

Physikalisches Praktikum

Eine Sammlung von Übungsaufgaben für die physikalischen
Übungen an Universitäten und Hochschulen aller Gattungen

Von

Wilhelm H. Westphal

b. a. o. Professor der Physik
an der Technischen Hochschule Berlin



Mit 101 Abbildungen und 6 graphischen Tabellen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

ISBN 978-3-663-00917-7 ISBN 978-3-663-02830-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-02830-7
Alle Rechte vorbehalten
Springer Fachmedien Wiesbaden

Vorwort

Dieses Buch ist ein Hilfsbuch zum Gebrauch bei den physikalischen Übungen (Praktikum) an Universitäten und Hochschulen jeglicher Art und soll an Hand von 40 ausgewählten Aufgaben eine Anleitung zur Ausführung physikalischer Übungsaufgaben überhaupt geben. Die hier besprochenen Aufgaben sollen also Musterbeispiele sein. Ich habe grundsätzlich darauf verzichtet, die Gesamtheit der Aufgaben, die an den einzelnen Hochschulen gestellt werden, auch nur einigermaßen vollständig zu erschöpfen. Schon dadurch unterscheidet sich dieses Buch durchaus von seinem Vorgänger im gleichen Verlage, dem „Physikalischen Praktikum“ von Wiedemann und Ebert, und erst recht von dem „Lehrbuch der praktischen Physik“ von Kohlrausch.

Die Mehrzahl der besprochenen Aufgaben gehört zum eisernen Bestande jedes Praktikums. Einige weitere Aufgaben, die weniger allgemein eingeführt sein dürften, haben sich in meiner Erfahrung als besonders lehrreich bewährt und wurden aus diesem Grunde aufgenommen. Von der Besprechung von Aufgaben, die üblicherweise auch im physikalisch-chemischen oder im elektrotechnischen Praktikum bearbeitet werden, habe ich abgesehen. In der Hauptsache behandelt das Buch die Mehrzahl derjenigen Aufgaben, die an der Technischen Hochschule Berlin von den Studenten der Physik in einem dreisemestrigen, wöchentlich vierstündigen Anfängerpraktikum ausgeführt werden, wobei aber die Besprechung der Aufgaben in einer besonderen, zweistündigen Vorlesung erfolgt. Für die Studenten anderer Fächer, an die geringere Anforderungen gestellt werden, wird man leicht eine Auswahl der für sie geeigneten Aufgaben treffen und die gebotenen Abstriche an den Anforderungen bei den einzelnen Aufgaben machen können.

Dieses Buch kann und soll den Assistenten nicht ersetzen, aber wirksam unterstützen. Eine mündliche, auf den jeweiligen Hörerkreis abgestimmte Erklärung der Aufgaben ist in der Regel unentbehrlich. Darum habe ich auch von einer allzu-

sehr ins einzelne gehenden Beschreibung spezieller Versuchsanordnungen abgesehen, weil diese doch an den einzelnen Instituten oft recht verschieden ausgestattet sind. Um so mehr Wert habe ich darauf gelegt, die theoretischen und meßtechnischen Grundlagen der Aufgaben gründlich zu erläutern und dem Studenten jeweils durch ein wirklich durchgeführtes Beispiel mit allen nötigen Zahlenangaben und graphischen Darstellungen eine Anleitung zur Durchführung der Aufgaben zu geben. Ferner ist bei fast allen Aufgaben eine Fehlerrechnung an Hand des Beispiels durchgeführt. So kann das Buch dem Studenten seine Arbeit erleichtern und sein Verständnis vertiefen; es kann aber auch dem jungen Assistenten zur Einführung in seine Lehraufgabe dienen.

In Anlehnung an die in diesem Buch durchgeführten Musterbeispiele werden Assistenten und Studenten den Weg finden, auf dem andere Aufgaben im gleichen Sinne durchgeführt werden können.

Die Durchführung von Fehlerrechnungen bringt erfahrungsgemäß eine wesentliche Vermehrung des pädagogischen Nutzens der Aufgaben mit sich. Sie können aber meist nur in ruhiger häuslicher Arbeit ordentlich ausgeführt werden und bedeuten eine wesentliche Mehrbelastung. Es sollte aber wenigstens von den Physikern verlangt werden, daß sie bei möglichst vielen Aufgaben eine Fehlerrechnung ausführen; von den Studenten anderer Fächer sollte man es wenigstens gelegentlich in besonders geeigneten, einfachen Fällen verlangen. Ich habe die Erfahrung gemacht, daß die interessierteren Studenten sich dieser Arbeit, die in gewissem Sinne die Krönung jeder Aufgabe bildet, besonders gern unterziehen. Man kann aber im Praktikum nicht mit dem ganzen Rüstzeug der strengen Fehlertheorie arbeiten, schon deshalb nicht, weil dafür meist die nötigen mathematischen Vorkenntnisse fehlen. Überdies entziehen sich oft beträchtliche Fehlerquellen — Eichfehler von Meßgeräten u. dgl. — der Kritik des Studenten, weil ihre Untersuchung nicht im Rahmen der gestellten Aufgabe liegt. Aus diesem Grunde wird in diesem Buch meist nicht der mittlere (quadratische) Fehler, sondern der Größtfehler des Ergebnisses berechnet. Auf diese Weise gelangt der berechnete Fehler eher in die Größenordnung des wirklichen

Fehlers. Trotz der Mängel eines solchen Verfahrens sehe ich in ihm die einzige Möglichkeit, im Anfängerpraktikum überhaupt Fehlerrechnung zu treiben und die Studenten so wenigstens auf die grundlegende Wichtigkeit einer gewissenhaften Kritik an der eigenen Leistung schon im Anfang ihres Studiums hinzuweisen. Man wird aber gelegentlich betonen müssen, daß man aus den oben genannten Gründen das Ergebnis einer solchen Fehlerrechnung nicht immer allzu wörtlich nehmen darf.

Beim Schreiben dieses Buches hat mich die in jahrzehntelanger Arbeit — erst als Assistent, dann als Übungsleiter — gewonnene Erfahrung gelehrt, daß ein physikalisches Anfängerpraktikum nur dann einen wirklichen Unterrichtserfolg hat und nur dann auch die Studenten wirklich befriedigt, wenn man von den Studenten eine sehr gründliche und sorgfältige Beschäftigung mit den einzelnen Aufgaben verlangt, die nötige Zeit dafür zur Verfügung stellt und sich aus diesem Grunde in der Zahl der geforderten Aufgaben beschränkt. Bei dem von mir geleiteten Praktikum ist es Grundsatz, daß — von wenigen Ausnahmen abgesehen — an einem Vor- oder Nachmittag nur eine Aufgabe erledigt wird. Deshalb sind die hier besprochenen Aufgaben fast alle so gehalten, daß sie — einschließlich der für eine ausreichende mündliche Erklärung erforderlichen Zeit — 3 bis 4 Stunden in Anspruch nehmen, in dieser Zeit aber auch in aller Ruhe erledigt werden können. Diejenigen Leser, die sich für eine zweckmäßige Organisation des physikalischen Anfängerpraktikums näher interessieren, verweise ich auf meinen Aufsatz in der ZS. f. d. physikal. u. chem. Unterricht 50, 147, 1937.

An der Gestalt, die dieses Buch gewonnen hat, sind meine Assistenten an der Technischen Hochschule Berlin sehr stark beteiligt. Sie haben wesentlich zur Sammlung der Erfahrungen beigetragen, die in diesem Buch niedergelegt sind. Ein besonderer Dank gebührt meinem langjährigen Mitarbeiter Dr.-Ing. W. Walcher, der mich bei der Abfassung des Manuskriptes ständig mit seinem Rat unterstützt hat, und der auch die Korrekturen mit mir gelesen hat.

Berlin, im Dezember 1937.

Wilhelm H. Westphal.

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

A. Maß und Messen

	Seite
1. Das Wesen physikalischer Messungen	1
2. Maßeinheiten und Maßsysteme der Mechanik.....	2
3. Temperatur und Wärmemenge	3
4. Die elektrischen und magnetischen Einheiten	3

B. Zur Berechnung von Messungsergebnissen. Fehlerrechnung

5. Rechenverfahren und Rechenmittel.....	5
6. Rechnen mit kleinen Größen. Kürzungsregeln	6
7. Fehlerquellen.....	7
8. Der Zweck der Fehlerrechnung	10
9. Arithmetisches Mittel und mittlerer Fehler.....	12
10. Einzelmessungen von verschiedenem Gewicht	14
11. Der Fehler eines zusammengesetzten Ergebnisses	14

C. Einige Regeln für physikalische Messungen

12. Protokollführung	18
13. Einiges zur Ausführung der Messungen	19
14. Elektrische Schaltungen.....	21

II. Mechanik

1. Aufgabe: Spezifisches Gewicht fester Stoffe	23
2. „ Spezifisches Gewicht von Flüssigkeiten	29
3. „ Elastizitätsmodul	34
4. „ Oberflächenspannung	43
5. „ Innere Reibung (Zähigkeit) von Flüssigkeiten.....	46
6. „ Empfindlichkeit der Waage	57
7. „ Absolute Wägung.....	64
8. „ Trägheitsmomente und Richtmomente	70
9. „ Messung des Schubmoduls	79

	Seite
10. Aufgabe: Schwingung der Waage	86
11. „ Gekoppelte Pendel	93

III. Wärme, Gastheorie, Akustik

12. Aufgabe: Messung spezifischer Wärmen	102
13. „ Schmelz- und Verdampfungswärme des Wassers	110
14. „ Messungen mit dem Volumenometer. Boyle-Mariottesches Gesetz	118
15. „ Messung des Druckkoeffizienten der Luft mit dem Gasthermometer	124
16. „ Luftdichte. Luftfeuchtigkeit	130
17. „ Akustische Messungen	137

IV. Optik

18. Aufgabe: Brennweite dünner Linsen	147
19. „ Brennweite und Hauptebenen einer dicken Linse.....	156
20. „ Vergrößerung einer Lupe	163
21. „ Messungen am Mikroskop.....	166
22. „ Brechungsindex eines Prismas	172
23. „ Wellenlängenmessung mit dem Gitter	181
24. „ Lichtmessung	187

V. Elektrizität und Magnetismus

25. Aufgabe: Widerstandsmessung mit Strom- und Spannungsmesser. Kennlinie einer Glühlampe.....	194
26. „ Widerstandsmessung in der Brückenschaltung.....	200
27. „ Klemmenspannung und innerer Widerstand von Elementen	205
28. „ Das elektrische Wärmeäquivalent.....	212
29. „ Temperaturkoeffizient des Widerstandes von Metallen	217
30. „ Messung von Spannungen und Widerständen durch Kompensation	223
31. „ Spezifischer Widerstand von Elektrolyten	228
32. „ Messung von Induktivitäten und Kapazitäten	233
33. „ Magnetisches Feld einer Spule und erdmagnetisches Feld.....	238

	Seite
34. Aufgabe: Schwingung und Dämpfung des Galvanometers	248
35. „ Empfindlichkeit und Widerstand eines Galvanometers	259
36. „ Die Konstanten des Galvanometers	268
37. „ Messung sehr großer und sehr kleiner Widerstände..	273
38. „ Ballistisches Galvanometer	277
39. „ Messung magnetischer Felder mit der Induktionsspule	288
40. „ Messungen mit dem Elektrometer	296
Anhang I: Ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen	307
„ II: Theorie des Drehspulgalvanometers	315

Tabellen

I. Dichte des Wassers zwischen 0 und 30° C	326
II. Dampfdruck des Wassers zwischen — 10 und + 30° C	327
III. Siedetemperatur des Wassers zwischen 68 und 78 cm Hg.	328
IV. Reduktion einer Barometerablesung auf 0° C	329
V. Reduktion eines Ausschlags auf den Bogen	330
VI. Zum ballistischen Galvanometer	331
VII. Wichtige Zahlen	332

I. Einleitung

A. Maß und Messen

1. Das Wesen physikalischer Messungen

Jede physikalische und auch jede technische Messung einer Größe bezweckt die Feststellung, wie oft (oder zu welchem Bruchteil) die für die betreffende Größe vereinbarte Maßeinheit in dieser Größe enthalten ist. Das Verhältnis der gemessenen Größe zur Maßeinheit heißt die Maßzahl der Größe. Jede Messung ist also ein unmittelbarer oder mittelbarer Vergleich mit der Maßeinheit, d. h. eine Größe x wird durch die Messung als ein bestimmtes Vielfaches (oder ein bestimmter Bruchteil), ein k -faches, der Maßeinheit E erkannt: $x = kE$. Der Betrag der Maßzahl k ist also von der — an sich willkürlichen — Wahl der Maßeinheit abhängig. So drückt sich z. B. das Ergebnis einer Längenmessung entweder durch $x = 137,52$ cm oder $1,3752$ m aus. Je größer die Maßeinheit ist, um so kleiner ist die Maßzahl.

Abgesehen von den seltenen Fällen, wo eine Messung in einer Abzählung von Ereignissen besteht, erfolgen physikalische Messungen durchweg durch Ablesungen auf Skalen (Zeigerablesungen im eigentlichen und übertragenen Sinne), werden also letzten Endes auf Messungen von Längen auf einer Skala zurückgeführt.

In der Regel wird das gesuchte Ergebnis nicht durch unmittelbare Messung der in Frage stehenden Größe gewonnen. In den meisten Fällen wird die Maßzahl der Größe auf Grund einer mathematisch formulierten Beziehung aus mehreren Größen berechnet, die durch unmittelbare Messungen ermittelt worden sind (zusammengesetzte Ergebnisse).

Wir beschränken uns im folgenden grundsätzlich auf dasjenige, was beim Gebrauch dieses Buches zu wissen nötig ist. Wegen aller weitergehenden Einzelheiten verweisen wir auf die Literatur, bezüglich aller meßtechnischen Fragen vor allem auf F. Kohlrausch, „Lehrbuch der praktischen Physik“.

2. Maßeinheiten und Maßsysteme der Mechanik

Die physikalischen Grundeinheiten der Mechanik sind:

das Zentimeter (cm) als Einheit der Länge,
das Gramm (g) „ „ „ Masse,
die Sekunde (sec) „ „ „ Zeit.

Alle übrigen mechanischen Größen lassen sich auf Grund ihrer Definitionen auf die Grundgrößen der Länge, der Masse und der Zeit zurückführen (abgeleitete Größen), und ihre Einheiten lassen sich als Potenzprodukte jener drei Grundeinheiten ausdrücken (Tabelle 1). Dieses System von Einheiten heißt das CGS-System.

Tabelle 1. Einheiten der Mechanik im CGS-System.

Größe	Einheit
Geschwindigkeit	$\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$
Beschleunigung	$\text{cm} \cdot \text{sec}^{-2}$
Winkelgeschwindigkeit	sec^{-1}
Winkelbeschleunigung	sec^{-2}
Frequenz, Kreisfrequenz	$\text{sec}^{-1} = \text{Hertz (Hz)}$
Bewegungsgröße (Impuls)	$\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$
Kraft	$\text{g} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-2} = \text{dyn}$
Energie, Arbeit	$\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = \text{erg}$
Trägheitsmoment	$\text{g} \cdot \text{cm}^2$
Drehmoment	$\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = \text{dyn} \cdot \text{cm}$
Richtmoment	$\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2} = \text{dyn} \cdot \text{cm}$

Die technischen Grundeinheiten der Mechanik sind:

das Meter (m) als Einheit der Länge,
das Kilogramm (kg*) „ „ „ Kraft,
die Sekunde (sec) „ „ „ Zeit.

Die Masse ist im technischen Maßsystem eine — leider namenlose — Größe, deren Einheit gleich $9810 \text{ g} = 9,810 \text{ kg}$ ist.

Da die Bezeichnungen „1 Gramm“ bzw. „1 Kilogramm“ in doppeltem Sinne gebraucht werden, erstens für Masseneinheiten im CGS-System, zweitens für Kräfteinheiten im technischen Maßsystem, so fügen wir den Einheitsbezeichnungen stets einen Stern hinzu, wenn es sich um die Kräfteinheiten handelt. Es bezeichnet also 1 g bzw. 1 kg eine Masse, 1 g* bzw. 1 kg* eine Kraft (vgl. Westphal, „Physik“, 4. Aufl., § 13).

Wir werden in diesem Buch von Fall zu Fall das eine oder das andere Maßsystem benutzen und gelegentlich auch von dem einen in das andere umrechnen müssen. Wir merken hier vor allem die Umrechnungsbeziehung für Kräfte an. Es ist

$$1 \text{ kg}^* = 0,981 \cdot 10^6 \text{ dyn}, \quad 1 \text{ g}^* = 0,981 \cdot 10^3 \text{ dyn};$$

$$1 \text{ dyn} = \frac{10^{-6}}{0,981} \text{ kg}^* = \frac{10^{-3}}{0,981} \text{ g}^*.$$

3. Temperatur und Wärmemenge

In der Wärmelehre kommt zu den drei Grundgrößen der Mechanik als vierte Grundgröße die Temperatur hinzu. Die Einheit der Temperatur ist 1° , d. h. $\frac{1}{100}$ der Temperaturdifferenz zwischen dem Gefrierpunkt und dem normalen Siedepunkt des Wassers.

In der Meßtechnik verwendet man die Celsius-Skala, deren Nullpunkt beim Gefrierpunkt des Wassers liegt, und in der es auch negative Temperaturen gibt. Die in dieser Skala gemessenen Temperaturen bezeichnen wir in der Regel mit dem Symbol t , unter Hinzufügung der Einheitsbezeichnung $^\circ\text{C}$. Bei theoretischen Überlegungen ist oft die Verwendung der absoluten oder Kelvin-Skala bequemer, die sich von der Celsius-Skala dadurch unterscheidet, daß ihr Nullpunkt um rund 273° tiefer — also bei -273°C — liegt, und in der es keine negativen Temperaturen gibt. In dieser Skala gemessene Temperaturen bezeichnen wir mit dem Symbol T , unter Hinzufügung der Einheitsbezeichnung $^\circ\text{K}$. Wenn t und T die Maßzahlen der gleichen Temperatur in den beiden Skalen bezeichnen, so ist

$$T = 273 + t. \quad (1)$$

Die physikalische Einheit der Wärmemenge (thermischen Energie) ist die (kleine) Kalorie (Grammkalorie, cal). Eine Kalorie ist diejenige Wärmemenge, die 1 g Wasser bei der Erwärmung von $14,5^\circ\text{C}$ auf $15,5^\circ\text{C}$ aufnimmt.

4. Die elektrischen und die magnetischen Einheiten

In der physikalischen Meßtechnik bedient man sich ausnahmslos der internationalen elektrischen Einheiten. Die für uns hier in Frage kommenden Einheiten sind in Tabelle 2 zu-

Tabelle 2.
Internationale und elektromagnetische Einheiten.

Elektrizitätsmenge e oder Q ..	1 Coulomb (Coul) = 0,1	e. m. E.
Stromstärke i	1 Ampere (A) = 0,1	e. m. E.
Spannung U	1 Volt (V) = 10^8	e. m. E.
Widerstand R	1 Ohm (Ω) = 10^9	e. m. E.
Kapazität C	1 Farad (F) = 10^{-9}	e. m. E.
	bzw. 1 Mikrofarad (μ F) = 10^{-15}	e. m. E.
Induktivität L	1 Henry (Hy) = 10^9	e. m. E.

sammengestellt. Bei theoretischen Überlegungen ist es aber häufig bequemer, statt der internationalen Einheiten, die an das CGS-System angeschlossenen elektromagnetischen Einheiten (e. m. E.) zu benutzen. Die Umrechnungsbeziehungen zwischen diesen Maßsystemen sind in Tabelle 2 enthalten (vgl. Westphal, „Physik“, 4. Aufl., § 198).

In der Physik ist es im allgemeinen üblich, die magnetischen Einheiten dadurch an das CGS-System anzuschließen, daß man die Konstante des Coulombschen Gesetzes gleich der reinen Zahl 1 setzt und die zwischen zwei Magnetpolen wirkende Kraft in der Einheit 1 dyn mißt. Das führt zu einer bestimmten Einheit der Polstärke und anschließend zu den weiteren magnetischen Einheiten.

Die Einheit der magnetischen Feldstärke in diesem Maßsystem heißt 1 Oersted (Oe). (Diese Bezeichnung ist an die Stelle der früheren Bezeichnung 1 Gauß getreten.) Dann beträgt die magnetische Feldstärke im Innern einer vom Strom i A durchflossenen, langgestreckten Spule von der Länge l und von n Windungen

$$H = \frac{0,4 \pi n}{l} i = 1,257 \frac{n}{l} i \text{ Oe.} \quad (1)$$

In der Meßtechnik ist es aber häufig bequemer, ein unmittelbar an das internationale elektrische Maßsystem angeschlossenes magnetisches Maßsystem, das Miesche Maßsystem, zu benutzen. Es ist dadurch definiert, daß in Gl. (1) der Faktor $0,4 \pi = 1,257$ entfällt. An die Stelle der Gl. (1) tritt dann die Gleichung

$$H = \frac{n}{l} i \cdot \text{cm}^{-1} \text{ (bzw. AW} \cdot \text{cm}^{-1}\text{).} \quad (2)$$

Da n/l die Zahl der auf 1 cm Spulenlänge entfallenden Windungen ist, so ist ni/l die auf 1 cm der Spulenlänge entfallende Stromstärke. Daher heißt die neue Einheit der magnetischen Feldstärke 1 Amperewindung $\cdot \text{cm}^{-1}$ ($\text{AW} \cdot \text{cm}^{-1}$) oder besser kurz 1 Ampere $\cdot \text{cm}^{-1}$ ($\text{A} \cdot \text{cm}^{-1}$). Aus Gl. (1) und (2) folgt

$$1 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-1} = 1,257 \text{ Oe.} \quad (3)$$

Zwischen der magnetischen Feldstärke H und der magnetischen Induktion B besteht in beiden Maßsystemen die Beziehung

$$B = \mu H. \quad (4)$$

Die Einheit der magnetischen Induktion im CGS-System heißt 1 Gauß. μ heißt die Permeabilität des betreffenden Mediums. Im CGS-System ist μ eine reine Zahl und hat für das Vakuum — fast genau auch für Luft — den Betrag 1. Im Mieschen Maßsystem ist μ keine reine Zahl und hat für das Vakuum (Luft) den Betrag $\mu = \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-8}$ (Induktionskonstante). Näheres s. Westphal, „Physik“, 4. Aufl., § 234.

B. Zur Berechnung von Messungsergebnissen. Fehlerrechnung

5. Rechenverfahren und Rechenmittel

Bei der Berechnung eines zusammengesetzten Messungsergebnisses handelt es sich fast immer um die Multiplikation und Division mehrerer teils unmittelbar gemessener, teils anderweitig gegebener Größen (Konstanten, Zahlenfaktoren usw.) oder von Potenzen solcher Größen. Sofern man die betreffenden Rechenoperationen nicht im unmittelbaren Rechenverfahren durchführt, wird man von Fall zu Fall entscheiden müssen, ob man sich mit der Benutzung des Rechenschiebers begnügen will, oder ob die Benutzung einer Logarithmentafel geboten ist. Beim Rechenschieber ist jede Ablesung oder Einstellung durchschnittlich mit der gleichen relativen Unsicherheit behaftet, die bei einem 25 cm langen Rechenschieber bei vorsichtiger Schätzung $\pm 0,1\%$ beträgt. Die einfache Multiplikation oder Division zweier Zahlen erfordert 1. die Einstellung auf die erste Zahl, 2. die Einstellung

auf die zweite Zahl, 3. die Ablesung des Ergebnisses. Die Fehlerrechnung liefert dann für den mittleren (relativen) Fehler des Ergebnisses den Wert $\pm \sqrt{0,03} \% \approx \pm 0,17 \%$. Gehen in eine Rechnung n Zahlen ein, so beträgt der mittlere Fehler $\pm \sqrt{2n - 1}$ 0,1 %. Daraus folgt abgerundet für

2	Zahlen der Fehler	$\pm 0,17 \%$
3	„ „ „	$\pm 0,22 \%$
4	„ „ „	$\pm 0,26 \%$
5	„ „ „	$\pm 0,3 \%$
6	„ „ „	$\pm 0,33 \%$

Man muß daher auf Grund der angestrebten bzw. mit den benutzten Hilfsmitteln erzielbaren Meßgenauigkeit in jedem Fall erwägen, ob die Benutzung des Rechenschiebers mit der Meßgenauigkeit noch vereinbar ist, oder ob man das unmittelbare Rechenverfahren oder die Logarithmentafel benutzen muß. Eine endgültige Entscheidung darüber kann oft erst die Fehlerrechnung liefern. Man wird häufig eine zunächst mit dem Rechenschieber ausgeführte Rechnung noch einmal mit einem genaueren Verfahren wiederholen müssen.

Im übrigen übe man sich bei ganz einfachen Rechnungen in der nützlichen, leider heute schwer vernachlässigten Kunst des Kopfrechnens. Man spart dadurch viel Zeit.

6. Rechnen mit kleinen Größen. Kürzungsregeln

Es kommt häufig vor — vor allem bei kleinen Korrekturen —, daß von den zwei Gliedern einer Summe die eine viel kleiner ist als die andere. Dann kann man bei den vorzunehmenden Rechenoperationen die höheren Potenzen dieser kleinen Größe vernachlässigen. Das gleiche gilt für die Produkte solcher kleinen Größen, wenn derartige Summen miteinander multipliziert werden. Man kann eine solche Summe immer auf die Form $A(1 + z)$ bringen, wo dann $z \ll 1$. Besonders wichtig sind die folgenden Kürzungen:

$$(1 \pm z)^n \approx 1 \pm n z, \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1 \pm z)^n} = (1 \pm z)^{-n} \approx 1 \mp n z, \quad (2)$$

$$(1 \pm z_1)(1 \pm z_2) \approx 1 \pm z_1 \pm z_2. \quad (3)$$

Gl. (1) und (2) gelten nicht nur für ganzzahlige, sondern auch für gebrochene Exponenten.

Beispiele. 1. Die Anzeigen eines Meßgerätes sind mit dem Faktor $0,9991/9994$ zu korrigieren (z. B. bei einer Mohrschen Waage). Eine sehr einfache Kopfrechnung ergibt

$$\frac{0,9991}{0,9994} = (1 - 0,0009) (1 - 0,0006)^{-1} \approx (1 - 0,0009) (1 + 0,0006) \\ \approx 1 - 0,0009 + 0,0006 = 1 - 0,0003 (= 0,9997).$$

Die Anzeige betrug 1,2376. Da eine Angabe von mehr als 5 Stellen sinnlos ist, ergibt wiederum eine einfache Kopfrechnung:

$$1,2376 (1 - 0,0003) \approx 1,2376 - 0,0004 = 1,2372.$$

2. Bei der absoluten Wägung eines Körpers ist das geometrische Mittel zweier Massen m_r und m_l zu bilden, die sich nur sehr wenig unterscheiden, so daß $(m_r - m_l)/m_r \ll 1$. Demnach ist

$$\sqrt{m_r m_l} = \sqrt{m_r [m_r - (m_r - m_l)]} = m_r \sqrt{1 - \frac{m_r - m_l}{m_r}} \\ \approx m_r \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_r - m_l}{m_r}\right) = \frac{m_r + m_l}{2}.$$

Es ist dies der bekannte Satz, daß man das geometrische Mittel zweier wenig verschiedener Größen näherungsweise durch ihr arithmetisches Mittel ersetzen darf.

Sehr oft hat man es in der Physik mit sehr kleinen Winkeln zu tun. Bedeutet φ die Maßzahl eines Winkels im Bogenmaß, und ist $\varphi \ll 1$, so gelten die Kürzungsregeln

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1. \quad (4a, b)$$

7. Fehlerquellen

Eine physikalische Messung wird niemals den absolut genauen Betrag einer physikalischen Größe ergeben, sofern ein solcher überhaupt definiert werden kann. Das ist schon daraus ersichtlich, daß erfahrungsgemäß zwei auf völlig gleiche Weise ausgeführte Messungen der gleichen Größe — von zufälligen Ausnahmen abgesehen — nie ein völlig identisches Ergebnis haben. Die Ursache liegt in der Tatsache, daß erstens der Schärfe der menschlichen Sinneswahrnehmungen Grenzen gesetzt sind, und das zweitens

jede Messung durch ungewollte und nicht immer unmittelbar oder überhaupt kontrollierbare, oft auch zeitlich wechselnde Einwirkungen beeinflusst wird. Es ist eine wesentliche Aufgabe der Meßtechnik, den Einfluß solcher Einwirkungen auf das erreichbare Minimum herabzudrücken. Die Abweichung eines Meßergebnisses vom — grundsätzlich unbekanntem — idealen, fehlerfreien Ergebnis heißt der Fehler der Messung.

Die Fehler teilen sich in zwei grundsätzlich verschiedene Gruppen, in systematische und zufällige Fehler. Ein systematischer Fehler liegt z. B. vor, wenn sämtliche Teilstriche eines benutzten Maßstabes einen zu großen Abstand voneinander haben, so daß mit ihm alle Längen zu klein gemessen werden, oder wenn eine in die Berechnungen eingehende Temperatur mit einem fehlerhaften Thermometer gemessen wurde. Eine derartige Fehlerquelle hat zur Folge, daß das aus den Messungen ermittelte Ergebnis immer zu groß oder immer zu klein ausfällt oder bei Variation der Versuchsbedingungen auch einen systematischen Gang zeigen kann. Letzteres ist oft ein wichtiges Anzeichen für das Vorliegen eines systematischen Fehlers. Systematische Fehler können im Grundsatz — wenn auch oft nur sehr schwer — erkannt und vermieden oder wenigstens auf ein sehr geringes Maß herabgedrückt werden, wenn die benutzten Hilfsmittel sämtlich mit allen der heutigen Meßtechnik zu Gebote stehenden Mitteln geprüft und geeicht werden, und wenn man auch sonst bei der Ausführung der Messung jede denkbare Vorsicht anwendet. Daraus folgt, daß ein Eingehen auf systematische Fehler im Rahmen eines physikalischen Praktikums in der Regel nicht möglich sein wird. Eine Nachprüfung der benutzten Hilfsmittel — Maßstäbe, Gewichtssätze, Thermometer, elektrische Meßgeräte usw. — ist im Rahmen der gestellten Aufgaben nicht vorgesehen. Von derartigen Eichfehlern müssen wir also bei unseren Fehlerrechnungen ganz absehen und unsere Hilfsmittel notwendig als fehlerfrei betrachten.

Von ganz anderer Art sind die zufälligen Fehler. Eine ihrer wesentlichen Ursachen liegt in der Person des Beobachters selbst, vor allem in dem begrenzten Unterscheidungsvermögen seines Auges bei Ablesungen, gelegentlich auch seines Ohres beim Abhören, und in den Grenzen der Geschicklichkeit seiner Hand bei

Einstellungen. Bei der Messung der Länge einer Strecke mit einem Maßstab setzen erstens die Augenschärfe und die Handgeschicklichkeit der Einstellung des Maßstabanfanges an den Streckenanfang eine Genauigkeitsgrenze. Zweitens begrenzt die Augenschärfe auch die Genauigkeit der Ablesung des Ortes des Streckenendes am Maßstab. Daher wird eine mehrfach wiederholte Messung der Streckenlänge nicht immer genau das gleiche Ergebnis liefern. Manchmal werden die an den beiden Enden gemachten kleinen Fehler zufällig gleichsinnig auf das Ergebnis einwirken, es also beide vergrößern oder verkleinern; manchmal werden sie einander zufällig entgegenwirken und sich zu einem mehr oder weniger großen Teil gegenseitig aufheben. Die Einzelergebnisse einer Meßreihe werden also eine Streuung um den Mittelwert zeigen. Abb. 1 zeigt dies am Beispiel der in § 9

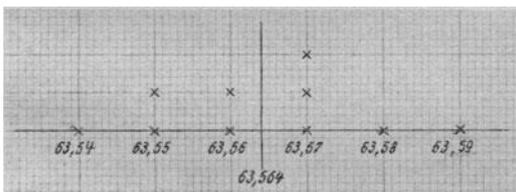


Abb. 1. Streuung von 10 Einzelmessungen um den Mittelwert 63,564.

abgedruckten Meßtabelle. Wenn es sich wirklich um zufällige Fehler handelt, so sind die Einzelmessungen in der Umgebung des Mittelwertes gehäuft und werden in größerem Abstände von ihm immer spärlicher. (Den genauen Ausdruck hierfür liefert das Fehlerverteilungsgesetz von Gauß.) Wenn man systematische Fehler ausschließt, so kann man zunächst nur sagen, daß der wahre Wert der zu messenden Größe mit großer Wahrscheinlichkeit innerhalb des Streubereichs, und zwar im Bereich der stärksten Häufung der Einzelmessungen liegt. Nehmen wir aus den Einzelmessungen den Mittelwert, so ist das natürlich nie genau der ideale Wert der zu messenden Größe. Jede zusätzliche Einzelmessung würde ja auch meist den Mittelwert etwas verändern. Es bleibt also immer eine Unsicherheit darüber bestehen, um wieviel der Mittelwert vom idealen Wert abweicht.

Da es sich hier nur um die zufälligen Fehler handelt, so ist es grundsätzlich unmöglich, zu entscheiden, ob der Mittelwert unsrer Einzelmessungen vom idealen Wert nach oben oder unten abweicht. Man kann den durch zufällige Fehlerquellen verursachten Fehler auf Grund der Streuung der Meßwerte wohl an sich als vorhanden erkennen — was bei systematischen Fehlern sehr oft nicht möglich ist. Hingegen kann man das Vorzeichen des Fehlers grundsätzlich nicht feststellen — was dagegen bei einem systematischen Fehler denkbar ist. Daher ist der zufällige Fehler eines Ergebnisses durch das unbestimmte Vorzeichen \pm gekennzeichnet.

Unsre Fehlerrechnungen können sich nach unsern obigen Ausführungen im Praktikum nur auf die von dem Studenten selbst gemessenen Größen erstrecken. Die Eichungen von Meßgeräten, ferner Zahlengrößen, die aus anderen Quellen stammen, sind als fehlerfrei anzusehen und können der Fehlerrechnung nicht unterworfen werden. Es ist natürlich etwas mißlich, daß infolgedessen die von uns berechneten Fehler in der Regel mehr oder minder kleiner ausfallen werden, als sie tatsächlich sind. Das läßt sich nicht vermeiden, wenn wir im Praktikum überhaupt Fehlerrechnung treiben wollen. Es ist aber nötig, daß der Student sich dieser Einschränkung stets bewußt bleibt.

8. Der Zweck der Fehlerrechnung

Das Vertrauen, das wir in das Ergebnis einer Messung setzen, hängt davon ab, welche Abweichung des Ergebnisses vom idealen Wert wir unter den gegebenen Umständen für denkbar halten. Sehen wir wiederum von systematischen Fehlern ab, so liefert uns die Streuung der Einzelergebnisse um ihren Mittelwert ein Mittel zur Urteilsbildung. Hat z. B. von zwei Beobachtern der eine bei 10 Einzelmessungen für eine Länge Werte zwischen 63,71 cm und 63,83 cm mit dem Mittelwert 63,77 cm erhalten, der andere Werte zwischen 63,74 und 63,78 mit dem Mittelwert 63,76, so wird man das Ergebnis des zweiten ohne weiteres für zuverlässiger halten als das des ersten. Denn die größten Abweichungen vom Mittelwert betragen beim ersten $\pm 0,06$ cm, beim zweiten aber nur $\pm 0,02$ cm.

Es ist natürlich denkbar — vor allem bei sehr kleiner Zahl von Einzelmessungen —, daß der ideale Wert in der Nähe einer der Grenzen des Streugebietes oder gar noch außerhalb desselben liegt. Es ist aber bei Ausschluß systematischer Fehler sehr wenig wahrscheinlich. Wenn nur zufällige Fehler im Spiel sind, so wird ein vom idealen Wert stark abweichendes Einzelergebnis seltener vorkommen als ein nur wenig von ihm abweichendes Einzelergebnis. Liegt also eine größere Zahl von Einzelmessungen der gleichen Größe vor, die unter gleichen Bedingungen erhalten wurden, so wird man erwarten, daß sie um einen mittleren Wert gehäuft sind (Abb. 1), und daß der ideale Wert irgendwo innerhalb dieses Häufungsbereichs liegt. Man wird als Ergebnis einen Wert innerhalb dieses Häufungsbereichs angeben, aber die Möglichkeit offenhalten, daß er vom idealen Wert um einen gewissen Betrag abweicht, der nun aber wahrscheinlich kleiner als die größte überhaupt vorkommende Abweichung ist.

Dieser Urteilsbildung dient die Fehlerrechnung. Es wäre gut, wenn sie auch im Praktikum zu jeder Messung ausgeführt werden könnte. Wenn möglich, sollte sie jeder Student wenigstens nachträglich durchführen, um ein Urteil über seine eigene Leistung zu bilden. Am weitaus besten wäre es, wenn die Fehlerrechnung schon vor den Messungen besprochen würde, da sie oft wichtige Fingerzeige dafür gibt, bei welchen Teilen der Messung besondere Sorgfalt geboten ist. In jedem Fall aber hat die Fehlerrechnung im Praktikum den wichtigen Zweck, daß sie den Studenten sowohl vor einer Überschätzung, ebenso sehr aber auch vor einer Unterschätzung seiner eigenen Leistung bewahren und ihn zur Kritik erziehen soll.

Wir können und wollen hier nicht auf die Fehlertheorie im einzelnen eingehen, sondern verweisen dafür auf die Literatur¹⁾. Wir teilen hier lediglich diejenigen Ergebnisse der Theorie mit, von denen wir in diesem Buch Gebrauch machen wollen, ohne sie zu begründen.

¹⁾ Z. B. Kohlrausch, „Lehrbuch der praktischen Physik“, 17. Aufl., S. 19; Müller-Pouillet, „Lehrbuch der Physik“, 11. Aufl., Bd. I/1, S. 78; V. Happach, „Ausgleichsrechnung“.

9. Arithmetisches Mittel und mittlerer Fehler

Es entsteht nun die Frage, welchen Wert innerhalb des Streubereichs der Einzelmessungen man als den zuverlässigsten betrachten soll. Nach Gauß ist dieser Wert, den man also als Ergebnis anzugeben hat, derjenige, bei dem die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte von ihm ein Minimum ist. Sofern es sich um lauter gleichwertige Einzelmessungen handelt, wird diese Bedingung vom arithmetischen Mittel der Einzelergebnisse erfüllt.

Es sei x dieser Mittelwert, und es seien x_1, x_2, \dots, x_n die durch n Einzelmessungen gewonnenen Einzelwerte, aus denen er berechnet wurde,

$$x = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_1^n x_k. \quad \text{Die}$$

Einzelwerte werden vom Mittelwert um Beträge von wechselndem Vorzeichen und verschiedenem Betrage abweichen, die wir mit $v_1 = x_1 - x, v_2 = x_2 - x, \dots, v_n = x_n - x$ bezeichnen wollen.

Wie man leicht erkennt, ist $\sum_1^n (x_k - x) = \sum_1^n v_k = 0$. Nach der Theorie beträgt dann der mittlere quadratische oder kurz der mittlere Fehler des Ergebnisses:

$$\Delta x = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}. \quad (1)$$

Dabei bedeutet $[vv]$ die in der Fehlerrechnung übliche Abkürzung für die Summe der Fehlerquadrate,

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2. \quad (2)$$

Ein Beispiel zeigt die Tabelle. Eine Länge ist 10 mal gemessen worden ($n = 10$), und der Mittelwert beträgt 63,564 cm. Unter v sind die Abweichungen der Einzelmessungen vom Mittelwert in Einheiten der 3. Dezimalen, unter v^2 deren Quadrate angegeben. Ihre Summe beträgt $[vv] = 2010$. Der mittlere Fehler des Ergebnisses beträgt also

$$\Delta x = \pm \sqrt{\frac{2010}{10 \cdot 9}} = \pm 4,73 \text{ Einh. d. 3. Dez.} = \pm 0,00473 \text{ cm.}$$

Die Ergebnisse von Fehlerrechnungen sind aber nie als exakte Ergebnisse zu werten, weil sie ja nur auf Wahrscheinlichkeits-

annahmen beruhen. Sie können stets nur ein der Größenordnung nach zutreffendes Urteil über die Zuverlässigkeit einer Messung ermöglichen. Darum hat eine so genaue Fehlerangabe, wie wir sie soeben gemacht haben, keinen Sinn. Fehler werden immer nur in runden Zahlen angegeben. Der Grad der Abrundung ist in jedem Einzelfall zu erwägen, und sie hat im Zweifelsfalle aus Vorsicht im allgemeinen nach oben hin zu erfolgen. Auch den Mittelwert wird man häufig auf Grund der Fehlerrechnung abrunden. Es hat keinen Sinn, Stellen anzugeben, die bereits völlig unsicher sind. Es ist üblich, außer den auf Grund der Fehlerrechnung als zuverlässig erkannten Stellen noch die erste unsichere Stelle anzugeben. Die Angabe einer zu großen Stellenzahl ist ein Zeichen mangelnder Kritik. Wir runden also den obigen Fehler auf $\pm 0,005$ cm ab. Als Endergebnis unsrer Messungen geben wir an:

$$x = (63,564 \pm 0,005) \text{ cm.}$$

Den von uns bisher behandelten mittleren Fehler bezeichnet man als den absoluten Fehler des Ergebnisses. Er liefert an sich noch kein ganz deutliches Bild von der Güte der Meßleistung, denn es ist z. B. ein sehr großer Unterschied, ob ich eine Länge von 1 cm oder eine solche von 1000 cm mit einem Fehler von $\pm 0,1$ cm messe. Im ersten Fall beträgt der Fehler $\pm \frac{1}{10}$ des Ergebnisses, im zweiten Fall nur $\pm \frac{1}{10000}$, und man wird die zweite Messung erheblich höher werten als die erste. Man sieht, daß es ganz wesentlich auf das Verhältnis des Fehlers zum Ergebnis, auf den relativen Fehler $\Delta x/x$, ankommt. Wir werden deshalb bei unsern Beispielen auch immer den relativen Fehler berechnen. Meist ist bei zusammengesetzten Ergebnissen die Berechnung des relativen Fehlers einfacher als die des absoluten, so daß wir jenen zuerst berechnen. Der absolute Fehler Δx ergibt sich dann als das Produkt $x \cdot \Delta x/x$. Es ist üblich, den relativen Fehler in % anzugeben. Auch er wird stets abgerundet.

Tabelle.

x cm	v	v^2
63,57	+ 6	36
58	+ 16	256
55	— 14	196
56	— 4	16
56	— 4	16
59	+ 26	676
55	— 14	196
54	— 24	576
57	+ 6	36
57	+ 6	36
63,564		2010

In unsrer obigen Längenmessung beträgt der relative Fehler

$$\frac{\Delta x}{x} = \pm \frac{0,005}{63,564} = \pm 0,0000785 \approx \pm 0,00008 = \pm 0,008\%.$$

10. Einzelmessungen von verschiedenem Gewicht

Es kommt häufig vor, daß den Einzelmessungen ein verschiedener Grad von Zuverlässigkeit innewohnt. Sofern man imstande ist, sich ein — vielleicht auch nur ungefähres — Urteil über diese Zuverlässigkeit zu bilden, wird man zwar die weniger vertrauenswürdigen Einzelmessungen — sofern nicht ein offensichtliches Versehen vorliegt — nicht ganz verwerfen, aber man gibt ihnen bei der Mittelwertbildung ein kleineres Gewicht als den zuverlässigeren. Im einfachsten Fall kann man so rechnen, als seien die zuverlässigeren Messungen 2-, 3-, 4 mal usw. mit gleichem Ergebnis erfolgt, so daß sie bei der Mittelwertbildung je 2-, 3-, 4fach usw. rechnen. Die betreffende Zahl ist dann ihr Gewicht. Bezeichnen wir die Ergebnisse der Einzelmessungen mit x_i und das Gewicht der i -ten Einzelmessung mit g_i , so ist nunmehr der Mittelwert nach der Gleichung

$$x = \frac{\sum g_i x_i}{\sum g_i} \quad (1)$$

zu berechnen. (Ein Beispiel s. bei der 1. Aufgabe.) Es kann vorkommen, daß man den Einzelmessungen auf Grund bestimmter Überlegungen andere als ganzzahlige Gewichte beilegt. Gl. (1) gilt auch dann.

11. Der Fehler eines zusammengesetzten Ergebnisses

Bisher war nur von den Fehlern unmittelbar gemessener Größen die Rede, wie Längen, Temperaturen, elektrische Stromstärken usw., bei denen der Messungszweck sich auf die möglichst genaue Feststellung dieser Größe selbst beschränkt. Das ist in der Praxis nur selten der Fall, und im Praktikum werden solche unmittelbare Messungen durchweg nur der Ermittlung einer anderen Größe dienen, die in der Regel nicht nur aus einer, sondern meist aus mehreren unmittelbar gemessenen Größen zu berechnen, die also ein zusammengesetztes Ergebnis ist. So erfordert z. B. die Messung des Elastizitätsmoduls aus der Bie-

gung (3. Aufgabe) allein vier Längenmessungen: einen Schneidenabstand, die Dicke und die Breite einer Platte und den Betrag ihrer Durchbiegung unter der Wirkung einer bestimmten Kraft. Jedes dieser unabhängigen Messungsergebnisse ist mit einem Fehler behaftet — den man nach dem in § 9 beschriebenen Verfahren berechnen kann —, den es in die Berechnung mit hinein trägt, und mit dem es das Endergebnis infiziert. Es entsteht also die Aufgabe, in jedem Einzelfall zu berechnen, welchen Beitrag diese Einzelfehler zum Gesamtfehler des Ergebnisses liefern.

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, daß in die Berechnung des Endergebnisses nur eine einzige unmittelbar gemessene Größe x eingeht, die mit einem Fehler Δx behaftet ist. Wir bezeichnen das Endergebnis mit R . Dann ist R eine bestimmte Funktion $R(x)$ von x . Da stets $\Delta x \ll x$, so folgt aus dem Taylorschen Satz unter Vernachlässigung höherer Potenzen von Δx als absoluter Fehler von R

$$\Delta R = \pm \frac{dR}{dx} \Delta x. \quad (1)$$

Ist z. B. $R = Ax^b$, so ergibt sich $\Delta R = \pm Abx^{b-1} \Delta x$.

Den relativen Fehler von R findet man fast immer am einfachsten, indem man den Fehler von $\ln R$ bildet. Wenn wieder $R = Ax^b$, so ist

$$\ln R = \ln A + b \ln x. \quad (2)$$

Betrachten wir $\ln R$ als Funktion von R , so folgt aus dem Taylorschen Satz, da $\Delta R \ll R$,

$$\Delta \ln R = \frac{d \ln R}{dR} \Delta R = \frac{\Delta R}{R}. \quad (3)$$

Betrachten wir aber $\ln R$ als Funktion von x , so folgt aus Gl. (1) und (2):

$$\Delta \ln R = \pm b \frac{\Delta x}{x}, \quad (4)$$

so daß

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm b \frac{\Delta x}{x}. \quad (5)$$

Es ergibt sich also das wichtige Ergebnis, daß der relative Fehler des Ergebnisses im vorliegenden einfachen Fall gleich dem mit dem Exponenten b der unmittelbar gemessenen Größe x multiplizierten relativen Fehler der Größe x selbst ist.

Wir gehen nun zu dem weit häufigeren Fall über, daß in ein zusammengesetztes Ergebnis mehrere unmittelbar gemessene Größen eingehen, so daß $R = R(x, y, z, \dots)$. In diesem Fall wird es natürlich häufig vorkommen, daß die Fehler, die die einzelnen Größen in das Ergebnis einbringen, einander in ihrem Einfluß auf das Ergebnis mehr oder minder entgegenwirken. Es kann aber auch vorkommen, daß sie alle gleichsinnig wirken. Ob das eine oder andere im Einzelfall wirklich eingetreten ist, kann man wegen des unbestimmten Vorzeichens der Fehler nie wissen. Will man sehr vorsichtig vorgehen, so wird man den ungünstigsten Fall annehmen, daß alle Fehler gleichsinnig wirken. In diesem Fall folgt aus dem Taylorsche Satz, analog zu Gl. (1),

$$\Delta R = \pm \left(\left| \frac{\partial R}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial R}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial R}{\partial z} \right| \Delta z + \dots \right). \quad (6)$$

In die Klammer sind die absoluten Beträge $|\partial R/\partial x|$ usw. der partiellen Differentialquotienten von R nach x, y, z, \dots einzusetzen, so daß die in der Klammer stehenden Größen sämtlich positiv sind. Auf diese Weise erhält man den absoluten Größtfehler des Ergebnisses.

Ist R ein Potenzprodukt, $R = Ax^a y^b z^c \dots$, so erhält man den relativen Größtfehler von R , analog zu Gl. (5), aus der Gleichung

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(|a| \frac{\Delta x}{x} + |b| \frac{\Delta y}{y} + |c| \frac{\Delta z}{z} + \dots \right). \quad (7)$$

In diese Gleichung sind die Exponenten a, b, c, \dots mit ihren absoluten Beträgen $|a|, |b|, |c|, \dots$ aber sämtlich positiv einzusetzen. Der relative Größtfehler eines Potenzprodukts ist also gleich der Summe der mit den absoluten Beträgen der betreffenden Exponenten multiplizierten relativen Fehler der in die Rechnung eingehenden Einzelgrößen.

Das Verfahren zur Berechnung des absoluten Fehlers nach Gl. (6) besteht also darin, daß man zunächst das vollständige Differential dR der das Ergebnis darstellenden Funktion $R(x, y, z, \dots)$ bildet. Dann vollzieht man den „Übergang zum Fehler“, indem man die Differentiale dR, dx, dy, dz, \dots durch die Fehler $\Delta R, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ ersetzt, die rechte Seite der Gleichung in Klammern setzt und mit dem unbestimmten Vor-

zeichen \pm versteht und die Faktoren der Δx , Δy , Δz , ... — sofern sie es noch nicht sind — positiv macht. Natürlich ist nur nach denjenigen Größen zu differenzieren, welche zum Fehler des Ergebnisses beitragen. Die übrigen sind als Konstante zu behandeln. Genau ebenso verfährt man bei der Berechnung des relativen Fehlers mit der Funktion $\ln R$.

Wir werden in der Mehrzahl der Fälle am besten zunächst den relativen Größtfehler nach Gl. (7) berechnen. Es wird gelegentlich vorkommen, daß eine der hier mit x , y , z , ... bezeichneten Größen selbst schon ein zusammengesetztes Ergebnis ist, z. B. die Differenz zweier Längen u. dgl. In solchen Fällen ist der relative Fehler einer solchen Größe besonders zu berechnen und in Gl. (7) einzusetzen.

Stellt man in Rechnung, daß eine gewisse Wahrscheinlichkeit für einen teilweisen gegenseitigen Ausgleich der Fehler der einzelnen Größen besteht, so liefert die Theorie für den mittleren absoluten Fehler des Ergebnisses die Gleichung

$$\Delta R = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \Delta z\right)^2 + \dots} \quad (8)$$

(Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz). Der mittlere relative Fehler des Ergebnisses beträgt bei einem Potenzprodukt

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \sqrt{\left(a \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(c \frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \dots} \quad (9)$$

Die Berechnung des mittleren Fehlers ist natürlich im Grundsatz korrekter als die des Größtfehlers. Er ist kleiner als dieser. Aber gerade auch aus diesem Grunde, überdies auch, um unsre Fehlerrechnungen nicht allzu sehr zu komplizieren, wollen wir in diesem Buch bei zusammengesetzten Ergebnissen in der Regel den Größtfehler berechnen. Denn das liefert uns einen gewissen Ausgleich dafür, daß wir manche tatsächlich vorhandenen, aber im Rahmen unsrer Messung nicht kontrollierbaren Fehler nicht in Rechnung setzen können, und bewahrt uns auf diese Weise ein wenig vor allzu großer Überschätzung unsrer Genauigkeit. Bei den unmittelbar gemessenen Größen werden wir aber in der Regel die mittleren Fehler nach den Vorschriften von § 9 bilden und mit diesen in den Größtfehler des Ergebnisses eingehen. Das Ergebnis

unsrer Fehlerrechnung wird trotzdem oft noch unter dem wirklichen Fehler liegen, eine Tatsache, die man z. B. manchmal bei der Messung von Größen bemerken wird, deren Zahlenwerte anderweitig recht genau bekannt sind (Materialkonstanten u. dgl.).

C. Einige Regeln für physikalische Messungen

12. Protokollführung

Zu den Dingen, die der Student im Praktikum lernen soll, gehört als äußerst wichtig auch eine saubere und für jeden Sachverständigen verständliche Protokollführung. Im späteren Beruf wird ein Protokoll nicht nur vom Beobachter selbst, sondern vielleicht auch von seinen Mitarbeitern oft noch nach längerer Zeit wieder gebraucht, und es muß auch noch dann verständlich und lesbar sein, wenn man sich an die Einzelheiten der Messung überhaupt nicht mehr erinnert. Es ist eine wesentliche Aufgabe der Assistenten, die Studenten immer wieder zu einer solchen Protokollführung anzuhalten. Hier können wir nur einige Hinweise geben.

Außer selbstverständlich der Nummer und der Bezeichnung der Aufgabe am Kopf soll unbedingt das Datum der Ausführung und, wenn nötig, die Nummer oder sonstige Bezeichnung der Versuchsanordnung und des untersuchten Objekts angegeben sein, damit eine spätere Nachprüfung möglich ist.

Die Protokolle sollen sogleich während der Messungen in endgültiger Form in ein Heft mit fest eingeklebten Seiten (am besten Format Din A 4) eingetragen werden; ob mit Kopierstift oder Tinte ist ganz gleichgültig. Es widerspricht der Praxis des Berufslebens, wenn die Protokolle erst auf lose Zettel und nachträglich ins Reine geschrieben werden. Nur unwesentliche Nebenrechnungen, die jederzeit leicht wiederholt werden können, sollen auf Zetteln gemacht werden, um das Protokoll nicht unübersichtlich zu machen.

Es ist eine völlig unnötige Zeitverschwendung, wenn man ein gutes Aussehen des Protokolls mit allzu kleinlichen Mitteln anstrebt, indem man z. B. Trennungslinien, Schalt-

skizzen u. dgl. mit dem Lineal, statt aus freier Hand, zeichnet oder etwaige Apparatskizzen mit Buntstiften ausführt. Dazu ist die Zeit im Praktikum wie später im Berufsleben zu schade.

Dagegen ist größte Sorgfalt auf die graphische Darstellung von Messungsergebnissen zu verwenden. Sie müssen in vernünftigen Maßstabsverhältnissen grundsätzlich auf Koordinatenpapier — nicht in die Quadrate des Protokollheftes — gezeichnet und dann in das Heft eingeklebt werden. Oft ist 2-mm-Papier geeigneter als das meist verwendete 1-mm-Papier. Die Kurven müssen möglichst fein ausgezogen werden und sollen einen glatten Verlauf haben, indem man sie derart zwischen den oft etwas streuenden Meßpunkten hindurchzieht, daß diese sich etwa mit gleichem Gewicht auf beide Seiten der Kurve verteilen.

Das Protokoll soll sämtliche Angaben enthalten, die zur Nachprüfung der Messung erforderlich sind, auch wenn sie im Augenblick unwichtig erscheinen. Etwaiger Text soll stichwortartig gehalten und auf das notwendige beschränkt werden. Ein Meßprotokoll ist etwas grundsätzlich anderes als eine Ausarbeitung, zu der es — wenn eine solche angefertigt werden soll — nur die nötigen Unterlagen liefert, diese aber vollständig. (Beispiele von Ausarbeitungen sind in gewissem Sinne die Darstellungen der einzelnen Aufgaben in diesem Buch.)

13. Einiges zur Ausführung der Messungen

Es ist einleuchtend, folgt im übrigen aus der Fehlertheorie [§ 9, Gl. (1)], daß ein als Mittelwert mehrerer Einzelmessungen berechnetes Ergebnis einen um so höheren Grad von Zuverlässigkeit — einen um so kleineren mittleren Fehler — hat, je größer die Zahl der zur Mittelwertbildung verwendeten Einzelmessungen ist. Doch zeigt die Theorie, daß sich der mittlere Fehler mit der Zahl der Einzelmessungen zwar zunächst ziemlich schnell, dann aber immer langsamer vermindert. Daher ist es lohnender, wenn man eine beschränkte Zahl von Einzelmessungen mit tunlichster Sorgfalt anstellt, als wenn man sehr viele Einzelmessungen schnell und mit geringerer Sorgfalt macht.

Wir stellen es als Regel auf, daß wir, sofern die Zeit es erlaubt, jede unmittelbare Messung einer Größe wenn möglich zehnmal, mindestens aber fünfmal wiederholen. (Die Wahl von 10 oder 5 Messungen hat den äußerlichen Vorteil, daß sie die Mittelwertbildung und die Fehlerrechnung rechnerisch vereinfacht.) Von dieser Regel kann man absehen, wenn man das Ergebnis auf Grund einer Folge von Einzelmessungen berechnen will, die unter wechselnden Bedingungen aufgenommen wurden. In diesem Fall hat die Vielzahl der Messungen — die aber auch dann 10 oder mindestens 5 betragen sollte — meist etwa die gleiche Wirkung wie die zehnfache Wiederholung der gleichen Messung.

Die häufige Wiederholung der gleichen Messung ist aber ermüdend und stumpft ab. Auch besteht eine unvermeidliche psychische Nachwirkung einer bereits ein- oder mehrmal gemachten Ablesung und hemmt die erneute unbefangene Entscheidung, z. B. über die Schätzung der Zehntelteilstriche. Daher bringe man, wo es möglich ist, Abwechslung in die Messungen. Häufig, keineswegs immer, kann das so geschehen, daß man nach jeder Messung die Skala blindlings ein wenig verschiebt und an einer andern Stelle der Skala mißt. Ein Beispiel gibt die I. Aufgabe. Liest man stets an der gleichen Stelle der Skala ab, so verführt das nur allzu leicht dazu, bei allen folgenden Messungen die Zehntelskalenteile genau ebenso zu schätzen wie bei der ersten Ablesung. Sehr häufig sind wir bei ganz identischen Einstellungen im Zweifel, ob wir z. B. 0,7 oder 0,8 schätzen sollen, und entscheiden uns bei der ersten Ablesung für das eine. Wenn wir nun an jede neue Ablesung ganz unbefangen herangehen würden, so würden wir bald 0,7, bald 0,8 schätzen und einen zwischen beiden Werten liegenden Mittelwert erhalten. Wir werden nun einen der beiden Werte um so häufiger als den anderen schätzen, je mehr der richtige Wert auf der Seite des ersteren liegt. So würde uns die Verteilung der Messungen auf die beiden Werte einen Hinweis darauf geben, in welchem Verhältnis die richtige Ablesung — die wir so genau gar nicht machen können — die Spanne zwischen 0,7 und 0,8 teilt. Wir würden also auf diese Weise unsre Messung verfeinern. (Vgl. das Meßbeispiel in § 9, wo uns die Mittelwertbildung zeigt, daß der richtige Wert etwa in der

Mitte zwischen 63,56 und 63,57 cm liegt.) Diesen Erfolg erzielen wir wegen der größeren Unbefangenheit unsrer Ablesungen weit besser, wenn wir das geschilderte Verfahren anwenden.

Noch wesentlich wichtiger ist die mehrfache Wiederholung von Einstellungen, die wir auf Grund irgendeines mit Auge oder Ohr beobachteten Merkmals (Nullstellung eines Galvanometers, Schweigen eines Telephons, gleiche Helligkeit zweier Flächen usw.) vornehmen. Hier handelt es sich nicht nur um Schätzungsfehler bei der Ablesung, sondern weit mehr noch um wirkliche Einstellungsfehler, die von der begrenzten Leistungsfähigkeit von Auge und Ohr bei der Beurteilung des Merkmals und der begrenzten Geschicklichkeit unsrer Hand herrühren.

Schließlich muß noch betont werden, daß es keineswegs zu verwerfen ist, wenn man es sich bei den Messungen so bequem macht, wie es mit den Umständen vereinbar ist. Je weniger man durch Äußerlichkeiten behindert ist, um so weniger wird man bei den Ablesungen beeinflußt. Deshalb stelle man, sofern es irgend möglich ist, seine Meßgeräte so auf, daß man sie recht bequem ablesen kann, z. B. die Okulare optischer Geräte in Augenhöhe usw., Schalter und Taster, die man oft betätigen muß, in bequeme Reichweite der linken Hand, da man die rechte meist zum Schreiben braucht, Gegenstände aber, mit denen man Feineinstellungen vornehmen muß, in bequeme Reichweite der rechten Hand. Sofern es nicht nötig ist, arbeite man nicht bei schlechtem Licht. Man Sorge auch dafür, daß man einen bequemen Platz zur Protokollführung hat. Natürlich gibt es Fälle, in denen man bei den Messungen auch körperliche Unbequemlichkeiten in den Kauf nehmen muß, aber sie sind recht selten und meist zu vermeiden.

14. Elektrische Schaltungen

Bevor man mit der Herstellung einer elektrischen Schaltung beginnt, zeichne man eine deutliche Schaltskizze in das Protokollheft und durchdenke sie gründlich. Dann beginne man mit der Schaltung an einem Punkt, der an die Stromquelle angeschlossen werden soll, am besten bei dem unter allen Umständen erforderlichen Schalter, der stets unmittelbar an die Stromquelle angeschlossen werden soll, damit die

ganze Schaltung jederzeit sofort zuverlässig stromlos gemacht werden kann. Dann fahre man an Hand der Skizze schrittweise fort, bis man an die andere Stelle gelangt ist, die unmittelbar an die Stromquelle angeschlossen werden soll. Verzweigungen schalte man erst, nachdem man eine Leitung ganz durchgezogen hat. Die Stromquelle wird erst ganz am Schluß und bei offenem Schalter angeschlossen. Dabei ist auf richtige Polung zu achten. (Von der +-Klemme der Stromquelle zur +-Klemme der Meßgeräte!). Auf jeden Fall beobachte man beim Einschalten die Meßgeräte und schalte sofort wieder aus, wenn man eine Überlastung oder falsche Polung bemerkt. Letztere wird, weil der Zeiger anschlägt, leicht übersehen.

Um zuverlässig konstante Spannungen zu haben, sind Akkumulatoren und vor allem Trockenelemente vor jeder Überlastung zu bewahren und überhaupt nur so lange zu belasten, wie es der Zweck der Messung erfordert. Ebenso ist jede Überlastung von Meßgeräten und Widerständen zu vermeiden. Für Stöpselwiderstände gelten die folgenden oberen Belastungsgrenzen:

0,1—0,5	1—5	10—50	100—500	1000—5000	10000—50000	Ω
1,5	0,8	0,25	0,08	0,03	0,008	A

Bei Schiebewiderständen achte man darauf, daß sie nicht zu heiß werden oder gar ins Glühen geraten.

II. Mechanik

1. Aufgabe. Spezifisches Gewicht fester Stoffe

Literatur: W., § 58; M.-P., Bd. I/2, S.1191; K., S.194¹⁾.

Das spezifische Gewicht σ eines Stoffes ist das Gewicht der Volumeinheit desselben, gemessen in der Einheit $1 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3}$. Wiegen also $V [\text{cm}^3]$ des Stoffes $k [\text{g}^*]$, so beträgt sein spezifisches Gewicht

$$\sigma = \frac{k}{V} [\text{g}^* \cdot \text{cm}^{-3}]. \quad (1)$$

Die Dichte ρ eines Stoffes ist die Masse der Volumeinheit desselben, gemessen in der Einheit $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$,

$$\rho = \frac{m}{V} [\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}]. \quad (2)$$

Demnach haben σ und ρ die gleiche Maßzahl, und die Dichte eines Stoffes ist bekannt, wenn sein spezifisches Gewicht bekannt ist.

Zur Bestimmung des spezifischen Gewichts eines Stoffes muß man also das Verhältnis des Gewichts eines Körpers aus diesem Stoff zu seinem Volumen ermitteln. In vielen Fällen ist eine unmittelbare Volummessung wegen unregelmäßiger Körpergestalt nicht möglich. Sehr häufig kann man aber das Volumen V mittelbar aus dem Auftrieb k_a des Körpers in einer Flüssigkeit von bekanntem spezifischem Gewicht σ_f bestimmen, welcher

$$k_a = \sigma_f V [\text{g}^*] \quad (3)$$

beträgt (Archimedisches Prinzip). Den Auftrieb mißt man als die Differenz des Körpergewichts k in Luft (wobei man den Auftrieb des Körpers in dieser, der in der Größenordnung von 0,1 bis 0,01 % des Gewichts liegt, fast immer vernachlässigen

¹⁾ Es bedeutet: W. = Westphal, „Physik“, 4. Auflage; M.-P. = Müller-Pouillet, „Lehrbuch der Physik“, 11. Auflage; K. = Kohlrausch, „Praktische Physik“, 17. Auflage.

kann) und des scheinbaren Körpergewichts k' , wenn sich der Körper in der Flüssigkeit befindet,

$$k_a = k - k' \text{ [g*]}. \quad (4)$$

Demnach ist nach Gl. (3)

$$V = \frac{k - k'}{\sigma_f} \text{ [cm}^3\text{]} \quad (5)$$

und

$$\sigma = \sigma_f \frac{k}{k - k'} \text{ [g*} \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}. \quad (6)$$

Als Flüssigkeit verwendet man am einfachsten Wasser — wenn möglich destilliert —, dessen spezifisches Gewicht bei Zimmertemperaturen um höchstens 0,3 % vom Betrage 1 abweicht.

Nach Gl. (6) genügt es, wenn man das Verhältnis des Körpergewichts k zum Auftrieb $k - k'$ bestimmt. Man benötigt also für die Messung keine geeichte Waage, sondern es genügt eine solche, deren Anzeigen den an ihr angreifenden Kräften proportional sind. Hierauf beruht die Messung von spezifischen Gewichten mit der Federwaage (Jolly, Abb. 2). Sie besteht aus einer etwa 50 cm langen, ziemlich schlaffen Schraubenfeder aus dünnem Draht, an der untereinander zwei Glasschälchen hängen. Das untere Schälchen taucht stets in ein Becherglas mit Wasser. Wird der zu untersuchende Körper auf die obere Schale gelegt, so erfährt die Feder eine Verlängerung a_1 , die dem Gewicht k des Körpers proportional ist, $a_1 = Ck$. Wird er auf die untere, in Wasser befindliche Schale gelegt, so ist die Verlängerung a' nunmehr dem scheinbaren Gewicht k' des Körpers in Wasser proportional, $a' = Ck'$. Die Differenz $a_2 = a_1 - a'$ ist also dem Auftrieb $k - k'$ proportional. Demnach beträgt das spezifische Gewicht des Körpers nach Gl. (6)

$$\sigma = \sigma_f \frac{k}{k - k'} = \sigma_f \frac{Ck}{Ck - Ck'} = \sigma_f \frac{a_1}{a_2} \text{ [g*} \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}. \quad (7)$$

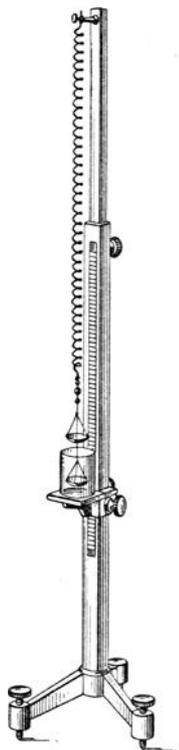


Abb. 2. Federwaage zur Messung spezifischer Gewichte. Nach Westphal, „Physik“.

Die Ablesungen erfolgen mittels einer geeigneten, am unteren Ende der Feder befindlichen Marke auf einer hinter der Feder angebrachten, in mm geteilten Skala. Es sind drei Ablesungen erforderlich:

1. Stellung der Marke bei leeren Schalen, x_1 ,
2. ihre Stellung, wenn der Körper auf der oberen Schale liegt, x_2 ,
3. wenn er auf der unteren Schale in Wasser liegt, x_3 .

Da die Marke stets einen gewissen Abstand von der Skala hat, so ist diese zwecks parallaxenfreier Ablesung verspiegelt. Um den Punkt der Skala zu finden, der senkrecht hinter der Marke liegt, bringt man diese mit ihrem Spiegelbild zur Deckung und liest dort ab, wo die Marke nunmehr auf der Skala erscheint. Bei einiger Übung erreicht man leicht eine Ablesegenauigkeit auf $\pm 0,01$ cm.

Bei den Messungen ist auf folgendes zu achten. Erstens müssen von der unteren Schale und von dem Körper, wenn er sich in Wasser befindet, sorgfältig (z. B. mit einer Feder) alle Luftblasen entfernt werden, da solche einen zusätzlichen Auftrieb erzeugen. Zweitens muß die untere Schale — wegen des Auftriebes des Aufhängedrahtes — stets gleich tief unter der Wasseroberfläche stehen, und zwar — zur möglichsten Vermeidung störender Kapillarkräfte — so tief, daß nur der einfache, die beiden Schalen verbindende Draht die Wasseroberfläche durchstößt. Wegen der verschiedenen Länge der Feder bei den drei Ablesungen muß das Tischchen, das das Becherglas trägt, jeweils entsprechend nachgestellt werden.

Es empfiehlt sich, je 10 Messungen anzustellen. Um eine Beeinflussung des Beobachters durch das Ergebnis vorhergehender Ablesungen zu vermeiden, ist es zweckmäßig, vor jeder neuen Messung die Höhenlage der Feder zu ändern, um an einer andern Stelle der Skala abzulesen (vgl. Einl. § 13).

Wir müssen uns nun noch von der Proportionalität der Anzeigen a der Federwaage und der angreifenden Kräfte k überzeugen, also feststellen, ob in der Gleichung

$$a = Ck \tag{8}$$

die Größe C tatsächlich innerhalb unsres Meßbereichs eine Konstante ist, ob also a linear mit k zunimmt. Das geschieht, indem

wir auf die obere Schale nacheinander Gewichtsstücke von 1, 2, 3, ... g oder bei einer empfindlicheren Feder solche von 0,5, 1, 1,5, ... g legen und die Verlängerungen der Feder messen. Diese sollten innerhalb der Meßgenauigkeit den Gewichten proportional sein. Das Ergebnis ist graphisch darzustellen. Auf diese Weise eichen wir die Federwaage und können die Größe $C = a/k$ ermitteln, die als die Empfindlichkeit der Federwaage bezeichnet wird, weil bei gegebener Kraft k die Verlängerung a der Feder um so größer ist, je größer C ist. Man nennt C auch die Federkonstante. Ihre Einheit ist $1 \text{ cm} \cdot \text{g}^{-1}$. Auch bei diesen Messungen taucht die untere Schale — zur Dämpfung der störenden Federschwingungen — stets in der oben angegebenen Weise in Wasser.

Beispiel. Körper: Flußpatkristall. Flüssigkeit: Destilliertes Wasser von $25,6^{\circ} \text{C}$.

Das Ergebnis von 10 Messungen bei verschiedenen Höhenlagen der Feder zeigt Tabelle 1. Dabei ist $a_1 = x_2 - x_1$ und $a_2 = x_2 - x_3$. Die 6. bis 9. Spalte dienen der Fehlerrechnung (s. unten).

Tabelle 1.

x_1 cm	x_2 cm	x_3 cm	a_1 cm	a_2 cm	$v(a_1)$	$v^2(a_1)$	$v(a_2)$	$v^2(a_2)$
0,92	11,08	7,39	10,16	3,69	- 24	576	- 36	1296
2,29	12,46	8,77	17	69	- 14	196	- 36	1296
3,10	13,28	9,57	18	71	- 4	16	- 16	256
4,58	14,74	11,03	16	71	- 24	576	- 16	256
5,80	15,99	12,27	19	72	+ 6	36	- 6	36
6,47	16,65	12,90	18	75	- 4	16	+ 24	576
8,89	19,06	15,32	17	74	- 14	196	+ 14	196
9,70	19,89	16,12	19	77	+ 6	36	+ 44	1936
10,93	21,15	17,41	22	74	+ 36	1296	+ 14	196
11,60	21,82	18,08	22	74	+ 36	1296	+ 14	196
			10,184	3,726	[v v] = 4240		[v v] = 6240	

Wir haben also die Mittelwerte

$$a_1 = 10,184 \text{ cm} \quad \text{und} \quad a_2 = 3,726 \text{ cm}$$

erhalten. Das spezifische Gewicht des Wassers beträgt bei $25,6^{\circ} \text{C}$

$$\sigma_f = 0,997 \text{ [g}^* \cdot \text{cm}^{-3}\text{]}$$

(Anhang, Tabelle I). Daher lautet unser Ergebnis

$$\sigma = 0,997 \frac{10,184}{3,726} = 2,726 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Tabelle 2.

k g^*	x cm	a cm	C cm · $g^* - 1$	v	v^2
0	6,28	0,00	—	—	—
0,5	10,10	3,82	7,64	+ 4	16
1	13,90	7,62	62	- 16	256
1,5	17,73	11,45	63	- 6	36
2	21,58	15,30	65	+ 14	196
2,5	25,39	19,11	64	+ 4	16
$\Sigma k = 7,5$		$\Sigma a = 57,30$	7,636	$[vv] = 520$	

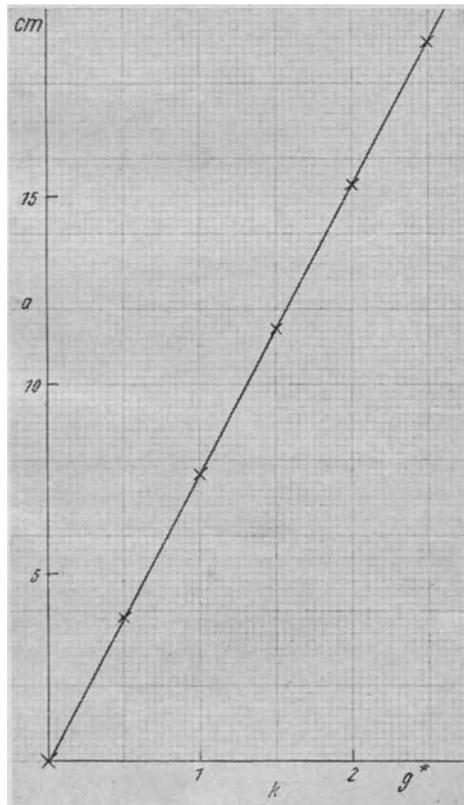
Das Ergebnis der Eichung der Federwaage zeigt Tabelle 2 und Abb. 3. Dabei bedeutet x die Anzeige der Waage und a die entsprechende Verlängerung der Feder. Die in der 4. Spalte angegebenen Empfindlichkeiten sind nach der Gleichung

$$C = a/k$$

[Gl. (8)] berechnet.

Man erkennt, daß die für die verschiedenen Belastungen berechneten Empfindlichkeiten untereinander sehr gut übereinstimmen, und daß daher auch zwischen den Verlängerungen und den Belastungen eine sehr genaue Proportionalität besteht.

Bei der Berechnung unsres Ergebnisses wollen wir nun aber berücksichtigen, daß unsre

Abb. 3. Verlängerung a der Feder als Funktion der Belastung k .

Einzelmessungen verschieden genau sind. Da man annehmen darf, daß die absoluten Ablesefehler bei den einzelnen Messungen von gleicher Größenordnung sind, so sind die relativen Fehler der Verlängerungsmessungen um so kleiner, je größer die Verlängerungen sind. Es ist daher angezeigt, den Einzelmessungen ein um so größeres rechnerisches Gewicht beizulegen (Einl. § 10), je größer die Belastung k ist. Wenn wir bedenken, daß die Verlängerung, die wir (bei Erhaltung der Proportionalität) erhalten würden, wenn wir an der Feder die Summe Σk der tatsächlich verwandten Belastungen k anwenden würden, gleich der Summe Σa der tatsächlich eingetretenen Verlängerungen a sein würde, so können wir die Empfindlichkeit C auch nach der Gleichung

$$C = \frac{\Sigma a}{\Sigma k} [\text{cm} \cdot \text{g}^* \text{-}^{-1}] \quad (9)$$

berechnen. Wie man ohne weiteres sieht, geht jede Einzelmessung in diese Berechnung mit einem um so größeren rechnerischen Gewicht ein, je größer die Verlängerung ist, und unsere obige Forderung ist damit erfüllt. Wir erhalten demnach

$$C = \frac{57,30}{7,5} = 7,640 \text{ cm} \cdot \text{g}^* \text{-}^{-1},$$

während das einfache arithmetische Mittel aus den fünf Einzelwerten der Tabelle 1 $7,636 \text{ cm} \cdot \text{g}^* \text{-}^{-1}$ beträgt.

Fehlerrechnung. Zur Durchführung der Fehlerrechnung für σ haben wir in der 6. bis 9. Spalte der Tabelle 1 bereits die Abweichungen der Einzelmessungen von a_1 und a_2 in Einheiten der 3. Dezimale, sowie deren Quadrate und die Summen dieser Quadrate angegeben. Demnach erhalten wir mit $n = 10$ (Anzahl der Messungen) nach Einl. § 9, Gl. (1), als mittlere Fehler von a_1 und a_2

$$\Delta a_1 = \pm \sqrt{\frac{4240}{10 \cdot 9}} \cdot 10^{-3} = \pm 6,86 \text{ Einheiten der 3. Dezimale} \\ \approx \pm 0,01 \text{ cm},$$

$$\Delta a_2 = \pm \sqrt{\frac{6240}{10 \cdot 9}} \cdot 10^{-3} = \pm 8,32 \text{ Einheiten der 3. Dezimale} \\ \approx \pm 0,01 \text{ cm}.$$

Das spezifische Gewicht σ , des Wassers ist ein fester Tabellenwert, also hier als fehlerfrei zu behandeln ($\Delta\sigma = 0$). Daher erhalten wir nach Gl. (7) und Einl. § 11, Gl. (7),

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\sigma}{\sigma} &= \pm \left(\frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{\Delta a_2}{a_2} \right) = \pm \left(\frac{0,01}{10,184} + \frac{0,01}{3,726} \right) \\ &= \pm 0,00366 \approx \pm 0,004 = \pm 0,4\%.\end{aligned}$$

Dem entspricht ein absoluter Fehler unsres Ergebnisses von $\pm 2,726 \cdot 0,004 = \pm 0,0089 \approx \pm 0,01 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3}$.

Eine unserer Berechnungsweise entsprechende Fehlerrechnung für die Empfindlichkeit C wäre ein wenig kompliziert. Wir wollen uns damit begnügen, den mittleren Fehler des einfachen arithmetischen Mittels nach Einl. § 9, Gl. (1), zu berechnen. Aus den Angaben der Tabelle 2 ergibt sich dann (mit $n = 5$)

$$\begin{aligned}C &= \pm \sqrt{\frac{520}{5 \cdot 4}} = \pm 5,1 \text{ Einheiten der 3. Dezimalen} \\ &\approx \pm 0,005 \text{ cm} \cdot \text{g}^*{}^{-1}.\end{aligned}$$

Wir wollen vorsichtshalber für unser obiges Ergebnis mit dem gleichen Fehler rechnen, obgleich es wahrscheinlich etwas genauer ist als das einfache arithmetische Mittel.

Demnach lauten unsre Endergebnisse:

$$\sigma = (2,726 \pm 0,01) \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3} \text{ bzw. } 2,726 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3} \pm 0,4\%.$$

$$C = (7,640 \pm 0,005) \text{ cm} \cdot \text{g}^*{}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad 7,640 \text{ cm} \cdot \text{g}^*{}^{-1} \pm 0,07\%.$$

2. Aufgabe. Spezifisches Gewicht von Flüssigkeiten

Literatur: W. § 58; M.-P. Bd. I/2, S. 1191; K. S. 191.

Da der Auftrieb k_a eines Körpers vom Volumen V in einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht σ gleich σV ist (1. Aufg), so verhalten sich die Auftriebe des gleichen Körpers in zwei verschiedenen Flüssigkeiten mit den spezifischen Gewichten σ und σ' wie

$$\frac{k_a}{k'_a} = \frac{\sigma}{\sigma'} \quad (1)$$

Daher kann z. B. σ nach der Gleichung

$$\sigma = \sigma' \frac{k_a}{k'_a} [\text{g}^* \cdot \text{cm}^{-3}] \quad (2)$$

berechnet werden, wenn σ' und das Auftriebsverhältnis k_a/k'_a bekannt ist. Auf die Einheit, in der die Auftriebe gemessen werden, kommt es dabei, wie bei der 1. Aufgabe, nicht an.

Bei der Mohrschen Waage (Abb. 4) wird ein Glaskörper benutzt, dessen Volumen ungefähr 5 cm^3 beträgt, und der gleich-



Abb. 4. Mohrsche Waage zur Messung des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten. Nach Müller-Pouillet, „Lehrbuch der Physik“.

zeitig als Thermometer ausgebildet ist. Sein Auftrieb in Wasser von 4°C (spezifisches Gewicht 1,0000) beträgt also etwa 5 g^* . Dies ist unsere Auftriebseinheit. Der Glaskörper wird an das Ende eines in 10 gleiche Teile geteilten Waagebalkens gehängt. Befindet er sich in Luft, so wird sein Gewicht durch ein am anderen Ende des Balkens fest angebrachtes Gegengewicht genau kompensiert. Wird er nunmehr in Wasser von 4°C gebracht, so

kann man durch Anhängen eines Reiters A oder des ihm gleichen Reiters A_1 , deren Gewichte gleich unsrer Auftriebseinheit sind, den Auftrieb kompensieren und bewirken, daß die Waage wiederum einsteht. Wird der Reiter aber z. B. auf den 7. Teilstrich des Balkens gesetzt, so kompensiert er nach dem Hebelgesetz nur den Bruchteil 0,7 des Auftriebs in Wasser von 4°C bzw. den Auftrieb in einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht $0,7 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3}$. So kann mittels dieses Reiters oder, falls $\sigma > 1$, mit Hilfe der beiden gleichen Reiter der Auftrieb in einer beliebigen Flüssigkeit bis zur 1. Dezimale kompensiert und damit gemessen werden. Mittels dreier weiterer Reiter, deren Gewichte gleich $1/10$, $1/100$ und $1/1000$ unsrer Auftriebseinheit sind, kann man entsprechend die 2., 3. und 4. Dezimale des Auftriebs und damit des spezifischen Gewichts von Flüssigkeiten bis zum Betrage $\sigma = 2,1111$ ermitteln.

Sofern der Reitersatz vollkommen genau ist, wäre $|\sigma'/k'_a| = 1$, da unsre gedachte Vergleichsflüssigkeit ja Wasser von 4°C ist, und der Auftrieb in Einheiten des Auftriebs in solchem Wasser gemessen wird. In diesem Falle wäre nach Gl. (2) genau

$$|\sigma| = |k_a|.$$

Tatsächlich darf man sich aber auf die Genauigkeit der Eichung nie verlassen, vielmehr ist es in der Regel nötig, eine Korrektion anzubringen¹⁾. Man findet diese, indem man eine Messung an destilliertem Wasser von Zimmertemperatur macht, dessen spezifisches Gewicht sehr genau bekannt ist (Anhang, Tabelle I; eine genauere Tabelle findet sich bei Kohlrausch). Aus dem Verhältnis des gemessenen spezifischen Gewichts zu seinem Tabellenwert findet man den Korrektionsfaktor κ , mit dem sämtliche mit der betreffenden Waage gemessenen Werte zu multiplizieren sind, um das richtige spezifische Gewicht zu erhalten.

Man kann mit der Mohrschen Waage mittelbar auch das spezifische Gewicht von festen Körpern bestimmen, indem man eine Lösung herstellt, in der der Körper genau schwebt, und dann deren spezifisches Gewicht mißt. Im allgemeinen begnügt man sich damit, z. B. durch Mischen zweier Flüssigkeiten mit geeigneten spezifischen Gewichten eine Lösung herzustellen, in der der Körper ganz langsam steigt, alsdann eine solche, in der er ganz langsam fällt, und dann das Mittel ihrer spezifischen Gewichte zu nehmen.

Zu Beginn der Messungen wird der vorher sorgfältig gereinigte und getrocknete Glaskörper in Luft an das Ende des Waagebalkens gehängt. Alsdann wird die Waage durch Betätigen der Fußschraube so justiert, daß die am andern Ende des Waagebalkens angebrachte Spitze genau auf die feste Gegen­spitze einspielt. Nunmehr darf die Waage nicht mehr von ihrem Platz entfernt werden. Bei den Messungen bringt man mit Hilfe der Reiter die Spitze jedesmal wieder zum Einspielen. Bei einem Wechsel der Flüssigkeit muß das Gefäß natürlich stets sehr gründlich gereinigt und getrocknet werden.

Beispiel. Der Glaskörper zeigt in destilliertem Wasser von 17°C einen Auftrieb von 0,9997 Einheiten. Der Tabellenwert des

¹⁾ Die Glaskörper der einzelnen Waagen haben nicht vollkommen das gleiche Volumen und werden mit Reitersätzen geliefert, die dem jeweiligen Volumen angepaßt sind, so daß sie für die einzelnen Waagen ein wenig verschieden sind. Sofern mehrere Waagen nebeneinander in Gebrauch sind, sind Vertauschungen der Reiter kaum zu verhindern. Es empfiehlt sich dann, sämtliche Reitersätze durch Abfeilen der schwereren möglichst genau gleich zu machen. Eine Prüfung der Richtigkeit der Waage nach dem obigen Verfahren ist aber auf jeden Fall nötig.

geringen Einflusses absehen), so ist nach Einl. § 11, Gl. (7), der relative Fehler von κ :

$$\frac{\Delta \kappa}{\kappa} = \pm \frac{\Delta \sigma_g}{\sigma_g} \approx \pm \frac{0,0002}{1,0000} = \pm 0,0002 = \pm 0,02 \%$$

Bei den übrigen Messungen wollen wir den unmittelbar gemessenen Wert auch mit σ_g , den korrigierten Wert mit σ bezeichnen, so daß $\sigma = \kappa \sigma_g$. Dann beträgt nach Einl. § 11, Gl. (7), der relative Größtfehler von σ :

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \pm \left(\frac{\Delta \kappa}{\kappa} + \frac{\Delta \sigma_g}{\sigma_g} \right),$$

wobei wir stets $\Delta \sigma_g = \pm 0,0002$ setzen. Demnach ist bei der Kochsalzlösung $\Delta \sigma_g / \sigma_g = \pm 0,0002 / 1,0841 \approx \pm 0,0002$ und $\Delta \sigma / \sigma = \pm (0,0002 + 0,0002) = \pm 0,0004 = \pm 0,04 \%$, beim Spiritus $\Delta \sigma_g / \sigma_g = \pm 0,0002 / 0,8265 \approx \pm 0,0003$ (vorsichtshalber nach oben abgerundet, wie stets bei Fehlerschätzungen) und $\Delta \sigma / \sigma = \pm (0,0002 + 0,0003) = \pm 0,0005 = \pm 0,05 \%$.

Beim Bernstein gehen außer der Unsicherheit von κ die Fehler zweier Messungen ein. Es ist ferner keineswegs wahrscheinlich, daß der richtige Wert gerade der genaue Mittelwert beider Messungen ist. Der Fehler von σ ist daher wahrscheinlich größer als bei den vorhergehenden Messungen. Wir wollen ihn vorsichtig auf $\pm 0,001 = \pm 0,1 \%$ schätzen und σ demgemäß auf 1,069 abrunden. Demnach lauten unsre Endergebnisse

Kochsalzlösung:

$$\sigma = (1,0841 \pm 0,0004) \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3} \text{ bzw. } 1,0841 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3} \pm 0,04 \%$$

Spiritus:

$$\sigma = (0,8265 \pm 0,0004) \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3} \text{ bzw. } 0,8265 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3} \pm 0,05 \%$$

Bernstein:

$$\sigma = (1,069 \pm 0,001) \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3} \text{ bzw. } 1,069 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3} \pm 0,1 \%$$

Zu diesen Fehlerschätzungen muß allerdings stark einschränkend bemerkt werden, daß die Bedingung der inneren Richtigkeit des Reitersatzes unter den Verhältnissen eines physikalischen Praktikums sehr oft nur ungenügend erfüllt sein wird, so daß diese Schätzungen nicht allzu wörtlich genommen werden dürfen. Wir haben sie vor allem des Verfahrens wegen durchgeführt.

3. Aufgabe. Elastizitätsmodul

Literatur: W. § 51 und 52; M.-P. Bd. I/2, S. 866 u. 895; K. S. 89 ff.

I. Dehnungsmessungen an Drähten

Wird ein homogener Körper von der Länge l und überall gleichem Querschnitt q durch eine Kraft k gedehnt, so erfährt er eine Verlängerung λ . Solange das Verhältnis k/q — also die auf die Querschnittseinheit entfallende Kraft — einen bestimmten, vom Material abhängigen Betrag (Proportionalitätsgrenze) nicht überschreitet, ist die relative Dehnung λ/l dem Betrage von k/q proportional. Es gilt das Hookesche Gesetz

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{k}{q} \frac{1}{E}. \quad (1)$$

Die Materialkonstante E heißt der Elastizitätsmodul oder Dehnungsmodul des betreffenden Stoffes. Ihre Einheit im CGS-System ist $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$; in der Technik und in Tabellen wird sie meist in der Einheit $1 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} = 0,98 \cdot 10^8 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ angegeben. Aus Gl. (1) folgt

$$E = \frac{k}{q} \frac{l}{\lambda}. \quad (2)$$

Die bei der Dehnung eines Drahtes eintretende Änderung von l braucht man unterhalb der Proportionalitätsgrenze beim Einsetzen von l in Gl. (2) nicht zu berücksichtigen, da stets $\lambda \ll l$. Auch die sehr kleine Querschnittsverminderung, die bei der Dehnung eintritt, dürfen wir außer Betracht lassen.

Nach Gl. (2) kann E aus Dehnungsversuchen an Drähten ermittelt werden. Für Übungszwecke empfiehlt es sich, einen hängenden Draht zu verwenden, der an einem dicht unter der Zimmerdecke an der Wand eingemauerten Eisenträger sehr gut befestigt ist. Dann ist eine Senkung des oberen Drahtendes durch die am Draht wirkenden dehnenden Kräfte nicht zu befürchten. (Andernfalls muß die ganze Meßvorrichtung so eingerichtet sein, daß sie an der Senkung teilnimmt.) Eine sehr empfindliche Vorrichtung zur Messung der Verlängerungen des Drahtes besteht in einer Wasserwaage, die auf ihrer einen Seite mit dem unteren Drahtende durch ein Gelenk verbunden ist. Ihre andere Seite kann mittels einer Mikrometerschraube, die an einem in die

Zimmerwand eingemauerten Eisenstab befestigt ist, gehoben und gesenkt werden (Abb. 5). Bringt man die Wasserwaage vor und nach der Dehnung zum Einstehen, so kann man den Betrag der Dehnung an der Skala des Mikrometers ablesen. Ist diese z. B. in 50 Teile geteilt, und beträgt die Ganghöhe der Schraube 0,5 mm, so entspricht 1 Skalenteil 0,01 mm, so daß man noch die Zehntel von 0,01 mm schätzen kann. Die Drahtlänge l wird zweckmäßig den Studenten mitgeteilt, weil ihre Messung nichts besonderes bietet. Andernfalls mißt man sie mit einem Bandmaß. Es hat keinen Zweck, sie relativ wesentlich genauer zu messen, als man die Verlängerungen λ messen kann. Der

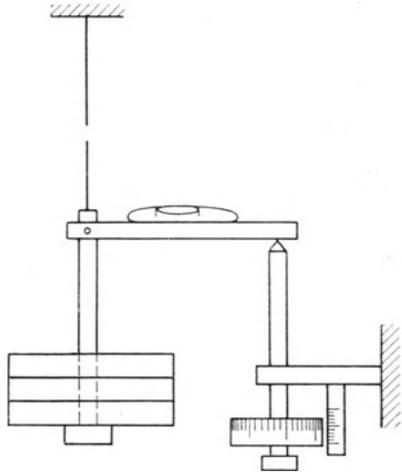


Abb. 5. Wasserwaage zur Messung des Elastizitätsmoduls.

Querschnitt q wird aus dem mit der Schraubenlehre gemessenen Drahtdurchmesser berechnet. Die Messung des Durchmessers soll grundsätzlich nicht an dem zu untersuchenden Draht erfolgen, der dadurch leicht Knicke erhält, sondern an einem aus der gleichen Lieferung entnommenen Probestück.

Bei der Messung muß der Draht bereits eine gewisse Vorbelastung haben, um ihn zu strecken. Häufig zeigt der Draht infolge unvorsichtiger Behandlung durch Vorgänger schwache Biegungen, zu deren Ausglättung die mit ihm fest verbundene Vorbelastung nicht genügt. In solchen Fällen liefern erst die Messungen bei höheren Belastungen brauchbare Ergebnisse (s. unten).

Die Messung beginnt mit der Einstellung der Wasserwaage, während der Draht noch nicht mit Zusatzgewichten belastet ist. Dann wird der Draht durch Zusatzgewichte schrittweise gedehnt und jedesmal die Wasserwaage zum Einstehen gebracht. Nach Erreichung einer ausreichenden Dehnung wird die Messung in umgekehrter Reihenfolge bis zum Anfangszustand zurück wieder-

holt. Zeigt sich zwischen den Messungen beim Auf- und Abstieg ein systematischer Unterschied, und wird der Anfangszustand nicht innerhalb der Meßgenauigkeit wieder erreicht, so zeigt dies, daß der Draht anfänglich Knicke besaß, die durch die Belastung ausgeglättet wurden, oder daß der Draht eine bleibende Verlängerung erfahren hat, weil die Elastizitätsgrenze des Stoffes überschritten wurde. In diesem Fall muß die Messung — gegebenenfalls nur bis zu einer kleineren Belastung — wiederholt werden, bis ein solcher Fehler nicht mehr eintritt.

Beispiel. Messingdraht. Länge (angegeben) $l = 2700$ mm. Der Drahtdurchmesser $2r$ wurde an 10 verschiedenen Stellen des Probestückes und unter verschiedenen Azimuten zu $2r = 0,499$ mm gemessen, mit Abweichungen vom Mittelwert von $\pm 0,002$ mm. Demnach beträgt der Querschnitt des Drahtes $q = 0,1956$ mm².

Das Ergebnis der Dehnungsmessungen zeigt Tabelle 1; Abb. 6 gibt eine graphische Darstellung des Ergebnisses. Es bedeuten k die dehnende Kraft, a die Anzeigen des Mikrometers, \bar{a} deren über den Auf- und Abstieg genommenen Mittelwerte, λ die daraus berechneten Verlängerungen des Drahtes.

Tabelle 1.

k kg*	a Aufstieg mm	a Abstieg mm	\bar{a} mm	λ mm
0,000	0,230	↑ 0,228	0,229	0,000
166	516	521	519	290
253	657	657	662	433
373	830	830	830	601
425	902	905	904	675
449	932	936	934	705
539	1,068	1,065	1,067	838
632	195	195	195	966
656	227	229	228	999
669	239	246	243	1 014
835	470	470	470	241
928	↓ 585	591	588	359
952		1,620	620	391

Man erkennt aus Abb. 5, daß die Kurve in ihrem ersten Teil ziemlich stark von einer Geraden abweicht, aber bald in eine solche übergeht¹⁾. Der Grund liegt darin, daß die anfängliche

¹⁾ Da dieser Fall sehr häufig eintritt, so habe ich absichtlich ein Beispiel gewählt, in dem er deutlich in Erscheinung tritt.

Vorbelastung noch nicht ausreichte, um die letzten kleinen Knicke und Biegungen auszuglätten, die sich auch — wie die fast genaue Rückkehr zum Anfangswert zeigt; infolge der Be-

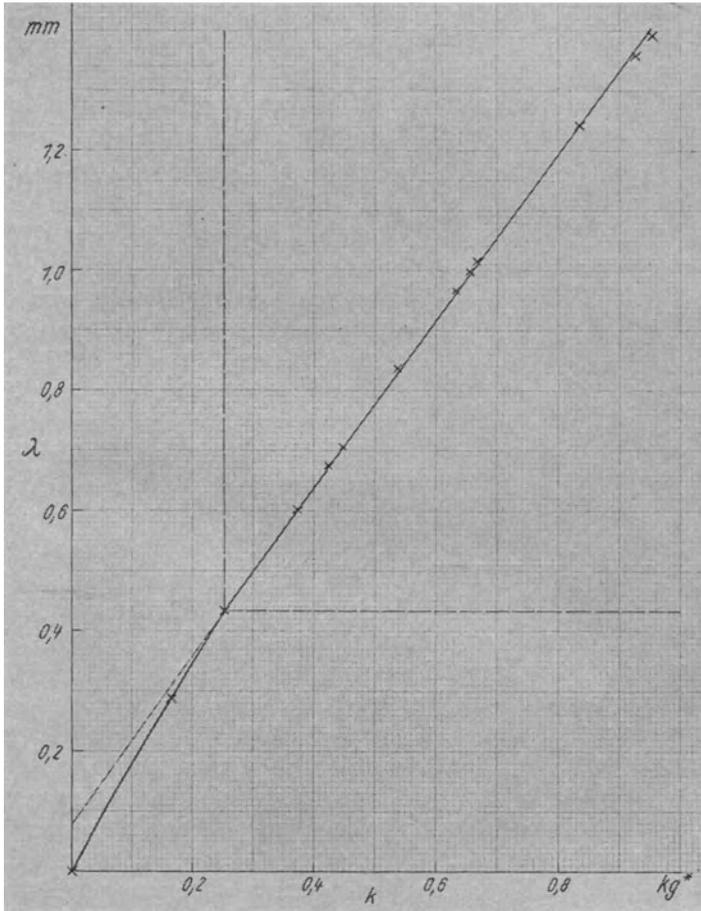


Abb. 6. Drahtverlängerung λ als Funktion der Belastung k .

lastungen bei der Messung nicht endgültig ausgeglättet haben. Ihre vorübergehende Ausglättung bei höheren Belastungen wird aber durch den geradlinigen Verlauf der Kurve in diesem Bereich

bewiesen. Für die Berechnung von E dürfen wir also nur die auf dem geraden Teil der Kurve liegenden Meßpunkte verwenden. Das geschieht, indem wir die aus Abb. 5 als ausreichend erkennbare zusätzliche Vorbelastung von 0,253 kg* und die zugehörige Mikrometereinstellung $\bar{a} = 0,662$ mm als Ausgangspunkt wählen. Wir ziehen also diese Beträge von den in Tabelle 1 angegebenen Werten ab und erhalten alsdann die in Tabelle 2 angegebenen Zahlen. (Dieses Verfahren entspricht einer Verschiebung der Koordinatenachsen in die in Abb. 6 gestrichelt gezeichneten Lagen.)

Tabelle 2.

k kg*	λ mm	k/λ kg*. mm ⁻¹
0,000	0,000	—
120	168	0,715
172	242	712
196	272	711
286	405	707
379	533	711
403	566	712
416	581	716
582	808	720
675	926	739
699	958	730
3,928	5,463	

Wir haben in der dritten Spalte die aus den Einzelmessungen berechneten Werte k/λ angegeben, die nach Gl. (2) konstant sein sollen, und die tatsächlich auch nur um Beträge von der Größenordnung von $\pm 1\%$ von ihrem arithmetischen Mittel (0,7173) abweichen. Wir wollen aber zur Berechnung von E nicht dieses arithmetische Mittel wählen. Es liegt hier genau der gleiche Fall vor wie bei der Empfindlichkeit der Federwaage (I. Aufgabe). Da die absoluten Fehler der einzelnen gemessenen Verlängerungen jedenfalls von der

gleichen Größenordnung sind (Ablese- und Einstellfehler), so kommt den einzelnen Messungen ein um so größeres Gewicht zu, je größer die Verlängerungen sind. Wir tragen dem, wie bei der I. Aufgabe, dadurch Rechnung, daß wir die Belastungen und die Verlängerungen addieren und den Ausdruck $\Sigma k/\Sigma \lambda$ bilden, in den die höheren Belastungen und Verlängerungen mit einem ihrem Betrage proportionalen Gewicht eingehen. Es entspricht dies wieder dem gedachten Fall, daß wir die Verlängerung $\Sigma \lambda$ gemessen hätten, die die Summe Σk unsrer Belastungen — bei erhaltener Proportionalität — erzeugt hätte. Wir berechnen also E nach der Gleichung

$$E = \frac{\Sigma k}{\Sigma \lambda} \frac{l}{q}. \quad (3)$$

Die betreffenden Summen sind in Tabelle 2 gebildet. Demnach erhalten wir mit den oben angegebenen Zahlen

$$E = \frac{3,928 \cdot 2700}{5,463 \cdot 0,1956} = 9925 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2}.$$

(Mit dem oben angegebenen arithmetischen Mittel hätten wir 9901 erhalten, also einen etwas kleineren Wert. Man erkennt den Einfluß des höheren Gewichts der Messungen bei höherer Belastung, deren letzte etwas über dem Durchschnitt liegende Werte von k/λ ergeben haben.)

