ЧИСЛОВЫЯ ТОЖЕСТВА,

НАХОДЯЩІЯСЯ

ВЪ СВЯЗИ СЪ СВОЙСТВАМИ СИМВОЛА E.

Н. В. Бугаева.

Совокупность математическихъ истинъ, извѣстная въ настоящее время подъ общимъ именемъ теоріи чиселъ, существенно распадается на два огромныхъ отдѣла. Въ одномъ разсматриваются свойства неопредѣленныхъ уравненій: сюда относится теорія сравненій и различныхъ формъ. Въ другомъ изслѣдуются свойства числовыхъ функцій, какъ по отношенію ихъ между собой, такъ и по отношенію ихъ къ функціямъ аналитическимъ, и по связи ихъ съ различными вопросами анализа. Къ этому отдѣлу принадлежатъ изящныя изслѣдованія Чебышева о первыхъ числахъ, Гаусса, Дирикле и Кронеккера о числѣ родовъ и классовъ квадратичныхъ формъ для различныхъ опредѣлителей, изслѣдованія Дирикле объ ассимптотическихъ выраженіяхъ, Ліувилля о различныхъ числовыхъ тожествахъ и всѣ изысканія о взаимной зависимости между свойствами числовыхъ функцій и коеффиціентами безконечныхъ рядовъ. Хотя еще не существуетъ до сихъ поръ общихъ методовъ для рѣшенія различныхъ вопросовъ втораго отдѣла, хотя частныя изысканія, относящіяся сюда, стоятъ независимо другъ отъ друга, однако нельзя не видѣть, что вопросы и пріемы, употребляемые во второмъ отдѣлѣ, отличаются отъ пріемовъ перваго отдѣла своимъ аналитико-числовымъ характеромъ. На этомъ основаніи мы считаемъ полезнымъ усвоить и терминологію, соотвѣтствующую этимъ двумъ отдѣламъ. Совокупность истинъ, относящихся къ первому отдѣлу, мы будемъ называть собственно теоріею чиселъ, или просто *теоріею чиселъ*, совокупность истинъ, относящихся ко второму отдѣлу, будемъ называть для краткости *числовымъ исчисленіемъ* или числовымъ анализомъ (calcul numerique).

Тѣ случаи, въ которыхъ свойства числовыхъ функцій зависятъ отъ свойствъ неопредѣленныхъ уравненій, нисколько не противорѣчатъ этому раздѣленію, и намъ кажется, что при такомъ воззрѣніи все, что проигрывается въ точности, выигрывается въ ясности и наглядности представленія.

Совокупность законовъ, составляющихъ предметъ нашего изслѣдованія, принадлежитъ къ той огромной группѣ истинъ, которую мы будемъ называть числовымъ исчисленіемъ, ибо, если неопредѣленныя уравненія и служатъ точкою отправленія при выводѣ различныхъ числовыхъ тожествъ въ нашемъ изслѣдованіи, то цѣль и воззрѣніе, съ которыми разсматриваются эти уравненія, носятъ на себѣ характеръ, не подлежащій вполнѣ теоріи чиселъ въ смыслѣ вышеупомянутаго опредѣленія.

Въ выраженіяхъ законовъ, выводимыхъ въ этомъ изслѣдованіи, входитъ функція $E(u)$ съ символомъ E, означающимъ наибольшее цѣлое число, содержащееся въ положительномъ количествѣ u.

До сихъ поръ этотъ символъ употреблялся какъ вспомогательное орудіе для облегченія доказательства различныхъ теоремъ теоріи чиселъ и числоваго исчисленія (законъ взаимности двухъ простыхъ чиселъ, теорема Чебышева), но онъ не былъ предметомъ самостоятельныхъ изысканій и свойства функціи Eu не имѣлись въ виду при этомъ главнымъ образомъ. Лучшее изслѣдованіе, въ которомъ разбираются нѣкоторыя свойства выраженій, зависящихъ отъ символа E, принадлежитъ Дирикле. Но въ своей статьѣ *) онъ преимущественно имѣетъ въ виду провести мысль объ ассимптотическихъ формулахъ, къ которымъ стремятся въ предѣлѣ рѣшенія различныхъ числовыхъ вопросовъ, поэтому и методы и преобразованія, употребляемые у него, носятъ частный характеръ, соотвѣтствующій другой основной мысли.

