen, die sich bei seiner Arbeit als unentbehrlich und überaus fruchtbar erweisen. Und die Wertung quillt wiederum nicht aus einer abstrakt theoretischen oder rein ökonomischen Einstellung; sondern aus einer lebendigen Geisteshaltung der Persönlichkeit, die jene Komponenten „ungeschieden" in sich wirken läßt. So erscheint auch das Urteil des Physikers über den hohen materialen intellektuellen Bildungswert der Mathematik als notwendiger Ausfluß seiner Lebensform, seiner Struktur und Kulturtätigkeit.

Während Kant noch glaubte, daß die Chemie den mathematischen Methoden fremd bleiben würde[159], hat schon in seinen Tagen Lavoisier die „Mathematisierung der Chemie" begonnen; gegenwärtig entnimmt die Chemie „ihre tiefsten Untersuchungen dem Gebiet der mathematischen Analyse".[160] Welcher Arbeit sich der Chemiker bei Analyse oder Synthese auch zuwendet, immer erstrebt er heute die exakte Bestimmung der chemischen Erscheinungen, die Bestimmung nach Zahl, Maß und Form. Möge es sich um die Berechnung des Atom- oder des Molekulargewichtes, des Reaktionsverlaufes, der Diffusion, um die Bestimmung des Brechungs- und des Drehungsvermögens, des Schmelz- und Siedepunktes usw. handeln, immer braucht er mathematisches Wissen, das oft weit in die Gebiete der höheren Analysis reicht.[161] Die Gesetze von Gay-Lussac, die Zustandsgleichungen van der Waals, die Formeln von W. Gibbs — welche ungeheuren Fortschritte haben sie der neueren Chemie gebracht! Dabei steht der Prozeß

[159] I. Kant: Metaphysische Anfangsgründe. S. X.

[160] E. Jahnke: A. a. O. S. 18.

[161] Vgl. z. B. W. Nernst und A. Schoenflies: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. 1918.

der Mathematisierung der Chemie noch im Anfangsstadium. Die Mathematik kann also dem Chemiker dieselben Dienste leisten, die sie dem Physiker bereits gewährt: sie ermöglicht die exakte Formulierung schon bekannter Erscheinungen und damit ihre zahlenmäßig genaue Vorausberechnung; ja sogar die „Errechnung" neuer, bis dahin unbekannter Phänomene. — Kein chemisches Lehrbuch verzichtet heute auf die Benutzung chemischer Symbolik, die in manchem der mathematischen ähnelt; keine wissenschaftliche Darstellung entbehrt der Zusammenfassung und Veranschaulichung chemischer Aussagen und Gesetze in algebraischen Formeln, übersichtlichen Tabellen und graphischen Darstellungen, in Diagrammen und „Modellen" (z. B. zur Stereoisomerie) — und alles setzt eine Fülle spezifisch mathematischer Kenntnisse auch zum Verständnis voraus. So bedarf auch der Chemiker heute zu seiner Forschungsarbeit einer umfassenden mathematischen Kenntnis; mag diese angewandte Mathematik für den Chemiker vorläufig noch aus einem engeren Rahmen der gesamten Mathematik entstammen, so wird doch mit der fortschreitenden Physikalisierung der Chemie[162] zugleich der Boden für die Anwendung neuer mathematischer Methoden im Bereich chemischer Forschungsarbeit geebnet. Da auch hier die mathematischen Methoden zu exakter Erklärung der Erscheinungen führen, zur Auffindung neuer Probleme und zu präziser und übersichtlicher Darstellung der Untersuchungsergebnisse, wird der Chemiker den hohen materialen intellektuellen Bildungswert der Mathematik nicht unterschätzen.

Selbst der Biologe versucht heute, die Lebenserscheinungen exakt, d. h. nach Zahl, Maß und Form bestimmt zu erfassen. Der wichtigste Schritt zur Mathematisierung der Biologie war ja wohl durch die versuchte mechanistische Deutung des organischen Lebens geschehen. Wir können hier zum Streit um die Grundlagen der Biologie nicht Stellung nehmen;

[162] Vgl. z. B. W. Nernst: Theoretische Chemie. 1913.

die mathematische Naturauffassung ist prinzipiell auch in der Biologie berechtigt; ihre Grenzen sind hier nicht zu erörtern. Je weiter die Physikalisierung der Biologie in fruchtbarer Weise gelingt, um so weiter werden auch mathematische Methoden als wichtige Hilfsmittel biologischer Forschung vordringen. Mit Recht erforscht der Biologe mathematisch exakt Dauer und Geschwindigkeit der Lebensvorgänge (Bewegung, Wachstum, Fortpflanzung); die Geschwindigkeit von Reaktionen und Regenerationen; das Maß des Energieaufwandes; mit Recht sucht er die Vererbungserscheinungen und Gesetze der Artbildung exakt zu erfassen. Überall aber, wo sich funktionale Abhängigkeiten von Lebenserscheinungen nach statistischen und experimentellen Methoden behandeln und in Formeln fassen lassen, wird auch gern die graphische Veranschaulichung dieser Beziehungen bei der Darstellung der Forschungsergebnisse benutzt.[163] So verschmilzt auch in der Lebenstotalität des Biologen mathematisches Wissen und Können mit den besonderen Berufsaufgaben; und aus der ganzen Persönlichkeit heraus fließt die Wertung mathematischer Erkenntnis.

Ebenso wie in Physik, Chemie und Biologie die mathematischen Erkenntnisweisen mehr und mehr zurücktreten, so auch in einer Reihe anderer naturkundlicher Disziplinen, in Mineralogie[164], Botanik und Zoologie; wo aber auch hier die Methoden der Mathematik Anwendung finden, da geben sie Präzision nach Zahl, Maß und Form.

Nicht allein von einer Mechanik, sondern von einer „Arithmetik seelischer Erscheinungen“ hat man gesprochen. Die experimentelle Psychologie hat mit Hilfe von Experiment und Statistik[165] in der Erfassung und Erklärung seeli-

[163] Vgl. z. B. die zahlreichen Kurven bei M. Verworn: Erregung und Lähmung, 1914; ferner H. Przibram; Anwendung element. Mathematik auf biologische Probleme. Leipzig 1908.

[164] Vgl. F. Rinne: Die Kristalle als Vorbilder feinbaulichen Wesens der Materie. Berlin 1921.

[165] Vgl. W. Wirth: Psychophysik. Leipzig 1912.

scher Vorgänge dieselbe Präzision nach Zahl und Maß erstrebt, welche die exakten Naturwissenschaften (Physik und Chemie) kennzeichnet. Eine Fülle glänzender Fortschritte in der Erforschung des seelischen Lebens, besonders in der Lehre von den Sinnesempfindungen, vom Gedächtnis und zum Teil auch vom Denken, sind unter Anwendung mathematischer Methoden vom Experimentalpsychologen gewonnen bzw. betätigt und exakt formuliert worden. Über die Grenzen der „naturwissenschaftlichen" Psychologie kann hier nicht gehandelt werden. Den höheren, komplexen seelischen Erscheinungen hat sie nicht gerecht werden können; daher regt sich neben ihr die „geisteswissenschaftliche" Psychologie, die gerade jene mathematisch nicht faßbaren Erscheinungen des Seelenlebens zum Gegenstand ihrer Untersuchungen macht.[166]

Wir haben die Reihe der Naturforscher vom Physiker bis zum Experimentalpsychologen überblickt, um zu sehen, wie weit mathematische Erkenntnis in ihre Lebensform verwoben ist und materialen intellektuellen Bildungswert entfalten kann. Fassen wir die Mathematik und ebenso alle anderen Wissenschaften als absolute Wahrheitsbereiche, so bestehen zwischen den mathematischen Erkenntnissen und Methoden einerseits und den einzelnen nichtmathematischen Disziplinen andererseits ganz bestimmte und methodologische Zusammenhänge. Diese Beziehungen bestimmen dann gleichsam den reinen Erkenntniswert der Mathematik für die besondere Disziplin; zugleich würden sie aber auch das Maximum des materialen intellektuellen Bildungswertes für den Spezialforscher jedes Gebietes bezeichnen. Tatsächlich ist aber weder die mathematische noch irgendeine andere Forschung „voll" entwickelt. Von jenen absoluten Beziehungen zwischen den Methoden und Erkenntnissen der Mathematik und der nichtmathematischen Forschung liegt — bildlich gesprochen — nur ein Ausschnitt

[166] Vgl. E. Spranger: Lebensformen. Halle 1921; ferner M. Frischeisen-Köhler: Grenzen der experimentellen Methode. Berlin, Union Deutsche Verlagsanstalt.

vor uns. Er charakterisiert objektiv das Maß des intellektuellen Bildungswertes der Mathematik für den Naturforscher — und auch, wie wir sehen werden, für den Geisteswissenschaftler.