Fehlerrechnung. Wir wollen $\Sigma k/\Sigma \lambda = A$ setzen, so daß $E = Al/q = Al/\pi r^2$. Dann ergibt sich nach Gl. (3) als relativer Größtfehler von E [Einl. § 11, Gl. (7)]

$$\frac{\Delta E}{E} = \pm \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta r}{r} \right). \quad (4)$$

Den relativen Fehler von A wollen wir nur abschätzen. Wir haben oben gesehen, daß die der Größe A entsprechenden Zahlen der dritten Spalte der Tabelle 2 um rund $\pm 1\%$ von ihrem arithmetischen Mittel abweichen. Wir wollen (u. a. mit Rücksicht darauf, daß wir Fehler im Nennwert der belastenden Gewichtsstücke nicht in Rechnung setzen können) vorsichtshalber diesen Fehlerbetrag auch auf unser Ergebnis für A anwenden, obgleich wir es durch die Art der Mittelwertbildung gegenüber dem arithmetischen Mittel in seiner Zuverlässigkeit zweifellos verbessert haben. Wir setzen also $\Delta A/A = \pm 1\%$. Die Länge l ist vorgegeben und jedenfalls sehr viel genauer als auf $\pm 1\%$ gemessen, so daß wir ihren Fehler nicht zu berücksichtigen brauchen, $\Delta l/l \approx 0$. Der Durchmesser $2r$ des Drahtes ist, wie oben angegeben, auf $\pm 0,002$ mm gemessen, so daß

$$\Delta(2r)/2r = \Delta r/r = \pm 0,002/0,499 \approx \pm 0,004 = \pm 0,4\%.$$

Insgesamt folgt also aus Gl. (4) ein Fehler von $\pm 1,8\%$, den wir auf $\pm 2\%$ abrunden.

Unser Endergebnis lautet also

$$\underline{E = (9925 \pm 200) \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} \text{ bzw. } 9925 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} \pm 2\%.$$

II. Biegungsversuche an flachen Stäben (Blechen)

Wird ein Stab gebogen, so erfährt er auf seiner konvexen Seite eine Dehnung, auf seiner konkaven Seite eine Zusammendrückung.

Auch für letztere gilt Gl. (1). Sein Verhalten wird also durch seinen Elastizitätsmodul bestimmt, der demnach auch aus Biegungsversuchen ermittelt werden kann. Soll z. B. der Elastizitätsmodul eines Metalls auf diese Weise gemessen werden, so benutzt man ein aus ihm gefertigtes längliches Blech, das auf zwei parallele, horizontale Schneiden gelegt wird, die einen Abstand von etwa 250 mm voneinander haben (Abb. 7).

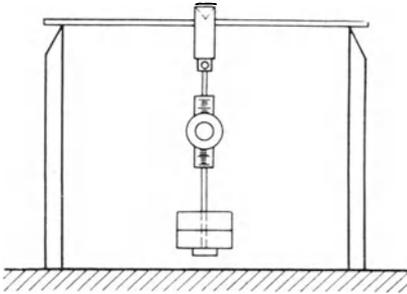


Abb. 7. Zur Messung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung.

Auf die Mitte des Bleches wird eine Schneide gesetzt, an die Gewichte gehängt werden können. Außerdem trägt die Schneide eine Vorrichtung, um die Senkung der Blechmitte bei Belastung zu messen, z. B. eine in Zehntelmillimeter geteilte Skala, die mit

einem Mikroskop mit Fadenkreuz betrachtet wird. Die Senkungen können dann auf etwa $\pm 0,01$ mm genau abgelesen werden. Ist l die wirksame Länge des Bleches (Schneidenabstand), b seine Breite, a seine Dicke, h die durch eine Kraft k bewirkte Senkung seiner Mitte, so ergibt die Theorie

$$h = \frac{1}{4} \frac{l^3}{a^3 b} \frac{k}{E}, \quad \text{so daß} \quad E = \frac{1}{4} \frac{l^3}{a^3 b} \frac{k}{h}. \quad (5)$$

Wird k in kg^* und werden sämtliche Längen in mm gemessen, so ergibt sich E in der Einheit $1 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2}$. Wir messen den Schneidenabstand mit einem in mm geteilten Maßstab, die Dicke a mit der Schraubenlehre, die Breite b mit der Schublehre, letztere beide an 10 verschiedenen Stellen. Ebenso wie bei der Dehnung messen wir die Senkungen h bei zunehmender und bei wieder abnehmender Belastung und nehmen das Mittel.

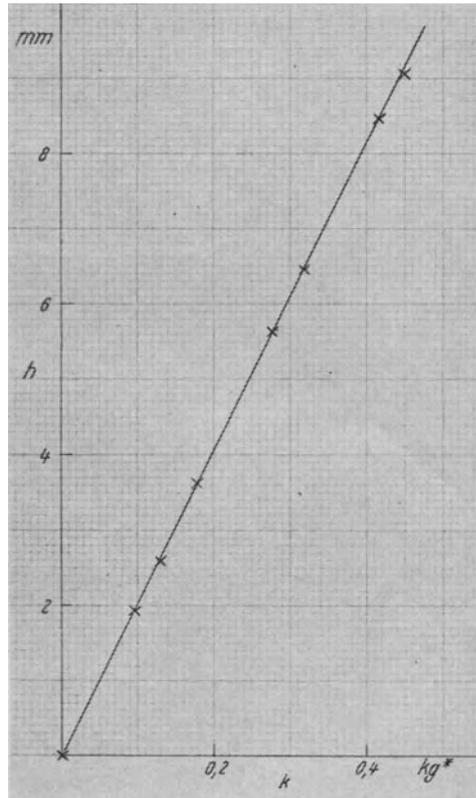
Beispiel. Stahlblech. Länge $l = (247,2 \pm 0,2)$ mm. Der Fehler rührt wesentlich davon her, daß die Schneiden nicht sehr scharf sind. Dicke $a = (0,798 \pm 0,002)$ mm; Breite $b = (19,2 \pm 0,1)$ mm. Die Fehler dieser Größen sind aus den Abweichungen der Einzelmessungen vom Mittelwert geschätzt.

Tabelle 3.

k kg*	a Aufstieg mm	a Abstieg mm	\bar{a} mm	h mm	k/h kg*. mm ⁻¹
0,000	1,38	↑ 1,42	1,40	0,00	—
097	3,32	3,39	3,355	1,955	0,0496
130	3,98	4,01	3,995	2,599	501
178	5,00	5,08	5,04	3,64	490
275	7,01	7,07	7,04	5,64	488
318	7,90	7,82	7,86	6,46	492
415	↓ 9,92	9,85	9,885	8,485	489
448	10,48		10,48	9,08	494
1,861				37,855	

Wir geben in Tabelle 3 die erhaltenen Messungen und in Abb. 8 die graphische Darstellung. Es sind a die Ablesungen an der Skala, \bar{a} ihre Mittelwerte.

In der letzten Spalte der Tabelle 3 haben wir die aus den Einzelmessungen berechneten Werte von k/h angegeben, die nach Gl. (5) konstant sein sollen. In der Tat weichen sie von ihrem arithmetischen Mittel (0,0493) mit einer Ausnahme nur um rund $\pm 1\%$ ab. Daher ergibt auch die graphische Darstellung recht gut eine Gerade. (Fehler, wie sie bei der Dehnung infolge von Knicken

Abb. 8. Durchbiegung h eines Bleches als Funktion der Belastung k .

oder Biegungen eintreten können, sind bei der Biegung kaum möglich.)

Aus den gleichen Gründen wie bei der Dehnung benutzen wir bei der Berechnung von E wiederum nicht das obige arithmetische Mittel aus den Einzelmessungen. Da auch hier das Gewicht der Einzelmessungen proportional mit der Belastung zunimmt, so bilden wir wieder die Summen Σk und Σh und berechnen E nach der Gleichung

$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3}{a^3 b} \frac{\Sigma k}{\Sigma h}. \quad (6)$$

Wir erhalten dann mit den obigen Zahlen und den in Tabelle 3 angegebenen Summenwerten

$$E = \frac{1}{4} \frac{247,2^3}{0,798^3 \cdot 19,2} \frac{1,861}{37,855} = 19020 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2}.$$

Fehlerrechnung. Wir wollen hier die Größe $\Sigma k / \Sigma h = A$ setzen. Dann ergibt sich nach Gl. (6) und nach Einl. § 11, Gl. (7), als relativer Größtfehler von E

$$\frac{\Delta E}{E} = \pm \left(3 \frac{\Delta l}{l} + 3 \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta A}{A} \right). \quad (7)$$

Mit den bereits oben angegebenen Unsicherheitswerten erhalten wir

$$\frac{\Delta l}{l} = \pm \frac{0,2}{247,2} \approx \pm 0,0008, \quad \frac{\Delta a}{a} = \pm \frac{0,002}{0,798} \approx \pm 0,0025,$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \pm \frac{0,1}{19,2} \approx \pm 0,005.$$

Den relativen Fehler der Größe A wollen wir wiederum nur schätzen und ihn, entsprechend den Abweichungen der aus den Einzelmessungen berechneten Werte vom Mittelwert (s. oben und Tabelle 3) vorsichtig mit $\pm 1\% = 0,01$ ansetzen. Aus Gl. (7) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \pm (0,0024 + 0,0075 + 0,005 + 0,01) \\ &= \pm 0,0249 \approx \pm 0,025 = \pm 2,5\%. \end{aligned}$$

Der absolute Fehler unsres Ergebnisses beträgt also rund ± 500 . Wir runden es deshalb auf 19000 ab und erhalten als Endergebnis:

$$E = (19000 \pm 500) \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} \text{ bzw. } 19000 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} \pm 2,5\%.$$

4. Aufgabe. Oberflächenspannung

Literatur: W., § 61; M.-P., Bd. III/1, S. 522; K., S. 129.

Wird eine Kapillare vom Radius r in eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit von der Dichte ρ eingetaucht, welche die Wandung der Kapillare vollständig benetzt, so beträgt die Steighöhe der Flüssigkeit in der Kapillare

$$h = \frac{2 \vartheta}{\rho r g} [\text{cm}] \quad (1)$$

($g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$). ϑ ist die Oberflächenspannung oder Kapillarkonstante der Flüssigkeit. Ihre Einheit beträgt im CGS-System $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$. Wird die Messung in einem zylindrischen Schälchen vom Radius R vorgenommen, und beträgt der äußere Radius der Kapillare r' , so tritt an Stelle von Gl. (1) die Gleichung

$$h = \frac{2 \vartheta}{\rho r g} \left(1 - \frac{r}{R - r'}\right) [\text{cm}]. \quad (2)$$

Wir können also ϑ aus der Steighöhe nach der Gleichung

$$\vartheta = \frac{1}{2} h \rho r g \left(1 - \frac{r}{R - r'}\right)^{-1} \quad (3)$$

berechnen.

Vor der Messung muß die Kapillare zunächst sehr gründlich mit Chromschwefelsäure und destilliertem Wasser gereinigt und (wenn es sich nicht gerade um eine Messung an destilliertem Wasser handelt) durch Hindurchsaugen oder -blasen trockener Luft getrocknet werden.

Die Messung des Radius r erfolgt durch Auswägen mit Quecksilber. Man füllt die Kapillare durch vorsichtiges Ansaugen etwa zur Hälfte mit Quecksilber und mißt die Länge des Quecksilberfadens mehrfach mit einem in mm geteilten Maßstab, indem man den Faden jedesmal an eine andere Stelle der Kapillaren bringt. Die Länge muß überall innerhalb der Meßfehler die gleiche sein. Kapillaren mit nicht überall gleichem Radius sind unbrauchbar. Dann bringt man das Quecksilber in ein vorher abgewogenes Glasschälchen und wägt von neuem zur Ermittlung der Masse m des Quecksilbers. Ist l die Fadenlänge, r der Radius der Kapillaren

und $\rho_q = 13,55 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ die Dichte des Quecksilbers, so ist $m = \pi r^2 l \rho_q \text{ g}$, also

$$r = \sqrt{\frac{m}{\pi l \rho_q}} \text{ [cm]}. \quad (4)$$

Jetzt wird die Kapillare mittels eines Gummibandes senkrecht zu den Teilstrichen auf einer auf Glas geritzten, in mm geteilten Skala befestigt, an der man die Steighöhe ablesen kann, und in die Flüssigkeit getaucht. Zwecks vollständiger Benetzung der Innenwand drückt man vor jeder Ablesung die Flüssigkeit in der Kapillare empor und läßt sie dann zurückfallen. Der Nullstrich der Skala wird in die äußere Flüssigkeitsoberfläche eingestellt. Am besten geht man so vor, daß man seitlich von unten gegen die Flüssigkeitsoberfläche blickt, die Skala zunächst tiefer eintaucht und sie dann mit der Kapillare so weit hebt, daß ihr Nullstrich eben in der Oberfläche verschwindet. Dann wird die Steighöhe abgelesen. In der Regel wird genügend Zeit sein, um mindestens zwei verschiedene Flüssigkeiten zu untersuchen.

Beispiel. Wir geben hier nur eine Messung an destilliertem Wasser wieder. Zimmertemperatur $20,6^\circ \text{C}$. Tabelle 1 zeigt die Messungen der Fadenlänge an 5 verschiedenen Stellen, Tabelle 2 gibt die Wägung des Quecksilberfadens, die mit einer guten Dämpfungswaage erfolgte.

Tabelle 1.

$l = 4,30 \text{ cm}$
30
30
30
30
30
4,30 cm

Tabelle 2.

Schälchen mit Hg	12,7813 g
Schälchen leer	12,5809
Masse m des Hg	0,2004 g

Hieraus ergibt sich nach Gl. (3)

$$r = \sqrt{\frac{0,2004}{\pi \cdot 4,30 \cdot 13,55}} = \sqrt{0,001095} = 0,0331 \text{ cm}.$$

Tabelle 3 gibt die 10 Messungen der Steighöhe, nebst weiteren Angaben für die Fehlerrechnung. Es ist also $h = 4,391 \text{ cm}$. Die Dichte des Wassers beträgt bei $20,6^\circ \text{C}$ $\rho = 0,998 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. (Oft wird es genügen, wenn man den runden Betrag 1,000 ansetzt.)

Der äußere Radius der Kapillare beträgt $r' = 0,2$ cm, der Radius des Schälchens $R = 2,3$ cm, so daß

$$1 - \frac{r}{R - r'} = 1 - \frac{0,0331}{2,1} = 0,984.$$

Dann folgt aus Gl. (3)

$$\vartheta = \frac{4,391 \cdot 0,0331 \cdot 0,998 \cdot 981}{2 \cdot 0,984} = 72,30 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

Tabelle 3.

$h = 4,39$ cm	- 1	1
40	+ 9	81
39	- 1	1
40	+ 9	81
38	- 11	121
39	- 1	1
40	+ 9	81
39	- 1	1
39	- 1	1
38	- 11	121
4,391 cm		490

Fehlerrechnung. Bei der Fehlerrechnung können wir von dem Korrektionsglied der Gl. (4), das von 1 nur sehr wenig verschieden ist, absehen. Die Dichte des Wassers ist sehr genau bekannt. So stecken also die wesentlichen Fehlerquellen in den Werten von h und r , so daß wir diese allein berücksichtigen. Dann folgt aus Gl. (3) und Einl. § 11, Gl. (7),

$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} = \pm \left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta r}{r} \right) \quad (5)$$

als relativer Größtfehler von ϑ . Für h haben wir in Tabelle 3 die nötigen Angaben zur Berechnung des mittleren Fehlers gemacht. Es ergibt sich nach Einl. § 9, Gl. (1),

$$\Delta h = \pm \sqrt{490/(9 \cdot 10)} = \pm 2,3 \text{ Einh. der 3. Dezimale} = \pm 0,0023 \text{ cm}$$

und

$$\Delta h/h = \pm 0,0023/4,391 \approx \pm 0,0005.$$

Für r ergibt sich aus Gl. (4) der relative Größtfehler

$$\frac{\Delta r}{r} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta l}{l} \right). \quad (6)$$

Bei der Abschätzung des Fehlers von m müssen wir bedenken, daß die Wägung des vollen und des leeren Schälchens aus fünf unmittelbaren Einzelmessungen besteht: Nullpunkt, leeres Schälchen, Nullpunkt, volles Schälchen, Nullpunkt. Wir können den Fehler jeder Einzelmessung zu $\pm 0,0001$ g annehmen. Als absoluter Größtfehler der Masse m ergibt sich dann $\Delta m = \pm 0,0005$ g.

Für l haben wir fünf übereinstimmende Werte erhalten. Der Fehler von l ist also jedenfalls kleiner als $\pm 0,005$ cm. Wir wollen aber vorsichtshalber $\Delta l = \pm 0,005$ cm setzen. Damit erhalten wir

$$\frac{\Delta r}{r} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{0,0005}{0,2004} + \frac{0,005}{4,30} \right) = \pm \frac{1}{2} (0,0025 + 0,0012) \approx \pm 0,002.$$

Für den Fehler von ϑ ergibt sich also nach Gl. (5)

$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} = \pm (0,0005 + 0,002) = \pm 0,0025 = \pm 0,25 \%$$

Unser Endergebnis lautet also, auf drei Stellen abgerundet, $\vartheta = (72,3 \pm 0,2) \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$ bzw. $72,30 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1} \pm 0,25 \%$.

Selbstverständlich ist die Angabe eines so kleinen Fehlers nur dann vertretbar, wenn die Versuchsbedingungen sehr einwandfrei waren, wenn insbesondere auf größte Sauberkeit der Kapillare geachtet wurde. Die Temperatur spielt eine verhältnismäßig kleine Rolle.

5. Aufgabe.

Zähigkeit (innere Reibung) von Flüssigkeiten

Literatur: W., § 76; M.-P., Bd. I/2, S. 1101; K., S. 122.

I. Absolute Messung bei sehr zähen Flüssigkeiten

Eine glatte Kugel vom Radius r , die sich mit der Geschwindigkeit v in einer Flüssigkeit bewegt, erfährt einen ihrer Geschwindigkeit entgegengerichteten Reibungswiderstand

$$k_r = 6 \pi \eta r v \text{ dyn} \quad (1)$$

(Stokessches Reibungsgesetz). Die Größe η ist vom Material der Kugel unabhängig und nur von der Art — und sehr stark auch von der Temperatur — der Flüssigkeit abhängig. Sie heißt die Zähigkeit, die Viskosität oder der Reibungskoeffizient der Flüssigkeit und wird im CGS-System in der Einheit $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} = 1 \text{ Poise}$ (P, aus dem Namen Poiseuille gebildet) gemessen. Sie kann bei sehr zähen Flüssigkeiten aus der Fallgeschwindigkeit von Kugeln in der Flüssigkeit ermittelt werden.

Es sei m die Masse, V das Volumen der Kugel, ρ die Dichte der Flüssigkeit. Dann wirkt auf die Kugel senkrecht nach unten die

um den Auftrieb $\rho V g$ dyn verminderte Schwerkraft mg dyn, also die Kraft $(m - \rho V) g$ dyn, und erteilt der Kugel anfänglich eine Beschleunigung ($g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$). Mit wachsender Geschwindigkeit wächst aber der Reibungswiderstand k_r , und wird in einer sehr zähen Flüssigkeit sehr schnell ebenso groß wie die erste Kraft,

$$6 \pi \eta r v = (m - \rho V) g. \quad (2)$$

Die Kugel bewegt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit v abwärts. Aus dieser, der Masse m , dem Radius r der Kugel und der Dichte der Flüssigkeit kann die Zähigkeit η berechnet werden,

$$\eta = \frac{(m - \rho V) g}{6 \pi r v} = \frac{(m - \rho V) g}{6 \pi r} \frac{t}{a}. \quad (3)$$

t ist die Fallzeit, a die Fallstrecke, also $a/t = v$.

Gl. (2) gilt streng nur in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit. Läßt man die Kugel in einer zylindrischen Röhre vom Radius R herabfallen, so bewirken Wandeinflüsse eine Verkleinerung der Fallgeschwindigkeit um den Faktor $1/(1 + 2,4 r/R)$. An Stelle von Gl. (3) ist dann zu setzen

$$\eta = \frac{(m - \rho V) g}{6 \pi r} \frac{t}{a} \frac{1}{1 + 2,4 \frac{r}{R}}. \quad (4)$$

Zur Ausführung der Messungen benutzen wir Stahlkugeln von etwa 0,5 bis 1 mm Radius, die in sehr gleichmäßiger Ausführung von der Kugellagerindustrie erzeugt werden. Sofern Masse und Radius der Kugeln den Studenten nicht einfach mitgeteilt werden, ermittelt man die Masse der Kugeln durch gleichzeitige Wägung von 10 bis 20 Stück, ihren Radius mit der Schraubenlehre oder durch Ausmessen unter dem Mikroskop (21. Aufgabe). (Die Berechnung des Radius aus der Masse und dem Tabellenwert der Dichte führt bei kleinen Kugeln zu Fehlern, weil die Dichte infolge des Härtungsprozesses in den äußeren Schichten merklich anders ist als im Innern.) Die Dichte der Flüssigkeit wird am einfachsten mit einem Aräometer gemessen. Wegen der starken Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur ist bei jeder Messung Angabe der Temperatur nötig. Es empfiehlt sich, die Messung mit zwei Kugelsorten von verschiedenen Radien je 10 mal durchzuführen.

Beispiel. Wir bringen hier nur die Messung mit einer Kugel-
sorte. Mit einer Dämpfungswaage wurde die Masse von 10 Kugeln,
die sich in einem Glasschälchen befanden, zu 0,1372 g bestimmt.
Als Mittelwert des Durchmessers ergab sich mit der Schrauben-
lehre für 10 Kugeln $2r = 0,1488$ cm, also $r = 0,0744$ cm. Demnach

ist $V = 4\pi r^3/3 = 0,001703$ cm³. Die
Kugeln fielen in einem mit Paraffinöl
von 18° C gefüllten Glasrohr von etwa
80 cm Länge und einem Radius von
1,5 cm, an dem zwei in einem Abstände
 $a = 50,00$ cm angebrachte Strichmar-
ken die Fallstrecke begrenzten. Mit der
Stoppuhr ergaben sich die in Tabelle I
angegebenen Fallzeiten, deren Mittel-
wert $t = 12,85$ sec beträgt. Die Dichte
der Flüssigkeit betrug $\rho = 0,883$
g · cm⁻³. Also ist $\rho V = 0,001703 \cdot 0,883$

$= 0,001530$ g, $m - \rho V = 0,01219$ g, und ferner ist $1 + 2,4r/R$
 $= 1,119$. Unser Ergebnis lautet also

$$\eta = \frac{0,01219 \cdot 981}{6\pi \cdot 0,0744} \frac{12,85}{50,00} \frac{1}{1,119} = 1,957 \text{ Poise.}$$

Fehlerrechnung. Wenn wir von dem verhältnismäßig
kleinen Korrektionsglied der Gl. (4) absehen, so beträgt nach
Gl. (3) und Einl. § 11, Gl. (7), der relative Größtfehler unsres
Ergebnisses

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm \left[\frac{\Delta(m - \rho V)}{m - \rho V} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta a}{a} \right]. \quad (5)$$

Bei der Schätzung von Δm nehmen wir an, daß jede Wägung mit der
Dämpfungswaage mit einem Fehler von $\pm 0,00025$ g behaftet
ist. Als Größtfehler des Ergebnisses haben wir daher, da es
sich um 2 Wägungen handelt, $\pm 0,0005$ g für 10 Kugeln anzu-
setzen, so daß $\Delta m = \pm 0,00005$ g. Den Fehler des Durch-
messers $2r$ schätzen wir auf Grund unsrer Einzelmessungen
auf $\pm 0,0001$ cm, so daß $\Delta r = \pm 0,00005$ cm. Da $V = 4\pi r^3/3$,
so ist nach § 11, Gl. (5), $\Delta V/V = \pm 3 \Delta r/r = \pm 3 \cdot 0,00005/0,0744$,
 $\approx \pm 0,002$ und $\Delta V = \pm 0,002 \cdot 0,001703 \approx \pm 0,0000034$ cm³.

Die Unsicherheit von ϱ schätzen wir auf $\Delta \varrho = \pm 0,005 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.
Demnach ist

$$\begin{aligned} \Delta(m - \varrho V) &= \pm (\Delta m + \varrho \Delta V + V \Delta \varrho) \\ &= \pm (0,00005 + 0,883 \cdot 0,0000034 + 0,001703 \cdot 0,005) \approx \pm 0,00006 \end{aligned}$$

und

$$\frac{\Delta(m - \varrho V)}{m - \varrho V} = \pm \frac{0,00006}{0,01219} \approx \pm 0,005.$$

Aus den Angaben der Tab. 1 und § 9, Gl. (1), ergibt sich mit $n = 10$ für t der mittlere Fehler $\Delta t = \pm \sqrt{250/(9 \cdot 10)} = \pm 1,67$ Einheiten der 2. Dezimale $\approx \pm 0,017 \text{ sec}^1$, so daß $\Delta t/t = \pm 0,017/12,85 \approx \pm 0,0013$. Ferner ist $\Delta r/r = \pm 0,00005/0,0744 = \pm 0,00067 \approx \pm 0,0007$. Den Fehler der Fallstrecke a schätzen wir auf $\pm 0,02 \text{ cm}$, so daß $\Delta a/a = \pm 0,02/50 = \pm 0,004$. Wir erhalten also nach Gl. (3)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \eta}{\eta} &= \pm (0,005 + 0,0013 + 0,0007 + 0,004) \\ &= \pm 0,011 \approx \pm 1\%. \end{aligned}$$

Unser auf halbe Einheiten der 2. Dezimale abgerundetes Endergebnis lautet also

$$\underline{\eta_{18} = (1,955 \pm 0,02) \text{ Poise bzw. } 1,955 \text{ Poise} \pm 1\%.$$

Die Bezeichnung η_{18} soll darauf hinweisen, daß der angegebene Wert sich auf eine Temperatur von 18° C bezieht. Bei der Fehlerrechnung haben wir indessen die starke Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit nicht berücksichtigen können. Die Angabe η_{18} ist also nur so zu verstehen, daß sie sich auf eine Temperatur bezieht, die innerhalb der Temperaturmeßfehler gleich $18,0^\circ \text{ C}$ ist.

II. Relative Messung an Flüssigkeiten von geringer Zähigkeit

Nach dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz beträgt das Flüssigkeitsvolumen dV , das in der Zeit dt durch eine Kapillare

¹⁾ Hier und künftig verzichten wir bei den der Fehlerrechnung dienenden Spalten unserer Tabellen auf Überschriften, da die Bedeutung und die Einheit der Zahlenangaben stets ohne weiteres ersichtlich sind.

von der Länge l und dem Radius r fließt, wenn zwischen den Enden der Kapillare eine Druckdifferenz Δp herrscht,

$$dV = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta l} dt \text{ cm}^3. \quad (6)$$

Auf Grund dieses Gesetzes können die Zähigkeiten zweier Flüssigkeiten miteinander verglichen und so die der einen berechnet werden, wenn die der andern bekannt ist.

Zur Messung an nicht allzu zähen Flüssigkeiten kann das Viskosimeter von Ostwald dienen (Abb. 9). Vor der Messung

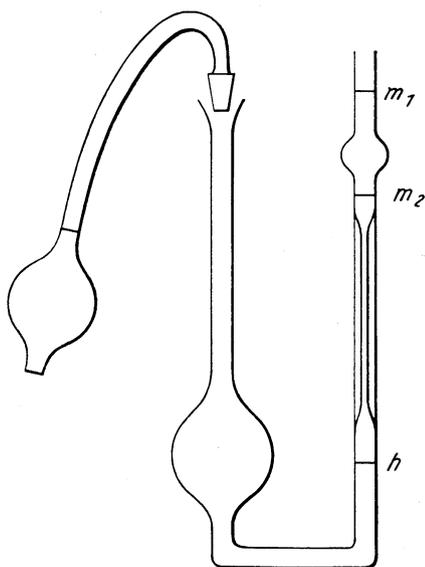


Abb. 9. Viskosimeter nach Ostwald.

wird das in üblicher Weise gereinigte und getrocknete Gefäß bis zur Marke h mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt. (Ist keine Füllmarke angebracht, so ist beim Vergleich zweier Flüssigkeiten darauf zu achten, daß in beiden Fällen gleiche Flüssigkeitsmengen verwendet werden.) Dann wird die Flüssigkeit mittels eines Gummiballons bis über eine Marke m_1 im Ansatzrohr emporgedrückt. Man mißt nunmehr mit der Stoppuhr die Zeit, während derer der Flüssigkeitsspiegel von der Marke m_1 bis zur Marke m_2

herabsinkt. Während dieser Zeit strömt jedesmal das gleiche Flüssigkeitsvolumen durch die Kapillare. Wegen der starken Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit ist es geboten, das ganze Viskosimeter in ein Wasserbad zu stellen, um die Temperatur während der Messungen konstant zu halten. Zweckmäßig ist ein Wasserbad von 18°C , da die Tabellenwerte der Zähigkeiten sich auf diese Temperatur beziehen. Als Vergleichsflüssigkeit dient in der Regel destilliertes Wasser, dessen Zähigkeit bei 18°C $1,054 \cdot 10^{-2}$ Poise beträgt.

Wir unterscheiden die beiden Flüssigkeiten, indem wir die auf die Vergleichsflüssigkeit bezüglichen Größen mit dem Index 0 versehen. Die bei den beiden Flüssigkeiten gemessenen Ausflußzeiten seien also t und t_0 , die — von den spezifischen Gewichten abhängigen — Druckdifferenzen Δp und Δp_0 . Dann ist nach Gl. (6), da es sich beide Male um das gleiche Volumen V handelt,

$$V = \frac{\pi r^4}{8 \eta l} \int_0^t \Delta p dt = \frac{\pi r^4}{8 \eta_0 l} \int_0^{t_0} \Delta p_0 dt. \quad (7)$$

Ist h die jeweilige Druckhöhe der Flüssigkeit, und sind ϱ und ϱ_0 die Dichten der beiden Flüssigkeiten, so ist $\Delta p = \varrho gh$ und $\Delta p_0 = \varrho_0 gh$. Dann ist

$$\int_0^t \Delta p dt = \varrho g \int_0^t h dt \quad \text{und} \quad \int_0^{t_0} \Delta p_0 dt = \varrho_0 g \int_0^{t_0} h dt. \quad (8)$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{t} \int_0^t h dt = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} h dt = \bar{h} \quad (9)$$

der zeitliche Mittelwert der Druckhöhen h für beide Flüssigkeiten, und dieser hat den gleichen Betrag \bar{h} für beide, da gleiche Mengen verwendet werden. Dann folgt aus den obigen Gleichungen durch einfache Rechnung

$$\frac{\varrho t}{\eta} = \frac{\varrho_0 t}{\eta_0} \quad \text{oder} \quad \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{t}{t_0}. \quad (10)$$

Es wird oft genügen, wenn man für die Dichte ϱ_0 des destillierten Wassers den Wert $\varrho_0 = 1,0000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ benutzt. (Höchste Abweichung bei Zimmertemperaturen — 0,3 %.)

Beispiel. Wasser und Alkohol. Temperatur $18,0^\circ \text{C}$. Wegen der starken Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit ist es nötig, die Temperatur des Wasserbades so genau, wie es verfügbaren Mittel erlauben, auf $18,0^\circ \text{C}$ zu halten, da $\eta_0 = 1,054 \cdot 10^{-2}$ Poise sich auf diese Temperatur bezieht. Die Ergebnisse der Zeitmessungen gibt Tabelle 2. Ihre Mittelwerte betragen $t_0 = 28,14 \text{ sec}$ und $t = 41,14 \text{ sec}$.

Tabelle 2.

Wasser			Alkohol		
$t_0 = 28,2$ sec	+ 6	36	$t = 41,1$ sec	- 4	16
1	- 4	16	2	+ 6	36
2	+ 6	36	1	- 4	16
1	- 4	16	1	- 4	16
1	- 4	16	2	+ 6	36
28,14		120	41,14		120

Die Dichte des Alkohols ist mit $0,791 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ angegeben. Mithin erhalten wir für seine Zähigkeit bei 18°C nach Gl. (10)

$$\eta = 1,054 \cdot 10^{-2} \frac{0,791 \cdot 41,14}{1,000 \cdot 28,14} = 1,220 \cdot 10^{-2} \text{ Poise.}$$

Fehlerrechnung. ϱ , ϱ_0 und η_0 sind fest gegebene Größen, also hier als fehlerfrei zu behandeln. Dann berechnet sich nach Gl. (10) und nach Einl. § 11. Gl. (7), der relative Größtfehler von η zu

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm \left(\frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta t_0}{t_0} \right).$$

Zur Berechnung der mittleren Fehler von t und t_0 haben wir in Tabelle 2 die Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert in Einheiten der 2. Dezimale angegeben. Demnach ergibt sich nach Einl. § 9, Gl. (1), für

$$\text{Wasser: } \Delta t_0 = \pm \sqrt{\frac{120}{5 \cdot 4}} \approx \pm 2,5 \text{ Einheiten der 2. Dezimale,}$$

$$\text{Alkohol: } \Delta t = \pm \sqrt{\frac{120}{5 \cdot 4}} \approx \pm 2,5 \text{ Einheiten der 2. Dezimale.}$$

Demnach ist $\Delta t_0/t_0 = \pm 0,025/28,14 \approx \pm 0,001$ und $\Delta t/t = \pm 0,025/41,14 \approx \pm 0,0006$, und wir erhalten

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm (0,001 + 0,0006) = \pm 0,0016 \approx \pm 0,2\%.$$

Hierzu ist aber zu bemerken, daß die Zähigkeit der Flüssigkeiten äußerst stark von der Temperatur abhängt und z. B. beim Wasser in der Gegend von 18°C um mehr als 2% auf je 1°C abnimmt (s. III). Da mit dem einfachen Wasserbad eine genaue Konstanthaltung der Temperatur von $18,0^\circ \text{C}$ nur schwer möglich

ist, so müssen wir kleine Temperaturschwankungen in Rechnung setzen, ferner kleine Eichfehler des Thermometers und kleine Ablesefehler. (Außerdem ist auch die letzte Stelle von η_0 bereits unsicher.) Nehmen wir für Alkohol eine Temperaturabhängigkeit von gleicher Größenordnung wie für Wasser an, so können diese Umstände leicht mindestens 1 % zum Fehler beitragen. In ihnen ist also die Unsicherheit des Ergebnisses in der Hauptsache begründet. Wir wollen deshalb unsern Fehler vorsichtig auf $\Delta\eta/\eta = \pm 1,5\%$ schätzen und erhalten dann, indem wir den berechneten Wert auf 3 Stellen abrunden, das Endergebnis

$$\underline{\eta = (1,22 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ Poise bzw. } 1,22 \cdot 10^{-2} \text{ Poise} \pm 1,5\% .}$$

III. Zähigkeit des Wassers als Funktion der Temperatur.

Auf die gleiche Weise können wir auch die Abhängigkeit der Zähigkeit einer Flüssigkeit von der Temperatur messen, indem wir das Wasserbad auf verschiedene Temperaturen bringen. Dabei muß natürlich auf vollkommenen Temperatúrausgleich geachtet werden. Die Temperatur kann im Bade gemessen werden. Daß die Flüssigkeit im Viskosimeter die gleiche Temperatur angenommen hat, erkennt man daran, daß sich die gemessenen Ausströmungszeiten bei aufeinanderfolgenden Messungen nicht mehr ändern.

Unsre Aufgabe besteht darin, die Zähigkeit des destillierten Wassers bei 6 bis 8 Temperaturen zwischen 0 und 50° C zu bestimmen. Sie werden auf den Tabellenwert bei 18° C, $\eta_{18} = 1,054 \cdot 10^{-2}$ Poise, bezogen und sollen für die Temperaturen 0° und 50° angegeben werden. Von der Änderung der Dichte mit der Temperatur sehen wir vorläufig ab, betrachten sie also als konstant. Dann folgt aus Gl. (10)

$$\frac{\eta}{\eta_{18}} = \frac{t}{t_{18}}, \quad (11)$$

wobei t_{18} die Ausströmungszeit bei 18° C bedeutet.

Beispiel. Die bei den verschiedenen Temperaturen gemessenen Ausströmungszeiten zeigt Tabelle 3. Die eingeklammerten Werte sind solche, bei denen, wie aus der Tabelle hervorgeht, noch kein vollständiger Temperatúrausgleich stattgefunden hat. Sie wurden deshalb bei der Mittelwertbildung nicht benutzt.

Tabelle 3.

0,0° sec	9,0° sec	15,0° sec	25,5° sec	34,9° sec	41,1° sec	52,0° sec
(41,7)	(34,9)	(29,8)	(25,0)	(21,3)	(19,5)	(17,4)
42,5	(34,5)	(29,5)	(24,0)	(21,0)	(19,4)	(17,2)
42,5	(34,0)	29,4	(23,9)	20,8	(19,2)	17,0
42,5	33,8	29,3	23,7	20,7	19,0	16,9
42,5	33,8	29,3	23,8	20,8	19,1	16,8
42,5	33,7	29,4	23,8	20,8	19,1	17,0
	33,7	29,2	23,7	20,7	19,1	17,0
		29,2	23,8			
		29,3				
42,5	33,75	29,3	23,76	20,76	19,1	16,94

Da wir von tieferen zu höheren Temperaturen aufsteigen, so ist es verständlich, daß wir bei allen Messungen — außer bei 0°, wo sich die Flüssigkeit erst abkühlen mußte — anfänglich etwas zu große Ausströmungszeiten erhielten, die einer etwas größeren Zähigkeit entsprechen. Abb. 10 zeigt unser Ergebnis in graphi-

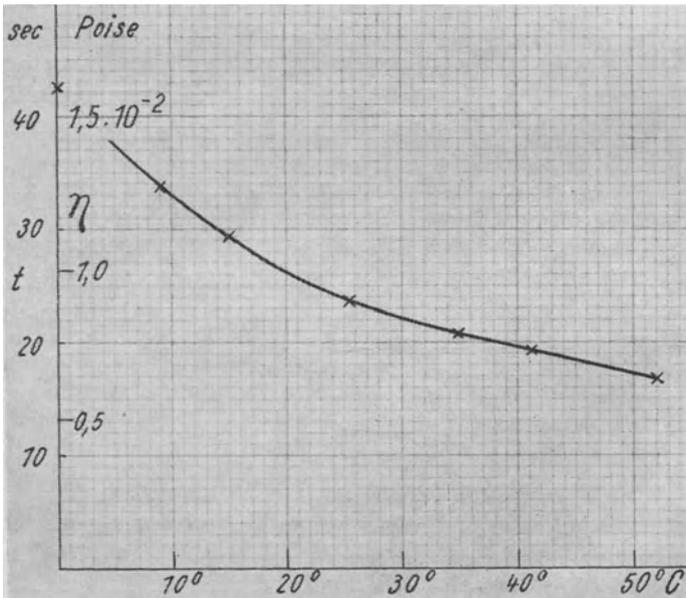


Abb. 10. Abhängigkeit der Ausströmungszeit t und der Zähigkeit η des destillierten Wassers von der Temperatur.

scher Darstellung. Wir entnehmen aus ihr, daß der Temperatur 18°C , bei der $\eta_{18} = 1,054 \cdot 10^{-2}$ Poise ist, eine Ausströmungszeit $t = 27,6$ sec entspricht. Da $\eta \sim t$, so brauchen wir nur die bei anderen Temperaturen gemessenen Ausströmungszeiten mit dem Faktor $1,054 \cdot 10^{-2}/27,6 = 0,0382 \cdot 10^{-2}$ zu multiplizieren, um die entsprechenden Zähigkeiten zu erhalten. Bei 0°C ist $t = 42,5$ sec; bei 50°C lesen wir aus Abb. 10 $t = 17,1$ sec ab. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\eta_0 &= 42,5 \cdot 0,0382 \cdot 10^{-2} = 1,623 \cdot 10^{-2} \text{ Poise,} \\ \eta_{50} &= 17,1 \cdot 0,0382 \cdot 10^{-2} = 0,653 \cdot 10^{-2} \quad ,, \quad ,\end{aligned}$$

Die Zähigkeit des Wassers nimmt also zwischen 0° und 50°C auf rund $\frac{1}{3}$ ihres Betrages bei 0°C ab!

Wir können die Abb. 10 ohne weiteres dazu benutzen, um η selbst als Funktion der Temperatur darzustellen, indem wir mit Hilfe des obigen Umrechnungsfaktors eine neue Ordinatenkala zeichnen, welche unmittelbar die Zähigkeiten angibt.

Wir wollen jetzt noch den Einfluß der Dichteänderungen mit der Temperatur erörtern. Bei 0°C unterscheidet sich die Dichte des Wassers (0,9998) von derjenigen bei 18°C (0,9986) nur um etwas mehr als 0,1%. Da dieser Unterschied erheblich kleiner als unser berechneter Fehler ist (s. unten), wollen wir ihn nicht berücksichtigen. Bei 50°C dagegen ist die Dichte (0,9880) um rund 1% kleiner als bei 18°C . Daher müssen wir nach Gl. (10) unsern berechneten Wert η_{50} um 1% auf 0,646 verkleinern. Wir wollen ihn auf 0,645 abrunden. An sich wäre noch zu bedenken, daß Dichteänderungen auch Volumenänderungen und damit Änderungen der Druckhöhen zur Folge haben, und daß ferner die Temperatur auch einen Einfluß auf die Abmessungen des Viskosimeters hat. Doch sind diese Einflüsse gering und wirken einander zum Teil entgegen. Wir lassen sie deshalb außer acht. Unsrer Ergebnisse lauten demnach jetzt

$$\eta_0 = 1,623 \cdot 10^{-2} \text{ Poise, } \eta_{50} = 0,645 \text{ Poise.}$$

Fehlerrechnung. Aus Gl. (11) und Einl. § 11, Gl. (7), folgt, wenn wir unsern Bezugswert η_{18} als fehlerfrei behandeln, als relativer Größtfehler von η ,

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm \left(\frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta t_{18}}{t_{18}} \right). \quad (12)$$

Eine Betrachtung der Tabelle 3 zeigt, daß die einzelnen Zeitmessungen — von Ausnahmen abgesehen — durchschnittlich nur um $\pm 0,05$ sec von ihren Mittelwerten abweichen. Wir wollen daher die Fehler der Mittelwerte gleich $\pm 0,05$ sec setzen, obgleich der mittlere quadratische Fehler kleiner sein würde. Da t_0 unmittelbar gemessen ist, so gilt demnach bei 0^0 C

$$\Delta t_0/t_0 = \pm 0,05/42,5 \approx \pm 0,0012.$$

Dagegen sind t_{18} und t_{50} nicht unmittelbar gemessen, sondern aus Abb. 10 interpoliert; sie sind demnach durch die Fehler ihrer unmittelbar gemessenen Nachbarwerte und obendrein durch die Unsicherheit der graphischen Interpolation beeinflusst. Wir werden daher ihre Fehler etwa auf $\pm 0,1$ sec schätzen müssen und erhalten damit $\Delta t_{18}/t_{18} = \pm 0,1/27,6 \approx \pm 0,004$ und $\Delta t_{50}/t_{50} = \pm 0,1/17,1 \approx \pm 0,006$. Damit erhalten wir aus Gl. (12)

$$\frac{\Delta \eta_0}{\eta_0} = \pm (0,0012 + 0,004) \approx \pm 0,005 = \pm 0,5\%,$$

$$\frac{\Delta \eta_{50}}{\eta_{50}} = \pm (0,006 + 0,004) = \pm 0,01 = \pm 1\%.$$

Wir haben aber bisher noch nicht die von der starken Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit herrührende Unsicherheit berücksichtigt. Die Temperatur 0^0 C des schmelzenden Eises läßt sich sehr zuverlässig herstellen, so daß wir sie als fehlerfrei ansehen dürfen. Aus Abb. 10 können wir entnehmen, daß sich die Zähigkeit bei 18^0 um etwa 2,5 % je Grad und bei 50^0 C um etwa 1,5 % je Grad ändert. Bei den Temperaturen müssen wir einen Fehler von $\pm 0,1^0$ C in Rechnung setzen. Das ergibt bei 18^0 einen zusätzlichen Fehler der Zähigkeit von $\pm 0,25\% \approx \pm 0,3\%$, bei 50^0 C einen solchen von $\pm 0,15\% \approx \pm 0,2\%$. Da unsre Messungen auf die Zähigkeit bei 18^0 C bezogen sind, so geht der Temperaturfehler bei 18^0 C in unsre beiden Werte ein; für den Wert bei 50^0 C kommt noch der Temperaturfehler bei 50^0 C hinzu, so daß der gesamte Temperaturfehler bei $\eta_0 \pm 0,3\%$, bei $\eta_{50} \pm 0,5\%$ beträgt. Insgesamt erhalten wir also bei η_0 einen relativen Fehler von $\pm 0,8\% \approx \pm 1\%$, bei η_{50} einen solchen von $\pm 1,5\%$.

Demnach lautet unser Endergebnis

$$\underline{\eta_0 = (1,623 \pm 0,016) \cdot 10^{-2} \text{ Poise bzw. } 1,623 \cdot 10^{-2} \text{ Poise } \pm 1\%,}$$

$$\underline{\eta_{50} = (0,654 \pm 0,010) \cdot 10^{-2} \text{ Poise bzw. } 0,654 \cdot 10^{-2} \text{ Poise } \pm 1,5\%.}$$

6. Aufgabe. Empfindlichkeit der Waage

Literatur: W., § 32; M.-P., Bd. I/1, S. 645 ff.; K., S. 32 ff.

I. Behandlung der Waage und Meßverfahren

Wir benutzen eine gute Analysenwaage (Abb. 11), wie sie auch der Chemiker meist verwendet. Eine solche ist ein sehr

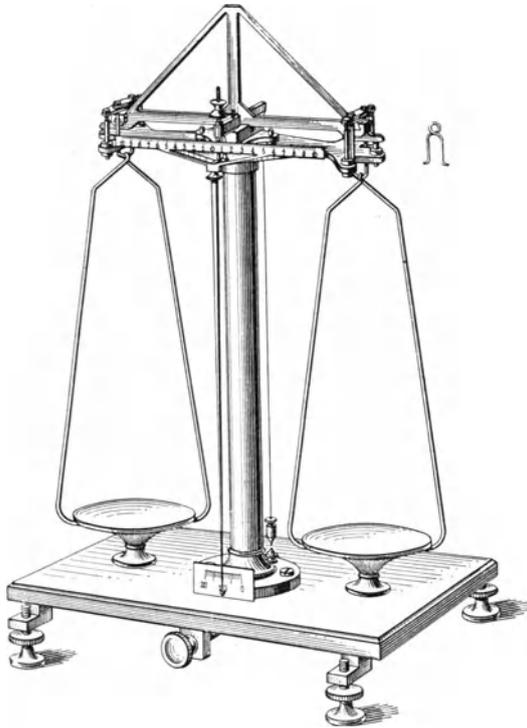


Abb. 11. Analysenwaage. Nach Westphal, „Physik“.

empfindliches und genaues Meßgerät¹⁾). Vorbedingung für ein zuverlässiges Ergebnis ist aber eine äußerst sorgfältige Behandlung. Besonders zu beachten ist folgendes:

¹⁾ Ich empfehle, die im Anfängerpraktikum benutzten Waagen auf nicht allzu hohe Empfindlichkeit einzustellen (2 bis 3 Sk · mg⁻¹), um dem Anfänger das Arbeiten nicht allzusehr zu erschweren.

1. Die Waage soll nur während der Dauer der Ablesungen entarretiert sein und dann sofort — am besten im Augenblick des Durchgangs durch den Nullpunkt — wieder arretiert werden. Arretieren und entarretieren muß sehr vorsichtig geschehen.

2. Der Waagekasten soll nur im Bedarfsfall geöffnet und als bald wieder geschlossen werden, um Luftströmungen und Temperatureinflüsse fernzuhalten. Beim gewöhnlichen Gebrauch sollen nur die Seitentüren benutzt werden.

3. Die Beseitigung von Schäden an der Waage — z. B. wenn der Waagebalken oder die Schalen aus ihren Lagern gegliitten sind — muß sehr vorsichtig erfolgen und wird besser dem Assistenten überlassen.

4. Die Gewichtsstücke, auch der Reiter, dürfen nur mit der Pinzette, nie mit der Hand angefaßt werden.

5. Das Auflegen von Körpern und Gewichtsstücken auf die Schalen und das Aufsetzen und Versetzen des Reiters darf nur bei arretierter Waage geschehen.

Die kleinste Masseneinheit unsres Gewichtssatzes beträgt 0,01 g. Die kleineren Masseneinheiten — bis 0,001 g = 1 mg — werden durch den „Reiter“ ersetzt, der die Masse 10 mg hat, und der auf eine in 10 Teile geteilte, am Waagebalken angebrachte Skala gesetzt werden kann. Nach dem Hebelgesetz ist dann seine Wirkung, je nach seiner Lage, gleich derjenigen einer auf der entsprechenden Waagschale liegenden Masse von 1, 2, 3, . . . , 10 mg. Der Reiter kann mittels eines von außen her verschiebbaren Hakens auf den gewünschten Teilstrich der Balkenskala gesetzt werden.

Die Skala, auf der der Zeiger der Waage spielt, ist am besten so beziffert, daß der Teilstrich 10 in der Mitte liegt. Auf diese Weise braucht man bei den ständig nötigen Mittelwertbildungen nur mit positiven Zahlen zu rechnen, was bequemer ist. Als Nullpunkt der Waage bezeichnen wir diejenige Stelle der Skala, in die der Zeiger bei unbelasteter oder beiderseitig gleich belasteter Waage einspielt. Er fällt in der Regel nicht genau mit dem mittleren Teilstrich der Skala zusammen und führt auch häufig infolge von Temperatureinflüssen (kleine Änderungen des Längenverhältnisses der Balkenarme) kleine, langsame Wanderun-

gen aus. [Wenn die Abweichung vom Mittelstrich mehr als etwa 1 Sk beträgt (Sk = Skalenteil), so bitte man den Assistenten um Regulierung.]

Beim Entarretieren gerät die Waage meist von selbst in Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage. Es wird grundsätzlich bei schwingender Waage beobachtet. Tritt keine solche Schwingung ein — was der Fall sein kann, wenn die Gleichgewichtslage sehr nahe am Mittelstrich der Skala liegt —, so kann man durch vorsichtige Handhabung der Arretierungsvorrichtung Schwingungen hervorrufen. Die Schwingungsweite soll zwischen etwa 3 und 6 Sk nach jeder Seite der jeweiligen Gleichgewichtslage betragen. Man ermittelt nun die Gleichgewichtslage der Waage aus der Beobachtung der Umkehrpunkte des schwingenden Zeigers. Dieses Meßverfahren arbeitet erstens schneller, als wenn man das Abklingen der wenig gedämpften Schwingung abwarten wollte. Zweitens vermag die schwingende Waage kleine Hemmungen, wie sie z. B. durch ein Staubkörnchen auf der Schneide erzeugt werden können, und die die endgültige Ruhelage ein wenig beeinflussen können, besser zu überwinden.

Man verfährt auf folgende Weise. Nach dem Entarretieren läßt man die Waage zunächst ein bis zwei Schwingungen ausführen, damit die etwa beim Entarretieren eingetretenen Störungen abklingen können. Dann liest man eine ungerade Zahl von aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten des Zeigers auf Zehntelskalenteile ab. Geübtere können sich mit drei Ablesungen begnügen, rechts-links-rechts oder links-rechts-links. Es seien x_1 und x_2 die Ablesungen auf der einen Seite, x_1' die Ablesung auf der andern Seite. Wegen der geringen Dämpfung erfolgt die Abnahme der Ausschläge nahezu linear, so daß man die Ruhelage x als den Mittelwert des Mittelwerts $(x_1 + x_2)/2$ der beiden Ablesungen auf der einen Seite und der Ablesung x_1' auf der andern Seite berechnen darf,

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + x_1' \right). \quad (1)$$

Anfänger sollten aber im Praktikum stets fünf aufeinanderfolgende Umkehrpunkte ablesen. Das ist schon deshalb zu empfehlen, weil bei der Ablesung von nur drei Umkehrpunkten ein möglicher

grober Ablesefehler des einzigen Wertes auf der einen Seite — z. B. ein Versehen um einen vollen Skalenteil — nicht durch eine zweite Ablesung aufgedeckt werden kann. Auch in diesem Fall bildet man zunächst die Mittelwerte der Ablesungen auf beiden Seiten einzeln und nimmt dann aus diesen Mittelwerten das Mittel,

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{x'_1 + x'_2}{2} \right). \quad (2)$$

Zur Einübung dieses Meßverfahrens wollen wir zunächst den Nullpunkt der unbelasteten Waage bestimmen. Wir wollen schon hier bemerken, daß beim Arbeiten mit der Waage der Reiter stets auf die Balkenskala aufgesetzt sein sollte, — sofern er an sich nicht benötigt wird, auf ihre Mitte. Es kann vorkommen, daß die Skala um eine Spur seitlich verschoben ist. Dann ergeben sich bei Wägungen Fehler, wenn der Reiter erst nach der Bestimmung des Nullpunktes aufgesetzt wird. Ein solcher Fehler wird vermieden, wenn der Reiter bereits bei der Nullpunktsbestimmung auf dem Nullstrich der Balkenskala sitzt.

Tabelle 1.

Rechts	Links
13,7	
13,5	7,6
13,2	7,3
Mittel 13,47	7,45
Mittel 10,46	

Beispiel. Es soll der Nullpunkt der unbelasteten Waage bestimmt werden. (Reiter auf dem Nullstrich der Skala!) Tabelle 1 zeigt die Ablesungen der Umkehrpunkte. Der Nullpunkt liegt bei 10,46 Sk.

II. Empfindlichkeit der Waage bei verschiedenen Belastungen

Unter der Empfindlichkeit C der Waage verstehen wir die Änderung a ihres Ausschlages, wenn die Belastungsdifferenz der beiden Schalen um 1 mg geändert wird. Da der Ausschlag der Waage (vom Nullpunkt der unbelasteten oder beiderseitig gleich belasteten Waage ab gerechnet) der Belastungsdifferenz proportional ist, so bewirkt eine Änderung μ der Belastungsdifferenz eine Ausschlagsänderung

$$a = C \mu \text{ Sk}, \quad \text{so daß} \quad C = \frac{a}{\mu} \text{ Sk} \cdot \text{mg}^{-1}. \quad (3)$$

Die Empfindlichkeit C hängt — wegen der Durchbiegung des Waagebalkens — stets mehr oder weniger stark von der Belastung ab (vgl. die 10. Aufg.). Unsre Aufgabe besteht darin, sie bei den Belastungen mit je 0, 5, 10, 20, 40, 60, 80, 100 g auf jeder der beiden Schalen nach Gl. (3) zu bestimmen, indem wir die Ausschlagsänderung a messen, die eine Änderung der Belastungsdifferenz um μ mg hervorruft. (Die Einschaltung der Messungen bei 5 und 10 g empfiehlt sich deshalb, weil in diesem Bereich häufig zunächst ein schwacher Anstieg der Empfindlichkeit stattfindet.)

Wir verfahren dabei auf folgende Weise¹⁾. Zunächst stellen wir fest, daß der Nullpunkt der beiderseits gleich belasteten Waage (Reiter auf Nullstrich!) nahe beim Mittelstrich der Skala liegt. (Das ist bereits durch die vorhergehende Nullpunktbestimmung geschehen.) Dann verschieben wir den Reiter um eine ganze Zahl von Teilstrichen soweit nach der einen Seite, daß die Waage eine Ausschlagsänderung von etwa 5 Sk. zeigt, und messen den neuen Ausschlag. Dann verschieben wir den Reiter um die gleiche Zahl von Skalenteilen nach der andern Seite, und messen erneut den Ausschlag. Da während der Dauer dieser Messung der Nullpunkt ein wenig gewandert sein kann, so verschieben wir schließlich den Reiter noch einmal auf die andere Seite, messen den Ausschlag wieder und nehmen aus diesem und dem auf der gleichen Seite zuerst gemessenen Ausschlag das Mittel. Dann berechnen wir die Differenz a der Ausschläge auf beiden Seiten. Haben wir den Reiter jeweils um z Teilstriche (je z mg entsprechend) nach den beiden Seiten verschoben, so entspricht das insgesamt einer Änderung der Belastungsdifferenz der beiden Schalen um $\mu = 2z$ mg. Wir können dann also die Empfindlichkeit C nach Gl. (3) berechnen.

¹⁾ Im Praktikum kommt es leicht vor, daß die Gewichtsstücke kleine Abweichungen von ihrem Nennwert haben. Dann verschiebt sich der Nullpunkt bei gleichem Nennwert der beiderseitigen Belastungen oft merklich. In diesem Falle setzt man den Reiter so auf die Balkenskala, daß die Waage wieder in der Nähe des Mittelstrichs der Zeigerskala einsteht, und rechnet die vorzunehmenden Verschiebungen des Reiters — statt vom Nullstrich der Balkenskala — von dem Teilstrich ab, auf dem der Reiter bei dieser Abgleichung sitzt. Auf das Ergebnis der Empfindlichkeitsmessungen hat der Fehler der Gewichtsstücke natürlich keinen Einfluß.

Beispiel. Wir geben hier in Tabelle 2 nur für den Fall der Belastung 0 g sämtliche Einzelmessungen wieder.

Tabelle 2.

2 mg links		2 mg rechts		2 mg links	
19,7		10,3		10,7	
19,4	10,6	10,0	0,7	10,9	19,3
19,2	10,8	9,7	0,9	11,0	19,0
19,43	10,7	10,0	0,8	10,87	19,15
Mittel 15,07		5,40		15,01	

Mit dem Mittelwert 15,04 ergibt sich $a = 15,04 - 5,40 = 9,64$ Sk.
 Ferner ist $\mu = 4$ mg, also

$$C = \frac{9,64}{4} = 2,41 \text{ Sk} \cdot \text{mg}^{-1}.$$

Von den weiteren Messungen, die genau ebenso ausgeführt wurden, geben wir in Tabelle 3 nur die Endergebnisse der Aus-

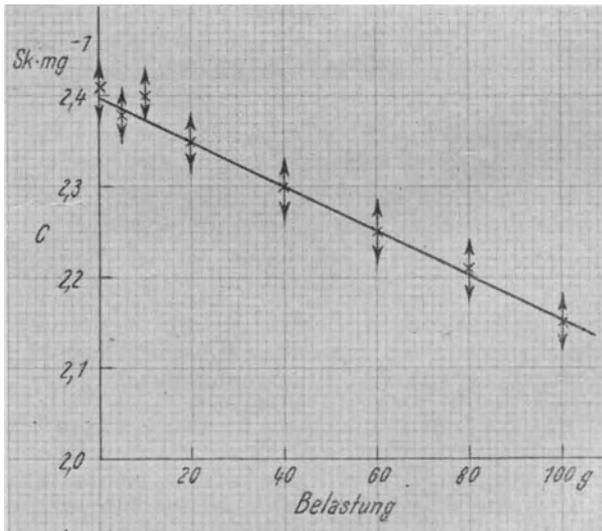


Abb. 12. Empfindlichkeit einer Waage als Funktion der Belastung.

schlagmessungen und die berechneten Empfindlichkeiten für die verschiedenen Belastungen an. Abb. 12 zeigt die Abhängigkeit

der Empfindlichkeit von der Belastung in graphischer Darstellung. Man erkennt eine allgemeine Abnahme der Empfindlichkeit mit der Belastung. (Häufig zeigt sich bei kleinen Belastungen zunächst eine Zunahme der Empfindlichkeit.)

Fehlerrechnung. Die Genauigkeit unsrer Ergebnisse hängt von der Genauigkeit ab, mit der wir die einzelnen Umkehrpunkte ablesen können. Wenn wir die Gesamtheit unsrer Einzel-

Tabelle 3.

Belastung g	2 mg links Sk	2 mg rechts Sk	a Sk	C Sk · mg ⁻¹
0	15,04	5,40	9,64	2,41
5	15,30	5,80	9,50	2,38
10	14,95	5,37	9,58	2,40
20	14,69	5,30	9,39	2,35
40	14,69	5,49	9,20	2,30
60	14,56	5,55	9,01	2,25
80	14,46	5,60	8,86	2,21
100	14,56	5,97	8,59	2,15

ablesungen betrachten (von denen wir hier nur einen kleinen Teil wiedergegeben haben), so können wir aus dem Vergleich der Differenzen der Ausschläge, die einander auf der gleichen Seite folgen, abschätzen, daß der Fehler der Einzelablesungen im Durchschnitt etwa von der Größenordnung $\pm 0,05$ Sk gewesen ist. Der mittlere Fehler der Mittelwerte ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, etwas, aber nicht erheblich, kleiner. Wir wollen daher auch für die Mittelwerte mit einem Fehler von $\pm 0,05$ Sk rechnen. Wir bezeichnen die beiden Ausschlagsmittelwerte, als deren Differenz wir a berechnen, mit a_1 und a_2 , so daß $a = a_1 - a_2$ ist. Dann ist der Größtfehler von a gleich $\Delta a = \pm (\Delta a_1 + \Delta a_2) = \pm 0,1$ Sk. Da wir die Masse des Reiters und die Balkenskala hier als fehlerfrei behandeln müssen, ihr etwaiger Fehler auch jedenfalls sehr klein ist, so brauchen wir einen Fehler von μ nicht in Rechnung zu setzen. Es folgt also aus Gl. (3) $\Delta C = \pm \Delta a / \mu = \pm 0,1/4 = \pm 0,025$ Sk · mg⁻¹. Der relative Fehler der Empfindlichkeitsmessungen beträgt also rund

$$\frac{\Delta C}{C} \approx \pm \frac{0,025}{2,5} = \pm 0,01 = \pm 1\%.$$

Die Fehlergrenzen sind in Abb. 12 durch Pfeile angedeutet. Man sieht, daß sich durch die Meßwerte innerhalb der Fehlergrenzen eine glatte, in unserm Fall sogar geradlinige Kurve ziehen läßt, und daß auch die Möglichkeit eines schwachen anfänglichen Anstiegs der Empfindlichkeit (s. oben) wenigstens nicht ausgeschlossen ist.

Unser Endergebnis ist in Tabelle 3 und Abb. 12 enthalten.

7. Aufgabe. Absolute Wägung

Literatur: M.-P., Bd. I/1, S. 661; K., S. 30.

Wägungen bezwecken — entgegen dem Sprachgebrauch — nie im eigentlichen Sinne die Messung von Gewichten (Kräften), sondern von Massen. Wir sprechen daher im folgenden stets von Massen, nicht von Gewichten. Hingegen bezeichnen wir Massennormale, weil das üblich und nicht so wichtig ist, als Gewichtsstücke. Überdies versteht man unter einem Massennormal im allgemeinen ein Gewichtsstück von höherer Genauigkeit, als es bei gewöhnlichen Wägungen verwandt wird.

Will man die Masse eines Körpers mit derjenigen Genauigkeit ermitteln, die mit einer guten Waage erzielbar ist, so muß erstens beachtet werden, daß eine Waage fast nie ganz genau gleicharmig ist, weil schon kleine Temperatureinflüsse eine meßbare Änderung des Verhältnisses der Waagenarme hervorrufen können. Zweitens muß der Auftrieb des Körpers und der Gewichtsstücke in der Luft berücksichtigt werden. Den Einfluß der Ungleicharmigkeit beseitigt man durch Doppelwägung, den des Auftriebes durch Rechnung.

I. Doppelwägung.

Eine Doppelwägung besteht darin, daß der Körper zweimal gewogen wird, wobei er erst auf der linken, dann auf der rechten Waagschale liegt. (Diese Reihenfolge ist deshalb zu empfehlen, weil man dann die Feststellung der Masse bis zur 2. Dezimalen mit der rechten Hand vornehmen kann.)

Es sei l die Länge des linken, $l + \delta l$ die Länge des rechten Waagenarmes ($\delta l \leq 0$). Wegen der Ungleicharmigkeit des

Balkens ergeben sich dann bei den beiden Wägungen zwei etwas verschiedene Massen m_l und m_r . Dabei bedeuten m_l bzw. m_r die Nennwerte der Gewichtsstücke die — auf die rechte bzw. linke Seite der Waage gebracht — die Waage genau zum Einspielen auf den Nullpunkt bringen, wenn der zu wägende Körper auf der linken bzw. der rechten Schale liegt. In jedem Fall ist δl nur ein winziger Bruchteil von l , also m_l von m_r nur sehr wenig verschieden. Die — noch nicht wegen des Auftriebes korrigierte — Masse des Körpers sei m_g . Nach dem Hebelgesetz ist

$$\begin{aligned} \text{bei der Wägung links: } m_g l &= m_l (l + \delta l), \\ \text{,, ,, ,, rechts: } m_r l &= m_r (l + \delta l), \end{aligned} \quad (1)$$

wobei jeweils die linke Seite der Gleichungen der linken, die rechte Seite der Gleichungen der rechten Seite der Waage entsprechen. Hieraus folgt durch einfache Rechnung

$$m_g = \sqrt{m_l m_r}, \quad (2)$$

$$1 + \frac{\delta l}{l} = \sqrt{\frac{m_r}{m_l}} = \sqrt{1 + \frac{m_r - m_l}{m_l}}. \quad (3)$$

Nach einem bekannten Satz darf man in Gl. (2) das geometrische Mittel der beiden nahezu gleichen Größen m_l und m_r durch ihr arithmetisches Mittel ersetzen (vgl. Einl. § 6, 2. Beispiel). Ferner machen wir davon Gebrauch, daß in Gl. (3) $(m_l - m_r)/m_r \ll 1$ ist. Wir erhalten dann

$$m_g = \frac{m_l + m_r}{2}, \quad (4)$$

$$1 + \frac{\delta l}{l} = 1 + \frac{1}{2} \frac{m_r - m_l}{m_r}, \quad \text{also} \quad \frac{\delta l}{l} = \frac{1}{2} \frac{m_r - m_l}{m_l}. \quad (5)$$

Wir erhalten auf diese Weise die Masse m_g und das Verhältnis der Waagarme $(l + \delta l)/l$. Je nachdem $\delta l \leq 0$ ist $m_r \leq m_l$.

Eine Doppelwägung erfolgt nach folgendem Schema:

1. Nullpunkt bei leeren Schalen, Reiter auf Nullstrich (!),
2. Wägung des Körpers auf der linken Schale,
3. Nullpunkt bei leeren Schalen, Reiter auf Nullstrich,
4. Wägung des Körpers auf der rechten Schale,
5. Nullpunkt, Reiter auf Nullstrich.

Grundsätzlich wird also jede Wägung zwischen zwei Nullpunktsbestimmungen eingeschlossen. Für jede Wägung ist der Mittelwert der Ergebnisse der einschließenden Nullpunktsbestimmungen maßgebend.

Wir beginnen also mit einer Nullpunktsbestimmung (1). Bei der ersten Wägung (2) wird dann zunächst unter ständigem vorsichtigen Entarretieren und Arretieren die Masse des Körpers mittels des Gewichtssatzes bis auf den nächstliegenden kleineren Zentigrammbetrag ermittelt. Der Reiter sitzt dabei auf dem Nullstrich. Alsdann bleibt der Waagekasten bis zum Ende der Wägung geschlossen. Nunmehr nähert man sich durch Verschieben des Reiters der Masse des Körpers von unten her weiter bis auf den nächstliegenden Milligrammbetrag. Der Zeiger steht dann noch rechts vom vorher ermittelten Nullpunkt ein. Dieser Ausschlag wird ermittelt. (Selbstverständlich werden auch jetzt sämtliche Ausschläge durch Beobachtung der Umkehrpunkte ermittelt, wie bei der 6. Aufgabe ausgeführt ist.) Alsdann wird der Reiter um einen vollen Teilstrich weiter verschoben und erneut der Ausschlag gemessen, der jetzt links vom Nullpunkt liegt. Die Differenz dieser beiden Ausschläge entspricht einer Änderung der Belastungsdifferenz der beiden Seiten um 1 mg, ergibt also unmittelbar die Empfindlichkeit C der Waage bei der vorliegenden Belastung [6. Aufgabe, Gl. (3)]. Infolgedessen können wir durch lineare Interpolation ohne weiteres den Milligrambruchteil berechnen, den wir statt 1 mg noch hätten hinzufügen müssen, um den Zeiger genau zum Einstehen auf den Nullpunkt zu bringen. (Bei einer wenig empfindlich eingestellten Waage kann es ratsam sein, den Reiter zwecks genauerer Ermittlung der Empfindlichkeit um 2 oder 3 Teilstriche zu verschieben). Nach erneuter Nullpunktsbestimmung (3) folgt eine vollkommen entsprechende Wägung (4) auf der rechten Schale und schließlich die dritte Nullpunktsbestimmung (5).

Beispiel. Wir geben in der Tabelle nur die Mittelwerte der einzelnen Ausschlagsmessungen an.

Zunächst ergibt sich, daß einer einseitigen Belastungsänderung um 1 mg bei der Wägung links eine Ausschlagsänderung von 2,39 Sk, bei der Wägung rechts eine solche von 2,40 Sk entsprechen hat. Dies ergibt unmittelbar die Empfindlichkeit. Sie

Tabelle.

Nullpunkt	Wägung links		Nullpunkt	Wägung rechts		Nullpunkt
	5,409 g	5,410 g		5,409 g	5,410 g	
10,07	11,89	9,50	10,10	8,53	10,93	10,12
	Nullpunkt: 10,09			Nullpunkt: 10,11		

entspricht innerhalb der Fehlergrenzen der Empfindlichkeit $C = 2,38 \text{ Sk} \cdot \text{mg}^{-1}$, die wir mit der gleichen und inzwischen nicht veränderten Waage bei dem zur 6. Aufgabe durchgeführten Beispiel für die Belastung 5 g gefunden hatten. Wir entnehmen der Tabelle weiter, daß der Ausschlag bei 5,409 g bei der Wägung links um $11,89 - 10,09 = 1,80 \text{ Sk.}$, bei der Wägung rechts um $10,11 - 8,53 = 1,58 \text{ Sk.}$ vom zugehörigen Nullpunktmittelwert (10,09 bzw. 10,11) entfernt ist. Wir wollen die Milligrammbruchteile mit μ_l und μ_r bezeichnen. Dann ergibt die Interpolation

$$\mu_l = \frac{1,80}{2,39} = 0,754 \text{ mg}, \quad \mu_r = \frac{1,58}{2,40} = 0,659 \text{ mg}.$$

Also ist

$$m_l = 5,409754 \text{ g}, \quad m_r = 5,409659 \text{ g}, \quad m_r - m_l = -0,000095 \text{ g}.$$

Aus Gl. (4) und (5) folgt dann

$$m_g = 5,409707 \text{ g},$$

$$\frac{\delta l}{l} = -\frac{1}{2} \frac{0,000095}{5,4097} = -0,0000088 \approx -0,00001,$$

$$\frac{l + \delta l}{l} = 1 - 0,00001 (= 0,99999).$$

Fehlerrechnung. Auf Grund unsrer (hier nicht abgedruckten) Einzelablesungen nehmen wir, wie bei der 6. Aufgabe, einen mittleren Fehler der einzelnen Ausschlagsmessungen von $\pm 0,05 \text{ Sk}$ an. Wir haben deshalb auch hier für die in unsre obige Rechnung eingehenden Ausschlagsdifferenzen (1,80 und 2,39 bzw. 1,58 und 2,40), die wir mit a und a' bezeichnen wollen, die doppelten Fehler, also $\Delta a = \Delta a' = \pm 0,1 \text{ Sk}$, anzusetzen. Die Beträge von μ_l und μ_r sind nach der Gleichung μ_l bzw. $\mu_r = a/a'$ berechnet, so daß ihr relativer Größtfehler gleich $\pm (\Delta a/a + \Delta a'/a')$ ist. Wir erhalten also

$$\frac{\Delta \mu_l}{\mu_l} = \pm \left(\frac{0,1}{1,80} + \frac{0,1}{2,39} \right) \approx \pm 0,1, \quad \frac{\Delta \mu_r}{\mu_r} = \pm \left(\frac{0,1}{1,58} + \frac{0,1}{2,40} \right) \approx \pm 0,1$$

und

$$\Delta \mu_l = \pm 0,1 \mu_l = \pm 0,0754 \text{ mg}, \Delta \mu_r = \pm 0,1 \mu_r = + 0,0659 \text{ mg}.$$

Da $m_g = 5,409 + (\mu_l + \mu_r)/2$, so ist $\Delta m_g = \pm (\Delta \mu_l + \Delta \mu_r)/2 = \pm 0,0707 \text{ mg} \approx \pm 0,000071 \text{ g}$, so daß wir das vorläufige Ergebnis

$$m_g = (5,409707 \pm 0,000071) \text{ g}$$

erhalten.

Wir wollen das Verhältnis $\delta l/l$ mit v bezeichnen, so daß nach Gl. (5) $v = (m_r - m_l)/2 m_l = (\mu_l - \mu_r)/2 m_l$. In dieser Gleichung ist m_l relativ sehr genau bekannt, die Differenz $\mu_l - \mu_r$ dagegen sehr unsicher, so daß wir bei der Fehlerrechnung nur sie zu berücksichtigen brauchen. Als relativer Größtfehler von v ergibt sich dann mit den obigen Zahlenwerten

$$\frac{\Delta v}{v} = \pm \frac{\Delta \mu_l + \Delta \mu_r}{\mu_l - \mu_r} = \pm \frac{0,1414}{0,095} \approx \pm 1,5 = \pm 150\%!$$

Demnach ist auf den berechneten Zahlenwert von v überhaupt kein Gewicht zu legen. Man kann nur sagen, daß unsre Waage mit recht großer Annäherung gleicharmig ist, daß aber — wegen des negativen Vorzeichens des berechneten Wertes von $v = \delta l/l$ — eine gewisse Wahrscheinlichkeit besteht, daß der rechte Arm ein wenig kürzer als der linke ist.

II. Auftriebskorrektion

Wir müssen jetzt noch berücksichtigen, daß sowohl der gewogene Körper als auch die Gewichtsstücke in der Luft Auftriebe erfahren, die sich bei verschiedenen Dichten der beteiligten Körper nur teilweise aufheben. Dabei ist zu beachten, daß die Nennwerte der Gewichtsstücke ihre wahren Massen angeben, also ihren Gewichten im Vakuum entsprechen sollen. Nach dem Archimedischen Prinzip beträgt der Auftrieb eines Körpers vom Volumen V $\sigma V g^*$, wenn σ das spezifische Gewicht des umgebenden Stoffes ist. Letzteres wird für Luft von Zimmertemperatur meist genügend genau mit $0,00120 \text{ g}^* \cdot \text{cm}^{-3}$ angenommen. Wenn die Dichte des gewogenen Körpers bekannt ist, so kann man sein Volumen aus seiner Masse m und seiner Dichte ρ bestimmen, $V = m/\rho$. Bei einfach geformten Körpern kann man V aus seinen Abmessungen berechnen.

Das Volumen der Gewichtsstücke berechnen wir stets aus ihrer Masse und der Dichte des Messings, welche $8,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ beträgt. (Bei dieser Korrektur brauchen, sofern die Masse mindestens einige g beträgt, nur die aus Messing gefertigten Gewichtsstücke bis herunter zu 1 g berücksichtigt zu werden.)

Das bisherige — nur wegen der Ungleicharmigkeit korrigierte — Wägungsergebnis m_g entspricht demjenigen Betrag der Gewichtsstücke, der bei vorhandenem Luftauftrieb an einer genau gleicharmigen Waage diese genau zum Einspielen in ihren Nullpunkt gebracht haben würde. Der Auftrieb wirkt wie eine scheinbare Verminderung der Massen des gewogenen Körpers und der Gewichtsstücke um die Beträge ρV bzw. ρV_g , wenn ρ die — mit dem spezifischen Gewicht maßzahlgleiche — Dichte der Luft und V und V_g die Volumina des Körpers bzw. der Gewichtsstücke bedeuten. Daher ist im allgemeinen m nicht genau gleich m_g , sondern es gilt

$$m - \rho V = m_g - \rho V_g \text{ oder } m = m_g + \rho(V - V_g). \quad (7)$$

Setzt man $V_g = m_g/\rho_g$, mit $\rho_g = 8,4 \text{ g cm}^{-3}$, so kann man statt dessen auch schreiben

$$m = m_g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_g}\right) + \rho V. \quad (8)$$

Ist ferner die Dichte ρ_k des Körpers bekannt, so daß man $V = m/\rho_k$ setzen kann, so folgt aus Gl. (7)

$$m = m_g \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_g}}{1 - \frac{\rho}{\rho_k}} \approx m_g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_g} + \frac{\rho}{\rho_k}\right), \quad (9)$$

wobei $\rho/\rho_g = 0,00120/8,4 \approx 0,000143$.

Beispiel. Unser gewogener Körper war ein rechteckiger Glaskörper¹⁾ vom Volumen $2,15 \cdot 1,93 \cdot 0,56 = 2,32 \text{ cm}^3$. Nach

¹⁾ Die Kanten des Glaskörpers sind ein wenig rund geschliffen. Diese Maßnahme empfiehlt sich deshalb, weil sich andernfalls die Masse des Körpers durch Abbrechen sehr kleiner Splitter oft schon im Laufe eines Semesters merklich verkleinert. Die dadurch hervorgerufene Verminderung des Körpervolumens liegt aber erheblich unterhalb von 1%, macht also in der Auftriebskorrektur weniger als $0,00003 \text{ g}$ aus und hat deshalb keinen ins Gewicht fallenden Einfluß auf das auf 4 Dezimalen abgerundete Endergebnis.

Gl. (8) erhalten wir mit $m_g = 5,409707$

$$\begin{aligned} m &= 5,409707 (1 - 0,000143) + 0,00120 \cdot 2,32 \\ &= 5,409707 - 0,000774 + 0,002787 = 5,411720 \text{ g.} \end{aligned}$$

Fehlerrechnung. Auf Grund der verwendeten Gl. (8) kommt für die Auftriebskorrektur nur ein Fehler im Volumen V des Körpers in Betracht. Es ist nach der Gleichung $V = a \cdot b \cdot c$ berechnet. Die drei Kantenlängen des Körpers sind mit der Schublehre auf $\pm 0,005$ cm genau gemessen worden, so daß $\Delta a = \Delta b = \Delta c = \pm 0,005$ cm. Der relative Größtfehler von V beträgt nach Einl. § 11, Gl. (7),

$$\frac{\Delta V}{V} = \pm \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right) = \pm \left(\frac{0,005}{2,15} + \frac{0,005}{1,93} + \frac{0,005}{0,56} \right) \approx \pm 0,014,$$

so daß $\Delta V = \pm 0,014 \cdot 2,32 = \pm 0,030$ cm³ und $\Delta(\rho V) = \rho \Delta V = \pm 0,00120 \cdot 0,030 = \pm 0,000036$ g. Dieser Fehler ist zu dem bereits oben berechneten Wägungsfehler von $\pm 0,000071$ g hinzuzuzählen, so daß der Gesamtfehler der Wägung $\pm 0,000107 \approx \pm 0,0001$ g beträgt.

Demnach beträgt unser Endergebnis, das wir auf Grund der Fehlerrechnung entsprechend abrunden,

$$\underline{m = (5,4117 \pm 0,0001) \text{ g} \quad \text{bzw.} \quad 5,4117 \text{ g} \pm 0,002 \% .}$$

Die benutzte Waage läßt bei Einstellung auf größere Empfindlichkeit eine genauere Wägung zu. Doch muß dann auch die Auftriebskorrektur — in unserm Fall also die Volumenmessung — genauer ausgeführt werden, da in unserm Beispiel der Fehler der Auftriebskorrektur ($\pm 0,036$ mg) halb so groß, also von der gleichen Größenordnung ist, wie der reine Wägungsfehler ($\pm 0,071$ mg).

8. Aufgabe. Trägheitsmomente und Richtmomente

Literatur: W. § 36; M.-P. Bd. I/1, S. 696.

I. Grundlagen

1. Das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer vorgegebenen Achse ist definiert als das über alle Massenelemente dm des Körpers erstreckte Integral

$$J = \int r^2 dm \text{ [g} \cdot \text{cm}^2\text{]}. \quad (1)$$

Dabei ist r der senkrechte Abstand des Massenelements dm von der Achse. Aus Gl. (1) berechnet man das Trägheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe (Zylinder) von der Masse m und dem Radius r bezüglich ihrer Figurenachse zu

$$J_s = \frac{1}{2} m r^2 [g \cdot \text{cm}^2]. \quad (2)$$

Die Figurenachse geht durch den Schwerpunkt der Scheibe, ist also eine Schwerpunktsachse. Ein auf eine Schwerpunktsachse bezogenes Trägheitsmoment bezeichnen wir mit J_s .

2. Ist m die Masse eines Körpers, a der Abstand einer Achse von der zu ihr parallelen Schwerpunktsachse des Körpers, so ist das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich jener Achse

$$J = J_s + m a^2 \quad (3)$$

(Steinerscher Satz). Ist also das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Schwerpunktsachse bekannt, so kann man sein Trägheitsmoment bezüglich jeder anderen, zu dieser Schwerpunktsachse parallelen Achse nach Gl. (3) berechnen.

3. Ein Körper sei um eine raumfeste Achse drehbar und habe bezüglich Drehungen um diese Achse eine bestimmte stabile Gleichgewichtslage. Wird der Körper durch eine Drehung um diese Achse ein wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt, so tritt an ihm ein rücktreibendes Drehmoment N auf. Dieses ist in vielen Fällen, vor allem, wenn das Gleichgewicht durch elastische Kräfte bedingt wird, bei nicht zu großem Drehwinkel φ diesem Winkel proportional,

$$N = -D \varphi [\text{dyn} \cdot \text{cm}]. \quad (4)$$

Die — von den Versuchsbedingungen abhängige — Konstante D heißt das Richtmoment (Direktionsmoment) der Anordnung. Die Einheit des Richtmoments ist die gleiche wie die eines Drehmoments, also im CGS-System $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$.

4. Zwischen dem an einem Körper angreifenden Drehmoment N und der ihm durch dieses erteilten Winkelbeschleunigung $d^2 \varphi / dt^2$ besteht die Beziehung

$$N = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (5)$$

(Zu dem folgenden vgl. Anhang I.) Ist der Körper sonst kräftefrei, können wir insbesondere eine etwa vorhandene Dämpfung ver-

nachlässigen (was bei unseren Messungen hinreichend genau der Fall ist), so folgt aus Gl. (4) und (5):

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{J} \varphi = -\omega^2 \varphi \quad (6)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} [\text{sec}^{-1}]. \quad (7)$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (6) lautet — wie man leicht durch Einsetzen bestätigen kann — :

$$\varphi = a \sin \omega t + b \cos \omega t. \quad (8)$$

a und b sind Funktionen der Integrationskonstanten, die von den Anfangsbedingungen abhängen. Wählt man z. B. die Zeitskala so, daß der Körper zur Zeit $t = 0$ seine Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ durchläuft, und bezeichnet man ferner die Schwingungsweite des Körpers mit φ_0 , so ergibt sich $a = \varphi_0$ und $b = 0$, so daß

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t. \quad (9)$$

Der Körper führt also eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω aus. Diese steht mit seiner Frequenz (Schwingungszahl) ν und seiner Schwingungszeit $\tau = 1/\nu$ in den Beziehungen

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/\tau. \quad (10)$$

Aus Gl. (7) und (10) folgt für die Schwingungszeit:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = 4\pi^2 \frac{J}{D}, \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (11)$$

Die Schwingungszeit τ eines ungedämpft oder sehr schwach gedämpft schwingenden Körpers ist also allein durch Trägheitsmoment und Richtmoment bestimmt.

II. Messung von Trägheitsmomenten und Richtmomenten

Zur Messung von Trägheitsmomenten bedienen wir uns eines Drehtisches (Abb. 13), an dessen vertikaler Achse eine Spiralfeder angreift, die die Gleichgewichtslage bestimmt und ein Richtmoment liefert. Zur Eichung des Drehtisches, dessen Richtmoment und eigenes Trägheitsmoment wir zunächst noch nicht kennen, benutzen wir einen Körper von leicht berechen-

barem Trägheitsmoment, eine Kreisscheibe aus Messing, deren Trägheitsmoment J_s bezüglich ihrer Figurenachse wir aus ihrer Masse und ihrem Radius nach Gl. (2) ermitteln. Die Scheibe kann auf dem horizontalen Drehtisch in verschiedenen Abständen von der Achse befestigt werden. Dazu dienen zwei Stifte an der Unterseite der Scheibe, die in die Löcher einer radialen Lochreihe im Drehtisch passen. So kann der Schwerpunkt der Scheibe in den Abständen 1, 2, ..., 7 cm von der Achse angebracht und die Schwingungsdauer des Drehtisches in diesen verschiedenen Zuständen gemessen werden.

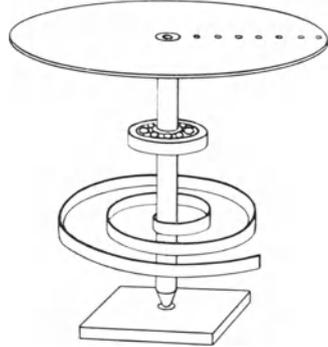


Abb. 13. Drehtisch zur Messung von Trägheitsmomenten.

Das Trägheitsmoment des leeren Drehtisches betrage J_t , das der Scheibe in ihrer jeweiligen Lage sei J , so daß das Trägheitsmoment des belasteten Drehtisches $J_t + J$ beträgt. J berechnen wir nach Gl. (3). Nach Gl. (11) ist dann

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{J_t + J}{D}. \quad (12)$$

Die Schwingungszeit des unbelasteten Drehtisches ($J = 0$) bezeichnen wir mit τ_t . Dann ist

$$\tau_t^2 = 4\pi^2 \frac{J_t}{D} = \frac{J_t}{D'} \quad \text{mit} \quad D' = \frac{D}{4\pi^2}. \quad (13a, b)$$

Dann folgt aus Gl. (12)

$$\tau^2 = \tau_t^2 + \frac{J}{D'} \quad \text{und} \quad D' = \frac{J}{\tau^2 - \tau_t^2}. \quad (14)$$

Das Quadrat der Schwingungsdauer wächst also linear mit dem Trägheitsmoment J der Scheibe bzw. — wie aus Gl. (3) und (14) folgt — linear mit dem Quadrat des Abstandes a des Scheibenschwerpunktes von der Achse. Aus τ , τ_t und J kann nach Gl. (14) die Konstante D' , daraus nach Gl. (13b) das Richtmoment D und nach Gl. (13a) das Trägheitsmoment $J_t = D' \tau_t^2$ berechnet werden.

Da wir auch die Gültigkeit des Steinerschen Satzes [Gl. (3)] prüfen wollen, so stellen wir Messungen bei verschiedenen Abständen a an. Die Schwingungszeiten messen wir mit der Stoppuhr, indem wir möglichst viele Durchgänge einer am Drehtisch befindlichen Strichmarke durch den Ort einer festen Marke beobachten, die dort angebracht ist, wo sich die bewegliche Strichmarke befindet, wenn der Drehtisch in Ruhe ist. Die Zahl der Schwingungen, über die man mißt, richtet sich nach dem Betrage der Dämpfung. Diese wächst mit dem Abstand der Scheibe von der Achse, und daher nimmt die Zahl der für die Messung verfügbaren Schwingungen ab, da die Messungen bei zu kleiner Schwingungsweite sehr ungenau werden. Zu Beginn der Messungen erteilen wir dem Drehtisch eine Drehung von 90° bis höchstens 180° und lassen ihn dann los.

Ehe man mit den Messungen beginnt, ist es unbedingt erforderlich, den Drehtisch mittels seiner Fußschrauben sehr genau horizontal zu stellen, da sonst die Schwerkraft an der Scheibe ein zusätzliches Richtmoment erzeugt. Man justiert den Drehtisch so, daß er sich nicht mehr dreht, wenn man die Scheibe an eine beliebige Stelle am Rande des vorher unbelasteten Drehtisches legt.

Beispiel. Der Durchmesser der Scheibe wurde mit der Schublehre zu $2r = (5,99 \pm 0,005)$ cm gemessen, so daß ihr Radius $r = (2,995 \pm 0,0025)$ cm beträgt. Die Masse wurde mit einer groben Waage zu $m = (212,0 \pm 0,05)$ g ermittelt. Demnach beträgt das Trägheitsmoment der Scheibe $J_s = 950,8 \approx 951$ g · cm².

Tabelle 1.

50 $\tau_t = 36,0$ sec	+ 16	256
35,7	- 14	196
35,7	- 14	196
35,8	- 4	16
36,0	+ 16	256
35,84		920

Sämtliche Schwingungszeiten sind je fünfmal gemessen worden. Wir geben hier in Tabelle 1 die Einzelmessungen nur für die Schwingungszeit τ_t des unbelasteten Tisches, gemessen über je 50 Schwingungen. Es ergibt sich im Mittel $\tau_t = 35,84/50 = 0,7168$ sec.

In Tabelle 2 geben wir nur die Mittelwerte der bei den verschiedenen Abständen a gemessenen Schwingungsdauern wieder. Ferner geben wir die zur Berechnung von D' nach Gl. (14) erforderlichen Zahlen, wobei J mit $J_s = 951$ g · cm² nach Gl. (3) berechnet und $\tau_t^2 = 0,514$ sec² ist.

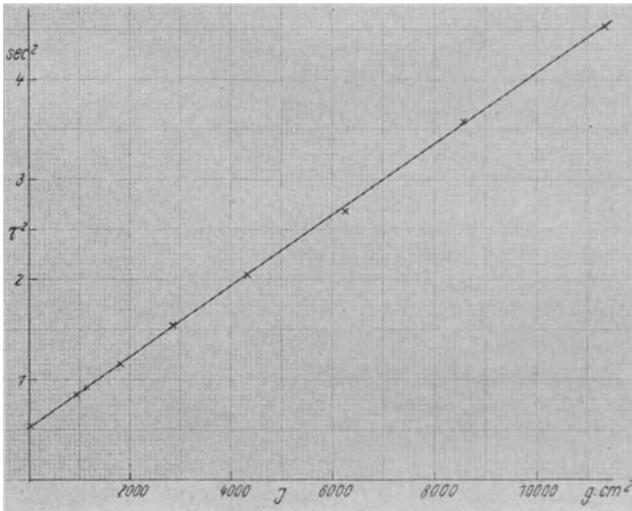
Tabelle 2.

a cm	τ sec	τ^2 sec ²	$\tau^2 - \tau_t^2$ sec ²	J g · cm ²	D' dyn · cm		
0	0,923	0,852	0,338	951	2813	- 8	64
1	0,964	0,929	0,415	1163	2803	- 18	324
2	1,072	1,050	0,636	1799	2828	+ 7	49
3	1,236	1,527	1,013	2859	2821	0	0
4	1,432	2,050	1,536	4343	2827	+ 6	36
5	1,651	2,727	2,213	6251	2823	+ 2	4
6	1,893	3,583	3,069	8583	2827	+ 6	36
7	2,126	4,528	4,013	11339	2826	+ 5	25
				Mittel: 2821			538

Die Fehler der einzelnen τ -Werte lagen, wie man aus den nicht wiedergegebenen Einzelmessungen entnehmen konnte, in der gleichen Größenordnung wie derjenige von τ_t . Für D' ergibt sich im Mittel

$$D' = 2821 \text{ dyn} \cdot \text{cm}.$$

Abb. 14 zeigt τ^2 als Funktion von $J = J_s + ma^2$. Die Meßpunkte liegen recht genau auf einer Geraden. Daher stimmen

Abb. 14. τ^2 als Funktion von J .

auch die in Tabelle 2 berechneten Einzelwerte von D' unter sich recht befriedigend überein.

Nach Gl. (14) und (13a) erhalten wir die Ergebnisse:

$$D = 4 \pi^2 D' = 111400 \text{ dyn} \cdot \text{cm}, J_t = D' \tau_t^2 = 1430 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Fehlerrechnung. Wir berechnen zunächst den Fehler von D' . Die nötigen Angaben zur Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers haben wir in Einheiten der letzten Stelle bereits in Tabelle 2 gemacht. Es ergibt sich $\Delta D' = \pm \sqrt{538/(8 \cdot 7)} \approx \pm 3$ Einheiten der letzten Stelle, so daß

$$\Delta D' = (2821 \pm 3) \text{ dyn} \cdot \text{cm}.$$

Dabei haben wir aber noch nicht berücksichtigt, daß die berechneten Einzelwerte durch stets gleichsinnig wirkende Fehler von J und τ_t gefälscht sein können, während die schwankenden Fehler der einzelnen τ -Werte bereits im vorstehend berechneten Fehler enthalten sind.

Aus $D' = J/(\tau^2 - \tau_t^2)$ folgt als von J und τ_t herrührender relativer Größtfehler

$$\frac{\Delta D'}{D'} = \pm \left(\frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta(\tau^2 - \tau_t^2)}{\tau^2 - \tau_t^2} \right) = \pm \left(\frac{\Delta J}{J} + \frac{2 \tau_t \Delta \tau_t}{\tau^2 - \tau_t^2} \right). \quad (15)$$

Nun ist $J = m r^2 / 2$, so daß der relative Größtfehler von J

$$\frac{\Delta J}{J} = \pm \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta r}{r} \right) \quad (16)$$

beträgt. Mithin erhalten wir

$$\frac{\Delta D'}{D'} = \pm \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{2 \tau_t \Delta \tau_t}{\tau^2 - \tau_t^2} \right). \quad (17)$$

Aus Gl. (17) erkennt man, daß der Fehler von D' um so kleiner ist, je größer τ ist, also bei je größerem Abstände a man gemessen hat. Darum wäre den Messungen bei einer strengeren Fehlerrechnung ein entsprechend verschiedenes Gewicht beizulegen. Doch ist die Rechnung dann sehr verwickelt, der Unterschied nicht groß, so daß wir davon absehen wollen. Wir werden die richtige Größenordnung des Fehlers erhalten, wenn wir einen mittleren Wert von $\tau^2 - \tau_t^2$, etwa denjenigen für $a = 4$ cm, wählen, um den Fehler zu berechnen. Tab. 1 enthält die zur Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers von τ_t nötigen Angaben in Einheiten der 2. Dezimale. Nach Einl. § 9, Gl. (1), ergibt sich

$\Delta(50 \tau_t) = 50 \Delta \tau_t = \pm \sqrt{920/(4 \cdot 5)} = \pm \sqrt{46} \approx \pm 7$ Einheiten der 2. Dezimale, so daß

$$\Delta \tau_t = \pm 0,07/50 = \pm 0,0014 \text{ sec.}$$

Demnach ist

$$\frac{2 \tau_t \Delta \tau_t}{\tau^2 - \tau_t^2} = \pm \frac{2 \cdot 0,7168 \cdot 0,0014}{1,536} = \pm 0,0013.$$

Ferner ist auf Grund der bereits oben gemachten Angaben

$$\frac{\Delta m}{m} = \pm \frac{0,05}{212,0} \approx \pm 0,00025 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta r}{r} = \pm \frac{0,0025}{2,995} \approx \pm 0,001.$$

Durch Einsetzen in Gl. (17) erhalten wir

$$\frac{\Delta D'}{D'} = \pm (0,00025 + 0,001 + 0,0013) \approx \pm 0,0025$$

und

$$\Delta D' = \pm 0,0025 D' \approx \pm 7 \text{ dyn} \cdot \text{cm.}$$

Diesen Fehler haben wir zu dem bereits oben berechneten Fehler von D' hinzuzuzählen, so daß wir insgesamt den Fehler

$$\Delta D' = \pm 10 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$$

erhalten.

Da $D = 4 \pi^2 D'$, so folgt ferner:

$$\Delta D = 4 \pi^2 \Delta D' \approx \pm 400 \text{ dyn} \cdot \text{cm.}$$

Aus der Gleichung $J_t = D' \tau_t^2$ folgt schließlich der relative Größtfehler von J_t

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J_t}{J_t} &= \pm \left(\frac{\Delta D'}{D'} + 2 \frac{\Delta \tau_t}{\tau_t} \right) = \pm \left(\frac{10}{2821} + 2 \frac{0,0014}{0,7168} \right) \\ &\approx \pm (0,0032 + 0,004) \approx \pm 0,007 = \pm 0,7\% \end{aligned}$$

und

$$\Delta J_t = \pm 0,007 J_t \approx \pm 10 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Wir erhalten also die folgenden Endergebnisse:

$$D = (111400 \pm 400) \text{ dyn} \cdot \text{cm} \quad \text{bzw.} \quad 111400 \text{ dyn} \cdot \text{cm} \pm 0,4\%,$$

$$\underline{J_t = (1430 \pm 10) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \quad \text{bzw.} \quad 1430 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \pm 0,7\%.$$

III. Trägheitsmoment eines unregelmäßig geformten Körpers

Durch unsere vorstehenden Messungen haben wir unsern Drehtisch geeicht; jedem zusätzlichen Trägheitsmoment J entspricht

eine bestimmte Schwingungsdauer τ , und wir können aus ihr das zusätzliche Trägheitsmoment entweder nach Gl. (14) berechnen oder aus Abb. 14 einfach ablesen. Dabei hängt natürlich dieses Trägheitsmoment von der Lage des Körpers auf dem Drehtisch ab und ist am kleinsten, wenn der Körperschwerpunkt in die Drehachse fällt.

Wir wollen eine solche Messung mit einem unregelmäßig geformten Körper (Messingplatte) ausführen, der wieder mit zwei Stiften auf dem Drehtisch befestigt ist und längs der Lochreihe verschoben werden kann,

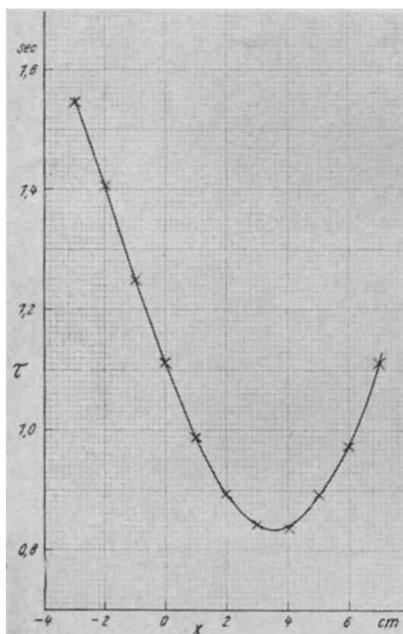


Abb. 15. Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Lage zur Achse.

wobei allerdings nicht dafür gesorgt ist, daß gerade der Schwerpunkt dabei durch die Achse hindurchwandert. Wenn wir den Körper über den ganzen Durchmesser des Drehtisches soweit wie möglich nach beiden Seiten hin verschieben und die Schwingungsdauer τ als Funktion des Ortes x auftragen, so erhalten wir eine Parabel, deren Scheitel (Minimum) dem Minimum des Trägheitsmoments entspricht, das der Körper im Laufe seiner Verschiebung längs der Lochreihe besitzt. (Auf die Wahl des Nullpunkts der Ortskoordinate kommt es bei dieser Messung nicht an. Wir bezeichnen unten

mit $x = 0$ die Lage, bei der der eine der beiden Stifte sich im Mittelpunkt der Scheibe befindet.) Aus der dem Minimum unserer Kurve entsprechenden Schwingungsdauer berechnen wir das Minimum J_{\min} des Trägheitsmoments.

Beispiel. In Tabelle 3 sind die — auf die gleiche Weise wie oben — aus je 50 Schwingungen bestimmten Schwingungsdauern

für die verschiedenen Lagen des Körpers angegeben. Abb. 15 gibt eine graphische Darstellung, die deutlich die Parabelgestalt zeigt.

Tabelle 3.

x	-3	-2	-1	0	1	2	cm
τ	1,594	1,406	1,250	1,108	0,990	0,894	sec
x	3	4	5	6	7		cm
τ	0,844	0,838	0,892	0,972		1,100	sec

Aus Abb. 15 lesen wir ab, daß dem Minimum eine Schwingungsdauer $\tau = 0,835$ sec entspricht, so daß $\tau^2 = 0,695$ sec². Mit unserm obigen Wert $\tau_t^2 = 0,541$ folgt $\tau^2 - \tau_t^2 = 0,181$. Aus Gl. (14) folgt dann

$$J_{\min} = D' (\tau^2 - \tau_t^2) = 2821 \cdot 0,181 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

oder.

$$\underline{J_{\min} = 511 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.}$$

Auf eine Fehlerrechnung wollen wir in diesem Fall verzichten.

9. Aufgabe. Messung des Schubmoduls

Literatur: W. § 53; M.-P. Bd. I/2, S. 891; K. S. 95.