Для изслѣдованія свойствъ символа E можно пользоваться любымъ изъ трехъ пріемовъ: или 1) можно употреблять *способъ неравенствъ,* въ которомъ общею задачею было бы опредѣлить, сколько разъ неравенство $f(x, y, z) < n$ можетъ быть удовлетворено при извѣстныхъ условіяхъ возрастанія перемѣнныхъ, или 2) *способъ геометрическій,* при помощи котораго можно бы рѣшать различные вопросы для точекъ, распредѣленныхъ на плоскости или въ пространствѣ извѣстнымъ образомъ, и выводить все, что возможно вывести изъ подобнаго воззрѣнія, или 3) *способъ неопредѣленныхъ уравненій,* въ которомъ свойства символа E выводятся на основаніи способности выраженій, зависящихъ отъ E, выражать различныя свойства по отношенію къ неопредѣленнымъ уравненіямъ. Хотя каждый изъ этихъ пріемовъ имѣетъ своеобразный характеръ и способенъ вносить въ изслѣдованіе свойственныя ему особенности, однако не трудно видѣть при ближайшемъ разборѣ, что всѣ эти методы, равно какъ и методъ преобразованій числовыхъ выраженій, сводятся въ сущности къ одной основной идеѣ.

Мы могли бы дать нашимъ изысканіямъ названіе теоріи символа E, если бы вполнѣ пользовались всѣми вышеупомянутыми способами и разобрали всѣ заключенія, къ которымъ можетъ повести каждый изъ методовъ изслѣдованія, но такъ какъ нами преимущественно выбранъ одинъ изъ пріемовъ,

---

*) Lejeune Dirichlet Sur la determination des valeurs moyennes dans la théorie des nombres. Journal des math. Liouville. 1856.

и мы разобрали всѣ законы, къ которымъ можетъ повести онъ для опредѣленныхъ случаевъ, независимо отъ того, будетъ или не будетъ входить въ выраженіе ихъ символъ E, то и должна быть удержана въ названіи нашего изслѣдованія соотвѣтствующая общая идея.

Въ нашемъ изслѣдованіи мы вывели два общихъ закона числовыхъ тожествъ. Второй изъ нихъ можетъ выражаться съ одной или съ двумя произвольными функціями. Формулами этихъ числовыхъ тожествъ какъ бы указывается на взаимную связь этого метода съ интеграціей по конечнымъ разностямъ. Дѣйствительно, въ частномъ случаѣ второй законъ числовыхъ тожествъ даетъ общія формулы по конечнымъ разностямъ, могущія послужить и для рѣшенія различныхъ вопросовъ числоваго анализа. Эти законы числовыхъ тожествъ даютъ въ различныхъ частныхъ предположеніяхъ различные числовые законы, способные при дальнѣйшемъ изслѣдованіи давать новые результаты для числоваго исчисленія.

Сознавая, что въ нашемъ изслѣдованіи мы коснулись только нѣкоторыхъ характеристическихъ свойствъ символа E, и изложили небольшое число тѣхъ истинъ, которыя находятся въ связи съ числовыми тожествами, мы остаемся однако убѣждены, что при дальнѣйшемъ развитіи изслѣдованій въ этомъ направленіи, будутъ найдены новыя стороны, проливающія новый свѣтъ на теорію числовыхъ функцій.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Первый законъ числовыхъ тожествъ.

§ 1.

Знакомъ E, поставленнымъ передъ положительнымъ количествомъ u, мы будемъ означать наибольшое цѣлое число, содержащееся въ немъ; при такомъ условіи

$$E\frac{10}{3}=3,\ E\frac{1}{5}=0,\quad E\sqrt{7}=2.$$

Для случая, когда подъ знакомъ E будетъ количество отрицательное, можно условиться впослѣдствіи.

