

# Repetitorium für den Hochbau

1. Graphostatik und Festigkeitslehre. 2. Statik der Hochbaukonstruktionen. 3. Grundzüge des Eisenhochbaues

---

1. Heft

## Graphostatik und Festigkeitslehre

Für den Gebrauch an Technischen Hochschulen  
und in der Praxis

von

**Dr.-Ing. e. h. Max Foerster**

Geheimer Hofrat, ord. Professor für Bauingenieurwissenschaften  
an der Technischen Hochschule Dresden

Zweite

vermehrte und verbesserte Auflage

Mit 178 Textabbildungen



**Berlin**

Verlag von Julius Springer

1927

ISBN-13:978-3-642-89685-9 e-ISBN-13:978-3-642-91542-0  
DOI: 10.1007/978-3-642-91542-0

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1919 by Julius Springer in Berlin.  
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1919

## Vorwort zur ersten Auflage.

In den Kreisen der akademisch gebildeten Architekten verschafft sich immer mehr und mehr das Bestreben Geltung, alle die für den Hochbauer erforderlichen wissenschaftlichen Vorkenntnisse, auf denen sich die konstruktive Gestaltung seiner Bauten gründet, ihm in zusammengefaßter Form, aber doch mit wissenschaftlicher Vertiefung zu bieten, um einen möglichst großen Teil der Ausbildungszeit für die eigentlichen Aufgaben der künstlerischen Entwicklung und Durchbildung zur Verfügung stellen zu können. Überblickt man unter diesem Gesichtspunkte die für das Studium der Architekten vorhandenen, vielgestaltigen Lehrbücher, aus denen er die notwendigen Kenntnisse aus den Gebieten: Festigkeitslehre, Statik der Hochbaukonstruktionen und Eisenbau entnehmen kann, so wird man sich der Erkenntnis nicht entziehen können, daß trotz dem Vielen und oft Wertvollen, was hier geboten wird, doch eigentlich noch ein Lehrbuch fehlt, das einmal in gedrängter Kürze sich freihält von allen den theoretischen Behandlungen, die dem Studium und Anwendungsgebiete des Ingenieurs angehören, zum andern sich ausschließlich an die Bedürfnisse des Hochbaus wendet, hierbei aber auf einer höheren wissenschaftlichen Warte steht als die — für ihren Sonderzweck recht brauchbaren — Werke des Baugewerkschulunterrichtes. Diesen in langjähriger akademischer Lehrtätigkeit selbst empfundenen und oft von den Studierenden bitter beklagten Mangel abzustellen, sollen die drei unter dem Namen des Repetitorium für den Hochbau zusammengefaßten Hefte beitragen. Bei ihrer Abfassung ist darauf Wert gelegt, einerseits die rein theoretischen Abhandlungen auf ein Mindestmaß zu beschränken und andererseits — soweit es möglich — ihre praktische Anwendung durch zahlreiche Rechnungsbeispiele aus der Praxis zu erläutern und somit dem Verständnisse der Architekten näherzubringen. In diesem Sinne werden die Hefte nicht nur als Lehrbücher zu selbständiger Aneignung der notwendigsten Kenntnisse dienen können, sondern in erster Linie eine Wiederholung aus den vorgenannten Lehrgebieten zu ermöglichen bestrebt und in der Lage sein. Gleichzeitig dürften sie aber auch dem in der Praxis stehenden Architekten ein willkommenes Rüstzeug für die vielseitigen Erfordernisse seines Berufes bieten.

Das Gesamtwerk zerfällt in die drei Abschnitte, deren jedem ein Heft — für sich vollkommen abgeschlossen — gewidmet ist:

Heft I: Graphostatik und Festigkeitslehre.

Heft II: Statik der Hochbaukonstruktionen.

Heft III: Die Grundzüge des Eisenbaus im Hochbau.

Das vorliegende **erste Heft**, die **Graphostatik** und die **Festigkeitslehre** behandelnd, bespricht in seinem ersten Teile die Grundzüge der graphischen Statik: die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene, die Lehre vom Kraft- und Seileck, die zeichnerische Darstellung statischer und höherer Momente.

In den Grundzügen der Festigkeitslehre — der der zweite und bei weitem überwiegende Teil des Heftes gewidmet ist — wird zunächst die rechnerische Ermittlung der Schwerpunkte, statischen, Trägheits- und Zentrifugalmomente gegeben, einschließlich ihrer wichtigsten Beziehungen unter sich und zu verschiedenen Achsensystemen. Hieran schließen sich die Darlegungen über die verschiedenen einfachen und zusammengesetzten Beanspruchungen der Querschnitte. Behandelt werden: die Normal- (Druck- und Zug-)festigkeit, die Frage des Knickens, die Biegefestigkeit, die Schubfestigkeit (für sich allein und in Verbindung mit Biegung) und endlich die Beanspruchung der Querschnitte gemeinsam durch ein Moment und eine Normalkraft. Die an die allgemeineren Ausführungen und Entwicklungen in jedem Einzelgebiete sich anschließenden Beispiele sind fast stets aus der hochbaulichen Praxis entnommen und so gewählt, daß sie eine möglichst große Vielseitigkeit der Anwendung erschließen. Soweit zugänglich, ist neben schärfere Rechnungswegen auch auf vereinfachte Annäherungsmethoden der Rechnung eingegangen.

Dresden, im Juli 1919.

Dr.-Ing. e. h. M. Foerster.

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei der vorliegenden zweiten Auflage des ersten Heftes vom „Repetitorium für den Hochbau“, die

### **Graphostatik und Festigkeitslehre**

behandelnd, sind Einteilung und Aufbau der ersten Auflage im allgemeinen beibehalten worden.

Der fortgeschrittenen wissenschaftlichen Erkenntnis gemäß und der von ihr beeinflussten neueren staatlichen Bestimmungen über die Berechnung von Hochbaukonstruktionen aller Art folgend, wurde eine größere Anzahl der einzelnen Abschnitte einer Umarbeitung und Vervoll-

ständigung unterzogen. Dies betrifft einmal die von mancher Seite aus gewünschte Aufnahme der Behandlung einfacher Eisenbetonquerschnitte im Sinne ihrer Festigkeitsuntersuchung, zum andern die vollständige Umgestaltung des Kapitels über die Knickfestigkeit und die Hinzufügung eines neuen Abschnittes über die Spannungsberechnung in außermittig belasteten, auf Knickung beanspruchten Druckstäben. Bei Behandlung der Verbundquerschnitte, der Stützen, Platten, Plattenbalken und allgemeineren Formen wurde besonderer Wert darauf gelegt, die hier zu behandelnden Aufgaben — die Bestimmung des Schwerpunktes, der statischen- und Trägheitsmomente, die Ermittlung der Normal-, Biegungs- und Schubspannungen — der vorliegenden Gesamtaufgabe, eine Festigkeitslehre für den Hochbau zu geben, unterzuordnen. Hierbei wurde sowohl auf die rein rechnerischen als auch die graphischen Berechnungsmethoden — letztere namentlich bei einer Beanspruchung durch Normal- und Biegungsspannungen — ausführlich eingegangen. Bei der Neubearbeitung der Knickfrage wurde das heute für Flußstahl (St. 37 u. St. 48) Holz und Eisenbeton vorgeschriebene  $\omega$ -Verfahren in den Vordergrund der Betrachtungen gestellt; hier wurden auch Annäherungsberechnungen, sowie die Frage der Knicksicherheit mehrteiliger Stäbe und einer außermittigen Kraftlage ausführlich behandelt und zwar immer im engen Anschlusse an die neuen staatlichen, für die Hauptbaustoffe festgesetzten Bestimmungen.

Eine recht erhebliche Erweiterung haben die allen Abschnitten angefügten Zahlenbeispiele erfahren, einmal durch die Aufnahme neuer, der Praxis entnommenen Aufgaben in den bisher behandelten Gebiete, zum andern durch die Hinzufügung der neuen Abschnitte. Hierbei wurde besonderer Wert darauf gelegt, möglichst vielgestaltige, dem Gebiete des Hochbaus entnommene Rechnungsbeispiele vorzuführen.

Für die ausgezeichnete Ausstattung, die auch die neue Auflage durch den Verlag Julius Springer, Berlin, erfahren hat, diesem zu danken, ist mir ein besonderes Bedürfnis.

Dresden, im Mai 1927.

Dr.-Ing. e. h. M. Foerster.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>I. Teil. Die Grundzüge der graphischen Statik . . . . .</b>	<b>1—28</b>
1. Kapitel. Die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene. . . . .	1—20
1. Die Zusammensetzung der Kräfte nach dem Parallelogramm der Kräfte und der Gleichgewichtszustand der Kräfte . . .	1—6
2. Krafteck und Seileck . . . . .	6—9
3. Die zeichnerische Bestimmung des Schwerpunktes ebener Flächen . . . . .	9—13
4. Allgemeine Beziehungen zwischen Krafteck und Seileck. . .	13—16
5. Die Zerlegung der Kräfte . . . . .	17—20
2. Kapitel. Statische Momente von Kräften und Flächen und Trägheitsmomente von Flächen. . . . .	20—24
1. Statische Momente von Kräften und Flächen, Kräftepaare.	20—26
2. Trägheitsmomente von Flächen. . . . .	26—28
<b>II. Teil. Die Grundzüge der Festigkeitslehre. Vorbemerkung . . .</b>	<b>29—169</b>
3. Kapitel. Die rechnerische Ermittlung von Schwerpunkten, statischen Momenten und Trägheitsmomenten . .	29—58
1. Die Schwerpunktsbestimmung für ebene Flächen. . . . .	29—37
2. Statische Momente von Flächen und Linien. . . . .	37—38
3. Beziehungen zwischen Trägheitsmomenten für verschiedene Achsen. . . . .	38—43
4. Die Berechnung der Trägheitsmomente der wichtigsten ebenen Querschnitte . . . . .	43—51
5. Allgemeine Beziehungen für Zentrifugalmomente und für deren Berechnung. . . . .	52—53
6. Zahlenbeispiele . . . . .	53—57
7. Der Trägheitsradius. . . . .	57—58
4. Kapitel. Die verschiedenen Festigkeitsarten . . . . .	58
1. Einfache und zusammengesetzte Beanspruchungen und Festigkeitsarten . . . . .	58—63
2. Die Normalfestigkeit, Druck- und Zugfestigkeit . . . . .	63
a) Die Normalspannungen und Beanspruchungen. . . . .	63—69
b) Zahlenbeispiele . . . . .	69—74
3. Die Knickfestigkeit . . . . .	74—89
a) Die Euler-Gleichung . . . . .	74—77
b) Das $\omega$ -Verfahren . . . . .	77—85
1. für Flußstahl . . . . .	77—81
2. für Holz . . . . .	81—83
3. für Gußeisen . . . . .	83
4. für Eisenbeton . . . . .	83—84
5. für Stäbe aus mehreren Teilen . . . . .	84—85
c) Zahlenbeispiele . . . . .	85—89

	Seite
4. Die reine Biegefestigkeit und die reinen Biegezugspannungen	89—115
a) Die Kraftebene schneidet den Querschnitt in einer Hauptachse . . . . .	89—95
b) Die Kraftebene geht durch den Querschnittsschwerpunkt, schneidet den Querschnitt aber nicht in einer Hauptachse	96—98
c) Die Verbiegung und Ermittlung der reinen Biegezugspannungen bei Eisenbetonquerschnitten . . . . .	98—106
d) Zahlenbeispiele . . . . .	106—115
5. Die Schubfestigkeit . . . . .	115—131
a) Die reine Schubfestigkeit und Schubbeanspruchung . . . . .	115—116
b) Die Schubbeanspruchung bei Biegung . . . . .	116—123
c) Zahlenbeispiele . . . . .	123—131
6. Die zusammengesetzte Festigkeit . . . . .	131—166
a) Allgemeine Betrachtungen über die zusammengesetzte Wirkung von Normal- und Biegezugbelastung . . . . .	131—132
b) Schiefwinklige Querschnittsbelastung und die Reibung in Querschnitten . . . . .	132—133
c) Die aus Biegung und Normalbelastung zusammengesetzten Spannungen und die Nulllinie . . . . .	133—134
d) Der Querschnitt vermag Druck- und Zugspannungen aufzunehmen und die Lage der Nulllinie gegenüber dem Kraftangriffe und ihre Auffindung . . . . .	137—148
$\alpha$ ) Der Kern des Querschnitts . . . . .	138—139
$\beta$ ) Die rechnerische Bestimmung des Kernes der wichtigsten Querschnitte . . . . .	139—144
$\gamma$ ) Die Berechnung und graphische Konstruktion der Randspannungen im Rechtecksquerschnitt (Angriffspunkt in der Schwerachse) . . . . .	144—147
$\delta$ ) Der Angriffspunkt liegt nicht in der Schwerachse . . . . .	147—148
e) Der Querschnitt vermag nur Druck aufzunehmen, Verbundquerschnitte . . . . .	149—160
f) Zahlenbeispiele . . . . .	160—166
7. Bestimmung der Spannungen in außermittig belasteten, auf Knickung beanspruchten Druckstäben . . . . .	166—167
Zahlenbeispiele . . . . .	167—169

## Erster Teil.

# Die Grundzüge der graphischen Statik.

### 1. Kapitel.

## Die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene.

### 1. Die Zusammensetzung der Kräfte und der Gleichgewichtszustand der Kräfte.

In der graphischen Statik werden Aufgaben, die sich auf das Zusammenfassen und Zerlegen von Kräften, auf die Bildung von Momenten verschiedener Ordnung usw. beziehen, auf rein zeichnerischem Wege gelöst. Hierzu bedarf es eines Zeichnungsmaßstabes, eines Kräftemaßstabes, der in seinen Einheiten sich nach der je vorliegenden Aufgabe richtet. Bei der Behandlung einfacher Kräfte wird der Maßstab, der zur zeichnerischen Darstellung der Kräfte in Form bestimmter Längen dient, sein:  $1 \text{ t} = n \text{ cm}$  bzw.  $1 \text{ kg} = n' \text{ cm}$  usw., während bei der graphischen Darstellung von Flächen als Kräfte die Einheit der Fläche die Grundlage bilden wird:  $1 \text{ m}^2 = n \text{ cm}$ ,  $1 \text{ cm}^2 = n' \text{ cm} = n'' \text{ mm}$  usw.; endlich wird bei der Darstellung eines Momentes, das sich aus  $\text{Kraft} \times \text{Hebelarm}$  zusammensetzt, also in der Einheit von  $\text{t} \cdot \text{m}$ , bzw.  $\text{kg} \cdot \text{cm}$  usw. erscheint, beispielsweise der Kraftmaßstab ( $t$ ) mit dem Längenmaßstab ( $m$ ) in Form einer Fläche vereinigt.

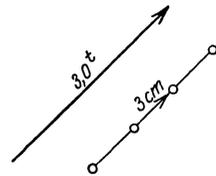


Abb. 1.

Damit eine Kraft zeichnerisch dargestellt werden kann, ist es notwendig, von ihr zu kennen die Lage, ihre Richtung, ihre Größe. Das gleiche gilt auch von Kräften, welche Flächen ersetzen; hier ist in der Regel der Angriffspunkt der Kraft, der Punkt, in dem die Fläche statisch vereinigt gedacht werden kann, d. h. ihr Schwerpunkt. Die Richtung der Kraft ist durch einen Pfeil anzugeben, der die Richtung ihrer Wirkung darstellt, und zwar sowohl bei der Kraft selbst als auch bei ihrer zeichnerischen Darstellung.

Die in Abb. 1 gegebene, unter  $45^\circ$  nach rechts aufwärts gerichtete Kraft von  $3 \text{ t}$  wird demgemäß bei einem Kräftemaßstab von  $1 \text{ t} = 1 \text{ cm}$  durch eine ebenso gerichtete Gerade von  $3 \text{ cm}$  Länge, bei einem Maß-

stab  $1\text{ t} = 3\text{ cm}$  durch eine solche von  $9\text{ cm}$  darzustellen sein. Wäre ein Maßstab:  $30\text{ kg} = 1\text{ mm}$  gegeben, so wäre die Kraft von  $3\text{ t} = 3000\text{ kg}$  durch  $100\text{ mm}$ , d. h. durch  $10\text{ cm}$ , wiederzugeben. Es liegt auf der Hand, daß man gern den Maßstab in runden, einfachen Zahlen

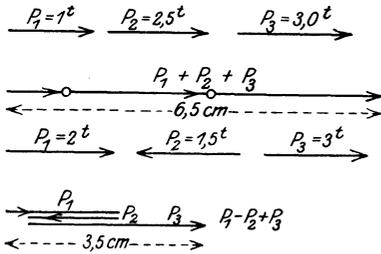


Abb. 2.

wählt, um sich die Umrechnungs- und Darstellungsarbeit möglichst zu vereinfachen.

Wirken mehrere Kräfte in ein und derselben Richtung, so kann man sie durch Aneinanderreihen zeichnerisch addieren, bei entgegengesetzter Richtung voneinander abziehen (Abb. 2)<sup>1)</sup>.

Die zeichnerische Zusammenfassung zweier in einem Punkte wirksamer, in Richtung und Größe gegebener Kräfte ist durch das Parallelogramm der Kräfte bekannt. In Abb. 3a ist  $R$  die Mittelkraft der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ . Betrachtet man das Dreieck  $abc$ , so erkennt man, daß in ihm  $bc =$  der Kraft  $P_1$  ist, daß es der Aufzeichnung des Parallelogramms nicht bedarf, sondern daß das einfache Dreieck ausreicht, um die Mittelkraft  $R$  zu

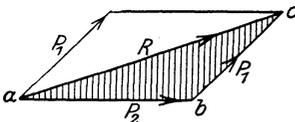


Abb. 3a.

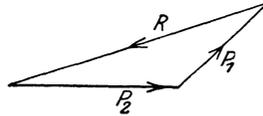


Abb. 3b.

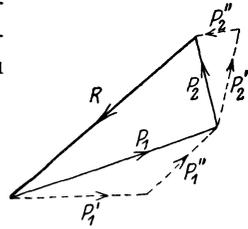


Abb. 4.

bestimmen, daß also nur ein Kraftdreieck zur Lösung der Aufgabe zu zeichnen ist. Da Kraft  $R$  die Mittelkraft von  $P_1$  und  $P_2$  darstellt, also deren Wirkung zu ersetzen hat, so ist ihre Richtung aus dem Kräfteparallelogramm gegeben; sie ist demgemäß der durchlaufenden Richtung von  $P_1$  und  $P_2$  im Kraftdreieck entgegengesetzt gerichtet.

Wird hingegen eine Kraft gesucht, welche den Kräften  $P_1$  und  $P_2$  das Gleichgewicht hält, so muß sie die Wirkung der Mittelkraft  $R$  aufheben, d. h. ihr Pfeil muß alsdann im Kraftdreieck mit dem von  $P_1$  und  $P_2$  in demselben Richtungssinne durchlaufen (Abb. 3b).

Da man (Abb. 4) jede Kraft  $P_1$  bzw.  $P_2$  durch zwei beliebige Seitenkräfte ersetzen kann, für die alsdann die Kräfte  $P_1$  bzw.  $P_2$  je Mittelkräfte sind, und diese Zerlegung ins Beliebige fortzusetzen vermag, in dem so sich bildenden Kraftviereck im Zustande des Gleichgewichts

<sup>1)</sup> Hier ergibt die rechnerische Zusammenfassung:  $\Sigma P = 1 + 2,5 + 3,0 = 6,5\text{ t}$ , bzw.  $\Sigma P = +2\text{ t} - 1,5\text{ t} + 3\text{ t} = 3,5\text{ t}$ .

aber alle Kräfte in demselben Richtungssinne befaßt werden, so kann man den Satz aussprechen:

Im Gleichgewichtszustande von Kräften läuft der Richtungspfeil im Kräfteck in demselben Umlaufungssinne durch.

Rechnerisch ergibt sich die Mittelkraft, je nachdem  $P_1$  und  $P_2$  einen rechten Winkel miteinander bilden, oder unter einem beliebigen Winkel  $\alpha$  zusammenlaufend unter sich gleich sind, oder endlich im

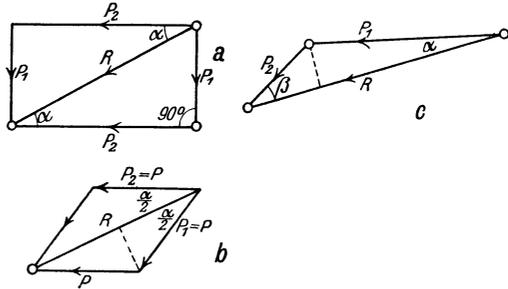


Abb. 5a—c.

letzten Falle ungleich groß sind, aus den Beziehungen (Abb. 5a, b, c):

1.  $R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ ;  $P_1 = R \sin \alpha$ ;  $P_2 = R \cos \alpha$  (Abb. 5a);
2.  $R = 2 P \cos \frac{\alpha}{2}$  (Abb. 5b);
3.  $R = P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \beta$  (Abb. 5c).

Greifen in einem Punkte mehrere Kräfte an (Abb. 6a) und wird für sie die Mittelkraft gesucht, so kann man zunächst für zwei von ihnen

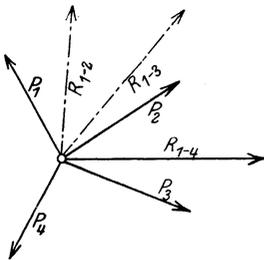


Abb. 6a.

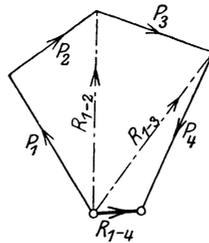


Abb. 6b.

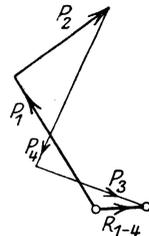


Abb. 6c.

die Mittelkraft finden, diese dann mit einer weiteren Kraft zu einer weiteren Mittelkraft vereinen und so weiter fortfahren, bis alle Kräfte unter sich zeichnerisch vereinigt sind. Hierbei entstehen (Abb. 6b) die Zwischenmittelkräfte  $R_{1-2}$ ,  $R_{1-3}$ . Man erkennt, daß man auch ohne ihre Hilfe auszukommen vermag, den Kräftezug aus der unmittelbaren Zusammensetzung der Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  finden kann und die Mittelkraft aller Kräfte  $R_{1-4}$  durch Verbindung der Anfangs- und Endpunkte dieses Kraftlinienzuges erhält. Der Richtungspfeil der Kraft ist entgegengesetzt der an und für sich gleichlaufenden Richtung der zusammensetzenden Kräfte. Bei der Lösung ist es, wenn man nur auf die Richtungspfeile der Kräfte achtet, ohne Bedeutung (Abb. 6c), in

welcher Reihenfolge die einzelnen Kräfte aneinander gesetzt werden, da sie nur eine Mittelkraft haben können, also stets dasselbe Ergebnis sich zeigen muß. Man wird aber gern bei der Zusammensetzung der an ein und demselben Punkte angreifenden Kräfte sich nach der Reihenfolge richten, wie sie aufeinander folgen.

Zerlegt man Kräfte, wie die vorstehend beschriebenen, die in einem Punkte angreifen, in je 2 Seitenkräfte nach der Richtung eines senkrechten Koordinatensystems, so ergibt sich (Abb. 7):

$$H_1 = + P_1 \cos \alpha_1; \quad V_1 = + P_1 \sin \alpha_1$$

$$H_2 = + P_2 \cos \alpha_2; \quad V_2 = - P_2 \sin \alpha_2$$

$$H_3 = - P_3 \cos \alpha_3; \quad V_3 = - P_3 \sin \alpha_3$$

$$H_4 = - P_4 \cos \alpha_4; \quad V_4 = + P_4 \sin \alpha_4$$

$$H = H_1 + H_2 - H_3 - H_4; \quad V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4$$

$$R = \sqrt{H^2 + V^2}; \quad \text{und} \quad \text{tg} = \frac{V}{H},$$

bestimmend die Richtung der Mittelkraft  $R$  gegenüber der  $x$ -Achse.

Greifen in einem Punkte Kräfte an, welche bei der Aneinanderreihung im Krafteck ein geschlossenes Vieleck bilden, so ist die Mittelkraft = 0, d. h. die Kräfte sind unter sich im Gleichgewicht (Abb. 8).

Projiziert man ein solches Krafteck

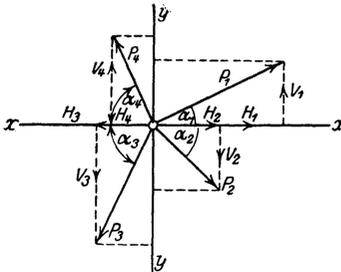


Abb. 7.

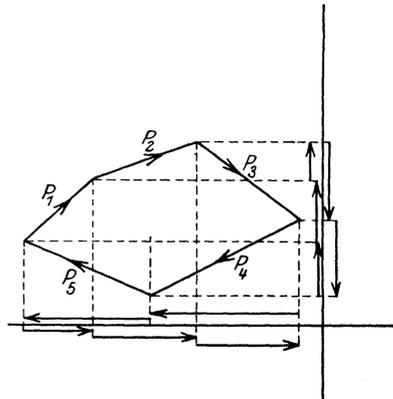


Abb. 8.

auf irgendein senkrechtes Achsensystem und denkt man sich eine jede Kraft nach diesen Achsen zerlegt, so findet man, daß die Summe aller Seitenkräfte in beiden Richtungen unter sich je = 0 ist. Hieraus folgt:

Sind in einem Punkte sich schneidende Kräfte unter sich im Gleichgewicht, so sind die Summen ihrer Seitenkräfte, bezogen auf zwei beliebige, zu einander rechtwinklig liegende Achsen, je = 0. Liegt ein solcher Fall bei den in Abb. 7 dargestellten Kräften vor, so ist hier naturgemäß auch rechnerisch:  $H = 0$ ,  $V = 0$ ,  $R = 0$ .

In Abb. 8 ist selbstverständlich Voraussetzung, daß man das Kraft-  
eck, den Pfeilen folgend, in einheitlichem Sinne umfahren kann, daß  
das Krafteck also einen stetigen Umfahrungssinn aufweist, also nie-  
mals zwei Pfeile sich begegnen.

Zugleich ist ersichtlich, daß, wenn in dem geschlossenen Krafteck  
der Pfeil irgendeiner Kraft umgekehrt wird, alsdann diese zur Mittel-  
kraft aller anderen wird.

Das einfachste Krafteck im obigen Sinne ist das Dreieck, dem in  
der Ebene drei unter sich im Gleichgewichte befindliche, in einem Punkte  
angreifende Kräfte entsprechen. Hier kann (Abb. 9) nur Gleichgewicht herrschen, wenn  
die 3 Kräfte sich wirklich in einem Punkte schneiden. Fiele der Schnittpunkt  $a$  von  $R$  und  
 $P_1$  nicht mit dem von  $P_2$  und  $R$  ( $b$ ) zusammen (Abb. 9), so könnte man im Punkte  $a$ , ohne  
das Kraftbild zu verändern, zwei entgegen-  
gesetzt wirkende und sich somit gegenseitig wieder aufhebende Kräfte  
 $P_2$  anbringen; alsdann sind die drei mit Doppelpfeil versehenen Kräfte  
in  $a$  im Gleichgewicht, und es verbleibt noch ein am Hebelarm  $\lambda$  wir-  
kendes Kräftepaar  $P_2 \cdot \lambda$ , welches ein durch keine andere Kraftwirkung

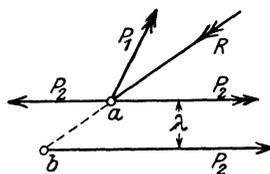


Abb. 9.

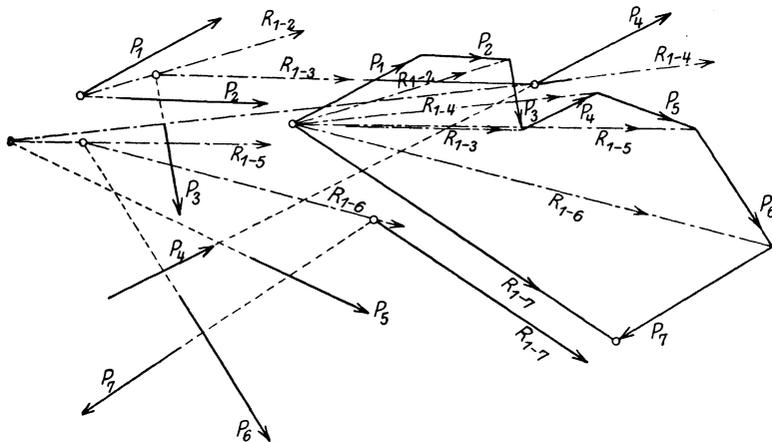


Abb. 10.

ausgeglichenes „Drehmoment“ erzeugt, also einen Gleichgewichts-  
zustand ausschließt. Nur wenn der Hebelarm dieses Kräftepaars  $\lambda = 0$   
wird, also wenn der Angriffspunkt  $b$  auch mit  $a$  zusammenfällt, also alle  
drei Kräfte im Punkte  $a$  sich schneiden, kann Gleichgewicht herrschen.  
Hieraus folgt der wichtige Grundsatz:

Drei Kräfte können nur im Gleichgewichte sein, wenn  
sie sich in einem Punkte schneiden.

Greifen mehrere Kräfte in der Ebene nicht in demselben Punkte an, sondern schneiden sie sich in verschiedenen Punkten, so kann man allerdings der Zwischenmittelkräfte nicht entbehren, um den jeweiligen Schnittpunkt der Zwischenmittelkraft und der mit ihr zu vereinigen, gegebenen Kraft zu finden und endlich die Lage der Mittelkraft zu allen gegebenen Kräften zu bestimmen (Abb. 10). Hierbei ist der äußere Verlauf des Krafteckes allerdings auch ohne die Zwischenkräfte bestimmt.

## 2. Krafteck und Seileck.

Geht man in Abb. 11a zunächst vom Krafteck unter Benutzung der Zwischenmittelkräfte aus, und zeichnet man zu ihm allmählich fortschreitend ein zusammenhängendes Seileck in Abb. 11b derart, daß

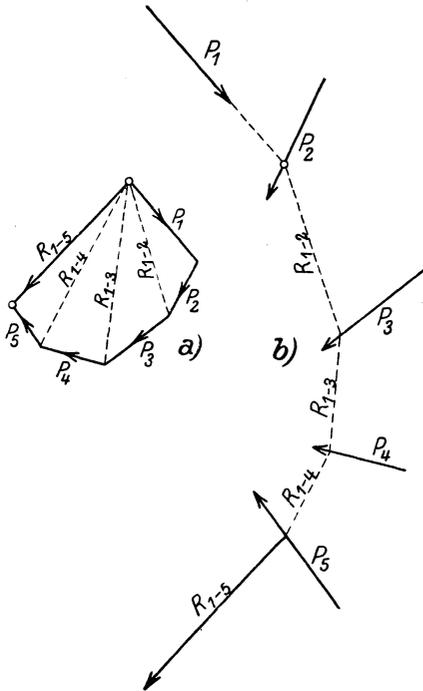


Abb. 11.

man jede Zwischenresultante mit der nächstfolgenden Kraft zum Schnitt bringt und durch den so gewonnenen Punkt die nächste Zwischenmittelkraft zieht, so bestimmt die letzte Seite dieses Eckes die Lage der Gesamtmittelkraft, und das ganze Seileck als solches gibt in seinen einzelnen Seiten die Mittelkraft aller vorliegenden Kräfte an. Dies ergibt sich daraus, daß in Abb. 11a jede Zwischenmittelkraft die Mittelkraft aller vorliegenden Kräfte ist und das in gleicher Weise für die Zusammenfügung der Kräfte in Abb. 11b gelten muß. Das dort gezeichnete Eck führt den Namen des Mittelkrafteckes. Auch hier ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die gegebenen Kräfte miteinander in Verbindung ge-

bracht werden, da die Lage der Schußmittelkraft unabhängig von der Kraftreihenfolge ist.

Schneiden sich die Kräfte ungünstig unter spitzem Winkel, so werden von einem beliebig angenommenen Pole in einer der Abb. 11 ähnlichen Weise Hilfskräfte *a*, *b*, *c*, *d*, *e* (Abb. 12a) zum Kraftzuge gezogen, so daß also lauter einzelne zusammenhängende Kraftdreiecke entstehen, gebildet durch je eine äußere gegebene Kraft und zwei Hilfs-

kräfte, ausgehend von dem angenommenen Pole  $O$ . Zeichnet man nun zu diesen Kräften eine Mittelkraftlinie in Form eines zusammenhängenden Seilecks in die Kraftlage ein, so entspricht auch hier jeder Schnittpunkt von drei Linien einem Dreieck im Krafteck; die dort im Gleichgewicht befindlichen Kräfte sind es also auch im Seileckspunkte. Betrachtet man in demselben Sinne das Dreieck  $Oae$ , in dem  $R_{1-4}$  die Mittelkraft der Kräfte  $P_{1-4}$  darstellt und  $a$  bzw.  $e$  die äußersten Hilfskräfte, also auch die äußersten Seileckkräfte darstellen, so müssen sich auch im Kraftplane die Mittelkraft  $R_{1-4}$  mit den letzteren in einem Punkte schneiden; denn die drei im Kraftdreieck vereinigten Kräfte  $R_{1-4}$ ,  $a$  und  $e$  können nur im Gleichgewicht sein, wenn sie sich in einem Punkte schneiden.

Da die Richtung von  $R_{1-4}$  bekannt ist, so ist somit auch ihre Lage

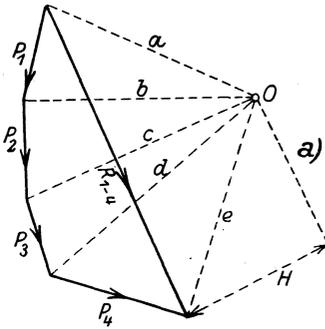


Abb. 12a.

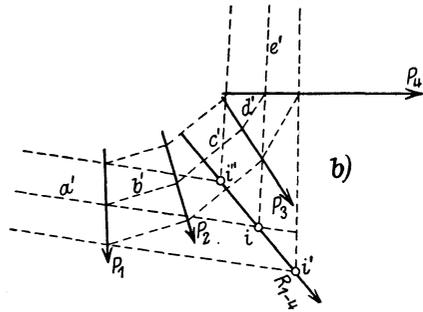


Abb. 12b.

im Kraftplan durch den Schnittpunkt von  $a'$  und  $e'$  (Abb. 12b) gegeben.

Die Auffindung der Mittelkraft auf dem voranstehend behandelten Wege hat eine grundlegende Bedeutung. Das in Abb. 12a dargestellte, von dem beliebigen Pole  $O$  mit Hilfe der Kraftstrahlen  $a$ ,  $b$  usw. gezeichnete Polygon führt den Namen Krafteck, das mit seiner Hilfe gezeichnete Mittelkrafteck die Bezeichnung Seileck. Unter der Polweite des Kraftecks wird der senkrechte Abstand des Poles  $O$  von der Mittelkraft verstanden (=  $H$  in Abb. 12a).

Das Verfahren gestattet naturgemäß auch, jede beliebige Mittelkraft in ihrer Lage zum Kräfteplan zu bestimmen, wenn man sie im Krafteck einzeichnet und die für sie in Frage kommenden äußersten Seileckstrahlen sinngemäß benutzt.

Bei der Aufzeichnung des Kraftecks und Seilecks ist es ohne statische Bedeutung, wie die Reihenfolge der einzelnen Kräfte beim Aufzeichnen des Kraftecks gewählt wird, da es zu den Kräften nur eine Mittelkraft in bestimmter Lage gibt. Jedoch ist selbstverständlich

darauf zu achten, daß jedem Dreieck im Kräfteck ein Schnittpunkt derselben drei Kräfte im Seileck entsprechen muß. Unter Wahrung

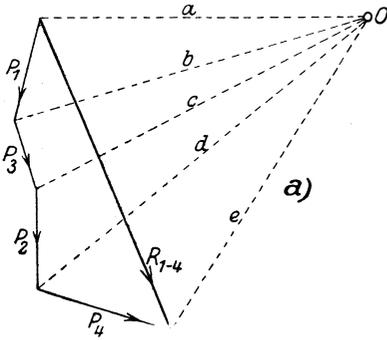


Abb. 13 a.

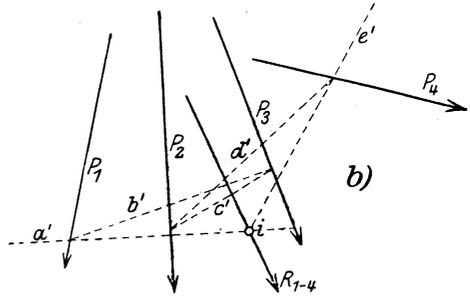


Abb. 13 b.

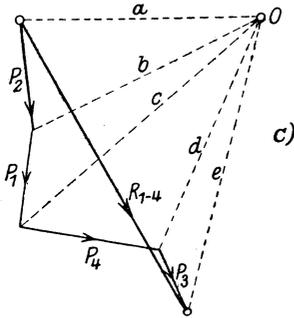


Abb. 13 c.

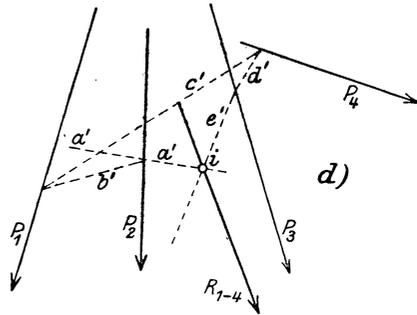


Abb. 13 d.

dieser Überlegung sind im Anschlusse an Abb. 12 die Seilecke in Abb. 13 a, b und 13 c, d für die Reihenfolge der Kräfte  $P_1, P_3, P_2, P_4$  und  $P_2, P_1, P_4, P_3$  gezeichnet. Selbstverständlich empfiehlt es sich auch hier, die bequemste und meist auch übersichtlichste Kraftreihenfolge zu wählen.

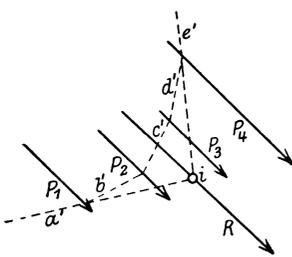


Abb. 14 a.

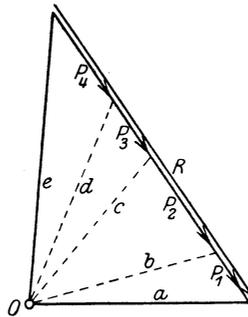


Abb. 14 b.

Kraft- und Seileck finden vorwiegend Verwendung bei zueinander parallelen, gleichgerichteten und nicht gleich-

gerichteten Kräften, da bei ihnen der Schnittpunkt im Unendlichen liegt und man somit nicht unmittelbar den Angriffspunkt der Mittelkraft zu finden vermag. Hierüber geben die Abb. 14 a, b und 15 a, b

Auskunft; in ersterer handelt es sich um die Zusammenfassung gleichgerichteter, in letzterem Falle verschieden gerichteter Parallelkräfte.

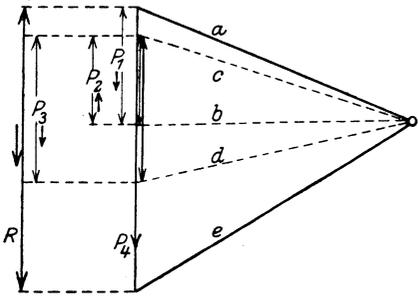


Abb. 15 a.

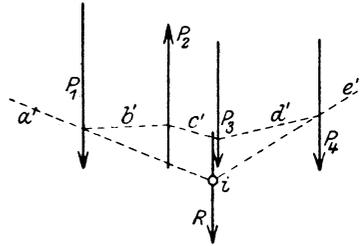


Abb. 15 b.

### 3. Die zeichnerische Bestimmung des Schwerpunktes ebener Flächen.

Die Bestimmung der Mittelkraft von parallelen Kräften hat Bedeutung für die Auffindung der Schwerpunkte ebener Flächen. Da man in einem Schwerpunkt das Gewicht der Fläche sich vereinigen denken kann, so muß auch, wenn man die Fläche in einzelne Teile teilt, diese als Kräfte auffaßt und zu ihnen eine Mittelkraft sucht, diese durch den Schwerpunkt gehen. Hierbei ist es zweckmäßig, die Fläche in Dreiecke, Rechtecke, Trapeze, überhaupt in solche Figuren zu unterteilen, deren Schwerpunkt man ohne weiteres durch Zeichnung finden kann, und in diesen Punkten die Größen der Einzelteile als Kräfte im bestimmten Maßstabe, und zwar unter sich parallel, anzubringen. Ist die Gesamtfläche zu keiner Achse symmetrisch, eine Schwerachse also von vornherein nicht bestimmbar, so wird man für zwei verschiedene Richtungen je die Mittelkraft bestimmen und in ihrem Schnittpunkt alsdann den Schwerpunkt der Gesamtfläche finden.

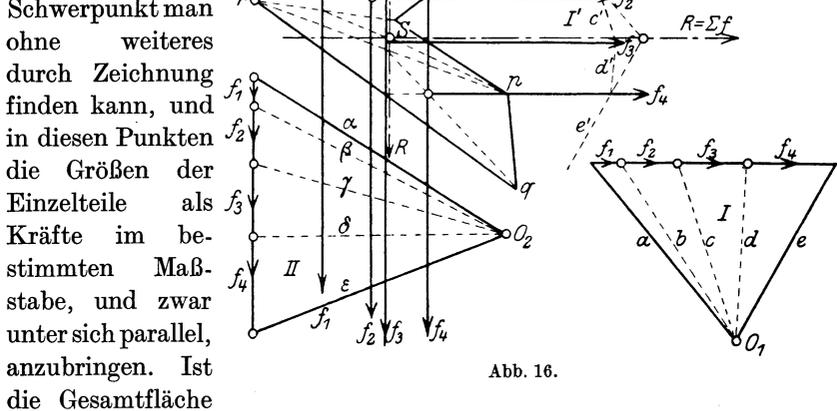


Abb. 16.

zu keiner Achse symmetrisch, eine Schwerachse also von vornherein nicht bestimmbar, so wird man für zwei verschiedene Richtungen je die Mittelkraft bestimmen und in ihrem Schnittpunkt alsdann den Schwerpunkt der Gesamtfläche finden.

In den Abb. 16 bis 18 sind zeichnerische Schwerpunktsbestimmungen

durchgeführt. Nach Annahme eines Kräftemaßstabes (z. B. 100 cm<sup>2</sup> = 1 cm) wurden in Abb. 16 die einzelnen Dreiecksflächen, in die die Gesamtfläche unterteilt ist, einmal in wagerechter, dann in senkrechter

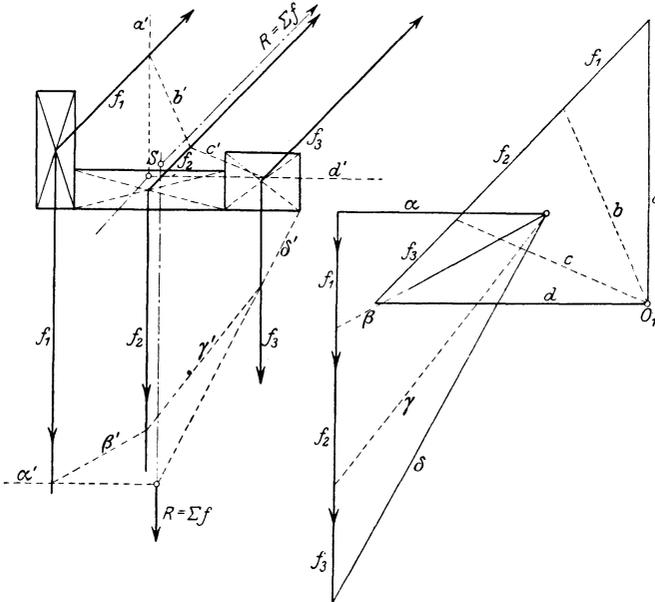


Abb. 17.

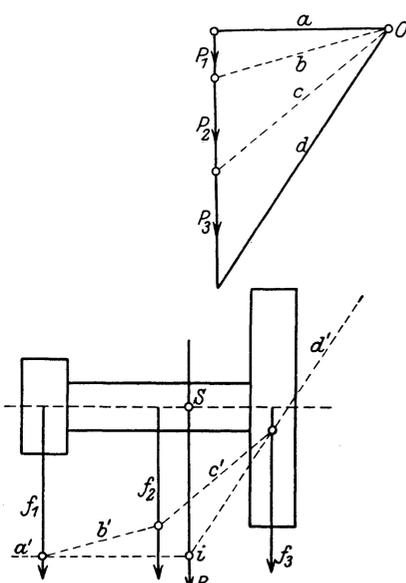


Abb. 18 a.

Richtung als Kräfte aufgefaßt und aufgetragen und alsdann mit Hilfe der Kraftecke I und II die Mittelkräfte  $R = \sum f$  bestimmt; ihr Schnittpunkt  $S$  ist der Schwerpunkt der Fläche. In gleicher Weise ist der Schwerpunkt des Mauerpfeilers in Abb. 17 ermittelt. Hier sind, da keine Symmetrieachse vorliegt, die Flächenkräfte einmal unter 45° nach oben, das andere Mal senkrecht nach unten gerichtet aufgetragen und für diese Richtungen je die Mittelkraft bestimmt; hier liegt der Schwerpunkt ( $S$ ) außerhalb der Fläche.

In Abb. 18a liegt ein Querschnitt mit einer Symmetrieachse vor, in der also der Schwerpunkt



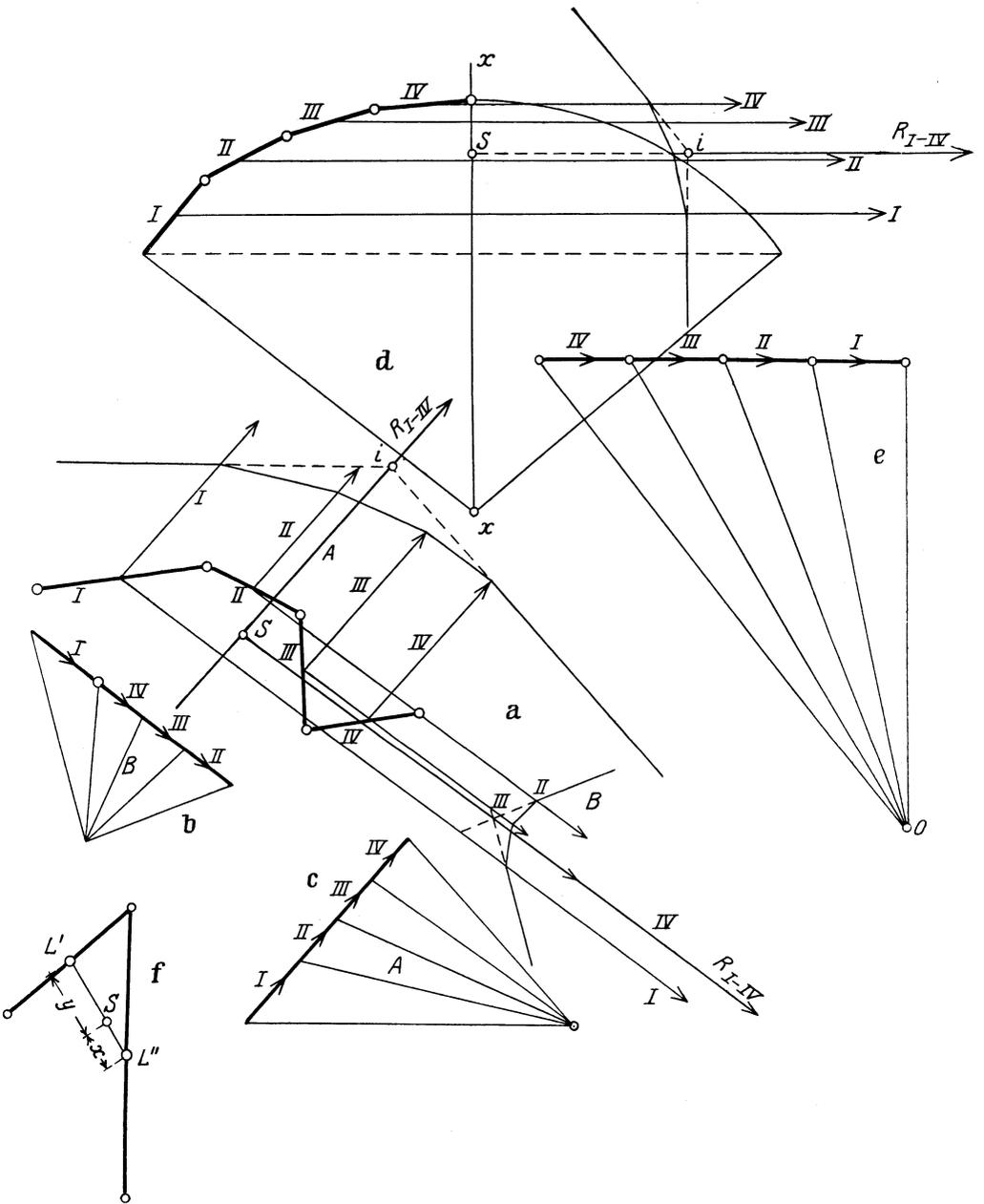


Abb. 19a-f.

hiernach behandeltes Beispiel läßt Abb. 18b erkennen. Durch Annahme wagerechter und senkrechter Kraftrichtung ist hier vermittle der

beiden Kraftecke I und II und der zugehörigen Seilecke I' und II' der Schwerpunkt  $S$  bestimmt.

In gleicher Weise wie bei ebenen Flächen kann man auch die Schwerpunkte von Linienzügen finden, indem man die einzelnen Linienelemente als Kräfte auffaßt, sie in einem Maßstabe gemäß ihrer Länge wertet und in ihrer Mitte — also dem Schwerpunkt der einzelnen Gradon ihre Kraft (Gewicht) — angreifen läßt. Liegt eine Kurve vor, so wird diese zur Auffindung ihres Schwerpunktes in eine Anzahl kurzer gerader Strecken zerlegt und deren Mittelkraft in einer oder zwei Richtungen bestimmt; ersteres reicht bei einer symmetrischen Kurve aus. Beispiele hierfür liefern die Abb. 19a—f. In Abb. 19a, b, c ist ein aus 4 Teilen verschiedener Länge bestehender, gebrochener Linienzug gegeben und mit Hilfe der beiden Kraftecke und zugehörigen Seilecke ( $A$  und  $B$ ) der Schwerpunkt  $S$  bestimmt, während in Abb. 19d für eine zur  $x$ -Achse symmetrische Kurve in entsprechender Art der Schwerpunkt  $S$  auf der  $x$ -Achse gefunden wurde. Hier ist die Kraftrichtung senkrecht zur  $x$ -Achse angenommen worden; alsdann reicht es aus, die halbe Kurve (I, II, III, IV) in Rechnung zu stellen. Besteht (Abb. 19f) der Linienzug aus nur 2 sich in schneidenden Geraden, so liegt der Schwerpunkt  $S$  in der Verbindungslinie ihrer Mitten und zwar entsprechend einer Teilung dieser  $x:y = SL':SL''$ .

#### 4. Allgemeine Beziehungen zwischen Krafteck und Seileck.

Seil- und Krafteck gestatten auch die Auffindung einer graphischen Gleichgewichtsbedingung von Kräften, die nicht durch einen Punkt gehen. Auch wenn diese Kräfte ein geschlossenes Krafteck bilden, so ist noch nicht bewiesen, daß sie unter sich im Gleichgewicht sind. Die vier an einer selbst drehbaren Scheibe in Abb. 20 angreifenden Kräfte können z. B. in einem geschlossenen Krafteck sich vereinigen lassen, sind aber nicht unter sich im Gleichgewicht, da sie alle in demselben Sinne an der Scheibe drehen, also eine Bewegung dieser zur Folge haben.

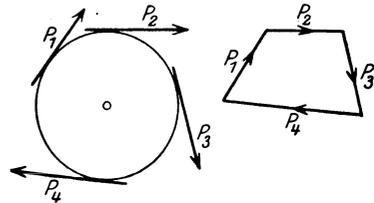


Abb. 20.

Führt man bei den vier in Abb. 21 gegebenen Kräften, die unter sich ein geschlossenes Viereck bilden, an Stelle von  $P_1$  (beliebig gewählt) die Mittelkraft  $R_{2-4}$  der anderen drei Kräfte  $P_2, P_3, P_4$  ein, und zeichnet man zu diesen ein Kraft- und Seileck, so bestimmt sich in letzterem die Lage von  $R_{2-4}$  durch das Zusammenschneiden der äußersten Seileckstrahlen  $a'$  und  $d'$  im Punkt  $i$ . Nur wenn  $P_1$  durch diesen Punkt geht, also die Wirkung von  $R_{2-4}$  aufhebt, ist Gleichgewicht möglich.

Jede andere Lage von  $P_1$  z. B. ( $P_1$ ) würde — da  $R_{2-4} = P_1$ , aber zu ihm entgegengesetzt gerichtet ist — die Ausbildung eines Kräftepaars  $P_1\lambda$  bedingen, das einen Gleichgewichtszustand ausschließt. Daraus folgt, daß Kräfte in der Ebene, die sich nicht in einem Punkte schneiden, nur alsdann unter sich im Gleichgewicht sind, wenn sowohl das Krafteck als auch das Seileck sich schließen.

Ist für die Aufzeichnung des Seilecks kein besonderer Durchgangspunkt oder ein sonstiger Anhalt gegeben, so ist es in der Regel ohne Bedeutung, von welchem Punkte man das Seileck beginnt; es entstehen, wenn man

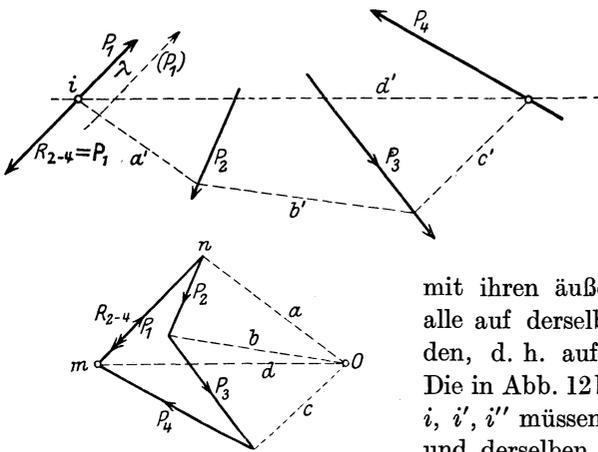


Abb. 21.

den Anfangspunkt verschieden wählt (Abb. 12b, Seite 7) lauter ähnliche Seileckzüge, welche nach den Lehren der ebenen Geometrie

mit ihren äußersten Strahlen sich alle auf derselben Geraden schneiden, d. h. auf der Mittelkraft  $R$ . Die in Abb. 12b ermittelten Punkte  $i$ ,  $i'$ ,  $i''$  müssen auch deshalb in ein und derselben Geraden liegen, weil durch sie alle die Mittelkraft  $R$  hin-

durchgeht und es zu den gegebenen Kräften nur eine in ihrer Lage ganz bestimmte Mittelkraft geben kann.

Werden zu den gegebenen Kräften zwei Kraftecke mit verschiedenen Polen (Abb. 22)  $O$  und  $O_1$  gezeichnet, so schneiden sich die entsprechenden Seileckstrahlen der beiden, den Polen entsprechenden Seilecke auf einer gemeinsamen Geraden, die der Verbindungslinie der beiden Pole parallel ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt Abb. 22 erkennen. Hier sind  $O$  und  $O_1$  die beiden Pole,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  bzw.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  die von ihnen zu den drei gegebenen Kräften gezogenen Krafteckstrahlen. Ihnen entsprechend sind in Abb. 22b die beiden Seilecke  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  und  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  gezeichnet und deren zusammengehörende Strahlen  $a'\alpha'$ ,  $b'\beta'$ ,  $c'\gamma'$  und  $d'\delta'$  je zum Schnitte gebracht. Betrachtet man in Abb. 22a das Dreieck  $qOO_1$ , so können in ihm die Strecken  $OO_1$ ,  $Oq$  und  $O_1q$  als Kräfte aufgefaßt werden, denen — da sie ein Dreieck bilden — in Abb. 22b drei Kräfte entsprechen müssen, die sich in einem Punkte schneiden (Punkt  $l$  in Abb. 22b); hier ist also  $l t \parallel OO_1$ .

In gleicher Weise lehrt die Betrachtung des Dreiecks  $O p O_1$  mit den Kraftstrahlen  $b$  und  $\beta$ , des Dreiecks  $O O n_1$  mit  $c$  und  $\gamma$  und endlich des Dreiecks  $O m O_1$  mit  $d$  und  $\delta$ , daß in Abb. 22b in den Punkten 2, 3 und 4 also in den Schnittpunkten der zugehörigen Seileckseiten ( $b'$  und  $\beta'$ ,  $c'$  und  $\gamma'$ ,  $d'$  und  $\delta'$ ), je eine Kraft  $\parallel OO_1$  liegen muß. Da  $OO_1$  im Krafteck als Mittelkraft der den Umfang dieses darstellenden Kräfte, die alle in Abb. 22b enthalten sind, aufgefaßt werden und somit in Abb. 22b nur einmal vorkommen kann, müssen die Punkte 1, 2, 3, 4 auf ein und derselben zu  $OO_1$  parallelen Geraden liegen. Diese Gerade nennt man **Polare**. Diese Gesetzmäßigkeit läßt sich in dem Satze zusammenfassen:

Verschiebt man den Pol im Krafteck, so schneiden sich die zugehörigen Seileckstrahlen auf **einer** zur Pol-

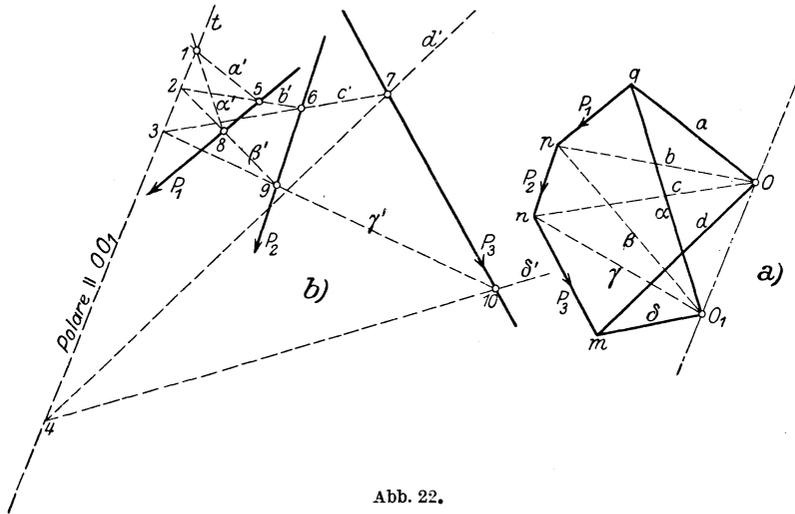


Abb. 22.

verschiebung parallelen Geraden, die als **Polare** bezeichnet wird.

Die Anwendung dieses Satzes sei an der Lösung der Aufgabe gezeigt: ein Seileck zu gegebenen Kräften durch drei gegebene Punkte zu legen.

Während man zu gegebenen Kräften durch einen und auch noch durch zwei Punkte eine unendlich große Anzahl von Seilecken legen kann, kann durch drei Punkte nur ein einziges gezeichnet werden (Abb. 23). Hier seien gegeben die drei Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und die Punkte  $A, B$  und  $C$ , durch die zu diesen Kräften ein Seileck gelegt werden soll. Zunächst werde unter Benutzung des beliebig angenommenen Poles  $O_1$  ein Krafteck  $a, b, c, d$  gezeichnet und durch den Punkt  $A$  gehend ein Seileck  $a', b', c', d'$  zu den gegebenen Kräften eingetragen. Soll nun das zweite Seileck auch durch  $A$  gehen, dann ist  $A$  ein Punkt, in dem sich späterhin zwei zugehörige Seileckstrahlen, der erste Strahl des ersten und der eines zweiten Seilecks, schneiden müssen. Mithin ist auch  $A$  ein Punkt der zum Seileck 2 gehörenden Polare; da diese sonst an keine Bedingungen gebunden ist, so

kann ihre Richtung durch  $A$  hindurch beliebig — in Abb. 23 wagerecht — angenommen werden. Demgemäß verschiebt sich auch der Pol  $O_1$  im Kräfteck jetzt in wagerechter Richtung. Soll das zweite Seileck zugleich durch Punkt  $B$  hindurchgehen, so muß die entsprechende Seite  $c'''$  mit  $c'$  vom ersten Seileck sich auf der Polare I schneiden. Da  $c'$  im Punkte  $m$  mit der Polare I zusammentrifft, muß mithin auch  $c'''$  durch diesen Punkt und  $B$  gehen, ist also in seiner Richtung bestimmt. Eine entsprechende Parallele im Kräfteck durch 3 zu  $c'''$  bestimmt demgemäß den Pol  $O_2$  des Kräftecks  $a'', b'', c'', d''$ , dessen zugehöriges Seileck durch  $A$  und  $B$  geht —  $a'', b'', c'', d''$ .

Soll nun das dritte Seileck durch die Punkte  $A, B$  und  $C$  gehen, so sind zunächst  $A$  und  $B$  weitere Punkte, in denen je die zugehörigen Seileckseiten sich schneiden

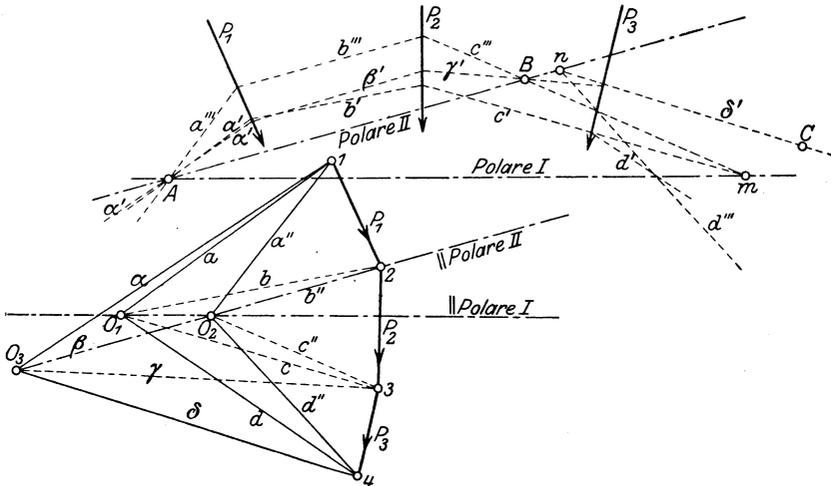


Abb. 23.

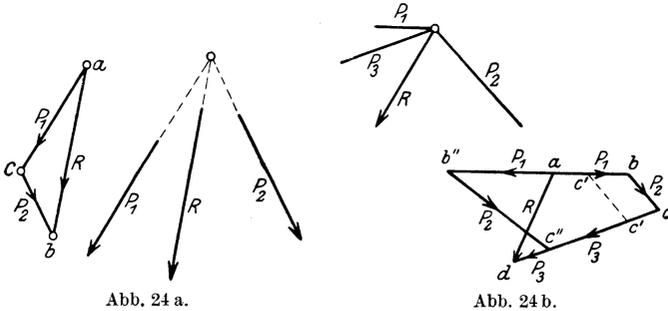
müssen. Demgemäß ist jetzt die Polare durch  $A$  und  $B$  bestimmt, also vollkommen festliegend. Auf einer Parallelen zu ihr durch  $O_2$  im Kräfteck muß mithin auch der Pol des Kräftecks für das Seileck durch die drei Punkte liegen. Dieser Pol  $O_2$  wird dadurch bestimmt, daß auf der Polare II sich auch die äußersten rechten Seileckseiten (entsprechend der Lage von  $C$ , rechts von  $P_3$ ) schneiden müssen; verlängert man demgemäß die Seite  $d'''$  des Seilecks 2 bis zu ihrem Schnittpunkte  $n$  mit Polare II, so muß auch durch  $n$  der Strahl  $\delta'$  des gesuchten Seilecks durch drei Punkte gehen. Da somit  $\delta'$  in seiner Richtung bekannt ist, ist auch Pol  $O_3$  im Kräfteck bestimmt und somit das Kräfteck  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und mit seiner Hilfe das durch die drei Punkte  $A, B, C$  gehende Seileck  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  zu finden.

### 5. Die Zerlegung der Kräfte.

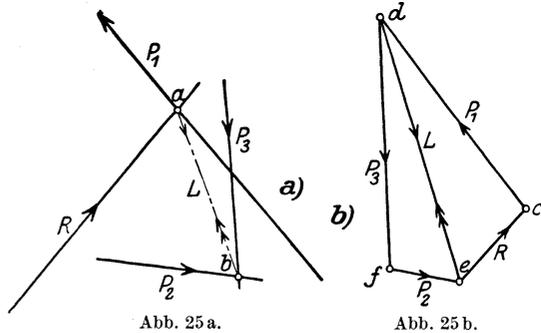
Ist eine Mittelkraft (Abb. 24a) gegeben =  $R$  und soll sie in zwei Kräfte, die mit ihr in einem Punkte sich schneiden, zerlegt werden, deren Richtungen bekannt sind, so ist die Lösung durch Aufzeichnung des Dreiecks  $abc$  gegeben. Schneiden sich mehr als zwei Kräfte mit  $R$  in einem Punkte, so kann  $R$  in eindeutiger Weise nicht mehr in sie zerlegt werden, da die Lösung unendlich viele Möglichkeiten zuläßt

(Abb. 24b). Hier könnte sich z. B. mit Hilfe der gegebenen Kraft  $R$  für die drei Krafrichtungen  $P_1, P_2, P_3$  ein Krafteck  $abcd$  oder  $ac'c'd$  oder  $ab''c''d$  usw. ergeben. Die Aufgabe ist nicht mehr lösbar. Es kann also eine Kraft höchstens in zwei Kräfte zerlegt werden, die mit ihr sich in einem Punkte schneiden.

Schneiden sich hingegen drei Krafrichtungen nicht in einem Punkte, so kann eine gegebene Kraft nach ihnen zerlegt werden



(Abb. 25). Hier ist  $R$  gegeben sowie die Lage der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  bestimmt, die mit  $R$  im Gleichgewicht sein sollen. Bringt man je zwei der Krafrichtungen zum Schnitt, also z. B.  $R$  und  $P_1$  in  $a, P_2$  und  $P_3$  in  $b$ , so kann man die beiden Schnittpunkte durch eine Hilfskraft  $L$  verbinden, die als Gleichgewichtskraft je zweier dieser Kräfte aufgefaßt werden kann, und nun zunächst für den Punkt  $a$  (da hier  $R$  bekannt ist) ein Kraftdreieck  $c, e, d$  zeichnen, in dem man eindeutig  $P_1$  und  $L$  findet. Zerlegt man alsdann  $L$  (Doppelpfeilrichtung!) in  $P_3$  und  $P_2$  — gemäß dem Zusammentreffen dieser 3 Kräfte in Punkt  $b$  —, so sind alle drei gesuchten Kräfte bestimmt. Hierbei wird  $L$  durch verschiedenes Befahren aus der Rechnung wieder herausgehoben und zudem die Richtung der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  bestimmt. Soll  $R$  ihnen das Gleichgewicht halten, so muß der Richtungspfeil im Krafteck stetig sein, d. h. durch  $R$  bestimmt, den in Abb. 25 b angegebenen Verlauf aufweisen, von dem aus alsdann die Eintragung der Krafrichtungen in Abb. 25 a erfolgt.



Die Aufgabe, eine Kraft nach drei Richtungen, die sich nicht in

einem Punkt schneiden, zu zerlegen, ist also lösbar; sie bietet eine der wichtigsten grundlegenden Lösungen der graphischen Statik. Auf ihrer Anwendung beruht das **Culmannsche Verfahren** zur Ermittlung von Stabkräften in Fachwerken.

Eine gegebene Kraft  $R$  nach mehr als drei Richtungen zu zerlegen, die nicht in einem Punkte zusammentreffen, ist nicht lösbar.

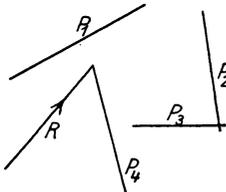


Abb. 26 a.

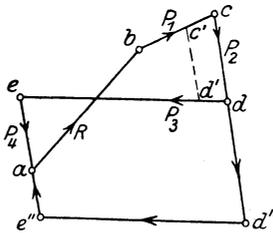


Abb. 26 b.

Auch hier ergeben sich — vgl. Abb. 26 a und b — unendlich viele Lösungsmöglichkeiten.

Sind die Kräfte parallel und handelt es sich (Abb. 27 a) darum, zu einer Kraft  $R$  zwei gleichgerichtete Seitenkräfte zu ermitteln, deren

Angriffspunkte  $m$  und  $n$  gegeben sind, so dient zur Lösung ein beliebiges, in die Kraftrichtungen hineingezeichnetes Seileck und das aus ihm, rückwärts gehend, entwickelte Krafteck. Hierbei ist das Seileck

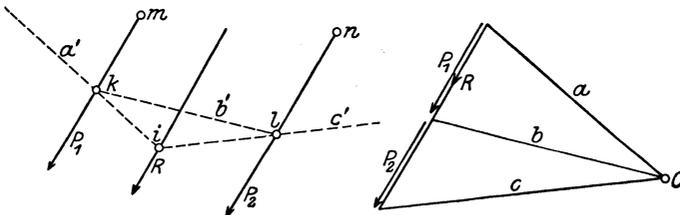


Abb. 27 a.