Ein rechteckiges Volumenelement eines elastischen festen Körpers werde an seiner Unterseite festgehalten (Abb. 16). In seiner oberen Fläche und parallel zu ihr wirke eine über die Fläche F gleichmäßig verteilte Kraft k . Dann werden die Seitenflächen um einen Winkel α verdreht. Man bezeichnet eine solche elastische Gestaltsänderung als Schub oder Scherung. Bei nicht zu großer Gestaltsänderung, also bei kleinem Winkel α , ist dieser Winkel der auf die Flächeneinheit entfallenden Kraft proportional, $\alpha \sim k/F$. Man setzt

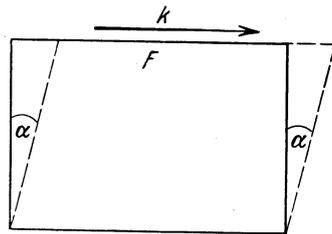


Abb. 16.
Zur Definition des Schubmoduls.

$$\alpha = \frac{k}{FG} \quad (1)$$

G ist eine für den betreffenden Stoff charakteristische Konstante, sein Schub- oder Scherungsmodul. Da er auch bei der Torsion

oder Drillung eine Rolle spielt, so bezeichnet man ihn auch als Torsions- oder Drillungsmodul. Sein Kehrwert heißt die Gleitzahl des Stoffes. Aus Gl. (1) erkennt man, daß G in der gleichen Einheit wie k/F zu messen ist, im CGS-System also in der Einheit $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$. In Tabellen ist die Angabe in der Einheit $1 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} = 0,981 \cdot 10^8 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ üblich.

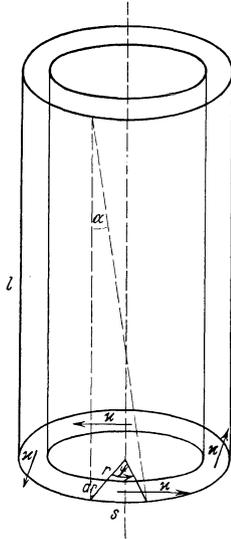


Abb. 17.
Torsion eines Zylinders.

Ist ein Volumenelement eines Körpers in der geschilderten Weise verformt, so erzeugen die in ihm auftretenden inneren Spannungen eine Zwangskraft, die seine ursprüngliche Gestalt wieder herzustellen sucht, und die der verformenden Kraft das Gleichgewicht hält. Diese zurücktreibende Kraft beträgt also nach Gl. (1)

$$k = \alpha FG \text{ [dyn] bzw. [kg*].} \quad (2)$$

Wir greifen aus einem homogenen Kreiszyylinder, z. B. einem Draht, von der Länge l ein zylindrisches Volumenelement vom Radius r und der Dicke dr heraus (Abb. 17). Die obere Fläche des Zylinders werde festgehalten. Wir denken uns das Volumenelement tordiert, indem in seiner unteren Fläche, über diese gleichmäßig

verteilt, tangential gerichtete Kräfte z angreifen, wie es Abb. 17 schematisch andeutet. Jede dieser Kräfte besitzt bezüglich der Zylinderachse das statische Moment rz , und da diese statischen Momente sämtlich gleichgerichtet sind, so ist ihre über die ganze untere Fläche genommene Summe

$$\Sigma rz = r \Sigma z.$$

Nun ist aber, wie man aus Abb. 17 erkennt, eine solche Torsion des Zylinders gleichbedeutend mit einer Scherung um einen Winkel α . Bezeichnen wir die untere Fläche mit dF und die Summe der Beträge der in ihr angreifenden Kräfte z mit $\Sigma z = dk$, so folgt aus Gl. (2) $dk = \alpha dFG$. Insgesamt muß also, um eine

solche Torsion zu bewirken, an dem betrachteten Volumenelement ein äußeres axiales Drehmoment

$$dN_a = r dk = \alpha r G dl \quad (3)$$

angreifen.

Der Zylinder sei um den Winkel φ (Abb. 17) um seine Achse tordiert. Dann ist die Länge des Kreisbogens s sowohl $s = l \cdot \alpha$ als auch $s = r \varphi$, so daß

$$l \alpha = r \varphi \quad \text{oder} \quad \alpha = \varphi \frac{r}{l}. \quad (4)$$

Die Größe der Fläche ist $dF = 2 \pi r dr$. Durch Einsetzen in Gl. (3) erhalten wir dann

$$dN_a = \frac{2 \pi r^3 dr}{l} G. \quad (5)$$

Es sei R der äußere Radius des ganzen Zylinders. Dann erhalten wir das gesamte an ihm angreifende axiale Drehmoment N_a , indem wir über dN_a von $r = 0$ bis $r = R$ integrieren,

$$N_a = 2 \pi \frac{G}{l} \varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l} \varphi. \quad (6)$$

Durch die Torsion werden aber im Zylinder innere Spannungen hervorgerufen, die ein ebenso großes, entgegengesetzt gerichtetes Drehmoment $N = -N_a$ erzeugen, so daß

$$N = -\frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l} \varphi = -D \varphi. \quad (7)$$

Nach unsern Ausführungen zur 8. Aufgabe [Gl. (4)] besitzt also der Zylinder infolge seiner Schubelastizität ein Richtmoment

$$D = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l}. \quad (8)$$

Wird der Zylinder, den wir uns nunmehr als einen langen, hängenden Draht mit einer an ihm hängenden Masse vom Trägheitsmoment J (8. Aufgabe) denken wollen, tordiert und dann losgelassen, so führt er mitsamt jener Masse Drehschwingungen aus, deren Schwingungsdauer durch die Gleichung

$$\tau^2 = 4 \pi^2 \frac{J}{D} \quad (9)$$

gegeben ist [8. Aufgabe, Gl. (11); vgl. a. Anhang I]. Mit Hilfe dieser Gleichung kann, wenn J bekannt ist, aus der Schwingungszeit τ das Richtmoment D und mit seiner Hilfe aus den Drahtabmessungen nach Gl. (8) der Schubmodul

$$G = \frac{2lD}{\pi R^4} \quad (10)$$

berechnet werden.

Zur Ausführung dieser Aufgabe benutzen wir einen 2 bis 3 m langen Draht, der oben gut befestigt (angelötet oder eingeklemmt) ist, und der an seinem unteren Ende eine an einem Metallstab befestigte kreisförmige Metallscheibe trägt (Abb. 18a). Das Trägheitsmoment der Vorrichtung betrage in diesem Zustande J_0 . Die Schwingungsdauer τ_1 ist dann durch die Gleichung

$$\tau_1^2 = 4\pi^2 \frac{J_0}{D} \quad (11)$$

gegeben. An der Vorrichtung kann eine weitere Scheibe befestigt werden (Abb. 18b), deren Trägheitsmoment J sehr genau bestimmt werden kann. Es ist eine Kreisscheibe vom äußeren Radius r_2 , die (zur Hindurchführung der Befestigungsschraube) eine zentrale Bohrung vom Radius r_1 hat. Wie man leicht ableiten kann, beträgt das Trägheitsmoment einer solchen Scheibe, deren Masse m sei,

$$J = \int r^2 dm = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2) \quad (12)$$

[vgl. die 8. Aufgabe, Gl. (2), die den Sonderfall für $r_1 = 0$ darstellt]. Das Trägheitsmoment beträgt nunmehr $J_0 + J$, und für die Schwingungsdauer τ_2 gilt die Gleichung

$$\tau_2^2 = 4\pi^2 \frac{J_0 + J}{D} \quad (13)$$

Die Gl. (11) und (13) enthalten außer dem bekannten Trägheitsmoment J und den Schwingungsdauern τ_1 und τ_2 die beiden Unbekannten D und J_0 (den Größen D und J_t der 8. Aufgabe entsprechend), die also aus ihnen berechnet werden können:

$$D = 4\pi^2 \frac{J}{\tau_2^2 - \tau_1^2}, \quad J_0 = \frac{D}{4\pi^2} \tau_1^2. \quad (14 \text{ a, b})$$

Da die Drehschwingungen nur äußerst wenig gedämpft sind, so kann man über 100 oder mehr Schwingungen beobachten und

die Schwingungszeiten sehr genau mit der Stoppuhr messen. An der Scheibe ist eine Strichmarke angebracht, der man bei ruhender Vorrichtung eine geeignete Marke, z. B. einen Draht, dicht gegen-

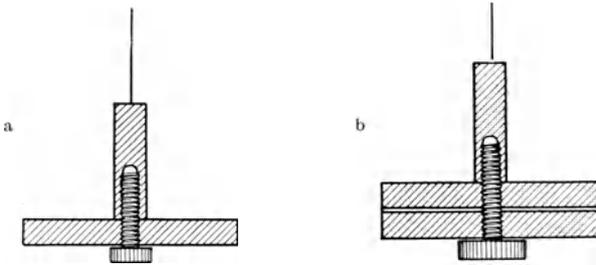


Abb. 18. Zur Messung des Schubmoduls aus Drehschwingungen eines Drahtes.

überstellt. Man beobachtet die Durchgänge der ersten Marke durch den Ort der zweiten. Bei einem langen, dünnen Draht kann der Drehwinkel φ erhebliche Werte, 2π und mehr, annehmen, ohne daß die Bedingung, daß α ein kleiner Winkel sei ($\alpha \ll 1$), verletzt wird, da R/l in jedem Fall eine sehr kleine Größe ist [vgl. Gl. (4)]. Man darf also mit recht großen Ausschlägen arbeiten.

Beispiel. Stahldraht.

Masse des Zusatzkörpers $m = (182,86 \pm 0,005) \text{ g}$
 Äußerer Radius des Zusatzkörpers .. $r_2 = (3,01 \pm 0,005) \text{ cm}$
 Innerer „ „ „ .. $r_1 = (0,50 \pm 0,005) \text{ cm}$

Daraus berechnet nach Gl. (12): Trägheitsmoment des Zusatzkörpers

$$J = \frac{1}{2} \cdot 182,86 (3,01^2 + 0,50^2) = 849,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Wir führen je zwei Messungen der Schwingungszeiten über je 100 Schwingungen aus (Tabelle). Es ergibt sich danach

Tabelle.

100 $\tau_1 = 589,3 \text{ sec}$ 589,8	100 $\tau_2 = 880,4 \text{ sec}$ 879,2
Mittel: 589,55 sec	879,8 sec

$\tau_1 = 5,8955 \text{ sec}$, $\tau_2 = 8,798 \text{ sec}$. Aus der Tabelle entnehmen wir, daß die Abweichungen der Einzelmessungen vom Mittelwert

$\pm 0,25$ bzw. $\pm 0,6$ sec betragen. Wenn wir demnach mit dem der Größenordnung nach jedenfalls richtigen Wert $\Delta 100 \tau_1 = \Delta 100 \tau_2 = \pm 0,5$ sec rechnen, so erhalten wir

$$\tau_1 = (5,8955 \pm 0,005) \text{ sec}, \quad \tau_2 = (8,798 \pm 0,005) \text{ sec}.$$

Es ist weiter $\tau_1^2 = 34,76 \text{ sec}^2$, $\tau_2^2 = 77,40 \text{ sec}^2$, $\tau_2^2 - \tau_1^2 = 42,64 \text{ sec}^2$. Damit erhalten wir nach Gl. (14a):

$$D = 4 \pi^2 \frac{849,4}{42,64} = 786,4 \text{ dyn} \cdot \text{cm},$$

ferner als Nebenergebnis nach Gl. (14b):

$$J_0 = \frac{1}{4 \pi^2} 786,4 \cdot 34,76 = 692,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Der mit der Schraubenlehre (nicht am Draht selbst, sondern an einem Probestück aus dem gleichen Vorrat, vgl. die 3. Aufgabe) gemessene Drahtdurchmesser beträgt $2 R = (0,0403 \pm 0,0001) \text{ cm}$, also

$$R = (0,02015 \pm 0,00005) \text{ cm}.$$

Die Drahtlänge ist mit $l = 265,5 \text{ cm}$ angegeben und mindestens auf $\pm 0,1 \text{ cm}$ als richtig anzunehmen.

(Wenn die Drahtlänge nicht angegeben wird — was aber zu empfehlen ist, da ihre unmittelbare Messung bei längeren Drähten umständlich ist und nichts besonderes bietet —, so kann man eine einigermaßen genaue Längenbestimmung auch so vornehmen, daß man die Pendelschwingung der Vorrichtung mißt und die Lage des Schwingungsmittelpunkts abschätzt. Aus der Gleichung $\tau = 2 \pi \sqrt{\lambda/g}$ kann man dann die reduzierte Pendellänge λ und aus ihr die Drahtlänge l berechnen.)

Mit dem obigen Wert von D erhalten wir dann nach Gl. (10):

$$G = \frac{2 \cdot 265,5 \cdot 786,4}{1,649 \cdot 10^{-7}} = 0,8060 \cdot 10^{12} \text{ dyn} \cdot \text{cm}$$

bzw.

$$G = \frac{0,8060 \cdot 10^{12}}{0,981 \cdot 10^8} = 8215 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2}.$$

Fehlerrechnung. Nach Gl. (10) beträgt der relative Größfehler von G :

$$\frac{\Delta G}{G} = \pm \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta D}{D} + 4 \frac{\Delta R}{R} \right). \quad (15)$$

Nehmen wir, wie oben angegeben, $\Delta l = \pm 0,1$ cm, so ist $\Delta l/l = \pm 0,1/265,5 \approx \pm 0,0004 = \pm 0,04\%$, so daß wir einen Fehler von l auf jeden Fall vernachlässigen dürfen.

Nach Gl. (14a) ist der relative Größtfehler von D :

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm \left(\frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{\tau_2^2 - \tau_1^2} \right),$$

und der relative Größtfehler von J nach Gl. (12):

$$\frac{\Delta J}{J} = \pm \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta(r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2 + r_2^2} \right).$$

Nach den oben gemachten Angaben ist $\Delta m = \pm 0,005$ g, $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \pm 0,005$ cm. Demnach ist (alle Zahlen im folgenden sind abgerundet)

$$\frac{\Delta m}{m} = \pm \frac{0,005}{183} \approx \pm 0,00003 = \pm 0,003\%,$$

also zu vernachlässigen;

$$\frac{\Delta(r_1^2 + r_2^2)}{r_1^2 + r_2^2} = \frac{2(r_1 \Delta r_1 + r_2 \Delta r_2)}{r_1^2 + r_2^2} = \pm \frac{2 \cdot 3,5 \cdot 0,005}{9,25} \approx \pm 0,004,$$

also auch

$$\frac{\Delta J}{J} = \pm 0,004.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\tau_2^2 - \tau_1^2)}{\tau_2^2 - \tau_1^2} &= \frac{2(\tau_2 \Delta \tau_2 + \tau_1 \Delta \tau_1)}{\tau_2^2 - \tau_1^2} \\ &= \pm \frac{2(8,8 \cdot 0,005 + 5,9 \cdot 0,005)}{42,64} = \pm \frac{0,15}{42,64} \approx \pm 0,0035, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm (0,004 + 0,0035) = \pm 0,0075.$$

Schließlich ist

$$4 \frac{\Delta R}{R} = \pm 4 \frac{0,00005}{0,02} = \pm 0,01.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\Delta G}{G} = \pm (0,0075 + 0,01) = \pm 0,0175 \approx \pm 2\%.$$

Wie man sieht, beruht der größte Fehleranteil auf der Messung des Drahradius, der mit der 4. Potenz, also mit einem sehr großen Gewicht, in das Ergebnis eingeht.

Unser auf Grund der Fehlerrechnung entsprechend abgerundetes Endergebnis lautet:

$$G = (8200 \pm 200) \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} \text{ bzw. } 8200 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} \pm 2 \%.$$

10. Aufgabe. Schwingung der Waage

Literatur: Handbuch der Physik, Bd. II, S. 112.

Der Zweck dieser Aufgabe ist die Untersuchung einer guten Analysenwaage auf ihre mechanischen Eigenschaften, insbesondere

auf ihr Trägheits- und Richtmoment und die Abhängigkeit ihrer Schwingungsdauer von ihrer Belastung. Bezüglich der Definition des Trägheits- und Richtmoments verweisen wir auf die 8. Aufgabe.

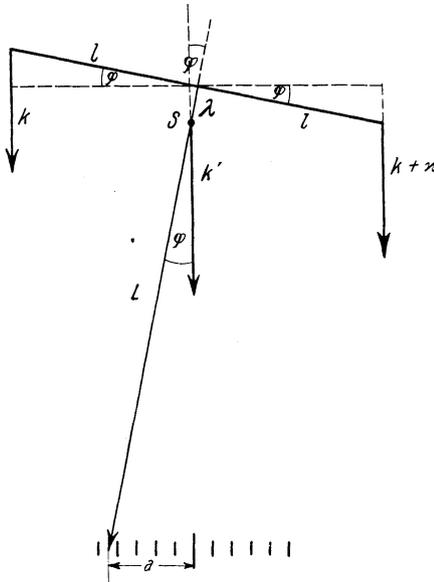


Abb. 19. Zur Theorie der Waage.

Die Waage ist ein dreiarmliger Hebel. An den Enden des Waagebalkens sollen zwei fast genau gleiche Kräfte k und $k + z$ mit den Kraftarmen l (Länge der Waagenarme) angreifen, die von den Waagschalen und den auf ihnen befindlichen Massen herrühren (Abb. 19). Im Schwerpunkt S des Waagebalkens greift das Ge-

wicht k' des Waagebalkens am Arm λ an. Es sei φ der Ausschlagswinkel der ein wenig ungleich belasteten Waage aus ihrer Ruhelage im unbelasteten Zustand. Dann besteht Gleichgewicht, wenn die rechtsdrehenden und die linksdrehenden Drehmomente der an der Waage angreifenden Kräfte sich aufheben, wenn also

$$kl \cos \varphi + k' \lambda \sin \varphi = (k + \varkappa) l \cos \varphi \quad (1)$$

oder

$$k' \lambda \sin \varphi = \varkappa l \cos \varphi, \quad \text{also} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\varkappa}{k'} \frac{l}{\lambda}. \quad (2)$$

Es sei L die Zeigerlänge, a der dem Ausschlagswinkel φ entsprechende Ausschlag des Zeigers auf der Zeigerskala, beide in cm gemessen. Dann ist $\text{tg } \varphi = a/L$ (Abb. 19), und wir erhalten

$$a = \varkappa \frac{Ll}{k' \lambda}. \quad (3)$$

Es sei m die Belastung auf der einen Seite, $m + \mu$ diejenige auf der andern Seite, also μ die Mehrbelastung der einen Seite. Dann ist $k = mg$, $k + \varkappa = (m + \mu)g$, $\varkappa = \mu g$ ($g = 981 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$), und es folgt aus Gl. (3):

$$a = \mu \frac{Ll g}{k' \lambda} = \mu C \text{ cm} \quad \text{mit} \quad C = \frac{Ll g}{k' \lambda} \text{ cm} \cdot \text{g}^{-1}. \quad (4)$$

Nach den Ausführungen zur 6. Aufgabe [Gl. (3)] ist C die Empfindlichkeit der Waage, gemessen in der Einheit $1 \text{ cm} \cdot \text{g}^{-1}$. Es ist üblich, sie in der Einheit $1 \text{ Sk} \cdot \text{mg}^{-1}$ anzugeben. Es sei $1 \text{ cm} = z \text{ Sk}$; ferner ist $1 \text{ g} = 10^3 \text{ mg}$. Dann ist $1 \text{ cm} \cdot \text{g}^{-1} = z \cdot 10^{-3} \text{ Sk} \cdot \text{mg}^{-1}$, also in der letzteren Einheit

$$C = \frac{Ll g}{k' \lambda} z \cdot 10^{-3} \text{ Sk} \cdot \text{mg}^{-1}. \quad (5)$$

II. Die Waage sei beiderseitig mit den gleichen Massen m belastet. Das Trägheitsmoment der unbelasteten Waage — Balken nebst leeren Schalen — sei J_0 . Bei Belastung kommen die Trägheitsmomente der beiden Massen m hinzu. Da wir jede Kraft längs ihrer Wirkungslinie verschoben denken dürfen, so können wir uns das Gewicht der Massen in den die Schalen tragenden Schneiden angreifend denken, so daß wir sie durch

zwei Massenpunkte m ersetzt denken können, die an den beiden Enden des Waagebalkens sitzen und mit ihm starr verbunden sind. Ihre Trägheitsmomente betragen also je ml^2 , und das Trägheitsmoment der belasteten Waage beträgt

$$J = J_0 + 2 ml^2. \quad (6)$$

Ist die beiderseits gleich belastete Waage um den Winkel φ aus ihrer Gleichgewichtslage gedreht, so wirkt an ihr das vom Gewicht des Waagebalkens herrührende zurücktreibende Drehmoment $N = -k' \lambda \sin \varphi \approx -k' \lambda \varphi$, da es sich stets um sehr kleine Winkel φ handelt. Nach den Ausführungen zur 8. Aufgabe [Gl. (5), vgl. a. Anhang I] ist aber $N = J d^2 \varphi / dt^2$, so daß

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k' \lambda \varphi = -D \varphi, \quad \text{mit } D = k' \lambda. \quad (7)$$

Demnach ist $D = k' \lambda$ das Richtmoment der Waage, und die Schwingungsdauer τ der Waage ist durch die Gleichung

$$\tau^2 = 4 \pi^2 \frac{J}{D} = 4 \pi^2 \frac{J_0 + 2 ml^2}{D} \quad (8)$$

gegeben [8. Aufgabe, Gl. (11)]. Für die unbelastete Waage ($m = 0$), deren Schwingungszeit τ_0 sei, gilt

$$\tau_0^2 = 4 \pi^2 \frac{J_0}{D}. \quad (9)$$

Aus Gl. (8) und (9) folgt

$$\tau^2 - \tau_0^2 = \frac{8 \pi^2 l^2}{D} m \quad \text{und} \quad D = 8 \pi^2 l^2 \frac{m}{\tau^2 - \tau_0^2}. \quad (10)$$

Ferner folgt aus Gl. (9)

$$J_0 = \frac{D}{4 \pi^2} \tau_0^2. \quad (11)$$

Wir können demnach das Richtmoment D und das Trägheitsmoment J_0 der unbelasteten Waage aus den Schwingungszeiten bei verschiedenen Belastungen nach Gl. (10) und (11) berechnen.

Aus Gl. (8) folgt, daß die Größe τ^2 linear mit der Belastung m wachsen soll, sofern unsere obige Theorie genau zutrifft. (Wir werden sehen, daß das nicht genau der Fall ist.)

Aus Gl. (5) und (7) folgt

$$C = \frac{Llg}{D} z \cdot 10^{-3} \text{ Sk} \cdot \text{mg}^{-1} \quad (12a)$$

bzw.

$$D = \frac{Llg}{C} z \cdot 10^{-3} \text{ dyn} \cdot \text{cm}. \quad (12b)$$

Demnach sollten wir das Richtmoment D auf zwei Weisen ermitteln können, einmal nach Gl. (10), dann nach Gl. (12b). Wir werden aber sehen, daß die Ergebnisse nicht gut übereinstimmen, was daran liegt, daß unsre Theorie zu einfach ist. Trotzdem ist die Durchführung dieser Aufgabe sehr lehrreich. Auf die Ursachen der mangelnden Übereinstimmung kommen wir am Schluß zurück.

Wir verfahren so, daß wir die Waage nacheinander mit 0, (5, 10), 20, 40, 60, 80, 100 g belasten und ihre Schwingungszeit über je 10 Schwingungen je zweimal messen. Vor jeder Messung muß die Ruhelage der belasteten Waage gemessen werden, und es sind bei der Zeitmessung die Durchgänge durch diese Ruhelage zu beobachten. Die Beobachtung der Durchgänge durch den Mittelstrich der Skala führt, wenn die Ruhelage vom Mittelstrich abweicht, insbesondere bei kleinen Schwingungsweiten zu merklichen Fehlern. Weicht die Ruhelage wegen kleiner Fehler der Gewichte allzusehr vom Mittelstrich der Skala ab, so korrigiert man mittels des Reiters.

Wenn die Aufgabe nicht im unmittelbaren Anschluß an die 6. Aufgabe mit der gleichen und unveränderten Waage angestellt werden kann, also die Empfindlichkeiten nicht bekannt sind, so ist es bei genügender Zeit am besten, wenn die Empfindlichkeiten für sämtliche oben genannten Belastungen gemessen werden. Andernfalls muß mindestens die Empfindlichkeit bei der Belastung 0 g gemessen werden.

Beispiel.

Länge der Waagenarme (Reiterskala!) $l = 6,75 \text{ cm}$
 Länge des Zeigers $L = 26,0 \text{ cm}$
 $24 \text{ Sk} = 1,69 \text{ cm}$, also $z = 14,2 \text{ Sk} \cdot \text{cm}^{-1}$
 Demnach ist $Llgz \cdot 10^{-3} = 2443$
 Ferner $8\pi^2 l^2 = 3600$.

In Tabelle 1 sind die als Mittelwerte über 2mal 20 Schwingungen gemessenen Schwingungszeiten und die aus ihnen nach

Gl. (10) berechneten D -Werte angegeben, ferner die Empfindlichkeiten, die wir aus der unmittelbar vorher ausgeführten 6. Aufgabe übernehmen, und die aus ihnen nach Gl. (12 b) berechneten D -Werte. Da die Bestimmung aus der Schwingungsdauer auf dynamischem Wege, diejenige aus der Empfindlichkeit auf statischem Wege erfolgt, unterscheiden wir die nach Gl. (10) und nach Gl. (12 b) berechneten Werte durch die Bezeichnungen D_{dyn} und D_{stat} .

Tabelle 1.

m g	τ sec	τ^2 sec ²	$\tau^2 - \tau_0^2$ sec ²	D_{dyn} dyn · cm	C Sk · mg ⁻¹	D_{stat} dyn · cm
0	14,30	204,6	0	—	2,41	1015
5	14,83	220,0	15,4	1169	2,38	1027
10	15,31	234,7	30,1	1197	2,40	1018
20	16,33	266,7	62,1	1177	2,35	1040
40	18,02	324,8	120,2	1198	2,30	1063
60	19,47	379,0	174,4	1237	2,25	1087
80	20,92	438,0	233,4	1234	2,21	1108
100	22,07	486,8	282,2	1274	2,15	1136

Abb. 20 zeigt τ^2 als Funktion von m . Als Ergebnis unserer Messungen stellen wir zunächst fest, daß wir für D_{dyn} bei den verschiedenen Belastungen keinen konstanten Wert, sondern im wesentlichen mit der Belastung ansteigende Werte erhalten haben. Demnach zeigt auch die Kurve der Abb. 20 eine deutliche Krümmung. Zweitens stellen wir fest, daß die Beträge von D_{dyn} sämtlich größer sind, als die ebenfalls mit der Belastung im wesentlichen ansteigenden Werte von D_{stat} . Der Unterschied beträgt im Durchschnitt 10 %. Wir haben also unsere Theorie zwar der Größenordnung nach bestätigen können, finden aber im Zahlenresultat Abweichungen, welche ohne Zweifel die Fehlergrenze sehr weit übersteigen und auch, da es sich um eine offenbare systematische Abweichung handelt, nicht von zufälligen Meßfehlern herrühren können, die nur in den Zeitmessungen liegen könnten. Ein von Fehlern der Längen L und l und der Zahl z herrührender systematischer Fehler kann natürlich nicht entfernt 10 % betragen.

Die Ursache der Abweichungen muß also in unserer Theorie liegen. Tatsächlich haben wir nicht in Rechnung gesetzt, daß der

Waagebalken nicht vollkommen starr ist, sondern sich infolge der Belastung durchbiegt. Der Schwerpunkt S des Waagebalkens (Abb. 19) liegt bei einer empfindlichen Waage sehr dicht unter der Mittelschneide. Eine Durchbiegung des Balkens hat infolgedessen eine durchaus merkbare relative Vergrößerung des Schwerpunkts-

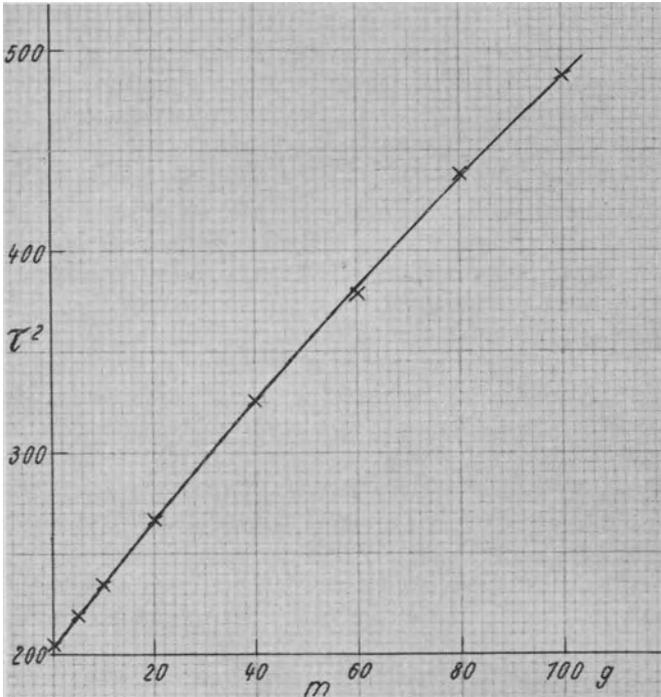


Abb. 20. τ^2 als Funktion der Belastung m .

abstandes λ und damit eine Vergrößerung von $D = k' \lambda$ zur Folge. Das entspricht unsren Messungen, denn sowohl D_{dyn} , wie D_{stat} wachsen mit der Belastung.

Zweitens hat die Durchbiegung zur Folge, daß die gegenseitige Lage der drei Schneiden sich ändert. Meist liegen die Schalen-schneiden bei unbelasteter Waage ein klein wenig höher als die Mittelschneide; bei einer mittleren Belastung liegen die drei Schneiden in einer Ebene, bei noch höherer liegen die Schalen-

schneiden tiefer als die Mittelschneide. Auch dies hat einen von der Belastung abhängigen Einfluß auf das Richtmoment. Durch diese beiden Einflüsse ist das Anwachsen von D mit der Belastung erklärt.

Das aber hat noch eine weitere Folge. In Gl. (10) bedeutet τ_0 die Schwingungszeit der unbelasteten Waage, und es war dort vorausgesetzt, daß D konstant ist, daß also das D der Gl. (9) mit dem D der Gl. (10) identisch ist. Tatsächlich ist aber das D der Gl. (10) größer als das D der Gl. (9), weil λ größer ist [Gl. (7)], und wir hätten in Gl. (10) nicht die Größe τ_0^2 einsetzen dürfen, die nach Gl. (9) mit dem D der unbelasteten Waage berechnet ist, sondern ein etwas anderes — von der Belastung abhängiges — τ_0^2 , das mit dem D der belasteten Waage nach Gl. (9) zu berechnen wäre, das also kleiner wäre als der benutzte Wert von τ_0^2 . Infolgedessen ist die Differenz $\tau^2 - \tau_0^2$ tatsächlich zu klein angesetzt, und daher der berechnete Wert von D_{dyn} zu groß. Auch dies stimmt mit unserm Ergebnis, $D_{\text{stat}} < D_{\text{dyn}}$, überein.

Die Berechnung von D_{stat} aus der Empfindlichkeit ist von solchen Fehlern frei, und wir dürfen die in Tabelle 1 angegebenen Werte als innerhalb der Meßfehler richtige — von der Belastung abhängige — Werte des Richtmoments ansehen. Wir wollen daher das Trägheitsmoment J_0 der Waage mit Hilfe des aus der Empfindlichkeit bei der Belastung 0 g ermittelten Richtmoments $D = 1015 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$ nach Gl. (11) berechnen, da uns ja für diese Belastung die richtige Schwingungsdauer τ_0 zur Verfügung steht. Wir erhalten

$$J_0 = \frac{1015}{4 \pi^2} 204,6 = 5262 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Fehlerrechnung. Die Größen L , l und z sind, wie eine Betrachtung der betreffenden Messungen zeigt, mit einem erheblich unter 1 % liegenden Fehler gemessen. Nach Gl. (12) hängt also der Fehler von D überwiegend von dem Fehler der Empfindlichkeit C ab, den wir bei der 6. Aufgabe bereits zu $\pm 1\%$ berechnet haben. (Wenn die Empfindlichkeit erst im Rahmen dieser Aufgabe gemessen wird, ist der Fehler hier erst zu berechnen.) Nach Gl. (12b) ist dann der relative Fehler von D

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm \frac{\Delta C}{C} = \pm 1\%.$$

Nach Gl. (11) ist der relative Größtfehler von J_0

$$\frac{\Delta J_0}{J_0} = \pm \left(\frac{\Delta D}{D} + 2 \frac{\Delta \tau_0}{\tau_0} \right). \quad (13)$$

Bei der Messung von τ_0 haben wir die beiden Werte $10 \tau_0 = 142,6$ und $143,4$ sec erhalten, die vom Mittelwert $143,0$ sec um $\pm 0,4$ sec abweichen. Rechnen wir vorsichtig mit dieser Größe als Fehler von $10 \tau_0$, so erhalten wir als relativen Fehler von τ_0

$$\frac{\Delta \tau_0}{\tau_0} = \pm \frac{0,04}{14,30} \approx \pm 0,003 = \pm 0,3 \text{ \%}.$$

Wir erhalten also den Fehler $\Delta J_0/J_0 = \pm 1,6 \text{ \%}$.

Als Endergebnis geben wir das Richtmoment D der unbelasteten Waage und das Trägheitsmoment J_0 an. Es lautet, bezüglich J_0 abgerundet,

$$D = (1015 \pm 10) \text{ dyn} \cdot \text{cm} \quad \text{bzw.} \quad 1015 \text{ dyn} \cdot \text{cm} \pm 1 \text{ \%}.$$

$$J_0 = (5260 \pm 85) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \quad \text{bzw.} \quad 5260 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \pm 1,6 \text{ \%}.$$

Wird nur bei der Belastung 0 g eine Empfindlichkeitsmessung ausgeführt, so ist die Durchführung der Rechnung genau die gleiche. Es fehlen jedoch die Werte von D_{stat} bei höheren Belastungen und damit die Kontrolle des gleichsinnigen Ganges der Werte von D_{dyn} und D_{stat} .

11. Aufgabe. Gekoppelte Pendel

Literatur: M.-P. Bd. I/1, S. 437.

Sind zwei schwingungsfähige Gebilde miteinander gekoppelt, wirken also zwischen ihnen irgendwelche von den Momentanwerten ihrer Schwingung abhängige Kräfte, so wird im allgemeinen zwischen ihnen Schwingungsenergie hin und her übertragen, und ihre Schwingungsweiten ändern sich periodisch mit der Zeit. Wir betrachten zwei vollkommen gleiche Pendel, die wir durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden. Sie bestehen je aus einer an einer Stange verschiebbaren Masse m . Die Stangen sind mit Blattfedern derart in einem festen Gestell aufgehängt, daß sie beide nur in der gleichen Ebene schwingen können (Abb. 21). Die beiden Pendel sind genau gleich eingestellt und können in einer

beliebig wählbaren Höhe durch eine gespannte Gummischnur miteinander verbunden werden, durch die ihre Koppelung bewirkt wird. Die Koppelung ist um so stärker, je tiefer an den Stangen die Schnur befestigt ist.

Auf jedes der Pendel wirken zwei Drehmomente. Das eine rührt von der Schwerkraft her und beträgt $-mgl\varphi_1 = -D\varphi_1$ bzw. $-mgl\varphi_2 = -D\varphi_2$, wenn $D = mgl$ und wenn φ_1 und φ_2

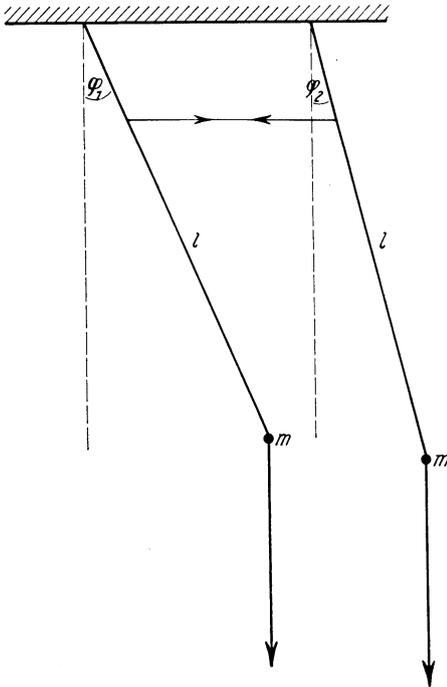


Abb. 21. Gekoppelte Pendel.

die — stets sehr kleinen — Auslenkungen der Pendel aus der Vertikalen sind. Wir rechnen die Winkel in Abb. 21 nach rechts positiv. Das zweite Drehmoment liefert die Koppelung. Werden die beiden Pendel in ihre vertikale Lage gebracht — die nicht ihre Gleichgewichtslage ist (s. unten) —, so betrage dieses Drehmoment beim ersten Pendel N_0 . Erteilt man jetzt bei festgehaltenem ersten Pendel dem zweiten Pendel einen Ausschlag φ_2 , so wächst dieses Drehmoment bei kleinem Winkel φ_2 um einen zu φ_2 proportionalen Betrag $D'\varphi_2$. Das Drehmoment

beträgt dann also $N_0 + D'\varphi_2$. Erteilen wir nun, indem wir das zweite Pendel in seiner letzten Lage festhalten, dem ersten Pendel einen Ausschlag φ_1 , so nimmt das Drehmoment wiederum um einen zu φ_1 proportionalen Betrag $D'\varphi_1$ ab und beträgt daher bei beliebigen Auslenkungen φ_1 und φ_2 $N_0 - D'(\varphi_1 - \varphi_2)$. Das auf das zweite Pendel wirkende Drehmoment ist nach dem Wechsel-

wirkungsgesetz ebenso groß, aber umgekehrt gerichtet. Die Drehmomente betragen also:

$$\left. \begin{aligned} 1. \text{ Pendel: } N_1 &= -D \varphi_1 + N_0 - D' (\varphi_1 - \varphi_2), \\ 2. \quad ,, \quad N_2 &= -D \varphi_2 - N_0 + D' (\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Es ist nun unserm Problem angemessener, wenn wir die Ausschläge nicht auf die vertikale Lage der Pendel beziehen, sondern auf ihre Gleichgewichtslage, die sie unter der gemeinsamen Wirkung von Schwerkraft und koppelnder Kraft einnehmen, und in der die Pendelmassen durch die letztere einander ein wenig genähert sind (Abb. 22). In dieser Lage verschwinden die beiden Drehmomente. Bezeichnen wir den Winkel, den das erste Pendel dann mit der Vertikalen bildet, mit φ_0 , so ergibt sich aus Gl. (1) mit $N_1 = N_2 = 0$ durch einfache Rechnung

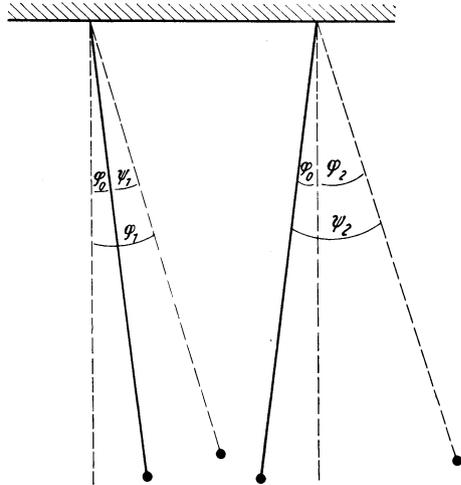


Abb. 22. Gekoppelte Pendel.

$\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_0 = \frac{N_0}{D + 2D'}$.

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_0 = \frac{N_0}{D + 2D'}. \quad (2)$$

Wenn wir die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage mit ψ_1 und ψ_2 bezeichnen (Abb. 22), so ist demnach

$$\varphi_1 = \psi_1 + \varphi_0, \quad \varphi_2 = \psi_2 - \varphi_0. \quad (3)$$

Führt man dies in Gl. (1) ein, so folgt

$$\left. \begin{aligned} 1. \text{ Pendel: } N_1 &= -D \psi_1 - D' (\psi_1 - \psi_2), \\ 2. \quad ,, \quad N_2 &= -D \psi_2 + D' (\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ist J das Trägheitsmoment jedes der beiden Pendel, so ist $N_1 = J d^2 \psi_1 / dt^2$ und $N_2 = J d^2 \psi_2 / dt^2$ (vgl. die 8. Aufgabe und

Anhang I), und wir erhalten zwei simultane Differentialgleichungen 2. Grades,

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} &= -D \psi_1 - D' (\psi_1 - \psi_2), \\ J \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} &= -D \psi_2 + D' (\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, müssen wir sie einmal addieren, dann subtrahieren, und erhalten dann

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dt^2} &= -D (\psi_1 + \psi_2), \\ J \frac{d^2(\psi_1 - \psi_2)}{dt^2} &= -(D + 2D') (\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die erste Gleichung ist diejenige einer ungedämpften, harmonischen Schwingung der Winkelsumme $\psi_1 + \psi_2$ mit dem Richtmoment D , die zweite diejenige einer gleichen Schwingung der Winkeldifferenz $\psi_1 - \psi_2$ mit dem Richtmoment $D + 2D'$. Diesen Schwingungen entsprechen die beiden Kreisfrequenzen

$$\psi_1 + \psi_2: \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad \psi_1 - \psi_2: \quad \gamma = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}}. \quad (7 \text{ a, b})$$

Die allgemeinen Lösungen der Gl. (6) lauten also

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 + \psi_2 &= 2 a \sin \omega t + 2 b \cos \omega t, \\ \psi_1 - \psi_2 &= 2 a' \sin \gamma t + 2 b' \cos \gamma t. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(Vgl. die 8. Aufgabe und Anhang I.) Die Faktoren der Winkel-funktionen sind Konstante, die aus den je zwei Integrationskonstanten zusammengesetzt sind, die bei den je zwei Integrationen der beiden Differentialgleichungen auftreten. Sie sind auf Grund der Versuchsbedingungen in jedem Fall besonders zu bestimmen.

Nunmehr können wir die beiden Variablen ψ_1 und ψ_2 wieder voneinander trennen, indem wir die beiden Gl. (8) einmal addieren, dann subtrahieren,

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= a \sin \omega t + b \cos \omega t + a' \sin \gamma t + b' \cos \gamma t, \\ \psi_2 &= a \sin \omega t + b \cos \omega t - a' \sin \gamma t - b' \cos \gamma t. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen, daß sich in der Gesamt-schwingung jedes der beiden Pendel im allgemeinen zwei Schwin-

gungen mit den etwas verschiedenen Kreisfrequenzen ω und γ überlagern. ω ist gleich der Kreisfrequenz der nicht gekoppelten Pendel, während γ auch von der Koppelung abhängt.

Wir wollen, unsern Versuchen entsprechend, sogleich die Bedingung einführen, daß beide Pendel zur Zeit $t = 0$ sich in ihrer natürlichen Gleichgewichtslage $\psi_1 = \psi_2 = 0$ befinden bzw. gerade durch sie hindurchgehen sollen. Dann folgt aus Gl. (9) $b = b' = 0$, und unsere Gleichungen nehmen eine einfachere Gestalt an,

$$\psi_1 = a \sin \omega t + a' \sin \gamma t, \quad \psi_2 = a \sin \omega t - a' \sin \gamma t. \quad (10)$$

Durch Differenzieren nach der Zeit erhalten wir ferner die Winkelgeschwindigkeiten,

$$\frac{d\psi_1}{dt} = a\omega \cos \omega t + a'\gamma \cos \gamma t, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = a\omega \cos \omega t - a'\gamma \cos \gamma t. \quad (11)$$

Wir wollen nun drei Sonderfälle näher untersuchen.

I. Gleichsinnige Schwingungen. Wir stoßen zur Zeit $t = 0$ beide Pendel gleichsinnig und gleich stark an und erteilen ihnen beiden damit die gleiche und gleichgerichtete Winkelgeschwindigkeit

$$\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)_{t=0} = u_0. \quad (12)$$

Setzen wir dies in die beiden Gl. (11) ein, so folgt $a\omega + a'\gamma = u_0$ und $a\omega - a'\gamma = u_0$ mit der Lösung $a = u_0/\omega$ und $a' = 0$. Dann ist nach Gl. (10)

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{u_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (13)$$

Die beiden Pendel führen also in diesem Fall vollkommen gleiche, zeitlich übereinstimmende Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω aus. Das ist von vornherein zu erwarten gewesen, weil ja hier die Koppelung überhaupt nicht in Wirkung tritt. Die Gummischnur bleibt ständig gleich stark gespannt und kann keine Energie übertragen. Die Schwingungszeit beträgt also in diesem Fall

$$\tau_\omega = \frac{2\pi}{\omega} \text{ sec.} \quad (14)$$

II. Gegensinnige Schwingungen. Wir stoßen beide Pendel zur Zeit $t = 0$ gegensinnig und gleich stark an und erteilen

ihnen so die einander entgegengerichteten Winkelgeschwindigkeiten

$$\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)_{t=0} = u_0, \quad \left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)_{t=0} = -u_0. \quad (15)$$

Setzen wir diese Bedingung in Gl. (11) ein, so folgt $a\omega + a'\gamma = u_0$ und $a\omega - a'\gamma = -u_0$ mit der Lösung $a = 0$ und $a' = u_0/\gamma$. Dann ist nach Gl. (10)

$$\psi_1 = \frac{u_0}{\gamma} \sin \gamma t, \quad \psi_2 = -\frac{u_0}{\gamma} \sin \gamma t. \quad (16)$$

In diesem Fall führen die Pendel also vollkommen spiegelbildliche Schwingungen aus, die nunmehr nur von der Kreisfrequenz γ beherrscht werden. Die Schwingungszeit der Pendel beträgt jetzt

$$\tau_\gamma = \frac{2\pi}{\gamma} \text{ sec} \quad (17)$$

und ist, da $\gamma > \omega$, kleiner als τ_ω . Infolge des Hinzutritts der Koppelung erfolgen die Schwingungen schneller als im ersten Fall.

III. Schwebungsschwingungen. Zur Zeit $t = 0$ erteilen wir dem ersten Pendel einen Anstoß, so daß es eine Winkelgeschwindigkeit u_0 erhält, während sich das zweite Pendel in diesem Augenblick in seiner Gleichgewichtslage in Ruhe befindet. Zur Zeit $t = 0$ gilt also

$$\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)_{t=0} = u_0, \quad \left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Durch Einsetzen in Gl. (11) folgt $a\omega + a'\gamma = u_0$, $a\omega - a'\gamma = 0$ mit der Lösung $a\omega = u_0/2$ und $a'\gamma = u_0/2$. Dann nehmen die Gl. (11) die Gestalt an

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{u_0}{2} (\cos \omega t + \cos \gamma t), \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{u_0}{2} (\cos \omega t - \cos \gamma t). \quad (19)$$

Nach einer bekannten Formel kann man statt dessen schreiben

$$\frac{d\psi_1}{dt} = u_0 \cos \frac{\gamma - \omega}{2} t \cos \frac{\gamma + \omega}{2} t, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = u_0 \sin \frac{\gamma - \omega}{2} t \sin \frac{\gamma + \omega}{2} t. \quad (20)$$

Ist die Koppelung, wie vorausgesetzt, schwach, so ist

$$(\gamma - \omega) \ll (\gamma + \omega).$$

Dann kann man die langsam veränderliche Größe $u_0 \cos \frac{\gamma - \omega}{2} t$ bzw. $u_0 \sin \frac{\gamma - \omega}{2} t$ als den Scheitelwert der Winkelgeschwindigkeit $d\psi_1/dt$ bzw. $d\psi_2/dt$ auffassen und die Pendelschwingungen als solche mit der Kreisfrequenz $(\gamma + \omega)/2$ betrachten, deren Scheitelwert mit der Kreisfrequenz $(\gamma - \omega)/2$ zeitlich langsam periodisch veränderlich ist. Die Schwingungszeit dieser Schwingungen beträgt

$$\tau = \frac{4\pi}{\gamma + \omega} \text{ sec.} \quad (21)$$

Nach dem Anstoßen des ersten Pendels gerät das zweite Pendel unter der Wirkung der Koppelung ebenfalls in Schwingungen von zunächst zunehmender Schwingungsweite, während die Schwingungsweite des ersten Pendels zunächst abnimmt. Das ist auf Grund des Energieprinzips selbstverständlich, da der Energiezuwachs des zweiten Pendels nur auf Kosten der Energie des ersten gehen kann. Ist $\cos \frac{\gamma - \omega}{2} t = 0$ und $\sin \frac{\gamma - \omega}{2} t = 1$ geworden, so ist die Energie des ersten Pendels vollkommen auf das zweite übergegangen. Dann wiederholt sich das Spiel in umgekehrter Richtung, es wird Energie vom zweiten Pendel wieder auf das erste übertragen, und das zweite Pendel kommt für einen Augenblick wieder zur Ruhe, wenn wieder $\sin \frac{\gamma - \omega}{2} t = 0$.

Zum erstenmal geschieht das, wenn $\frac{\gamma - \omega}{2} t = \pi$, wenn also

$$t = T = \frac{2\pi}{\gamma - \omega} \text{ sec.} \quad (22)$$

Wir bezeichnen die Zeit T zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stillständen eines Pendels als Schwebungsdauer. (Man beachte bei der Ausführung des Versuchs, daß jedes Pendel beim Durchgang durch das Schwingungsminimum einen Phasensprung π ausführt, indem es aus der Ruhelage nach der gleichen Seite ausschwingt, von der es gekommen ist.)

Zwischen den vier auftretenden, leicht meßbaren Zeiten bestehen einfache Zahlenbeziehungen. Wir definieren eine Zahl z

durch die Gleichung

$$\frac{\tau_\gamma}{\tau_\omega} = \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{so daß} \quad z = \frac{\tau_\omega + \tau_\gamma}{\tau_\omega - \tau_\gamma}. \quad (23)$$

Dann lassen sich aus Gl. (22) und (23) leicht die folgenden Beziehungen ableiten

$$\tau = \tau_\omega \frac{z-1}{z} \quad \text{und} \quad T = \tau_\omega \frac{z-1}{2}. \quad (24)$$

Die Prüfung der Gl. (24) bildet einen Teil unsrer Aufgabe.

Als Koppelungsgrad der beiden Pendel bezeichnet man das Verhältnis

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'}. \quad (25)$$

Mit Hilfe der Gl. (7a) und (7b), (14), (17) und (23) verwandelt man das leicht in die Form

$$\kappa = \frac{\tau_\omega^2 - \tau_\gamma^2}{\tau_\omega^2 + \tau_\gamma^2} = \frac{2z}{z^2 + 1} \approx \frac{2}{z}, \quad (26)$$

letzteres weil bei nicht allzu fester Koppelung stets $z^2 \gg 1$ ist. Es ist unsre weitere Aufgabe, den Koppelungsgrad κ zu berechnen.

Vor dem Beginn der Messungen ist es unbedingt nötig, das Gestell mit den Pendeln so aufzustellen, daß es bei den Pendelschwingungen überhaupt nicht wackelt. Andernfalls treten zusätzliche Koppelungen mit den Schwingungen des Gestells auf, welche die Messungen in höchstem Grade stören. Dann entfernen wir zunächst die Koppelung und verschieben die Pendelmassen so lange, bis die Schwingungszeiten der beiden Pendel innerhalb der Meßgenauigkeit gleich sind. Dann bringen wir die Koppelung an und regeln sie durch Verschieben der Angriffspunkte so, daß beim Schwebungsversuch (III.) zwischen zwei Stillständen eines Pendels 15 bis 20 Schwingungen erfolgen. Erst dann beginnen wir mit den eigentlichen Messungen.

Beispiel. Die Schwingungszeiten τ_ω und τ_γ (I. und II.) haben wir über je 50 Schwingungen je fünfmal gemessen, die Schwingungszeit τ (III.) nur über je 10 Schwingungen zehnmal, weil sich diese Schwingungen auch bei größter Vorsicht meist nicht sehr lange rein aufrechterhalten lassen. Die Schwebungszeit T haben wir fünfmal unmittelbar aus Stillständen des zweiten Pendels gemessen. Hier gelingt eine saubere Messung erst nach einigen Vorübungen. Wir haben die in Tab. I wiedergegebenen Werte erhalten.

Tabelle 1.

$50\tau_\omega$ sec	$50\tau_\gamma$ sec	10τ sec	T sec
75,8	69,6	14,5	22,2
74,7	70,8	5	5
7	3	4	1
0	69,2	6	8
7	7	4	8
		5	
		5	
		6	
		5	
		4	
74,8	69,9	14,49	22,5

Wir erhalten also

$$\tau_\omega = 1,496 \text{ sec}, \quad \tau_\gamma = 1,398 \text{ sec}, \quad \tau = 1,449 \text{ sec}, \quad T = 22,5 \text{ sec}.$$

Die Berechnung der Zahl z nach Gl. (23) ergibt

$$z = \frac{2,894}{0,098} = 29,5.$$

In Tabelle 2 haben wir die vier gemessenen Zeiten, sowie die mit Hilfe der Zahl z nach Gl. (25) berechneten Zeiten τ und T zusammengestellt. Die berechneten Werte stimmen mit den beobachteten recht gut überein. Bei T beträgt die Abweichung vom Mittelwert nur 2 %, bei τ sogar nur 0,2 %.

Tabelle 2.

	beob. sec	ber. sec
τ_ω	1,496	—
τ_γ	1,398	—
τ	1,449	1,446
T	22,5	22,1

Der Koppelungsgrad ergibt sich nach Gl. (26) zu

$$\kappa = \frac{2}{29,5} = 0,068 \quad \text{oder} \quad 6,8\%$$

Von einer Fehlerrechnung sehen wir hier ab.

Diese Aufgabe soll vor allem der Einfühlung in die Verhältnisse bei gekoppelten Schwingungen dienen, die im analogen Fall gekoppelter elektrischer Schwingungen sehr wichtig sind. Sehr lehrreich ist es, bei den Schwebungsschwingungen auf das Arbeiten der Gummischnur zu achten, wie sie durch ihren Zug den Pendeln bald Energie zuführt, bald ihnen Energie entzieht.

III. Wärme, Gastheorie, Akustik

12. Aufgabe. Messung spezifischer Wärmen

Literatur: W. § 106; M.-P. Bd. III/1, S. 81; K. S. 240.

Die Wärmekapazität K eines Körpers ist die Wärmemenge, die er bei Erwärmung um 1° aufnimmt bzw. bei Abkühlung um 1° abgibt. Wird ein Körper durch Zuführung der Wärmemenge Q cal von der Temperatur t_1 auf die Temperatur t_2 erwärmt, so ist

$$Q = K(t_2 - t_1) \text{ cal; also ist } K = \frac{Q}{t_2 - t_1} \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}. \quad (1)$$

Die spezifische Wärme eines Stoffes ist die Wärmekapazität von 1 g desselben, also diejenige Wärmemenge, die 1 g des Stoffes bei einer Temperaturänderung um 1° aufnimmt oder abgibt. Hat also ein homogener Körper die Masse m und die Wärmekapazität K , so ist seine spezifische Wärme $c = K/m$, und es folgt aus Gl. (1)

$$Q = cm(t_2 - t_1) \text{ cal} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{m} \frac{Q}{t_2 - t_1} \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}. \quad (2)$$

Tauschen zwei anfänglich auf verschiedenen Temperaturen t_1 und t'_1 befindliche Körper von den Massen m und m' und den spezifischen Wärmen c und c' nur unter sich — nicht mit ihrer Umgebung — Wärme aus, bis sie sich auf gleicher Temperatur t_2 befinden, und ist $t'_1 < t_1$, so hat der wärmere Körper die Wärmemenge $Q = cm(t_1 - t_2)$ abgegeben, der kältere die ebenso große Wärmemenge $Q = c'm'(t_2 - t'_1)$ aufgenommen. Es ist also

$$cm(t_1 - t_2) = c'm'(t_2 - t'_1). \quad (3)$$

Ist eine der beiden spezifischen Wärmen bekannt, so kann man die andere nach Gl. (3) auf Grund eines geeigneten Versuchs berechnen, wenn man die Massen m und m' und die Temperaturen t_1 , t'_1 und t_2 ermittelt hat. Darauf beruht das Mischungsverfahren zur Messung spezifischer Wärmen.

Wenn möglich benutzt man als Stoff von bekannter spezifischer Wärme Wasser, da seine spezifische Wärme bei Zimmertemperatur definitionsgemäß gleich $1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}$ ist (Definition der Kalorie).

I. Feste Stoffe.

Ein Verfahren für feste Stoffe besteht darin, daß man den betreffenden Körper in ausreichend erwärmtem Zustande in ein Gefäß mit Wasser bringt und die Anfangstemperaturen beider Anteile sowie ihre gemeinsame Endtemperatur nach erfolgtem Ausgleich mißt. Wenn es nicht auf hohe Genauigkeit ankommt, stellt man ein solches Wasserkalorimeter z. B. aus einem Aluminiumgefäß her, das man rings lose mit Watte umgibt und in ein Becherglas stellt, um es tunlichst vor Wärmeabgabe nach außen zu schützen. Wir wollen im folgenden einen zylindrischen Metallkörper untersuchen. Wir erwärmen ihn in einem Gefäß mit siedendem Wasser auf 100°C . Dabei darf er nicht unmittelbar auf dem Boden stehen, sondern nur auf einem im Siedegefäß angebrachten Rost oder einem Drahtnetz, da seine Temperatur sonst leicht höher als 100°C sein kann. Will man genauer arbeiten, so erwärmt man den Körper in einer von außen durch den Dampf siedenden Wassers geheizten Röhre. Das Wasser im Kalorimeter kann man auf Zimmertemperatur halten, doch kann man die Genauigkeit der Messung erhöhen, wenn man eine tiefere Wassertemperatur wählt. Wenn sowohl der Körper, wie das Wasser konstante Temperatur angenommen haben, wird der Körper schnell in das Wasser gebracht (abhängendes heißes Wasser schnell abschütteln). Zur Ermittlung der in Gl. (3) einzusetzenden Temperaturen messen wir die Temperatur des Kalorimeterwassers bereits vor Beginn des Versuchs jede halbe Minute. Nach 5 Minuten bringen wir den erhitzten Körper in das Kalorimeter und messen den weiteren Temperaturverlauf noch 5 bis 10 Minuten lang. Die Auswertung dieser Messungen werden wir an Hand unsres Beispiels besprechen.

Es bleibt noch zu bedenken, daß nicht nur das Wasser, sondern auch das Kalorimetergefäß Wärme aufnimmt, und zwar nach Gl. (1) die Wärmemenge $K(t_2 - t'_1)$, wenn K die Wärmekapazität (sog. Wasserwert) des Gefäßes ist. Ist m_k die Masse, c_k die

spezifische Wärme des Kalorimeters, so ist seine Wärmekapazität $K = c_k m_k$. Aber auch das Thermometer nimmt Wärme auf. Zufällig hat 1 cm³ Glas und 1 cm³ Quecksilber ziemlich genau die gleiche Wärmekapazität, nämlich etwa 0,46 cal · Grad⁻¹. Daher kann man bei einem Stabthermometer (das keine Hohlräume enthält) die Wärmekapazität gleich 0,46 V setzen, wenn V das Volumen des eingetauchten Teiles ist. Letzteres bestimmt man durch Eintauchen in Wasser in einem kleinen kalibrierten Meßzylinder. Bei anderen Thermometern (mit Hohlräumen) genügt es, wenn man für V das Volumen des Quecksilberbehälters einsetzt, da das Glied 0,46 V ohnehin stets nur eine sehr kleine Korrektion darstellt. Die Wärmekapazität des Wassers sei c_w , seine Masse m_w , also seine Wärmekapazität $c_w m_w$. Demnach beträgt die gesamte Wärmekapazität auf seiten des Kalorimeters $c_w m_w + c_k m_k + 0,46 V$. Aus Gl. (3) folgt dann

$$cm(t_1 - t_2) = (c_w m_w + c_k m_k + 0,46 V)(t_2 - t_1') \quad (4)$$

oder

$$c = \frac{c_w m_w + c_k m_k + 0,46 V}{m} \frac{t_2 - t_1'}{t_1 - t_2} \quad (5)$$

m , m_w und m_k müssen vor dem Versuch durch Wägung ermittelt werden. c_k ist aus einer Tabelle zu entnehmen (z. B. Kohlenrausch, Tabelle 58).

Während der Messungen empfiehlt es sich, ständig zu rühren. Es genügt, wenn man mit dem Thermometer rührt; doch muß das mit genügender Vorsicht geschehen, damit das Thermometer nicht beschädigt wird. Falls ein besonderer Rührer verwendet wird, muß sein Wasserwert noch zu dem des Kalorimeters hinzugerechnet werden.

Beispiel. Messingkörper.

Masse des Körpers	m	=	361,2	g
Masse des leeren Kalorimeters ..	m_k	=	27,05	g
Masse des Kalorimeters mit				
Wasser	$m_w + m_k$	=	213,0	g
Masse des Wassers	m_w	=	185,95	g
Eingetauchtes Volumen des				
Thermometers	V	=	0,6	cm ³
Spezifische Wärme des Wassers ..	c_w	=	1,00	cal · g ⁻¹ · Grad ⁻¹

Spezifische Wärme des Kalori-

mers (Aluminium) $c_k = 0,214 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}$

Damit erhalten wir

$$c_w m_w + c_k m_k + 0,46 V = 185,95 + 5,78 + 0,28 = 192,01 \approx 192,0$$

Der Luftdruck betrug 75,1 cm Hg, also die Siedetemperatur des Wassers $t_1 = 99,65^\circ \text{C} \approx 99,7^\circ \text{C}$ (Tabelle III).

Das Ergebnis unsrer Temperaturmessungen zeigt Tabelle 1.

Tabelle 1.

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5 min
20,8	20,8	20,9	20,9	20,9	21,0	21,0	21,0	21,1	21,1	21,2 °C
Körper eingebracht										
5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	min	
30,8	32,2	32,4	32,3	32,3	32,2	32,1	32,0	32,0	°C	
10	10,5	11	11,5	12	12,5	13 min				
31,9	31,8	31,7	31,6	31,6	31,5	31,4 °C				

Das Ergebnis der Temperaturmessungen ist in Abb. 23 graphisch dargestellt. Man erkennt jetzt den Grund für das Verfahren. Der Temperatúrausgleich erfolgt natürlich nicht momentan, und es findet außerdem nach dem Einbringen des Körpers immer, oft aber auch schon vorher (wie in unserm Beispiel), ein geringer Wärmeaustausch mit der Umgebung statt. Infolgedessen erreicht das Wasser nicht die höchste Temperatur, die es bei unendlich schnellem Temperatúrausgleich erreichen würde. So würde man einen zu kleinen Temperatursprung erhalten, wenn man die Temperatur t'_1 einfach mit der Temperatur im Augenblick des Einbringens des Körpers und die Temperatur t_2 mit der höchsten erreichten Temperatur gleichsetzen wollte. Es läßt sich aber zeigen, daß man aus dem gemessenen Temperaturverlauf recht genau auf den Temperaturverlauf bei unendlich schnellem Temperatúrausgleich extrapolieren kann, indem man die stets sehr annähernd geradlinigen Kurvenstücke AB und CD (Abb. 23) verlängert und eine senkrechte Gerade EF derart zeichnet, daß die Flächen BEG und CFG , die sie mit den beiden Geraden und mit dem mittleren Kurvenstück bildet, gleich groß sind. (Zeichnung nach Augenmaß genügt.) Wir haben dann als Temperaturen t'_1 und t_2 diejenigen zu wählen, die den so ge-

fundenen Punkten E und F entsprechen. Wir lesen also aus unserer Kurve ab

$t'_1 = 21,2^{\circ} \text{C}$, $t_2 = 32,6^{\circ} \text{C}$; ferner ist $t_1 = 99,7^{\circ} \text{C}$,
 so daß $t_2 - t'_1 = 11,4^{\circ}$ und $t_1 - t_2 = 67,1^{\circ}$.

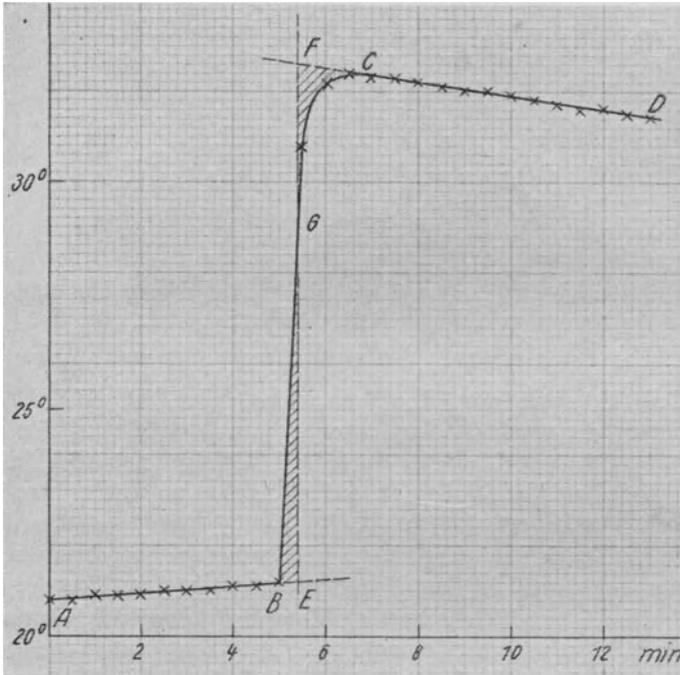


Abb. 23. Temperaturverlauf im Kalorimeter.

Damit erhalten wir nach Gl. (5)

$$c = \frac{192,0 \cdot 11,4}{361,2 \cdot 67,1} = 0,0904 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Die spezifischen Wärmen des Wassers und des Kalorimeters sind vorgegebene Größen, also der Fehlerrechnung nicht zu unterwerfen. Die vorkommenden Massen sind auf Bruchteile von 0,1% genau bestimmt. Ein Fehler im Volumen V spielt, wie man aus den obigen Zahlenwerten sieht, nur eine höchst geringe Rolle. Die wesentliche Fehlerquelle liegt

in den drei Temperaturen, auf die wir uns daher bei der Fehlerrechnung beschränken wollen.

Die Temperatur t_2 tritt in Gl. (5) zweimal auf, beeinflusst also den Fehler auf doppelte Weise. In solchen Fällen muß man darauf achten, ob dies eine Verstärkung oder eine Schwächung der Fehlereinflüsse der betreffenden Größe zur Folge hat. (In unserm Fall wirken beide Einflüsse gleichsinnig.) Es empfiehlt sich dann, die in Frage stehende Gleichung zunächst zu differenzieren und zu ordnen. Wenn wir — um nachher gleich den relativen Fehler zu erhalten — nach Gl. (5) den $\ln c$ und sein Differential bilden, so erhalten wir:

$$\frac{dc}{c} = \frac{dt_2 - dt'_1}{t_2 - t'_1} - \frac{dt_1 - dt_2}{t_1 - t_2} = dt_2 \frac{t_1 - t'_1}{(t_2 - t'_1)(t_1 - t_2)} - \frac{dt'_1}{t_2 - t'_1} - \frac{dt_1}{t_1 - t_2}. \quad (6)$$

Indem wir nunmehr zum relativen Fehler übergehen (Einl. § 11), erhalten wir als relativen Größtfehler von c :

$$\frac{\Delta c}{c} = \pm \left(\Delta t_2 \frac{t_1 - t'_1}{(t_2 - t'_1)(t_1 - t_2)} + \frac{\Delta t'_1}{t_2 - t'_1} + \frac{\Delta t_1}{t_1 - t_2} \right). \quad (7)$$

Die Genauigkeit, mit der wir die Temperaturen t'_1 und t_2 aus Abb. 23 ermittelt haben, können wir kaum höher als mit je $\pm 0,1^0$ veranschlagen. Die Temperatur t_1 scheint als Tabellenwert zuverlässig. Doch müssen wir bedenken, daß der Körper erstens auf dem Wege zum Kalorimeter ein wenig Wärme abgegeben haben kann, so daß t_1 etwas niedriger zu rechnen wäre, daß er aber auch etwas heißes Wasser und damit eine zusätzliche Wärmemenge mit sich geführt haben kann, was die gleiche Wirkung hat wie eine Erhöhung der Temperatur t_1 . Aus diesem Grunde wollen wir auch bei t_1 einen Fehler von $\pm 0,1^0$ annehmen, so daß

$$\Delta t_1 = \Delta t'_1 = \Delta t_2 = \pm 0,1^0.$$

Damit und mit $t_1 - t'_1 = 78,5^0$, $t_1 - t_2 = 67,1^0$ und $t_2 - t'_1 = 11,4^0$ erhalten wir:

$$\frac{\Delta c}{c} = \pm \left(\frac{0,1 \cdot 78,5}{67,1 \cdot 11,4} + \frac{0,1}{11,4} + \frac{0,1}{67,1} \right) = \pm 0,0206 \approx \pm 0,02 = \pm 2\%.$$

Demnach lautet unser Endergebnis, der Fehlerrechnung entsprechend abgerundet:

$$c = (0,905 \pm 0,020) \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1} \text{ bzw. } 0,905 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}$$

$$\underline{\pm 2\%}.$$

II. Flüssigkeiten

Die spezifische Wärme einer Flüssigkeit kann nach dem gleichen Verfahren gemessen werden, indem man das Wasser im Kalorimeter durch die Flüssigkeit ersetzt und einen erwärmten Körper von bekannter Wärmekapazität in sie hineinbringt. Wir bezeichnen jetzt mit m und c die Masse und die spezifische Wärme der Flüssigkeit, diejenige des Körpers mit m' und c' . Dann folgt bei gleicher Bedeutung der Temperaturen aus Gl. (4):

$$c m = c' m' \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_1} - (c_k m_k + 0,46 V). \quad (8)$$

Beispiel. Benzol. Wir benutzen den gleichen Körper und das gleiche Kalorimeter wie oben. Daher ist

$$\begin{aligned} c' m' &= 0,905 \cdot 361,2 = 32,66 \approx 32,7 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}, \\ c_k m_k + 0,46 V &= 0,214 \cdot 27,05 + 0,46 \cdot 0,6 = 5,78 + 0,28 \\ &= 6,06 \approx 6,1 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}. \end{aligned}$$

Der Luftdruck betrug wieder 75,1 cm Hg, so daß $t_1 = 99,7^\circ \text{C}$. Die Temperaturmessungen, die wieder nach dem gleichen Verfahren vorgenommen wurden, zeigt Tabelle 2, Abb. 24 die graphische Darstellung.

Tabelle 2.

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	min
19,15	19,15	19,2	19,2	19,2	19,25	19,25	19,3	19,3	19,35	19,35	°C
Körper eingebracht.											
5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	min		
31,5	37,3	39,0	39,5	39,6	39,55	39,45	39,25	39,1	°C		
10	10,5	11	11,5	12	12,5	13	min				
38,9	38,7	38,55	38,35	38,15	38,0	37,8	°C				

Die graphische Extrapolation auf momentanen Temperaturausgleich ergibt $t_1' = 19,4^\circ \text{C}$ und $t_2 = 40,5^\circ \text{C}$, so daß $t_1 - t_2 = 59,2^\circ$ und $t_2 - t_1' = 21,1^\circ$. Damit erhalten wir nach Gl. (8)

$$c m = 32,7 \frac{59,2}{21,1} - 6,1 = 91,8 - 6,1 = 85,7 \text{ cal}.$$

Die Masse der Flüssigkeit betrug 203,0 g. Demnach erhalten wir

$$c = \frac{85,7}{203,0} = 0,422 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Auf Grund gleicher Erwägungen wie oben setzen wir die Fehler der drei Temperaturen wieder mit $\pm 0,1^\circ$ an. Die Größe $c_k m_k + 0,46 V$ trägt zu unserm Ergebnis nur einen ziemlich kleinen Bruchteil bei und ist überdies sicher nur

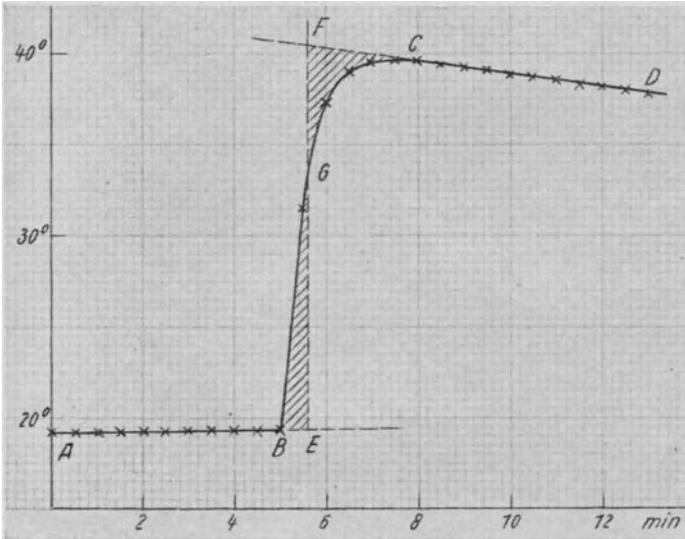


Abb. 24. Temperaturverlauf im Kalorimeter.

mit einem recht kleinen Fehler behaftet. Wir sind daher berechtigt, sie bei der Fehlerrechnung zu vernachlässigen und uns auf das erste Glied der rechten Seite von Gl. (8) zu beschränken. Auch von den verhältnismäßig sehr kleinen Fehlern der Massen m und m' können wir absehen. Dann ergibt sich aus Gl. (8), daß der relative Fehler von c gleich der Summe des relativen Fehlers $\Delta c'/c'$ von c' und des relativen Fehlers der Größe $(t_1 - t_2)/(t_2 - t'_1)$ ist. Wie man leicht sieht, ist aber der letztere (wegen des unbestimmten Vorzeichens) durch den gleichen Ausdruck gegeben, wie der relative Fehler der reziproken Größe $(t_2 - t'_1)/(t_1 - t_2)$, der in unserer ersten Messung den relativen Fehler $\Delta c/c$ der spezifischen Wärme des festen Stoffes darstellte [Gl. (7)]. Wir können also einfach

die rechte Seite der Gl. (7) übernehmen und erhalten als relativen Größtfehler von c :

$$\frac{\Delta c}{c} = \pm \left(\frac{\Delta c'}{c'} + \Delta t_2 \frac{t_1 - t_1'}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_2)} + \frac{\Delta t_1'}{t_2 - t_1} + \frac{\Delta t_1}{t_1 - t_2} \right). \quad (9)$$

Mit den obigen Zahlenwerten ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{\Delta c}{c} &= \pm \left(0,02 + \frac{0,1 \cdot 80,2}{21,1 \cdot 59,2} + \frac{0,1}{21,1} + \frac{0,1}{59,2} \right) \\ &\approx \pm (0,02 + 0,006 + 0,005 + 0,002) \\ &= \pm 0,033 \approx \pm 0,035 = \pm 3,5\%. \end{aligned}$$

Demnach lautet unser auf Grund der Fehlerrechnung abgerundetes Endergebnis

$$c = (0,420 \pm 0,015) \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1} \text{ bzw. } 0,420 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}$$

$$\pm 3,5\%.$$

13. Aufgabe.

Schmelz- und Verdampfungswärme des Wassers

Literatur: W. § 110, 111; M.-P. Bd. III/1, S. 498.

I. Schmelzwärme

Die Schmelzwärme eines Stoffes ist die Wärmemenge, die 1 g des auf der Temperatur seines Schmelzpunkts befindlichen Stoffes ohne Änderung seiner Temperatur beim Übergang vom festen in den flüssigen Zustand aufnimmt bzw. beim umgekehrten Vorgang abgibt. Ihre Einheit ist $1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$. Bei der Bestimmung einer Schmelzwärme handelt es sich also um die Messung einer Wärmemenge. Für den Fall des Wassers (Eises) können wir für eine — allerdings nicht allzu genaue — Messung der Schmelzwärme das gleiche Kalorimeter wie bei der 12. Aufgabe verwenden und auf ganz ähnliche Weise verfahren wie dort. Wir bringen Eis von 0°C in das Wasser des Kalorimeters und stellen die Temperaturerniedrigung nach vollständigem Schmelzen des Eises fest.

Es sei m_e die Masse des eingebrachten Eises, das sich auf der Temperatur 0°C befindet, t_1 die Anfangstemperatur des Wassers, $t_2 < t_1$ seine Endtemperatur. Im übrigen benutzen wir die gleichen Bezeichnungen wie bei der 12. Aufgabe. Die Schmelzwärme des Eises betrage $\lambda \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$. Zunächst verwandelt sich

das Eis unter Aufnahme der Wärmemenge λm_e in Wasser von 0°C , um sich dann als Wasser bis auf die Temperatur t_2 zu erwärmen. Dabei nimmt es die weitere Wärmemenge $c_w m_e t_2$ auf. Gleichzeitig gibt das Wasser im Kalorimeter, sowie das Kalorimeter mit Zubehör die Wärmemenge $(c_w m_w + c_k m_k + 0,46 V) (t_1 - t_2)$ ab [vgl. die 12. Aufgabe, Gl. (4)]. Da diese Wärmemengen einander gleich sein müssen, so folgt

$$m_e (\lambda + c_w t_2) = (c_w m_w + c_k m_k + 0,46 V) (t_1 - t_2) \quad (1)$$

oder

$$\lambda = \frac{c_w m_w + c_k m_k + 0,46 V}{m_e} (t_1 - t_2) - c_w t_2. \quad (2)$$

Zur Ermittlung der Temperaturen t_1 und t_2 wenden wir das gleiche graphische Verfahren an wie bei der 12. Aufgabe. Nachdem wir etwa 5 Minuten lang die Temperatur des Kalorimeterwassers jede halbe Minute abgelesen haben, wird das Eis in einigen nicht zu kleinen Stücken — unmittelbar vorher mit einem Tuch gut abgetrocknet — schnell in das Wasser gebracht, und dann die Temperatur weitere 5 bis 10 Minuten beobachtet. Die Masse m_e des Eises ermittelt man nach dem Versuch durch Wägung des Kalorimeters.

Die Messung wird um so genauer, je mehr Eis geschmolzen wird. Es empfiehlt sich daher, das Wasser im Kalorimeter auf 40 bis 50°C vorzuwärmen und soviel Eis zu verwenden, daß die Endtemperatur 10 bis 20° unter Zimmertemperatur liegt. Die hierzu nötige Eismenge kann man durch einen Vorversuch ungefähr abschätzen. Die Temperatur 0°C darf aber nicht erreicht werden, da dann ungeschmolzenes Eis übrig bleibt.

Beispiel. Wir haben das gleiche Kalorimeter verwendet wie bei der 12. Aufgabe.

Masse des leeren Kalorimeters ... $m_k = 27,05\text{ g}$

Masse des Kalorimeters mit

Wasser $m_k + m_w = 202,7\text{ g}$

Masse des Kalorimeters mit

Wasser und Eis .. $m_k + m_w + m_e = 274,3\text{ g}$

Masse des Wassers $m_w = 175,7\text{ g}$

Masse des Eises $m_e = 71,6\text{ g}$

Ferner ist $c_w = 1,00\text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}$

$c_k m_k + 0,46 V = 5,78 + 0,28 \approx 6,1\text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}$.

Unsre Temperaturmessungen sind in Tabelle 1 wiedergegeben; Abb. 25 zeigt die graphische Darstellung.

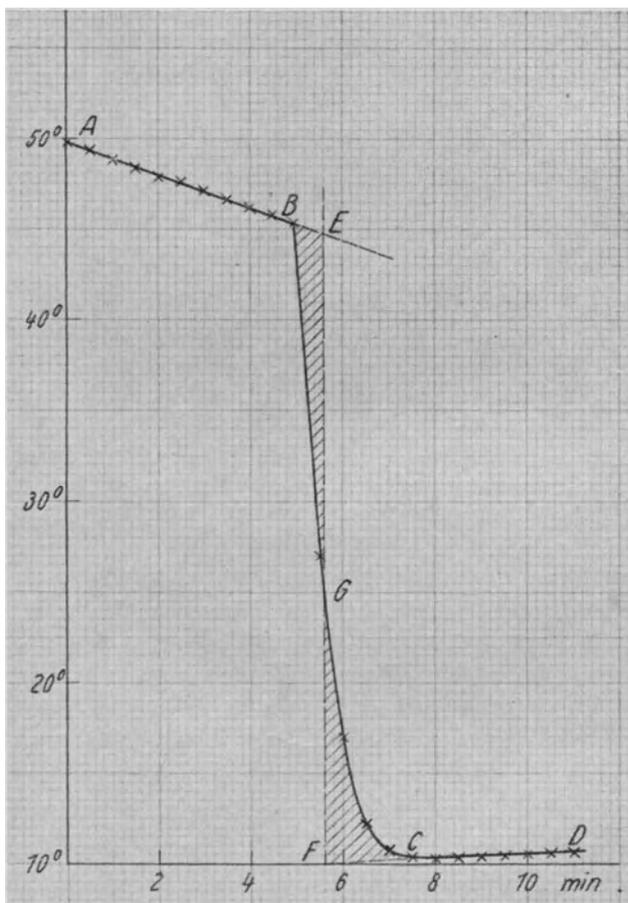


Abb. 25. Temperaturverlauf im Kalorimeter (Schmelzwärme).

Tabelle 1.

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5 min	
49,8	49,35	48,8	48,4	47,9	47,6	47,1	46,65	46,2	45,9	45,4 °C	
Eis eingebracht.											
5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11 min
27,0	17,0	12,2	10,7	10,35	10,3	10,35	10,4	10,45	10,5	10,5	10,55 °C

Aus Abb. 25 lesen wir ab, daß wir mit den folgenden Temperaturen zu rechnen haben: $t_1 = 44,8^\circ \text{C}$ und $t_2 = 10,0^\circ \text{C}$. Dann folgt aus Gl. (2):

$$\lambda = \frac{181,8}{71,6} 34,8 - 10,0 = 78,4 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Da — wie bei der 12. Aufgabe — der Einfluß des Kalorimetergefäßes auf das Ergebnis verhältnismäßig klein ist, vernachlässigen wir auch hier bei unsrer Fehlerrechnung die Größe $c_k m_k + 0,46 V$ und rechnen mit der Näherungsgleichung

$$\lambda \approx c_w \left[\frac{m_w}{m_e} (t_1 - t_2) - t_2 \right] = c_w \left[\frac{m_w}{m_e} t_1 - \left(\frac{m_w}{m_e} + 1 \right) t_2 \right]. \quad (3)$$

Die Massen m_w und m_e sind natürlich relativ viel genauer gemessen als die Temperaturen t_1 und t_2 , so daß wir ihre Fehler außer acht lassen dürfen. Demnach beträgt der absolute Größtfehler von λ [Einl. § 11, Gl. (6)]

$$\Delta \lambda = \pm c_w \left[\frac{m_w}{m_e} \Delta t_1 + \left(\frac{m_w}{m_e} + 1 \right) \Delta t_2 \right]. \quad (4)$$

Wegen der Unsicherheit unsrer Extrapolation schätzen wir auf Grund von Abb. 25 die Fehler von t_1 und t_2 vorsichtig auf $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \pm 0,2^\circ$. Dann erhalten wir mit $m_w/m_e = 175,7/71,6 = 2,47$

$$\Delta \lambda = \pm 1 (0,494 + 0,694) = \pm 1,188 \approx \pm 1,2 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}.$$

Demnach lautet unser Endergebnis

$$\lambda = \underline{(78,4 \pm 1,2) \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \text{ bzw. } 78,4 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \pm 1,5 \%}.$$

Als genauester Wert gilt $\lambda = 79,5 \text{ cal}$; er liegt also innerhalb unsrer Fehlergrenzen. Unser Wert liegt ein wenig tiefer. Eine kleine Abweichung in diesem Sinne kann man bei unserm einfachen Verfahren erwarten, weil es nie gelingt, das Eis, das auch oft zahlreiche Poren hat, ganz wasserfrei in das Kalorimeter zu bringen. Der Wasseranteil trägt zu m_e bei, nimmt aber keine Schmelzwärme auf, so daß der berechnete Wert der Schmelzwärme etwas zu klein ausfallen muß.

II. Verdampfungswärme

Die Verdampfungswärme eines Stoffes ist diejenige Wärmemenge, die 1 g des Stoffes ohne Änderung seiner Temperatur beim Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Zustand aufnimmt bzw. beim umgekehrten Vorgang abgibt. Sie hängt von der Temperatur ab, bei der dieser Vorgang stattfindet. Die Einheit der Verdampfungswärme ist, wie die der Schmelzwärme, $1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$.

Wir wollen die Verdampfungswärme des Wassers bei seiner Siedetemperatur bestimmen und verfahren dabei im Grundsatz ebenso wie bei der Schmelzwärme. Wir leiten den Dampf siedenden Wassers in das Wasser eines Kalorimeters, wo er sich zu Wasser kondensiert und seine Verdampfungswärme abgibt, und messen die eingetretene Temperaturänderung des Wassers. Es sei

- t_1 die Temperatur des Dampfes,
- t'_1 die Anfangstemperatur des Wassers,
- t_2 die Endtemperatur des Wassers,
- m_d die Masse des kondensierten Dampfes,
- m_w die Masse des Wassers im Kalorimeter,
- K die (effektive) Wärmekapazität (Wasserwert) des Kalorimeters.

Die Verdampfungswärme des Wassers betrage $\eta \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$. Dann gibt der Dampf bei der Kondensation die Wärmemenge $\eta m_d \text{ cal}$ und bei seiner weiteren Abkühlung als Wasser die Wärmemenge $c_w m_d (t_1 - t_2) \text{ cal}$ ab. Das Kalorimeterwasser und das Kalorimeter nehmen die gleich große Wärmemenge $(c_w m_w + K) (t_2 - t'_1)$ auf. Demnach ist

$$m_d [\eta + c_w (t_1 - t_2)] = (c_w m_w + K) (t_2 - t'_1) \quad (5)$$

und

$$\eta = \frac{c_w m_w + K}{m_d} (t_2 - t'_1) - c_w (t_1 - t_2). \quad (6)$$

Bei Kenntnis der übrigen Größen können wir η berechnen.

Wir könnten die Messung wieder in dem gleichen Kalorimeter wie oben ausführen; doch wollen wir diesmal etwas anders verfahren. Wir verwenden als Kalorimeter eine doppelwandige, unverspiegelte Dewarsche (Weinholdsche) Flasche. Der Wärmeaustausch mit der Umgebung ist dann äußerst klein, so

daß wir als Temperaturen t'_1 und t_2 die Anfangs- und die Endtemperatur des Wassers einsetzen dürfen, so wie wir sie unmittelbar messen. Wir kommen also ohne die langwierige Temperaturbeobachtung und ohne das graphische Verfahren aus. Die Masse des Wassers im Kalorimeter wird durch Wägung des leeren und des vollen Kalorimeters ermittelt, die Masse m_a des Dampfes durch erneute Wägung nach der eigentlichen Messung.

Als Wärmekapazität K dürfen wir hier nicht die volle Wärmekapazität des Kalorimetergefäßes einsetzen, da sich wegen der geringen Wärmeleitfähigkeit des Glases nur die inneren Teile auf die Temperatur des Kalorimeterwassers erwärmen. Wir können die effektive Wärmekapazität K des Kalorimeters durch folgenden Versuch genügend genau ermitteln. Wir füllen zuerst das Kalorimeter, damit es eine wohldefinierte Temperatur annimmt, mit Wasser von Zimmertemperatur t'_1 etwa so hoch, wie es bei der Messung der Verdampfungswärme mit Wasser gefüllt werden soll, und warten, bis das Wasser konstante Temperatur angenommen hat. Dann wird das Wasser ausgegossen, sofort etwa die gleiche Menge siedenden Wassers ($t_1 = 100^\circ \text{C}$) eingegossen und die Endtemperatur t_2 des Wassers gemessen. Dieses gibt die Wärmemenge $c_w m_w (t_1 - t_2)$ ab; das Kalorimeter nimmt die Wärmemenge $K (t_2 - t'_1)$ auf. Es ist also

$$K (t_2 - t'_1) = c_w m_w (t_1 - t_2) \quad \text{oder} \quad K = c_w m_w \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t'_1}. \quad (7)$$

Wird jetzt und später das gleiche Thermometer benutzt, so ist seine Wärmekapazität in K mit enthalten.

Beispiel. 1. Messung von K .

Masse des leeren Kalorimeters	512,0 g
Masse des Kalorimeters mit Wasser	772,0 g
Masse m_w des Wassers	260,0 g

Für die Temperatur t_1 des siedenden Wassers ist die Angabe $t_1 = 100^\circ \text{C}$ bei dieser Messung durchaus genügend genau. Der Versuch hat ergeben

$$t'_1 = 20,2^\circ \text{C}, \quad t_2 = 91,3^\circ \text{C}.$$

Dann ergibt Gl. (7)

$$K = 1,00 \cdot 260 \frac{8,7}{71,1} = 31,8 \approx 32 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}$$

2. Messung von η .

Masse des leeren Kalorimeters	512,0 g
Masse des Kalorimeters mit Wasser	809,6 g
Masse m_w des Wassers	297,6 g
Masse des Kalorimeters mit Wasser und Dampf.....	843,1 g
Masse m_d des Dampfes	33,5 g
Ferner ist	$c_w m_w + K = 329,6 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}$.

Zur Vergrößerung der kondensierten Dampfmenge kühlen wir das Kalorimeterwasser vor der Messung bis nahe an 0°C ab. Die Messung hat ergeben

$$t'_1 = 2,2^\circ \text{C}, t_2 = 60,7^\circ \text{C}.$$

Der Luftdruck betrug $75,0 \text{ cm Hg}$, so daß für t_1 eine etwas niedrigere Temperatur als 100°C anzusetzen ist. Da jedoch das Dampfzuleitungsrohr etwa 5 cm tief in das Kalorimeterwasser eintauchen muß, so siedet das Wasser unter einem etwas erhöhten Druck. Ein Druck von 5 cm Wasser entspricht einem Druck von rund $5/13,5 \approx 0,4 \text{ cm Hg}$, so daß das Wasser tatsächlich unter einem Druck von etwa $75,4 \text{ cm Hg}$ siedet, dem eine Siedetemperatur von $t_1 = 99,8^\circ \text{C}$ entspricht. [Im allgemeinen wird man mit dem runden Wert 100°C rechnen dürfen, weil t_1 nur in das verhältnismäßig kleine Glied $c_w (t_1 - t_2)$ der Gl. (6) eingeht.] Dann folgt aus Gl. (6)

$$\eta = \frac{329,6}{33,5} 58,5 - 39,1 = 575,5 - 39,1 = 536,4 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Wir berechnen zunächst den relativen Größtfehler von K . Dieser ist nach Gl. (7) gleich dem relativen Größtfehler der Größe $(t_1 - t_2)/(t_2 - t'_1)$, wenn wir von dem sehr kleinen Fehler der Masse m_w absehen. Wir haben nun bei der 12. Aufgabe bereits den Fehler der reziproken Größe $(t_2 - t'_1)/(t_1 - t_2)$ berechnet, für den der gleiche Ausdruck gilt [vgl. die 12. Aufgabe, Gl. (5) und (7) und die Fehlerrechnung zum 2. Teil der 12. Aufgabe], und der dort gleich dem gesamten Größtfehler $\Delta c/c$ ist. Wir können daher die rechte Seite der Gl. (7) aus der 12. Aufgabe einfach für den relativen Größtfehler von K übernehmen. Doch ist dabei zu beachten, daß hier $t_1 = 100^\circ$ ein fest gegebener Wert ist, so daß wir $\Delta t_1 = 0$ setzen müssen. Damit erhalten wir

$$\frac{\Delta K}{K} = \pm \left(\frac{\Delta t'_1}{t_2 - t'_1} + \frac{\Delta t_1}{t_1 - t_2} \right). \quad (8)$$

Wir schätzen die Fehler der Temperaturen vorsichtig auf $\pm 0,1^{\circ}$. Dann erhalten wir mit den obigen Zahlenwerten

$$\frac{\Delta K}{K} = \pm \left(\frac{0,1}{8,7} + \frac{0,1}{71,1} \right) \approx \pm 0,013 = \pm 1,3\%.$$

Der absolute Größtfehler von K beträgt dann

$$\Delta K = \pm 0,013 \cdot 32 \approx \pm 0,4 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}.$$

Die Berechnung des Fehlers von η können wir uns dadurch vereinfachen, daß wir berücksichtigen, daß das Glied $-c_w(t_1 - t_2)$ in Gl. (6) nur einen ziemlich kleinen Beitrag zu unserm Ergebnis liefert. (Die bei der Abkühlung des durch Kondensation gebildeten Wassers von 100° auf $60,7^{\circ}$ abgegebene Wärmemenge ist klein gegen die abgegebene Verdampfungswärme.) Darum trägt auch ein Fehler von $t_1 - t_2$ sehr wenig zum Gesamtfehler bei. Wir wollen deshalb dieses Glied bei unsrer Fehlerrechnung vernachlässigen und statt mit Gl. (6) mit der vereinfachten Gleichung

$$\eta \approx \frac{c_w m_w + K}{m_a} (t_2 - t'_1)$$

rechnen. Dann erhalten wir, wenn wir wieder von dem sehr kleinen Fehler von m_w absehen, als relativen Größtfehler von η

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm \left(\frac{\Delta K}{c_w m_w + K} + \frac{\Delta m_a}{m_a} + \frac{\Delta t_2 + \Delta t'_1}{t_2 - t'_1} \right). \quad (10)$$

Wir haben die Wägungen auf 0,1 g genau vorgenommen, so daß wir den Fehler jeder Wägung auf $\pm 0,05$ g schätzen dürfen. Da aber m_a als die Differenz zweier Wägungsergebnisse berechnet ist, so müssen wir seinen Größtfehler mit $\Delta m_a = \pm 0,1$ g ansetzen. Wir schätzen ferner, daß wir die Temperaturen t'_1 und t_2 auf $\pm 0,1^{\circ}$ genau gemessen haben, so daß $\Delta t'_1 = \Delta t_2 = \pm 0,1^{\circ}$. Mit den obigen Zahlenwerten ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \eta}{\eta} &= \pm \left(\frac{0,4}{329,6} + \frac{0,1}{33,5} + \frac{0,2}{58,5} \right) = \pm (0,0012 + 0,003 + 0,0034) \\ &= \pm 0,0076 \approx \pm 0,75\%. \end{aligned}$$

Demnach lautet unser Endergebnis

$$\underline{\eta = (536,4 \pm 4,0) \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \text{ bzw. } 536,4 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \pm 0,75\%.$$

Als genauester Wert von η gilt $539,1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$. Er liegt innerhalb unsrer Fehlergrenzen. Daß wir einen etwas zu kleinen

Wert erhalten würden, war auch hier zu erwarten. Es läßt sich nicht vermeiden, daß zugleich mit dem Dampf ein wenig Kondenswasser aus der Dampfzuleitung mit in das Kalorimeter gelangt. Es trägt zwar zur Masse m_d , so wie wir sie messen, bei, bringt aber keine Verdampfungswärme mit in das Kalorimeter, so daß unser Wert zu klein ausfallen muß.

14. Aufgabe. Messungen mit dem Volumenometer Boyle-Mariottesches Gesetz

Literatur: W. § 67; M.-P. Bd. III/1, S. 261; K. S. 64.

I. Prüfung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes.

Es sei p der Druck, V das Volumen eines idealen Gases. Dann gilt bei konstanter Temperatur bei allen Zustandsänderungen des Gases

$$pV = \text{const.} \quad (1)$$

(isotherme Zustandsgleichung der idealen Gase, Gesetz von Boyle und Mariotte). Zur Prüfung dieses Gesetzes benutzen wir das in Abb. 26 dargestellte Volumenometer. Es besteht aus einem Glasgefäß, das oben durch einen weiten, mit einem Hahn versehenen konischen, gefetteten Schliff gasdicht verschlossen ist. Unten läuft es in eine etwas über 25 cm lange unten offene Röhre aus, die einen sehr gleichmäßigen Querschnitt von 1 cm^2 hat, und die von einer bestimmten Stelle ab eine nach unten verlaufende mm-Teilung trägt. Demnach entfällt auf je 1 cm der Röhrenlänge ein Volumen von 1 cm^3 . Diese Röhre ist an einem Stativ befestigt und kann verschieden tief in Quecksilber getaucht werden, das sich in einem Glaszylinder befindet, so daß das Volumen des im Volumenometer enthaltenen Gases durch Änderung seines Druckes verändert werden kann. Wir verwenden bei unsrer Messung Luft, die unter gewöhnlichen Bedingungen dem idealen Gaszustand sehr nahe ist.

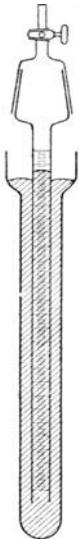


Abb. 26.
Volumenometer.

Zunächst öffnen wir den Hahn und tauchen die Röhre so tief in das Quecksilber ein, daß das Quecksilber innerhalb und außerhalb der Röhre am

Nullstrich der Röhrenteilung steht. (Es wird stets an der Kuppe des Quecksilbermeniskus abgelesen.) Dann wird der Hahn geschlossen. Bei allen Handhabungen mit dem Volumenometer ist streng darauf zu achten, daß die Luft nicht durch Berühren mit der Hand erwärmt wird. In dem Volumenometer ist jetzt eine Luftmenge eingeschlossen, deren Druck gleich dem äußeren Luftdruck und deren Volumen gleich dem oberen, nicht kalibrierten, also vorläufig unbekanntem Volumteil des Volumenometers ist.

Nunmehr heben wir das Volumenometer bei ständig geschlossenem Hahn schrittweise höher aus dem Quecksilber heraus. Dadurch wird das Gasvolumen vergrößert, der Gasdruck aber verkleinert. Das Quecksilber steht jetzt innerhalb der Röhre höher als außen, aber die Quecksilbersäule in der Röhre ist weniger hoch gestiegen, als wir das Gefäß gehoben haben, und die Kuppe steht unterhalb des Nullstrichs. Wir können an der Skala die Vergrößerung des Volumens ablesen. Gleichzeitig zeigt uns die Höhendifferenz des Quecksilbers innerhalb und außerhalb der Röhre die Druckdifferenz p' zwischen dem äußeren Luftdruck p_b und dem inneren Luftdruck p an, so daß wir diesen aus jenem berechnen können,

$$p = p_b - p'. \quad (2)$$

Wir bezeichnen den nicht kalibrierten, zunächst unbekanntem oberen Volumteil des Volumenometers, den wir kurz als Restvolumen bezeichnen wollen, mit v , den bekannten Volumteil innerhalb der kalibrierten Röhre mit V , so daß das Gesamtvolumen des Gases $V + v$ beträgt. Dann ist nach Gl. (1)

$$p(V + v) = \text{const} = A \quad \text{oder} \quad \frac{A}{p} = V + v. \quad (3)$$

Es muß also eine lineare Abhängigkeit zwischen $1/p$ und V bestehen. Dies zu prüfen, ist unsre erste Aufgabe.

Beispiel. Am Barometer haben wir den Luftdruck $p_b = 74,71$ cm abgelesen. (Dieser Barometerstand darf nicht nach Tabelle IV reduziert werden, da das Quecksilber im Volumenometer etwa die gleiche Temperatur hat wie dasjenige im Barometer.) Wir heben das Volumenometer schrittweise derart, daß sich das äußere Quecksilberniveau in Schritten von je 2 cm gegen den

Nullstrich der Skala verschiebt. Wir lesen dann an der inneren Quecksilberkuppe den Volumzuwachs V ab. Im äußeren Quecksilberniveau lesen wir die Summe der Maßzahlen des

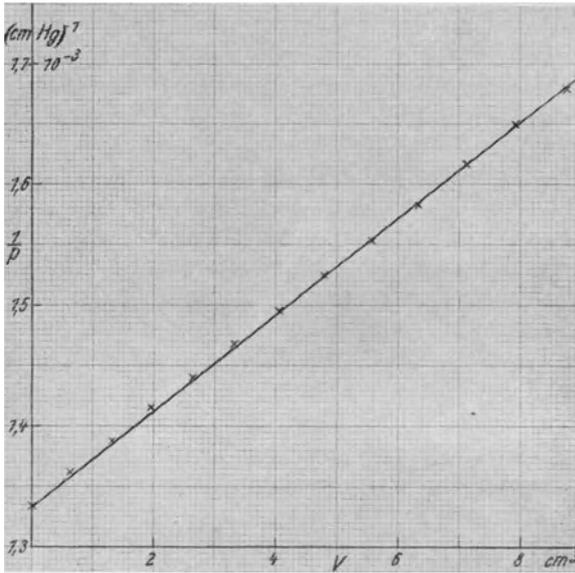


Abb. 27. Zum Volumenometer. $1/p$ als Funktion von V .

Tabelle 1.

$ V + p' $ (cm)	V cm^3	p' cm Hg	$p = p_b - p'$ cm Hg	$1/p$ $(\text{cm Hg})^{-1}$
0	0,00	0,00	74,71	0,001339
2	0,64	1,36	73,35	1362
4	1,31	2,69	72,02	1387
6	1,97	4,03	70,68	1415
8	2,64	5,36	69,35	1440
10	3,32	6,68	68,03	1468
12	4,07	7,93	66,78	1495
14	4,80	9,20	65,51	1525
16	5,57	10,43	64,28	1553
18	6,34	11,66	63,05	1584
20	7,11	12,89	61,82	1617
22	7,91	14,09	60,62	1650
24	8,79	15,21	59,50	1680

Volumenzuwachses V und der Druckdifferenz p' ab (Abb. 26), die wir mit $|V| + |p'|$ bezeichnen wollen.