По свойству знака E, вопросы, въ рѣшеніе которыхъ входитъ онъ, стоятъ въ непосредственной связи съ свойствами различныхъ числовыхъ функцій. Мы будемъ имѣть въ виду не столько изложить то, что было извѣстно объ этомъ символѣ, сколько дать органическую связь истинамъ, выражаемымъ помощію его, и показать на пріемы и методы, могущіе быть полезными при изслѣдованіи его свойствъ.

Прежде чѣмъ перейти къ выводу различныхъ теоремъ, зависящихъ отъ символа E, мы введемъ для сокращенія нѣкоторыя обозначенія.

Конечный рядъ чиселъ $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)\ldots\ \varphi(k)$ мы будемъ для краткости изображать выраженіемъ $\Big[\varphi(u)\Big]_{u=1}^{u=k}$ или просто $\Big[\varphi u\Big]_1^k$, слѣдовательно всякая алгебраическая формула, въ которую входитъ подобное выраженіе, должна быть повторена число разъ, соотвѣтствующее предѣламъ измѣненія u; такимъ образомъ выраженіемъ $z+x\left[u^2\right]_2^5+y=n$ мы будемъ означать цѣлую систему уравненій:

$$z+2^2\,.\,x+y=n$$
$$z+3^2\,.\,x+y=n$$
$$z+4^2\,.\,x+y=n$$
$$z+5^2\,.\,x+y=n$$

§ 2.

Неопредѣленное уравненіе $z+ax=n$, гдѣ a и n два какихъ нибудь положительныхъ числа, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній только въ томъ случаѣ, когда перемѣнныя z и x получаютъ какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія; но, если z будетъ сохранять только положительныя, а x цѣлыя и положительныя значенія, не считая нуля, то число рѣшеній этого уравненія будетъ ограничено. Рѣшенія эти будутъ выражаться k парами соотвѣтствующихъ величинъ

$$x=\left[u\right]_1^k,\ z=\left[n-au\right]_1^k$$

гдѣ k показываетъ сколько разъ a содержится въ n, $k=\mathrm{E}\dfrac{n}{a}$.

Итакъ число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній неопредѣленнаго уравненія $z+ax=n$, при вышеозначенныхъ условіяхъ измѣненія перемѣнныхъ, будетъ выражаться формулою:

$$\mathrm{N}=\mathrm{E}\frac{n}{a}.$$

Если неопредѣленное уравненіе будетъ

$$z+ax+by=n\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

гдѣ a, b и n три какихъ нибудь неравныхъ положительныхъ количества, то число такихъ рѣшеній, въ которыхъ z принимаетъ положительныя, а x и y цѣлыя и положительныя значенія, можно опредѣлить двоякимъ образомъ: или a) принимая въ соображеніе, что y можетъ получать всѣ цѣлыя значенія, заключающіяся въ рядѣ $\left[u\right]_1^{E\frac{n}{b}}$, или b) что перемѣнное x можетъ принимать всѣ значенія, содержащіяся въ рядѣ

$$\left[u\right]_1^{E\frac{n}{a}}.$$

Въ первомъ случаѣ число паръ рѣшеній уравненія (a) будетъ равно числу всѣхъ рѣшеній системы:

$$z + ax = n - b\left[u\right]_1^{E\frac{n}{b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Во второмъ число рѣшеній равно числу рѣшеній системы уравненій:

$$z + by = n - a\left[u\right]_1^{E\frac{n}{a}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

Число рѣшеній системы (b) будетъ $N = \sum\limits_{1}^{u=E\frac{n}{b}} E\frac{n-bu}{a}$.

Число рѣшеній системы (c) будетъ $N_1 = \sum\limits_{1}^{E\frac{n}{a}} E\frac{n-au}{b}$.