Außerdem fließen noch persönliche Momente in die Wertung mathematischer Erkenntnis ein. Der Naturforscher wird den Wert mathematischer Erkenntnismethoden um so höher schätzen, je leichter und häufiger sie in seinem Forschungsgebiete anwendbar sind und je sicherer und exakter ihre Ergebnisse werden. Dazu strahlt der Grad der Wertung der Naturwissenschaft, die als Anwendungsgebiet in Frage kommt, auch auf die Wertung der mathematischen Forschungsweisen über. Da aber viele mathematische Methoden einmal an den Punkt kommen, wo ihre Leistungsfähigkeit für den Fortgang der Forschung sich erschöpft oder von anderen Methoden überboten wird, weil neue Probleme auftauchen, die nach jenen Methoden nicht lösbar sind, und dann neue Methoden erfunden werden, die sowohl die neueren Probleme wie die früheren erfolgreich bewältigen und damit größte Fruchtbarkeit für den Fortgang der Forschung versprechen — sich aber doch auch wieder der Grenze ihrer Leistungsfähigkeit nähern und dann von anderen Methoden übertroffen werden — da dieser Kreislauf der Wertminderung und Wertsteigerung der Methoden sich ständig wiederholt, so ist das Urteil des Naturforschers über den materialen intellektuellen Bildungswert der Mathematik nicht nur ein strukturell persönlich bedingtes, sondern auch ein kulturell, von der Kulturlage, dem Entwicklungsstandpunkt der naturwissenschaftlichen Sonderdisziplin abhängiges Urteil.[167]

Der Geisteswissenschaftler steht den mannigfaltigen, komplexen Erscheinungen der Kultur in der Einstellung des Forschers gegenüber; auch für ihn kommen mathematische Methoden als Hilfsmittel der Forschung in Frage.

[167] Vgl. als Beispiel: H. E. Timerding: Die Mathematik in den physikal. Lehrbüchern. IMUK. S. 8—18. 1910.

Wird dem Kulturforscher das Wesen wissenschaftlicher Erkenntnis selbst zum Problem, sinnt er als Logiker über die Eigenart der Methoden der einzelnen Wissenschaften, als Erkenntniskritiker über die Grenzen der Erkenntnis überhaupt nach, so kann er auch an der Mathematik nicht vorübergehen. Der Bedeutungsgehalt mathematischer Aussagen, ihr geschlossener Systemzusammenhang, der Formalismus mathematischer Methoden, die Grenzen mathematischer Forschungsweise — sie sind dem Wissenschaftstheoretiker allzeit Quellen philosophischer Einsicht gewesen. Welche Fülle mathematischen Wissens muß er besitzen, um z. B. das Problem der Mathematisierung einzelner Disziplinen erfolgreich untersuchen zu können. Wer wollte ihm daher das Maß mathematischen Erkenntnisstoffes zumessen, das für ihn intellektuellen Bildungswert besitzt und entfalten kann?

Selbst der Metaphysiker, der „auf der Grundlage des gesamten wissenschaftlichen Bewußtseins“[168] seines Zeitalters oder „besonders hervortretender Inhalte desselben“[168] den Versuch macht, eine „die Bestandteile des Einzelwissens verbindende Weltanschauung zu gewinnen“[168], wird immer die Sicherheit und Exaktheit mathematischer Erkenntnis schätzen.[169]

Auch ein tieferes Eindringen in die Kunstwissenschaften, vor allem in die Theorie der bildenden Künste und in die Musikästhetik, erfordert mathematisches Wissen. Die Elementargesetze der bildenden Kunst — der Malerei, Bildhauerei, Architektur — führen zum Teil auf grundlegende geometrische Erkenntnisse zurück. Wir können hier zu den Methoden der Ästhetik ebensowenig Stellung nehmen wie zu den Methoden der anderen Kulturwissenschaften; selbst wer die Formästhetik nicht vertritt, muß, um sie würdigen zu

---

[168] W. Wundt: Metaphysik. In „Kultur d. Geg.“ I 6. 1921. S. 101.

[169] Vgl. den Hinweis auf den engen Zusammenhang von Mathematik, Mystik und Skepsis bei Wundt: A. a. O. S. 115.

können, auch jene mathematisch formulierten Gesetze kennen.[170]

Der Wirtschaftswissenschaftler, mag er sich historisch oder systematisch betätigen, muß die Methoden der bürgerlichen und politischen Arithmetik, der Statistik und des Versicherungswesens usw. beherrschen; auch der Theoretiker der Gesellschafts- und Staatswissenschaften kann mathematischer Kenntnisse nicht entbehren.

Alle Forscher aber werten die Mathematik in Hinblick auf ihr eigenes Forschungsgebiet; ist dieses in der mathematischen Sphäre gelegen, so hat die Mathematik für sie Selbstwert; mathematisches Wissen besitzt und entfaltet hier höchsten materialen intellektuellen Bildungswert. Liegt das Forschungsgebiet aber in einer anderen Gegenstandssphäre, so hat die Mathematik für den betreffenden Forscher auch nur Mittelwert; sie gilt als Hilfsmittel zur Erforschung jener Gegenstände und zur Darstellung der gewonnenen Erkenntnisse.

Theoretisch besteht die Möglichkeit, aus den sachlichen Beziehungen der Mathematik zu den einzelnen Forschungszweigen eine Stufenfolge materialer Bildungswerte für den einzelnen Forscher zu konstruieren; da sich aber diese sachlichen Beziehungen im Laufe der Kulturentwicklung verschieben, wird auch eine solche Auswahl von Bildungsstoffen immer von neuem stattfinden müssen! (Im Verlaufe der weiteren Untersuchung wird sich noch zeigen, daß nicht allein für die Berufserziehung, sondern auch für die grundlegende Allgemeinbildung der materiale intellektuelle Bildungswert der Mathematik erst auf Grund umfassender Kulturbesinnung festgelegt werden kann.)

Das mathematische Denken und Erkennen ist eine ganz bestimmte Art der theoretischen Geisteshaltung. In fast alle anderen kulturellen Verhaltungsweisen des Menschen, in sein technisches Schaffen, in sein künstlerisches Genießen und Ge-

---

170 Vgl. M. Geiger: Ästhetik. In „Kultur d. Gegenwart". 1921. S. 321.

stalten, in sein religiöses Erleben, in sein soziales und politisches Tun fließen mehr oder weniger Erkenntnisakte ein; damit auch spezifisch mathematische Erkenntnisse.

Seit den ältesten Zeiten hat mathematisches Wissen in Technik und Kunst Anwendung gefunden; ja, die innigste Verschmelzung dieser Kulturgebiete steht wohl (ontogenetisch wie phylogenetisch) am Anfang der Entwicklung. Noch heute sind die Beziehungen der Mathematik gerade zur Lebensform des technischen Menschen und zu den ausgesprochen technischen Berufen die innigsten.

Mathematik und Techniker. In den Schaffensprozeß des Technikers fließen außer den mathematischen Erkenntnisakten noch physikalische, chemische und biologische Einsichten; je nachdem seine Tätigkeit der physikalischen, chemischen oder biologischen Technik gilt. Wieweit mathematische Erkenntnis hier eindringen kann, das ist ebensowenig abschließend und allgemein zu sagen, wie bei der Erwägung der ähnlichen Frage in Hinblick auf den Naturforscher. Wie der Biologe, Chemiker und Physiker, so bedürfen auch der biologische, chemische und physikalische Techniker in zunehmendem Maße mathematischer Kenntnis. Da die Differenzierung der Berufsleistungen im Gebiet der Technik unter dem Druck des herrschenden Prinzipes der Erzielung höchster Leistungsfähigkeit bei größter Spezialisierung noch weiter geht als im Gebiet der Forschung, so können nur die einzelnen Berufsaufgaben Anhaltspunkt geben für die Bewertung der Mathematik durch den Techniker.[171]

Für den physikalischen Techniker — mag er sich als Mechaniker oder Elektrotechniker, als Ingenieur im Hoch- oder Tiefbau, als Konstrukteur von optischen Instrumenten, von Dampf- oder Kraftmaschinen anderer Art usw. betätigen — gehört eine Fülle arithmetischen und geometrischen Wissens zum täglichen Handwerkszeug. Bei jedem Experiment sind

[171] Vgl. IMUK. IV. Die Mathematik an den technischen Schulen; z. B. S. 73—85. 129.

Rechnung, Zeichnung und Modellkonstruktion innig verbunden; wo die Methoden der Präzisionsmathematik nicht ausreichen oder zu „umständlich" sind, da arbeitet er — oft mit eigens dazu entwickelten — Methoden der Approximationsmathematik.[172] „Die von Monge geschaffene Géométrie descriptive, die von Poinsot und Chasles, gewissermaßen als Reaktion gegen die einseitige analytische Richtung, geschaffene geometrische Mechanik und die von Culmann als Wissenschaft begründete Statik gehören schon seit langem zum Rüstzeug eines jeden Technikers."[173] Die mathematischen Methoden ermöglichen auch hier zunächst schärfste Präzision in der theoretischen Auffassung und damit auch in der technischen Gestaltung. „Auf rechnerischer Grundlage allein war es möglich, mit dem vorhandenen Material die bestmögliche Leistung zu erzielen und neue Anforderungen an das Material zu formulieren."[174] Daß der umfassende Charakter mathematischer Methoden, d. h. die Möglichkeit häufigerer Anwendung auf Probleme, die scheinbar nichts miteinander zu tun haben, für den Techniker noch wichtiger ist als für den Physiker, braucht kaum erwähnt zu werden. Selbst neue technische Probleme entstehen bei der mathematischen Behandlung solcher Fragen. „Die Studien über zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung in der Hydrodynamik, die zur Bestimmung der Kranzprofile und Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen geführt haben, sind durch Umdeutung von funktionalen Beziehungen zwischen komplexen Veränderlichen abgeleitet." „Die steigenden Anforderungen, die in der Praxis an den Beruf des Ingenieurs gestellt werden, zwingen zu einer Vertiefung seiner mathematischen Vorbildung und zu einer Schulung in der reinen Mathematik, um ihm die erforderliche Sicherheit in ihrer selbständigen Anwendung zu geben. Ein Blick in die Handbücher, die er zu Rate zieht,