Das Ergebnis unsrer Messungen ist in Tabelle 1 und in Abb. 27 wiedergegeben. Wie man sieht, besteht in der Tat zwischen V und $1/p$ sehr genau eine lineare Beziehung.

II. Volumenmessung mit dem Volumenometer.

Nach Gl. (3) können wir aus zwei zusammengehörigen Wertepaaren von p und V das Restvolumen v berechnen. Wir wollen das dazu benutzen, um die Dichte $\rho = m/V_k$ eines Körpers zu bestimmen, dessen Volumen V_k wir wegen seiner höchst unregelmäßigen Gestalt nicht nach den sonst üblichen Verfahren (Ausmessung, Auftrieb in Wasser) bestimmen können. Zu diesem Zweck bestimmen wir zunächst recht genau das Restvolumen v des Volumenometers. Darauf bringen wir den zu untersuchenden Körper oben in das Volumenometer und messen das nunmehr kleinere Restvolumen v' . Dann ist das Volumen des Körpers $V_k = v - v'$.

Die Messung erfolgt so, daß wir das Volumenometer zunächst, genau wie oben, bei offenem Hahn mit Luft von Atmosphärendruck füllen, während das Quecksilber innen und außen am Nullstrich der Skala steht. (Nicht mit der Hand berühren!) Dann schließen wir den Hahn und heben das Volumenometer so weit aus dem Quecksilber heraus, daß der äußere Quecksilberspiegel auf dem Teilstrich 25 cm der Skala steht ($|V| + |p'| = 25$), lesen das Volumen V ab und berechnen die Druckdifferenz p' . Dann ist der Druck anfänglich gleich dem äußeren Luftdruck, $p = p_b$, das Volumen gleich v . Nachher ist der Druck $p = p_b - p'$, $|V| + |p'| = 25$ und das Gesamtvolumen gleich $V + v$. Beide Teile der Messung wiederholen wir je zehnmal. Es muß aber bei jeder Messung zunächst auch der Hahn wieder geöffnet und das Volumenometer neu eingestellt werden, da ja auch hierbei Fehler vorkommen können. Aus Gl. (3) erhalten wir dann die beiden Bestimmungsgleichungen für v

$$\frac{A}{p_b} = v, \quad \frac{A}{p_b - p'} = V + v, \quad (4)$$

so daß

$$v = V \frac{p_b - p'}{p'}. \quad (5)$$

Eine ganz entsprechende Gleichung gilt für v' .

Beispiel. Es soll das Volumen und die Dichte eines sehr porösen Gummischwamms bestimmt werden. Die in ihm eingeschlossene Luft folgt im Volumenmeter allen Zustandsänderungen der ihn umgebenden Luft, so daß man nach dem obigen Verfahren nur das Volumen der festen Bestandteile des Schwamms, also des Gummis, bestimmt.

Die Masse des Schwammes beträgt 5,21 g. Es schadet natürlich nicht, wenn er beim Einbringen in das Volumenmeter stark zusammengedrückt wird, da dadurch nur seine Hohlräume verkleinert werden, das Gummi selbst aber kaum zusammengedrückt wird. Für das Volumen V haben wir die in Tabelle 2 zusammen-

Tabelle 2.

Ohne Schwamm			Mit Schwamm		
9,09 cm ³	- 1	1	8,41 cm ³	-- 1	1
10	0	0	40	0	0
10	0	0	39	- 1	1
11	+ 1	1	41	+ 1	1
10	0	0	39	- 1	1
10	0	0	40	0	0
09	- 1	1	41	+ 1	1
11	+ 1	1	39	- 1	1
10	0	0	41	+ 1	1
10	0	0	39	- 1	1
9,10 cm ³		4	8,40 cm ³		8

gestellten Werte erhalten. Der Luftdruck betrug 74,73 cm Hg. Es ergeben sich also die folgenden Werte:

Ohne Schwamm: $|p'| = 25 - |V| = 15,90$, $p_b - p' = 58,83$ cm Hg

$$v = 9,10 \frac{58,83}{15,90} = 33,64 \text{ cm}^3.$$

Mit Schwamm: $|p'| = 25 - |V| = 16,60$, $p_b - p' = 58,13$ cm Hg

Daraus folgt $v' = 8,40 \frac{58,13}{16,60} = 29,43 \text{ cm}^3.$

$$V_k = v - v' = 4,21 \text{ cm}^3 \quad \text{und} \quad \rho = \frac{5,21}{4,21} = 1,237 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Fehlerrechnung. Zur Berechnung des relativen Fehlers von v bilden wir zunächst das Differential $d \ln v$ von $\ln v$ nach Gl. (5),

$$d \ln v = \frac{dv}{v} = \frac{dV}{V} + \frac{dp_b}{p_b - p'} - \frac{p_b \cdot dp'}{p'(p_b - p')}. \quad (6)$$

Bei einer strengen Fehlerrechnung müßten wir berücksichtigen, daß p' mit Hilfe von V berechnet wurde, daß also der Fehler von p' von dem Fehler von V abhängt. Ferner müßten wir einen Fehler der Einstellungen des unteren Quecksilberspiegels (also der mit 25 cm eingesetzten Länge) berücksichtigen. Die Durchführung dieser Rechnung wäre sehr verwickelt. Wir erhalten aber, wie eine nähere Überlegung zeigt, die richtige Größenordnung des Fehlers von v , wenn wir annehmen, daß der Fehler von p' die gleiche Maßzahl in cm Hg hat, wie der Fehler von V in cm^3 beträgt, da beide Größen in gleicher Weise von der Einstell- und Ablesegenauigkeit auf der Skala abhängen. Bei v' verfahren wir ebenso.

Nach den Angaben in Tab. 2 beträgt der Fehler von V ohne Schwamm:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pm \sqrt{\frac{4}{9 \cdot 10}} \approx \pm 0,2 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} \\ &= \pm 0,002 \text{ cm}^3, \end{aligned}$$

mit Schwamm:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pm \sqrt{\frac{8}{9 \cdot 10}} \approx \pm 0,3 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} \\ &= \pm 0,003 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Wir wollen zur Vereinfachung in beiden Fällen mit dem mittleren Fehler $\Delta V = \pm 0,0025 \text{ cm}^3$ rechnen und daher auch in beiden Fällen für p' den Fehler $\Delta p' = \pm 0,0025 \text{ cm Hg}$ annehmen. Den Fehler der Barometerablesung schätzen wir auf $\Delta p_b = \pm 0,005 \text{ cm Hg}$. Da die Werte von V und von p' bei beiden Messungen nur wenig voneinander verschieden sind, so wollen wir zur Vereinfachung mit den mittleren Werten $V = 8,75 \text{ cm}^3$ und $p' = 16,25 \text{ cm Hg}$ rechnen, so daß $p_b - p' = 74,83 - 16,25 \approx 58,6 \text{ cm Hg}$.

Indem wir gemäß § 11 von Gl. (6) zum Fehler übergehen, erhalten wir dann für v und v' die relativen Größtfehler

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta v'}{v'} &= \pm \left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta p_b}{p_b - p'} + \frac{p_b \Delta p'}{p' (p_b - p')} \right) \\ &= \pm \left(\frac{0,0025}{8,75} + \frac{0,005}{58,6} + \frac{0,0025 \cdot 74,83}{16,25 \cdot 58,6} \right) \\ &= \pm (0,00029 + 0,00009 + 0,00017) = \pm 0,00055. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \Delta v &= \pm 0,00055 \cdot 33,64 \approx \pm 0,019 \text{ cm}^3, \\ \Delta v' &= \pm 0,00055 \cdot 29,43 \approx \pm 0,016 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Da $V_k = v - v'$, so beträgt der absolute Größtfehler von V_k :

$$\Delta V_k = \pm (\Delta v + \Delta v') = \pm (0,019 + 0,016) = \pm 0,035 \text{ cm}^3.$$

Ferner ist $\rho = m/V_k$. Die Masse m des Schwammes ist auf kleine Bruchteile von 1% genau gemessen, so daß wir ihren Fehler vernachlässigen dürfen. Demnach beträgt der relative Fehler von ρ :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \pm \frac{\Delta V_k}{V_k} = \pm \frac{0,035}{4,21} \approx \pm 0,008 \approx \pm 1\%.$$

Unser Endergebnis lautet demnach:

$$\underline{\underline{\rho = (1,237 \pm 0,012) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \text{ bzw. } 1,237 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \pm 1\%}}$$

Hierzu ist aber sehr nachdrücklich zu bemerken, daß diese Fehlerangabe nur dann vertretbar ist, wenn die Messung mit größter Sorgfalt ausgeführt wurde, und wenn insbesondere streng darauf geachtet wurde, daß die Temperatur der Luft im Volumometer nicht durch Berühren mit der Hand beeinflußt wurde.

15. Aufgabe. Messung des Druckkoeffizienten der Luft mit dem Gasthermometer

Literatur: W. § 103, 105; M.-P. Bd. III/1, S. 23; K. S. 145.

Es sei p der Druck, V das Volumen, t die Temperatur eines idealen Gases in $^{\circ}\text{C}$. Dann lautet die allgemeine Zustandsgleichung des Gases:

$$pV = (pV)_0(1 + \alpha t) \quad (1)$$

(Boyle-Mariotte-Gay Lussacsches Gesetz). Dabei bedeutet $(pV)_0$ den Betrag des Produktes pV bei 0°C , und es ist

$$\alpha = 0,003660 \text{ Grad}^{-1}, \quad \frac{1}{\alpha} = 273,17^\circ.$$

Letzterer Wert ist also seinem Betrage nach identisch mit dem Nullpunkt der Celsiuskala (0°C), gemessen in der absoluten Temperaturskala.

Sonderfälle der Gl. (1):

I. Isotherme Zustandsänderungen.

$$t = \text{const}, \quad pV = \text{const}. \quad (2)$$

(Boyle-Mariottesches Gesetz, 14. Aufgabe).

II. Isobare Zustandsänderungen.

$$p = \text{const}, \quad V = V_0(1 + \alpha t). \quad (3)$$

V_0 ist das Volumen des Gases bei 0°C .

III. Isochore Zustandsänderungen.

$$V = \text{const}, \quad p = p_0(1 + \alpha t). \quad (4)$$

p_0 ist der Druck des Gases bei 0°C .

Bei denjenigen wirklichen Gasen, die vom idealen Gaszustand nur sehr wenig abweichen — wie z. B. die Luft bei gewöhnlichen Bedingungen —, gelten entsprechende Gleichungen. Jedoch bestehen bei ihnen kleine Unterschiede zwischen den nach Gl. (3) oder nach Gl. (4) gemessenen Werten von α , die sich auch von dem für ideale Gase gültigen Wert ein wenig unterscheiden. Den nach Gl. (3) bei konstantem Druck gemessenen Wert nennt man den Ausdehnungskoeffizienten, den nach Gl. (4) bei konstantem Volumen gemessenen Wert den Druck- oder Spannungskoeffizienten des Gases.

Wir wollen den letzteren für Luft mit einem einfachen Gas thermometer messen, dessen Schema Abb. 28 zeigt. Das in dem Volumen V enthaltene Gas ist durch das Quecksilber in den durch den Druckschlauch S verbundenen Röhren (R_1, R_2 , Abb. 29) von der Außenluft abgeschlossen. Durch Heben oder Senken der Röhre R_2 wird dafür gesorgt, daß die Quecksilberkuppe in R_1 stets genau die oben bei m eingeschmolzene Glasspitze berührt. Man kann das sehr genau erreichen, indem man die Kuppe so weit

hebt, bis die Glasspitze sich gerade mit ihrem Spiegelbild in der Kuppe berührt. Dann ist, wenn wir vorerst von der durch die Wärmeausdehnung des Gefäßes bedingten Korrektur absehen, das Volumen des Gases stets gleich groß. Wir können den Druckkoeffizienten α nach Gl. (4) berechnen, wenn wir die Drucke p und p_0 messen, unter denen das Gas bei zwei verschiedenen Tem-

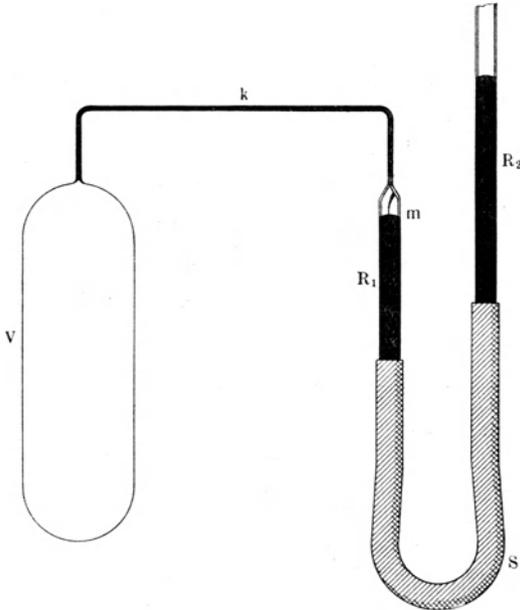


Abb. 28. Schema des Gasthermometers. Nach Müller-Pouillet, „Lehrbuch der Physik“.

peraturen, am besten bei 0 und bei 100° C, steht. Diese Drucke sind gleich der Summe aus dem äußeren Luftdruck p_b , den wir am Barometer ablesen, und der aus der Höhendifferenz des Quecksilbers in R_1 und R_2 abzulesenden Differenz p' des Drucks im Gefäß und des äußeren Luftdrucks, die an einer hinter den Röhren R_1 , R_2 befindlichen verspiegelten Skala abgelesen wird. Es ist also

$$p = p_b + p'. \quad (5)$$

Wir bringen das mit Luft gefüllte Gefäß einmal in schmelzendes Eis, dann in den Dampf siedenden Wassers und messen jedesmal die Druckdifferenz p' . Nach Abschluß des Versuchs muß

vor dem Entfernen des Gefäßes aus dem Dampfraum die Röhre R_2 unbedingt so weit gesenkt werden, daß bei der folgenden Abkühlung der Luft kein Quecksilber in die Kapillare und das Volumen V eindringen kann. Ferner achte man während der ganzen Messung darauf, daß die Verbindungsstellen zwischen R_1 , R_2 und S stets unter Quecksilberdruck stehen, damit nicht im Verlaufe der Messungen Luft ein- oder austreten kann.

Um ein möglichst zuverlässiges Ergebnis zu erhalten, dürfen wir erstens für t nicht den runden Betrag 100°C einsetzen, sondern die genaue Siedetemperatur des Wassers, die dem herrschenden Luftdruck entspricht (Tabelle III). Zweitens müssen wir noch zwei Korrekturen anbringen.

1. Die Ausdehnung des Gefäßes. Das Gefäß hat bei 100°C ein etwas größeres Volumen als bei 0°C . Beträgt es bei 0°C V_0 , so beträgt es bei $t^\circ\text{C}$ $V = V_0(1 + \beta t)$, wobei

$$\beta = 0,0000243 \text{ Grad}^{-1}$$

der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases ist. Nach Gl. (1) ist also $pV = pV_0(1 + \beta t) = p_0V_0(1 + \alpha t)$ oder

$$p(1 + \beta t) = p_0(1 + \alpha t). \quad (6)$$

2. Der schädliche Raum. Wir müssen ferner beachten, daß an den Temperaturänderungen nur das im Volumen V enthaltene Gas teilnimmt. Dagegen befindet sich die Kapillare k und das Volumen m in R_1 ständig auf Zimmertemperatur oder einer mittleren Temperatur, die bei der Messung bei 100°C durch die Gasflamme des Siedegefäßes meist etwas über Zimmertemperatur erhöht ist, auf deren sehr genaue Kenntnis es jedoch zum Glück nicht ankommt. Wir begnügen uns daher hier damit, dafür die Zimmertemperatur einzusetzen. Es sei v die Größe des schädlichen Raumes, die wir ungefähr abschätzen müssen, V das Volumen des eigentlichen Gefäßes, T die Temperatur, bei der die Messung erfolgt, und T_z die Zimmertemperatur, beide in der absoluten Skala, also $T = t + 273$, $T_z = t_z + 273$. Dann ist, wie wir hier nicht beweisen wollen, jeder Druck mit einem Faktor

$$1 + \frac{v}{V} \frac{T}{T_z}$$

zu multiplizieren.

Statt p und p_0 haben wir also in Gl. (6) die Größen

$$p \left(1 + \frac{v}{V} \frac{T}{T_z} \right) \quad \text{bzw.} \quad p_0 \left(1 + \frac{v}{V} \frac{T_0}{T_z} \right)$$

einzusetzen. Damit erhalten wir

$$p (1 + \beta t) \left(1 + \frac{v}{V} \frac{T}{T_z} \right) = p_0 (1 + \alpha t) \left(1 + \frac{v}{V} \frac{T_0}{T_z} \right) \quad (7)$$

oder

$$1 + \alpha t = \frac{p}{p_0} (1 + \beta t) \frac{1 + \frac{v}{V} \frac{T}{T_z}}{1 + \frac{v}{V} \frac{T_0}{T_z}}. \quad (8)$$

Nun sind im praktischen Fall die drei Korrektionsgrößen auf der rechten Seite von Gl. (8) sehr klein gegen 1. Daher können wir schreiben (Einl. § 6):

$$1 + \alpha t = \frac{p}{p_0} \left(1 + \beta t + \frac{v}{V} \frac{T - T_0}{T_z} \right) = \frac{p}{p_0} \left[1 + \left(\beta + \frac{v}{V} \frac{1}{T_z} \right) t \right], \quad (9)$$

da $T - T_0 = t$ ($T_0 \approx 273^\circ \text{K}$; bei der Berechnung der Korrektion genügt natürlich dieser runde Betrag). Das Verhältnis v/V braucht nur ungefähr abgeschätzt zu werden. Den überwiegenden Anteil von v liefert meist der schädliche Raum m in R_1 . Aus Gl. (9) kann α berechnet werden, wenn p , p_0 , t , $T_z = t_z + 273$, v und V bekannt sind.

Beispiel. Der Luftdruck betrug 75,15 cm Hg. Von einer Reduktion nach Tabelle IV ist aus dem gleichen Grunde wie bei der 14. Aufgabe abzusehen.

Der Stand des Quecksilbermeniskus auf der Skala in R_1 sei h_1 cm, in R_2 h_2 cm. Dann beträgt die Druckdifferenz zwischen innen und außen $|p'| = |h_2 - h_1|$ in der Einheit 1 cm Hg. Die Siedetemperatur des Wassers beträgt bei dem herrschenden Luftdruck $t = 99,67^\circ \text{C}$ (Tabelle III).

Wir machen bei beiden Temperaturen — indem wir das Quecksilber in R_1 jedesmal vorher ein wenig senken und dann wieder heben —, mindestens je fünf Messungen der Quecksilberstände h_1 und h_2 auf der Skala. (Zur Kontrolle kann auch die Höhenlage der Glasspitze in R_1 , die gleich h_1 sein soll, bei etwas gesenktem Quecksilbermeniskus gemessen werden.) Wir haben die in der

Tabelle wiedergegebenen Mittelwerte erhalten, die, wie sich aus den hier nicht wiedergegebenen Einzelmessungen von h_1 und h_2 ergibt, je mit einem mittleren Fehler Δh_1 bzw. Δh_2 von rund $\pm 0,01$ cm behaftet waren.

Tabelle.

t °C	h_1 cm	h_2 cm	p' cm Hg	p cm Hg
0,00	22,00	22,20	0,20	75,35
99,67	22,00	49,26	27,26	102,41

Aus den Abmessungen des Gefäßes und des schädlichen Raumes haben wir die folgenden Werte berechnet:

$$V = 138,5 \text{ cm}^3, \quad v = 0,56 \text{ cm}^3, \quad \frac{v}{V} = 0,00404.$$

Bei der Berechnung der Korrektur genügt natürlich die runde Angabe $t = 100^\circ \text{ C}$. Die Zimmertemperatur betrug $t_z = 18^\circ \text{ C}$, also $T_z = 291^\circ \text{ K}$, so daß $1/T_z = 0,00344$ und $v/V \cdot 1/T_z = 0,0000139$. Infolgedessen beträgt der Korrektionsfaktor der Gl. (9) mit $\beta = 0,0000243$ und $t \approx 100^\circ$

$$1 + 0,00243 + 0,00139 \approx 1,004.$$

Die Berechnung von α muß recht genau — nicht mit dem Rechenschieber — erfolgen. Aus Gl. (9) ergibt sich:

$$1 + \alpha t = \frac{102,41}{75,35} \cdot 1,004 = 1,3655 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{0,3655}{99,67} = 0,003667 \text{ Grad}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Wir wollen $1 + \alpha t = x$ setzen. Dann ist $\Delta x = t \Delta \alpha$ und $\Delta \alpha = \Delta x/t$. Bei der Fehlerrechnung wollen wir von den Fehlern der Größen im Korrektionsfaktor absehen, da sie, wie man leicht ausrechnen kann, zum Ergebnis nur etwa 2% beitragen und wir daher von ihnen einen wesentlichen Einfluß auf den Gesamtfehler nicht erwarten dürfen. Wir lassen also den Korrektionsfaktor in Gl. (9) ganz fort und rechnen mit der Näherungsgleichung

$$x = 1 + \alpha t \approx \frac{p}{p_0}. \quad (10)$$

Dann beträgt der relative Größtfehler von x

$$\frac{\Delta x}{x} = \pm \left(\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta p_0}{p_0} \right). \quad (11)$$

Die Drucke p und p_0 sind nach der Gleichung p bzw. $p_0 = p_b + p'$ berechnet worden, so daß ihre Größtfehler Δp bzw. $\Delta p_0 = \pm (\Delta p_b + \Delta p')$ betragen. p' ist in beiden Fällen nach der Gleichung $|p'| = |h_2 - h_1|$ berechnet worden, so daß $|\Delta p'| = \pm |(\Delta h_2 + \Delta h_1)|$. Es ist also mit $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \pm 0,01$ cm (s. oben) in beiden Fällen $\Delta p' = \pm 0,02$ cm Hg. Der äußere Luftdruck p_b ist auf $\pm 0,005$ cm Hg genau gemessen, so daß $\Delta p_b = \pm 0,005$ cm Hg. Es ist also Δp bzw. $\Delta p_0 = \pm 0,025$ cm Hg. Damit erhalten wir

$$\frac{\Delta x}{x} = \pm \left(\frac{0,025}{102,41} + \frac{0,025}{75,35} \right) \approx \pm (0,00025 + 0,00030) = \pm 0,00055,$$

so daß

$$\Delta x = \pm 1,3655 \cdot 0,00055 \approx \pm 0,00075$$

und

$$\Delta \alpha = \pm \frac{0,00075}{100} = \pm 0,0000075 \approx \pm 0,000008 \text{ Grad}^{-1}.$$

Damit erhalten wir das folgende Endergebnis:

$$\alpha = (0,003667 \pm 0,000008) \text{ Grad}^{-1} \text{ bzw. } 0,003667 \text{ Grad}^{-1} \pm 0,2 \text{ \%}.$$

Als zuverlässigster Wert für Luft gilt $\alpha = 0,003674 \text{ Grad}^{-1}$. Er liegt eben noch in den Fehlergrenzen unsrer Messung. Man beachte, daß die Abweichung unsres Ergebnisses von diesem Wert merklich größer ausgefallen wäre, wenn wir nicht die Korrekturen angebracht hätten, und wenn wir für t den runden Wert 100° C eingesetzt hätten.

16. Aufgabe. Luftdichte. Luftfeuchtigkeit

Literatur: W. § 112, 117; M.-P. Bd. I/2, S. 1199; K. S. 229.

I. Messung der Luftdichte

Wie bei allen anderen Stoffen, so erfordert auch die absolute Bestimmung der Dichte der Luft oder eines anderen Gases gemäß der Definition

$$\rho = \frac{m}{V} [\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}] \quad (1)$$

(1. Aufgabe) die Messung ihrer Masse m und ihres Volumens V . Wir bedienen uns dazu eines Pyknometers, das z. B. die in Abb. 29 dargestellte Gestalt haben kann, und dessen Volumen etwa 100 cm^3 beträgt. Es wird zunächst gründlich gereinigt, mit Alkohol ausgewaschen und durch Hindurchsaugen oder -blasen von Luft sehr gut getrocknet. Die beiden Hähne werden mit wenig Hahnfett gut gedichtet; der Schliff am Ende der einen Röhre wird ebenfalls leicht gefettet.

Wegen des oft im Laufe kurzer Zeit stark wechselnden Zustandes der Zimmerluft empfiehlt es sich, die Messung nicht mit solcher, sondern mit Außenluft vorzunehmen. Darum wird das Pyknometer zunächst evakuiert, z. B. mit einer gut wirkenden Kapselpumpe, die den Druck im Pyknometer mindestens auf Bruchteile von $0,1 \text{ cm Hg}$ herabsetzt. Zur Verbindung des Pyknometers mit der Pumpe dient der Schliff. Außerdem ist mit der Pumpe ein abgekürztes Quecksilbermanometer zur Kontrolle des Druckes verbunden. Nach dem Auspumpen wird der Schliff mit Xylol gut von Fett gereinigt, damit nicht die folgenden Wägungen dadurch verfälscht werden, daß etwa ein Teil des Fettes inzwischen abgewischt wird.

Nunmehr begeben wir uns ins Freie und füllen das Pyknometer durch Öffnen eines Hahnes mit Luft. Gleichzeitig messen wir die Temperatur der Außenluft. Mit dem Schließen des Hahnes warten wir ein wenig, damit die Luft im Pyknometer, die sich beim Einströmen ein wenig abkühlt, zuverlässig die gleiche Temperatur und den gleichen Druck hat wie die Außenluft. Dabei fassen wir das Pyknometer nur an den herausragenden Röhren an, um es nicht zu erwärmen. Ferner messen wir den Luftdruck mit einem etwa in der gleichen Höhenlage wie der Füllort befindlichen Barometer und reduzieren ihn, wenn wir recht genau verfahren wollen, nach Tabelle IV.

Nunmehr wird das Pyknometer mit einer guten Analysenwaage auf $0,0001 \text{ g}$ genau gewogen (7. Aufgabe), erneut gut evakuiert und dann noch einmal gewogen. Die Differenz der Wägungen

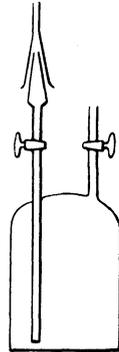


Abb. 29.
Pyknometer zur
Messung der
Dichte von
Gasen.

ergibt die Masse m der eingeschlossenen Luft. (Von einer Doppelwägung und einer Auftriebskorrektur kann abgesehen werden). Vor dem Evakuieren muß der Schliff wieder leicht gefettet, aber vor der zweiten Wägung wieder gut gereinigt werden. Schließlich füllen wir das Pyknometer mit Wasser, das am besten rechtzeitig vorher ausgekocht wurde, um es möglichst luftfrei zu machen. Die Füllung erfolgt, indem wir die Öffnung des bis an den Boden des Pyknometers führenden Rohres in das Wasser tauchen und den Hahn öffnen, so daß der Luftdruck das Wasser in das Pyknometer drückt. Wenn doch noch Luft aus dem Wasser frei wird, füllt man bis an die Hähne von außen nach. (Größere Luftmengen im Pyknometer zeigen an, daß entweder nicht genügend evakuiert wurde, oder daß das Pyknometer nicht dicht war. Beides ruft natürlich beträchtliche Fehler hervor.) Dann wird das mit Wasser gefüllte Pyknometer noch einmal mit einer größeren Waage auf 0,01 g genau gewogen. Die Massendifferenz des mit Wasser gefüllten und des leeren Pyknometers gibt uns die Masse des Wassers und damit unmittelbar die Maßzahl des Volumens V des Pyknometers.

Es seien m_1 , m_2 , m_3 die Ergebnisse der drei Wägungen, m die Masse der Luft, m_w die Masse des Wassers. Dann ist

$$m = m_1 - m_2, \quad (2)$$

$$|V| = |m_w| = |m_3 - m_2|. \quad (3)$$

Wir können also ρ nach Gl. (1) berechnen.

Beispiel. Fülltemperatur $t = 18,7^{\circ} \text{C}$, Luftdruck gemessen 74,44 cm Hg, reduziert nach Tab. IV $p_b = 74,22 \text{ cm Hg}$,

$$m_1 = 98,2371 \text{ g},$$

$$m_2 = 98,0046 \text{ g},$$

$$m_3 = 295,08 \text{ g}.$$

Demnach ist

$$m = m_1 - m_2 = 0,2325 \text{ g},$$

$$m_w = m_3 - m_2 = 197,08 \text{ g}, \text{ also } V = 197,08 \text{ cm}^3.$$

Damit ergibt sich nach Gl. (1):

$$\rho = \frac{0,2325}{197,08} = 0,001179 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

II. Umrechnung auf Normalbedingungen

Der von uns ermittelte Betrag der Luftdichte bezieht sich auf die zufälligen meteorologischen Verhältnisse (Temperatur, Luftdruck, Luftfeuchtigkeit) des Versuchstages. Wir wollen aus ihm den von diesen Verhältnissen unabhängigen Betrag der Dichte trockener Luft bei Normalbedingungen (0°C , $76,00\text{ cm Hg}$) berechnen. Wir dürfen dabei auf den in der Luft enthaltenen Wasserdampf wegen seiner geringen Dichte ebenso wie auf die Luft selbst mit genügender Genauigkeit die Zustandsgleichung der idealen Gase anwenden. Nach dieser besteht zwischen dem Druck p , der Dichte ϱ , der absoluten Temperatur T und dem Molekulargewicht M eines idealen Gases die Beziehung

$$\varrho = \frac{M p}{R T}, \quad (4)$$

wobei R die universelle Gaskonstante ist. Bei einem Gasgemisch ist für p der Partialdruck des betreffenden Gases einzusetzen.

Es seien p_l und p_w die Partialdrücke der Luft und des in ihr enthaltenen Wasserdampfes, ϱ_l und ϱ_w ihre Dichten, $M_l = 0,8 \cdot 28 + 0,2 \cdot 32 = 28,8$ und $M_w = 16 + 2 = 18$ ihre Molekulargewichte. Dann ist (mit $M_w/M_l = 18/28,8 = 5/8$)

$$\varrho_l = \frac{M_l p_l}{R T}, \quad \varrho_w = \frac{M_w p_w}{R T} = \varrho_l \frac{M_w}{M_l} \frac{p_w}{p_l} = \varrho_l \frac{5}{8} \frac{p_w}{p_l}. \quad (5)$$

Die Gesamtdichte des Gasgemisches — wie wir sie oben bestimmt haben — beträgt also

$$\varrho = \varrho_l + \varrho_w = \varrho_l \left(1 + \frac{5}{8} \frac{p_w}{p_l} \right), \quad \text{so daß} \quad \varrho_l = \frac{\varrho}{1 + \frac{5}{8} \frac{p_w}{p_l}}. \quad (6)$$

Nach Gl. (4) beträgt die Dichte der Luft bei Normalbedingungen ($p_l = p_0 = 76,00\text{ cm Hg}$, $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$, $T_0 = 273^{\circ}\text{K}$):

$$\varrho_0 = \varrho_l \frac{p_0}{p_l} \frac{T}{T_0} = \varrho \frac{p_0}{p_l} (1 + \alpha t) \frac{1}{1 + \frac{5}{8} \frac{p_w}{p_l}}. \quad (7)$$

Dabei haben wir $T/T_0 = (T_0 + t)/T_0 = 1 + t/T_0 = 1 + \alpha t$ gesetzt, wobei der genaue Wert für α bei einem idealen Gas $1/T_0 = 0,003661$ betragen würde. Wir erhalten ein genaueres Er-

gebnis, wenn wir den für Luft gültigen, ein wenig größeren Wert $\alpha = 0,003674$ wählen (vgl. die 15. Aufgabe).

Nun ist $p_i = p - p_w = p(1 - p_w/p)$. Da $p_w \ll p$, dürfen wir ferner mit genügender Näherung in dem Korrektionsgliede p_w/p_i durch p_w/p ersetzen. Damit erhalten wir aus Gl. (7):

$$\varrho_0 = \varrho \frac{p_0}{p} \frac{1 + \alpha t}{\left(1 - \frac{p_w}{p}\right) \left(1 + \frac{5}{8} \frac{p_w}{p}\right)}. \quad (8)$$

Da nun $p_w/p \ll 1$, so dürfen wir schließlich statt dessen schreiben [Einl. § 6, Gl. (2) und (3)]:

$$\varrho_0 = \varrho \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t) \left(1 + \frac{3}{8} \frac{p_w}{p}\right). \quad (9)$$

Den Partialdruck des Dampfdrucks bestimmen wir aus dem Taupunkt, indem wir die Temperatur ermitteln, bei welcher der in der untersuchten Luft enthaltene Wasserdampfgehalt der Sättigung entspricht und zu kondensieren beginnt. Die Sättigungsdrucke für die verschiedenen Temperaturen sind aus Tabellen zu entnehmen (Tabelle II), so daß auf diese Weise p_w ermittelt werden kann. (Daß der Taupunkt tiefer liegt als die Meßtemperatur, so daß der Druck p_w bei dieser Temperatur tatsächlich etwas höher ist, spielt keine ins Gewicht fallende Rolle. Ist die Wasserdampfdichte groß, so liegt der Taupunkt dicht bei der Meßtemperatur; ist sie klein, so ist er weiter entfernt, aber dann ist auch der Einfluß der Korrektion sehr gering.)

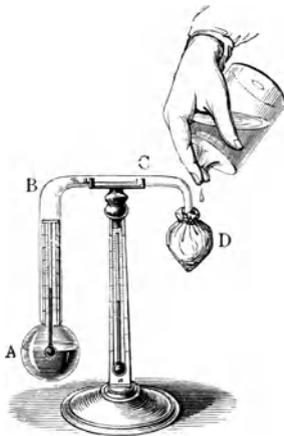


Abb. 30. Taupunkthygrometer.

Zur Ermittlung des Taupunktes benutzen wir ein Taupunkthygrometer, das z. B. die in Abb. 30 dargestellte Gestalt haben kann. Das —

im übrigen gut evakuierte — Gefäß enthält in *A* flüssigen Äther. Die Kugel *D* ist mit einem Mullappen umhüllt, der mit Äther getränkt wird. Dieser verdampft schnell, und infolgedessen wird *D* stark abgekühlt. Das hat weiter die Folge,

daß innen in D Ätherdampf kondensiert wird. Dadurch wird dem Raum Ätherdampf entzogen, so daß sich durch Verdampfen von flüssigem Äther in A der Sättigungszustand des Ätherdampfes wieder herzustellen sucht. Infolgedessen kühlt sich aber der Äther in A und damit auch die Außenwand der Kugel A ab. Man treibt nun die Abkühlung — die man durch Blasen gegen den mit Äther getränkten Mull befördern kann — so weit, bis man an der verspiegelten Außenseite von A die ersten Spuren von Taubildung bemerkt, und liest die Temperatur an dem in A befindlichen Thermometer ab. Zweckmäßig wartet man dann, bis gerade die letzten Spuren von Tau wieder verschwinden, liest erneut die Temperatur ab und nimmt als Taupunkt das Mittel zwischen diesen beiden Temperaturen. Bei einiger Übung stimmen sie auf wenige Zehntelgrade überein.

Selbstverständlich muß diese Messung dort vorgenommen werden, wo das Pyknometer gefüllt wurde, also im Freien, und es darf zwischen der Füllung und der Messung der Luftfeuchtigkeit keine allzu lange Zeit verstrichen und nicht etwa gar Regen gefallen sein.

Als Nebenergebnis erhalten wir die relative Feuchtigkeit der Luft am Versuchstage, d. h. das Verhältnis des herrschenden Wasserdampfdruckes p_w zu demjenigen Druck, der bei der Versuchstemperatur bei vollkommener Sättigung der Luft mit Wasserdampf herrschen würde.

Beispiel (Fortsetzung der obigen Messung). Der Taupunkt ergab sich aus $1,7^0$ (erster Beschlag) und $2,2^0$ (Verschwinden des Beschlages) im Mittel zu $1,95^0 \approx 2^0$. Wir entnehmen dazu aus Tabelle II den Wasserdampfdruck $p_w = 0,53$ cm Hg. Der Sättigungsdruck bei der Versuchstemperatur von $18,7^0$ beträgt nach Tabelle II $1,62$ cm Hg. Die relative Feuchtigkeit betrug also am Versuchstage $0,53/1,62 \approx 0,33 = 33\%$.

Mit $p_w = 0,53$ cm Hg und $p = 74,22$ cm Hg erhalten wir

$$1 + \frac{3}{8} \frac{p_w}{p} = 1,0027.$$

Ferner ist mit $t = 18,7^0$ und $\alpha = 0,003674$ (s. oben)

$$1 + \alpha t = 1,0687.$$

Mit $\varrho = 0,001179 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ und $p_0 = 76,00 \text{ cm Hg}$ erhalten wir schließlich

$$\varrho_0 = 0,001179 \frac{76,00}{74,22} \cdot 1,0687 \cdot 1,0027 = 0,001293 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Fehlerrechnung. Wir beginnen mit dem Fehler der unmittelbar gemessenen Dichte ϱ , die wir nach der Gleichung $\varrho = m/V = (m_1 - m_2)/V$ berechnet haben, so daß ihr relativer Größtfehler

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \pm \left(\frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 - m_2} + \frac{\Delta V}{V} \right) \quad (10)$$

beträgt. Wir haben bei der 7. Aufgabe festgestellt, daß die Wägungen mit unsrer Analysenwaage etwa auf $\pm 0,0001 \text{ g}$ genau sind, so daß wir auch hier $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \pm 0,0001 \text{ g}$ setzen wollen. Das Volumen V ist aus der Massendifferenz $m_3 - m_2$ bestimmt, und sein relativer Größtfehler ist gleich dem relativen Fehler $\pm (\Delta m_3 + \Delta m_2)/(m_3 - m_2)$ dieser Differenz. Der absolute Fehler von m_2 ist offensichtlich viel kleiner als derjenige von m_3 , so daß wir ausreichend genau $\Delta V/V = \Delta m_3/(m_3 - m_2)$ setzen können. Da m_3 auf $0,01 \text{ g}$ gemessen ist, so können wir seinen Fehler auf $\pm 0,005 \text{ g}$ schätzen und wir erhalten $\Delta V/V = \pm 0,005/197 \pm 0,000025$, was zu vernachlässigen ist. Dann folgt aus Gl. (8):

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \pm \frac{0,0002}{0,2325} \approx \pm 0,0008.$$

Die Korrektur wegen des Wasserdampfgehalts macht nur $0,3\%$ aus. Ein etwaiger Fehler der Größe p_w/p hat also auf den Gesamtfehler nur einen verschwindend kleinen Einfluß, so daß wir bei der Berechnung des Fehlers von ϱ_0 von dem Korrektionsglied absehen und mit der Näherungsgleichung

$$\varrho_0 \approx \varrho \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t) \quad (11)$$

rechnen dürfen. Der Luftdruck p ist auf $\pm 0,005 \text{ cm Hg}$ genau abgelesen worden, so daß sein relativer Fehler nur $\pm 0,005/74,22 \approx \pm 0,00007$ beträgt, also vernachlässigt werden darf. Dann beträgt der relative Größtfehler von ϱ_0 nach Gl. (11):

$$\frac{\Delta \varrho_0}{\varrho_0} = \pm \left(\frac{\Delta \varrho}{\varrho} + \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha t} \right). \quad (12)$$

Die Genauigkeit unserer Temperaturmessung schätzen wir auf $\pm 0,1^{\circ}$, so daß

$$\frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha t} = \pm \frac{0,1 \cdot 0,003674}{1,0687} \approx \pm 0,00035.$$

Es ergibt sich also:

$$\frac{\Delta \varrho_0}{\varrho_0} = \pm (0,0008 + 0,00035) \approx \pm 0,0012 = \pm 0,12\%.$$

Wenn wir dies vorsichtig auf $\pm 0,15\%$ aufrunden, erhalten wir das Endergebnis:

$$\underline{\underline{\varrho_0 = (0,001293 \pm 0,000002) \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \text{ bzw. } 0,001293 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}}}$$

$$\underline{\underline{\pm 0,15\%}}$$

Das stimmt zufällig genau mit dem zuverlässigsten Wert der Luftdichte bei Normalbedingungen überein.

Die Angabe eines so kleinen Fehlers ist natürlich nur dann vertretbar, wenn die ganze Messung mit der äußersten Sorgfalt vorgenommen wurde. Häufig vorkommende Fehlerquellen sind Undichtigkeit oder schlechte Evakuierung des Pyknometers, die zu einem zu kleinen Wert der Luftdichte führen, und vor allem mangelhafte Entfernung des Hahnfettes vom Schliff des Pyknometers vor den Wägungen.

Nicht berücksichtigt haben wir den Umstand, daß wir Wasser verwendet haben, dessen Dichte nicht ganz genau $1,0000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ betrug, weil es erstens nicht die Temperatur 4°C hatte und zweitens nicht destilliert war. Da aber beide Einflüsse nur sehr gering sind und ohnedies einander entgegenwirken, so können sie zum Gesamtfehler auch nur sehr wenig beigetragen haben.

17. Aufgabe. Akustische Messungen

Literatur: W. § 83, 87; M.-P. Bd. I/3, S. 380, 391; K. S. 114.

Zwischen der Geschwindigkeit c einer Welle, ihrer Wellenlänge λ und ihrer Schwingungszahl ν besteht die Beziehung

$$c = \lambda \nu. \quad (1)$$

Bei gleicher Schwingungszahl ν gilt also für zwei verschiedene Stoffe

$$c = \lambda \nu, \quad c' = \lambda' \nu \quad \text{oder} \quad \frac{c}{c'} = \frac{\lambda}{\lambda'}. \quad (2)$$

Man kann daher aus dem Verhältnis λ/λ' der Wellenlängen in den beiden Stoffen die Wellengeschwindigkeit in dem einen Stoff berechnen, wenn diejenige in dem andern Stoff bekannt ist.

Ein einfaches Verfahren zur Messung von Wellenlängen liefern die stehenden Wellen, in denen Knoten und Bäuche der Schwingung in Abständen von je $1/4$ Wellenlänge aufeinander folgen, so daß zwischen je zwei Knoten bzw. je zwei Bäuchen ein Abstand von $1/2$ Wellenlänge besteht. Bei Gasen kann man die Orte der Knoten und Bäuche nach dem Verfahren der Kundtschen Staubfiguren kenntlich machen und auf diese Weise die Wellenlänge ermitteln. Das Gas befindet sich in einer Glasröhre von etwa 100 cm Länge, die an ihrem einen Ende geschlossen ist (Abb. 31). In das offene Ende ragt ein am Ende mit einer leichten

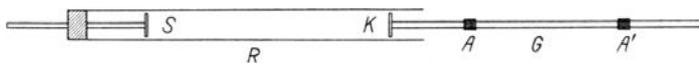


Abb. 31. Kundtsche Röhre.

Scheibe versehener, etwa 150 cm langer Metall- oder Glasstab. Dieser ist entweder bei A und A' in $1/4$ und $3/4$ seiner Länge oder nur in seiner Mitte fest eingespannt. Er kann durch Reiben mit einem mit Kolophonimpulver bestreuten oder feuchten Filz oder Lappen zu Longitudinalschwingungen erregt werden, wobei er einen hohen Ton von sich gibt. Bei Einklemmung wie in Abb. 31 ist die Wellenlänge seiner Grundschwingung gleich seiner Länge, bei Einklemmung in der Mitte gleich seiner doppelten Länge. Die Schwingungszahl ν ist also im ersten Fall doppelt so groß, der Ton um eine Oktave höher als im zweiten.

Die Stabschwingung wird durch die Scheibe als Schall auf das Gas in der Röhre übertragen und erzeugt infolge der Reflexion der Schallwellen am anderen Ende in der Röhre eine stehende Welle. Längs der Röhre ist feines Korkpulver recht gleichmäßig verteilt. (Man versuche, mit möglichst wenig Korkpulver auszukommen, da sich die Staubfiguren dann am saubersten ausbilden. Auch muß die Röhre und das Pulver gut trocken sein.)

Zunächst wird das Pulver durch Klopfen von den Wänden gelöst, so daß es einen Streifen unten in der Röhre bildet. Dieser wird dann durch vorsichtiges Drehen der Röhre um 45 bis 60° um ihre Achse gehoben. Wird jetzt durch Reiben des Stabes in der Röhre eine stehende Welle erregt, so fällt das Pulver in den Schwingungsbäuchen herab und bleibt in den Schwingungsknoten liegen (Abb. 32). Die Knoten sind wesentlich schärfer ausgeprägt als die Bäuche und werden deshalb allein zur Messung verwendet. Die stehende Welle bildet sich am besten aus, wenn der Abstand des Stabendes vom Röhrenende bzw. dem verschiebbaren Stempel S gleich $\left(z + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$ ist, wobei z eine ganze Zahl ist. Man erreicht dies durch Probieren, indem man die Röhre (oder den Stempel) so lange verschiebt, bis gute Staubfiguren entstehen, bei denen

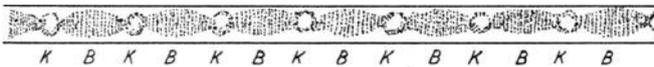


Abb. 32. Kundtsche Staubfiguren.

man die Lage der zur Messung benutzten Knoten ungefähr auf $\pm 0,1$ cm genau messen kann. Die Wellenlänge ist ziemlich klein gegen die Länge der Röhre, so daß auf sie eine größere Zahl von Knoten und Bäuchen entfällt. Man wählt zwei möglichst weit auseinanderliegende, recht gut ausgebildete Knoten aus und mißt ihren Abstand a mit Hilfe eines neben der Röhre liegenden, in mm geteilten Maßstabes und einer einfachen Visiervorrichtung. Entfallen n Halbwellen auf den Abstand a , so ist $a = n\lambda/2$ oder

$$\lambda = \frac{2a}{n}. \quad (3)$$

Jede Messung ist fünf- bis zehnmal anzustellen, indem die Staubfiguren jedesmal neu erzeugt werden. Es empfiehlt sich, vor jeder neuen Ablesung den Maßstab gegen die Röhre zu verschieben, um andere Zahlenwerte zu erhalten und psychologische Nachwirkungen der vorhergehenden Messungen zu vermeiden (Einl. § 13).

Wir messen auf diese Weise zunächst die Wellenlänge unsres Schalles in Luft. Dann leiten wir durch ein enges, durch das geschlossene Röhrenende eingeführtes Rohr Kohlensäure aus

einem Kippschen Apparat, die in einer Vorlage getrocknet ist, in langsamem Strom durch die Röhre und wiederholen unsre Messungen. (Die langsame Strömung hat keinen für uns merklichen Einfluß auf die Schallgeschwindigkeit.)

Für ein ideales Gas läßt sich die Schallgeschwindigkeit nach der Gleichung

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \quad (4)$$

berechnen. Dabei ist $R = 8,314 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{Grad}^{-1}$ die allgemeine Gaskonstante im CGS-System, $T = 273 + t$ die absolute Temperatur des Gases, M sein Molekulargewicht und $\kappa = c_p/c_v$ das Verhältnis seiner spezifischen Wärme c_p bei konstantem Druck zu seiner spezifischen Wärme c_v bei konstantem Volumen. Wir wollen sowohl die Luft wie die Kohlensäure wie ideale Gase behandeln, da der dadurch verursachte Fehler nicht allzu groß ist.

Unsre Aufgabe ist die folgende:

1. Wir berechnen die Schallgeschwindigkeit c_0 in Luft bei 0^0 C , also bei $T = 273^0 \text{ K}$ nach Gl. (4). Für Luft als nahezu ideales, zweiatomiges Gas ist $\kappa = 7/5 = 1,40$; ferner ist $M = 0,8 \cdot 28 + 0,2 \cdot 32 = 28,8$. Damit ergibt sich

$$c_0 = \sqrt{\frac{8,314 \cdot 10^7 \cdot 273}{28,8}} = 33130 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Die Schallgeschwindigkeit bei der absoluten Temperatur T ergibt sich dann aus derjenigen bei 0^0 C nach Gl. (4) zu

$$c = c_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} = c_0 \sqrt{\frac{273 + t}{273}} = c_0 \sqrt{1 + \alpha t}, \quad (5)$$

mit $\alpha = 1/273$.

Wir messen nunmehr die Wellenlänge unsres Schalles in Luft und berechnen aus ihr und der berechneten Schallgeschwindigkeit die Schwingungszahl ν unsres Schalles nach Gl. (1). Das ist unser erstes Ergebnis.

2. Wir messen die Wellenlänge in Kohlensäure bei möglichst genau der gleichen Versuchstemperatur wie in Luft. Es seien jetzt c die Schallgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge in Kohlen-

säure, c' und λ' diejenigen in Luft. Da t in beiden Fällen gleich groß sein soll, so folgt aus Gl. (2) und (5):

$$\frac{c}{c'} = \frac{c_0}{c'_0} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad \text{oder} \quad c_0 = c'_0 \frac{\lambda}{\lambda'}. \quad (6)$$

Wir erhalten so unmittelbar die Schallgeschwindigkeit in Kohlensäure bei 0°C , die unser zweites Ergebnis darstellt.

3. Mit seiner Hilfe berechnen wir für Kohlensäure die Größe z nach Gl. (4),

$$z = \frac{c^2 M}{RT} \quad (7)$$

mit $c = c_0$, $T = T_0 = 273^\circ \text{K}$ und $M = 12 + 32 = 44$. Dies ist unser drittes Ergebnis.

4. Nach Newton beträgt die Geschwindigkeit longitudinaler Wellen in einem festen Stoff

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}, \quad (8)$$

wenn E der in der Einheit $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ gemessene Elastizitätsmodul des Stoffes (3. Aufgabe) und ρ seine Dichte ist. Man kann also E aus c und ρ berechnen. Nun ist die Schwingung unsres Stabes als eine in ihm verlaufende stehende Welle aufzufassen, die an den Einspannungsstellen Knoten und in der Mitte und an den freien Enden Bäuche hat. (Bei Einklemmung in der Mitte nur dort einen Knoten und nur an den Enden Bäuche.) Daher ist die Stablänge L gleich der Wellenlänge dieser Welle im Stab (bei Einklemmung in der Mitte gleich der halben Wellenlänge), so daß nach Gl. (1) $c = L\nu$. Bezeichnen wir wieder die auf Luft bezogenen Größen mit c' und λ' , so ist nach Gl. (2) bei gleichem Betrag von ν

$$c = c' \frac{L}{\lambda'}. \quad (9)$$

Wir können also aus der oben für unsre Versuchstemperatur berechneten Schallgeschwindigkeit in Luft und der gemessenen Wellenlänge in Luft die Schallgeschwindigkeit im Stabe und damit auf Grund von Gl. (8) seinen Elastizitätsmodul

$$E = c^2 \rho \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2} \quad (10)$$

berechnen, den wir dann noch in die meist verwendete Einheit $1 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} = 0,981 \cdot 10^8 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ umrechnen. Das ist unser viertes Ergebnis.

Beispiel. Die Versuchstemperatur betrug $18,0^0 \text{ C}$. Wir bezeichnen mit x_1 und x_2 die den Enden der jeweiligen Meßstrecke a entsprechenden Ablesungen auf der Skala, die wir vor jeder Messung blindlings etwas verschoben haben. Es ist also $a = x_2 - x_1$. n ist die Zahl der auf a entfallenden Halbwellen. Tabelle 1 zeigt unsre Messungen in Luft. Wir geben dort auch die aus den Einzelmessungen berechneten Werte von $\lambda/2 = a/n$ an, die unter sich sehr gut übereinstimmen. Wir haben x_1 und x_2 auf $0,05 \text{ cm}$ genau abgelesen.

Tabelle 1.

x_1 cm	x_2 cm	a cm	n	$\lambda/2$ cm
23,70	90,00	66,30	13	5,10
20,10	91,45	71,35	14	09
17,75	94,60	76,85	15	12
20,10	96,70	76,60	15	11
18,00	94,60	76,60	15	11
8,55	95,35	86,80	17	10
7,50	94,30	86,80	17	10
13,45	89,95	76,50	15	10
12,70	94,65	81,95	16	12
18,25	90,05	71,80	14	13
		771,55	151	

Bei der guten Übereinstimmung der Werte von $\lambda/2$ wäre an sich kaum etwas dagegen einzuwenden, wenn wir aus den obigen Werten einfach das Mittel (5,108 cm) nehmen wollten. Grundsätzlich ist es aber richtiger — und bei größeren Schwankungen unbedingt zu empfehlen, obendrein auch viel bequemer —, anders zu verfahren. Die Einzelwerte von a werden mit kleinen absoluten Fehlern von wechselndem Betrage und wechselndem Vorzeichen, aber gleicher Größenordnung behaftet sein, die sich auf positive und negative Werte etwa gleichmäßig verteilen werden. Bilden wir die Summe Σa sämtlicher a -Werte, so heben sich diese Fehler in der Summe sehr weitgehend gegenseitig auf, und der absolute Fehler der Summe wird nur von der gleichen Größenordnung sein, wie der durchschnittliche absolute Fehler der einzelnen

a -Werte, so daß die relative Genauigkeit der Summe viel größer ist als diejenige der Einzelwerte. Diese Summe teilen wir dann durch die Summe Σn aller n -Werte und berechnen λ nicht nach Gl. (3), sondern nach der entsprechenden Gleichung

$$\lambda = 2 \frac{\Sigma a}{\Sigma n}. \quad (11)$$

Das Verfahren kommt etwa auf das gleiche hinaus, als wenn wir die Wellenlänge ein einziges Mal längs einer Meßstrecke Σa gemessen hätten, auf die dann Σn Halbwellen entfallen wären. Im übrigen werden bei diesem Verfahren die Einzelmessungen genau nach ihrem Gewicht zur Mittelwertbildung herangezogen (Einl. § 10), das, wie man leicht sieht, bei gleicher Größenordnung der absoluten Fehler unmittelbar der Länge von a , also auch der Zahl n , proportional ist. Infolgedessen erhalten wir mit $\Sigma a = 771,55$ cm und $\Sigma n = 151$:

Luft :
$$\lambda = 2 \frac{771,55}{151} = 10,215 \text{ cm.}$$

Mit $t = 18,0^\circ$ C ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit nach Gl. (5) $c = 34200$ cm · sec⁻¹. Dann folgt aus Gl. (1):

$$\nu = \frac{34200}{10,215} = 3351 \text{ Hz.}$$

Tabelle 2 zeigt unsre Messungen in Kohlensäure, die wir genau ebenso ausgeführt und ausgewertet haben wie diejenigen in Luft.

Tabelle 2.

x_1 cm	x_2 cm	a cm	n	$\lambda/2$ cm
19,00	94,20	75,20	19	3,97
18,40	89,70	71,30	18	96
17,95	93,10	75,15	19	95
19,00	90,10	71,10	18	95
15,65	79,20	63,55	16	97
23,55	90,90	67,35	17	96
14,75	89,80	75,05	19	95
25,05	88,65	63,60	16	97
20,10	79,65	59,55	15	97
14,95	94,15	79,20	20	96
		701,05	177	

Demnach beträgt die Wellenlänge unsres Schalles in Kohlensäure bei 18,0° C:

$$\lambda = 2 \frac{701,05}{177} = 7,922 \text{ cm.}$$

Damit erhalten wir für die Schallgeschwindigkeit in Kohlensäure bei 0° C nach Gl. (6):

$$\text{Kohlensäure: } c_0 = 33130 \frac{7,922}{10,215} = 25690 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Weiter folgt aus Gl. (7) mit den dort angegebenen Zahlenwerten:

$$\kappa = \frac{25690^2 \cdot 44}{8,314 \cdot 10^7 \cdot 273} = 1,278.$$

Zur Schallerzeugung haben wir ein Stahlrohr von der Länge $L = 149,9$ cm benutzt. Nach Gl. (9) beträgt also die Schallgeschwindigkeit in ihm:

$$\text{Stahl: } c = 34200 \frac{149,9}{10,215} = 503000 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Die Dichte des Stahls wird rund zu $7,7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ angegeben. Dann beträgt sein Elastizitätsmodul nach Gl. (10)

$$E = 0,503^2 \cdot 10^{12} \cdot 7,7 = 1,950 \cdot 10^{12} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$$

oder

$$E = \frac{1,950 \cdot 10^{12}}{0,981 \cdot 10^8} = 19890 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2},$$

ein Wert, der mit dem runden Tabellenwert $20000 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2}$ gut übereinstimmt.

Fehlerrechnung. Nach Gl. (11) beträgt der relative Fehler der Wellenlänge in Luft:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \pm \frac{\Delta \Sigma a}{\Sigma a}. \quad (12)$$

Wir haben oben ausgeführt, daß der absolute Fehler von Σa von der gleichen Größenordnung ist wie die absoluten Fehler der Einzelwerte a . Man kann leicht feststellen, daß diese Einzelwerte von denjenigen Werten, die man mit dem berechneten Mittelwert von λ bildet, um Beträge bis zu $\pm 0,3$ cm abweichen. Um

vorsichtig zu sein, wollen wir deshalb für Σa einen absoluten Fehler von ± 1 cm annehmen und erhalten dann

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \pm \frac{1}{772} \approx \pm 0,0013 = \pm 0,13\%.$$

Ziemlich genau das gleiche ergibt sich bei der Kohlensäure. Wir wollen für beide Gase mit dem abgerundeten Fehler $\pm 0,15\%$ rechnen.

Der relative Größtfehler von $\nu = c/\lambda$ beträgt

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \pm \left(\frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right), \quad (13)$$

c ist nach der Gleichung $c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t}$ berechnet. Nehmen wir einen Fehler in der Temperatur von $\pm 0,1^\circ$ an, so berechnet man leicht, daß der relative Fehler $\Delta c/c$ so klein ist, daß man ihn vernachlässigen kann. Mit $\Delta \lambda/\lambda = \pm 0,15\%$ erhalten wir demnach

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \pm 0,15\%.$$

Der relative Größtfehler der Schallgeschwindigkeit c_0 in Kohlensäure ergibt sich nach Gl. (6) zu

$$\frac{\Delta c_0}{c_0} = \pm \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta \lambda'}{\lambda'} \right) = \pm 2 \cdot 0,15\% = \pm 0,3\%.$$

Der relative Fehler von κ beträgt nach Gl. (7), da außer c alle andern Größen vorgegeben sind,

$$\frac{\Delta \kappa}{\kappa} = \pm 2 \frac{\Delta c}{c} = \pm 0,6\%,$$

da für c hier der Wert c_0 der Kohlensäure eingesetzt wurde, dessen relativen Fehler wir zu $0,3\%$ berechneten.

Beim Stahl beruht die Unsicherheit unsres Ergebnisses ganz überwiegend auf der Unsicherheit der Dichte ρ . Wir können diese auf etwa $\pm 0,05 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ schätzen. Sehen wir zunächst von einem Fehler von c ab, so beträgt der relative Fehler von E nach Gl. (10) $\Delta E/E = \pm \Delta \rho/\rho = \pm 0,05/7,7 = \pm 0,0065 = \pm 0,65\%$. Mit Rücksicht auf die weiteren kleinen Fehlerquellen wollen wir dies auf $\pm 1\%$ aufrunden.

Demnach lauten unsere Endergebnisse, die wir entsprechend abrunden,

$$\nu = (3350 \pm 5) \text{ Hz} \quad \text{bzw.} \quad 3350 \text{ Hz} \pm 0,15 \%,$$

Kohlensäure: $c_0 = (25690 \pm 75) \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$

bzw. $25690 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1} \pm 0,3 \%$,

$z = (1,28 \pm 0,01) \quad \text{bzw.} \quad 1,28 \pm 0,6 \%$,

Stahl:

$E = (19900 \pm 200) \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} \quad \text{bzw.} \quad 19900 \text{ kg}^* \cdot \text{mm}^{-2} \pm 1 \%$.

Zu den Werten für Kohlensäure ist einschränkend zu bemerken, daß sie unter der Voraussetzung des idealen Gaszustandes berechnet wurden, von dem die Kohlensäure ziemlich weit entfernt ist. Darum enthalten die obigen Werte zweifellos noch einen systematischen Fehler. Der Tabellenwert von z beträgt tatsächlich 1,30.

IV. Optik

18. Aufgabe. Brennweite dünner Linsen

Literatur: W. § 274, 275; M.-P. Bd. II/1, S. 169 ff.; K. S. 293, 303.

Erzeugt eine dünne Sammellinse von einem Gegenstand, der sich im Abstand g von ihr befindet, ein reelles Bild im Abstand b von der Linse, so gilt die Linsengleichung:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{bg}{b+g}. \quad (1)$$

Dabei verstehen wir unter einer dünnen Linse eine solche, deren Dicke klein ist gegen die Krümmungsradien ihrer Begrenzungsflächen und daher auch klein gegen die Größe f , die man als die Brennweite der Linse bezeichnet. Die Größe

$$D = \frac{100}{f}, \quad (2)$$

in der f in cm zu messen ist, heißt die Brechkraft der Linse, ihre Einheit 1 Dioptrie.

I. Messung der Brennweite aus der Gegenstands- und Bildentfernung

Ein Verfahren zur Bestimmung der Brennweite einer Sammellinse besteht in der Messung von g und b und der Berechnung von f nach Gl. (1). Zu diesem Zweck benutzen wir eine mit einer mm-Teilung versehene optische Bank von 200 cm Länge. Im Nullpunkt der Teilung befindet sich der abzubildende Gegenstand, z. B. ein von hinten beleuchtetes Stückchen einer photographischen Platte mit einer geeigneten Struktur, etwa einem in die geschwärzte Schicht geritzten Strichmuster. Die zu untersuchende Linse befindet sich in einer Fassung und kann auf einem Schlitten längs der optischen Bank verschoben werden. Ferner brauchen wir zum Auffangen des Bildes einen weißen Schirm, der ebenfalls auf einem verschiebbaren Schlitten sitzt, und der bis auf die Skala hinabreicht,

so daß sein Ort auf ihr genau ablesbar ist. Bei den Messungen verfährt man am besten so, daß man den Schirm auf feste, runde Abstände vom Gegenstand bringt und den Linsenschlitten zwischen beiden so lange verschiebt, bis das Bild des Gegenstandes auf dem Schirm scharf ist. Da die Beurteilung der erreichten Schärfe mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist, wiederholen wir jede einzelne Einstellung mindestens fünfmal.

Der Linsenschlitten wird oft keine besondere Marke tragen, die den genauen Ort der Linse auf ihm angibt. In diesem Fall verfährt man so, daß man am einen Rand des Schlittens — dort wo er auf der Skala aufsitzt — abliest. Dann dreht man den Schlitten um 180° und liest erneut am gleichen Rande ab, also einmal rechts, dann links am Schlitten, und nimmt das Mittel aus den beiden Ablesungen, das, wie ohne weiteres ersichtlich, dem Ort der Linse selbst entsprechen muß. Wir werden die beiden Ablesungen mit g' und g'' bezeichnen. Die wirkliche Gegenstands-entfernung, die ja infolge der Aufstellung des Gegenstandes im Nullpunkt mit der Ortskoordinate der Linse identisch ist, erhalten wir dann als den Mittelwert $g = (g' + g'')/2$.

Um die Linsengleichung zu prüfen, müssen wir mehrere Messungen bei verschiedenen Gegenstands-entfernungen anstellen. Bei gegebenem Abstand $a = b + g$ des Gegenstandes vom Schirm, der größer als $4f$ sein muß, gibt es zwei Linsenlagen, bei denen ein reelles Bild entsteht, ein vergrößertes, wenn $g < b$, ein verkleinertes, wenn $g > b$. Diese beiden Linsenorte liegen zur Mitte von a symmetrisch. Bezeichnen wir die beiden Gegenstands-entfernungen mit g_1 und g_2 , die zugehörigen Bildentfernungen mit b_1 und b_2 , so ist demnach

$$b_1 = g_2, \quad b_2 = g_1 \quad (3)$$

und

$$b_1 + g_1 = b_2 + g_2 = g_1 + g_2 = a. \quad (4)$$

Wir wollen bei jeder Lage des Schirms jeweils g_1 und g_2 bestimmen. Wir erhalten sie als die Mittelwerte

$$g_1 = (g'_1 + g''_1)/2 \quad \text{und} \quad g_2 = (g'_2 + g''_2)/2, \quad (5)$$

wie soeben ausgeführt.

Beispiel. In Tabelle 1 geben wir eine Einzelmessung ausführlich wieder, in Tabelle 2 nur die Mittelwerte der weiteren

Einzelmessungen bei verschiedenen Abständen $a = g + b$. Die Schlittenlagen sind auf 0,05 cm genau abgelesen. Der Gegenstand befindet sich bei unsern Messungen stets im Nullpunkt der Skala.

Tabelle 1.

a cm	g'_1 cm	g''_1 cm	g'_2 cm	g''_2 cm
165,0	93,35	101,5	64,55	70,9
	3,8	0,95	4,4	0,85
	3,7	1,4	3,95	1,15
	3,6	0,7	4,3	1,3
	3,55	0,85	4,55	0,75
	93,60	101,08	64,34	70,99

Aus Tabelle 1 ergibt sich nach Gl. (3) und (5) $g_1 = b_2 = 97,34$ cm, $g_2 = b_1 = 67,67$ cm, und damit nach Gl. (1) $f = 39,92$ cm.

Tabelle 2.

a cm	g'_1 cm	g''_1 cm	g'_2 cm	g''_2 cm	g_1 cm	g_2 cm
165,0	93,60	101,08	64,34	70,99	97,34	67,67
170,0	102,33	109,35	60,28	67,27	105,84	63,78
175,0	109,57	116,84	57,85	64,48	113,21	61,17
180,0	116,67	123,59	56,09	62,92	120,13	59,51
185,0	123,16	130,10	54,56	61,53	126,63	58,05

Zu jedem Wert g_1 bzw. g_2 können wir nach Gl. (4) einen Wert b_1 bzw. b_2 berechnen, der mit dem entsprechenden Wert g_2 bzw. g_1 übereinstimmen sollte. Das ist bei unsern Messungen angenähert, aber nicht genau erfüllt. Die so berechneten Werte sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

Tabelle 3.

a cm	g_1 cm	b_1 cm	g_2 cm	b_2 cm	g cm	b cm	f cm	
165,0	97,34	67,66	67,67	97,33	97,34	67,66	39,92	+2 4
170,0	105,84	64,16	63,78	106,22	106,03	63,97	90	0 0
175,0	113,21	61,79	61,17	113,83	113,52	61,48	88	-2 4
180,0	120,13	59,87	59,51	120,49	120,31	59,69	90	0 0
185,0	126,63	58,37	58,05	126,95	126,79	58,21	90	0 0
							39,90	8

Wegen der Beziehung Gl. (3) haben wir hier g_1 und b_2 zum Mittelwert g und g_2 und b_1 zum Mittelwert b zusammengefaßt und

aus ihnen nach Gl. (1) die Brennweite berechnet. Die fünf Werte stimmen sehr gut überein und ergeben im Mittel

$$f = 39,90 \text{ cm} \quad \text{und} \quad D = \frac{100}{39,90} = 2,506 \text{ Dioptrien.}$$

Fehlerrechnung. Wir wollen aus der Streuung unsrer f -Werte den mittleren Fehler von f nach Einl. § 9, Gl. (1), berechnen. Tabelle 3 enthält die nötigen Angaben in Einheiten der 2. Dezimale. Es ergibt sich als mittlerer absoluter Fehler

$$\begin{aligned} \Delta f &= \pm \sqrt{\frac{8}{4 \cdot 5}} = \pm 0,63 \approx \pm 1 \text{ Einheit der 2. Dezimale} \\ &= \pm 0,01 \text{ cm,} \end{aligned}$$

und als mittlerer relativer Fehler

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm \frac{0,01}{39,90} \pm 0,00025 = \pm 0,025 \%$$

Der relative Fehler von D ergibt sich nach Gl. (2) zu $\Delta D/D = \pm \Delta f/f = \pm 0,025 \%$.

Unser Endergebnis lautet also

$$\underline{f = (39,90 \pm 0,01) \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad 39,90 \text{ cm} \pm 0,025 \%}$$

$$\underline{D = (2,506 \pm 0,001) \text{ Dioptrien} \quad \text{bzw.} \quad 2,506 \text{ Dioptrien} \pm 0,025 \%}$$

II. Weitere Prüfung der Linsengleichung

Obleich die sehr gute Übereinstimmung der unter verschiedenen Bedingungen gemessenen f -Werte bereits eine ausgezeichnete Bestätigung der Gl. (1) liefert, wollen wir sie einer weiteren Prüfung unterziehen.

Wir tragen auf der Abszisse eines rechtwinkligen Koordinatensystems unsre einzelnen g -Werte, auf der Ordinate die einzelnen b -Werte auf und verbinden je zwei zusammengehörige

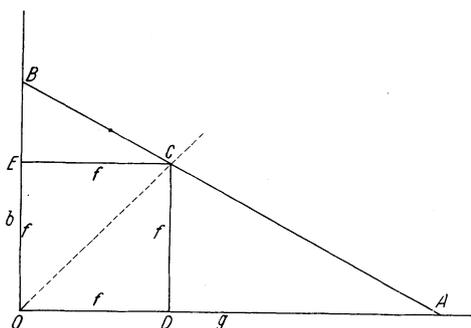


Abb. 33. Zur Prüfung der Linsengleichung.

zwei zusammengehörige

g - und b -Werte durch eine Gerade AB (Abb. 33). Ferner ziehen wir die unter 45° gegen die Achsen geneigte Gerade OC und zeichnen das Quadrat $ODCE$. Die Seite dieses Quadrats ist gleich der Brennweite f . Denn man liest aus Abb. 33 ab

$$(g-f) : f = f : (b-f) = b : g. \quad (6)$$

Das läßt sich durch einfache Rechnung in Gl. (1) umwandeln, womit unsre Behauptung bewiesen ist. Demnach müssen sich,

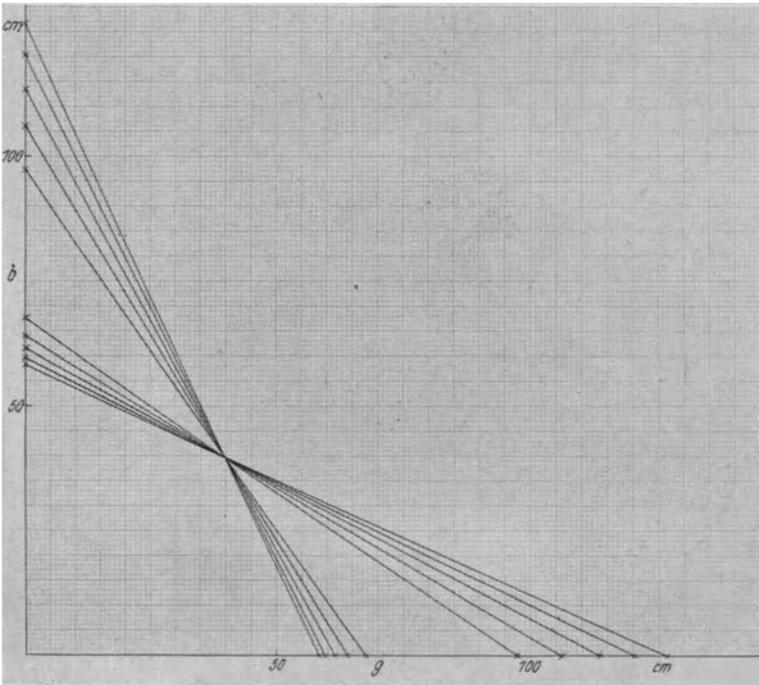


Abb. 34. Zur Prüfung der Linsengleichung.

wenn mehrere Wertepaare g und b vorliegen, sämtliche Geraden AB im Punkte C schneiden. Auf diese Weise kann schon mit Hilfe eines einzigen Wertepaares eine graphische Bestimmung von f erfolgen. Man braucht dazu gar nicht die Gerade OC zu zeichnen; denn da man g und b vertauschen darf, so liefert bereits ein Wertepaar zwei Gerade AB und ihren Schnittpunkt C . In

Abb. 34 sind unsere obigen Messungen mit den g - und b -Werten der Tabelle 3 in der geschilderten Weise dargestellt. Der Schnitt ergibt sehr genau die Brennweite $f = 39,9$, unserer Berechnung entsprechend.

Gl. (1) ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten im Abstände $+f$ parallel zur g - und b -Achse verlaufen. In Abb. 35

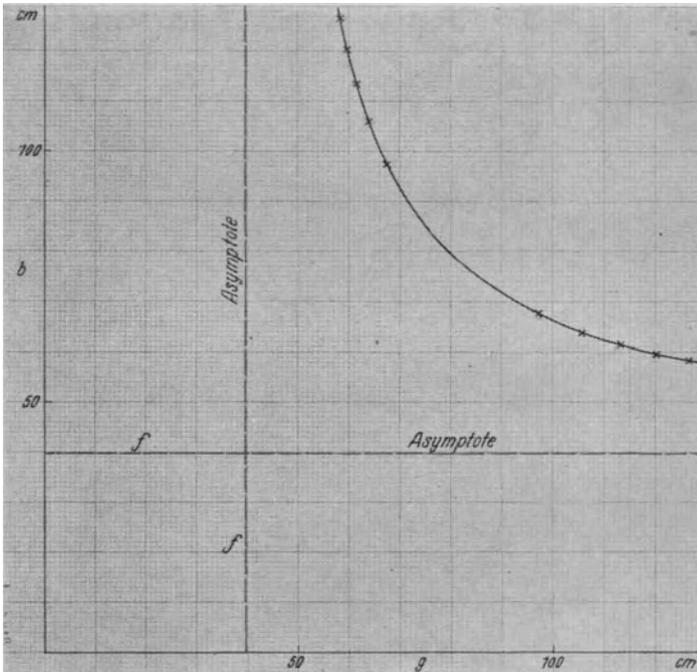


Abb. 35. Der positive Ast der Hyperbel $1/g + 1/b = 1/f$.

ist der den positiven b -Werten, also den reellen Bildern zugehörige Ast dieser Hyperbel auf Grund unserer obigen Messungen gezeichnet, wobei wir wieder von der Vertauschung von g und b Gebrauch gemacht haben. Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, daß wir keine Messungen in der Gegend des Punktes $b = g = 2f$ gemacht haben, weil in diesem Bereich die Gebiete ungefährender Schärfe des vergrößerten und des verkleinerten Bildes ineinanderfließen, so daß die Messungen recht ungenau werden.

III. Das Besselsche Verfahren

Man kann die bei unserm bisherigen Verfahren nötige Drehung des Schlittens um 180° durch Anwendung eines von Bessel angegebenen Verfahrens vermeiden, das obendrein für dicke Linsen und Linsensysteme besondere Vorzüge hat, auf die wir hier nicht eingehen können. Wir erzeugen wieder bei feststehendem Gegenstand und Schirm durch Verschieben der Linse einmal ein vergrößertes, dann ein verkleinertes Bild des Gegenstandes und messen die Größe der Verschiebung e der Linse beim Übergang vom ersten zum zweiten Fall. Hierzu brauchen wir nur den Ort einer beliebigen Marke am Schlitten, etwa seines einen Randes, in beiden Lagen auf der Skala abzulesen. Es sei wieder $g + b = a$. Wegen der zur Mitte symmetrischen Lage der beiden Linsenorte liest man aus Abb. 36 ab:

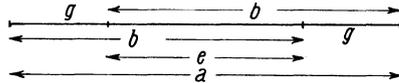


Abb. 36. Zum Besselschen Verfahren.

so daß

$$g + b = a \quad \text{und} \quad b - g = e, \quad (7)$$

so daß

$$g = \frac{a - e}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{a + e}{2}. \quad (8)$$

Durch Einsetzen in Gl. (1) erhalten wir

$$f = \frac{a^2 - e^2}{4a} \quad \text{oder} \quad 4f = a - \frac{e^2}{a}. \quad (9)$$

(Die letztere Form ist am bequemsten für die Ausrechnung.)

Beispiel. Wir bezeichnen die Orte unsrer Ablesemarke mit g' und g'' . In Tabelle 4 geben wir diesmal nur die aus je 5 Einzelmessungen gewonnenen Mittelwerte an.

Tabelle 4.

a cm	g' cm	g'' cm	e cm	$4f$ cm		
70,0	13,29	49,89	36,60	50,87	+ 13	169
65,0	13,83	44,46	30,36	56	- 18	324
60,0	14,90	38,45	23,55	75	+ 1	1
55,0	16,56	31,79	15,23	78	+ 4	16
				50,74		510

Damit erhalten wir

$$f = 12,69 \text{ cm}, \quad D = \frac{100}{12,69} = 7,88 \text{ Dioptrien.}$$

Fehlerrechnung. Wir berechnen wieder den Fehler von f aus der Streuung der Ergebnisse der Einzelmessungen nach Einl. § 9, Gl. (1). Die hierzu nötigen Angaben haben wir in Tabelle 3 in Einheiten der 2. Dezimale gemacht. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta(4f) &= 4\Delta f = \pm \sqrt{\frac{510}{3 \cdot 4}} = \pm 6,5 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} \\ &= \pm 0,065 \text{ cm,} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \Delta f &= \pm 0,016 \text{ cm} \approx \pm 0,02 \text{ cm,} \\ \frac{\Delta f}{f} &= \pm \frac{0,02}{12,69} \approx \pm 0,0015 = \pm 0,15 \%. \end{aligned}$$

Für D ergibt sich, wie oben ausgeführt, der gleiche relative Fehler.

Demnach lautet unser Endergebnis:

$$\begin{aligned} f &= (12,69 \pm 0,02) \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad 12,69 \text{ cm} \pm 0,15 \%, \\ D &= (7,88 \pm 0,01) \text{ Dioptrien} \quad \text{bzw.} \quad 7,88 \text{ Dioptrien} \pm 0,15 \%. \end{aligned}$$

IV. Brennweite einer Zerstreuungslinse

Man kann die Brennweite f einer Zerstreuungslinse nach den gleichen Verfahren messen, wenn man sie mit einer Sammellinse von kleinerer Brennweite zu einem Linsensystem vereinigt, das dann wie eine Sammellinse wirkt. Ist f' die Brennweite der Sammellinse, so gilt für die Brennweite f'' des Systems — vorausgesetzt, daß es sich um dünne, dicht aufeinanderliegende Linsen handelt —:

$$\frac{1}{f''} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}, \quad \text{also auch} \quad D'' = D + D'. \quad (10)$$

Es addieren sich also die Brechkraften der beiden Linsen. Die Brennweite einer Zerstreuungslinse ist negativ, so daß dann $f'' > f'$ ist. Ebenso ist die Brechkraft einer Zerstreuungslinse negativ.

Beispiel. Wir geben in Tabelle 5 wieder nur die Ergebnisse von je 5 Einzelmessungen mit den gleichen Bezeichnungen wie oben. Als Sammellinse dient die soeben gemessene Linse, so daß $f' = 12,69$ cm.

Tabelle 5.

a cm	g' cm	g'' cm	e cm	$4f''$ cm		
90,0	19,40	64,37	44,97	67,53	- 10	100
85,0	20,21	58,51	38,30	74	+ 11	121
80,0	21,03	52,51	31,48	63	0	0
75,0	22,57	46,08	23,51	63	0	0
70,0	25,49	38,35	12,86	64	+ 1	1
				67,63		222

Es ist also $4f'' = 67,63$ cm und $f'' = 16,91$ cm. Demnach ist $D'' = 100/16,91 = 5,914$ Dioptrien. Wir erhalten also mit $D' = 7,88$ Dioptrien:

$D = 5,914 - 7,88 = -1,966 \approx -1,97$ Dioptrien
und

$$f = -\frac{100}{1,97} = -50,8 \text{ cm.}$$

Fehlerrechnung. Wir berechnen zunächst den mittleren Fehler von f'' , wozu wir bereits in Tabelle 4 die nötigen Angaben in Einheiten der 2. Dezimale gemacht haben. Es ist

$$\begin{aligned} \Delta(4f'') &= 4\Delta f'' = \pm \sqrt{\frac{222}{4 \cdot 5}} = \pm 3,3 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} \\ &= \pm 0,033 \text{ cm,} \end{aligned}$$

also $\Delta f'' = \pm 0,008$ cm. Demnach ist $\Delta D''/D'' = \pm \Delta f''/f'' = \pm 0,008/16,91 \approx \pm 0,0005$, also $\Delta D'' = \pm 0,0005 \cdot 5,914 \approx \pm 0,003$ Dioptrien. Ferner ist nach unsrer obigen Berechnung $\Delta D' = \pm 0,01$ Dioptrien. Da $D = D'' - D'$, so beträgt der absolute Größtfehler von D :

$$\Delta D = \pm (\Delta D'' + \Delta D') = \pm 0,013 \text{ Dioptrien.}$$

Daraus folgt für den relativen Größtfehler von f :

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm \frac{\Delta D}{D} = \pm \frac{0,013}{1,97} \approx \pm 0,007 = \pm 0,7 \text{ \%}$$

Demnach lautet unser Endergebnis:

$$f = - (50,8 \pm 0,4) \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad - 50,8 \text{ cm} \pm 0,7 \%,$$

$$D = - (1,97 \pm 0,013) \text{ Dioptrien} \quad \text{bzw.} \quad - 1,97 \text{ Dioptrien} \pm 0,7 \%.$$

Das Ergebnis ist relativ weniger genau als die vorhergehenden, weil D die Differenz von D'' und D' ist, die von gleicher Größenordnung sind. Die Fehler von D'' und D' rufen also einen relativ großen Fehler dieser Differenz hervor, da diese erheblich kleiner als D'' und D' selbst ist.

19. Aufgabe.

Brennweite und Hauptebenen einer dicken Linse

Literatur: W. § 276; M.-P. Bd. II/1, S. 154.

Bei Linsen, die nicht gemäß der bei der 18. Aufgabe gegebenen Definition als dünn betrachtet werden können, sowie bei Linsensystemen, sind die (gleich großen) Brennweiten nach beiden Seiten von den beiden zugehörigen, auf der Linsenachse liegenden Hauptpunkten ab zu rechnen. Die beiden zur Linsenachse senkrechten, durch die Hauptpunkte gelegten Ebenen heißen

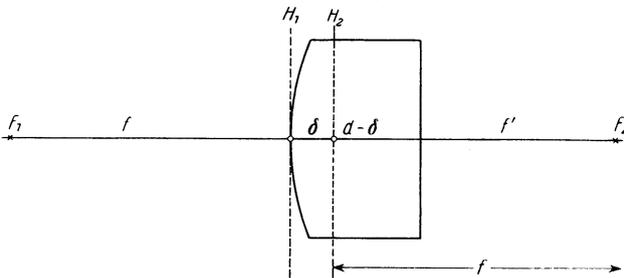


Abb. 37. Hauptebenen H_1 , H_2 und Brennpunkte F_1 , F_2 einer dicken Linse.

die Hauptebenen der Linse oder des Linsensystems. Bei einer bikonvexen Linse liegen die beiden Hauptpunkte im Innern der Linse. Die Bestimmung ihrer Lage ist im allgemeinen mit einfachen Mitteln nicht durchführbar. Das ist nur im Sonderfall einer plankonvexen Linse möglich, also einer solchen, deren eine Fläche eben ist. Bei einer solchen liegt der eine Hauptpunkt im Scheitel der konvexen Fläche, und die zugehörige Hauptebene

ist die diese Fläche im Hauptpunkt berührende Tangentialebene (H_1 , Abb. 37). Die zweite Hauptebene (H_2) liegt parallel zu ihr im Innern der Linse.

Bei einer solchen Linse kann man die Brennweite f durch Messung des Abstandes des der Hauptebene H_1 zugeordneten Brennpunktes F_1 von der konvexen Linsenfläche leicht ermitteln. Ebenso kann man leicht den Abstand f' des zweiten Brennpunktes F_2 von der ebenen Linsenfläche messen, der kleiner als f ist. Es sei d die Dicke der Linse, δ der Abstand der beiden Hauptebenen. Dann liest man aus Abb. 37 die Beziehung

$$f = f' + d - \delta \quad \text{oder} \quad \delta = d - f + f' \quad (1)$$

ab. Man kann also aus f , f' und d den Abstand δ und damit die Lage der zweiten Hauptebene ermitteln.

Die Einführung des Begriffs der Hauptebenen hat den Vorteil, daß man bei der Konstruktion der Bilder nicht zu berücksichtigen braucht, daß jeder Strahl beim Durchgang durch die Linse an jeder der beiden Linsenflächen durch Brechung einen Knick er-

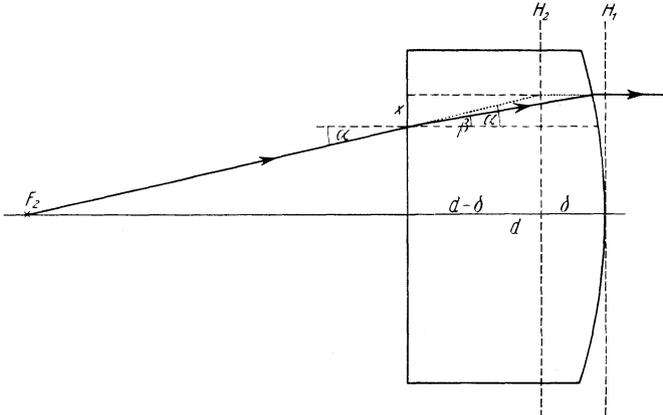


Abb. 38. Strahlengang in einer dicken Linse.

leidet. Man kann vielmehr z. B. einen von dem einen Brennpunkt her kommenden Strahl so zeichnen, als werde er nur an einer am Ort der diesem Brennpunkt zugeordneten Hauptebene befindlichen, unendlich dünnen Linse gebrochen, von der aus er dann parallel zur Linsenachse weiterverläuft, genau wie bei einer wirklichen dünnen Linse (Abb. 38). Der Strahl ist also in der

Konstruktion nur einmal geknickt. Der Knick liegt an derjenigen Stelle, in der sich die Verlängerungen des wirklichen einfallenden und des wirklichen gebrochenen Strahles schneiden.

In Abb. 38 ist ein Strahl gezeichnet, der vom Brennpunkt F_2 her auf die ebene Linsenfläche fällt, an der er nach dem Brechungsgesetz $\sin \alpha / \sin \beta = n$ gebrochen wird (n Brechungsindex der Linse). Er tritt dann nach der Brechung an der konkaven Linsenfläche parallel zur Linsenachse aus. Die gestrichelte Linie zeigt die Konstruktion des Strahlenganges mit dem Knick an der Hauptebene H_2 . Im folgenden dürfen wir vernachlässigen, daß die Dicke d der Linse mit dem Abstand von der Linsenachse ein wenig abnimmt. Dann liest man aus Abb. 38 ab

$$x = d \operatorname{tg} \beta \quad \text{und} \quad x = (d - \delta) \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{also} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{d}{d - \delta}. \quad (2)$$

Nun sind α und β stets sehr kleine Winkel, so daß wir $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta \approx \sin \alpha / \sin \beta = n$ setzen dürfen [Einl. § 6, Gl. (4)]. Damit erhalten wir

$$\frac{d}{d - \delta} = n \quad \text{oder} \quad \delta = d \frac{n - 1}{n}. \quad (3)$$

Für Glas ist $n \approx 1,5$, so daß $\delta \approx d/3$.

Es ist unsere Aufgabe, die Brennweite f der Linse und den Abstand δ ihrer Hauptebenen zu bestimmen. Zu diesem Zweck bringen wir die Linse auf einem Schlitten auf eine optische Bank und stellen dicht vor sie ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr. Die Einstellung muß an einem offenen Fenster (schlechtes Fensterglas stört) oder in einem ausreichend langen Gang erfolgen. Im Okular des Fernrohres befindet sich ein Fadenkreuz, das so verschoben werden kann, daß es mit dem vom Objektiv des Fernrohres entworfenen reellen Bild in der gleichen Ebene liegt. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird es nicht nur gleichzeitig mit der fernen Umgebung scharf gesehen, sondern es zeigt auch keine Parallaxe gegen diese. Letzteres ist ein weit schärferes Kennzeichen für die richtige Einstellung des Fadenkreuzes, als die oft trügerische Bildschärfe. Man erkennt die Parallaxenfreiheit daran, daß sich das Fadenkreuz gegenüber der mit dem Fernrohr betrachteten fernen Umgebung nicht seitlich verschiebt, wenn man das Auge vor dem Fernrohr ein wenig hin und her

bewegt. Das derart vorbereitete Fernrohr liefert uns einen Indikator für paralleles Licht. Wenn wir einen Gegenstand mit Hilfe des Fernrohres scharf und vor allem parallaxenfrei gegenüber dem Fadenkreuz erblicken, so beweist dies, daß die von den einzelnen Punkten des Gegenstandes herkommen-

den Strahlen parallel in das Fernrohr einfallen. Das ist dann der Fall, wenn sich der Gegenstand in sehr großer Ferne befindet, aber auch dann, wenn er sich näher am Fernrohr befindet, aber die von seinen einzelnen Punkten kommenden Strahlen durch eine Linse parallel gemacht wurden, ehe sie in das Fernrohr eintreten. Das aber geschieht dann, wenn sich der Gegenstand in der Brennebene der Linse befindet. Das Fernrohr kann uns also dazu dienen, einen Gegenstand genau in die Brennebene einer Linse einzustellen und auf diese Weise den Abstand der Brennebene von der Linse zu messen. Gerade darauf kommt es bei dieser Aufgabe an.

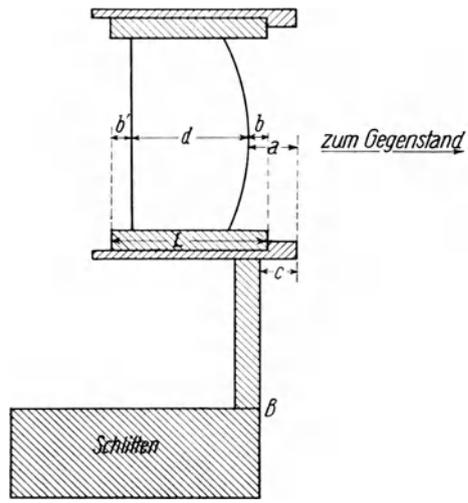


Abb. 39 a.

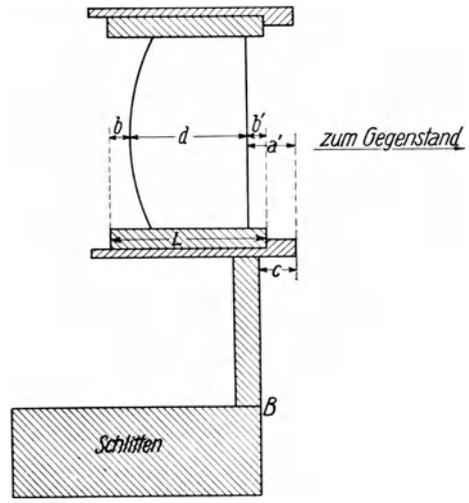


Abb. 39 b.

Zur Messung an dicken Linsen.

Wir bringen also einen geeigneten Gegenstand (von hinten beleuchtete Glasplatte mit irgendeiner Struktur) hinter die Linse, betrachten ihn durch die Linse mit dem auf unendlich eingestellten Fernrohr und verschieben ihn — oder die Linse — so lange, bis wir ihn im Fernrohr scharf und vor allem parallaxenfrei erblicken. Wir stellen diesen Versuch zweimal an, indem wir dem Gegenstand einmal die gekrümmte Linsenfläche zur Messung von f , dann die ebene Linsenfläche zur Messung von f' zuwenden. Zu diesem Zweck kann die Linse aus der Fassung des Schlittens genommen und umgedreht werden.

Etwas umständlich ist die genaue Ermittlung der Orte der beiden Linsenflächen auf der optischen Bank. Wir lesen stets am Rande B des Schlittens ab (Abb. 39). Sein Abstand vom Gegenstand sei z_1 , wenn die konvexe, z_2 wenn die ebene Linsenfläche dem Gegenstand zugewandt ist, während die betreffenden Abstände der Linsenflächen vom Gegenstand f bzw. f' sind. Dann ist f um die Strecke $a - c$ größer als z_1 (Abb. 39a) und f' um die Strecke $a' - c$ größer als z_2 (Abb. 39b), so daß

$$f = z_1 + a - c, \quad f' = z_2 + a' - c. \quad (4)$$

Ferner muß noch die Linsendicke d gemessen werden. Ist L die Länge der Linsenfassung, und liegen die Linsenflächen um die Strecken b bzw. b' hinter deren Rand, so ist

$$d = L - b - b'. \quad (5)$$

Wir berechnen daher nach Gl. (1), (4) und (5) den Abstand δ der Hauptebenen schließlich nach der Gleichung

$$\delta = L - b - b' - z_1 + z_2 - a + a'. \quad (6)$$

Die Längen a , a' , b , b' und c messen wir mit einem Tiefentaster; die Länge L mit der Schublehre.

Beispiel. Wir bezeichnen den Ort B des Schlittenrandes mit x_1 bzw. x_2 , wenn die Linse dem Gegenstand die konvexe bzw. die ebene Fläche zukehrt, mit y_1 bzw. y_2 den entsprechenden Ort des Gegenstandes auf der optischen Bank. Dann ist $z_1 = y_1 - x_1$, $z_2 = y_2 - x_2$. Wir machen je fünf Einzelmessungen, indem wir aus bekanntem Grunde jedesmal den Linsenort x_1 bzw. x_2 blindlings ein wenig ändern und den zugehörigen Gegenstandsort y_1

bzw. y_2 ermitteln. Unsere Ergebnisse zeigt die Tabelle. Wir haben auf 0,05 cm genau abgelesen.

Tabelle.

Konvexe Fläche zum Gegenstand					Konkave Fläche zum Gegenstand				
x_1 cm	y_1 cm	z_1 cm			x_2 cm	y_2 cm	z_2 cm		
10,95	20,55	9,65	- 1	1	10,7	19,1	8,4	0	0
9,75	19,45	7	+ 4	16	10,25	18,65	4	0	0
9,3	18,9	6	- 6	36	9,9	18,35	4,5	+ 5	25
10,25	19,9	6,5	- 1	1	9,3	17,7	4	0	0
10,55	20,25	7	+ 4	16	8,95	17,3	3,5	- 5	25
		9,66		70			8,40		50

Wir haben also im Mittel erhalten

$$z_1 = 9,66 \text{ cm}, \quad z_2 = 8,40 \text{ cm}.$$

Ferner ist $a = 0,69 \text{ cm}$, $a' = 0,64 \text{ cm}$, $b = 0,39 \text{ cm}$, $b' = 0,34 \text{ cm}$, $c = 0,48 \text{ cm}$, $L = 2,67 \text{ cm}$.

Mit diesen Werten ergibt sich nach Gl. (4), (6), (1) und (3):

$$f = 9,66 + 0,69 - 0,48 = 9,87 \text{ cm},$$

$$f' = 8,40 + 0,64 - 0,48 = 8,56 \text{ cm},$$

$$d = 2,67 - 0,39 - 0,34 = 1,94 \text{ cm},$$

$$\delta = \bar{d} - f + f' = 1,94 - 9,87 + 8,40 = 0,67 \text{ cm},$$

$$n = \frac{1,94}{1,27} = 1,53.$$

Fehlerrechnung. Wir wollen dieses besonders einfache Beispiel dazu benutzen, um ausnahmsweise einmal nicht den Größtfehler, sondern den mittleren (quadratischen) Fehler unsres Ergebnisses nach Einl. § 11, Gl. (8) zu berechnen.

Die Angaben zur Berechnung des mittleren absoluten Fehlers von z_1 und z_2 nach Einl. § 9, Gl. (1) enthält die Tabelle in Einheiten der 2. Dezimale. Es ergibt sich

$$\Delta z_1 = \pm \sqrt{\frac{70}{4 \cdot 5}} = \pm 1,87$$

$$\approx \pm 2 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} = \pm 0,02 \text{ cm},$$

$$\Delta z_2 = \pm \sqrt{\frac{50}{4 \cdot 5}} = \pm 1,58$$

$$\approx \pm 2 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} = \pm 0,02 \text{ cm}.$$

Nach Gl. (4) sind die partiellen Differentialquotienten von f nach den auf der rechten Seite der Gleichung vorkommenden gemessenen Größen (in Einl. § 11 mit $\partial R/\partial x$ usw. bezeichnet) sämtlich vom Betrage 1. Nach Einl. § 11, Gl. (8) beträgt demnach der mittlere absolute Fehler von f :

$$\Delta f = \pm \sqrt{(\Delta z_1)^2 + (\Delta a)^2 + (\Delta c)^2}. \quad (7)$$

Entsprechend beträgt der mittlere absolute Fehler von δ nach Gl. (6):

$$\Delta \delta = \pm \sqrt{(\Delta L)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta b')^2 + (\Delta z_1)^2 + (\Delta z_2)^2 + (\Delta a)^2 + (\Delta a')^2}. \quad (8)$$

Schublehre und Tiefentaster sind auf 0,01 cm ablesbar, so daß wir die Fehler aller mit ihnen gemessenen Größen mit $\pm 0,005$ cm schätzen können. Es ist also

$$\Delta L = \Delta a = \Delta a' = \Delta b = \Delta b' = \Delta c = \pm 0,005 \text{ cm.}$$

Damit und mit den obigen Fehlern von z_1 und z_2 folgt aus Gl. (7) und (8):

$$\Delta f = \pm \sqrt{0,0004 + 2 \cdot 0,000025} = \pm \sqrt{0,00045} \approx \pm 0,02 \text{ cm,}$$

$$\Delta \delta = \pm \sqrt{2 \cdot 0,0004 + 4 \cdot 0,000025} = \pm \sqrt{0,0009} = \pm 0,03 \text{ cm.}$$

Man erkennt an diesem Beispiel, daß bei der Berechnung des mittleren Fehlers die kleinen Fehlerbeträge verhältnismäßig viel weniger zum Gesamtfehler beitragen als bei der Berechnung des Größtfehlers. Wir hätten die gleichen abgerundeten Ergebnisse erhalten, wenn wir uns auf die Fehler von z_1 und z_2 beschränkt hätten.

Es ergibt sich weiter:

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm \frac{0,02}{9,87} \approx \pm 0,002 = \pm 0,2\%,$$

$$\frac{\Delta \delta}{\delta} = \pm \frac{0,03}{0,67} \approx \pm 0,45 = \pm 4,5\%.$$

Für n wollen wir keine Fehlerrechnung durchführen, da dieses natürlich kein brauchbares Verfahren zur Messung eines Brechungsindex ist. Wir wollen uns mit der Feststellung begnügen, daß der gefundene Wert dem Brechungsindex gewöhnlichen Linsen-

glases recht gut entspricht, und daß das Verhältnis $\delta/d = 0,67/1,94 \approx 1/3$ ist.

Unser Endergebnis lautet also:

$$f = (9,87 \pm 0,02) \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad 9,87 \text{ cm} \pm 0,2 \%,$$

$$\delta = (0,67 \pm 0,03) \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad 0,67 \text{ cm} \pm 4,5 \%. \quad \underline{\underline{\hspace{10em}}}$$

20. Aufgabe. Vergrößerung einer Lupe

Literatur: W. § 281; M.-P. Bd. II/1, S. 608; K. S. 313.

Eine Sammellinse, bei der man einen zu betrachtenden Gegenstand innerhalb ihrer Brennweite anbringt, um ein vergrößertes, aufrechtes und virtuelles Bild desselben zu erhalten, heißt eine Lupe. Lupen sind auch die Okulare der meisten optischen Geräte. Ist f die Brennweite der Linse, und entsteht das Bild in der Entfernung b von der Linse, so beträgt die Vergrößerung

$$v = \frac{b}{f} + 1. \quad (1)$$

Es ist unsre Aufgabe, diese Beziehung bei verschiedenen Bildentfernungen b zu prüfen.

Die Linse befindet sich in einem Messingrohr R_2 (Abb. 40). Parallel zu diesem befindet sich in Augenabstand ein mit ihm fest verbundenes zweites Messingrohr R_1 . Die Rohre sind an einer vertikalen Stange, in der Höhe verstellbar, auf einem Grundbrett montiert. Auf diesem

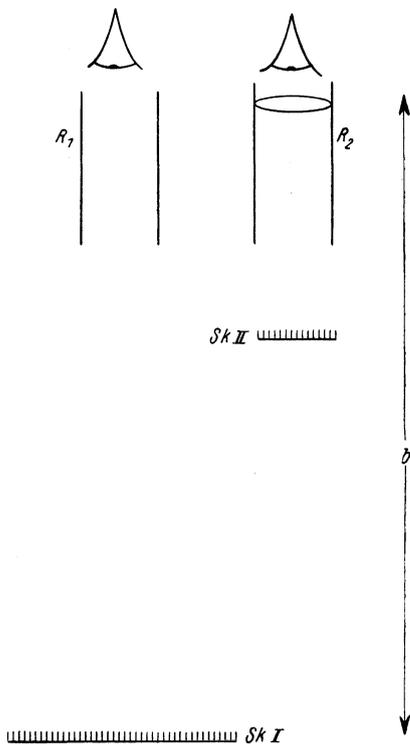


Abb. 40.
Zur Messung der Vergrößerung einer Lupe.

ist eine in mm geteilte Skala (Sk I) angebracht, die durch R_1 mit dem einen Auge ohne Linse betrachtet wird. Unterhalb des Rohres R_2 befindet sich ein in der Höhe verstellbares Tischchen mit einer zweiten in mm geteilten, zur Sk I parallelen Skala (Sk II), die mit dem andern Auge durch die Linse betrachtet wird. Mit Hilfe eines Maßstabes wird die Linse in einen bestimmten Abstand b von der Sk I gebracht. Dann wird die Sk II so lange verschoben, bis ihr von der Linse erzeugtes vergrößertes Bild im gleichen Abstand, also in der gleichen Ebene erscheint, wie die mit dem andern Auge unmittelbar betrachtete Sk I. Die verschiedenen Gesichtseindrücke der beiden Augen erscheinen dem Beobachter zu einem einheitlichen Bilde im gleichen Sehraum verschmolzen, so daß ein messender Vergleich der beiden Skalen möglich ist. Wie beim Fadenkreuz in der 19. Aufgabe erkennt man die Lage in der gleichen Ebene sehr scharf daran, daß die beiden Skalen keine Parallaxe gegeneinander zeigen, was durch leichtes Hin- und Herbewegen des Kopfes festgestellt wird. Nunmehr wählt man auf der vergrößerten Sk II eine bestimmte Länge, z. B. 1 cm, und stellt fest, welche Länge auf der unvergrößerten Sk I sich mit dieser Länge deckt. Das Verhältnis der Längen gibt unmittelbar die Vergrößerung.