Такъ какъ въ томъ и другомъ случаѣ N и N_1 выражаютъ число рѣшеній одного и того же уравненія (α), то необходимо $N = N_1$:

Отсюда непосредственно вытекаетъ тожество, имѣющее мѣсто для всякихъ трехъ положительныхъ количествъ n, a, b.

$$\sum_{u=1}^{u=E\frac{n}{b}} E\frac{n-bu}{a} = \sum_{u=1}^{u=E\frac{n}{a}} E\frac{n-au}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или

$$E\frac{n-b}{a} + E\frac{n-2b}{a} + E\frac{n-3b}{a} + \ldots + E\frac{n-bE\frac{n}{b}}{a} = E\frac{n}{a} +$$

$$+ E\frac{n-2a}{b} + \ldots. + E\frac{n-aE\frac{n}{a}}{b}.$$

Замѣнивъ a, b, n величинами x, y, z, и полагая $x = 1$, получимъ

$$\sum_{u=1}^{u=Ez} E\frac{z-u}{y} = \sum_{u=1}^{u=E\frac{z}{y}} E\,(z-uy). \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Если y и z цѣлыя числа, то $z = Ez$ и послѣднее уравненіе принимаетъ видъ

$$\sum_{u=1}^{u=z} E\frac{u}{y} = zE\frac{z}{y} - \frac{y}{2}\left(1 + E\frac{z}{y}\right)E\frac{z}{y}, \text{ откуда}$$

$$\sum_{u=1}^{u=z} E\frac{u}{y} = (z+1)E\frac{z}{y} - \frac{y}{2}\left(1 + E\frac{z}{y}\right)E\frac{z}{y}. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Полагая въ формулѣ (1)

$$n = pq, \quad a = p, \quad b = q,$$

имѣемъ:

$$\sum_{u=1}^{u=\mathrm{E}p} \mathrm{E}\frac{q(p-u)}{p} = \sum_{u=1}^{u=\mathrm{E}q} \mathrm{E}\frac{p(q-u)}{q}$$

Для случая, когда p и q числа цѣлыя, имѣемъ:

$$\sum_{1}^{p-1} \mathrm{E}\frac{q(p-u)}{p} = \sum_{1}^{q-1} \mathrm{E}\frac{q(p-u)}{p} \text{ или}$$

$$\mathrm{E}\frac{q}{p} + \mathrm{E}\frac{2q}{p} + \mathrm{E}\ \frac{3q}{p} + \ldots + \mathrm{E}\frac{q(p-1)}{p} = \mathrm{E}\frac{p}{q} + \mathrm{E}\frac{2p}{q} + \ldots$$
$$+ \mathrm{E}\frac{(q-1)p}{q}$$

§ 3.

Теорема, выведенная нами, можетъ послужить къ рѣшенію одного числового вопроса. Если даны два какихъ-нибудь положительныхъ числа a и b, изъ которыхъ $a > b$ и $b > 1$ и составленъ рядъ частныхъ

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{b^2},\ \frac{a}{b^3} \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \frac{a}{b^k}$$

въ которомъ $\frac{a}{b^k} < b$, число цыфръ N во всѣхъ этихъ частныхъ до запятой выражается формулою:

$$\mathrm{N} = \sum_{u=0}^{u=\mathrm{E}Log a} \mathrm{E}\frac{Log a - u}{Log b} = \mathrm{E}\frac{Log a}{Log b} + \mathrm{E}\frac{Log a - 1}{Log b} + \ldots + $$
$$+ \mathrm{E}\frac{Log a - \mathrm{E}Log a}{Log b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ логариѳмы берутся при основаніи 10.

Дѣйствительно, замѣняя въ уравненіи (2) z чрезъ $Log a$, y чрезъ $Log b$, находимъ уравненіе

$$\sum_{u=1}^{E\frac{Loga}{Logb}} E Log\left(\frac{a}{b^u}\right) = \sum_{u=1}^{u=ELoga} E\frac{Loga-u}{Logb}$$

Означая вообще число цыфръ въ частномъ $\frac{a}{b^s}$ до запятой чрезъ n_s, и полагая $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{E\frac{Loga}{Logb}} = N =$ числу цыфръ во всѣхъ частныхъ, не считая десятичныхъ знаковъ, находимъ формулу (4).

Для $a = 10000$, $b = 2$ имѣемъ соотвѣтствующія частныя:

5000, 2500, 1250, 625, 312.5, 156.25, 78.125, 39.0625, 19.03125, 9.01, 4.50..., 2.25..., 1.12...;

Число цыфръ во всѣхъ этихъ частныхъ до запятой найдется изъ формулы

$$N = E\,\frac{4}{Log2} + E\,\frac{3}{Log2} + E\,\frac{2}{Log2} + E\,\frac{1}{Log2} = 31$$

Если a и b числа трансцендентныя, то разрѣшеніе этой задачи путемъ непосредственнаго дѣленія требуетъ значительнаго числа ариѳметическихъ дѣйствій.