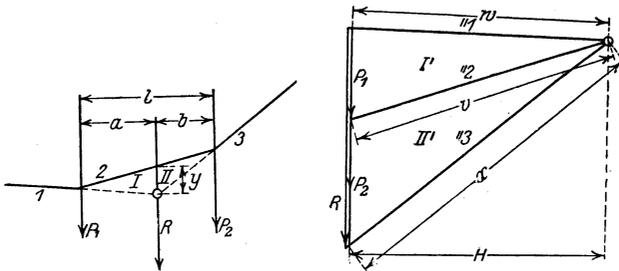


Abb. 27 b.

naturgemäß so zu zeichnen, daß sich seine äußersten Seiten auf der Mittelkraft schneiden (in  $i$ ), es ist also von den Seiten  $a'$  und  $c'$  auszugehen und erst dadurch die Lage von  $b'$  zu finden. Da im Punkt  $k$  drei Kräfte  $a', b'$  und  $P_1$ , ebenso in  $l, b', P_2$  und  $c'$  zusammentreffen,

ihnen aber im Krafteck je ein Dreieck entsprechen muß, so sind die Größen von  $P_1$  und  $P_2$  durch eine Parallele durch  $O$  zu  $b'$ , also durch den Krafteckstrahl  $b$  — die Schlußlinie des Seilecks — gegeben. Betrachtet man — Abb. 27b — im vorliegenden Falle die einzelnen im Seil- und Krafteck gebildeten, unter sich je ähnlichen Dreiecke ( $I$  und  $I'$  bzw.  $II$  und  $II'$ ), so ergibt sich:

$$a : y = H : P_1; \quad a = \frac{H \cdot y}{P_1},$$

$$b : y = H : P_2; \quad b = \frac{H y}{P_2}.$$

Hieraus folgt;  $a : b = P_2 : P_1$ , d. h. die Lage der Mittelkraft ist derartig bestimmt, daß man den senkrechten Abstand  $e$  zwischen den beiden Kräften umgekehrt proportional im Verhältnis der Kräfte teilt. Hieraus folgt weiter:

$$a = \frac{P_2 l}{R}; \quad b = \frac{P_1 l}{R}.$$

Aus

$$a : b = P_2 : P_1 \text{ folgt: } a + b : a = P_2 + P_1 : P_2$$

$$l : a = R : P_2; \quad a = \frac{P_2 l}{R}$$

und ebenso:

$$a + b : b = P_1 + P_2 : P_1; \quad b = \frac{P_1 l}{R}, \text{ w. z. b. w.}$$

Auf der Lösung der vorstehend behandelten Aufgabe beruht auch die weitere, zwei Kräfte zu finden, die durch bekannte Angriffspunkte ( $v$  und  $w$  in Abb. 28) gehend, einer Anzahl paralleler Kräfte das Gleichgewicht halten. Hier wird (Abb. 28) zu den gegebenen Kräften zunächst ein beliebiges Krafteck entworfen, mit seiner Hilfe durch ein Seileck die Lage der Mittelkraft  $R$  bestimmt und nunmehr  $R$  in der vorstehend gezeigten Weise in die Richtungen  $A$  und  $B$  zerlegt. Da die äußersten Seileckstrahlen hier bereits vorhanden sind, wird die Abb. 27a entsprechende Schlußlinie durch zwei Parallele zur gegebenen Kraftrichtung, durch die Angriffspunkte der gesuchten Kräfte gelegt, auf den äußersten Seileckseiten gefunden =  $v'w'$ . Eine Parallele zu  $v'w'$  im Krafteck schneidet alsdann auf der  $\Sigma P$  die gesuchten Kräfte  $A$  und  $B$  ab. Da sie den nach unten gerichteten senkrechten Kräften  $P$  das Gleichgewicht halten

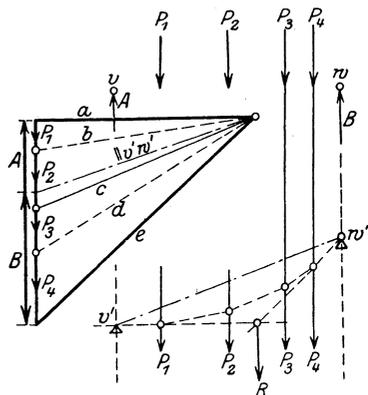


Abb. 28.

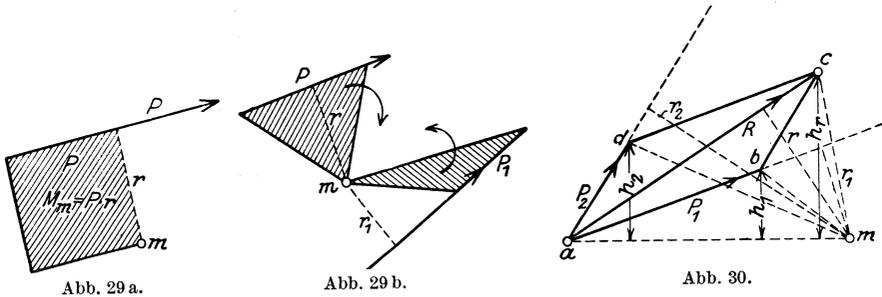
sollen, so sind sie senkrecht nach oben gerichtet. Dieser Lösung kommt deshalb eine besondere Bedeutung zu, weil in gleicher Art die Stützenwiderstände eines durch beliebige senkrechte Einzellasten beanspruchten Balkenträgers auf 2 Stützen gefunden werden.

## 2. Kapitel.

# Statische Momente von Kräften und Flächen und Trägheitsmomente von Flächen.

## 1. Statische Momente von Kräften und Flächen.

Unter dem Drehmoment oder dem statischen Moment einer Kraft um einen Punkt versteht man das Produkt aus der Kraft und dem vom Punkte auf diese gefällten Lot, dem Hebelarm der Kraft. Das Moment der Kraft  $P$  um Punkt  $m$  in Abb. 29 a



ist somit  $M_m = P \cdot r$ . Das Moment wird als + eingeführt, wenn es um den Punkt im Sinne des Uhrzeigers dreht, im entgegengesetzten Falle als - bezeichnet. Die Einheit, in der das Drehmoment einer Kraft sich zeigt, setzt sich also stets zusammen aus dem Produkt von Kraft und Abstand, erscheint demgemäß in  $t \cdot m$  oder in  $kg \cdot cm$ , oder in  $t \cdot cm$  bzw. in  $kg \cdot m$ . In der Regel ist es üblich,  $t$  mit  $m$ ,  $kg$  mit  $cm$  zu vereinigen, aber auch die Einheit  $t \cdot cm$  findet sich. Ein Moment  $P \cdot r$  kann zeichnerisch durch ein Rechteck dargestellt werden, dessen eine Seite in bestimmtem Kräftemaß aufgetragen =  $P$ , dessen andere =  $r$  ist (Abb. 29 a), oder auch durch den zweifachen Inhalt eines Dreiecks mit der Grundlinie =  $P$  und der Höhe =  $r$  wiedergegeben werden (Abb. 29 b).

Wählt man letztere Darstellungsart für die im Parallelogramm der Kräfte vereinigten 3 Kräfte (Abb. 30), so ergibt sich in bezug auf einen beliebigen Punkt  $m$  als Drehpunkt für das Moment, einmal für  $R$ , dann für die beiden Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$ :

$$M_{R_m} = R \cdot r = 2 \triangle a c m = 2 \cdot \frac{a m}{2} \cdot h_r = a m \cdot h_r,$$

$$M_{P_{1m}} = P_1 r_1 = 2 \triangle a b m = 2 \cdot \frac{a m}{2} \cdot h_1 = a m \cdot h_1,$$

$$M_{P_{2m}} = P_2 r_2 = 2 \triangle a d m = 2 \cdot \frac{a m}{2} \cdot h_2 = a m \cdot h_2.$$

Hieraus folgt:

$$M_{P_{1m}} + M_{P_{2m}} = P_1 r_1 + P_2 r_2 = a m (h_1 + h_2).$$

Da ferner  $h_1 + h_2 = h_3$  ist, so ist auch:

$$M_{R_m} = M_{P_{1m}} + M_{P_{2m}} = \sum M_P, \text{ d. h.:}$$

Das Moment der Mittelkraft auf einen Punkt ist gleich der Summe der Momente der Seitenkräfte, bezogen auf denselben Punkt.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes für zerstreut in der Ebene wirkende Kräfte läßt sich (Abb. 31) aus den folgenden Überlegungen finden: Zeichnet man zu den gegebenen Kräften ein Seileck, bestimmt in ihm die Lage der Mittelkraft, so muß in allen den einzelnen Punkten des Seilecks Gleichgewicht herrschen. Dies bedingt, daß die hier angreifenden Seilkräfte sich paarweise aufheben, d. h.  $I = I'$ ,  $II = II'$ ,  $III = III'$ ,  $IV = IV'$  ist. Da z. B. in  $a$  die Kräfte  $I'$ ,  $P_1$  und  $II$  im Gleichgewicht sind, so ist  $II'$  die Mittelkraft zu  $I'$  und  $P_1$  und somit, wenn man auf einen bestimmten Punkt der Ebene die Momente dieser Kräfte mit  $M_{II'}$ ,  $M_{I'}$ ,  $M_{P_1}$  bezeichnet, nach dem oben erwiesenen Satze:

$$M_{II'} = M_{I'} + M_{P_1}.$$

In gleicher Weise ergibt sich für Punkt  $b$ :

$$M_{III'} = M_{II'} + M_{P_2} = M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2}$$

und für Punkt  $c$ :

$$M_{IV'} = M_{III'} + M_{P_3} = M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3}.$$

Da ferner  $R$  die Mittelkraft aus  $IV'$  und  $I$  ist, so ist:

$$M_R = M_I + M_{IV'}$$

und somit:

$$M_R = M_I + M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3}.$$

Da die Momente  $M_I$  und  $M_{I'}$ , absolut unter sich gleich sind, sich aber wegen der entgegengesetzten Pfeilrichtung von  $I$  und  $I'$  aufheben, so wird:

$$M_R = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} = \sum M_P,$$

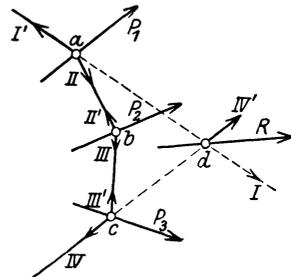


Abb. 31.

womit das obige Gesetz auch für in der Ebene zerstreut liegende Kräfte als richtig nachgewiesen ist.

Die zeichnerische Darstellung eines Momentes gegebener Kräfte.

Zeichnet man, Abb. 32, um das Moment der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$ , in bezug auf den Punkt  $m$  zu finden, zu diesem ein Kraft- und Seileck, konstruiert in letzterem die Mittelkraft  $R$  und zieht durch den gegebenen Punkt  $m$  eine Parallele zu  $R$ , die auf den äußersten Seileckstrahlen die Punkte  $\alpha, \beta$  bestimmt, so ist das Dreieck  $a, \beta, \gamma \sim$  Dreieck  $v, w, O$ , und somit verhält sich:

$$\alpha\beta : r = u : r = R : H.$$

Somit ist:  $u \cdot H = R \cdot r = \sum P \cdot r =$  dem Moment der Kräfte in bezug auf den Punkt  $m$ ; d. h. das Moment der gegebenen Kräfte ist gleich

dem Produkt aus der Polentfernung ihrer Mittelkraft ( $H$ ) und einer Strecke ( $u$ ), die parallel zu  $R$  und, durch den Momentendrehpunkt gelegt von den äußersten Seileckseiten abgeschnitten wird.

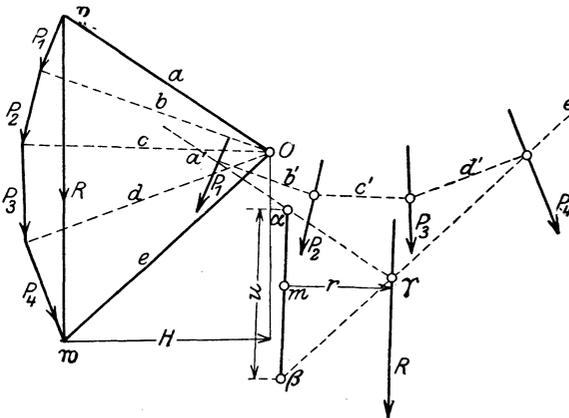


Abb. 32.

Man erkennt aus der graphischen Darstellung,

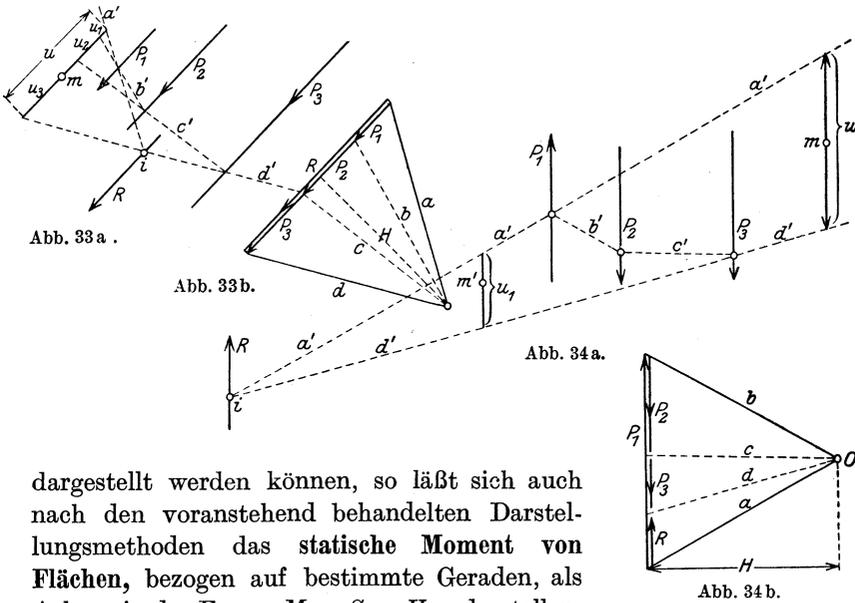
daß mit Hinausschiebung des Punktes  $m$  das Moment zunimmt, daß es so lange als + anzusprechen ist, solange der Punkt  $m$  links von  $R$  liegt, bei einer Rechtslage aber  $-$  wird. Zugleich zeigt sich, daß, wenn  $m$  in die Angriffslinie von  $R$  fällt,  $M = 0$  wird, da alsdann  $r = 0$  ist.

Für parallele Kräfte ist die zeichnerische Ermittlung die genau gleiche (Abb. 33 u. 34). Hier sind einmal die Kräfte gleich- (Abb. 33), das andere Mal verschieden gerichtet (Abb. 34). Im ersten Fall ist  $R$  die Mittelkraft der drei Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und das Moment  $M_m = u \cdot H$ . Zugleich zeigt die Darstellung auch die Momente der Einzelkräfte auf  $m$  in den Strecken  $u_1$  bzw.  $u_2$  bzw.  $u_3$ , multipliziert mit  $H$ . Hierbei sind die jeweilig letzten Seilseiten herangezogen, zwischen denen die Parallelen zu  $R$  durch  $m$  abgeschnitten sind. Es ergibt sich zugleich, da  $u_1 + u_2 + u_3 = u$  ist, auch hier die Richtigkeit des Gesetzes, daß

in bezug auf den gleichen Drehpunkt das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente der Einzelkräfte ist.

In Abb. 34 zeigt die Richtung von  $P_1$  nach oben, von  $P_2$  und  $P_3$  nach unten.  $R$  liegt hier links von  $P_1$ , das Moment auf  $m$  ist:  $M_m = u \cdot H$ ; es ist nach der Pfeilrichtung von  $R$  positiv, da  $R$  um  $m$  im Sinne des Uhrzeigers dreht. Das gilt in gleicher Weise von  $M_{m'} = u_1 H$ ; für Punkt  $i$  ist  $M_i = 0$ .

Da, wie bereits auf S. 9 hervorgehoben ist, Flächenteile als Einzelkräfte aufgefaßt und in einem entsprechenden Maßstab



dargestellt werden können, so läßt sich auch nach den voranstehend behandelten Darstellungsmethoden das **statische Moment von Flächen**, bezogen auf bestimmte Geraden, als Achsen in der Form:  $M = S = H \cdot u$  darstellen.

Handelt es sich (Abb. 35) um das statische Moment der Fläche  $rstuvw$  in bezug auf die Achse  $x$ , so wird die Fläche in 2 Dreiecke, 1 Trapez und 2 Rechtecke zerlegt, in deren Schwerpunkten je die Einzelflächenkräfte  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ , und zwar parallel zu der Achse  $x$ , angreifen.

Das statische Moment dieser Flächen findet alsdann seinen Ausdruck in der Gleichung:

$$S_x = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + f_4 y_4 + f_5 y_5.$$

Um diesen Ausdruck zeichnerisch zu gewinnen, wird das **Krafteck** mit der Polweite  $H$  gezeichnet und mit seiner Hilfe das **Seileck** sowie aus ihm die Strecke  $u$  bestimmt. Alsdann ist:  $S_x = u \cdot H$ . Hierbei ist  $u$  im Maßstabe der Zeichnung,  $H$  im Kräftemaßstab des Kraftecks, also in  $\text{cm}^2$  o. dgl. Einheit zu messen; alsdann ergibt sich auch  $S_x$  als

eine Größe dritten Grades, als das Produkt aus einer Fläche und einem Hebelarme bzw. der Summe solcher. Das Seileck gestattet zu

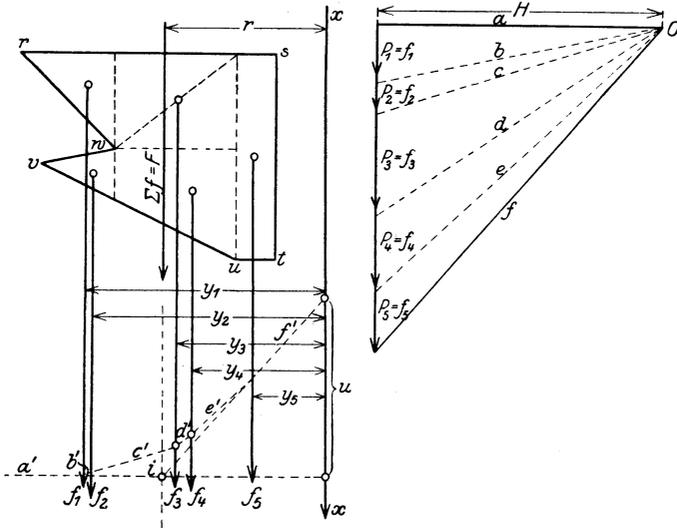


Abb. 35.

gleicher Zeit die Auffindung der Lage von  $\sum f = F$  und somit als Kontrollrechnung die Bestimmung von  $S_x$  in der Form:  $S_x = F \cdot r = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + f_4 y_4 + f_5 y_5$  (vgl. Abb. 35).

In gleicher Weise ist in Abb. 36 das statische Moment des Pfeilerquerschnittes, bezogen auf seine untere Begrenzungslinie  $xx$ , in der Form:  $S_x = uH = R \cdot r$  dargestellt. Hier sind die Einzelkräfte  $f$  naturgemäß wieder parallel zu  $xx$  eingeführt.

Rechnerisch werden Momente von Kräften durch einfache Summenbildung der Produkte aus Kraft  $\times$  Hebelarm gebildet, wobei naturgemäß auf den Drehsinn zu achten ist. Hierbei

kann auch die Größe und Lage der Mittelkraft gegebener Kräfte bestimmt werden.

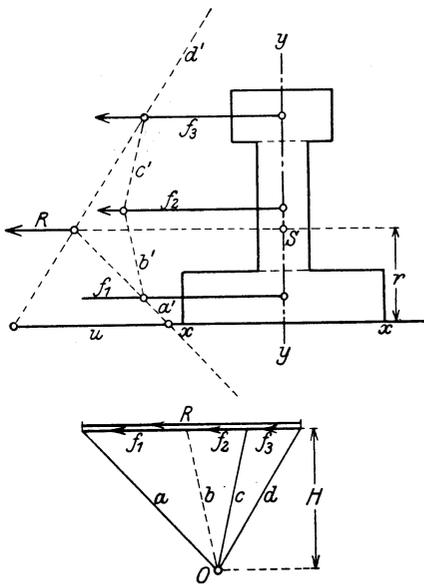


Abb. 36.

Beispielsweise ergibt sich für die in Abb. 37 dargestellten Kräfte  $+P_1 - P_2$  und  $-P_3$  die Größe  $R = P_1 - P_2 - P_3 = 12000 - 6000 - 2000 = 4000$  kg und die Entfernung dieser Mittelkraft von einem von  $P_1$  senkrecht um 400 cm nach links entfernt angenommenen Drehpunkte aus der Beziehung:

$$-R \cdot r - P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = 0$$

$$r = \frac{P_1 x_1 - P_2 x_2 - P_3 x_3}{R} = \frac{12000 \cdot 400 - 6000 \cdot 500 - 2000 \cdot 600}{4000} \text{ kg} \cdot \text{cm} = 150 \text{ cm}.$$

**Kräftepaare.**

Sind 2 Kräfte je  $= P$  einander parallel und gleich, aber in ihrer Richtung verschieden, so bilden sie, wie schon auf S. 5 erwähnt, ein Kräftepaar  $P \cdot a$ , wenn  $a$  ihr senkrechter Abstand ist. Ein jedes

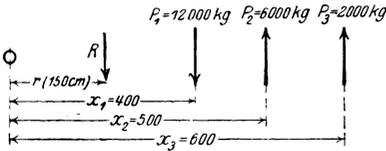


Abb. 37.

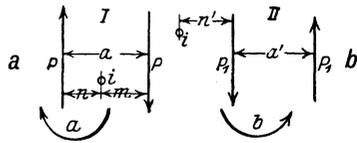


Abb. 38.

Kräftepaar bedingt einen durch die Krafrichtung bedingten Drehsinn (Abb. 38a, b). Hier dreht das Kräftepaar  $P \cdot a$  im Sinne des Uhrzeigers, das Kräftepaar  $P_1 \cdot a'$  in entgegengesetztem Sinne. Bildet man für einen zwischen den Kräften liegenden Punkt ( $i$  in Abb. 38a) das Moment der Kräfte  $P$ , so wird  $M_i = P \cdot n + P \cdot m = P(n + m) = P \cdot a$ . Das gleiche ergibt sich für den außerhalb liegenden Punkt  $i$  in Abb. 38b:  $M = P_1 n' - P_1(n' + a') = -P_1 a'$ . Eine

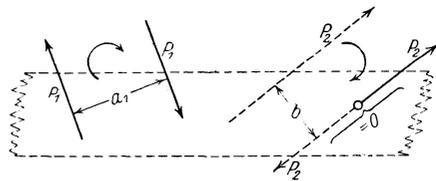


Abb. 39.

Anzahl Kräftepaare kann man stets durch ein resultierendes Kräftepaar oder Ersatzkräftepaar ersetzen:

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4 + P_5 a_5 \dots = P \cdot a.$$

Hierbei ist naturgemäß entweder  $P$  oder  $a$  beliebig wählbar, da unendlich viele Lösungen möglich sind.

Handelt es sich darum, daß an einem Konstruktionsteil ein Kräftepaar  $P_1 a_1$  und eine Einzelkraft  $= P_2$  angreift, so kann man zunächst die Wirkung von  $P_1 a_1$  durch ein in gleichem Sinne drehendes Ersatzkräftepaar  $P_2 b$  ersetzen:  $b = \frac{P_1 a_1}{P_2}$ , und alsdann dies Kräftepaar so anbringen, daß es — Abb. 39 — mit einer seiner Kräfte sich unmittelbar an die Kraft  $P_2$  anschließt. Hier findet alsdann eine Ausgleichung zweier einander entgegengesetzter Kräfte  $P_2$  statt und es verbleibt als gleich-

zeitige Wirkung des Kräftepaars  $P_1 a_1$  und der Einzelkraft  $P_2$  nur eine solche  $= P_2$ , allerdings gegenüber ihrer Anfangslage um das Maß  $b$  verschoben.

### 2. Trägheitsmomente von Flächen.

Unter dem Trägheitsmoment ( $J$ ) einer Fläche, bezogen auf eine Achse, versteht man das Produkt der Fläche bzw. ihrer Einzelteile und des Quadrates ihres Abstandes bzw. der Einzelabstände von der Achse (Abb. 40):

$$J_y = F x_0^2 = f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^2 + f_4 x_4^2 + f_5 x_5^2 + f_6 x_6^2 = \sum f x^2.$$

Hierbei sind also die  $f$ -Kräfte wiederum parallel zu der Achse einzuführen, auf die die Trägheitsmomente bezogen werden sollen, so daß die  $x$ -Werte die senkrechten Abstände der  $f$ -Kräfte von der betreffenden Achse darstellen.

Der Ausdruck  $J_y = \sum f x^2$  gestattet eine zeichnerische Darstellung unter Verwendung des Kraft- und Seilecks. Handelt es sich in Abb. 41 um die Auffindung des Trägheitsmomentes in bezug auf die hier senkrecht angenommene

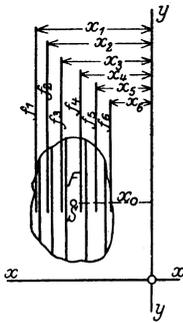


Abb. 40.

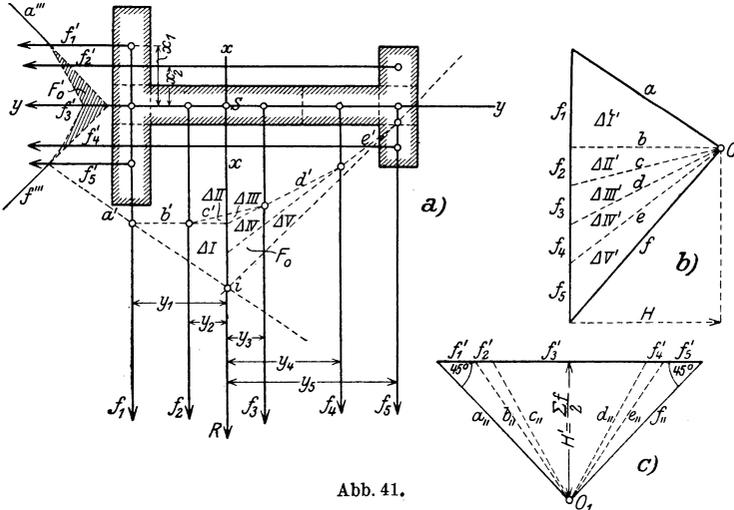


Abb. 41.

$x$ -Achse — durch den noch nicht bekannten Schwerpunkt des Querschnittes gelegt —, also um die Darstellung des Ausdrucks:

$$J_x = \sum f \cdot y^2,$$

so wird zunächst für die alsdann in senkrechter Richtung einzuführenden  $f$ -Kräfte das Krafteck  $a b c d e f$  in Abb. 41b gezeichnet und mit

seiner Hilfe das Seileck  $a' b' c' d' e' f'$  in Abb. 41a gefunden. Die äußersten Seiten dieses liefern im Punkte  $i$  den Angriffspunkt der Mittelkraft  $R = \sum f = F$  und somit den Schwerpunkt  $S$  und die senkrechte Schwerachse  $xx$  des Querschnittes. Bringt man auf dieser alle die einzelnen Seileckseiten zum Schnitte, so entstehen im Anschlusse an das Seileck fünf Dreiecke  $\triangle I, \triangle II, \triangle III, \triangle IV$  und  $\triangle V$ , die den entsprechenden Dreiecken  $\triangle I', \triangle II', \triangle III', \triangle IV', \triangle V'$  im Krafteck, da sie je von parallelen Seiten umschlossen sind, ähnlich sind. Da ähnliche Dreiecke sich verhalten wie die Quadrate ihrer Höhen, so folgt z. B. für das Dreieckpaar  $\triangle I$  und  $\triangle I'$ :

$$\triangle I : \triangle I' = y_1^2 : H^2; \quad \triangle I = \frac{\triangle I' y_1^2}{H^2}.$$

Da nun ferner:

$$\triangle I' = \frac{f_1 H}{2}$$

ist, so wird weiter:

$$\triangle I = \frac{f_1 H y_1^2}{2 H^2}$$

oder:

$$a) f_1 y_1^2 = \triangle I \cdot 2 H.$$

Eine gleiche Beziehung läßt sich für die Dreiecke  $\triangle II, \triangle III, \triangle IV$  und  $\triangle V$  aufstellen, deren Höhen in bezug auf  $xx = y_2, y_3, y_4, y_5$  sind, also gleich dem Abstände der Kräfte  $f_2, f_3, f_4, f_5$  von der  $xx$ -Achse:

$$b) f_2 y_2^2 = \triangle II \cdot 2 H,$$

$$c) f_3 y_3^2 = \triangle III \cdot 2 H,$$

$$d) f_4 y_4^2 = \triangle IV \cdot 2 H,$$

$$e) f_5 y_5^2 = \triangle V \cdot 2 H.$$

Addiert man die Gleichungen  $a-e$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + f_4 y_4^2 + f_5 y_5^2 &= J_x \\ &= (\triangle I + \triangle II + \triangle III + \triangle IV + \triangle V) \cdot 2 H = F_0 \cdot 2 H, \end{aligned}$$

wenn  $F_0$  die Gesamtfläche darstellt, welche umschlossen wird von dem Seileck und seinen äußersten Seiten. Es erscheint also das Trägheitsmoment in der Form:

$$J_x = F_0 \cdot 2 H^3.$$

Wählt man nicht, wie zunächst angenommen, den Polabstand beliebig, sondern zeichnet man im Krafteck die äußersten Kraftstrahlen je

<sup>1)</sup> Hierbei ist  $F_0$  im Maßstab der Zeichnung,  $H$  im Maßstab des Kraftecks, also in der Einheit der Flächenkräfte, zu messen.  $J_x$  erscheint demgemäß, wie es sein muß, als eine Größe vierter Ordnung.

unter  $45^\circ$  zur Krafrichtung, so wird:

$$H = \frac{\sum f}{2} = \frac{F}{2}$$

und somit:

$$J_x = F_0 \cdot 2 H = F_0 \cdot F.$$

In gleicher Weise ist in Abb. 41a (links) unter Anwendung des Kraftecks in Abb. 41c, also unter Einführung der Flächenkräfte als wagerechte Kräfte, ein Seileck und eine Fläche  $F'_0$  gefunden worden, mit deren Hilfe in entsprechender Weise das Trägheitsmoment der Fläche, bezogen auf die wagerechte Schwerachse, abgeleitet wird:

$$J_y = \sum f x^2 = F'_0 \cdot 2 H' = F'_0 F.$$

Hierbei ist der Querschnitt in die Teile  $f'_1 = f'_5$ ,  $f'_2 = f'_4$  und  $f'_3$  zerlegt worden.

Die Ermittlung von Trägheitsmomenten auf zeichnerischem Wege wird alsdann am Platze und der rechnerischen Behandlung vorzuziehen sein, wenn der Querschnitt verwickeltere Formen aufweist.

Bei der graphischen Lösung ist zu beachten, daß, je schmalere Flächenteilchen genommen werden, je mehr Kräfte also eingeführt werden, um so genauer man also arbeitet, das Seileck immer mehr in die Form einer Kurve übergeht. Letzteres sollte deshalb im vorliegenden Falle durch eine die einzelnen Seileckseiten berührende Kurve auch ersetzt werden, die ihren Anfangs- bzw. Endpunkt an den Stellen hat, welche den äußersten Querschnittspunkten entsprechen. Demgemäß ist die Fläche  $F_0$  durch die äußersten Seileckstrahlen bzw. durch eine in sie eingezeichnete berührende Kurve zu umschließen, um möglichst genaue Rechnungsergebnisse zu erzielen.

Liegt ein aus Beton und Eisen gebildeter Verbundquerschnitt vor, so ist der Gang der graphischen Auffindung des Trägheitsmoments auf eine Achse genau der gleiche. Auch hier ist, wie auf S. 11, zu beachten, daß die einzelnen in Frage kommenden Eisenquerschnitte bei Bildung der Kräfte  $f_e$  in der Form  $15 \cdot f_e$  in Rechnung zu stellen sind; auch hier wird — wie auf S. 11 — die Schwächung des Betons durch die Eiseneinlagen nicht berücksichtigt.

## Zweiter Teil.

# Die Grundzüge der Festigkeitslehre.

### Vorbemerkung.

In der Festigkeitslehre werden die Formänderungen verfolgt, welche Körper unter den sehr verschiedenartig möglichen Belastungen erfahren, und die Abmessungen und Formen der Körper so bestimmt, daß die Formänderungen und die durch sie hervorgerufenen Spannungen in bestimmten Grenzen verbleiben, bzw. der Nachweis erbracht, daß dies bei gegebenen Abmessungen und Belastungen zu erwarten steht.

Unter der Festigkeit eines Körpers, Stabes usw. wird der Widerstand verstanden, den der Körper einer Trennung seiner Teile durch den Zusammenhang seiner kleinsten Teilchen wirksam entgegensetzt. Hierbei kann die Beanspruchung des Körpers eine einheitliche, nur eine einzige bestimmte Art von Formänderungen hervorrufende, sein, es handelt sich um einfache Festigkeit, oder es kann der Körper durch mehrere gleichzeitig und verschieden einwirkende Belastungen bedingt, Formänderungen nach verschiedener Richtung erfahren — zusammengesetzte Beanspruchung und Festigkeit.

Für die sich hier abspielenden Vorgänge ist die Kenntnis der Schwerpunktslage der Querschnitte und ihrer höheren Momente — der Trägheits- und Zentrifugalmomente — von besonderer grundlegender Bedeutung; deshalb soll auch zunächst auf diese Fragen, alsdann auf die verschiedenen Arten der Festigkeit eingegangen werden.

### 3. Kapitel.

## Die rechnerische Ermittlung von Schwerpunkten, statischen Momenten und Trägheitsmomenten.

### 1. Die Schwerpunktsbestimmung für ebene Flächen.

Die Auffindung von Schwerpunkten ebener Flächen hat für die Aufgabe der Festigkeitslehre insofern eine grundlegende Bedeutung, als sie für die Ermittlung der Spannungsverteilung in gebogenen Quer-

schnitten, für den Verlauf von Schubspannungen usw. unentbehrlich ist. Zur Ermittlung der Schwerpunkte macht man von dem vorstehend (S. 21) bewiesenen Satze Gebrauch, daß die Summe der statischen Momente der Einzelkräfte gleich dem statischen Moment der Mittelkraft aus diesen ist, oder auf ebene Flächen und deren Teile bezogen, daß die Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteile gleich dem Moment der Gesamtfläche ist. Dabei ist es ohne Bedeutung, auf welche Achse diese Beziehung angewendet wird, da das Gesetz unabhängig von einer besonderen Achslage gilt. Hat man in Abb. 42 die Fläche  $F$ , deren Schwerpunkt  $S$  von der Achse  $y$  den Abstand  $x_0$  besitzt, und wird sie in einzelne schmale, zu  $y$  parallele Streifen  $= f_1, f_2, f_3$  usw. zerlegt, deren Abstände  $x_1, x_2, x_3$  usw. sind, so ist mithin:

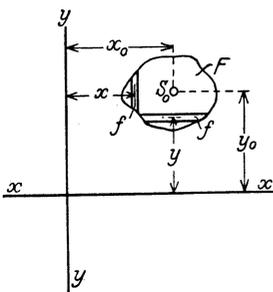


Abb. 42.

$x_0 F = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots = \sum f \cdot x$

$$x_0 = \frac{\sum f x}{F} = \frac{\sum f x}{\sum f}.$$

Bezeichnet man  $\sum f x$  mit  $M_y$ , da sie das Moment aller Flächenteilchen auf die  $y$ -Achse bezogen darstellt, so wird:

$$x_0 = \frac{M_y}{F}.$$

Ebenso läßt sich für die  $x$ -Achse die entsprechende Beziehung für den Schwerpunkts-Abstand  $y_0$  der Fläche  $F$  von ihr ableiten:

$$y_0 = \frac{\sum f y}{F} = \frac{M_x}{F}.$$

Nimmt man die Flächenteilchen sehr klein, so tritt an Stelle des  $\sum$ -Zeichens das  $\int$ .

$$x_0 = \frac{\int f y}{F}, \quad y_0 = \frac{\int f x}{F}.$$

Verschiebt man die  $y$ -Achse um die Strecke  $e$  nach links, so nehmen alle  $x$ -Werte um dieses Maß  $e$  zu, und es ergibt sich:

$$(x_0 + e) = x'_0 = \frac{\sum f(x + e)}{F} = \frac{\sum f x + e \sum f}{F} = \frac{\sum f x + F e}{F}.$$

Es vermehrt sich hierbei also das statische Moment  $M_y$  um die Größe  $F \cdot e$ , eine Beziehung, von der man unter Umständen Gebrauch macht.

$$x'_0 = \frac{M_y + F e}{F}.$$

Ist die gegebene ebene Fläche nach einer Richtung oder nach beiden ( $x$  und  $y$ ) symmetrisch, so vereinfacht sich die Rechnung, da alsdann der Schwerpunkt in der Symmetrieachse bzw. im Schnittpunkt dieser liegt. Hieraus geht unmittelbar die Lage des Schwerpunktes bei einem

Parallelogramm und dessen Sonderformen dem Rechteck- und Quadratquerschnitte, sowie beim Kreis- und Ringquerschnitte als in dem Schnittpunkt der Diagonalen bzw. in Kreismitte liegend, hervor.

Die Dreiecksfläche (Abb. 43) zerlegt man in kleine Streifen parallel zur Grundlinie, deren Einzelschwerpunkte sämtlich auf der Mittellinie des Dreiecks durch  $C$  liegen. In bezug auf die Spitze des Dreiecks gilt:

$$y_0 = \frac{\sum f y}{F} = \frac{\int_0^h x y dy}{\frac{a h}{2}}.$$

Da  $x : y = a : h$  ist, so wird:

$$x = \frac{y \cdot a}{h}$$

und somit:

$$y_0 = \frac{\int_0^h \frac{a}{h} y^2 dy}{\frac{a h}{2}} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3} h.$$

Der Schwerpunkt liegt in der Symmetrieachse, und zwar um  $\frac{2}{3} h$  von der Spitze und  $\frac{1}{3} h$  von der Grundlinie aus entfernt.

Naturdemäß kann man, da das Dreieck drei Mittellinien hat, den Schwerpunkt auch durch den Schnittpunkt von je zweien von ihnen finden.

Liegt (Abb. 44) ein Trapez vor, so kann dies in ein Parallelogramm und ein Dreieck zerteilt werden. Alsdann folgt, bezogen auf die kürzere Parallellseite:

$$\begin{aligned} y_0 F &= y_0 \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h = \sum f \cdot y = \frac{b_2 - b_1}{2} \cdot h \frac{2}{3} h + b_1 \cdot \frac{h^2}{2} \\ &= \frac{h^2}{6} (2b_2 - 2b_1 + 3b_1) = \frac{h^2}{6} (b_1 + 2b_2). \\ y_0 &= \frac{h(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)}. \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt liegt zudem auf der Mittellinie des Trapezes.

Für den T-Querschnitt in Abb. 45 folgt, bezogen auf die Grundlinie  $b_2$ :

$$\begin{aligned} y_0 F &= y_0 (b_2 \cdot h_2 + b_1 h_1) = \sum f \cdot y = b_2 h_2 \cdot \frac{h_2}{2} + b_1 h_1 \left( h_2 + \frac{h_1}{2} \right) \\ y_0 &= \frac{\frac{b_2 h_2^3}{2} + b_1 h_1 \left( h_2 + \frac{h_1}{2} \right)}{b_2 \cdot h_2 + b_1 h_1} = \frac{b_2 h_2^3 + b_1 h_1 (2h_2 + h_1)}{2(b_2 h_2 + b_1 h_1)}. \end{aligned}$$

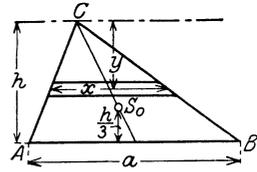


Abb. 43.

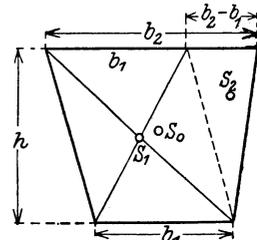


Abb. 44.

Will man denselben Querschnitt auf die schmale Seite  $b_1$  beziehen, so wird in gleichem Sinne:

$$y'_1 = \frac{b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Man überzeugt sich, als Probe für die Rechnung, daß  $y_0 + y'_1$  den Wert  $h_1 + h_2$  ergibt<sup>1)</sup>.

Für das Winkeleisen in Abb. 46 gilt für  $y_0$  dieselbe Gleichung, da es für die statischen Momente, bezogen auf die wagerechte Achse, ohne Bedeutung ist, ob das Rechteck  $F_2$  die Lage in Abb. 45 oder 46 besitzt. Ist das Winkeleisen nicht symmetrisch, sind also seine beiden Flanschen verschieden lang, so ist auch die gleiche Beziehung für die  $y$ -Achse aufzustellen. Hier ergibt sich:

$$x_0 F = x_0 (b_1 h_1 + b_2 h_2) = b_1 h_1 \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \frac{b_2}{2},$$

$$x_0 = \frac{h_1 b_1^2 + h_2 b_2^2}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Aus  $y_0$  und  $x_0$  folgt die Lage von  $S_0$ . Bei symmetrischem Winkel sind beide Werte gleich; hier kann die Schwerpunktslage auch durch Kon-

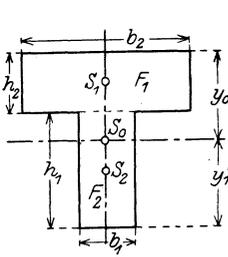


Abb. 45.

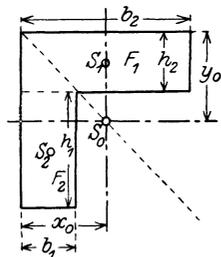


Abb. 46.

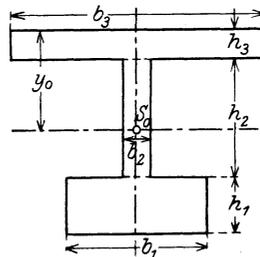


Abb. 47.

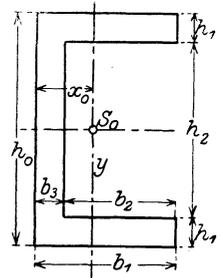


Abb. 48.

struktion der die Winkel halbierenden Diagonal-Symmetrieachse nach Bestimmung des Wertes  $y_0$  gefunden werden (Abb. 46).

In gleicher Weise ergibt sich für die Querschnitte in Abb. 47 und 48:

$$y_0 = \frac{b_3 h_3^2 + b_2 h_2 (2h_3 + h_2) + b_1 h_1 (2h_3 + 2h_2 + h_1)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)}$$

bzw. für Abb. 48:

$$y_0 = \frac{h_0}{2}; \quad x_0 = \frac{\frac{2h_1 b_1^2}{2} + \frac{h_2 b_3^2}{2}}{2b_1 h_1 + b_3 h_2} = \frac{2h_1 b_1^2 + h_2 b_3^2}{2(2b_1 h_1 + b_3 h_2)}.$$

1)

$$\begin{aligned} & \frac{b_2 h_2^2 + b_1 h_1 (2h_2 + h_1) + b_1 h_1^2 + b_2 h_2 (2h_1 + h_2)}{2(b_2 h_2 + b_1 h_1)} \\ &= \frac{2b_2 h_2^2 + 2b_1 h_1^2 + 2b_1 h_1 h_2 + 2b_2 h_1 h_2}{2(b_2 h_2 + b_1 h_1)} \\ &= \frac{2(b_2 h_2 + b_1 h_1)(h_1 + h_2)}{2(b_2 h_2 + b_1 h_1)} = h_1 + h_2 \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Die Guldinsche Regel für Umdrehungskörper und ihre Anwendung zur Bestimmung der Schwerpunkte von durch Kurven begrenzten Flächen.

Dreht sich in Abb. 49 das Rechteck  $ABCD$  um die  $y$ -Achse, die parallel zu  $AD$  ist, so bildet sich ein Hohlzylinder von dem Inhalte:

$$V = \pi (r_2^2 - r_1^2) h = \pi (r_2 + r_1) (r_2 - r_1) h = \pi (r_2 + r_1) b \cdot h = 2 \pi \varrho F,$$

da  $\varrho$ , der Schwerpunktsabstand des Rechtecks von der Drehachse,

$$\varrho = r_2 - \frac{b}{2} = r_2 - \left( \frac{r_2 - r_1}{2} \right) = \frac{r_2 + r_1}{2}$$

ist. Demgemäß ist der Inhalt des Umdrehungskörpers ( $V$ ) gleichdem Wege des Schwerpunkts ( $2 \varrho \pi$ ), multipliziert mit der Fläche ( $F$ ).

Kennt man  $F$  und  $V$ , so kann aus dieser Regel die Größe von  $\varrho$ , d. h. die

Lage des Schwerpunkts, abgeleitet werden.

Bei der Halbkreisfläche (Abb. 50 a) entsteht durch Drehung um den Durchmesser eine Kugel mit  $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$ ; da  $F = \frac{r^2 \pi}{2}$  ist, so wird mithin:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi = 2 \pi \varrho \cdot \frac{r^2 \pi}{2}.$$

$$\varrho = \frac{\frac{4}{3} r^3 \pi}{2 \pi \cdot \frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Bei der halben Kreis-Ringfläche (Abb. 50 b) wird:

$$V = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3); \quad F = \frac{(r^2 - r_1^2) \pi}{2}$$

und somit:

$$\varrho = \frac{\frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3)}{2 \pi \frac{(r^2 - r_1^2) \pi}{2}} = \frac{4(r^3 - r_1^3)}{3\pi(r^2 - r_1^2)}.$$

Liegt ein Kreisabschnitt vor, begrenzt durch die Sehne  $2 \frac{s}{2} = s$  in Abb. 51 a, so ist zunächst der Körperinhalt zu finden, der bei der Drehung der Fläche  $F E H D G$  entsteht, also der Inhalt der Kugel ver-

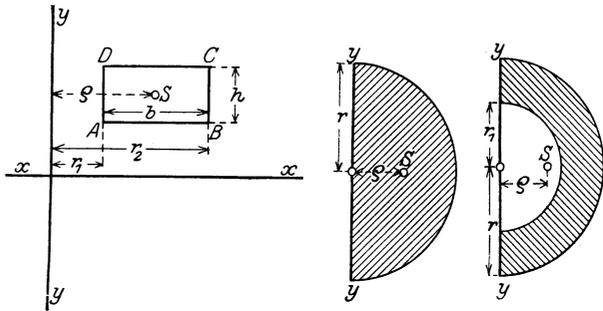


Abb. 49.

Abb. 50 a.

Abb. 50 b.

mindert um je zwei Kugelabschnitte, die durch die Drehung der Teile  $FEB$  und  $AGD$  gegeben sind. Für einen solchen Körper gilt die mathematische Beziehung:

$$V_1 = \frac{\pi s}{6} (6a^2 + s^2) = \pi s a^2 + \frac{\pi s^3}{6},$$

worin  $a$  den Abstand der Sehne  $s$  vom Mittelpunkt  $M$  des Kreises darstellt.

Von diesem Körper  $V_1$  ist der bei Drehung des Kreisabschnittes sich bildende innere Zylinder  $V_2 = a^2\pi s$  abzuziehen; d. h. es wird:

$$V = a^2\pi s + \frac{\pi s^3}{6} - a^2\pi s = \frac{\pi s^3}{6},$$

d. h. der Inhalt  $V$  ist gleich dem einer Kugel mit dem

Radius  $= \frac{s}{2}$ .) Die Fläche  $F$  des Kreisabschnittes folgt (Abb. 51 a) aus:

$F =$  Kreisabschnitt  $MEHD$

$- \triangle MED$

$$= r^2\pi \frac{\gamma^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}r^2 \sin \gamma$$

$$= \frac{r^2}{2} \left( \pi \frac{\gamma^\circ}{180^\circ} - \sin \gamma \right).$$

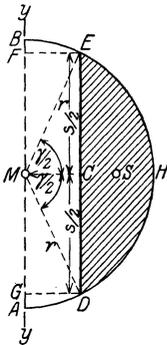


Abb. 51 a.

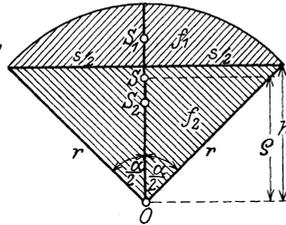


Abb. 51 b.

Demgemäß wird:

$$\varrho = \frac{V}{2\pi \cdot F} = \frac{\frac{s^3\pi}{6}}{6 \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \left( \pi \frac{\gamma^\circ}{180^\circ} - \sin \gamma \right)} = \frac{\frac{s^3}{6}}{6r^2 \left( \pi \frac{\gamma^\circ}{180^\circ} - \sin \gamma \right)}.$$

Hierin ist  $\gamma$  zu finden aus:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{2r}.$$

Nach Kenntnis des Schwerpunktes des Kreisabschnittes ist dann auch der Schwerpunkt des Kreisabschnittes bekannt, da man ihn aus dem Kreisabschnitt und dem Dreieck ableiten kann, von denen beiden die Schwerpunkte bekannt sind. Hier gilt (Abb. 51 b):

$$\varrho \cdot \sum f = f_1\varrho_1 + f_2\varrho_2,$$

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \left[ \frac{r^2}{2} \left( \pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} - \sin \alpha \right) + \frac{s \cdot h}{2} \right] \\ = \frac{r^2}{2} \left( \pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} - \sin \alpha \right) \cdot \frac{s^3}{6r^2 \left( \pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} - \sin \alpha \right)} + \frac{s \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} h. \end{aligned}$$

1) Für  $r = \frac{s}{2}$  wird:  $V = \frac{4 \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^3 \pi}{3} = \frac{4s^3\pi}{8 \cdot 3} = \frac{s^3\pi}{6}.$

Setzt man hierin:

$$s = 2r \sin \frac{\alpha}{2}; \quad h = r \cos \frac{\alpha}{2},$$

so ergibt sich nach Umrechnung:

$$\varrho = \frac{240 r \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha} \text{ (1)}.$$

Ist der Schwerpunkt des Kreisausschnittes bekannt, so kann auch der des Ringausschnittes abgeleitet werden aus dem Unterschiede eines größeren und kleineren Ausschnittes mit demselben Mittelpunkt und Mittelwinkel. Das Endergebnis der Rechnung ist (Abb. 52):

$$\varrho = \frac{240 r \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha} \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}.$$

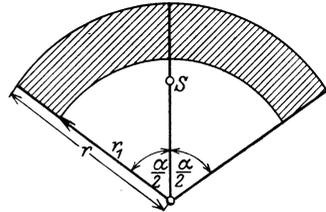


Abb. 52.

Setzt man:

$$\frac{\alpha}{2} = 90^\circ,$$

liegt also ein Halbkreisring vor, so wird  $\sin \alpha = 1$ , und es ergibt sich, wie schon auf S. 33 entwickelt wurde:

$$\varrho = \frac{4 (r^3 - r_1^3)}{3 \pi (r^2 - r_1^2)}.$$

### Die Schwerpunktsbestimmung von Linien.

Auch hier wird die Guldinsche Regel, und zwar in Verbindung mit Drehungsflächen zur Lösung herangezogen.

Dreht sich (Abb. 53) die Linie  $s$  um die Achse  $y y$ , so beschreibt sie

1) Für  $\Sigma f$  ergibt sich:

$$\frac{r^2}{2} \left( \pi \frac{\alpha}{180} - \sin \alpha \right) + \frac{2r \sin \frac{\alpha}{2} \cdot r \cos \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{r^2}{2} \left( \alpha \frac{\alpha}{180} - \sin \alpha + \sin \alpha \right) = \frac{r^2}{2} \pi \frac{\alpha}{180}.$$

Weiter vereinfacht sich die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2} \frac{s^3}{6r^2} + \frac{2r \sin \frac{\alpha}{2} \cdot r \cos \frac{\alpha}{2}}{2} \frac{\alpha}{2} &= \frac{(2r \sin \frac{\alpha}{2})^3}{12} + \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{2}{3} r^3 \left( \sin^3 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Demgemäß wird:

$$\varrho = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{r^2}{2} \pi \frac{\alpha}{180}} = \frac{240 r \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha}.$$

einen Kegelmantel mit der Fläche:

$$F = (r + r_1) \pi \cdot s = 2 \left( \frac{r + r_1}{2} \right) \pi s = 2 \rho \pi s,$$

worin  $\rho$  den Schwerpunktsabstand der körperlich gedachten Linie von der  $y$ -Achse darstellt. Demgemäß ergibt sich hier der Satz:

Die Fläche ist gleich dem Schwerpunktsweg ( $2 \rho \pi$ ) multipliziert mit der Länge der Linie.

Das Gesagte gilt in gleicher Weise für jede Linie, also auch Kurve, die man sich aus einzelnen, kleinen Stücken gerader Linien zusammengesetzt denken kann:

$s_1 s_2 s_3 \dots$  mit den Schwerpunktsabständen  $\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots$ . Dann wird:

$$F = 2 \rho_1 \pi s_1 + 2 \rho_2 \pi s_2 + 2 \rho_3 \pi s_3 + \dots = 2 \pi (\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2 + \rho_3 s_3 + \dots).$$

Denkt man sich den Schwerpunkt ( $S$  in Abb. 53) des gesamten Linienzuges ( $s$ ) gebildet und ist sein Abstand von der  $y$ -Achse  $= \rho$ , so wird nach dem Gesetz der statischen Momente (siehe S. 21):

$$\rho s = \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2 + \rho_3 s_3 + \dots$$

und somit:

$$F = 2 \pi \rho s; \quad \rho = \frac{F}{2 \pi s}.$$

Ist bei einer Kurve die Bogenlänge  $= b$  bekannt und kennt man die durch sie erzeugte Umdrehungsfläche, so wird in gleicher Weise:

$$\rho = \frac{F}{2 \pi b}.$$

Aus der Halbkreislinie ergibt sich (Abb. 54)  $F = 4 r^2 \pi$ , gleich der Oberfläche der Kugel

$$= 2 \pi \rho b = 2 \pi \rho r \pi$$

und hieraus:

$$\rho = \frac{F}{2 \pi b} = \frac{4 r^2 \pi}{2 \pi r \pi} = \frac{2 r}{\pi} = 0,636 r.$$

Liegt (Abb. 55) ein Kreisbogen vor, so ist  $F = 2 r \pi s$  gleich der Oberfläche einer Kugelzone und:

$$b = r \pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}.$$

Demgemäß wird:

$$\rho = \frac{F}{2 \pi b} = \frac{2 r \pi s}{2 \pi b} = \frac{r s}{b} = \frac{r s}{r \pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}} = \frac{s}{\pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}}.$$

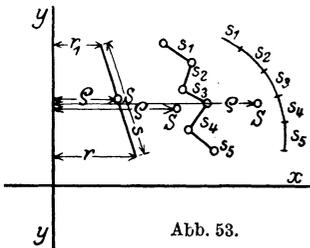


Abb. 53.

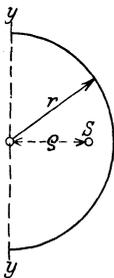


Abb. 54.

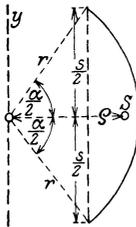


Abb. 55.

Im Falle, daß  $\alpha = 180^\circ$  wird, d. h. ein Halbkreis vorliegt, also auch für  $s$  der Wert  $2r$  einzuführen ist, geht diese Gleichung in die oben entwickelte über:

$$\varrho = \frac{2r}{\pi}.$$

Ersetzt man in der obigen Gleichung  $s$  durch seinen Wert  $2r \sin \frac{\alpha}{2}$ , so ist:

$$\varrho = \frac{2r^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{b} = \frac{2r \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}}.$$

## 2. Statische Momente von Flächen und Linien.

Das statische Moment einer Fläche ist — wie bereits vorstehend vielfach benutzt —

$$S_x = \sum df \cdot y = \int df \cdot y.$$

Für das einfache Rechteck oder Parallelogramm ergibt sich Abb. 56a, b in bezug auf die Grundlinie  $x$ :

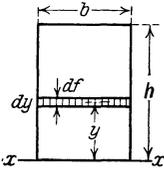


Abb. 56 a.

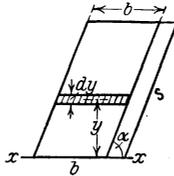


Abb. 56 b.

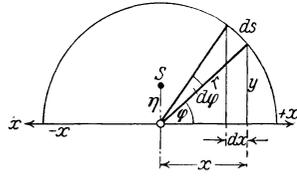


Abb. 57.

$$S_x = \int df \cdot y = \int b dy \cdot y = b \int y dy = \int_{y=0}^{y=h} \frac{b y^2}{2} = \frac{b h^2}{2} = \frac{F \cdot h}{2}.$$

Ist das Parallelogramm unendlich schmal, ( $b = 0$ ), geht es also in eine Linie von der Länge =  $s$  über, so wird:

$$S_x = \frac{h s}{2} = \frac{1}{2} s^2 \cdot \sin \alpha.$$

Für den Halbkreis wird (Abb. 57):

$$S_x = \int df \cdot \frac{y}{2} = \int y dx \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \int y^2 dx.$$

Da  $y^2 = r^2 - x^2$  ist, so ergibt sich:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{x=-r}^{x=+r} (r^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} r^3.$$

Dasselbe Ergebnis leitet sich aus der Beziehung ab, daß das statische Moment  $S_x = F \cdot y_0$  ist, wenn  $y_0$  den Schwerpunktsabstand der Fläche von der  $x$ -Achse (hier Halbmesser) darstellt.

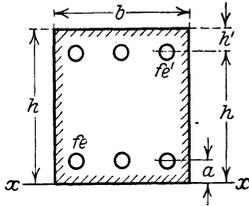


Abb. 58.

$$S_x = \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^3.$$

Für eine Halbringfläche mit dem Außenhalbmesser  $= r_a$ , dem inneren  $= r_i$  wird hieraus:

$$S_x = \frac{2}{3} (r_a^3 - r_i^3).$$

Für den Verbundsquerschnitt rechteckiger Form (Abb. 58) wird:

$$S_x = \frac{b h_0^2}{2} + n \sum f e' h + n \sum f e a,$$

worin  $n = 15$  ist und  $f e'$  die gesamte obere,  $f e$  die gesamte untere Bewehrung darstellen.

Für die Halbkreislinie wird (Abb. 57):

$$S_x = \int ds \cdot y = \int r d\varphi r \sin \varphi = r^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin \varphi d\varphi = 2r^2.$$

### 3. Beziehungen zwischen Trägheitsmomenten für verschiedene Achsen.

a) Die aufeinander senkrecht stehenden Achsenpaare gehen durch ein und denselben Punkt.

Unter Beziehung auf ein rechtwinklig angenommenes Achsenkreuz  $x, y$ , bezeichnet man das Produkt aus den Summen aller Querschnittsteilchen ( $df$ ), multipliziert je mit dem Quadrate ihrer Abstände von der Achse, wie schon auf S. 26 hervorgehoben wurde, mit dem (aus der Dynamik abgeleiteten) Namen des **Trägheitsmomentes**:

$$J_x = \int y^2 df \text{ in bezug auf die } x\text{-Achse,}$$

$$J_y = \int x^2 df \text{ in bezug auf die } y\text{-Achse.}$$

und mit  $J_{xy} = \int x \cdot y df$  das **Zentrifugalmoment**.

Sind nur wenige endliche Querschnittsteile vorhanden, so kann an Stelle des  $\int$  das Summenzeichen treten und an Stelle von  $df$  das endliche Flächenteilchen  $f$ :

$$J_x = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + f_3 y_3^2 + \dots = \sum f \cdot y^2$$

und ebenso:

$$J_y = \sum f x^2; \quad J_{xy} = \sum f \cdot x \cdot y.$$

Dreht man das rechtwinklige Achsenkreuz  $xy$  um den  $\sphericalangle \alpha$  in die Lage  $x'y'$ , so sind die neuen Koordinaten (vgl. Abb. 59):

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$x' = y \sin \alpha + x \cos \alpha,$$

und demgemäß werden jetzt die Querschnittsmomente:

1.  $J_{x'} = \int y'^2 dF = \cos^2 \alpha \int y^2 dF + \sin^2 \alpha \int x^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int x y dF,$
2.  $J_{y'} = \int x'^2 dF = \sin^2 \alpha \int y^2 dF + \cos^2 \alpha \int x^2 dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int x y dF,$
3.  $J_{x'y'} = \sin \alpha \cos \alpha (\int y^2 dF - \int x^2 dF) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int x y dF.$

Setzt man hierin für  $\int y^2 dF$  bzw.  $\int x^2 dF$  bzw.  $\int x y dF$  ihre Werte ein, so stellt sich ein Zusammenhang zwischen den  $J_x$ ,  $J_{x'}$ ,  $J_y$  und  $J_{y'}$ -Werten heraus:

- a)  $J_{x'} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2 \alpha,$
- b)  $J_{y'} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2 \alpha,$
- c)  $J_{x'y'} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2 \alpha + J_{xy} \cos 2 \alpha.$

Durch die Addition von a) und b) folgt:

$$J_{x'} + J_{y'} = J_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_x + J_y, \text{ d. h. :}$$

Die Summe der Trägheitsmomente, bezogen auf irgend

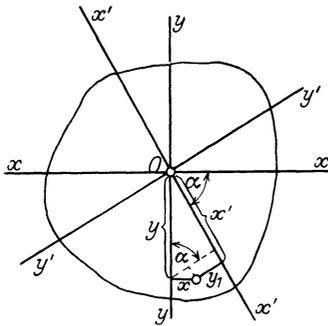


Abb. 59.

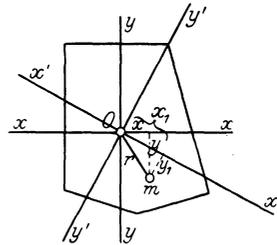


Abb. 60.

zwei durch einen und denselben Punkt gehende rechtwinklige Achsen, ist konstant.

Bezeichnet man (Abb. 60) mit dem Ausdruck des polaren Trägheitsmomentes des Querschnitts auf einen in der Ebene des Querschnitts gelegenen Punkt  $O$  bzw. eine hier senkrechtstehende Achse die Größe:

$$J_p = \int r^2 d f,$$

so wird, da  $r^2 = x^2 + y^2$  ist:

$$J_p = \int (x^2 + y^2) d f = J_y + J_x.$$

Wählt man auch hier ein beliebiges anderes senkrecht Achsen system  $x'y'$  durch denselben Anfangspunkt, so gilt auch hier:

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2, \text{ d. h. } J_p = J_{y'} + J_{x'}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden  $J_p$ -Werte folgt unmittelbar:

$$J_y + J_x = J_{y'} + J_{x'},$$

d. h. der Beweis der Richtigkeit des oben entwickelten Gesetzes auf einem anderen Wege.

Führt man in die obige Gleichung für  $J_{x'}$  (a) die trigonometrischen Beziehungen ein:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

so erhält  $J_{x'}$  den Wert:

$$d) J_{x'} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha.$$

Dieser Wert erhält einen Größt- bzw. Kleinstwert, sobald die erste Abgeleitete:

$$-\frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha - J_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

ist, d. h. für

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Dieser Gleichung genügen 2 Winkel  $\alpha$ , die sich voneinander um  $90^\circ$  unterscheiden. Die Achsen, für die der Größt- bzw. Kleinstwert von  $J$  eintritt, stehen also senkrecht zueinander. Sie führen den Namen **Hauptachsen**; die auf sie bezogenen Trägheitsmomente werden als **Hauptträgheitsmomente** bezeichnet.

Ersetzt man in der Gleichung für  $J_{x'y'}$  (c) den Wert für  $J_{xy}$  durch den obigen Gleichungswert:

$$J_{xy} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha (J_x - J_y),$$

so wird:

$$\begin{aligned} J_{x'y'} &= \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha (J_x - J_y) \cos 2\alpha \\ &= \frac{1}{2}(J_x - J_y) (\sin 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(J_x - J_y) (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha) = 0, \end{aligned}$$

d. h. das Zentrifugalmoment für die Hauptachsen ist gleich 0. Da für jede Symmetrieachse das Zentrifugalmoment

$$J_{xy} = \int x \cdot y \cdot df = 0$$

ist, so ist zugleich auch jede Symmetrieachse Hauptachse, und somit sind weiter die auf zwei zueinander senkrecht stehende Symmetrieachsen bezogenen Trägheitsmomente auch Hauptträgheitsmomente.

Bezeichnet man die Hauptträgheitsmomente mit  $J_1$  und  $J_2$ , so wird für ein anderes senkrechtes Achsenkreuz:

$$\begin{aligned} e) J_x &= J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha, \\ f) J_y &= J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha = J_1 + J_2 - J_x, \\ g) J_{xy} &= \frac{1}{2}(J_1 - J_2) \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind aus den allgemeinen Beziehungen unter a, b, c abgeleitet, wobei berücksichtigt ist, daß für die Achsen der Hauptträgheitsmomente der Wert  $J_{xy} = 0$  ist.

Setzt man in die Gleichung (d):

$$J_{x'} = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$$

den Wert  $J_{xy}$  aus der Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} J_{x'} = J_1 &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha (J_x - J_y) \sin 2\alpha \\ &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}, \end{aligned}$$

und demgemäß unter Einführung des obigen Wertes von  $\operatorname{tg}^2 2\alpha$ :

$$\begin{aligned} \text{h) } J_1 &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sqrt{1 + \left(\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sqrt{\frac{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}{(J_x - J_y)^2}} \\ &= \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{\max}, \end{aligned}$$

und ebenso entwickelt sich:

$$\text{i) } J_2 = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{\min}.$$

Liegt ein Querschnitt vor, bei dem  $J_x = J_y$  ist, z. B. ein gleichschenkliges Winkeleisen, so wird:

$$J_{\max} = J_1 = J_x + J_{xy}; \quad J_{\min} = J_2 = J_y - J_{xy}.$$

b) Eine durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehende Achse wird parallel verschoben.

Wird die Achse  $xx$  in Abb. 61 um die Entfernung  $a$  parallel zu sich verschoben, so haben die einzelnen kleinen Querschnittsteilchen, die vorher einen Abstand von  $y$  von der  $x$ -Achse hatten, jetzt einen Abstand von  $(y \pm a)$ , je nachdem sie jetzt weiter entfernt von der neuen Achse ( $x''$ ) liegen (+) oder näher an sie herangerückt sind. Demgemäß folgt jetzt das Trägheitsmoment auf die neue  $x'' x''$ -Achse aus der Erklärung dieses:

$$\begin{aligned} J_{x''} &= \sum f (y \pm a)^2 = \sum f y^2 \\ &\pm \sum f 2ya + \sum f \cdot a^2. \end{aligned}$$

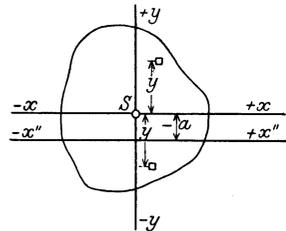


Abb. 61.

In dieser Gleichung bedeutet der erste Summand  $\sum f y^2$  das Trägheitsmoment des Querschnitts auf die  $x$ -Achse  $= J_x$ ; der zweite Summand  $\sum f 2ya = 2a \sum f \cdot y$  ist das mit  $2a$  erweiterte statische Mo-

ment des Querschnitts, bezogen auf die Schwerachse  $xx$ , und hat, da in letzterer die Fläche statisch vereinigt ist, einen Wert = 0. Der dritte Summand endlich stellt dar:  $\sum fa^2 = a^2 \sum f$ , ein Produkt aus der Gesamtfläche, multipliziert mit dem Quadrate der Entfernung der parallelen Achsen. Demgemäß führt die oben gefundene Beziehung  $J_x'' = J_x + a^2 F$  zu dem Gesetz:

Das Trägheitsmoment, bezogen auf eine Achse parallel zu einer Schwerachse, ist gleich dem Trägheitsmoment auf diese und der Gesamtfläche, multipliziert mit dem Quadrate des Abstandes der beiden Achsen.

Besteht ein Querschnitt aus mehreren Teilen, die je auf senkrechte Schwerachsen bezogen und deren Einzelträgheitsmomente bekannt sind, so kann man unter Verwendung des oben hergeleiteten Gesetzes auch das Trägheitsmoment des gesamten Querschnitts aus den gegebenen Einzelgrößen bilden.