Aus den bei verschiedenen Bildentfernungen (Entfernung der Sk I) vorzunehmenden Messungen soll die Vergrößerung als Funktion der Bildentfernung ermittelt werden. Ferner wollen wir aus ihnen die Brennweite f der Linse berechnen, die sich bei verschiedenen b -Werten gleich groß ergeben muß, um Gl. (1) zu prüfen, und schließlich wollen wir als weiteres Ergebnis die Normalvergrößerung v_n der Lupe angeben, die dann vorliegt, wenn das Bild in der deutlichen Sehweite entsteht, die man — einem normalsichtigen Auge entsprechend — mit $b = 25$ cm ansetzt. Die Brennweite berechnen wir gemäß Gl. (1) aus der Gleichung

$$f = \frac{b}{v - 1}. \quad (2)$$

Beispiel. Wir geben in Tabelle 1 die bei $b = 25$ cm gemachten Messungen ausführlich wieder, in Tabelle 2 nur die Mittelwerte aller Messungen und die daraus berechneten Ergebnisse.

Jede Messung ist fünfmal angestellt, und es ist jedesmal die eine Skala ein wenig gegen die andere verschoben, um andere Zahlenwerte zu erhalten. Die Ablesungen erfolgten auf 0,05 cm genau.

Tabelle 1.

Sk II cm	Sk I cm	v		
1,00	9,7 — 6,15	3,55	+ 2	4
	10,2 — 6,65	55	+ 2	4
	8,85 — 5,35	50	- 3	9
	7,65 — 4,1	55	+ 2	4
	8,4 — 4,9	50	- 5	9
		3,53		30

Tabelle 2.

b cm	v	f cm		
15	2,54	9,74	- 14	196
20	2,97	10,14	+ 26	676
25	3,53	9,88	0	0
30	4,05	84	- 4	16
35	4,60	72	- 16	256
40	4,99	97	+ 9	81
		9,88		1125

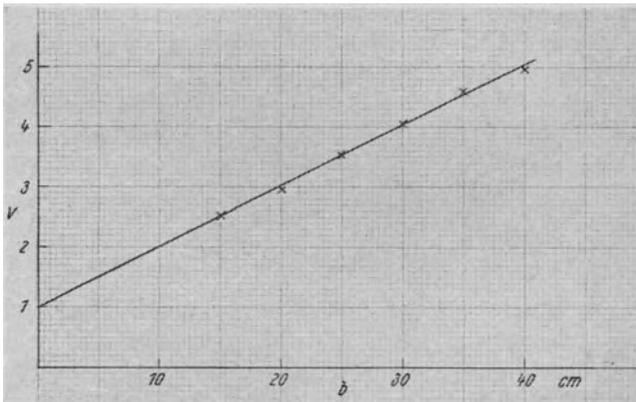


Abb. 41. Vergrößerung v einer Lupe als Funktion der Bildentfernung b .

Für die Brennweite erhalten wir den Mittelwert $f = 9,88$ cm. Abb. 41 gibt eine graphische Darstellung der Vergrößerungen als Funktion der Bildentfernung b . Man sieht, daß v linear mit b anwächst, und daß sich für $b = 0$ sehr genau $v = 1$ ergibt, wie es Gl. (1) verlangt. Die normale Vergrößerung beträgt nach Tabelle 1 $v_n = 3,53$.

Fehlerrechnung. Die Angaben zur Berechnung des mittleren absoluten Fehlers von f sind in Tabelle 2 enthalten. Es ergibt sich

$$\Delta f = \pm \sqrt{\frac{1125}{5 \cdot 6}} \approx \pm 6 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} = \pm 0,06 \text{ cm.}$$

Die entsprechenden Angaben für v_n sind in Tabelle 1 enthalten. Es ergibt sich

$$\Delta v_n = \pm \sqrt{\frac{30}{4 \cdot 5}} = \pm 1,2 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} = \pm 0,012.$$

Damit erhalten wir die folgenden Endergebnisse:

$$\underline{f = (9,88 \pm 0,06) \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad 9,88 \text{ cm} \pm 0,6 \%},$$

$$\underline{v_n = (3,53 \pm 0,012) \quad \text{bzw.} \quad 3,53 \pm 0,3 \%}.$$

21. Aufgabe. Messungen am Mikroskop

Literatur: W. § 282; M.-P. Bd. II/1, S. 614 ff.; K. S. 316.

Da im Anfängerpraktikum eine tiefere Kenntnis der Gesetze der Abbildung durch optische Systeme nicht vorausgesetzt werden kann, so müssen wir uns hier mit einer vereinfachten Betrachtung der Verhältnisse beim Mikroskop und mit angenäherten Ergebnissen begnügen. Auch sehen wir von der Erörterung des Einflusses der Feld- oder Kollimatorlinse ab.

I. Die Vergrößerung des Mikroskops

Bei den durch optische Systeme erzeugten Bildern muß man grundsätzlich zwischen dem Abbildungsmaßstab der Bilder und der durch das System erzeugten Vergrößerung unterscheiden. Der Abbildungsmaßstab γ ist das Verhältnis der Abmessungen des Bildes zu denen des Gegenstandes. Die Ver-

größerung v ist das Verhältnis des Winkels, unter dem man das Bild mittels des optischen Systems sieht, zu dem Winkel, unter dem man den Gegenstand unter gewöhnlichen Verhältnissen unmittelbar sehen würde. Die Vergrößerung v des Mikroskops setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, der Objektivvergrößerung v_1 und der Okularvergrößerung v_2 , und es ist

$$v = v_1 v_2. \quad (1)$$

Die Okularvergrößerung v_2 ist immer ebenso groß wie der Abbildungsmaßstab γ_2 des vom Okular (Lupe, 20. Aufgabe) erzeugten virtuellen Bildes, bezogen auf das vom Objektiv entworfene reelle Bild als Gegenstand. Beim Mikroskop (jedoch z. B. nicht beim Fernrohr) ist aber auch die Objektivvergrößerung v_1 ebenso groß wie der Abbildungsmaßstab γ_1 des vom Objektiv entworfene reellen Bildes, bezogen auf den Gegenstand selbst. Daher ist auch die Gesamtvergrößerung v ebenso groß wie der gesamte Abbildungsmaßstab, $v = \gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$. Wir können nun erstens den Abbildungsmaßstab γ_1 des reellen Bildes unmittelbar messen und erhalten damit v_1 . Ferner können wir die Gesamtvergrößerung v des Mikroskops unmittelbar messen und daraus $v_2 = v/v_1$ berechnen. Wir führen dies für zwei Objektive und zwei Okulare in ihren vier möglichen Kombinationen durch.

Zur Messung des Abbildungsmaßstabes γ_1 des vom Objektiv entworfene reellen Bildes legen wir auf die obere Tubusöffnung des okularlosen Mikroskops ein Mattscheibchen mit der matten Seite nach unten und auf den Mikroskoptisch ein Objektmikrometer, eine durchsichtige, in Zehntelmillimeter geteilte Skala, die wir mit Hilfe des darunter angebrachten Spiegels sehr kräftig beleuchten. (Es ist zweckmäßig, hierfür eine besonders helle Lampe aufzustellen, damit das vergrößerte Bild nicht zu lichtschwach ist). Auf dem Mattscheibchen erzeugen wir durch richtige Einstellung des Mikroskops ein vergrößertes, reelles Bild der Skala und messen mit einem in mm geteilten Maßstab die Länge der Strecke, die auf eine bestimmte, möglichst große Zahl von Teilstrichen im vergrößerten Bilde entfällt. Das Verhältnis dieser Länge und der wahren Länge der Vergleichsstrecke auf dem Objektmikrometer ist der Abbildungsmaßstab und daher auch die Objektvergrößerung bei dem vorliegenden Abstand des Bildes vom Objektiv.

Wird aber das Mikroskop mit Okular benutzt, so erzeugt man das reelle Bild nicht am Tubusende, sondern innerhalb des Tubus, ungefähr in der Brennebene der Augenlinse des Okulars (Abb. 42).

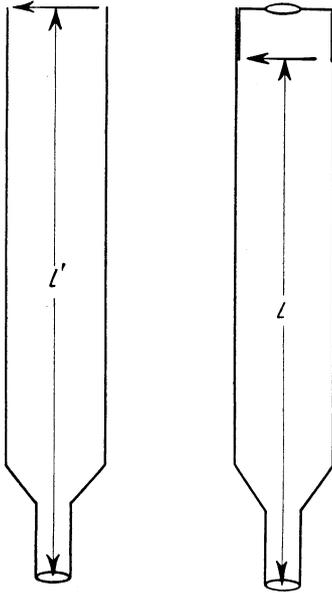


Abb. 42.

Zur Messung der Objektivvergrößerung.

Es sei L der Abstand dieser Ebene vom Objektiv (genauer von der maßgeblichen Hauptebene desselben), L' der Abstand des Tubusendes vom Objektiv, v_1 die Objektvergrößerung bei Verwendung des Okulars, v'_1 diejenige bei der eben beschriebenen Messung. Dann ist recht genau

$$v_1 = v'_1 \frac{L}{L'}, \quad (2)$$

sofern — was stets der Fall ist — die Brennweite des Objektivs klein gegen L und L' ist. Diese Korrektur muß also bei der Berechnung von v_2 aus v und v_1 stets angebracht werden. Sie ist wegen der verschiedenen Brennweite bei der Verwendung verschiedener Okulare verschieden groß. Der Vergrößerungs-

anteil v_1 eines Objektivs hängt also ein wenig von dem Okular ab, mit dem man es kombiniert (vgl. Tabelle 4).

Da die Lage der Brennebene der Augenlinse des Okulars — die Lage der Okularblende —, deren Kenntnis zur Ermittlung von L erforderlich ist, vom Studenten nicht ermittelt werden kann, ohne das Okular auseinanderzunehmen, so empfiehlt es sich, sie durch einen Strich außen an der Okularfassung zu bezeichnen. Man findet dann die Länge $L' - L$ als den Abstand des Striches von dem Rande, mit dem das Okular auf dem Tubus aufliegt.

Zur Messung der Gesamtvergrößerung v bringen wir dicht neben dem Mikroskop einen in mm geteilten waagerechten Maßstab derart an, daß er 25 cm (deutliche Sehweite) unterhalb

unsres linken Auges liegt, wenn wir mit dem rechten Auge in das Okular blicken. (Man achte auf waagerechte Haltung der Verbindungslinie der beiden Augen, damit der Abstand von 25 cm gewahrt wird.) Auf das Mikroskoptischchen legen wir parallel zur Skala des Maßstabes das Objektmikrometer. Wir stellen das Mikroskop so ein, daß wir ein scharfes virtuelles Bild der Skala des Objektmikrometers in 25 cm Entfernung am gleichen Ort und in der gleichen Ebene erblicken, wo das andere Auge die zweite Skala unmittelbar sieht. Das Verfahren ist genau das gleiche wie bei der Lupe (20. Aufgabe). Die Einstellung des Bildes in die richtige Ebene wird wieder an der Parallaxenfreiheit erkannt, also indem man den Kopf leicht hin und her bewegt und das Mikroskop so einstellt, daß sich die beiden Skalen nicht mehr gegeneinander bewegen. Genau wie bei der Lupe wählt man nunmehr am Objektmikrometer eine geeignete, möglichst große Länge und stellt die Länge auf der unvergrößerten Skala fest, die mit ihr zusammenfällt. Das Verhältnis der zweiten zur ersten Länge ist der Abbildungsmaßstab und gleichzeitig die Gesamtvergrößerung v des Mikroskops. Aus v und v_1 berechnen wir schließlich $v_2 = v/v_1$.

Wir wollen auch die Brennweiten f_1 unsrer Objektive berechnen. Wenn sie aus einer dünnen Einzellinse bestünden, so würde für die Objektivvergrößerung die Gleichung gelten:

$$v_1' = \frac{L' - f_1}{f_1}, \quad \text{also} \quad f_1 = \frac{L'}{v_1' + 1}. \quad (2)$$

(Genauer gesagt, ist L' von der entsprechenden Hauptebene des Objektivs abzurechnen). Das Vorzeichen der 1 im Nenner ist umgekehrt wie bei der Lupe, weil es sich hier um das reelle, dort um das virtuelle Bild handelt. Nun können wir zwar L' nur recht ungenau abschätzen, wollen aber trotzdem mit Gl. (2) rechnen.

Beispiel. A. Objektivvergrößerung v_1 . Wir benutzen zwei Objektive, deren Vergrößerungen die Nennwerte 8 und 40 haben. Wir geben in Tabelle 1 die Mittelwerte von je fünf Einzelmessungen, die wie üblich stets an verschiedenen Stellen der Skala ausgeführt wurden. Die Längen L' sind als die Abstände des Tubusendes von der Mitte des das Objektiv bildenden Linsen-

systems gemessen, was natürlich nur einen ungefähr richtigen Wert ergibt.

Tabelle 1.

Objektiv	Wahre Länge cm	Länge im reellen Bild cm	v_1'	L' cm
8	0,2	1,76	8,8	17,1
40	0,04	1,73	43,25	18,8

Die Berechnung der Objektivbrennweiten nach Gl. (2) ergibt dann:

$$\text{Objektiv 8: } f_1 = \frac{17,1}{9,8} = 1,74 \text{ cm,}$$

$$\text{Objektiv 40: } f_1 = \frac{18,8}{44,25} = 0,425 \text{ cm.}$$

B. Gesamtvergrößerung v . Wir kombinieren mit den obigen Objektiven zwei Okulare, deren Vergrößerungen die Nennwerte 7 und 10 haben. Unsre Ergebnisse, die Mittelwerte aus je fünf, stets an verschiedenen Stellen der Skala ausgeführten Einzelmessungen, gibt Tabelle 2.

Tabelle 2.

Objektiv	Okular	Wahre Länge cm	Länge im virtuellen Bild cm	v
8	7	0,10	5,77	57,7
	10	0,05	4,03	80,6
40	7	0,02	5,70	285
	10	0,01	4,05	405

C. Okularvergrößerung. In Tabelle 3 sind die zur Berechnung der Okularvergrößerung v_2 nötigen Daten und die daraus berechneten Werte von v_2 zusammengestellt.

Tabelle 3.

Objektiv	Okular	L' cm	$L'-L$ cm	L cm	$v_1 = v_1' \frac{L}{L'}$	$v_2 = v/v_1$
8	7	17,1	2,0	15,1	7,77	7,43
	10	17,1	1,4	15,7	8,08	9,98
40	7	18,8	2,0	16,8	38,7	7,36
	10	18,8	1,4	17,4	40,0	10,1

In Tabelle 4 stellen wir unsere Ergebnisse noch einmal übersichtlich zusammen.

Tabelle 4.

Objektiv	Okular 7	Okular 10
8	$v_1 = 7,77$	8,08
	$v_2 = 7,43$	9,98
	$v = 57,7$	80,6
40	$v_1 = 38,7$	40,0
	$v_2 = 7,36$	10,1
	$v = 285$	405

Die gefundenen Werte von v_1 und v_2 stimmen mit den betreffenden Nennwerten (8 und 40 bzw. 7 und 10) teils recht gut, teils einigermaßen überein. Es muß beachtet werden, daß die Güte der Ergebnisse auch ziemlich stark von der Augenbeschaffenheit des Beobachters abhängt. Aus diesem Grunde sehen wir hier auch von einer Fehlerrechnung ab.

II. Längenmessung mit dem Mikroskop

Unser Okular 10 besitzt ein Okularmikrometer, eine auf Glas geritzte Skala, die derart eingestellt werden kann, daß sie am Ort des vom Objektiv erzeugten reellen Bildes liegt, also gleichzeitig mit diesem scharf und parallaxenfrei gesehen wird. Sie kann daher, nachdem sie geeicht ist, zu Längenmessungen am betrachteten Gegenstand benutzt werden. Die Eichung hängt natürlich von der Vergrößerung des Objektivs ab. Wir benutzen zur Eichung unser Objektivmikrometer. Die beiden Skalen werden genau parallel und im Bilde einander überdeckend gestellt, und es wird festgestellt, welche Zahl von Teilstrichen des Okularmikrometers auf eine bestimmte, möglichst große Länge des Objektivmikrometers entfällt. Dann können wir mit dem Okularmikrometer bei Verwendung des gleichen Objektivs Längen an Gegenständen unter dem Mikroskop messen. Bei Eichung und Messungen ist stets auf Parallaxenfreiheit zu achten.

Beispiel. Wir benutzen unser Objektiv 8. Die Eichung ergibt, daß 0,1 cm des Objektivmikrometers ($49,5 \pm 0,1$) Teilstriche

des Okularmikrometers entsprechen. Es ist daher

$$1 \text{ Teilstrich} = \frac{0,1}{49,5} = 0,00202 \text{ cm.}$$

Als ein besonders geeignetes Übungsobjekt benutzen wir die sehr gut kreisrunden Öffnungen der Bohrungen in den Achatlagersteinen einer alten Taschenuhr. Die Steine sind zu diesem Zweck auf einer Messingplatte montiert, die unter dem Stein eine Bohrung für die Beleuchtung besitzt. Wir messen den Durchmesser der Öffnung. (Man beachte, daß nur die eine der beiden Öffnungen sehr gut kreisrund ist.)

Als Durchmesser des Loches ergab sich

$$d = (27,68 \pm 0,2) \text{ Teilstriche.}$$

(Mittelwert von fünf Messungen unter verschiedenen Azimuten.)

Daher beträgt der Durchmesser

$$d = 27,68 \cdot 0,00202 = 0,0559 \text{ cm.}$$

Fehlerrechnung. Der relative Fehler unsrer Eichung beträgt nach unsrer obigen Angabe $\pm 0,1/49,5 \approx \pm 0,002 = \pm 0,2\%$. Der relative Fehler der Messung der Durchmesser beträgt an sich $\pm 0,2/27,68 \approx \pm 0,008 = \pm 0,8\%$. Dazu kommt der Eichfehler, so daß der Gesamtfehler $\pm (0,2 + 0,8)\% = \pm 1\%$ beträgt.

Unser Endergebnis lautet also:

$$\underline{d = (0,0559 \pm 0,0006) \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad 0,0559 \text{ cm} \pm 1\% .}$$

Zu diesem Fehler kann noch ein kleiner Fehler kommen, der davon herrühren kann, daß die Einstellung auf Parallaxenfreiheit mit einer kleinen Unsicherheit behaftet ist, die sowohl die Eichung, wie die Messung von d betreffen kann.

22. Aufgabe. Brechungsindex eines Prismas

Literatur: W. § 273; M.-P. Bd. II/1, S. 97; K. S. 374 ff.

Ein Lichtstrahl erfährt beim Durchgang durch ein Prisma die kleinste Ablenkung (Minimum der Ablenkung), wenn er symmetrisch durch das Prisma hindurchgeht, d. h. wenn sein Eintrittswinkel in die erste Prismenfläche ebenso groß ist wie

sein Austrittswinkel aus der zweiten (Abb. 43). In diesem Fall gilt die Gleichung

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}. \quad (1)$$

Hier ist n der Brechungsindex des Prismas, γ sein brechender Winkel und δ der Winkel, um den der Strahl abgelenkt wird. Man kann also n berechnen, wenn δ und γ bekannt sind.

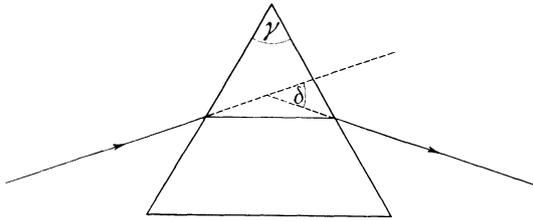


Abb. 43. Minimum der Ablenkung im Prisma.

Wir benutzen bei dieser Aufgabe ein ziemlich einfach gebautes Spektrometer. Sein Kollimatorrohr ist fest montiert und sein Fernrohr ist lediglich um die senkrechte Achse des Spektrometers schwenkbar und hat nur ein gewöhnliches Okular mit Fadenkreuz. Auch ist der Spektrometertisch, auf den das Prisma montiert ist, ein für allemal senkrecht zur Achse gestellt, so daß keine besonderen Justierungsmaßnahmen vorgenommen werden können. (Ein kleiner Fehler in der senkrechten Lage der Prismenflächen, der infolgedessen vorkommen könnte, wird also in Kauf genommen.) Wegen einer genaueren Beschreibung des Spektrometers verweisen wir auf die Lehrbücher der Physik.

Damit sämtliche durch das Prisma tretenden Strahlen der Bedingung des Minimums der Ablenkung genügen können, müssen sie unter sich parallel in das Prisma einfallen. Diesem Zweck dient der Kollimator, ein Rohr, das an der Eintrittsstelle des Lichtes einen vertikalen Spalt und am andern Ende eine Linse trägt. Befindet sich der Spalt in der Brennebene der Linse, so treten die von den einzelnen Punkten des Spaltes herkommenden Strahlen unter sich parallel aus der Linse aus. Wenn wir nun

das Fernrohr des Spektrometers auf unendlich einstellen und — mit oder ohne Zwischenschaltung des Prismas — in den Weg der parallelen Strahlen bringen, so erblicken wir ein scharfes Bild des Spaltes, wie wir bei der 19. Aufgabe ausführlich auseinandergesetzt haben. Ebenso wie dort dient das Fadenkreuz im Okular des Fernrohres hier u. a. auch dazu, die richtige Einstellung des Spaltes in die Brennebene an der Parallaxenfreiheit von Spalt und Fadenkreuz zu erkennen.

Wir beginnen mit der Einstellung des Fernrohres auf unendlich an einem offenen Fenster und mit der Einstellung des verschiebbaren Fadenkreuzes, das gegenüber der fernen Umgebung keine Parallaxe zeigen darf. Alles weitere muß in einem verdunkelten Raum erfolgen. Zunächst schwenken wir das Fernrohr so, daß wir unmittelbar in das Kollimatorrohr hineinsehen, beleuchten den Spalt mit einer Glühlampe und verschieben ihn so lange, bis er nicht nur im Fernrohr scharf erscheint, sondern auch keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt. Damit ist das Spektrometer für unsre Messungen vorbereitet.

I. Messung des brechenden Winkels

Zur Messung der brechenden Winkel γ stellen wir das Prisma so auf den Spektrometertisch, daß seine brechende Kante auf

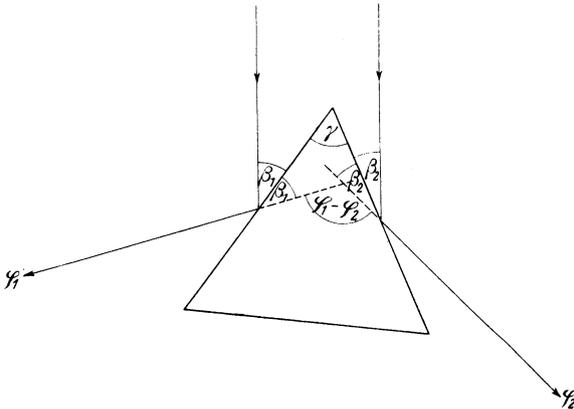


Abb. 44. Zur Messung des brechenden Winkels.

das Kollimatorrohr hinweist (Abb. 44), und beleuchten den Spalt mit einer Glühlampe. Dann schwenken wir das Fernrohr einmal

nach rechts, dann nach links so weit, daß wir das Spiegelbild des Spaltes in der betreffenden Prismenfläche im Fernrohr erblicken, und stellen dieses sehr genau so ein, daß das Bild der festen Spaltbacke mit dem Fadenkreuz zusammenfällt. Spektrometerspalte haben eine feste und eine bewegliche Backe, mittels derer man die Spaltbreite regeln kann. Maßgebend ist bei allen Messungen die feste Backe, weil bei dieser keine zufällige Verschiebung zu befürchten ist, durch die Meßfehler entstehen könnten. Die Spaltbreite wähle man nicht zu groß, aber auch nicht zu klein, da letzteres oft die Auffindung des Spaltbildes erschwert.

Wir wollen die Winkelstellungen des Fernrohres in diesen beiden Lagen, wie wir sie mit Hilfe eines Nonius an der Kreisteilung ablesen, mit φ_1 und φ_2 bezeichnen (Abb. 44), so daß $\varphi_1 - \varphi_2$ der Winkel ist, um den wir das Fernrohr beim Übergang von der einen Prismenfläche zur andern schwenken müssen. Die Winkel, die die einfallenden Strahlen mit den Prismenflächen bilden, seien β_1 und β_2 . Dann liest man aus Abb. 44 ab:

$$\gamma + \beta_1 + \beta_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{und} \quad \beta_1 + \beta_2 = \gamma.$$

Also ist

$$\gamma = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}. \quad (2)$$

Die meisten Spektrometer besitzen rechts und links vom Fernrohr zwei um 180° gegeneinander versetzte Nonien. Man liest stets an beiden Nonien ab, um den Einfluß etwaiger Kreisteilungsfehler herabzusetzen. Wir erhalten also zwei Wertepaare, die wir mit φ'_1, φ'_2 und φ''_1, φ''_2 bezeichnen, und die wegen der unvermeidlichen kleinen Einstellungs- und Ablesefehler zwei in der Regel etwas verschiedene Werte von γ ergeben, die wir mit γ' und γ'' bezeichnen. Aus ihnen nehmen wir dann das arithmetische Mittel γ . Demnach ist nach Gl. (4):

$$\gamma' = \frac{\varphi'_1 - \varphi'_2}{2}, \quad \gamma'' = \frac{\varphi''_1 - \varphi''_2}{2}.$$

Wir berechnen also schließlich unser Ergebnis γ nach der Gleichung

$$\gamma = \frac{\gamma' + \gamma''}{2} = \frac{1}{4} (\varphi'_1 - \varphi'_2 + \varphi''_1 - \varphi''_2). \quad (3)$$

Tabelle 1.

Ablenkung links					
Linker Nonius			Rechter Nonius		
174° 25'	+	9 81	354° 25'	+	2 4
23'	-	11 121	22'	-	28 784
24'	-	1 1	25'	+	2 4
24'	-	1 1	27'	+	22 484
24,5'	+	4 16	25'	+	2 4
174° 24,1'		220	354° 24,8'		1280

Ablenkung rechts					
Linker Nonius			Rechter Nonius		
54° 25'	-	6 36	234° 26'	-	8 64
24,5'	-	11 121	26'	-	8 64
27'	+	14 196	28'	+	12 144
27'	+	14 196	28,5'	+	17 389
24,5'	-	11 121	25,5'	-	13 169
54° 25,6'		680	234° 26,8'		830

Beispiel. Wir teilen in Tabelle 1 unsere sämtlichen Einzelmessungen mit. Unser Nonius ist auf 0,5' ablesbar. Wir haben immer abwechselnd die Ablenkung nach rechts und nach links gemessen.

Wir erhalten also die beiden folgenden Werte:

Linker Nonius:

$$2 \gamma' = \varphi_1' - \varphi_2' = 174^\circ 24,1' - 54^\circ 25,6' = 119^\circ 58,5'.$$

Rechter Nonius:

$$2 \gamma'' = \varphi_1'' - \varphi_2'' = 354^\circ 24,8' - 234^\circ 26,8' = 119^\circ 58,0'.$$

Im Mittel erhalten wir:

$$2 \gamma = 119^\circ 58,25' \quad \text{und} \quad \gamma = 59^\circ 59,13'.$$

Fehlerrechnung. Im Hinblick auf die große Genauigkeit unserer Messungen wollen wir hier ausnahmsweise den mittleren (quadratischen) Fehler unsres Ergebnisses nach Einl. § 11, Gl. (8) berechnen. Tabelle 1 enthält bereits die nötigen Angaben in Einheiten der 1. Dezimale der Winkelminuten. Nach Gl. (3) ist

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_1'} = \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_1''} = + \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_2'} = \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_2''} = - \frac{1}{4} \quad (4)$$

Die Fehler der Winkel $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi''_1, \varphi''_2$ gemäß Einl. § 9, Gl. (1) können wir nach den Angaben der Tabelle 1 berechnen.

Z. B. ist $(\Delta \varphi'_1)^2 = \frac{220}{4 \cdot 5}$ und entsprechend für die übrigen

Winkel. Demnach erhalten wir nach Einl. § 11, Gl. (8) mit den Zahlen der Tabelle 1:

$$\Delta \gamma = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{220 + 1280 + 680 + 830}{4 \cdot 5}} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2010}{20}}$$

$\approx \pm 2,5$ Einheiten der 1. Dezimale der Winkelminuten.

Der mittlere Fehler von γ beträgt also $\Delta \gamma = \pm 0,25'$, und wir erhalten das Ergebnis:

$$\underline{\underline{\gamma = (59^\circ 59,13' + 0,25') \quad \text{bzw.} \quad 59^\circ 59,13' \pm 0,007\%}}$$

II. Das Minimum der Ablenkung

Nunmehr messen wir den Winkel minimaler Ablenkung. Dieser ist für verschiedene Wellenlängen verschieden groß, da er vom Brechungsindex n abhängt. Es ist im allgemeinen üblich,

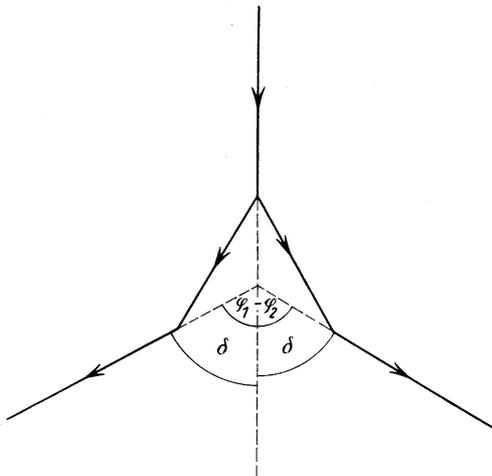


Abb. 45. Zur Messung des Winkels minimaler Ablenkung.

den Brechungsindex für die Wellenlänge der gelben D -Linie des Natriums anzugeben. Deshalb verwenden wir als Lichtquelle jetzt eine mit Kochsalz gefärbte Bunsenflamme, die wir vor dem

Spalt aufstellen, aber in solcher Entfernung, daß der Spalt nicht durch sie gefährdet wird, am besten unter Zwischenschaltung einer Glasplatte. Wir stellen das Prisma so auf den Spektrometertisch, daß das vom Kollimator kommende Licht in eine der beiden brechenden Flächen einfällt, suchen den gebrochenen Strahl (zunächst oft am besten erst mit dem bloßen Auge) und richten das Fernrohr auf das Spaltbild. Dann drehen wir das Prisma derart, daß die Ablenkung kleiner wird, folgen mit dem Fernrohr und setzen das so lange fort, bis die Bewegung des Spaltbildes bei weiterer Drehung in der gleichen Richtung rückläufig zu werden beginnt. Jetzt stellen wir das Fadenkreuz in dieser Lage sorgfältig auf die feste Spaltbacke ein, prüfen die Minimalablenkung noch einmal durch eine kleine Hin- und Herdrehung des Prismas und lesen wie oben an beiden Nonien ab. Dann drehen wir das Prisma so, daß das Licht in die andere Fläche einfällt, so daß die Ablenkung nach der andern Seite erfolgt, und wiederholen die Messung. Aus Abb. 45 liest man ab, daß die Differenz der Ablesungen φ_1 und φ_2 gleich dem doppelten Ablenkungswinkel δ ist, daß also

$$\delta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}. \quad (5)$$

Genau wie oben erhalten wir wegen Verwendung zweier Nonien wieder zwei Wertepaare φ'_1, φ'_2 und φ''_1, φ''_2 und aus ihnen zwei vielleicht etwas verschiedene Werte $\delta' = (\varphi'_1 - \varphi'_2)/2$ und $\delta'' = (\varphi''_1 - \varphi''_2)/2$, aus denen wir das Mittel $\delta = (\delta' + \delta'')/2$ nehmen, so daß wir tatsächlich δ nach der Gleichung

$$\delta = \frac{1}{4}(\varphi'_1 - \varphi'_2 + \varphi''_1 - \varphi''_2) \quad (6)$$

berechnen.

Tabelle 2.

Ablenkung links					
Linker Nonius			Rechter Nonius		
171° 36'	— 12	144	351° 36'	— 16	256
37,5'	+ 3	9	38'	+ 4	16
38'	+ 8	64	38,5'	+ 9	81
38'	+ 8	64	38'	+ 4	16
36,5'	— 7	49	37,5'	— 1	1
171° 37,2'		330	351° 37,6'		370

Ablenkung rechts					
Linker Nonius			Rechter Nonius		
75° 13'	- 7	49	255° 14'	- 5	25
15,5'	+ 18	324	15'	+ 5	25
14,5'	+ 8	64	15,5'	+ 10	100
13'	- 7	49	15'	+ 5	25
12,5'	- 12	144	13'	- 15	225
75° 13,7'		630	255° 14,5'		400

Beispiel. Tabelle 2 gibt unsre sämtlichen Einzelmessungen. Wir haben, wie oben, immer abwechselnd nach rechts und nach links abgelenkt.

Für die Differenz der Ablesungen erhalten wir also die beiden Werte:

Linker Nonius:

$$2 \delta' = \varphi_1' - \varphi_2' = 351^\circ 37,6' - 255^\circ 14,5' = 96^\circ 23,1'.$$

Rechter Nonius:

$$2 \delta'' = \varphi_1'' - \varphi_2'' = 171^\circ 37,2' - 75^\circ 13,7' = 96^\circ 23,5',$$

mit dem Mittelwert $96^\circ 23,3'$. Daraus folgt für den Winkel minimaler Ablenkung:

$$\delta = 48^\circ 11,65'.$$

Fehlerrechnung. Die Fehlerrechnung gestaltet sich, wie man aus Gl. (6) sieht, genau wie oben. Als mittleren quadratischen Fehler von δ erhalten wir also mit den Angaben der Tabelle 2:

$$\begin{aligned} \Delta \delta &= \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{330 + 370 + 630 + 400}{4 \cdot 5}} \\ &= \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1730}{20}} = \pm 2,3 \approx \pm 2,5. \end{aligned}$$

Da dies wieder in Einheiten der 1. Dezimale der Winkelminuten ausgedrückt ist, so ist $\Delta \delta \pm 0,25'$. Unser Ergebnis lautet also:

$$\delta = \underline{\underline{48^\circ 11,65' \pm 0,25'}} \quad \text{bzw.} \quad 48^\circ 11,65' \pm 0,008 \%.$$

III. Berechnung des Brechungsindex

Nunmehr berechnen wir den Brechungsindex n nach Gl. (1). Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\delta + \gamma}{2} &= 54^\circ 5,39', & \frac{\gamma}{2} &= 29^\circ 59,57', \\ \sin \frac{\delta + \gamma}{2} &= 0,80994, & \sin \frac{\gamma}{2} &= 0,49990. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$n = 1,62020.$$

Fehlerrechnung. Wir berechnen auch für n den mittleren Fehler. Zunächst bilden wir nach Gl. (1) die partiellen Differentialquotienten $\partial n / \partial \delta$ und $\partial n / \partial \gamma$, für die sich Ausdrücke ergeben, die man in folgender Form schreiben kann:

$$\frac{\partial n}{\partial \delta} = \frac{n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta + \gamma}{2}, \quad \frac{\partial n}{\partial \gamma} = -\frac{n}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\delta + \gamma}{2} \right). \quad (9)$$

Es ist

$$\operatorname{ctg} \frac{\delta + \gamma}{2} = 0,724, \quad \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 1,733,$$

so daß

$$\frac{\partial n}{\partial \delta} = 0,362 n, \quad \frac{\partial n}{\partial \gamma} = -0,505 n.$$

Als mittlerer absoluter Fehler von n ergibt sich also nach Einl. § 11, Gl. (8):

$$\Delta n = \pm n \sqrt{(0,362 \Delta \delta)^2 + (0,505 \Delta \gamma)^2}. \quad (10)$$

Die Anwendung der Gleichung Einl. § 11, Gl. (8), setzt voraus, daß wir die Fehler $\Delta \delta$ und $\Delta \gamma$ in Bogenmaß angeben. Die Fehler sowohl von δ wie von γ betragen $\pm 0,25' = \pm 0,00417^\circ = \pm 0,00417 \cdot 0,01745 = \pm 0,726 \cdot 10^{-4}$ Winkleinheiten im Bogenmaß. Setzen wir dies in Gl. (10) ein und dividieren durch n , so erhalten wir den mittleren relativen Fehler von n :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n} &= \pm 0,726 \cdot 10^{-4} \sqrt{0,362^2 + 0,505^2} \\ &= \pm 0,726 \cdot 10^{-4} \sqrt{0,387} \approx \pm 0,6 \cdot 10^{-4} = \pm 0,006 \%, \end{aligned}$$

und der mittlere absolute Fehler von n beträgt:

$$\Delta n = \pm 1,6202 \cdot 0,6 \cdot 10^{-4} \approx \pm 1,0 \cdot 10^{-4} = \pm 0,0001.$$

Demnach lautet unser Endergebnis

$$\Delta n = (1,6202 \pm 0,0001) \quad \text{bzw.} \quad 1,6202 \pm 0,006 \%$$

Wir haben hier einmal die Berechnung des mittleren Fehlers, statt des Größtfehlers, an einem besonders geeigneten Fall konsequent durchgeführt, um ein Beispiel des Verfahrens zu geben. Es unterscheidet sich von der Berechnung des Größtfehlers lediglich durch die Bildung der Wurzel aus der Fehlerquadratsumme statt der Bildung der Fehlersumme, ist also, wie man sieht, rechnerisch nur wenig umständlicher.

Wir wollen uns aber darüber klar sein, daß der wirkliche Fehler unsrer Messung merklich größer sein kann, da unser Spektrometer kleine Justierungsfehler und kleine systematische Teilungsfehler haben kann. Auch konnten wir nicht nachprüfen, ob die brechenden Flächen des Prismas tatsächlich genau parallel zur Spektrometerachse gestanden haben. Derartige Fehlerquellen können nur durch zusätzliche Einrichtungen am Spektrometer geprüft und beseitigt werden.

23. Aufgabe. Wellenlängenmessung mit dem Gitter

Literatur: W. § 294; M.-P. Bd. II/1, S. 808.

Fällt paralleles Licht der Wellenlänge λ senkrecht auf ein Strichgitter, dessen Striche voneinander die Abstände D (Gitter-

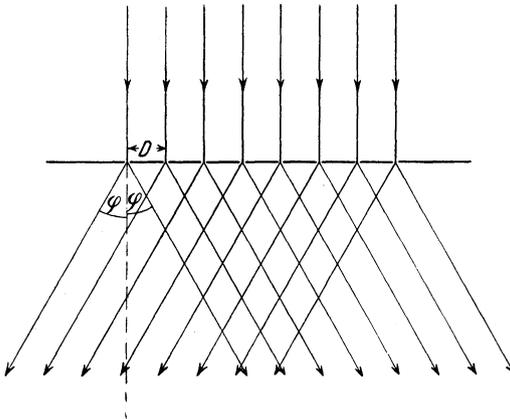


Abb. 46. Beugung 1. Ordnung am Gitter.

konstante) haben, so wird es in 1. Ordnung unter einem Winkel φ nach beiden Seiten abgelenkt, für den die Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{D} \quad (1)$$

gilt (Abb. 46). Ist die Gitterkonstante D bekannt, so kann aus dem Winkel φ die Wellenlänge λ berechnet werden. Unsere Aufgabe ist es, die Gitterkonstante eines Gitters zu bestimmen und dann mittels des Gitters die Wellenlängen der drei ersten Linien (H_α , H_β , H_γ) der Balmer-Serie des Wasserstoffs zu messen.

Wir benutzen eine höchst einfache Gitteraufstellung. Das Gitter ist eine Kollodiumkopie eines sehr fein geteilten Original-Rowland-Gitters (students hand grating von Hilger). Als Lichtquelle dient eine mit dem zu untersuchenden Gas gefüllte Entladungsröhre (Abb. 47), deren Kapillare eine so schmale leuchtende Linie bildet, daß wir einen Spalt entbehren können. Sie wird mit einem kleinen Induktor betrieben. Wir stellen das Gitter G in etwa 100 cm Entfernung von der Spektralröhre S so auf, daß seine Striche parallel zur Kapillare sind (Abb. 48), und blicken mit bloßem Auge durch das Gitter. Dann sehen wir rechts und links das Spektrum des leuchtenden Gases in 1. Ordnung. Die Spektralröhre ist dicht vor der Mitte einer 200 cm langen Skala Sk angebracht, auf der wir die Lage der einzelnen Spektrallinien ablesen können. Aus dem Abstand zwischen den homologen Linien im rechten und im linken Spektrum und dem Abstand des Gitters von der Skala kann $\sin \varphi$ für jede Spektrallinie ermittelt werden. (Da wir keine Kollimatorlinse verwenden, ist die Bedingung der Parallelität des auf das Gitter fallenden Lichtes nicht streng erfüllt. Doch beträgt die größte vorkommende Abweichung vom senkrechten Einfall weniger als $0,5^\circ$.)



Abb. 47.
Spektralröhre.

Die Gitterkonstante D unsres Gitters ist so klein, daß die Gitterstruktur im Mikroskop nicht mehr deutlich aufgelöst wird und die Ausmessung mit dem Mikroskop auf Schwierigkeiten stößt. Deshalb eichen wir das Gitter mit Hilfe einiger genau bekannter

Wellenlängen des Heliumspektrums und bestimmen die Gitterkonstante nach Gl. (1) $D = \lambda/\sin \varphi$. Dann ersetzen wir das Heliumrohr durch ein mit Wasserstoff gefülltes Rohr und bestimmen die Wellenlängen der oben genannten Linien mit Hilfe

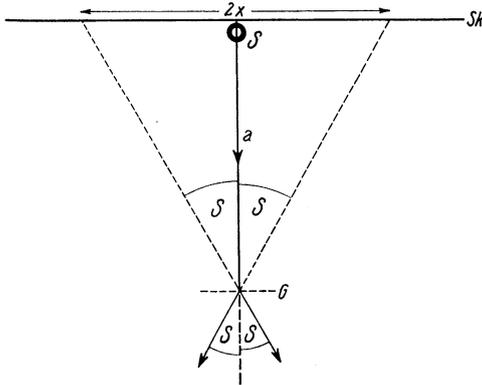


Abb. 48. Einfache Gitteraufstellung.

des nunmehr bekannten D -Wertes. Es sei $2x$ der Abstand zweier homologer Linien im rechten und im linken Spektrum, also x die auf der Skala gemessene Ablenkung, a der Abstand der Skala vom Gitter. Dann ist

$$\sin \varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \text{also} \quad D = \lambda \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}. \quad (2)$$

Bei schwacher, aber noch ausreichender Beleuchtung kann die Lage der Spektrallinien (ihre Mitte) auf der Skala unmittelbar abgelesen werden. Man kann aber auch einen Schieber auf der Skala anbringen und zwei Studenten gemeinsam arbeiten lassen, von denen der eine beobachtet und der zweite auf Kommando des ersten den Schieber so lange verschiebt, bis sein Rand auf die Mitte der betreffenden Linie fällt. Die Lage des Schiebers wird dann bei Helligkeit abgelesen.

I. Messung der Gitterkonstanten

Zur Eichung benutzen wir die in Tabelle 1 angegebenen Linien des Heliums ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$).

Tabelle 1.

7065,2 Å dunkelrot, schwach
 6678,1 Å rot, stark
 5875,6 Å gelb, stark
 5015,7 Å grün, stark
 4921,9 Å grün, schwach
 4713,1 Å blaugrün, mittelstark
 4471,5 Å blau, stark.

Beispiel. Der Abstand des Gitters von der Skala betrug

$$a = (94,8 \pm 0,05) \text{ cm.}$$

Tabelle 2 zeigt unsre Ergebnisse. Die Ablesungen erfolgten auf 0,05 cm genau.

Tabelle 2.

λ Å	Rechts cm	Links cm	$2x$ cm	x cm	D Å		
7065,2	145,1	57,0	88,1	44,05	16 765	+ 28	784
6678,1	142,0	59,7	82,3	41,15	742	+ 5	25
5875,6	136,5	64,9	71,6	35,8	763	+ 26	676
5015,7	130,3	70,7	59,6	29,8	726	- 11	121
4921,9	129,7	71,4	58,3	29,15	747	+ 10	100
4713,1	128,5	72,8	55,7	27,85	721	- 16	256
4471,5	126,9	74,2	52,7	26,35	695	- 42	1764
					16 737		3726

Wir erhalten also als Mittelwert

$$D = 16737 \text{ Å.}$$

Fehlerrechnung. Wir berechnen zunächst den mittleren Fehler von D , wie er sich aus der Streuung der Einzelwerte ergibt, nach den in Tabelle 2 gemachten Angaben. Es ergibt sich

$$\Delta D = \pm \sqrt{\frac{3726}{6 \cdot 7}} = \pm 9,42 \approx \pm 10 \text{ Å.}$$

Dieser Fehler rührt lediglich von der Unsicherheit der einzelnen x -Werte her. Aber auch der Wert von a ist mit einer gewissen Unsicherheit behaftet und kann einen systematischen Fehler von unbestimmtem Vorzeichen in die Ergebnisse bringen. Ziehen wir jetzt nur a in Betracht, so beträgt der von einem Fehler

von a allein herrührende relative Fehleranteil von D nach Gl. (2):

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta(a^2 + x^2)}{a^2 + x^2} = \pm \frac{a \Delta a}{a^2 + x^2}. \quad (3)$$

Wir wollen mit dem mittleren Wert $x = 35$ cm rechnen. Dann ist $a^2 + x^2 \approx 10400$. Δa haben wir oben bereits mit $\pm 0,05$ cm angegeben. Dann ist

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm \frac{94,8 \cdot 0,05}{10400} \approx \pm 0,00045$$

und

$$\Delta D = \pm 0,00045 \cdot 16737 = \pm 7,5 \text{ \AA}.$$

Dieser Fehler kommt zu dem obigen hinzu. Demnach beträgt der Größtfehler $\Delta D = \pm 17,5 \approx \pm 18 \text{ \AA}$. Damit erhalten wir das Ergebnis:

$$\underline{D = (16737 \pm 18) \text{ \AA} \quad \text{bzw.} \quad 16737 \text{ \AA} \pm 0,11 \%}.$$

Da $1 \text{ \AA} = 10^{-8}$ cm, also $D = 1,6737 \cdot 10^{-4}$ cm, so entfallen auf 1 cm des Gitters rund 6000 Gitterstriche.

II. Die Wellenlängen der Wasserstofflinien

Wir untersuchen nunmehr die Linien H_α (rot), H_β (blaugrün) und H_γ (violett) des Wasserstoffs. Tabelle 3 zeigt unsere Ergebnisse.

Tabelle 3.

	Rechts cm	Links cm	$2x$ cm	x cm	λ \AA
H_α	141,3	60,5	80,8	40,4	6561,8
H_β	129,4	71,9	57,5	28,75	4857,2
H_γ	126,05	76,05	51,0	25,5	4347,6

Fehlerrechnung. Wenn wir die zur Eichung benutzten Wellenlängen mit λ_0 bezeichnen, die jeweils zu ihnen gehörigen x -Werte mit x_0 , so leitet man aus Gl. (1) und (2) ab, daß wir (von der Mittelwertbildung bei der Berechnung von D abgesehen) die λ -Werte der Tabelle 3 nach der Gleichung

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{a^2 + x_0^2}{a^2 + x^2}} \frac{x}{x_0} \quad (4)$$

berechnet haben. Dabei ist a in beiden Fällen streng gleich groß, da wir an der Gitteraufstellung inzwischen nichts verändert haben. Nun sind, wie man aus unsern Zahlen sieht, x^2 und x_0^3 ziemlich klein gegen a^2 , so daß auch die Fehler von x und x_0 zum Fehler der Wurzel $\sqrt{(a^2 + x_0^2)/(a^2 + x^2)}$ nur wenig beitragen. Daher trägt auch der Fehler dieser Wurzel zum Gesamtfehler von λ nur wenig bei. Wir wollen sie daher bei der Fehlerrechnung als fehlerfrei behandeln. Dann ergibt sich als relativer Größtfehler von λ nach Gl. (4):

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \pm \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x_0}{x_0} \right). \quad (5)$$

Aus unsern Beobachtungen bei den Messungen können wir schätzen, daß die einzelnen x -Werte auf $\pm 0,05$ cm unsicher sind. Wir haben aber ein Mittel, um uns darüber ein zuverlässigeres Urteil zu verschaffen. Wir wollen die Ablesungen rechts und links mit x_1 und x_2 bezeichnen. Dann sollte die Größe

$$s = x_1 + x_2 \quad (6)$$

stets gleich groß und gleich dem doppelten Betrage der Koordinate der Kapillaren auf der Skala sein. Der Größtfehler von s beträgt nach Gl. (6) $\Delta s = \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2)$. Wir haben ferner oben x nach der Gleichung $x = (x_1 - x_2)/2$ berechnet, so daß

$$\Delta x = \pm \frac{1}{2} (\Delta x_1 + \Delta x_2) = \pm \frac{1}{2} \Delta s. \quad (7)$$

Aus Tabelle 2 und 3 entnehmen wir die in Tabelle 4 zusammengestellten Zahlenwerte und berechnen aus ihnen den mittleren Fehler von s . Es ergibt sich $\Delta s = \pm \sqrt{119/(9 \cdot 10)} = \pm 1,14$ Ein-

Tabelle 4.

$s = 202,1$ cm	+ 7	49
1,7	+ 3	9
1,4	0	0
1,0	- 4	16
1,1	- 3	9
1,3	- 1	1
1,1	- 3	9
1,8	+ 4	16
1,3	- 1	1
1,1	- 3	9
201,4 cm		119

heiten der 1. Dezimale $\approx \pm 0,1$ cm. Damit erhalten wir $\Delta x = \pm 0,05$ cm, genau wie wir es geschätzt haben. Das gleiche haben wir natürlich für x_0 anzusetzen. Für x_0 wollen wir wieder den mittleren Wert $x_0 = 35$ cm ansetzen. Dann ergeben sich die folgenden relativen Größtfehler:

$$H_\alpha: \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \pm \left(\frac{0,05}{40,4} + \frac{0,05}{35} \right) = \pm 0,00268 \approx \pm 0,003 = \pm 0,3 \%,$$

$$\Delta \lambda = \pm 0,003 \cdot 6561,8 \approx \pm 20 \text{ \AA};$$

$$H_\beta: \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \pm \left(\frac{0,05}{28,75} + \frac{0,05}{35} \right) = \pm 0,00318 \approx \pm 0,003 = \pm 0,3 \%,$$

$$\Delta \lambda = \pm 0,003 \cdot 4857,2 \approx \pm 15 \text{ \AA};$$

$$H_\gamma: \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \pm \left(\frac{0,05}{25,5} + \frac{0,05}{35} \right) = \pm 0,00339 \approx \pm 0,0035 = \pm 0,35 \%,$$

$$\Delta \lambda = \pm 0,0035 \cdot 4347,6 \approx \pm 15 \text{ \AA}.$$

Unser entsprechend abgerundetes Endergebnis lautet also:

$$\underline{H_\alpha: \lambda = (6562 \pm 18) \text{ \AA} \text{ bzw. } 6562 \text{ \AA} \pm 0,3 \%,}$$

$$\underline{H_\beta: \lambda = (4857 \pm 15) \text{ \AA} \text{ bzw. } 4857 \text{ \AA} \pm 0,35 \%,}$$

$$\underline{H_\gamma: \lambda = (4348 \pm 15) \text{ \AA} \text{ bzw. } 4348 \text{ \AA} \pm 0,35 \%.}$$

Es ist interessant zu bemerken, daß unsre Messungen in Wirklichkeit erheblich genauer sind. Die richtigen Werte betragen 6562,8, 4861,3 und 4340,5 Å. Ein Vergleich mit den nicht abgerundeten Zahlen der Tabelle 3 zeigt, daß unsre wirklichen Fehler nur $-1,0$, $-4,9$ und $+7,6$ Å betragen haben.

24. Aufgabe. Lichtmessung

Literatur: W. § 265; M.-P. Bd. II/1, S. 1166; K. S. 469.

Bringt eine Lichtquelle von der Lichtstärke J auf einer Fläche, die sich senkrecht zu dem auf sie fallenden Lichtstrom in der Entfernung r von der Lichtquelle befindet, die gleiche Beleuchtungsstärke hervor wie eine zweite Lichtquelle von der Lichtstärke J_0 im Abstände r_0 , so gilt

$$\frac{J}{J_0} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \quad \text{oder} \quad J = J_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2. \quad (1)$$

Dieses photometrische Entfernungsgesetz gibt eine Möglichkeit zum Vergleich zweier Lichtstärken bzw. zur Messung einer Lichtstärke J , wenn ein Normal von der Lichtstärke J_0 zur Verfügung steht. Die reichsdeutsche gesetzliche Einheit der Lichtstärke ist 1 Hefnerkerze (HK). Geräte zur Lichtmessung (Photometrie) heißen Photometer.

Unsre Aufgabe besteht in der Messung der Lichtstärke einer Glühlampe bei verschiedenen Strombelastungen durch Vergleich mit einer zweiten, als Normal dienenden Glühlampe. Wir benutzen zu diesem Zweck das besonders einfache Fettfleckphotometer. Es besteht aus einem in einen Rahmen gespannten Blatt Schreibpapier, auf dem — am besten mit einem zerlassenen Flöckchen Stearin — ein kleiner Fettfleck erzeugt wird. Wird

das Blatt von beiden Seiten her gleich stark beleuchtet, so hebt sich der Fettfleck nur sehr wenig von seiner Umgebung ab. Ein vollständiges Verschwinden ist nie zu erreichen; auch ist die Erscheinung von der Betrachtungsrichtung abhängig. Es empfiehlt sich, eine Einrichtung zu verwenden, mit der man beide Seiten des Blattes gleichzeitig unter gleichen Winkeln betrachten kann (Abb. 49). An dem das Blatt mit dem Fettfleck F haltenden

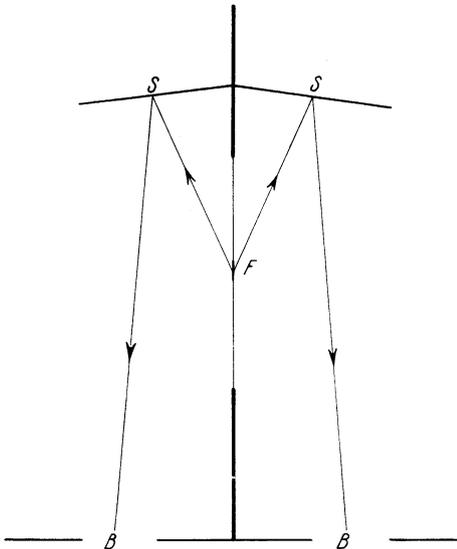


Abb. 49. Fettfleckphotometer.

Rahmen ist auf jeder Seite ein unter einem geeigneten Winkel gegen das Blatt geneigter Spiegel S sowie eine Lochblende B angebracht. Die beiden Lochblenden haben Augenabstand, und man erblickt durch sie hindurch auf dem Wege über die Spiegel den Fettfleck von beiden Seiten unter gleichen Winkeln. Es herrscht auf beiden Seiten die gleiche Beleuchtungsstärke, wenn

der Fettfleck auf beiden Seiten den gleichen Kontrast gegenüber seiner Umgebung zeigt.

Die zu untersuchende Glühlampe J und die Vergleichsglühlampe J_0 stehen im Abstande l voneinander an den Enden einer mit mm-Teilung versehenen Schiene (Photometerbank), auf der das zwischen den Lampen stehende Photometer P meßbar ver-

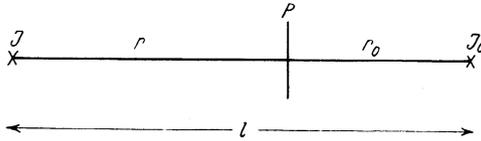


Abb. 50. Zur Lichtmessung.

schohen werden kann (Abb. 50). Jedes fremde Licht muß vom Versuchsraum ferngehalten werden.

Beträgt die an der Lampe liegende Spannung U Volt, der in ihr fließende Strom i Ampere, so wird in ihr die elektrische Leistung

$$L = U i \text{ Watt} \quad (2)$$

aufgewendet. Wir verwenden die in Abb. 51 dargestellte Schaltung und messen die Spannung U mit dem Spannungsmesser V , die Stromstärke i mit dem Strommesser A . Mit Hilfe des veränderlichen Widerstands R können U und i und damit L verändert werden. S ist ein Schalter. (Vgl. hierzu die 25. Aufgabe.)

Aus diesen Messungen wollen wir zweitens die Abhängigkeit des optischen Wirkungsgrades η der Lampe, d. h. des Verhältnisses Lichtstärke : Leistung,

$$\eta = \frac{J}{L} \text{ HK} \cdot \text{Watt}^{-1}, \quad (3)$$

von der Leistung berechnen.

Drittens wollen wir berechnen, mit welcher Potenz der absoluten Temperatur T des Fadens die Lichtstärke unserer Lampe

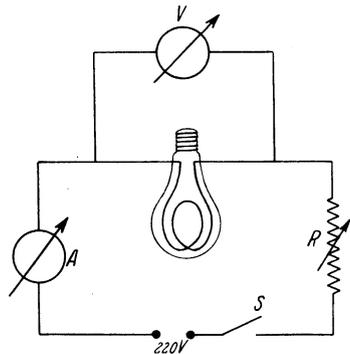


Abb. 51. Schaltung zur Messung der elektrischen Leistung.

ansteigt. Diese Potenz x ist in dem von uns untersuchten Bereich ziemlich gut konstant, so daß angenähert

$$J = \text{const } T^x. \quad (4)$$

Andrerseits ist die Wärmeabgabe des Fadens durch Strahlung bei den in Frage kommenden Temperaturen angenähert der 4. Potenz von T proportional (Stefan-Boltzmannsches Gesetz), und das gleiche muß dann für die aufgewendete elektrische Leistung gelten, die ja jene Wärmeabgabe wieder ausgleichen muß. Es ist also angenähert

$$L = \text{const } T^4. \quad (5)$$

Aus Gl. (4) und (5) folgt:

$$\lg J = a + \frac{x}{4} \lg L, \quad (6)$$

wobei a eine uns hier nicht interessierende Konstante ist. Wir können also den Exponenten x aus zwei Wertepaaren J, L berechnen.

Beispiel. In der Regel wird genügend Zeit sein, um zwei verschiedene Lampen — eine Metallfadenlampe und eine Kohlefadenlampe — zu untersuchen. Das ist wegen ihres sehr verschiedenen Verhaltens lehrreich und zeigt sehr deutlich die große Überlegenheit der Metallfadenlampe. Wir beschränken uns hier auf die Messungen an einer Kohlefadenlampe, da diejenigen an der Metallfadenlampe meßtechnisch nichts Neues bieten.

Als Normal dient uns eine Metallfadenlampe, deren Lichtstärke zu $J_0 = 15,0$ HK angegeben ist. Beide Lampen liegen am Lichtnetz (220 Volt), die Kohlefadenlampe in der oben beschriebenen Schaltung. Die zu untersuchende Lampe steht auf

$r = 114,3$ cm	+ 11	121	dem Teilstrich 0, das Normal auf dem Teilstrich 200 cm der Photometerbank. (Wegen der räumlichen Ausdehnung der Lampen sind natürlich diese Ortsangaben und daher auch alle Abstandsangaben in gewissem Grade unsicher.)
4,0	+ 8	64	
2,5	-- 7	49	
2,3	-- 9	81	
3,0	-- 2	4	
113,2 cm		319	

Tabelle 1 gibt als Beispiel sämtliche Einzelmessungen bei voller Belastung der Lampe, also bei $U = 220$ Volt, r ist der Abstand der zu untersuchenden Lampe vom Photometer, $r_0 = l - r$ derjenige des Normals ($l = 200$ cm).

Als Mittelwert ergibt sich $r = 113,2$ cm, also $r_0 = 86,8$ cm. Dann folgt aus Gl. (1):

$$J = 15,0 \left(\frac{113,2}{86,8} \right)^2 = 25,53 \text{ HK.}$$

Die Stromstärke betrug $i = 0,262$ A, also die Leistung

$$L = 220 \cdot 0,262 = 57,65 \text{ Watt}$$

und der optische Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{25,53}{57,65} = 0,443 \text{ HK} \cdot \text{Watt}^{-1}.$$

Tabelle 2 gibt die Mittelwerte der übrigen Messungen.

Tabelle 2.

U Volt	i Amp.	L Watt	r cm	r_0 cm	J HK	η HK · Watt ⁻¹
150	0,163	24,46	49,3	150,7	1,61	0,066
160	178	28,49	58,7	141,3	2,60	091
170	191	32,48	68,4	131,6	4,05	125
180	206	37,10	78,4	121,6	6,23	168
190	218	42,43	87,4	112,6	9,05	213
200	232	46,40	95,8	104,2	12,66	273
210	248	52,08	105,7	94,3	18,88	363
220	262	57,65	113,2	86,8	25,53	443

Abb. 52 zeigt J und η als Funktion von L . Man sieht, wie schnell die Lichtstärke und der Wirkungsgrad mit der Belastung (mit der Fadentemperatur) ansteigen.

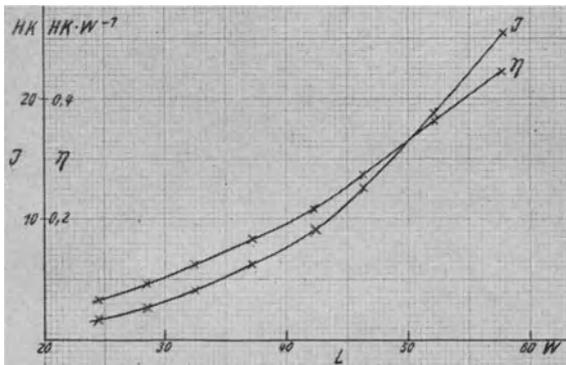


Abb. 52. Lichtstärke J und optischer Wirkungsgrad η einer Kohlefadenlampe als Funktion der elektrischen Leistung L .

Zur Berechnung des Exponenten x entnehmen wir aus Abb. 52 einige zusammengehörige Wertepaare von L und J und geben

Tabelle 3.

L Watt	J HK	$\log L$	$\log J$
25	1,7	1,40	0,23
30	3,1	48	49
35	5,0	54	70
40	7,8	60	89
45	11,4	65	1,06
50	16,4	70	21
55	22,2	74	34

in Tabelle 3 die Beträge von $\log L$ und $\log J$. Abb. 53 zeigt $\log J$ als Funktion von $\log L$.

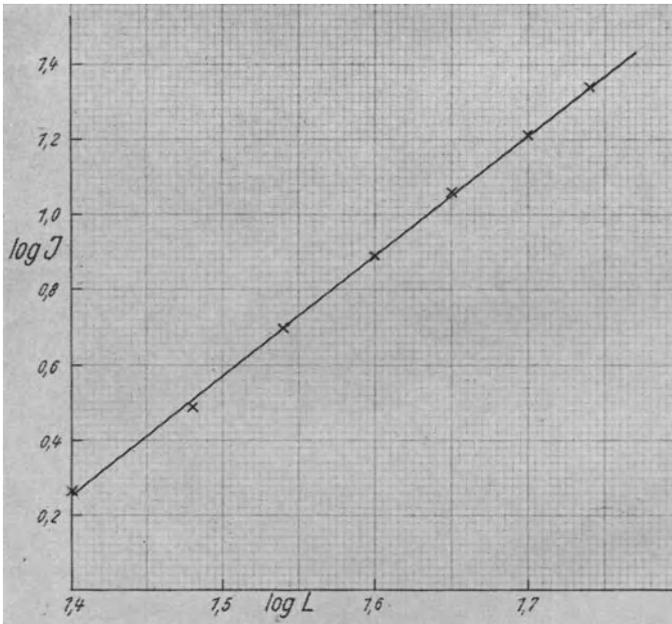


Abb. 53. $\log J$ als Funktion von $\log L$.

Es ergibt sich tatsächlich eine recht genau lineare Abhängigkeit, so daß auch x in unserem Meßbereich recht genau konstant ist. Wir entnehmen aus Abb. 53 die Wertepaare $\log L = 1,40$,

$\log J = 0,23$ und $\log L = 1,75$, $\log J = 1,39$ und erhalten damit nach Gl. (6) den Wert $x \approx 12$. Die Lichtstärke unserer Lampe steigt also in unserem Meßbereich etwa nach der Gleichung $J = \text{const } T^{12}$ mit der Temperatur an.

Fehlerrechnung. Wir wollen eine Fehlerrechnung nur für J und η bei voller Belastung ausführen. Da $r_0 = l - r$, so können wir Gl. (1) in der Form

$$J = J_0 \left(\frac{r}{l-r} \right)^2 = J_0 \left(\frac{l}{r} - 1 \right)^{-2} \quad (7)$$

schreiben. Da J_0 und l fest gegebene Werte sind, so beträgt der relative Fehler von J :

$$\frac{\Delta J}{J} = \pm 2 \frac{\Delta \left(\frac{l}{r} - 1 \right)}{\frac{l}{r} - 1} = \pm 2 \frac{\frac{l \Delta r}{r^2}}{\frac{l}{r} - 1} = \pm 2 \frac{l \Delta r}{r(l-r)} \quad (8)$$

Die nötigen Angaben zur Berechnung des mittleren Fehlers Δr enthält Tabelle 1. Es ergibt sich:

$$\Delta r = \pm \sqrt{\frac{319}{4 \cdot 5}} = \pm 4 \text{ Einheiten der 1. Dezimale} = \pm 0,4 \text{ cm.}$$

Dann folgt aus Gl. (8) mit $l = 200$ cm und $r = 113,2$ cm:

$$\frac{\Delta J}{J} = \pm 2 \frac{0,4 \cdot 200}{113,2 \cdot 86,8} = \pm 0,0163 = \pm 1,63 \% \approx \pm 2 \%$$

Bei der Berechnung des Fehlers von η wollen wir bedenken, daß die Leistung L jedenfalls sehr viel genauer als auf $\pm 2\%$ gemessen ist, so daß wir nur den Fehler von J zu berücksichtigen brauchen. Dann folgt aus Gl. (3):

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm \frac{\Delta J}{J} = \pm 2 \%$$

Unsre abgerundeten Endergebnisse lauten also für volle Belastung mit 220 Volt

$$\underline{J = (25,5 \pm 0,5) \text{ HK} \quad \text{bzw.} \quad 25,5 \text{ HK} \pm 2 \%,}$$

$$\underline{\eta = (0,44 \pm 0,01) \text{ HK} \cdot \text{W}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad 0,44 \text{ HK} \cdot \text{W}^{-1} \pm 2 \%.}$$

Als weiteres Ergebnis haben wir erhalten:

$$\underline{x \approx 12.}$$

V. Elektrizität und Magnetismus

25. Aufgabe. Widerstandsmessung mit Strom- und Spannungsmesser. Kennlinie einer Glühlampe

Literatur: W. § 152, 158; M.-P., Bd. IV/1, S. 441, 450; K. S. 561.

Der Widerstand R eines Leiters ist durch das Ohmsche Gesetz als das Verhältnis

$$R = \frac{U}{i} \quad (1)$$

der an dem Leiter liegenden Spannung U und des im Leiter fließenden Stromes i definiert. Mißt man U und i in den internationalen Einheiten 1 Ampere (A) und 1 Volt (V), so erhält man R in der internationalen Einheit 1 Ohm (Ω). Nach Gl. (1) kann man einen Widerstand mit Hilfe eines Spannungsmessers

und eines Strommessers unmittelbar bestimmen. Der Strommesser A wird mit dem Widerstand R in Reihe geschaltet; parallel zu R liegt der Spannungsmesser V . R' ist ein veränderlicher Widerstand, den wir bei unseren Messungen zur Änderung der Stromstärke brauchen werden. S bedeutet einen Schalter, der in keiner Schaltung fehlen darf (vgl. Einl. § 14).

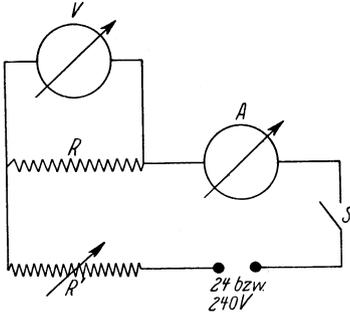


Abb. 54. Widerstandsmessung mit Strom- und Spannungsmesser.

Als Strom- und Spannungsmesser benutzen wir Drehspulgeräte mit den Meßbereichen 1,0 A bzw. 250 V. (Von dem kleinen Fehler der Strommessung, der davon herrührt, daß ein Teil des gemessenen Stromes durch den Spannungsmesser fließt, können wir hier absehen, da der Widerstand des Spannungsmessers sehr groß gegen die zu messenden Widerstände ist, dieser Stromanteil also nur ein sehr kleiner Bruchteil des Gesamtstromes ist.)

Der Widerstand eines Leiters hängt von seiner Temperatur ab. Da diese durch den im Leiter fließenden Strom erhöht wird, und zwar um so mehr, je größer die Stromstärke i ist, so hängt der Widerstand eines Leiters von seiner Strombelastung ab, es sei denn, daß man durch besondere Maßnahmen für Temperaturkonstanz sorgt. R ist also eine Funktion der Stromstärke,

$$R = R(i), \quad \text{so daß} \quad i = \frac{U}{R(i)}. \quad (2)$$

Die Kurve, welche i als Funktion von U darstellt, heißt die Kennlinie oder Charakteristik des Leiters. Bei festen und flüssigen Leitern ist sie bei konstanter Temperatur eine Gerade. Erwärmt sich aber der Leiter durch den Strom, so ist sie gekrümmt, und zwar nach unten, wenn der Widerstand mit der Temperatur zunimmt, nach oben, wenn er mit der Temperatur abnimmt.

Unsre Aufgabe besteht darin, die Kennlinien einer Metallfadenlampe und einer Kohlefadenlampe aufzunehmen und ihre Widerstände als Funktionen der Stromstärke darzustellen. Als Ergebnisse wollen wir die Lampenwiderstände R bei normaler Betriebsspannung (220 V) angeben und ihre normale Betriebsleistung berechnen, welche

$$L = U i \quad (3)$$

beträgt, und sich in der Einheit $1 \text{ V} \times 1 \text{ A} = 1 \text{ W}$ (Watt) ergibt (vgl. die 24. Aufgabe).

Um die Lampen verschieden stark belasten zu können, stehen erstens zwei verschiedene Spannungen, 24 V (Hausbatterie) und 220 V (Lichtnetz) zur Verfügung. Außerdem enthält unsere Schaltung den Regelwiderstand R' (Abb. 54). Damit wir auch bei Stromstärken messen können, die beträchtlich kleiner sind als die normale Betriebsstromstärke, müssen mit R' Widerstandswerte hergestellt werden, die sehr viel größer sind als die Lampenwiderstände selbst. So große Schiebewiderstände sind teuer. Deshalb empfiehlt sich die Anwendung zweier Widerstandssätze aus je fünf parallelgeschalteten Kohlefadenlampen. Diese Sätze können erstens in Reihen- oder Parallelschaltung verwendet werden. Zweitens kann der Widerstand jedes Satzes durch Ausschrauben einer oder mehrerer Lampen vergrößert werden. Unter Umständen empfiehlt sich auch die Hinzunahme einer Metall-

fadenlampe. Auf diese Weise können die mannigfachsten Widerstandsbeträge hergestellt werden, und es ist für den Studenten eine nützliche Übung, wenn er versucht, die Stromstärke auf diese Weise in wenigstens ungefähr gleichen Schritten zu steigern. Will man die noch verbleibenden Lücken besser schließen, so kann man noch einen Schiebewiderstand von etwa 500 Ω in den Stromkreis einschalten.

Bei der Messung gehen wir so vor, daß wir, von kleinsten Spannungen bis 220 V fortschreitend, 20 bis 25 Wertepaare von U und i aufnehmen und mit ihrer Hilfe die Kennlinie der Lampe zeichnen. Dabei glätten wir Unregelmäßigkeiten, wie sie durch Ablesefehler entstehen können, aus. Alsdann entnehmen wir aus der Kennlinie Wertepaare U, i , indem wir in Schritten von je 0,05 A fortschreiten, berechnen die diesen Wertepaaren entsprechenden Widerstände nach Gl. (1) und tragen R als Funktion von i auf. Dabei ist folgendes zu beachten. Bei kleiner Stromstärke ändert sich der Widerstand zunächst kaum, für $i \rightarrow 0$ ist also $dR/di \rightarrow 0$. Das bedeutet, daß die Kurve, die R als Funktion von i darstellt, in ihrem Anfang horizontal verlaufen muß. Das wird sehr leicht übersehen.

Beispiel. Tabelle 1 gibt unsre Meßwerte; Abb. 55 zeigt die mit ihrer Hilfe gezeichneten Kennlinien der beiden Lampen. Ihr

Tabelle 1.

Metallfadenlampe				Kohlefadenlampe			
U	i	U	i	U	i	U	i
V	A	V	A	V	A	V	A
1	0,046	96	0,610	6	0,012	110	0,328
2	140	111	658	10	020	122	372
5	204	124	698	16	034	131	406
11	240	135	726	24	050	138	436
16	290	143	748	37	086	144	460
27	340	155	780	47	112	154	496
32	358	169	816	51	124	162	528
41	401	189	864	57	142	165	540
52	444	201	896	66	172	175	584
58	468	210	920	70	184	184	624
66	506	220	945	76	204	202	702
83	564			86	236	207	734
				94	266	220	796
				104	306		

Unterschied ist sehr augenfällig. Die Kennlinie der Metallfadenlampe (M) ist nach unten gekrümmt, ihr Widerstand nimmt mit der Temperatur zu (vgl. die 29. Aufgabe). Die Kennlinie der Kohlefadenlampe dagegen ist nach oben gekrümmt, ihr Widerstand nimmt mit der Temperatur ab.

Nunmehr entnehmen wir aus Abb. 55 die in Tabelle 2 wiedergegebenen Wertepaare von U und i , berechnen die zugehörigen R -Werte und stellen in Abb. 56 R als Funktion von i dar. Die

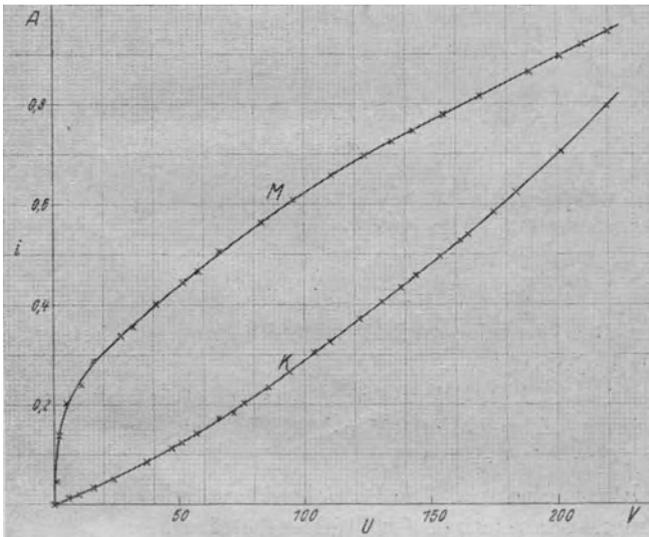


Abb. 55. Kennlinie einer Metallfadenlampe (M) und einer Kohlefadenlampe (K).

Widerstandszunahme bei der Metallfadenlampe, die Widerstandsabnahme bei der Kohlefadenlampe ist sehr deutlich. Die Kurve der Metallfadenlampe läßt sich recht gut bis $i = 0$ fortsetzen, wofür sich ein Widerstand von etwa 14Ω ergibt. Bei der Kohlefadenlampe dagegen können wir dies nicht tun, da uns keine Meßwerte bei ausreichend kleinen Stromstärken zur Verfügung stehen. Daher haben wir nur den allgemeinen Verlauf in diesem Bereich gestrichelt angedeutet. (Will man auch diesen Teil der Kurve erhalten, so ist das natürlich mit empfindlicheren Meßgeräten, als es die hier verwendeten sind, ohne weiteres möglich.)

Tabelle 2.

Metallfadenlampe			Kohlefadenlampe		
<i>i</i>	<i>U</i>	<i>R</i>	<i>i</i>	<i>U</i>	<i>R</i>
A	V	Ω	A	V	Ω
0,05	0,8	16	0,05	24	480
1	1,8	18	1	42	420
15	3	20	15	59	393
2	6	30	2	74	370
25	12	48	25	90	360
3	20	67	3	103	344
35	30	83	35	116	332
4	41	102	4	129	322
45	53	118	45	142	315
5	65	130	5	155	310
55	79	144	55	168	306
6	93	155	6	179	298
65	109	168	65	191	294
7	125	179	7	202	289
75	144	192	75	211	281
8	163	203	8	221	276
85	182	214			
9	202	224			
95	222	237			

Der Betriebswiderstand der Metallfadenlampe beträgt nach Tabelle 1 $220/0,945 = 233 \Omega$, derjenige der Kohlefadenlampe $220/0,796 = 277 \Omega$. Die Betriebsleistung beträgt bei der Metallfadenlampe $L = 220 \cdot 0,945 = 208 \text{ W}$, bei der Kohlefadenlampe $220 \cdot 0,796 = 175 \text{ W}$.

Fehlerrechnung. Die Betriebswiderstände sind nach Gl. (1) berechnet. Ihr relativer Größtfehler beträgt also

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta i}{i} \right). \quad (4)$$

Die Unsicherheit der Ablesungen von U und i betrug etwa $\Delta U = \pm 0,5 \text{ V}$ und $\Delta i = \pm 0,002 \text{ A}$. Damit erhalten wir:

Metallfadenlampe:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R}{R} &= \pm \left(\frac{0,5}{220} + \frac{0,002}{0,945} \right) = \pm (0,0023 + 0,0021) \\ &= \pm 0,0044 \approx \pm 0,45 \% ; \end{aligned}$$

Kohlenfadenlampe:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R}{R} &= \pm \left(\frac{0,5}{220} + \frac{0,002}{0,796} \right) = \pm (0,0023 + 0,0025) \\ &= \pm 0,0048 \approx \pm 0,5 \% . \end{aligned}$$

Die Betriebsleistungen sind nach Gl. (3) berechnet. Ihr relativer Größtfehler beträgt nach dieser Gleichung $\Delta L/L = \pm (\Delta U/U + \Delta i/i)$, ist also genau ebenso groß wie der relative Größtfehler von R . (Dies ist ein lehrreiches Beispiel dafür, daß

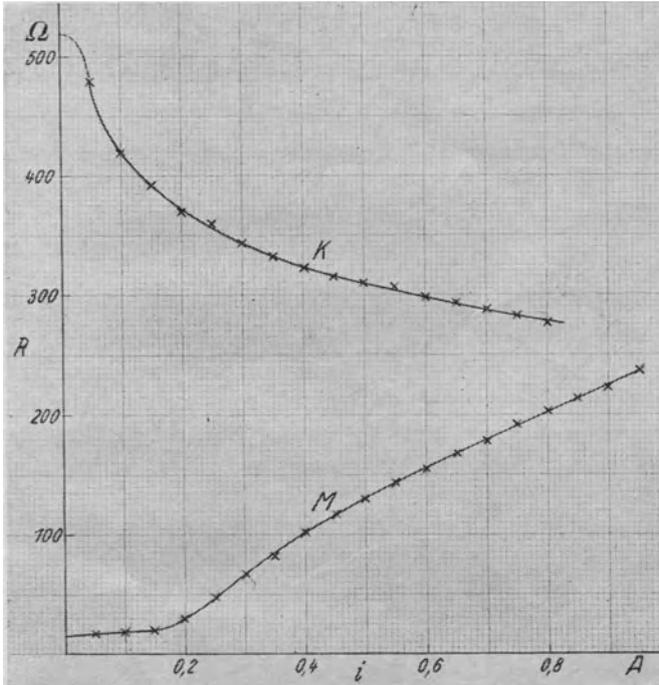


Abb. 56. Widerstand R einer Metallfadenlampe (M) und einer Kohlefadenlampe (K) als Funktion der Strombelastung i .

es bei einem Potenzprodukt für den Fehler nicht auf das Vorzeichen der Exponenten ankommt. Die Fehler von $R = U/i$ und von $L = Ui$ sind bei gleichem U und i gleich groß.) Daher gelten auch für L die relativen Fehler 0,45% bzw. 0,5%.

Wir erhalten damit die folgenden Endergebnisse:

Metallfadenlampe:

$$R = (233 \pm 1) \Omega \text{ bzw. } 233 \Omega \pm 0,45\%,$$

$$L = (208 \pm 1) \text{ W bzw. } 208 \text{ W} \pm 0,45\%.$$

Kohlefadenlampe:

$$\underline{R = (277 \pm 1) \Omega \text{ bzw. } 277 \Omega \pm 0,4 \%,}$$

$$\underline{L = (175 \pm 1) \text{ W bzw. } 175 \text{ W} \pm 0,4 \%,}$$

26. Aufgabe.

Widerstandsmessung in der Brückenschaltung

Literatur: W. § 156; M.-P. Bd. IV/1, S. 442; K. S. 550.

Das zur Messung von Widerständen meist verwendete Verfahren besteht in der Anwendung der Brückenschaltung (Wheatstone). Vier Widerstände R_1, R_2, R_3, R_4 sind zu einem in sich geschlossenen Leitersystem zusammen-

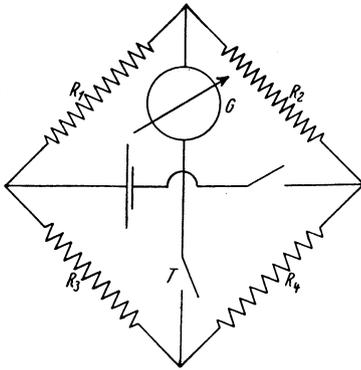


Abb. 57. Brückenschaltung.

geschaltet (Abb. 57). Je zwei einander gegenüberliegende Ecken des Systems sind diagonal miteinander verbunden, das eine Eckenpaar über eine Stromquelle (Element, Akkumulator), das zweite über einen empfindlichen Spannungs- bzw. Strommesser G (Galvanometer) und einen Taster T , welche die sogenannte „Brücke“ bilden. Bei beliebigen Widerstandsverhältnissen wird in der Brücke in

der Regel ein Strom fließen und vom Galvanometer angezeigt werden. Die Brücke ist nur dann stromlos, wenn die Gleichung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \text{bzw.} \quad \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \quad (1)$$

erfüllt ist. Ist dann z. B. R_1 ein unbekannter Widerstand, ist aber R_2 (oder R_3) und das Widerstandsverhältnis R_3/R_4 (oder R_2/R_4) bekannt, so kann R_1 berechnet werden.

Da also nur einer der drei übrigen Widerstände seinem Betrage nach bekannt zu sein braucht — es muß dies ein an R_1 angrenzender Widerstand sein —, bei den beiden andern aber die Kenntnis ihres Verhältnisses genügt, so verwendet man häufig

die in Abb. 58 dargestellte einfache Schaltung. Die beiden Widerstände R_3 und R_4 werden durch einen über einer mm-Teilung ausgespannten, 100 cm langen Konstantendraht ersetzt, auf dem eine zur Brücke führende metallische Schneide verschiebbar ist,

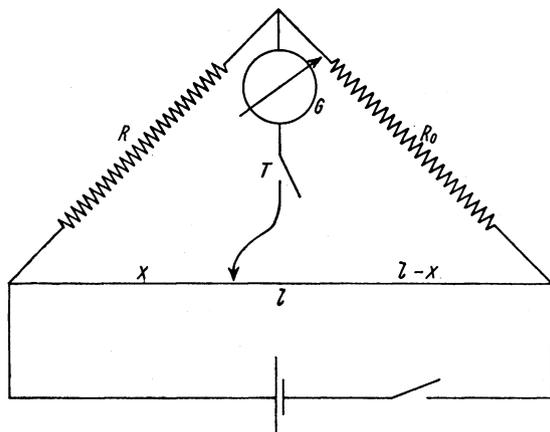


Abb. 58. Brückenschaltung mit Meßdraht.

so daß man den Gesamtwiderstand des Drahtes in beliebigem Verhältnis in zwei Teilwiderstände aufteilen kann, welche R_3 und R_4 in Abb. 57 entsprechen. Ist der Draht auf seiner ganzen Länge l gleich beschaffen, so verhalten sich diese Teilwiderstände wie die Längen x und $l - x$ der beiden Drahtteile. Wir bezeichnen jetzt den unbekanntem Widerstand mit R , den bekannten Widerstand (Widerstandsnorm, Stöpselrheostat) mit R_0 . Dann folgt aus Gl. (1):

$$R = R_0 \frac{x}{l - x}. \quad (2)$$

Ist der Draht nicht überall ganz gleich beschaffen, sondern z. B. ein wenig konisch, so verursacht die unmittelbare Anwendung der Gl. (2) einen kleinen Fehler. Man kann ihn im allgemeinen sehr weitgehend beseitigen, wenn man zwei Messungen bei vertauschten Lagen von R und R_0 anstellt. Wir wollen die Schneidestellung bei der ersten Messung mit x_1 , bei der zweiten mit x_2 bezeichnen. Wäre der Meßdraht überall ganz gleich beschaffen, so würden diese beiden Stellungen genau symmetrisch zur Mitte

des Meßdrahtes liegen. Es müßte also $x_2 = l - x_1$ oder $x_1 + x_2 = l$ sein. In der Regel wird das nicht ganz genau zutreffen. Die Berechnung nach Gl. (2) ergibt dann zwei etwas verschiedene R -Werte,

$$R' = R_0 \frac{x_1}{l - x_1} \quad \text{und} \quad R'' = R_0 \frac{l - x_2}{x_2}, \quad (3)$$

aus denen wir dann das Mittel $R = (R' + R'')/2$ nehmen.

Selbstverständlich muß man sich stets vergewissern, ob Drahtanfang und -ende genau mit Skalenanfang und -ende zusammenfallen, und gegebenenfalls eine entsprechende Korrektur an der Drahtlänge anbringen.

Die Messung geht also so vor sich, daß man nach Wahl eines passenden Vergleichswiderstandes R_0 (s. unten) die Schneide so lange verschiebt, bis das Galvanometer in der Brücke — das hier als sogenanntes Nullinstrument dient — keinen Strom mehr anzeigt. Bevor man die richtige Abgleichung ungefähr ermittelt hat, darf der Taster T in der Brücke immer nur momentan betätigt werden, um eine Beschädigung des Galvanometers durch zu hohe Strombelastung zu verhüten. Ein sehr genaues Kennzeichen für richtige Abgleichung ist es, daß dann der Galvanometerzeiger beim Öffnen und Schließen des Tasters nicht die geringste Zuckung mehr zeigen darf. Unter keinen Umständen darf man den Taster fortlassen und etwa mit dem Schalter tasten. Wenn nämlich in der Schaltung Induktivitäten enthalten sind (z. B. bei Spulen), so würden die auftretenden Induktionsströme stets, auch bei richtiger Abgleichung der Widerstände, momentane Ausschläge des Galvanometers hervorrufen.

Zur Wahl des geeigneten Vergleichswiderstandes R_0 führt uns eine Fehlerrechnung. Wenn wir Gl. (2) in der Form $R = R_0 (l/x - 1)^{-1}$ schreiben, so sieht man, daß der relative Fehler von R durch die Gleichung

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \frac{\Delta \left(\frac{l}{x} - 1 \right)}{\frac{l}{x} - 1} = \pm \frac{\frac{l \Delta x}{x^2}}{\frac{l}{x} - 1} = \pm \frac{l \Delta x}{x(l - x)} \quad (4)$$

gegeben ist. Der relative Fehler von R hat also bei gegebenem Δx ein Minimum, wenn das Produkt $x(l - x)$ seinen größten Wert

hat. Durch Differenzieren ergibt sich

$$\frac{d}{dx} [x(l-x)] = l - 2x = 0, \quad \text{also} \quad x = \frac{l}{2}. \quad (5)$$

Bei gegebenem Fehler Δx wird also der relative Fehler von R am kleinsten, wenn $R \approx R_0$. Man wählt daher den Vergleichswiderstand von etwa gleicher Größe wie den zu messenden Widerstand. Es kommt jedoch, wie man leicht feststellen kann, nur auf die ungefähre Erfüllung dieser Bedingung an. R und R_0 sollen aber jedenfalls nicht von verschiedener Größenordnung sein.

Im allgemeinen wird die Zeit ausreichen, um drei verschiedene Widerstände zu messen.

Beispiel. Unser unbekannter Widerstand ist ein bifilar auf Holz gewickelter Konstantandraht. Es stehen vier Vergleichswiderstände von 1, 10, 100 und 1000 Ω zur Verfügung. Wir stellen durch einen Vorversuch fest, daß die Schneideneinstellung der Mitte des Meßdrahtes am nächsten ist, wenn wir $R_0 = 100 \Omega$

Tabelle.

R links			R rechts		
$x_1 = 57,80 \text{ cm}$	- 1	1	$x_2 = 42,36 \text{ cm}$	0	0
77	- 2	4	36	0	0
78	- 1	1	35	- 1	1
80	+ 1	1	37	+ 1	1
80	+ 1	1	36	0	0
79	0	0	35	- 1	1
78	- 1	1	36	0	0
80	+ 1	1	37	+ 1	1
80	+ 1	1	36	0	0
80	+ 1	1	36	0	0
57,79 cm	12		42,36 cm	4	

wählen, und benutzen also diesen Vergleichswiderstand. (Eine genauere Angleichung, z. B. durch die Wahl von $R_0 = 110 \Omega$, hat auf die Genauigkeit des Ergebnisses keinen merklichen Einfluß mehr.) Wir haben unter Vertauschung von R und R_0 je zehn Einstellungen der Schneide vorgenommen und die in der Tabelle wiedergegebenen Ablesungen gemacht. Damit erhalten wir nach Gl. (3):

$$R' = 100 \frac{57,79}{42,21} = 136,91 \Omega \quad \text{und} \quad R'' = 100 \frac{57,64}{42,36} = 136,07 \Omega.$$

Unser Ergebnis ist der Mittelwert

$$R = 136,49 \Omega.$$

Fehlerrechnung. Den Ausdruck für den relativen Fehler $\Delta R/R$ haben wir bereits in Gl. (4) gegeben.

Der gleiche Ausdruck ergibt sich, wie man leicht sieht, auch für $R = R_0(l-x)/x$, so daß Gl. (4) sowohl für den relativen Fehler von R' (mit $x = x_1$), als auch für den Fehler von R'' (mit $x = x_2$) gilt [Gl. (3)]. Die mittleren Fehler von x_1 und x_2 betragen nach den Angaben der Tabelle:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \pm \sqrt{\frac{12}{9 \cdot 10}} = \pm 0,37 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} \\ &= \pm 0,0037 \text{ cm,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= \pm \sqrt{\frac{4}{9 \cdot 10}} = \pm 0,21 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} \\ &= \pm 0,0021 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Damit folgt aus Gl. (6):

$$\frac{\Delta R'}{R'} = \pm \frac{100 \cdot 0,0037}{57,79 \cdot 42,21} = \pm 0,00015,$$

$$\Delta R' = \pm 0,00015 \cdot 137 = \pm 0,021 \Omega,$$

$$\frac{\Delta R''}{R''} = \pm \frac{100 \cdot 0,0021}{57,64 \cdot 42,36} = \pm 0,00009,$$

$$\Delta R'' = \pm 0,00009 \cdot 136 = \pm 0,012 \Omega.$$

Da $R = (R' + R'')/2$, so ist der Größtfehler von R :

$$\Delta R = \pm \frac{1}{2} (\Delta R' + \Delta R'') = \pm \frac{1}{2} 0,033 \approx \pm 0,02 \Omega.$$

Damit erhalten wir das Endergebnis:

$$\underline{R = (136,49 \pm 0,02) \Omega \text{ bzw. } 136,49 \Omega \pm 0,015 \% .}$$

Zu diesem Ergebnis ist folgendes zu bemerken. Wenn es wirklich innerhalb von etwa 0,015 % genau richtig sein soll, so muß auch unser Vergleichswiderstand ebenso genau richtig sein. Für den von uns benutzten Vergleichswiderstand dürfen wir das kaum ohne weiteres annehmen. Es wäre daher wohl vorsichtiger, im Ergebnis die letzte Stelle zu streichen. Den durch den Vergleichswiderstand verursachten Fehleranteil können wir natürlich nicht angeben, da wir ihn nicht geprüft haben.

Zweitens ist bei einer so genauen Angabe, wie wir sie gemacht haben, zu erwägen, welchen Einfluß die Zuleitungen zu R und R_0 , deren Widerstand im obigen Ergebnis einbegriffen ist, etwa gehabt haben können. Wir benutzten etwa 50 cm lange Kupferdrähte mit einem Querschnitt von etwa $0,5 \text{ mm}^2$. Ihr Widerstand ist von der Größenordnung $0,02 \Omega$. Da die Zuleitungen die nicht sehr verschiedenen großen Widerstände R und R_0 ungefähr um die gleichen Beträge vermehrt haben, so haben sie auch innerhalb der obigen kleinen Fehlergrenze keinen Einfluß auf unser Ergebnis.

Drittens ist zu beachten, daß wegen der Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur eine so genaue Widerstandsangabe im allgemeinen ohne Angabe der Meßtemperatur sinnlos ist. So ändert sich z. B. der Widerstand eines Kupferdrahtes von 100Ω bei einer Temperaturänderung von 1° bereits um etwa $0,25 \%$, also um $0,25 \Omega$. Bei unsrer Messung spielte dies keine Rolle, weil wir den Widerstand eines Konstantendrahtes gemessen haben, der fast vollkommen temperaturunabhängig ist.

Viertens ist darauf hinzuweisen, daß unsre Art der Mittelwertbildung den Einfluß von Inhomogenitäten des Meßdrahtes nur zum größten Teil, aber nicht völlig beseitigen kann, weil dieser Einfluß von der örtlichen Verteilung der Inhomogenitäten abhängt. Dieser Einfluß kann nur durch eine größere Zahl von Meßreihen bei verschiedenen Vergleichswiderständen R_0 erkannt und beseitigt werden.

Schließlich muß noch bemerkt werden, daß die Streuung der Meßwerte von x_1 und x_2 und damit die Fehler Δx_1 und Δx_2 um so größer sind, je weniger empfindlich unser Nullinstrument ist. Sie sind bei unsern Messungen nur deshalb so klein, weil wir ein sehr empfindliches Zeiger galvanometer verwendeten.

27. Aufgabe. Klemmenspannung und innerer Widerstand von Elementen

Literatur: W. § 161; M.-P. Bd. IV/1, S. 306; K. S. 542.

Wird eine Stromquelle (Element, Akkumulator, Generator), die eine EMK \mathcal{E} besitzt, mit Strom belastet, so durchfließt dieser nicht nur den äußeren Widerstand R_a , der die Klemmen K_+ , K_-

der Stromquelle schließt, sondern auch den eigenen, inneren Widerstand R_i der Stromquelle (Abb. 59). Daher beträgt die Stromstärke nach dem Ohmschen Gesetz

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_a + R_i}, \quad \text{so daß} \quad \mathcal{E} = iR_a + iR_i = U_a + U_i. \quad (1)$$

$U_a = iR_a$ ist der Spannungsabfall am äußeren Widerstand R_a , also die Spannung zwischen den Klemmen, die Klemmenspannung der Stromquelle. $U_i = iR_i$ ist der Spannungsabfall am inneren Widerstand R_i . Nach Gl. (1) ist

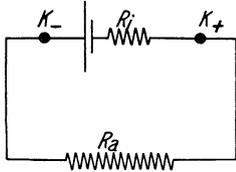


Abb. 59. Zum inneren Widerstand einer Stromquelle.

$$U_a = \mathcal{E} - iR_i. \quad (2)$$

Die Klemmenspannung ist also bei Strombelastung kleiner als die EMK \mathcal{E} der Stromquelle und sinkt mit wachsender Stromstärke. Nach Gl. (2) ist der innere Spannungsabfall

$$U_i = \mathcal{E} - U_a = iR_i \quad (3)$$

der Stromstärke i proportional. Aus \mathcal{E} , U_a und i kann der innere Widerstand

$$R_i = \frac{U_i}{i} = \frac{\mathcal{E} - U_a}{i} \quad (4)$$

berechnet werden.

Ist $R_a \gg R_i$, so ist nach Gl. (1) $\mathcal{E} \approx iR_a = U_a$. Man kann daher die EMK \mathcal{E} einer Stromquelle mit einem Spannungsmesser messen, wenn dessen Widerstand sehr groß gegen den inneren Widerstand R_i der Stromquelle ist, und wenn diese im übrigen nicht mit Strom belastet ist. Die EMK \mathcal{E} einer Stromquelle ist mit der Klemmenspannung U_a der unbelasteten Stromquelle identisch.

Aus Gl. (1) folgt, daß die Stromstärke, die mit Hilfe einer Stromquelle erzeugt werden kann, nach oben begrenzt ist. Wird die Stromquelle kurzgeschlossen, so daß $R_a = 0$, also auch $U_a = 0$, so beträgt der Kurzschlußstrom nach Gl. (1)

$$i_k = \frac{\mathcal{E}}{R_i}. \quad (5)$$

Über diesen Betrag kann die Stromstärke der Stromquelle nicht wachsen.

Unsre Aufgabe besteht darin, die Abhängigkeit der Klemmenspannung von Trockenelementen und Akkumulatoren von der Stromstärke zu untersuchen und ihren inneren Widerstand R_i und die Kurzschlußstromstärke i_k zu berechnen.

Wir bedienen uns der in Abb. 60 dargestellten Schaltung: An die Klemmen K_+ , K_- der Stromquelle — deren innerer Widerstand wieder durch R_i angedeutet ist — legen wir einen Spannungsmesser V von ausreichend hohem Widerstand und bilden einen äußeren Stromkreis aus einem veränderlichen Widerstand R_a (Schiebewiderstand), einem Strommesser A und einem Schalter. Bei offenem Schalter ($i = 0$) zeigt der Spannungsmesser die EMK \mathcal{E} der Stromquelle an. Wird der Schalter geschlossen, so fließt ein vom Betrage des Widerstandes R_a abhängiger Strom i , dessen Stärke wir am Strommesser A ablesen. Im Augenblick des Einschaltens sinkt die Spannung am Spannungsmesser V , der nunmehr die Klemmenspannung U_a der belasteten Stromquelle anzeigt.

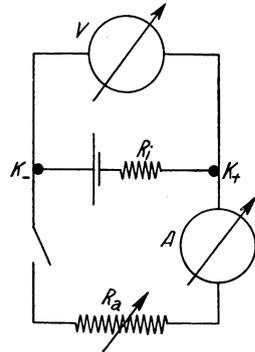


Abb. 60. Zur Messung der Klemmenspannung und des inneren Widerstandes von Stromquellen.

Bei Trockenelementen und bei frisch geladenen oder bereits stark entladenen Akkumulatoren sinkt die EMK im Laufe einer Meßreihe allmählich mehr oder weniger stark ab, besonders wenn man, um stärkere Wirkungen zu erzielen, zu größeren Stromstärken übergeht. Doch bleibt, sofern man die Stromquelle nicht durch allzulange Belastung merklich erwärmt, der innere Widerstand einigermaßen konstant, so daß auch die lineare Abhängigkeit von $U_i = \mathcal{E} - U_a$ von der Stromstärke i einigermaßen gewahrt bleibt.

Es ist lehrreich, wenn zwei verschiedene Trockenelemente — etwa ein kleines Stabelement und ein großes Trockenelement — und ein Akkumulator untersucht werden.