[172] Vgl. Klein-Schimmak: A. a. O. S. 61—62.
[173] E. Jahnke: Mathematische Forschung und Technik. 1910. S. 6.
[174] A. a. O. S. 15.

lehrt, daß der Techniker von heute ein mathematisches Rüstzeug und ein mathematisches Wissen besitzen muß, wie man solches — vor noch nicht gar so langer Zeit — nicht bei allen Berufsmathematikern finden konnte." [175]

Dabei sind es Erkenntnisse aus allen Disziplinen der Mathematik, die sich mit den Berufsaufgaben des physikalischen Technikers vereinen: dort ist der Formalismus algebraischer Konstruktionen [176], die Theorie der Determinanten, der Infinitesimalkalkül, die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen, von elliptischen Funktionen und konformen Abbildungen usw. von höchster Bedeutung; hier spielen die Methoden der darstellenden Geometrie, die Parallel- und Zentralperspektive, die Photogrammetrie, [177] usw. eine ausgezeichnete Rolle, und zwar nicht allein zur Ermittlung präziser Resultate, sondern vor allem auch zur Darstellung, zur anschaulichen Wiedergabe des Problems, der Entwürfe und Konstruktionen. Soweit die Physik mathematisiert ist, so weit geht auch mathematische Erkenntnis in die physikalische Technik ein. — Da genau dasselbe auch von der chemischen und biologischen Technik zu sagen ist, so können wir uns kurz fassen: für den Techniker — mag er auf physikalischem, chemischem oder biologischem Gebiete arbeiten — hat die Mathematik so vielen intellektuellen Bildungswert, als mathematische Erkenntnis in den technischen Gestaltungsprozeß bzw. in das technische Zweck-Mittel-Denken verflochten ist.

Mathematik und Künstler. Technisches Zweck-Mittel-Denken ist aber oft auch auf das innigste mit dem künstlerischen Gestaltungsprozeß verwoben. Die Untersuchung der Frage, wieweit mathematische Erkenntnis für den schaffenden Künstler von Bedeutung ist, kann vielleicht nicht ganz ab-

---

[175] A. a. O. S. 10. 11. Vgl. die Sammlung: Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende. Hrsg. von E. Jahnke. Leipzig, B. G. Teubner.

[176] Vgl. z. B. die Betonung der Rechenschemata; Klein-Schimmack; S. 57.

[177] Vgl. Fr. Schilling: Über die Anwendung d. darst. Geometrie. 1904.

gelöst werden von dem schwierigen Problem der Ästhetik, in dem die Beeinflussung der Qualität des ästhetischen Erlebnisses durch spezifisch mathematische Faktoren (des Gegenstandes) erwogen wird. Strebt jedoch der Maler in seinem Bilde die getreue, realistische Wiedergabe des Objektes bzw. des Eindruckes an, so wird er nicht allein die grundlegenden Gesetze der Licht- und Farbenlehre, sondern auch der Raumwirkung zu beachten haben. Je mehr er sich der Darstellung architektonischer Art nähert, um so wichtiger wird für ihn die Kenntnis der Forderung perspektivischer Einheit [178] und die sichere technische Beherrschung der Zentralperspektive. Damit ist keineswegs gesagt, daß der Maler den strengen mathematischen Gesetzen unbedingt gehorchen müßte; vielmehr können Abweichungen von der Schönheit des Bildes „gefordert" sein. [179] Selbst der Porträtmaler wird dem mathematischen Studium der „Idealfiguren" manche Anregung verdanken; der Bildhauer, der Architekt aber können oft der Gesetze der darstellenden Geometrie und der Reliefperspektive kaum entbehren. So verschlingt sich mathematische Kenntnis auch in den Schaffensprozeß des Malers, Plastikers, Bildhauers und Architekten; für den Künstler hat daher die Mathematik „so vielen" intellektuellen Bildungswert, als mathematische Erkenntnis in den ästhetischen Erlebnis- und Gestaltungsprozeß verwoben ist.

Da mathematische Akte seltener in soziale, politische und religiöse Verhaltungsweisen einfließen, so sind die theoretische, die technische und die ästhetische Geisteshaltung Grundlage aller derjenigen Berufe, die besonders auch mit mathematischer Erkenntnis verflochten sind. Die Differenzierung und Spezialisierung der modernen Berufe ist aber viel intensiver von konkreten Aufgaben des Lebens als von logischen und psychologischen „Scheidungsgründen" gefordert und er-

[178] Vgl. z. B. G. Wolff: Mathematik und Malerei. Math. Bibl. Bd. 20/21.

[179] Vgl. Fr. Schilling: A. a. O. S. 152; ferner G. Wolff: A. a. O. (Dort auch die wichtigste Literatur!)

zwungen; daher sind auch diejenigen Berufe, die mehrere jener kulturellen Leistungsfähigkeiten zur Bewältigung ihrer Aufgaben erheischen, viel häufiger als solche, die nur eine bestimmte Art des Wertschaffens erfordern. Es ist im Rahmen dieser Arbeit unmöglich, die Verflechtungen der mathematischen Erkenntnis mit diesen einzelnen Berufsverzweigungen genauer zu verfolgen. Fast überall aber, wo die Erfüllung der Berufsaufgaben (unter anderem auch) ein gesteigertes Maß mathematischen Wissens und Könnens zur Voraussetzung hat, sucht die öffentliche und private Erziehung in mehr oder minder historisch bedingten Formen die Aufgabe der mathematischen Ausbildung zu lösen; die mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten zu beleben und zu üben und auch ein bestimmtes Maß von Kenntnissen zu vermitteln. Für die größte Zahl „unterer" Berufe wird die mathematische Schulung heute durch die Volks- und Fortbildungsschulen vermittelt; für die „mittleren" Berufe durch die mittleren Fachschulen (Maschinenbauschulen, Baugewerkschaften, Seefahrts- und Handelsschulen usw.); für die „höheren", „gelehrten" Berufe durch die Hochschulen (Universitäten, technische Hochschulen, Berg- und Forstakademien usw.).[180] Sollen an diesen Stätten aber nicht Spezialisten, sondern gebildete Träger und Förderer unserer Kultur erzogen werden, so wird der Unterricht eben mehr als das für den Beruf erforderliche Minimum an Kräften und Stoffen geben müssen; er muß überall zu einer gewissen Freiheit gegenüber den Berufsleistungen erziehen, die man oft „allgemeine" Bildung genannt hat.

b) Mathematik und allgemeine Bildung.

Berufsbildung und allgemeine Bildung[181] werden oft als schroffe Gegensätze einander gegenübergestellt. Wir bekennen

---

[180] Vgl. Klein-Schimmack: A. a. O., ferner die Abhandlungen der IMUK.

[181] Vgl. E. Spranger: Kultur und Erziehung, S. 25—40; ferner Ders.: Allgemeinbildung und Berufsschule. In „Die deutsche Fortbildungsschule". 29. Jahrg. S. 315.

gleich hier, daß sich für uns Beruf und Bildung nicht ausschließen wie Enge und Weite. Bildung bedeutet für uns: auf persönlicher Wesensformung beruhende kulturelle Leistungsfähigkeit; und der Beruf erscheint uns nur als der zur Selbsterhaltung und Selbstentfaltung ergriffene Ansatzpunkt der im Individuum geeinten Kräfte. Jedes Glied unserer heutigen Kultur ist so innig mit dem Gesamtzusammenhang verflochten, daß bis zu einem gewissen Grade — schon zur Sicherung der vitalen Existenz — alle kulturellen Verhaltungsweisen in ihm lebendig sein müssen.

Mathematik und formale Allgemeinbildung. Die Entfaltung aller fundamentalen Akte des theoretischen, technischen, ästhetischen, sozialen, politischen und religiösen Verhaltens ist Aufgabe der grundlegenden Bildung; zu ihr gehört also auch die Belebung und Kräftigung der mathematischen Erkenntnisakte. Grundlegende Bildung im Sinne von formaler Allgemeinbildung sollen bei uns sowohl die Volksschulen wie die höheren Schulen entfalten; soll die Arbeit der Fachschulen aber zu jener erwähnten Freiheit gegenüber den alltäglichen Erfordernissen erziehen, so wird auch hier auf die Entwicklung der fundamentalen Dispositionen größtes Gewicht zu legen sein. Dann kann der mathematische Unterricht an keiner Schule allein in der Überlieferung einzelner Kenntnisse, Lehrsätze und Methoden sein Ziel sehen; er wird vielmehr überall die Erarbeitung, die Fähigkeit der Anwendung und Umwandlung der Methoden des Rechnens, Konstruierens und anschaulichen Vorstellens betonen müssen.[182] So gehört außer der logischen Schulung unbedingt die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens zur Hauptaufgabe eines jeden mathematischen Unterrichtes.[183]

Unsere Volksschulen können die Entfaltung mathematischer

[182] Vgl. W. Lietzmann: Methodik ... I. S. 47.
[183] Klein-Schimmack: A. a. O. S. 6.