Liegt z. B. ein aus zwei Teilen bestehender Querschnitt nach Abb. 62 vor, bei dem von Teil  $F_1$  gegeben sind  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$ ,  $J_{x_1 y_1}$ , und ebenso von Teil  $F_2$  die Größen  $J_{x_2}$ ,  $J_{y_2}$ ,  $J_{x_2 y_2}$ , so ergibt sich im Hinblick auf die Abbildung und deren Bezeichnungen:

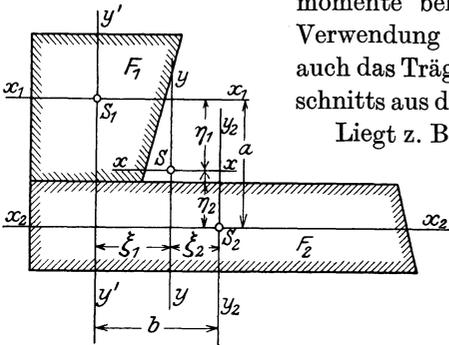


Abb. 62.

$$J_x = J_{x_1} + F_1 \eta_1^2 + J_{x_2} + F_2 \eta_2^2.$$

Da in  $S$  die Gesamtquerschnittsfläche  $(F_1 + F_2)$  vereinigt ist, so ergibt sich aus der Beziehung der statischen Momente auf  $S_1$ :

$$\eta_1 (F_1 + F_2) = F_2 (\eta_1 + \eta_2) = F_2 \cdot a$$

und somit:

$$\eta_1 = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2}; \quad \text{ebenso ist für } S_2: \eta_2 = \frac{F_1 a}{F_1 + F_2}.$$

Hieraus folgt:

$$F_1 \eta_1^2 + F_2 \eta_2^2 = \frac{F_1 F_2^2 a^2}{(F_1 + F_2)^2} + \frac{F_2 F_1^2 a^2}{(F_1 + F_2)^2} = \frac{F_1 F_2 \cdot a^2}{F_1 + F_2};$$

und somit ergibt sich:

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + \frac{F_1 F_2 a^2}{F_1 + F_2}$$

und ebenso (Abb. 62):

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + \frac{F_1 F_2 b^2}{F_1 + F_2};$$

$$J_{xy} = J_{x_1y_1} + J_{x_2y_2} + F_1\eta_1\xi_1 + F_2\eta_2\xi_2^1);$$

$$J_{xy} = J_{x_1y_1} + J_{x_2y_2} + \frac{F_1F_2a \cdot b}{F_1 + F_2}.$$

Sind die Schwerachsen der Flächenteile  $F_1$  und  $F_2$  Hauptachsen, also deren Zentrifugalmomente je = 0, so wird:

$$J_{xy} = \frac{F_1F_2ab}{F_1 + F_2}.$$

Die Gleichungen sind wertvoll, weil sie die Ermittlung der Trägheitsmomente usw. der Gesamtfläche auf deren Schwerachsen gestatten, ohne daß deren Schwerpunkt erst vorher bestimmt zu werden braucht, vgl. das Zahlenbeispiel auf S. 57.

#### 4. Die Berechnung der Trägheitsmomente der wichtigsten ebenen Querschnitte.

Da die für Berechnungen des Hochbaues vorkommenden Flächen sich vielfach in Rechtecke bzw. Parallelogramme und Dreiecke zerlegen lassen, so wird auch die Bestimmung der Trägheitsmomente für diese besondere Bedeutung haben.

Bezieht man beim Parallelogramm (Abb. 63a) mit der Grundlinie =  $b$  und der Höhe =  $h$  dessen Trägheitsmoment auf die zu  $b$  parallele Schwerpunktsachse, also die Hauptachse  $II$ , so ist:

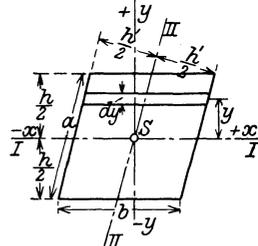


Abb. 63a.

$$J_x = J_1 = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2 df$$

und da  $df = b dy$  ist:

$$J_1 = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2 b dy = b \left[ \frac{(\frac{1}{2}h)^3}{3} + \frac{(\frac{1}{2}h)^3}{3} \right] = \frac{bh^3}{12}.$$

<sup>1)</sup> Bezieht man das Zentrifugalmoment  $J_{x_1y_1}$  des Flächenteils  $F_1$  auf den Punkt  $S$  mit den Abständen  $\eta_1$  und  $\xi_1$  von  $S_1$ , so ist:

$J_{xy} = \sum df(x_1 + \xi_1) \cdot (y_1 + \eta_1) = \sum df x_1 y_1 + \sum df \xi_1 \eta_1 + \sum df x_1 \eta_1 + \sum df y_1 \xi_1.$   
Da die beiden letzten Summanden die statischen Momente des Flächenteils  $F_1$ , bezogen auf seinen Schwerpunkt, nur mit  $\eta_1$  bzw.  $\xi_1$  erweitert, darstellen, also je = 0 sind, ferner  $\sum df \xi_1 \eta_1 = F_1 \xi_1 \eta_1$  ist, so wird:

$$J_{xy} = \sum df x_1 y_1 + F_1 \xi_1 \eta_1 = J_{x_1y_1} + F_1 \eta_1 \xi_1.$$

Von diesem Gesetz ist obenstehend Gebrauch gemacht worden (für  $F_1$  und  $F_2$ ).

Ebenso ergibt sich für die andere Schwerachse bei den Abmessungen: Grundlinie =  $a$  und Höhe =  $h'$ :

$$J_2 = \frac{ah'^3}{12}.$$

In gleicher Weise ist für das Rechteck (Abb. 63b) mit den Seiten  $b$  und  $h$ :

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} = J_x; \quad J_2 = \frac{hb^3}{12} = J_y.$$

Handelt es sich hier um das Trägheitsmoment für die Achse  $00$ , d. h. die eine Begrenzungslinie  $b$  als Achse, so ist:

$$J_0 = \frac{bh^3}{12} + F \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{3}.$$

Für den Sonderfall des Quadrates mit der Seite =  $a$  wird:

$$J_1 = J_2 = \frac{a^4}{12}; \quad J_0 = \frac{a^4}{3}.$$

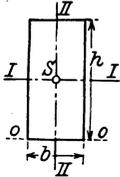


Abb. 63 b.

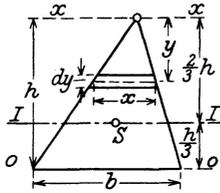


Abb. 64.

Für das **Dreieck** (Abb. 64) ergibt sich in bezug auf eine Achse  $x x$ , durch die Dreiecksspitze und parallel zur Grundlinie  $b$  gelegt, bei einer Dreieckshöhe =  $h$ :

$$J_x = \int_0^h df y^2;$$

hierin ist der kleine Flächenstreifen parallel zu  $b$ :

$$df = x \cdot dy = \frac{by}{h} dy$$

$$J_x = \int_0^h \frac{b \cdot y}{h} y^2 dy = \frac{b}{h} \left| \frac{y^4}{4} \right|_0^h = \frac{bh^3}{4}.$$

Hieraus folgt das Trägheitsmoment auf die zu  $b$  parallele Schwerachse  $II$ :

$$J_1 = J_x - F \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \frac{4}{9}h^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{2bh^3}{9} = \frac{bh^3}{36}.$$

Bezieht man das Trägheitsmoment auf die Grundlinie des Dreiecks als Achse, so wird:

$$J_0 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}.$$

Will man das Trägheitsmoment des Kreises in bezug auf den Mittelpunkt dieses, also das polare Trägheitsmoment, bilden, so kann der Kreis (Abb. 65) als aus lauter einzelnen, differential kleinen Dreiecken bestehend angesehen werden, die alle ihre Spitze im Kreismittelpunkt haben und deren Grundlinie das kleine Stück des Kreisumfangs

„b“ darstellt. Für das einzelne kleine Dreieck gilt sodann der vorstehend für die Achse durch die Dreiecksspitze entwickelte  $J_x$ -Wert:

$$J_x = \frac{bh^3}{4} = \frac{br^3}{4}.$$

Für die Gesamtheit aller Dreiecke, also den Kreisquerschnitt, wird demgemäß das polare Trägheitsmoment:

$$J_P = \frac{r^3}{4} \sum b = \frac{r^3}{4} 2r\pi = \frac{r^4\pi}{2}.$$

Führt man  $\frac{d}{2} = r$  ein, so ist:  $J_P = \frac{d^4\pi}{32}$ .

Will man das Trägheitsmoment des Kreises für den Kreisdurchmesser  $II$   $J_1$  entwickeln, so drückt sich dieses aus (Abb. 66):

$$J_1 = \sum y^2 dF$$

und ebenso auf Achse  $II$   $II'$ :

$$J_2 = \sum x^2 dF.$$

Für den Mittelpunkt des Kreises wird:

$$\begin{aligned} J_p &= \sum \rho^2 dF \\ &= \sum (x^2 + y^2) dF = \sum x^2 dF \\ &+ \sum y^2 dF = J_2 + J_1. \end{aligned}$$

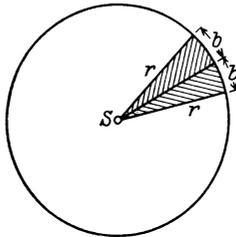


Abb. 65.

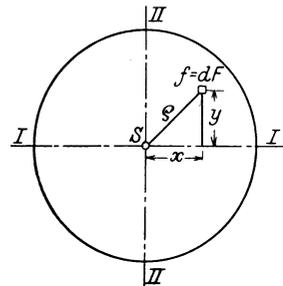


Abb. 66.

Da bei der Symmetrie der Kreisfläche und dem Bezug der  $J$ -Werte auf die Hauptachsen  $J_1 = J_2$  wird, so folgt:

$$J_1 = J_2 = \frac{J_p}{2} = \frac{r^4\pi}{4} = \frac{d^4\pi}{64}.$$

Hieraus ergibt sich alsdann weiter das Trägheitsmoment des Kreisringquerschnittes mit den Durchmessern  $D$  bzw.  $d$  (vgl. Abb. 67):

$$J_1 = J_2 = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64}.$$

Liegen Querschnitte vor, die aus Kreisflächen bzw. einzelnen Rechtecken, Dreiecken usw. zusammengesetzt sind, so werden die entsprechenden Trägheitsmomente durch Anwendung der vorstehend entwickelten Ergebnisse und der allgemeinen Beziehung:  $J_x = J_1 + a^2 F$  (vgl. S. 42) abgeleitet. Hierüber geben die nachfolgenden beispelsweisen Ermittlungen Aufschluß:

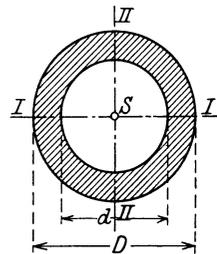


Abb. 67.

1. Für den aus 5 Kreispfählen gebildeten Pfeilerquerschnitt in Abb. 68a ergibt sich für Achse  $I I'$ :

$$J_1 = 3 \frac{d^4\pi}{64} + 2 \left( \frac{d^4\pi}{64} + \frac{d^2\pi}{4} \cdot a^2 \right) = 5 \frac{d^4\pi}{64} + \frac{d^2\pi}{2} a^2.$$

Derselbe Wert zeigt sich für Achse  $II II$  und auch für die unter  $45^\circ$  zur Achse  $I I$  geneigte Schwerachse  $x x$ :

$$J_x = \frac{d^4 \pi}{64} + 4 \left( \frac{d^4 \pi}{64} + \frac{d^2 \pi}{4} c^2 \right); \quad (2c)^2 = 2a^2, \quad c = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$J_x = 5 \frac{d^4 \pi}{64} + d^2 \pi \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = 5 \frac{d^4 \pi}{64} + \frac{d^2 \pi a^2}{2} = J_1.$$

2. Ähnlich stellt sich die Rechnung bei dem aus 4 Kreispfählen gebildeten Pfeiler in Abb. 68 b. Auch hier sind die  $J$ -Werte für die Achsen

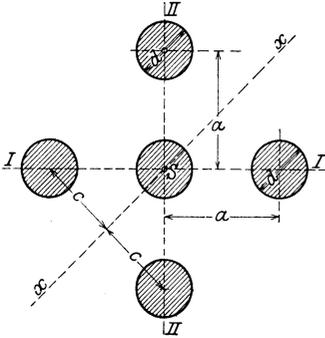


Abb. 68 a.

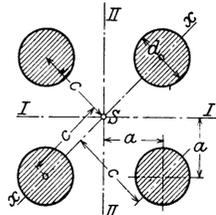


Abb. 68 b.

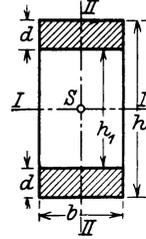


Abb. 69.

$I, II$  und  $x$  einander gleich, wie aus der Symmetrie der Gesamtanordnung auch zu erwarten steht:

$$J_1 = J_2 = 4 \left( \frac{d^4 \pi}{64} + \frac{d^2 \pi}{4} a^2 \right) = \frac{d^4 \pi}{16} + d^2 \pi \cdot a^2,$$

$$J_x = 2 \frac{d^4 \pi}{64} + 2 \left( \frac{d^4 \pi}{64} + \frac{d^2 \pi}{4} \cdot c^2 \right) = \frac{d^4 \pi}{32} + \frac{d^4 \pi}{32} + \frac{d^2 \pi}{2} (a \sqrt{2})^2$$

$$= \frac{d^4 \pi}{16} + d^2 \pi \cdot a^2 = J_1 = J_2.$$

3. Für den Querschnitt in Abb. 69 können die Trägheitsmomente für die Hauptachsen durch Abziehen der Werte für das innere Rechteck von denen des äußeren ermittelt werden:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12},$$

$$J_2 = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{b^3}{12} (h - h_1) = \frac{b^3}{12} \cdot 2d = 2 \frac{db^3}{12}.$$

Dasselbe Ergebnis hätte sich auch (für die Achse  $II II$ ) herausgestellt, wenn man die beiden schraffierten Rechtecke für sich betrachtete hätte:

$$J_2 = 2 \cdot \frac{db^3}{12}.$$

4. In gleicher Weise ergibt sich für die Querschnitte in Abb. 70:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}, \quad J_2 = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1 b_1^3}{12},$$

und in Abb. 71:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} - 2 \frac{b_1 h_1^3}{12},$$

$$J_2 = \frac{(h - h_1)b^3}{12} + \frac{h_1 b_0^3}{12},$$

worin  $b_0 = b - 2b_1$  ist.

5. Für den  $\square$ -förmigen Querschnitt in Abb. 72 muß zunächst die Lage des Schwerpunktes  $S$  in bekannter Weise mit Hilfe der Gleichsetzung der statischen Momente des Gesamtquerschnittes und seiner

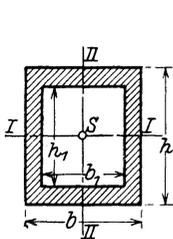


Abb. 70.

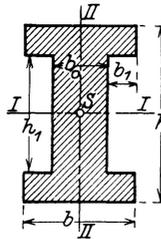


Abb. 71.

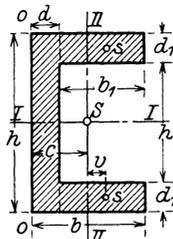


Abb. 72.

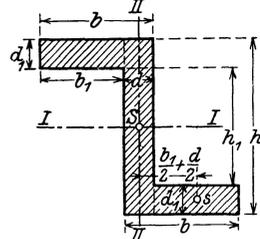


Abb. 73.

Einzelteile bestimmt werden. Ist hierdurch die senkrechte Schwerachse durch den Abstand  $c$  festgelegt, so ergibt sich:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12},$$

$$J_2 = \frac{hd^3}{12} + hd \left( c - \frac{d}{2} \right)^2 + 2 \left( \frac{b_1^3 d_1}{12} + b_1 d_1 \cdot v^2 \right).$$

Hier ist  $v$  der Abstand des Schwerpunktes  $s$  des Rechtecks  $b_1 d_1$  von der senkrechten Schwerachse  $II II = b - c - \frac{b_1}{2}$ .

6. Bei dem z-förmigen Querschnitte in Abb. 73 ist:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}.$$

Es ergibt sich also dasselbe  $J_1$  wie für Abb. 72, weil es für die  $\sum y^2 dF$ , also die Beziehung des Trägheitsmomentes auf die wagerechte Schwerachse, im vorliegenden Falle bedeutungslos ist, ob das obere wagerechte Rechteck sich nach links oder rechts von der senkrechten Achse — wie in Abb. 73 — erstreckt.

Ferner wird:

$$J_2 = \frac{hd^3}{12} + 2 \left[ \frac{d_1^3 b_1^3}{12} + b_1 d_1 \left( \frac{b_1}{2} + \frac{d}{2} \right)^2 \right].$$

7. Für den Kreuzquerschnitt in Abb. 74 wird:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} + \frac{b_1 h_1^3}{12}$$

$$J_2 = \frac{h(b + b_1)^3}{12} + \frac{(h_1 - h)b_1^3}{12},$$

oder auch

$$= \frac{h_1 b_1^3}{12} + 2 \left( \frac{h \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} + \frac{b}{2} h \cdot \left(\frac{b}{4} + \frac{b_1}{2}\right)^2 \right).$$

8. Liegen (Abb. 75a u. b) zwei sogenannte Blechbalkenquerschnitte bestehend aus einem Stehbleche, vier Winkeleisen bzw. auf ihnen noch auflagernden Kopfplatten vor, so ergibt sich, und zwar unter Abzug im ersten Fall der wagerechten Nietlöcher, im zweiten Fall unter Berücksichtigung der Querschnittsschwächung durch die senkrechte Nietung auf die Hauptachse I das Trägheitsmoment, in Abb. 75a:

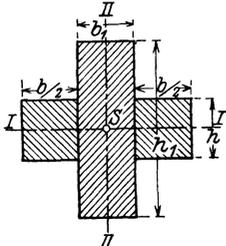


Abb. 74.

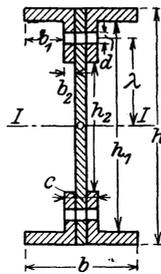


Abb. 75a.

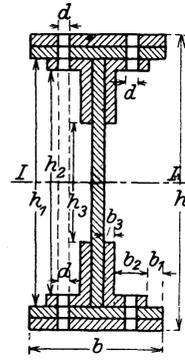


Abb. 75b.

$$J_1 = \frac{b h^3}{12} - 2 \frac{b_1 h_1^3}{12} - 2 \frac{b_2 h_2^3}{12} - 2 \left( \frac{c d^3}{12} + c d \lambda^2 \right).$$

Hierin stellt der letzte Klammerausdruck den Abzug dar, der durch die wagerechte Nietung, also durch die Querschnittsschwächung von  $2 \cdot (c \cdot d)$  bedingt ist, die mit ihrer Achse um das Maß  $\lambda$  von der Achse  $I I$  entfernt liegt:

In gleicher Weise wird in Abb. 75b:

$$J_1 = \frac{(b - 2d) h^3}{12} - 2 \frac{b_1 h_1^3}{12} - 2 \frac{(b_2 - d) h_2^3}{12} - 2 \frac{b_3 h_3^3}{12}.$$

Hier ist — zur Vereinfachung der Rechnung — von vornherein beiderseits ein senkrechter Streifen von der Breite  $= d =$  der Nietstärke und der Gesamthöhe  $= h$  in Abzug gebracht. Dadurch vermindert sich bei dem Abzug der beiden Rechtecke  $b_2 h_2$  deren Breite  $b_2$  jederseits um die Größe  $d$ .

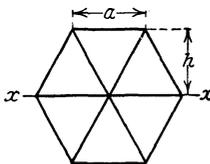


Abb. 76.

9. Das Trägheitsmoment des regelmäßigen Sechsecks (Abb. 76) bezogen auf einen Durchmesser  $xx$  wird dadurch gewonnen, daß man das Sechseck in seine 6 gleichseitigen Dreiecke zerlegt, von denen dann je 4 mit einer ihrer Seiten (Grundlinie) in der  $x$ -Achse liegen, während bei den beiden anderen letztere durch die Spitze geht. Hieraus folgt

unmittelbar:

$$J_x = 4 \cdot \frac{1}{12} a h^3 + 2 \frac{1}{4} a h^3 = \frac{5}{6} a h^3$$

oder, da  $h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$  ist, so wird:

$$J_x = \frac{5}{6} a \left( \frac{1}{2} a \sqrt{3} \right)^3 = \frac{5}{16} \sqrt{3} \cdot a^4 = 0,5413 a^4.$$

10. Um das Trägheitsmoment für das regelmäßige Achteck (Abb. 77 a) zu finden, geht man wie beim Kreis vom polaren Trägheitsmoment des Dreiecks, und zwar im Hinblick auf die naturgemäße Zerteilung eines regelmäßigen Polygons in gleichschenklige Dreiecke, von einem solchen (Abb. 77 b) aus.

Nach S. 39 ist:

$$\begin{aligned} J_p &= J_x + J_y = \frac{a h^3}{4} + 2 \frac{h \cdot (\frac{1}{2} a)^3}{12} \\ &= \frac{a h}{4} \left( h^2 + \frac{a^2}{12} \right). \end{aligned}$$

Da  $a = 2 h \operatorname{tg} \alpha$  bzw. im Vieleck (Abb. 77 a)  $a = 2 r \operatorname{tg} \alpha$ ,  $h = r$  ist, so wird:

$$J_p = \frac{2 r \operatorname{tg} \alpha r}{4} \left( r^2 + \frac{4 r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12} \right) = \frac{r^4 \operatorname{tg} \alpha}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right)$$

und für ein regelmäßiges  $n$ -Eck:

$$J_p = \frac{n r^4 \operatorname{tg} \alpha}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right).$$

Hier gilt genau das gleiche wie beim Kreise (wegen der vollkommenen Symmetrie des Querschnittes), d. h. alle Trägheitsmomente auf Durchmesser durch den Polygonmittelpunkt sind unter sich gleich und ein jedes =  $\frac{J_p}{2}$ . Demgemäß wird beim regelmäßigen Achteck:

$$J_1 = J_2 = \frac{8}{2 \cdot 2} r^4 \operatorname{tg} \alpha \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha \right)$$

und für:

$$\alpha = \frac{1}{2} 45^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1,$$

$$J_1 = J_2 = 2 r^4 (\sqrt{2} - 1) \left( 1 + \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1)^2 \right) = \frac{4}{3} r^4 (4 \sqrt{2} - 5) = 0,8758 r^4 \text{ } ^1).$$

<sup>1)</sup> Für den Querschnitt ergibt sich:

$$F = 8 \cdot \frac{2 r \operatorname{tg} \alpha r}{2} = 8 \cdot (\sqrt{2} - 1) r^2 = 3,3137 r^2 = 0,8284 d^2,$$

wenn  $d = 2 r$  ist und den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises darstellt.

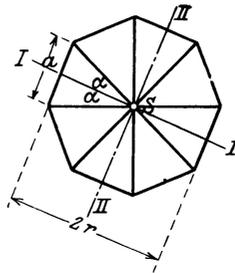


Abb. 77 a.

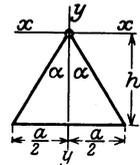


Abb. 77 b.

Führt man hierin die Seitengröße  $a =$  des regelmäßigen Achtecks ein:  $r = 1,212 a$ , so ergibt sich für  $J$  der Wert:

$$J_1 = J_2 = 0,8758 (1,212 a)^4 = 1,8595 a^4.$$

11. Bei der Bildung des Trägheitsmomentes von aus Beton und Eiseneinlagen zusammengesetzten Querschnitten ist zu unterscheiden, ob die Eisen in bezug auf den Beton verhältnismäßig kleine oder erhebliche Querschnittsgrößen aufweisen. Nur in ersterem Falle — also vorwiegend bei Rundeisenbewehrung — darf man das Eigentragheitsmoment der Eisen vernachlässigen. Die nachstehenden Beispiele lassen die Art der Berechnung der Trägheitsmomente erkennen. Auch hier wird die Eiseneinlage mit dem  $n = 15$ fachen ihres Querschnittes ent-

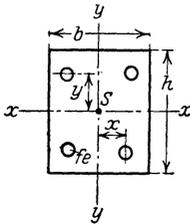


Abb. 78 a.

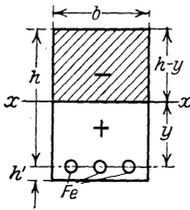


Abb. 78 b.

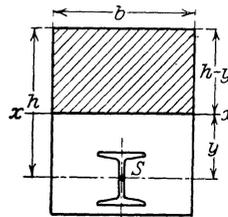


Abb. 78 c.

sprechend dem Verhältnis der Elastizitätszahlen von Eisen und Beton in Rechnung gestellt.

a) Für den Säulensquerschnitt in Abb. 78a ergibt sich:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} + 4 \cdot n fe y^2 = \frac{bh^3}{12} + 60 fe y^2,$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} + 60 fe x^2;$$

hierin bedeutet  $fe$  den Eisenquerschnitt eines jeden der vier Rundeisen.

b) Wird bei einem einseitig bewehrten auf Biegung belasteten Verbundquerschnitt nur der in der Druckzone liegende Betonteil, in der Zugzone nur das Eisen berücksichtigt, so ist (Abb. 78 b):

$$J_x = \frac{1}{3} (h-y)^3 b + n Fe \cdot y^2,$$

hier unter  $Fe$  die Summe der Zugeisenquerschnitte verstanden.

c) Liegt im vorliegenden Falle auch eine Bewehrung in der Druckzone  $= Fe'$  im Abstände von  $y'$  von der Nulllinie  $xx$ , so wird:

$$J_x = \frac{1}{3} (h-y)^3 b + n Fe' y'^2 + n Fe y^2.$$

d) Wird die Bewehrung — Abb. 78 c — durch ein stärkeres Eisen, z. B. durch ein I-Profil gebildet, dessen Trägheitsmoment auf seine eigene Schwerachse  $= J_0$  ist, so ergibt sich  $J_x$  unter den sonst gleichen Bedingungen wie oben zu:

$$J_x = \frac{b (h-y)^3}{3} + n Fe y^2 + n J_0.$$

e) Beim Plattenbalken (Abb. 78d) mit doppelter Bewehrung und einer  $x$ -Achse, die die Rippe schneidet, weiterhin bei alleiniger Berücksichtigung des Betons in der Druckzone wird:

$$J_x = \frac{1}{3} (h - y)^3 \cdot b - \frac{1}{3} (h - y - d)^3 (b - b_0) + n F e' y'^2 + n F e y^2$$

und im gleichen Falle

f) bei Bewehrung durch Profileisen erheblichen Querschnittes (Abb. 78e):

$$J_{xx} = \frac{1}{3} (h - y)^3 \cdot b - \frac{1}{3} (h - y - d)^3 (b - b_0) + n J_1 + n F e' y'^2 + n (2 J_0 + J'_0) + n F e y^2.$$

Hierin stellen  $J_1$  das Trägheitsmoment des Eisens in der Druckzone,  $(2 J_0 + J'_0)$

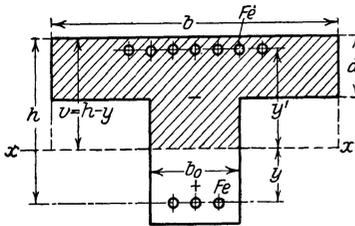


Abb. 78 d.

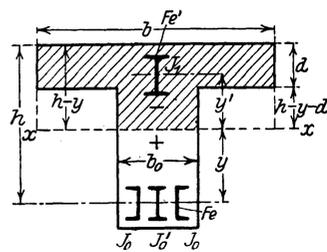


Abb. 78 e.

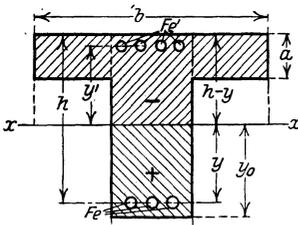


Abb. 78 f.

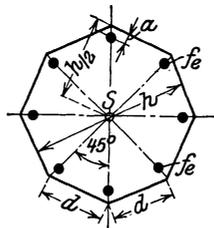


Abb. 78 g.

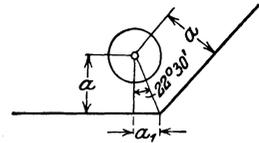


Abb. 78 g'.

die entsprechenden Werte der Eisen in der Zugzone auf ihre eigene Schwerachse bezogen dar.

g) Werden bei einem doppeltbewehrten Plattenbalken sowohl die Betonflächen in der Druck- wie auch in der Zugzone in Rechnung gestellt, so wird (Abb. 78f) das Trägheitsmoment  $J_x$ :

$$J_x = b_0 \frac{(h - y)^3}{3} + \frac{b_0 y_0^3}{3} + \frac{(h - y)^3 (b - b_0)}{3} - \frac{(h - y - d)^3 (b - b_0)}{3} + n F e' y'^2 + n F e y^2.$$

h) Für den Achtecksquerschnitt mit dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises  $r = h/2$  und Bewehrungsrundeisen in allen 8 Ecken (Abb. 78 g u. g') wird im Hinblick auf die Ausführungen auf S. 49 und 50:

$$J = 1,8595 d^4 + 4 n f e \left[ \left( \frac{h}{2} - a \right)^2 + \left( \frac{d}{2} - a' \right)^2 \right]; \text{ hierin ist: } a' = a \operatorname{tg} 22^\circ 30' = 0,414 a.$$

Hierbei ist also das Trägheitsmoment auf eine Schwerachse, die senkrecht auf zwei gegenüberliegenden Seiten steht, berechnet.

### 5. Allgemeine Beziehungen für Zentrifugalmomente und für deren Berechnung.

Ist das Zentrifugalmoment für ein senkrechtes Achsensystem  $x'y'$   $= J_{x'y'}$  bekannt und wird die gleiche Funktion für ein mit ihm paralleles Achsensystem  $xy$  gesucht, das vom ersten um die Abstände  $\xi$  und  $\eta$  entfernt liegt, so wird (Abb. 79):

$$J_{xy} = \int (x' + \xi)(y' + \eta) df = \int x'y' df + \int \xi y' df + \int \eta x' df + \int \xi \eta df \\ = J_{x'y'} + \xi \eta F.$$

Die Summanden  $\int \xi y' df$  und  $\int \eta x' df$  sind je  $= 0$ , weil das  $\int$  je das statische Moment der Fläche, bezogen auf ihren Schwerpunkt, dar-

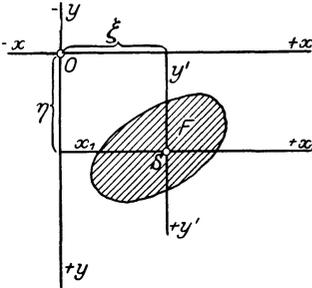


Abb. 79.

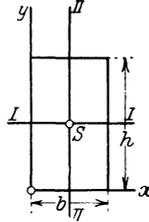


Abb. 80.

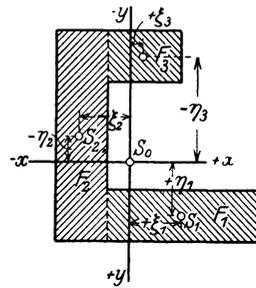


Abb. 81.

stellt<sup>1)</sup>. Liegt der Sonderfall vor  $J_{x'y'} = 0$ , ist also eine der Schwerachsen  $x'$  oder  $y'$  eine Symmetrieachse, so ist:

$$J_{xy} = \eta \xi F.$$

Für ein Rechteck ( $b \cdot h$ ), dessen  $J_{xy}$  auf zwei Achsen bezogen werden soll, die mit den Seiten zusammenfallen, (Abb. 80) wird hiernach:

$$J_{xy} = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} b h = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Besteht der Querschnitt aus mehreren Rechtecken, so wird dieselbe Gleichung benutzt; nur ist hier auf die Vorzeichen der einzelnen Schwerpunktsabstände  $\xi$  und  $\eta$  zu achten. Nach Abb. 81 wird z. B. nach Einteilung des Querschnitts in 3 Rechtecke  $F_1, F_2, F_3$  mit den Schwerpunktsabständen  $+\xi_1 + \eta_1, -\xi_2 - \eta_2$  und  $-\eta_3 + \xi_3$  das Zentrifugalmoment in bezug auf die Schwerachse des Gesamtquerschnitts  $xy$  gebildet in der Form:

$$J_{xy} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2 - F_3 \eta_3 \xi_3.$$

Liegen Querschnitte vor, die man in kleine Rechtecksabschnitte zerteilen kann, so bleibt der Rechnungsgang derselbe wie vorher. Hier

<sup>1)</sup> Vgl. auch die Anm. 1 auf S. 43.

ist aber darauf zu achten, ob die Mittelpunkte aller dieser kleinen Rechtecke auf einer Achse liegen, die parallel zu einer der Bezugsachsen verläuft, oder mit diesen (Abb. 82) einen Winkel  $\alpha$  einschließt. In letzterem Falle ist zu beachten, daß  $x = y \operatorname{ctg} \alpha$  ist; demgemäß ist das Zentrifugalmomentin der Form zu bilden:

$$J_{xy} = \int xy \, df = \int y \operatorname{ctg} \alpha \cdot y \, df = \operatorname{ctg} \alpha \int y^2 \, df = \operatorname{ctg} \alpha J_x.$$

Für das in Abb. 82 dargestellte Dreieck und die Achsen  $xy$  ergibt sich z. B., da für sie

$$J_x = \frac{bh^3}{4}$$

ist:

$$J_{xy} = \frac{bh^3}{4} \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

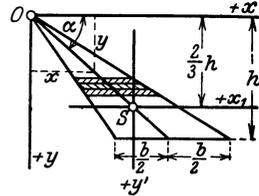


Abb. 82.

Für das Achsensystem  $x_1 y_1$  durch den Schwerpunkt des Dreiecks selbst, also für Achsen, die keine Symmetrieachsen darstellen, wird nach der vorstehend ermittelten Gleichung:

$$J_{x_1 y_1} = J_{x' y'} + F \eta \xi,$$

$$J_{x' y'} = J_{xy} - F \eta \xi = \frac{bh^3}{4} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{bh}{2} \cdot \eta \xi.$$

$\eta$  ist  $= \frac{2}{3} h$ , und  $\xi = \eta \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3} h \operatorname{ctg} \alpha$ ,

$$J_{x' y'} = \frac{bh^3}{4} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{bh}{3} \frac{2}{3} h \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \left( \frac{9bh^3}{36} - \frac{8bh^3}{36} \right) = \frac{bh^3}{36} \operatorname{ctg} \alpha.$$

## 6. Zahlenbeispiele.

1a. Die größten und kleinsten Trägheitsmomente sind zu berechnen für ein Rechteck von 45 cm Höhe und 20 cm Breite.

$$J_1 = \frac{20 \cdot 45^3}{12} = 5 \cdot 45^2 \cdot 15 = 45^2 \cdot 75 = 2025 \cdot 75 = 151875 \text{ cm}^4 = J_{\max},$$

$$J_2 = \frac{45 \cdot 20^3}{12} = 15 \cdot 5 \cdot 20^2 = 30000 \text{ cm}^4 = J_{\min}.$$

1b. Für denselben Querschnitt ist das Trägheitsmoment, bezogen auf die Seite  $b = 20$  cm zu bestimmen:

$$J_0 = \frac{bh^3}{3} = \frac{20 \cdot 45^3}{3} = 20 \cdot 45^2 \cdot 15 = 300 \cdot 2025 = 607500 \text{ cm}^4.$$

2. Die Trägheitsmomente  $J_1 = J_2$  eines  $\square$ -Querschnittes nach Abb. 72 S. 47 sind gesucht für die Abmessungen:  $b = 10$  cm;  $d_1 = 1$  cm;  $h = 20$  cm;  $b_1 = 9$  cm, also auch  $d = 1$  cm bzw.  $h_1 = 18$  cm.

Zunächst ermittelt sich  $c$  aus der Beziehung:

$$c \cdot \sum f = f_1 \xi_1 + 2 f_2 \xi_2,$$

$$\sum f = 20 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \cdot 1 = 38 \text{ cm}^2,$$

$$f_1 = 20 \text{ cm}^2; \quad \xi_1 = 0,5 \text{ cm}; \quad f_2 = 9 \text{ cm}^2; \quad \xi_2 = (1 + 4,5) = 5,5 \text{ cm},$$

$$c = \frac{20 \cdot 0,5 + 2 \cdot 9 \cdot 5,5}{38} = \frac{10 + 2 \cdot 49,5}{38} = \frac{109}{38} = 2,87 \text{ cm}.$$

Demgemäß ist (vgl. Abb. 72):

$$v = b - c - \frac{b_1}{2} = 10 - 2,87 - 4,5 = 2,63 \text{ cm.}$$

Es wird nunmehr:

$$J_1 = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} - \frac{9 \cdot 18^3}{12} = 6666,6 \text{ cm}^3,$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{hd^3}{12} + hd \left( c - \frac{d}{2} \right)^2 + 2 \left( \frac{b_1^3 d_1}{12} + b_1 d_1 v^2 \right) \\ &= \frac{20 \cdot 1^3}{12} + 20 \cdot 1 (2,87 - 0,5)^2 + 2 \left( \frac{9^3 \cdot 1}{12} + 9 \cdot 1 \cdot 2,63^2 \right) \\ &= 1,66 + 112,32 + 2 (60,75 + 62,27) = 360,02 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Auf die Achse  $00$  (Abb. 72) ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$\begin{aligned} J_{00} &= \frac{20 \cdot 1^3}{3} + 2 \left( \frac{1 \cdot 9^3}{12} + 1 \cdot 9 \cdot (v + c)^2 \right) = 6,66 + 2 (60,75 + 9 \cdot 5,5^2) \\ &= 6,66 + 666 = 672,66 \text{ cm}^4 \text{ } ^1). \end{aligned}$$

3. Von einem regelmäßigen Achteck ist die Seite  $a = 20 \text{ cm}$ . Gesucht wird das Hauptträgheitsmoment. Es ist:

$$a = 2r \operatorname{tg} \alpha = 2r \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = 2r \cdot 0,414 = 20,$$

$$r = \frac{20}{2 \cdot 0,414} = 24,18 \text{ cm}$$

und somit:

$$J = 0,8758 r^4 = 0,8758 \cdot 24,18^4 = \text{rd. } 299380 \text{ cm}^4.$$

4. Eine gußeiserne Säule hat einen Ringquerschnitt mit  $D = 32 \text{ cm}$ ,  $d = 24 \text{ cm}$ , also von  $4 \text{ cm}$  Wandstärke. Demgemäß ist:

$$\begin{aligned} J &= \frac{D^4 - d^4}{64} \cdot \pi = \frac{32^4 - 24^4}{64} \cdot \pi = \frac{32^3 \cdot 4 - 24^3 \cdot 3}{8} \cdot \pi \\ &= \frac{32768 \cdot 4 - 13824 \cdot 3}{8} \cdot 3,14 = (16384 - 1728 \cdot 3) \cdot 3,14 = 35796 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

5. Für den in Abb. 83 dargestellten Querschnitt eines Blechbalkens ist das Trägheitsmoment auf die wagerechte Hauptachse zu bestimmen. Die Winkel-eisen  $150 \cdot 100 \cdot 12$  haben auf ihrer eigenen Schwerachse parallel zu  $II$  ein  $J_1' = 232 \text{ cm}^4$ ; ihre Fläche beträgt je  $28,7 \text{ cm}^2$ , der Abstand ihres Schwerpunkts von ihren oberen Flanschen je  $2,42 \text{ cm}$ . Es ergibt sich:

$$J_{\text{Stehblech}} = \frac{1,00 \cdot 80,0^3}{12} = 42886 \text{ cm}^4$$

$$J_{\text{Winkel-eisen}} = 4 \cdot \left[ 232 + 28,7 \left( \frac{80,0}{2} - 24,2 \right)^2 \right] = 163055 \text{ ,,}$$

$$\begin{aligned} J_{\text{Kopfplatten}} &= \frac{2 \cdot 33,0 \cdot 2,4^3}{12} + 4 \cdot 33,0 \cdot 1,2 \left( \frac{80,0}{2} + 1,2 \right)^2 \\ &= 76,0 + 268874 = 268950 \text{ ,,} \\ & \quad \underline{\underline{\Sigma J = 474891 \text{ cm}^4}} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Zugleich auch  $\underline{\underline{J_{II} + F \cdot v^2 = (360,02 + 38 \cdot 2,87^2) \text{ cm}^4}}$ .

Hiervon ist das Trägheitsmoment der Nietlöcher abzuziehen:

$$4 \left\{ 2,3 \cdot \frac{3,6^3}{12} + 2,3 \cdot 3,6 \left( \frac{84,8}{2} - \frac{3,6}{2} \right)^2 \right\} = - 54592 \text{ cm}^4$$

Somit wird das Trägheitsmoment

$$\underline{J_1 = 420299 \text{ cm}^4}$$

Man erkennt, daß man, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, das Trägheitsmoment der Kopfplatten auf ihre eigene Schwerachse hätte vernachlässigen können.

6. Das Trägheitsmoment der einschnittigen Nietverbindung in bezug auf die wagerechte Achse in Abb. 84 wird für jede Seite des Verbindungsbleches gesucht. Der Nietdurchmesser sei 2 cm. Es ist:

$$J_x = 2 \left( \frac{2^4 \pi}{64} + \frac{2^2 \pi}{4} \cdot 5^2 \right) = 2 \left( \frac{16 \cdot 3,14}{64} + 3,14 \cdot 25 \right)$$

$$\cong 2 (0,8 + 80) = 161,6 \text{ cm}^4.$$

Man erkennt auch hier, daß das Eigenträgheitsmoment des Querschnitts keine erhebliche Bedeutung auf das Endergebnis ausübt.

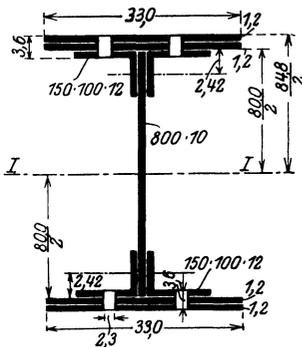


Abb. 83.

7. Für das Winkeleisen 100·100·12 (Abb. 85) sind zu bestimmen die Schwerpunktslage, die Trägheitsmomente auf die Achsen  $y$  und  $x$ , die Hauptachsen und die Hauptträgheitsmomente auf diese.

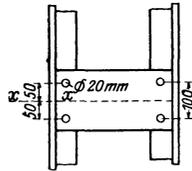


Abb. 84.

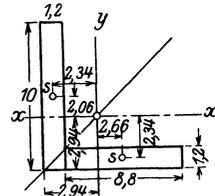


Abb. 85.

Es ist nach der Abbildung:

$$F = 1,2 \cdot 10 + 1,2 \cdot 8,8 = 22,6 \text{ cm}^2,$$

$$\eta^0 = \frac{1,2 \cdot 10^2 + 8,8 \cdot 1,2^2}{2 \cdot 22,6} = 2,94 \text{ cm},$$

$$J_0 = \frac{1,2 \cdot 10^3}{3} + \frac{8,8 \cdot 1,2^3}{3} = 405 \text{ cm}^4 \text{ } ^1),$$

$$J_x = J_y = J_0 - F \cdot 2,94^2 = 405 - 22,6 \cdot 2,94^2 = 209 \text{ cm}^4.$$

Ferner wird das Zentrifugalmoment:

$$J_{xy} = F_1 x_1 y_1 + F_2 x_2 y_2,$$

worin  $F_1$  und  $F_2$  die Einzelteile des Querschnitts,  $yx$  die Abstände der Schwerpunkte dieser vom Gesamtschwerpunkt des Winkels darstellen.

$$J_{xy} = 1,2 \cdot 10 \cdot 2,34 \cdot 2,06 + 1,2 \cdot 8,8 \cdot 2,66 \cdot 2,34 = \text{rd. } 124,13 \text{ cm}^4.$$

Hieraus folgt:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{2 \cdot 124,13}{0} = \infty,$$

<sup>1)</sup>  $J_0$  ist auf eine der Außenkanten bezogen.

d. h. wie von vornherein bei dem gleichschenkligen Winkeleisen zu erwarten stand,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 90^\circ, \quad \operatorname{tg} \alpha = 45^\circ.$$

Für die Bestimmung von  $J_1$  kann nunmehr die Gleichung h (auf Seite 41) benutzt werden<sup>1)</sup>:

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = J_{\max},$$

$$J_1 = 209 + \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 124,13^2} = 209 + 124,13 = \text{rd. } 333 \text{ cm}^4.$$

Demgemäß wird:

$$J_2 = J_x + J_y - J_1 = 2 \cdot 209 - 333 = 85 \text{ cm}^4.$$

(Nach dem deutschen Normalprofilbuch sind für diese Winkeleisen bei Berücksichtigung der Ausrundungen des Querschnitts  $J_1 = 328$ ,  $J_2 = 86,2 \text{ cm}^4$ .)

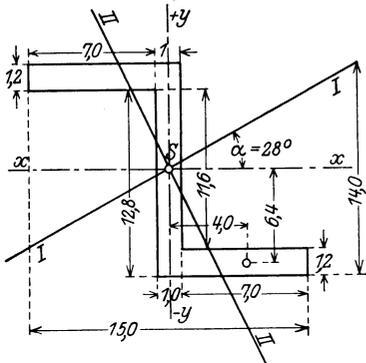


Abb. 86.

8. Für das in Abb. 86 dargestellte Z-förmige Eisen sollen gebildet werden die Trägheitsmomente auf ein Achsensystem parallel und senkrecht zum Steg durch den Schwerpunkt des Querschnitts gelegt; aus ihnen sollen in weiterer Folge die Hauptträgheitsmomente und deren Achsen abgeleitet werden.

Es ergibt sich:

$$J_x = \frac{1}{12}(8 \cdot 14^3 - 7 \cdot 11,6^3) = 919 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = \frac{1}{12}(1,2 \cdot 15^3 + 12,8 \cdot 1,0^3) = 339 \text{ cm}^4,$$

$$J_{xy} = 2 \cdot 1,2 \cdot 7 \cdot 6,4 \cdot 4,0 = 430 \text{ cm}^4.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{860}{919 - 339} = \frac{860}{580} = 1,484.$$

$$2\alpha = \text{rd. } 56^\circ; \quad \alpha = 28^\circ.$$

$$\sin \alpha = 0,469; \quad \sin^2 \alpha = 0,220;$$

$$\cos \alpha = 0,885; \quad \cos^2 \alpha = 0,780.$$

Demgemäß liefern die Gleichungen e und f (auf Seite 40) das Ergebnis:

$$J_x = 919 = J_1 0,78 + J_2 0,22,$$

$$J_y = 339 = J_1 0,22 + J_2 0,78.$$

Zur Probe kann man sich überzeugen, daß die Beziehung innegehalten ist:

$$J_x + J_y = J_1 + J_2.$$

Aus den Gleichungen folgt:

$$J_1 = 1144 \text{ cm}^4; \quad J_2 = J_x + J_y - J_1 = 1258 - 1144 = 114 \text{ cm}^4.$$

Rechnet man mit Gleichung h (auf Seite 41), so wird unmittelbar:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} 1258 + \frac{1}{2} \sqrt{580^2 + 4 \cdot 430^2}, \\ &= 629 + \frac{1}{2} 1038 = 629 + 519 = 1148 \text{ cm}^4 = J_{\max}, \end{aligned}$$

$$J_2 = 1258 - 1148 = 110 \text{ cm}^4 = J_{\min}.$$

<sup>1)</sup> Die Gleichungen e und f (S. 40) können hier nicht angewendet werden, weil  $J_x = J_y$  ist.

Die beiden verschiedenen Rechnungswege haben somit zu für die Praxis ausreichender Übereinstimmung geführt.

9. Für den ungleichschenkligen L-förmigen Querschnitt in Abb. 87 sind die Trägheitsmomente für die beiden Rechtecke gegeben. Gesucht werden die Trägheitsmomente für den Gesamtquerschnitt.

Es sind:

$$J_{x_1} = 0,5 \text{ cm}^4; \quad J_{y_1} = 18 \text{ cm}^4;$$

$$J_{x_2} = 61 \text{ cm}^4; \quad J_{y_2} = 0,75 \text{ cm}^4.$$

$$F_1 = 6 \text{ cm}^2; \quad F_2 = 9 \text{ cm}^2.$$

$$a = 4,5 + 0,5 = 5 \text{ cm}; \quad b = 3,0 - 0,5 = 2,5 \text{ cm}.$$

Daraus folgt sofort (vgl. S. 42 u. 43):

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_1} + J_{x_2} + \frac{6 \cdot 9}{6 + 9} \cdot 5^2 \\ &= 0,5 + 61 + \frac{54}{15} 25 = 151,5 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + \frac{6 \cdot 6}{6 + 9} \cdot 2,5^2 = 18 + 0,75 + \frac{54}{15} 6,25 = 41,25 \text{ cm}^4.$$

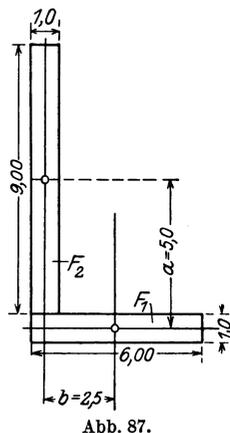


Abb. 87.

## 7. Der Trägheitsradius.

Unter dem Trägheitsradius wird eine Querschnittsgröße, in der Regel mit „ $i$ “ bezeichnet, verstanden, die sich erklärt aus der Beziehung:

$$i^2 = \frac{J \text{ cm}^4}{F \text{ cm}^2}; \quad i = \sqrt{\frac{J}{F}} \text{ cm}$$

und demgemäß in bezug auf die  $x$ -Achse lautet:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F},$$

worin  $J_x$  das Trägheitsmoment des Querschnitts auf die (wagerechte)  $x$ -Achse darstellt,  $F$  den Querschnitt bedeutet. In gleicher Weise wird für die (senkrechte)  $y$ -Achse:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F}.$$

Für das Rechteck mit den beiden Hauptabmessungen  $b$  = Grundlinie und  $h$  = Höhe wird:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{b h^3}{12 b h} = \frac{h^2}{12} = \frac{h}{2} \frac{h}{6},$$

d. h.  $i$  ist mittlere Proportionale zu  $\frac{h}{2}$  und  $\frac{h}{6}$ .

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h}{3,464} = 0,288 h.$$

Ebenso wird:

$$i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0288 b.$$

Für das Dreieck und zwar für die Achse parallel der Grundlinie  $b$  wird  $i_x$  bestimmt durch die Beziehung:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{bh^3}{36 \frac{bh}{2}} = \frac{h^2}{18} = \frac{h}{3} \frac{h}{6},$$

d. h. hier ist  $i_x$  die mittlere Proportionale zwischen  $\frac{h}{3}$  und  $\frac{h}{6}$ .

Für den Kreisquerschnitt wird:

$$i^2 = \frac{J}{F} = \frac{r^4 \pi}{4 \cdot r^2 \pi} = \frac{r^2}{4},$$

d. h.  $i = \frac{r}{2}$ .

Für den Kreis-Ringquerschnitt ergibt sich, wenn  $r_1$  bzw.  $r$  die inneren bzw. äußeren Halbmesser sind:

$$i^2 = \frac{J}{F} = \frac{(r^4 - r_1^4) \pi}{4 \cdot (r^2 - r_1^2) \pi} = \frac{r^2 + r_1^2}{4}; \quad i = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 + r_1^2}.$$

Wird  $r_1 = 0$ , liegt also ein voller Kreisquerschnitt vor, so wird  $i = \frac{r}{2}$  wie oben.

#### 4. Kapitel.

### Die verschiedenen Festigkeitsarten.

#### 1. Einfache und zusammengesetzte Beanspruchungen und Festigkeitsarten.

Eine jede äußere Kraft, die einen Körper oder Stab beansprucht, ruft in ihm innere Kräfte hervor, die im Zustande des Gleichgewichts in ihrer Gesamtwirkung der äußeren Kraft das Gleichgewicht halten müssen. Die inneren Kräfte werden als Spannungen bezeichnet und als Belastungen auf die Einheitsgröße des Querschnittes (in der Regel  $\text{kg/cm}^2$ ) bezogen. Die äußeren Kräfte rufen, indem sie im Körper innere Spannungen erzeugen, Formänderungen in ihm hervor, die rein elastische sein können, d. h. nach Aufhören der Kraft wieder verschwinden, oder eine dauernde Veränderung, alsdann in der Regel unter Störung des Gleichgewichts, nach sich ziehen können. Hierbei werden die einzelnen Körper- oder Stabquerschnitte Bewegungen gegeneinander ausführen, deren Art, Richtung und Wirkung die verschiedenartigen Festigkeitsbeanspruchungen bezeichnet und zu ihrer Unterscheidung führt.

a) Wird ein Stab durch eine Kraft mittig auf Druck belastet, (Abb. 88 a), so werden zwei benachbarte, zueinander parallele Querschnitte aus dieser ihrer Parallellage nicht gedrängt, sie werden aber in ihrer gegenseitigen Entfernung einander genähert. Der Stab wird zusammengedrückt, die äußere Kraft sucht ihn zu verkürzen und hierbei zugleich die Querschnitte zu verbreitern. Im Stabinnern treten hierbei in erster Linie und zwar senkrecht zur Querschnittsebene **Druckspannungen** auf. Im Zustande des Bruches findet ein Zerdrücken des Materials statt.

Ist die zentral angreifende äußere Kraft (Abb. 88 b) eine Zugkraft, so verbleiben ebenfalls die Querschnitte in ihrer zueinander parallelen Lage; die Kraft versucht hier deren gegenseitige Entfernung zu vergrößern, der Stab wird gezogen und verlängert sich, wobei zugleich seine Querschnitte sich zusammen-

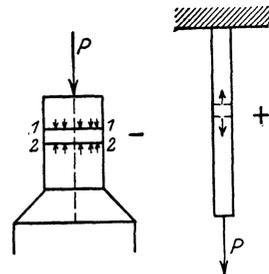


Abb. 88 a.

Abb. 88 b.

schnüren, d. h. sich in der Breite zu vermindern suchen. Es treten im Innern des Stabes senkrecht zur Querschnittsfläche **Zugspannungen** auf; im Bruchzustand findet ein Zerreißen des Stabes statt.

Da in den Fällen der reinen — mittigen — Druck- und Zugbelastung die äußere Kraft senkrecht zur Querschnittsebene steht und demgemäß auch im Gleichgewichtszustande die inneren Spannungen die gleiche Richtung zum Querschnitte einnehmen müssen, so benennt man die Druck- und Zugfestigkeit bzw. -beanspruchung auch als **Normalfestigkeit und Normalbeanspruchung**.

Eine Druckspannung wird (nach Vereinbarung) als —, eine Zugspannung als + bezeichnet.

Die Größe der Querformänderung ist bei festen Stoffen ein, je nach deren Art, bestimmter Teil der Längsdehnung:

$$\text{Querformänderung} = \frac{\text{Längsformänderung}^1)}{m}.$$

Hier ist  $m$ , die sog. Poissonsche Zahl für feste Körper stets  $> 2$ , nach der Molekular-Theorie etwa  $= 4$ ; für Beton ist sie zu  $4-8$ , für schmiedbares Eisen zu  $\frac{10}{3}$  bestimmt.

<sup>1)</sup> Faßt man eine „Dehnung“ als + oder — auf, je nachdem es sich um Zusammendrücken der Querschnitte bzw. Auseinanderziehen, also im Querschnitte selbst um Zug- oder Druckwirkungen, handelt, so kann man die obige Beziehung allgemein auch in die Form kleiden:

$$\text{Querdehnung} = \frac{\text{Längsdehnung}}{m}.$$

b) Ist der gedrückte Stab (Abb. 89) verhältnismäßig lang zu seiner Querschnittsgröße, so findet — auch bei theoretisch genau mittiger Belastung — durch die Druckkraft ein Ausknicken des Stabes statt. In seinem Inneren treten Knickspannungen auf, die u. a. ein Zerknicken des Stabes infolge seitlicher Ausbiegung zur Folge haben



Abb. 89.

können; hierbei wirken neben den Druckspannungen auch Biegungsspannungen (vgl. weiter unten) auf den Stab ein. Der Grund, weshalb ein solcher Knickvorgang eintritt, liegt darin, daß es einmal praktisch nicht möglich ist, die Druckkraft vollkommen zentral auf den Stab einwirken zu lassen, daß ferner das Material niemals so gleichmäßig ist, daß im Innern des Stabes die Kraft durchaus geradlinig fortgeleitet wird, und daß endlich auch der Stab nie so gleichmäßig oben und unten angeschlossen bzw. aufgesetzt werden kann, daß eine durchaus gleichmäßige Druckbelastung hier eintritt und demgemäß die Mittelkraft der Kräfte mit der Stabachse genau zusammenfällt. Zudem wirkt auch oft der Umstand hierbei mit, daß der Stab durch Fehler in der Bearbeitung oder Zusammenfügung der einzelnen Teile mehr oder weniger in seiner Achsenlage von einer geraden Linie abweicht. Alle diese Einflüsse machen sich bei kurzen Stäben oder Baukörpern, die zu ihrer Höhe verhältnismäßig breit sind, weniger bemerkbar und können hier unberücksichtigt bleiben, da bei ihnen auch tatsächlich der Bruch nur durch Zerdrücken zu erwarten steht, während bei Vorhandensein einer Knickgefahr der Stab stets durch seitliches Ausbiegen zum Bruche gelangt.

c) Wird ein Stab senkrecht oder unter einem Winkel zu seiner Achse belastet, so verbiegt er sich (Abb. 90a). Es findet eine **Beanspruchung auf Biegung** statt; der Stab widersteht infolge seiner **Biegefestigkeit**. Der in Abb. 90a dargestellte, einfache, auf zwei Stützen liegende Balken sei durch senkrechte Lasten beansprucht; er verbiegt sich unter ihrer Wirkung konkav nach unten. Zwei benachbarte Querschnitte, die vor Einleitung der Belastung und Verbiegung zueinander parallel waren, nehmen jetzt eine geneigte Lage zu einander an; sie haben sich — im vorliegenden Falle — an ihrem oberen Ende einander genähert, an ihrem unteren Teile voneinander entfernt. Die Wirkung dieser Formänderung ist das Auftreten von Druckspannungen in den oberen, von Zugspannungen in den unteren Fasern des Balkens bzw. seiner Querschnitte. Der gleiche Vorgang spielt sich auch ab (Abb. 90b),

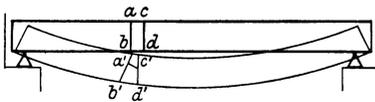


Abb. 90 a.

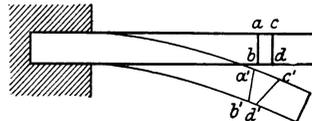


Abb. 90 b.

Der gleiche Vorgang spielt sich auch ab (Abb. 90b),

wenn der Balken sich konvex verbiegt; nur entfernen sich hier die Querschnitte in den oberen und nähern sich in den unteren Fasern; hier treten also oben Zug-, unten Druckspannungen auf. Das Bezeichnende beim Auftreten der reinen Biegungsbelastung besteht also darin, daß die zunächst parallelen Nachbarquerschnitte nach der Biegung einen Winkel miteinander bilden und in ihnen sowohl Druck- als auch Zug-Biegespannungen sich ausbilden. Beim Bruchzustande zerbricht der Balken durch Überwindung entweder seiner Zugfestigkeit, indem in der gebogenen Zone Risse auftreten, oder durch Überanstrengung in der Druckzone, wenn hier ein Zerdrücken, Zerquetschen des Materials eintritt.

Es liegt auf der Hand und wird später auch noch genauer erörtert werden, daß zwischen den Rand-Druck- und Zugspannungen eine Faser liegen muß, bei der ein Übergang zwischen beiden stattfindet, in der also die Biegungsspannung = 0 sein muß.

d) Wird ein Körper so belastet, daß zwei benachbarte Querschnitte in ihrem gegenseitigen Abstände zwar erhalten bleiben, also weder gegeneinander gedrückt, noch voneinander abgezogen, aber gegeneinander parallel verschoben werden, so liegt eine Schub- oder Scherbelastung vor und es treten **Schubspannungen** in der Querschnittsfläche auf. Im

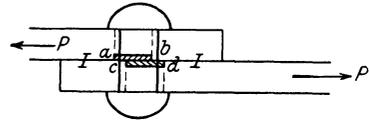


Abb. 91.

Zustande des Bruches findet ein Abschieben des Materials durch Paralleltrennung der Querschnitte senkrecht zur Achse statt. In diesem Sinne würde bei der in Abb. 91 dargestellten einfachen (einschnittigen) Nierverbindung eine Trennung in der Ebene  $II$  vor sich gehen. Einer derartigen Formänderung wirkt die **Schub- oder Scherfestigkeit** der Verbindung entgegen.

Neben dieser in Richtung der Kraft auftretenden Schubbeanspruchung treten zudem bei gebogenen Konstruktionen auch Scherspannungen senkrecht zu der durch die äußeren Kräfte gelegten Ebene, also bei deren senkrechter Lage in wagerechter Richtung auf. Würde man z. B. den Kragträger in Abb. 92a aus einzelnen dünnen, nicht miteinander verbundenen Platten herstellen, so würde entsprechend der verschiedenen großen Beanspruchung und Durchbiegung dieser eine Verschiebung eintreten, wie sie Abb. 92b zu erkennen gibt. Hieraus zeigt sich, daß bei einem zusammenhängenden, homogenen, gebogenen Stabe parallel zu seiner Achse Spannungen bei der Verbiegung sich auslösen müssen, welche

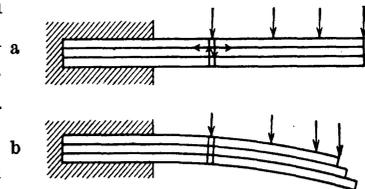


Abb. 92 a und b.

einer Formänderung wie der dargestellten entgegenwirken und sie, solange ein Gleichgewichtszustand besteht, verhindern. In den in Abb. 92a angegebenen Querschnitten treten also sowohl senkrechte in der Krafrichtung verlaufende als auch wagerecht gerichtete Schubspannungen auf.

e) Bleiben zwei Nachbarquerschnitte zueinander parallel, erleiden sie aber in ihrer Ebene, ohne irgendwie senkrecht belastet zu sein, eine Drehung, so wird der Querschnitt auf Drehfestigkeit beansprucht; in ihm entstehen alsdann Torsions- oder Drehungsspannungen. In Abb. 93 wirken an dem fest eingespannt zu denkenden Rundeisen Kräfte im Sinne der Pfeile drehend ein und versuchen den Querschnitt  $F$  so zu drehen, daß seine vor Beginn der Kraftwirkung in der Lage  $a b, c d$  liegenden Achsen nunmehr nach  $a' b', c' d'$  gelangen. Hierbei tritt also ausschließlich ein Drehen des Querschnittes in seiner Ebene um die Stabachse ein. Da die Drehungsbeanspruchung in der Regel für Hochbaukonstruktionen von untergeordneter Bedeutung ist, wird ihr auch in den weiteren Betrachtungen kein Raum gewährt.

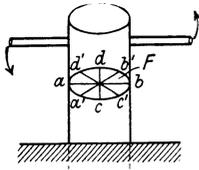


Abb. 93.

f) Von den zusammengesetzten Beanspruchungen und den durch sie bedingten zusammengesetzten Spannungen ist für Hochbauten besonders bedeutungsvoll die Belastung eines Querschnittes

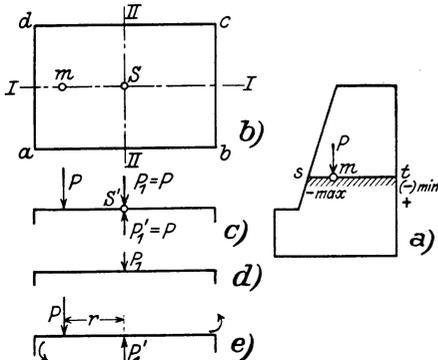


Abb. 94.

durch eine Normalkraft und zugleich durch ein Biegemoment, oder — was in der Wirkung dasselbe ist — eine außermittige Querschnittsbelastung. Denkt man sich z. B. den Pfeilerquerschnitt  $st$  in Abb. 94a bzw. den Querschnitt  $abcd$  in Abb. 94b durch eine außerhalb seines Schwerpunktes (aber immerhin noch in einer seiner Hauptachsen) angreifende senkrechte Kraft  $P$  in „ $m$ “ belastet, so kann

man sich (Abb. 94c) im Querschnittsschwerpunkte zwei entgegengesetzte Kräfte  $P_1$  und  $P'_1$  angebracht denken, die je unter sich gleich und zudem gleich  $P$  sind. Trennt man die Wirkung dieser drei Kräfte in der Art, daß einmal (Abb. 94d) nur  $P_1$  im Schwerpunkt als Druckkraft wirkend auftritt, und zum anderen die Kräfte  $P$  und  $P'_1$  unter sich gleich, am Hebelarme  $r$  wirkend, verbleiben, so werden diese, da sie ein drehendes Kräftepaar bilden, den Querschnitt zu verbiegen suchen, und zwar in vorliegendem Falle ihn derart aus seiner Ebene heraus um die Schwer-

achse  $III$  drehen, daß an der Kante  $ad$  die größte Druckwirkung, an der Kante  $bc$  der Höchstwert einer Zugspannung auftritt. Da die Kraft  $P_1$ , im Schwerpunkt liegend, den Querschnitt nur auf Normalspannung belastet, das Kräftepaar in ihm aber Biegungsspannungen hervorruft, so bedingt somit die Wirkung der exzentrisch wirkenden Kraft  $P$  eine zusammengesetzte Beanspruchung und zusammengesetzte Spannungen. Zugleich ist ersichtlich, daß die Wirkung zerlegt wird in die einer Normalkraft  $P_1 = P$  und eines Biegemomentes  $M = P \cdot r$ .

Die weiteren zusammengesetzten Festigkeitsarten, Beanspruchungen und Spannungen, die sich bilden bei Vereinigung von Schub- und Normalbelastung, von Biegungs- und Drehungsbeanspruchung, können für die vorliegende Bearbeitung als für die Hochbaukonstruktionen ohne wesentliche Bedeutung ausgeschaltet werden.

## 2. Die Normalfestigkeit, Druck- und Zugfestigkeit.

### a) Die Normalspannungen und Beanspruchungen.

Die Art und Wirkung der hier vorliegenden Beanspruchungsart und Festigkeit ist bereits auf S. 59 erörtert. Bei der hier vorausgesetzten genau mittigen Belastung wird bei einer Druckkraft eine Annäherung, bei der Zugbelastung eine Entfernung der benachbarten Querschnitte bedingt.

Ist die den Querschnitt  $= F$  mittig und senkrecht beanspruchende Kraft  $= P$ , entsteht in ihm durch ihre Wirkung eine Spannung  $= \sigma$  und nimmt man an, daß sich diese gleichmäßig über den Querschnitt verteilt, so folgt aus der Überlegung, daß im Zustande des Gleichgewichts die inneren Kräfte gleich der äußeren Kraft sein müssen, die grundlegende Beziehung:

$$P = \pm F \cdot \sigma,$$

$$\sigma = + \frac{P}{F} \text{ bei Zugbelastung,}$$

$$\sigma = - \frac{P}{F} \text{ bei Druckbelastung.}$$

Hat der Stab verschiedene Querschnitte, so ist naturgemäß in dieser Gleichung der Sicherheit halber — also um  $\sigma$  hoch zu erhalten — der kleinste Wert von  $F$  einzuführen. Das gilt auch, wenn Querschnitte vorhanden sind, welche durch irgendwelche Einschnitte, Einbohrungen, Ausklinkungen usw. geschwächt sind; alsdann ist für sie nur der „nutzbare“ Querschnitt — also abzüglich der Schwächung — in die Rechnung einzuführen.

Wird ein flußstählerner Probestab, also ein Stab aus elastischem, homogenen Stoffe, (Abb. 95a) durch eine Zugkraft  $P$  zentrisch belastet,

so wird er sich verlängern, hierbei zunächst nur elastische, alsdann dauernde Formänderungen zeigend. Trägt man unter Zugrundelegung eines senkrechten Koordinatensystems auf der  $y$ -Achse dieses die Belastungsgrößen in bestimmtem Maßstabe, auf der  $x$ -Achse die durch genau arbeitende Apparate zu messenden Dehnungen des Stabes — und zwar zweckmäßig in vergrößertem Maßstabe — auf und bildet (Abb. 95 b) aus beiden zur Darstellung des Zusammenhanges zwischen Belastung (bzw. Spannung) und Dehnung eine Formänderungskurve, so verläuft diese zunächst vollkommen geradlinig — Strecke  $OA$  der Kurve. Innerhalb dieser Strecke sind demgemäß die Dehnungen und Spannungen unter sich proportional. Die Grenze, bis zu der ein solches Verhalten

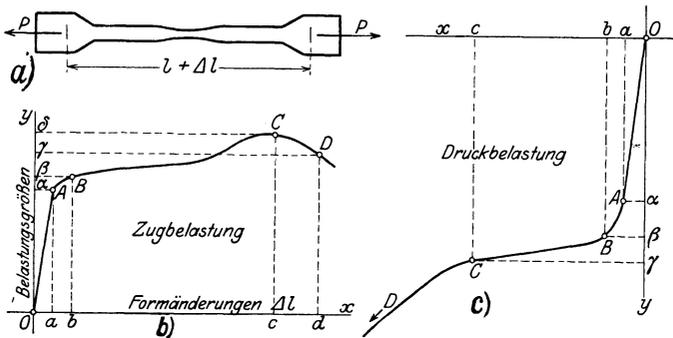


Abb. 95.

bestehen bleibt ( $A$  in Abb. 95 b), nennt man die Proportionalitätsgrenze. Bis zu ihr gilt also das **Hookesche** oder **Elastizitätsgesetz**, nach dem die auftretenden Spannungen proportional den sie bedingenden Dehnungen sind:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E},$$

worin  $\sigma$  die zur Formänderung  $\Delta l$  gehörende Spannung,  $E$  die Elastizitätszahl des Materials für die jeweilig vorliegende Beanspruchungsart darstellt. Da  $\Delta l$  und  $l$  Längen sind,  $\sigma$  eine Spannung darstellt (in  $\text{kg/cm}^2$ ), so muß also auch  $E$  seiner Einheit nach einen Spannungswert darstellen.