Beispiel. Wir beschränken uns hier auf die Messungen an einem kleinen Stabelement und einem Akkumulator. Als Strom- und Spannungsmesser benutzen wir zwei Mavometer und lesen stets an ihrer 50teiligen Skala ab. Bei den Messungen am Stab-

element geben wir dem Strommesser durch einen Nebenschluß den Meßbereich 0,5 A, so daß 1 Sk = 0,01 A; beim Akkumulator

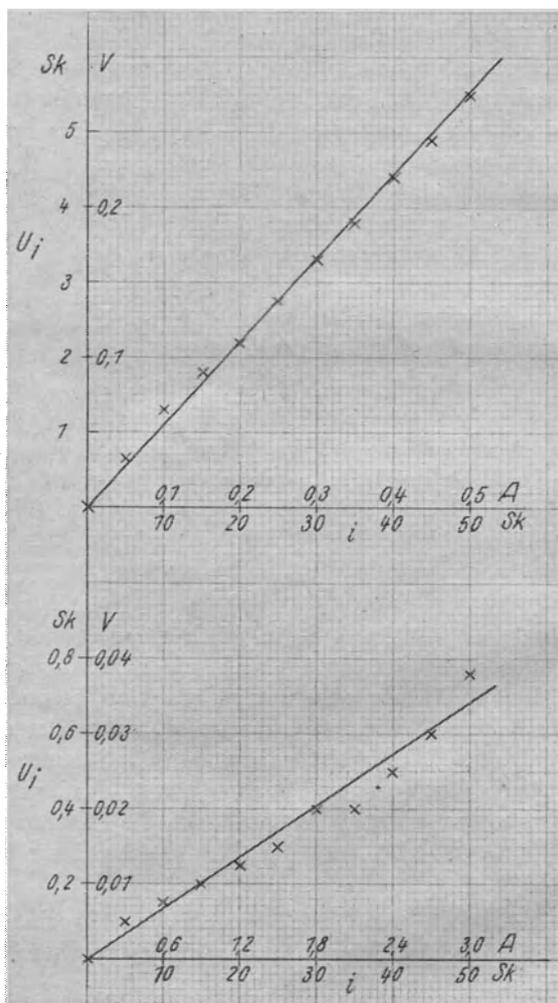


Abb. 61. U_i als Funktion von i . a Stabelement, b Akkumulator.

beträgt der Meßbereich 3 A, so daß 1 Sk = 0,06 A. Beim Spannungsmesser wählen wir stets den Meßbereich 2,5 V, so daß

1 Sk = 0,05 V. Bei jeder Meßreihe gehen wir so vor, daß wir die Strombelastung der Stromquelle zunächst steigern und dann wieder verkleinern. Wir bilden jeweils den Mittelwert der beim Auf- und Abstieg gefundenen Beträge von $U_i = \mathcal{E} - U_a$. Unter (R_i) geben wir die Beträge des Verhältnisses U_i/i an, die sich ergeben, wenn wir U_i und i in Skalenteilen ausdrücken.

In Abb. 61 a und b ist U_i als Funktion von i dargestellt. Die geforderte lineare Abhängigkeit (Konstanz von R_i) ist einigermaßen genau bestätigt. Die erhebliche Streuung der Meßpunkte beim Akkumulator rührt natürlich weitgehend von der begrenzten Genauigkeit der Ablesungen her. Nimmt man eine Ablesegenauigkeit von $\pm 0,05$ Sk an, so liegen die Abweichungen der Meßpunkte von den gezeichneten Geraden fast durchweg innerhalb der dadurch gegebenen Grenzen.

Bei der Berechnung der inneren Widerstände R_i wollen wir bedenken, daß den Messungen bei größeren Stromstärken eine größere relative Genauigkeit zukommt, und daß es daher geboten ist, ihnen ein entsprechendes Gewicht beizulegen. Es liegt hier ein Fall vor, der dem bei der 1. Aufgabe besprochenen Fall durchaus gleicht. Wir verfahren daher ebenso wie dort, bilden die Summen ΣU_i und Σi und berechnen den Widerstand R_i nach der Gleichung

$$R_i = \frac{\Sigma U_i}{\Sigma i}. \quad (6)$$

Ferner berechnen wir die Kurzschlußströme i_k nach Gl. (5).

Beim Stabelement ist $\Sigma U_i = 30,6$ Sk = 1,53 V, $\Sigma i = 275$ Sk = 2,75 A, also $R_i = 1,53/2,75 = 0,566 \Omega$. Als EMK \mathcal{E} wählen wir den Wert des ausgeruhten Elements zu Beginn des Versuchs, $\mathcal{E} = 29,7$ Sk = 1,485 V. Damit erhalten wir $i_k = 1,485/0,566 = 2,62$ A.

Beim Akkumulator ist $\Sigma U_i = 3,7$ Sk = 0,185 V, $\Sigma i = 275$ Sk = 16,5 A, also $R_i = 0,185/16,5 = 0,0112 \Omega$. Die EMK des ausgeruhten Akkumulators betrug 43,2 Sk = 2,16 V. Also ist $i_k = 2,16/0,0112 = 193$ A.

Fehlerrechnung. Eine sehr genaue Fehlerrechnung lohnt bei dieser Aufgabe nicht. Wir wollen uns damit begnügen, uns eine angenäherte Vorstellung von den Fehlern zu machen. Zu diesem Zweck bilden wir mit Hilfe der in Tabelle 1 und 2 ge-

Tabelle 1. Stabelement.

i	ϵ	U_a	U_i	ϵ	U_a	U_i	U_i Mittel	(R_i)
0 Sk	29,7 Sk	29,7 Sk	0,0 Sk	27,5 Sk	27,5 Sk	0,0 Sk	0,0 Sk	—
5	29,6	28,9	0,7	27,4	26,8	0,6	0,65	—
10	29,4	28,0	1,4	27,3	26,1	1,2	1,3	0,120
15	29,0	27,3	1,7	27,2	25,3	1,9	1,8	120
20	28,8	26,7	2,1	27,1	24,8	2,3	2,2	127
25	28,6	25,9	2,7	27,0	24,2	2,8	2,75	115
30	28,3	25,0	3,3	27,0	23,7	3,3	3,3	112
35	28,0	24,2	3,8	26,9	23,1	3,8	3,8	110
40	27,8	23,5	4,3	26,9	22,4	4,5	4,4	109
45	27,6	22,7	4,9	27,0	22,1	4,9	4,9	113
50	27,3	21,8	5,5				5,5	109
275							30,6	110
								115
								329

Tabelle 2. Akkumulator.

i	ϵ	U_a	U_i	ϵ	U_a	U_i	U_i Mittel	(R_i)
0 Sk	43,2 Sk	43,2 Sk	0,0 Sk	41,1 Sk	41,1 Sk	0,0 Sk	0,0 Sk	—
5	43,2	43,1	0,1	41,1	41,0	0,1	0,1	0,020
10	43,1	42,9	0,2	40,9	40,8	0,1	0,15	15
15	42,8	42,6	0,2	40,8	40,6	0,2	0,2	13
20	42,2	42,0	0,2	40,8	40,5	0,3	0,25	13
25	41,9	41,7	0,2	40,7	40,3	0,4	0,3	12
30	41,7	41,3	0,4	40,5	40,1	0,4	0,4	13
35	41,2	40,8	0,4	40,4	40,0	0,4	0,4	11
40	41,0	41,4	0,6	40,3	39,9	0,4	0,5	13
45	40,8	40,2	0,6	40,5	39,9	0,6	0,6	13
50	40,6	39,8	0,8				0,8	16
275							3,7	0,014
								59

machten Angaben die Mittelwerte und die mittleren Fehler der (R_i) -Werte. Beim Stabelement ist der Mittelwert $(R_i) = 0,115$ und $\Delta(R_i) = \pm \sqrt{329/(9 \cdot 10)} \approx \pm 2$ Einh. d. 3. Dez. $= \pm 0,002$, also $\Delta(R_i)/(R_i) = \pm 0,002/0,115 \approx \pm 0,02 = 2\%$. Beim Akkumulator ist der Mittelwert $(R_i) = 0,014$, $\Delta(R_i) = \pm \sqrt{59/(9 \cdot 10)} \approx \pm 0,8$ Einh. der 3. Dez. $= \pm 0,0008$ und $\Delta(R_i)/(R_i) = \pm 0,0008/0,014 \approx \pm 0,06 = \pm 6\%$. Da sich die (R_i) -Werte nur um Zahlenfaktoren (Umrechnung von Sk auf V und A) von den R_i -Werten selbst unterscheiden, so gelten die gleichen relativen Fehler auch für die letzteren. Für die Kurzschlußströme wollen wir die — an sich sehr einfache — Fehlerrechnung unterlassen.

Die vorstehende Fehlerrechnung ist deshalb nicht ganz korrekt, weil sie sich auf das arithmetische Mittel der aus den einzelnen Messungen gewonnenen (R_i) -Werte bezieht, während wir bei unsern Ergebnissen die Gewichte der einzelnen Messungen berücksichtigt haben. Daher sind die berechneten Fehler wahrscheinlich etwas zu groß, denn in unser Ergebnis gehen die in beiden Fällen besonders stark aus dem Rahmen fallenden Messungen bei kleinen Stromstärken, die die berechneten Fehler merklich vergrößern, nur mit einem sehr kleinen Gewicht ein.

Wenn wir davon aber absehen, so lauten unsre Endergebnisse:
 Stabelement:

$$\underline{R_i = (0,566 \pm 0,012) \Omega \text{ bzw. } 0,566 \Omega \pm 2\%, \quad i_k = 2,62 \text{ A,}}$$

Akkumulator:

$$\underline{R_i = (0,0112 \pm 0,0007) \Omega \text{ bzw. } 0,0112 \Omega \pm 6\%, \quad i_k = 193 \text{ A.}}$$

Der wesentliche Zweck dieser Aufgabe ist, daß der Student mit dem Einfluß des inneren Widerstandes einer Stromquelle auf ihre Klemmenspannung vertraut gemacht wird. Das Stabelement hat einen verhältnismäßig großen inneren Widerstand; deshalb sinkt seine Klemmenspannung mit steigender Belastung stark ab, bei Belastung mit 0,5 A (50 Sk) um fast 30%. Der Akkumulator hat einen sehr kleinen inneren Widerstand, und daher sinkt seine Klemmenspannung bei einer Belastung mit 3 A (50 Sk) nur um etwa 6% ab, und dabei ist der weitaus größte Teil dieses Abfalls auf das Sinken der EMK infolge der Strombelastung zurückzuführen.

28. Aufgabe. Das elektrische Wärmeäquivalent

Literatur: W. § 163; M.-P. Bd. IV/1, S. 271.

Als Einheit der Wärmeenergie (Wärmemenge) dient in der Regel die Kalorie (cal, Einl. § 3). Die Einheit der elektrischen Energie im internationalen Maßsystem ist das Joule oder die Wattsekunde (Wsec), die Einheit der elektrischen Leistung das Watt [W]. Fließt in einem Leiter der Strom i [A], und herrscht dabei zwischen seinen Enden die Spannung U [V], so beträgt die Leistung des Stromes

$$L = U i \text{ [W]} \quad (1)$$

und die in dem Leiter in t sec umgesetzte elektrische Energie (Stromarbeit)

$$A = Lt = U i t \text{ [Wsec]} \quad (2)$$

(Joulesches Gesetz). Diese Energie wird in Wärme verwandelt, tritt also in Gestalt einer Wärmemenge Q in die Erscheinung.

Die Wsec und die cal sind also zwei verschiedene Energieeinheiten, und daher besteht zwischen ihnen ein festes Umrechnungsverhältnis j ; es ist

$$1 \text{ cal} = j \text{ Wsec.} \quad (3)$$

Demnach ist

$$j = \frac{1 \text{ cal}}{1 \text{ Wsec}}. \quad (4)$$

Das Umrechnungsverhältnis j heißt das elektrische Wärmeäquivalent, sein Kehrwert $1/j$ das kalorische Äquivalent der elektrischen Energie.

Werden A [Wsec] restlos in Q [cal] umgewandelt, so sind Q [cal] = A [Wsec] oder nach Gl. (3):

$$j Q \text{ [Wsec]} = A \text{ [Wsec]} \quad \text{oder} \quad j = \frac{A}{Q}. \quad (5)$$

Wir wollen das Umrechnungsverhältnis j nach Gl. (5) bestimmen. Zu diesem Zweck messen wir die Wärmemenge Q , in die ein bestimmter Betrag A an elektrischer Energie verwandelt wird. Wir benutzen die in Abb. 62 dargestellte Versuchsanordnung. Ein Manganindraht R von etwa 3Ω Widerstand mit starken Zuleitungen wird in ein mit Wasser von Zimmertemperatur gefülltes Kalorimeter gebracht. Mittels einer ausreichend stark

belastbaren Batterie von etwa 20 V erzeugen wir in dem Draht einen Strom i , den wir so lange fließen lassen, bis sich das Wasser im Kalorimeter auf etwa 60°C erwärmt hat. Während dieser Zeit messen wir jede halbe Minute den Strom i mittels des Strommessers A und die am Draht liegende Spannung U mittels des Spannungsmessers V . (Die laufende Messung ist nötig, weil sich infolge der starken Strombelastung meist sowohl die EMK der Batterie als auch die Widerstände im Stromkreis ein wenig ändern.) Wir berechnen dann aus jedem Wertepaar von U und i die Stromleistung L nach Gl. (1), nehmen das Mittel und berechnen dann die aufgewendete elektrische Energie nach Gl. (2).

Als Kalorimeter benutzen wir, wie im 2. Teil der 13. Aufgabe, ein Dewar-Gefäß. Seine effektive Wärmekapazität (Wasserwert) sei K . Die Masse des Wassers im Kalorimeter sei m , und $c = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}$ sei die spezifische Wärme des Wassers.

Die Anfangstemperatur des Wassers bezeichnen wir hier — um sie von der Zeit t zu unterscheiden — mit ϑ , die Endtemperatur mit ϑ' . Dann beträgt die dem Kalorimeter zugeführte Wärmemenge

$$Q = (mc + K) (\vartheta' - \vartheta) \text{ cal.} \quad (6)$$

Die effektive Wärmekapazität des Kalorimeters bestimmen wir genau wie im 2. Teil der 13. Aufgabe, auf die wir hier verweisen, indem wir das anfangs auf Zimmertemperatur ϑ_1 befindliche Kalorimeter mit Wasser von der Temperatur $\vartheta_2 = 100^{\circ}\text{C}$ füllen und die Endtemperatur ϑ des Wassers messen. Die effektive Wärmekapazität des Kalorimeters beträgt dann

$$K = mc \frac{\vartheta_2 - \vartheta}{\vartheta - \vartheta_1} \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}. \quad (7)$$

[Vgl. Gl. (7) der 13. Aufgabe, wo wir nur andre Bezeichnungen gewählt haben.]

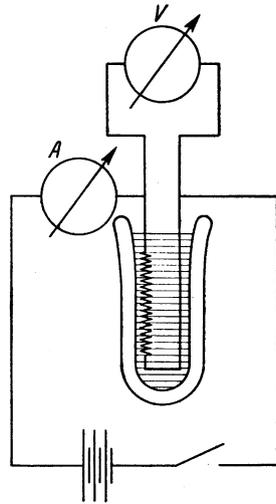


Abb. 62. Zur Messung des elektrischen Wärmeäquivalents.

Beispiel.

I. Die effektive Wärmekapazität des Kalorimeters

$$\vartheta_1 = 18,2^\circ \text{C}, \quad \vartheta_2 = 100,0^\circ \text{C}, \quad \vartheta = 91,2^\circ \text{C}.$$

Masse des gefüllten Kalorimeters 756,6 g

Masse des leeren Kalorimeters 589,2 g

Masse des Wassers $m = 167,4 \text{ g}$

Aus Gl. (7) folgt:

$$K = 167,4 \frac{8,8}{73,0} = 20,2 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Die Wägungen sind natürlich relativ viel genauer als die Temperaturmessungen, so daß wir einen Fehler von m nicht zu berücksichtigen brauchen. Wir schätzen, daß die obigen Temperaturen auf $\pm 0,1^\circ$ genau gemessen wurden. Man erkennt, daß die große Differenz $\vartheta - \vartheta_1 = 73,0^\circ$ relativ sehr viel genauer gemessen ist als die kleine Differenz $\vartheta_2 - \vartheta = 8,8^\circ$. Auf dieser beruht also ganz überwiegend der Fehler unsrer Messung, und deshalb wollen wir nur ihren Fehler hier berücksichtigen. Nach Gl. (7) beträgt dann der relative Größtfehler von K :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta K}{K} &= \pm \frac{\Delta(\vartheta_2 - \vartheta)}{\vartheta_2 - \vartheta} = \pm \frac{\Delta\vartheta_2 + \Delta\vartheta}{\vartheta_2 - \vartheta} = \pm \frac{0,2}{8,8} \\ &= \pm 0,023 \approx \pm 2,5 \%. \end{aligned}$$

Demnach beträgt der absolute Größtfehler $\Delta K = \pm 0,5 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}$.

II. Das elektrische Wärmeäquivalent

$\vartheta = 18,3^\circ \text{C}$, $\vartheta' = 62,5^\circ \text{C}$; Dauer der Messung $t = 360 \text{ sec}$.

Masse des gefüllten Kalorimeters 758,4 g

Masse des leeren Kalorimeters 589,2 g

Masse des Wassers $m = 169,2 \text{ g}$

Wir benutzen einen Strommesser mit dem Meßbereich 10 A, bei dem 1 Sk = 0,2 A, und einen Spannungsmesser mit dem Meßbereich 25 V, bei dem 1 Sk = 0,5 V. Unsre Messungen zeigt die Tabelle.

Tabelle.

t sec	U Sk	i Sk	(L)		
0	34,2	28,7	982	0	0
30	2	7	82	0	0
60	2	7	82	0	0
90	2	7	82	0	0
120	2	7	82	0	0
150	2	7	82	0	0
180	0	7	76	- 6	36
210	1	8	82	0	0
240	1	8	82	0	0
270	1	9	86	+ 4	16
300	1	9	86	+ 4	16
330	0	9	82	0	0
360	—	—	—	—	—
			982		68

Das Produkt Ui beträgt also, wenn wir U und i in Skalenteilen ausdrücken, im Mittel $(L) = 982$. Um es in Watt auszudrücken, müssen wir es mit dem Faktor $0,2 \cdot 0,5 = 0,1$ multiplizieren, erhalten also $L = 98,2$ W. Den unsern Meßgeräten beigegebenen Korrektortabellen entnehmen wir, daß der Spannungsmesser bei der Spannung von rund 34 Sk = 17 V um 0,1 V oder $0,1/17 = 0,006 = 0,6\%$ zu hoch anzeigt. Der Strommesser zeigt bei der Stromstärke von rund 29 Sk = 5,8 A um 0,04 A oder $0,04/5,8 \approx 0,007 = 0,7\%$ zu hoch an. Infolgedessen müssen wir die berechnete Leistung um $(0,6 + 0,7) = 1,3\%$, also um 1,3 W verkleinern und erhalten das Ergebnis $L = 96,9$ W und schließlich für die aufgewandte elektrische Energie

$$A = 96,9 \cdot 360 = 34884 \text{ Wsec.}$$

Die erzeugte Wärmemenge beträgt nach Gl. (6):

$$Q = (169,2 + 20,2) 44,2 = 189,4 \cdot 44,2 = 8371 \text{ cal.}$$

Damit erhalten wir nach Gl. (5):

$$j = \frac{34884}{8371} = 4,167 \text{ Wsec} \cdot \text{cal}^{-1}.$$

Der Kehrwert beträgt

$$\frac{1}{j} = 0,2400 \text{ cal} \cdot \text{Wsec}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Nach Gl. (5) beträgt der relative Größtfehler von j

$$\frac{\Delta j}{j} = \pm \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta Q}{Q} \right). \quad (8)$$

Den Fehler ΔA berechnen wir aus der Streuung der (L)-Werte nach den Angaben unsrer Tabelle. (Diese Streuung beruht nicht nur auf der Unsicherheit der Ablesungen, sondern auch auf wirklichen Änderungen von U und i . Daher ist der von uns hier berechnete Fehler ein wenig zu groß.) Es ergibt sich $\Delta(L) = \pm \sqrt{68/(11 \cdot 12)} = \pm 0,72$, also $\Delta(L)/L = \pm 0,72/982 \approx \pm 0,00073 \approx \pm 0,1\%$. Da sich (L) und L nur durch den Umrechnungsfaktor 0,1 unterscheiden, so ist $\Delta L/L$ ebenfalls gleich $\pm 0,1\%$. Nehmen wir ferner einen möglichen Fehler der Zeitmessung (fehlerhaftes Ein- und Ausschalten) von je $\pm 0,2$ sec am Anfang und am Ende des Versuchs an, so ist $\Delta t = \pm 0,4$ sec und $\Delta t/t = \pm 0,4/360 \approx \pm 0,001 = \pm 0,1\%$. Der relative Größtfehler von A beträgt dann nach Gl. (2) $\Delta A/A = \pm (\Delta L/L + \Delta t/t) = \pm 0,2\%$.

Der relative Größtfehler von Q beträgt nach Gl. (6):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta Q}{Q} &= \pm \left(\frac{\Delta(m c + K)}{m c + K} + \frac{\Delta(\vartheta' - \vartheta)}{\vartheta' - \vartheta} \right) \\ &= \pm \left(\frac{\Delta K}{m c + K} + \frac{\Delta \vartheta' + \Delta \vartheta}{\vartheta' - \vartheta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Dabei haben wir von einem Fehlereinfluß der sicher sehr genau gemessenen Größe mc abgesehen. Wir haben bereits

$$\Delta K = \pm 0,5 \text{ cal} \cdot \text{Grad}^{-1}$$

berechnet. Die Fehler der Temperaturen ϑ und ϑ' schätzen wir auf $\pm 0,1^\circ$. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q}{Q} &= \pm \left(\frac{0,5}{189,4} + \frac{0,2}{44,2} \right) \\ &= \pm (0,0026 + 0,0045) = \pm 0,0071 \approx \pm 0,7\% \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich als relativer Größtfehler von j (und damit auch von $1/j$):

$$\frac{\Delta j}{j} = \pm (0,2 + 0,7)\% \approx \pm 1\%.$$

Demnach lautet unser abgerundetes Endergebnis:

$$j = (4,17 \pm 0,04) \text{ Wsec} \cdot \text{cal}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad 4,17 \text{ Wsec} \cdot \text{cal}^{-1} \pm 1 \%,$$

$$\frac{1}{j} = (0,240 \pm 0,0025) \text{ cal} \cdot \text{Wsec}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad 0,240 \text{ cal} \cdot \text{Wsec}^{-1} \pm 1 \%. \quad \underline{\hspace{10em}}$$

Als zuverlässigster Wert gilt $j = 4,186 \text{ Wsec} \cdot \text{cal}^{-1}$. Er liegt also noch innerhalb der von uns berechneten Fehlergrenzen.

29. Aufgabe.

Temperaturkoeffizient des Widerstandes von Metallen

Literatur: W. § 158; M.-P. Bd. IV/1, S. 450.

Der Widerstand metallischer Leiter nimmt — von gewissen Legierungen abgesehen — mit der Temperatur zu. Es sei R_0 der Widerstand eines solchen Leiters bei 0°C , R derjenige bei $t^\circ \text{C}$. Dann gilt in nicht zu großem Temperaturbereich, z. B. zwischen 0 und 100°C , recht gut die lineare Beziehung

$$R = R_0 (1 + \beta t). \quad (1)$$

β heißt der Temperaturkoeffizient des Widerstandes des betreffenden Metalls. Seine Einheit ist 1 Grad^{-1} . Es ist unsere Aufgabe, ihn bei einem oder mehreren Metallen zu messen. (Es empfiehlt sich, außer z. B. einem Kupferdraht auch einen Konstantan- oder Manganindraht zu untersuchen, um das technisch wichtige besondere Verhalten dieser Legierungen kennenzulernen.)

Wir messen zu diesem Zweck den Widerstand eines Drahtes bei 0°C in schmelzendem Eis in einem Dewar-Gefäß und bei 100°C in siedendem Wasser, ferner bei einigen Zwischentemperaturen, um uns von der Gültigkeit von Gl. (1) zu überzeugen. Für die Zwischentemperaturen verwenden wir Wasserbäder in einem Dewar-Gefäß. Zur Berechnung von β benutzen wir nur die Widerstände bei 0 und 100°C , da diese Temperaturen die zuverlässigsten sind. Dabei ist u. U. die Abhängigkeit des Siedepunkts vom Luftdruck zu beachten (Tabelle III). Der Temperaturkoeffizient beträgt nach Gl. (1)

$$\beta = \frac{1}{t} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right). \quad (2)$$

Zur Widerstandsmessung verwenden wir die Brückenschaltung, aber in etwas anderer Weise als bei der 26. Aufgabe. Wir stellen genau die gleiche Schaltung her wie in Abb. 58. Als Vergleichswiderstand R_0 dient ein bifilar aufgespulter Draht von passend gewähltem Widerstand, den wir nicht zu kennen brauchen. Der Widerstand R , an dessen Stelle nachher der zu untersuchende Widerstand treten soll, wird zunächst durch einen Stöpselrheostaten gebildet. G ist ein Zeigergalvanometer. Als Stromquelle dient ein Trockenelement. Zunächst wählen wir im Stöpselrheostaten einen Widerstand R , der ein wenig kleiner ist als der Widerstand R_0 des zu untersuchenden Drahtes bei 0°C , und gleichen die Schaltung mit Hilfe des Schleifkontaktes ab. [Ein Taster (T) kann hier entbehrt werden, da die Schaltung nur praktisch induktionsfreie Widerstände enthält; wir benötigen ihn bei der nachfolgenden eigentlichen Messung ohnehin nicht.] Auf irgendeine Weise muß dafür gesorgt werden, daß sich der Schleifkontakt im weiteren Verlauf der Messung nicht mehr verschieben kann.

Nunmehr ändern wir den Stöpselwiderstand schrittweise, bis er etwa das 1,5fache seines Anfangswertes erreicht hat. Das Galvanometer zeigt dann schrittweise wachsende Ausschläge, weil ja die Abgleichung der Widerstände mehr und mehr gestört ist. Die zu den einzelnen Ausschlägen gehörigen Widerstandswerte tragen wir in einer Eichkurve auf. Diese kann nunmehr dazu dienen, andere Widerstände zu bestimmen, die wir an die Stelle des Stöpselwiderstandes setzen; unser Galvanometer bildet im Zusammenhang mit der übrigen Schaltung ein „Ohmmeter“. Mit ihm messen wir alsdann den Widerstand des zu untersuchenden Drahtes, indem wir ihn an die Stelle des Stöpselwiderstandes setzen.

Sowohl bei der Eichung, wie bei der eigentlichen Messung, ist streng darauf zu achten, daß die EMK der Stromquelle sich nicht ändert, da sich sonst auch die den einzelnen Widerstandswerten entsprechenden Ausschläge ändern. Die Stromquelle darf daher nur im Augenblick der Ablesungen eingeschaltet werden und ist nachher sofort wieder abzuschalten.

Der zu untersuchende Draht ist bifilar auf eine Röhre aus einem geeigneten Isolierstoff gewickelt und außen durch eine

Glimmerhülle geschützt. Im Wasserbad befindet sich außer dem Thermometer ein Rührer. Die Ablesung am Galvanometer darf erst erfolgen, wenn sich die Anzeige des Thermometers beim Rühren nicht mehr ändert. Die Messung bei 100°C erfolgt nicht

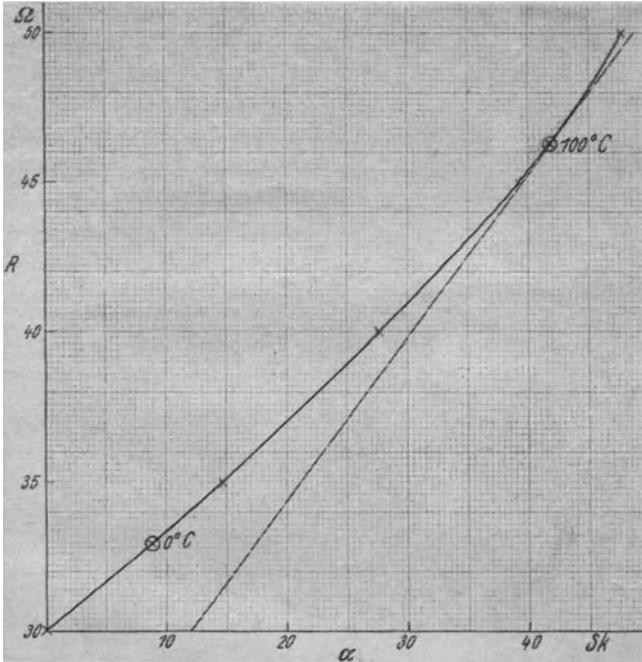


Abb. 63. Eichkurve. Widerstand R als Funktion des Ausschlags α .

im Dewar-Gefäß, sondern in einem Gefäß mit siedendem Wasser. Bei der Messung am Konstantan- oder Manganindraht genügt es, bei 0 und bei 100°C zu messen und die Zwischentemperaturen auszulassen.

Beispiel. Wir geben hier nur die Messungen an einem Kupferdraht wieder. Sein Widerstand liegt bei 0°C etwas höher als $30\ \Omega$. Deshalb gleichen wir unsere Schaltung mit einem Widerstand von $30\ \Omega$ im Stöpselwiderstand ab. Wir vergrößern dann den Stöpselwiderstand in Schritten von je $5\ \Omega$ bis auf $50\ \Omega$ und haben

auf der 50teiligen Skala unsres Galvanometers die in Tabelle I mitgeteilten Ausschläge α erhalten.

Mit Hilfe dieser Ausschlagswerte zeichnen wir die in Abb. 63 dargestellte Eichkurve, die R als Funktion des Ausschlags α zeigt.

Tabelle 1.

R Ω	α Sk	α Sk
30	0,0	0,0
35	14,7	14,7
40	27,7	27,7
45	39,4	39,3
50	47,6	

Nunmehr setzen wir den zu untersuchenden Widerstand an die Stelle des Stöpselwiderstandes und haben bei verschiedenen Temperaturen die in Tabelle 2 mitgeteilten Ausschläge erhalten, zu denen wir die entsprechenden Widerstandswerte R aus Abb. 63 entnehmen. In Abb. 64 ist der Widerstand R als Funktion der

Temperatur t dargestellt. Der Luftdruck betrug 75,58 cm Hg, also der Siedepunkt des Wassers nach Tabelle III 99,96° C. Er

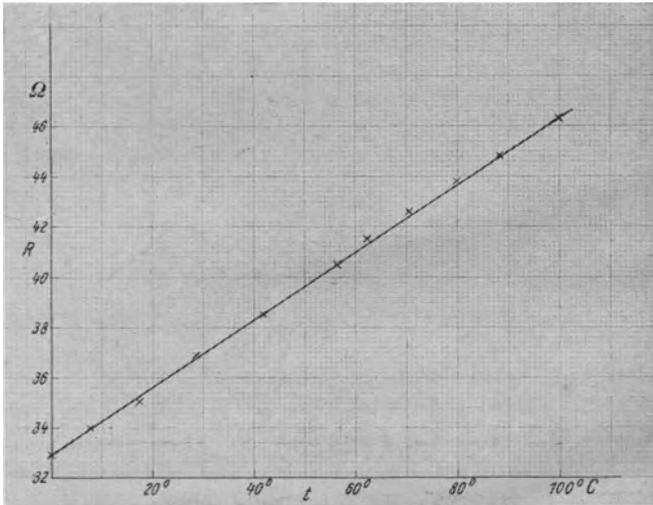


Abb. 64. Widerstand R als Funktion der Temperatur t .

weicht nur um 0,04 % von 100° C ab, was wir im Hinblick auf die weit größere Ungenauigkeit unsrer Ablesungen nicht zu berücksichtigen brauchen.

Tabelle 2.

t °C	α Sk	R Ω	t °C	α Sk	R Ω
0,0	8,8	32,9	62,4	31,5	41,5
7,8	11,8	34,0	70,6	33,9	42,6
17,5	15,5	35,3	80,0	36,7	43,8
28,7	19,9	36,9	88,3	38,9	44,8
42,0	24,1	38,5	100,0	41,9	46,3
56,3	28,9	40,5			

In Abb. 64 haben wir die beiden zuverlässigsten Meßpunkte bei 0 und 100° C durch eine Gerade verbunden. Man sieht, daß sich die Zwischenwerte dieser Geraden befriedigend anpassen. Aus den Messungen bei 0 und 100° C erhalten wir nach Gl. (2):

$$\beta = \frac{1}{100} \left(\frac{46,3}{32,9} - 1 \right) = 0,00407 \text{ Grad}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Unsere Messungen liefern uns an sich keine unmittelbaren Unterlagen für eine Fehlerrechnung. Darum wollen wir unsern Fehler durch eine einfache Überlegung ab-

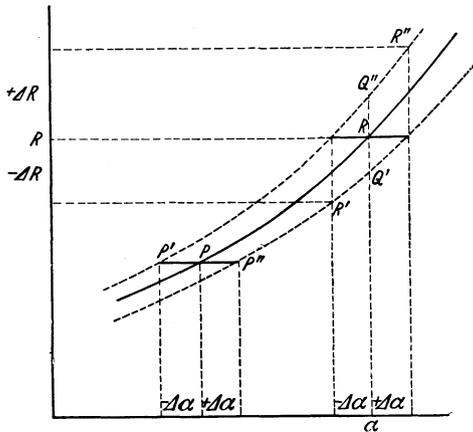


Abb. 65. Zur Fehlerrechnung.

schätzen. Die Temperaturen 0 und 100° C sind natürlich relativ viel zuverlässiger als die Ablesungen am Galvanometer, so daß wir uns auf die letzteren beschränken dürfen. Wir können schätzen, daß wir die Anzeigen des Galvanometers sowohl bei der

Eichung, wie bei der eigentlichen Messung mit einem Fehler $\Delta\alpha = \pm 0,05$ Sk abgelesen haben. Die ausgezogene Kurve in Abb. 65 sei ein stark vergrößertes Stück unsrer Eichkurve, P einer unsrer Meßpunkte. Wegen der Unsicherheit der Ablesungen könnte aber auch jeder andere zwischen den Punkten P' und P'' liegende Punkt der richtige Meßpunkt sein. Dabei ist $PP' = PP'' = |\Delta\alpha| = 0,05$ Sk. Ebenso verhält es sich bei den übrigen Meßpunkten. Wir können daher neben unsrer Eichkurve die beiden gestrichelten, um $\pm 0,05$ Sk gegen sie seitlich verschobenen Kurven zeichnen, die diesen Unsicherheitsbereich abgrenzen. Wenn wir nunmehr aus der Eichkurve zu einer Ablesung α den Widerstandsbetrag R entnehmen, so ist dieser mit einer doppelten Unsicherheit behaftet. Die eine rührt davon her, daß der R -Wert schon bei festem α -Wert unsicher ist und zwischen den Werten Q' und Q'' liegen kann. Die zweite beruht darauf, daß wiederum für α der Spielraum $\Delta\alpha = \pm 0,05$ Sk besteht. Wie man aus Abb. 66 erkennt, besteht daher für R ein Spielraum zwischen den Werten $R - \Delta R = R'$ und $R + \Delta R = R''$. Da wir das in Frage kommende Stück der Eichkurve mit genügender Näherung als Gerade betrachten können, so ist

$$\frac{R'' - R}{2 \Delta\alpha} = \frac{R - R'}{2 \Delta\alpha} = \left| \frac{\Delta R}{2 \Delta\alpha} \right| = \frac{dR}{d\alpha}, \quad (3)$$

also gleich der Neigung der Eichkurve in dem betreffenden Meßpunkt, die wir durch Zeichnung der Tangente in ihm ermitteln können. Der Fehler von R beträgt demnach

$$\Delta R = \pm 2 \Delta\alpha \frac{dR}{d\alpha}. \quad (4)$$

Wir haben in Abb. 63 im Punkte $\alpha = 41,9$ Sk und $R = 46,3 \Omega$ die Tangente an die Eichkurve gelegt und lesen als weiteren Punkt auf dieser das Wertepaar $\alpha = 12,0$ Sk und $R = 30,0 \Omega$ ab. Demnach gilt für die Eichkurve im ersteren Punkt:

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{46,3 - 30,0}{41,9 - 12,0} = \frac{16,3}{29,9} = 0,545.$$

Damit erhalten wir nach Gl. (4):

$$\Delta R = \pm 2 \cdot 0,05 \cdot 0,545 = \pm 0,0545 \Omega.$$

Die Neigung im Meßpunkt $\alpha = 8,8 \text{ Sk}$, $R = R_0 = 32,9 \Omega$ ist geringer. Wir wollen daher für R und R_0 mit einem mittleren Fehler $\Delta R = \Delta R_0 = \pm 0,05 \Omega$ rechnen. Von dem sehr kleinen Fehler von t können wir absehen.

Nach Gl. (2) beträgt dann der absolute Größtfehler von β :

$$\begin{aligned} \Delta \beta &= \pm \frac{1}{t} \left(\frac{\Delta R}{R_0} + \frac{R \Delta R_0}{R_0^2} \right) = \pm \frac{1}{100} \left(\frac{0,05}{32,9} + \frac{46,3 \cdot 0,05}{32,9^2} \right) \\ &= \pm 0,000\,036\,6 \approx \pm 0,000\,04 \text{ Grad}^{-1}. \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir als Endergebnis:

$$\underline{\beta = (0,00407 \pm 0,00004) \text{ Grad}^{-1} \text{ bzw. } 0,00407 \text{ Grad}^{-1} \pm 1 \% .}$$

30. Aufgabe. Messung von Spannungen und Widerständen durch Kompensation

Literatur: W. § 173; M.-P. Bd. IV/1, S. 484; K. S. 540.

Eine Stromquelle von der Klemmenspannung U_0 sei über einen Widerstand geschlossen (Abb. 66). Ein beliebig wählbarer Teil R_1 dieses Widerstandes bilde gleichzeitig einen Teil eines zweiten Stromkreises, der eine EMK $\mathcal{E} < U_0$, ein Galvanometer G und einen Taster T enthält. Die beiden Stromquellen müssen mit gleichnamigen Polen an dem einen Ende des Widerstandes liegen. Im einfachsten Fall verwendet man als Widerstand einen 100 cm langen, über einer mm-Teilung

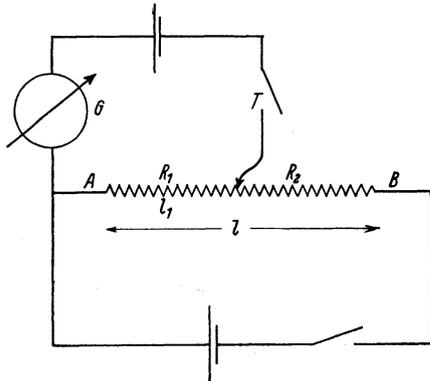


Abb. 66. Spannungsmessung durch Kompensation.

ausgespannten Konstantendraht AB , genau wie bei der Brückenschaltung (26. Aufgabe). Der Teilwiderstand R_1 ist mit Hilfe eines längs des Drahtes verschiebbaren Schleifkontakts beliebig wählbar.

Im allgemeinen wird auch im zweiten Stromkreis ein Strom fließen, den man an einem Ausschlag des Galvanometers erkennt.

Ist jedoch die Spannung U am Widerstand R_1 ebenso groß wie die EMK \mathcal{E} der Stromquelle im zweiten Stromkreis, so wird diese durch jene kompensiert, da sie einander entgegengerichtet sind, und das Galvanometer — das hier wieder als Nullinstrument dient — ist stromlos. Dies wird wie bei der 26. Aufgabe am deutlichsten bei Betätigung des Tasters T erkannt. Dann ist also $\mathcal{E} = U$.

Ist der zweite Stromkreis stromlos, so werden die beiden Teilwiderstände im ersten Stromkreis vom gleichen Strom i durchflossen, und nach dem Ohmschen Gesetz gilt:

$$\text{also } \left. \begin{aligned} U &= iR_1 \quad \text{und} \quad U_0 = i(R_1 + R_2), \\ \mathcal{E} &= U = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(Spannungsteilung). Es sei l die Länge des ganzen Drahtes, l_1 die Länge des Teilwiderstandes R_1 , dann ist $R_1/(R_1 + R_2) = l_1/l$, so daß schließlich

$$\mathcal{E} = U_0 \frac{l_1}{l}. \quad (2)$$

Wir können also \mathcal{E} aus U_0 , l_1 und l berechnen. Dieses Kompensationsverfahren (Poggendorff) spielt in verfeinerter Gestalt (Kompensationsapparat) in der elektrischen Meßtechnik eine wichtige Rolle.

Jetzt setzen wir an die Stelle der Stromquelle mit der EMK \mathcal{E} einen Widerstand R , der von einem Strom i' durchflossen wird, den wir mittels einer Stromquelle in ihm erzeugen (Abb. 67). Dann herrscht zwischen den Enden von R die Spannung $U' = i'R$. Diese Spannung können wir genau ebenso messen,

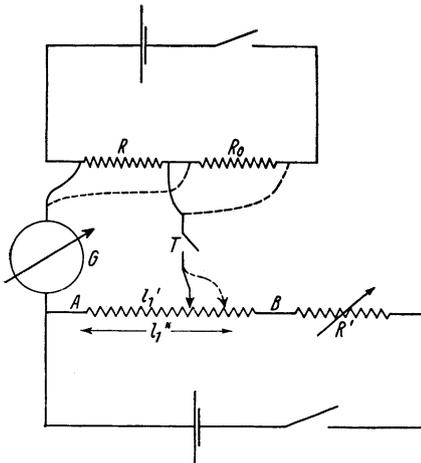


Abb. 67.

Messung eines Widerstandes durch Kompensation.

wie oben die EMK \mathcal{E} , und erhalten, wenn l'_1 die Länge des Teilwiderstandes R_1 bei Kompensation ist:

$$U' = i' R = U_0 \frac{l'_1}{l}. \quad (3)$$

Befindet sich im gleichen Stromkreis wie R ein zweiter Widerstand R_0 , der also vom gleichen Strom i' durchflossen wird, so entspricht dem bei Kompensation der Spannung U'' an seinen Enden eine andere Drahtlänge l''_1 , und es ist nunmehr:

$$U'' = i' R_0 = U_0 \frac{l''_1}{l}. \quad (4)$$

Aus Gl. (3) und (4) folgt:

$$R = R_0 \frac{l'_1}{l''_1}. \quad (5)$$

Ist R_0 ein bekannter Widerstand (Stöpselwiderstand), so kann auf diese Weise ein unbekannter Widerstand R gemessen werden. Die Klemmenspannungen der beiden Stromquellen und die Gesamtlänge l des Meßdrahtes gehen in die Rechnung überhaupt nicht ein.

Abb. 68 zeigt unsre Schaltung. Als Stromquellen benutzen wir zwei Trockenelemente oder Akkumulatoren. Die eine ist durch den Meßdraht AB und einen zusätzlichen veränderlichen Widerstand R' (Schiebewiderstand) geschlossen. Die zweite Stromquelle ist durch den zu messenden Widerstand R und den Vergleichswiderstand R_0 in Reihe geschlossen. Zunächst verbinden wir das eine Ende des Widerstandes R mit dem einen Ende des Meßdrahtes, und zwar wieder so, daß die beiden Stromquellen mit gleichnamigen Polen an diesem Ende liegen. Ferner verbinden wir sein anderes Ende mit dem Schleifkontakt, legen das Galvanometer und den Taster in diese beiden Verbindungen und kompensieren durch Verschieben des Schleifkontakts. Nunmehr schalten wir auf den Vergleichswiderstand R_0 um und wiederholen die Messung. Um R und R_0 schnell miteinander vertauschen zu können, empfiehlt sich die Benutzung eines einfachen (in Abb. 67 nicht gezeichneten) Umschalters. Den Vergleichswiderstand R_0 wählen wir so, daß er von dem zu messenden Widerstand R nicht allzu verschieden ist.

Bevor wir aber mit den Messungen beginnen, wollen wir ihre Genauigkeit durch einen kleinen Kunstgriff erhöhen. Da ohne

Verwendung des Zusatzwiderstandes R' an dem Meßdraht die volle Klemmenspannung der einen Stromquelle liegen würde, an R bzw. R_0 aber nur etwa die halbe Klemmenspannung der andern Stromquelle liegt, so würden die Längen l'_1 und l''_1 nur etwa gleich der halben Länge l des Meßdrahtes sein. Unsre Messungen werden relativ genauer, wenn wir ungefähr die ganze Länge des Meßdrahtes ausnutzen können. Dazu dient der Zusatzwiderstand R' , der bei richtiger Bemessung ebenso wirkt, als benutzten wir einen Meßdraht von ungefähr doppelter Länge, dessen eine Hälfte wir — da wir ja an ihr keine Längen ablesen wollen — aufgewickelt haben. Durch einen Vorversuch stellen wir fest, welcher der beiden Widerstände R und R_0 der größere ist. Dann schalten wir zunächst auf diesen, setzen den Schleifkontakt in die Nähe des Meßdrahtendes und bewirken jetzt eine ungefähre Kompensation durch entsprechende Regelung von R' . (Wir regeln also das Verhältnis l_1/l zunächst nicht durch Änderung von l_1 , sondern von l .) Erst dann beginnen wir mit den Messungen, während derer nun R' nicht mehr verändert werden darf.

Bei den Messungen machen wir immer abwechselnd je zehn Einstellungen mit R und mit R_0 . Dadurch vermeiden wir Fehler, die durch ein allmähliches Absinken der EMK der Stromquellen im Verlauf der Meßreihe entstehen könnten.

Beispiel. In der Regel wird die Zeit ausreichen, um drei Widerstände von verschiedener Größenordnung zu messen. Wir geben hier nur ein Beispiel. Es steht uns als Vergleichswiderstand ein Stöpselwiderstand mit 1, 10, 100 und 1000 Ω zur Verfügung.

Tabelle.

l'_1 cm			l''_1 cm		
51,45	— 13	169	89,2	— 10	100
5	— 8	64	2	— 10	100
65	+ 7	49	5	+ 20	400
8	+ 22	484	4	+ 10	100
4	— 18	324	2	— 10	100
65	+ 7	49	5	+ 20	400
5	— 8	64	4	+ 10	100
55	— 3	9	25	— 5	25
6	+ 2	4	15	— 15	225
7	+ 12	144	2	— 10	100
51,58		1360	89,30		1650

Auf Grund eines Vorversuchs wählen wir den Widerstand 100Ω aus. Er ist größer als der unbekannte Widerstand R . Wir schalten also zunächst auf R_0 und setzen den Schleifkontakt in die Nähe des Meßdrahtendes. Nach ungefährender Kompensation mit dem Widerstand R' (der nur sprunghafte Änderungen zuläßt) haben wir bei genauer Kompensation mit dem Schleifkontakt die in der Tabelle mitgeteilten Ergebnisse erhalten. Wir erhalten also nach Gl. (5):

$$R = 100 \frac{51,58}{89,30} = 57,76 \Omega.$$

Fehlerrechnung. Nach Gl. (5) beträgt der relative Größtfehler von R :

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(\frac{\Delta l_1'}{l_1'} + \frac{\Delta l_1''}{l_1''} \right). \quad (6)$$

Nach den Angaben der Tabelle betragen die mittleren Fehler von l_1' und l_1'' :

$$\begin{aligned} \Delta l_1' &= \pm \sqrt{\frac{1360}{9 \cdot 10}} \\ &= \pm 3,9 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} = \pm 0,039 \text{ cm}, \\ \Delta l_1'' &= \pm \sqrt{\frac{1650}{9 \cdot 10}} \\ &= \pm 4,3 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} = \pm 0,043 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(\frac{0,039}{51,58} + \frac{0,043}{89,30} \right) = \pm 0,00134 \approx \pm 0,15 \%$$

Unser Endergebnis lautet also:

$$\underline{R = (57,76 \pm 0,09) \Omega \quad \text{bzw.} \quad 57,76 \Omega \pm 0,15 \%}$$

Zu unsrer Fehlerrechnung ist einschränkend zu bemerken, daß etwaige Kaliberfehler des Meßdrahtes den Fehler ein wenig vergrößert haben können.

Es ist sehr ratsam, als Vorübung die Klemmenspannungen zweier Stromquellen, z. B. eines Trockenelements und eines Akkumulators, nach Gl. (2) in der Schaltung der Abb. 66 miteinander zu vergleichen.

31. Aufgabe. Spezifischer Widerstand von Elektrolyten

Literatur: W. § 172; M.-P. Bd. IV/4, S. 421; K. S. 572.

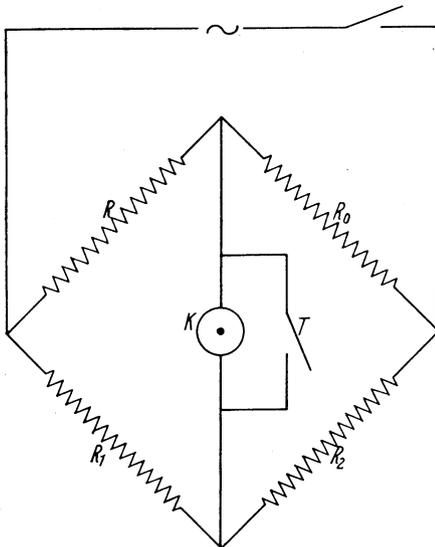
Ein homogener Leiter von der Länge l und dem konstanten Querschnitt q besitzt den Widerstand

$$R = \rho \frac{l}{q}. \quad (1)$$

l/q ist ein von der Gestalt des Leiters abhängiger, rein geometrischer Formfaktor. ρ ist eine Konstante des betreffenden Stoffes, sein spezifischer Widerstand. Ihr Kehrwert $\kappa = 1/\rho$ heißt die Leitfähigkeit des Stoffes. Die internationale Einheit des spezifischen Widerstandes ist $1 \Omega \cdot \text{cm}$. Ist der Widerstand R eines Leiters und der Formfaktor l/q bekannt, so kann sein spezifischer Widerstand nach Gl. (1) berechnet werden,

$$\rho = R \frac{q}{l}. \quad (2)$$

Wir wollen auf dieser Grundlage den spezifischen Widerstand eines Elektrolyten messen. Wir verwenden dazu die Brückenschaltung (26. Aufgabe).



Doch betreiben wir sie zur Vermeidung der die Messungen fälschenden Polarisation der Elektroden nicht mit Gleichstrom, sondern mit Wechselstrom von Hörfrequenz, den wir mittels eines Röhrensummers erzeugen. An die Stelle des Galvanometers in der Brücke tritt ein Telefon (Kopfhörer K) als Nullinstrument (Abb. 68), zu dem ein Taster T parallel geschaltet ist, mit dem das Telefon kurzgeschlossen

Abb. 68. Brückenschaltung zur Messung des Widerstandes eines Elektrolyten.

werden kann. Das Ohr ist überaus empfindlich gegen das Auftreten und Verschwinden auch sehr schwacher Töne beim Öffnen und Schließen des Tasters, so daß die Stromlosigkeit der Brücke sehr genau mit dem Ohr festgestellt werden kann.

R ist der elektrolytische Widerstand, R_0 ein in Schritten von je 100Ω veränderlicher Stöpselwiderstand. R_1 und R_2 sind zwei gleich große Widerstände von je 1000Ω . Da $R_1 = R_2$, so ist bei richtiger Abgleichung auch $R = R_0$.

Der Elektrolyt befindet sich in einem U-förmigen Rohr (Widerstandsgefäß, Abb. 69). Die beiden Elektroden sind Platinscheiben, die den Rohrquerschnitt fast ausfüllen, und die im Rohr verschoben werden können, so daß die Länge l des Leiters verändert werden kann. Die auf den beiden Schenkeln des Rohres angebrachte Teilung beruht auf einem ähnlichen Prinzip wie diejenige des Volumenometers (14. Aufgabe). Ist die rechte Elektrode in die Höhe des Teilstrichs z_r , die linke in die Höhe des Teilstrichs z_l eingestellt, so gibt die Summe $z_r + z_l = z$ (von einem etwaigen Nullpunktsfehler der Teilung abgesehen) unmittelbar den Formfaktor, das Verhältnis l/q , in der Einheit 1 cm^{-1} an. Dann ist also nach Gl. (2)

$$q = \frac{R}{z}. \quad (3)$$

Auf die Berücksichtigung eines etwaigen Nullpunktsfehlers kommen wir an Hand unsres Beispiels zurück.

Bei der Beurteilung des Ergebnisses ist zu beachten, daß der Widerstand eines Elektrolyten stark von der Temperatur abhängt und mit steigender Temperatur abnimmt. Die Änderung kann rund 1% bei einer Temperaturänderung um $0,5^\circ$ betragen. Man gebe daher stets die Temperatur an, bei der die Messung stattgefunden hat.

Bei der Messung gehen wir so vor, daß wir zunächst einen bestimmten Vergleichswiderstand R_0 wählen und die eine Elektrode auf einen Teilstrich mit runder Zahl einstellen. Dann verschieben

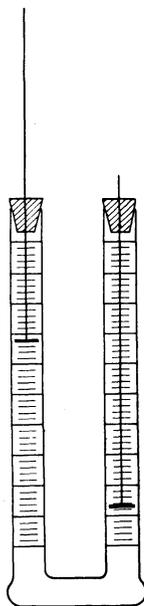


Abb. 69.
Widerstandsgefäß.

wir die andere Elektrode so lange, bis das Telephon zum Schweigen gekommen ist. Das wiederholen wir bei verschiedenen Elektrodenstellungen und bei verschiedenen Werten des Vergleichswiderstandes.

Sofern ein Verdacht besteht, daß die Widerstände R_1 und R_2 nicht innerhalb unsrer Fehlergrenzen gleich groß sind, vermeidet man den dadurch verursachten Fehler, wenn man — genau wie bei der 26. Aufgabe — R und R_0 bzw. R_1 und R_2 vertauscht und aus den Ergebnissen das Mittel nimmt.

Beispiel. Die Zimmertemperatur betrug bei unsrer Messung $19,5^\circ\text{C}$. Wir haben jede Einzelmessung fünfmal wiederholt. In der Tabelle 1 geben wir nur die aus diesen Einzelmessungen gewonnenen Mittelwerte von z_r bzw. z_l sowie die Mittelwerte der aus den einzelnen Messungen gewonnenen Summen $z = z_r + z_l$ an.

Tabelle 1.

$R = R_0$ Ω	z_r cm^{-1}	z_l cm^{-1}	$z = z_r + z_l$ cm^{-1}	z (Mittel) cm^{-1}
300	5,0	11,78	16,78	16,85
	11,92	5,0	16,92	
400	5,0	17,72	22,72	22,84
	17,86	5,0	22,86	
	10,0	12,72	22,72	
	13,06	10,0	23,06	
500	5,0	23,84	28,84	29,03
	24,22	5,0	29,22	
600	5,0	29,26	34,26	34,96
	30,66	5,0	35,66	
700	30,0	10,80	40,80	40,84
	10,88	30,0	40,88	
800	30,0	16,90	46,90	46,26
	15,62	30,0	45,62	
900	30,0	22,10	52,10	52,42
	22,74	30,0	52,74	
1000	30,0	28,52	58,52	58,65
	28,78	30,0	58,78	

Das Ergebnis der Messungen ist in Abb. 70 dargestellt. Die einzelnen Meßpunkte passen sich recht gut einer Geraden an, d. h. es ist $R \sim z$, wie es Gl. (3) verlangt. Doch geht die Gerade nicht genau durch den Nullpunkt. Das bedeutet, daß unser

Widerstandsgefäß einen kleinen Nullpunktsfehler hat. Um den Einfluß dieses Fehlers zu beseitigen, wollen wir bei unsern Berechnungen nur die Differenzen der R - und z -Werte gegen die Werte bei $R = 300 \Omega$ benutzen und diese mit R' und z' bezeichnen. (Das kommt auf das gleiche heraus, als ob wir bei

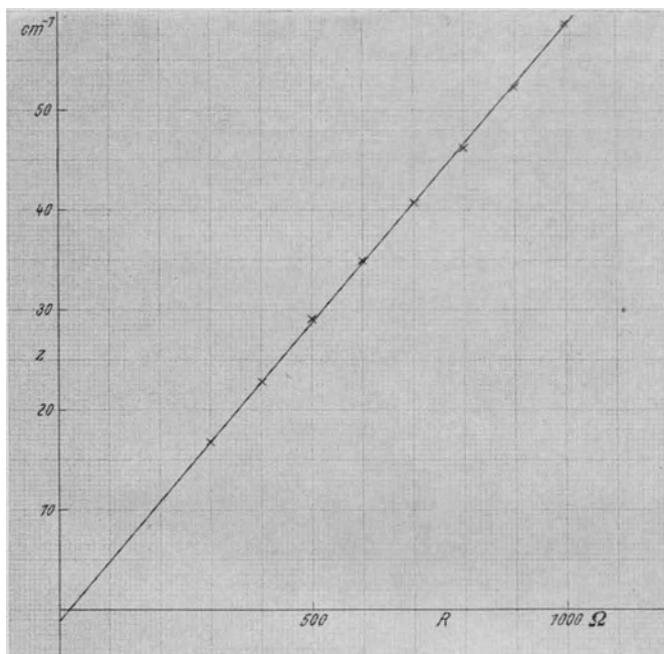


Abb. 70. Zur Widerstandsmessung eines Elektrolyten.

unsern Messungen das fehlerhafte Mittelstück in einer Länge, die einem Widerstand des Elektrolyten von 300Ω entspricht, durch einen Kurzschluß überbrückt hätten.) Dann erhalten wir die in Tabelle 2 wiedergegebenen Daten, aus denen wir jeweils den spezifischen Widerstand gemäß Gl. (3) nach der Gleichung $\varrho = R'/z'$ berechnen.

Wenn wir das Mittel aus den Einzelberechnungen bilden, so erhalten wir $\varrho = 16,71 \Omega \cdot \text{cm}$. Es ist jedoch richtiger, anders zu verfahren. Offensichtlich haben wir unsern Messungen ein um so

Tabelle 2.

R Ω	R' Ω	z' cm^{-1}	$\Omega \cdot \text{cm}$		
300	0	0,00	—		
400	100	5,99	16,70	— 1	1
500	200	12,18	42	— 29	841
600	300	18,11	56	— 15	225
700	400	23,99	67	— 4	16
800	500	29,41	99	+ 28	784
900	600	35,57	87	+ 16	256
1000	700	41,80	75	+ 4	16
	2800	167,05	16,71		2139

größeres Gewicht beizulegen, je größer R' und z' sind, denn um so kleiner ist ihr relativer Fehler. Wir tun dies — wie bereits bei der 1. Aufgabe —, indem wir die Summen $\Sigma R'$ und $\Sigma z'$ bilden und ϱ nach der Gleichung

$$\varrho = \frac{\Sigma R'}{\Sigma z'} \quad (4)$$

berechnen. Dann erhalten wir mit den in Tabelle 2 angegebenen Zahlenwerten

$$\varrho = \frac{2800}{167,05} = 16,76 \Omega \cdot \text{cm}.$$

Dieser Wert ist etwas größer als das einfache arithmetische Mittel, weil sich der Einfluß der etwas höheren Einzelwerte von ϱ bei größerem R stärker auswirkt.

Fehlerrechnung. Wir wollen uns damit begnügen, den mittleren Fehler von ϱ aus den Einzelwerten nach Tabelle 2 zu berechnen, obgleich wir durch die Art unsrer Mittelwertbildung unser Ergebnis wahrscheinlich verbessert haben. Mit den in Tabelle 2 angegebenen Zahlen erhalten wir

$$\Delta \varrho = \pm \sqrt{\frac{2139}{6 \cdot 7}} = \pm 7,1 \text{ Einheiten der 2. Dezimale} \\ \approx \pm 0,07 \Omega \cdot \text{cm}.$$

Nehmen wir vorsichtig den gleichen Fehler für unser Endergebnis an, so erhalten wir bei einer Temperatur von $19,5^{\circ} \text{C}$:

$$\underline{\varrho = (16,76 \pm 0,07) \Omega \cdot \text{cm} \quad \text{bzw.} \quad 16,76 \Omega \cdot \text{cm} \pm 0,4 \% .}$$

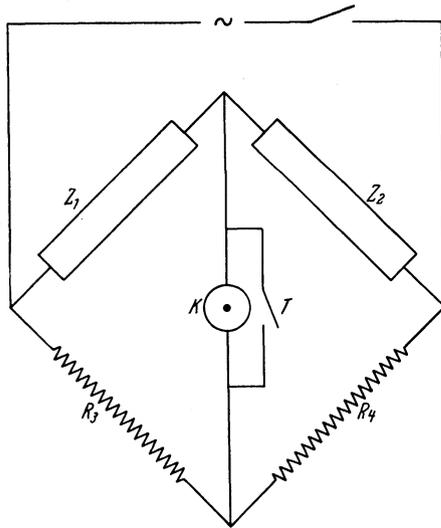
32. Aufgabe. Messung von Induktivitäten und Kapazitäten

Literatur: W. § 249; K. S. 660, 696, 714.

Die Messung von Kapazitäten und Induktivitäten kann in einer mit Wechselstrom betriebenen Brückenschaltung erfolgen (26. und 31. Aufgabe). Als Nullinstrument dient wie bei der 31. Aufgabe ein Telephon (Kopfhörer K) mit parallel geschaltetem Taster T . Es seien Z_1, Z_2 (Abb. 71) zwei Wechselstromwiderstände, die außer ihren reinen Leitungswiderständen R_1, R_2 auch Induktivitäten L_1, L_2 oder Kapazitäten C_1, C_2 enthalten. R_3, R_4 seien reine Ohmsche Widerstände, die z. B. durch die beiden Abschnitte eines Meßdrahtes verwirklicht werden können, wie bei der 26. Aufgabe. Die Bedingung für Stromlosigkeit der Brücke, also für völliges Schweigen des Telefons, lautet:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (1)$$

Abb. 71. Zur Messung von Wechselstromwiderständen in der Brückenschaltung.



Es müssen also nicht nur

die Wechselstromwiderstände Z_1 und Z_2 als Ganzes, sondern auch die reinen Leitungswiderstände R_1 und R_2 sich wie R_3/R_4 verhalten.

Enthalten die beiden Zweige Induktivitäten, so betragen die Wechselstromwiderstände

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (L_1\omega)^2}, \quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}. \quad (2)$$

Dabei ist ω die Kreisfrequenz des benutzten Wechselstroms. Dann folgt aus Gl. (1) und (2) durch einfache Rechnung:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (3)$$

Enthalten die beiden Zweige Kapazitäten, so betragen die Wechselstromwiderstände:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{C_1\omega}\right)^2}, \quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{C_2\omega}\right)^2}. \quad (4)$$

Handelt es sich nicht um sehr große Kapazitäten, und ist ω ausreichend klein (Hörfrequenz), so ist meist $R^2 \ll 1/(C\omega)^2$, so daß man statt Gl. (4) schreiben kann:

$$Z_1 = \frac{1}{C_1\omega}, \quad Z_2 = \frac{1}{C_2\omega}. \quad (5)$$

Dann folgt aus Gl. (1):

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (6)$$

(also umgekehrt wie bei L !). Die reinen Leitungswiderstände R_1 und R_2 — bei guten, verlustfreien Kondensatoren nur die Widerstände der Zuleitungen — brauchen dann also nicht berücksichtigt zu werden.

I. Induktivitäten

Bei der Messung von Induktivitäten müssen die beiden in Gl. (3) enthaltenen Bedingungen erfüllt sein. Die Widerstände R_1 und R_2 bestehen an sich in der Regel hauptsächlich aus den Eigenwiderständen der beiden Induktivitäten (Spulen) und erfüllen die Bedingung $L_1/L_2 = R_1/R_2$ nicht von selbst. Man findet dann zwar auch stets ein Tonminimum, doch verschwindet der Ton nie vollständig. Darum muß die Möglichkeit geschaffen werden, das Widerstandsverhältnis R_1/R_2 zu verändern.

Das geschieht auf die Weise, daß man mit derjenigen Induktivität, deren Widerstand im Sinne der obigen Bedingung zu klein ist, einen veränderlichen induktionsfreien Widerstand in Reihe schaltet. (Schiebewiderstände, die dieser Bedingung genügen, sind im Handel zu haben.) Welche der beiden Induktivitäten das ist, zeigt sich erst durch den Versuch. Man verwendet also die in Abb. 72 dargestellte Schaltung. L ist die zu messende Induktivität, L_0 ein Induktivitätsnormal. Der veränderliche induktionsfreie Widerstand R kann nach Wahl zu L oder zu L_0 hinzugeschaltet werden. Das Widerstandsverhältnis

R_3/R_4 findet man, wie bei der 26. Aufgabe, als das Längenverhältnis $x/(l-x)$ der beiden Abschnitte des Meßdrahtes bei vollkommener Abgleichung. Nach Gl. (3) ist dann

$$L = L_0 \frac{x}{l-x}. \quad (7)$$

Wie bei der 26. Aufgabe muß man auch hier zwei Meßreihen mit Vertauschung von L und L_0 ausführen, um den Einfluß von

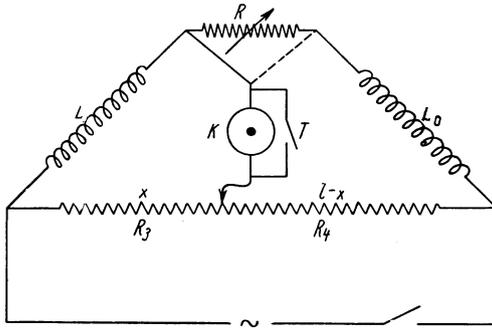


Abb. 72. Zur Messung von Induktivitäten in der Brückenschaltung.

Fehlern des Meßdrahtes möglichst zu beseitigen. Man erhält also zwei meist etwas verschiedene Werte

$$L' = L_0 \frac{x_1}{l-x_1} \quad \text{und} \quad L'' = L_0 \frac{l-x_2}{x_2}, \quad (8)$$

aus denen man dann das Mittel $L = (L' + L'')/2$ nimmt. (Vgl. hierzu die 26. Aufgabe, wo die Verhältnisse ganz die gleichen sind.)

Man schaltet zunächst den Widerstand R zu L oder L_0 in Reihe und sucht diejenige Stellung des Schleifkontakts, bei der ein Tonminimum eintritt. Dann sucht man das Minimum durch Verändern von R und Verschieben des Schleifkontakts zu verbessern und das Telephon vollständig zum Schweigen zu bringen. Das läßt sich — wie bei der 31. Aufgabe — durch Schließen und Öffnen des Tasters T höchst genau kontrollieren. Gelingt es auf diese Weise nicht, die Brücke stromlos zu machen, so muß der Widerstand R zur andern Induktivität in Reihe geschaltet werden. Durch Probieren kann man sich sehr schnell einem Zustand nähern, bei dem das Telephon bereits fast völlig schweigt. Dann

genügt eine weitere kleine Änderung von R und eine weitere kleine Verschiebung des Schleifkontakts, um die Abgleichung zu vollenden. Jede Messung soll mindestens fünfmal wiederholt werden, indem man den Schleifkontakt ein wenig verschiebt, den Widerstand R ein wenig verändert und die ganze Einstellung wiederholt. Dann wiederholt man die ganze Meßreihe nach Vertauschung von L und L_0 , wobei der Widerstand R natürlich bei der gleichen Induktivität verbleiben muß.

Beispiel. Wir benutzen ein Induktivitätsnormal $L_0 = 0,001$ Henry (H). Unser Meßdraht hat die Länge $l = 50$ cm. Den Wechselstrom von Hörfrequenz liefert, wie bei der 31. Aufgabe, ein Röhrensummer. Ein Vorversuch ergibt, daß der Widerstand von L_0 zu klein ist, so daß R mit L_0 in Reihe geschaltet werden muß. Je fünf Einzelmessungen, bei denen die Lage des Schleifkontakts auf 0,05 cm genau abgelesen wurde, hatten übereinstimmend die folgenden Ergebnisse:

$$L \text{ links, } L_0 \text{ rechts: } x_1 = 20,85 \text{ cm, } l - x_1 = 29,15 \text{ cm,}$$

$$L \text{ rechts, } L_0 \text{ links: } x_2 = 28,75 \text{ cm, } l - x_2 = 21,25 \text{ cm.}$$

Wir erhalten also die beiden Werte:

$$L' = 0,001 \frac{20,85}{29,15} = 0,7152 \cdot 10^{-3} \text{ H,}$$

$$L'' = 0,001 \frac{21,25}{87,25} = 0,7391 \cdot 10^{-3} \text{ H.}$$

Demnach ergibt sich als Mittelwert:

$$L = 0,7272 \cdot 10^{-3} \text{ H.}$$

Fehlerrechnung. Unsere Gl. (7) ist formal identisch mit Gl. (2) der 26. Aufgabe, und es handelt sich im Grundsatz um eine ganz entsprechende Messung. Wir können daher Gl. (6) der 26. Aufgabe unter Ersatz von R durch L ohne weiteres übernehmen und erhalten als relativen Fehler von L :

$$\frac{\Delta L}{L} = \pm \frac{l \Delta x}{x(l-x)}. \quad (9)$$

Da unsere Einzelmessungen stets innerhalb der Genauigkeit unserer Beobachtungen übereinstimmten, so ist der Fehler Δx wahrscheinlich kleiner als $\pm 0,05$ cm. Wir wollen aber vorsichts-

halber mit diesem Wert rechnen und $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \pm 0,05$ cm setzen. Dann ergibt sich für L' und L'' praktisch der gleiche Fehler, und ebenfalls für ihren Mittelwert L . Indem wir die erhaltenen Längenwerte abrunden, ergibt sich

$$\frac{\Delta L}{L} = \pm \frac{50 \cdot 0,05}{21 \cdot 29} = \pm 0,0041 \approx \pm 0,4 \%$$

Demnach lautet unser abgerundetes Endergebnis:

$$\underline{L = (0,727 \pm 0,003) \cdot 10^{-3} \text{ H bzw. } 0,727 \cdot 10^{-3} \text{ H} \pm 0,4 \%}$$

II. Kapazitäten

Bei der Messung einer Kapazität kommen wir ohne den Zusatzwiderstand aus. Abb. 73 zeigt die Schaltung. C ist der zu untersuchende Kondensator, C_0 ein Kapazitätsnormal. Im übrigen ist die Schaltung genau die gleiche wie oben. Wir führen wieder zwei Meßreihen unter Vertauschung von C und C_0 aus, die uns die meist etwas verschiedenen Werte

$$C' = C_0 \frac{l - x_1}{x_1}$$

und

$$C'' = C_0 \frac{x_2}{l - x_2} \quad (10)$$

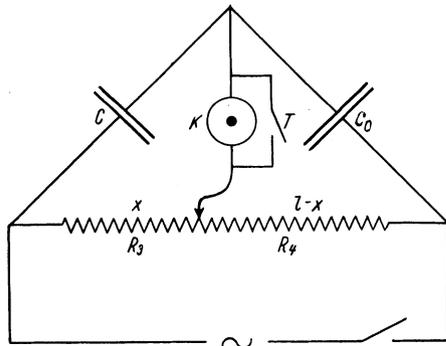


Abb. 73. Kapazitätsmessung in der Brückenschaltung.

liefern (umgekehrt wie bei der Induktivität!), deren Mittelwert $C = (C' + C'')/2$ unser Ergebnis darstellt.

Beispiel. Unser Kapazitätsnormal beträgt $C_0 = 0,02 \mu\text{F}$ (Mikrofarad). Der Meßdraht hat die Länge $l = 50$ cm. Da die Kapazitäten C und C_0 sehr weitgehend verlustfrei sind, erhielten wir auch hier ein sehr scharfes Tonminimum, und unsere je fünf Einzelmessungen stimmten wiederum innerhalb unserer Ablesegenauigkeit von 0,05 cm unter sich überein. Unsere Messungen ergaben:

C links, C_0 rechts: $x_1 = 23,00$ cm, $l - x_1 = 27,00$ cm,

C rechts, C_0 links: $x_2 = 26,35$ cm, $l - x_2 = 23,65$ cm.

Wir erhalten also die beiden Werte

$$C' = 0,02 \frac{27,00}{23,00} = 0,02348 \mu\text{F}, \quad C'' = 0,02 \frac{26,35}{23,65} = 0,02228 \mu\text{F},$$

und daraus den Mittelwert

$$C = 0,02288 \mu\text{F}.$$

Fehlerrechnung. Aus den gleichen Gründen wie oben können wir auch hier die Gl. (6) der 26. Aufgabe unter Ersatz von R durch C ohne weiteres übernehmen. Der relative Fehler von C beträgt also:

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm \frac{l \Delta x}{x(l-x)}. \quad (11)$$

Wir wollen auch hier wieder einen Fehler $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \pm 0,05$ cm annehmen und erhalten dann mit den runden Mittelwerten $x = 26,7$ cm, $l - x = 23,3$ cm:

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm \frac{50 \cdot 0,05}{26,7 \cdot 23,3} = \pm 0,004 = \pm 0,4 \%.$$

Demnach lautet unser abgerundetes Endergebnis:

$$\underline{C = (0,0229 \pm 0,0001) \mu\text{F} \quad \text{bzw.} \quad 0,0229 \mu\text{F} \pm 0,4 \%}.$$

Ist der Kondensator nicht verlustfrei, so erhält man nur ein mehr oder weniger verwaschenes Tonminimum, und die Messungen werden erheblich weniger genau. Ganz billige Kondensatoren sind daher für solche Messungen schlecht geeignet.

33. Aufgabe. Magnetisches Feld einer Spule und erdmagnetisches Feld

Literatur: W. § 191; M.-P. Bd. IV/1, S. 389.

In der 8. Aufgabe haben wir die Schwingung eines Körpers, dessen Trägheitsmoment J wir verändern konnten, bei konstantem Richtmoment D untersucht. Bei der vorliegenden Aufgabe untersuchen wir die Schwingung eines Körpers von konstantem Trägheitsmoment bei veränderlichem Richtmoment.

Ein Magnet vom magnetischen Moment M erfährt in einem homogenen magnetischen Feld von der Feldstärke H ein Drehmoment vom Betrage

$$N = -MH \sin \varphi, \quad (1)$$

wenn die Achse des Magneten mit der Feldrichtung den Winkel φ bildet (Abb. 74). Ist J das Trägheitsmoment des Magneten, so gilt nach Gl. (5) der 8. Aufgabe (vgl. auch Anhang I):

$$N = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -MH \sin \varphi. \quad (2)$$

Ist $\varphi \ll 1$, so ist $\sin \varphi \approx \varphi$, und wir können schreiben:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -MH \varphi = -D \varphi. \quad (3)$$

Nach Gl. (4) der 8. Aufgabe ist also $MH = D$ das Richtmoment des Magneten im Felde H , und das Richtmoment ist demnach der Feldstärke H proportional.

Wird der Magnet aus seiner Gleichgewichtslage (Achse parallel zur Feldrichtung) gebracht und sich selbst überlassen, so schwingt er um die Gleichgewichtslage, und für seine Schwingungsdauer gilt nach Gl. (11) der 8. Aufgabe [Anhang I, Gl. (12)]:

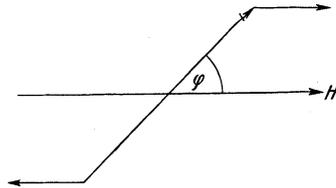


Abb. 74. Drehmoment eines Magneten im magnetischen Felde.

$$\tau^2 = 4\pi^2 \frac{J}{D} = 4\pi^2 \frac{J}{MH} = \frac{1}{GH}, \quad (4)$$

wobei wir

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{M}{J} = G \quad (5)$$

gesetzt haben.

Wir wollen einen kleinen Stabmagneten in einem Felde schwingen lassen, das aus der Horizontalkomponente H_e des erdmagnetischen Feldes und einem zweiten, ihm gleich- oder entgegengerichteten Felde H einer stromdurchflossenen Spule besteht, so daß die gesamte Feldstärke $H + H_e$ beträgt. Dabei rechnen wir H_e stets positiv, H positiv bzw. negativ, je nachdem es H_e gleich- oder entgegengerichtet ist. Ist i die Stromstärke in der Spule, so beträgt die vom Strom erzeugte Feldstärke in ihrem Innern nach Einl. § 4, Gl. (2):

$$H = 0,4 \pi \frac{ni}{l} \text{ Oe} = \frac{ni}{l} \text{ A} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad (6)$$

je nachdem, welche Einheit der magnetischen Feldstärke wir wählen. n ist die Windungszahl, l die Länge der Spule. Wir

wollen zunächst die Einheit $1 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-1}$ benutzen. Wie man aus Gl. (4) erkennt, ist die Einheit der Größe G je nachdem

$$1 \text{ Oe}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2} \quad \text{bzw.} \quad 1 (\text{A} \cdot \text{cm}^{-1})^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}.$$

Statt $1 \text{ Oe}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}$ kann man auch schreiben $1 \text{ g}^{-1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{sec}^{-1}$.

Wir wollen die Stromstärke i in der Spule positiv rechnen, wenn H und H_e gleichgerichtet sind, andernfalls negativ. Wir haben dann drei Bereiche zu unterscheiden:

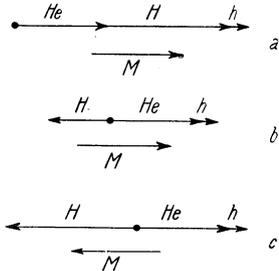


Abb. 75. Erdfeld H_e , Spulenfeld H und Störfeld h .

1. $i > 0$, $H > 0$. Das Spulenfeld H und daher auch das Gesamtfeld $H + H_e$ ist dem Erdfeld H_e gleichgerichtet (Abb. 75a; wegen h s. unten). Für $i = 0$ ist $H = 0$ und das Gesamtfeld gleich H_e .

2a) $0 > i > -H_e l/n$, $0 > H > -H_e$.

Das Spulenfeld ist dem Erdfeld entgegengerichtet, aber dem Betrage nach kleiner als dieses (Abb. 75b). Also ist das Gesamtfeld $H + H_e$ noch immer dem Erdfeld gleichgerichtet. Für $i = -H_e l/n$ ist $H + H_e = 0$, das Erdfeld also durch das Spulenfeld genau kompensiert, und die Schwingungsdauer ist $\tau = \infty$.

2b) $i < -H_e l/n$, $H < -H_e$. Das Spulenfeld ist dem Erdfeld entgegengerichtet und dem Betrage nach größer als dieses (Abb. 75c), so daß auch das Gesamtfeld $H + H_e$ dem Erdfeld H_e entgegengerichtet ist. Das hat zur Folge, daß der Magnet sich beim Übergang vom Bereich 2a zum Bereich 2b um 180° dreht. Auf den Magneten bezogen, entspricht das einer Drehung der beiden Felder um 180° , also auch einer Umkehrung der Stromrichtung in der Spule. Wir müssen also jetzt in Gl. (4) die Feldstärke $-(H + H_e)$ einsetzen, da ja auch immer $\tau^2 > 0$ sein muß und $H + H_e$ jetzt negativ ist.

Die Gl. (4) nimmt also in der Anwendung auf diese Fälle die folgenden Gestalten an:

$$\text{Bereich 1 und 2a: } \tau^2 = \frac{1}{G(H + H_e)}, \quad (7 \text{ a})$$

$$\text{Bereich 2b: } \tau^2 = -\frac{1}{G(H + H_e)}. \quad (7 \text{ b})$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$G \frac{n}{l} = a, \quad GH_e = x_0, \quad \frac{1}{\tau^2} = x. \quad (8)$$

Dabei ist x_0 der Wert von x bei der Stromstärke $i = 0$. Dann folgt aus Gl. (4), (6), (8a) und (8b):

$$\text{Bereich 1 und 2a: } x = ai + x_0, \quad (9a)$$

$$\text{Bereich 2b: } x = -ai - x_0. \quad (9b)$$

$1/\tau^2 = x$ ist also in allen Bereichen von der Stromstärke i linear abhängig. Unsere Aufgabe besteht darin, die Konstanten a und x_0 und aus ihnen die Stärke des erdmagnetischen Feldes H_e und die für den Magneten charakteristische Größe G zu bestimmen.

Meist wird es sich nicht vermeiden lassen, daß von den Zuleitungen und dem Strommesser ein schwaches Störfeld h ausgeht, das, wie H , der Stromstärke proportional ist. Da die Stromrichtung im Strommesser ohnehin stets die gleiche sein muß, empfiehlt es sich, die Umkehrung der Stromrichtung beim Übergang vom Bereich 1 zum Bereich 2a auf die Spule selbst zu beschränken. Dann behält das Störfeld h stets die gleiche Richtung im Raum, bildet also mit H_e stets entweder einen stumpfen oder einen spitzen Winkel. Da es sich nur um eine kleine Korrektur handelt, können wir so rechnen, als sei es dem Erdfeld H_e entweder gleich- oder entgegengerichtet. Der erste Fall ist in Abb. 76 dargestellt. Man liest aus ihr ab, daß wir mit folgenden Feldstärken zu rechnen haben:

$$\text{Bereich 1 und 2a: } H + H_e + h; \quad \text{Bereich 2b: } -(H + H_e + h).$$

Da aber h in den Bereichen 2a und 2b die entgegengesetzte Orientierung zu H hat, wie im Bereich 1, so beeinflußt das die Konstante a in etwas verschiedener Weise. Setzen wir $h = \gamma i$, so ist

$$\text{im Bereich 1: } H + h = \frac{ni}{l} + \gamma i = \left(\frac{n}{l} + \gamma\right)i, \quad (10a)$$

$$\text{im Bereich 2a und 2b: } H + h = \frac{ni}{l} - \gamma i = \left(\frac{n}{l} - \gamma\right)i. \quad (10b)$$

Demnach treten an die Stelle der einen Konstante a zwei etwas verschiedene Konstanten:

$$\text{Bereich 1:} \quad a_1 = G \left(\frac{n}{l} + \gamma \right), \quad (11a)$$

$$\text{Bereich 2a und b:} \quad a_2 = G \left(\frac{n}{l} - \gamma \right). \quad (11b)$$

An Stelle der beiden Gl. (9a) und (9b) treten die drei Gleichungen:

$$\text{Bereich 1:} \quad x = a_1 i + x_0, \quad (12a)$$

$$\text{Bereich 2a:} \quad x = a_2 i + x_0, \quad (12b)$$

$$\text{Bereich 2b:} \quad \dot{x} = -a_2 i - x_0. \quad (12c)$$

Aus Gl. (11a) und (11b) folgt:

$$G = \frac{l}{n} \frac{a_1 + a_2}{2}. \quad (13)$$

Das Vorhandensein eines stromabhängigen Störfeldes h macht sich also nach Gl. (12a) und (12b) dadurch bemerkbar, daß sich beim Übergang vom Bereich 1 zum Bereich 2a die Neigung der Geraden, die $x = 1/\tau^2$ als Funktion von i darstellt, ein wenig ändert.

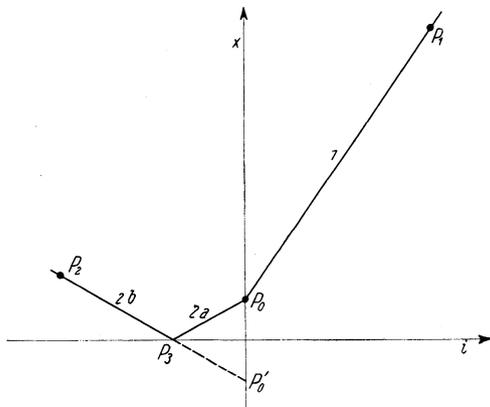


Abb. 76. Zum Einfluß des Störfeldes h .

Abb. 76 zeigt dies in stark vergrößerter Weise. Der Verlauf im Bereich 2b ist stets spiegelbildlich zum Verlauf im Bereich 2a.

Wie man aus Abb. 76 erkennt, genügt es zur Zeichnung des gesamten Verlaufs, wenn man einen Punkt P_1 im Bereich 1, den

Punkt P_0 für $i = 0$ und einen Punkt P_2 im Bereich 2b kennt. Dann kann die Gerade im Bereich 1 unmittelbar gezeichnet werden. Die Gerade im Bereich 2b findet man, indem man P_2 mit dem Spiegelbild P'_0 von P_0 verbindet. Diese Gerade schneidet die i -Achse im Punkt P_3 , in dem $H = -H_e$. Dann ist schließlich $P_3 P_0$ die Gerade im Bereich 2a.

Bei unsren Messungen wollen wir wie folgt verfahren. Um uns von dem geradlinigen Verlauf in den drei Bereichen zu überzeugen, nehmen wir die Schwingungsdauer τ für eine größere Zahl von positiven und negativen Stromwerten auf. Wir wollen aber die Schwingungsdauern τ_1 bei der größten positiven Stromstärke i_1 (Punkt P_1), τ_2 bei der größten negativen Stromstärke $i_2 = -i_1$ (Punkt P_2) und τ_0 bei der Stromstärke $i = 0$ (Punkt P_0) besonders sorgfältig messen, die uns die x -Werte $x_1 = 1/\tau_1$, $x_2 = 1/\tau_2$ und $x_0 = 1/\tau_0$ liefern. Wir erhalten dann nach Gl. (12a) und (12c) für a_1 und a_2 die beiden Bestimmungsgleichungen

$$x_1 = a_1 i_1 + x_0, \quad x_2 = -a_2 i_2 - x_0 = a_2 i_1 - x_0, \quad (14)$$

so daß

$$a_1 + a_2 = \frac{x_1 + x_2}{i_1} \quad \text{und} \quad G = \frac{l}{n} \frac{x_1 + x_2}{2 i_1}. \quad (15)$$

Mit Hilfe der drei genannten Meßpunkte zeichnen wir, wie eben angegeben, die Geraden $P_1 P_0$, $P_0 P_3$ und $P_3 P_2$ und tragen die übrigen Meßpunkte nachträglich ein. Zur Berechnung von H_e und G bedienen wir uns auch nur jener drei Messungen.

Unsre Meßanordnung (Abb. 77) besteht aus einer Spule S von etwa 200 Windungen, die mit Stellschrauben zur genauen Horizontalstellung ihrer Achse und an ihren Enden mit Glasfenstern zum Schutz gegen Luftzug versehen ist. In der Spulennitte hängt an einem etwa 15 cm langen, dünnen Kokonfaden (der zum Richtmoment praktisch nichts beiträgt) ein zylindrischer, etwa 5 cm langer, horizontaler Stabmagnet. Die Spulennachse ist in die örtliche Richtung der Horizontalkomponente H_e des erdmagnetischen Feldes gerichtet. Zur Regelung der Stromstärke dient ein weitgehend induktionsfreier Schiebewiderstand R , der demnach auch nur ein sehr schwaches magnetisches Feld erzeugt. Um aber seinen Einfluß auf das Störfeld h recht klein zu machen, ist er möglichst weit von der Spule entfernt so angebracht, daß seine Achse senkrecht

zur Spulenchse steht. Auch der Strommesser A wird möglichst weit entfernt angebracht. Als Stromquelle benutzen wir ein Trockenelement.

Die Dämpfung der Schwingungen des Magneten ist sehr klein, so daß man über eine große Zahl von Schwingungen beobachten kann. Die Schwingungsweiten dürfen nicht zu groß sein, damit die Bedingung $\sin \varphi \approx \varphi$ ausreichend genau erfüllt ist. Man versetzt den Magneten durch vorsichtiges Nähern und Wieder-

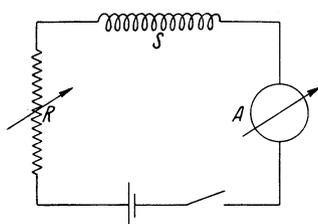


Abb. 77. Zur Messung des erdmagnetischen Feldes.

entfernen eines Eisenstückes (Schlüsselbund oder dgl.) in Drehschwingungen. (Vorsicht, damit keine Pendelschwingung des Magneten eintritt.) Das Eisenstück muß dann wieder ausreichend weit entfernt werden, damit es den Wert von H_e nicht beeinflußt.

Das erdmagnetische Feld H_e ist im Innern von Gebäuden wegen der abschirmenden Wirkung der Eisenmassen der Baukonstruktion merklich kleiner als im freien Gelände. Auch wechseln Richtung und Stärke des Feldes, vor allem in der Nähe der Wände, oft von Ort zu Ort beträchtlich. Daher ergeben sich auch bei nahe benachbarten Versuchsanordnungen oft merklich verschiedene Werte von H_e .

Beispiel. Unsr Spule hat auf einer Länge $l = 25,35$ cm $n = 200$ Windungen. Der Strommesser hat eine 75teilige Skala und den Meßbereich $0,075$ A. Da seine Anzeige Fehler aufweist, ist ihm eine Korrektionstabelle beigegeben. Wir ändern die Stromstärke in Schritten von je 5 Sk. Die unrunder i -Werte in Tabelle 1 und 2 rühren von den notwendigen Korrekturen her. Die Schwingungsdauern berechnen wir im allgemeinen aus der je einmal gemessenen Dauer von 25 Schwingungen. Nur die Schwingungsdauern bei $i = \pm 0,0758$ A und bei $i = 0$ A (Punkte P_1, P_2, P_0 , Abb. 76) messen wir je fünfmal über je 50 Schwingungen. (Die hieraus berechneten Werte für 25 Schwingungen sind der Vollständigkeit halber in Tabelle 2 mit aufgenommen und dort unterstrichen.) In Tabelle 1 geben wir die genauen Messungen bei den drei oben genannten Stromstärken, in Tabelle 2 unsr gesamten Messungen.

Tabelle 1.

$i = + 0,0758 \text{ A}$		$i = 0 \text{ A}$		$i = - 0,0758 \text{ A}$	
sec		sec		sec	
$50 \tau = 50,9$	0 0	$50 \tau = 130,0$	- 8 64	$50 \tau = 61,4$	-22 484
50,8	-10 100	130,2	+12 144	61,7	+ 8 64
51,0	+10 100	129,8	-28 784	61,8	+18 324
50,9	0 0	130,2	+12 144	61,8	+18 324
50,9	0 0	130,2	+12 144	61,4	-22 484
50,90	200	130,08	1280	61,62	1680

Tabelle 2.

i Sk	i A	25τ sec	τ sec	$x = 1/\tau^2$ sec ⁻²
75	+ 0,0758	25,45	1,018	0,965
70	708	26,2	048	910
65	659	27,0	080	858
60	610	28,1	124	792
55	558	29,1	164	738
50	508	30,4	216	676
45	456	31,3	252	638
40	405	33,0	320	574
35	357	34,2	368	535
30	309	36,3	451	475
25	259	38,5	540	422
20	210	41,3	652	367
15	159	44,9	796	308
10	109	49,7	988	253
5	055	55,4	2,233	201
0	0,0000	65,04	2,616	0,1461
5	- 0,0055	85,4	3,415	0,086
10	109	136,5	5,460	034
15	159	173,6	6,950	021
20	210	93,4	3,737	072
25	259	69,8	2,792	128
30	309	58,5	340	183
35	357	51,9	076	233
40	405	47,2	1,888	281
45	456	43,5	740	330
50	508	40,1	604	389
55	558	37,3	492	449
60	610	35,5	420	496
65	659	33,3	331	565
70	708	32,3	291	600
75	0,0758	30,81	1,232	0,658

In Abb. 78 ist das Ergebnis unserer Messungen dargestellt. Die Geraden sind nur mit Hilfe der drei ausgezeichneten Meßpunkte (P_1, P_2, P_0) gezeichnet. Die übrigen Meßpunkte passen sich den Geraden befriedigend an. Im Punkt P_0 tritt, wie eine

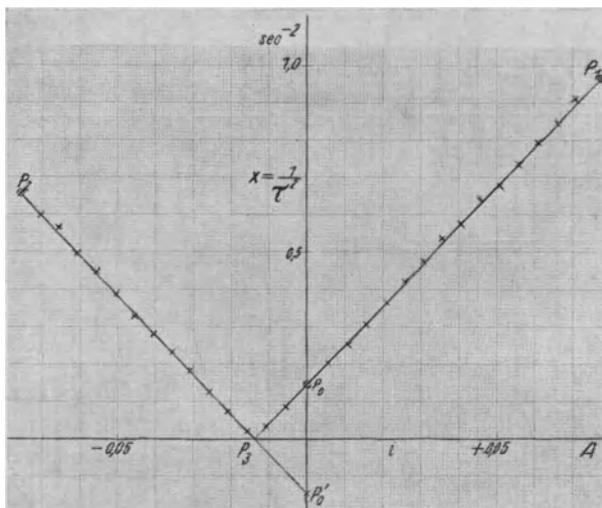


Abb. 78. $x = 1/r^2$ als Funktion von i .

Berechnung zeigt, tatsächlich ein sehr kleiner Knick auf, der auf ein stromabhängiges Störfeld h hinweist.

Zur Berechnung von G und H_e dienen uns also die Werte

$$x_1 = 0,965 \text{ sec}^{-2}, \quad x_2 = 0,658 \text{ sec}^{-2}, \quad x_0 = 0,1461 \text{ sec}^{-2}, \\ i_1 = 0,0758 \text{ A}.$$

Damit erhalten wir nach Gl. (15)

$$G = \frac{25,35}{200} \cdot \frac{1,623}{0,1516} = 1,357 (\text{A} \cdot \text{cm}^{-1})^{-1} \cdot \text{sec}^{-2} \\ = 1,706 \text{ Oe}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}$$

und nach Gl. (8)

$$H_e = \frac{x_0}{G} = \frac{0,1461}{1,357} = 0,1077 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-1} = 0,1354 \text{ Oe}.$$

Fehlerrechnung. Nach Gl. (15) beträgt der relative Größtfehler von G

$$\frac{\Delta G}{G} = \pm \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 + x_2} + \frac{\Delta i_1}{i_1} \right). \quad (16)$$

n ist natürlich fehlerfrei abgezählt. Wir schätzen, daß der Fehler von l etwa $\pm 0,05$ cm beträgt, so daß $\Delta l/l = \pm 0,05/25,35 \approx \pm 0,002$.

Nach Gl. (8) ist allgemein

$$\frac{\Delta x}{x} = \pm 2 \frac{\Delta \tau}{\tau}, \quad \text{also} \quad \Delta x = 2x \frac{\Delta \tau}{\tau}. \quad (17)$$

Nach den Angaben der Tabelle 1 ist

$$\Delta 50 \tau_1 = \pm \sqrt{\frac{200}{4 \cdot 5}} = \pm 3,16 \text{ Einh. d. 2. Dez.} \approx \pm 0,03 \text{ sec,}$$

$$\Delta 50 \tau_2 = \pm \sqrt{\frac{1680}{4 \cdot 5}} = \pm 9,2 \text{ Einh. d. 2. Dez.} \approx \pm 0,09 \text{ sec,}$$

so daß $\Delta 50 \tau_1/50 \tau_1 = \Delta \tau_1/\tau_1 = \pm 0,03/50,90 \approx \pm 0,0006$ und $\Delta 50 \tau_2/50 \tau_2 = \Delta \tau_2/\tau_2 = \pm 0,09/61,62 \approx \pm 0,0015$. Dann ergibt Gl. (17):

$$\Delta x_1 = \pm 2 \cdot 0,965 \cdot 0,0006 \approx \pm 0,0012,$$

$$\Delta x_2 = \pm 2 \cdot 0,658 \cdot 0,0015 \approx \pm 0,0020.$$

Damit erhalten wir $(\Delta x_1 + \Delta x_2)/(x_1 + x_2) = \pm 0,0032/1,623 \approx \pm 0,002$.

Den Fehler der Stromstärke i_1 wollen wir mit Rücksicht auf die immerhin bestehende Unsicherheit der angebrachten Korrektur mit $\pm 0,1$ Sk schätzen. Bei einem Ausschlag von 75 Sk ergibt das einen relativen Fehler $\Delta i_1/i_1 = \pm 0,1/75 \approx \pm 0,0013$. Es ist also nach Gl. (16):

$$\frac{\Delta G}{G} = \pm (0,002 + 0,002 + 0,0013) = \pm 0,0053 \approx \pm 0,55 \text{ \%}.$$

Nach Gl. (8) ist ferner der relative Größtfehler von $H_e = x_0/G$:

$$\frac{\Delta H_e}{H_e} = \pm \left(\frac{\Delta x_0}{x_0} + \frac{\Delta G}{G} \right). \quad (18)$$

Nach den Angaben der Tabelle 1 ist

$$\Delta 50 \tau_0 = \pm \sqrt{\frac{1280}{4 \cdot 5}} = \pm 8 \text{ Einh. d. 2. Dez.} = \pm 0,08 \text{ sec,}$$

also $\Delta 50 \tau_0 / 50 \tau_0 = \Delta \tau_0 / \tau_0 = \pm 0,08 / 130,8 \approx \pm 0,0006$. Demnach ist nach Gl. (17) $\Delta x_0 / x_0 = \pm 2 \cdot 0,0006 = \pm 0,0012$ und

$$\frac{\Delta H_e}{H_e} = \pm (0,0012 + 0,0055) = \pm 0,0067 \approx \pm 0,7 \text{ \%}.$$

Unsre Endergebnisse lauten also:

$$G = (1,706 \pm 0,009) \text{ Oe}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2} \text{ bzw. } 1,706 \text{ Oe}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2} \pm 0,55 \text{ \%},$$

$$H_e = (0,1354 \pm 0,0010) \text{ Oe} \text{ bzw. } 0,1354 \text{ Oe} \pm 0,7 \text{ \%}.$$

Im freien Gelände ist in Mitteldeutschland $H_e \approx 0,18 \text{ Oe}$, also beträchtlich größer als unser Wert. Die abschirmende Wirkung des Gebäudes war also recht groß.

34. Aufgabe.

Schwingung und Dämpfung des Galvanometers

Literatur: W. § 237; M.-P. Bd. IV/1, S. 464ff.; K. S. 508.

Die 34. bis 39. Aufgabe sollen den Studenten mit der Handhabung des Galvanometers, das eines der wichtigsten physikalischen Meßgeräte ist, gründlich vertraut machen. In der vorliegenden Aufgabe soll er zunächst die Verhaltensweisen eines Galvanometers unter verschiedenen Bedingungen (verschiedener äußerer Widerstand, gegebenenfalls auch verschiedene Feldstärke im Luftspalt) und die große meßtechnische Bedeutung des Arbeitens im aperiodischen Grenzfall kennenlernen.

Die Grundlagen der Theorie des Galvanometers geben wir im Anhang, dessen Kenntnis bei der Erläuterung der 34. bis 39. Aufgabe vorausgesetzt wird.

I. Schwingfall, Kriechfall, Grenzfall

Im Anhang II wird bewiesen, daß die Spule eines Drehspulgalvanometers zwei verschiedene Bewegungsformen haben kann. Bewegt sie sich aus der Gleichgewichtslage, die sie bei Stromlosigkeit einnimmt, infolge einer angelegten Spannung in eine neue Gleichgewichtslage, oder kehrt sie nach Abschaltung der

Spannung wieder in jene Gleichgewichtslage zurück, so geschieht dies bei größerem äußeren Widerstand in Gestalt einer gedämpften Schwingung (Schwingfall), bei kleinerem äußeren Widerstand in Gestalt einer aperiodischen Kriechbewegung (Kriechfall). Im Schwingfall wird die endgültige Ruhelage mehr oder weniger oft hin und her überschritten, ehe die Spule zur Ruhe kommt. Im Kriechfall nähert sich die Spule ihrer endgültigen Ruhelage asymptotisch, ohne sie je zu überschreiten. Die Dämpfung der Schwingung im Schwingfall ist um so geringer, das logarithmische Dekrement Δ [Anhang I, Gl. (29)] um so kleiner, je größer der äußere Widerstand R_a zwischen den Klemmen des Galvanometers ist. Im Kriechfall ist die Bewegung der Spule um so langsamer, je kleiner der äußere Widerstand R_a ist. Die Spule erreicht also sowohl bei sehr großem, wie bei sehr kleinem äußeren Widerstand ihre endgültige Ruhelage nur sehr langsam. Sie erreicht sie am schnellsten bei demjenigen äußeren Widerstand, bei dem der Schwingfall in den Kriechfall übergeht, im Grenzfall. Der betreffende äußere Widerstand heißt der Grenzwiderstand R_{gr} des Galvanometers.

Der erste Teil unsrer Aufgabe besteht darin, je einen Schwingfall bei großem äußeren Widerstand, einen Kriechfall bei kleinem äußeren Widerstand und den Grenzfall zu verwirklichen und in jedem der drei Fälle den zeitlichen Verlauf der Bewegung der Drehspule des Galvanometers aufzunehmen.