Если мы въ уравненіи (1) замѣнимъ n чрезъ $Loga$, a чрезъ $Logb$ и b величиной $\frac{1}{k}$, то получимъ

$$\sum_{u=1}^{u=E\frac{Loga}{Logb}} Log\left(\frac{a}{b^u}\right)^k = \sum_{u=1}^{u=EkLoga} E\,\frac{Loga-\frac{u}{k}}{Logb},$$

откуда находимъ, что число цыфръ для ряда тѣхъ же частныхъ, возвышенныхъ въ степень k, выражается формулою

$$N_k = E\frac{Loga}{Logb} + E\,\frac{kLoga-1}{kLogb} + E\,\frac{kLoga-2}{kLogb} + \ldots$$

$$\ldots + E\,\frac{kLoga-EkLoga}{kLogb}$$

Формула $N = \sum_{u=o}^{u=ELoga} E\frac{Loga - u}{Logb}$, содержа два произвольныхъ положительныхъ количества, даетъ возможность поставить три задачи такого рода: или 1) по даннымъ двумъ количествамъ a и b можно требовать опредѣленія N — числа цыфръ во всѣхъ частныхъ ряда $\left[\frac{a}{b^u}\right]_1^{E\frac{Loga}{Logb}}$, 2) или по даннымъ N и a можно найти меньшее число b, или 3) по данному числу N и меньшему числу b, можно найти бо́льшее число a, удовлетворяющее требуемымъ условіямъ. Послѣднія двѣ задачи существенно отличны отъ первой по характеру ихъ рѣшеній. — Тогда какъ въ первой отвѣтъ всегда будетъ выражаться какимъ нибудь опредѣленнымъ числомъ N, количества a и b, разрѣшающія задачи вторую и третью, будутъ величинами, заключающимися въ извѣстныхъ предѣлахъ. Это значитъ, что, если даны число цыфръ N и число a, всякое количество въ промежуткѣ между b_1 и b_2 способно удовлетворять требуемымъ условіямъ. Тоже самое можно сказать и относительно количества a. Такимъ образомъ функціи a и b, удовлетворяющія уравненію

$$N = \sum_{u=o}^{u=ELoga} E\left(\frac{Loga - u}{Logb}\right),$$

будутъ функціями особаго рода. Мы ихъ назовемъ функціями *междупредѣльными*, ибо ихъ можно точно опредѣлить, обозначая два крайнихъ предѣла ихъ измѣненія: $b = (b_1, b_2)$, $a = (a_1, a_2)$.

Формула (4) даеть возможность вычислять логариѳмы помощію цѣлаго ряда ариѳметическихъ операцій. Дѣйствительно, взявъ нѣкоторое число a, котораго логариѳмъ мы знаемъ, какъ напримѣръ 1000, 10000 и другое число b, котораго логариѳмъ ищемъ, мы помощію простого ряда дѣленій находимъ N, и изъ уравненія (4) опредѣляемъ, въ какихъ предѣлахъ заключается величина Log$b$.

Конечно такой способъ нахожденія логариѳмовъ имѣетъ только теоретическій интересъ.

§ 4.

Теперь мы остановимся на способахъ вычислять величину выраженія $\Sigma E\psi u$ для различныхъ предѣловъ измѣненія перемѣннаго u.

Этотъ вопросъ можно рѣшить, разсматривая вообще уравненіе вида $z+x+\psi y=n$. Замѣтимъ при этомъ, что во всѣхъ дальнѣйшихъ случаяхъ мы будемъ считать въ числѣ рѣшеній неопредѣленнаго уравненія только такія системы перемѣнныхъ x, y, z, въ которыхъ z сохраняетъ положительныя, а x и y цѣлыя и положительныя значенія.