Grundakte kaum ganz erreichen, da sie zu einer Zeit den Schüler entlassen, in der gerade die wirksame Entwicklung der geistigen Kräfte einsetzt. Unsere „höheren" Lehranstalten dagegen haben — schon durch die längere Ausdehnung der Schulzeit — die Möglichkeit der Entfaltung aller mathematischen Fundamentaldispositionen und darüber hinaus, wenn Begabung und Interesse im Schüler vorhanden sind, auch der Entwicklung der spezifisch mathematischen Geisteshaltung. Grundlegende Bildung aber bleibt auch hier alles; weil der Schüler ja nur bis an den Punkt der selbständigen Berufswahl geführt wird, mit dem dann die persönliche Bildungsbahn beginnt. Ist aber die Entscheidung zum Beruf aus innerer Neigung getroffen, dann bildet der berufliche Aufgabenkreis gleichsam das Zentrum, von dem aus alle Bildungsbestrebungen beeinflußt werden.[184] Da die Begabungen sich merklich erst in den Pubertätsjahren differenzieren, so sollte keineswegs früher die Erziehung zu einem bestimmten Beruf einsetzen. Und auch dann wird die schulmäßige Berufsvorbildung immer einen ganzen Kreis zusammenhängender Probleme und verwandter Berufe zur Grundlage ihrer Bildungsbestrebungen nehmen müssen, wenn sie wirklich erfolgreich für das hin und her flutende Leben in der Kultur vorbereiten will.

Mathematik und materiale Allgemeinbildung. Die so brennende Frage: An welchem Erkenntnisstoff soll heute und morgen die geistige Leistungsfähigkeit entfaltet, die formale oder grundlegende Bildung belebt werden? erhebt sich wegen des dauernden, d. h. stetigen Kulturwandels immer von neuem.[185] In Einzelheiten ist sie kaum erwogen und beantwortet, da erscheint auch schon die gegebene Lö-

---

[184] G. Kerschensteiner: Das Grundaxiom ... S. 40; ferner E. Spranger Allgemeinbildung u. Berufsschule. A. a. O. S. 322.

[185] Vgl. Klein-Schimmack: A. a. O. S. 4. (In dieser Arbeit S. 146 zitiert.) Vgl. W. Lietzmann: Einfluß der Kriegserfahrungen auf den mathematisch-physikalischen Unterricht. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. 1919. S. 252.

sung veraltet; nur die ewigen Richtlinien für das Suchen und Finden dieses Bildungsmateriales bleiben die gleichen. Auf sie können wir daher auch nur hier den Blick lenken. Wir haben bereits gesehen, wie sehr die Beurteilung des materialen intellektuellen Bildungswertes der Mathematik von subjektiven Faktoren (Struktur, Entwicklungsstufe) und von objektiven Momenten (Kultur- und Individuallage) abhängig ist. Alle diese Erscheinungen spiegeln sich wieder, wenn die einzelnen Menschen sich zur Frage der Bedeutung der Mathematik für die allgemeine Bildung äußern.

In dem wechselnden Schatz der Kulturgüter scheinen die so wohl und fest gefügten mathematischen Wahrheiten oft das einzig „Beständige" zu sein, das dauernden, ewigen Wert hat. Wir wissen, daß ein rein mathematischer Unterricht eine Fülle geistiger Kräfte entfalten kann. Der reine Mathematiker hat beides erlebt: die Sicherheit seiner Erkenntnis und die hohe Entfaltung seines Wesens in der Arbeit. Er wird es immer wieder sein, der seine Wissenschaft in möglichster Strenge auf allen Stufen aller Schulen lebendig sehen möchte. „Der mathematische Unterricht der Schule muß ein tiefes Eindringen und volles Beherrschen der abstrakten mathematischen Theorie und eine klare Einsicht in den Aufbau des Systems als erstes erstreben. Ein Unterricht, der das erreicht, kann auch bei starker Vernachlässigung der praktischen Anwendungen wertvoll und interessant sein. . . ." „Ich halte deshalb, auch ohne Rücksicht auf die Anwendungen, die Mathematik an unseren höheren Schulen für gleichwertig mit den übrigen Bildungsgebieten."[186] Ja, der Unterricht bewegt sich hier möglichst nur im Gebiet des rein arithmetischen und rein geometrischen Bereiches.

Gewiß, dieser Weg führt auch zu allgemeiner Bildung; aber nur einer kann ihn beschreiten mit der Gewißheit, keinen Um-

[186] E. Götting: Über das Lehrziel im mathem. Unterricht . . ., in F. Klein und E. Riecke: Neue Beiträge zur Frage des mathem. und physik. Unterrichtes . . . 1904. S. 52.

weg zu gehen und das Ziel sicher zu erreichen: der Mathematiker selbst. Und er geht nur sicher, weil er bereits jene Beweglichkeit des Geistes gegenüber den Forderungen seiner Arbeit besitzt, die ein Schüler noch erwerben will. Es ist einfach eine psychologische Unmöglichkeit, wie unsere Darlegungen über den formalen intellektuellen Bildungswert zeigen, daß eine Auswahl rein mathematischer Erkenntnis zur Grundlage der Belebung der geistigen Kräfte gemacht werden kann; und auch die Stoffauswahl kann nicht so getroffen werden, als ob später alle Schüler Mathematik studieren wollten.

Ganz anders gestaltet und färbt sich schon das Bild, wenn wir den Naturforscher nach den Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Bildung fragen. Er sieht auf das engste Mathematik und Naturwissenschaften verschmolzen; beide erscheinen ihm von höchster Bedeutung für die allgemeine Bildung. Daher sollen nach seiner Meinung Mathematik und Physik (Chemie, Biologie) im Unterricht der Schule Hand in Hand gehen. Er wünscht entweder, daß der „Mathematikunterricht durch die anschaulichen Anwendungen belebt und der Physikunterricht durch Aufsuchung der denknotwendigen Zusammenhänge gestärkt“[187] werde, oder daß gar die Mathematik mit den Naturwissenschaften verschmilzt (Konzentration). In diesem Sinne schreibt Seeger: „Die fünf Fächer — Rechnen, Geometrie, Arithmetik, Physik und Chemie — sind nur fünf Teile eines einzigen zusammenhängenden Unterrichtes, von denen die einen den für die anderen erforderlichen Übungsstoff herbeischaffen und dafür wiederum von diesen die Mittel zu eigenem Vorwärtsschreiten zurückempfangen.“[188] Eine Methode soll auf mehrere Probleme, mehrere Methoden aber auch auf ein Problem angewandt werden. Die graphische Darstellung funktionaler Abhängigkeiten und das Infinitesimalverfahren sind dann un-

[187] H. E. Timerding: Die Mathematik in den physikal. Lehrbüchern. S. 2.
[188] Zitiert nach N. Geuther; IMUK. I 4. S. 58.

entbehrlich für jede höhere allgemeinbildende Schule. „Die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung" — so schreibt Klein — „lassen sich zu einem klaren Erfassen zahlreicher physikalischer Tatsachen gar nicht entbehren; und sie sind vom Standpunkt des Prinzips der Allgemeinbildung eines der wesentlichen Stücke des mathematischen Unterrichtes."[189] Die Mathematik, „soweit sie der Anwendung fähig ist," wird entschieden in den Vordergrund gestellt; alles rein Formalistische wird gemieden oder abgelehnt.[190]

Den rechten Sinn glaubt aber erst der Techniker jenem Wort von der Anwendung mathematischer Erkenntnis zu verleihen; für ihn steht fest: „Wir stehen am Beginn einer neuen Zeit, die ihr Gepräge von der Technik erhält."[191] Daher bildet für ihn technisches Wissen und Können den Kern der allgemeinen Bildung. So fordert er für den Schulunterricht die Auswahl „ökonomischer" Rechen- und Konstruktionsmethoden, vor allem aber mathematische Methoden, die für die Technik von größter Wichtigkeit sind. Denn die mathematischen Unterrichtsfächer sollen nicht allein einen Ausschnitt der angewandten mathematischen Wissenschaft sein, sondern vor allem ein Stück Leben, d. h. hier: Technik selber bieten. So ist in seinen Augen der allgemeinbildende Wert des mathematischen Unterrichtes nicht entbunden, wenn die darstellende Geometrie im engeren Sinne (Linearzeichnen; orthogonale und Zentralperspektive) und die Anfertigung mathematischer Modelle (darstellende Geometrie im weiteren Sinne), wenn praktische Astronomie und Feldmessung außerhalb des Rahmens der Schulmathematik stehen. Es soll im Unterricht „manuell" gearbeitet werden; und wenn die Mathematik den technischen Problemen nicht beikommen kann, dann verzichtet man gern auf ihre Hilfe. Man will „die physikalischen Erscheinungen nicht durch eine Wolke analytischer Symbole betrachten".[192]

[189] F. Klein-Schimmack: A. a. O. S. 115.
[190] Vgl. z. B. IMUK. I 4. S. 27—28. 41—44.
[191] E. Jahnke: A. a. O. S. 22. [192] H. E. Timerding: A. a. O. S. 22.