Unser Spiegelgalvanometer ist auf einer Zementröhre (Kanalisationsröhre) von etwa 100 cm Höhe und 50 cm Durchmesser, die oben mit einer Holzplatte versehen und einfach auf den Fußboden gestellt ist, sehr weitgehend erschütterungsfrei aufgestellt. Zur Ablesung des Galvanometers empfiehlt sich im Praktikum die sogenannte objektive Ablesung. Da es bei diesen Aufgaben meist zweckmäßig ist, daß zwei Studenten gemeinsam arbeiten, können dann beide die Bewegungen des Lichtzeigers sehen. Im übrigen erfolgt eine Arbeitsteilung, indem der eine die Schaltung bedient, gegebenenfalls auch protokolliert, der andere abliest. Der Lichtzeiger wird durch eine kleine Glühlampe (sogenannte Sofittlampe) mit einer einzigen, geraden, möglichst eng gewickelten Wendel erzeugt. Die Lampe steht mit vertikaler Wendel dicht oberhalb oder unterhalb der Skalenmitte. Das Fenster des Gal-

vanometers wird durch eine Sammellinse gebildet, deren Brennweite gleich dem Abstand der Skala vom Galvanometer ist. Dann wird die Wendel durch die (vom Licht zweimal durchsetzte) Linse auf dem Wege über den Galvanometerspiegel als feiner Lichtstreifen auf der Skala abgebildet. Die Lampe muß gegen die Skala durch ein Gehäuse mit einem schmalen, auf das Galvanometer gerichteten vertikalen Schlitz abgeblendet werden.

Wir verwenden die in Abb. 79 dargestellte Schaltung. Zur Herstellung der zum Betrieb des Galvanometers erforderlichen

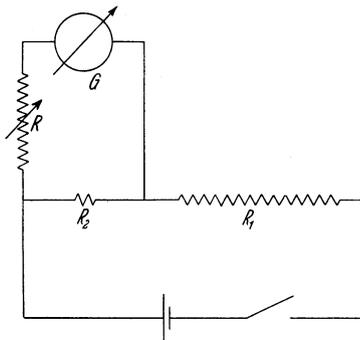


Abb. 79. Zur Untersuchung der Schwingung und Dämpfung eines Galvanometers.

kleinen Spannung benutzen wir eine Spannungsteilung (Potentialmeterschaltung). Eine Stromquelle (Trockenelement, Akkumulator) wird durch einen ziemlich großen Widerstand R_1 (Größenordnung 1000 bis 5000 Ω) und einen kleinen Widerstand R_2 (Größenordnung 0,1 bis 0,2 Ω) in Reihe geschlossen. Parallel zu R_2 legen wir das Galvanometer G , dessen Widerstand R_g sei, nebst einem veränderlichen

Vorwiderstand R (Stöpselwiderstand). Da $R_g + R \gg R_2$, so verändert dieser Nebenschluß zu R_2 die Spannung zwischen den Enden von R_2 nur äußerst wenig. Sie beträgt also recht genau

$$U = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \approx \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1}, \quad (1)$$

da auch $R_1 \gg R_2$. \mathcal{E} ist die EMK der Stromquelle. Es ist also auch $U \ll \mathcal{E}$. Durch geeignete Wahl des Widerstandes R können wir Schwingfall, Kriechfall und Grenzfall verwirklichen.

Bei gegebenem äußeren Widerstand ist die Bewegungsart der Drehspule stets die gleiche, ob es sich nun um das Einschwingen oder Kriechen in eine neue Gleichgewichtslage beim Anlegen einer Spannung handelt oder um das Zurückschwingen oder Kriechen in die natürliche Gleichgewichtslage nach Abschaltung einer Spannung. Wir gehen deshalb so vor, daß wir zunächst dem Galvanometer durch Schließen des Schalters einen Ausschlag

erteilen, den wir durch passende Wahl des Widerstandsverhältnisses R_2/R_1 so bemessen, daß er etwa 200 bis 300 mm beträgt. Es empfiehlt sich hier nicht, mit größeren Ausschlägen zu arbeiten, da wir diese sonst auf den Bogen reduzieren müßten (35. Aufgabe). (Bei einem Skalenabstand von 1500 mm beträgt der Fehler, den wir bei Unterlassung der Reduktion bei einem Ausschlag von 300 mm machen, rund 3 %. Doch können wir ihn hier in den Kauf nehmen.)

Nunmehr öffnen wir den Schalter und machen so das Galvanometer wieder stromlos. Jetzt ist nur noch der Stromkreis im Spiel, durch den das Galvanometer unmittelbar geschlossen ist, und der aus ihm und den Widerständen R und R_2 besteht. Wir können nun in allen Einzelheiten beobachten, wie die Spule wieder in ihre natürliche Gleichgewichtslage zurückkehrt.

Diese Lage, also die Stellung des Lichtzeigers bei stromlosem Galvanometer, bezeichnen wir als den Nullpunkt des Galvanometers, genau wie im entsprechenden Fall bei der unbelasteten Waage (6. Aufgabe). Ebenso wie bei der Waage ist dem Nullpunkt des Galvanometers besondere Beachtung zu schenken. Wie bei jener neigt er zu kleinen Wanderungen, die von kleinen, zeitlich nicht konstanten elektromotorischen Kräften in der Schaltung (Thermokräften usw.) herrühren. Darum muß auch jede Ausschlagsmessung, wie bei der Waage, zwischen zwei Nullpunktablesungen eingeschlossen werden, deren Mittelwert man dann nimmt. Der Nullpunkt soll möglichst nahe der Skalenmitte, senkrecht gegenüber dem Galvanometer, liegen. Es ist aber ganz unnötig, bei jeder kleinen Änderung wieder nachzustellen.

Unsre Messungen gehen also auf folgende Weise vor sich. Zunächst wird der Nullpunkt abgelesen. Dann erteilt man dem Galvanometer einen Ausschlag von etwa 200 bis 300 mm, wartet ab, bis das Galvanometer völlig zur Ruhe gekommen ist, und liest ab. Dann wird der Schalter wieder geöffnet. Im Schwingfall lesen wir jetzt eine möglichst große Zahl von Umkehrpunkten des Lichtzeigers rechts und links und schließlich noch einmal den Nullpunkt ab. Ferner messen wir die Schwingungsdauer τ des Galvanometers über eine möglichst große Zahl von Schwingungen durch Beobachtung der Durchgänge durch den Nullpunkt. Mit diesen Daten können wir den zeitlichen Verlauf der Schwingung

(gedämpfte Sinusschwingung) mit einer für unsern Zweck ausreichenden Genauigkeit zeichnen. Im Kriechfall und im Grenzfall bestimmen wir durch eine größere Zahl von Messungen die Zeiten, die der Lichtzeiger braucht, um von seinem ursprünglichen Ausschlag aus bestimmte Teilstriche der Skala zu erreichen. In jedem Fall wird der Nullpunkt am Schluß noch einmal abgelesen und gegebenenfalls gemittelt.

In manche Galvanometer ist ein Vorwiderstand fest eingebaut. Sie haben dann drei Klemmen, von denen zwei unmittelbar zur Drehspule, die dritte an das freie Ende des Vorwiderstandes führen. Bei unsren Messungen sind nur die beiden ersteren zu benutzen.

Es ist üblich, die Ausschläge von Galvanometern und den Skalenabstand in mm anzugeben.

Beispiel. 1. Schwingfall.

$$R_1 = 1000 \Omega, \quad R_2 = 0,1 \Omega, \quad R = 2000 \Omega.$$

$$\text{Skalenabstand } A = 1550 \text{ mm.}$$

Unser Nullpunkt lag während der ganzen Dauer der Messungen unverändert bei 500,0 mm, so daß wir die stets erfolgten Nullpunktsablesungen im folgenden nicht mehr erwähnen. Wir lesen auf 1 mm genau ab. Die Messung der Schwingungsdauer ergab

$$5 \tau = 53,3 \text{ sec, also } \tau = 10,66 \text{ sec.}$$

In Tabelle 1 geben wir unsre Ausschlagsmessungen. n ist die seit Beginn der Messung (Öffnung des Schalters) erfolgte Zahl von Schwingungen. Die Ablesungen rechts bzw. links vom Nullpunkt a_0 bezeichnen wir mit a_r bzw. a_l , die daraus berechneten Ausschläge $a_r - a_0$ bzw. $a_l - a_0$ mit α_r bzw. α_l . Die Bezifferung unsrer Skala läuft von links nach rechts. Wir rechnen also die Ausschläge nach rechts positiv, nach links negativ. Um unsre

Tabelle 1. Schwingfall.

n	a_r	a_l	α_r	α_l	α_r/α_0	α_l/α_0
0	792		292		1,000	
1	666	287	166	— 213	0,569	— 0,729
2	595	378	95	— 122	0,325	— 0,418
3	554	431	54	— 69	0,185	— 0,236
4	531	460	31	— 40	0,106	— 0,137
5	518	479	18	— 21	0,062	— 0,072
		488		— 12		— 0,041

Kurven besser vergleichen zu können, normieren wir sie derart, daß wir stets den Anfangsausschlag α_0 als Einheit wählen und die Größen α/α_0 als Funktionen der Zeit auftragen. Alle Ausschläge sind in mm angegeben.

2. Kriechfall. Tabelle 2 zeigt unsere Ergebnisse für einen Kriechfall. Wir haben zu diesem Zweck $R = 0 \Omega$ gewählt. Die Drehspule ist also jetzt durch den sehr kleinen Widerstand $R_2 = 0,1 \Omega$ so gut wie kurzgeschlossen. Um bei dem nunmehr kleineren Widerstand des Galvanometerkreises wieder einen Ausschlag von 200 bis 300 mm zu erhalten, haben wir die Spannung an R_2 kleiner als vorher wählen, also den Widerstand R_1 entsprechend vergrößern müssen. In Tabelle 2 bedeutet t die Zeit in sec, a die Ablesung, α_0 den Ausschlag zur Zeit $t = 0$, α den

Tabelle 2. Kriechfall.

a	t	α	α/α_0
740	0,0	240	1,000
700	1,4	200	0,833
675	2,0	175	0,730
650	2,7	150	0,625
625	3,5	125	0,521
600	4,4	100	0,417
575	5,6	75	0,315
550	7,2	50	0,208
525	10,2	25	0,104
510	29,0	10	0,042

Ausschlag zur Zeit t . Der Nullpunkt lag vor und nach der Messung unverändert bei 500,0 mm.

3. Grenzfall. Nunmehr ermitteln wir den Grenzwiderstand, indem wir zunächst durch geeignete Wahl von R einen stark gedämpften Schwingfall herstellen und dann R so lange verkleinern, bis der Lichtzeiger bei seiner Rückkehr in die Ruhelage den Nullpunkt gerade nicht mehr überschreitet. Das tritt etwa bei $R \approx 31,5 \Omega$ ein. Sehr genau läßt sich der Widerstand nicht ermitteln. Er bleibt immer um $\pm 0,1$ bis $0,2 \Omega$ unsicher. Da auch der Widerstand R_2 zum Schließungskreis des Galvanometers gehört, so ist der Grenzwiderstand $R_{gr} = R + R_2$. Wir erhalten also $R_{gr} \approx 31,6 \Omega$. Tabelle 3 zeigt unsere Messungen im Grenzfall. Wiederum lag der Nullpunkt vor und nach der Messung unverändert bei 500,0 mm.

Das Galvanometer ist also nach etwa 10 sec praktisch wieder zur Ruhe gekommen, während das im Kriechfall und erst recht im Schwingfall nach dieser Zeit noch keineswegs der Fall war

Tabelle 3. Grenzfall.

a	α	t	α/α_0
730	230	0,0	1,000
700	200	1,0	0,870
675	175	1,7	0,751
650	150	2,1	0,652
625	125	2,6	0,543
600	100	3,0	0,435
575	75	3,8	0,326
550	50	4,7	0,217
525	25	5,8	0,109
≈ 500	≈ 0	10,3	$\approx 0,000$

Abb. 80 zeigt unsre Ergebnisse in graphischer Darstellung. Bei der Zeichnung der Kurven ist auf folgendes zu achten. Beim gedämpften Schwingfall ist der zeitliche Abstand zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Maxima und Minima gleich der halben Schwingungsdauer $\tau/2$. Auch die Durchgänge durch den Nullpunkt haben voneinander den zeitlichen Abstand $\tau/2$. Aber sie liegen nicht genau in der Mitte zwischen dem benachbarten Maximum und Minimum, sondern sind ein wenig in Richtung größerer Zeiten dagegen verschoben, und zwar um so mehr, je größer die Dämpfung ist [vgl. Anhang I, Gl. (27)]. Ferner muß beachtet werden, daß zur Zeit $t = 0$ die Bewegung des Lichtzeigers erst beginnt, also $d\alpha/dt = 0$ ist. Das bedeutet, daß die Kurven in ihrem Anfang parallel zur t -Achse ansetzen.

Der Student soll sich bei diesen Messungen nicht nur mit der Handhabung des Galvanometers vertraut machen, sondern auch lernen, welche meßtechnischen Vorteile das Arbeiten im Grenzfall bietet. Sowohl beim krassen Schwingfall, wie beim krassen Kriechfall dauert die Einstellung sehr lange. Ferner ist es im Kriechfall oft schwer zu entscheiden, ob die Ruhelage wirklich schon erreicht ist, oder ob der Lichtzeiger nicht doch noch ganz langsam kriecht. So führt jede beträchtliche Abweichung vom Grenzfall stets zu Zeitverlust, unter Umständen aber auch zu einer Unsicherheit der Messung. In der Praxis empfiehlt es sich, vom idealen Grenzfall ein klein wenig in Richtung auf den Schwing-

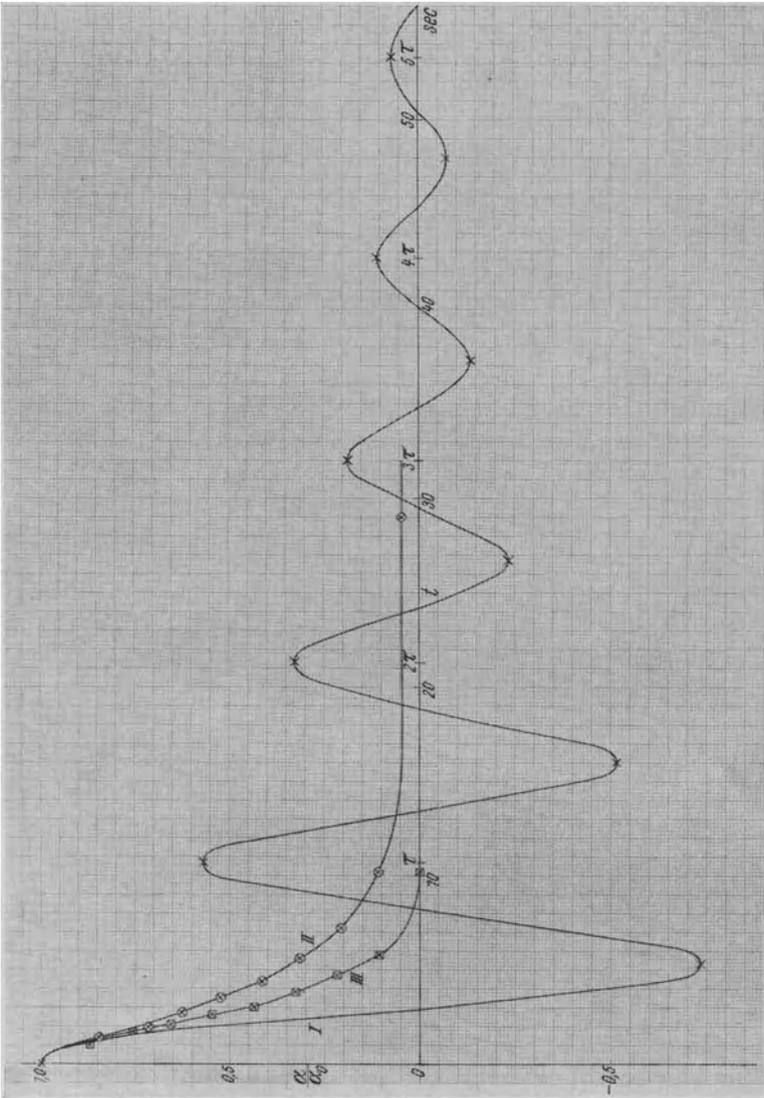


Abb. 80. I Schwingfall, II Kriechfall, III Grenzfall.

fall abzuweichen. Dann schwingt der Lichtzeiger noch eben über die Ruhelage hinaus, um alsbald in ihr zur Ruhe zu kommen. Auf diese Weise gewinnt man die Sicherheit, daß die Ruhelage wirklich erreicht ist, und daß kein langsames Kriechen mehr stattfindet.

II. Das logarithmische Dekrement

Im Anhang I [Gl. (28)] und II [Gl. (13)] beweisen wir, daß die Schwingungswerten α_n der Ausschläge eines Galvanometers nach der gleichen Seite im gedämpften Schwingfall nach der Gleichung

$$\alpha_n = \alpha_0 k^{-n} = e^{-n\Lambda} \quad (2)$$

abnehmen. Dabei ist α_0 derjenige Ausschlag, bei dem wir unsere Beobachtungen beginnen, α_n der n -te auf ihn folgende Ausschlag auf der gleichen Seite und $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Größe k heißt das Dämpfungsverhältnis, die Größe $\Lambda = \ln k$ das logarithmische Dekrement der Schwingung. Nach Gl. (2) ist

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = k = e^\Lambda \quad \text{oder} \quad \ln \alpha_n - \ln \alpha_{n+1} = \ln k = \Lambda, \quad (3)$$

wenn α_n und α_{n+1} zwei auf der gleichen Seite aufeinanderfolgende Ausschläge sind. Ist α'_0 der erste auf den Anfangsausschlag α_0 folgende Ausschlag auf der entgegengesetzten Seite, so ist nach Anhang II, Gl. (14):

$$\left(\frac{\alpha_0}{-\alpha'_0} \right)^2 = k \quad \text{oder} \quad \ln \alpha_0 - \ln (-\alpha'_0) = \frac{1}{2} \ln k = \frac{\Lambda}{2}. \quad (4)$$

Im Anhang II ist ferner bewiesen, daß die für die Dämpfung maßgebende Größe β [Anhang II, Gl. (9a)] und daher auch das logarithmische Dekrement Λ [Anhang I, Gl. (29)] um so größer ist, je kleiner der äußere Widerstand des Galvanometers ist. Es ist unsere weitere Aufgabe, die Abhängigkeit des logarithmischen Dekrements vom äußeren Widerstand zu untersuchen. Zu diesem Zweck wiederholen wir den bereits oben zum Schwingfall gemachten Versuch (Tabelle 1) bei verschiedenen äußeren Widerständen R . Ist der äußere Widerstand groß genug, also die Dämpfung gering, so können wir, wie dort, eine mehr oder weniger große Zahl von aufeinanderfolgenden Schwingungen aufnehmen und Λ nach Gl. (3) berechnen. Bei kleinerem äußeren Widerstand

wird außer α_0 nur noch der nächste Ausschlag α_0 auf der andern Seite genügend genau meßbar sein. Dann berechnen wir A nach Gl. (4).

Beispiel. Wir geben in Tabelle 4 und 5 nur zwei von unsern Messungen ausführlich wieder. Die eine ist bei der kleinsten möglichen Dämpfung, nämlich bei offenem Galvanometer ($R = \infty$) ausgeführt; es ist also nur die Luftreibung der Spule im Luftspalt dämpfend wirksam. (Man muß in diesem Fall den Strom im Schließungskreis des Galvanometers selbst unterbrechen.) Die zweite ist bei großer Dämpfung in nicht sehr großer Entfernung vom Grenzfall mit $R = 50 \Omega$ ausgeführt. Der Nullpunkt lag in beiden Fällen bei 500 mm.

Tabelle 4. $R = \infty$.

a_r	a_l	α_r	α_l	k
802		302		
	250		- 250	1,393
717		217		413
	323		- 177	410
654		154		393
	373		- 127.	401
610		110		380
	408		- 92	393
579		79		415
	435		- 65	410
556		56		(340)
	453		- 47	
				1,401

Wir haben die Werte von k der Tabelle 4 nach Gl. (3) aus je zwei aufeinanderfolgenden Ausschlägen nach gleichen Seiten berechnet. Der letzte Wert ist wegen der Kleinheit des Ausschlages schon recht ungenau. Wenn wir ihn fortlassen, so erhalten wir als Mittelwert $k = 1,401$, und nach Gl. (3) $A = \ln 1,401 = 2,303 \log 1,401 = 2,303 \cdot 0,1430 = 0,392$.

Tabelle 5. $R = 50 \Omega$.

a_0	a'_0	α_0	α'_0	\sqrt{k}
750	489	250	- 11	22,7

Aus den Werten der Tabelle 5 erhalten wir nach Gl. (4) $\lambda/2 = \frac{1}{2} \ln k = \ln \sqrt{k} = \ln 22,7 = 2,303 \log 22,7 = 2,303 \cdot 1,3516 = 3,11$, also $\lambda = 6,22$. Natürlich ist dieser Wert wegen der Kleinheit des Ausschlags α_0' recht wenig genau.

In entsprechender Weise haben wir λ für andere Beträge von R gemessen. Dabei haben wir die Schritte von R um so kleiner gewählt, je kleiner R ist, weil sich λ um so schneller ändert, je mehr sich R dem Grenzwiderstand R_{gr} nähert. Tabelle 6 zeigt unsere Ergebnisse.

Tabelle 6.

R Ω	λ	R Ω	λ	R Ω	λ
∞	0,329	500	1,195	150	2,873
2000	563	400	408	125	3,34
1500	634	300	760	100	4,04
1000	780	250	2,000	75	5,32
750	921	200	320	50	6,22

Abb. 81 zeigt λ als Funktion von R . Die Kurve hat zwei Asymptoten. Sie geht mit abnehmendem R in eine Gerade über.

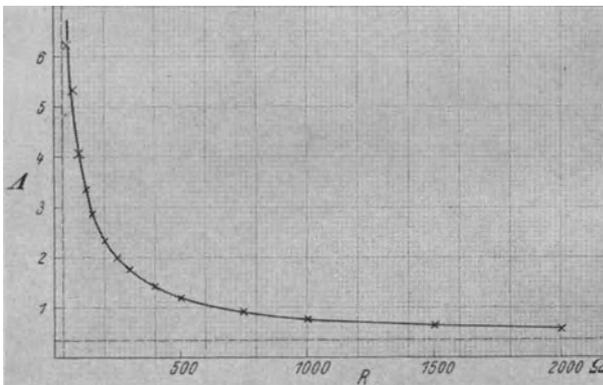


Abb. 81. Logarithmisches Dekrement λ als Funktion des äußeren Widerstandes R .

die im Abstand $R = 31,6 \Omega$ (Grenzwiderstand R_{gr}) parallel zur Ordinate verläuft. Bei diesem äußeren Widerstand wird $\lambda = \infty$; der Schwingfall geht in den Kriechfall über. Die andere Asymptote

verläuft im Abstand $\Delta = 0,329$ parallel zur Abszisse. Das ist derjenige Wert, den Δ bei $R = \infty$, also bei reiner Luftdämpfung, annimmt.

Da es sich bei dieser Aufgabe wesentlich um eine erste Einübung im Gebrauch des Galvanometers und um eine Einföhlung in sein Verhalten unter verschiedenen Umständen handelt, so verzichten wir ausnahmsweise auf eine Fehlerrechnung.

Wenn Galvanometer mit magnetischem Nebenschluß, also veränderlicher Feldstärke im Luftspalt, zur Verfügung stehen, ist es sehr zu empfehlen, daß die Messungen des logarithmischen Dekrements sowohl bei größter wie bei kleinster Feldstärke ausgeführt werden, und daß auch der Grenzwiderstand in beiden Fällen bestimmt wird. Es ist dann aber nötig, für die Aufgabe zwei Halbtage zu verwenden.

35. Aufgabe.

Empfindlichkeit und Widerstand eines Galvanometers

Literatur: W. § 239; M.-P. Bd. IV/1, S. 467; K. S. 563.

Wenn ein Spiegelgalvanometer zur Strommessung verwendet werden soll, so muß es geeicht werden, d. h. es muß festgestellt werden, welche Funktion der Stromstärke im Galvanometer der Ausschlag des Lichtzeigers auf der Skala ist. Zu diesem Zweck beschickt man das Galvanometer mit Strömen, deren Stärke man berechnen kann, und mißt die zugehörigen Ausschläge. Man verfährt dabei so, daß man mit Hilfe einer Spannungsteilung (34. Aufgabe) eine bekannte, der Empfindlichkeit des Galvanometers angepaßte kleine Spannung herstellt und diese an die Klemmen des Galvanometers legt. Um die Stromstärke im Galvanometer zu berechnen, muß man seinen Widerstand kennen. Dieser muß also bei der Eichung eines Galvanometers als Strommesser ebenfalls ermittelt werden.

Bei einem guten Galvanometer ist die magnetische Feldstärke im Luftspalt überall gleich groß. Dann ist auch der Drehwinkel der Drehspule der Stromstärke proportional [Anhang II, Gl. (27)]. Würde man eine kreisförmig gebogene Skala vom Radius A benutzen, in deren Mittelpunkt der Spiegel des Galvanometers steht, so wären auch die Ausschläge α auf dieser Skala den Drehwinkeln φ und damit der Stromstärke proportional. Und zwar

würden sie $\alpha = 2 A \varphi$ betragen, da sich der Lichtzeiger bei einer Drehung des Spiegels um den Winkel φ nach dem Reflexionsgesetz um den Winkel 2φ dreht (Abb. 82). Wir benutzen aber eine ebene Skala, auf der die Ausschläge $\alpha = A \operatorname{tg} 2 \varphi$ betragen, also größer als die Bogenausschläge sind. Um die Proportionalität mit dem Drehwinkel φ und daher auch mit der Stromstärke i zu wahren, reduziert man die Ausschläge auf den Bogen, d. h. man rechnet die Ausschläge auf diejenigen Werte um, die sie auf einer kreisförmigen Skala vom Radius A haben

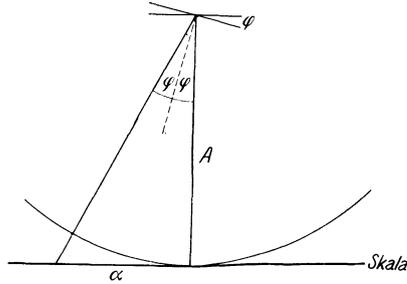


Abb. 82. Zur Reduktion eines Ausschlags auf den Bogen.

würden. Zur Erleichterung dieser Umrechnung dient Tabelle V. Die Reduktion wächst absolut und relativ mit dem Ausschlag. Es hängt von der gewünschten oder erreichbaren Meßgenauigkeit ab, von welcher Ausschlagsgröße an man die Reduktion ausführen muß. In den folgenden Ableitungen verstehen wir unter α stets den, soweit erforderlich, auf den Bogen reduzierten Ausschlag. Dabei ist stets vorausgesetzt, daß der Nullpunkt des Galvanometers senkrecht gegenüber dem Galvanometerspiegel liegt. Zum besseren Verständnis des folgenden verweisen wir auf die im Anhang II gegebene kurze Theorie des Galvanometers.

Bei einem guten Galvanometer ist also der Ausschlag α der Stromstärke i proportional

$$\alpha = C_i i. \quad (1)$$

Die Proportionalitätskonstante C_i heißt die Stromempfindlichkeit (meist kurz Empfindlichkeit) des Galvanometers [Anhang II, Gl. (31)]. Schreibt man umgekehrt

$$i = \alpha \varrho_i \quad \text{mit} \quad \varrho_i = \frac{1}{C_i}, \quad (2)$$

so heißt ϱ_i der Reduktionsfaktor des Galvanometers. Wir messen, wie üblich, die Ausschläge und den Skalenabstand in mm, die Stromstärke in der Einheit 1 A. Dann ist die Einheit der

Stromempfindlichkeit $1 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1}$, die des Reduktionsfaktors $1 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-1}$.

Aus der Stromempfindlichkeit C_i und dem Widerstand R_g des Galvanometers können wir seine Spannungsempfindlichkeit

$$C_u = \frac{C_i}{R_g} \quad (3)$$

berechnen [Anhang II, Gl. (33)], welche dann maßgebend ist, wenn wir das Galvanometer als Spannungsmesser benutzen. Die Einheit von C_u ist $1 \text{ mm} \cdot \text{V}^{-1}$.

Zur Messung der Stromempfindlichkeit C_i und des Widerstandes R_g verwenden wir die in Abb. 83 dargestellte Schaltung, die der bei der 34. Aufgabe benutzten Schaltung (Ab. 79) grundsätzlich vollkommen entspricht. Eine Stromquelle (Akkumulator, Trockenelement) wird durch die in Reihe geschalteten Widerstände R_1 und R_2 geschlossen, die eine Spannungsteilerschaltung bilden. Wenn C_i , wie bei unsern Messungen, von der Größenordnung $10^8 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1}$ ist, so muß R_1 von der Größenordnung 1000

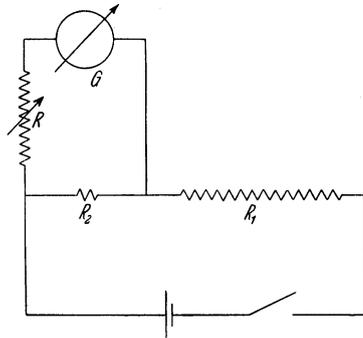


Abb. 83. Zur Messung der Empfindlichkeit und des Widerstandes eines Galvanometers.

bis 5000Ω sein und R_2 0,1 bis $0,5 \Omega$ betragen. Das Verhältnis R_1/R_2 ist so zu bemessen, daß das Galvanometer einen Ausschlag von 200 bis 300 mm zeigt, wenn der Zusatzwiderstand $R = 0$ ist. Im Nebenschluß zu R_2 liegt das Galvanometer, dessen Widerstand R_g ist, und der veränderliche Zusatzwiderstand R (Stöpselwiderstand). Da $R_1 \gg R_2$, so beträgt die Stromstärke im Hauptkreis mit sehr großer Näherung:

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \quad (4)$$

wenn \mathcal{E} die EMK der Stromquelle ist. Für die Zweigströme i im Galvanometerzweig und i' im Widerstand R_2 gilt:

$$i + i' = i_0 \quad \text{und} \quad \frac{i'}{i} = \frac{R_g + R}{R_2}. \quad (5)$$

Daraus folgt:

$$i = i_0 \frac{R_2}{R_g + R_2 + R} = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_g + R_2 + R}. \quad (6)$$

Mit Gl. (1) ergibt sich dann für den Ausschlag:

$$\alpha = C_i \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_g + R_2 + R}. \quad (7)$$

Diese Gleichung enthält die beiden Unbekannten C_i und R_g , die also berechnet werden können, wenn man mindestens zwei verschiedene Kombinationen der drei Widerstände R_1 , R_2 und R wählt und die zugehörigen Ausschläge mißt.

1. Verfahren. Ein einfaches Verfahren ist das folgende. Man wählt als R_1 nacheinander zwei verschieden große Widerstände R'_1 und R''_1 und als R zwei verschieden große Widerstände R' und R'' . Man bemißt sie so, daß man bei Verwendung der Widerstände R'_1 und R' einen etwa ebenso großen Ausschlag α' erhält wie den Ausschlag α'' bei Verwendung der Widerstände R''_1 und R'' . Jedenfalls empfiehlt es sich, die beiden Ausschläge dann etwa gleich groß zu machen, wenn es nicht feststeht, daß die Empfindlichkeit C_i in allen Ausschlagsbereichen gleich groß ist. Dann bewirkt nämlich dieser Fehler keinen Fehler bei der Berechnung des Widerstandes R_g . Aus Gl. (7) folgt:

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{R''_1 R_g + R_2 + R''}{R'_1 R_g + R_2 + R'}. \quad (8)$$

Hieraus kann R_g und dann nach Gl. (7) C_i berechnet werden. (Ein Beispiel s. bei der 36. Aufgabe.)

2. Verfahren. Sofern die Empfindlichkeit C_i über den ganzen Meßbereich des Galvanometers konstant ist, kann man bei konstantem R_1 und R_2 die zu zwei verschiedenen Werten von R gehörigen Ausschläge α messen und R_g und C_i nach Gl. (7) berechnen. Am einfachsten wählt man einmal $R = 0$ und zieht dann im Stöpselwiderstand denjenigen Widerstand R , bei dem der Ausschlag α , also auch die Stromstärke i im Galvanometer, genau auf die Hälfte zurückgeht. Wie ohne weiteres aus Gl. (7) folgt, ist dann $R_g + R_2 = R$, also $R_g = R - R_2$.

Wir wollen dieses Verfahren aber ausführlicher gestalten, indem wir die Ausschläge α für eine größere Zahl von R -Werten

messen und uns dabei zugleich von der Konstanz von C_i in unserm ganzen Meßbereich überzeugen.

Aus Gl. (7) folgt:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{C_i \mathcal{E}} \frac{R_1}{R_2} (R_g + R_2 + R). \quad (9)$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{1}{\alpha} = x, \quad (10 \text{ a})$$

$$\frac{1}{C_i \mathcal{E}} \frac{R_1}{R_2} (R_g + R_2) = a (R_g + R_2) = x_0, \quad (10 \text{ b})$$

$$\frac{1}{C_i \mathcal{E}} \frac{R_1}{R_2} = a. \quad (10 \text{ c})$$

Dann nimmt Gl. (9) die folgende Gestalt an:

$$x = x_0 + aR. \quad (11)$$

Es ist also $x = 1/\alpha$ eine lineare Funktion von R . Wenn wir x_0 und a bestimmen, so können wir aus ihnen C_i und R_g berechnen, und zwar ist

$$R_g = \frac{x_0}{a} - R_2, \quad (12 \text{ a})$$

$$C_i = \frac{1}{a \mathcal{E}} \frac{R_1}{R_2}. \quad (12 \text{ b})$$

Es ist üblich, ein Galvanometer durch seine Stromempfindlichkeit C_i^0 bzw. seinen Reduktionsfaktor ϱ_i^0 bei einem Skalenabstand von 1000 mm zu kennzeichnen. Aus den bei einem Skalenabstand A erhaltenen Werten erhält man dann, da die Ausschläge dem Skalenabstand proportional sind:

$$C_i^0 = C_i \frac{1000}{A}, \quad \varrho_i^0 = \varrho_i \frac{A}{1000}. \quad (13)$$

Will man ein gutes Ergebnis erhalten, so muß so genau wie möglich abgelesen werden. Man gewöhne sich daran, stets an der rechten oder stets an der linken Kante des Lichtzeigers abzulesen. Dann kann man mit einem scharf abgebildeten Lichtzeiger meist noch die Zehntelmillimeter recht genau schätzen.

Beispiel. Es ist

$$\mathcal{E} = 2,07 \text{ V}, \quad R_1 = 3000 \Omega, \quad R_2 = 0,1 \Omega, \quad A = 1560 \text{ mm}.$$

Die Ablesungen wurden nach dem Schema

Nullpunkt – Ausschlag – Nullpunkt – Ausschlag – Nullpunkt gemacht. Den Nullpunkt bezeichnen wir mit a_0 , die Stellung des Lichtzeigers bei einem Ausschlag mit a , so daß der Ausschlag $\alpha = a - a_0$ ist. In Tabelle 1 geben wir als Beispiel unsre Messungen beim Zusatzwiderstand $R = 0$ ausführlich wieder.

Tabelle 1. $R = 0$.

a_0 mm	a mm
496,4 5 6	725,0 1
496,5	725,1
$\alpha = 228,6$ mm	

In entsprechender Weise haben wir die Ausschläge bei den übrigen R -Werten gemessen. Wir vergrößern dabei R , mit $R = 0$ beginnend, in Schritten von je 20Ω bis auf 200Ω . Der Ausschlag bei $R = 0$ muß besonders sorgfältig gemessen werden, da er in alle Einzelberechnungen eingeht. Man beachte dabei die Tatsache, daß das Galvanometer in diesem Fall fast kurzgeschlossen, also sehr stark gedämpft ist, und bringe die nötige Geduld auf, um sich vor den Ablesungen genau davon zu überzeugen, daß der

bei $R = 0$ muß besonders sorgfältig gemessen werden, da er in alle Einzelberechnungen eingeht. Man beachte dabei die Tatsache, daß das Galvanometer in diesem Fall fast kurzgeschlossen, also sehr stark gedämpft ist, und bringe die nötige Geduld auf, um sich vor den Ablesungen genau davon zu überzeugen, daß der

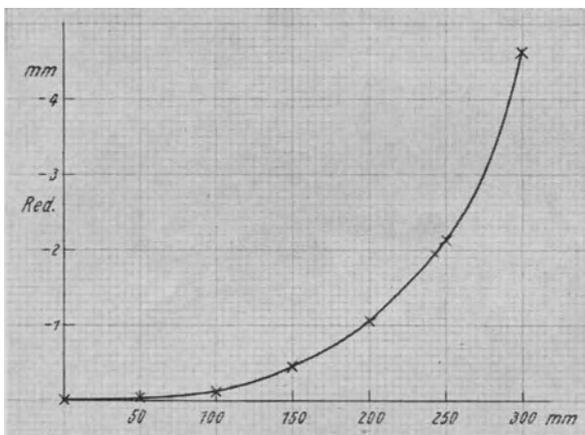


Abb. 84. Zur Reduktion der Ausschläge auf den Bogen. $A = 1560$ mm.

Lichtzeiger nicht etwa noch ganz langsam kriecht. (Am besten beschäftigt man sich einen kleinen Augenblick mit etwas anderem.)

Da wir eine möglichst hohe Genauigkeit anstreben, müssen wir die größeren Ausschläge, bei denen die Reduktionen 0,1 mm und mehr betragen, auf den Bogen reduzieren. Es ist am bequemsten, wenn wir uns zu diesem Zweck nach Tabelle V eine graphische Reduktionstabelle für den Skalenabstand $A = 1560$ mm herstellen (Abb. 84), aus der wir die Reduktionen für die einzelnen Ausschläge leicht ablesen können.

In Tabelle 2 geben wir unsere gesamten Messungsergebnisse, die Reduktionen und die reduzierten Ausschläge α , sowie die weiteren für unsere Berechnungen nötigen Daten.

Tabelle 2.

R	α	Red.	α red.	$x \cdot 10^2$	$(x-x_0) \cdot 10^2$	$20a \cdot 10^2$	
0	228,6	- 1,6	227,0	0,4405	0,0000	—	—
20	166,9	- 0,7	166,2	6015	1610	0,1610	+1 1
40	131,5	- 0,3	131,2	7622	3217	09	0 0
60	108,6	- 0,2	108,4	9230	4825	08	-1 1
80	92,4	- 0,1	92,3	1,084	6435	09	0 0
100	80,3	- 0,1	80,2	245	8045	09	0 0
120	71,1	—	71,1	406	9655	09	0 0
140	63,8	—	63,8	567	1,1265	09	0 0
160	57,9	—	57,9	727	2865	09	0 0
180	52,9	—	52,9	890	4495	08	-1 1
200	48,8	—	48,8	2,050	6095	10	+1 1
						0,1609	4

Abb. 85 zeigt $x = 1/\alpha$ als Funktion von R . Wie schon die Werte von $20a \cdot 10^2$ in Tabelle 2 zeigen, besteht äußerst genau eine lineare Beziehung. Die Empfindlichkeit C_i ist also über den ganzen Meßbereich sehr genau konstant. Es handelt sich um ein besonders gutes Galvanometer.

Man kann bereits aus Abb. 85 einen ungefähren Wert von R_g entnehmen. Aus Gl. (9) folgt — ganz formal mathematisch —, daß $1/\alpha = x = 0$ wird, wenn $R = -(R_g + R_2)$. Die verlängerte Gerade schneidet also die R -Achse im Punkt $-(R_g + R_2)$. Aus Abb. 85 lesen wir ab, daß $R_g + R_2 \approx 55 \Omega$.

Wir wollen jedoch genauer rechnen. Nach Gl. (11) ist $x - x_0 = aR$. Dabei ist x_0 der Wert von $x = 1/\alpha$ für $R = 0$. Für $R = 20 \Omega$ ist also $x - x_0 = 20a$. Das gleiche müssen wir erhalten, wenn wir den für $R = 40 \Omega$ berechneten Wert von $x - x_0$

durch 2, den für $R = 60 \Omega$ berechneten Wert durch 3 teilen usw. Die so erhaltenen Werte von $20 a \cdot 10^2$ sind in Tabelle 2 an-

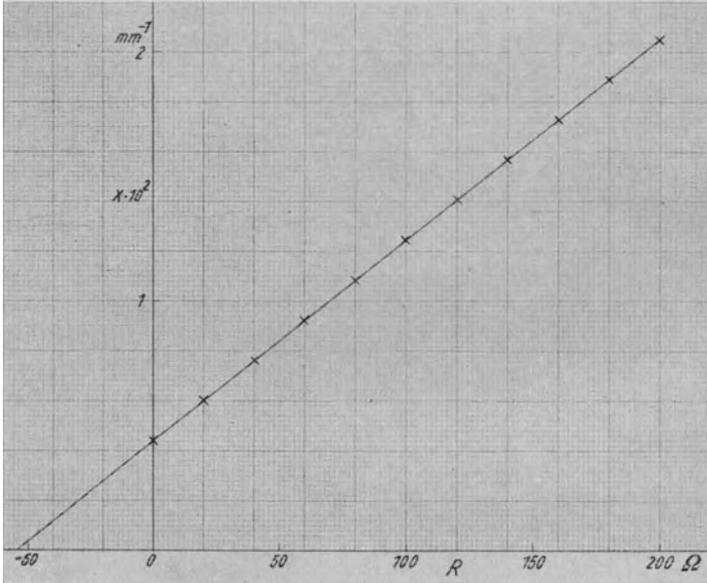


Abb. 85. $x = 1/\alpha$ als Funktion von R .

gegeben. Sie stimmen unter sich ausgezeichnet überein und ergeben den Mittelwert $20 a \cdot 10^2 = 0,1609$, so daß

$$a = 0,8045 \cdot 10^{-4}.$$

Ferner ist

$$x_0 = 0,4405 \cdot 10^{-2}.$$

Daraus folgt aus Gl. (12a) mit $R_2 = 0,1 \Omega$:

$$R_g = \frac{0,4405 \cdot 10^{-2}}{0,8045 \cdot 10^{-4}} - 0,1 = 54,75 - 0,1 = 54,65 \Omega,$$

und nach Gl. (12b) mit $R_1 = 3000 \Omega$ und $\mathcal{E} = 2,07 \text{ V}$:

$$C_i = \frac{3000}{0,8045 \cdot 10^{-4} \cdot 2,07 \cdot 0,1} = 1,801 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1}.$$

Der Reduktionsfaktor ergibt sich nach Gl. (2) zu

$$\varrho_i = \frac{1}{C_i} = 0,556 \cdot 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{mm}^{-1}.$$

Ein Ausschlag von 1 mm entspricht also einer Stromstärke von $0,556 \cdot 10^{-8}$ A. Die Spannungsempfindlichkeit beträgt nach Gl. (3):

$$C_u = \frac{1,801 \cdot 10^8}{54,65} = 0,3296 \cdot 10^7 \text{ mm} \cdot \text{V}^{-1}.$$

Fehlerrechnung. Wir beginnen mit der Berechnung der Fehler von a und x_0 . Aus den Angaben der Tabelle 2 ergibt sich der mittlere absolute Fehler von $20 a \cdot 10^2$ zu

$$\begin{aligned} 20 \Delta a \cdot 10^2 &= \pm \sqrt{\frac{4}{9 \cdot 10}} \\ &\approx \pm 0,2 \text{ Einheiten der 4. Dezimale} = \pm 0,000 \text{ 02}. \end{aligned}$$

Der relative Fehler von a ist natürlich ebenso groß wie derjenige von $20 a \cdot 10^2$, so daß

$$\frac{\Delta a}{a} = \pm \frac{0,000 \text{ 02}}{0,1609} \approx \pm 0,000 \text{ 125} = \pm 0,0125 \text{ \%}.$$

Dieser Fehler ist so klein, daß wir ihn im folgenden vernachlässigen dürfen.

Aus den Zahlen der Tabelle 1 können wir schätzen, daß der Ausschlag α bei $R = 0$, der uns die Größe $x_0 = 1/\alpha$ liefert, mit einem Fehler von höchstens $\pm 0,2$ mm gemessen ist. Demnach ist

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \pm \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \pm \frac{0,2}{228,6} \approx \pm 0,001 = \pm 0,1 \text{ \%}.$$

Nach Gl. (12a) ist $R_g = x_0/a - R_2 \approx x_0/a$, da $R_2 \ll R_g$. Da wir den Fehler von a vernachlässigen dürfen, so ist

$$\frac{\Delta R_g}{R_g} = \pm \frac{\Delta x_0}{x_0} = \pm 0,1 \text{ \%}.$$

Für den relativen Fehler von C_i ergibt sich aus Gl. (12b), da R_1 und R_2 fest gegeben sind und wir wiederum den Fehler von a vernachlässigen dürfen:

$$\frac{\Delta C_i}{C_i} = \pm \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}}$$

Wir haben die EMK \mathcal{E} unsrer Stromquelle an einem Voltmeter abgelesen, bei dem $1 \text{ Sk} = 0,05 \text{ V}$ ist. Die Ablesung betrug $(41,4 \pm 0,05) \text{ Sk}$. Demnach ist

$$\frac{\Delta C_i}{C_i} = \pm \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \pm \frac{0,05}{41,4} \approx \pm 0,0012 = \pm 0,12 \%$$

Ebenso groß ist der relative Fehler des Reduktionsfaktors $\varrho_i = 1/C_i$.

Da die Spannungsempfindlichkeit $C_u = C_i/R_g$, so beträgt der relative Größtfehler von C_u :

$$\frac{\Delta C_u}{C_u} = \pm \left(\frac{\Delta C_i}{C_i} + \frac{\Delta R_g}{R_g} \right) = \pm 0,22 \% \approx \pm 0,25 \%$$

Unsre Endergebnisse lauten demnach:

$$R_g = (54,65 \pm 0,05) \Omega \quad \text{bzw.} \quad 54,65 \Omega \pm 0,1 \%$$

$$C_i = (1,801 \pm 0,002) \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad 1,801 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1} \\ \pm 0,12 \%$$

$$\varrho_i = (0,556 \pm 0,001) \cdot 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{mm}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad 0,556 \cdot 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{mm}^{-1} \\ \pm 0,12 \%$$

$$C_u = (0,330 \pm 0,001) \cdot 10^7 \text{ mm} \cdot \text{V}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad 0,330 \cdot 10^7 \cdot \text{mm} \cdot \text{V}^{-1} \\ \pm 0,25 \%$$

Wir wollen schließlich noch die Stromempfindlichkeit und den Reduktionsfaktor auf den Skalenabstand 1000 mm umrechnen, indem wir nach Gl. (13) erstere mit $1000/1560$, letzteren mit $1560/1000$ multiplizieren. Dann erhalten wir:

$$C_i^0 = 1,154 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1} \quad \text{und} \quad \varrho_i^0 = 0,866 \cdot 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{mm}^{-1}$$

36. Aufgabe. Die Konstanten des Galvanometers

Nach der im Anhang II gegebenen Theorie des Galvanometers, deren Kenntnis wir hier voraussetzen müssen, werden die Eigenschaften eines Galvanometers durch folgende fünf Konstanten bestimmt:

1. seinen Widerstand R_g ,
2. das Richtmoment D der Aufhängung,
3. das Trägheitsmoment J der Drehschule,

4. die Galvanometerkonstante $G = FH$, die ihrerseits wieder das Produkt aus der Windungsfläche F der Drehspule und der magnetischen Feldstärke H im Luftspalt ist,
5. die Luftdämpfungskonstante ϱ .

Unsre Aufgabe ist es, bei einem Galvanometer diese sämtlichen Konstanten zu bestimmen. Die Messung des Widerstandes R_g ist bereits in der 35. Aufgabe ausführlich behandelt worden. Um die vier übrigen Konstanten zu bestimmen, müssen wir vier unabhängige Gleichungen zwischen ihnen und vier anderen Größen aufsuchen, die wir unmittelbar messen können. Als solche stehen uns folgende vier Größen zur Verfügung:

1. die Schwingungsdauer τ der Drehspule bei reiner Luftdämpfung, also beim äußeren Widerstand $R_a = \infty$,
2. das Dämpfungsverhältnis k bzw. das logarithmische Dekrement $\Lambda = \ln k$ bei reiner Luftdämpfung (34. Aufgabe),
3. die Stromempfindlichkeit C_i (35. Aufgabe) bzw. die aus ihr berechenbare winkelbezogene Stromempfindlichkeit C_i^q ,
4. der Grenzwiderstand R_{gr} (34. Aufgabe).

Zur Vereinfachung unserer Gleichungen empfiehlt es sich, an die Stelle der Schwingungsdauer τ die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (1)$$

zu setzen [Anhang I, Gl. (11 b)], und ferner statt des logarithmischen Dekrements Λ die Größe

$$\beta = \frac{\Lambda}{\tau} \quad (2)$$

einzuführen [Anhang I, Gl. (30)]. Wir berechnen die vier Konstanten also schließlich aus den vier Größen ω , β , C_i^q und R_{gr} .

Bei reiner Luftdämpfung ist stets $\Lambda^2/4\pi^2 \ll 1$, so daß die Schwingungsdauer τ von der Schwingungsdauer τ_0 bei fehlender Dämpfung nur äußerst wenig verschieden ist [Anhang I, Gl. (37)]. Wir dürfen daher ohne ins Gewicht fallenden Fehler die nach Gl. (1) berechnete Kreisfrequenz ω gleich der Kreisfrequenz ω_0 im dämpfungsfreien Fall setzen [Anhang II, Gl. (9 b)].

Ferner wollen wir noch berücksichtigen, daß im Grenzfall (äußerer Widerstand $R_a = R_{gr}$) $\beta = \omega_0$ ist. Setzen wir im Fall reiner Luftdämpfung ($R_a = \infty$) $\omega_0 \approx \omega$, so erhalten wir nach Anhang II, Gl. (9 a), (9 b) und (28) die vier Gleichungen:

$$\frac{1}{2J} \left(\varrho + \frac{G^2}{R_g + R_{gr}} \right) = \omega, \quad (3 a)$$

$$\frac{1}{2J} \varrho = \beta, \quad (3 b)$$

$$\frac{G}{D} = C_i^p, \quad (3 c)$$

$$\frac{D}{J} = \omega^2. \quad (3 d)$$

Dabei ist zu beachten, daß sich in diesen Gleichungen ω und β auf den Fall der reinen Luftdämpfung beziehen. Durch Umformung erhalten wir aus diesen Gleichungen die folgenden:

$$G = 2(R_g + R_{gr}) \frac{\omega - \beta}{\omega^2 C_i^p}, \quad (4 a)$$

$$D = \frac{G}{C_i^p}, \quad (4 b)$$

$$J = \frac{D}{\omega^2}, \quad (4 c)$$

$$\varrho = 2\beta J. \quad (4 d)$$

Sämtliche elektrischen Größen müssen in elektromagnetischen Einheiten (e. m. E.) ausgedrückt werden (Einl. § 4). Die winkelbezogene und in e. m. E. ausgedrückte Stromempfindlichkeit C_i^p ist aus der in $\text{mm} \cdot \text{A}^{-1}$ gemessenen Stromempfindlichkeit C_i nach Anhang II, Gl. (32), zu berechnen,

$$C_i^p = \frac{5}{A} C_i, \quad (5)$$

wobei A den Skalenabstand in mm bedeutet.

Beispiel. Die Dauer von zehn Vollschrwingungen der Drehspule bei reiner Luftdämpfung, also bei offenem Galvanometer, betrug 106,4 sec. Es ist also $\tau = 10,64$ sec und die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{10,64} = 0,581 \text{ sec}^{-1}.$$

Der Grenzwiderstand R_{gr} lag zwischen 32,6 und 33,0 Ω , so daß wir ihn mit $R_{gr} = 32,8 \Omega$ ansetzen wollen.

Das logarithmische Dekrement λ wurde aus den in der Tabelle angegebenen Ausschlägen (nur diejenigen nach einer Seite) berechnet, wobei wir von einer Reduktion auf den Bogen abgesehen haben.

Tabelle.

n	0	1	2	3	4
α_n	239,5	165,5	114,5	79,5	54,8 mm
k	1,447	1,446	1,440	1,450	

Als Mittelwert des Dämpfungsverhältnisses ergibt sich $k = e^{\lambda} = 1,446$, so daß $\lambda = \ln k = 0,369$. (Wir stellen fest, daß $\lambda^2/4\pi^2 \approx 0,0035 \ll 1$, so daß die oben gemachte Voraussetzung $\omega_0 \approx \omega$ recht genau erfüllt ist.) Damit ergibt sich nach Gl. (2):

$$\beta = \frac{0,369}{10,64} = 0,0347 \text{ sec}^{-1}.$$

Die Empfindlichkeit C_i und den Widerstand R_g messen wir nach dem bei der 35. Aufgabe beschriebenen, dort aber nicht ausgeführten Verfahren. Wir benutzen die in Abb. 84 dargestellte Schaltung mit $R_2 = 0,1 \Omega$ und wählen einmal $R_1 = R'_1 = 3000 \Omega$ und $R = R' = 0 \Omega$. Dann beträgt der Ausschlag des Galvanometers $\alpha' = 228,9$ mm. Zweitens wählen wir $R_1 = R'_1 = 2000 \Omega$ und erhalten dann mit $R = R' = 27,5 \Omega$ fast genau den gleichen Ausschlag $\alpha'' = 228,6$ mm. Nach Gl. (8) der 35. Aufgabe ist dann:

$$\frac{228,9}{228,6} = \frac{2000}{3000} \frac{R_g + R_2 + 27,5}{R_g + R_2}.$$

Daraus ergibt sich $R_g + R_2 = 54,8 \Omega$, also

$$R_g = 54,7 \Omega.$$

Die EMK des Akkumulators betrug $\mathcal{E} = 2,07$ V. Zur Berechnung der Empfindlichkeit C_i benutzen wir die Messung mit $R_1 = 3000 \Omega$ und $R = 0 \Omega$. Der auf den Bogen reduzierte Ausschlag (Tabelle V) beträgt beim Skalenabstand $A = 1560$ mm $\alpha = 227,3$ mm. Dann erhalten wir nach Gl. (7) der 35. Aufgabe:

$$C_i = \frac{\alpha}{\mathcal{E}} \frac{R_1}{R_2} (R_g + R_2 + R) = \frac{227,3 \cdot 3000 \cdot 54,8}{2,07 \cdot 0,1} = 1,805 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1}.$$

Die winkelbezogene Stromempfindlichkeit beträgt daher nach Gl. (5) in elektromagnetischen Einheiten:

$$C_i^{\theta} = \frac{5}{1560} 1,805 \cdot 10^8 = 0,579 \cdot 10^6 \text{ e. m. E.}$$

Auch die Widerstände müssen wir in e. m. E. umrechnen ($1 \Omega = 10^9 \text{ e. m. E.}$), so daß

$$R_g + R_{gr} = 0,875 \cdot 10^{11} \text{ e. m. E.}$$

Mit diesen Zahlenwerten erhalten wir nach den Gl. (4a) bis (4d):

$$G = \frac{2 \cdot 0,875 \cdot 10^{11} \cdot 0,546}{0,338 \cdot 0,579 \cdot 10^6} = 4,88 \cdot 10^5 \cdot \text{Oe} \cdot \text{cm}^2,$$

$$D = \frac{4,88 \cdot 10^5}{0,579 \cdot 10^6} = 0,844 \text{ dyn} \cdot \text{cm},$$

$$J = \frac{0,844}{0,338} = 2,496 \text{ g} \cdot \text{cm}^2,$$

$$\varrho = 2 \cdot 0,0347 \cdot 2,48 = 0,1731 \text{ dyn} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}.$$

Die Drehspule unsres Galvanometers besteht aus 75 Windungen mit den Seiten 3 cm und 2,5 cm, also mit der Windungsfläche $F = 75 \cdot 3 \cdot 2,5 = 562,5 \text{ cm}^2$. Damit ergibt sich aus der Beziehung $G = FH$ die magnetische Feldstärke im Luftspalt zu

$$H = \frac{4,88 \cdot 10^5}{562,5} = 868 \text{ Oe}.$$

Diese Aufgabe soll in der Hauptsache zur weiteren Übung in der Arbeit mit dem Gavanometer dienen und außerdem eine Vorstellung von der Größenordnung der obigen Konstanten vermitteln. Von einer Fehlerrechnung sehen wir deshalb ab. Lehrreich ist ein Vergleich der obigen Werte des Trägheitsmoments J und des Richtmoments D mit den bei der 8. und 10. Aufgabe auftretenden Größen.

Wir stellen unsre Ergebnisse noch einmal zusammen:

$$\underline{R_g = 54,7 \Omega, \quad G = 4,88 \cdot 10^5 \text{ Oe} \cdot \text{cm}^2, \quad H = 868 \text{ Oe},}$$

$$\underline{D = 0,844 \text{ dyn} \cdot \text{cm}, \quad J = 2,496 \text{ g} \cdot \text{cm}^2, \quad \varrho = 0,1731 \text{ dyn} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}.}$$

37. Aufgabe. Messung sehr großer und sehr kleiner Widerstände

I. Sehr große Widerstände

Das folgende Verfahren kann zur Messung von Widerständen dienen, die man wegen ihrer Größe nicht gut in der Brückenschaltung messen kann. Man schließt zu diesem Zweck einen Akkumulator oder ein Trockenelement (falls zur Erzielung ausreichend großer Ausschläge — mindestens 200 mm — erforderlich eine größere Batterie) durch den zu messenden Widerstand R

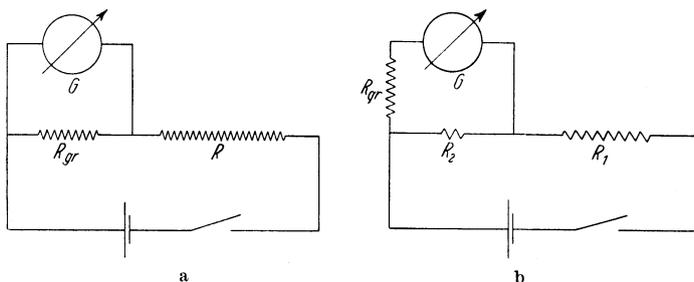


Abb. 86. Zur Messung eines sehr großen Widerstandes.

und ein Spiegelgalvanometer G , zu dem — um den Grenzfall zu verwirklichen (34. Aufgabe) — ein Widerstand parallel geschaltet ist, der ungefähr gleich dem Grenzwiderstand R_{gr} des Galvanometers ist (Abb. 86 a). Da $R \gg R_{gr}$ und den Galvanometerwiderstand R_g , so ist der im Stromkreis fließende Gesamtstrom fast genau gleich \mathcal{E}/R , wenn \mathcal{E} die EMK der Stromquelle ist. Von diesem Strom fließt der Bruchteil $R_{gr}/(R_g + R_{gr})$ durch das Galvanometer. Dieser Strom beträgt also

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{R_{gr}}{R_g + R_{gr}} = \frac{\alpha_1}{C_i}, \quad (1)$$

wobei α_1 der (reduzierte) Ausschlag des Galvanometers und C_i seine Stromempfindlichkeit ist (35. Aufgabe).

Alsdann schließt man die gleiche Stromquelle durch eine Schaltung, wie wir sie bereits bei der 35. Aufgabe (Abb. 83) verwendet haben (Abb. 86 b). R_1 beträgt 1000 bis 5000 Ω , R_2 beträgt 0,1 bis 0,5 Ω . Das Widerstandsverhältnis R_1/R_2 wählen wir so,

daß wir etwa wieder den gleichen Ausschlag erhalten wie bei der ersten Schaltung. Das Galvanometer ist zu R_2 parallel geschaltet, und ihm ist zur Verwirklichung des Grenzfalls der gleiche Widerstand R_{gr} vorgeschaltet wie oben. Wir sind bereits bei der 35. Aufgabe [Gl. (6)] abgeleitet haben, beträgt dann die Stromstärke im Galvanometer (mit $R = R_{gr}$):

$$i_2 = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_g + R_2 + R_{gr}} = \frac{\alpha_2}{C_i}, \quad (2)$$

wenn der Ausschlag nunmehr α_2 beträgt. Da $R_2 \ll R_g + R_{gr}$, so ist $(R_g + R_{gr})/(R_g + R_{gr} + R_2) \approx 1$. Damit folgt aus Gl. (1) und (2):

$$R = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} R_{gr} \frac{R_1}{R_2}. \quad (3)$$

Durch die Wahl etwa gleich großer Ausschläge α_1 und α_2 vermeiden wir erstens Fehler, die davon herrühren könnten, daß die Empfindlichkeit C_i etwa nicht im ganzen Meßbereich des Galvanometers konstant ist. Zweitens brauchen wir dann natürlich die Ausschläge nicht auf den Bogen zu reduzieren.

Beispiel.

$$\begin{aligned} R_{gr} &= 31,5 \, \Omega, & R_1 &= 2000 \, \Omega, & R_2 &= 0,1 \, \Omega; \\ \alpha_1 &= 246,4 \, \text{mm}, & \alpha_2 &= 231,5 \, \text{mm}. \end{aligned}$$

Aus Gl. (3) folgt:

$$R = \frac{231,5}{246,4} \cdot 31,5 \cdot \frac{2000}{0,1} = 0,5919 \cdot 10^6 \, \Omega.$$

Fehlerrechnung. Da die Widerstände R , R_2 , R_{gr} fest gegeben sind, ergibt sich aus Gl. (3) als relativer Größtfehler von R :

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(\frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} \right). \quad (4)$$

Wir schätzen, daß wir α_1 und α_2 auf $\pm 0,1$ mm genau abgelesen haben, so daß $\Delta \alpha_1/\alpha_1 \approx \Delta \alpha_2/\alpha_2 \approx \pm 0,1/240 \approx \pm 0,0004 = \pm 0,04 \%$. Demnach ist $\Delta R/R = \pm 0,08 \approx \pm 0,1 \%$. Unser Endergebnis lautet also:

$$\underline{R = (0,5919 \pm 0,0006) \cdot 10^6 \, \Omega \text{ bzw. } 0,5919 \cdot 10^6 \, \Omega \pm 0,1 \%}.$$

Zu unserer Fehlerangabe ist einschränkend zu bemerken, daß derartig große Widerstände meist zeitlich sehr inkonstant sind und auch von der Strombelastung abhängen können (vgl. die 40. Aufgabe). Unsere Fehlerangabe hat daher nur für den Augenblick der Messung und für die vorliegende Strombelastung (etwa $3,5 \cdot 10^{-6}$ A) Bedeutung.

II. Sehr kleine Widerstände

Zur Messung eines sehr kleinen Widerstandes kann man ein ganz ähnliches Verfahren anwenden. Zunächst schließt man einen Akkumulator oder ein Trockenelement durch einen Widerstand R_0 (Stöpselwiderstand) und den zu messenden Widerstand R und legt parallel zu diesem das Galvanometer G mit seinem Grenzwiderstand R_{gr} als Vorwiderstand (Abb. 87). Der Widerstand R_0 ist derart zu wählen, daß der Ausschlag des Galvanometers genügend groß ist (mindestens 200 mm). Da $R_{gr} + R \gg R$, und $R_0 \gg R$, so ist die an den Enden von R herrschende Spannung fast genau gleich

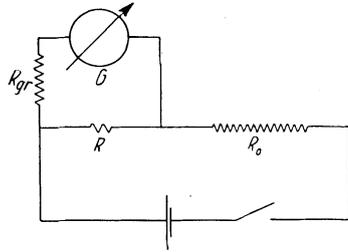


Abb. 87. Zur Messung eines sehr kleinen Widerstandes.

$$U_1 = \mathcal{E} \frac{R}{R_0 + R} \approx \mathcal{E} \frac{R}{R_0} = \frac{\alpha_1}{C_u}, \quad (5)$$

wenn α_1 der Ausschlag des Galvanometers und C_u seine Spannungsempfindlichkeit mit dem Vorwiderstand R_{gr} ist (Anhang II, Gl. 33).

Als dann stellen wir mit der gleichen Stromquelle (gleiches \mathcal{E}) genau die gleiche Schaltung wie Abb. 86 b her und bemessen das Verhältnis R_1/R_2 so, daß der Ausschlag α_2 des Galvanometers von dem obigen Ausschlag α_1 nicht allzu verschieden ist. Da $R_{gr} + R \gg R_2$ und $R_1 \gg R_2$, so beträgt die an den Enden von R_2 liegende Spannung — analog zu Gl. (5) — nunmehr

$$U_2 = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1} = \frac{\alpha_2}{C_u}. \quad (6)$$

Aus Gl. (5) und (6) folgt:

$$R = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} R_0 \frac{R_2}{R_1}. \quad (7)$$

Beispiel.

$$R_0 = 30 \, \Omega, \quad R_1 = 2000 \, \Omega, \quad R_2 = 0,1 \, \Omega;$$

$$\alpha_1 = 204,0 \, \text{mm}, \quad \alpha_2 = 231,0 \, \text{mm}.$$

Es ergibt sich nach Gl. (6):

$$R = \frac{204,0}{231,0} 30 \frac{0,1}{2000} = 1,325 \cdot 10^{-3} \, \Omega.$$

Fehlerrechnung. Aus Gl. (7) ergibt sich wiederum als relativer Größtfehler von R :

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(\frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} \right). \quad (8)$$

Da die Ablesegenauigkeit die gleiche wie oben war, und da auch die Ausschläge etwa ebenso groß waren, so ergibt sich hier wiederum $\Delta R/R = \pm 0,1 \%$, und unser Endergebnis lautet:

$$\underline{R = (1,325 \pm 0,001) 10^{-3} \, \Omega \text{ bzw. } 1,325 \cdot 10^{-3} \, \Omega \pm 0,1 \%.}$$

Für diese Angabe gilt natürlich die bei dem großen Widerstand gemachte Einschränkung nicht.

Selbstverständlich muß bei diesen Messungen darauf geachtet werden, daß die EMK \mathcal{E} der Stromquelle während der Dauer der Messungen konstant bleibt, und daß die Strombelastung auch beim ersten Teil der Messung des kleinen Widerstandes so gering bleibt, daß die Klemmenspannung nicht merklich kleiner ist als die EMK (27. Aufgabe). Aus diesem Grunde ist die Verwendung eines Akkumulators derjenigen eines Trockenelements in diesem Fall vorzuziehen.

III. Berechnung des spezifischen Widerstandes eines Metalls

Der von uns gemessene kleine Widerstand ist ein zylindrischer Metallstab, dem der Strom an den Enden zugeführt wird. Die

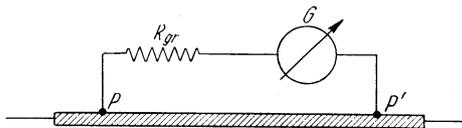


Abb. 88. Zur Messung des spezifischen Widerstandes eines Metalles.

Zuleitungen zum Galvanometer führten an zwei in den Punkten P , P' (Abb. 88) an den Stab gelötete Drähte (sogenannte Spannungsdrähte). Tatsächlich haben wir also den Widerstand R des Stabes zwischen diesen beiden Punkten gemessen. Wir

können aus ihm den spezifischen Widerstand ϱ des betreffenden Metalles berechnen. Ist l die Länge der Strecke PP' , q der Querschnitt des Stabes, so ist

$$R = \varrho \frac{l}{q}, \quad \text{also} \quad \varrho = R \frac{q}{l} \quad (9)$$

(vgl. die 31. Aufgabe).

Beispiel. Unser Stab bestand aus Aluminium. Der Abstand PP' betrug $l = (34,8 \pm 0,2)$ cm. Der Durchmesser des Stabes ergab sich aus zehn Messungen mit der Schraubenlehre zu $2r = (0,3020 \pm 0,0005)$ cm; also ist $r = 0,1510$ cm und $q = \pi r^2 = 0,0716$ cm². Damit ergibt sich nach Gl. (9) mit $R = 1,325 \cdot 10^{-3} \Omega$:

$$\varrho = 1,325 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0,0716}{34,8} = 0,273 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{cm}.$$

Fehlerrechnung. Nach Gl. (9) beträgt der Größtfehler von ϱ :

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \pm \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta q}{q} \right). \quad (10)$$

Dabei ist $\Delta R/R = \pm 0,1\%$. l ist mit einem relativen Fehler $\Delta l/l = \pm 0,02/34,8 \approx \pm 0,0006 \approx \pm 0,1\%$ gemessen. Da $q = \pi r^2$, so ist $\Delta q/q = \pm 2 \Delta r/r$. $2r$ ist mit einem Fehler von $\pm 0,0005$ cm gemessen, so daß $\Delta(2r)/2r = \Delta r/r = \pm 0,0005/0,3020 \approx \pm 0,002$ und $\Delta q/q = \pm 0,004 = \pm 0,4\%$. Es ergibt sich also:

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \pm (0,1 + 0,1 + 0,4)\% = \pm 0,6\%.$$

Wir erhalten also das Endergebnis:

$$\varrho = (0,273 \pm 0,002) 10^{-5} \Omega \cdot \text{cm} \text{ bzw. } 0,273 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{cm} \pm 0,6\%.$$

Das ist in Einklang mit dem in den Tabellen angegebenen runden Wert für Aluminium, $\varrho = 0,27 \cdot 10^{-5}$ bei 18° C.

38. Aufgabe. Ballistisches Galvanometer ¹⁾

Literatur: W. § 236; M.-P. Bd. IV/1, S. 471; K. S. 592.

Ein Galvanometer kann auch zur Messung von Elektrizitätsmengen benutzt werden, die in Gestalt eines kurz-

¹⁾ Die 38. und 39. Aufgabe werden zweckmäßig als ein zusammenhängendes Ganzes behandelt und an zwei aufeinanderfolgenden Übungstagen mit dem gleichen Galvanometer ausgeführt.

dauernden Stromstoßes durch seine Spule entladen werden, sofern seine Schwingungsdauer groß ist gegenüber der Dauer des Stromstoßes. In dieser Verwendungsart — für die es auch Sonderausführungen gibt — bezeichnet man es als ballistisches Galvanometer. Die Theorie desselben geben wir im Anhang II. Der erste Ausschlag ist der durch das Galvanometer entladene Elektrizitätsmenge Q proportional¹⁾ und beträgt nach Anhang II, Gl. (35):

$$\alpha_m = \frac{1}{\lambda} C_b Q. \quad (1)$$

C_b ist die ballistische Empfindlichkeit des Galvanometers, λ eine mit der Dämpfung des Galvanometers wachsende Funktion des logarithmischen Dekrements A ,

$$\lambda = e^{\frac{A}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{A}} \quad (2)$$

[Anhang II, Gl. (34)]. Da A vom Widerstand des Schließungskreises des Galvanometers abhängt, so gilt das auch für λ . Daher muß bei jeder ballistischen Messung das logarithmische Dekrement A aus dem Dämpfungsverhältnis k berechnet werden (34. Aufgabe), wenn man die entladene Elektrizitätsmenge Q aus dem ballistischen Ausschlag α_m und der ballistischen Empfindlichkeit C_b berechnen will,

$$Q = \lambda \frac{\alpha_m}{C_b}. \quad (3)$$

Tabelle VI gibt λ als Funktion von $k = e^A$. Natürlich müssen die Ausschläge α_m bei genauen Messungen auf den Bogen reduziert werden (Tabelle V).

I. Messung und Berechnung der ballistischen Empfindlichkeit

In der Meßtechnik berechnet man die ballistische Empfindlichkeit in der Regel nach der im Anhang II, Gl. (37), abgeleiteten Gleichung

$$C_b = C_i \frac{2\pi}{\tau_0} \quad (4)$$

¹⁾ Ich bezeichne hier Elektrizitätsmengen im Unterschied zu der in meinem Lehrbuch „Physik“ gewählten Bezeichnung e mit dem Symbol Q , um einer Verwechslung mit der Basis e des natürlichen Logarithmen-systems vorzubeugen.

aus der Stromempfindlichkeit C_i und der Schwingungsdauer τ_0 des Galvanometers im idealen dämpfungs-freien Fall. Wenn man genau vorgehen will, so darf man dafür nicht die Schwingungsdauer τ des Galvanometers bei reiner Luftdämpfung einsetzen, sondern muß $\tau_0 = \tau/\sqrt{1 + A^2/4\pi^2}$ berechnen [Anhang I, Gl. (37)]. Wir wollen uns hier nicht mit der Berechnung nach Gl. (4) begnügen, sondern auch eine unmittelbare Messung von C_b nach Gl. (1) durchführen.

Zu diesem Zweck müssen wir eine bekannte Elektrizitätsmenge Q in einem sehr kurzen Stoß durch das Galvanometer entladen. Dazu benutzen wir die in Abb. 89 dargestellte Schaltung.

S_1 und S_2 sind die Primär- und die Sekundärspule eines Lufttransformators. Die Primärspule S_1 besteht aus etwa 150 Windungen aus starkem Draht, die auf einen etwa 35 cm langen Holzkern von etwa 4 cm Durchmesser gewickelt sind. Sie ist von der etwas kürzeren, auf einen Zylinder aus geeignetem Stoff gewickelten Sekundärspule S_2 umgeben, die aus 1000 bis 2000 Windungen aus dünnem Draht besteht.

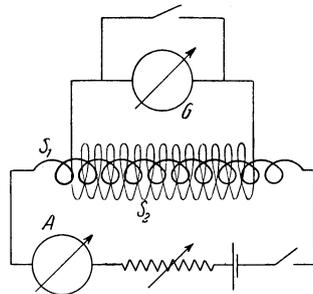


Abb. 89. Zur Messung der ballistischen Empfindlichkeit eines Galvanometers.

Mittels eines Akkumulators oder Trockenelements wird in der Primärspule ein Strom erzeugt, der durch einen Widerstand geregelt und dessen Stärke an einem Strommesser A abgelesen wird. Die Sekundärspule S_2 ist unmittelbar an das Galvanometer G angeschlossen. Ihr Widerstand ist so groß, daß der Schwingfall verwirklicht ist (34. Aufgabe). (Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man stets den Grenzfall verwirklicht. Dann ist $A = \infty$ und $\lambda = e = 2,7183$). Um die Drehspule des Galvanometers nach jeder Messung schnell wieder zur Ruhe zu bringen, legt man parallel zum Galvanometer einen Kurzschlußschalter, den man nach erfolgter Ablesung kurz vor dem Durchgang des Lichtzeigers durch den Nullpunkt betätigt, um die Spule dort durch große Dämpfung (extremer Kriechfall) abzufangen.

Wenn der Primärkreis geschlossen wird, so wird im Sekundärkreis momentan eine EMK \mathcal{E} induziert, welche einen durch das Galvanometer fließenden Stromstoß erzeugt. In diesem Stromstoß wird eine aus den Versuchsbedingungen berechenbare Elektrizitätsmenge Q durch das Galvanometer entladen. Beim Öffnen erfolgt ein gleich starker Stromstoß in entgegengesetzter Richtung. Wir wollen uns im folgenden der aus dem internationalen Maßsystem abgeleiteten Einheiten (Miesches Maßsystem, Einl. § 4) bedienen. Es seien

n_1, n_2 die Windungszahlen von S_1 und S_2 ,

l die Länge, q_1 der Querschnitt der Primärspule,

R der Widerstand des Sekundärkreises, also der Sekundärspule und des Galvanometers,

i_1 die Stromstärke im Primärkreise,

i_2 die momentane Stromstärke im Sekundärkreise,

$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-8}$ die Induktionskonstante.

Fließt im Primärkreis ein Strom i_1 , so herrscht in der Primärspule ein magnetisches Feld H und eine magnetische Induktion B von den Beträgen

$$H = \frac{n_1}{l} i_1, \quad (5 \text{ a})$$

$$B = \mu_0 \frac{n_1}{l} i_1. \quad (5 \text{ b})$$

Daher beträgt der Fluß im Innenraum der Spulen

$$\Phi = B q_1 = \mu_0 \frac{n_1 q_1}{l} i_1. \quad (6)$$

[Der enge Zwischenraum zwischen den Spulen ist praktisch feldfrei; daher gilt Gl. (6) nicht nur für S_1 , sondern auch für S_2 .] Ist der Fluß Φ infolge einer Änderung von i_1 , z. B. beim Ein- und Ausschalten, zeitlich veränderlich, so wird in den n_2 Windungen der Sekundärspule eine EMK vom Betrage

$$\mathcal{E} = n_2 \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \frac{n_1 n_2 q_1}{l} \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \quad (7)$$

induziert. Dabei haben wir zur Abkürzung

$$M = \mu_0 \frac{n_1 n_2 q_1}{l} \quad (8)$$

gesetzt. Die EMK erzeugt im Widerstande R des Sekundärkreises einen Strom vom Betrage

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{M}{R} \frac{di_1}{dt}. \quad (9)$$

Die Dauer des Stromstoßes sei t . Dann wird in ihm insgesamt die Elektrizitätsmenge

$$Q = \int_0^t i_2 dt = \frac{M}{R} \int_0^t \frac{di_1}{dt} dt = \frac{M}{R} \int_0^t di_1 \quad (10)$$

durch das Galvanometer entladen. Beim Einschalten des Primärkreises zur Zeit $t = 0$ beträgt die primäre Stromstärke $i_1 = 0$. Die Dauer t des Stromstoßes ist mit der (durch Selbstinduktion und gegenseitige Induktion bedingten) Zeit identisch, in der der Primärstrom bis zu seinem vollen Wert i_1 anläuft. Daher ist

$$Q = \frac{M}{R} \int_0^t di_1 = \frac{M}{R} \int_0^{i_1} di_1 = \frac{M}{R} i_1. \quad (11)$$

Ebenso groß ist die beim Ausschalten in entgegengesetzter Richtung entladene Elektrizitätsmenge. Aus Gl. (1) und (11) folgt:

$$C_b = \lambda \frac{\alpha_m}{Q} = \lambda \frac{R}{M} \frac{\alpha_m}{i_1}. \quad (12)$$

Messen wir i_1 in A , R in Ω , α_m in mm, so erhalten wir Q in Coul und C_b in der Einheit $1 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1}$.

Um C_b andererseits nach Gl. (4) zu berechnen, messen wir außerdem C_i nach einem der bei der 35. Aufgabe angegebenen Verfahren, das uns zugleich den zur Berechnung des Widerstandes R des Sekundärkreises nötigen Widerstand R_g des Galvanometers liefert. Den Widerstand der Sekundärspule messen wir in der Brückenschaltung (26. Aufgabe).

Beispiel.

$$n_1 = 146, \quad n_2 = 1552, \quad l = 34,80 \text{ cm}, \quad n_1/l = 4,20 \text{ cm}^{-1}.$$

Der äußere Durchmesser von S_1 beträgt 4,38 cm, der Durchmesser des Spulenkerns 3,90 cm. Als Durchmesser der Primärwindungen nehmen wir den Mittelwert 4,14 cm, so daß der Radius

der Primärspule $r_1 = 2,07$ cm und ihr Querschnitt $q_1 = 13,46$ cm² beträgt. Damit erhalten wir nach Gl. (8):

$$M = 1,257 \cdot 10^{-8} \cdot 4,20 \cdot 1552 \cdot 13,46 = 1,103 \cdot 10^{-3}.$$

Wir benutzen hier das gleiche Galvanometer wie bei der 35. Aufgabe. Sein Widerstand beträgt also 54,65 Ω . Der Widerstand der Sekundärspule wurde in der Brückenschaltung zu 229,3 Ω gemessen. Daher ist der Widerstand des Sekundärkreises abgerundet:

$$R = 229,3 + 54,7 = 284,0 \Omega.$$

Wir regeln die Stromstärke im Primärkreise so, daß $i_1 = 1,00$ A. Dann beträgt die beim Öffnen und Schließen des Primärkreises im Sekundärkreis entladene Elektrizitätsmenge nach Gl. (11):

$$Q = \frac{1,103 \cdot 10^{-3}}{284,0} \cdot 1,00 = 3,88 \cdot 10^{-6} \text{ Coul.}$$

Wir haben beim Einschalten (links) und Ausschalten (rechts) die in Tabelle 1 wiedergegebenen Ablesungen a_l und a_r gemacht. a_0 ist der Nullpunkt.

Tabelle 1.

a_0 mm	a_l mm		a_r mm	
520,0	246,9	- 2 4	793,0	+ 10 100
	6,9	- 2 4	2,8	- 10 100
	7,0	+ 8 64	2,8	- 10 100
	7,0	+ 8 64	2,7	- 20 400
520,0	6,8	- 12 144	3,2	+ 30 900
520,0	246,92	280	792,90	1600

Damit ergibt sich abgerundet links ein Ausschlag von 273,1 mm, rechts ein Ausschlag von 272,9 mm und als Mittelwert 273,0 mm. Da wir das gleiche Galvanometer in der gleichen Aufstellung benutzen wie bei der 35. Aufgabe, können wir die erforderliche Reduktion auf den Bogen aus Abb. 84 ablesen. (Andernfalls muß sie nach Tabelle V berechnet werden.) Sie beträgt - 2,8 mm, so daß wir mit dem ballistischen Ausschlag

$$\alpha_m = 273,0 - 2,8 = 270,2 \text{ mm}$$

rechnen müssen. Der Dämpfungsfaktor wurde zu $k = 8,94$ gemessen.

Damit ergibt sich nach Tabelle VI:

$$\lambda = 1,538.$$

Es folgt also aus Gl. (12):

$$C_b = \frac{1,538 \cdot 284,0 \cdot 270,2}{1,103 \cdot 10^{-3} \cdot 1,00} = 1,070 \cdot 10^8 \cdot \text{mm} \cdot \text{Coul}^{-1}.$$

Die Stromempfindlichkeit unsres Galvanometers beträgt $1,801 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1}$ (35. Aufgabe). Seine Schwingungsdauer beträgt bei reiner Luftdämpfung $\tau = 10,64 \text{ sec}$. Das Dämpfungsverhältnis wurde in diesem Fall zu $k = 1,395$ gemessen, was einem logarithmischen Dekrement $\lambda = 0,331$ entspricht. Daraus berechnet sich $\sqrt{1 + \lambda^2/4 \pi^2} = 1,0014$ und $\tau_0 = 10,64/1,0014 = 10,63 \text{ sec}$. Demnach ergibt die Berechnung der ballistischen Empfindlichkeit nach Gl. (4):

$$C_b = 1,801 \cdot 10^8 \cdot \frac{2\pi}{10,63} = 1,065 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1}.$$

Der gemessene Wert weicht also von dem berechneten um rund 0,5 % nach oben hin ab.

Fehlerrechnung. Nach Gl. (12) beträgt der relative Größtfehler des gemessenen Wertes von C_b :

$$\frac{\Delta C_b}{C_b} = \pm \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta \alpha_m}{\alpha_m} + \frac{\Delta i_1}{i_1} \right). \quad (13)$$

Aus den (hier nicht mitgeteilten) Einzelmessungen von k geht hervor, daß der absolute Fehler von k etwa $\pm 0,1$ beträgt, so daß k etwa innerhalb der Grenzen 8,84 und 9,04 unsicher ist, denen nach Tabelle VI für λ die Grenzen 1,535 und 1,541 entsprechen, so daß $\Delta \lambda = \pm 0,003$ und $\Delta \lambda/\lambda = \pm 0,003/1,538 \approx \pm 0,002$.

Aus den (hier nicht mitgeteilten) Einzelmessungen des Spulenwiderstandes ergibt sich ein Fehler von $\pm 0,2 \Omega$. Den Fehler des Galvanometerwiderstandes haben wir bei der 35. Aufgabe für das gleiche Galvanometer zu $\pm 0,05 \Omega$ berechnet. Der Fehler des Widerstandes R des Sekundärkreises beträgt also $\Delta R = \pm 0,25 \Omega$ und der relative Fehler $\Delta R/R = \pm 0,25/284 \approx \pm 0,001$.

Nach Gl. (8) beträgt der relative Größtfehler von M

$$\frac{\Delta M}{M} = \pm \left(\frac{\Delta q_1}{q_1} + \frac{\Delta l}{l} \right) = \pm \left(2 \frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{\Delta l}{l} \right), \quad (14)$$

da $q_1 = 2 \pi r_1^2$, und da wir voraussetzen dürfen, daß n_1 und n_2 fehlerfrei abgezählt sind. Den Fehler von $2 r_1$ (mit der Schublehre gemessen) wollen wir mit Rücksicht auf die infolge der isolierenden Hülle etwas unsichere Lage des Spulendrahtes vorsichtig mit $\pm 0,02$ cm schätzen, so daß $2 \Delta r_1/r_1 = 2 \cdot 0,02/2,07 \approx \pm 0,02$. Den Fehler der mit einem Maßstab gemessenen Länge l schätzen wir — da ja Fehler an beiden Enden möglich sind — auf $\pm 0,05$ cm, so daß $\Delta l/l = \pm 0,05/34,8 \approx \pm 0,0015$. Also ist $\Delta M/M = \pm (0,02 + 0,0015) \approx \pm 0,02$.

Aus den Angaben der Tabelle 1 berechnen wir für den Ausschlag nach links den mittleren Fehler $\pm \sqrt{280/(4 \cdot 5)} \approx \pm 3,7$ Einheiten der zweiten Dezimale und für den Ausschlag nach rechts den mittleren Fehler $\pm \sqrt{1600/(4 \cdot 5)} \approx \pm 9,0$ Einheiten der zweiten Dezimale, also für den Mittelwert den mittleren Fehler $\pm (3,7 + 9,0)/2 = \pm 6,35$ Einheiten der zweiten Dezimale $\approx \pm 0,06$ mm. Wir müssen aber bedenken, daß wir auch den Nullpunkt nur innerhalb von etwa $\pm 0,05$ mm genau ablesen konnten, so daß wir einen Gesamtfehler von α_m von rund $\pm 0,1$ mm in Rechnung setzen müssen. Also ist $\Delta \alpha_m/\alpha_m = \pm 0,1/270,2 \approx \pm 0,0004$. Diesen Fehler können wir aber vernachlässigen.

Bei dem zur Messung von $i_1 = 1,00$ A benutzten Strommesser war $1 \text{ Sk} = 0,01$ A. Die Ablesegenauigkeit von $\pm 0,05$ Sk erlaubte also eine Genauigkeit der Stromstärkenregelung auf $\pm 0,0005$ A. Der relative Fehler von i_1 beträgt also

$$\Delta i_1/i_1 = \pm 0,0005/1,00 = \pm 0,0005,$$

was wir ebenfalls vernachlässigen dürfen.

Demnach folgt aus Gl. (13):

$$\frac{\Delta C_b}{C_b} = \pm (0,002 + 0,001 + 0,02) = \pm 0,023 \approx \pm 2,5 \%,$$

so daß unser Ergebnis lautet:

$$C_b = \pm (1,070 \pm 0,025) \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1}$$

bzw.

$$\underline{1,070 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1} \pm 2,5 \%}.$$

Andererseits beträgt der relative Größtfehler des nach Gl. (4) berechneten Wertes von C_b :

$$\frac{\Delta C_b}{C_b} = \pm \left(\frac{\Delta C_i}{C_i} + \frac{\Delta \tau_0}{\tau_0} \right). \quad (15)$$

Den relativen Fehler von C_i haben wir bei der 35. Aufgabe mit $\Delta C_i/C_i = \pm 0,12\% = \pm 0,0012$ berechnet. Die Schwingungsdauer τ haben wir aus $10\tau = 106,4$ sec berechnet. Der Fehler des letzteren Wertes ist auf $\pm 0,2$ sec zu schätzen, so daß $\Delta \tau_0/\tau_0 \approx \Delta \tau/\tau = \Delta 10\tau/10\tau = \pm 0,2/106,4 \approx \pm 0,002$. Demnach erhalten wir jetzt $\Delta C_b/C_b = \pm (0,0012 + 0,002) \approx \pm 0,003 = \pm 0,3\%$ und damit das Ergebnis:

$$C_b = \underline{(1,065 \pm 0,003) \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1}}$$

bzw.

$$\underline{1,065 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1} \pm 0,3\% .}$$

Der Fehler ist also nur ein Achtel des obigen. Man beachte, daß der Fehler des gemessenen Wertes von C_b ganz überwiegend von der Unsicherheit des Spulenradius r_1 herrührt, dessen Messung wir aber mit unsern Mitteln kaum verbessern konnten. Der zweite, aus C_i berechnete Wert ist jedenfalls der weitaus zuverlässigere, und wir wollen daher im folgenden auch nur diesen verwenden. Wir entnehmen aber aus unsrer Messung die Bestätigung der in Anhang II gegebenen Theorie des ballistischen Galvanometers und ihrer Anwendbarkeit auf das von uns benutzte Galvanometer.

Ebenso wie bei der Stromempfindlichkeit C_i (35. Aufgabe) ist es bei der ballistischen Empfindlichkeit üblich, ihren Betrag C_b^0 für einen Skalenabstand von 1000 mm anzugeben. Unser Skalenabstand betrug 1560 mm. Durch Multiplikation des aus C_i berechneten Wertes von C_b mit $1000/1560$ erhalten wir

$$\underline{C_b^0 = 0,683 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1} .}$$

II. Messung der Kapazität eines Kondensators

Zwischen der Ladung Q eines Kondensators, der an ihm liegenden Spannung U und seiner Kapazität C besteht die Beziehung

$$Q = CU. \quad (16)$$

Entladen wir den Kondensator über ein ballistisches Galvanometer, so können wir die Ladung Q messen und nach Gl. (16)

$$C = \frac{Q}{U} \quad (17)$$

berechnen.

Wir messen einen Kondensator von ziemlich großer Kapazität. Damit wir seine Ladung der Empfindlichkeit unsres Galvanometers anpassen können, benutzen wir die in Abb. 90 dargestellte Schaltung. Wir bilden mit einem Akkumulator oder Trockenelement

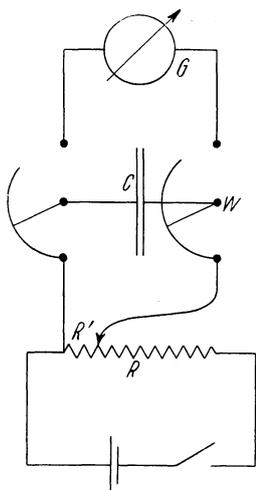


Abb. 90. Zur Messung der Kapazität eines Kondensators mit dem ballistischen Galvanometer.

und einem Stöpselwiderstand von etwa 1000Ω eine Spannungsteilerschaltung und greifen an dem Widerstand eine Spannung U ab, die wir an den Kondensator legen. Diese Spannung bemessen wir so, daß das Galvanometer bei der Entladung des Kondensators einen Ausschlag von 200 bis 300 mm zeigt. Mittels einer Wippe W kann der Kondensator C einmal auf diese Spannung aufgeladen, dann über das Galvanometer G entladen werden. (Bei der Messung kleinerer Kapazitäten kann man natürlich die Spannungsteilung entbehren und muß dann unter Umständen eine größere Spannung, z. B. diejenige einer Anodenbatterie, an den Kondensator legen). Ist \mathcal{E} die EMK der Stromquelle, R der Gesamtwiderstand, R'

der Teilwiderstand, an dem die Spannung U abgegriffen wird, so ist

$$U = \mathcal{E} \frac{R'}{R}. \quad (18)$$

Beispiel. Es ist $\mathcal{E} = 2,025 \text{ V}$, $R = 1000 \Omega$, $R' = 50 \Omega$, also

$$U = 2,025 \frac{50}{1000} = 0,1013 \text{ V}.$$

Bei zehnmaliger Ladung und Entladung des Kondensators ergaben sich die in Tabelle 2 wiedergegebenen Ablesungen.

Der ballistische Ausschlag beträgt also abgerundet $729,1 - 512,0 = 217,1 \text{ mm}$. Die Reduktion auf den Bogen, die wir wieder aus Abb. 84 entnehmen können, beträgt $-1,4 \text{ mm}$, so daß wir mit dem Ausschlag

$$\alpha_m = 217,1 - 1,4 = 215,7 \text{ mm}$$

rechnen müssen.

Das Dämpfungsverhältnis betrug $k = 1,395$. (Es handelt sich in diesem Fall um reine Luftdämpfung, da der Widerstand im

Tabelle 2.

a_0 mm	a mm		
512,0	728,8	- 34	1154
	9,4	+ 26	676
	8,8	- 34	1154
	9,2	+ 6	36
	8,6	- 54	2914
	9,3	+ 16	256
	9,4	+ 26	676
	9,4	+ 26	676
	9,2	+ 6	36
	9,3	+ 16	256
512,0	729,14		7834

Schließungskreis des Galvanometers bei Anschluß an den Kondensator $R = \infty$ ist.) Aus Tabelle VI entnehmen wir dann

$$\lambda = 1,085.$$

Damit erhalten wir nach Gl. (3):

$$Q = \frac{1,085 \cdot 215,7}{1,065 \cdot 10^8} = 2,198 \cdot 10^{-6} \text{ C ul,}$$

und nach Gl. (17):

$$C = \frac{2,198 \cdot 10^{-6}}{0,1013} = 21,69 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 21,69 \mu\text{F.}$$

Fehlerrechnung. Nach Gl. (17) beträgt der relative Größtfehler von C :

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm \left(\frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta U}{U} \right). \quad (19)$$

Der relative Größtfehler von Q beträgt nach Gl. (3):

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \pm \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta \alpha_m}{\alpha_m} + \frac{\Delta C_b}{C_b} \right). \quad (20)$$

Aus den (hier nicht mitgeteilten) Einzelmessungen von k ergibt sich ein Fehler $\Delta k = \pm 0,021$. Nach dem gleichen Verfahren wie oben stellen wir fest, daß daher λ zwischen den Grenzen 1,080 und 1,090 liegt, so daß $\Delta \lambda = \pm 0,005$ und

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \pm \frac{0,005}{1,085} \approx \pm 0,005.$$

Aus den Angaben der Tabelle 2 entnehmen wir, daß der mittlere absolute Fehler der Ablesung a gleich $\pm \sqrt{7834}/(9 \cdot 10) = 9,3$ Einheiten der zweiten Dezimale $\approx \pm 0,1$ mm beträgt. Den Fehler des Nullpunktes schätzen wir wieder auf $\pm 0,05$ mm, so daß der Fehler von α_m sich zu $\Delta\alpha_m = \pm (0,1 + 0,05) = \pm 0,15$ mm ergibt. Demnach ist $\Delta\alpha_m/\alpha_m = \pm 0,15/217,1 = \pm 0,00069 \approx \pm 0,001$. Den relativen Fehler von C_b haben wir oben bereits zu $0,3\% = 0,003$ berechnet. Demnach ist

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \pm (0,005 + 0,001 + 0,003) = \pm 0,009.$$

Die EMK \mathcal{E} unsrer Stromquelle haben wir an einem Spannungsmesser, bei dem $1 \text{ Sk} = 0,05 \text{ V}$, auf $\pm 0,05 \text{ Sk} = \pm 0,0025 \text{ V}$ abgelesen. Der relative Fehler der Spannung U ist nach Gl. (18) ebenso groß wie derjenige von \mathcal{E} , beträgt also

$$\frac{\Delta U}{U} = \pm \frac{0,0025}{2,025} = \pm 0,0012 \approx \pm 0,001.$$

Demnach ergibt sich als relativer Größtfehler von C :

$$\frac{\Delta C}{C} = \pm (0,009 + 0,001) = \pm 0,01 = \pm 1\%.$$

Unser Endergebnis lautet also:

$$C = \underline{\underline{(21,69 \pm 0,22) \mu\text{F} \quad \text{bzw.} \quad 21,69 \mu\text{F} \pm 1\%}}.$$

39. Aufgabe.

Messung magnetischer Felder mit der Induktionsspule

Literatur: W. § 210; M.-P. Bd. IV/1. S. 604.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet des ballistischen Galvanometers ist die Messung magnetischer Feldstärken. Man verfährt dabei so, daß man eine kleine, mit dem Galvanometer verbundene flache Spule (Induktionsspule) so in das Feld bringt, daß ihre Windungsfläche senkrecht zur Feldrichtung steht. Zieht man sie dann schnell aus dem Felde heraus, so ändert sich der durch sie hindurchtretende Fluß Φ sehr plötzlich. Das hat — wie bei der langen Spule in der 38. Aufgabe — die Folge, daß durch das Galvanometer eine bestimmte, der Feldstärke H proportionale Elektrizitätsmenge Q entladen wird. Also ist auch der ballistische

Ausschlag α_m der Feldstärke H proportional. Handelt es sich um das Feld einer eisenfreien Spule, so kann man auch die Induktionsspule im Felde belassen und die Ausschläge durch Ein- und Ausschalten des Stromes in der Feldspule bewirken.

Wir wollen das magnetische Feld zwischen den ebenen Polen eines starken Elektromagneten in Abhängigkeit von der Stromstärke messen, mit der dieser beschickt wird. Zur Erregung des Magneten dient eine ausreichend stark belastbare Batterie. Die Stromstärke wird durch einen geeigneten Widerstand geregelt und an einem Strommesser abgelesen. Zur Feldmessung dient die in Abb. 91 dargestellte Schaltung. Die Spule Sp ist über den Widerstand R' mit dem Galvanometer G verbunden. R' wird so geregelt, daß die Ausschläge bei der größten zu messenden Feldstärke innerhalb der Skala bleiben. Parallel zum Galvanometer legen wir wieder einen Kurzschlußschalter, um das Galvanometer schnell wieder zur Ruhe zu bringen und Ausschläge bei der Einführung der Spule in das Feld zu vermeiden.

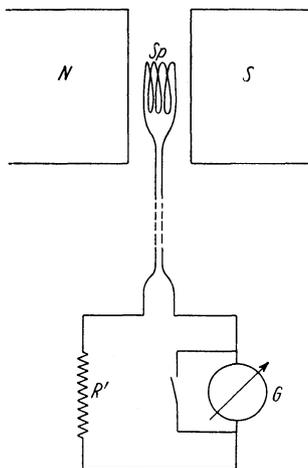


Abb. 91. Zur Messung magnetischer Felder mit der Induktionsspule.

Befindet sich die Spule im Felde H , so herrscht in ihr ein Fluß $\Phi = Bq = \mu_0 Hq$ (q = Spulenquerschnitt, μ_0 = Induktionskonstante, Einl. § 4; wir benutzen zunächst wieder das Miesche Maßsystem). Infolgedessen wird in ihr bei einer Änderung des Flusses (Entfernung aus dem Felde) eine EMK

$$\mathcal{E} = n \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 n q \frac{dH}{dt} = \mu_0 F \frac{dH}{dt} \quad (1)$$

induziert, wenn n die Windungszahl und $F = nq$ die Windungsfläche der Spule ist. Ist R_{sp} der Widerstand der Spule, R_g derjenige des Galvanometers und $R_{sp} + R_g + R' = R$ der Gesamtwiderstand des Kreises, so beträgt die momentane Stromstärke in diesem

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \mu_0 \frac{F}{R} \frac{dH}{dt}. \quad (2)$$

Ist t die Zeit, während derer die Spule aus dem Felde bis in den feldfreien Außenraum befördert wird, so beträgt die gesamte durch das Galvanometer fließende Elektrizitätsmenge:

$$Q = \int_0^t i dt = \mu_0 \frac{F}{R} \int_0^t \frac{dH}{dt} dt = \mu_0 \frac{F}{R} \int_0^t dH. \quad (3)$$

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich die Spule in dem zu messenden Feld H , zur Zeit t im Felde $H = 0$. Es ist also über dH zwischen den Grenzen H und 0 zu integrieren. Da es uns hier nicht auf das Vorzeichen, sondern nur auf den Betrag von Q ankommt, können wir daher statt Gl. (3) schreiben:

$$Q = \mu_0 \frac{F}{R} \int_0^H dH = \mu_0 \frac{F}{R} H, \quad (4)$$

so daß

$$H = \frac{RQ}{\mu_0 F}. \quad (5)$$

Da wir das Miesche Maßsystem benutzten, so erhalten wir dann H in der Einheit $1 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-1}$ (Einl. § 4). Da es aber üblich ist, derartige Felder in der Einheit 1 Oe anzugeben, multiplizieren wir die rechte Seite mit dem Umrechnungsfaktor $0,4 \pi = 1,257 = \mu_0 \cdot 10^8$ und erhalten dann

$$H = \frac{RQ}{F} \cdot 10^8 \text{ Oe}. \quad (6)$$

(Der Faktor 10^8 entspricht der Umrechnung der in internationalen Einheiten gemessenen Größen Q und R in elektromagnetische Einheiten.)

Wir beschicken den Elektromagneten mit schrittweise wachsenden Stromstärken, möglichst bis zur vollen magnetischen Sättigung, und messen bei jeder Stromstärke, auch schon bei der Stromstärke 0 , die Feldstärke H . (Infolge der Remanenz im Eisen bleibt auch bei $i = 0$ noch ein schwaches Feld bestehen.) Dann schwächen wir den Strom wieder schrittweise und wiederholen schließlich die gleichen Messungen wieder bei umgekehrter Stromrichtung. Während der ganzen Meßreihe darf der Strom, außer beim Durchgang durch die Stromstärke 0 , niemals aus-

geschaltet werden. Im allgemeinen wird die Zeit es erlauben, die Messungen bei zwei verschiedenen Polabständen durchzuführen. Zur Einstellung der Polabstände dienen Lehren aus Messing.