Въ частномъ случаѣ, когда $\psi y=y^2$, уравненіе $z+x+y^2=n$ имѣетъ ограниченное число рѣшеній, удовлетворяющихъ вышеозначеннымъ условіямъ, не считая нуля. Въ этихъ рѣшеніяхъ x можетъ измѣняться отъ 1 до $n-1$, y отъ 1 до $E\sqrt{n-1}$. Число рѣшеній уравненія $z+x+y^2=n$ будетъ или равно числу всѣхъ рѣшеній системы уравненій:

$$z+x+\Big[u^2\Big]_1^{E\sqrt{n-1}}=n$$

или системы:

$$z+y^2+\Big[u\Big]_1^{n-1}=n$$

При n цѣломъ число рѣшеній первой системы выражается формулою

$$N=\sum_{1}^{E\sqrt{n-1}}(n-u^2)$$

и второй формулою $N_1=\sum_{1}^{n-1} E\sqrt{n-u}=\sum_{1}^{n-1} E\sqrt{u}$

Откуда на томъ основаніи, что $N=N_1$, мы получимъ законъ числового тожества въ видѣ:

$$\sum_{u=1}^{u=n-1} E\sqrt{u}=n\,E\sqrt{n-1}-\sum_{1}^{E\sqrt{n-1}}u^2 \text{ или}$$

$$\sum_{1}^{n} E\sqrt{u}=(n+1)\,E\sqrt{n}-\sum_{1}^{E\sqrt{n}}u^2$$

Замѣняя $\sum_{1}^{E\sqrt{n}}u^2$ соотвѣтствующею величиною, найдемъ:

$$\sum_{u=1}^{u=n} E\sqrt{u}=(n+1)\,E\sqrt{n}-\frac{E\sqrt{n}\,(1+E\sqrt{n})\;(1+2E\sqrt{n})}{2\,.\,3}\ldots(5)$$

Разсматривая уравненіе $z+x+y^3=n$, гдѣ n цѣлое число, найдемъ подобнымъ же образомъ

$$\sum_{1}^{n} E\sqrt[3]{u}=(n+1)\,E\sqrt[3]{n}-\sum_{1}^{E\sqrt[3]{n}}u^3.$$

Вообще для выраженія $\sum E\sqrt[m]{u}$ мы получимъ изъ разсматриванія неопредѣленнаго уравненія $z+x+y^m=n$ формулу:

$$\sum_{1}^{n} E\sqrt[m]{u} = (n+1)\, E\sqrt[m]{n} - \sum_{1}^{E\sqrt[m]{n}} u^m \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Если бы мы взяли уравненіе $z+x+\psi y=n$, гдѣ ψy возрастающая функція, то нашли бы общую формулу для рѣшенія подобнаго рода вопросовъ, или разсматривая систему уравненій:

$$z+x=\Big[n-\psi u\Big]_{u=1}^{u=E\varphi(n-1)}$$

гдѣ φx функція, обратная функціи ψx, или систему

$$z+\psi y=\Big[n-u\Big]_{1}^{E(n-\psi 1)}.$$

Число рѣшеній этихъ системъ выражается формулами:

$$N=\sum_{u=1}^{u=E\varphi(n-1)} E(n-\psi u) \text{ и } N_1=\sum_{1}^{E(n-\psi 1)} E\,\varphi(n-u).$$

Числовое тожество получится изъ уравненія $N=N_1$.

Если n цѣлое число, въ первой части этой формулы каждый членъ можно замѣнить количествомъ $n-E\psi u$ для случая, когда ψu число цѣлое и количествомъ $n-1-E\psi u$ для случая, когда ψu число не цѣлое, поэтому можно написать послѣднюю формулу въ видѣ:

$$\sum_{u=1}^{u=E(n-\psi 1)} E\varphi(n-u) = nE\psi(n-1) - \sum_{u=1}^{u=E\varphi(n-1)} E\psi u - \partial\Big[\psi u\Big]_{1}^{E\varphi(n-1)} \ldots . \quad (6)$$