Die Einseitigkeiten in der Auffassung der Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Bildung, die aus jenen gezeichneten Standpunkten des Mathematikers, des Naturforschers und des Technikers noch heraustreten, werden erst überwunden durch die kulturphilosophische Erwägung des Problems.[193] Der Kulturforscher sieht nicht das System mathematischer Wahrheiten in strengem Begründungszusammenhang isoliert und ewig unwandelbar dastehen; vielmehr erschaut er überall die innige Verbindung der Mathematik mit allen Forschungszweigen und Kulturgebieten. Ja, er fühlt die Fäden nicht nur heute im Gewebe der Kultur; sondern er erblickt einen lebendigen Organismus überindividueller Art, in dem an keiner Stelle eine Änderung geschehen kann, die nicht alsbald in alle Teile des lebendigen Kulturganzen ausstrahlt. Wenn er von allgemeiner Bildung redet, so meint er mehr das bewußte Erfassen und Sichselbsteinordnen mit schaffender Tat in jenen Kulturzusammenhang; diese allgemeine Bildung aber hat zur Voraussetzung die Entfaltung aller Grundakte (grundlegende Bildung!) und die Einsicht in jenen Totalzusammenhang. Diese Einsicht in die Stellung der Mathematik im Kulturganzen kann in unseren Schulen nur angebahnt werden; sie muß aber auch erstrebt werden. Sie kann nur angebahnt werden, weil ein volles Verstehen erst am Ende eines langen Bildungsganges liegt und daher immer über den Beruf führt; sie muß um so notwendiger auch im mathematischen Unterricht erstrebt werden, je mehr die Fülle der Kulturgüter und Kulturleistungen zu einer Differenzierung unseres höheren Schulwesens treibt.

Von hier aus fällt auf die Forderungen des Mathematikers, Naturforschers, Technikers ein neues Licht; ihre richtige Tendenz wird gleichsam vom höheren Standpunkt aus aufgenommen, gerechtfertigt und vertreten. Der Unterrichtsstoff soll ein kulturgemäßer Ausschnitt aus dem Leben, dem Leben der

---

[193] Die Arbeiten von F. Klein erstreben immer gerade diesen Standpunkt; vgl. Klein Schimmack: A. a. O., Klein-Riecke: A. a. O.

mathematischen, naturwissenschaftlichen und historischen Forschung, der Technik und der Kunst sein; seine Erarbeitung nicht in „rein" theoretischer Einstellung, sondern durch alle berechtigten und pädogogisch geforderten Verhaltungsweisen geschehen.

Dabei wird die kulturwissenschaftliche Einstellung gegenüber mathematischen Problemen im Unterricht selbst von Bedeutung.[194] Der Einblick in das historische Werden erhöht überall in ganz bestimmtem Sinn das Verständnis des Gewordenen;[195] mag das eine spezielle Fragestellung oder eine Disziplin betreffen; d. h. mögen wir z. B. die Quadratur des Kreises oder die Entwicklung der Infinitesimalrechnung historisch beleuchten. Die Bedeutung der physischen Ausdrucksseite der mathematischen Forschung wird bei historischer Betrachtung dem Schüler bald klar;[196] die Beziehung zwischen arithmetischen und geometrischen Disziplinen, zwischen mathematischen Forschungen und naturwissenschaftlichen oder technischen Problemen wird deutlich herausgestellt. Da hier auch die „persönliche" Seite der Forschung durch einen fruchtbaren Blick auf die Kulturträger zur Geltung kommt, dringt „menschliche Wärme" in die sachliche Unterrichtsarbeit, und selbst das Interesse des für Mathematik weniger Begabten kann entflammen.[197]

Auch an den Fachschulen kann diese allgemeine Bildung nur angestrebt werden. Dazu aber wird „jede dieser Schulen entsprechend ihrem eigentümlichen Mittelpunkt einen bestimmten Bildungstypus zu entwickeln"[198] haben, der „dem organischen Gange der inneren Bildung, nicht nur der gegebenen individuellen Seelenstruktur des Zöglings, kongruent ist. Oder anders ausgedrückt: die Art, wie sich Berufsbildung

[194] M. Gebhardt: Die Geschichte der Mathematik im mathem. Unterricht der höheren Schulen Deutschlands. IMUK. III 2.

[195] Vgl. A. Riehl: Humanistische Ziele ... S. 31.

[196] M. Gebhardt: A. a. O. S. 89. [197] A. a. O. S. 105.

[198] E. Spranger: Kultur u. Erziehung. S. 34.

und Allgemeinbildung durchschlingen, gegenseitig tragen und beleben, vor allem, wie die allgemeinen Interessen aus der Eigenart des Berufskreises herauswachsen, das muß jede Schulgattung mit eigener Schöpferkraft entdecken und in Form eines spezifischen Bildungsplanes herausstellen".

Der Verlauf der Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform[199] zeigt uns, daß es vorwärts und aufwärts zu diesem Ziele geht. Doch stehen wir — wie Timerding[200] bemerkt — erst am Anfang einer neuen Entwicklung des mathematischen Bildungswesens. Uns fehlt immer noch jene „eigentliche didaktische Mathematik"; d. h. eine „die modernen Errungenschaften voll verwertende, frei und unabhängig schaffende Wissenschaft, deren Aufgabe die Nutzbarmachung der Mathematik für die allgemeine Bildung ist".[200] So stehen wir „vor einer großen Aufgabe, die aber einstweilen der Zukunft angehört: der wirklichen Durcharbeitung der Mathematik in ihrer erzieherischen Bedeutung".[200] Und doch — diese Aufgabe darf nicht der Zukunft angehören; vielmehr sollte die Besinnung über die Wege zu ihrer Lösung die tägliche Erziehungsarbeit eines jeden Mathematiklehrers befruchten.

Nur hinsichtlich der prinzipiellen Fragen, die den formalen und materialen intellektuellen Bildungswert der Mathematik betreffen, können wir hoffen, eindeutige Antworten zu finden. Und von hier aus allein läßt sich dann allem unberechtigten Subjektivismus[201] in Sachen der Didaktik der Mathematik erfolgreich der Boden nehmen. Auch diese vorliegenden Betrachtungen können in Einzelfragen keine optimalen Darstellungen sein; doch hoffen sie, die Verschlingung der Probleme in dem großen Totalzusammenhang der Kultur aufgewiesen zu haben; sie können keine spezielle Didaktik der Mathe-

[199] Vgl. R. Schimmack: Die Entwicklung der mathem. Unterrichtsrefom. IMUK. III. Teil. I 1.

[200] H. E. Timerding; Die Verbreitung ... S. 55, 54.

[201] Vgl. z. B. IMUK. I 4. S. 20 (Lehrbuchfrage); S. 22 (Modell); S. 33 (Kegelschnitte).

matik überflüssig machen, höchstens als Prolegomenon zu ihr dienen.

Der mathematische Unterricht trägt demnach zur Entfaltung der allgemeinen Bildung des einzelnen genau soviel bei, als er ihn befähigt, sich in jenen kulturellen Totalzusammenhang schaffend hineinzustellen. Nicht die Vielheit der Stoffe an sich sichert dem Unterricht die Erreichung dieses Zieles; denn *πολυμαθίη νόον οὐ διδάσκει*, wie schon Heraklit erkannte sondern erst die einheitliche Verschmelzung des Stoffes zu einem Ganzen, das auf die Ganzheit einer entsprechenden Individualität wirkt. Vermittelnd aber steht zwischen der Welt der Kulturgüter und der wachsenden Kraft des jugendlichen Geistes die Kunst des Lehrers, die in der Auswahl und einheitlichen Zusammenfassung der Bildungsgüter einerseits und in der sicheren Erkenntnis der individuellen Struktur andererseits hervortritt, und die jede letzte Entscheidung darüber, „wie äußere Not und inneres Bedürfnis in einem einheitlichen Bildungsideal befriedigt werden sollen“[202], immer wieder aus „den Weisungen einer vollbewußten Kulturgesinnung“[202] strömen läßt.

Daß der mathematische Unterricht in so hohem Grade zur Belebung allgemeiner Bildung beitragen kann, das liegt vor allem auch daran, daß in ihm — außer den betrachteten formalen und materialen intellektuellen Bildungswerten — noch eine Reihe anderer Erziehungswerte ruhen. Wir meinen die ökonomisch-technischen und die ästhetischen Bildungswerte, deren Entfaltung in unseren Schulen zumeist nicht das Ergebnis zielbewußter pädagogischer Arbeit, sondern mehr eine Folge der inneren Tendenz des mathematischen Stoffes selbst ist, der zu seiner Bewältigung und Durchdringung technischer (und ästhetischer) Akte nicht entbehren kann. Im folgenden sei nun unsere Aufgabe die kurze

[202] Th. Litt: Pädagogik (Kultur der Gegenwart). S. 305.

b) Betrachtung einiger anderer Bildungswerte der Mathematik.