Innerhalb der Grenze  $OA$  ist die Formänderung (bei dem hier vorliegenden Eisen) noch rein elastisch, sie verschwindet also nach Aufhören der Kraft wieder; dies verbleibt auch noch auf eine kurze Strecke über die Proportionalitätsgrenze hinaus, wenn auch hier die Formänderungskurve eine starke Krümmung erfährt. Die Grenze, bis zu der die Formänderungen rein elastische sind, also später wieder verschwinden, heißt die **Elastizitätsgrenze**. Sie ist in der Regel verschieden hoch bei verschiedenartiger Belastung und naturgemäß abhängig vom

Material. Nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze beginnen die Formänderungen bald stärker und mit dem Auge wahrnehmbar zu werden. Es beginnt — von der Grenze  $B$  in Abb. 95b an — der Stab bei Zugbelastung zu „fließen“, während bei Druckbeanspruchung ein Zerquetschen deutlich wahrnehmbar wird. Die Grenze, von der dies erkennbar ist, wird die Streck- oder Fließgrenze benannt. Diese Grenze gibt sich auch im Formänderungsdiagramm durch einen schwächer gekrümmten, zunächst fast geradlinig ansteigenden, dann aber stark sich aufwärts biegenden Verlauf der Kurve zu erkennen. Innerhalb dieses Zwischenraumes entsprechen also der Zunahme der Kraft unverhältnismäßig große, sich stetig steigernde Dehnungen. Im Punkt  $C$  erreicht die Kraft ihren Höchstwert; von hier aus fällt die Kurve wieder, da nahe dem Höchstpunkt ( $C$ ) die Grenze eintritt, bei der der Stab zum Bruche gelangt. Die dem Punkt  $C$  entsprechende Höchstlast ( $O\delta$  in Abb. 95b) wird mit „Bruchlast“ bezeichnet, die zu ihr gehörende Spannung Bruchspannung oder Bruchfestigkeit benannt.

Bei Druckbelastung ist das Bild der Formänderung bis zum Beginne der Quetschgrenze im wesentlichen das gleiche wie bei Zugbelastung. Jedoch ist hier weiterhin nur bei spröden Stoffen, wie Gußeisen, Stein, Zement u. a., die Bruchgrenze deutlich erkennbar, während zähe und verhältnismäßig weiche Körper, wie Flußeisen, Kupfer usw. nicht zum Bruch gebracht werden können, da sie sehr große Formänderungen unter Druckbelastung vertragen, ohne daß ein eigentliches Zerbrechen stattfindet; hier ergeben sich Formänderungskurven, wie sie Abb. 95c veranschaulicht.

Bei der gesamten Längenänderung unterscheidet man die bleibende und die federnde, d. h. rein elastische. Je höher die Belastung steigt, um so größer ist auch die bleibende Formänderung; eine solche darf bei Konstruktionsteilen gar nicht oder nur in ganz geringem, unschädlichem Maße auftreten. Als ein Maß für den Elastizitätsgrad eines Körpers wird der Quotient aus der federnden durch die gesamte Dehnung bezeichnet:

$$\mu = \frac{\Delta f}{\Sigma \Delta}.$$

Für  $\mu = 1$  ergibt sich die vorgenannte Elastizitätsgrenze, da hier die Gesamtdehnung gleich der rein elastischen ist.

Die im Hookschen Gesetz:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha = \frac{\sigma}{E}$$

enthaltenen Elastizitätszahl wird aus Versuchen ermittelt. Da die Spannung:

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

jeweilig ist, so wird:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{FE}.$$

In dieser Gleichung sind beim Versuche bekannt alle Werte außer  $E$ , das demgemäß unmittelbar als Versuchsergebnis aus Messungen folgt.

Die Elastizitätszahlen der wichtigsten Baustoffe des Hochbaues enthält die nachfolgende Zusammenstellung:

Gußeisen . . . . .	$E = 1000000 \text{ kg/cm}^2$	
Flußstahl St 37 und St 48 <sup>1)</sup> . . . . .	2100000	„
Stahlguß, Schmiedestahl . . . . .	2150000	„
Nadelholz, Eiche und Buche . . . . .	100000	„
Ziegelmauerwerk . . . . .	rd. 50000	„
Bruchsteinmauerwerk . . . . .	rd. 60000—100000	„
Beton i. M. . . . .	220000 <sup>2)</sup>	} bei Druck- lastung
Granit . . . . .	300000	
Sandstein, Kalkstein . . . . .	150000—200000	

Bei vielen, namentlich bei steinartigen Körpern, ist nicht wie bei den rein elastischen Eisenbaustoffen bzw. bei Holz  $E$  eine konstante Größe, sondern unter anderen Funktionen in hohem Maße abhängig von der Größe der jeweiligen Spannung, also der Last. Das gilt namentlich von Zementmörtel und Beton, bei denen die Zahl  $E$  geringer wird mit höherer Spannung<sup>3)</sup>.

Es sei besonders hervorgehoben, daß die obigen Werte von  $E$  in der Einheit von  $\text{kg/cm}^2$  angegeben sind, daß also bei Veränderung der Einheit eine Umrechnung notwendig wird. So ergibt sich z. B. für: Flußstahl:  $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2 = 2100 \text{ t/cm}^2$  bzw.  $21000000 \text{ t/m}^2$ ; Beton:  $E = 200000 \text{ kg/cm}^2 = 200 \text{ t/cm}^2 = 2000000 \text{ t/m}^2$ .

Da bei Baukonstruktionsteilen keine bleibenden Formänderungen verbleiben dürfen, also auch die Elastizitätsgrenze des Materials, geschweige denn seine weiter hinausliegenden Gefahrgrenzen nicht erreicht werden dürfen, so darf ein Stab, Körper usw. nur mit einem

<sup>1)</sup> Mit St 37 und St 48 wird bezeichnet ein Flußstahl, und zwar der normale Baustahl St 37 bzw. der hochwertige, hochgekolte oder hochsilizierte Baustahl St 48 mit Zugfestigkeiten von 37—45 bzw. 48—58  $\text{kg/cm}^2$ .

<sup>2)</sup> Im Verbundbau wird im Hinblick auf die besonderen, hier vorliegenden Verhältnisse i. d. R. mit  $E = 140000 \text{ kg/cm}^2$  gerechnet.

<sup>3)</sup> Es nimmt z. B. die Elastizitätszahl bei Druckbelastung und einem Zementbeton von 1:3 mit 8 vH Wasser ab, bei  $\sigma = 3,0 \text{ kg/cm}^2$  bzw.  $60 \text{ kg/cm}^2$  von 300000 auf 240000  $\text{kg/cm}^2$  und bei einem Wassergehalt von 14 vH von 272000 auf 209000  $\text{kg/cm}^2$ ; ähnlich liegen die Verhältnisse bei Zugbelastung: bei  $\sigma = 1,6$  bis  $9,2 \text{ kg/cm}^2$  nimmt die Elastizitätszahl bei 8 vH Wasser ab von 267000 auf 196000  $\text{kg/cm}^2$ . Noch erheblich stärker weichen die Zahlen bei Druckbeanspruchung der Naturgesteine ab. So fand v. Bach bei Sandstein von  $\sigma = 0,1$  bis  $16,4 \text{ kg/cm}^2$  und Zugbelastung  $E = 93700$  bis  $21000 \text{ kg/cm}^2$ .

bestimmten Teil seiner Bruchfestigkeit beansprucht werden, der sich nach dem Baustoff und der Beanspruchungsart richtet.

Bezeichnet man mit  $\sigma$  die unter diesem Gesichtspunkte als erlaubt angesehene zulässige Normalspannung, mit  $\sigma_b$  die Bruchspannung und mit  $s$  die notwendige, letztere ausschließende Sicherheit, so wird:

$$\sigma = \frac{\sigma_b}{s}.$$

Bei Flußstahl ist  $s$  in der Regel 3—4, bei Gußeisen auf Druck 8—10, auf Zug rd. 6, bei Holz auf Druck 6—8, auf Zug 8—12, bei Beton rd. 5—6, bei Natursteinquadern etwa 15—20, bei Mauerwerk rd. 20. Hierbei ist naturgemäß zu beachten, daß viele Baustoffe, wie Beton und Steine, vorwiegend nur auf Druck belastet werden dürfen, da sie eine zum mindesten unsichere, oft aber nur geringe Zugsicherheit besitzen. Ist ihre Zugbeanspruchung in besonderen Fällen nicht vermeidbar, so wird man etwa damit rechnen können, daß die Zugfestigkeit dieser Stoffe rd.  $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{12}$  der Druckfestigkeit ist und eine etwa 4—6fache Sicherheit gegenüber dem Auftreten von Rissen angezeigt erscheint. Bei in gutem Zementmörtel ausgeführtem Mauerwerk wird man mit einer Zugfestigkeit der Mörtelfuge von etwa 12 kg/cm<sup>2</sup> rechnen, also ihr eine Zugbelastung von rd. 2 kg/cm<sup>2</sup> zuweisen können, ohne ein Auftreten von Rissen befürchten zu müssen.

Über die zulässigen Normalspannungen der wichtigen Hochbaustoffe auf Druck und Zug gibt die nachfolgende Zusammenstellung Auskunft.

Zulässige Beanspruchungen auf Druck und Zug  
(bei Normalbeanspruchung).

α) Eisen und Holz.

Baustoffe	Zulässige Beanspruchung in kg/cm <sup>2</sup>		
	auf Druck	auf Zug	
Gußeisen . . . . .	600—1000 <sup>1)</sup>	300	
Flußstahl St 37 . . . . .	1000—1200 (1400)	1000—1200 (1400) <sup>2)</sup>	
Flußstahl St 48 . . . . .	1560—1820	1560—1820	
Stahlformguß . . . . .	1500	1700	
Geschmiedeter Stahl . . . . .	1700	1700	
Nadelholz	} ohne Knickung		
Kiefer . . . . .		60	100 <sup>3)</sup>
Fichte . . . . .		50	90
Tanne . . . . .		50	80
Laubholz (Eiche, Buche) . . . . .	80	100	

<sup>1)</sup> Bei achsrechtem Druck 600, in Lagern 1000 kg/cm<sup>2</sup>.

<sup>2)</sup> Bei bester Durchführung und genauester Berechnung u. U.  $\sigma = 1600$  kg/cm<sup>2</sup> bei St 37, bei St 48 bis 2000 kg/cm<sup>2</sup>.

<sup>3)</sup> Bei Bauten für vorübergehende Zwecke ist eine Erhöhung der Zahlen um 25 v H erlaubt.

## β) Naturgestein.

	Zulässige Druckbelastung in kg/cm <sup>2</sup> für Verwendung als		
	Auflagersteine	Pfeiler und Gewölbe	Schlanke Pfeiler u. Säulen
Basalt . . . . .	65	45	30
Granit . . . . .	60	40	25
Syenit . . . . .	55	40	25
Porphyr . . . . .	40	30	20
Marmor . . . . .	30	20	15
Basaltlava . . . . .	20	15	10
Sandstein . . . . .	20	15	10
Tuffstein . . . . .	—	10	7
Bruchstein . . . . .	—	5 bis 7	—

## γ) Mauerwerk und künstliche Steine.

Steinart	Mindestdruckfestigkeit der Steine kg/cm <sup>2</sup>	Mörtelmischung			Zulässige Druckspannung		
		Zement	Kalk	Sand	im Mauerwerk kg/cm <sup>2</sup>	Pfeiler	
						bei <sup>1)</sup> $\frac{s}{h}$	kg/cm <sup>2</sup>
Schwemmsteine . . . . .	20	—	—	—	3	—	—
Hochofen-Schwemmsteine . . . . .	15	—	—	—	3	—	—
Poröse Ziegel . . . . .	—	—	—	—	3—6	—	—
Schlackensteine . . . . .	—	—	—	—	3—6	—	—
Mauerziegel II . . . . .	100	—	1	3	bis 7	—	—
Mauerziegel I und Kalksandsteine . . . . .	150	—	1	3	10	—	—
Desgl. . . . .	150	1	2	8	14	—	—
Hartbrandziegel und Kalksandhartsteine . . . . .	250	1	2	8	18	—	—
Desgl. . . . .	250	—	—	—	—	0,30	18
						0,25	14
						0,30	12
						0,15	10
						0,10	8
Klinker . . . . .	350	1	—	3	35	< 0,10	< 8 <sup>2)</sup>
						0,30	35
						0,25	25
Desgl. . . . .	350	—	—	—	—	0,20	20
						0,15	15
						0,10	10
						< 0,10	< 10 <sup>2)</sup>

1) Unter  $\frac{s}{h}$  ist das Verhältnis der geringsten Pfeilerstärke  $s$  zur Höhe  $h$  verstanden.

2) Nur in besonderen Fällen zulässig.

δ) Beton.

Zulässige Druckspannung bei Handelszement 35 kg/cm<sup>2</sup>, bei hochwertigem Zement 45 kg/cm<sup>2</sup> im Eisenbetonbau, im reinen Betonbau  $\frac{1}{5}$  der Würfel Festigkeit des erdfeuchten Betons ( $W_{e_{28}}$ ) nach 28 Tagen, aber  $\leq 50$  kg/cm<sup>2</sup>. Bei Stützen und Pfeilern mit  $\frac{s}{h} = 1:1$  zu  $\frac{1}{1}$ , bei  $\frac{1}{5}$  zu  $\frac{1}{2}$ , bei  $\frac{1}{10}$  zu  $\frac{1}{4}$  der vorgenannten Größen  $\frac{W_{e_{28}}}{5}$ , vorausgesetzt mittige Belastung.

b) Zahlenbeispiele.

Ein aus zwei Flacheisen von je 1 cm Stärke gebildeter Stab, der je durch ein Nietloch von 2 cm Durchmesser geschwächt ist, hat eine Kraft von 24 t zu tragen. Wie groß ist seine Breite  $b$  zu gestalten? Als zulässige Spannung  $\sigma$  wird 1200 kg/cm<sup>2</sup> zugelassen. Demgemäß wird:

$$F = \frac{24000}{1200} = 20 \text{ cm}^2.$$

Da (Abb. 96) der Stab um den Betrag von  $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$  cm<sup>2</sup> geschwächt ist, so ist seine Breite  $b$  aus der Beziehung abzuleiten:

$$(2b - 1,0) \text{ cm}^2 = (20 + 4) \text{ cm}^2$$

$$b = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}.$$

2. Eine Rundeisenzugstange ( $\sigma = 1200$  kg/cm<sup>2</sup>) habe 6000 kg zu tragen. Gesucht wird ihr Durchmesser =  $d$ .

Es ist:

$$F = \frac{6000}{1200} = 5 \text{ cm}^2 = \frac{d^2 \pi}{4}; \quad d = \sqrt{\frac{5 \cdot 4}{3,14}} \approx 2,7 \text{ cm}.$$

3. Ein quadratisches Eisen hat 3 cm Seite und eine Zugkraft von  $P = 6000$  kg zu tragen. Gesucht wird die Spannung. Hier ist  $F = 3 \cdot 3 = 9$  cm<sup>2</sup> und demgemäß:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{6000}{9} = 667 \text{ kg/cm}^2.$$

4. Der kreisringförmige Querschnitt einer gußeisernen Säule hat einen äußeren Durchmesser von  $D = 24$ , einen inneren  $d = 16$  cm. Die zulässige Beanspruchung beträgt 500 kg/cm<sup>2</sup>. Die Tragfähigkeit der Säule ist zu berechnen.

Da hier

$$F = \frac{(20^2 - 16^2) 3,14}{4} = 113,1 \text{ cm}^2$$

ist, so wird mit  $\sigma = 500$  kg/cm<sup>2</sup>:

$$P = F \cdot \sigma = 113,1 \text{ cm}^2 \cdot 500 \text{ kg/cm}^2 = 56550 \text{ kg}.$$

5. Bei einer Säule ähnlich wie unter 4, ist  $P = 36000$  kg,  $\sigma = 600$  kg/cm<sup>2</sup>,  $D = 12$  cm. Gesucht wird der innere Durchmesser =  $d$ .

$$F = \frac{P}{\sigma} = \frac{36000}{600} = 60 \text{ cm}^2, \quad F = \frac{(D^2 - d^2) 3,14}{4} = 60 \text{ cm}^2,$$

$$d^2 = D^2 - \frac{4 \cdot 60}{3,14} = 144 - \frac{240}{3,14} = 144 - 76,4 = 67,6; \quad d = 8,2 \text{ cm}.$$

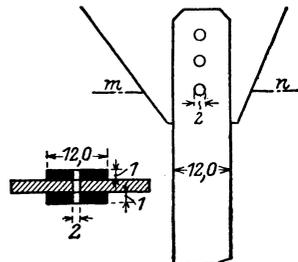


Abb. 96.

Demgemäß erhält die Säule eine Wandstärke von:

$$\frac{D-d}{2} = \frac{12-8,2}{2} = 1,9 \text{ cm.}$$

6. Wieviel vermag ein Ziegelpfeiler von  $1\frac{1}{2}$  Steinstärke in Kalkmörtel gemauert zu tragen? Hier ist die Pfeilerstärke 38 cm, also:

$$F = 38^2 = 1444 \text{ cm}^2.$$

$$P = \sigma F = 7 \cdot 1444 = 10108 \text{ kg} = \text{rd. } 10 \text{ t.}$$

Wird der Mauerpfeiler in verlängertem Zementmörtel gemauert, und für  $\sigma$  der Wert  $12 \text{ kg/cm}^2$  zugelassen, so wird die Tragfähigkeit des Pfeilers:

$$P = 12 \cdot 1444 = 17328 \text{ kg,}$$

d. h. wie zu erwarten steht, sehr erheblich höher.

7. Ein Dachstuhl (Abb. 97) überträgt an seinem Auflager eine Last von 50 t und belastet mit seiner Unterlagsplatte einen Quader ( $\sigma = 20 \text{ kg/cm}^2$ ); dieser bindet in ein Mauerwerk ein, das mit  $\sigma = 11 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht werden darf. Die Grundflächenabmessungen der Auflagerplatte und des Quaders sind zu ermitteln. Für die Auflagerplatte folgt:

$$F_1 = \frac{50000}{20} = 2500 \text{ cm}^2.$$

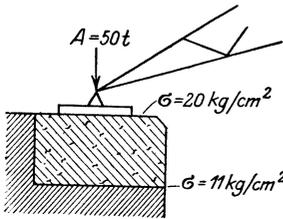


Abb. 97.

Macht man sie quadratisch, so ergibt sich demgemäß eine Seite = 50 cm.

Für die Quaderfläche folgt:

$$F_2 = \frac{50000}{11} = 4545 \text{ cm}^2.$$

Hier wird eine Grundfläche von  $70 \times 70 = 4900 \text{ cm}^2$  gewählt.

8. Es ist die Gründung einer Säule zu berechnen, die 81 t mittige Last auf das Fundament überträgt. Es besteht der Unterbau der Säule von oben nach unten aus einem Granitquader  $\sigma = 50 \text{ kg/cm}^2$ , einer Betonplatte 1:6 gemischt,  $\sigma = 15 \text{ kg/cm}^2$ , einem Magerbeton 1:12,  $\sigma = 6 \text{ kg/cm}^2$ . Der Baugrund endlich kann mit  $2,5 \text{ kg/cm}^2$  belastet werden. Bei der verhältnismäßig geringen Bemessung der Spannungen kann das Eigengewicht des Fundamentes vernachlässigt werden<sup>1)</sup>. Nimmt man an, daß sich durch Stein und Beton der Druck nach unten zu nach einem Winkel von  $60^\circ$  fortpflanzt, so ergibt sich für die hierdurch bedingte Schichthöhe (Abb. 98) die Beziehung:

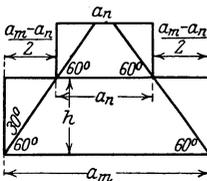


Abb. 98.

$$h = \frac{a_m - a_n}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = (a_m - a_n) \frac{1,732}{2} = 0,87 (a_m - a_n).$$

Bezeichnet man die erforderlichen Druckflächen von oben aus (also zunächst der Säule) mit  $F_1$ , weiterhin mit  $F_2, F_3, F_4$  und  $F_5$  (Erdfuge), mit  $a_2, a_3, a_4$  und  $a_5$  die Seiten der zugehörigen Druckfläche, mit  $h_3, h_4$  und  $h_5$  die Höhe des Granitquaders, bzw. der beiden folgenden Betonschichten, so ergeben sich die Einzelabmessungen der Fundamentabschnitte aus der nachfolgenden Zusammenstellung:

<sup>1)</sup> Vgl. Beispiel 10.

1. Säulenquerschnitt (Ring),  $\sigma_{zul.} = 500 \text{ kg/cm}^2$ ;  $F_1 = \frac{81000}{500} = 162 \text{ cm}^2$ ,  
 Gewählt äußerer Ringdurchmesser  $D = 23 \text{ cm}$ , und  $\delta = 2,5 \text{ cm}$ ; alsdann wird  
 $F = 161 \text{ cm}^2$ .

2. Fuge zwischen Fußplatte und Granitquader,  $F_2 = \frac{81000}{50} = 1620 \text{ cm}^2$ ;  
 $a_2 = 41 \text{ cm}$ ; bestimmend für die Größe der quadratischen Säulenfußplatte.

2. Fuge zwischen Granitplatte und Betonplatte (1:6)

$$F_3 = \frac{81000}{15}; \quad a_3 = \sqrt{\frac{81000}{15}} = 74 \text{ cm},$$

gewählt  $75 \text{ cm}$ ; Stärke der Granitplatte  $h_3 = 0,87(a_3 - a_2) = 0,87 \cdot (75 - 41) = 0,87 \cdot 34 \cong 30 \text{ cm}$ .

4. Fuge zwischen den Betonplatten 1:6 und 1:12.

$$F_4 = \frac{81000}{6}; \quad a_4 = \sqrt{\frac{81000}{6}} = 117 \text{ cm} \cong 120 \text{ cm};$$

$$h_4 = 0,87(a_4 - a_3) = 0,87(120 - 75) = 0,87 \cdot 45 \cong 40 \text{ cm}.$$

5. Erdfuge.

$$F_5 = \frac{81000}{2,5}; \quad a_5 = \sqrt{\frac{81000}{2,5}} = 180 \text{ cm};$$

gewählt  $190 \text{ cm}$ ;

$$h_5 = 0,87(190 - 120) = 0,87 \cdot 70 \cong 60 \text{ cm}.$$

Hiermit sind alle Abmessungen des Fundamentkörpers festgesetzt. Seine Gesamttiefe beträgt:  $30 + 40 + 60 = 130 \text{ cm} = 1,30 \text{ m}$ .

9. Ein kurzer Stiel aus Kiefernholz hat eine Druckkraft  $= 20 \text{ t}$  zu tragen. Eine Abmessung seines Rechtecksquerschnitts beträgt  $12 \text{ cm}$ , die andere ( $= x$ ) wird gesucht.  $\sigma = 60 \text{ kg/cm}^2$ .

$$F = 12 \cdot x = \frac{20000}{60} = 333,5 \text{ cm}^2, \quad x = \frac{333,5}{12} = \text{rd. } 28 \text{ cm}.$$

Demgemäß wird ein Stiel 28/12 zu verwenden sein.

10. Ein Steinpfeiler nach Abb. 99 habe die Höhe von  $1,00 \text{ m}$ , ein Raumbgewicht von  $2,3$  und eine mittige Last von  $P = 10000 \text{ kg}$  zu tragen. Wie groß muß unter Hineinrechnung seines Eigengewichtes seine Grundfläche gemacht werden, wenn diese nur mit  $7 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht werden darf.

Bezeichnet man (Abb. 99) das Gewicht des Pfeilers mit  $G$ , die gesuchte Grundfläche mit  $F$ , so ist:

$$G = \gamma \cdot F \cdot l$$

und die Gesamtlast

$$P + \gamma Fl.$$

Somit wird:

$$F = \frac{P + \gamma Fl}{\sigma}, \quad F - \frac{\gamma Fl}{\sigma} = \frac{P}{\sigma}; \quad F \left(1 - \frac{\gamma l}{\sigma}\right) = \frac{P}{\sigma}.$$

Bei Einsetzung der Zahlen ist darauf zu achten, daß für  $\gamma$ ,  $\sigma$  und  $P$  dieselben Einheiten innegehalten werden. Da  $\sigma = 7 \text{ kg/cm}^2$  ist, so ist demgemäß für  $\gamma$  auch der Wert in  $\text{kg/cm}^3$  einzusetzen, d. h. da  $\gamma = 2300 \text{ kg/m}^3$  ist:

$$\gamma = \frac{2300}{100^3} = 0,0023 \text{ kg/cm}^3$$

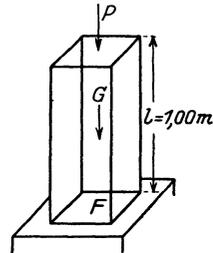


Abb. 99.

einzuführen, ebenso ist  $P$  in Kilogramm und  $l$  in Zentimeter zu rechnen:

$$F \left( 1 - \frac{0,0023 \cdot 100}{7} \right) = \frac{10000}{7},$$

$$F \cdot 0,967 = 1430, \quad F = 1478 \text{ cm}^2.$$

Dasselbe Ergebnis entsteht naturgemäß, wenn man  $\gamma$  in  $\text{kg/m}^3 = 2300$  einführt und demgemäß  $\sigma$  ebenfalls in  $\text{kg/m}^2$  ausdrückt.  $\sigma = 70000 \text{ kg/m}^2$ . Alsdann ist  $l$  in Meter einzuführen, während  $P$  in Kilogramm verbleibt.

$$F \left( 1 - \frac{2300 \cdot 1,0}{70000} \right) = \frac{10000}{70000},$$

$$F \cdot 0,967 = 0,143, \quad F_1 = 0,1478 \text{ m}^2 = 1478 \text{ cm}^2.$$

11. Ein Flacheisen mit  $d \cdot b = 2,5 \cdot 9 \text{ cm}^2$  Querschnitt und 3,5 m Länge hat eine Kraft  $P = 18 \text{ t}$  auf Zug zu tragen. Die auftretende Spannung und die Dehnung des Stabes sind zu ermitteln.

$$\sigma = \frac{P}{db} = \frac{18000}{2,5 \cdot 9} = 800 \text{ kg/cm}^2,$$

nach dem Hookeschen Gesetze ist:

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{800}{2100000} \cdot 350 = \text{rd. } 0,14 \text{ cm}.$$

11. Eine schweißeiserner Rundstange ( $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ ) hat bei einer Beanspruchung durch eine Zugkraft  $P = 15 \text{ t}$  eine Verlängerung  $\Delta l = \frac{1}{3000} l$  ergeben. Der Durchmesser der Stange wird gesucht.

Es ist:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot \sigma = P = 15000, \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{3000} = \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{2000000},$$

$$\sigma = \frac{2000000}{3000} = 666,6 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{15000}{666,6}; \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot 15000}{3,14 \cdot 666,6}} = 5,35 \text{ cm}.$$

12. Bei einer Druckbelastung durch  $P = 245 \text{ t}$  drückt sich ein 40 cm langer Probestab aus Gußeisen von  $F = 350 \text{ cm}^2$  um 0,28 mm zusammen. Gesucht wird die Elastizitätszahl des Eisens.

Es ergibt sich aus:

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{FE},$$

$$E = \frac{Pl}{F \Delta l} = \frac{245000 \cdot 40}{350 \cdot 0,028} = \frac{700000 \cdot 40}{28} = 1000000 \text{ kg/cm}^2.$$

Hierbei ist auf die Innhaltung der Einheiten — hier alle Größen in kg und cm — zu achten.

Eine längsbewehrte Eisenbetonstütze habe quadratischen Querschnitt — Seite =  $a$  — und sei an ihren vier Ecken mit Rund-eisen bewehrt, die je  $fe$ -Querschnitt aufweisen;  $4 fe = Fe$  (Abb. 100). Sie ist mittig, durch eine Kraft =  $P$  belastet. Die Elastizitätszahlen sind  $E_e = 2100000 \text{ kg/cm}^2$  für die Flußstahleinlage,  $E_b = 140000 \text{ kg/cm}^2$

für den Beton (1 : 4). Hieraus folgt:

$$n = \frac{E_e}{E_b} = \frac{2100000}{140000} = 15.$$

Nimmt man an, daß — um den Verbund zwischen Eisen und Beton nicht zu stören — die Formänderungen beider Stoffe, hier also ihre Zusammenpressung je gleich groß ist:  $\Delta_e = \Delta_b$ , so ergibt sich, wenn  $l$  die ursprüngliche Länge ist und  $\sigma_e$  und  $\sigma_b$  die den vorerwähnten Längenänderungen entsprechenden Druckspannungen im Eisen bzw. Beton sind, nach dem Hookeschen Gesetze:

$$\frac{\Delta_e}{l} = \frac{\sigma_e}{E_e}; \quad \frac{\Delta_b}{l} = \frac{\sigma_b}{E_b};$$

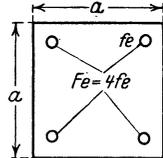


Abb. 100.

und hieraus, weil  $\Delta_e = \Delta_b$  ist:

$$\frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_e}{E_e}; \quad \sigma_e = \sigma_b \frac{E_e}{E_b} = n \sigma_b.$$

Es besteht somit eine unmittelbare Abhängigkeit zwischen der Eisen- und der Betonspannung:  $\sigma_e = 15 \sigma_b$ ;  $\sigma_b = \frac{1}{15} \sigma_e$ . Nimmt man ferner an, daß sich die Kraft  $P$  gleichmäßig auf Beton und Eisen überträgt, so wird:

$$P = \sigma_b \cdot F_b + \sigma_e F_e = \sigma_b F_b + n \sigma_b F_e = \sigma_b (F_b + n F_e) = \sigma_b F_i,$$

wenn  $F_i$  den ideellen Verbundquerschnitt bezeichnet, bei dem das Eisen entsprechend seiner höheren Elastizitätszahl mit dem  $n = 15$ -fachen Querschnitt eingeführt wird.

13. Zahlenbeispiel. Gegeben ist:

$$F_b = 30 \cdot 30 \text{ cm}^2; \quad F_e = 4 f_e = 4 \cdot \frac{2,3 \pi}{4} = 4 \cdot 3,14 \cong 12,6 \text{ cm}^2$$

und  $\sigma_b = 35 \text{ kg/cm}^2$ . Gesucht wird die erlaubte, mittige Tragkraft  $= P$ .

$$P = 35 (F_b + n F_e) = 35 (30^2 + 15 \cdot 12,6) = 35 (900 + 189) = 38115 \text{ kg} = \mathbf{38,115 \text{ t}}.$$

14. Eine quadratische Säule, ähnlich der vorstehend behandelten, trägt eine mittige Last  $= 30000 \text{ kg}$ ;  $a = 30 \text{ cm}$ ;  $F_e = 4 f_e = 4 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 4 \cdot \frac{2^2 \pi}{4} \cong 12,6 \text{ cm}^2$ . Gesucht wird die im Beton auftretende Spannung:

$$\sigma_b = \frac{P}{F_b + n F_e} = \frac{30000}{30 \cdot 30 + 15 \cdot 12,6} = \frac{30000}{1089} = \text{rd. } 27,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Berücksichtigt man die Betonschwächung, so wird:

$$\sigma_b = \frac{30000}{900 - 4 \cdot \frac{2,0^2 \pi}{4} + 15 \cdot 4 \cdot \frac{2,0^2 \pi}{4}} = \frac{30000}{900 + 14 \cdot 4 \cdot 3,14} = \frac{30000}{1076} \cong 28 \text{ kg/cm}^2;$$

es zeigt sich somit, daß der Abzug der vom Eisen eingenommenen Betonquerschnittsfläche keine Bedeutung irgend erheblicher Art auf das Spannungsergebnis hat.

15. Ein Verbundpfeiler mit Achtecksquerschnitt von einem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises = 72 cm und 8 Rundeisen vom Durchmesser je 3,0 cm bewehrt, soll mit  $\sigma_b = 35 \text{ kg/cm}^2$  belastet werden. Gesucht wird ihre mittige Traglast  $P$ . Nach Seite 49 und den voranstehenden Darlegungen ist:

$$\begin{aligned} P &= 35 (0,8284 d_b^2 + 15 \cdot Fe) = 35 \left( 0,8284 \cdot 72^2 + 15 \cdot 8 \cdot \frac{3,0^2 \pi}{4} \right) \\ &= 35 (4204 + 848) = 179970 \text{ kg} = \text{rd. } 180 \text{ t.} \end{aligned}$$

Für spiralbewehrte Säulen, bei denen neben einer Längsbewehrung ( $F_e$ ) noch eine Spiralbewehrung in Verbindung mit letzter ausgeführt wird, haben Versuche ergeben, daß die mittige Tragkraft sich aus der Beziehung berechnet:

$$P = \sigma_b (F_k + nF_e + 3nFe_s).$$

Hierin ist wiederum  $n = 15$ .  $F_{e_s}$  ist eine gedachte, der Spirale mit dem Eisenquerschnitt =  $f_e$ , der Steigung =  $s$  und dem Durchmesser =  $D$  inhaltlich gleichwertige Längenbewehrung:  $F_{e_s} = \frac{\pi D f_e}{s}$  und endlich  $F_k$

der von der Spirale umschlossene Kern des Betonquerschnittes. Hier wird also der äußere Betonmantel nicht in Rechnung gestellt.

16. Beispiel: Gegeben sei für eine umschnürte Verbundstütze: der äußere Durchmesser = 45 cm, der innere Kerndurchmesser innerhalb der Spirale = 40 cm; d. h.  $F_k = 1256 \text{ cm}^2$ ,  $Fe = 6$  Rundeisen von je 2 cm Durchmesser =  $18,84 \text{ cm}^2$ ,  $s = 4,2 \text{ cm}$ , Spiraldurchmesser = 1,0 cm,  $f_e = 0,79 \text{ cm}^2$ , also  $Fe_s = \frac{3,14 \cdot 40}{4,2} \cdot 0,79 \approx 24 \text{ cm}^2$ . Hieraus folgt bei  $\sigma_b = 35 \text{ kg/cm}^2$ :

$$P = 35 (1256 + 15 \cdot 18,84 + 45 \cdot 24) = 35 \cdot 2670 = 91700 \text{ kg} = 91,7 \text{ t.}$$

### 3. Die Knickfestigkeit.

Bereits auf S. 60 wurde darauf hingewiesen, daß, wenn die Länge eines Stabes im Vergleich zu seiner Querschnittsfläche groß ist, unter dem Einflusse einer Druckkraft ein Ausbiegen — ein Ausknicken — stattfinden kann. Alsdann wirkt auf jeden Querschnitt neben der Druckkraft noch ein Biegemoment ein, das naturgemäß um so größer ist, je weiter sich die Stabachse nach der Knickung aus ihrer ursprünglichen Lage verschoben hat. Hierbei ist zwar im allgemeinen die Ausknickung des Stabes nach jeder Richtung denkbar, sie wird sich aber vor allem nach der geringeren oder größeren Steiligkeit des Querschnitts richten und demgemäß aus der Ebene heraus zu erwarten stehen, die durch die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes gelegt wird, also auf der des größten senkrecht steht. Dies folgt daraus, daß die seitliche Ausbiegung auch durch eine zur Stabachse senkrechte Kraft veranlaßt werden kann und hier um so eher ein Ausbiegen stattfindet, je näher die Kräftebene mit der Ebene, durch die Achse von  $J_{\max}$  gelegt, zusammenfällt, eine Beanspruchung, für die also  $J_{\min}$  in Frage kommt.

## a) Die Euler-Gleichung.

Die Berechnung der Last, welche ein Stab auf Knicken zu tragen vermag, bei der also mit seinem Ausknicken zu rechnen und der Zustand der Knickfestigkeit erreicht ist, erfolgte früher allgemein nach der von Euler aufgestellten, auf der Form der Wellenlinie als Biegelinie beruhenden Gleichung: der Euler-Gleichung:

$$P_0 = \frac{CEJ_{\min}}{l^2},$$

oder, wenn man eine ausreichende Sicherheit dafür einführt, daß diese Gefahrgrenze nicht erreicht wird, nach der Beziehung:

$$P = \frac{CEJ_{\min}}{s \cdot l^2}.$$

Hierbei bedeutet  $C$  eine von der Lagerung des Stabes, also dem Anschlusse dieses nach oben und unten abhängige Zahl;  $E$  stellt die Elastizitätszahl des Materials dar,  $J_{\min}$  ist das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts,  $l$  ist die mathematische Länge des Stabes. Die Sicherheit  $s$  wird für Gußeisen zu 8—10, für Schweißisen zu 5, für Flußeisen zu 3,5—5, für Holz zu 10—12 genommen.

Dieser Euler-Gleichung kommt heute nur noch eine beschränkte Bedeutung zu, da durch Versuche erwiesen ist, daß sie nur in dem sog. elastischen Bereiche, d. h. innerhalb von Grenzen gilt, in denen der Stab den Gesetzen der Elastizität folgt. Für diese Grenze ist das Verhältnis  $\frac{l}{i} = \lambda$ , d. h. das Schlankheitsverhältnis des Stabes maßgebend, wobei  $l$  die Stablänge,  $i$  den Trägheitshalbmesser, entwickelt, aus dem für die Ausknickung in Frage kommenden  $J$  — also in der Regel  $J_{\min}$  — bedeutet. Diese Grenze liegt beispielsweise bei Flußstahl und Holz bei rd. 100; hier sind also nur Stäbe nach der Euler-Gleichung zu berechnen, bei denen  $\lambda > 100$ ;  $l > 100i$  ist. Vorgeschrieben ist heute für Knickberechnungen das  $\omega$ -Verfahren, auf das weiter unten näher eingegangen wird. Die dort gegebenen Zusammenstellungen enthalten zugleich die Werte für Knickberechnungen von Stäben, die innerhalb des elastischen Bereiches liegen, abgeleitet aus der Euler-Gleichung. Will man im elastischen Bereiche unmittelbar nach der Euler-Formel arbeiten, so kann entsprechend den nachfolgenden Ausführungen vorgegangen werden:

Bei der Lagerung der Stäbe nach Euler werden die vier Stützungsarten in Abb. 101 a—d unterschieden.

I. Der Stab ist an einem Ende eingespannt, an seinem anderen Ende vollkommen frei; hier ist  $C = \frac{\pi^2}{4}$ .

II. Der Stab ist an seinen beiden Enden gelenkartig, d. h. frei drehbar eingeführt. Dieser Fall ist der für Baukonstruktionen wichtigste und meist vorhandene; er wird deshalb auch als Normalfall bezeichnet, und bei allen Druckgliedern von Fachwerkskonstruktionen für deren Knickberechnung zugrunde gelegt. Hier ist  $C = \pi^2$ .

III. Der Stab ist an dem einen Ende gelenkig, also frei drehbar gelagert, am anderen eingespannt.  $C = 2\pi^2$ .

IV. Der Stab ist beiderseits fest eingespannt.  $C = 4\pi^2$ .

Setzt man, da es sich bei der Knickberechnung doch nur vorwiegend um eine Schätzungsrechnung handelt,  $\pi^2 \ll 10$ , so ergeben sich für die vier Stützungsarten nach Abb. 101a—d die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1. P &= 2,5 \cdot \frac{E J_{\min}}{s l^2}; & 2. P &= 10 \cdot \frac{E J_{\min}}{s l^2}; \\ 3. P &= 20 \cdot \frac{E J_{\min}}{s l^2}; & 4. P &= 40 \cdot \frac{E J_{\min}}{s l^2}. \end{aligned}$$

Geht man vom Normalfall (Abb. 101b) aus, so kann man auch unter Einführung der wirklichen, auf die Ausbiegung im Normalfall bezogenen Knicklänge die obigen Beziehungen entwickeln.

In Fall I (Abb. 101a) ist, wenn man die Knicklänge im Vergleich zu Form und Ausdehnung der Biegung in Abb. 101 b mit  $l_0$  bezeichnet,  $l_0 = 2l$ , in Fall III  $l_0 = 0,71l$ , im Fall IV  $l_0 = 0,5l$ . Hierin bedeutet  $l$  die mathematische Länge. In der ersten Beziehung gibt sich deutlich die erheblich leichtere Knickmöglichkeit der einseitig vollkommen freien Säule zu erkennen, während die Verringerungen der Knicklänge bei Fall III und IV der Einwirkung der Einspannung des Stabes Rechnung tragen. Unter Einführung dieser wirklichen Knicklängen in die Gleichung für den Normalfall folgen dieselben Beziehungen, wie vorstehend gegeben:

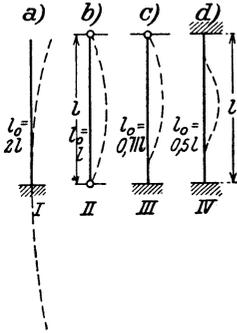


Abb. 101 a—d.

$$\begin{aligned} 1. P &= \frac{10 E J_{\min}}{s (2l)^2} = \frac{10 E J_{\min}}{4 s l^2} = 2,5 \frac{E J_{\min}}{s l^2}, \\ 2. P &= \frac{10 E J_{\min}}{s l^2} \text{ (Normalfall)}, \\ 3. P &= \frac{10 E J_{\min}}{s (0,71l)^2} = \frac{10 E J_{\min}}{\frac{1}{2} s l^2} = \frac{20 E J_{\min}}{s l^2}, \\ 4. P &= \frac{10 E J_{\min}}{s (0,5l)^2} = \frac{10 E J_{\min}}{\frac{1}{4} s l^2} = \frac{40 E J_{\min}}{s l^2}. \end{aligned}$$

Für die Berechnungen der Praxis ist die Euler-Gleichung für den Normalfall zweckmäßig vereinfacht und, je nach dem jeweilig vorliegenden Material, dessen  $E$  und die zugehörige Sicherheit  $s$  in Zahlenwerten eingeführt.

Für Gußeisen ist:  $E = 1000000 \text{ kg/cm}^2$ . Da in der Regel der Querschnitt des auf Knickung belasteten Stabes gesucht wird, so wird die Gleichung nach dem Wert  $J_{\min}$  entwickelt. Für eine Sicherheit  $s = 8$  wird somit:

$$J_{\min} = \frac{s P l^2}{10 E} = \frac{8 \cdot P l}{10 \cdot 1000000}.$$

Setzt man hierin  $l$  in m,  $P$  in kg ein, so muß auch  $E$  in  $\text{kg/cm}^2$  eingeführt werden; alsdann ergibt sich  $J_{\min}$  in  $\text{m}^4$ :

$$J_{\min} \text{ m}^4 = \frac{8 P \cdot l^2}{10 \cdot 10000000000}.$$

Um die vielen Dezimalstellen zu vermeiden, soll  $J_{\min}$  in  $\text{cm}^4$  erscheinen; alsdann ist die rechte Gleichungsseite mit  $100^4$  zu multiplizieren:

$$J_{\min} \text{ cm}^4 = \frac{8 P l^2 100^4}{10 \cdot 10000000000} = \frac{P l^2}{125}.$$

Wird endlich zur weiteren Rechnungsvereinfachung  $P$  in t-Einheit eingeführt

=  $P_1$ , so ist die rechte Gleichungsseite nochmals mit 1000 zu erweitern:

$$J_{\min} \text{ cm}^4 = \frac{P_1 l^2}{125} \cdot 1000 = 8 P_1 l^2, \quad P_1 = 0,125 \frac{J_{\min}}{l^2}.$$

Aus der Gleichung ergibt sich also  $J$  in  $\text{cm}^4$ , wenn  $P_1$  in t und  $l$  in m eingeführt wird.

Ist z. B.  $P_1 = 20$  t,  $l = 5$  m, so wird:

$$J_{\min} \text{ cm}^4 = 8 \cdot 20 \cdot 25 = 8 \cdot 500 \text{ cm}^4 = 4000 \text{ cm}^4.$$

Wird  $s = 10$  gewählt, so wird:

$$J_{\min} = \frac{P l^2}{100} \text{ bzw. } = 10 P_1 l^2$$

und somit:

$$P_1 = 0,1 \frac{J_{\min}}{l^2}; \quad \text{ebenso wird für } s = 6 \quad J_{\min} = 6 P_1 l^2.$$

In genau der gleichen Weise wird entwickelt für **Flußeisen**.

$$E = 2150000 \text{ kg/cm}^2, \quad s = 3,5$$

$$J_{\min} = 1,97 P_1 l^2 = \text{rd. } 2,00 P_1 l^2, \quad P_1 = 0,5 \frac{J_{\min}}{l^2};$$

bzw. für  $s = 4$ :

$$J_{\min} = 1,69 P_1 l^2 = \text{rd. } 1,70 P_1 l^2, \quad P_1 = 0,59 \frac{J_{\min}}{l^2};$$

endlich für **Nadelholz**,  $E = 100000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $s = 10$ :

$$J_{\min} = 100 P_1 l^2, \quad P_1 = 0,01 \frac{J_{\min}}{l^2}.$$

Liegt ein anderer Stützungsfall als der Normalfall vor, so sind für  $l$  die wirklichen Knicklängen nach den voranstehenden Ausführungen, also  $2l$  bzw.  $0,71l$  bzw.  $0,5l$  für die Lagerungsarten I bzw. III bzw. IV einzuführen.

## b) Das $\omega$ -Verfahren.

Das  $\omega$ -Verfahren, eingeführt für Flußstahl und Holz, beruht darauf, daß entsprechend einem Schlankheitsverhältnis  $\lambda = \frac{l}{i} = \frac{s_k}{i}$  die Stabkraft  $P$  mit einer Zahl  $\omega \geq 1,00$  multipliziert wird und daß sich für die Größe  $\frac{\omega P}{F}$  eine Spannung ergeben muß, die  $\leq \sigma_{zul} \leq$  die erlaubte zulässige Druckspannung bei Normalbelastung ist. Es wird also hier der Stab genau in der Art behandelt, wie ein auf Normaldruck belasteter, knickfreier Stab, nur mit dem Unterschiede, daß die Stabkraft  $P$  mit einer Zahl  $\omega$  erweitert, also eine oft sehr erheblich höhere Achslast in Rechnung gestellt wird. Die  $\omega$ -Zahlen sind je nach dem Material verschieden, so daß sie nach ihm getrennt behandelt werden müssen.

### 1. Das $\omega$ -Verfahren für Flußstahl.

$\alpha$ ) Für St. 37, Normal-Flußstahl. Die Grenze des elastischen Bereichs liegt hier bei  $\frac{s_k}{i} \geq 105$ , wird aber praktisch mit  $\geq 100$  ein-

geführt. Bezeichnet  $\sigma_k$  die Knickspannung, d. h. die Spannung, bei deren Eintreten der Stab zerknickt, so wird  $\sigma_k = \frac{P_k}{F}$ , wenn  $P_k$  die Knicklast darstellt. Nach Versuchen ist  $\sigma_k$  für Verhältnisse  $\frac{s_k}{i} = 0$  bis 60 konstant und zwar gleich der Fließspannung des St. 37-Materials, d. h. = 2400 kg/cm<sup>2</sup> — vgl. in Abb. 102 den Verlauf der dort eingezeichneten  $\sigma_k$ -Linie. Zwischen den Werten  $\frac{s_k}{i} = 60$  bis 100, verläuft nach Versuchsergebnissen die  $\sigma_k$ -Linie ebenfalls geradlinig und schließt bei  $\frac{s_k}{i} = 100$  an die Euler-Kurve (Darstellung des  $\sigma_k$  nach dieser) an.

Unter Verwendung der Euler-Gleichung:  $P_k = \frac{C \cdot E \cdot J_{\min}}{l^2}$ , darstellend also die Knickkraft im elastischen Bereiche, kann man hier die Knickspannung auf die Form bringen:

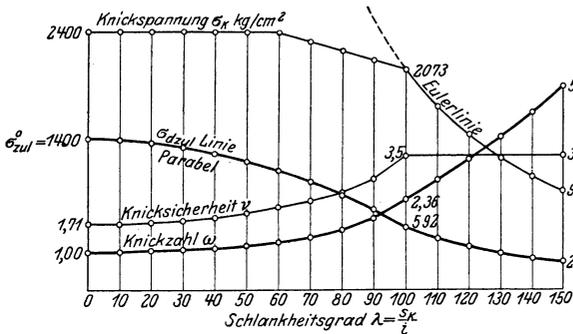


Abb. 102. Linien der Knickspannung  $\sigma_k$ , der zulässigen Druckspannung  $\sigma_{d\text{zul}}$ , der Knicksicherheit  $\nu$  und der Knickzahl  $\omega$  für St. 37 und  $\sigma_s = 2400$  kg/cm<sup>2</sup>.

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{C \cdot E \cdot J_{\min}}{F l^2} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E i^2}{s_k^2};$$

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

wenn  $\lambda$  (wie vorstehend) =  $\frac{s_k}{i}$  ist, also das Slankheitsverhältnis darstellt.

Für  $\lambda = 100$ , wird — vgl. Abb. 102 —

$$\sigma_{k100} = \frac{9,896 \cdot 2100000}{100^2} = 2073 \text{ kg/cm}^2,$$

und für  $\lambda = 150$ , d. h. den Wert, den man bei Flußstahl nicht überschreiten soll:

$$\sigma_{k150} = \frac{9,896 \cdot 2100000}{150^2} = 921 \text{ kg/cm}^2.$$

Hiermit ist für St. 37 die Linie der Knickspannung  $\sigma_k$  festgesetzt.

Bezeichnet man ferner mit  $\sigma_{d\text{zul}}$  die zulässige Knickspannung, die sich aus der Bezeichnung ergibt;  $\sigma_{d\text{zul}} = \frac{\sigma_k}{\text{Sicherheit}} = \frac{\sigma_k}{\nu}$ , so wird zunächst im elastischen Bereiche — also  $\frac{s_k}{i} > 100$  — eine Sicherheit  $\nu = 3,5$  innegehalten; hieraus ergibt sich für die  $\sigma_k$ -Euler-Linie sofort der Verlauf

Werte  $\sigma$  und  $\omega$  für St. 37 und St. 48.

1	2	3	4	5	6	7		
Schlankheitsgrad $\lambda = \frac{sk}{i}$	Flußstahl			Hochwertiger Baustahl				
	Knickspannung $\sigma_k$ $\lambda = 0$ bis 60, $\sigma_k = 2400$ $\lambda = 60$ bis 100 $\sigma_k = 2390, 5-8, 175 \lambda$ $\lambda = 100$ bis 150, $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$	Knickzahl $\omega$	$\frac{A \omega}{A \lambda}$	Knickspannung $\sigma_k$ $k = 0$ bis 60, $\sigma_k = 3120$ $\lambda = 60$ bis 100 $\sigma_k = 4690, 5-26, 175 \lambda$ $\lambda = 100$ bis 150, $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$	Knickzahl $\omega$	$\frac{A \omega}{A \lambda}$		
0		1,00			1,00			
10	2400	1,01	0,001	3120	1,01	0,001		
20		1,02	0,004		1,03	0,002		
30		1,06	0,004		1,06	0,003		
40		1,10	0,004		1,12	0,006		
50		1,17	0,007		1,20	0,008		
60		1,26	0,009		1,32	0,012		
70		2318	1,39		0,013	1,49	0,017	
80		2737	1,59		0,020	2858	1,49	0,027
90		2155	1,88		0,029	2597	1,76	0,045
100		2073	2,36		0,048	2335	2,21	0,086
110	1713	2,86	0,050	2073	3,07	0,065		
120	1439	3,41	0,055	1713	3,72	0,071		
130	1226	4,00	0,059	1439	4,43	0,077		
140	1057	4,64	0,064	1226	5,20	0,083		
150	921	5,32	0,068	1057	6,03	0,089		
				921	6,92			

der  $\sigma_{d_{zul}}$ -Linie in Abb. 102. Für  $\lambda = 100$  wird:  $\sigma_{d_{zul}} = \frac{2073}{3,5} = 592 \text{ kg/cm}^2$ ,  
 und ebenso für  $\lambda = 150$ :  $\sigma_{d_{zul}} = \frac{921}{3,5} = 263 \text{ kg/cm}^2$ .

Für  $\lambda = 0$  fällt die zulässige Knickspannung mit der zulässigen Druckspannung im Material, also bei St. 37 mit dem Werte  $\sigma_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$  zusammen und wird nach Versuchen und Rechnung zwischen den Werten  $\lambda = 0$  und  $\lambda = 100$  durch eine Parabel mit der Gleichung:  $\sigma_{d_{zul} 0-100} = 1400 - 0,08086 \lambda^2$  gebildet, die an den Grenzpunkten berührt. Für  $\lambda = 100$  liefert diese Beziehung den Kontrollwert:  $\sigma_{d_{zul} 100} = 1400 - 806 = 592 \text{ kg/cm}^2$ , wie oben bereits ermittelt.

Aus der  $\sigma_{d_{zul}}$ -Linie und der  $\sigma_k$ -Linie ergibt sich weiter für die Kurve der Sicherheiten, die  $\nu$ -Linie in Abb. 102.  $\nu = \frac{\sigma_k}{\sigma_{d_{zul}}}$ . Für  $\lambda = 0$  ist:  $\nu = \frac{2400}{1400} = 1,71$ , als Kleinstwert; von hier steigt die  $\nu$ -Kurve bis  $\lambda = 100$  an, um von hier aus den konstanten Wert  $\nu = 3,5$  zu zeigen.

Endlich gilt die Hauptbeziehung:  $\frac{\omega \cdot P}{F} \leq \sigma_{zul}$  und da  $\frac{P}{F} = \sigma_{d_{zul}}$  ist, wenn  $P$  die Last (nicht die Knicklast!) ist, so wird:  $\omega \cdot \sigma_{d_{zul}} \leq \sigma_{zul}$ . Hieraus folgt:  $\omega = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{d_{zul}}}$ , ist also, da die beiden Kurven für St. 37 für  $\sigma_{zul}$  und  $\sigma_{d_{zul}}$  bekannt sind, selbst gegeben. Für  $\lambda = 0$  wird beispielsweise:

$$\omega = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{d zul}} = \frac{1400}{1400} = 1 = \omega_{\min}, \quad \text{für } \lambda = 100, \quad \omega = \frac{1400}{592} = 2,36;$$

$$\text{für } \lambda = 150, \quad \omega = \frac{1400}{263} = 5,32 = \omega_{\max}.$$

$\beta$ ) Liegt St. 48 — also der hochwertige Baustahl mit Festigkeiten von 48—58 kg/mm<sup>2</sup>— vor, so entwickelt sich die  $\omega$ -Kurve durchaus gleichartig. Hier liegt die Fließgrenze auf 3120 kg/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_{d zul}$  auf 1820 kg/cm<sup>2</sup>. Für die Grenze  $\lambda = 60$  und  $\lambda = 100$  folgt hier der Wert  $\sigma_k$  aus der Gleichung:  $\sigma_k = 4690,5 - 26,175\lambda$ , und für  $\lambda > 100$  aus der Beziehung:  $\sigma_k = \frac{20726000}{\lambda^2}$  bei  $E = 2100000$  kg/cm<sup>2</sup>. Die Zusammenstellung auf S. 79 liefert die  $\omega$ -Werte für St. 37 und St. 48. Zwischenwerte sind geradlinig einzuschalten. Von  $\lambda \geq 100$  an stimmen naturgemäß die  $\sigma_k$ -Werte für St. 37 mit denen für St. 48 zusammen, weil beide Baustoffe die gleichgroße Elastizitätszahl haben.

Für St. 37 und St. 48 sind auch Gebrauchsformeln eingeführt, mit deren Hilfe man zunächst den Querschnitt bestimmen kann. Eine Nachrechnung nach dem  $\omega$ -Verfahren ist verlangt.

#### Gebrauchsformeln bei mittigem Kraftangriffe.

1. St. 37. Im unelastischen Bereiche:  $\lambda = 0$  bis 100 für  $\sigma_{zul} = 1400$  kg/cm<sup>2</sup> ist nach den voranstehenden Ausführungen:

$$\sigma_{d zul} = 1400 - 0,0808 \lambda^2 = \frac{P}{F_{\text{ert}}}.$$

$$F_{\text{ert}} = \frac{P}{1400} + \frac{0,0808}{1400} F_{\text{ert}} \cdot \lambda^2.$$

Wird hierin:  $\lambda = \frac{s_k}{i} = \frac{s_k}{\sqrt{\frac{J}{F_{\text{ert}}}}}$  eingesetzt, so

ergibt sich die Beziehung:

$$F_{\text{ert}} = \frac{P}{1400} + \frac{0,577}{10000} \frac{F_{\text{ert}}^2}{J} s_k^2,$$

Unter dem Ausdruck  $\frac{F_{\text{ert}}^2}{J}$  wird im Eisenbau der sog. Profilwert verstanden, der sich für die einzelne Querschnittsform nur langsam mit dem Eisenquerschnitt ändert und gleich einer Konstanten „ $k$ “ gesetzt werden kann. Führt man ferner  $P$  in t,  $s_k$  in m ein, so wird:

$$F_{\text{ert}} = \frac{P}{1,4} + 0,577 k s_k^2.$$

Im gleichen Sinne wird bei St. 37 für  $\sigma_{zul} = 1200$  kg/cm<sup>2</sup>:

$$F_{\text{ert}} = \frac{P}{1,2} + 0,577 k s_k^2.$$

2. Für St. 48 wird sinngemäß mit  $\sigma_{zul} = 1820$  kg/cm<sup>2</sup>:

$$F_{\text{ert}} = \frac{P}{1,82} + 0,675 k s_k^2.$$

Die angenähert genauen bzw. vollkommen genauen  $k$ -Werte für einige Querschnittsformen enthält die nachfolgende Zusammenstellung:

Profilwerte  $k$  für Druckstäbe.

Querschnitt	$k$	Querschnitt	$k$	Querschnitt	$k$
 gleichschenkelig	6,0		7,0	 Rechteck $b \cdot h$ ( $h > b$ )	$12 \frac{h}{b}$
 Schenkellängen $b$ u. $h$ $b : h = 2 : 3$	7,0	 1 cm lichter Ab- stand	4,0	 Kreis	$4 \pi$
 $b : h = 1 : 2$	11,0	 1 cm lichter Ab- stand	6,0	 Kreisring Dicke $\delta$ , mittl. Halbmesser $g$ , wenn $\delta : g =$ 0,05 0,10 0,15 0,20	0,63 1,25 1,87 2,50
 $b = 2h$	7,5	 Abstand so, daß $J_x = J_y$	1,2		
 $b = h$	5,0	 4 Quadrateisen ohne Zwischenlagen	1,8		
	10,0	 Quadrat	12,0		

Im elastischen Bereiche gelten die vorstehend — auf S. 77 — bereits aus der Euler-Gleichung ermittelten Werte für St. 37 und 48:

a) bei  $\nu = 3,5$ :  $J_{\text{erf}} = 1,97 P s_k^2 = \text{rd. } 2,0 P s_k^2$ .

b) bei  $\nu = 4,0$ :  $J_{\text{erf}} = 1,69 P s_k^2 = \text{rd. } 1,70 P s_k^2$ .

Es sei nochmals hervorgehoben, daß hierbei  $P$  in t und  $s_k$  in m einzu-  
führen sind und sich der Wert von  $J_{\text{erf}}$  in  $\text{cm}^4$  ergibt.

## 2. Das $\omega$ -Verfahren für Holz.

Auch hier gilt allgemein:

$$\frac{\omega \cdot P}{F} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

Hierbei ist bei Nadelholz allgemein  $\sigma_{\text{zul}} = 80$ , bei Eiche und Buche = 100  $\text{kg/cm}^2$  zu rechnen. Für Nadelholz sind unter Innehaltung des Wertes  $E = 100000 \text{ kg/cm}^2$  und einer Sicherheit, die bei  $\lambda = 0$  den Wert 3,75 hat und von hier aus geradlinig bis zu  $\lambda = 150$  auf 4,875 nach der Beziehung:  $3,75 + 0,0075 \lambda$  steigt, die, den in Abb. 102 für St. 37 gezeichneten Kurven entsprechenden, Verläufe der Linien für  $\sigma_k$ ,  $\sigma_{d_{\text{zul}}}$ ,  $\nu$  und  $\omega$  in Abb. 103 dargestellt. Für  $\lambda < 100$  ist  $\sigma_k = 300 - 2\lambda$ , ferner

$$\sigma_{d_{\text{zul}}} = \frac{300 - 2\lambda}{3,75 + 0,0075\lambda}; \text{ für } \lambda > 100 \text{ ist } \sigma_k = \frac{100000}{\lambda^2}$$

und

$$\sigma_{d_{\text{zul}}} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{100000}{3,75 - 0,0075\lambda}$$

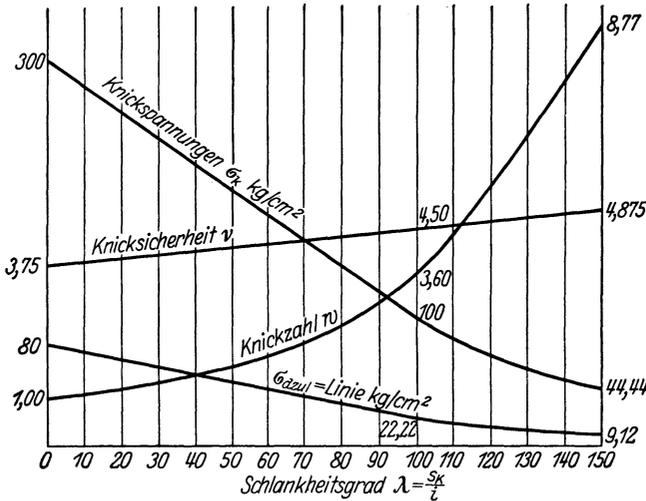


Abb. 103. Linien der Knickspannung  $\sigma_K$ , der zulässigen Druckspannung  $\sigma_{azul}$  der Knicksicherheit  $\nu$  und der Knickzahl  $\omega$  für Nadelholz.

Für Eiche und Buche gilt:  $\sigma_k = 375 - 2,75 \lambda$  für  $\lambda \leq 100$ .

Die nachstehende Tabelle gibt für Nadelholz bzw. Eiche und Buche die rechnerischen  $\omega$ -Werte.

Knickspannungen  $\sigma_K$ , und Knickzahlen  $\omega$  für Holz.

Nadelholz				Eichen- und Buchenholz			
1	2	3	4	1	2	3	4
Slankheitsgrad $\lambda = \frac{s_K}{i}$	Knickspannung $\sigma_K$ $\lambda \leq 100;$ $\sigma_K = 300 - 2 \lambda$ $\lambda \geq 100;$ $\sigma_K = \frac{1000000}{\lambda^2}$	Knickzahl $\omega = \frac{\Delta \omega}{\Delta \lambda}$ $\frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{azul}}$		Slankheitsgrad $\lambda = \frac{s_K}{i}$	Knickspannung $\sigma_K$ $\lambda \leq 100,$ $\sigma_K = 375 - 2,75 \lambda$ $\lambda \geq 100;$ $\sigma_K = \frac{1000000}{\lambda^2}$	Knickzahl $\omega = \frac{\Delta \omega}{\Delta \lambda}$ $\frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{azul}}$	
0	300	1,00	0,009	0	375	1,00	0,010
10	280	1,09	0,011	10	347	1,10	0,012
20	260	1,20	0,013	20	320	1,22	0,014
30	240	1,33	0,014	30	292	1,36	0,017
40	220	1,47	0,018	40	265	1,53	0,021
50	200	1,65	0,022	50	237	1,74	0,026
60	180	1,87	0,027	60	210	2,00	0,035
70	160	2,14	0,035	70	182	2,35	0,046
80	140	2,49	0,046	80	155	2,81	0,067
90	120	2,95	0,065	90	127	3,48	0,102
100	100	3,60	0,083	100	100	4,50	0,142
110	83	4,43	0,093	110	83	5,54	0,199
120	69	5,36	0,103	120	69	6,70	0,271
130	59	6,39	0,114	130	59	7,99	0,366
140	51	7,35	0,124	140	51	9,41	0,493
150	44	8,77		150	44	10,97	0,664

Als Näherungswerte sind hier zugelassen: a) im unelastischen Bereiche ( $\lambda < 100$ ) bei mittigem Kraftangriff und für Stäbe mit dem meist vorliegenden Rechtecksquerschnitt:

$$\sigma_{\text{zul}} = 80 - 2 \varrho,$$

wenn  $\varrho = \frac{s_k}{b}$  das Verhältnis der freien Knick- (Stab-) Länge zur kleinen Querschnittsseite bedeutet<sup>1)</sup>.

Für ein bekannt vorausgesetztes Verhältnis der Seiten  $\frac{b}{a}$  ( $a > b$ ) läßt sich der erforderliche Querschnitt angenähert berechnen aus:

$$b_{\text{cm}} = \frac{s_k}{80} + \sqrt{\left(\frac{s_k}{80}\right)^2 + \frac{P}{80} \frac{b}{a}}.$$

Hierin ist  $P$  in kg,  $s_k$  in cm einzuführen.

Für den quadratischen Querschnitt ergibt sich ( $a = b$ ):

$$b_{\text{cm}} = \frac{s_k}{80} + \sqrt{\left(\frac{s_k}{80}\right)^2 + \frac{P}{80}}.$$

### 3. Die Knickberechnung gußeiserner Stützen

ist unter Innehaltung der heute meist verlangten 6fachen Sicherheit nach der Euler-Gleichung zu beurteilen. Demgemäß gilt:

$$J_{\text{min}} > 6 P_1 l^2 > 6 P_1 \cdot s_k^2,$$

wobei wiederum  $P_1$  in t,  $s_k$  in m einzusetzen ist und sich das kleinste Trägheitsmoment in  $\text{cm}^4$  ergibt, vgl. S. 77.

4. Für die Knickberechnung von Stützen aus Eisenbeton ist das  $\omega$ -Verfahren durch die Bestimmungen vom September 1925 eingeführt. Nach ihnen ist eine vorwiegend längsbewehrte Verbundstütze, welche einen quadratischen oder rechteckigen Querschnitt hat, auf Knicken zu berechnen, wenn  $\frac{s_k}{b} > 15$  ist, unter  $b$  die kleinere Querschnittsseite verstanden. Für umschnürte Säulen liegt diese Grenze bei  $\frac{s_k}{d} > 13$ ;  $d$  ist hier die kleinste Stützendicke. Werden diese Grenzen überschritten, so ist, wenn  $P$  die größte mittige Last darstellt und  $F$  den Stützenquerschnitt bezeichnet, mit der Beziehung zu rechnen:

$$\frac{\omega P}{F} \leq \sigma_{\text{zul}} \leq 35 \text{ kg/cm}^2$$

bei Handelszement,  $\leq 45 \text{ kg/cm}^2$  bei hochwertigem Zement. Die betreffenden Werte  $\omega$  sind der nachstehenden Zusammenstellung zu entnehmen:

<sup>1)</sup> Es ist  $\varrho = \frac{s_k}{b} = \frac{s_k}{i \sqrt{12}} = \frac{\lambda}{\sqrt{12}}$ .

$\omega$ -Werte für Eisenbetonstützen.

I. Quadratische und rechteckige Stützen mit vorwiegender Längs- und Bügelbewehrung.			II. Umschnürte Säulen.		
$\frac{s_k}{b}$	$\omega =$	$\frac{\omega \Delta}{\Delta \frac{s_k}{b}}$	$\frac{s_k}{d}$	$\omega =$	$\frac{\Delta \omega}{\Delta \frac{k}{d}}$
15	1,0	0,05	13	1,0	0,1
20	1,25		20	1,7	
25	1,75	0,10	15	2,7	0,2

Verbundstützen, bei denen das Schlankheitsverhältnis den Wert 25 übersteigt, sollen nicht ausgeführt werden. Zwischenwerte sind geradlinig einzuschalten.

5. Besteht der auf Knickung belastete Stab aus mehreren, nicht auf die ganze Stablänge miteinander vollkommen oder nur in größeren Abständen verbundenen Teilen, so sind auch diese für sich und für die auf sie entfallende Teilkraft knicksicher zu machen. Alsdann soll bei Verwendung von **Flußstahl** im Hochbau der Schlankheitsgrad der Einzelteile nicht größer als 30 sein:  $\frac{s_k}{i} \leq 30$ . Hierbei ist für die Größe  $s_k$ , sowohl bei diagonal verlaufenden Vergitterungen als auch bei Bindeblechen der Abstand der inneren Anschlußniete einzuführen. Die Abmessungen und Anschlüsse der Vergitterungen sind für eine Querkraft, die gleich 2 vH der größten Druckkraft des Gesamtstabes, ohne Multiplikation mit der Größe  $\omega$  anzunehmen ist, zu berechnen. Für die Spannung in den Vergitterungen bzw. Bindeblechen ist der Wert  $\sigma_{zul}$  maßgebend. Der Abstand der Einzelstäbe (bei Stützen usw.) ist so zu wählen, das daß Trägheitsmoment des Gesamtmaßstabes in bezug auf die materialfreie Achse größer ist, als in bezug auf die Materialachse. Hierbei wird (Abb. 104a und b) unter der materialfreien Achse die verstanden, welche den Querschnitt nicht schneidet bzw. am weitesten von seinen Teilen entfernt liegt — also die  $y-y$ -Achse in Abb. 104a und b.