гдѣ $\partial\Big[\psi u\Big]_{1}^{E\varphi(n-1)}$ показываетъ сколько разъ количество ψu не бываетъ цѣлымъ числомъ въ предѣлахъ измѣненія перемѣннаго u отъ 1 до $E\varphi(n-1)$; означивъ чрезъ ц $\left[\psi u\right]_1^{E\varphi(n-1)}$, сколько разъ ψu дѣлается цѣлымъ числомъ въ тѣхъ же предѣлахъ измѣненія u, будемъ имѣть:

$$д\left[\psi u\right]_1^{E\varphi(n-1)} + ц\left[\psi u\right]_1^{E\varphi(n-1)} = E\varphi(n-1), \text{ откуда}$$

$$д\left[\psi u\right]_1^{E\varphi(n-1)} = E\psi(n-1) - ц\left[\psi u\right]_1^{E\varphi(n-1)}$$

Принимая въ соображеніе эту формулу, и замѣняя n чрезъ $n+1$, находимъ:

$$\sum_{u=1}^{u=E(n+1-\psi 1)} E\varphi(n+1-u) = nE\varphi(n) - \sum_{u=1}^{u=E\varphi n} E\psi u + ц\left[\psi u\right]_1^{E\varphi n} \ldots. \quad (7)$$

§ 5.

Если мы будемъ разсматривать неопредѣленное уравненіе $z + ax^2 + by^2 = n$, гдѣ a, b и n три положительныхъ количества, то число его рѣшеній будетъ ограничено тѣмъ, что x можетъ измѣняться только отъ 1 до $E\sqrt{\frac{n-b}{a}}$ и y только отъ 1 до $E\sqrt{\frac{n-a}{b}}$. Стало быть, всѣ рѣшенія этого уравненія будутъ въ тоже время рѣшеніями или системы уравненій:

$$z + ax^2 = \left[n - bu^2\right]_1^{E\sqrt{\frac{n-a}{b}}}$$

или системы уравненій $z + by^2 = \left[n - a^2u\right]_1^{E\sqrt{\frac{n-b}{a}}}$

Число всѣхъ рѣшеній этихъ системъ выражается формулами:

$$N = \sum_1^{E\sqrt{\frac{n-a}{b}}} E\sqrt{\frac{n-bu^2}{a}},\ N_1 = \sum_1^{E\sqrt{\frac{n-b}{a}}} E\sqrt{\frac{n-au^2}{b}}$$

Сравнивая эти два выраженія, мы получаемъ законъ числового тожества въ видѣ:

$$\sum_1^{E\sqrt{\frac{n-a}{b}}} E\sqrt{\frac{n-bu^2}{a}} = \sum_1^{E\sqrt{\frac{n-b}{a}}} E\sqrt{\frac{n-au^2}{b}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Полагая $b = 1$, мы получимъ выраженіе:

$$\sum_1^{E\sqrt{n-a}} E\sqrt{\frac{n-u^2}{a}} = \sum_1^{E\sqrt{\frac{n-1}{a}}} E\sqrt{n-au^2}$$

Замѣняя n чрезъ $Log\alpha$, a чрезъ $Log\beta$, имѣемъ

$$\sum_{u=1}^{u=E\sqrt{Log\frac{\alpha}{\beta}}} E\sqrt{\frac{Log\alpha - u^2}{Log\beta}} = \sum_1^{E\sqrt{\frac{Log\alpha-1}{Log\beta}}} E\sqrt{Log\alpha - u^2\, Log\beta.}$$

Означая вообще число цыфръ до запятой въ частномъ $\frac{\alpha}{\beta^{k^2}}$ чрезъ ν_k, мы имѣемъ формулу:

$$\sum_{1}^{E\sqrt{\frac{Log\alpha-1}{Log\beta}}} E\sqrt{\nu_u - 1} = \sum_{u=1}^{u=E\sqrt{Log\frac{\alpha}{\beta}}} E\sqrt{\frac{Log\alpha - u^2}{Log\beta}}.$$