Darin wurzelt ja die Sonderart der einzelnen Unterrichtsfächer, daß man in einem beliebigen von ihnen nicht alle möglichen Erziehungswerte in gleicher Weise entfalten kann. Vielmehr hat jedes Schulfach seine spezifischen, d. h. nur ihm zukommenden Bildungswerte. Und diese werden um so stärker hervortreten, je mehr in dieser Disziplin eine ganz bestimmte Art unserer kulturellen Leistungsfähigkeit sich auswirkt. Wieweit außer solchen spezifischen Bildungswerten noch andere gleichsam heterogene Bildungswerte in einem bestimmten Unterrichtsfach zur Entfaltung kommen können, das bedarf für die einzelnen Disziplinen genauer Untersuchung. Die mathematischen Wahrheiten liegen in der ideellen Sphäre; in unseren Erkenntnisprozessen treten wir gleichsam in jenes Reich hinein. Dabei mischen sich unter die reinen Denkakte, wie wir sahen, je nach der Art der Gegenstände und der individuellen Struktur des Mathematikers technisch-ökonomische und ästhetische (ja sogar religiöse) Akte. Es steht also außer aller Frage, daß auch der mathematische Unterricht technische und ästhetische Dispositionen beleben kann. Es kann sich für uns nur darum handeln, jene technischen und ästhetischen Akte zu finden, die ganz besonders innig mit der mathematischen Arbeit verflochten sind. Denn offenbar kommt auch nicht die Gesamtheit technischer und ästhetischer Verhaltungsweisen in Frage; sonst wäre die Mathematik — die uns als so hoch entwickelte Wissenschaft erschien — ja zugleich die Technik und die Kunst.

I. Vom technisch-ökonomischen Bildungswert der Mathematik.

Der technische Bildungswert der Mathematik beruht darauf, daß in der mathematischen Arbeit fundamentale technische Funktionen und auch die spezifisch ökonomische Geisteshaltung belebt werden können.[203] Auch hier kann man von materialen und formalen technischen Bildungswerten reden. Bedeutet die Technik für uns „die Unterordnung wissenschaftlich erkannter Zusammenhänge unter das Wertgesetz der Nützlichkeit und der zweckbezogenen sparsamsten Wahl der Mittel“[204], so liegt der materiale technische Bildungswert der Mathematik in der Ausführung ganz bestimmter Zeichnungen, Konstruktionen und Modelle; der formale technische Bildungswert aber zunächst in der Übung der fundamentalen technischen Akte — d. h. der elementaren Tätigkeiten, „aus denen sich jede noch so verwickelte technische Zweckhandlung aufbaut“ — und sodann in der Entfaltung der spezifisch ökonomischen Geisteshaltung, die jede kulturelle Betätigungsweise schließlich bewußt nach dem Ökonomieprinzip regeln, verlaufen lassen möchte.

Schon bei der Auffassung realer Gegenstände nach mathematischen Gesichtspunkten sind unsere Erkenntnisakte in mannigfaltiger Weise mit praktischen Betätigungen verflochten. Zur sinnlichen Wahrnehmung mathematischer Zeichen, Symbole, Figuren, Modelle ist oft nur die Bewegung des eigenen Körpers (des Auges, Kopfes, der Hand usw.) erforderlich; schon in dieser zweckbestimmten Benutzung körperlicher Organe liegen gewisse technische Grundakte[205], die aber schließlich nicht dem mathematischen Gebiet allein zugehören. Soweit sie aber speziell der Auffassung mathematischer Gebilde zugeordnet sind, herrscht doch noch nicht volle Übereinstimmung in ihrer Deutung und Abgrenzung.[206]

---

[203] Der technische Bildungswert der Mathematik ist wohl zu unterscheiden vom intellektuellen Bildungswert für den Techniker! (Vgl. S. 166 dieser Arbeit.)

[204] E. Spranger: Gedanken über Lehrerbildung. S. 11, 27.

[205] Vgl. W. Dieck: Stoffwahl und Lehrkunst ... 1918. S. 145. (Das „praktische“ Aufschlagen der Logarithmen).

[206] Vgl. K. Bühler: Die Gestaltwahrnehmungen. 1913. P. F. Linke: Grundfragen der Wahrnehmungslehre. 1918.

Gewöhnlich aber bedarf es zu einer genaueren Auffassung der Gegenstände nach mathematischen Beziehungen doch auch einer Änderung der Lage, einer Umgruppierung usw. Schon die einfache Beobachtung des mit Rechenpfennigen oder Stäbchen hantierenden Kindes, des an Muscheln oder Steinen zählenden Primitiven, des die Erscheinungen mit Hilfe von Mikroskop, Teleskop usw. nach arithmetischen und geometrischen Beziehungen beobachtenden Forschers zeigt, daß die Verflechtung mathematischer Erkenntnis mit technischen Akten eine nach Art des Arbeitsgebietes so vielseitige und weitgehende ist, daß unsere Darlegung diesen Verschlingungen nicht überall folgen kann. Wir schließen also die Beleuchtung der in den Anwendungsgebieten der Mathematik (z. B. in der Geodäsie, Photogrammetrie usw.) auftretenden technischen Akte aus, beschränken uns mehr auf diejenigen mit der Darstellung mathematischer Gebilde selbst zusammenhängenden Akte.

Je nach der Art dieser Gegenstände sind die technischen Akte ihrer Darstellung verschieden; d. h. je nachdem, ob es sich um die Darstellung eines arithmetischen oder geometrischen Zeichens (Symboles) oder einer Figur (Abbildung) oder eines Modelles handelt. Auch auf die Technik der Darstellung mathematischer Zeichen (Ziffern, Symbole) wollen wir hier nicht eingehen; nur erwähnen, daß seit den Tagen von A. Dürer schon die Zurückführung der Schreibkunst auf die Elemente der Zeichenkunst — und damit auf geometrische Grundformen — versucht worden ist.[207]

Vor allem ist es die Darstellung geometrischer Gebilde[208], die durch eine Fülle technischer Akte verwirklicht wird. Wir denken zunächst an das geometrische Zeichnen. Der Verlauf

[207] Vgl. H. E. Timerding: Die Erziehung der Anschauung. 1912. S. 16.

[208] Vgl. P. Zühlke: Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie. IMUK. III 3. S. 45, 59, 71. Fr. Schilling: Über das Linearzeichnen an den höheren Schulen und sein Verhältnis zum Freihandzeichnen. Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. ... S. 113.

des Zeichenprozesses wird — abgesehen von der Geschicklichkeit des Zeichners — wesentlich beeinflußt von der zu lösenden Aufgabe und den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln. Jedes neue Hilfsmittel des geometrischen Zeichnens will erst allein praktisch probiert sein; das gilt von Lineal, Zirkel, Dreieck, Ellipsenapparat, Kegelschnittschablone, Kurvenlineal usw. Die Lösung der zusammengesetzten Aufgabe verläuft dann ganz anders, wenn nur eines oder aber mehrere jener Hilfsmittel zur Benutzung gestattet sind; wenn etwa noch einschränkende Bedingungen für die Ausführung der Konstruktion gegeben sind, z. B. die Beschränkung der Zeichenebene oder die Forderung des Minimums der Konstruktionsschritte. Nach J. Steiner[209] kommt es bei jeder geometrischen Aufgabe darauf an, festzustellen, auf welche Weise sie „theoretisch oder praktisch, am einfachsten, genauesten oder sichersten konstruiert werden" kann, und „zwar 1. welches im allgemeinen, 2. welches bei beschränkten Hilfsmitteln und 3. welches bei obwaltenden Hindernissen das zweckmäßigste Verfahren" der Konstruktion ist. So werden beim geometrischen Zeichnen nicht nur eine Fülle technisch-zeichnerischer Grundakte entfaltet, sondern zugleich wird auch die ökonomische Geisteshaltung belebt. — Eine ganze Zahl neuer technischer Akte fließt in den mathematischen Erkenntnisprozeß, wenn die Darstellung der geometrischen Gebilde als Modell erfolgt.[210] Das geometrische Zeichnen verbindet sich dann vielleicht mit dem Ausschneiden und Kleben (Papp- und Holzarbeiten); oder die Modelle werden aus Stäben (Drahtarbeiten), aus Plastilin, Ton, Gips hergestellt.

[209] J. Steiner: Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und einem festen Kreise als Lehrgegenstand ... Ges. Werke. I. S. 510; dazu W. Lietzmann: IMUK. I 1. S. 30—32; ferner D. Grüttner: Die Zerlegung geom. Zeichnungen in Konstruktionselemente und ihre Anwendung bei der Lösung von Aufgaben. Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. 39. Jahrg. S. 256.

[210] W. Reichel: Mathematischer Werkunterricht. Leipzig 1914. K. Giebel: Die Anfertigung mathem. Modelle. Mathem.-phys. Bibliothek. Bd. 16.

Das Prinzip der Ökonomie macht sich aber nicht allein in der anschaulichen, geometrischen Konstruktion geltend, sondern — wie wir bereits im ersten Teil der Arbeit bemerkten — auch in den abstrakten arithmetischen und geometrischen Beweisgängen. Wir brauchen nur an den Vorteil des Positionssystemes, des Formalismus z. B. der Determinanten zu erinnern, um zu belegen, daß auch die physische Seite mathematischer Ausdrücke von ihm beeinflußt wird; dazu bleibt es das ständige Bestreben des Forschers, die Reduktion eines einmal gelungenen Beweisganges auf das Minimum der Denkschritte zu vollführen.