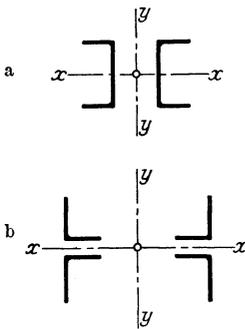


Abb. 104a und b.

Ähnliches gilt (Abb. 104c) für einen mehrteiligen Druckstab aus **Holz**. Hier soll  $J$  in bezug auf die stofffreie Achse ( $y-y$ ) um mindestens 10 vH größer gewählt werden, als es der Schlankheitszustand des Gesamtstabes bei Ausknicken in der Richtung der Stoffachse  $x-x$  erfordert. Für das Ausknicken in der Richtung der  $y-y$ -Achse werden mehrteilige

Stäbe wie Vollstäbe behandelt, wobei für das der Seite eines Rechtecks ( $a$ ) entsprechende Maß die Gesamtbreite der Einzelstäbe ( $a = 2d$  z. B. in Abb. 104c und d) und für das Verhältnis  $\lambda$  der Wert:  $= \frac{s_k}{b}$  einzusetzen ist (vgl. S. 81). Für das Ausknicken in Richtung der Stoffachse  $x-x$  ist auch die Tragfähigkeit des Einzelstabes nachzuweisen.

Will man sich davon überzeugen, daß der einzelne Stabteil in aus mehreren Teilen bestehenden Stäben auch für die auf ihn entfallende

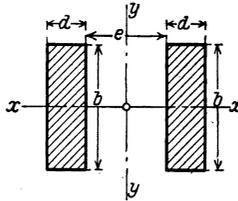


Abb. 104 c.

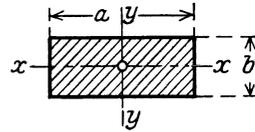


Abb. 104 d.

Teillast knicksicher ist, so kann man, wenn  $\frac{P}{n}$  der auf den Stabteil entfallende Anteil an der Achslast  $P$  ist, in der Art rechnen, daß man aus der Beziehung:  $\frac{\omega P}{F n} = \sigma_{zul}$ ,  $\omega = \frac{\sigma_{zul} n \cdot F}{P}$  ermittelt und aus dem  $\omega$ -Werte das zugehörige  $\lambda = \frac{s_k}{i}$  aus der Tabelle ableitet und somit die erlaubte Knicklänge  $s_k$  findet. Hierbei ist naturgemäß  $i$  der zu dem  $J_{min}$  für den Stabteil zugehörige Trägheitsradius.

Häufig wird — der größeren Sicherheit halber — bei derartigen Untersuchungen auch damit gerechnet, daß die mittige Stabkraft  $P$  sich nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilt, daß bei einem aus 2 Teilen bestehenden Stabe eine Hälfte bis 70 vH von  $P$ , bei 4 Teilen entsprechend jeder Stabteil bis 35 vH von der Achslast erhält. Als dann konstruiert man sehr sicher, ohne erhebliche wirtschaftliche Nachteile mit in Kauf nehmen zu müssen.

c) Zahlenbeispiele für Knickberechnung.

1. Eine aus einem  $\Gamma$  (St. 37) gebildete Stütze habe eine Achslast = 56 t auf Druck zu tragen;  $l = s_k = 3,50$  m;  $i_{min} = i_y = 3,43$  cm;  $F = 147$  cm<sup>2</sup>. Gesucht wird die beim Knicken auftretende Spannung. Aus der Zusammenstellung auf S. 79 ergibt sich für  $\frac{s_k}{i} = \frac{350}{3,43} = \text{rd. } 100$ ;  $\omega = 2,36$ , und somit

$$\frac{\omega P}{F} = \frac{2,36 \cdot 56}{147} = \text{rd. } 0,9 \text{ t/cm}^2 = 900 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Ein Stab eines Fachwerks wird durch 2 Winkeleisen 90·90·9 in  $\Gamma$ -Form gebildet;  $F = 31$  cm<sup>2</sup>;  $i_{min} = 2,74$  cm;  $l = s_k = 405$  cm;  $P = 4000$  kg. Demgemäß ist zunächst die reine Druckspannung  $\sigma = -\frac{P}{F} = -\frac{4000}{31} = \text{rd. } -1290 \text{ kg/cm}^2$ , also als erlaubt zu bezeichnen. Gesucht wird die auftretende Knickspannung. Aus den voranstehenden Angaben folgt:  $\lambda = \frac{405}{2,74} = 148$ , also nahe der Grenze

von 150, die das Schlankheitsverhältnis nicht überschreiten soll. Aus der Tabelle auf S. 79 folgt: für  $\lambda = 140$ ;  $\omega = 4,64$  und für  $\lambda = 150$ ;  $\omega = 5,32$ , d. h. eine Steigerung auf 10 Einheiten von 0,68, also auf  $\frac{8}{10}$  von  $0,68 \cdot \frac{8}{10} = 0,54$  und somit erhält  $\omega$  für  $\lambda = 148$  den Wert:  $4,64 + 54 = 5,18$ . Demgemäß wird:

$$\sigma = \frac{\omega P}{F} = \frac{5,18 \cdot 4000}{31} = 670 \text{ kg/cm}^2.$$

Sind beide  $\perp$  nicht miteinander verbunden, so soll im allgemeinen die freie Länge jedes Stabteiles sich nach dem Maße  $l = 30 i_{\min}$  richten. Für das einzelne Winkelisen  $90 \cdot 90 \cdot 9$  ist  $i_{\min} = 1,76$  m, mithin müssen beide Winkel je auf eine Länge von  $30 \cdot 1,76 = 52,8$  cm miteinander verbunden werden, d. h. auf der Gesamtstablänge von 465 cm wären rd. 7 Bindebleche notwendig, deren jedes zur Vermeidung einer Drehbewegung der Einzelteile in ihren Anschlußpunkten mit je 2 Nieten anzuschließen wäre. Kann man eine derartig enge Bindung nicht ausführen, so wäre die erlaubte Knicklänge nach dem  $\omega$ -Verfahren zu bestimmen. Hierbei soll angenommen werden, daß eine Stabhälfte bis 70 vH der mittigen Last  $P$ , d. h.  $= 0,7 \cdot 4000 = 2800 \text{ kg} = \frac{P}{n}$  zu tragen habe. Für den  $\perp$   $90 \cdot 90 \cdot 9$  mit  $F = 15,5 \text{ cm}^2$  ist  $i_{\min} = 1,76$ . Aus der Beziehung:

$$\omega = \frac{\sigma_{zul} F}{P/n} \text{ folgt: } \omega = \frac{1400 \cdot 15,5}{2800} = 7,75,$$

d. h. es ergibt sich ein Wert höher als in den Tabellen, so daß hier mit einem zulässigen Höchstverhältnisse von 150 gerechnet werden darf. Somit wäre eine freie Länge von  $150 \cdot 1,76 = 2,64$  cm erfordert, d. h. es brauchte hiernach der Stab nur einmal in der Mitte durch eine Einlageplatte gehalten zu werden. Will man die Sicherheit weiter erhöhen, so könnte man naturgemäß auch eine engere Teilung wählen, also den Stab etwa in 3—4 Teilstellen vernieten. Die Rechnung läßt zugleich erkennen, wie ungünstig die Bestimmung  $l \leq 30 i$  ist.

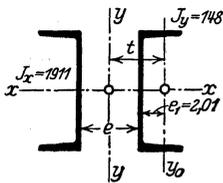


Abb. 105.

3. Eine Stütze mit 18 t belastet, besteht aus 2  $\perp$ -Eisen Normalprofil 20 mit je  $J_x = 1911 \text{ cm}^4$ ,  $J_y = 148 \text{ cm}^4$  und  $F = 2 \cdot 32,2 \text{ cm}^2$ . Gesucht wird der Mindestabstand beider Profile entsprechend der Forderung, daß das  $J$  des Gesamstabes in bezug auf die materialfreie Achse ( $y-y$ ) größer sein soll als bezüglich der Materialachse. Wird für den Abstand der Achse  $y_0$  von  $y-y$  in Abb. 105 das Maß  $t$  eingeführt, so folgt aus der voranstehenden Forderung die Beziehung:  $2 J_x = 2 \cdot 1911 t = 3822 = J_y = 2 (148 + 32,2 \cdot t^2)$ . Hieraus errechnet sich  $t = 12,8$  cm. Da entsprechend der Schwerpunktslage des einzelnen  $\perp$ -Eisens  $e_1 = 2,01$  cm ist, so wird der lichte Abstand beider Profile  $e \geq 2 (12,8 - 2,01) \geq 21,6$  cm. Gewählt wird  $e = 24$  cm. Die in der Stütze beim Knicken auftretende Spannung wird bei einer Länge  $= 4,80 \text{ m} = 480$  cm, also bei

$$\lambda = \frac{480}{i} = \frac{480^1}{7,74} = \text{rd. } 62$$

<sup>1)</sup> Hier ist es gleichgültig, ob man  $i_x$  oder  $i_y$  wählt, weil  $J_x = J_y$  ist; es ergibt sich

$$i = \sqrt{\frac{2 J_x}{F}} = \sqrt{\frac{3822}{64}} = \sqrt{\frac{J_x}{F/2}} \leq \sqrt{60} = 7,74.$$

und demgemäß  $\omega = 1,29$ :

$$\sigma = \frac{1,29 \cdot 18000}{64} = 365 \text{ kg/cm}^2.$$

Verbindet man beide  $\square$ -Eisen in der Entfernung von je  $30 i = 30 \cdot 2,14 =$  rd. 64 cm durch Bindebleche von je 1 cm Stärke und 12 cm Höhe, so würde die Querkraft, welche eine derartige Verbindung beansprucht — nach S. 84 — zu rd. 2 vH der Last des Gesamtstabes, d. h. zu  $0,02 \cdot 18000 \text{ kg} = 360 \text{ kg}$  einzuschätzen sein. Aus der Querkraft wäre dann weiterhin, wie im Abschnitte über Schubspannungen und Schubkräfte gezeigt wird, die Schubkraft und aus ihr die Biegungsbelastung des Verbindungsbleches und ihrer aus je 2 Nieten zu bewirkenden Anschlußverbindung abzuleiten.

4. Mit Hilfe der auf S. 80 gegebenen Formeln zur vorläufigen Querschnittsbestimmung soll der Stabquerschnitt eines auf Knickung beanspruchten I-Eisens gefunden und dann nach dem  $\omega$ -Verfahren nachgeprüft werden. Gegeben sei  $P = 56,0 \text{ t}$ ;  $s_k = 2,50 \text{ m}$ . Aus der Tabelle S. 81 folgt für das I-Eisen der Profilwert  $k = 10$ , und mithin ergibt sich:

$$F_{\text{ert}} = \frac{P}{1,4} + 0,577 k s_k^2; \quad F_{\text{ert}} = \frac{56}{1,4} + 0,577 \cdot 10 \cdot 2,5^2 = 76 \text{ cm}^2.$$

Wird ein I-Eisen Normalprofil 32 mit  $F = 77,8 \text{ cm}^2$ ,  $i_{\min} = i_y = 2,67 \text{ cm}$  gewählt, so ergibt die Nachrechnung:

$$\lambda = \frac{250}{2,67} \cong 94, \text{ also } < 150; \quad \omega = 2,08.$$

$$\sigma = \frac{56 \cdot 2,08}{77,8} = \text{rd. } 1500 \text{ kg/cm}^2,$$

also  $> 1400 \text{ kg/cm}^2$ , d. h. es muß ein höheres Profil gewählt werden. Für I-Normalprofil 34 ergibt sich:  $i_{\min} = i_y = 2,80 \text{ cm}$ ;  $F = 86,8 \text{ cm}^2$ ,  $\lambda = \frac{250}{2,80} \sim 90$ ;  $\omega = 1,88$ .

$$\sigma = \frac{1,88 \cdot 56}{86,8} = \text{rd. } 1215 \text{ kg/cm}^2 < 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

5. Eine ringförmige gußeiserne Säule von 4,00 m Länge hat eine Last von 60 t zu tragen. Gesucht wird ihr Querschnitt. Es ist

$$J_{\text{ert}} = 6 P s_k^2 = 6 \cdot 60 \cdot 4,0^2 = 5760 \text{ cm}^4.$$

Es reicht ein ringförmiger Querschnitt aus von 22 cm äußerem Durchmesser und 1,8 cm Wandstärke; bei ihm ist  $J = 5871 > 5760 \text{ cm}^4$ .

6. Die Tragfähigkeit einer gußeisernen Säule von 5,00 m Länge und einem Ringquerschnitt mit dem äußeren Durchmesser = 28,0 cm (=  $D$ ) und einer Wandstärke von 20 mm soll berechnet werden. Für diesen Querschnitt wird

$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{3,14}{64} (28,0^4 - 24,0^4) = 13881 \text{ cm}^4 \text{ und } F = 163,3 \text{ cm}^2.$$

Es ergibt sich aus

$$J_{\text{ert}} = 13881 = 6 P s_k^2 = 6 \cdot P \cdot 25; \quad P = \frac{13881}{6 \cdot 25} = \text{rd. } 92,5 \text{ t.}$$

Auf reinen Druck kann die Säule etwas mehr tragen:

$$P_x = 163,3 \cdot 0,6 = \text{rd. } 98 \text{ t.}$$

7. Eine mit quadratischem Querschnitte von 24 cm Seite (=  $a$ ) ausgestattete Holzsäule (Nadelholz) trägt mittig die Last  $P = 20 \text{ t}$ . Ihre Länge beträgt  $s_k = 425 \text{ cm}$ . Gesucht wird die auftretende Spannung.

Es ist

$$i^2 = \frac{J}{F} = \frac{24^4}{12 \cdot 24^2} = 48; \quad i = 6,93 \text{ cm}; \quad \frac{s_k}{i} = \frac{425}{6,93} = 61; \quad \omega = 1,90$$

nach Tabelle S. 82 und somit

$$\sigma = \frac{1,90 \cdot 20}{24^2} \approx 65,5 \text{ kg/cm}^2 < 80 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{zul}.$$

8. Der in Abb. 106 dargestellte hölzerne Druckstab hat eine mittige Achslast = 20 t zu tragen.  $s_k = 3,60$  m. Es wird gemäß S. 85 zunächst der Nachweis, daß  $J_y \geq 1,1 J_x$  ist, und weiterhin die auftretende Knickspannung verlangt.

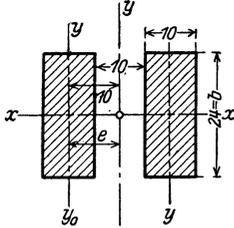


Abb. 106.

Es ergibt sich aus Abb. 106:

$$J_x = \frac{20 \cdot 24^3}{12} = 23040 \text{ cm}^4; \quad J_y = 2(J_x + F \cdot e^2) \\ = 2 \left( \frac{24 \cdot 10^3}{12} + 24 \cdot 10 \cdot 10^2 \right) = 2(2000 + 24000) = 52000,$$

also erheblich größer als  $J_x$ . Weiterhin ist  $\lambda = \frac{s_k}{b}$  (vgl. S. 85);

$$\lambda = \frac{360}{b} = \frac{360}{24} = 15; \quad \omega = 1,14 \text{ (für Nadelholz) und somit}$$

$$\sigma = \frac{1,14 \cdot 20000}{480} = 47,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Rechnet man die Knicksicherheit des einzelnen Stabteiles nach mit

$$F = 24 \cdot 10 = 240 \text{ cm}^2, \quad \frac{s_k}{a} = \frac{360}{10} = 36, \quad \omega = 1,42, \quad P_k = \frac{P}{2} = 10 \text{ t},$$

so wird hierfür:

$$\sigma = \frac{1,42 \cdot 10000}{240} = \text{rd. } 59 \text{ kg/cm}^2 < 80 \text{ kg/cm}^2.$$

9. Eine quadratische Verbundsäule mit  $30 \cdot 30 \text{ cm}^2$  Querschnitt hat eine Länge  $s_k = 6,00$  m; hieraus folgt  $\frac{s_k}{a} = \frac{600}{30} = 20$ , d. h.  $> 15$  und somit die Notwendigkeit, die Knickgefahr der Stütze zu berücksichtigen. Diese sei mit 4 Rund-eisen von je 20 mm Durchmesser bewehrt.  $F_e = 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm}^2$ . Ohne Knicken trägt die Säule (vgl. S. 73):

$$P = \sigma_b (F_b + n F_e) = 35 (30 \cdot 30 + 15 \cdot 12,56) = 35 \cdot 1088 \approx 38000 \text{ kg} = \text{rd. } 38 \text{ t}.$$

Nach der Tabelle auf S. 84 entspricht einem  $\lambda$ -Werte = 20 ein  $\omega$ -Wert = 1,25, d. h. hier ist:

$$\omega P_{zul} = 38 \text{ t}; \quad P_{zul} = \frac{38}{1,25} = \text{rd. } 30 \text{ t}.$$

Als Probe dient die Gleichung:  $\frac{\omega P}{F_i} \leq \sigma_{zul}$ .

$$\frac{1,25 \cdot 30000}{(900 + 15 \cdot 12,56)} = \frac{37500}{1088} = 34,4 < 35,0 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{zul}.$$

Wäre die vorerwähnte Säule 7,50 m lang, so wäre:

$$\frac{s_k}{a} = \frac{750}{30} = 25; \quad \omega = 1,75; \quad P_{zul} = \frac{38}{1,75} \approx 21,7 \text{ t}.$$

$$\text{Probe: } \frac{\omega P}{F_i} = \frac{1,75 \cdot 21,7}{1088} = \frac{38000}{1088} = 34,8 < 35 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{zul}.$$

10. Soll die Säule bei  $s_k = 6,00$  m auch beim Knickvorgange eine Last = 38 t mittig tragen, so bestimmt man den Wert  $F_i$  als Unbekannte.

$$\frac{\omega P}{F_i} = \sigma_{zul}; \quad \frac{1,25 \cdot 38}{F_i} = 35.$$

$$F_i = \frac{1,25 \cdot 38000}{35} = \text{rd. } 1340 \text{ cm}^2.$$

Behält man wegen des der Rechnung zugrunde liegenden Wertes  $a = 30$  cm einen entsprechenden quadratischen Querschnitt bei, so wird:  $nFe = F_i - F_b$ ,  
 $= 1340 - 900 = 440 \text{ cm}^2$ ,  $Fe = \frac{440}{15} = 29,4 \text{ cm}^2$ . Man könnte demgemäß die Stütze mit 4 Eisen vom Durchmesser 3,1 cm ( $Fe = 30,19 \text{ cm}^2$ ) bewehren. Alsdann stellt sich das Prozentverhältnis von Eisen zu Beton zu 3,26 vH. Hierdurch wird allerdings etwas die im allgemeinen nur zu 3 vH gestattete Bewehrungsgröße überschritten. Will man dies nicht zulassen, so ist  $a$  zu vergrößern, dann ändert sich allerdings auch der Wert  $\frac{s_k}{a}$  und mit ihm  $\omega$ . Nimmt man versuchsweise  $a = 34$  cm an, so wird  $\frac{s_k}{a} = \frac{600}{34} = 17,8$  und  $\omega = \text{rd. } 1,14$ ;  $F_i = \frac{1,14 \cdot 38000}{35} = 1240 \text{ cm}^2$ ; da  $F_b = 34^2 = 1156 \text{ cm}^2$  ist, so wird  $nFe = F_i - 1156 = 1240 - 1156 = 84 \text{ cm}^2$ ,  $F_e = \frac{84}{15} = \text{rd. } 5,6 \text{ cm}^2$ . Gewählt werden mit Rücksicht darauf, daß die Bewehrung mehr als 0,8 vH des Betonquerschnittes betragen soll, 4 Eisen von 1,8 cm Durchmesser ( $Fe = 10,18 \text{ cm}^2$ , Prozentgehalt = 0,88).

#### 4. Die reine Biegefestigkeit und die reinen Biegespannungen.

Der Querschnitt sei nur durch ein Biegemoment auf reine Biegung, also nicht zudem durch eine Achsenkraft belastet. Eine reine Biegebeanspruchung liegt z. B. bei prismatischen Körpern, wie Trägern u. dgl., vor, die in einer Ebene, die den Querschnitt zentrisch schneidet, durch i. d. R. zur Stabachse senkrecht gerichtete Lasten verbogen werden. Legt man durch die Kräfte eine Ebene, so führt diese den Namen der Kraftebene. Da hier die Kraftebene durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehen soll, so kann sie (bei den üblichen Belastungsfällen und normaler Trägeranordnung) den Querschnitt in Symmetrie-, also Hauptachsen schneiden, u. U. aber auch schräg zu letzteren liegen. Der erste Fall sei bei den nachfolgenden Betrachtungen zunächst zugrunde gelegt.

##### a) Die Kraftebene schneidet den Querschnitt in einer Hauptachse.

Wie bereits auf S. 60 hervorgehoben wurde, entspricht einer axialen Verbiegung des Balkens (einer Säule usw.) das Auftreten von Druck- bzw. Zugspannungen im Querschnitt mit ihren Größtwerten an den äußersten Randfasern des Querschnittes.

Sind in Abb. 107 die beiden, nahe aneinanderliegenden Querschnitte  $ab$  und  $cd$  vor Eintritt der Biegung parallel, um nach ihr in die Stellung  $a'b'$ ,  $c'd'$  zu gelangen, so ist die gesamte Formänderung auf die Länge  $\Delta x$  in der obersten Faser auf Druck  $aa'$  und  $dd'$ , und ebenso auf Zug  $bb'$  und  $cc'$ . Stellt man die Formänderungen durch einfache Aneinanderreihung in einem Diagramm, d. h. in der Figur  $dmcgf$  zusammen, so ergeben sich hierbei — unter der Voraussetzung, daß die Querschnitte auch nach der Biegung eben verbleiben, zwei Formänderungsdreiecke, die einen gemeinsamen Spitzenpunkt in  $m$  haben. Bis zu diesem Punkte nehmen von oben aus gerechnet die Formänderungen und die von ihnen hervorgerufenen inneren Querschnittsspannungen ab, um alsdann von  $m$  aus nach unten innerhalb der Zugzone wieder zu wachsen.  $m$  ist somit ein Punkt, in dem

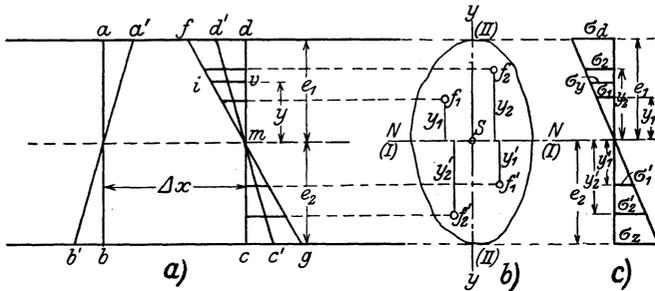


Abb. 107.

die Druck- in die Zugformänderungsfläche übergeht, in dem also weder eine Verdrückung noch eine Zugwirkung vorliegt, also keine Formänderung und keine innere Spannung auftritt. Aus dem Ebenbleiben der Querschnitte folgt weiter, daß der durch die Biegung gedrehte Querschnitt den ursprünglichen in einer Geraden schneidet, von der  $m$  ein Punkt ist, daß also Nullspannungen auf einer Geraden auftreten, die den Querschnitt schneidet —  $NN$  in Abb. 107 b). Diese Gerade wird als **Nullinie** bezeichnet, die Faser, in der die Nullspannung auftritt, als **neutrale Faser** benannt.

Bezeichnet man den Abstand der am meisten beanspruchten, stärksten gedrückten bzw. gezogenen Randfasern von der Nullinie mit  $e_1$  bzw.  $e_2$ , nimmt man ferner an, daß hier Biegungsspannungen  $= \sigma_a$  bzw.  $\sigma_z$  auf Druck und Zug auftreten und bezeichnet man die gleichen Funktionen für eine beliebige Faser ( $iv$  in Abb. 107 a) mit  $y$  bzw.  $\sigma$ , so ergibt sich nach dem Hookschen Gesetz:

$$\frac{iv}{\Delta x} = \frac{\sigma}{E}; \quad \frac{df}{\Delta x} = \frac{\sigma_a}{E}.$$

Durch Division beider Gleichungen folgt, unter der weiteren Voraussetzung, daß es sich um ein überall gleich elastisches Material han-

delt, bei dem  $E$  in der Zug- und in der Druckzone denselben Wert hat:

$$\frac{iv}{df} = \frac{\sigma}{\sigma_a}.$$

Da ferner:

$$\frac{iv}{df} = \frac{y}{e_1}$$

ist, so ist zugleich:

$$\frac{\sigma}{\sigma_a} = \frac{y}{e_1},$$

d. h. es verhalten sich die auftretenden Spannungen wie die Abstände ihrer zugehörigen Fasern von der Nulllinie.

Demgemäß zeigt auch das Diagramm der auftretenden Spannungen (Abb. 107c) einen geradlinigen Verlauf, entsprechend dem Verlauf des Formänderungsdiagrammes. Dem Nullpunkt im letzteren entspricht auch eine Nullspannung im Spannungsdiagramm.

Zugleich folgt aus der Beziehung:

$$\frac{\sigma}{\sigma_a} = \frac{y}{e_1}, \quad \sigma = \sigma_a \frac{y}{e_1},$$

d. h. ein konstanter Wert, solange alle in Frage gezogenen Querschnittsfasern den konstanten Abstand  $y$  von der Nulllinie aus haben, d. h. in den einzelnen Faserschichten parallel zur Nulllinie herrscht stets eine konstante Biegungsspannung.

Denkt man sich den Querschnitt in lauter kleine Flächenteilchen von der Größe  $f_1 f_2 \dots$  in der Druck- bzw.  $f'_1 f'_2 \dots$  in der Zugzone zerteilt, in denen Spannungen  $\sigma_1 \sigma_2 \dots$  bzw.  $\sigma'_1 \sigma'_2 \dots$  auftreten, so bedingt der Zustand des Gleichgewichts, daß sich die gesamten inneren Druck- und inneren Zugkräfte gegenseitig ausgleichen, d. h. daß:

$$\sum f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 \dots - \sum f'_1 \sigma'_1 + f'_2 \sigma'_2 \dots = 0$$

oder allgemein:

$$\sum f \sigma = 0$$

ist. Da für jedes — beliebige —  $\sigma$  die Gleichung gilt:  $\sigma : \sigma_a = y : e_1$  bzw.  $y : e_2$ , also allgemein  $= y : e$ , so geht die obige Beziehung in die Form über:

$$\sum f \sigma = \sum f \frac{\sigma_a y}{e} = 0,$$

$$\frac{\sigma_a}{e} \sum f y = 0.$$

Da  $\sigma_a$  und  $e$  bestimmte feste Größen sind, die im vorliegenden Falle nicht = 0 sein können, so muß  $\sum f y = 0$  sein. Da  $\sum f y$  das statische

Moment der Fläche auf die Nulllinie darstellt, so muß diese mit einer Schwerachse des Querschnitts zusammenfallen, da nur für eine solche die Beziehung:  $\sum fy = 0$  zutrifft. Es geht mithin bei reiner Biegung und bei homogenem, gleich elastischem Material die neutrale Achse durch den Schwerpunkt. Ist der Querschnitt zur Schnittlinie mit der Kraftebene symmetrisch und erstere also — wie vorausgesetzt — eine Hauptachse, so besagt ferner  $\sum fy = 0$ , daß alsdann die Nulllinie bei reiner Biegung mit der anderen Schwerachse, d. h. der zweiten Hauptachse zusammenfällt und somit senkrecht auf der Schnittlinie mit der Kraftebene steht.

Im Zustande des Gleichgewichts muß das Moment der äußeren Kräfte, das mit  $M$  bezeichnet sei und dessen Größe nach den Gesetzen der Statik ermittelt wird, dem Moment der inneren Kräfte gleich sein. Bezieht man letzteres auf die Nulllinie, so ist zu beachten, daß auf einer Seite von ihr innere Druckkräfte, auf der anderen innere Zugkräfte angreifen, die also mit entgegengesetzten Richtungen einzuführen sind, aber um die Nulllinie in demselben Sinne drehen.

Bezeichnet man — wie vorstehend — die einzelnen Flächenteilchen in der Druckzone (Abb. 107 b), also oberhalb der Nulllinie, mit  $f_1 f_2 \dots$ , ihre Abstände von  $NN$  mit  $y_1 y_2 \dots$ , ihre Spannungen mit  $\sigma_1 \sigma_2 \dots$  und führt man ebenso in der Zugzone die Bezeichnungen  $f'_1 f'_2 \dots, y'_1 y'_2 \dots, \sigma'_1 \sigma'_2 \dots$  ein, so ergibt sich aus den obigen Überlegungen:

$$M = f_1 \sigma_1 y_1 + f_2 \sigma_2 y_2 + \dots + f'_1 \sigma'_1 y'_1 + f'_2 \sigma'_1 y'_2 + \dots$$

Aus dem vorbewiesenen Gesetze, daß unter den hier gemachten Annahmen die Spannungen proportional ihren Abständen von der Nulllinie sind, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_d y_1}{e_1}, & \sigma_2 &= \frac{\sigma_d y_2}{e_1}, \dots, \\ \sigma'_1 &= \frac{\sigma_z y'_1}{e_2}, & \sigma'_2 &= \frac{\sigma_z y'_2}{e_2}, \dots \end{aligned}$$

Führt man diese Werte in die vorstehende Gleichung ein, so wird:

$$\begin{aligned} M &= f_1 y_1^2 \frac{\sigma_d}{e_1} + f_2 y_2^2 \frac{\sigma_d}{e_1} + \dots + f'_1 y_1'^2 \frac{\sigma_z}{e_2} + f'_2 y_2'^2 \frac{\sigma_z}{e_2} \dots \\ &= \sigma_d \frac{\sum f y^2}{e_1} + \sigma_z \frac{\sum f' y'^2}{e_2} = \sigma_d \frac{J_0}{e_1} + \sigma_z \frac{J'_0}{e_2}. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet  $J_0$  das Trägheitsmoment des gedrückten Querschnittsteils bezogen auf die Nulllinie und ebenso  $J'_0$  das der Zugzone auf dieselbe Achse. Wird  $\sigma_d$ , wie es bei vielen der vorliegenden Konstruktionsmaterialien (Flußstahl usw.) der Fall ist,  $= \sigma_z = \sigma$  gesetzt, so ergibt sich für elastisch gleichartige, homogene Querschnitte also bei Zugrundelegung nur eines  $\sigma$ -Randspannungs-Wertes:

$$M = \sigma \left( \frac{J_0}{e_1} + \frac{J'_0}{e_2} \right).$$

Bei verschiedenen Werten von  $\sigma_d$  und  $\sigma_z$  kann zur Ermittlung einer der Spannungen das Verhältnis zwischen beiden herangezogen werden. Liegt also z. B. ein gußeiserner, auf Biegung belasteter Tragkörper vor, bei dem die zulässige Druckspannung zu 600, die Zugspannung zu 300 kg/cm<sup>2</sup> zugelassen ist, so wird:

$$\sigma_d = 2\sigma_z, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_d}{2}$$

und somit in obiger Gleichung:

$$(a) \quad M = \sigma_d \frac{J_0}{e_1} + \frac{\sigma_d}{2} \frac{J'_0}{e_2} = \sigma_d \left( \frac{J_0}{e_1} + \frac{J'_0}{2e_2} \right)$$

bzw.:

$$(a') \quad M = 2\sigma_z \frac{J_0}{e_1} + \sigma_z \frac{J'_0}{e_2} = \sigma_z \left( \frac{2J_0}{e_1} + \frac{J'_0}{e_2} \right).$$

Aus der Bedingung:

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \sigma_d$$

folgt weiter, da:

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_z} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{2}{1}$$

ist,  $e_1 = 2e_2$ <sup>1)</sup>, d. h. die Schwerachse und damit der Schwerpunkt des betreffenden Querschnitts liegt bei einer, richtiger Materialausnutzung entsprechenden, Querschnittsform um zwei Teile von der Druckkante, um einen Teil von der Zugkante entfernt, also in zwei Drittel der Querschnittshöhe.

Da bei gleich elastischem Material

$$\frac{\sigma_d}{e_1} = \frac{\sigma_z}{e_2}$$

ist, so kann die allgemeine Gleichung (a) auch in der Form geschrieben werden:

$$M = \frac{\sigma_d}{e_1} \cdot J_0 + \frac{\sigma_z}{e_2} J'_0 = \frac{\sigma_d}{e_1} (J_0 + J'_0) = \frac{\sigma_z}{e_2} (J_0 + J'_0) = \frac{\sigma_d}{e_1} J = \frac{\sigma_z}{e_2} J;$$

$$(b) \quad \sigma_d = - \frac{M e_1}{J},$$

$$(b') \quad \sigma_z = + \frac{M e_2}{J}.$$

<sup>1)</sup> Diese Beziehung folgt auch, da

$$\frac{\sigma_d}{e_1} = \frac{\sigma_z}{e_2}$$

ist, unmittelbar aus der oben entwickelten allgemeinen Gleichung:

$$M = \frac{\sigma_d}{e_1} \cdot J_0 + \frac{\sigma_z}{e_2} J'_0 = \frac{\sigma_d}{e_1} (J_0 + J'_0),$$

$$M = \frac{\sigma_z}{e_2} (J_0 + J'_0) = \frac{\sigma_d}{2e_2} (J_0 + J'_0),$$

$$e_1 = 2e_2.$$

Hierbei ist  $J$  das Gesamtträgheitsmoment des Querschnitts auf seine Null- (Schwer-) Linie ( $II$  in Abb. 107).

Daß diese Addition  $J_0 + J'_0 = J$  richtig, erkennt man daran, daß  $J_0$  und  $J'_0$  je auf die Nulllinie für sich bezogen sind, also der Form  $\sum f y^2$  entsprechen, und derselben Beziehung auch durch  $J$  genügt wird, da sich dieses auf die Querschnittsflächen sowohl an der einen als auch an der anderen Seite der Nulllinie erstreckt. Beispielsweise ergibt sich bei einem Rechtecksquerschnitt mit der Breite  $b$  und der Höhe  $h$ :

$$J_0 = \frac{b \left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} = J'_0 = \frac{b h^3}{8 \cdot 3} = \frac{b h^3}{24};$$

somit ist:

$$J_1 + J'_0 = 2 \frac{b h^3}{24} = \frac{b h^3}{12},$$

ein Wert, der für den zusammenhängenden Rechteckquerschnitt, bezogen auf seine Schwerachse, auch tatsächlich als richtig auf S. 43 nachgewiesen wurde.

Ist bei homogenen, gleichartig elastisch wirkendem Baustoff  $\sigma_a = \sigma_z = \sigma$  und bei einem zur Schwerachse symmetrischen Querschnitte  $e_1 = e_2 = e$ , so wird:

$$(c) \quad \sigma = \pm \frac{M \cdot e}{J}.$$

Die Größe  $\frac{J}{e}$ , d. h. das Trägheitsmoment, bezogen auf seine zur Schnittlinie mit der Kraftebene zugeordnete Haupt- (Schwer-) Achse, geteilt durch den äußersten Faserabstand, pflegt man das **Widerstandsmoment** des Querschnitts zu nennen und mit  $W$  zu bezeichnen. Diesem  $W$  wird i. d. R. noch ein Index anzufügen sein, um zu bezeichnen, auf welche Achse  $W$  — ebenso wie das zugehörnde  $J$  — sich bezieht, bzw. — bei verschiedenen  $e$ -Werten — welcher von ihnen in Frage kommt. Für die Achse  $II$  in Abb. 107 ist  $W_1$  für  $\frac{J_1}{e_1}$  einzuführen.

Für den einfachen rechteckigen Querschnitt ergibt sich z. B.:

$$W_1 = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{b h^2}{6}, \quad W_2 = \frac{h b^3}{12 \frac{b}{2}} = \frac{b h^2}{6},$$

für den Kreisquerschnitt wird  $W$  — gleich groß für jede Durchmesserlage:

$$W = \frac{r^4 \pi}{4r} = \frac{r^3 \pi}{4} = \frac{d^3 \pi}{32},$$

und ebenso für den Ringquerschnitt mit den Durchmessern  $D$  und  $d$ :

$$W = \frac{D^4 - d^4}{32D} \pi.$$

Sind die beiden Werte  $e_1$  und  $e_2$  verschieden (also bei homogenen Baustoffen zugleich auch  $J_0$  und  $J'_0$ ), so ist zu rechnen mit:

$$M = \sigma_a W' + \sigma_z W'',$$

worin

$$W' = \frac{J_0}{e_1}, \quad W'' = \frac{J'_0}{e_2}$$

ist.

Für das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnitts  $= J$  gehen diese Beziehungen in die Form über:

$$(d) \quad \sigma_a = -\frac{M e_1}{J} = -\frac{M}{W'_1},$$

$$(d') \quad \sigma_z = +\frac{M e_2}{J} = +\frac{M}{W'_2},$$

wobei, wie ausdrücklich hervorgehoben sei, sich beide Werte  $W$ - ( $W'_1$  und  $W'_2$ ) auf dieselbe Biegeachse beziehen. Wird die auftretende größte Spannung gesucht, so ist selbstverständlich der kleinere der  $W$ -Werte der Rechnung zugrunde zu legen.

Über die Anwendung dieser Gleichungen ist das Zahlenbeispiel unter 9. auf S. 110 und 111 zu vergleichen.

Für homogenes Material und zur Biegeachse symmetrischen Querschnitt wird:

$$(e) \quad \sigma = \pm \frac{M}{W}, \quad M = \sigma W,$$

das Hauptgesetz der axialen — reinen — Biegespannung, gültig für die Randspannung in der Zug- (+) bzw. Druckzone (—).

Wird bei gegebenem Moment der äußeren Kräfte und bekannter, zulässiger Spannung ( $\sigma$ ) der Querschnitt gesucht, so folgt seine Größe aus:

$$W = \frac{M}{\sigma}.$$

Bei richtiger wirtschaftlicher Materialausnutzung werden die zulässige Spannung und die Randspannung gleichbedeutend sein.

Will man die Spannung  $\sigma_y$  in einer beliebigen Querschnittsfaser im Abstände von  $y$  von der Nulllinie berechnen, so ist das Verhältnis  $\frac{\sigma}{e}$  in Gleichung (c) nur zu ersetzen durch  $\frac{\sigma_y}{y}$ , da:

$$\sigma_y : y = \sigma : e.$$

Alsdann wird unter Einführung der nunmehr in Frage kommenden Werte:  $J = J_1$ :

$$(f) \quad M = \sigma_y \frac{J_1}{y}; \quad \sigma_y = \pm \frac{M \cdot y}{J_1}$$

gültig für jede beliebige Querschnittsfaser. Hierbei soll das  $\pm$ -Zeichen unterscheiden, ob die Faser in der Zug- oder Druckzone liegt.

b) Die Kräfteebene geht durch den Querschnittsschwerpunkt, schneidet den Querschnitt aber nicht in einer Hauptachse.

Ist der Querschnitt beiderseits symmetrisch, sind also die Schwerachsen auch die Hauptachsen, so wird man bei einer zu den Achsen schiefen Schnittlinie von Kräfteebene und Querschnitt am einfachsten die bei einer axialen Biegung auftretenden größten Spannungen dadurch finden, daß man das Moment  $M_r$  (Abb. 108) in zwei Seitenmomente nach Richtung der Schwerachsen zerlegt:  $M_1 = M_r \sin \alpha$ ,  $M_2 = M_r \cos \alpha$  und die je von diesen Seitenmomenten bestimmten Spannungen nach der Grundgleichung:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{M \cdot e}{J}$$

ermittelt. Hierbei ist naturgemäß bald die eine, bald die andere Schwerachse für  $J$  und  $e$  maßgebend, wobei bei symmetrischem Querschnitt darauf zu achten ist, daß die zur Schnittlinie von Querschnitt und Kräfteebene zugehörige Nulllinie auf dieser Schnittlinie senkrecht steht. Demgemäß gehören zur Momenteneinwirkung  $M_1$  in Abb. 108 die Achse  $I-I$  als Biegeachse und somit die Werte:  $J_1$ ,  $W_1$  und  $e = \frac{h}{2}$ , während für  $M_2$  die Achse  $II-II$ ,  $J_2$ ,  $W_2$  und  $e = \frac{b}{2}$  in Frage kommen<sup>1)</sup>.

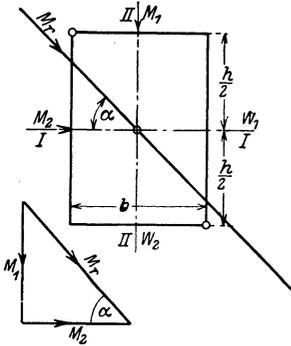


Abb. 108.

Demgemäß wird, wenn man die Spannung infolge des Momentes  $M_1$  mit  $\sigma_1$ , die durch  $M_2$  mit  $\sigma_2$  bezeichnet, zunächst ohne Bestimmung des Vorzeichens für einen beliebigen Querschnittspunkt mit den Abständen  $y$  und  $x$ :

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{J_1} y, \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{J_2} x,$$

bzw. für die von der Achse  $I-I$  bzw.  $II-II$  am meisten entfernten Rand- (Eck-) Punkte:

$$y = e = \frac{h}{2}, \quad x = e = \frac{b}{2}.$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_1 e}{J_1} = \frac{M_1 \frac{h}{2}}{J_1} = \frac{\frac{M_1}{J_1} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{M_1}{W_1},$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{M_2 e}{J_2} = \frac{M_2 \frac{b}{2}}{J_2} = \frac{\frac{M_2}{J_2} \frac{b}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{M_2}{W_2}.$$

<sup>1)</sup> Da hier für beide Achsen je  $e_1 = e_2$  ist, ist der Wert allgemein mit  $e$  bezeichnet.

Hat, wie bereits bei dem vorliegenden, beiderseits symmetrischen Querschnitt vorausgesetzt, dieser Randpunkte, die am weitesten von beiden Hauptachsen entfernt sind, so ist die Größtspannung, die hier auftritt:

$$\sigma = \sigma_{\max} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} = \frac{1}{W_1} \left( M_1 + M_2 \frac{W_1}{W_2} \right).$$

Diese Gleichung gilt im besonderen für alle Querschnitte, die auf der Form des Rechtecks sich aufbauen und Endpunkte mit den vorgenannten Eigenschaften haben, also für die Rechtecke, I- und  $\square$ -Querschnitte. Bei diesen kann auch für das Verhältnis von  $\frac{W_1}{W_2}$  — zum mindesten für eine Versuchsrechnung zur Querschnittsermittlung — eine konstante Größe eingeführt werden =  $c$ , so daß sich ergibt:

$$\sigma = \frac{1}{W_1} (M_1 + cM_2),$$

$$W_1 = \frac{M_1 + cM_2}{\sigma}.$$

Diese Beziehung hat im besonderen Bedeutung zur angenäherten bzw. versuchsweisen Bestimmung des erforderlichen Querschnitts<sup>1)</sup>.

Die Auffindung des gefährlichen, meist gedrückten bzw. meist gezogenen Randpunktes ist ohne Schwierigkeit, wenn man sich die biegende Wirkung der Momente  $M_1$  und  $M_2$  je vergegenwärtigt. Diese gefährlichsten Punkte liegen immer nahe der Schnittlinie der Kraftebene des Momentes  $M_r$  mit dem Querschnitte (vgl. Abb. 108).

Hat der Querschnitt keine Symmetrieachsen, so wird man nach der auf S. 38—41 gezeigten Berechnungsart zunächst die Hauptachsen bestimmen, nach ihnen das Moment  $M_r$  zerlegen und alsdann nach der allgemeinen Gleichung  $\sigma = \frac{M y}{J_1}$  bzw.  $= \frac{M x}{J_2}$  die auftretenden Spannungen bestimmen und addieren. Über den an und für sich einfachen, hier einzuschlagenden Rechnungsweg gibt das Beispiel auf S. 111—112

<sup>1)</sup> Eine solche Rechnung ist bei Hochbaukonstruktion in erster Linie für die durch Wind bzw. senkrechte Belastung (je nach deren Lage zu den Achsen) schiefwinklig belasteten Pfettenquerschnitte aufzustellen. Hierbei kann für das Rechteck für  $c$  eingeführt werden:

$$c = \frac{b h^2 6}{6 h b^2} = \frac{h}{b},$$

also eine Verhältniszahl, in der die Hauptabmessungen stehen, während für die hier in Frage kommenden mittleren Normalprofile der  $\square$ -Eisen  $c = 6$ , für die I-Eisen  $c = 8$  zu rechnen ist. Naturgemäß ist alsdann das gewählte Profil unter Einführung der — in der Tabelle der Normalprofile enthaltenen — wirklichen Werte  $c = \frac{W_1}{W_2}$  nachzuprüfen. In der Regel ergibt sich hierbei aber nur selten eine durch die Verschiedenheit der  $c$ -Werte bedingte Querschnittsänderung.

Auskunft. Hier sind die Spannungen ermittelt, welche in einem aus Stehblech und zwei  $\Gamma$ -Eisen in Form eines Z zusammengesetzten Querschnitte durch schiefe Biegungsbelastung auftreten.

- c) Die Verbiegung und Ermittlung der reinen Biegungsspannungen bei Eisenbetonquerschnitten.

Hier ist es meist üblich — wie bereits bei Ermittlung der Trägheitsmomente der Verbundquerschnitte hervorgehoben wurde — in der Zugzone der Querschnitte die Betonzugspannungen nicht in Rechnung zu stellen, sondern sie hier den Eiseneinlagen zuzuweisen. Diese werden in bezug auf ihre Spannungsaufnahme auch hier mit dem  $n = 15$ fachen ihrer Querschnittsfläche eingeführt, entsprechend dem Verhältnisse der Elastizitätszahl von Eisen zu Beton:  $n = \frac{E_e}{E_b} = \frac{2100000}{140000} = 15$ . Zu unterscheiden sind für die einfache Biegung Rechtecksquerschnitte und Plattenbalkenquerschnitte. Ihre Bewehrung kann (normal!) eine einfache, d. h. nur in der Zugzone, bzw. eine doppelte in der Druck- und Zugzone sein. Im besonderen wird nachstehend nur auf den einfachen Rechtecksquerschnitt eingegangen, weil hier nur grundsätzlich die Biegungsbelastung nicht homogener Querschnitte vorgeführt werden soll, die eingehende Behandlung derartiger Fragen, namentlich auch in bezug auf das Verbundkonstruktionselement des Plattenbalkens, in das Sondergebiet der Theorie des Eisenbetonbaus gehört.

- $\alpha$ ) Die Biegungsspannung im Rechtecksquerschnitt ohne Berücksichtigung der Betonzugspannungen.

Sind Abb. 109  $AB$  und  $CD$  zwei vor der Biegung nahe aneinander gelegene, nach der Biegung aber zueinander geneigt liegende, ebene

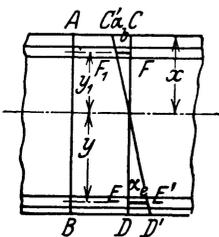


Abb. 109.

Querschnitte, stellt  $CC'$  die Zusammendrückung  $= \alpha_b$ ,  $DD'$  die Formänderung an der Zugseite,  $EE'$  die der unteren Eisenbewehrung dar  $= \alpha_e$ , ist ferner der Abstand der Nulllinie von der oberen Druckkante  $x$ , und von der Schwerachse des Eisens  $y$ , die größte Druckspannung im Beton  $\sigma_b$ , die Zugspannung im Eisen — als konstant anzunehmen —  $= \sigma_e$ , weiter  $n = \frac{E_e}{E_b} = 15$ , so ergibt sich zunächst

nach dem Hookschen Gesetze:

$$\alpha_b = \frac{\sigma_b}{E_b}; \quad \alpha_e = \frac{\sigma_e}{E_e}$$

und aus der Abb. 109:

$$\alpha_b : \alpha_e = x : y;$$

hieraus folgt:

$$\frac{\alpha_b}{\alpha_e} = \frac{x}{y} = \frac{\sigma_b}{\sigma_e} \cdot \frac{E_e}{E_b} = n \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_e}$$

und somit:

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{n} \frac{x}{y} = \frac{1}{15} \sigma_e \frac{x}{y},$$

$$\sigma_e = n \sigma_b \frac{y}{x} = 15 \sigma_b \frac{y}{x},$$

das **Hauptgesetz** der auf reine Biegung beanspruchten Verbundquerschnitte. Ist auch in der Druckzone eine obere Bewehrung vorhanden, so wird in gleicher Weise für die hier auftretende Spannung  $\sigma'_e$ :

$$\sigma'_e = n \sigma_b \frac{y'}{x},$$

wenn  $y'$  den Abstand dieser Bewehrung von der Nulllinie darstellt

1. Die Biegungsspannungen im doppelt und einfach bewehrten Rechtecksquerschnitte.

Der Querschnitt sei durch ein  $+M$  beansprucht, seine Unterseite also gezogen, die Oberseite gedrückt. Die Querschnittsabmessungen

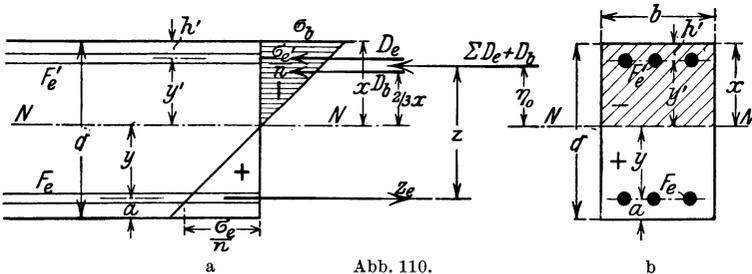


Abb. 110.

und alle wichtigen Bezeichnungen sind aus der Abb. 110a, b zu entnehmen.

Aus der Forderung, daß im Gleichgewichtszustande die Summe der inneren Kräfte = 0 sein muß, folgt:

$$(a) \quad \Sigma(D_b + D_e) = Z_e = \sigma_b \frac{xb}{2} + F'_e \sigma'_e = F_e \sigma_e,$$

oder:

$$(a') \quad \sigma_b \frac{xb}{2} + F'_e \sigma'_e - F_e \sigma_e = 0.$$

Ferner ergibt sich aus der Gleichheit der Momente der inneren und äußeren Kräfte, und zwar in bezug auf die Nulllinie als Achse:

$$(b) \quad M = D_b \cdot \frac{2}{3} x + D'_e \cdot y' + Z_e y = \sigma_b \frac{xb}{2} \cdot \frac{2}{3} x + F'_e \sigma'_e y' + F_e \sigma_e y.$$

Endlich liefert das vorstehend entwickelte Hauptgesetz die beiden letzten Beziehungsgleichungen:

$$(c) \quad \sigma_e = \sigma_b \cdot n \frac{y}{x}$$

und

$$(d) \quad \sigma'_e = \sigma_b n \cdot \frac{y'}{x}.$$

Werden die beiden Werte  $\sigma_e$  und  $\sigma'_e$  in Gleichung (a') eingesetzt, so ergibt sich:

$$(e) \quad \frac{1}{2} \sigma_b x b + F'_e \sigma_b n \frac{y'}{x} - F_e \sigma_b n \frac{y}{x} = 0,$$

$$(f) \quad \frac{1}{2} x^2 b + n (F'_e y' - F_e y) = \frac{1}{2} x^2 b + n F'_e y' - n F_e y = 0.$$

Diese Gleichung stellt die bekannte Beziehung dar, daß die Summe der statischen Momente der einzelnen wirksamen Flächenteile in bezug auf die Nulllinie = 0 ist. Der erste Summand ist das statische Moment der gedrückten Betonquerschnittsfläche, der zweite des mit  $n$  erweiterten oberen Eisenquerschnittes, also gewissermaßen eines elastisch gleichwertigen, in Beton umgerechneten Querschnittes, und das dritte Glied endlich das Moment der gezogenen Bewehrung bei der gleichen Umwandlung von  $F_e$ . Gleichung (f) hätte also auch ohne weitere Rechnung angeschrieben werden können.

Setzt man in (f) für  $y'$  und  $y$  ihre Werte nach Abb. 110 a, b ein, also:

$$y' = x - h'; \quad y = h - x$$

(worin  $h$  die nutzbare Querschnittshöhe =  $d - h'$  ist), so geht (f) über in:

$$(g) \quad \frac{1}{2} x^2 b + n F_e (x - h') - n F_e (h - x) = 0.$$

Löst man hieraus  $x$  aus, so wird:

$$x = -\frac{n(F'_e + F_e)}{b} + \sqrt{\frac{n^2(F'_e + F_e)^2}{b^2} + \frac{2n}{b} [F'_e h' + F_e h]},$$

eine Gleichung, die die Unbekannte  $x$ , mit ihr also die Lage der Nulllinie, liefert.

Setzt man in gleicher Weise die Werte  $\sigma'_e$  und  $\sigma_e$  aus Gleichung (c) und (d) in Gleichung (b) ein, so wird:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{3} x^2 b \sigma_b + F'_e \sigma_b n \frac{y'^2}{x} + F_e \sigma_b n \frac{y^2}{x} \\ &= \frac{\sigma_b}{x} \left( \frac{1}{3} x^3 b + n F'_e y'^2 + n F_e y^2 \right) = \frac{\sigma_b}{x} J_{nn}. \end{aligned}$$

Der Klammerausdruck enthält (vgl. S. 50 u. 51) das Trägheitsmoment des wirksamen Verbundquerschnittes, das Verbundträgheitsmoment, in bezug auf die Nulllinie, wobei wiederum die Eisenquerschnitte durch

gleich elastische Betonquerschnitte ( $n \cdot F'_e$  bzw.  $n \cdot F_e$ ) ersetzt sind<sup>1)</sup>. Hieraus folgt die für homogene Querschnitte vorstehend schon gefundene Biegebeziehung, in der allerdings  $J_{nn}$  seine besondere Bedeutung hat:

$$\sigma_b = \frac{M \cdot x}{J_{nn}}.$$

Ist  $\sigma_b$  gefunden, so sind, da auch alle  $x$ - und  $y$ -Werte bekannt sind, die Eisenspannungen  $\sigma'_e$  und  $\sigma_e$  aus den beiden Grundgleichungen (c) und (d) abzuleiten:

$$\sigma'_e = \sigma_b \cdot n \frac{y'}{x} = n \cdot \frac{M y'}{J_{nn}},$$

$$\sigma_e = \sigma_b n \frac{y}{x} = n \frac{M y}{J_{nn}}.$$

Bei den voranstehenden Entwicklungen ist die im allgemeinen geringe Querschnittsverminderung der Betondruckzone durch das hier liegende Eisen nicht in Rechnung gestellt. Will man das tun, so ist daran zu denken, daß an Stelle der Druckeiseneinlage nun nicht mehr der  $n$ -fache Querschnitt, wenn man das Eisen in Beton umwertet, sondern der  $(n - 1)$ -fache zu setzen ist, also an allen Stellen der vorstehenden Berechnungen, wo es sich um  $n \cdot F'_e$  handelt, an seiner Stelle der Wert  $(n - 1) F'_e = 14 F'_e$  einzuführen wäre. Eine solche genauere Rechnung wird sich jedoch nur bei hohen Bewehrungszahlen empfehlen.

## 2. Die Ermittlung der Spannungen bei einfacher Bewehrung

Ist die Eiseneinlage (Abb. 111a, b) eine einfache, also nur die Zugzone bewehrt, so ergeben sich die entsprechenden Beziehungen aus den voranstehenden Gleichungen, wenn in ihnen der Wert  $F'_e = 0$  gesetzt wird.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x^2 b - n F_e y &= 0. \\ x &= -\frac{n F_e}{b} + \sqrt{\frac{n^2 F_e^2}{b^2} + \frac{2 n F_e \cdot h}{b}} \\ &= \frac{n F_e}{b} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b \cdot h}{n F_e}} \right) \\ &= \frac{n F_e}{b} \left( \sqrt{1 + \frac{2 b \cdot h}{n F_e}} - 1 \right). \\ J_{nn} &= \left( \frac{1}{3} x^3 b + n F_e y^2 \right). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Hierbei sind allerdings, wie schon auf S. 50 hervorgehoben wurde, die Trägheitsmomente der Eiseneinlagen auf ihre eigene Schwerachse nicht berücksichtigt, da sie vernachlässigbar klein sind in bezug auf den Wert:  $n F'_e y'^2$  bzw.  $n F_e y^2$ .

Mit diesem Werte wird:

$$\sigma_b = \frac{M \cdot x}{J_{nn}}; \quad \sigma_e = \frac{n M y}{J_{nn}}.$$

Führt man den Hebelarm „ $z$ “ der inneren Kräfte  $= \left(h - \frac{x}{3}\right)$  (Abb. 111a) ein, so liefert die Beziehung, daß das Moment der äußeren Kräfte gleich dem der inneren sein muß, die Gleichung:

$$M = D_b \cdot z = Z_e \cdot z = \sigma_b \frac{x b}{2} \left(h - \frac{x}{3}\right) = \sigma_e F_e \left(h - \frac{x}{3}\right).$$

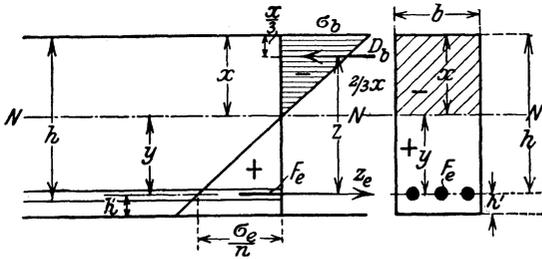


Abb. 111a und b.

Hieraus folgt:

$$\sigma_b = \frac{2 M}{b \cdot x \left(h - \frac{x}{3}\right)},$$

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e \left(h - \frac{x}{3}\right)}.$$

Will man entsprechende Gleichungen für den doppelt bewehrten Querschnitt aufstellen,

so muß  $z$  als Abstand zwischen den Kräften  $D_b$  und  $D_e$  einerseits,  $Z_e$  andererseits gesucht werden. Wird der Abstand  $\sum(D_b + D_e)$  von der Nulllinie mit  $\eta_0$  bezeichnet, so ergibt sich  $z$  aus Abb. 110 zu:

$$z = y + \eta_0 = h - x + \eta_0.$$

d. h. sobald  $\eta_0$  bekannt ist, ist auch (nach Bestimmung von  $x$ )  $z$  gefunden. Für  $\eta_0$  gilt die Beziehung:

$$\eta_0 \sum (D_b + D_e) = D_b \frac{2}{3} x + D_e \cdot (x - h').$$

Hieraus folgt, da  $D_b = \frac{x \sigma_b}{2} \cdot b$  und  $D_e = F_e' \sigma_e'$  ist:

$$\eta_0 = \frac{\sigma_b \frac{x b}{2} \cdot \frac{2}{3} x + F_e' \sigma_e' (x - h')}{\sigma_b \frac{x \cdot b}{2} + F_e' \sigma_e'}.$$

Setzt man hierin  $\sigma_e' = n \sigma_b \frac{x - h'}{x}$  ein, so folgt:

$$\eta_0 = \frac{\sigma_b \frac{b x^2}{3} + n \sigma_b \frac{x - h'}{x} F_e' (x - h')}{\sigma_b \frac{x b}{2} + n \sigma_b \frac{x - h'}{x} F_e'}$$

und nach Kürzung durch  $\sigma_b$ :

$$\eta_0 = \frac{\frac{b x^2}{3} + n F_e' (x - h')^2}{\frac{b x^2}{2} + n F_e' (x - h')},$$

woraus dann der vorgenannte  $z$ -Wert folgt; mit seiner Hilfe kann für den doppelt bewehrten Querschnitt mithin die Gleichung aufgestellt werden:

$$F_e \cdot \sigma_e (h - x + \eta_0) = M;$$

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e (h - x + \eta_0)}.$$

Will man bei **Verbundquerschnitten**, die auf reine Biegung belastet sind, die **Nulllinie zeichnerisch finden** und dann weiterhin aus der graphischen Lösung die Spannungen ableiten, so geht man davon aus, daß in bezug auf die Nulllinie die statischen Momente der Druck- und der Zugzone einander gleich sind, daß man also, wenn das Moment graphisch (s.S.22) durch ein Kraft- und Seileck bestimmt wird, die Nulllinie dort finden wird, wo zwei gleichartige, für die Druck- und Zug-Innenkräfte im Querschnitte von derselben Basis aus gezeichnete Seilecke eine gemeinsame Momentenordinate aufweisen werden. Dementsprechend teilt man senkrecht zur Schnittlinie mit der Kraftebene den

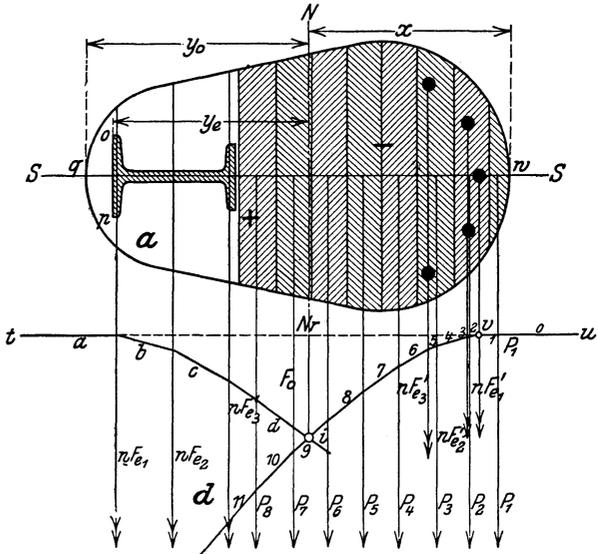


Abb. 112a.

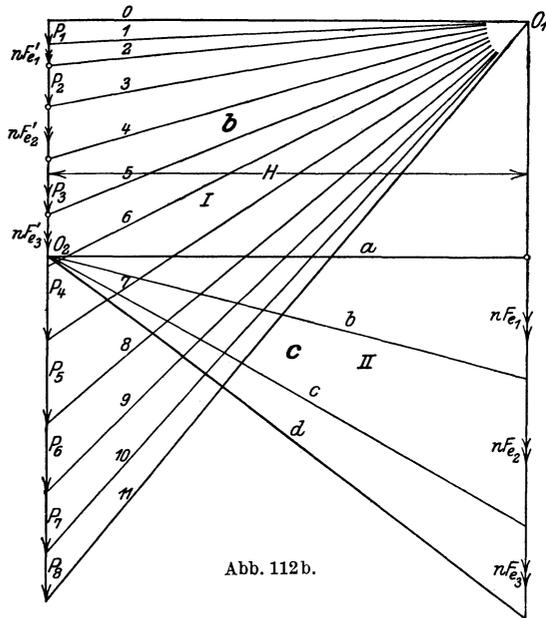


Abb. 112b.

Betonquerschnitt in einzelne kleine Streifen und führt für die zwischenliegenden Eiseneinlagen entsprechende Kräfte  $je = nF_e$  ein, zeichnet dann weiter zu ihnen, von derselben Wagerechten ( $tu$ ) ausgehend und auf Grund zweier Kraftecke mit gleichem Pole die Seilecke Abb. 112a—d).

Von diesen wird das für die Druckzone von rechts nach links, das für die Eisenzugkräfte in umgekehrter Richtung gezeichnet. Beide Seilecke schneiden sich in Punkt  $i$  und haben die gemeinsame Ordinate  $r_i$ , die somit im Querschnitte die Lage der Nulllinie bestimmt, —  $NN$  in Abb. 112a. Hierdurch bestimmen sich weiterhin die für die Spannungsermittlung notwendigen Randabstände  $x$ ,  $y_e$  und  $y_0$ .

Da — vgl. S. 27 — das Trägheitsmoment des Querschnitts auf  $NN = J_{nn} = F_0 \cdot 2H$ , gleich der von Schlußlinie und Seileck umschlossenen Fläche  $\times 2$  Polweite des Kräfteckes ist, so kann man hieraus unmittelbar  $J_{nn}$  und ferner die Spannungen im Punkte  $w$ :

$$\sigma_{bd} = - \frac{M \cdot x}{J_{nn}},$$

im Punkte  $q$ :

$$\sigma_{bz} = + \frac{M \cdot y_0}{J_{nn}},$$

an dem Rande  $op$ :

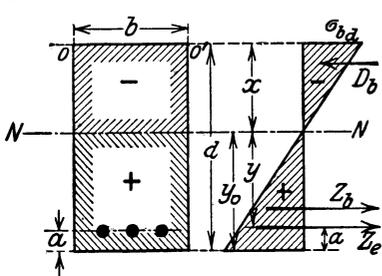
$$\sigma_e = + \frac{n M \cdot y_e}{J_{nn}}$$

ableiten.

Bei Ausführung der Rechnung ist auf die Einheiten zu achten, da  $J_{nn}$  vom vierten Grade ist, so ist auch  $H$  zweiten Grades, z. B. in  $\text{cm}^2$  im Maßstabe der Rechteck-Kräfte zu messen.

### $\beta$ ) Die Biegungsspannungen im Rechtecksquerschnitt mit Berücksichtigung der Betonzugspannungen.

Liegt (Abb. 113a, b) zunächst ein einfach bewehrter Verbundquerschnitt vor, so ist — genau wie beim homogenen Querschnitt —



zuerst die Lage der Nulllinie aus der Beziehung der statischen Momente auf die Querschnittsoberkante zu ermitteln. Bezeichnet man mit  $F_i$  den ideellen Querschnitt, gebildet aus der Betonfläche und der  $n$ -fachen Eisenfläche, so wird:

$$(a) \quad x \cdot F_i = x \cdot (bd + nF_e)$$

$$= bd \frac{d}{2} + nF_e (d - a)$$

$$(b) \quad x = \frac{\frac{bd^2}{2} + nF_e (d - a)}{bd + nF_e} = \frac{bd^2 + 2nF_e (d - a)}{2bd + 2nF_e}.$$

Ferner liefert die Gleichheit der statischen Momente der Druck- und Zugflächen die Beziehung:

$$(c) \quad \frac{bx^2}{2} = \frac{b}{2} (d - x)^2 + nF_e (d - a - x).$$

Hieraus folgt:

$$(d) \quad bd \left( x - \frac{d}{2} \right) = nF_e (d - a - x).$$

Ferner ergibt sich  $J_{nn}$ , da jetzt sowohl ein oberer wie ein unterer Betonquerschnittsteil in Rechnung zu stellen sind:

$$(e) \quad J_{nn} = \frac{bx^3}{3} + \frac{b(d-x)^3}{3} + nF_e (d-x-a)^2 \cdot 1).$$

Hieraus folgt nach Auflösung des Ausdruckes  $(d-x)^3$  und Einsetzung des Wertes für  $nF_e (d-a-x)$  aus Gleichung (d):

$$(f) \quad J_{nn} = bd \left( \frac{d^2}{3} - dx + x^2 \right) + bd \left( x - \frac{d}{2} \right) (d-x-a) \\ = \frac{bd}{2} \left[ x(d-2a) - \frac{d}{3}(d-3a) \right].$$

Nunmehr ergeben sich die Spannungen bei gegebenem äußerem Momente =  $M$ :

$$(g) \quad \sigma_{ba} = - \frac{M \cdot x}{J_{nn}}$$

$$(h) \quad \sigma_{iz} = + \frac{M \cdot y_0}{J_{nn}}$$

$$(i) \quad \sigma_e = \sigma_{ez} = + n \frac{M \cdot y}{J_{nn}}.$$

Ist (Abb. 114a, b) der Querschnitt doppelt bewehrt, so gestaltet sich die Rechnung durchaus entsprechend; hier tritt nur  $F'_e$  hinzu. Es ergibt sich:

$$(a') \quad xF_i = x(bd + nF'_e + nF_e) = \frac{bd^2}{2} + nF'_e h' + nF_e (d-a).$$

$$(b') \quad x = \frac{\frac{bd^2}{2} + n[F'_e h' + F_e (d-a)]}{bd + n(F'_e + F_e)} \\ = \frac{bd^2 + 2n[F'_e h' + F_e (d-a)]}{2bd + 2n(F'_e + F_e)}.$$

<sup>1)</sup> Man kann  $J_{nn}$  auch ermitteln, wenn man zunächst  $J_{00}$  auf die Querschnittsoberkante bezieht:

$$J_{00} = \frac{bd^3}{3} + nF_e (d-a)^2$$

und dann  $J_{nn}$  aus der Beziehung ableitet:

$$J_{nn} = J_{00} - F_i x^2,$$



3. Eine nach einer Zylinderfläche in ihrer Oberfläche geformte Auflagerplatte (Tangentiallager) (Abb. 115a) hat den Auflagerdruck  $A$  auf ihren Unterbau zu übertragen. Hier kann die Lastverteilung als gleichmäßig verteilt angenommen, d. h. der Stützenwiderstand  $A$  in zwei symmetrisch in der Plattenunterfläche wirkende Kräfte von je  $\frac{A}{2}$  geteilt werden. Hieraus folgt die Größe des die Platte in der Mittelfuge ( $b \cdot \delta$ ) beanspruchenden Biegemomentes zu:

$$M = \frac{A}{2} \frac{\lambda}{4} = \sigma W = \sigma \cdot \frac{b \delta^2}{6}$$

und somit wird:

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3 A \cdot \lambda}{b \cdot \sigma}}$$

Ist z. B.  $A = 17000$  kg und soll die Platte eine Grundfläche im Verhältnis von  $\lambda : b \cong 2 : 3$  (Abb. 115a) erhalten, so wird bei einer zulässigen Pressung des Lagersteines unter der Platte =  $12 \text{ kg/cm}^2$  die Lagerfläche  $F = \frac{17000}{12} = 1412 \text{ cm} = \lambda b$ ; wählt man  $\lambda = 32 \text{ cm}$ , so wird  $b = 45 \text{ cm}$ , und für  $\sigma = 250 \text{ kg/cm}^2$  (gewöhnliches Gußeisen):

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 17000 \cdot 32}{45 \cdot 250}} = \text{rd. } 6 \text{ cm.}$$

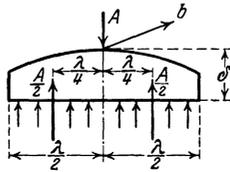


Abb. 115a.