Beispiel. Wir benutzen das gleiche Galvanometer in gleicher Aufstellung wie bei der 35. und 38. Aufgabe, dessen Widerstand $R_g = 54,65 \Omega$, und dessen ballistische Empfindlichkeit

$$C_b = 1,065 \cdot 10^8 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1}$$

beträgt. Ferner ist $R' = 500 \Omega$. Der Spulenwiderstand ist in der Brückenschaltung zu $0,175 \Omega$ gemessen. Der Gesamtwiderstand des Meßkreises beträgt also abgerundet $R = 554,8 \Omega$. Die Windungsfläche der Spule ist mit $F = 14,7 \text{ cm}^2$ angegeben. (Man bestimmt sie am einfachsten empirisch durch einen Versuch in dem sehr genau berechenbaren Felde einer gestreckten Spule. Doch führt das im Rahmen dieser Aufgabe wohl meist zu weit.) Der Polabstand beträgt $0,495 \text{ cm}$.

Wir bezeichnen jetzt die den Elektromagneten erregende Stromstärke mit i . Sie wurde auf der 50teiligen Skala eines Strommessers mit dem Meßbereich 20 A abgelesen, so daß $1 \text{ Sk} = 0,4 \text{ A}$. Ihre Regelung erfolgte mit einem unterteilten Widerstand, dessen einzelne Teile je nach der vorkommenden Strombelastung aus verschieden dickem Draht gewickelt sind und durch Stöpsel kurzgeschlossen werden können. Bei den Messungen müssen Uhren weit entfernt abgelegt werden, da sie sonst durch das Streufeld des Magneten magnetisiert

Tabelle.

i Sk	α_m mm	i Sk	α_m mm	i Sk	α_m mm	i Sk	α_m mm
+ 0,0	- 2,5	+ 0,0	+ 3,5	- 2,2	- 69	- 0,0	- 2,5
2,2	+ 69	2,2	74	4,8	133	2,2	71
4,9	135	4,8	138	7,2	190	4,8	135
7,4	192	7,2	197	10,1	226	7,1	193
10,2	220	10,1	220	12,3	229	9,9	217
12,9	229	12,5	229	14,9	232	12,1	227
15,3	235	15,0	235	19,7	241	14,2	232
20,3	241	19,8	242	24,1	249	18,9	239
25,4	247	24,4	244	28,9	247	23,1	246
30,5	248	29,2	247	33,5	249	27,6	247
35,9	249	34,8	250	35,6	248	32,4	249
38,8	250						

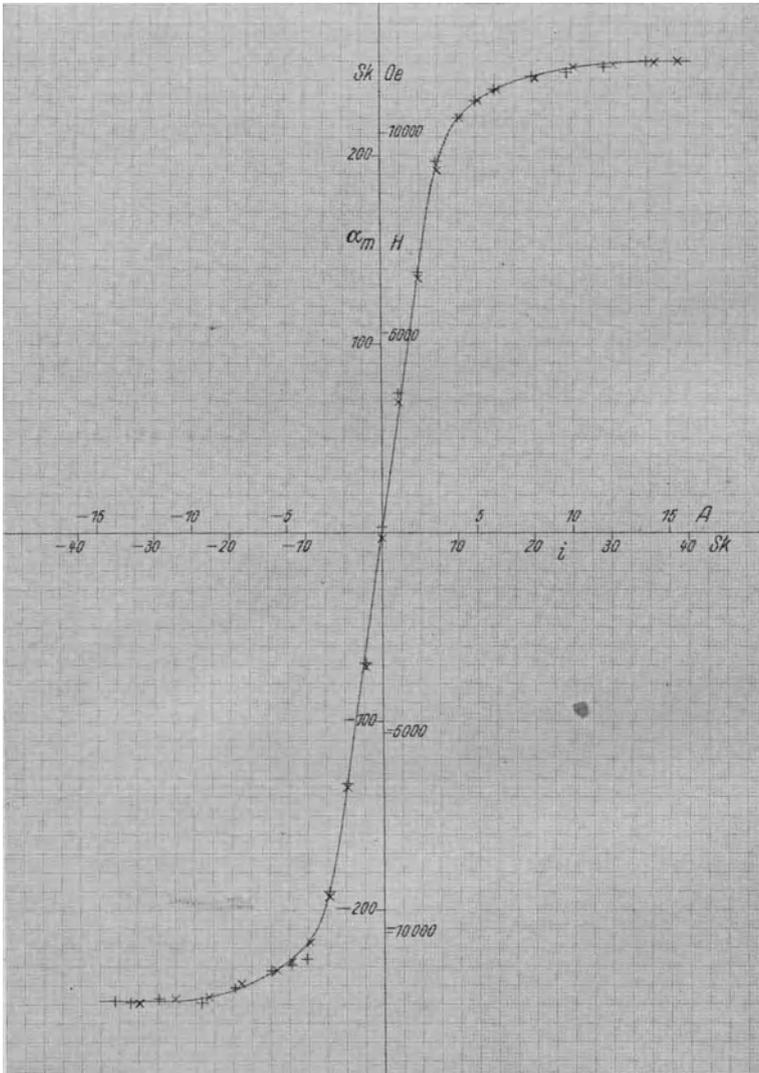


Abb. 92. Magnetisches Feld eines Elektromagneten als Funktion der erregenden Stromstärke. \times Aufstieg, $+$ Abstieg.

werden. Auch müssen die Meßgeräte möglichst entfernt vom Magneten aufgestellt werden.

Die Tabelle gibt unsere Messungen, die wir in Abb. 93 graphisch darstellen. Der Unterschied der Stromstärken beim Auf- und

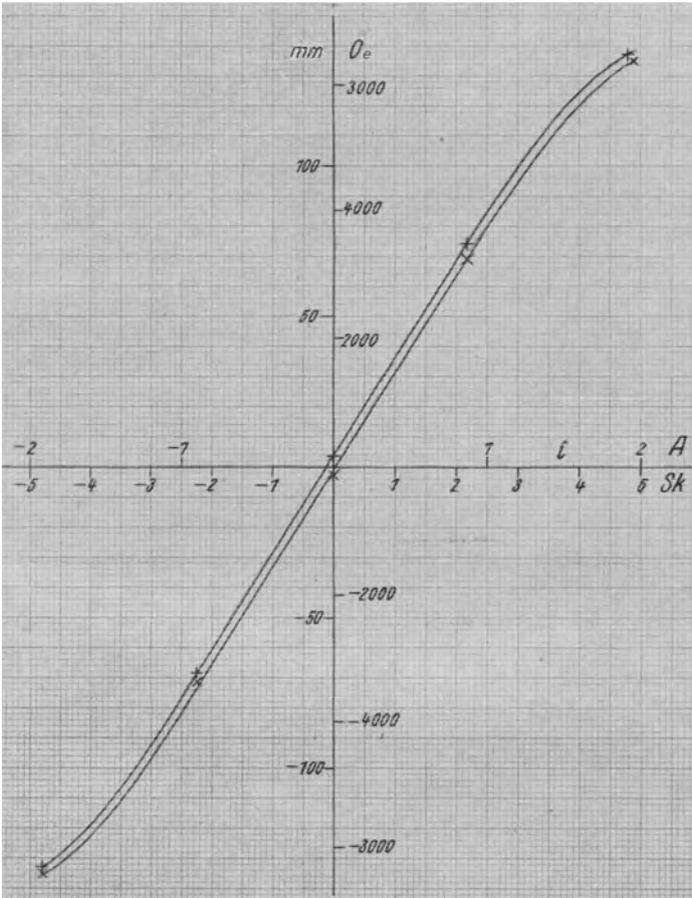


Abb. 93. Mittleres Stück der Hysteresisschleife. \times Aufstieg, $+$ Abstieg.

Abstieg rührt davon her, daß sich die Wicklung des Elektromagneten im Verlauf der Versuchs erwärmt, so daß sein Wider-

stand steigt. Auch eine kleine Ermüdung der Batterie kann im Spiel sein. Die ballistischen Ausschläge α sind nicht auf den Bogen reduziert, weil das den Kurvenverlauf nur wenig ändert.

Aus der Tabelle und aus Abb. 92 erkennt man, daß wir praktisch Sättigung des Elektromagneten erreicht haben; denn die Ausschläge sind von einer Stromstärke von etwa $25 \text{ Sk} = 10 \text{ A}$ ab bereits fast völlig konstant. In Abb. 92 haben wir eine einzige Kurve durch sämtliche Meßpunkte hindurchgezogen. Bei genauerer Betrachtung der Tabelle und der Abb. 93 erkennt man aber, daß im schrägen Teil der Kurve die Meßpunkte beim Aufstieg systematisch ein wenig tiefer liegen als beim Abstieg. Wir zeichnen in Abb. 93 den mittleren Teil der Abb. 92 noch einmal in vergrößertem Maßstab. Man sieht dann, daß die Meßpunkte beim Aufstieg und beim Abstieg deutlich auf zwei verschiedenen Kurven liegen. Die beiden Kurven gehen bei Sättigung asymptotisch ineinander über. Die Stromstärke i ist der den Magneten erregenden Feldstärke, das magnetische Feld H zwischen den Polen der Magnetisierung des Eisens proportional. Daher gibt uns Abb. 93 das Bild des mittleren Teiles der Hysteresisschleife des Eisens, die sehr schmal ist, weil es sich hier um ein sehr weiches Eisen mit sehr kleiner Remanenz (Schnitt mit der H -Achse) und Koerzitivkraft (Schnitt mit der i -Achse) handelt.

Nach Anhang II, Gl. (35), und nach der obigen Gl. (6) ist

$$Q = \lambda \frac{\alpha_m}{C_b} \quad \text{und} \quad H = \lambda \frac{R \alpha_m}{F C_b} \cdot 10^8 \text{ Oe.} \quad (7)$$

Der Dämpfungsfaktor wurde zu $k = 3,705$ gemessen. Aus Tabelle VI entnehmen wir dazu den Wert $\lambda = 1,329$. Dann erhalten wir mit den oben angegebenen Zahlenwerten:

$$H = \frac{1,329 \cdot 554,8}{14,7 \cdot 1,065} \alpha_m = 47,12 \cdot \alpha_m \text{ Oe.} \quad (8)$$

Mit Hilfe dieser Umrechnungszahl können wir auf den Ordinaten der Abb. 92 und 93 außer α_m auch die Feldstärke H auftragen.

Wir wollen aus unsern Messungen die bei der Sättigung erreichte Feldstärke berechnen und benutzen dazu die sechs bei den beiden höchsten Stromstärken erreichten Ausschläge, deren Mittelwert $\alpha_m = 249,1 \text{ mm}$ beträgt. Dafür müssen wir den nach

Tabelle V reduzierten Wert $\alpha_m = 249,1 - 2,1 = 247,0$ mm setzen. Dann erhalten wir nach Gl. (8) mit den oben angegebenen Zahlenwerten

$$H = 47,12 \cdot 247,0 = 11\,640 \text{ Oe.}$$

Fehlerrechnung. Nach Gl. (7) beträgt der relative Größtfehler von H :

$$\frac{\Delta H}{H} = \pm \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta \alpha_m}{\alpha_m} + \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta C_b}{C_b} \right). \quad (9)$$

Aus den hier nicht mitgeteilten Einzelmessungen ergibt sich der mittlere Fehler des Dämpfungsfaktors zu $\Delta k = \pm 0,025$, so daß k zwischen den Grenzen 3,680 und 3,730 liegt. Aus Tabelle VI lesen wir ab, daß dann λ zwischen den Grenzen 1,327 und 1,331 liegt, so daß

$$\Delta \lambda = \pm 0,002 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \pm \frac{0,002}{1,329} \approx \pm 0,0014.$$

Bei dem Widerstand R können wir von einem Fehler des sehr kleinen Widerstandes R_{sp} überhaupt absehen. Den Fehler von R_g haben wir bei der 35. Aufgabe für das gleiche Galvanometer zu $\pm 0,05 \Omega$ berechnet, R' ist fest gegeben. Da $R = 554,8 \Omega$, so ist $\Delta R/R$ so klein, daß wir es hier vernachlässigen können.

Für α_m berechnet man aus den zur Mittelwertbildung herangezogenen Einzelwerten einen mittleren Fehler von $\pm 0,35$ mm, so daß $\Delta \alpha_m/\alpha_m = \pm 0,35/247,0 \approx \pm 0,0014$.

Die Windungsfläche F der Spule ist zwar angegeben, also unsrer Fehlerkritik an sich entzogen. Da sie aber nur auf drei Stellen angegeben ist, so müssen wir einen Fehler von $\pm 0,05 \text{ cm}^2$ in Rechnung setzen, und wir erhalten $\Delta F/F = \pm 0,05/14,7 = \pm 0,0034$.

Für C_b schließlich haben wir bei der 38. Aufgabe den Fehler $\Delta C_b/C_b = \pm 0,003$ berechnet. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta H}{H} &= \pm (0,0014 + 0,0014 + 0,0034 + 0,003) \\ &= \pm 0,0092 \approx \pm 0,01 = \pm 1 \%. \end{aligned}$$

Unser Endergebnis lautet also:

$$\underline{H = (11\,640 \pm 120) \text{ Oe} \quad \text{bzw.} \quad 11\,640 \text{ Oe} \pm 1 \%.}$$

40. Aufgabe. Messungen mit dem Elektrometer

Literatur: W. § 142; M.-P. Bd. IV/1, S. 168, 178; K. S. 634.

Elektrometer dienen zur Messung von Spannungen, nur in seltenen Fällen zur Messung von Elektrizitätsmengen. Für die verschiedenen Verwendungszwecke gibt es eine sehr große Zahl von verschiedenen Elektrometertypen. Wir verwenden bei den folgenden Messungen ein Einfadenelektrometer nach Pohl, dessen Schema Abb. 94 zeigt. In einem Metallgehäuse G , das zur Vermeidung elektrostatischer Störungen stets geerdet werden muß, befinden sich rechts und links zwei Metallschneiden S mit

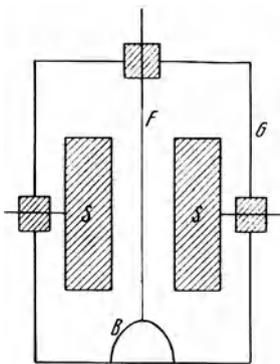


Abb. 94. Schema eines Einfadenelektrometers.

isolierten Zuleitungen von außen. In der Mitte zwischen den Schneiden ist der Faden F , ein dünner Wollastondraht, ausgespannt, der eine isolierte Zuleitung von oben her hat und durch einen Quarzbügel B gespannt ist. Dieser kann zwecks Regelung der mechanischen Spannung des Fadens und damit der Empfindlichkeit des Elektrometers von außen her verschieden stark angezogen werden (in Abb. 94 nicht gezeichnet). Der Faden wird von hinten beleuchtet und von vorn mit einem Mikroskop betrachtet.

Dieses besitzt eine Okularskala (je 50 Teilstriche rechts und links), mittels derer man die Ausschläge des Fadens messen kann.

Die beiden Schneiden werden auf verschiedene Spannung gebracht, so daß zwischen ihnen ein elektrisches Feld herrscht. Es gibt verschiedene Schaltungsweisen des Elektrometers. Bei der idiostatischen Schaltung (Abb. 95a) wird die eine Schneide und der Faden mit dem geerdeten Gehäuse verbunden. An die zweite Schneide legt man die zu messende Spannung. Dann erhält der Faden durch Influenz im Felde zwischen den Schneiden eine Ladung und erfährt eine Kraft in Richtung auf die geladene Schneide. Da sowohl die Ladung des Fadens, wie die Feldstärke zwischen den Schneiden der Spannung der geladenen

Schneide ungefähr proportional sind, die auf den Faden wirkende Kraft aber gleich dem Produkt beider ist, so ist die Ablenkung des Fadens ungefähr dem Quadrat der am Elektrometer liegenden

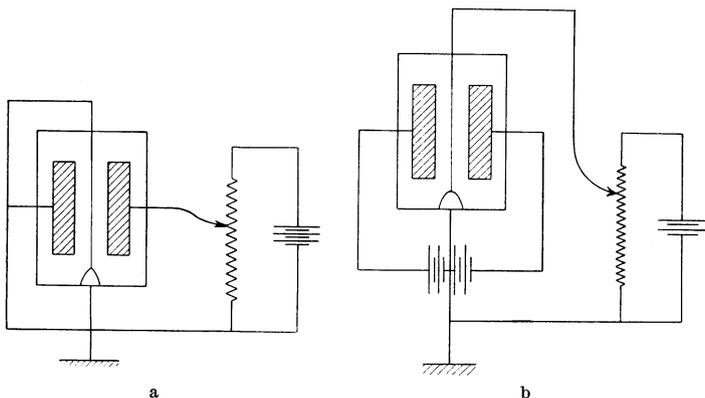


Abb. 95. *a* idiostatische, *b* heterostatische Schaltung des Elektrometers.

Spannung proportional. In dieser Schaltung kann das Elektrometer also auch zur Messung von Wechselspannungen dienen.

Bei der heterostatischen Schaltung erteilt man den beiden Schneiden gleich große Spannungen (Hilfsspannung) von entgegengesetztem Vorzeichen gegen das geerdete Gehäuse, z. B. ± 60 V. Die zu messende Spannung wird an den Faden gelegt (Abb. 95 b). Die Hilfsspannung soll merklich größer als die zu messenden Spannungen sein. Dann hängt die Ladung des Fadens hauptsächlich von seiner Spannung und seiner Kapazität gegen das geerdete Gehäuse ab und ist jener angenähert proportional. Da das Feld zwischen den Schneiden konstant ist, so ist auch die auf den Faden wirkende Kraft der Spannung am Faden etwa proportional, und es ergibt sich eine angenähert lineare Abhängigkeit zwischen der Spannung und dem Ausschlag des Elektrometers. Man wird daher in der Regel die heterostatische Schaltung vorziehen, bei der auch das Elektrometer bei genügend hoher Hilfsspannung empfindlicher ist als bei idiostatischer Schaltung. Überdies besteht die Möglichkeit, die Empfindlichkeit nicht nur durch die mechanische Spannung des Fadens, sondern auch durch die Hilfsspannung in recht weiten Grenzen zu regeln.

Es kommt bei schwacher mechanischer Fadenspannung gelegentlich vor, daß der Faden sich an die eine Schneide anlegt und an ihr haftet, so daß er aus dem Gesichtsfeld verschwindet. Dieser Schaden kann schnell, aber nur vom Assistenten behoben werden.

I. Eichung des Elektrometers

Der erste Teil unsrer Aufgabe besteht in einer Spannungseichung des Elektrometers. Zunächst wird das Okularmikro-

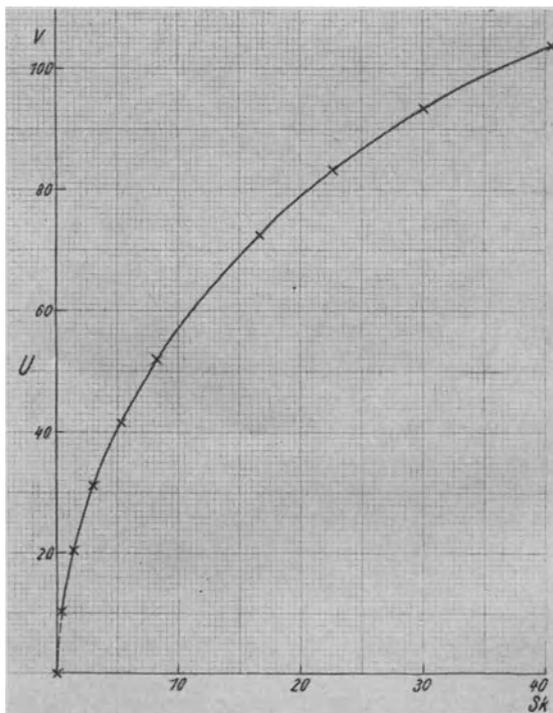


Abb. 96. Eichkurve des Elektrometers in idiostatischer Schaltung.

meter scharf eingestellt, dann das Mikroskop parallaxenfrei auf den Faden eingestellt. Das Mikroskop kann seitlich so verschoben werden, daß der Faden im Nullpunkt der Skala steht. Die zur Eichung nötigen Spannungen stellen wir uns mittels einer Batterie

(z. B. einer Anodenbatterie) und einer Spannungsteilerschaltung her (Abb. 95), bei der man — um die Batterie zu schonen — einen möglichst großen Widerstand (Größenordnung 10000 Ω) benutzt. Dann wird zuerst die größte Spannung eingestellt, die man mit dem Elektrometer messen will, und die mechanische Spannung des Fadens so geregelt, daß man einen Ausschlag bis nahe an das Ende der Skala erhält. Die dabei auftretenden Nullpunkts-

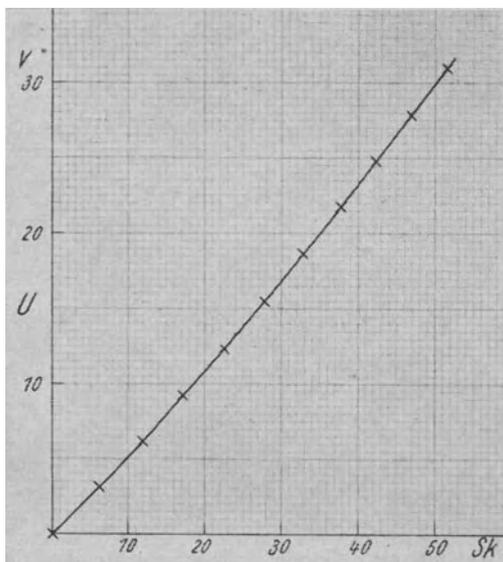


Abb. 97. Eichkurve des Elektrometers in heterostatischer Schaltung.
Hilfsspannung ± 60 V.

verschiebungen werden durch Nachstellen des Mikroskops ausgeglichen. Wenn ein geeignet unterteilter Stöpselwiderstand für die Spannungsteilung zur Verfügung steht, genügt es, wenn man die an ihm liegende Gesamtspannung mißt und die Teilspannungen berechnet. Andernfalls muß jede zur Eichung benutzte Teilspannung besonders gemessen werden. Das gleiche gilt, wenn man auf die Spannungsteilung verzichtet und statt dessen die Teilspannungen einer Anodenbatterie benutzt.

Beispiel. Bei der Eichung in idiostatischer Schaltung regeln wir die mechanische Spannung des Fadens so, daß eine Spannung

von etwa 100 V einen Ausschlag von etwa 50 Sk ergibt. Bei der heterostatischen Schaltung stellen wir die Hilfsspannung von ± 60 V mit Hilfe zweier hintereinander geschalteter Anodenbatterien her, deren Mitte geerdet ist. Die mechanische Fadenspannung regeln wir so, daß die Empfindlichkeit bei kleinen Ausschlägen etwa $2 \text{ Sk} \cdot \text{V}^{-1}$ beträgt, also $1 \text{ Sk} \approx 0,5 \text{ V}$ ist. Tabelle 1 und 2 zeigen unsere Messungen, Abb. 96 und 97 die Eichkurven. Die idiostatische Eichkurve zeigt in roher Näherung eine quadratische Abhängigkeit des Ausschlags von der Spannung. Die (differentielle) Empfindlichkeit steigt mit der Spannung von

Tabelle 1. Idiostatisch.

U V	α Sk
0,0	0,0
10,4	0,5
20,8	1,6
31,2	3,8
41,6	6,7
52,0	10,1
62,4	15,0
72,8	20,8
83,2	28,2
93,6	37,5
104,0	51,0

Tabelle 2. Heterostatisch.

U V	α Sk
0,0	0,0
3,1	6,2
6,2	12,0
9,3	17,4
12,4	22,7
15,5	27,9
18,6	32,9
21,7	37,8
24,8	42,2
27,9	47,0
31,0	51,7

$0,05 \text{ Sk} \cdot \text{V}^{-1}$ bis auf $1,3 \text{ Sk} \cdot \text{V}^{-1}$. Die heterostatische Eichkurve ist nur wenig gekrümmt. Doch sinkt immerhin die (differentielle) Empfindlichkeit mit der Spannung von $2 \text{ Sk} \cdot \text{V}^{-1}$ bis auf etwa $1,5 \text{ Sk} \cdot \text{V}^{-1}$. (Als differentielle Empfindlichkeit bezeichnet man den Differentialquotienten $d\alpha/dt$.)

II. Messung eines sehr großen Widerstandes

Wir wollen das Elektrometer in der gleichen heterostatischen Schaltung dazu benutzen, um einen sehr großen Widerstand (Größenordnung $50 \text{ M}\Omega$ und mehr) zu messen. Dazu dient die in Abb. 98 dargestellte Schaltung. Parallel zum Elektrometer legen wir einen großen Kondensator C , der eine verschwindend kleine Leitfähigkeit hat, und den Widerstand R . Liegt am

Kondensator eine Spannung U , so wird diese vom Elektrometer angezeigt. Auf dem Kondensator befindet sich dann eine Ladung

$$Q = CU. \quad (1)$$

Wird dann die Zuleitung, mit der der Kondensator geladen wurde, wieder entfernt, so entlädt sich der Kondensator über den Wider-

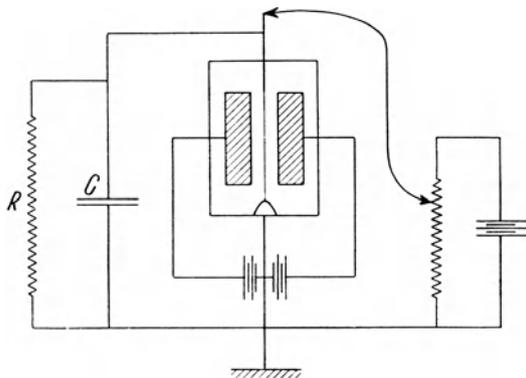


Abb. 98. Zur Messung eines sehr großen Widerstandes mit dem Elektrometer.

stand R . Verliert der Kondensator in der Zeit dt die Ladung dQ , ist also $-dQ$ die Änderung seiner Ladung, so ist die momentane Stromstärke im Widerstand

$$i = \frac{U}{R} = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{dU}{dt}, \quad \text{also} \quad \frac{dU}{U} = -\frac{dt}{RC}. \quad (2)$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet, falls R konstant ist:

$$\ln \frac{U}{U_0} = -\frac{t}{RC} \quad \text{oder} \quad U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3)$$

Dabei bedeutet U_0 die Anfangsspannung des Kondensators zur Zeit $t = 0$. Die Spannung am Kondensator nimmt also exponentiell mit der Zeit ab. Aus dem zeitlichen Verlauf der Spannung können wir nach Gl. (3) den Widerstand

$$R = \frac{t}{C \ln \frac{U_0}{U}} \quad (4)$$

berechnen, wenn die Kapazität C bekannt ist. Wir haben oben die Kapazität des Elektrometers selbst vernachlässigt. Sie

ist nur von der Größenordnung $10^{-5} \mu\text{F}$, also sehr klein gegen die Kapazität des Kondensators.

Sehr große Widerstände sind aber meist von der Stromstärke abhängig. Wir verfahren deshalb bei der Messung so, daß wir bei verschiedenen großen Anfangsspannungen die Zeiten t_n messen, während derer der Ausschlag des Elektrometers um 5 Sk sinkt. Wir bezeichnen die der oberen bzw. unteren Grenze eines solchen Intervalls entsprechenden Spannungen — die wir aus Abb. 98 entnehmen — mit U_n und U_{n+1} . Dann ist nach Gl. (3)

$$\ln \frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{t_n}{RC} \quad \text{und} \quad R = \frac{t_n}{C \ln \frac{U_n}{U_{n+1}}} \quad (5)$$

Ist der Widerstand von der Stromstärke, also auch von der Spannung, unabhängig, so ergibt Gl. (5) in allen Intervallen den gleichen Wert. Dann ist auch die Unterteilung in solche Intervalle nicht nötig, sondern man kann von einem möglichst großen Ausschlag an ohne Unterbrechung bis zu einem möglichst kleinen messen. (Selbstverständlich nicht bis zum Nullpunkt, der ja asymptotisch erreicht wird.) Ist aber R stromabhängig, so wird Gl. (5) für die verschiedenen Intervalle verschiedene Werte ergeben. Wir wollen aus unsern Messungen den Widerstand R als Funktion der Stromstärke i bestimmen.

Beispiel. Unser Widerstand besteht aus einem mit Tusche bestrichenen Papierstreifen, der in eine luftleere Glasröhre eingeschmolzen ist. Die Kapazität des Kondensators beträgt $0,5 \mu\text{F} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$.

Wir messen den Abfall über je 5 Sk von 50 bis 10 Sk. Noch weiter zu messen ist nicht gut möglich, weil der Faden dann so langsam kriecht, daß die Zeiten der Durchgänge durch die Teilstriche allzu unscharf werden. Tabelle 3 zeigt unsere Messungen. Die angegebenen Zeiten t_n sind Mittelwerte aus je zehn Einzelmessungen.

In Tabelle 4 haben wir die den Skalenteilen entsprechenden Spannungen und das Verhältnis U_n/U_0 angegeben, wobei

$$U_0 = 29,9 \text{ V}$$

dem Ausschlag von 50 Sk entspricht. Wir haben ferner die Zeit, die bis zur Erreichung einer Spannung U_n verstrichen wäre,

wenn wir von U_0 ab fortlaufend gemessen hätten, durch Addition der Zeiten t_n zur Gesamtzeit t berechnet. Abb. 99 zeigt den zeitlichen Verlauf, wie er sich aus dem Verlauf in den einzelnen Intervallen zusammensetzt.

Tabelle 3.

Intervall Sk	t_n sec
50—45	3,26
45—40	4,17
40—35	5,02
35—30	6,08
30—25	7,61
25—20	10,00
20—15	14,43
15—10	21,78

In Tabelle 5 haben wir für jedes Intervall den Widerstand nach Gl. (5) berechnet. Wie man sieht, ändert er sich sehr stark mit der Spannung; er ist also von der Stromstärke abhängig, und zwar sinkt er mit wachsender Stromstärke. In Tabelle 6 haben wir jedem Intervall den Mittelwert \bar{U} der Spannungen an seiner Grenze zugeordnet und

Tabelle 4.

α_n Sk	U_n V	$\frac{U_n}{U_0}$	t sec
50	29,9	1,000	0,00
45	26,5	0,886	3,26
40	23,15	0,774	7,43
35	19,95	0,667	12,45
30	16,8	0,562	18,53
25	13,75	0,460	26,14
20	10,75	0,359	36,14
15	7,9	0,264	50,57
10	5,05	0,169	72,35

Tabelle 5.

Intervall Sk	$\frac{U_n}{U_{n+1}}$	$\log \frac{U_n}{U_{n+1}}$	$\ln \frac{U_n}{U_{n+1}}$	t_n sec	$R \cdot 10^{-6}$ Ω
50—45	1,128	0,0523	0,1227	3,26	53,2
45—40	145	0588	1357	4,17	61,6
40—35	160	0645	1485	5,02	67,6
35—30	187	0745	1715	6,08	70,9
30—25	222	0871	2006	7,61	75,9
25—20	279	1069	2426	10,00	81,1
20—15	361	1339	3084	14,43	93,6
15—10	564	1942	4475	21,78	97,4

für jedes Intervall eine mittlere Stromstärke $i = \bar{U}/R$ berechnet. Abb. 100 zeigt R als Funktion von i .

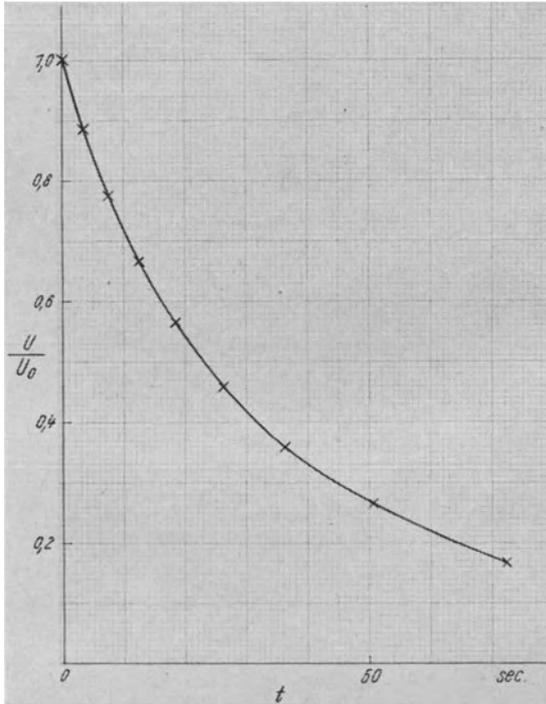


Abb. 99. Zeitlicher Abfall der Spannung am Elektrometer.

Fehlerrechnung. Wir wollen die Fehler von R bei der größten und bei der kleinsten vorkommenden Stromstärke, also in den Intervallen 50 bis 45 Sk. und 15 bis 10 Sk. berechnen. Nach Gl. (5) beträgt der relative Größtfehler von R :

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(\frac{\Delta t_n}{t_n} + \frac{\Delta \ln \frac{U_n}{U_{n+1}}}{\ln \frac{U_n}{U_{n+1}}} \right) = \pm \left(\frac{\Delta t_n}{t_n} + \frac{\frac{\Delta U_n}{U_n} + \frac{\Delta U_{n+1}}{U_{n+1}}}{\ln \frac{U_n}{U_{n+1}}} \right). \quad (6)$$

Eine Abschätzung ergibt, daß wir bei den einzelnen Spannungen mit einem Fehler von $\pm 0,05$ V rechnen müssen.

Im Intervall 50 bis 45 Sk berechnet man aus den hier nicht mitgeteilten Einzelmessungen einen mittleren Fehler der Zeit

Tabelle 6.

\bar{U} V	$R \cdot 10^{-6}$ Ω	$i \cdot 10^6$ A
28,20	53,2	0,553
24,78	61,6	401
21,55	67,6	319
18,38	70,9	259
15,28	75,9	201
12,35	81,1	151
9,33	93,6	097
6,48	97,4	067

$t_n = 3,26$ sec von $\Delta t_n = \pm 0,04$ sec, so daß $\Delta t_n/t_n = \pm 0,04/3,26 \approx \pm 0,012$. Es ist $U_n = U_0 = 29,9$ V, $U_{n+1} = 26,5$ V, so daß

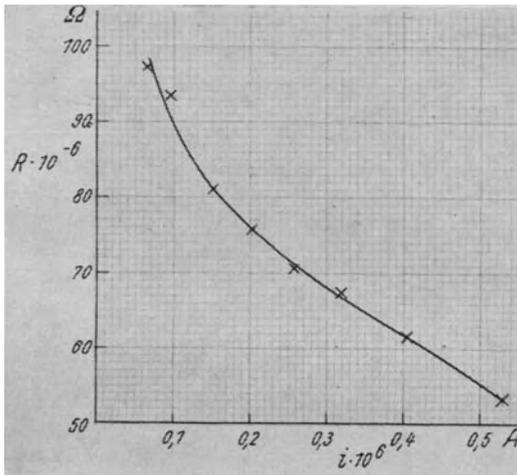


Abb. 100. Widerstand R als Funktion der Stromstärke i .

$\Delta U_n/U_n = \pm 0,05/29,9 \approx \pm 0,0017$ und $\Delta U_{n+1}/U_{n+1} = \pm 0,05/26,5 \approx \pm 0,002$. Ferner ist $\ln U_n/U_{n+1} = 0,1227$. Damit folgt aus Gl. (6):

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(0,012 + \frac{0,0037}{0,1227} \right) = \pm (0,012 + 0,03) \approx \pm 0,04 = \pm 4\%$$

Im Intervall 15 bis 10 Sk beträgt der mittlere Fehler von $t_n = 21,78 \text{ sec}$ $\Delta t_n = \pm 0,2 \text{ sec}$, so daß $\Delta t_n/t_n = \pm 0,2/21,78 \approx \pm 0,01$. Es ist ferner $U_n = 7,9 \text{ V}$, $U_{n+1} = 5,05 \text{ V}$, $\Delta U_n/U_n = \pm 0,05/7,9 \approx \pm 0,006$, $\Delta U_{n+1}/U_{n+1} = \pm 0,05/5,05 \approx \pm 0,01$, $\ln U_n/U_{n+1} = 0,4475$. Demnach ist:

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm \left(0,01 + \frac{0,016}{0,4475} \right) = \pm (0,01 + 0,036) \approx \pm 0,05 = \pm 5 \%$$

Unsre Ergebnisse sind also recht ungenau, viel ungenauer als die Einzelgrößen, aus denen sie berechnet wurden. Das beruht, wie man leicht sieht, darauf, daß in die Berechnungen der $\ln U_n/U_{n+1}$ eingeht, und daß dieser, da U_n/U_{n+1} von 1 nicht sehr verschieden ist, von kleinen Fehlern von U_n und U_{n+1} relativ stark beeinflußt wird. Als Ergebnis geben wir die beiden vorstehenden Widerstände an:

$$i \approx 0,55 \cdot 10^{-6} \text{ A:}$$

$$\underline{R = (53,2 \pm 2,1) \cdot 10^6 \Omega \quad \text{bzw.} \quad 53,2 \cdot 10^6 \Omega \pm 4 \%},$$

$$i \approx 0,07 \cdot 10^{-6} \text{ A:}$$

$$\underline{R = (97,4 \pm 5,0) \cdot 10^6 \Omega \quad \text{bzw.} \quad 97,4 \cdot 10^6 \Omega \pm 5 \%}.$$

Dabei ist zu beachten, daß die Stromstärken i aus den angegebenen Widerständen R berechnet wurden, also mindestens ebenso unsicher sind wie diese.

Anhang I. Ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen

Literatur: W. § 42; M.-P. Bd. I/1, S. 379, 398.

Da es sich bei unsern Aufgaben stets um Drehschwingungen handelt, beschränken wir uns hier auf diese. Die Behandlung linearer Schwingungen ist genau die gleiche. Man hat nur den Drehwinkel durch die lineare Auslenkung, das Drehmoment durch die Rückstellkraft, das Richtmoment durch die Richtkraft und das Trägheitsmoment durch die Masse zu ersetzen.

I. Ungedämpfte Schwingungen

Ein Körper sei um eine raumfeste Achse drehbar und besitze bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment J . Er habe ferner bezüglich Drehungen um diese Achse eine bestimmte stabile Gleichgewichtslage. Wird er durch eine Drehung um die Achse aus dieser Lage entfernt, so tritt an ihm ein rücktreibendes Drehmoment N auf, das bei nicht zu großem Drehwinkel φ diesem Winkel proportional ist. Wir setzen es gleich

$$N = - D \varphi, \quad (1)$$

mit negativem Vorzeichen, weil es den Winkel φ zu verkleinern sucht. Die Größe D heißt das Richtmoment des Systems. Es wird, da der Winkel φ durch eine reine Zahl ausgedrückt wird, nach Gl. (1) im CGS-System in der gleichen Einheit gemessen wie ein Drehmoment, also in der Einheit $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$. Die Einheit des Trägheitsmoments ist $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ (8. Aufgabe).

Zwischen dem an einem Körper angreifenden Drehmoment N und der ihm durch dieses erteilten Winkelbeschleunigung $d^2 \varphi / dt^2$ besteht die Beziehung

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = N. \quad (2)$$

Ist kein weiteres Drehmoment wirksam, wird also der aus seiner Gleichgewichtslage gedrehte Körper sich selbst überlassen, so folgt aus Gl. (1) und (2):

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - D \varphi. \quad (3)$$

Dies ist die Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung. Wir setzen:

$$\frac{D}{J} = \omega^2. \quad (4)$$

Dann folgt aus Gl. (3) nach Division durch J :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi. \quad (5)$$

Wie man leicht durch Einsetzen feststellt, sind

$$\varphi = \text{const} \cdot \sin \omega t \quad \text{und} \quad \varphi = \text{const} \cdot \cos \omega t \quad (6)$$

zwei partikuläre Lösungen dieser Gleichung. Ihre allgemeine Lösung lautet also:

$$\varphi = a \sin \omega t + b \cos \omega t. \quad (7)$$

a und b sind Integrationskonstanten, durch deren Wahl Gl. (7) den besonderen Bedingungen des Einzelfalles angepaßt werden kann. Man kann sie berechnen, wenn für einen bestimmten Zeitpunkt t — am einfachsten für $t = 0$ — der Winkel φ und die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t \quad (8)$$

bekannt sind.

Es sei φ_0 die Schwingungsweite des Körpers. Wir wählen unsere Zeitskala stets so, daß der schwingende Körper zur Zeit $t = 0$ entweder gerade mit der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt = u_0$ durch seine Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ hindurchgeht oder sich gerade in einem Umkehrpunkt $\varphi = \varphi_0$ befindet ($d\varphi/dt = 0$). Im ersten Fall folgt aus Gl. (7) und (8) $b = 0$ und $a = u_0/\omega = \varphi_0$, so daß

$$\varphi = \frac{u_0}{\omega} \sin \omega t = \varphi_0 \sin \omega t, \quad \frac{d\varphi}{dt} = u_0 \cos \omega t = \varphi_0 \omega \cos \omega t. \quad (9)$$

Im zweiten Fall ergibt sich entsprechend $b = \varphi_0$ und $a = 0$, so daß

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 \omega \sin \omega t. \quad (10)$$

ω ist die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung. Sie hängt mit der Schwingungszahl oder Frequenz ν und

der Schwingungsdauer τ (Dauer einer vollen Hin- und Herschwingung) durch die Gleichungen

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (11 \text{ a})$$

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (11 \text{ b})$$

zusammen. Aus Gl. (4) und (11 b) folgt die wichtige Beziehung:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad \text{bzw.} \quad \tau^2 = 4\pi^2 \frac{J}{D}. \quad (12)$$

II. Gedämpfte Schwingungen

Die ungedämpfte Schwingung ist nur ein idealer Grenzfall, der ohne ständige Energiezufuhr zum schwingenden System nicht zu verwirklichen ist. Denn ein schwingender Körper verliert infolge unvermeidlicher Wechselwirkungen mit seiner Umgebung — z. B. durch Luftreibung — ständig an Energie, so daß seine Schwingungsweite mehr oder weniger schnell abnimmt. Diese Wechselwirkungen erzeugen am Körper ein zusätzliches Drehmoment N_r , das seiner Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ stets entgegengerichtet ist, und das in allen uns hier angehenden Fällen der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Wir setzen es also gleich

$$N_r = -\rho \frac{d\varphi}{dt}. \quad (13)$$

Die Größe ρ nennen wir die Dämpfungskonstante des Körpers, da sie für die Dämpfung seiner Schwingungen verantwortlich ist. Aus Gl. (13) kann man leicht ableiten, daß ihre Einheit im CGS-System $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$ ist. Wir bezeichnen jetzt das vom Richtmoment herrührende Drehmoment [Gl. (1)] mit N_a und erhalten dann in Erweiterung der Gl. (2) und (3):

$$N = N_a + N_r = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi - \rho \frac{d\varphi}{dt} \quad (14)$$

oder

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \rho \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = 0. \quad (15)$$

Wir dividieren durch J und setzen

$$\frac{\varrho}{J} = 2\beta, \quad (16 \text{ a})$$

$$\frac{D}{J} = \omega_0^2. \quad (16 \text{ b})$$

ω_0 ist also die Kreisfrequenz des Körpers bei fehlender Dämpfung, die wir oben mit ω bezeichnet haben [Gl. (4)]. Es folgt:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (17)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung erhalten wir, wenn wir

$$\varphi = Ae^{Bt} \quad (18)$$

setzen. Indem wir dies in Gl. (17) einsetzen und mit dem gemeinsamen Faktor Ae^{Bt} kürzen, erhalten wir für B die quadratische Gleichung $B^2 + 2\beta B + \omega_0^2 = 0$ mit den beiden Lösungen

$$B = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (19)$$

Jede der beiden Lösungen liefert uns durch Einsetzen in Gl. (18) eine partikuläre Lösung der Gl. (17). Ihre allgemeine Lösung ist die Summe der beiden partikulären Lösungen mit zwei beliebigen Konstanten $A = A_1$ und $A = A_2$.

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\beta < \omega_0$ oder $\beta > \omega_0$, also die Fälle kleinerer und größerer Dämpfung.

a) $\beta < \omega_0$. Schwingfall. Ist $\beta < \omega_0$, so ist die Wurzel der Gl. (19) imaginär, B also komplex. Wir setzen

$$\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega. \quad (20)$$

Dann lauten die beiden Lösungen der Gl. (19):

$$B = -\beta \pm i\omega, \quad (21)$$

und die allgemeine Lösung der Gl. (17) lautet:

$$\varphi = e^{-\beta t}(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}). \quad (22)$$

A_1 und A_2 sind komplexe Integrationskonstante. Nach der bekannten Formel $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ kann man dies in die Form

$$\varphi = e^{-\beta t}(a \sin \omega t + b \cos \omega t) \quad (23)$$

bringen. a und b sind reelle Konstante, welche — wie die entsprechenden Größen in Gl. (7) — von den Anfangsbedingungen des Vorgangs abhängen und wie jene berechnet werden können, wenn der Betrag von φ und die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-\beta t}[(a\omega - b\beta) \cos \omega t - (b\omega + a\beta) \sin \omega t] \quad (24)$$

in einem bestimmten Zeitpunkt — am einfachsten zur Zeit $t = 0$ — bekannt sind. Bei unsern einschlägigen Messungen wählen wir unsre Zeitskala meist so, daß sich der schwingende Körper zur Zeit $t = 0$ in einem Umkehrpunkt $\varphi = \varphi_0$ befindet oder — was auf das gleiche hinausläuft — aus einer erzwungenen Ruhelage $\varphi = \varphi_0$ startet. Dann ist zur gleichen Zeit $d\varphi/dt = 0$, und wir erhalten aus Gl. (23) und (24) für a und b die Bestimmungsgleichungen $b = \varphi_0$ und $a\omega - b\beta = 0$, so daß $a = \varphi_0\beta/\omega$. Damit erhalten Gl. (23) und (24) die Gestalten

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right), \quad (25)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 e^{-\beta t} \frac{\omega^2 + \beta^2}{\omega} \sin \omega t = -\varphi_0 e^{-\beta t} \frac{\omega_0^2}{\omega} \sin \omega t, \quad (26)$$

da nach Gl. (20)

$$\omega^2 + \beta^2 = \omega_0^2.$$

Gl. (23) unterscheidet sich von der entsprechenden Gl. (7) der ungedämpften Schwingung zunächst durch den Faktor $e^{-\beta t}$, welcher die zeitliche Abnahme der Schwingungsweite bewirkt. Zweitens ist nach Gl. (20) die Kreisfrequenz ω der gedämpften Schwingung kleiner als die Kreisfrequenz ω_0 des gleichen Körpers bei fehlender Dämpfung.

In den Umkehrpunkten der Schwingung ist $d\varphi/dt = 0$, also $\sin \omega t = 0$. Daher durchläuft der Körper die Umkehrpunkte auf der Startseite ($\varphi > 0$) zu den Zeiten $t = n 2\pi/\omega$, die Umkehrpunkte auf der entgegengesetzten Seite ($\varphi < 0$) zu den Zeiten $t = (2n + 1)\pi/\omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Da die Schwingungsdauer des Körpers nach Gl. (11 b) $\tau = 2\pi/\omega$ beträgt, so erfolgen die Durch-

gänge durch die positiven Umkehrpunkte zu den Zeiten $t_n = n\tau$, durch die negativen Umkehrpunkte zu den Zeiten $t'_n = (2n + 1)\tau/2$. Der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch einen positiven und einen negativen Umkehrpunkt beträgt also $\tau/2$; die Durchgänge durch die negativen Umkehrpunkte liegen in der Mitte zwischen den benachbarten Durchgängen durch die positiven Umkehrpunkte und umgekehrt.

Bei den Durchgängen durch die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ ist nach Gl. (25) $\operatorname{tg} \omega t = -\omega/\beta$. Daher erfolgen, wenn wir unter $\operatorname{arctg}(\omega/\beta)$ den Hauptwert dieser Größe verstehen, die Nulldurchgänge zu den Zeiten

$$t = \frac{1}{\omega} \left[(n + 1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\beta} \right]. \quad (27)$$

Im dämpfungsfreien Fall ($\beta = 0$) ist $\omega/\beta = \infty$ und $\operatorname{arctg} \omega/\beta = \pi/2$, also $t = (2n + 1)\pi/2\omega = (2n + 1)\tau/4$. Dann liegen also die Nulldurchgänge in der zeitlichen Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten auf entgegengesetzten Seiten. Ist aber Dämpfung vorhanden, also $\beta > 0$, so ist $\operatorname{arctg} \omega/\beta < \pi/2$. Daher sind die Zeiten der Nulldurchgänge dann sämtlich um den Betrag $(\pi/2 - \operatorname{arctg} \omega/\beta)/\omega$ gegenüber denjenigen bei fehlender Dämpfung verzögert, und zwar um so mehr, je größer die Dämpfung ist. Die Nulldurchgänge haben also zwar — wie die Durchgänge durch die Umkehrpunkte — voneinander den zeitlichen Abstand $\tau/2$, aber sie liegen nicht genau in der Mitte zwischen den letzteren, sondern erfolgen zu etwas späterer Zeit. Das ist bei der Zeichnung von Kurven, welche eine gedämpfte Schwingung darstellen, zu beachten.

Da die positiven Umkehrpunkte zu den Zeiten $t_n = n\tau = n \cdot 2\pi/\omega$ durchlaufen werden, so betragen die aufeinanderfolgenden Ausschläge des Körpers auf der positiven Seite ($\cos \omega t = 1$, $\sin \omega t = 0$):

$$\varphi_n = \varphi_0 e^{-n\beta\tau} = \varphi_0 e^{-n\lambda} = \varphi_0 k^{-n}. \quad (28)$$

Dabei haben wir

$$\beta\tau = \lambda \quad (29)$$

und

$$k = e^\lambda \quad (30)$$

gesetzt. Die Größe λ heißt das logarithmische Dekrement, k das Dämpfungsverhältnis der Schwingung. Sind φ_n und

φ_{n+1} zwei aufeinanderfolgende Ausschläge nach der gleichen Seite, so ist nach Gl. (28)

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = k = e^{\Lambda} \quad (31)$$

und

$$\Lambda = \ln k = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}. \quad (32)$$

Die negativen Umkehrpunkte werden zu den Zeiten $(2n + 1) \tau/2 = (2n + 1) \pi/\omega$ durchlaufen. Bezeichnen wir diese Ausschläge mit φ'_n , wobei n die Laufzahl des vorhergehenden positiven Umkehrpunktes sein soll, so folgt aus Gl. (25) ($\cos \omega t = -1$, $\sin \omega t = 0$):

$$\varphi'_n = -\varphi_0 e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)\Lambda}. \quad (33)$$

Insbesondere ergibt sich für den ersten negativen Umkehrpunkt ($n = 0$):

$$\varphi'_0 = -\varphi_0 e^{-\frac{\Lambda}{2}} = -\frac{\varphi_0}{\sqrt{k}}, \quad (34)$$

so daß

$$k = \left(\frac{\varphi_0}{-\varphi'_0}\right)^2. \quad (35)$$

Nach Gl. (11 b) und (20) beträgt die Schwingungsdauer einer gedämpften Schwingung:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (36)$$

Die Schwingungsdauer des ungedämpften Körpers würde $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ betragen. Hieraus und aus Gl. (29) folgt durch einfache Rechnung:

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}. \quad (37)$$

τ ist also größer als τ_0 und wächst mit der Dämpfung, aber nur sehr langsam, solange $\Lambda^2 \ll 4\pi^2$. Nehmen z. B. die Ausschläge bei jeder Vollschrwingung auf die Hälfte ab — was man schon als eine recht starke Dämpfung empfinden wird —, so daß $k = 2$, so ist $\Lambda = 0,694$ und $\tau = 1,0061 \tau_0$, also nur um rund 0,6 % von τ_0 verschieden. Man kann daher die bei geringer Dämpfung ge-

gemessene Schwingungsdauer τ oft ausreichend genau an die Stelle der Schwingungsdauer τ_0 des dämpfungsrei gedachten Körpers setzen. Das gleiche gilt für die Kreisfrequenzen ω und ω_0 .

b) $\beta > \omega_0$. Kriechfall. Ist $\beta > \omega_0$, so ist die Wurzel der Gl. (19) und demnach auch B reell. Wir setzen

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \gamma. \quad (38)$$

Dann lauten die beiden Lösungen der Gl. (19)

$$B = -\beta \pm \gamma. \quad (39)$$

Damit erhalten wir jetzt für Gl. (17) die allgemeine Lösung

$$\varphi = e^{-\beta t} (A_1 e^{\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t}), \quad (40)$$

in der A_1 und A_2 reelle Konstanten sind, die sich wieder aus den Anfangsbedingungen ergeben. Die Winkelgeschwindigkeit beträgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = -e^{-\beta t} [(\beta - \gamma) A_1 e^{\gamma t} + (\beta + \gamma) A_2 e^{-\gamma t}]. \quad (41)$$

Der Körper werde zur Zeit $t = 0$ aus einer erzwungenen Ruhelage $\varphi = \varphi_0$ losgelassen. Dann ist zur Zeit $t = 0$ auch $d\varphi/dt = 0$. Damit erhalten wir aus Gl. (40) und (41) die Bedingungen

$$\varphi_0 = A_1 + A_2 \quad (42a)$$

und

$$0 = (\beta - \gamma) A_1 + (\beta + \gamma) A_2, \quad (42b)$$

aus denen folgt:

$$A_1 = \varphi_0 \frac{\beta + \gamma}{2\gamma}, \quad A_2 = -\varphi_0 \frac{\beta - \gamma}{2\gamma} \quad (43)$$

und

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \left(\frac{\beta + \gamma}{2\gamma} e^{\gamma t} - \frac{\beta - \gamma}{2\gamma} e^{-\gamma t} \right), \quad (44)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 e^{-\beta t} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma} (e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}) = -\varphi_0 e^{-\beta t} \frac{\omega_0^2}{2\gamma} (e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}). \quad (45)$$

Da $\beta > \gamma$, so ist φ stets positiv, $d\varphi/dt$ stets negativ. Der Körper bewegt sich also mit stets gleichgerichteter Geschwindigkeit auf seine Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ hin, ohne sie je zu überschreiten; er kriecht asymptotisch in seine Gleichgewichtslage zurück, der er sich um so langsamer nähert, je größer seine Dämpfung ist. Seine Geschwindigkeit nimmt zuerst zu und dann stetig ab.

c) $\beta = \omega_0$. Grenzfall. Von besonderer Bedeutung ist der Grenzfall $\beta = \omega_0$, also der Übergang zwischen dem Schwingfall und dem Kriechfall. Dann ist nach Gl. (20) $\omega = 0$ und $\tau = \infty$. Wir können vom Schwingfall oder vom Kriechfall zum Grenzfall übergehen und wollen hier das erstere tun. Wir gehen also in Gl. (25) zur Grenze oder $\omega \rightarrow 0$ über. Dabei beachten wir, daß

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \cos \omega t = 1.$$

Damit erhalten wir

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} (1 + \beta t). \quad (46)$$

(Statt β können wir auch ω_0 setzen.)

Eine graphische Darstellung der drei Fälle findet sich bei der 34. Aufgabe. Man erkennt aus ihr, daß die Einstellzeit des Körpers, d. h. diejenige Zeit, in der er innerhalb der Meßgenauigkeit in seiner Gleichgewichtslage zur Ruhe kommt, um so größer ist, je weiter man vom Grenzfall entfernt ist. Bei völlig fehlender Dämpfung ($\beta = 0$) würde der Körper unendlich lange mit gleicher Schwingungsweite um seine Gleichgewichtslage schwingen. Bei unendlich großer Dämpfung ($\beta = \infty$, $\gamma = \infty$) würde er sich nie aus seiner Anfangslage entfernen, also die Gleichgewichtslage ebenfalls nie erreichen. Die Einstellzeit ist also im Grenzfall am kleinsten. Er bildet deshalb z. B. in der Meßtechnik in der Regel den Fall günstigster Dämpfung, da er am besten ein schnelles Arbeiten und zuverlässige Ablesungen gewährleistet.

Anhang II. Theorie des Drehspulgalvanometers

Literatur: W. § 237; M.-P. Bd. IV/1, S. 468; K. S. 508.

Wir wollen im folgenden das Verhalten eines Spiegelgalvanometers mit Drehspule unter verschiedenen Versuchsbedingungen untersuchen. Es handelt sich also in der Hauptsache um die Aufstellung der Bewegungsgleichungen der Drehspule, aus denen sich dann die Bewegungen des Lichtzeigers auf der Skala ohne weiteres ergeben. Wir knüpfen dabei an Anhang I an.

I. Die Bewegungsarten der Drehspule

Rein mechanisch betrachtet, ist die Drehspule ein schwingungsfähiger Körper, dessen Aufhängung ein Richtmoment D

liefert. Sie ist ferner stets durch Luftreibung gedämpft, besitzt also stets eine mechanisch bedingte Dämpfungskonstante ρ . Daher treten nach Anhang I [Gl. (1) und (14)] an der Drehspule stets die hierdurch bedingten Drehmomente

$$N_d = -D \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad N_r = -\rho \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

auf.

Zu diesen kommt in der Regel ein drittes, elektrodynamisch bedingtes Drehmoment. In der Drehspule fließe ein Strom i . Die magnetische Feldstärke im Luftspalt betrage H . Die zum

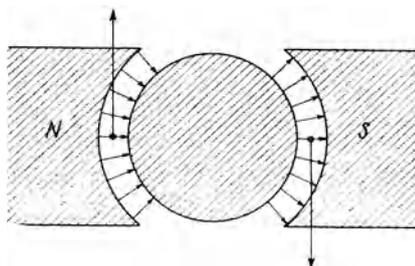


Abb. 101. Das an der Drehspule angreifende elektrodynamische Drehmoment.

Felde senkrechten (vertikalen) Spulenseiten seien gleich a , die beiden andern (horizontalen) gleich b . Dann wirkt auf jeden einzelnen Draht der Seiten a im Felde H die Kraft aiH (Abb. 101; vgl. Westphal, „Physik“, 4. Aufl., § 195). Die beiden Kräfte bilden ein Kräftepaar mit dem

$$N_e = nHab i = FH i = Gi. \quad (2)$$

Dabei ist $F = nab$ die Windungsfläche der Drehspule. Die Größe

$$G = FH \quad (3)$$

heißt die (dynamische) Galvanometerkonstante.

Ein Strom kann in der Drehspule auf zwei Weisen entstehen. Erstens kann in einem die Klemmen des Galvanometers verbindenden Schließungskreis eine äußere EMK (Stromquelle) vorhanden sein, die an den Klemmen eine Spannung U hervorruft. Ist R_g der Widerstand der Drehspule, so fließt in ihr ein Strom $i = U/R_g$.

Zweitens aber wirkt die Drehspule, wenn sie sich im magnetischen Felde im Luftspalt des Galvanometers dreht, ähnlich wie der Anker eines Generators. Es entsteht in ihr eine induzierte

EMK, die einen Strom hervorruft, sofern die Klemmen des Galvanometers durch einen äußeren Schließungskreis verbunden sind. Bewegt sich eine vertikale Spulenseite a mit der Geschwindigkeit v senkrecht zum Felde H , so wird in jeder ihrer n Windungen eine EMK $-avH$ induziert, eine ebenso große und im Umlaufsinne gleichgerichtete in der andern Seite a . In den horizontalen Seiten b tritt keine induzierte EMK auf (vgl. Westphal, „Physik“, 4. Aufl., § 202). Wir setzen die EMK mit negativem Vorzeichen, weil sie so gerichtet ist, daß der von ihr erzeugte Strom die Geschwindigkeit v der Spule zu verkleinern sucht (Lenzsches Gesetz). Insgesamt wird also in der Spule die EMK $-2navH$ induziert. Nun ist $v = b/2 \cdot d\varphi/dt$, da $b/2$ der Radius der Kreisbahn der Seiten a ist. Demnach beträgt die induzierte EMK:

$$\mathcal{E} = -nabH \frac{d\varphi}{dt} = -FH \frac{d\varphi}{dt} = -G \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4)$$

Ist R_g der Widerstand des Galvanometers, R_a der Widerstand des äußeren Schließungskreises, so fließt in der Drehspule ein Induktionsstrom

$$i' = -\frac{G}{R_g + R_a} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5)$$

Wir wollen künftig unter i immer nur den von einer äußeren EMK erzeugten Stromanteil verstehen. Der Gesamtstrom in der Drehspule beträgt also:

$$i + i' = i - \frac{G}{R_g + R_a} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6)$$

Statt Gl. (2) haben wir daher zu schreiben:

$$N_e = Gi - \frac{G^2}{R_g + R_a} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (7)$$

Insgesamt wirkt an der Drehspule das Drehmoment $N = N_o + N_r + N_e$. Nach Anhang I, Gl. (2), ist also

$$N = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi - \varrho \frac{d\varphi}{dt} + Gi - \frac{G^2}{R_g + R_a} \frac{d\varphi}{dt},$$

so daß

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\varrho + \frac{G^2}{R_g + R_a} \right) \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = Gi. \quad (8)$$

Sämtliche elektrischen Größen in den vorstehenden Gleichungen sind in elektromagnetischen Einheiten gemessen.

Die linke Seite der Gl. (8) entspricht durchaus derjenigen der Gl. (15) im Anhang I. Nur ist zum rein mechanischen Teil des zweiten Gliedes — das für die Dämpfung verantwortlich ist — ein zweiter, elektrodynamisch bedingter Anteil hinzugekommen, der, wie jener, der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt$ proportional ist. Demnach besitzt ein Galvanometer, sofern nicht $R_a = \infty$, wenn also seine Klemmen durch einen äußeren Schließungskreis verbunden sind, eine zusätzliche und von R_a abhängige elektromagnetische Dämpfung. Sie ist um so größer, je kleiner R_a ist, und erreicht ihren größten Wert bei Kurzschluß ($R_a = 0$).

Auf der rechten Seite der Gl. (8) steht, anders als in Anhang I, Gl. (15), ein Drehmoment Gi , das von der Strombelastung des Galvanometers herrührt. Ist i konstant, so ändert das Fließen des Stromes an der Bewegungsform der Drehspule nichts. Wir können die rechte Seite zum Verschwinden bringen, wenn wir $\varphi = \psi + Gi/D$ setzen. Die Drehspule bewegt sich dann relativ zur Lage $\psi = 0$ (dem Dauerausschlag $\varphi = Gi/D$ beim Strome i) genau so, wie bei Stromlosigkeit um ihre rein mechanische Gleichgewichtslage (Nullpunkt) $\varphi = 0$. Sie schwingt also bei Stromschluß auf genau die gleiche Weise in ihre neue Gleichgewichtslage ein, wie sie bei Stromöffnung wieder in ihre rein mechanische Gleichgewichtslage zurückschwingt, sofern in beiden Fällen der Widerstand R_a des äußeren Schließungskreises gleich groß ist.

Wir wollen daher nur den einfachen Fall des Zurückschwingens in den Nullpunkt betrachten und setzen $i = 0$. Ferner setzen wir, analog zu Anhang I, Gl. (16a) und (16b)

$$\frac{1}{2J} \left(\varrho + \frac{G^2}{R_g + R_a} \right) = \beta, \quad (9a)$$

$$\frac{D}{J} = \omega_0^2 \quad (9b)$$

und erhalten dann die mit Anhang I, Gl. (17), identische Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (10)$$

Wir können also alle im Anhang I aus dieser Gleichung gezogenen Folgerungen auf die Drehspule übertragen. Bei einem bestimmten äußeren Widerstand $R_a = R_{gr}$ tritt der Grenzfall

ein, der durch die Bedingung $\beta = \omega_0$ gegeben ist. Dann ist also

$$\frac{1}{2J} \left(\varrho + \frac{G^2}{R_g + R_{gr}} \right) = \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad (11)$$

und es ist

$$R_{gr} = \frac{G^2}{2\sqrt{JD} - \varrho} - R_g. \quad (12)$$

R_{gr} heißt der Grenzwiderstand des Galvanometers. Er ist um so größer, je größer die Galvanometerkonstante G , also auch die Feldstärke H im Luftspalt, und je kleiner Trägheits- und Richtmoment der Spule sind.

Ist $R_a > R_{gr}$, so ist $\beta < \omega_0$, und es liegt der Schwingfall vor. Ist $R_a < R_{gr}$, so ist $\beta > \omega_0$, und es liegt der Kriechfall vor. Der Grenzfall hat beim Galvanometer besondere meßtechnische Bedeutung, weil er mit der kürzesten Einstellzeit des Galvanometers verbunden ist (34. Aufgabe).

Auch für das logarithmische Dekrement Λ und das Dämpfungsverhältnis k gelten hier die Ausführungen im Anhang I. Da Λ eine Funktion von β , dieses wiederum eine Funktion von R_a ist, so ist auch Λ von R_a abhängig und um so größer, je kleiner R_a ist. Für $R_a = R_{gr}$ wird $\Lambda = \infty$. Da sich die (wenn nötig auf den Bogen reduzierten) Ausschläge α des Lichtzeigers auf der Skala eines Galvanometers wie die zugehörigen Winkelausschläge φ verhalten, so gelten auch für jene Gl. (31) und (32) im Anhang I und es ist

$$e^\Lambda = k = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}, \quad \Lambda = \ln k = \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}, \quad (13)$$

wenn α_n und α_{n+1} zwei aufeinanderfolgende Umkehrpunkte des Lichtzeigers auf der gleichen Seite sind. Ebenso gilt für zwei aufeinanderfolgende Umkehrpunkte α_0 und α'_0 auf der rechten und linken Seite, entsprechend Anhang I, Gl. (35)

$$k = \left(\frac{\alpha_0}{-\alpha'_0} \right)^2. \quad (14)$$

II. Ballistisches Galvanometer

Wird durch die Drehspule eines Galvanometers in einem sehr kurzen Stromstoß eine Elektrizitätsmenge Q entladen, so führt die Spule einen sogenannten ballistischen Ausschlag aus, wie

ein ganz kurz mir einem Hammer angeschlagenes Pendel. Sie schwingt aus ihrer Gleichgewichtslage (Nullpunkt) bis zu einem Umkehrpunkt aus und kehrt dann — je nach dem Grade ihrer Dämpfung — schwingend oder kriechend in die Gleichgewichtslage zurück. Die Lage des ersten Umkehrpunktes ist ein Maß für die durch die Drehspule entladene Elektrizitätsmenge.

Die allgemeine Definition der Stromstärke lautet:

$$i = \frac{dQ}{dt}, \quad (15)$$

wenn dQ die Elektrizitätsmenge ist, die in der Zeit dt durch irgendeinen Querschnitt der Strombahn tritt. Indem wir dies in Gl. (8) einsetzen und durch J dividieren, erhalten wir mit den Definitionen der Gl. (9a) und (9b):

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = \frac{G}{J} \frac{dQ}{dt}. \quad (16)$$

Es kommen hier nur solche Stromstöße in Frage, deren Dauer sehr klein gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers ist. Dann erhält die Drehspule zwar durch den Stromstoß eine große Winkelbeschleunigung $d^2 \varphi / dt^2$, aber ihre Winkelgeschwindigkeit $d\varphi / dt$ ist auch am Ende der Stoßzeit noch verhältnismäßig klein, und sie hat sich auch nur äußerst wenig aus ihrer Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ entfernt. (Vgl. wieder ein mit einem Hammer angeschlagenes Pendel.) Daher ist bei sehr kurzer Dauer des Stromstoßes das erste Glied der linken Seite der Gl. (16) sehr viel größer als die beiden anderen, so daß wir diese zunächst vernachlässigen dürfen. Gl. (16) nimmt dann die folgende einfache Form an:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{G}{J} \frac{dQ}{dt}, \quad \text{so daß} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{G}{J} \int_0^t \frac{dQ}{dt} dt = \frac{G}{J} \int_0^t dQ. \quad (17)$$

Ist t die volle Dauer des Stromstoßes, so ist $\int_0^t dQ = Q$ die gesamte durch das Galvanometer entladene Elektrizitätsmenge. Ist $d\varphi / dt = u_0$ die von der Drehspule am Ende des Stromstoßes erreichte Winkelgeschwindigkeit, so ist nach Gl. (17):

$$u_0 = \frac{G}{J} Q. \quad (18)$$

Von nun an ist die Drehspule sich selbst überlassen. Wir beginnen die Betrachtung nunmehr ganz von neuem und behandeln die Drehspule als einen Körper, der zur Zeit $t = 0$ mit der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt = u_0$ aus seiner Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ — von der er sich bisher kaum entfernt hat — startet. Wir müssen also nunmehr Gl. (10) mit diesen Anfangsbedingungen lösen. Dabei setzen wir voraus, daß es sich um den Schwingfall handelt. Die allgemeinen Lösungen der Gl. (10) für φ und $d\varphi/dt$ haben wir bereits in Anhang I, Gl. (23) und (24), gegeben. Indem wir in diese unsere Anfangsbedingungen einführen, erhalten wir die Gleichungen $0 = b$ und $u_0 = a\omega$, so daß $a = u_0/\omega$. Die Gleichungen nehmen dann die folgenden Gestalten an:

$$\varphi = \frac{u_0}{\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t, \quad (19)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = u_0 e^{-\beta t} (\cos \omega t - \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t). \quad (20)$$

Wir wollen nunmehr den ersten Umkehrpunkt, den ballistischen Ausschlag α_m , berechnen. Dabei beachten wir, daß nach Anhang I, Gl. (30):

$$\frac{\beta}{\omega} = \frac{\beta \tau}{2\pi} = \frac{A}{2\pi}. \quad (21)$$

In den Umkehrpunkten ist $d\varphi/dt = 0$; also ist dann nach Gl. (20):

$$\operatorname{tg} \omega t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi}{A}, \quad \sin \omega t = \frac{\omega}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (22)$$

[Anhang I, Gl. (20)]. Es folgt weiter für die Umkehrzeiten:

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{A}, \quad \beta t = \frac{A}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{A}. \quad (23)$$

Wenn wir den Hauptwert des arctg wählen, erhalten wir den gesuchten ersten Umkehrpunkt α_m . Durch Einsetzen in Gl. (19) folgt unter Berücksichtigung von Gl. (18):

$$\varphi_m = \frac{u_0}{\omega_0} e^{-\frac{A}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{A}} = \frac{GQ}{J\omega_0} e^{-\frac{A}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{A}}. \quad (24)$$

Der ballistische Ausschlag φ_m ist also bei gegebenem logarithmischem Dekrement A der entladenen Elektrizitätsmenge Q

proportional. Er nimmt mit steigender Dämpfung ab. Im idealen dämpfungsfreien Fall würde er seinen Höchstwert

$$\varphi_m = \frac{G}{J \omega_0} Q \quad (25)$$

annehmen.

III. Die Empfindlichkeit des Galvanometers

Ein Galvanometer kann zur Messung von Strömen und Spannungen (aus dem Dauerausschlag) und von Elektrizitätsmengen (aus dem ballistischen Ausschlag) dienen. Unter der Empfindlichkeit eines Meßgerätes versteht man allgemein das Verhältnis des Ausschlages zur gemessenen Größe. Man hat daher zwischen der Stromempfindlichkeit, der Spannungsempfindlichkeit und der ballistischen Empfindlichkeit eines Galvanometers zu unterscheiden.

1. Stromempfindlichkeit. Wir wollen die Stromempfindlichkeit zunächst auf Winkelausschläge φ beziehen. Nach der obigen Definition besteht zwischen dem Winkelausschlag φ , der Stromstärke i und der (winkelbezogenen) Stromempfindlichkeit C_i^{φ} die Beziehung

$$\varphi = C_i^{\varphi} i. \quad (26)$$

Bei der Messung einer Stromstärke wird der Dauerausschlag gemessen, der nach dem Einschwingen des Galvanometers in seine neue Ruhelage eintritt. Demnach verschwinden in diesem Falle die zeitlichen Differentialquotienten der Gl. (8), und es bleibt

$$D \varphi = G i \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{G}{D} i. \quad (27)$$

Durch Vergleich mit Gl. (26) folgt, daß die winkelbezogene Stromempfindlichkeit

$$C_i^{\varphi} = \frac{G}{D} \quad (28)$$

beträgt.

In der Meßtechnik mißt man nicht die Drehwinkel φ der Spule, sondern die Ausschläge α eines Lichtzeigers auf einer Skala. Dreht sich die Spule um den Winkel φ , so dreht sich der Lichtzeiger um den Winkel 2φ . Weist er bei stromlosem Galvanometer

senkrecht auf die Skala, so entspricht einem Winkelausschlag φ ein Ausschlag α auf der Skala, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{\alpha}{A} \quad (29)$$

gegeben ist, wenn A der Skalenabstand ist. Ist φ so klein, daß wir $\operatorname{tg} 2 \varphi \approx 2 \varphi$ setzen dürfen, oder haben wir den Ausschlag α auf den Bogen reduziert (35. Aufgabe), so gilt statt dessen

$$\varphi = \frac{\alpha}{2A}. \quad (30)$$

Ferner messen wir in der Meßtechnik Ströme nicht in der elektromagnetischen, sondern in der internationalen Einheit $1 \text{ A} = 0,1 \text{ e. m. E.}$ Wollen wir daher die in dieser Einheit gemessene Stromstärke in unsre Gleichungen einführen, so müssen wir ihre Maßzahl durch 10 dividieren, also $i/10$ an Stelle von i setzen. Dann folgt aus Gl. (26) und (30):

$$\varphi = \frac{\alpha}{2A} = C_i^{\varphi} \frac{i}{10} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{A}{5} C_i^{\varphi} i = C_i i. \quad (31)$$

Die hier definierte Größe

$$C_i = \frac{A}{5} C_i^{\varphi} \quad (32)$$

ist die praktische Stromempfindlichkeit beim Skalenabstand A . Es ist üblich, Ausschläge und Skalenabstände in der Einheit 1 mm anzugeben. Dann ist die Einheit der Stromempfindlichkeit $1 \text{ mm} \cdot \text{A}^{-1}$.

2. Spannungsempfindlichkeit. Es sei U die an den Klemmen des Galvanometers liegende Spannung. Dann ist mit ihr ein Strom $i = U/R_g$ verknüpft, wenn R_g wieder der Galvanometerwiderstand ist. Er ruft nach Gl. (31) einen Ausschlag

$$\alpha = C_i i = \frac{C_i}{R_g} U = C_u U, \quad \text{mit} \quad C_u = \frac{C_i}{R_g}, \quad (33)$$

hervor, den wir auch als eine Wirkung der anliegenden Spannung deuten und zu ihrer Messung verwenden können. Die in Gl. (33) definierte Größe C_u ist die Spannungsempfindlichkeit des Galvanometers. Sie wird meist in der Einheit $1 \text{ mm} \cdot \text{V}^{-1}$ angegeben.

3. Ballistische Empfindlichkeit. Nach Gl. (24) ist der ballistische Ausschlag φ_m eines Galvanometers der entladenen Elektrizitätsmenge Q proportional, hängt aber auch von der Dämpfung ab. Wegen der Proportionalität zwischen Ausschlagswinkel φ und (reduziertem) Skalenausschlag α gilt ganz das gleiche auch für den (reduzierten) ballistischen Ausschlag α_m . Wir wollen den Kehrwert des dämpfungsabhängigen Faktors der Gl. (24) zur Abkürzung gleich

$$e^{\frac{A}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{A}} = \lambda \quad (34)$$

setzen. Er ist eine reine Zahl, als solche vom Maßsystem unabhängig und auch unabhängig davon, ob wir es mit Winkelausschlägen φ_m oder mit Skalenausschlägen α_m zu tun haben. Wollten wir die ballistische Empfindlichkeit C_b schlechthin als das Verhältnis α_m/Q von Ausschlag und Elektrizitätsmenge definieren, so wäre sie nicht eindeutig bestimmt, da sie den Faktor $1/\lambda$ enthalten und deshalb von der Dämpfung abhängen würde, die wieder von dem äußeren Widerstand R_a abhängt. Man definiert deshalb die ballistische Empfindlichkeit C_b als das Verhältnis α_m/Q für den idealen, dämpfungsfreien Fall. Da

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{A} = 0,$$

so ist in diesem Fall $\lambda = 1$. Daher gilt bei vorhandener Dämpfung

$$\alpha_m = \frac{1}{\lambda} C_b Q, \quad C_b = \lambda \frac{\alpha_m}{Q}. \quad (35)$$

Will man die ballistische Empfindlichkeit C_b aus dem Ausschlag α_m und der entladenen Elektrizitätsmenge Q berechnen, so muß man zwecks Berechnung von λ auch stets das logarithmische Dekrement A bzw. das Dämpfungsverhältnis k kennen. Das gleiche gilt, wenn man aus einem gemessenen Ausschlag und der ballistischen Empfindlichkeit nach Gl. (35) die entladene Elektrizitätsmenge Q berechnen will. In der Regel wird ohnehin der äußere Widerstand des Galvanometers bei verschiedenen Messungen verschieden groß sein, so daß auch λ verschieden groß ist. Zur Erleichterung der Berechnung von λ aus dem Dämpfungsverhältnis k dient Tabelle VI. Die übliche Einheit der ballistischen Empfindlichkeit ist $1 \text{ mm} \cdot \text{Coul}^{-1}$.

Wie man aus Gl. (25) erkennt, ist

$$C_b^g = \frac{G}{J \omega_0} \quad (36)$$

die winkelbezogene ballistische Empfindlichkeit. Nun ist $C_i^g = G/D$ [Gl. (28)] und $D/J = \omega_0^2 = 4 \pi^2/\tau_0^2$, wenn τ_0 die Schwingungsdauer des Galvanometers im idealen, dämpfungs-freien Fall ist. Daraus folgt $C_b^g = C_i^g \omega_0 = C_i^g 2 \pi/\tau_0$. Nun erfolgt die Umrechnung von C_b^g in C_b mit dem gleichen Faktor wie die Umrechnung von C_i^g in C_i . Daher bleibt die vorstehende Beziehung auch für die praktischen Empfindlichkeiten C_b und C_i erhalten:

$$C_b = C_i \frac{2 \pi}{\tau_0}. \quad (37)$$

Man kann also die ballistische Empfindlichkeit aus der Stromempfindlichkeit berechnen. Bei kleiner Luftdämpfung ($\lambda^2 \ll 4 \pi^2$) kann man für τ_0 ohne ins Gewicht fallenden Fehler meist die Schwingungsdauer τ bei reiner Luftdämpfung (offenes Galvanometer) setzen. Andernfalls muß τ_0 aus dieser nach Anhang I, Gl. (37), berechnet werden.

Tabelle I. Dichte des Wassers zwischen 0° und 30° C.

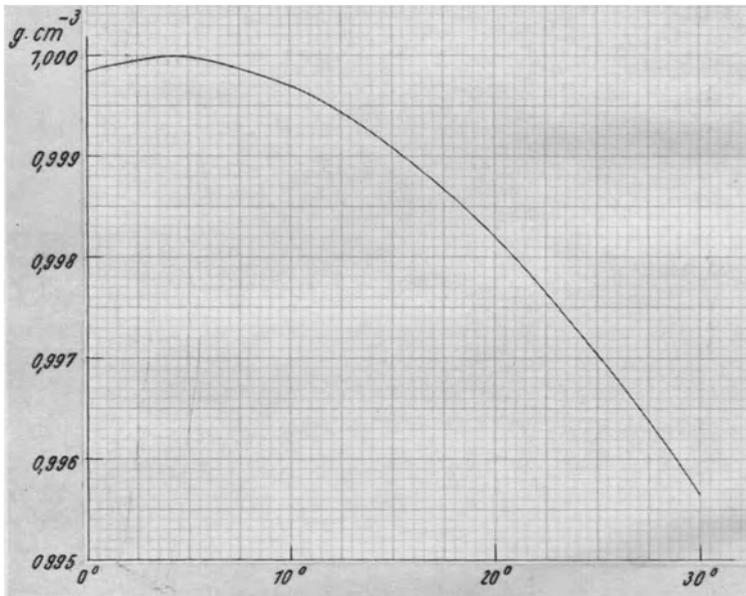


Tabelle II. Dampfdruck des Wassers zwischen -10° und $+30^{\circ}$ C.

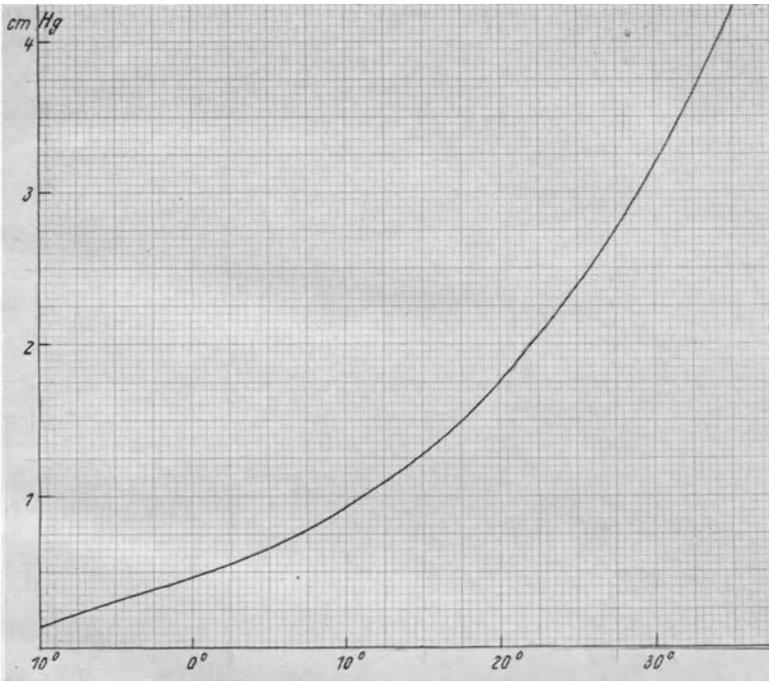


Tabelle III.
Siedetemperatur des Wassers zwischen 68 und 78 cm Hg.

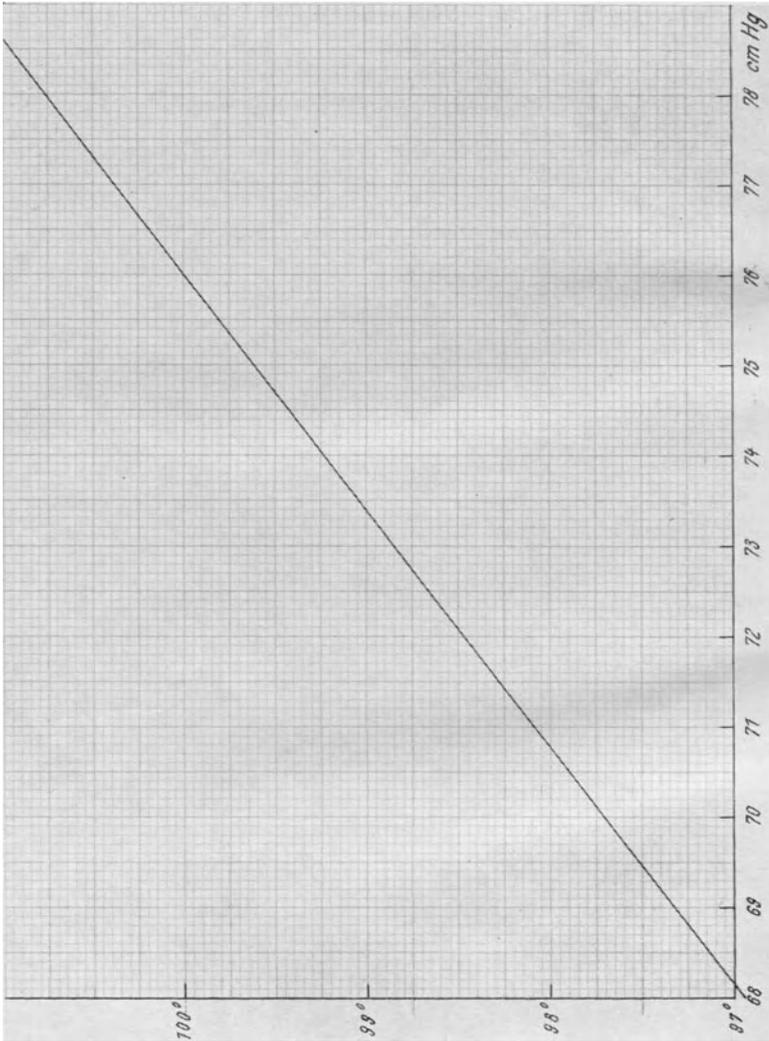
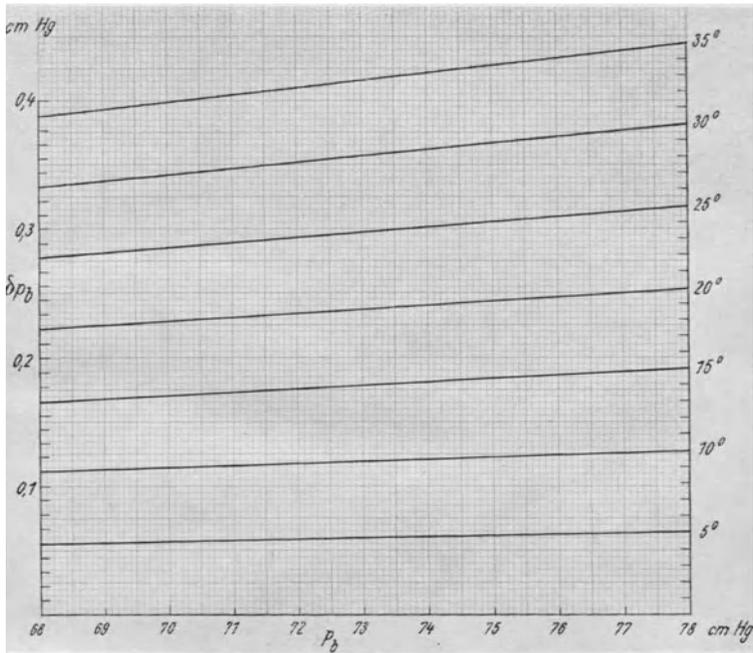
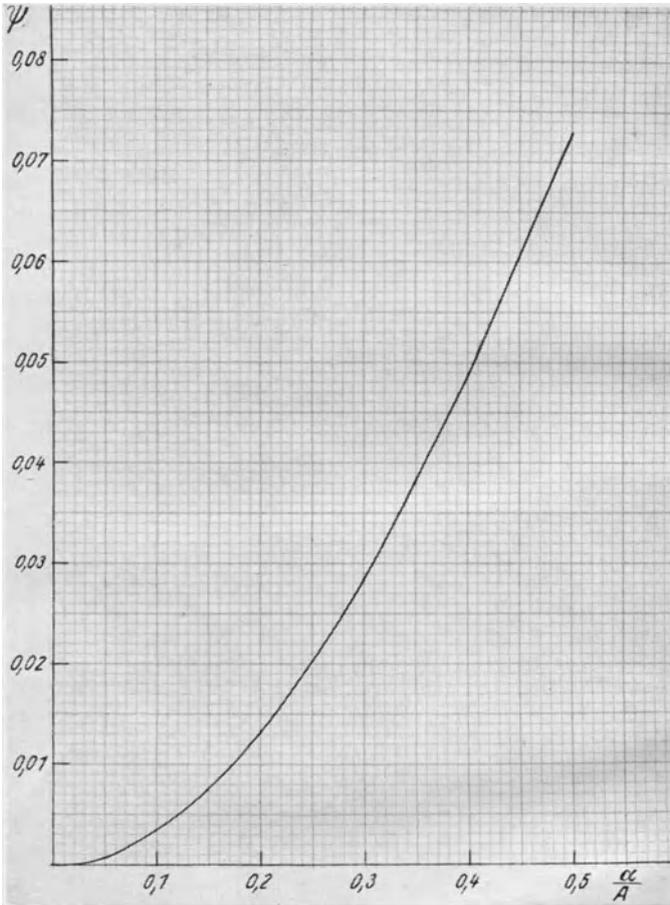


Tabelle IV. Reduktion einer Barometerablesung auf 0° C.



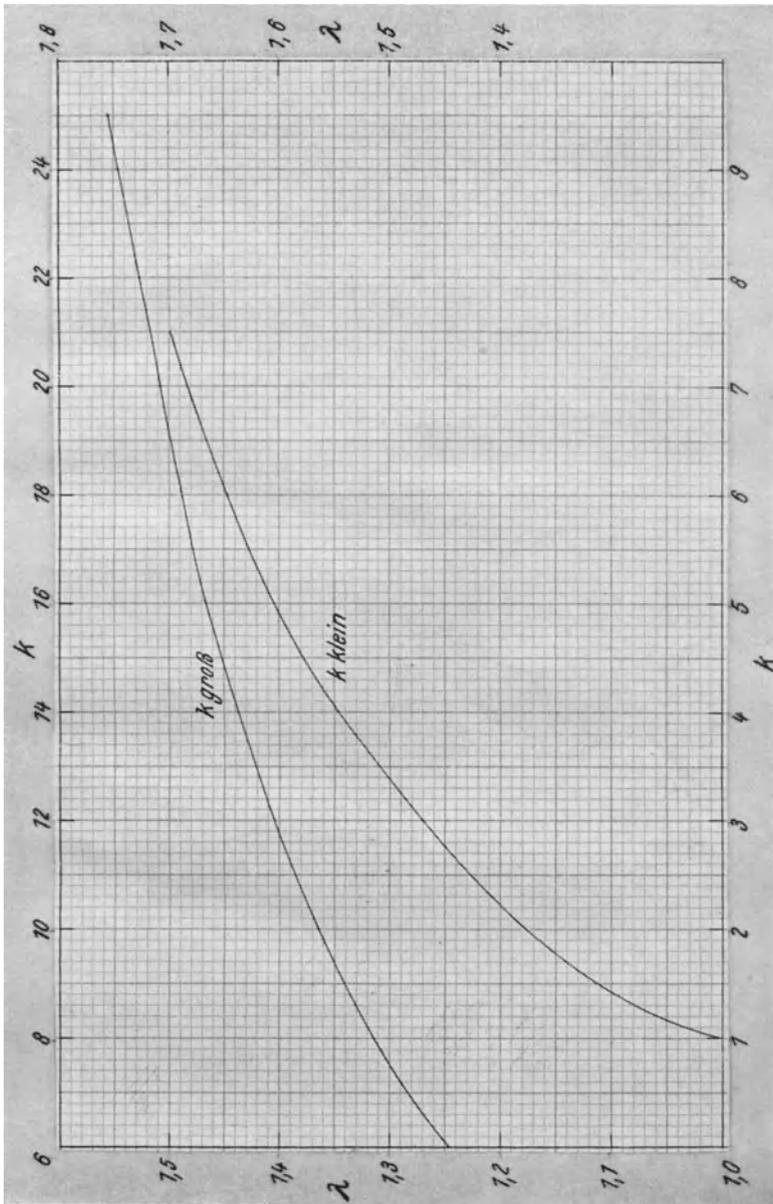
Wegen der Ausdehnung des Quecksilbers und der Messingskala ist ein bei der Temperatur t °C abgelesener Luftdruck p_b um den Betrag $\delta p_b = 0,000163 p_b t$ zu verkleinern. δp_b ist die Ordinate des Punktes, in dem sich das bei dem abgelesenen Druck auf der Abszisse errichtete Lot mit der für die herrschende Temperatur maßgebenden schrägen Geraden schneidet. Dieser Punkt kann auch für alle Zwischentemperaturen durch Anlegen eines Lineals an die beiden seitlichen Gradskalen gefunden werden. Z. B. abgelesen $p_b = 74,15$ cm Hg, $t = 21,5^\circ$ C, $\delta p_b = 0,26$ cm Hg. Also ist mit dem Luftdruck $p_b = 74,15 - 0,26 = 73,89$ cm Hg zu rechnen.

Tabelle V. Reduktion eines Ausschlags auf den Bogen.



Beträgt der Ausschlag α mm bei einem Skalenabstand von A mm, so ist der Ausschlag um den Betrag $\alpha \psi = \alpha \left(1 - \frac{A}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{A}\right)$ zu verkleinern. Die Kurve gibt ψ als Funktion von $\frac{\alpha}{A}$. Z. B. $\alpha = 359,7$ mm, $A = 1550$ mm, also $\frac{\alpha}{A} = 0,231$. Demnach ist $\psi = 0,0171$ und $\alpha \psi = 359,7 \cdot 0,0171 \approx 6,1$ mm. Also ist mit dem reduzierten Ausschlag $359,7 - 6,1 = 353,6$ mm zu rechnen.

Tabelle VI. Zum ballistischen Galvanometer.



Erläuterung umstehend.

Die Tabelle VI gestattet die Ablesung der Größe $\lambda = e^{\frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2/\pi}{A}}$ als Funktion des Dämpfungsverhältnisses k , und zwar getrennt für $k < 7,5$ (untere Kurve, untere Abszisse, linke Ordinate) und für $k > 6,0$ (obere Kurve, obere Abszisse, rechte Ordinate).

Tabelle VII. Wichtige Zahlen.

$$\pi = 3,1416, \quad \pi^2 = 9,8696, \quad 4\pi^2 = 39,478, \quad \log \pi = 0,49715.$$

$$\text{Einheit des Winkels im Bogenmaß} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,296^\circ.$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = 0,017453 \text{ Winkleinheiten im Bogenmaß.}$$

Basis des natürlichen Logarithmensystems $e = 2,7183$.

$$\log e = 0,43429, \quad \ln x = 2,3026 \log x.$$

Sachverzeichnis.

- Abbildungsmaßstab 166.
Archimedisches Prinzip 23.
Auftrieb 29.
Auftriebskorrektur bei Wägungen 68.
Ausdehnungskoeffizient von Gasen 125.
- Balmer-Serie** 185.
Belastung von Meßgeräten 22.
Besselsches Verfahren 153.
Beugungsgitter 181.
Biegung 39.
Boyle-Mariottesches Gesetz 118.
Boyle-Mariotte-Gay Lussac-sches Gesetz 125.
Brechkraft einer Linse 147.
Brechungsindex einer Linse 158.
— eines Prismas 173.
Brennweite 147, 164.
Brückenschaltung 185, 228, 233.
- Charakteristik eines Leiters** 195.
- Dampfdruck des Wassers, Tabelle** 327.
Dämpfung des Galvanometers 249, 318.
Dämpfungskonstante 309.
Dämpfungsverhältnis 256, 312.
Dehnung 34.
Dekrement, logarithmisches 256, 312.
Dichte fester Stoffe 23, 121.
— von Flüssigkeiten 29.
— der Luft 130.
— des Wassers, Tabelle 326.
Dioptrie 147.
Drillungsmodul 80.
Druckkoeffizient von Gasen 124.
- Einstellzeit eines Galvanometers** 315.
Elastizitätsmodul 35, 141.
- Elektrizitätsmengen, Messung 277, 324.
Elektrolyte 228.
Elektrometer 296.
Elektromotorische Kraft 205, 223.
Empfindlichkeit der Federwaage 26.
— der Waage 60, 87.
— des Galvanometers 259, 278, 322.
Entfernungsgesetz, photometrisches 187.
Erdmagnetisches Feld 239.
Ergebnisse, zusammengesetzte 14.
- Federkonstante** 26.
Federwaage 24.
Fehler, absoluter und relativer 13, 15.
—, mittlerer 12.
Fehlerfortpflanzungsgesetz 17.
Fehlerquellen 7.
Fehlerrechnung 10.
Feldstärke, magnetische, Messung 288.
—, —, einer Spule 238.
Fettfleckphotometer 188.
Frequenz 72, 308.
- Galvanometer** 248ff., 315.
—, ballistisches 277, 319.
—, Empfindlichkeit 259, 278, 322.
—, Schwingung und Dämpfung 248, 315.
—, Widerstand 259.
Galvanometerkonstanten 268, 316.
Gasthermometer 125.
Gewicht von Einzelmessungen 14.
Gitteraufstellung, einfache 182.
Gitterkonstante 181.
Gleitzahl 80.
Grenzfall 249, 315.
Grenz Widerstand 249, 319.

Größtfehler 16.
Grundeinheiten 2.

Hagen-Poiseuillesches Gesetz 49.
Hauptpunkte, Hauptebenen 156.
Hefnerkerze 188.
Hygrometer 134.
Hysteresisschleife 294.

Idiostatische und heterostatische
Schaltung 296.
Induktionsspule 289.
Induktivitätsmessung 233.

Joulesches Gesetz 212.

Kalibrierung einer Kapillare 43.
Kapazitätsmessung 233, 285.
Kapillarität 43.
Kennlinie eines Leiters 195.
Klemmenspannung einer Stromquelle
206.

Kompensationsverfahren 223.
Koppelungsgrad 100.
Kreisfrequenz 72, 308.
Kriechfall 249, 314.
Kundtsche Röhre 138.
Kurzschlußstrom einer Stromquelle
206.
Kürzungsregeln 6.

Längenmessung mit dem Mikroskop
171.

Leistung, elektrische 189.
Leitfähigkeit von Elektrolyten 228.
Lichtmessung 187.
Lichtstärke 187.
Linsen, dicke 156.
—, dünne 147.
Linsengleichung 147.
Luftdichte 130.
Luftfeuchtigkeit 133.
Lufttransformator 279.
Lupe 163.

Magnetisches Feld eines Elektro-
magneten 288.

Magnetisches Feld einer Spule 238.
Massenmessung 64.
Maßsystem, CGS 2.
—, elektrisches 3.
—, magnetisches 4.
—, technisches 2.
Maßzahl und Maßeinheit 1.
Mikroskop 166.
Minimum der Ablenkung beim Pris-
ma 177.
Mischungsverfahren 102.
Mittel, arithmetisches 12.
Mohrsche Waage 30.

Normalbedingungen 133.

Oberflächenspannung 43.
Objektmikrometer 167.
Ohmmeter 218.
Ohmsches Gesetz 194.
Okularmikrometer 171.

Parallaxenfreie Ablesung 25.
Parallaxenfreiheit 158, 169.
Pendel, gekoppelte 93.
Photometer 188.
Photometrie 187.
Prisma 172.
Protokollführung 18.
Pyknometer für Gase 131.

Rechenschieber 5.
Rechenverfahren und Rechenmittel 5.
Reduktion eines Ausschlags auf den
Bogen 260.
— — — — —, Tabelle 330.
— einer Barometerablesung, Tabelle
329.
Reduktionsfaktor eines Galvano-
meters 260.
Regeln für physikalische Messungen
18.
Reibung, innere, von Flüssigkeiten
45.
Richtmoment 71, 307.
— der Waage 88.

Schädlicher Raum 127.
Schallgeschwindigkeit 137.
Schaltungen, elektrische 21.
Scherungsmodul 79.
Schmelzwärme 110.
Schubmodul 79.
Schwebungsschwingungen 98.
Schwerpunktsachsen 71.
Schwingfall 249, 310.
Schwingungen, gedämpfte 309.
—, ungedämpfte 307.
Schwingungsdauer 72, 309.
Schwingungszahl 72, 308.
— eines Schalles 140.
Schwingungszeit 72, 309.
Siedetemperatur des Wassers, Ta-
belle 328.
Spannungsempfindlichkeit eines Gal-
vanometers 261.
Spannungskoeffizient von Gasen
125.
Spannungsmessung mit Elektrometer
296.
— durch Kompensation 223.
Spannungsteilung 250.
Spektralröhre 182.
Spektrometer 173.
Spezifisches Gewicht fester Stoffe
23.
— — von Flüssigkeiten 29.
Spezifische Wärme 102.
Staubfiguren, Kundtsche 138.
Stefan-Boltzmannsches Gesetz
190.
Steinerscher Satz 71.
Stellenzahl von Ergebnissen 13.
Stokesches Reibungsgesetz 46.
Streuung von Meßwerten 9.
Stromempfindlichkeit eines Galvano-
meters 260.

Taupunkt 134.
Temperatur 3.
Temperaturkoeffizient des Wider-
standes 217.
Temperaturskalen 3.
Torsionsmodul 80.

Trägheitsmoment 70.
— der Waage 87.

Verdampfungswärme 114.
Vergrößerung einer Lupe 163.
— eines Mikroskops 166.
Viskosimeter 50.
Viskosität von Flüssigkeiten 46.
Volumenometer 118.

Waage, Behandlung 57.
—, Empfindlichkeit 60, 87.
—, Meßverfahren 59.
—, Schwingung 86.
Wägung, absolute 64.
Wärmeäquivalent, elektrisches 212.
Wärmekapazität 102.
Wärmemenge 3.
Wasserkalorimeter 103.
Wasserwert 103, 115.
Wechselstromwiderstände 233.
Wellen, stehende 138.
Wellenlängen des Lichtes 181.
— des Schalles 137.
— im Heliumspektrum 184.
— im Wasserstoffspektrum 185.
Widerstand, spezifischer, von Elek-
trolyten 228.
—, —, von Metallen 276.
—, innerer, von Stromquellen 206.
— eines Galvanometers 259.
Widerstände, sehr große 273, 300.
—, sehr kleine 275.
Widerstandsgefäß 229.
Widerstandsmessung in der Brücken-
schaltung 200.
— durch Strom- und Spannungs-
messung 194.
— nach dem Kompensationsverfah-
ren 224.
Wirkungsgrad, optischer, einer Glüh-
lampe 189.

Zähigkeit von Flüssigkeiten 46.
Zahlen, verschiedene, Tabelle 332.
Zustandsgleichung idealer Gase 118,
124.

Die Abb. 2 und 11 wurden mit freundlicher Erlaubnis des Verlages Julius Springer, Berlin, aus Westphal, Lehrbuch der Physik, 4. Aufl., wiedergegeben.