So kann der mathematische Unterricht eine Reihe formaler technischer Bildungswerte zur Entfaltung bringen. „Die Aufgabe dessen, der diese Bildungswerte lebendig machen will, geht dahin, alle bloße Routine zu verhüten und ein volles Bewußtsein von dem Verhältnis zwischen Arbeitsziel, Handgriff, Werkzeug und Material zu erzeugen, so daß die betreffende Übung ein beseelter Prozeß wird, der umgeschaltet werden kann, wenn etwa nur einer der vier Faktoren sich ändert."[211] Der reinliche Vollzug der Grundakte ist, genau wie im Denkprozeß, auch hier die Voraussetzung für das Gelingen der Ausführung komplexer technischer Aufgaben; der Weg wird auch hier „vom Einfachen zum Zusammengesetzten", vom „Leichten zum Schweren" gehen müssen.

Der mathematische Unterricht kann aber auch materialen technischen Bildungswert besitzen, wenn in ihm ganz bestimmte Methoden des Zeichnens, Modellierens geübt werden, die zumeist auch außerhalb des mathematischen Gebietes von Bedeutung sind; z. B. horizontale, vertikale und schräge Parallelprojektion; Zentralperspektive, Schattenlehre; Graphostatik usw.

Über die Notwendigkeit der Entfaltung der technischen Grundakte, die im Unterricht das Verständnis des mathemati-

---

[211] E. Spranger: Gedanken ... S. 11; vgl. IMUK. IV 3. S. 73—85.

schen Stoffes erleichtern, sind sich die Lehrenden ziemlich klar; der Schüler soll zur Sauberkeit und Exaktheit in der Ausführung der Zeichnungen und in der Konstruktion von Modellen ebenso erzogen werden, wie zur Präzision im Urteil. Der Techniker hält es auch für unbedingt notwendig, daß in dem Lehrstoff unserer allgemeinbildenden Schulen „die praktische Geometrie der arbeitenden Kreise“ [212] ausreichende Beachtung findet gegenüber der „sportsmäßigen Geometrie der vornehmen Müßiggänger“; [212] ja er fordert für die Elementarschulen geradezu eine „physikalische“ Geometrie. bzw. eine „technische“ Geometrie, die den Beweis meidet und sich dafür auf die Beweiskraft der anschaulichen Figur stützt [213] und sich zum anderen überall im Bereich des technisch Anwendbaren hält. Der Schüler soll lernen, „Formen in der Zeichnung darzustellen“ und umgekehrt „Formen aus der Zeichnung“ zu verstehen. [214] Der Unterricht soll für das praktische Leben, für das Handwerk und Kunsthandwerk, für die Technik vorbereiten. — Der Forscher, besonders der reine Mathematiker wird die „Technisierung der Mathematik“ für die allgemeinbildenden Schulen ablehnen. „Die eigentliche Technik gehört nicht auf die Schule; sie kann nützliche Beispiele liefern, um das Interesse der Schüler zu wecken, aber nicht Zweck des Unterrichtes sein.“ [215] Die Frage, wieweit in den einzelnen Schularten technische Momente (als Unterrichtsmethoden, z. B. die Laboratoriumsmethode, oder als Unterrichtsstoffe, z. B. die Projektionslehre) in den Mathematikunterricht eindringen sollen, wird nicht von dem einseitigen Standpunkt des reinen Mathematikers oder Technikers zu betrachten sein; die Entscheidung kann auch hier nur fallen aus den Weisungen einer

[212] So H. E. Timerding: Die Erziehung der Anschauung. 1912. S. 33.

[213] Die Ausführungen im ersten Teil dieser Arbeit zeigen, daß die mit so vieler Wärme vorgetragenen Darlegungen Timerdings für uns die Möglichkeit einer „technischen“ Geometrie neben der wissenschaftlichen nicht erwiesen haben; es gibt nur eine Mathematik, nur eine Geometrie.

[214] H. E. Timerding: A. a. O. S. 39.

[215] F. Lindemann: Lehren und Lernen in der Mathematik. S. 17.

vollbewußten Kulturgesinnung, die jene heterogenen Tendenzen in Hinblick auf Begabung und Individuallage des Schülers auszugleichen weiß. — Nach diesem kurzen Ausblick auf den technisch-ökonomischen Bildungswert der Mathematik handeln wir noch

II. Vom ästhetischen Bildungswert der Mathematik.

Wenn wir vom ästhetischen Bildungswert der Mathematik reden, so meinen wir nicht den intellektuellen Bildungswert der Mathematik für den schaffenden Künstler, für den schauenden Betrachter oder den ästhetischen Kritiker;[216] vielmehr ein in der mathematischen Forschung und Darstellung selbst liegendes Moment, das die Grundlage für die Entfaltung ästhetischer Akte bietet. O. Spengler hat neuerdings die Mathematik nicht nur eine „Wissenschaft strengsten Stiles", sondern zugleich eine „echte Kunst neben Plastik und Musik" genannt; damit ist auf ein in der mathematischen Forschung liegendes ästhetisches Moment deutlich hingewiesen.

Auf ästhetischem Gebiet eignet der höchste Bildungswert „denjenigen Eindrücken, an denen das Erlebnis der Form aufblitzt; vielleicht ist Form nichts anderes als das Gesetz der werterlebenden Seele selbst".[217] So meint auch Hans Thoma: „Die Harmonie, die Schönheit liegt nicht in der Welt da draußen, sie ist nur eine Fähigkeit der Seele, das zu empfangen, was die Sinne ihr zuführen."[218] Doch wird die psychologische Analyse Bedingungen des ästhetischen Erlebnisses sowohl auf der Seite des sinnlichen oder anschaulichen Objektes wie auf der Seite des erlebenden Subjektes auffinden.[219]

Das ästhetische Erlebnis löst sich zunächst an konkreten

---

[216] Vgl. S. 168 dieser Arbeit.

[217] E. Spranger: Gedanken ... S. 14.

[218] Zitiert nach J. A. Beringer: Thoma, der Malerpoet. München. S. 16.

[219] Vgl. M. Geiger: Ästhetik. In „Die Kultur der Gegenwart". 1921. S. 317, 321, 343—344.

Gegenständen aus, die auch gewissen Anforderungen mathematischer Art (hinsichtlich ihrer Gestalt, Größe, Lage usw.) genügen müssen. Wenn diese Bedingungen auch bei anschaulich vorgestellten mathematischen Gebilden oder sinnlichen Darstellungen solcher erfüllt sind, so kann ein ästhetisches Erlebnis aufleuchten, falls eben die subjektive Empfänglichkeit da ist. Auf der Seite des Stoffes lassen sich einfachste ästhetische Grundformen herausheben, die man als Regelmäßigkeit, Proportion, Symmetrie usw. bezeichnen mag;[220] ihnen entsprechen im Subjekt letzte elementare ästhetische Akte, in denen jene Grundformen erlebt, beseelt werden. „Jedes einzelne Formerlebnis ist abhängig von der Formkraft der eigenen Seele." [221]

Vom ästhetischen Bildungswert der Mathematik können wir nur sprechen, soweit die mathematischen Gebilde ästhetische Erlebnisse in uns erregen können. Gesetzmäßig konstruierte Kurven oder gebrochene Linienzüge, regelmäßige ebene Figuren (Kreis, Quadrat, gleichseitiges Dreieck usw.), reguläre Polyeder, perspektivische Darstellungen mögen im Geometrieunterricht Grundlage für die Belebung ästhetischer Akte sein;[222] erst ganz allmählich aber wird der empfängliche Schüler empfinden, daß „gotische Dome und dorische Tempel steingewordene Mathematik" sind[223], daß das „Formgefühl des Bildhauers, Malers, Tondichters ein wesentlich mathematisches" ist.[223] — Selbst in den arithmetischen Denkprozeß können sich ästhetische Erlebnisse einlagern; wir erwähnten bereits das Feingefühl für größere Zusammenhänge arithmetischer und geometrischer Art, auch die Vorliebe des Mathematikers für die Eleganz der Methoden. „Das Verfahren der Mathematik ist synthetisch, künstlerisch gesprochen: Komposition." [223] Daher sind die größten mathematischen Denker

---

[220] Eine Abgrenzung ästhetischer Grundbegriffe ist hier nicht möglich.
[221] E. Spranger: Gedanken ... S. 14.
[222] Vgl. H. E. Timerding: A. a. O. S. 54, 78.
[223] O. Spengler: Der Untergang des Abendlandes. S. 84, 91, 102, 85, 98.

„bildende Künstler im Reich der Zahlen".[223] Besonders lebhaft hat O. Spengler die Verwandtschaft der Formensprache der Mathematik mit der der benachbarten großen Künste empfunden und ausgesprochen.