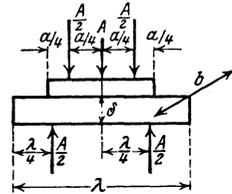


Abb. 115b.

4. In gleicher Weise berechnet sich die Stärke  $\delta$  einer rechteckigen Lagerplatte, auf die der Auflagerdruck in einer Länge =  $a$  und einer Breite =  $b$  (Abb. 115b) gleichmäßig von oben übertragen wird aus der Beziehung:

$$M = \frac{A}{2} \frac{\lambda}{4} - \frac{A}{2} \frac{a}{4} = \frac{A}{8} (\lambda - a) = \sigma W$$

$$= \sigma \cdot \frac{b \delta^2}{6}; \quad \delta = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3 A (\lambda - a)}{b \cdot \sigma}}$$

Ist z. B.  $\lambda = 45 \text{ cm}$ ;  $a = 18,5 \text{ cm}$ ;  $b = 32 \text{ cm}$ ;  $A = 17000 \text{ kg}$ ;  $\sigma = 250 \text{ kg/cm}^2$ , so wird:

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 17000 \cdot (45 - 18,5)}{32 \cdot 250}} = \text{rd. } 6,5 \text{ cm.}$$

In ähnlicher Art werden auch die Fuß- und Kopfplatten gußeiserner, zentrisch belasteter Stützen auf Biegung berechnet.

5. a) Bei dem in Abb. 116a, b dargestellten Säulenfuß ist die Plattenstärke  $\delta$  in der Fuge  $m n$  zu bestimmen: Beträgt die Untergrundbelastung  $k$  in  $\text{kg/cm}^2$  so ist die Reaktionskraft des Plattenteils außerhalb der Fuge  $m n$ :  $B = F_B \cdot k$  und, entsprechend der Lage des

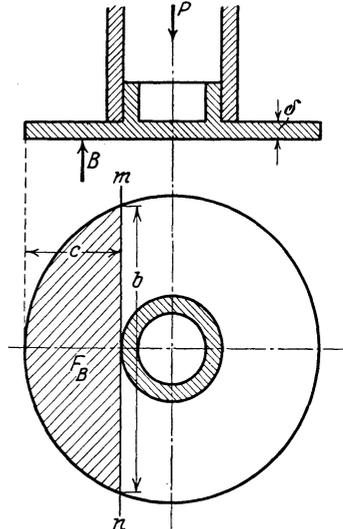


Abb. 116a und b.

Schwerpunktes des Kreisabschnittes  $F_B$  gegenüber  $m n \cong \frac{2}{5} c$ , das Moment:

$$M = B \cdot \frac{2}{5} c = \sigma \cdot W = \sigma \cdot \frac{b \delta^2}{6}.$$

$$\delta = \sqrt{\frac{12 B \cdot c}{5 b \cdot \sigma}}.$$

b) Werden (Abb. 117 ab) Säulenschaft und Fußplatte in einem Gußstücke vereinigt, so stellt sich bei voller Säulenplatte die Rechnung in bezug auf die Fuge in Plattenmitte folgendermaßen: Wenn man annimmt, daß der Druck von oben =  $2 \cdot \frac{P}{2}$  sich je im Schwerpunkt der Linie einstellt, mit der die Säulenaußenwand die Platte berührt und der Widerstand — auch hier =  $2 \cdot \frac{P}{2}$  — in der Plattenunterseite im Schwerpunkte jeder Hälfte angeht, so wird:

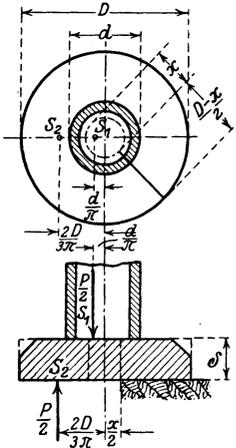


Abb. 117a und b.

$$M = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{D}{\pi} - \frac{d}{\pi} \right) = \sigma \cdot \frac{D \delta^2}{6}.$$

c) Wird hier in der Mitte eine kreisförmige Öffnung mit dem Durchmesser =  $x$  vorgesehen, so kommt für die Schwerpunktslage an der Fußunterfläche ein halbes Ringstück mit den Durchmessern  $D$  und  $x$  in Frage. Demgemäß wird jetzt der Schwerpunktsabstand von der Säulenachse:

$$c = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{D}{2} \right)^2 - \left( \frac{x}{2} \right)^2$$

und

$$W = \frac{1}{6} (D \delta^2 - x \delta^2) = \frac{1}{6} \delta^2 (D - x).$$

Sonst bleibt die Rechnung die gleiche:

$$M = \frac{P}{2} \left( \frac{2}{3} \frac{D}{\pi} - c \right) = \sigma \frac{\delta^2}{6} (D - x).$$

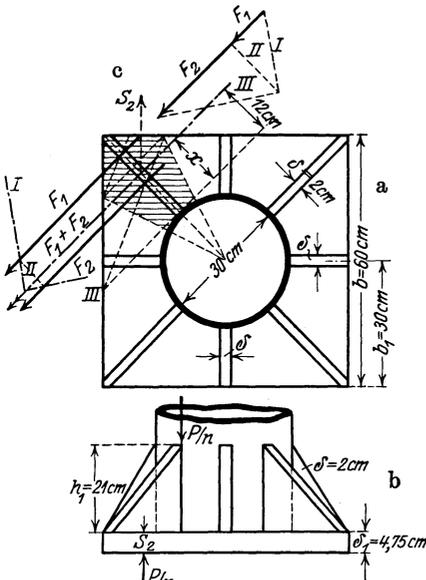


Abb. 118a—c.

d) Wird (Abb. 118a—c) der Anschluß der Platte an die Säule durch Rippen versteift, so ist deren Anschlußfuge an die Außenwand der Stütze unter der Annahme auf Biegung nachzurechnen, daß die Rippen allein die hier auftretende Biegebbeanspruchung aufnehmen.

Auch hier wird vorausgesetzt, daß jede Rippe einen gleich großen Teil der Säulenkraft  $P$  — also bei  $n$  Rippen eine jede  $\frac{P}{n}$  — an ihrer Anschlußfuge von der Säule übernimmt und die Stützkraft im Schwerpunkte des zu jeder Rippe zugehörigen Fußplattenteils in derselben Größe =  $\frac{P}{n}$  angreift. Die Ermittlung dieses Punktes

erfolgt am besten graphisch (Abb. 118c). Aus der Abbildung ergibt sich nach dem Voranstehenden:

$$M = \frac{P}{n} \cdot x = \sigma W = \sigma \frac{\delta h_1^2}{6},$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 0,155 \sqrt{\frac{P \cdot x}{n \cdot \delta}}, \\ \delta &= \frac{6 P x}{n h_1^2 \sigma} = 0,024 \frac{P \cdot x}{n h_1^2} \end{aligned} \right\} \text{für } \sigma = 250 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Plattenstärke ermittelt man hier unter der Annahme, daß die Platte an den Rippen fest eingespannt und durch die erlaubte Pressung von unten aus gleichmäßig belastet ist. Für einen 1 cm breiten Streifen mit der größten Stützweite (am Rande) =  $b_1$  ist alsdann das Einspannungsmoment (vgl. Heft 2)

$$M = k_a \frac{b_1^2}{12} \quad \text{und} \quad W = \frac{1 \cdot \delta_1^2}{6};$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6 k_a b_1^2}{12 \cdot \delta_1^2} = \frac{k_a b_1^2}{2 \delta_1^2}; \quad \delta_1 = b_1 \sqrt{\frac{1}{2} \frac{k_a}{\sigma}};$$

rechnet man für Gußeisen  $\sigma = 250 \text{ kg/cm}^2$ , so wird:

$$\delta_1 = 0,045 b_1 \sqrt{k_a}.$$

Es sei beispielsweise gegeben:  $P = 25000 \text{ kg}$ ; Fußplatte quadratisch mit kreisförmiger Innenöffnung von 30 cm Durchmesser, also bei  $k_a = 10 \text{ kg/cm}^2$  von einer Quadratseite

$$a = \sqrt{\frac{P}{k_a} + \frac{30^2 \pi}{4}} = \sqrt{\frac{25000}{10} + 707} = 56,6 = \text{rd. } 60 \text{ cm.}$$

Sind 8 Rippen von je 2 cm Stärke vorhanden, so wird nach graphischer Auffindung von  $x = 12 \text{ cm}$  (Abb. 118c)

$$h_1 = 0,155 \sqrt{\frac{25000 \cdot 12}{8 \cdot 2}} = \text{rd. } 21 \text{ cm}$$

und

$$\delta_1 = 0,045 b_1 \sqrt{k_a} = 0,045 \cdot \frac{60}{2} \cdot \sqrt{10} = \text{rd. } 4,25 \text{ cm.}$$

6. Eine hölzerne Pfette 30/24 wird senkrecht zu einer Dachfläche verlegt, die unter einem Winkel von  $30^\circ$  zur Wagerechten geneigt ist und durch ein Moment  $M = 140000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$  in senkrechter Ebene belastet wird. Die Eckspannungen sind zu ermitteln.

Nach Abb. 119 ergibt sich:

$$M_2 = M_r \sin \alpha = 140000 \cdot 0,5 = 70000 \text{ kg} \cdot \text{cm},$$

$$M_1 = M_r \cos \alpha = 140000 \cdot 0,866 = 121240 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Ferner ist:

$$W_1 = \frac{b h^2}{6} = \frac{24 \cdot 30^2}{6} = 3600 \text{ cm}^3,$$

$$W_2 = \frac{30 \cdot 24^2}{6} = 2880 \text{ cm}^3$$

und somit:

$$\sigma = \sigma_1 \max + \sigma_2 \max = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} = \frac{121240}{3600} + \frac{70000}{2880} = 33,7 + 24,3$$

$$= \pm 58,0 \text{ kg/cm}^2.$$

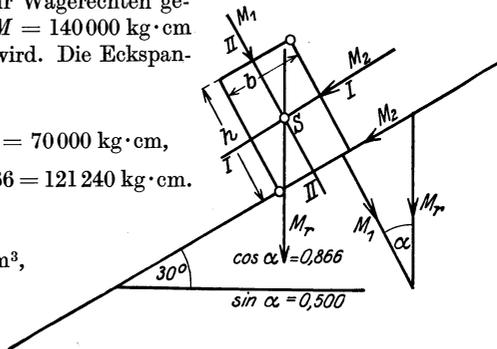


Abb. 119.

7. Ein I-Eisen stehe mit seinem Steg unter  $45^\circ$  geneigt und werde senkrecht belastet.  $M_r = 640\,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ . Versuchsweise sei ein Differdinger breitflanschiges I-Eisen angenommen mit  $W_1 = 2360$  und  $W_2 = 586 \text{ cm}^3$ .

Im vorliegenden Falle ist:  $\sin \alpha = \cos \alpha = 0,707$  und demgemäß:  $M_1 = M_2 = 640\,000 \cdot 0,707 = 452\,480 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ .

$$\sigma = \sigma_{1\max} + \sigma_{2\max} = \frac{452\,480}{2360} + \frac{452\,480}{586} = 192 + 772 = \pm 964 \text{ kg/cm}^2.$$

8. Ein Rundeisenbolzen hat in seiner Mitte ein  $M = 810\,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$  auszuhalten. Gesucht wird der Durchmesser bei  $\sigma = 1000 \text{ kg/cm}^2$ .

$$W = \frac{81\,000}{1000} = 81 \text{ cm}^3 = \frac{d^3 \pi}{32},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{81 \cdot 32}{3,14}} = \text{rd. } 9,4 \text{ cm}.$$

9. Der in Abb. 120 dargestellte, zur wagerechten Schwerachse nicht symmetrische Querschnitt aus Schweißeisen habe ein

$$M_{\max} = 4045 \text{ kg}\cdot\text{m} = 404\,500 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

zu tragen. Die hierbei auftretenden Randspannungen (oben  $\sigma_o$ , unten  $\sigma_u$ ) sind zu bestimmen.

Zunächst wird der Schwerpunktsabstand  $e_1$  bzw.  $e_2$  berechnet:

$$e_1 = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{15 \cdot 1 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,8 (10 + 1) + 10 \cdot 1,2 \cdot \left(20 + 1 + \frac{1,2}{2}\right)}{15 \cdot 1 + 20 \cdot 0,8 + 10 \cdot 1,2}$$

$$= \frac{442,7}{43} = 10,3 \text{ cm}.$$

$$e_2 = 1 + 20 + 1,2 - 10,3 = 11,9 \text{ cm}.$$

Ferner wird (bezogen auf die Nulllinie oder wagerechte Schwerachse):

$$J_y = \frac{1}{3} \{ (15 \cdot 10,3^3) - (15 - 0,8) (10,3 - 1)^3 + 10 \cdot 11,9^3 - (10 - 0,8) (11,9 - 1,2)^3 \}$$

$$= \frac{1}{3} (16\,391 - 11\,421,8 + 16\,851,6 - 11\,270,4) = \frac{1}{3} (4969,2 + 5581,2)$$

$$= \frac{1}{3} 10\,550,4 = 3516,8 \text{ cm}^4.$$

(Hierbei ist erst der untere Teil, die beiden ersten Summanden, alsdann der obere Teil die beiden letzten Glieder, in Rechnung gestellt.)

Demgemäß wird:

$$W'_1 = \frac{J_y}{e_1} = \frac{3516,8}{10,3} = 341,4 \text{ cm}^3,$$

$$W'_2 = \frac{J_y}{e_2} = \frac{3516,8}{11,9} = 295,5 \text{ cm}^3.$$

Unter Einführung des kleineren  $W$ -Wertes, also  $W'_2$ , wird:

$\sigma_o = \frac{M}{W'_2} = \frac{404\,500}{295,5} =$  der Spannung am oberen Rande  
 $= \text{rd. } 1350 \text{ kg/cm}^2$ , während  $\sigma_u$  die Spannung am unteren  
 Rande des Querschnitts sich geringer ergibt:

$$\sigma_u = \frac{404\,500}{341,4} = \text{rd. } 1180 \text{ kg/cm}^2.$$

Zur Kontrolle der Rechnung kann die Gleichung benutzt werden:

$$M = \sigma_u \frac{J_o}{e_u} + \sigma_o \frac{J_o}{e_o}.$$

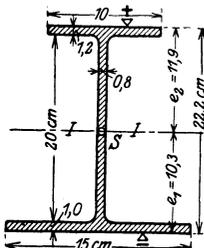


Abb. 120.

Nach der obigen Rechnung ist:

$$J_0 = \frac{4969,2}{3}; \quad J'_0 = \frac{5581,2}{3}$$

und somit:

$$M = \sigma_u \frac{J_0}{e_1} + \sigma_o \frac{J'_0}{e_2} = 1180 \cdot \frac{4969}{3 \cdot 10,3} + 1350 \frac{5581}{3 \cdot 11,9} = \text{rd. } 404\,000 \text{ kg} \cdot \text{cm};$$

es ergibt sich also gegenüber  $M = 404\,500 \text{ kg} \cdot \text{cm}$  eine genügende Übereinstimmung.

10. Eine unter  $50^\circ$  zur Wagerechten geneigte Dachpfette bestehe aus einem Stahlblech von  $16 \cdot 1 \text{ cm}^2$  und zwei ungleichschenkligen Winkelisen  $10 \cdot 6,5 \cdot 0,9$ . Die Pfette wird durch eine senkrechte Last (Eigengewicht und Schnee) von  $152 \text{ kg lfdm.}$  belastet und vom Winde in der Richtung des Pfettensteiges mit einer Last von  $121 \text{ kg lfdm.}$  beansprucht. Gesucht werden die Spannungen an den Randpunkten  $c$  und  $d$  (Abb. 121 c u. d).

Für die durch den Schwerpunkt  $S$  gelegten Achsen  $x$  und  $y$  ergibt sich (Abb. 121 a u. b):

$$J_x = \frac{1}{12} \{ 11 \cdot 16,0^3 - 9,1 \cdot 14,2^3 - 0,9 \cdot 3,0^3 - 1,9 (12,0^3 - 8,4^3) \} = 1403 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = \frac{1}{12} \{ 0,9 \cdot 21^3 + (5,6 - 1,8) 2,8^3 + 9,5 \cdot 1,0^3 \} = 702 \text{ cm}^4,$$

$$J_{xy} = 0 - 2 \{ 9,1 \cdot 0,9 \cdot 7,55 \cdot 5,95 + 6,5 \cdot 0,9 \cdot 4,75 \cdot 0,95 - 1,8 \cdot 0,9 \cdot 5,1 \cdot 0,95 \}$$

$$= \text{rd. } - 770 \text{ cm}^4 \text{ (vgl. Abb. 121 b).}$$

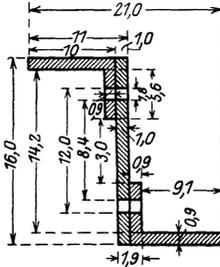


Abb. 121 a.

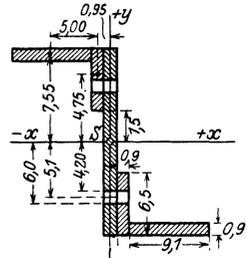


Abb. 121 b.

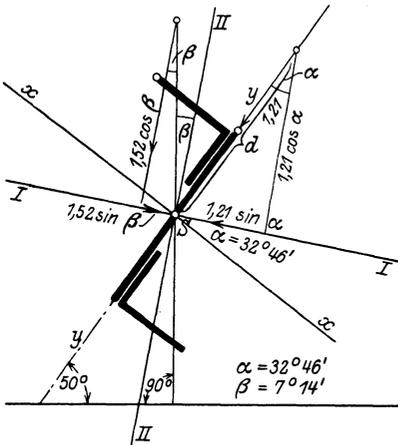


Abb. 121 c.

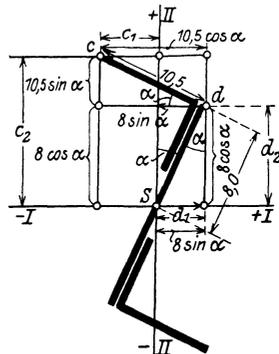


Abb. 121 d.

Hierbei ist berücksichtigt, daß  $J_{xy}$  für das Stahlblech des Querschnitts  $1,0 \cdot 16,0 = 0$  ist, da für diesen Querschnittsanteil die  $xy$ -Achsen Hauptachsen sind.

Die Hauptachsen des Gesamtquerschnitts bestimmen sich — vgl. S. 40 — aus:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = -\frac{2 \cdot 770}{702 - 1403}, & \operatorname{tg} 2\alpha &= 2,19686, \\ 2\alpha &= 65^\circ 32'; & \alpha &= 32^\circ 46'. \end{aligned}$$

Demgemäß werden die Hauptträgheitsmomente:

$$J_1 = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha = 1403 \cdot 0,814^2 + 702 \cdot 0,540^2 + 770 \cdot 0,91 = \text{rd. } 1899 \text{ cm}^4 = J_{\max},$$

$$J_2 = J_x + J_y - J_1 = 1403 + 702 - 1899 = 206 \text{ cm}^4 = J_{\min}.$$

Nummehr sind die Belastungen auf die Achse *II* bzw. *III* umzurechnen. Im Hinblick auf Abb. 121 c ergibt sich, wenn man die Belastung senkrecht *II* mit *v*, die senkrecht *III* mit *w* benennt, und zwar auf 1 cm Länge:

$$v = 1,52 \cos 7^\circ 14' + 1,21 \cos 32^\circ 46' = 2,53 \text{ kg/lfcm},$$

$$w = 1,21 \sin 32^\circ 46' - 1,52 \cos 7^\circ 14' = 0,463 \text{ kg/lfcm}.$$

Aus ihnen läßt sich das Moment, bezogen senkrecht auf die Achsen *I* und *II* (vgl. die Trägerlehre Heft 2), berechnen, wenn die Pfetten mit einer Stützweite  $l = 5,30 \text{ m} = 530 \text{ cm}$  als Träger auf 2 Stützen angesehen werden:

$$M_I = \frac{v l^2}{8} = \frac{2,53 \cdot 530^2}{8} = 88\,839 \text{ kg} \cdot \text{cm},$$

$$M_{II} = \frac{w l^2}{8} = \frac{0,463 \cdot 530^2}{8} = 16\,257 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Will man endlich die Spannungen ermitteln, welche in den äußersten Querschnittspunkten auftreten, dann sind bei genügend großem Zeichnungsmaßstab entweder die Koordinaten dieser Punkte, bezogen auf das Achsensystem *II*, *III*, abzugreifen oder rechnerisch zu bestimmen.

Es ergibt sich für den Punkt *d* (vgl. Abb. 121 d):

$$d_1 = 8 \sin \alpha = 8 \cdot \sin 32^\circ 46' = 8 \cdot 0,540 = 4,320 \text{ cm},$$

$$d_2 = 8 \cos \alpha = 8 \cdot 0,841 = 6,728 \text{ cm}$$

und demgemäß die Spannung an dieser Stelle:

$$\sigma_d = \frac{M_I \cdot d_2}{J_1} + \frac{M_{II} \cdot d_1}{J_2} = \frac{88\,839 \cdot 6,728}{1899} + \frac{16\,257 \cdot 4,320}{206} = \text{rd. } 650 \text{ kg/cm}^2.$$

In entsprechender Weise werden (Abb. 121 d) für den Punkt *c* die Koordinaten bestimmt:

$$c_1 = -(10,5 \cos 32^\circ 46' - 8 \sin 32^\circ 46') = -(10,5 \cdot 0,841 - 8 \cdot 0,540) = -4,51 \text{ cm},$$

$$c_2 = 8 \cdot \cos 32^\circ 46' + 10,5 \cdot \sin 32^\circ 46' = 8 \cdot 0,841 + 10,5 \cdot 0,540 = 12,4 \text{ cm}.$$

Demgemäß wird:

$$\sigma_c = \frac{M_I \cdot c_2}{J_1} + \frac{M_{II} \cdot c_1}{J_2} = \frac{88\,839 \cdot 12,4}{1899} - \frac{16\,257 \cdot 4,51}{206} = 288 \text{ kg/cm}^2.$$

Dieses Beispiel läßt erkennen, wie die Biegungsspannungen in einem Querschnitt zu berechnen sind, wenn der Schnitt der Kraftebene bzw. zweier Kraftebenen den Querschnitt nicht in Hauptachsen schneidet und letztere schiefwinklig zum Querschnitt liegen.

Die nachstehenden Beispiele behandeln die Ermittlung der Biegungs-  
spannungen im Rechtecksverbundquerschnitt

11a. Bei einer 2,0 m weit freiliegenden Wohnhausdecke (St.-W. = 2,10 m) von 10 cm Stärke, bewehrt auf 1 m Breite mit 10 Rundeisen von 8 mm Durchmesser (= 5,02 cm<sup>2</sup>/m), deren Mitten einen Abstand von 1,5 cm von der Plattenunterkante haben, sollen zum Zwecke der (baupolizeilichen) Nachprüfung die auftretenden größten Spannungen im Beton und im Eisen ermittelt werden.

Belastung: 590 kg/m<sup>2</sup>.

Biegemoment in Plattenmitte nach der Trägertheorie:

$$M = \frac{590 \cdot 2,1^2 \cdot 100}{8} = 32\,500 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Die Lage der Nulllinie folgt, unter Vernachlässigung der Betonspannungen in der Zugzone, aus der Beziehung:

$$x = \frac{15 \cdot 5,02}{100} \left( \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100 \cdot 8,5}{15 \cdot 5,02}} - 1 \right) = 2,9 \text{ cm}$$

und demgemäß sind die gesuchten Spannungen:

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 32\,500}{100 \cdot 2,9 (8,5 - 0,97)} = 29,8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s = \frac{32\,500}{5,02 (8,5 - 0,97)} = 860 \text{ kg/cm}^2 \text{ (vgl. S. 101).}$$

11b. Eine Deckenplatte hat 2,00 m Spannweite und 2,16 m Stützweite. Nutzlast 1500 kg/m<sup>2</sup>. Plattendicke zunächst zu 16,5 cm angenommen.

Die Decke ist darauf zu untersuchen, welche Spannungen unter der Voraussetzung entstehen, daß der Beton auch in der Zugzone Spannungen aufnehmen soll (vgl. Abb. 122).

Die Lage der Nulllinie liefert die Beziehung, wie beim homogenen Querschnitt:

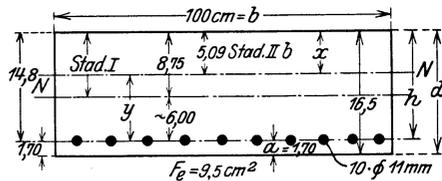


Abb. 122.

$$x = \frac{\frac{b \cdot d^2}{2} + n \cdot F_e \cdot (y + x)}{b \cdot d + n \cdot F_e}$$

$$= \frac{\frac{100 \cdot 16,5^2}{2} + 15 \cdot 9,50 \cdot 14,8}{100 \cdot 16,5 + 15 \cdot 9,50} = 8,75 \text{ cm}.$$

$$y = h - x = 14,8 - 8,75 \leq 6,0 \text{ cm},$$

$$d - x = y_0 = 16,5 - 8,75 \leq 7,8 \text{ cm},$$

$$J = \frac{100 \cdot 8,75^3}{3} + \frac{100 \cdot 7,8^3}{3} + 15 \cdot 9,50 \cdot 6,0^2,$$

$$= 22\,300 + 15\,800 + 5130 \leq 43\,200 \text{ cm}^4,$$

$$\sigma_{b,d} = \frac{M}{J} x = \frac{116\,600 \cdot 8,75}{43\,200} = - 23,6 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{b_z} = \frac{M}{J} (d - x) = \frac{116\,600 \cdot 7,8}{43\,200} = 21,0 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = n \frac{M}{J} y = 15 \cdot \frac{116\,600 \cdot 6,0}{43\,200} \approx 240 \text{ kg/cm}^2.$$

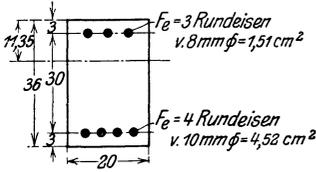


Abb. 123.

Die berechneten Betonzugspannungen halten sich unter dem zulässigen Höchstwerte.

12. Ein doppelt bewehrter Eisenbetonbalken ( $F'_e = 1,51 \text{ cm}^2$ ,  $F_e = 4,52 \text{ cm}^2$ ) habe den in Abb. 123 angegebenen Querschnitt und eine Stützweite von 4,00 m. Ihn beanspruche infolge einer gleichmäßigen Belastung von  $600 \text{ kg/m}^2$  ein Angriffsmoment von  $120\,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ . Wie groß sind die Spannungen, wenn man die Betonzugzone als statisch unwirksam betrachtet und die Schwächung des Betons durch die Druckbewehrung in Rücksicht stellt, bei  $F'_e$  also mit  $(n - 1)$  rechnet? (vgl. S. 100).

$$\begin{aligned} x &= - \frac{(n-1)F'_e + n \cdot F_e}{b} \\ &+ \sqrt{\left(\frac{(n-1) \cdot F'_e + n \cdot F_e}{b}\right)^2 + \frac{2}{b} [(n-1) \cdot F'_e \cdot h' + n \cdot F_e \cdot h]} \\ &= - \frac{14 \cdot 1,51 + 15 \cdot 4,52}{20} \\ &+ \sqrt{\left(\frac{14 \cdot 1,51 + 15 \cdot 4,52}{20}\right)^2 + \frac{2}{20} (14 \cdot 1,51 \cdot 3 + 15 \cdot 4,52 \cdot 33)} = 11,35 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Demgemäß wird, wenn man auch weiterhin die Schwächung des Betons in der Druckzone durch die Druckeisenanlage in Rechnung stellt:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{M}{\frac{b \cdot x}{2} \left(h - \frac{x}{3}\right) + (n-1) \cdot F'_e \cdot \frac{x-h'}{x} (h-h')} \quad ^1) \\ &= \frac{120\,000}{\frac{20 \cdot 11,35}{2} \cdot (33 - 3,78) + 14 \cdot 1,51 \cdot \frac{8,35}{11,35} \cdot 30} = 31,7 \text{ kg/cm}^2. \\ \sigma'_e &= -n \cdot \frac{x-h'}{x} \cdot \sigma_b = -15 \cdot \frac{8,35}{11,35} \cdot 31,7 = -350 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

(Man erkennt die stets nur unvollkommene Ausnutzung der Druckeisenanlagen, die den 15fachen Betrag der Randspannungen des Betons nicht erreichen kann.)

<sup>1)</sup> Es ist:

$$M = \sigma_b \frac{bx}{2} \left(h - \frac{x}{3}\right) + \sigma'_e F'_e (h - h'),$$

wenn man die Momentengleichung auf den Angriffspunkt von  $Z_e$  — also die Achse der Zugeisenanlage bezieht. Setzt man hierin  $\sigma_e = n \frac{x-h'}{x} \cdot \sigma_b$  ein, so ergibt sich die obige Beziehung.

$$\sigma_e = \sigma'_e \frac{h-x}{x-h'} = 350 \cdot \frac{21,65}{8,35} = 908 \text{ kg/cm}^2$$

oder nach

$$\sigma_e = n \cdot \sigma_o \cdot \frac{h-x}{x} = 15 \cdot 31,7 \cdot \frac{21,65}{11,35} = 907 \text{ kg/cm}^2.$$

Rechnet man hier mit dem Hebelarm der inneren Kräfte, so wird (vgl. S. 102) zunächst:

$$\eta_0 = \frac{\frac{b x^3}{3} + n F'_e (x-h')^2}{\frac{b x^2}{2} + n F'_e (x-h')} = \frac{\frac{20 \cdot 11,35^3}{3} + 15 \cdot 1,51 (11,35 - 3)^2}{\frac{20 \cdot 11,35^2}{2} + 15 \cdot 1,51 (11,35 - 3)} = 7,6 \text{ cm}.$$

Hieraus folgt:

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e (h-x+\eta_0)} = \frac{120000}{4,52 (33 - 11,35 + 7,6)} = \frac{120000}{4,52 \cdot 29,2} = \text{rd. } 910 \text{ kg/cm}^2,$$

also eine dem oben auf anderem Wege gefundenen Werte fast genau entsprechende Größe.

## 5. Die Schubfestigkeit.

a) Die reine Schubfestigkeit und Schubbeanspruchung.

In der allgemeinen Betrachtung über die verschiedenen Arten der Stabbeanspruchung und -Festigkeit wurde hervorgehoben, daß bei einer reinen Schubbelastung, die also ohne eine Biegungswirkung zustande kommt, zwei benachbarte Querschnitte sich zueinander parallel verschieben, sonst aber keine Formänderung ausführen und daß hier diese Verschiebung in der Richtung der angreifenden Kraft erfolgt. Geht man von der Voraussetzung aus, daß die im Querschnitt von der Größe  $F$  auftretende Schubspannung  $= \tau$  sich gleichmäßig über ihn verteilt, und bezeichnet man die äußere, in der Querschnittsebene wirkende, verschiebende Kraft mit  $Q$ , so folgt aus dem Grundsatz, daß bei Gleichgewicht die Summe der inneren Kräfte gleich der äußeren Kraft sein muß, die einfache Beziehung:

$$\tau F = Q$$

und somit:

$$\tau = \frac{Q}{F} \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{Q}{\tau};$$

im letzteren Falle wird  $\tau$  die zulässige Schubspannung des jeweilig vorliegenden Materials sein. Für Gußeisen kann diese Größe ( $\tau_{\text{zul}}$ ) zu 200, für Flußstahl zu 1000, für Nadelholz, parallel zur Faser, zu 10—12, für Eiche und Buche in derselben Richtung zu rd. 20 kg/cm<sup>2</sup> genommen werden. Bei Mauerwerk ist für dessen Schubbelastung in der Regel die Schubbeanspruchung der Mörtelfuge maßgebend, für die je nach der Härte der Baustoffe die zulässigen Werte zwischen 2—12 kg/cm<sup>2</sup> schwanken; für Beton, wie er im Verbundbau

üblich, ist  $\tau = 4,0 \text{ kg/cm}^2$  zugelassen und eine Querschnittsabänderung gefordert, wenn  $\tau$  die Grenze von  $14 \text{ kg/cm}^2$  überschreitet; bei hochwertigem Zement ist als Spannungswert  $\tau = 5,5 \text{ kg/cm}^2$  erlaubt.

### b) Die Schubbeanspruchung bei Biegungsbelastung.

Bereits auf S. 61 wurde hervorgehoben und an einem Beispiel zur Anschauung gebracht, daß bei der Verbiegung eines Stabes nicht nur parallel zu den verbiegenden lotrechten Kräften, sondern auch senkrecht zu ihnen, also parallel zur Stabachse, Schubspannungen auftreten, welche ein gegenseitiges Verschieben der kleinsten Querschnittsteilchen erstreben. Bei einem wagerecht liegenden Balken und senkrechter Belastung werden somit sowohl in seinen senkrechten Querschnitten als auch parallel zu seiner Achse Schubspannungen auftreten.

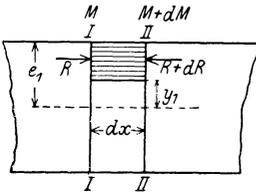


Abb. 124 a.

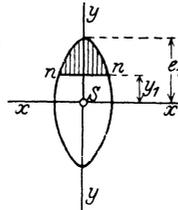


Abb. 124 b.

Mit den letzteren sollen sich zunächst die Erörterungen befassen. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Kräftebene den Querschnitt in einer Hauptachse schneidet.

Betrachtet werden zwei nahe aneinander liegende senkrechte, also in die Richtung der

Lasten fallende Querschnitte (Abb. 124 a).

Da, wie später in den Ausführungen der Trägerlehre dargelegt wird, in beiden Querschnitten in der Regel verschieden große äußere Biegemomente einwirken und ihnen auch verschieden große Spannungen in den beiden Querschnitten entsprechen, so wird hier eine Verteilung der inneren Kräfte sich einstellen, wie sie Abb. 124 a darstellt. Unter der Voraussetzung, daß die auftretende wagerechte Schubspannung für die Flächeneinheit in der ganzen Breite des Querschnittes konstant ist, daß ferner in den Querschnittsteilen der betrachteten, benachbarten Querschnitte oberhalb der Linie  $nn$  die Momente  $M$  und  $M + dM$  und hier — bei Biegungsspannungen  $= \sigma$ , die hier senkrecht zum Querschnitt verlaufen — die Summe der durch sie bedingten inneren Kräfte  $R$  bzw.  $R + dR$  ist, ergibt sich für die Grenzen  $y_1$  bzw.  $e_1$ , also für das in Abb. 124 b oberhalb von  $nn$  liegende schraffierte Querschnittsstück:

$$R = \int_{y_1}^{e_1} \sigma df \quad \text{oder, da: } \sigma = \frac{M}{J_x} y, \quad \text{so wird: } R = \int_{y_1}^{e_1} \frac{M}{J_x} y df$$

und ebenso:

$$R + dR = \int_{y_1}^{e_1} \frac{M + dM}{J_x} y df.$$

Da die beiden inneren Normalkräfte  $R$  und  $R + dR$  verschiedene Richtung haben — sie drücken im vorliegenden Fall je auf den zugehörigen Querschnitt —, so wird ihre Mittelkraft  $= dR$ :

$$dR = \int_{y_1}^{e_1} \frac{M + dM}{J_x} y df - \int_{y_1}^{e_1} \frac{M}{J_x} y df = \frac{dM}{J_x} \int_{y_1}^{e_1} y df.$$

Soll das hier in Frage stehende Balkenstück im Gleichgewichte sein, so muß die Summe der auf dieses einwirkenden wagerechten Kräfte  $= 0$  sein. Der verbleibenden Kraft  $dR$  muß somit die wagerechte Schubkraft das Gleichgewicht halten, da keine andere Kräftewirkung auftritt. Bezeichnet man die Größe der Schubkraft für die Längeneinheit des Balkens mit  $T$ , so beträgt sie für die durch die Entfernung der beiden Querschnitte gegebene Länge  $dx$ :  $T \cdot dx$ , woraus folgt:

$$T dx = dR = \frac{dM}{J_x} \int_{y_1}^{e_1} y df,$$

$$T = \frac{dM}{dx} \frac{1}{J_x} \int_{y_1}^{e_1} y df.$$

Da, wie in der Trägerlehre nachgewiesen wird,  $\frac{dM}{dx}$ , d. h. das Moment, differenziert nach  $x$ , gleich der Vertikalkraft in dem in Frage stehenden Querschnitt  $= Q$  ist, so folgt weiter:

$$T = \frac{Q}{J_x} \int_{y_1}^{e_1} y df.$$

Die Größe  $\int_{y_1}^{e_1} y df$  ist das statische Moment des Querschnittsteils oberhalb der Linie  $nn$ , bezogen auf die  $x$ -Achse  $= S_x$ . Demgemäß wird:

$$T = \frac{Q S_x}{J_x} \cdot e.$$

Da für einen und denselben Querschnitt  $Q$  und  $J_x$  konstante Werte sind, so ist  $T$  veränderlich mit  $S_x$ , und weil  $S_x$  für die wagerechte Schwerachse das Maximum erreicht, wird in ihr die Schubkraft ihren Größtwert erhalten. Für verschieden gelegene, unter sich aber gleiche Querschnitte und gleiche Abschnitte dieser ist  $T$  abhängig von  $Q$ . Da die Vertikalkraft nach den Auflagern der Balken zunimmt und hier ihren Größtwert erreicht, so wird auch  $T$  für einen Balken hier sein Maximum erhalten. Sind verschiedene Belastungszustände möglich, so wird  $T$  bei der Belastung den Größtwert aufweisen, bei der  $Q$  das Maximum bekommt.

Für den Rechtecksquerschnitt ( $h \cdot b$ ) ergibt sich für  $\int_{y_1}^{e_1} y dy f$  —  
 Abb. 125a — der Wert:

$$\int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y \cdot b dy = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right),$$

und da:

$$J_x = \frac{b h^3}{12}$$

ist:

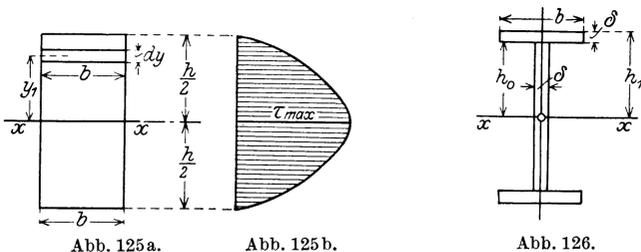
$$T = \frac{12 Q}{b h^3} \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right).$$

Der Größtwert tritt ein für  $y_1 = 0$ , d. h. für die wagerechte Schwerachse:

$$T_{\max} = \frac{12 Q}{b h^3} \frac{b}{2} \frac{h^2}{4} = \frac{3 Q}{2 h}.$$

Für den oberen und unteren Querschnittsrand ist  $T = 0$ , da hierfür  $y_1 = \frac{h}{2}$  und somit der Klammerausdruck:  $\left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) = 0$  wird. Der Verlauf erfolgt nach einer Parabel, vgl. Abb. 125 b.

Für den I-Querschnitt erlangt, da er aus dem Rechteck entwickelt



ist, die Schubkraft in halber Steghöhe ihr Maximum. Hier wird (vgl. Abb. 126):

$$S_x = b \delta \cdot \left( h_0 + \frac{\delta}{2} \right) + h_0 \delta \frac{h_0}{2},$$

so daß:

$$T = \frac{Q}{J_x} \cdot \left[ b \delta \left( h_0 + \frac{\delta}{2} \right) + h_0^2 \frac{\delta}{2} \right]$$

wird.

Besonders wichtig ist die Ermittlung der wagerechten Schubkraft für genietete Blechbalken, da bei ihnen die Nietung der angeschlossenen Gurteile sich nach der wagerechten Schubkraft richtet. Hier handelt es sich (Abb. 127) sowohl um den Anschluß der Kopfplatten



für die Querschnittsbreite =  $b$ :

$$\tau'_e b = \frac{Q \cdot y' n F'_e}{J_{nn}}$$

und somit in der Nulllinie:

$$\begin{aligned} \sum \tau = \tau_0 = \tau_{0b} + \tau'_e &= \frac{Q}{J_{nn}} \frac{x^2}{2} + \frac{Q y' n F'_e}{b \cdot J_{nn}} = \frac{Q}{J_{nn} \cdot b} \left( \frac{1}{2} x^2 b + y' n F'_e \right) \\ &= \frac{Q}{J_{nn} b} \sum S_{nn}. \end{aligned}$$

Für die untere Zugeisenlage wird im gleichen Sinne:

$$\tau_e = \frac{Q}{J_{nn} b} \cdot n y F_e \quad (\text{vgl. Abb. 128}).$$

Dieser Wert ist gleich dem vorstehend gefundenen  $\tau_0$ , denn beide unterscheiden sich nur durch die Ausdrücke:

$$\frac{1}{2} x^2 b + y' n F_e \quad \text{und} \quad n y F_e,$$

die beide unter sich gleich sind, weil sie einmal das statische Moment der nutzbaren Druckfläche, dann das der nutzbaren Zugfläche darstellen und in bezug auf  $NN$  diese Momente gleich sind. Hieraus ergibt sich die Darstellung des Verlaufes der Schubspannung in Abb. 128.

Die Gleichung

$$\tau_0 = \frac{Q \cdot n y F_e}{b \cdot J_{nn}}$$

kann man zweckmäßig umformen, wenn man in sie den Hebelarm der inneren Kräfte  $\sum D$  und  $Z_e$  einführt:  $z = (h - x + \eta_0)$ , (vgl. S. 102)

$$\tau_0 = \frac{Q \cdot n y F_e \sigma_e \cdot z}{J_{nn} \cdot b \cdot \sigma_e z} = \frac{Q \cdot n \cdot y (Z_e \cdot z)}{J_{nn} b \cdot \sigma_e \cdot z};$$

da hierin  $Z_e \cdot z =$  dem Moment der äußeren Kräfte =  $M$ , ferner

$$\sigma_e = \frac{n M}{J_{nn}} y \text{ ist (vgl. S. 101), so wird:}$$

$$\tau_0 = \frac{Q}{b \cdot z} = \frac{Q}{b (h - x + \eta_0)}.$$

Für den einfach, also nur in der Zugzone bewehrten Querschnitt ergibt sich die Schubspannung bei Biegung, wenn man in den vorstehend

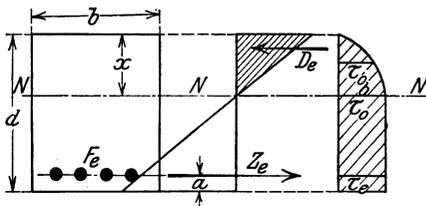


Abb. 129.

gefundenen Beziehungen  $F'_e = 0$  setzt:

$$\tau_{b_{\max}} = \tau_0 = \frac{Q x^2}{2 J_{nn}} = \frac{Q}{b \cdot z} = \frac{Q}{b \left( h - \frac{x}{3} \right)}.$$

Den Spannungsverlauf läßt Abb. 129 erkennen.

Wie vorerwähnt, wirken außer den wagerechten Schubspannungen auch noch senkrechte, d. h. bei den belasteten

Balken in der Richtung der Lasten, auf die Balkenelemente ein. Bezeichnet man die in dem einen von zwei benachbarten Querschnitten (Abb. 130 a) aufwärts wirkende Vertikalkraft mit  $Q$ , so muß in dem zweiten Querschnitt, damit Gleichgewicht herrscht, eine gleiche Kraft  $Q$ , aber nach unten gerichtet, sich einstellen. Diese Kräfte werden aufgenommen durch den senkrechten Abscherungswiderstand, welcher einem Verschieben des Balkenstückes längs der Querschnitte entgegenwirkt. Das Auftreten der hier-

durch bedingten senkrechten Schubspannungen kann auch dadurch erläutert werden, daß ohne sie bei einem kleinen Prisma im Innern des Balkens (Abb. 130 a) ein Gleichgewichtszustand nicht möglich wäre, weil die wagerechten Schub-

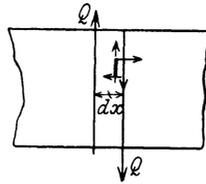


Abb. 130 a.

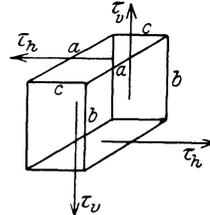


Abb. 130 b.

spannungen hier ein Kräftepaar bilden, dem durch die senkrechten erst das Gleichgewicht gehalten werden kann. Denkt man sich die wagerechten und senkrechten Schubspannungen des differential kleinen, beliebig geformten Prismas in Abb. 130 b in der Mitte der Prismaflächen angreifend, so entspricht ihnen je ein Kräftepaar:

a) bei den senkrechten Schubspannungen ( $\tau_v$ ): von  $\tau_v \cdot b \cdot c$  am Hebelarme  $= a$ ; d. h. es ist ihr Drehmoment:

$$M_1 = \tau_v \cdot a \cdot b \cdot c,$$

b) bei den wagerechten Schubspannungen, der Kraft je  $\tau_h \cdot a \cdot c$ , und dem Hebelarm  $= b$  von:

$$M_1 = \tau_h \cdot a \cdot c \cdot b.$$

Da im Zustande des Gleichgewichts sich die beiden Drehmomente ausgleichen müssen, wird:

$$M = M_1 = \tau_v \cdot a \cdot b \cdot c = \tau_h \cdot a \cdot c \cdot b,$$

d. h.

$$\tau_v = \tau_h.$$

Es ist also die an irgendeiner Stelle auf die Längeneinheit wirkende lotrechte Schubspannung gleich der an derselben Stelle auf die Längeneinheit wirkenden wagerechten Schubspannung. Demgemäß wird also auch die bei Biegung auftretende senkrechte Schubkraft:

$$V = \frac{QS_x}{J_x} \text{ 1).}$$

1) Bei dem obigen Nachweise ist die Einwirkung der Normalkräfte auf das differential kleine Prisma nicht in Rechnung gestellt und ebenso auch die Eigen-

Setzt man die an einem kleinen Würfel im Innern eines Balkens auftretenden senkrechten und wagerechten Schubspannungen zu in den Kanten dieses Würfels angreifenden Mittelkräften zusammen, die also alsdann senkrecht zur Diagonalfäche des Würfels gerichtet sind, so entstehen unter  $45^\circ$  zur Wagerechten gerichtete Kräfte, die je nach der Zusammenfassung der Schubspannungen als schiefe Druck- bzw. Zugkräfte auftreten.

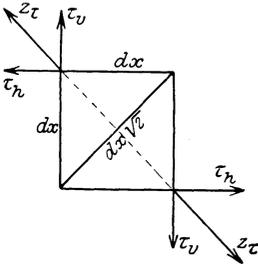


Abb. 131.

Hat (Abb. 131) der Würfel eine Kante =  $dx$ , so werden die Schubkräfte in der wagerechten bzw. senkrechten Ebene  $\tau_h dx^2$  bzw.  $\tau_v dx^2$  und ihre Mittelkraft ergibt sich zu:

$$Z_\tau = \sqrt{(\tau_h dx^2)^2 + (\tau_v dx^2)^2} = \tau dx^2 \sqrt{2},$$

da  $\tau_h = \tau_v = \tau$  ist.

Da die Diagonalfäche des Würfels

$$= dx \sqrt{2} \cdot dx = dx^2 \sqrt{2}$$

ist, so wird mithin in ihr die schiefe Spannung — die sogenannte schiefe Hauptspannung —:

$$z_\tau = \frac{Z_\tau}{F} = \frac{\tau dx^2 \sqrt{2}}{dx^2 \sqrt{2}} = \tau,$$

d. h. ebenso groß wie die Schubspannung:

$$z_\tau = \tau_h = \tau_v.$$

Diese schiefen Hauptzugspannungen spielen eine wichtige Rolle bei den Verbundkonstruktionen und werden hier, da sie selbst

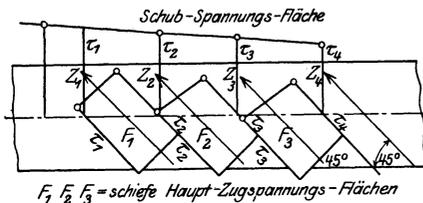


Abb. 132.

unter  $45^\circ$  nach dem Balkenaufleger zu gerichtet sind, von ebenso gerichteten besonderen Eisenlagen aufgenommen. Stellt (Abb. 132) die Fläche über der Balkenachse die Fläche der wagerechten Schubspannungen dar ( $= F_\tau$ ), so ergeben sich, unter

Wahrung des Winkels von  $45^\circ$ , die Flächen der schiefen Hauptzugspannungen in der dargestellten Weise aus ihnen. Da die Spannungen selbst gleich sind, verhalten sich die schiefen Hauptzugspannungsflächen zu den

gewichtswirkung desselben nicht berücksichtigt worden, da die hierdurch hervorgerufenen Unterschiedskräfte vernachlässigbar klein sind, namentlich für die Rechnungen, wie sie im Hochbau vorkommen.

entsprechenden Flächen der wagerechten Schubspannungen wie:

$$F:F_\tau = 1:\sqrt{2}; \quad F = \frac{F_\tau}{\sqrt{2}}.$$

Hieraus folgt das Bildungsgesetz der Flächen zur Ermittlung der schiefen Hauptzugsspannungen und damit dieser selbst (vgl. das Beispiel 14 auf S. 130).

c) Zahlenbeispiele.

1. Ein aus zwei  $\square$ -Eisen bestehender Stab hat (Abb. 133) eine Zugkraft von 37 t auf ein zwischen beide  $\square$ -Profile eingeschobenes Knotenblech zu übertragen. Zum Anschlusse sind 6 Niete vom Durchmesser = 2,0 cm verwendet. Die in ihnen auftretende Schubspannung wird gesucht.

Soll die Verbindung durch Überwindung der Schubfestigkeit der Niete zerstört werden, so müssen in jedem der 6 Niete je 2 Schubflächen (1 und 1) abgeschert werden. Beträgt  $\tau$  die gesuchte Schubbelastung des Flußstahls, aus dem die Niete hergestellt sein sollen, so ist die Schubkraft, die sie übertragen können:

$$T = 6 \cdot 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \tau = 6 \cdot 2 \cdot \frac{4 \cdot 3,14}{4} \tau = 12 \cdot 3,14 \tau = 37,68 \tau$$

Im Gleichgewichtszustand muß  $T = P$  sein, woraus folgt:

$$T = 37,68 \tau = 37,0 = P,$$

$$\tau = \frac{37,0}{37,68} = \text{rd. } 0,98 \text{ t/cm}^2 = 980 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Ein I-Träger I soll in der in Abb. 134 dargestellten Weise vermittels Nieten vom Durchmesser = 22 mm an den I-Träger II angeschlossen werden und an seiner Anschlußstelle die Kraft von 22 t übertragen. Gesucht wird die Anzahl der Niete, die bei zulässiger Schubbelastung von 1000 kg/cm<sup>2</sup> erfordert sind.

Die Zerstörung der Verbindung kann hier auf zweifache Art erfolgen: einmal kann der Träger I mit seinen Anschlußwinkeln gemeinsam durch Abschieben der Nietflächen „2“ von dem Träger II abgetrennt werden, und zum anderen kann der Träger I nach Überwindung der Scherfestigkeit der Niete I sich aus der Umklammerung durch die beiden Winkel lösen.

Im ersten Falle werden bei jedem Niet „2“ nur je eine Schubfläche belastet (einschnittige Nietung), während im zweiten Fall von jedem Niet I je 2 Scherflächen Widerstand leisten. Bezeichnet man die Anzahl der erforderlichen Schubflächen der Niete vom Durchmesser = 2,2 cm mit  $n$ , so wird:

$$n \frac{d^2 \pi \tau}{4} = n \frac{2,2^2 \pi \tau}{4} = n \frac{2,2^2 \cdot 1000}{4} \pi = P = 22 \text{ t} = 22000 \text{ kg}.$$

Hieraus folgt:

$$n = \frac{22000 \cdot 4}{1000 \cdot 2,2^2 \cdot 3,14} = \frac{88}{4,84 \cdot 3,14} = \frac{88}{15,20} = \text{rd. } 6,$$

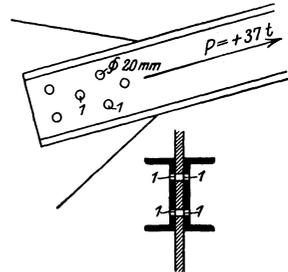


Abb. 133.

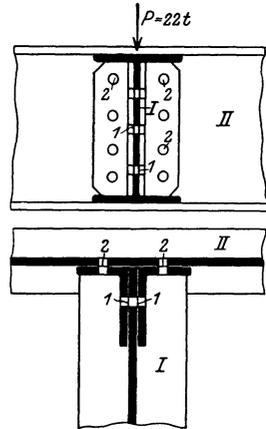


Abb. 134.

d. h. es sind zum mindesten 6 Niete „2“ und 3 Niete „1“ notwendig. Gesetzt sind 8 Niete „2“ und 3 Niete „1“, vgl. Abb. 134.

3. Auf einen Balken soll (Abb. 135) vermittels einer in Gabelform ausgeschmiedeten Rundeisenzugstange eine Kraft von 5000 kg übertragen werden. Gesucht wird der Durchmesser des zylindrischen Anschlußbolzens und sein Abstand  $a$  vom dem oberen Rande der Ausschmiedung.

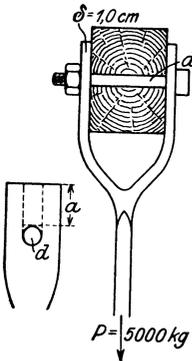


Abb. 135.

Auch hier werden vom Bolzen mit dem Durchmesser =  $d$  2 Schubflächen belastet.

$$\frac{2 \cdot d^2 \pi}{4} \tau = P = 5000 \text{ kg}.$$

Für  $\tau = 800 \text{ kg/cm}^2$  wird:

$$d^2 = \frac{5000 \cdot 2}{800 \cdot 3,14}; \quad d = \sqrt{\frac{10000}{800 \cdot 3,14}} = \text{rd. } 2,0 \text{ cm}.$$

Damit ein Herausreißen des Bolzens aus dem seitlichen Lappen der Gabel durch Abschieben verhindert wird, muß der Abstand  $a$  an die folgende Bedingung geknüpft sein:

$$2 a \cdot \delta \cdot \tau_1 \geq \frac{P}{2},$$

da auf jede Hälfte der Gabel am Anschlusse an den Bolzen die Kraft  $= \frac{P}{2}$  einwirkt. Läßt man für  $\tau$  den Wert von  $600 \text{ kg/cm}^2$  (einen verhältnismäßig geringen Wert im Hinblick auf die Schmiedearbeit der Verbindung) zu, so wird:

$$a \geq \frac{2500}{2 \cdot 1,0 \cdot 600} \geq \frac{2500}{1200} \geq \text{rd. } 2,1 \text{ cm}.$$

Gewählt wird zweckmäßig 3,0 cm.

4. Die Strebe in Abb. 136, unter  $30^\circ$  zur Wagerechten, also auch zur Balkenachse, geneigt, hat auf den Balken eine Kraft  $P = 12000 \text{ kg}$  zu übertragen. Die Holzverbindung wird in der dargestellten Weise durch einen Zapfen bewirkt. Gesucht wird der Abstand  $s$  der Strebe vom Balkenende im Hinblick auf eine schub-sichere Verbindung.

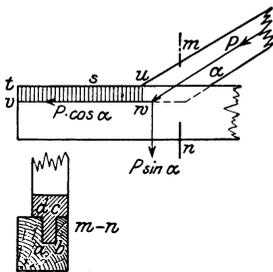


Abb. 136.

Die unter  $30^\circ$  gerichtete Kraft  $P = 12000 \text{ kg}$  kann man sich in zwei Seitenkräfte zerlegt denken, deren eine  $P \sin \alpha$  senkrecht auf die Verbindungsstelle einwirkt, hier also einen Druck und durch diesen eine Reibungskraft hervorruft, während die andere  $P \cos \alpha$ , wagerecht gerichtet, sich bemüht, das Holzprisma am Balkenende  $vwut$ , das vor dem Zapfen liegt, herauszuschieben. Hier kommen demgemäß als widerstehende Schubflächen in Frage:  $(da + ab + bc) \cdot s$ .

Bezeichnet man die Reibungszahl zwischen Hirnholz und Langholz mit  $f$ , so wird die Reibungskraft infolge der Kraft  $P \sin \alpha$ :

$$= f P \sin \alpha = 0,3 P \sin \alpha,$$

und somit steht eine Verschiebung so lange nicht zu befürchten, als:  $s(da + ab + bc) \tau + f P \sin \alpha > P \cos \alpha >$  als die verschiebende Kraft ist.

Läßt man für  $\tau$  die zulässige Belastung von  $10 \text{ kg/cm}^2$  zu, so wird:

$$s(da + ab + bc) 10 + 0,3 P \sin \alpha > P \cos \alpha.$$

Ist im vorliegenden Falle:  $da = bc = 8 \text{ cm}$ ,  $ab = 6 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\sin \alpha = 0,500$ ,  $\cos \alpha = 0,866$ . so ergibt sich für:

$$s > \frac{12000 \cdot 0,866 - 0,3 \cdot 12000 \cdot 0,5}{(6 + 2 \cdot 8) \cdot 10} > \frac{12000 \cdot 0,716}{220} > \text{rd. } 40 \text{ cm.}$$

4. Ähnlich ist die ebenfalls durch eine schiefe Druckkraft =  $P$  belastete Holzverbindung in Abb. 137 — Doppelversatzung und Befestigungsbolzen — zu berechnen. Ohne Berücksichtigung der Reibung sind hier die auf Schub widerstehenden Flächen:  $3 \cdot s \cdot \delta + 2 \cdot s \cdot c$ , wobei die Teilnahme des kleinen Holzstückes  $\alpha$  vernachlässigt ist. Auch genügt es, für den Bolzen als Abscherungsquerschnitt einen Kreis einzuführen, zumal diese Annahme gegenüber der tatsächlich in Frage

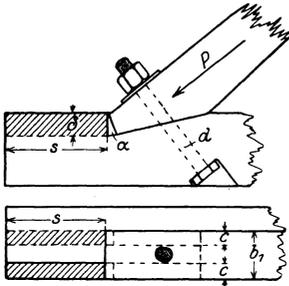


Abb. 137.

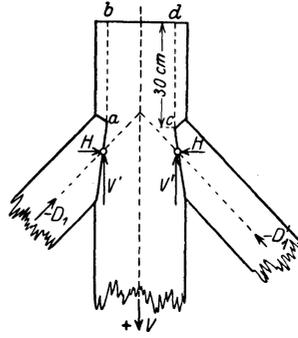


Abb. 138.

kommenden Ellipsenform des Schubquerschnitts eine vergrößerte Sicherheit in sich schließt. Demgemäß muß hier sein:

$$s(3\delta + 2c)\tau_1 + \frac{d^2 \pi \tau_2}{4} > P \cos \alpha.$$

Hieraus folgt z. B.:

$$d^2 > \frac{4}{\tau_2 \pi} \{ P \cos \alpha - \tau_1 s(3\delta + 2c) \}.$$

Ist z. B.  $P = 15000 \text{ kg}$ , der Neigungswinkel der Strebe =  $24^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0,913$ ,  $\tau_2 = 800 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\tau_1 = 10 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\delta = 5 \text{ cm}$ ,  $c = 7,0 \text{ cm}$ ,  $s = 20 \text{ cm}$ , so wird:

$$d^2 > \frac{4}{800 \cdot 3,14} \{ 15000 \cdot 0,913 - 10 \cdot 20(3 \cdot 5 + 2 \cdot 7) \} = \text{rd. } 13 \text{ cm}^2, \quad d \underline{\geq} 3,6 \text{ cm.}$$

5. Die in Abb. 138 dargestellte Verbindung zwischen einer Hängesäule und den beiden an sie anschließenden Druckstreben ist für die dort angegebenen Kräfte schubsicher zu gestalten.

Die Druckkräfte  $D_1 = D_1'$  sind senkrecht zur Hängesäule und parallel zu ihr in je zwei Seitenkräfte zerlegt, von denen die letzteren die Größe von je  $3000 \text{ kg}$  erhalten mögen. Bei einer zulässigen Schubbelastung des Holzes von  $10 \text{ kg/cm}^2$  und bündiger Lage der Streben und der Säule, also der Entgegenwirkung von Schubflächen nur in der Ebene  $ab$  bzw.  $cd$ , ergibt sich deren Größe bei einer Dicke des Holzes =  $\delta$  zu:

$$\delta \text{ cm} \cdot ab \text{ cm} \cdot 10 \text{ kg/cm}^2 = 3000 \text{ kg,}$$

$$\delta \cdot ab = 300 \text{ cm}^2.$$

Ist  $\delta = 15$  cm, so wird  $ab = \frac{300}{15} = 20$  cm, Macht man aus Konstruktionsgründen  $ab = 30$  cm, so wird bei  $\delta = 15$  cm die einem Abschieben widerstrebende Kraft:

$$T = 30 \cdot 15 \cdot 10 = 4500 \text{ kg} > 3000 \text{ kg.}$$

6. Ein Holz 14/16 wird durch eine Kraft  $P = 10000$  kg auf Zug belastet und soll gestoßen werden. Zur Kraftüberleitung an dieser Stelle dienen Flacheisen, durch eiserne Außenlaschen und Bolzen gehalten, die je 2 cm in das Holz ein-

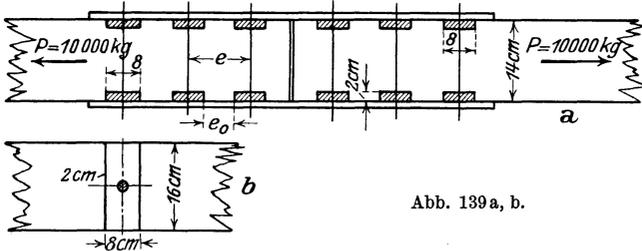


Abb. 139 a, b.

greifen. Dieses wird durch diese Einlagen auf Druck  $\perp$  Faser beansprucht, kann also mit  $60 \text{ kg/cm}^2$  gedrückt werden. Ein jedes Flacheisen kann somit eine Druckkraft aushalten von  $D = 2 \cdot 16 \cdot 60 = 1920$  kg, zwei gegenüberstehende Flacheisen also von  $2 \cdot 1920 = 3840$  kg. Demgemäß sind an jeder Seite des Stoßes

$$\frac{P}{3840} = \frac{10000}{3840} = \text{rd. } 3 \text{ Flacheisenpaare}$$

notwendig (vgl. Abb. 139 a, b).

Die Breite der Flacheisen beträgt 8 cm. Beträgt die Schubspannung parallel zur Holzfaser  $10 \text{ kg/cm}^2$ , so überträgt sich auf die freie Länge  $= e_0$  zwischen den Flacheisen eine Kraft  $= e_0 \cdot 16 \cdot 10$  kg. Diese Kraft muß im Gleichgewicht sein mit  $D = 1920$ , der Druckkraft, die auf das einzelne Flacheisen vom Holz übertragen wird. Aus der hierdurch gegebenen Beziehung:

$$e_0 \cdot 16 \cdot 10 = 1920 \text{ folgt } e_0 = \frac{1920}{160} = 12 \text{ cm}$$

und somit der gegenseitige Abstand der Flacheisen zu  $12 + 8 = 20$  cm  $= e$  (Abb. 139 a, b). Erhalten die Befestigungsbolzen je 19 mm Durchmesser mit  $F_e = 2,84 \text{ cm}^2$ , so wird die Schubspannung in ihnen:

$$\tau_0 = \frac{1290}{2,84} = 674 \text{ kg/cm}^2.$$

7. Eine Holzverbindung wird gemäß Abb.140 durch Ringdübel bewirkt. Bei der Zerstörung der Verbindung muß an 4 Querschnittsflächen (1, 2, 3, 4 in Abb. 140) das Holz in einer, durch den Ringdübel gegebenen Kreisfläche abgeschert werden. Demgemäß trägt ein Ringdübelpaar auf Schub:

$$T = 4 \frac{D^2}{4} \tau = D^2 \tau.$$

Ist beispielsweise  $D = 20$  cm,  $\tau = 10 \text{ kg/cm}^2$ , so wird:  $T \leq 20^2 \cdot 3,14 \cdot 10 \leq 12560 \text{ kg} = 12,56 \text{ t}$ . Für eine Zugkraft  $P = 18 \text{ t}$  werden somit 2 Ringdübel-paare erfordert.

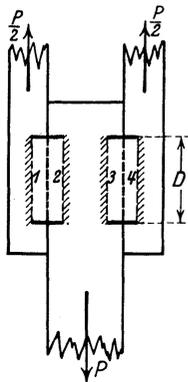


Abb. 140.

8. Ein verdübelter Balken nach Abb. 141 besteht aus 2 ohne Zwischenraum durch Dübel und Bolzen miteinander verbundenen Balken von je  $24 \cdot 26 \text{ cm}^2$  Querschnitt. Die größte Querkraft (Auflagerkraft)  $Q_{\max}$  beträgt:  $2,3 \text{ t} = 2300 \text{ kg}$ . In der Mittelfuge ergibt sich nach S. 118:

$$T = \frac{3}{2} \frac{Q}{h} = \frac{3}{2} \frac{2300}{48} = \tau \cdot b = \tau \cdot 26.$$

Demgemäß wird:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{2300}{48 \cdot 20} = 2,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Wählt man die Dübelentfernung  $= a = 50 \text{ cm}$ , die Dübel selbst mit einer Eingriffstiefe  $= 2,5 = \delta$  und einer Länge  $m = 12,5 \text{ cm} = 5 \delta$ , so ergibt sich die Größe der Schubkraft  $= T_a$  zwischen zwei Dübeln:  $T_a = \tau \cdot a \cdot b = 2,5 \cdot 50 \cdot 26 = 3250 \text{ kg}$  und hieraus der Zahndruck auf den Dübel:

$$k_a = \frac{T_a}{b \cdot \delta} = \frac{3250}{26 \cdot 2,5} = 50 \text{ kg/cm}^2$$

(noch erlaubt) und die Schubspannung im Dübel selbst:

$$\tau_0 = \frac{T_a}{b \cdot m} = \frac{3250}{26 \cdot 12,5} = 10 \text{ kg/cm}^2.$$

9. Für den in Abb. 127 (S. 119) dargestellten Blechbalken ist  $Q_{\max} = 16600 \text{ kg}$ . Die anzuschließenden Kopfplatten haben Abmessungen von  $b = 20$  und  $\delta = 1 \text{ cm}$ . Ihre Niete sind mit  $2,0 \text{ cm}$  ausgeführt und haben einen gegenseitigen Abstand  $= e$  von  $20 \text{ cm}$ . Der  $50 \text{ cm}$  hohe Balken hat ein  $J_x = 55300 \text{ cm}^4$ . Gesucht wird die Schubkraft, welche diese Niete aufnehmen müssen. Es ist (vgl. S. 119):

$$T = \frac{Q}{J_x} S_x e.$$

Da für den Anschluß der Kopfplatten  $S_x = 20 \cdot 1 (25 - 0,5) = 490 \text{ cm}^3$  ist, so wird:

$$T = \frac{16600 \text{ kg} \cdot 490 \text{ cm}^3}{55300 \text{ cm}^4} \cdot 20 \text{ cm} = \text{rd. } 2922 \text{ kg}.$$

Es haben mithin je 2 Niete eine Schubbeanspruchung auszuhalten von:

$$2f\tau = \frac{2d^2 \pi \tau}{4} = \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 3,14 \tau}{4} = 6,28 \tau = T,$$

$$\tau = \frac{2922}{6,28} = \text{rd. } 470 \text{ kg/cm}^2.$$

9b. In gleicher Weise ist der Anschluß der Winkeleisen und der Kopfplatten an das Stehblech zu berechnen. Hier sind die Abstände der  $2,4 \text{ cm}$  starken Niete ebenfalls zu  $20 \text{ cm}$  bemessen. Für  $S_x$  ergibt sich (vgl. Abb. 127):

$$S_x = 20 \cdot 1 (25 - 0,5) + 2 \cdot 15 \cdot (25 - 1 - 2,34) = 1139 \text{ cm}^3.$$

$$T = \frac{16600 \cdot 1139}{55300} 20 = \text{rd. } 6800 \text{ kg}.$$

Demgemäß wird die Schubbelastung der hier verwendeten Niete:

$$\tau = \frac{T}{\frac{2d^2 \pi}{4}} = \frac{6800}{2 \cdot 4,52} = 750 \text{ kg/cm}^2.$$

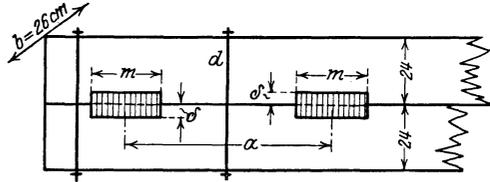


Abb. 141.

10. Bei einer der auf S. 86 auf Knicken nachgerechneten Stütze ähnlichen Säule, gebildet am 2  $\square$ -Eisen Norm.-Prf. Nr. 20 mit einem lichten Abstände von

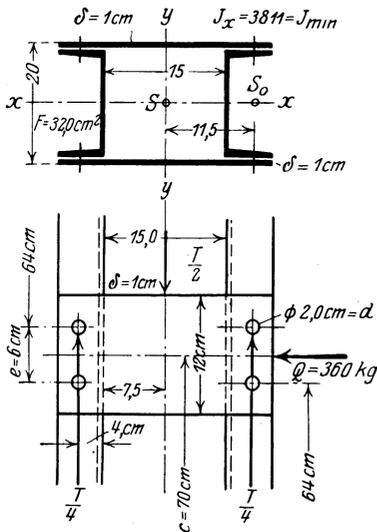


Abb. 142.

15 cm soll die schubsichere Verbindung beider getrennter Querschnittsteile durch je zwei Flacheisenbleche (Schnallen oder Bindebleche genannt) von 1 cm Stärke in je 70 cm Entfernung bewirkt werden (Abb. 142). Als beanspruchende Querkraft ist nach der in Frage kommenden Bestimmung 20 vH der größten, hier 18 t = 18000 kg betragenden Achslast in Rechnung zu stellen, d. h.

$$Q = \frac{2}{100} 18000 = 360 \text{ kg.}$$

Hieraus ergibt sich die wagerechte Schubkraft:

$$T = \frac{Q \cdot S_x}{J_x} c;$$

$$S_x = F \cdot \frac{h}{2} = 32 \cdot 11,5 = 368 \text{ cm}^3.$$

$$T = \frac{360 \cdot 368 \cdot 70}{3811} = \text{rd. } 2580 \text{ kg.}$$

Diese Schubkraft  $T$  wird an jeder Verbindungsstelle durch 2 Bindebleche, je eines an den Außenseiten der Stütze, aufgenommen; mithin erhält ein jedes Bindeblech eine Kraft  $= \frac{T}{2} = 1290 = \text{rd. } 1300 \text{ kg}$ . Diese sucht das Bindeblech zu verbiegen bzw. die Nietung (2 Niete von 2 cm  $\varnothing$  jederseits) abzureißen. Die in dem Bindebleche und seiner Mittelfuge auftretende Biegungsspannung folgt aus:

$$\sigma = \frac{M}{W}; \quad M = \frac{1300 \cdot 11,5}{2} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2;$$

$$W = \frac{1 \cdot 12,0^2}{6}; \quad \sigma = \frac{1300 \cdot 11,5 \cdot 6}{12,0^2 \cdot 2} = \text{rd. } 310 \text{ kg/cm}^2.$$

Jede Nietverbindung hat bei einem Nietabstand von 6 cm ein

$$W = \text{rd. } \frac{d^2 \pi}{4} \cdot 6 = \frac{2^2 \cdot 3,14}{4} \cdot 6 = 18,84 \text{ cm}^2$$

1) Hier ist das Bindeblech als einfacher Träger gerechnet, obwohl es beiderseits je mit 2 Nieten gehalten wird, eine Drehung an seinem Anschlußpunkte also nicht möglich ist. Nach Heft 2 ist bei einer Einzellast  $= P$  in Mitte des einfachen Trägers das Moment in Trägermitte  $M = \frac{Pl}{4}$ , wenn  $l$  die Stützweite

ist. Hier ist:  $P = \frac{T}{2} \cong 1300 \text{ kg}$ ;  $l = 15 + 8 = 23 \text{ cm}$  und somit:

$$M = \frac{1300 \cdot 23}{4} = \frac{1300 \cdot 11,5}{2} \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

2) Das Trägheitsmoment der hier vorliegenden Nietverbindung aus 2 Nieten ist, wenn man das Eigentragheitsmoment der Nietquerschnitte  $= J_0$  vernachlässigt:  $J = 2 \left( J_0 + F \left( \frac{c}{2} \right)^2 \right) = \frac{F \cdot c^2}{2}$ ;

und somit wird für die Biegungsbelastung:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{1300 \cdot 11,5}{2 \cdot 18,84} = \text{rd. } 400 \text{ kg/cm}^2.$$

11. Ein Maueranker hat eine Zugkraft  $H = 3600 \text{ kg}$  auf eine Mauer ( $\sigma_d = 7 \text{ kg/cm}^2$ ) von 51 cm Stärke zu übertragen. Es ist zu untersuchen, ob die Ankerplatte mit  $F = \frac{3600}{7} = 515 \text{ cm}^2 = 13 \cdot 38 \text{ cm}^2 = a \cdot b \text{ cm}^2$  die Mauer nicht ungünstig auf Schub belastet.

Der Umfang der Platte beträgt  $2a + 2b = 26 + 76 = 102 \text{ cm}$ ; mithin ist die Schubspannung an den Seitenflächen der Mauerprismas, das herausgeschert werden müßte,  $= \tau$ :

$$\tau = \frac{3600}{102 \cdot 51} = \frac{3600}{5200} \leq 0,7 \text{ kg/cm}^2,$$

ein durchaus erlaubter Wert.

12. Eine eiserne Stütze in  $\Gamma$ -Form sei in der aus Abb. 143 ersichtlichen Art fest in ein Betonfundament eingespannt; sie sei auf Biegung belastet durch ein Moment  $M$ , welches im Sinne des Uhrzeigers drehend den Säulenfuß im oberen Teil gegen die rechte Betonwandung, im unteren gegen die linke Seite preßt. Hierdurch entstehen zwei Druckkräfte je  $= D$ , die man unter Annahme einer geradlinig verlaufenden Spannungskurve aus der Beziehung ableiten kann (vgl. Abb. 143):

$$M = D \cdot \frac{2}{3} e = \frac{\sigma_{\max}}{2} \frac{e}{2} d \cdot \frac{2}{3} e,$$

wenn man die Kraft  $D$  aus dem Spannungsdreieck der Abbildung ausdrückt und die Breite der Stütze, welche den Druck aufnimmt, bzw. äußert,  $= d$  ist (Abb. 143 b). Aus dieser Gleichung kann man bei gegebenem  $M$  entweder  $e$  oder  $\sigma_{\max}$  (zur Kontrolle) ableiten. Endlich wird noch zu prüfen sein, ob durch den Druck am

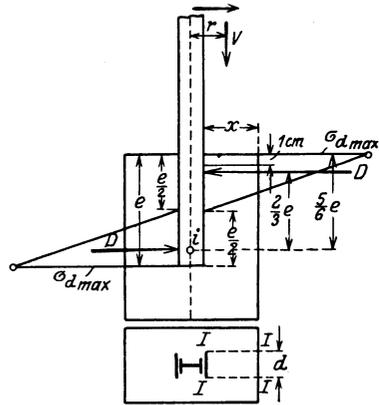


Abb. 143.

oberen oder unteren Einspannungsende der Stütze nicht eine Herausschiebung von Beton eintritt, also die Größe des Außenmaßes  $x$  einer Nachrechnung zu unterziehen sein. Rechnet man hier mit einem Prisma von 1 cm Höhe so ist:

$$\sigma_{\max} \cdot 1 \cdot d = 2x \cdot 1\tau_b + xd\tau_b = x(2\tau_b + d\tau_b).$$

wenn  $e$  den Abstand der Mitte der beiden Niete darstellt; hieraus folgt angenähert:

$$W = \frac{F \cdot e^2}{2 \cdot e/2} \leq F \cdot e,$$

wobei also  $\frac{e}{2}$  (genauer  $\frac{e+d}{2}$ ) als äußerster Randabstand eingeführt ist. Im vorliegenden Falle ist demgemäß:

$$W = \frac{2^2 \cdot 3,14}{4} \cdot 6 = 18,84 \text{ cm}^3.$$

Wird  $\sigma_{\max} = 40 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\tau_b = 4 \text{ kg/cm}^2$ , so wird

$$x = \frac{40 d}{8 + 4 d}.$$

Die nachfolgenden Beispiele behandeln die Ermittlung der Schubspannungen bei rechteckigen Verbundquerschnitten.

13a. Bei der in Beispiel 11a S. 113 durchgerechneten Eisenbetondecke sind die Schubspannungen nachzuweisen.

Es ergibt sich die größte Querkraft = der Auflagerkraft = der halben Lastsumme:  $Q_{\max} = \frac{590 \cdot 2,10}{2} = 620 \text{ kg}$ . Hieraus folgt:  $\tau = \frac{Q}{b \left( h - \frac{x}{3} \right)}$  und da

$x$  zu 2,9 cm (S. 113) ermittelt wurde, für  $b = 100 \text{ cm}$ :

$$\tau = \frac{620}{100 \left( 8,5 - \frac{2,9}{3} \right)} = 0,85 \text{ kg/cm}^2,$$

also sehr gering.

13b. In gleicher Art sind die Schubspannungen bei dem in Abb. 123 auf S. 114 behandelten doppelt bewehrten Querschnitte zu berechnen. Hier war gefunden  $\eta_0 = 7,6 \text{ cm}$   $x = 11,35 \text{ cm}$ ; ferner ist  $Q_{\max}$  = der Auflagerkraft und = der halben Gesamtlast

$$= \frac{4,00 \cdot 600}{2} = 1200 \text{ kg}.$$

$$\tau = \frac{Q}{b \cdot z} = \frac{Q}{b (h - x + \eta_0)} = \frac{1200}{20 \cdot (33 - 11,35 + 7,6)} = \frac{1200}{20 \cdot 29,25} \cong 2,05 \text{ kg/cm}^2.$$

In beiden Fällen sind keine besonderen Vorkehrungen zur Aufnahme der Schubspannungen zu treffen, da sie den für Beton erlaubten Wert von  $4 \text{ kg/cm}^2$  bei weitem nicht erreichen.

14. Ein Verbundbalken von rechteckigem Querschnitt und einer Breite = 40 cm habe am Auflager eine wagerechte Schubspannung von  $12,5 \text{ kg/cm}^2$ , und bei geradlinigem Spannungsverlauf in

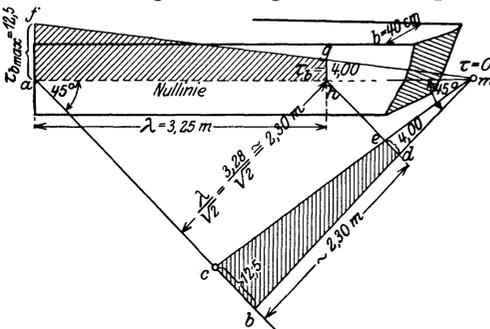


Abb. 144.

Entfernung von 3,25 m von hier von  $4,0 \text{ kg/cm}^2$ , vgl. Abb. 144. Die hierzu gehörende Fläche der schiefen Hauptzugspannungen ist zu konstruieren und die gesamte schiefe Hauptzugspannkraft zu berechnen.

Da, wie auf S. 123 nachgewiesen, die Fläche der schiefen Hauptzugspannungen sich zur Fläche der wagerechten Schubspannungen wie  $1 : \sqrt{2}$  verhält, die schiefen Hauptzugspannungen aber gleich den entsprechenden Schubspannungen sind, so ergibt sich die zeichnerische Ermittlung der Flächen der schiefen Hauptzugspannungen dadurch, daß man, von der Nulllinie des Balkens ausgehend, in der die Größtwerte der Schubspannungen auftreten, je 2 Gerade unter  $45^\circ$  durch  $a$  und  $m$  (für  $\tau_b = 0$ ) zieht:  $ab$  und  $mb$ , ferner den zur Spannung  $\tau_b = 4,0 \text{ kg/cm}^2$  ge-

spannungen aber gleich den entsprechenden Schubspannungen sind, so ergibt sich die zeichnerische Ermittlung der Flächen der schiefen Hauptzugspannungen dadurch, daß man, von der Nulllinie des Balkens ausgehend, in der die Größtwerte der Schubspannungen auftreten, je 2 Gerade unter  $45^\circ$  durch  $a$  und  $m$  (für  $\tau_b = 0$ ) zieht:  $ab$  und  $mb$ , ferner den zur Spannung  $\tau_b = 4,0 \text{ kg/cm}^2$  ge-

hörenden Punkt  $d$  auf  $mb$  bestimmt und nunmehr in  $b$  und  $d$  die Schubspannung  $\tau_{\max} = 12,5$  bzw.  $\tau_s = 4,0$  kg/cm<sup>2</sup> aufträgt und ihre Endpunkte geradlinig durch die Linie  $ce$  verbindet. Alsdann stellt die Fläche  $bced$  die Fläche der schiefen Hauptzugspannungen dar, denn es ist:

$$\text{Fl. } bced = F_z = \frac{bc + ed}{2} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{2}},$$

während die Fläche der Schubspannungen:

$$\text{Fl. } afgh = F_\tau = \frac{af + hg}{2} \cdot \lambda = \frac{bc + ed}{2} \cdot \lambda$$

ist. Daraus folgt:

$$\frac{F_\tau}{F_z} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

was zu beweisen war.

Die gesamte schiefe, im Verbundbau von unter 45° gerichtetem Eisen aufzunehmende Zugkraft ist mithin:

$$Z_\tau = \frac{bc + ed}{2} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot b = \frac{12,5 + 4,0}{2} \cdot 230 \cdot 40 = 8,25 \cdot 9200 = 75900 \text{ kg.}$$

Werden zur Aufnahme dieser Kräfte Rundeisen von je 26 mm Durchmesser mit je  $f_s = 5,31$  cm<sup>2</sup> verwendet, so ist ihre Anzahl bei einer zulässigen Spannung von 1200 kg/cm<sup>2</sup>:

$$n = \frac{75900}{1200 \cdot 5,31} = \text{rd. } 12.$$

## 6. Die zusammengesetzte Festigkeit.

### a) Allgemeine Betrachtungen über die zusammengesetzte Wirkung von Normal- und Biegungsbelastung.

Für die Berechnungen des Hochbaues kommt im besonderen die Vereinigung von Normal- und Biegungsstressspannungen, also die gleichzeitige Inanspruchnahme der Querschnitts durch eine mittig wirkende Normalkraft und ein Biegungsmoment bzw. die außermittige Belastung durch eine Normalkraft in Frage. Eine solche zusammengesetzte Beanspruchung kann somit — bei Berücksichtigung üblicher Belastungsfälle — entweder entstehen, wenn ein in der Achse durch eine Längskraft belasteter Stab durch eine zur Achse (in der Regel) senkrecht gerichtete Kraft verbogen wird, oder sie kann durch eine senkrecht zum Querschnitt liegende, außermittig angreifende Kraft bedingt sein. In beiden Belastungsfällen ist die Beanspruchungsart die gleiche, da auch — wie bereits auf S. 62 hervorgehoben wurde — die Wirkung jeder exzentrisch zum Querschnitt gerichteten senkrechten Kraft ohne weiteres durch die einer mittig wirkenden Kraft und eines verbiegenden Momentes ersetzt werden kann. Bei der Ermittlung der auftretenden Spannungen wird zu unter-

scheiden sein, ob die Kräfteebene den Querschnitt in einer Hauptachse oder schiefwinklig schneidet; in letzterem Fall, ob ihre Schnittlinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht oder außerhalb dieses zu liegen kommt. Ferner wird zu trennen sein, ob der Querschnitt einheitlich, d. h. nur auf Druck oder nur auf Zug bzw. zugleich auf Druck und Zug durch die zusammengesetzte Beanspruchung belastet wird, und ob im letzteren Fall sein Baustoff geeignet ist, beide Arten von Spannungen oder nur eine aufzunehmen. In letzterem Falle wird es sich bei den Hochbaukonstruktionen vorwiegend um Mauerkörper handeln, die zwar auf Druck erhebliche Lasten zu tragen vermögen, gegen Zugwirkung aber weniger sicher sind und daher oft nach dieser Richtung hin nicht belastet werden dürfen. In gleichem Sinne darf auch eine Erdschicht nur gedrückt werden. Da ihre Kohäsion als Sicherheit nicht in Rechnung gestellt werden darf, kann bei ihr eine Aufnahme von Zugkräften nicht in Frage kommen.

Endlich wird hier die Spannungsermittlung für außermittig auf Druck belastete Stäbe, die einer Knickgefahr ausgesetzt sind, zu behandeln sein.

b) Schiefwinklige Querschnittsbelastung und die Reibung in Querschnitten.

Wirkt auf einen Querschnitt die ihn beanspruchende Kraft ( $P$ ) (bei exzentrischem oder zentralem Angriffe) schiefwinklig ein, so ist sie (Abb. 145) in eine senkrecht zum Querschnitte angreifende Kraft ( $N$ ) und in eine in seiner Ebene wirksame ( $H$ ) zu zerlegen. Letztere belastet alsdann den Querschnitt auf Schub und kann so lange unberücksichtigt bleiben, als die Gefahr eines Gleitens der Querschnitte aufeinander ausgeschlossen ist. Diese Gleitung wird durch den Reibungswiderstand der einzelnen Querschnitte verhindert, der eine Folge der Rauheit der Querschnittsoberflächen und in Verbindung hiermit eine Funktion der auf ihr lastenden Normalkraft ist.

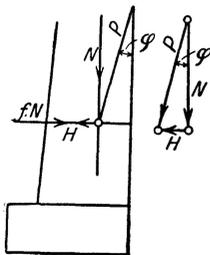


Abb. 145.

Den einzelnen Baustoffen ist eine verschieden große gleitende Reibung eigen, die neben ihrer Art in erster Linie von der Gestaltung und Bearbeitung der Oberflächen abhängt. Diese spezifische Reibungsgröße, die Reibungsziffer ( $f$ ), ist für die verschiedenen Baustoffe durch Versuche ermittelt. In der Zusammenstellung in Anm.<sup>1)</sup> sind

<sup>1)</sup> Es ist für die Berührung von:

	$\varphi$	$f$
Stein auf Stein, Mauerwerk auf Mauerwerk, Beton usw. . . . .	35°	0,70
Mauerwerk auf trockenem Baugrund . . . . .	33°	0,65
Mauerwerk auf feuchtem Baugrund. . . . .	19° 20'	0,35
Holz auf Stein . . . . .	33°	0,65

die Größen  $f$  für die wichtigsten, gleichartigen oder verschiedenen, sich berührenden Baustoffe gegeben.

Ist  $N$  die Normalkraft, so ist bei einer Reibungszahl  $= f$  der Reibungswiderstand:  $N \cdot f$ , und solange  $N \cdot f > H$  ist, steht eine Gleitung nicht zu befürchten, da der Reibungswiderstand stets einer Bewegung entgegenwirkt (Abb. 145).

Führt man hier für ein Verhältnis  $\frac{H_0}{N_0}$ , bei dem gerade noch der Gleichgewichtszustand vorhanden ist, aber ein Gleiten nahe bevorsteht, die Winkelfunktion  $\operatorname{tg} \varphi$  ein, so wird  $\operatorname{tg} \varphi = f$ ;  $\varphi$  führt den Namen des Reibungswinkels. Auch dieser darf also nicht überschritten werden, wenn eine Gleichgewichtsstörung vermieden werden soll.

### c) Die aus Biegung und Normalbelastung zusammengesetzten Spannungen und die Nulllinie.

Ist die Wirkung der Seitenkraft in der Ebene des Querschnitts als nicht gefährlich nachgewiesen, oder war die Kraft von vornherein normal, so sind die durch diese und das Moment hervorgerufenen Biegungsspannungen zu untersuchen. Sie bilden in fast allen praktischen Fällen die gefährliche Belastungsart des Querschnittes und können je nach den Größen und dem Verhältnis von Normalkraft und Moment als gefährliche Druckspannung oder Zugspannung am Querschnittsrande auftreten.

Ist für einen Querschnitt das durch die außermittig wirkende Normalkraft  $N$  in bezug auf den Querschnittsschwerpunkt bedingte Moment und die Exzentrizität der Normalkraft, d. h. ihr Abstand vom Schwerpunkt  $= e$  gegeben, so ist diese selbst bekannt, denn es ist:

$$M = eN; \quad N = \frac{M}{e}.$$

Ebenso liefert diese selbstverständliche Beziehung auch, wenn  $M$  und  $N$  gegeben sind, die Größe:

$$e = \frac{M}{N}.$$

Schon auf S. 62 wurde hervorgehoben, daß eine jede exzentrisch wirkende Kraft im Querschnitte eine Verbiegung infolge des Kräftepaars  $N \cdot e$  und eine Normalbelastung durch die im Schwerpunkt an-

	$\varphi$	$f$
Holz auf Metall . . . . .	$31^\circ$	0,60
Holz auf Holz . . . . .	$17^\circ$	0,30
Stahl auf Stahl . . . . .	$8^\circ 33'$	0,15
Gußeisen auf Gußeisen . . . . .	$11^\circ 20'$	0,20
Eisen auf Stein . . . . .	$7^\circ 30'$	0,13
Eisen auf Kies . . . . .	$22^\circ - 17^\circ$	0,4—0,3
Schmiedbares Eisen auf schmiedbarem Eisen . . . . .	$24^\circ 30'$	0,45
Gußeisen auf Stahl . . . . .	$18^\circ 30'$	0,33

greifende Kraft  $N$  auslöst (vgl. Abb. 146). Addiert man hier die beiden Spannungen zueinander, so entsteht ein Spannungsdiagramm, bei dem an den Querschnittsrändern verschieden große Spannungen sich ausbilden und demgemäß die Nulllinie nicht mehr durch den

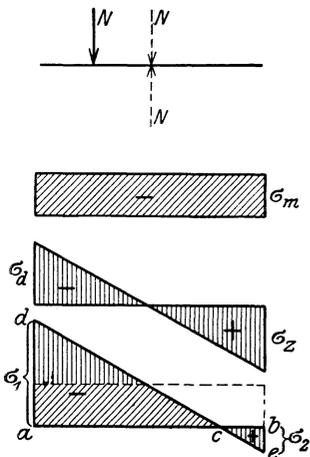


Abb. 146.

Schwerpunkt geht, sondern, falls die Randspannungen entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, außerhalb des Schwerpunktes den Querschnitt schneidet, sonst überhaupt außerhalb dieses liegt. Die letztere Lage schließt also das Auftreten einer einheitlichen Spannung im Querschnitte in sich und kann nur alsdann eintreten, wenn die durch die im Schwerpunkt angreifende Normalkraft erzeugten Spannungen, absolut betrachtet, größer sind als die Spannungen aus der Biegung. In dieser Verschiebung der Nulllinie gegenüber ihrer mittigen Lage bei ausschließlich axialer Biegebbeanspruchung liegt das bezeichnende Merkmal bei der hier vorliegenden

zusammengesetzten Spannung aus Normal- und Biegebelastrung.

- d) Der Querschnitt vermag Druck- und Zugspannungen aufzunehmen.

Bei den folgenden Erörterungen, die die Lage der Nulllinie gegenüber dem Kraftangriffe und ihre Auffindung

zum Gegenstande haben, werde zunächst vorausgesetzt, daß die Kraftebene den Querschnitt in einer Schwer- (Haupt-) Achse

schneidet. Ist alsdann in Abb. 147  $k$  der in der Achse  $yy$  liegende Angriffspunkt der außermittig wirkenden Normalkraft  $N$ , ihr Abstand von dem Querschnittsschwerpunkte  $= f$  und sucht man für einen beliebigen Punkt des Querschnittes ( $x' y'$  oder  $x'' y''$ ) innerhalb der Zone zwischen Nulllinie und stärksten belasteter Querschnittsaußenkante die auftretende Spannung ( $\sigma$ ), so wird:

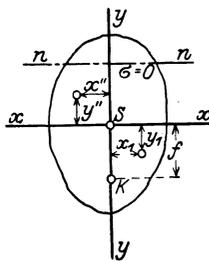


Abb. 147.

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M \cdot y'}{J_x} = \frac{N}{F} + \frac{N f \cdot y'}{J_x}$$

Da in der Nulllinie die Spannung  $= 0$  ist, so wird für den hier vorliegenden Wert  $y' = y_0$ :

$$\sigma = 0 = \frac{N}{F} + \frac{N f y_0}{J_x}$$

oder:

$$\frac{N}{F} = -\frac{Nfy_0}{J_x}, \quad y_0 = -\frac{J_x}{Ff} = -\frac{i_x^2}{f},$$

worin, wie stets,  $F$  den Querschnitt in seiner ganzen Ausdehnung bezeichnet und für  $\frac{J_x}{F}$  der Wert des Quadrats des zugehörigen Trägheitsradius ( $i_x^2 = \frac{J_x}{F}$ ) gesetzt ist (vgl. S. 57/58). Das —-Zeichen auf der rechten Gleichungsseite läßt erkennen, daß  $y_0$  und  $f$  auf verschiedenen Seiten der  $x$ -Achse liegen, d. h. daß dem Angriffspunkte der Kraft ( $k$ ) eine Lage der Nulllinie auf der anderen Seite der zugehörigen Achse entspricht. Zugleich zeigt die Gleichung, daß für den Fall, daß  $f = \infty$  wird, also der Angriffspunkt der Kraft im Unendlichen liegt, der Wert  $y_0 = 0$  ist, also die Nulllinie alsdann durch den Schwerpunkt geht; ebenso entspricht dem Wert  $f = 0$  die Größe  $y_0 = \infty$ , d. h. — wie bekannt — liegt die Nulllinie im Unendlichen, wenn die Kraft  $N$  im Schwerpunkt angreift. Da  $f$  im Nenner auf der rechten Seite steht, wird mit Vergrößerung von  $f$  der Nulllinienabstand kleiner und umgekehrt. Entfernt sich also der Angriffspunkt der Kraft vom Schwerpunkt, so nähert sich ihm die Nulllinie, und nähert er sich dem Schwerpunkt, so entfernt sich die Nulllinie von ihm. Beide führen also in bezug auf den Schwerpunkt entgegengesetzte Bewegungen aus.

Unter Beachtung dieser Lageverhältnisse kann man  $y_0$  als vierte Proportionale nach der Gleichung konstruieren:

$$y_0 \cdot f = i_x^2; \quad y_0 : i_x = i_x : f.$$

Das setzt natürlich voraus, daß neben dem Angriffspunkte der Kraft auch die Größe des Trägheitsradius  $i_x$  bekannt ist.

Ist nicht die  $y$ -, sondern die  $x$ -Achse die Schnittlinie der Kraftebene mit dem Querschnitt, greift also  $N$  in der  $x$ -Achse an, so wird in gleicher Weise:

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{f'}; \quad \text{oder absolut: } x_0 f' = i_y^2$$

und:

$$x_0 : i_y = i_y : f'.$$

Hierin ist:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F}.$$

Da in den Gleichungen für die Lage der Nulllinie nur die Querschnittsabmessung  $i$  ( $i_x$  bzw.  $i_y$ ) und der Abstand der Normalkraft, diese selbst aber nicht vorkommt, so folgt, daß die Lage der Nulllinie unabhängig ist von der Größe der Normalkraft.

Denkt man sich (Abb. 148) die Kraft  $N$  in einem beliebigen Querschnittspunkte  $k$  angreifend und legt man durch ihn eine beliebige Gerade, welche die Querschnittsschwerachsen in den Punkten  $k_1$  und  $k_2$  schneidet, so kann man sich in diesen Punkten zwei Seitenkräfte angreifend denken, zu denen die Normalkraft in  $k$  die Mittelkraft darstellt.

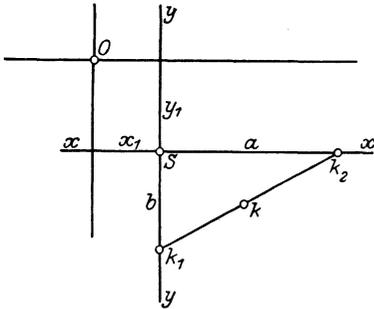


Abb. 148.

Hierdurch entstehen die Abstände dieser Seitenkräfte vom Schwerpunkt,  $b$  auf der  $y$ - und  $a$  auf der  $x$ -Achse. Kennt man die Trägheitsradien  $i_x$  und  $i_y$ , so sind auch die zu den in den Achsen gelegenen Kraftangriffspunkten  $k_1$  und  $k_2$  zugehörigen Nulllinien parallel der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse bekannt:

$$b y_1 = i_x^2; \quad a x_1 = i_y^2.$$

Da sich beide Nulllinien im Punkte  $O$  schneiden, die beiden Seitenkräfte in  $k_1$  und  $k_2$  also je in diesem Punkte eine Nullspannung erzeugen, so wird auch ihrer Mittelkraft eine Nullspannung in  $O$  entsprechen, d. h. es ist  $O$  ein Punkt der Nulllinie zu dem Angriffspunkt  $k$  der Kraft  $N$ .

Obige Beziehungen gelten für jeden beliebigen Angriffspunkt der Kraft  $N$  auf der Linie  $k_1 k_2$ , da jede Kraft  $N$  innerhalb dieser Strecke

in zwei Seitenkräfte in  $k_1$  bzw.  $k_2$  zerlegt werden kann, die Lage der Nulllinie aber unabhängig ist von der Größe der sie bedingenden Normalkraft. Demgemäß verbleiben auch die beiden Nulllinien und ihr Schnittpunkt unverändert, wenn sich die Kraft  $N$  auf der Linie  $k_1 k_2$  bewegt. Hierbei bilden sich Nulllinien aus, die durch den Punkt  $O$  gehen, sich also bei Verschiebung der Kraft  $N$  auf  $k_1 k_2$  um den Punkt  $O$  drehen. Hieraus folgt:

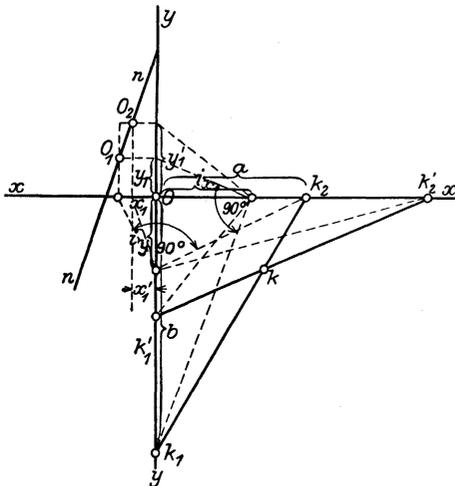


Abb. 149.

Verschiebt sich der Angriffspunkt der Kraft auf einer Geraden, so dreht

sich die Nulllinie um einen Punkt, und umgekehrt:

Dreht sich die Nulllinie um einen Punkt, so verschiebt sich der Angriffspunkt der Kraft auf einer Geraden.

Will man für einen bestimmten Kraftangriff  $k$  die Nulllinie finden so legt man durch diesen Punkt zwei verschiedene Geraden  $k_1 k_2$  und  $k'_1 k'_2$  (Abb. 149) und bestimmt für beide Lagen, also für je 2 zusammengehörende parallele Teilkräfte von  $N$  je einen Punkt der Nulllinie  $O_1$  bzw.  $O_2$  und somit diese selbst durch die beiden Punkte. Die entsprechende Konstruktion beruht auf der Auffindung der vierten Proportionalen, auf Grund der Gleichungen:

$$x_1 : i_y = i_y : f,$$

$$y_1 : i_x = i_x : f'^1).$$

Für einen beliebigen Angriffspunkt einer Kraft in  $k$  (Abb. 150 a) kann man auch die Nulllinie in einem symmetrischen (Rechtecks-) Querschnitt nach der folgenden Überlegung finden: Sind (Abb. 150 a)  $N_1$  und  $N_2$  die Schnittpunkte der gesuchten Nulllinie mit der  $y$ - bzw.  $x$ -Achse, so ist zu beachten, daß man die Beziehungen von Nulllinie und

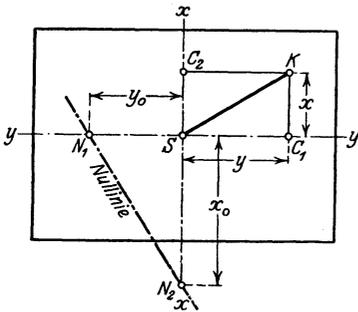


Abb. 150 a.

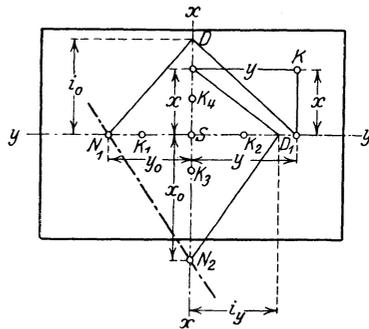


Abb. 150 b.

Angriffspunkt umkehren kann, daß also z. B. einen Angriffspunkt der Kraft in  $N_1$  ein Nulllinienpunkt im Abstände =  $y$  von  $S$  auf der  $y$ -Achse ( $C_1$ ) und ebenso einem Angriffspunkte  $N_2$  auf der  $x$ -Achse ein Nulllinienpunkt im Abstände von  $x$  auf letzterer Achse ( $C_2$ ) entspricht. Man hat alsdann die Beziehungen zur Auffindung von  $N_1$  bzw.  $N_2$ :

1.  $y y_0 = i_x^2$  und 2.  $x x_0 = i_y^2$ .

Mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke kann man somit, wie vorgezeigt, die Punkte  $N_1$  und  $N_2$  sofort finden, wenn  $i_x$  ( $= i_0$  in der Abb.) und  $i_y$  bekannt sind und auf den entsprechenden Achsen aufgetragen werden (Abb. 150 b).

<sup>1)</sup> Hierbei ist die Konstruktion mittels des rechtwinkligen Dreiecks benutzt, bei dem das Quadrat der Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten ist. Auf den Achsen sind die Trägheitshalbmesser  $i_x$  und  $i_y$  aufgetragen und, je von den Angriffspunkten  $k_1$  und  $k_2$  bzw.  $k'_1$  und  $k'_2$  ausgehend, zu ihnen in derart rechtwinklige Dreiecke konstruiert, daß  $i_x$  bzw.  $i_y$  (auf der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse abgesetzt) in ihnen immer die Höhen auf die Hypotenuse bilden. Hierdurch sind die Werte  $x_1 y_1, x'_1 y'_1$  bestimmt und die Punkte  $O_1$  und  $O_2$  gefunden.

### α) Der Kern des Querschnitts.

Schneidet die Nulllinie den Querschnitt, so haben die Spannungen in den durch sie geschiedenen Querschnittsteilen verschiedene Vorzeichen. Je nachdem  $N$  eine Druckkraft oder Zugkraft ist, sind in der Querschnittszone, in der diese Kraft angreift, Druck- bzw. Zugspannungen, in der anderen Zone die entgegengesetzten Spannungen vorhanden. Berührt die Nulllinie den Querschnitt, so tritt in ihm eine einheitliche Spannung auf.

Denkt man sich (Abb. 151) an den Querschnitt alle möglichen, ihn berührenden Nulllinien gelegt und zu ihnen allen je den Angriffspunkt der Kraft ermittelt, so liegen alle diese Angriffspunkte auf einer Figur, die sich um den Schwerpunkt des Querschnitts herumzieht und innerhalb des Querschnitts verbleibt, da keine der Nulllinien den Querschnitt schneidet, also auch der jeweilig zugehörige Kraftangriff nicht außerhalb des Querschnitts liegen kann. Den geometrischen Ort aller zu den berührenden Nulllinien gehörenden Kraftangriffspunkte nennt man die Kernlinie des Querschnitts und den von ihr umschlossenen zentralen Querschnitt den **Kern** oder **Zentralkern des Querschnitts**. Bewegt sich also der Angriffspunkt der Kraft auf der Kernlinie, so berührt die zugehörige Nulllinie den Querschnitt, und in letzterem herrscht eine einheitliche Spannung. Liegt der Kraftangriffspunkt innerhalb des Kerns, so entfernt sich die Nulllinie vom Querschnitt und liegt gänzlich außerhalb dieses; demgemäß entspricht auch jedem Kraftangriffe innerhalb der Kernlinie, also im Kern, eine einheitliche Spannung im Querschnitt, bei Druckbelastung eine Druckspannung, bei einer Zugkraft eine Zugbeanspruchung. Rückt jedoch der Angriffspunkt außerhalb des Kerns, so verschiebt sich die Nulllinie aus ihrer berührenden Lage nach dem Innern des Querschnitts, schneidet ihn und bedingt das Auftreten von verschiedenartigen (Zug- und Druck-) Spannungen im Querschnitt.

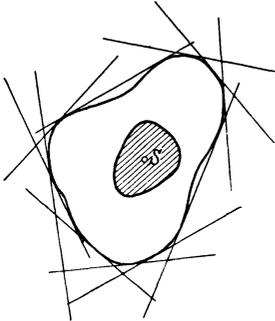


Abb. 151.

Der Kern gestattet demgemäß je nach der Lage des Angriffspunktes — auf seiner Begrenzung bzw. in ihm oder außerhalb der Kernlinie — die sofortige Entscheidung, ob die Spannung im Querschnitte einheitlich oder verschiedenartig ist, ob also die Nulllinie den Querschnitt nicht schneidet oder in ihm eine Druck- und Zugzone abtrennt.

Hierbei ist — wie vorstehend bewiesen wurde — stets zu beachten, daß Angriffspunkt der Kraft und die Nulllinie auf verschiedenen Seiten des Schwerpunktes liegen.

Wird der Querschnitt von geraden Linien umgrenzt, so genügt es, dessen einzelne Seiten als berührende Nulllinien zu betrachten und zu ihnen die Angriffspunkte der Normalkraft zu ermitteln. Geht hierbei die Nulllinie von einer Begrenzungsseite in die andere über, so dreht sie sich um den Querschnittseckpunkt, an dem beide Seiten zusammenstoßen. Dieser Drehung der Nulllinie entspricht nach dem auf S. 136 geführten Beweise eine geradlinige Bewegung des Angriffspunktes.

Demgemäß ist im vorliegenden Fall die Kernlinie aus einer geradlinigen Verbindung der zu den berührenden Nulllinien gehörenden Angriffspunkte zu bilden und ein Vieleck von derselben Seitenzahl wie das aus den berührenden

Nulllinien am Umfange des Querschnittes gebildete. Hat dieser keine einspringende Ecke und ist er ein „*n*-Eck“ so ist somit auch der Kern ein „*n*-Eck“. Bei ein-

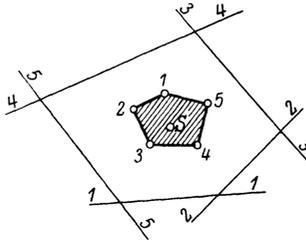


Abb. 152 a.

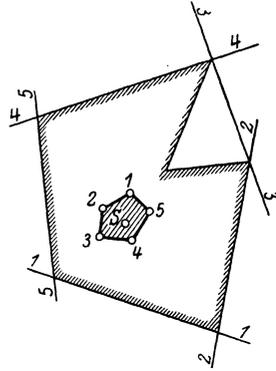


Abb. 152 b.

springenden Ecken verringert sich die Zahl der Seiten des Kerns gegenüber der Seitenzahl des Querschnitts um deren Anzahl (vgl. Abb. 152 a u. b).

β) Die rechnerische Bestimmung des Kerns der wichtigsten Querschnitte.

1. Das Rechteck. Zur Auffindung des Kerns läßt man die Nulllinie nacheinander mit den Seiten des Querschnitts zusammenfallen. Wird (Abb. 153) in diesem Sinne *II II* als Nulllinie betrachtet, so ergibt sich für den Abstand des Angriffspunktes der Kraft auf der *yy*-Achse die Gleichung:

$$BS \cdot \frac{b}{2} = i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{ab^3}{12ab} = \frac{b^2}{12}.$$

$$BS = \frac{b}{6}.$$

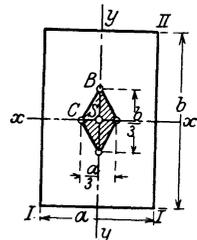


Abb. 153.

In gleicher Weise wird für ein Zusammenfallen von Seite *III III* und Nulllinie:

$$CS \cdot \frac{a}{2} = i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{ba^3}{12ab} = \frac{a^2}{12},$$

$$CS = \frac{a}{6}.$$

Hieraus ergibt sich die Form des Kerns im Rechteck als Parallelogramm, dessen Ecken auf den Hauptachsen liegen und welches das innere Drittel des Querschnitts einnimmt. Greift also innerhalb des letzteren Ausmaßes die Normalkraft im Querschnitt an, so liegt in diesem eine einheitliche Spannung vor. Diese Feststellung ist besonders wertvoll für auf Druck belastete gemauerte Körper (Stützmauern, Pfeiler, Gewölbe usw., bei denen das Verbleiben der Mittelkraft im inneren Drittel das Auftreten von Zugspannungen an den Querschnittsrändern ausschließt.

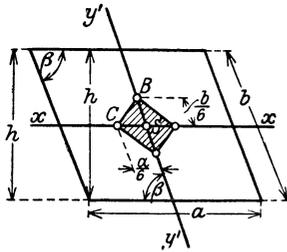


Abb. 154.

In gleicher Weise ergibt sich der Kern für das Parallelogramm (Abb. 154). Hierbei bezieht man den Querschnitt auf das schiefwinklige Koordinatensystem und rechnet auf dieses das Trägheitsmoment für die in Frage stehende Seite um.

Läßt man die Nulllinie mit  $a$  zusammenfallen, so kommt in Abb. 154 die wagerechte Schwerachse für die Bildung des Trägheitsmomentes in Frage; für diese ist bei senkrechten Achsen:

$$J_x = \frac{bh^3}{12},$$

und da hier  $h = b \sin \beta$  ist, so wird:

$$J_x = \frac{ab^3 \sin^3 \beta}{12}.$$

Da nun ferner nach Abb. 155  $y' = y \operatorname{cosec} \beta$  ist, so wird:

$$J'_x = \int y'^2 dF = \operatorname{cosec}^2 \beta \int y^2 dF = \operatorname{cosec}^2 \beta J_x.$$

Daraus ergibt sich das hier zu verwendende Trägheitsmoment:

$$J'_x = \operatorname{cosec}^2 \beta \cdot \frac{ab^3 \sin^3 \beta}{12} = \frac{ab^3 \sin \beta}{12}.$$

Da nun:

$$BS \cdot \frac{b}{2} = \frac{J'_x}{F} = i_x'^2$$

ist, so wird:

$$BS = \frac{2 \cdot ab^3 \sin \beta}{12b \cdot ab \sin \beta} = \frac{b}{6},$$

und ebenso wird:

$$CS = \frac{a}{6}.$$

Die Kernfigur des Parallelogramms ist also der des Rechtecks durchaus entsprechend.

3. Für einen I-Querschnitt symmetrischer Art ergibt sich in der gleichen Weise (vgl. Abb. 156):

$$k_y = \frac{J_x}{F \cdot \frac{1}{2} h},$$

$$k_x = \frac{J_y}{F \cdot \frac{1}{2} b},$$

worin

$$J_x = \frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3),$$

$$J_y = \frac{1}{12} [(h - h_1) b^3 + h_1 (b - b_1)^3],$$

$$F = b h - b_1 h_1$$

ist.

Auch hier ist die Kernfigur ein Parallelogramm, da nur 4 berührende Nulllinien für den Querschnitt in Frage kommen und der Querschnitt zu den Achsen symmetrisch ist.

4. Für den Kreisquerschnitt ist:

$$BS \cdot r = i^2 = \frac{J}{F} = \frac{\frac{r^4 \pi}{4}}{r^2 \pi} = \frac{r^2}{4}; \quad BS = \frac{r}{4},$$

d. h. der Kern ist ein Kreis mit einem Durchmesser gleich dem halben Radius (Abb. 157a).

5. Für den Kreisringquerschnitt (Abb. 157b) folgt:

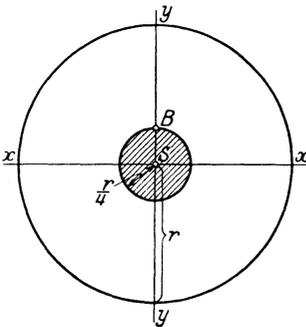


Abb. 157a.

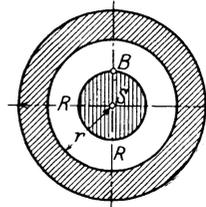


Abb. 157b.

$$BS \cdot R = i^2 = \frac{J}{F} = \frac{(R^4 - r^4) \frac{\pi}{4}}{(R^2 - r^2) \pi},$$

$$BS = \frac{(R^2 + r^2)}{4R}.$$

Aus der Symmetrie des Kreisrings folgt auch hier, daß der Kern ein Kreis mit dem Halbmesser  $BS$  ist.

6. Beim Dreieck werden die Endpunkte des Kerns auf den Mittellinien des Dreiecks liegen, da einmal für die unendlich entfernte Nulllinie der Angriffspunkt der Kraft in den Schwerpunkt des Dreiecks fällt

und zum anderen für eine bestimmte Lage der Nulllinie parallel zu einer Seite der Angriffspunkt in den gegenüberliegenden Dreieckspunkt fällt. Unter Benutzung der Bezeichnungen in Abb. 158 folgt:

$$BS \cdot \frac{a}{3} = i_1^2,$$

$$BS = \frac{3i_1^2}{a};$$

da:

$$i_1^2 = \frac{J_{1x}}{F} = \frac{\operatorname{cosec}^2 \beta J_x}{F} = \frac{\operatorname{cosec}^2 \beta \frac{bh^3}{36}}{\frac{bh}{2}} = \frac{\operatorname{cosec}^2 \beta b \cdot (a \sin \beta)^3}{18 b a \sin \beta} = \frac{b a^3}{18 \cdot b a} = \frac{a^2}{18}$$

ist, so wird:

$$BS = \frac{3 \cdot a^2}{18 \cdot a} = \frac{a}{6}.$$

In gleicher Weise werden die Abstände:

$$CS = \frac{c}{6}, \quad DS = \frac{d}{6}$$

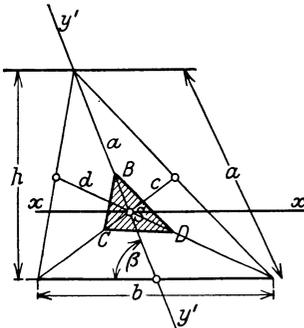


Abb. 158.

ermittelt, wenn  $c$  und  $d$  die zugehörigen Mittellinien sind. Der Kern des Dreiecks ist somit ein zum Querschnitte ähnliches Dreieck, dessen Ecken auf den Mittellinien liegen und vom Schwerpunkt aus je nach der Ecke zu eine Entfernung gleich je einem Sechstel der betreffenden Mittellinie haben.

Läßt man in Abb. 150 b, S. 137 den Angriffspunkt  $k$  der Kraft in die obere rechte Ecke des Querschnitts fallen, so geht die dieser Kraftlage entsprechende Nulllinie durch die Punkte  $k_1$  und  $k_3$ , d. h. durch die Kernpunkte und bildet somit einen Teil der Kernbegrenzung. Das gleiche gilt für alle Eckpunkte. Man kann somit hier den Kern finden, wenn man den Kraftangriff nacheinander in die Querschnittsecken verlegt und die diesen Kraftlagen entsprechenden Nulllinien bestimmt.

Die Anwendung dieser Art der Kernbestimmung für zu einer der Hauptachsen symmetrische Querschnitte läßt das nachstehende Beispiel erkennen, das — ebenso wie das zweite — zugleich zeigt, wie man bei einem verwickelten Querschnitt mit Hilfe der Darlegungen auf den Seiten 136 u. flgd. durch Zeichnung bzw. durch Rechnung den Kern finden kann.

a) Für das  $\square$ -Eisen Norm.-Prof. Nr. 24 ( $h = 24$  cm,  $b = 8,5$  cm) soll die Kernfläche bestimmt werden (Abb. 159). Die Schwerpunktsachsen liegen  $xx$  in halber Profilhöhe = 12 cm von der Flansch-Außenkante,  $yy'$  von der Stegaußenkante um 2,23 cm entfernt (=  $s$ ) in Abb. 159). Ferner ist  $J_y = 248$  cm<sup>4</sup>;  $J_x = 3598$  cm<sup>4</sup>,  $F = 42,3$  cm<sup>2</sup>. Der Kern ergibt sich durch die Umhüllung von 4 Graden und die

Bestimmung der zugehörigen Angriffs-Kernpunkte. Ebenso entsprechen den 4 Eckpunkten  $N_1N, M$  und  $M_1$  4 Kerngraden.

a) Rechnerische Lösung.

Für den Kernpunkt  $K_1$  gilt der Kernabstand:

$$k_1 = \frac{J_y}{F \cdot (b - s)} = \frac{248}{42,3 \cdot (8,5 - 2,23)} = 0,94 \text{ cm}$$

und ebenso für  $K_2$ :

$$k_2 = \frac{J_y}{F \cdot s} = \frac{248}{42,3 \cdot 2,23} = 2,62 \text{ cm}$$

desgl. für  $K_3$  und  $K_4$

$$\text{je: } k_3 = k_4 = \frac{J_x}{F \cdot \frac{h}{2}} = \frac{3598}{42,3 \cdot 12} = 7,1 \text{ cm.}$$

b) Will man die Kernpunkte zeichnerisch finden, so berechnet man zunächst

$$i_y = \sqrt{\frac{248}{42,3}} = 2,42 \text{ cm; } i_x = \sqrt{\frac{3598}{42,3}} = 9,11 \text{ cm}$$

und trägt die Werte in die Figur auf der  $y$ - bzw.  $x$ -Achse auf. Darauf zeichnet man im Anschlusse an Abb. 150 b (S. 137) für den Eckpunkt  $N_1$  (oder  $N$ ) das Dreieck mit  $i_y$  und bestimmt den Kernpunkt  $K_1$ , ebenso unter Heranziehung von  $i_x$  und der  $y$ -Achse den Kernpunkt  $K_4$  und durch ihn den symmetrisch gelegenen Kernpunkt  $K_3$ . Zur Auffindung von  $K_2$  dient  $M_1$  oder  $M$  als Kraftangriffspunkt und der Wert  $i_y$ . Hiermit ist dann der Kern gefunden, da er ein Viereck ist.

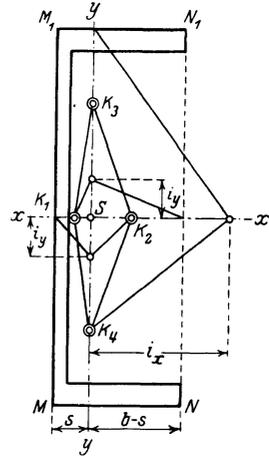


Abb. 159.

Für den in Abb. 160 gegebenen Querschnitt eines Pfeilers, aus 2 Rechtecken symmetrisch zur  $x$ -Achse gelegen, soll der Kern gefunden werden. Zunächst wird die Querschnittsschwerachse ( $y$ -Achse) senkrecht zur  $x$ -Achse bestimmt. Es ist  $F = 2 \cdot 50 \cdot 100 = 10000 \text{ cm}^2$ , und der Abstand der  $y$ -Achse von  $N_2N_1 = x_0$ :

$$x_0 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} = \frac{50 \cdot 100 \cdot 50 + 50 \cdot 100 \cdot 125}{10000} = 87,5 \text{ cm.}$$

Ferner ergibt sich:

$$J_x = \frac{100 \cdot 50^3 + 50 \cdot 100^3}{12} = 5208333 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = \frac{50 \cdot 87,5^3}{3} + \frac{100 \cdot (50 + 12,5)^3}{3} - 2 \cdot \frac{25 \cdot 12,5^3}{3} = 19270850 \text{ cm}^4,$$

$$i_x^2 = \frac{5208333}{10000} = 520,8 \text{ cm}^2; \quad i_y^2 = \frac{19270850}{10000} = 1927,1 \text{ cm}^2.$$

Die Lage des Kernpunktes  $K_1$  auf der  $x$ -Achse folgt aus der berührenden Nulllinie  $M_2M_1$  mit  $e_1 = 50 + 12,5 = 62,5 \text{ cm}$  aus der Beziehung:

$$k_1 \cdot e_1 = i_y^2; \quad k_1 = \frac{1927,1}{62,5} = 31,4 \text{ cm.}$$

Für die berührende  $KM_2$  und  $e_2 = 50$  wird:

$$k_2 e_2 = i_x^2; \quad k_2 = \frac{520,8}{50} = 10,4 \text{ cm;}$$

hierdurch bestimmt sich Kernpunkt  $K_2$  bzw.  $K_6$  auf der  $y$ -Achse.

Die nächste Berührende ist  $KN_2$ ; die hierzu gehörenden Kernpunkte werden nach Abb. 150 b bestimmt. Hierzu sind zunächst aufzufinden die Strecken  $y'$  auf der  $y$ -Achse und  $v'$  auf der  $x$ -Achse (vgl. Abb. 160).

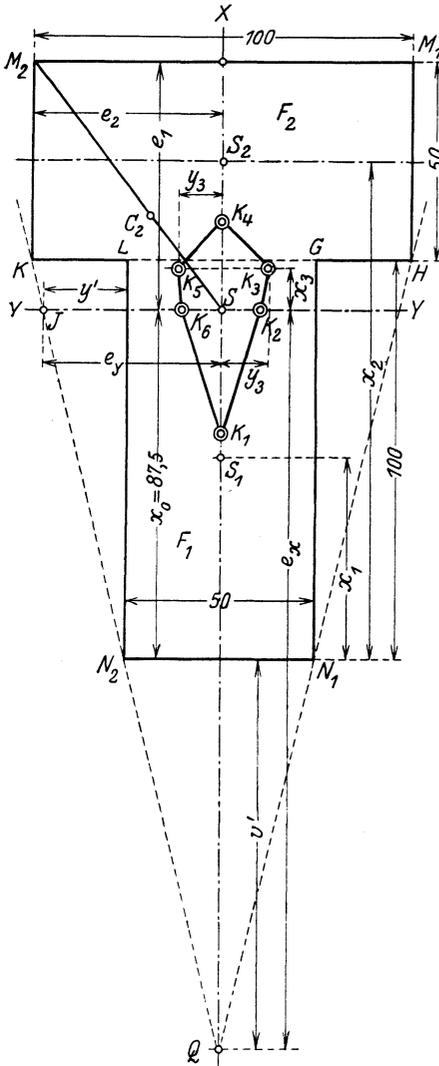


Abb. 160.

$$y' : 25 = 87,5 : 100; \quad y' = 21,88 \text{ cm};$$

$$v' : 25 = 100 : 25; \quad v' = 100 \text{ cm}.$$

Demgemäß ergibt sich für Punkt  $J$ , den Schnittpunkt von  $KN_2$  mit der  $y$ -Achse:

$$e_v = \frac{50}{2} + y' = 25 + 21,88 = 46,88 \text{ cm};$$

und weiterhin aus:

$$e_v \cdot y_3 = i_y^2;$$

$$y_3 = \frac{520,8}{46,88} = 11,13 \text{ cm}$$

und gleichzeitig für den Punkt  $Q$  auf der  $x$ -Achse:

$$e_x = 87,5 + v' = 87,5 + 100 = 187,5 \text{ cm}$$

und somit:

$$x_3 \cdot e_x = i_x^2;$$

$$x_3 = \frac{1927,1}{187,5} = 10,2 \text{ cm}.$$

Die Werte  $y_3$  und  $x_3$  bestimmen die beiden Kernpunkte  $K_5$  und  $K_3$ . Endlich ist Punkt  $K_4$  aus der Berührenden  $N_2N_1$  abzuleiten. Da hier  $e_4 = 87,5$  ist, so wird:

$$k_4 \cdot e_4 = i_y^2;$$

$$k_4 = \frac{1927,1}{87,5} = 22 \text{ cm}.$$

Hierdurch ist der sechseckige Kern bestimmt.

γ) Die Berechnung und graphische Ermittlung der Randspannungen im Rechtecksquerschnitt.

Der wichtigste Querschnitt für Hochbaukonstruktionen ist der Rechtecksquerschnitt. In ihm greife in einer der Hauptachsen

und im Abstande  $= f$  vom Schwerpunkte entfernt, und zwar zunächst außerhalb des Kerns (Abb. 161), eine Normalkraft  $= N$  (Druckkraft) an.

Die Randspannungen sind:

$$(a) \quad \sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = -\frac{N}{b \cdot h} \pm \frac{N \cdot f}{b h^2} = -\frac{N}{b h} \left( 1 \pm \frac{6f}{h} \right).$$

Man erkennt, daß — solange  $\frac{6f}{h} \leq 1$  ist, d. h.  $f < \frac{h}{6}$ , also die Kraft innerhalb des Kerns angreift — die Klammer stets einen positiven Wert besitzt und somit eine einheitliche Druckspannung über dem ganzen Querschnitt vorhanden ist, daß aber bei Überschreitung der Grenze  $f = \frac{h}{6}$  der Klammerausdruck negativ wird und sich somit das Auftreten einer Zugrandspannung zu erkennen gibt. Die beiden Randspannungen  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  werden:

$$(b) \quad \sigma_1 = -\frac{N}{bh} \left(1 + \frac{6f}{h}\right) = -\frac{N}{F} \left(1 + \frac{6f}{h}\right),$$

$$(c) \quad \sigma_2 = -\frac{N}{bh} \left(1 - \frac{6f}{h}\right) = -\frac{N}{F} \left(1 - \frac{6f}{h}\right).$$

Für die Spannung eines beliebigen Querschnittspunktes im Abstände von  $z$  von der senkrechten Hauptachse ergibt sich eine Spannung  $\sigma$ :

$$(d) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma &= -\frac{N}{bh} \pm \frac{Mz}{J_y} = -\frac{N}{bh} \pm \frac{M \cdot z \cdot 12}{bh^3} \\ &= -\frac{N}{bh} \left(1 \pm \frac{12zf}{h^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung ist in bezug auf die Veränderliche  $z$  vom ersten Grade; demgemäß verläuft die Spannung über den Querschnitt nach seiner geraden Linie. Für  $z = 0$ , d. h. den Schwerpunkt, wird:

$$(e) \quad \sigma = \sigma_m = -\frac{N}{bh} = -\frac{N}{F},$$

während sich für:  $z = \pm \frac{h}{2}$ , d. h. die Querschnittsränder, die vorstehend angegebenen Randspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  ergeben.

Die vorstehende Gleichung (b, c) gestattet eine sehr einfache graphische Darstellung (vgl. Abb. 161).

Im Schwerpunkte wird die mittlere Spannung:  $\sigma_m = -\frac{N}{F}$  aufgetragen, alsdann durch ihren Endpunkt ( $s$ ) und den vom Angriffspunkt der Kraft abgewandt liegenden Kernpunkt eine Gerade gezogen, die bis zum Schnitt mit der Angriffslinie von  $N$  ( $t$  in Abb. 161 b) verlängert wird. Zieht man alsdann  $tr$  parallel zur Grundlinie  $wv$  und weiterhin die Gerade  $rsz$ , so stellt die schraffierte Figur das Spannungsdiagramm in dem hier betrachteten Querschnitte dar;  $n'$  ist ein Punkt der Nulllinie, der diese somit im Grundrisse eindeutig bestimmt. Daß diese graphische Konstruktion mit der vorstehend abgeleiteten Gleichung

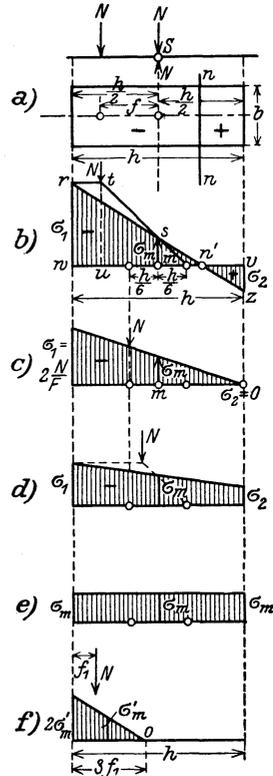


Abb. 161.

chung übereinstimmt, erkennt man einmal darin, daß die Spannungsverteilung tatsächlich als Gerade durch die Punkte  $rs$  festgelegt ist, daß ferner für sie die vorstehend berechnete Ordinate im Schwerpunkte:  $\sigma_m = -\frac{N}{F}$  innegehalten wird und daß endlich auch eine jede Randspannung dem oben berechneten Werte entspricht. Es ergibt sich z. B. für die größte Druckrandspannung  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1 = rw = tu;$$

$$tu : sm = tu : -\frac{N}{bh} = \left(f + \frac{h}{6}\right) : \frac{h}{6},$$

d. h.

$$tu = -\frac{\frac{N}{bh} \left(f + \frac{h}{6}\right)}{\frac{h}{6}} = -\frac{N}{bh} \left(1 + \frac{6f}{h}\right) = \sigma_1,$$

wie vorstehend berechnet wurde. Hiermit ist die Richtigkeit des dargestellten Diagramms und Spannungsverlaufes bewiesen. Rückt die Kraft in den einen Kernpunkt, so wird in der vorstehenden Gleichung:

$$f = \frac{h}{6}$$

und somit:

$$\sigma_1 = -\frac{N}{bh} \left(1 + \frac{6 \cdot \frac{h}{6}}{h}\right) = -2 \frac{N}{bh} = -2 \sigma_m;$$

$$\sigma_2 = -\frac{N}{bh} (1 - 1) = 0 \quad (\text{vgl. Abb. 161c}).$$

Dies gibt sich naturgemäß auch im Diagramm zu erkennen. Gelangt die Kraft innerhalb des Kerns, so treten an beiden Rändern nur Druckspannungen auf (vgl. das Diagramm Abb. 161d), und liegt die Kraft endlich im Schwerpunkte selbst, so verteilt sie sich vollkommen gleichmäßig über ihn hinweg — Abb. 161e.

Liegt bei außerhalb des Kerns angreifender Normalkraft ein Rechtecksquerschnitt vor, der nur Druck, aber keinen Zug aufzunehmen vermag, wie es z. B. bei manchem Mauerwerk, vor allem aber bei der Erdfuge der Fall ist, so kann hier im äußersten Falle eine Spannung = 0 eintreten, d. h. das Spannungsdiagramm nur die in Abb. 161c bzw. 161f dargestellte Form erhalten. Da hier die Normalkraft im Kernpunkt, d. h. im Drittelpunkt der allein wirksam verbleibenden Fuge angreift, so wird in dem hier vorliegenden Falle die wirksame Druckzone auch nur das Dreifache der Außenexzentrizität der Kraft =  $3 f_1$  (Abb. 161f) sein können. Demgemäß wird hier die mittlere Spannung:

$$\sigma_m = -\frac{N}{3f_1 b}$$

und die Randspannung:

$$\sigma_1 = -\frac{2}{3} \frac{N}{f_1 b}; \quad \sigma_2 = 0.$$

Ist  $b$  in allen obigen Darlegungen = 1,00 m Tiefe, erstrecken sich also die Ermittlungen auf die Einheitstiefe, so wird  $b$  überall = 1 zu setzen sein.

δ) Liegt der Angriffspunkt der Kraft nicht in einer Schwer- (Haupt-) Achse, ist aber der Kern des Querschnittes bekannt, so kann dieser zu einer sehr übersichtlichen und schnell zu bewirkenden Auffindung der Randspannungen Benutzung finden.

Greift (Abb. 162) die Normalkraft in dem beliebigen Querschnittspunkt  $k$  an, so legt man durch ihn und den Schwerpunkt eine Gerade, welche auf der Kernlinie die beiden Kernpunkte  $k_1$  und  $k_2$  bestimmt. Unter der Annahme, daß  $nn$  die dem Kraftangriffe entsprechende Nulllinie ist, wählt man die zweite Achse parallel zu  $nn$  durch  $S$  und erhält hiermit die Abstände der äußersten Faserpunkte  $e$ , bzw.  $e_{11}$ , in bezug auf diese Achse. Für eine Querschnittsgröße =  $F$  werden alsdann die Randspannungen:

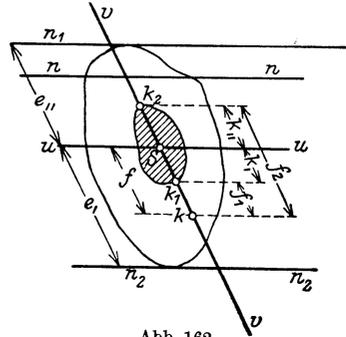


Abb. 162.

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{N f e_1}{J'_n},$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{N f e_{11}}{J'_n}.$$

Da der Kernpunkt  $k_2$  der Angriffspunkt zur Lage der Nulllinie  $n_2 n_2$  und ebenso  $k_1$  der zu  $n_1 n_1$  ist, so folgt:

$$k_{11} = \frac{J'_n}{F e_1}; \quad k_1 = \frac{J'_n}{F e_{11}},$$

d. h.

$$\frac{J'_n}{e_1} = k_{11} F; \quad \frac{J'_n}{e_{11}} = k_1 F.$$

Hiermit werden die Randspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{N f}{k_{11} F} = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{f}{k_{11}} \right) = \frac{N}{F} \left( \frac{k_{11} + f}{k_{11}} \right) = \frac{N f_2}{F k_{11}} = \sigma_m \frac{f_2}{k_{11}}$$

und:

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{N f}{k_1 F} = \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{f}{k_1} \right) = \frac{N}{F} \left( \frac{k_1 - f}{k_1} \right) = -\frac{N f_1}{F k_1} = -\sigma_m \frac{f_1}{k_1}.$$

Hierbei sind  $f_1$  und  $f_2$  die Abstände der Kernpunkte  $k_1$  bzw.  $k_2$  von dem Angriffspunkte der Kraft  $k$ .

Ist der Kern des Querschnitts bekannt, so sind mithin, da alsdann auch die Größen  $f_1, f_2, k, k_1, k_2$  gegeben sind, die Randspannungen mit Hilfe des ebenfalls bekannten  $\sigma_m$ -Wertes zu finden, und zwar ohne daß man notwendig hat, die Nulllinie zu ermitteln, deren Richtung also für die vorliegende Berechnung ohne Bedeutung ist. Neben der rechnerischen Auffindung der Werte  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  kann auch der aus Abb. 163 ersichtliche graphische Weg schnell zum Ziele führen. Man zieht durch  $k$  die Gerade  $kS$ , bestimmt  $k_1$  und  $k_2$ , legt durch  $S$  eine beliebig gerichtete Achse ( $SU$ ), trägt auf ihr den Wert der mittleren Spannung:

$$\sigma_m = \frac{N}{F} = SU$$

auf und zieht die Geraden  $k_2U$  und  $Uk_1$ , die auf einer durch  $k$  zu  $US$  gezogenen Parallelen die Punkte  $T_2$  und  $T_1$  abschneiden. Alsdann ist

$kT_2 = \sigma_1$  und  $kT_1 = \sigma_2$ . Denn:

$$kT_2 : US = f_2 : k_2S = f_2 : k_1,$$

$$kT_2 = \frac{N}{F} \frac{f_2}{k_1} = \sigma_1$$

und:

$$kT_1 : US = k_1S : k_1k = f_1 : k,$$

$$kT_1 = \frac{N}{F} \frac{f_1}{k} = \sigma_2,$$

was zu beweisen war.

Wird das Moment der äußeren Kräfte auf die Kernpunkte bezogen, ist also:

$$Nf_2 \text{ bzw. } Nf_1 = M_{k_2} \text{ bzw. } = M_{k_1}$$

bekannt, so werden die Randspannungen am besten auf rechnerischem Wege aus den Beziehungen bestimmt:

$$\sigma_1 = \frac{M_{k_2}}{F k_1}; \quad \sigma_2 = \frac{M_{k_1}}{F k_2}.$$

Hierbei sind die Werte  $k_1$  und  $k_2$  die Abstände der Kernpunkte, getroffen von der Schnittlinie zwischen der durch den Schwerpunkt gelegten Kräfteebene und dem Querschnitt. Bei Belastung eines Rechteckquerschnitts in seiner senkrechten Achse sind also z. B.:

$$k_1 = k_2 = \frac{h}{6}$$

und da hier  $F = bh$ , so wird:

$$\sigma_1 = \frac{M_{k_2}}{b h^2} = \frac{M_{k_2}}{W}; \quad \sigma_2 = \frac{M_{k_1}}{W}.$$

worin  $W$  das Widerstandsmoment des Querschnitts angibt, bezogen auf die zur Kräfteebenen-Schnittlinie zugehörige Achse.

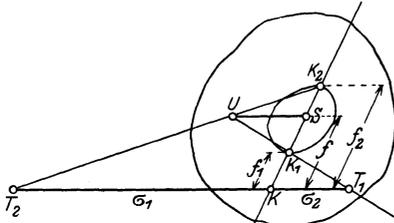


Abb. 163.