So führt auch durch die Mathematik — selbst in ihrer strengen Form — ein Weg in die Kunst; doch wird er nur wenigen bis zur Höhe gangbar sein. Timerding hat uns manchen Hinweis auf die Belebung des ästhetischen Bildungswertes im mathematischen Unterricht gegeben;[224] allein „dem späteren Künstler können wir nichts anderes geben wie geformtes Erlebnismaterial".[225] Und „man muß sich hüten, das für Bildungswert des ästhetischen Schaffens hinzunehmen, was in Wahrheit nur Anleitung zur künstlerischen Technik[225] ist". Diese künstlerische Technik im Gebiet des geometrischen Zeichnens und Konstruierens mag durch die „praktische Geometrie der arbeitenden Kreise" vielen zugänglich werden; in das Reich der Schönheit mathematischer Ideen, von dem der Forscher immer wieder begeistert kündet[226], führt sie nicht. „Von Goethe stammt das tiefe Wort, daß der Mathematiker nur insofern vollkommen sei, als er das Schöne des Wahren empfinde."[227] Und diese Zahlengebilde höherer Ordnung setzen keineswegs — wie Spengler meint — „um in ihren letzten metaphysischen Gründen durchschaut zu werden, eine visionäre Erleuchtung voraus"; dennoch muß man diese „Schöpfungen wie das Innere eines Domes, wie die Verse der Engel im Faustprolog oder eine Kantate von Bach auf sich wirken lassen, wozu es glücklicher und seltener Stunden bedarf. Nur wer dies vermag, und es wird immer nur eine sehr kleine Zahl reifer Geister sein, begreift Plato, wenn er die ewigen Ideen seines Kosmos ‚die Zahlen' nannte".[226]

---

[224] Vgl. Timerding: A. a. O. S. 54—90.

[225] E. Spranger: Gedanken ... S. 14.

[226] Vgl. z. B. L. Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie. Leipzig-Berlin 1921.

[227] O. Spengler: A. a. O. S. 92.

Verzeichnis der öfter erwähnten Werke.

Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Hrsg. von F. Klein. 5 Bde. Leipzig-Berlin. (Zitiert als IMUK-Abhandlungen.) — N. Ach: Über die Erkenntnis a priori, insbesondere in der Arithmetik. Leipzig 1913. — K. Bühler: Die Gestaltwarnehmungen. Stuttgart 1913. — Ders.: Die geistige Entwicklung des Kindes. 2. Aufl. Jena 1921. — B. Branford: Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Deutsch von R. Schimmack und H. Weinreich. Leipzig-Berlin 1913. — E. Cassirer: Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin 1910. — J. Cohn: Voraussetzungen und Ziele des Erkennens. Leipzig 1908. — Ders.: Geist der Erziehung. Leipzig-Berlin 1919. — L. Couturat: Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch von C. Siegel. Leipzig 1908. — R. Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? 4. Aufl. Braunschweig 1918. — Ders.: Stetigkeit und irrationale Zahlen. 4. Aufl. Braunschweig 1912. — W. Dieck: Stoffwahl und Lehrkunst im mathematischen Unterricht der Unter- und Mittelstufe höherer Lehranstalten. Leipzig 1918. — H. Dingler: Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit in der Mathematik. München 1915. — Ders.: Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Leipzig 1911. — H. Driesch: Ordnungslehre. Jena 1912. — F. Enriques: Fragen der Elementargeometrie. Teil I: Die Grundlagen der Geometrie. Deutsch von H. Thieme. Leipzig 1911. Teil II: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Deutsch von H. Fleischer. Leipzig 1907. — Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Von H. Weber u. J. Wellstein. In 3 Bdn. Leipzig. — G. Frege: Grundgesetze d. Arithmetik. Jena 1893. — M. Gebhardt: Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterricht der höheren Schulen Deutschlands. IMUK-Abhandlung. Bd. III, Teil 2, Nr. 6. 1912. — M. Geiger: Ästhetik. In „Die Kultur der Gegenwart". Teil I. Abtlg. 6. Leipzig-Berlin 1921. — J. Geyser: Neue und alte Wege der Philosophie. München 1916. — A. Gutzmer: Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht in den Jahren 1908—1913. Leipzig-Berlin 1914. — D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie. 4. Aufl. Leipzig-Berlin 1913. — Ders.: Neubegründung der Arithmetik. 1922, Verlag des Mathem. Seminars. Abhandl. aus dem mathem. Seminar der hamburgischen Universität. Bd. I, Heft 2. — A. Höfler: Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig-Berlin 1910. — O Hölder: Die Arithmetik in strenger Begründung. Leipzig 1914. — Ders.: Anschauung und Denken in der Geometrie. Leipzig-Berlin 1900. — E. Husserl: Philosophie der Arithmetik. Bd. I. 1891. — Ders.: Logische Untersuchungen. Bd. I. Halle 1913. Bd. II, 1. 1913. Bd. II 2. 1921. —

Ders.: Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Halle 1913. — E. Jahnke: Mathematische Forschung und Technik. Berlin 1910. — I. Kant: Kritik der reinen Vernunft. 1781. — Ders.: Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. 1786. — D. Katz: Psychologie und mathematischer Unterricht. — IMUK-Abhandlung. Bd. III, Teil 2, Nr. 8. Leipzig-Berlin 1913. — G. Kerschensteiner: Wesen und Wert des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Leipzig-Berlin 1914. — Ders.: Das Grundaxiom des Bildungsprozesses und seine Folgerungen für die Schulorganisation. Berlin 1917. — Ders.: Die Seele des Erziehers und das Problem der Lehrerbildung. Leipzig-Berlin 1921. — F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil I 1911. Teil II. Leipzig-Berlin 1914. — Ders.: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Leipzig-Berlin 1907. — Ders. und E. Riecke: Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Leipzig-Berlin 1900. — Dieselben: Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Leipzig-Berlin 1904. — F. Klein: Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. 1907. Bearbeitet von R. Schimmack. — W. Lietzmann: Methodik des mathematischen Unterrichts. 2 Bde. Leipzig 1919. (Auf die wertvollen IMUK-Abhandlungen von W. Lietzmann sei hier nochmals hingewiesen.) Th. Litt: Pädagogik. In „Die Kultur der Gegenwart“. Teil 1, Abt. 6. Leipzig-Berlin 1921. — J. St. Mill: System der deduktiven und induktiven Logik. Deutsch von J. Schiel. Braunschweig 1877. — P. Natorp: Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig-Berlin 1910. — Ders.: Gesammelte Abhandlungen zur Sozialpädagogik. Heft 3. Stuttgart 1921. — M. Pasch: Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig-Berlin 1912. — Ders.: Veränderliche und Funktion. Leipzig-Berlin 1914. — Ders.: Mathematik und Logik. Vier Abhandlungen. Im „Archiv für die gesamte Psychologie.“ Bd. 38. 1919. (Über innere Folgerichtigkeit; über den Bildungswert der Mathematik; Forschung und Denken; Aufbau der Geometrie.) — Fr. Paulsen: Das moderne Bildungswesen. In „Die Kultur d. Gegenw.“ Teil I, Abt. 1. 1912. — Ders.: Bildung. In „Enzyklop. Handbuch d. Pädagogik“ von Rein. Abgedruckt in „Gesammelte Pädagogische Abhandlungen“. Hrsg. von Ed. Spranger. Stuttgart-Berlin 1912. — H. Poincaré: Wissenschaft und Methode. Deutsch von F. und L. Lindemann. Leipzig-Berlin 1914. — Ders.: Wissenschaft und Hypothese. Deutsch von F. und L. Lindemann. Leipzig-Berlin 1914. — F. Reidt und H. Schotten: Anleitung zum mathematischen Unterricht. Berlin 1906. — A. Riehl: Der philosophische Kritizismus. Geschichte und System. Bd. I. 1908. Bd. II. Leipzig 1879. — Ders.: Beiträge zur Logik. Leipzig 1912. — Ders.: Logik und Erkenntnistheorie. In „Die Kultur d. Gegenw.“ Teil I, Abt. 6.

1921. — Ders.: Zur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. Leipzig-Berlin 1919. — G. Rudert: Die Grundlagen des funktionalen Denkens in ihrer Bedeutung für den ersten mathem. Unterricht. Berlin 1919. — W. Schmiedeberg: Mathematik. In „Die Bedeutung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts für die Erziehung unserer Jugend". Berlin 1917. — M. Simon: Rechnen und Mathematik. Im „Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen". Hrsg. von A. Bauermeister. Bd. IV. München 1895. — Fr. Schilling: Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Leipzig-Berlin 1904. — E. Spranger: Lebensformen. 3. Aufl. Halle 1922. — Ders.: Kultur und Erziehung. Leipzig 1919. — Ders.: Allgemeinbildung und Berufsschule. In „Die deutsche Fortbildungsschule". 29. Jahrg. 1920. — Ders.: Gedanken über Lehrerbildung. Leipzig 1920. — W. Stern: Die menschliche Persönlichkeit. 2. Aufl. Leipzig 1919. — H. E. Timerding: Die Erziehung der Anschauung. Leipzig-Berlin 1912. — Ders.: Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. IMUK-Abhandlungen. Bd. III, Teil I, Nr. 2. 1910. — Ders.: Die Verbreitung mathem. Wissens und mathem. Auffassung. In „Die Kultur d. Gegenw." Teil III, Abt. 1. 1914. — A. Voß: Über mathematische Erkenntnis. In „Die Kultur d. Gegenw." — Ders.: Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. In „Die Kultur d. Gegenw." Teil III, Abt. 1. Leipzig-Berlin 1914. — H. Weber und J. Wellstein: Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. In drei Bänden. Leipzig-Berlin 1909, 1910 u. 1912, 1915. — A. Wernicke: Mathematik und philosophische Propädeutik. IMUK-Abhandlung. Bd. III, Teil 2, Nr. 7. 1912. — H. Weyl: Das Kontinuum. Leipzig 1918. — W. Wundt: Logik. Drei Bände. Bd. 2: Logik der exakten Wissenschaften. Stuttgart 1907. — Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Begründet 1869 durch J. C. V. Hoffmann.