- e) Der Querschnitt vermag nur Druck aufzunehmen, seine Zugwirkungsfläche ist unwirksam.

Zunächst sei wiederum vorausgesetzt, daß die Kraftebene den Querschnitt in einer Schwer- (Haupt-) Achse schneidet und dieser zu ihr symmetrisch ist. Denkt man sich (Abb. 164) den Angriffspunkt der Normalkraft in  $k$ , innerhalb der  $x$ -Achse, so wird zunächst die Nulllinie senkrecht zur  $x$ -Achse verlaufen. Betrachtet man ein beliebiges Flächenteilchen  $df$ , das von der Nullachse den Abstand  $x$  haben möge, so wird dessen Spannung als alleinige Abhängigkeit von diesem Abstände, d. h. in der Form:  $\sigma = ax$ , ausgedrückt werden können, wobei  $a$  eine Konstante ist, allen  $df$ -Teilchen eigen, die im Abstände von  $x$  zur  $nn$ -Achse, also auf einer Parallelen zu ihr liegen. Aus dem Gleichwichte der äußeren Kraft mit den inneren Querschnitts-  
spannkraften folgt:

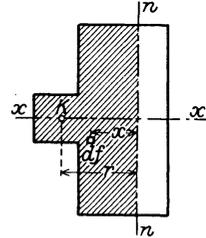


Abb. 164.

$$N = \sum \sigma df = \sum ax df = a \sum x df,$$

und ebenso aus der Gleichheit der Momente der äußeren Kraft und der inneren Kräfte, bezogen auf die Nulllinie:

$$N \cdot r = \sum \sigma df x = \sum ax df x = a \sum x^2 df.$$

Hieraus ergibt sich der Abstand „ $r$ “ der Nulllinie von dem Angriffspunkte ( $k$ ) der Normalkraft:

$$r = \frac{\sum x^2 df}{\sum x df} = \frac{J_n}{S_n}$$

= dem Quotienten aus dem Trägheitsmoment der wirksamen Fläche und dem statischen Moment dieser, beide bezogen auf die Nulllinie. Die Auffindung der Nulllinie auf Grund dieser Beziehung wird am besten auf graphischem Wege bewirkt. Hierzu sei an die graphische Darstellung eines Momentes und eines Trägheitsmomentes (vgl. S. 22 bis 23 u. 27) erinnert, die beide auf der Verwendung von Kraft- und Seileck sich aufbauen.

Der Gang der graphischen Ermittlung sei an dem Beispiele in Abb. 165 gezeigt.  $k$  sei, wie stets, der Angriffspunkt von  $N$  und liege in der  $x$ -Achse, d. h. in der wagerechten Schwer- und Symmetrieachse des nur nach dieser symmetrischen Querschnittes. Unter Annahme eines bestimmten Flächenmaßstabes wird alsdann der Querschnitt in eine Anzahl kleiner Flächenstreifen zerteilt, parallel zur  $y$ -Achse, und ihr Inhalt je als Kraft aufgefaßt. Zeichnet man alsdann zu diesen Kräften mit einem beliebigen Polabstande das Kraft- und Seileck, so stellt, wenn  $nn$  in Abb. 165 die gesuchte Nulllinie ist, die Fläche ( $F_0$ ), begrenzt durch den ersten Seileckstrahl, das Seileck und die Gerade  $vw$  die zur



Sind — durch Probieren zu lösen — in diesem Sinne die beiden Flächenteilchen  $f_1$  und  $f_2$  einander gleich gemacht, dann ist  $v$  ein Punkt der Nulllinie und somit diese auch im Querschnitte bestimmt. Hierbei wird zugleich der unwirksame Teil des Querschnittes von dem unter Druck stehenden abgetrennt. Die größte Randdruckspannung findet man am besten graphisch, indem man für den wirksamen Querschnittsteil ( $F_n$ ) unter Verwendung der bereits gezeichneten, nur in der Nähe der Nulllinie wegen der hier in der Regel veränderten Kräfte ein wenig abzuändernden Seilecks den (neuen) Schwerpunkt der Druckfläche bestimmt, für ihn die mittlere Spannung  $\sigma_m = \frac{N}{F_n}$  berechnet und mit dieser mit Hilfe der Spannung = 0 in der Nulllinie das geradlinig verlaufende Spannungsdiagramm aufzeichnet und somit  $\sigma_{\max}$  bestimmt.

Will man die Randspannung rechnerisch prüfen, so dienen hierfür die vorstehend gefundenen Beziehungen:

$$\sigma = a \cdot x;$$

$$N = a \sum x df; \quad a = \frac{N}{\sum x df} = \frac{N}{S_n}$$

und somit:

$$\sigma = \frac{N \cdot x}{S_n},$$

bzw. für die am weitesten von der Nulllinie (um  $z$ ) entfernte Randfaser:

$$\sigma_{\max} = \frac{N \cdot z}{S_n}.$$

Hierbei kann naturgemäß  $S_n$  aus der Beziehung:  $S_n = l \cdot H$  entnommen werden.

Aufgaben, wie die vorliegende, sind u. a. bei der Berechnung hoher, dem Winddrucke und dem Eigengewichte ausgesetzter **Schornsteine** mit Ringquerschnitt zu lösen. Hier wird in der Regel darauf Wert zu legen sein, daß die innere Kreislinie ganz oder doch zum größten Teile innerhalb der wirksamen Querschnittsfläche liegt (Abb. 166).

Der Winddruck ( $H$ ) wird zweckmäßig wagerecht eingeführt. Er kann für 1 Höhenmeter des Schornsteins mit 190  $r \cdot \text{kg}$  angenommen werden, worin  $r$  den äußeren Halbmesser darstellt. Da der Schornstein nach oben zu sich im äußeren Umfange (und der Stärke) verringert, so empfiehlt es sich, die  $H$ -Kräfte für mittlere Außendurchmesser in bestimmten Höhenabschnitten von 5—10 m) zu berechnen und die einzelnen  $H$ -Kräfte zu einer Mittelkraft  $H$  zusammensetzen, die ihrerseits mit dem Gesamtgewichte des Schornsteins zur Endmittelkraft zu vereinigen ist. Liegt der Angriffspunkt dieser innerhalb des Kerns, so

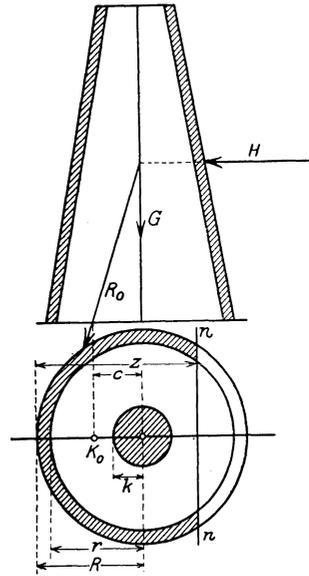


Abb. 166.

treten nur Druckspannungen auf und alsdann ist die größte Randspannung zu bemessen nach:

$$\begin{aligned}\sigma &= -\left(\frac{G}{F} + \frac{M}{W}\right) = -\left(\frac{G}{F} + \frac{H \cdot h}{W}\right) = -\left(\frac{G}{F} + \frac{G \cdot c}{W}\right) \\ &= -\frac{G}{F} \left(1 + \frac{F \cdot c}{W}\right) = -\frac{G}{F} \left(1 + \frac{c}{k}\right)^1,\end{aligned}$$

worin:  $k = \frac{W}{F}$  den Kernhalbmesser bedeutet<sup>2)</sup>.

Liegt — wie dies meist der Fall sein wird — der Angriffspunkt der Kraft ( $k_0$ ) außerhalb des Kerns, wie auch in Abb. 166 vorausgesetzt, so ist genau in der vorstehend erörterten Weise vorzugehen, der Ringquerschnitt in Streifen zu zerteilen und mit Hilfe der Beziehung:

$$r = \frac{J_n}{S_n}$$

die Lage der Nulllinie zu bestimmen. Die größte Randdruckspannung wird alsdann, da hier  $N = G$  ist:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = -\frac{G \cdot z}{S_n}^3).$$

Liegt der Angriffspunkt der Kraft nicht in einer Achse, sondern an beliebiger Stelle im Querschnitt, so wird man bei den im Hochbau vorliegenden Aufgaben am besten mit Hilfe eines Probiervfahrens die Randspannungen zu ermitteln suchen. Hierbei wird zunächst schätzungsweise die Richtung der Nulllinie angenommen und alsdann das vorstehend dargelegte graphische Verfahren zur Bestimmung der Lage der Nulllinie im Querschnitte angewendet. Ist die Nulllinie gefunden, so liegt eine Kontrolle für die mehr oder weniger richtige Lösung darin, daß jetzt die Summe der inneren Spannkkräfte gleich der äußeren Normalkraft  $N$  sein und zudem durch den Angriffspunkt von  $N$  gehen muß, da nur alsdann ein Gleichgewichtszustand möglich ist. Aus dem für die gefundene Lage der Nulllinie ermittelten Spannungsdiagramm entnimmt man zu diesem Zwecke die mittleren, zu den einzelnen Flächenstreifen gehörenden Spannungen und bildet aus ihnen und den zugehörigen Flächenelementen die inneren Spannkkräfte, die dann zu Mittelkräften nach zwei verschiedenen Richtungen zusammengesetzt werden müssen, um den Angriffspunkt der Mittelkraft der inneren Spannkkräfte zu erhalten.

<sup>1)</sup> Hierin ist  $h$  der Abstand des Angriffspunktes der Mittelkraft  $H$  über dem Gelände, also oberhalb des untersuchten Querschnittes.

<sup>2)</sup> Es ist:

$$k \cdot R = i^2 = \frac{J}{F}; \quad k = \frac{J}{R \cdot F} = \frac{W}{F},$$

da  $R$  den äußersten Faserabstand darstellt.

<sup>3)</sup> Über die Berechnung der Werte  $S_n$  und  $J_n$  bei ringförmigem Querschnitte vgl. u. a. Müller-Breslau: Graphische Statik, Bd. I, S. 95 ff. 5. Aufl. 1912.

Eine probeweise Untersuchung in obigem Sinne ist in Abb. 167 dargestellt<sup>1)</sup>.

Sind erhebliche Unterschiede zwischen beiden Angriffspunkten vorhanden, so ist die Richtung der Nulllinie anders zu wählen und das Verfahren bis zu einem angenäherten Zusammentreffen der Angriffspunkte zu wiederholen. Meist wird eine zwei- bis dreifache Wiederholung schon zu einem guten Endergebnisse führen. Hierbei kann man

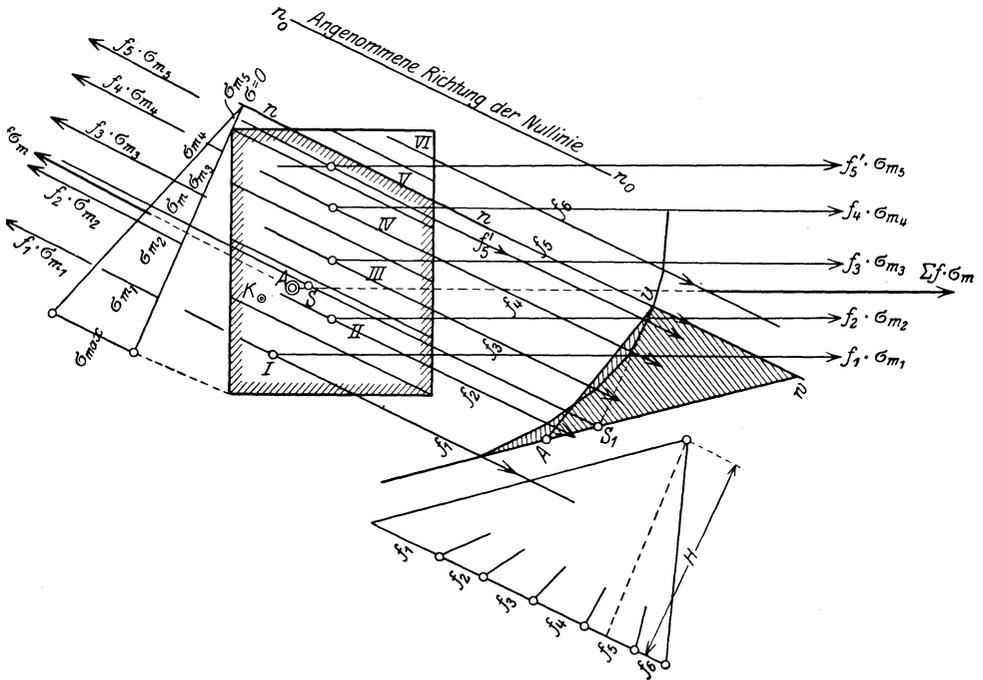


Abb. 167.

bei einem Rechtecksquerschnitt und dem Angriffspunkte der Normalkraft auf einer Diagonale davon Gebrauch machen, daß die Nulllinie der anderen Diagonale parallel ist.

<sup>1)</sup> In Abb. 167 ist ein Rechtecksquerschnitt der Untersuchung zugrunde gelegt. Der Angriffspunkt der Kraft ist  $k$ . Die Richtung der Nulllinie wird angenommen  $n_0 n_0$  und ihr entsprechend die Fläche in 6 Teile (I—VI) geteilt, in deren Schwerpunkten je die Flächenkräfte  $f_1$  bis  $f_6$  angreifen. Zu ihnen ist mit Hilfe des Kräftecks (mit  $H$ ) ein Seileck gezeichnet und in ihm unter Zuhilfenahme des Punktes  $A$  (entsprechend  $k$ ) die Flächenausgleichung (wie in Abb. 165) vorgenommen und durch sie der Punkt  $v$  der Nulllinie und somit diese =  $nn$  im Querschnitte bestimmt. Des weiteren wird die Schwerachse  $SS_1$  des nunmehr nur noch wirkamen Flächenteils ( $F_n$ ) ermittelt ( $\parallel$  zu  $n_0 n_0$ ) und das Spannungsdiagramm gezeichnet (aus  $\sigma = 0$  und  $\sigma_m = \frac{N}{F_n}$ ). In ihm werden die den Angriffslinien von  $f_1 f_2 \dots f_4 f_5$  entsprechenden mittleren Spannungen bestimmt, nunmehr die inneren Kräfte in

Zu den Querschnitten mit nicht ausgenutzter Zugzone gehören auch die Verbundquerschnitte, bei denen in der Zugzone nur das Eisen als statisch wirksam in Rechnung gestellt wird. Liegt ein Verbundstützenquerschnitt mit außermittiger Belastung vor, bei einer Normalkraft =  $N$ , einem ideellen Querschnitt  $F_i$ , einem Trägheitsmoment =  $J_{nn}$  und dem aus diesem durch Teilung mit der äußersten Randfaserentfernung abgeleiteten idealen Widerstandsmoment =  $W_i$ , so kann die Randspannung  $\sigma_{ba}$  nach der Beziehung berechnet werden:

$$\sigma_{ba} = -\frac{N}{F_i} \mp \frac{M}{W_i}.$$

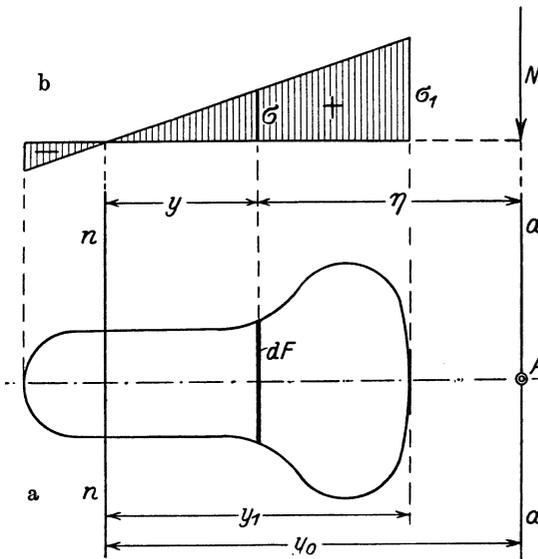


Abb. 168 a, b.

Hierbei darf  $\sigma$  die zulässige Spannung von im allgemeinen 35 kg/cm<sup>2</sup> bei Handelszement, von 45 kg/cm<sup>2</sup> bei hochwertigem Zement nicht überschreiten. Die Anwendung dieser Gleichung setzt aber voraus, daß die hierbei auftretende Beton-Zugrandspannung  $\sigma_{bz}$  nicht größer wird als  $\frac{1}{5}$  der zulässigen Betondruckspannung. In jedem Falle sind die Eiseneinlagen so zu bemessen, daß sie ohne Mitwirkung

des Betons alle Zugspannungen aufnehmen können.

Erlangt  $\sigma_{ba}$  einen höheren Wert, so ist am besten ein graphischer Weg zur Auffindung der Lage der Nulllinie und weiterhin der Spannungen zu wählen. Hier soll zunächst nur auf einen einfach, d. h. nur in der Zugzone bewehrten Querschnitt eingegangen werden, bei dem die Schnittlinie der Kraftebene mit der Symmetrieachse des Querschnitts zusammenfällt<sup>1)</sup>. Die Kraft  $N$  ist Druckkraft; betrachtet man (Abb. 168a) unter Annahme eines derartigen Querschnittsverhältnisses und einer entsprechenden Kraftlage einen beliebigen Flächenstreifen  $dF$ , der einen

der Form:  $f_1\sigma_{m1}, f_2\sigma_{m2}, \dots, f_5\sigma_{m5}$  berechnet und mit Kraft und Seilecken (die nicht gezeichnet sind) je ihre Mittelkräfte bestimmt. Beide schneiden sich im Punkte „A⊙“, der zwar nicht allzu fern von  $k$  entfernt liegt, aber doch nicht so annähernd mit ihm zusammenfällt, daß eine Wiederholung der Untersuchung mit einer etwas gedrehten Lage von  $n_0n_0$  erspart werden könnte.

<sup>1)</sup> Genaueres vgl. Bauingenieur 1925, H. 10, S. 366: Aufsatz von Prof. Spanenberg-München.

Abstand von der noch unbekanntem Nulllinie ( $nn$ ) =  $y$  und =  $\eta$  vom Angriffspunkte der Normalkraft haben möge, so kann bei Annahme eines geradlinigen Spannungsverlaufes (Abb. 168 b) die Spannung im betrachteten Streifenelement zu:

(a) 
$$\sigma = ky$$

ausgedrückt werden, unter  $k$  einen Festwert verstanden. Das Vorzeichen  $\eta$  des Abstandes des Flächenstreifens von der „Angriffsachse“  $aa$  ist positiv oder negativ einzuführen, je nachdem  $dF$  auf derselben Seite oder auf der entgegengesetzten Seite der Angriffslinie liegt, wie die Nullachse. Eine Unterscheidung in diesem Sinne kommt naturgemäß nur in Frage, wenn die Angriffsachse den Querschnitt schneidet,  $N$  also in ihm liegt. Die Momentengleichung in bezug auf die Angriffsachse lautet

$$\int \sigma dF \cdot \eta = N \cdot 0,$$

woraus folgt:

$$\int ky\eta dF = \int y \cdot \eta dF = 0,$$

bzw. nach Einführung der Größe  $dw = \eta dF$ :

(b) 
$$\int y dw = 0.$$

Der Inhalt dieser Gleichung besagt, daß, wenn man die Größen  $\eta dF = dw$  als parallele Kräfte auffaßt, die in den Schwerpunkten der  $dF$  senkrecht zur Symmetrieachse wirken, daß alsdann die gesuchte Nullachse mit der Mittellinie dieser Kräfte zusammenfällt. Damit ist die Lage der „ $nn$ “ bestimmt und ihr Abstand  $y_0$  von der Angriffsachse festgesetzt.

Um die Spannungsverteilung darzustellen, ist die Normalspannung in einem beliebigen Flächenteilchen  $dF$  zu berechnen, z. B. die Randspannung  $\sigma_1$ , deren Abstand  $y_1$  von der Nullachse nach Auffindung von  $y_0$  bekannt ist (Abb. 168).

Aus den Beziehungen:

$$\frac{\sigma_1}{y_1} = \frac{\sigma}{y} = k \quad \text{und} \quad y = y_0 - \eta,$$

ergibt sich die Projektionsgleichung:

(c) 
$$N = \int \sigma dF = k \int y dF = \frac{\sigma_1}{y_1} \int y dF = \frac{\sigma_1}{y_1} \int (y_0 - \eta) dF.$$

Hieraus folgt:

$$\sigma_1 = \frac{N \cdot y_1}{y_0 \int dF - \int \eta dF}$$

oder bequemer für die Zahlenberechnung:

(d) 
$$\sigma_1 = \frac{N y_1}{y_0 - \frac{\int \eta dF}{\int dF}}.$$

Hierbei sind die  $\int$  über alle Querschnittsstreifen zu erstrecken, die einer Beanspruchung unterliegen.

Zur praktischen Durchführung des Verfahrens bei beliebig begrenztem „symmetrischen“ Querschnitt zerlegt man letzteren in eine Anzahl

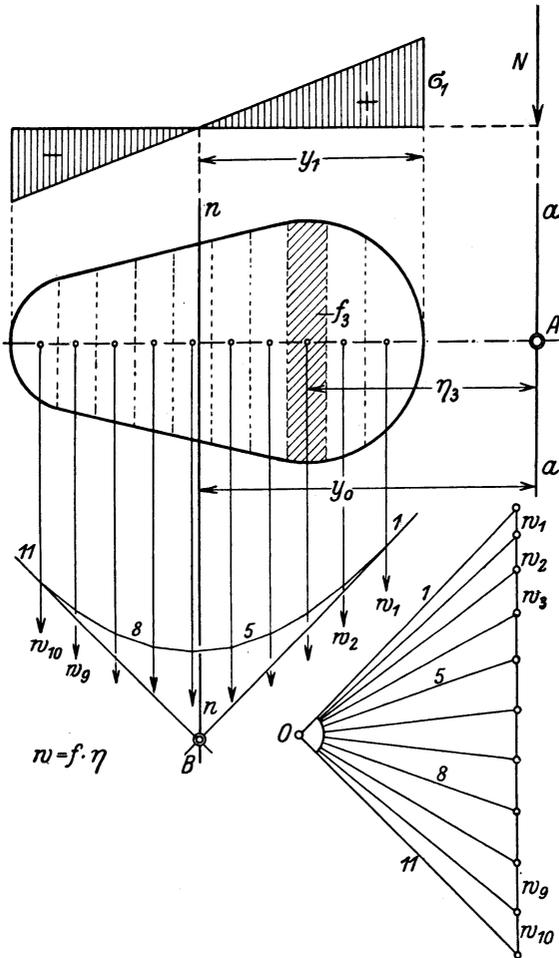


Abb. 169.

von Flächenstreifen „ $f$ “, bestimmt deren Inhalte, Schwerpunkte und Schwerpunktsabstände  $\eta$  von der Angriffslinie  $a-a$  und rechnet alsdann die Werte  $w = f\eta$  aus. Für diese in den Schwerpunkten der Flächenstreifen als Einzelkräfte wirkenden Werte zeichnet man (Abb. 169) mit beliebig gewähltem Pol ein Kraft- und Seileck. Der Schnittpunkt  $B$  der äußersten Seiten des Seilecks bestimmt die Mittelkraft der  $w$ -Kräfte und damit die Lage der Nullachse  $n-n$ , zugleich die Werte

$y_0$  und  $y_1$ . Unterliegt der gesamte Querschnitt  $F$  der Beanspruchung, so geht Gleichung (d) in die Form über:

$$(d') \quad \sigma_1 = \frac{\frac{N}{F} y_1}{y_0 - \frac{\sum w}{F}}.$$

Bei Ausschluß von Zugspannungen sind dagegen die  $\int$  nur über die wirksamen Querschnitte zu erstrecken — vgl. das nachfolgende Zahlenbeispiel S. 158 bis 160.

Schneidet die Angriffslinie den Querschnitt, so ist darauf zu achten, daß alsdann die  $dF\eta$  zu ihren beiden Seiten verschiedene Vorzeichen haben und demgemäß, wenn die  $w$ -Kräfte z. B. auf der linken Seite der Angriffslinie mit ihrer Richtung nach unten eingeführt werden, alsdann die rechts liegenden Kräfte nach oben gerichtet anzunehmen sind. Es bedingt dies alsdann naturgemäß eine Streifenteilung des Querschnittes, bei dem die Grenze zwischen zwei Flächenstreifen mit der Angriffslinie zusammenfällt. Demgemäß wird hier das Krafteck auch eine Kurve mit einem der Angriffslinie entsprechenden Wendepunkt sein.

Wendet man die vorliegende Entwicklung auf zum Schlitze mit der Kraftebene symmetrische Verbundquerschnitte an, die exzentrisch belastet sind, so geht man auch hier (Abb. 170) zunächst von dem Seileck aus, zu dessen Aufzeichnung hier die  $w$ -Kräfte ( $dF\cdot\eta$ ) benutzt werden. Hierbei trägt man die Kräfte in der Art auf, daß zunächst von der Zugzone an beginnend die Werte  $n f_e \cdot \eta = w_e$  ermittelt und von oben an beginnend auf die Kraftlinie aufgetragen werden; an sie schließen sich dann die Kräfte  $dF\eta = w$  von der anderen Seite des Querschnittes anfangend, unmittelbar an. Mit einem gemeinsamen Polabstand wird alsdann (Abb. 170) das Mohrsche<sup>1)</sup> Doppelseileck zu den  $w_e$ - und  $w$ -Kräften im Zusammenhang gezeichnet. Einer der Endstrahlen ist der Anfangsstrahl des  $w_e$ -Seilecks. Sollen die Zugspannungen im Beton keine Berücksichtigung finden, so bestimmt der Schnittpunkt dieses Strahls mit dem nach oben verlaufenden Teil des  $w$ -Seilecks die Lage der Mittelkraft der  $w_e$ - und  $w$ -Kräfte und damit im Punkte  $B$  der Abbildung einen Punkt der Nullinie und somit diese selbst — stark in der Abb. 170 ausgezogen. Soll hingegen die Betonzugzone statisch wirksam sein, so sind die beiden äußeren Strahlen des  $w_e$ - und  $w$ -Seilecks zum Schlitze zu bringen. Es entsteht Punkt  $B'$  und die zu ihm gehörende, in der Abb. 170 gestrichelte Nullinie. Mit Auffindung der Nullinie sind naturgemäß auch die für die Spannungsberechnung erforderlichen  $y_0$ - und  $y_1$ -Werte bekannt.

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu des Verfassers Grundzüge des Eisenbetonbaus. 3. Aufl. S. 510ff. Berlin: Julius Springer 1926.

Für die Ermittlung der Werte  $f$  und  $w$  ist es empfehlenswert, eine einfache Rechentabelle aufzustellen, um so mehr, als man in ihr auch die für die Spannungs-

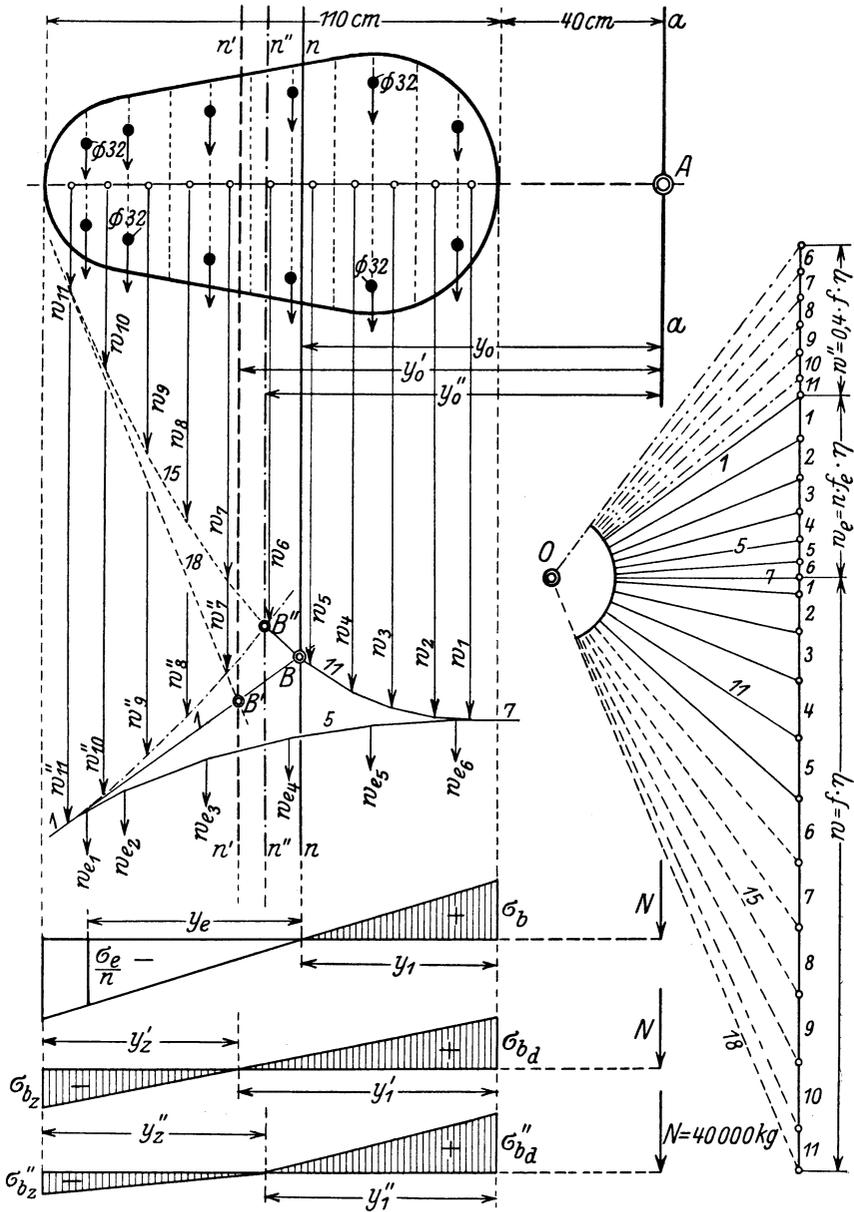


Abb. 170.

berechnung notwendigen Summenbildungen alsdann bequem vornehmen kann. Eine solche Tabelle ist nachfolgend für das Beispiel in Abb. 170 aufgestellt.

Tabelle zu Abb. 170.

Fläche $f$ (cm <sup>2</sup> )	$\Sigma f$ (cm <sup>2</sup> )	$\eta$ (cm)	$w = f \eta$ (cm <sup>3</sup> )	$\Sigma w$
$n f_{e1} = 240$	$\sum_1^6 n f_e = 1440$	140	$w_{e1} = 33600$	$\sum_1^6 w_e = 141600$
$n f_{e2} = 240$		130	$w_{e2} = 31200$	
$n f_{e3} = 240$		110	$w_{e3} = 26400$	
$n f_{e4} = 240$		90	$w_{e4} = 21600$	
$n f_{e5} = 240$		70	$w_{e5} = 16800$	
$n f_{e6} = 240$		50	$w_{e6} = 12000$	
$f_1 = 280$	$\sum_1^5 f = 2550$	47	$w_1 = 13160$	$\sum_1^5 w = 172710$
$f_2 = 520$		55	$w_2 = 28600$	
$f_3 = 590$	$-\Delta f_5 = -110$	65	$w_3 = 38350$	$-\Delta w_5 = -14800$
$f_4 = 600$		75	$w_4 = 45000$	
$f_5 = 560$	$\sum_1^{15} f = 2440$	85	$w_5 = 47600$	$\sum_1^{15} w = 157910$
$f_6 = 525$		95	$w_6 = 49900$	
$f_7 = 490$	$\sum_1^{11} f = 5040$	105	$w_7 = 51500$	$\sum_1^{11} w = 461710$
$f_8 = 455$		115	$w_8 = 52300$	
$f_9 = 420$		125	$w_9 = 52500$	
$f_{10} = 380$		135	$w_{10} = 51300$	
$f_{11} = 220$		143	$w_{11} = 31500$	
$F_i = \sum_1^6 n f_e + \sum_1^{15} f = 3880 \text{ cm}^2$			$\sum_1^6 w_e + \sum_1^{15} w = 299510 \text{ cm}^3$	
$F'_i = \sum_1^6 n f_e + \sum_1^{11} f = 6480 \text{ cm}^2$			$\sum_1^6 w_e + \sum_1^{11} w = 603310 \text{ cm}^3$	

Fällt die Nullachse nicht mit einer Lamellengrenze zusammen, so sind für die Bildung der Summenwerte  $\Sigma f$  und  $\Sigma w$  bei der letzten Lamelle — im vorliegenden Falle in Abb. 170 bei Lamelle 5 — entsprechende Teilbeträge  $\Delta f_5$  und  $\Delta w_5$  in Abzug zu bringen. Es ergibt sich alsdann nach Gleichung (d) die größte Druckspannung im Beton zu:

$$\sigma_b = \frac{\frac{N}{F_i} y_1}{y_0 - \frac{\sum_1^6 w_e + \sum_1^{15} w}{F_i}} = \frac{\frac{N}{\sum_1^6 n f_e + \sum_1^{15} f} \cdot y_1}{y_0 - \frac{\sum_1^6 w_e + \sum_1^{15} w}{\sum_1^6 n f_e + \sum_1^{15} f}}$$

Fügt man hierin die Zahlen aus der vorstehenden Tabelle ein, so wird für  $N = 40000$  und für  $y_0 = 87,8$  cm,  $y_1 = 47,8$  cm (aus der Zeichnung entnommen).

$$\sigma_b = \frac{\frac{40000}{3880} \cdot 47,8}{87,8 - \frac{299510}{3880}} = 46,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit ist auch — entsprechend der Annahme eines geradlinigen Spannungsverlaufes — das Spannungsdiagramm unter Innehaltung der Nulllinie bekannt und somit auch die Spannung  $\sigma_e$  in der äußersten Eiseneinlage gefunden:

$$\sigma_e = \frac{n \sigma_b \cdot y_e}{y_1}, \quad y_e = 52,2 \text{ cm aus der Zeichnung.}$$

$$\sigma_e = \frac{15 \cdot 46,5 \cdot 52,2}{47,8} = +747 \text{ kg/cm}^2.$$

Wird die Betonzugspannung mit in Rechnung gestellt, so hat sich die Summenbildung über den ganzen Querschnitt zu erstrecken, also auf alle Werte  $f$  und  $w$  auszudehnen. Für diesen Fall liefert zunächst die graphische Lösung die Werte:  $y'_1 = 62,5$ ;  $y'_0 = 102,5$ .

Es ist:

$$\sigma'_b = \frac{\frac{N}{\sum_1^6 n f_e + \sum_1^{11} f} \cdot y'_1}{y'_0 - \frac{\sum_1^6 w_e + \sum_1^{11} w}{\sum_1^6 n f_e + \sum_1^{11} f}} = \frac{40000 \cdot 62,5}{102,5 - \frac{603310}{6480}} = -41,1 \text{ kg/cm}^2$$

(vgl. die Tabelle).

Aus dem Spannungsdiagramm folgt weiter:  $y'_z = 47,5$  und somit die größte Zugrandspannung im Beton:

$$\sigma_{bz} = \frac{\sigma'_b y'_z}{y'_1} = \frac{41,1 \cdot 47,5}{62,5} = +31,3 \text{ kg/cm}^2$$

eine Größe, bei der Risse auftreten werden<sup>1)</sup>.

Über die Berechnung außermittig auf Druck belasteter Verbundquerschnitte, bei denen nur Druckspannungen oder neben ihnen nur geringe Zugspannungen auftreten, vgl. den letzten Abschnitt über die Knickberechnung außermittig belasteter Stäbe und Querschnitte.

#### Zahlenbeispiele.

1. Der Ober- (Druck-) Gurt eines Balkenbinders (Abb. 171) wird durch eine zwischen die Knotenpunkte des Tragsystems gelegte Pfette in der Mitte zusätz-

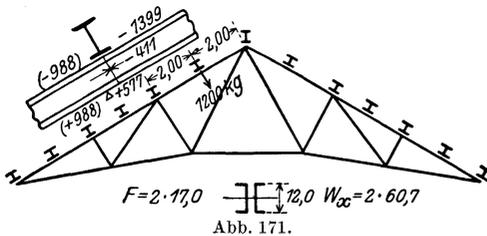


Abb. 171.

lich auf Biegung mit einer zur Achse senkrechten Last von 1200 kg belastet. Die Druckkraft — axial angreifend — beträgt 14000 kg. Als Querschnitt ist der in Abb. 171 dargestellte, aus zwei  $\square$ -Eisen (Normalprofil 12) bestehende Querschnitt mit  $F = 2 \cdot 17,0 = 34,0 \text{ cm}^2$  und  $W_x = 2 \cdot 60,7 = 121,4 \text{ cm}^3$  gewählt. Die

Randspannungen sind zu berechnen. Das zusätzliche Biegemoment in Stabmitte beträgt, wenn man den Gurtstab als frei gelagerten Träger auffaßt:

$$M = \frac{1200}{2} \cdot 200 = 120000 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Demgemäß wird:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{N}{F} - \frac{M}{W} = -\frac{14000}{34,0} - \frac{120000}{121,4} \\ &= -411 - 988 = -1399 \text{ kg/cm}^2 \geq 1400 \text{ kg/cm}^2, \\ \sigma_2 &= -411 + 988 = +577 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Die Beanspruchung  $\sigma_1$  ist eine hohe, aber noch gerade erlaubte.

<sup>1)</sup> Das dritte in Abb. 170 dargestellte Diagramm bezieht sich auf einen Querschnitt, der in der Zug- bzw. Druckzone verschiedene Elastizitätszahlen besitzt. Wegen dieses Sonderfalles sei auf die in Anm. I S. 154 mitgeteilte Veröffentlichung verwiesen.

2. Auf der in Abb. 172 dargestellten gußeisernen Säule mit ringförmigem Querschnitte ruhen zwei I-Träger auf, die bald mit 18 t, bald nur mit 12 t belastet werden. Die Spannungen im Säulenquerschnitt sind bei stärkster Exzentrizität des Kraftangriffes, also bei einseitiger Vollbelastung des einen Trägers und geringster Belastung es anderen, zu berechnen. Der Querschnitt hat einen äußeren Durchmesser von 20 cm, einen inneren von 16 cm, und demgemäß ein  $F = 113 \text{ cm}^2$  und ein Widerstandsmoment  $W = 463 \text{ cm}^3$ . Die Exzentrizität berechnet sich aus der Bedingung:

$$(P_1 + P_2) \cdot f = (18 + 12) \cdot f = P_1 \cdot 0,15 - P_2 \cdot 0,15 \\ = (18,0 - 12,0) \cdot 0,15,$$

also aus einer auf die Säulenachse bezogenen Momentengleichung

$$f = \frac{6,0 \cdot 0,15}{30} = 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}.$$

Demgemäß wird:

$$M = 3 \cdot 30000 = 90000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

und

$$\sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = -\frac{30000}{113} \pm \frac{90000}{463},$$

$$\sigma_1 = -266 - 194 = -460 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = -266 + 194 = -72 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Säule wird also in allen ihren Querschnittsteilen auch bei der exzentrischen Belastung gedrückt. Die hierbei auftretenden Spannungen sind als erlaubt zu bezeichnen. Bei voller Belastung  $P_1 = P_2 = 18 \text{ t}$  wird die alsdann über den Querschnitt sich gleichmäßig verteilende Druckspannung:

$$\sigma = \frac{2 \cdot 18000}{113} = -320 \text{ kg/cm}^2.$$

3. Der Obergurt eines Kragträgers wird (Abb. 173) durch ein  $M = 8630 \text{ kg} \cdot \text{cm}$  (infolge der ihn gleichmäßig beanspruchenden Last  $Q$ ) und durch eine Systemskraft  $H = 3600 \text{ kg}$  beansprucht. Wählt man ein I-Norm.-Prof. Nr. 7 mit  $F = 22,8 \text{ cm}^2$  und  $W_x = 12,6 \text{ cm}^3$ , so ist:

$$\sigma = \mp \frac{8630}{12,6} + \frac{3600}{22,8} = \mp 685 + 158,$$

$$\sigma_1 = +843, \quad \sigma_2 = -527 \text{ kg/cm}^2.$$

4. Der Kern des Mauerquerschnitts in Abb. 174 ist unter der Voraussetzung, daß die seitlichen Vorsprünge um je 1 m heraus-treten, zu bestimmen.

Aus den Abmessungen der Abbildung folgt:

$$F = (3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 1) \text{ m}^2 = 7 \text{ m}^2 = 70000 \text{ cm}^2,$$

$$J_x = \frac{3,0 \cdot 3,0^3}{12} - 2 \cdot \frac{1,0 \cdot 1,0^3}{12} = \frac{1}{12} (3 \cdot 27 - 2 \cdot 1) = 6,5833 \text{ m}^4,$$

$$J_y = 2 \cdot \frac{1,0 \cdot 3,0^3}{12} + \frac{1,0 \cdot 1,0^3}{12} = \frac{1}{12} (2 \cdot 27 + 1) = 4,5833 \text{ m}^4.$$

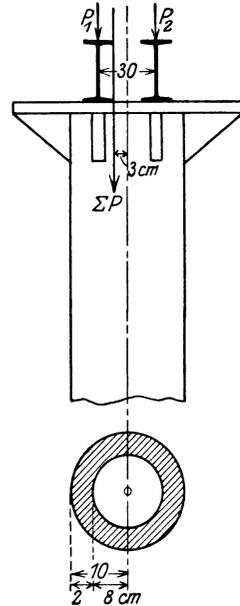


Abb. 172.

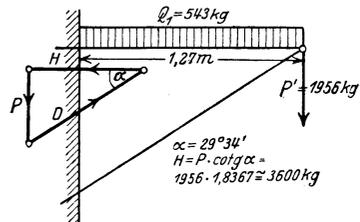


Abb. 173.

Demgemäß wird:

$$k_1 \cdot \frac{3,0}{2} = \frac{J_x}{F} = i_x^2 = \frac{6,5833}{7,0},$$

$$k_1 = \frac{6,5833}{7,0 \cdot 1,5} = 0,626 \text{ m},$$

$$k_2 \cdot \frac{3,0}{2} = \frac{J_y}{F} = i_y^2 = \frac{4,5833}{7,0},$$

$$k_2 = \frac{4,5833}{7,0 \cdot 1,5} = 0,445 \text{ m}.$$

Aus diesen Maßen ist der in Abb. 174 dargestellte Kern bestimmt. Er hat eine Höhe von 1,252 m und eine Breite von 0,89 m.

5. Eine Gewölbefuge (Abb. 175) von 1,00 m Stärke und 1,00 m Tiefe wird im Abstände von dem oberen Gewölberande von 0,20 m durch eine Normalkraft

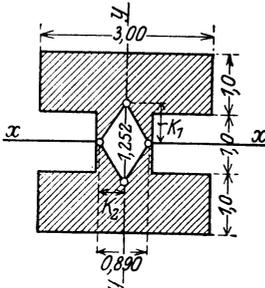


Abb. 174.

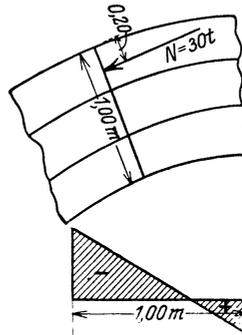


Abb. 175.

von 30 t exzentrisch belastet. Gesucht sind die Randspannungen. Da hier die Kernweite  $\frac{1,0}{3} = 0,33 \text{ m}$  beträgt, der Kern also um je 16,5 cm von der Mittellinie absteht, die Normalkraft aber von hier aus den Abstand von  $50 - 20 = 30 \text{ cm}$  hat, so liegt sie außerhalb des Kerns, und es sind somit verschiedene Spannungen, am oberen Rande — also nahe der Druckkraft — die größte Druckspannung, am unteren Gewölberande der Höchstwert der Zugspannung zu erwarten.

Es ist:

$$F = 1,00 \text{ m}^2; \quad W = \frac{1^3}{6} = \frac{1}{6} = 0,1666 \text{ m}^3,$$

$$M = 30 \cdot 0,30 = 9 \text{ t} \cdot \text{m},$$

und somit ergibt sich:

$$\sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = -\frac{30}{1} \pm \frac{9}{0,1666} = -30 \pm 54 = -84 \text{ bzw. } = +24 \text{ t/m}^2 \text{ } ^1).$$

Demgemäß sind die Randspannungen:

$$\sigma_1 = -8,4 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_2 = +2,4 \text{ kg/cm}^2.$$

<sup>1)</sup> 24 t/m<sup>2</sup> entsprechen 24 000 kg/m<sup>2</sup> und  $\frac{24\,000}{100 \cdot 100} = 2,4 \text{ kg/cm}^2$ .

6. Der in Abb. 176 dargestellte Mauerpfeiler setzt sich mit einer Grundfläche von  $6,00 \cdot 2,00$  m auf einen guten, tragfähigen Baugrund auf, der bis zu  $4 \text{ kg/cm}^2$  beansprucht werden darf. Auf die letzte Mauerfuge und ebenso auf die Erdfuge wirkt eine schräg gerichtete Kraft  $R = 155 \text{ t}$  ein, die in zwei Seitenkräfte, eine senkrechte  $N = 150 \text{ t}$  und eine waagrechte  $H = 37,5 \text{ t}$  zerlegt wird. Es ist zu untersuchen, ob der Pfeiler gegen Verschieben ausreichend gesichert ist und keine zu hohen Belastungen im Mauerwerk und auf dem Baugrunde auftreten. Da die Reibungszahl zwischen Erde und Mauerwerk unter ungünstigen Verhältnissen rd. 0,40 ist, so wird hier eine Reibungskraft auftreten  $= 0,4 \cdot N = 0,4 \cdot 150 = 60 \text{ t}$ , also  $> H > 37,5 \text{ t}$ , so daß eine Verschiebung des Pfeilers durch die horizontale Seitenkraft der Gesamtmittelkraft nicht zu befürchten steht.

Die Kraft  $N$  greift von der Pfeileraußenkante um  $1,60$  m entfernt an, liegt also, da die Fuge  $6,00$  m breit ist, nicht mehr im Kern, d. h. nicht im inneren Drittel. Ihre Exzentrizität gegenüber dem Querschnittsschwerpunkt ist  $f = 3,0 - 1,60 = 1,40$  m und somit  $M = 150 \cdot 1,4 = 210 \text{ t} \cdot \text{m}$ . Ferner ist  $W_y$  für die hier in Frage kommende senkrecht zur Kräfteebene stehende Achse  $y$ :

$$W_y = \frac{2 \cdot 6,0^2}{6} = 12,0 \text{ m}^3. \quad F = 12,0 \text{ m}^2.$$

Aus diesen Werten folgen die Randspannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{150}{12} - \frac{210}{12} = -\frac{360}{12} \text{ t/m}^2, \\ &= -30 \text{ t/m}^2 = -3,0 \text{ kg/cm}^2, \\ \sigma_2 &= \frac{-150 + 210}{12} = +\frac{60}{12} = +5,0 \text{ t/cm}^2 = +0,5 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Die mittlere Spannung  $\sigma_m$  im Schwerpunkt wird:

$$\sigma_m = \frac{150}{12} = 12,5 \text{ t/m}^2 = 1,25 \text{ kg/cm}^2.$$

Mit Hilfe dieses Wertes ist auch das Spannungsdiagramm in Abb. 176 gezeichnet. Es liefert die Nulllinie im Querschnitte. Die Lage dieser kann naturgemäß auch rechnerisch gefunden werden. Bezeichnet man die Abstände der Nulllinie von den beiden Querschnittsrändern (Abb. 176) mit  $r$  und  $t$ , so wird:

$$\begin{aligned} r:t &= \sigma_1:\sigma_2 = 3,0:0,5; \quad r+t = 6,0; \quad r = 6,0 - t; \\ 6,0 - t:t &= 3,0:0,5 = 6,0; \\ 6,0 - t &= 6,0 \cdot t; \quad 7t = 6,0; \quad t = 0,86 \text{ m} \end{aligned}$$

und demgemäß  $r = 5,14$  m. Nunmehr kann man auch (S. 151) nach der Gleichung

$$\sigma_{\max} = \frac{N \cdot z}{S_n}$$

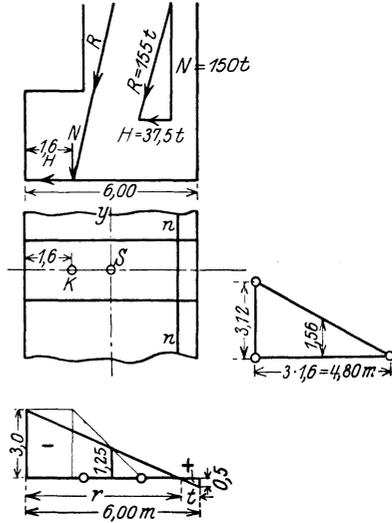


Abb. 176.

die größte Randspannung für den Fall berechnen, daß die Zugzone nicht berücksichtigt wird, also die Druckzone allein die gesamte Kraft aufnimmt. Hier ist  $z = 5,14$  m.

$$S_n = \frac{5,14^2 \cdot 2,0}{2} = 26,42 \text{ m}^3, \quad N = 150 \text{ t},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{150 \cdot 5,14}{26,42} = \frac{150}{5,14} = \text{rd. } 29,3 \text{ t/m}^2 = 2,93 \text{ kg/cm}^2 \text{)}.$$

Für die Spannung in der Erdfuge darf nur die 3fache Außenexzentrizität für die wirksame Fläche in Rechnung gestellt werden, d. h.  $b_0 = 3 \cdot 1,60 = 4,80$  m. Demgemäß wird (vgl. S. 146):

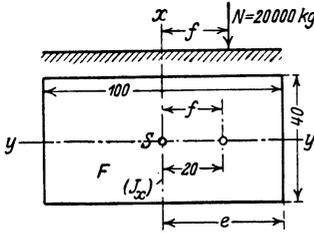


Abb. 177.

$$\sigma_m = \frac{150}{4,80 \cdot 2,0} = \frac{150}{9,6} = \text{rd. } 15,6 \text{ t/m}^2 = 1,56 \text{ kg/cm}^2$$

und somit:  $\sigma_{\max} = 2 \sigma_m = 3,02 \text{ kg/cm}^2 < 4 \text{ kg/cm}^2$ , wie höchstens gestattet war.

7. In einem Pfeiler-Rechtecksquerschnitt sei Abb. 177:  $F = 100 \cdot 40 = 4000 \text{ cm}^2$ ;  $f$  in der zur längeren Seite parallelen  $y$ -Achse = 20 cm, d. h.

$> k > \frac{100}{6} > 16,66 \text{ cm}$ ;  $N = 20000 \text{ kg}$ . Demgemäß wird (nach (S. 147):

$$\sigma_1 = -\sigma_m \left( \frac{k+f}{k} \right) = -\frac{20000}{4000} \left( \frac{16,66+20}{16,66} \right) = -5 \cdot 2,2 = -11 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = -5 \left( \frac{16,66-20}{16,66} \right) = +5 \cdot \frac{3,34}{16,66} = +1,0 \text{ kg/cm}^2.$$

Das gleiche Ergebnis liefert auch die normale Rechnung:

$$\sigma_1 = -\left( \frac{N}{F} + \frac{M}{W} \right); \quad M = 20 \cdot 20000 = 400000 \text{ kg} \cdot \text{cm};$$

$$W = \frac{40 \cdot 100^2}{6} \text{ cm}^3; \quad \frac{N}{F} = 5 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_1 = -\left( 5 + \frac{400000 \cdot 6}{40 \cdot 100^2} \right) = -(5+6) = -11 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_1 = -(5-6) = +1 \text{ kg/cm}^2.$$

8. Ein normal gebauter Fabrikschornstein von 36,0 m Höhe (Abb. 178) hat einen äußeren oberen Halbmesser von 0,9 m, einen unteren von 1,50 m und hier einen inneren Radius von 1,05 m, sowie einen Querschnitt von rd.  $3,6 \text{ m}^2$ . Das Eigengewicht des Schornsteins betrage 150 t, der für eine mittlere Stärke berech-

1) Man könnte — einfacher — auch folgendermaßen rechnen: Da  $S_n = \frac{z^2 b}{2}$  ist, so wird:  $\sigma_{\max} = \frac{N \cdot z}{z^2 b} = \frac{2N}{z b}$ , also vorliegend:  $\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 150}{5,14 \cdot 2} = 29,3 \text{ t/m}^2$ .

Es mag verwundern, daß jetzt die Randspannung geringer wird als bei Heranziehung der Zugfläche: ( $2,93 > 3,0 \text{ kg/cm}^2$ ). Es findet das seine Erklärung darin, daß bei Ausschaltung der Zugzone die Exzentrizität des Kraftangriffes verhältnismäßig geringer wird.

nete wagerechte Winddruck  $H = 8,0$  t. Das Moment infolge des Winddruckes ist

$$M = 8,0 \cdot \frac{36}{2} = 144 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Das Widerstandsmoment des Querschnitts berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} W &= \frac{(R^4 - r^4)\pi}{4R} = \frac{1,50^4 - 1,05^4}{4 \cdot 1,50} \cdot 3,14 = \frac{5,0625 - 1,217}{4 \cdot 1,50} \cdot 3,14 \\ &= \frac{3,8455}{6,0} \cdot 3,14 = 2,013 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Nunmehr lassen sich auch die Randspannungen bilden:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{N}{F} - \frac{M}{W} = -\frac{150}{3,6} - \frac{144}{2,013} = \text{rd.} -41,6 - 71,7 = -113,3 \text{ t/m}^2, \\ &= -11,3 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = -41,6 + 71,3 = +29,7 \text{ t/m}^2 = +2,97 \text{ kg/cm}^2.$$

Beide Spannungen sind bei bester Ausführung und gutem Material durchaus zulässig. Da sowohl Druck- wie Zugspannungen auftreten, ist ersichtlich, daß die Mittelkraft aus  $N$  und  $H$  die Grundfläche außerhalb des Kerns schneidet<sup>1)</sup>. Erhält der Schornstein ein im Grundrisse quadratisch geformtes Fundament, so sind nach Auffindung der auf dieses wirkenden Mittelkraft und ihres Angriffspunktes (am besten auf graphischem Wege) die Randspannungen im Fundamentkörper und die größte Pressung des Baugrundes unter der nach der Mittelkraft zu gelegenen Kante auf genau dieselbe Art zu bestimmen, wie es in Beispiel 6 ausführlich erläutert worden ist.

9. Eine mit 4 Längseisen von je 2 cm  $\varnothing$  an den Ecken bewehrte Verbundsäule hat einen quadratischen Querschnitt von 30 cm Seite. Die Entfernung der Eisen von den Querschnittsachsen beträgt je 12 cm. In einer der Haupt- (Schwer-)Achsen greift außermittig um das Maß von 5,0 cm eine Kraft  $N = 10000$  kg an. Zur Ermittlung der Randspannungen im Beton kann (vgl. S. 154) zunächst versuchsweise mit der Gleichung:

$$\sigma = -\frac{N}{F_i} \mp \frac{M}{W_i}$$

gerechnet werden. Hier ist:

$$\begin{aligned} F_i, \text{ der ideale Verbundquerschnitt,} &= F_b + n F_e = 30 \cdot 30 + 15 \cdot 4 \frac{2^2 \cdot 3,14}{4} \\ &= 900 + 188 = 1088 \text{ cm}^2 \text{ } ^2); \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Der Kerndurchmesser ergibt sich hier zu:

$$k \cdot R = \frac{J}{F} \quad k = \frac{J}{R \cdot F} = \frac{W}{F} = \frac{2,013}{3,6} = \text{rd.} 0,56 \text{ m}.$$

Da die Exzentrizität der Mittelkraft 0,96 m ist, so tritt letztere mithin aus dem Kern heraus.

$$\text{ } ^2) F_e = 4 f e = 4 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = 4 \cdot \frac{2^2 \cdot 3,14}{4} = 12,56 \text{ cm}^2.$$

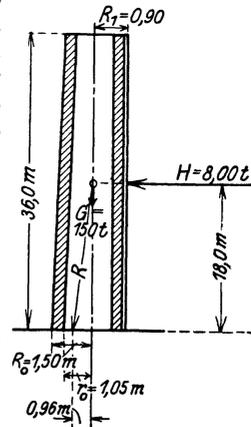


Abb. 178.

$$J_x = J_y = \frac{30,0^4}{12} + 15 \cdot F \cdot 12^2 = 67500 + 15 \cdot 12,56 \cdot 144 = 74630 \text{ cm}^4;$$

$$W_i = \frac{J_x}{h/2} = \frac{74630}{15} = \text{rd. } 5000 \text{ cm}^3.$$

Demgemäß wird:

$$\sigma = -\frac{10000}{1088} \mp \frac{10000 \cdot 5}{5000} \underline{\underline{=}} -9,5 \mp 10; \quad \sigma_1 = -19,5 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_2 = +0,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei der sehr geringen Zugspannung ist die obige Gleichung anwendbar. Wird die Exzentrizität = 10 cm, so ergibt sich:

$$\sigma = (-9,5 \mp 20) \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_1 = -29,5 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = +11,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Alsdann darf mit der Gleichung nur gerechnet werden, wenn die zulässige Druckspannung im Beton (vgl. S. 154)  $\geq 5 \cdot 11,5 \geq 57,5 \text{ kg/cm}^2$  ist. Hier müßte also ein besonders hochwertiger Zement Anwendung finden.

### 7. Bestimmung der Spannungen in außermittig belasteten, auf Knickung beanspruchten Druckstäben.

Liegen flußeiserne Stäbe vor, so ist zu der aus dem  $\omega$ -Verfahren abzuleitenden Druckspannung noch die Biegungsspannung zusätzlich hinzuzufügen, demgemäß ist hier (vgl. die Ausführungen auf den S. 77 und folgende) mit der Gleichung zu rechnen:

$$\sigma = \frac{N \cdot \omega}{F} + \frac{M}{W} \leq \sigma_{zul}.$$

Im gleichen Sinne können im elastischen Bereiche ( $\lambda = \frac{s_k}{i} > 100$ ) auch die auf S. 81 erwähnten, aus der Euler-Gleichung abgeleiteten Beziehungen gelten:

$$(a) \quad \text{bei der Sicherheit } \nu = 3,0; \quad J_{erf} = 1,97 P s_k^2 + \frac{eM}{\sigma_{zul}}^1,$$

$$(b) \quad \text{bei der Sicherheit } \nu = 4,0; \quad J_{erf} = 1,69 P s_k^2 + \frac{eM}{\sigma_{zul}},$$

wenn  $e$  der Abstand der äußersten gedrückten Faser von der maßgebenden Schwerachse bedeutet. Bei Durchführung der Rechnung, im besonderen bei Bestimmung der Zahl  $\omega$  wird zu beachten sein, nach welcher Achse hier infolge des Momentes ( $= M$ ) eine Ausbiegung des Stabes zu erwarten steht, da dieser Richtung entsprechend naturgemäß auch der für  $\omega$  maßgebende Wert:  $\frac{s_k}{i}$ , also vor allem  $i$  zu wählen ist.

<sup>1)</sup> Das zweite Glied erklärt sich aus der Beziehung:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{M}{\frac{J}{e}} = \frac{eM}{J} \quad \text{und somit: } J = \frac{e \cdot M}{\sigma}.$$

Bei gußeisernen Säulen sind die Randspannungen nach der Normalgleichung für außermittige Belastung  $\sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} \leq \sigma_{zul}$  zu ermitteln. Daneben ist hier auch nachzuweisen, daß  $J_{\min} > 6F \cdot s_k^2 + \frac{eM}{\sigma_{zul}}$  ist<sup>1)</sup>.

Bei Holzstäben, die erheblich außermittig durch eine Kraft  $N$  belastet, oder neben einer mittigen Kraft  $N$  durch ein Moment  $M$  beansprucht sind, darf die aus der Gleichung:

$$\sigma = \frac{\omega N}{F} + \frac{M}{W_n} \text{ bei Druckstäben,}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_n} \text{ bei Zugstäben}$$

errechnete Randspannung die für Holz auf S. 81 angegebenen Werte (also für Nadelholz 80 [Druck] bzw. 100 kg/cm<sup>2</sup> [Eiche]) nicht überschreiten. Hierbei ist „ohne Rücksicht auf die Richtung der Ausbiegung“ stets der größte Wert von  $\omega$  einzusetzen.  $F_n$  und  $W_n$  beziehen sich auf den „nutzbaren“ Querschnitt, verlangen also die Berücksichtigung etwaiger Schwächungen des Knickquerschnittes.

Verbundstützen, deren Längenverhältnis (vgl. S. 84) ein Ausknicken befürchten läßt, also demgemäß eine Berechnung nach dem  $\omega$ -Verfahren auf Knicken verlangen, sind bei außermittiger Belastung entsprechend den Eisen- oder Holzstützen nach der Beziehung

$$\sigma = \frac{\omega P}{F_i} \pm \frac{M}{W_i} \leq \sigma_{zul}$$

zu beurteilen.

#### Zahlenbeispiele.

1. Eine 3,50 m freigestützte Säule, gebildet durch ein I-Norm.-Prof. 45 mit  $F = 147 \text{ cm}^2$ ,  $W_x = 2037 \text{ cm}^3$ ,  $i_x = 17,65 \text{ cm}$ ;  $W_y = 203 \text{ cm}^3$ ;  $i_y = 3,43 \text{ cm}$  wird durch ein Moment  $M_x$ , wirksam also in der mit dem Stege zusammenfallenden  $y$ -Achse,  $M_x = 680 \text{ t} \cdot \text{cm}$  und zudem durch eine Normalkraft in der Stützenachse  $N = 56,0 \text{ t}$  belastet. Es ergibt sich für die Ausbiegung nach der  $x$ -Achse:

$$\lambda = \frac{s_k}{i} = \frac{350}{17,65} = \text{rd. } 20;$$

$\omega$  nach der Tabelle S. 79 = 1,02, und somit:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\omega N}{F} - \frac{M}{W_x} = -\frac{56 \cdot 1,02}{147} - \frac{680}{2037} = \\ &= -0,388 - 0,328 = -0,716 \text{ t/cm}^2 = -716 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

2. Ein Flußstahlstab besteht aus 2  $\square$  Norm.-Prof. Nr. 20, mit nach außen gekehrten Flanschen und einem lichten Stegabstand = 12 cm;  $N = 18 \text{ t}$ ;  $M_x = 382 \text{ t} \cdot \text{cm}$ ;  $M_y = 410 \text{ t} \cdot \text{cm}$ ;  $s_x = 480 \text{ cm}$ ;  $F = 2 \cdot 32,2 = 64,4 \text{ cm}^2$ ;  $J_y = 4428$ ,  $J_x = 3822 \text{ cm}^3$  (je für den Gesamtquerschnitt),  $W_y = 326$ ,  $W_x = 382 \text{ cm}^3$ ,

<sup>1)</sup> Siehe Fußnote S. 166.

$i_x = 7,8$  cm;  $i_y = 8,3$  cm. Demgemäß wird für die Verbiegung nach der  $y$ -Achse:

$$\lambda = \frac{s_k}{i_y} = \frac{480}{8,3} = 51,5; \quad \omega = 1,18 \quad (\text{vgl. S. 79});$$

$$\sigma_x = -\frac{\omega N}{F} - \frac{M_x}{W_y} = -\left(\frac{1,18 \cdot 18}{64,4} + \frac{382}{326}\right) = -1,5 \text{ t/cm}^2 = -1500 \text{ kg/cm}^2$$

und nach der  $x$ -Achse:

$$\lambda = \frac{s_k}{i_x} = \frac{480}{7,8} = \text{rd. } 62; \quad \omega = 1,29;$$

$$\sigma_y = -\left(\frac{1,29 \cdot 18}{64,4} + \frac{410}{382}\right) = -1,44 \text{ t/cm}^2 = 1440 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Wert  $\sigma_x$  ist  $> \sigma_{zul} > 1400 \text{ kg/cm}^2$  und verlangt demgemäß einen stärkeren Querschnitt als hier gewählt.

3. Es soll das  $J_{ert}$  für ein Breitflansch-Stützenprofil bestimmt werden für:  $N = 24$  t;  $M = 24 \cdot 10 = 240$  t·cm;  $s_k = 7,50$  m;  $\sigma_{zul} = 1,4$  t/cm<sup>2</sup>. Nach der Gleichung auf S. 166 wird:

$$J_{ert} = 1,69 \cdot N \cdot s_k^2 + \frac{e M}{\sigma_{zul}}.$$

$e$  wird versuchsweise zu  $\frac{27}{2} = 13,5$  cm angenommen; demgemäß wird:

$$J_{ert} = 1,69 \cdot 24 \cdot 7,5^2 + \frac{13,5 \cdot 240}{1,4} \approx (2290 + 2320) \approx 4610 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein Querschnitt-Breitflansch I-Eisen Nr. 27 mit  $h = b = 27$  cm (also  $e = 13,5$  cm) und  $J_y = 4920 \text{ cm}^4 > 4610$ ;  $J_x$  ist für das Profil =  $16529 \text{ cm}^4$ .

Da ferner  $i_y = 7,02$  cm ist, so ist auch die Anwendung der obigen Gleichung statthaft, weil  $\lambda = \frac{7,50}{7,02} = \text{rd. } 107$ , also  $> 100$  ist, und somit die Stütze im elastischen Bereiche liegt.

4. Eine gußeiserne Säule trägt eine Achslast  $N = 60$  t und ein Moment =  $300$  t·cm =  $300000$  kg·cm (also Exzentrizität =  $5$  cm);  $s_k = 4,00$  m.

Es ergibt sich:

$$\sigma = -\frac{N}{F} - \frac{M}{W}.$$

Nimmt man einen Ringquerschnitt von einem äußeren Durchmesser =  $26$  cm und einer Wandstärke =  $2,6$  cm an, so wird

$$J = 13234 \text{ cm}^4; \quad W = \frac{13234}{13} = \text{rd. } 1018 \text{ cm}^3. \quad F = 191,0$$

und hiermit:

$$\sigma = -\frac{60000}{191,0} - \frac{300000}{1018} = \text{rd. } 600 \text{ kg/cm}^2, \text{ also } = \sigma_{zul}.$$

Kontrolliert man das Trägheitsmoment nach der Beziehung:

$$J = 6 N s_k^2 + \frac{e M}{\sigma_{zul}},$$

so ergibt sich:

$$J_{ert} = 6 \cdot 60 \cdot 4,0^2 + \frac{13 \cdot 300}{0,6} = 360 \cdot 16 + 13 \cdot 500 = 12260 < 13234 < J_{\text{vorhanden}}.$$

5. Ein ungeschwächter Holzstiel von  $24 \cdot 24 \text{ cm}^2$  und  $8,33 \text{ m}$  Länge sei außenmittig in einer Hauptachse mit  $N = 6000 \text{ kg}$  im Abstände  $= 6 \text{ cm}$  vom Schwerpunkt belastet. Die auftretende Knick- und Biegungsspannung wird gesucht. Es ist:  $F = 576 \text{ cm}^2$ ;  $s_k = 833 \text{ cm}$ ;  $i = 0,288 \cdot 24 = 6,94 \text{ cm}$  und somit<sup>1)</sup>:

$$\frac{s_k}{i} = \frac{833}{6,94} = \text{rd. } 120;$$

Hieraus folgt für Nadelholz:  $\omega = 5,36$ ; ferner wird

$$W = \frac{24^3}{6} = 2304 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad M = 3000 \cdot 6 = 18\,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma &= - \left( \frac{\omega N}{F} + \frac{M}{W} \right) = - \left( \frac{5,36 \cdot 6000}{570} + \frac{18\,000}{2304} \right) \\ &= - (47,6 + 15,6) = - 63,2 \text{ kg/cm}^2 < 80 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

also erlaubt.

6. Eine Eisenbetonstütze quadratischen Querschnittes (Seite  $a = 30$ , also  $F_b = 900 \text{ cm}^2$ ) wird durch 4 Längseisen von je  $2,0 \text{ cm } \varnothing$  bewehrt, die in Entfernung von je  $12 \text{ cm}$  von den Schwerachsen entfernt liegen. Für diese Stütze wurde bereits auf S. 165—166 gefunden: Ideeller Querschnitt:  $F_i = 1088 \text{ cm}^2$ ; idelles Widerstandsmoment:  $W_i \leq 5000 \text{ cm}^3$ . Die Belastung der Stütze sei außenmittig um  $8 \text{ cm}$  und betrage  $N = 10\,000 \text{ kg}$ . Die Knick- und Biegungsspannungen werden gesucht.

Aus dem Verhältnis  $\frac{l}{s} = \frac{600}{30} = 20$  folgt die Knickgefahr und nach der Tabelle auf S. 84 der  $\omega$ -Wert:  $\omega = 1,25$ . Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma &= - \frac{\omega N}{F_i} \mp \frac{M}{W_i} = - \frac{1,25 \cdot 10\,000}{1088} \mp \frac{10\,000 \cdot 8}{5000} \\ &= - 11,4 \mp 16,0; \quad \sigma_1 = - 27,4; \quad \sigma_2 = + 4,6 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Beide Spannungen sind als durchaus erlaubt zu betrachten, da namentlich ein  $\sigma_2 = \sigma_z = 4,6 \text{ kg/cm}^2$  ein Entstehen von Rissen nicht befürchten läßt.

<sup>1)</sup> Vgl. S. 57 und 58.