Если подобнымъ образомъ будемъ разсматривать неопредѣленное уравненіе

$$z + ax^3 + by^3 = n,$$

гдѣ a, b, n положительныя количества, то найдемъ законъ числового тожества въ формѣ:

$$\sum_{u=1}^{u=E\sqrt[3]{\frac{n-b}{a}}} E\sqrt[3]{\frac{n-au^3}{b}} = \sum_{u=1}^{u=E\sqrt[3]{\frac{n-a}{b}}} E\sqrt[3]{\frac{n-bu^3}{a}} \; \ldots\ldots \quad (9)$$

Для неопредѣленнаго уравненія $z + ax^m + by^m = n$ будемъ имѣть

$$\sum_{u=1}^{u=E\sqrt[m]{\frac{n-a}{b}}} E\sqrt[m]{\frac{n-bu^m}{a}} = \sum_{u=1}^{u=E\sqrt[m]{\frac{n-b}{a}}} E\sqrt[m]{\frac{n-au^m}{b}} \; \ldots\ldots \quad (10)$$

§ 6.

Если бы мы разсматривали неопредѣленное уравненіе

$$z + \psi x + \psi_1 y = n \; \ldots\ldots \quad (d)$$

гдѣ ψx и $\psi_1 y$ функціи возрастающія, начиная съ 1, и имѣющія положительныя значенія, число рѣшеній его было бы равно или числу рѣшеній системы:

$$z + \psi x = \Big[\, n - \psi_1 u \,\Big]_{u=1}^{u=E\phi_1(n-\psi 1)}$$

или системы:

$$z + \psi_1 y = \Big[n - \psi u\Big]_1^{E\varphi(n-\psi_1 1)}$$

Въ этихъ формулахъ φ и φ_1 суть функціи, обратныя функціямъ ψ и ψ_1. Число рѣшеній обѣихъ системъ выражается формулами:

$$N = \sum_{u=1}^{u=\varphi_1(n-\psi 1)} E\varphi(n-\psi_1 u) \text{ и } N_1 = \sum_{u=1}^{u=E\varphi(n-\psi_1 1)} E\varphi_1(n-\psi u),$$

откуда получается общая формула перваго закона числовыхъ тожествъ для уравненія $z + \psi x + \psi_1 y = n$

$$\sum_{u=1}^{u=E\varphi_1(n-\psi 1)} E\varphi(n-\psi_1 u) = \sum_{u=1}^{u=E\varphi(n-\psi_1 1)} E\varphi_1(n-\psi u).$$

Можно неопредѣленное уравненіе (d) замѣнять системами уравненій:

$$z + \psi x = \Big[n - \psi_1 u\Big]_{u=1}^{u=E\varphi_1 n}$$

или

$$z + \psi_1 y = \Big[n - \psi u\Big]_1^{E\varphi n}$$

Въ такомъ случаѣ *первый законъ числовыхъ тожествъ* выразится общею формулою:

$$\sum_{u=1}^{u=E\varphi_1 n} E\varphi(n-\psi_1 u) = \sum_{u=1}^{u=E\varphi n} E\varphi_1(n-\psi u). \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Мы будемъ иногда пользоваться этою формою перваго закона числовыхъ тожествъ, какъ болѣе удобною.

Если положимъ въ общемъ уравненіи $\psi x = ax^3$, $\psi_1 y = by$, то найдемъ формулу числового тожества для неопредѣленнаго уравненія

$$z + ax^3 + by = n \text{ въ видѣ}$$

$$E\sqrt[3]{\frac{n-b}{a}} + E\sqrt[3]{\frac{n-2b}{a}} + \ldots + E\sqrt[3]{\frac{n-bE\frac{n}{b}}{a}} = E\,\frac{n-a}{b} +$$

$$+ E\,\frac{n-2^3a}{b} + \ldots + E\,\frac{n-a\left(E\sqrt[3]{\frac{n}{a}}\right)^3}{b}$$

Полагая въ этой формулѣ $b=1$, $n=Log\mathrm{A}$, $a=Log\mathrm{B}$, находимъ

$$E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}-1}{Log\mathrm{B}}} + E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}-2}{Log\mathrm{B}}} + \ldots + E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}-ELog\mathrm{A}}{Log\mathrm{B}}} =$$

$$ELog\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + E\,Log\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}^{2^3}} + \ldots + E\,Log\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}^{\left(E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}}{Log\mathrm{B}}}\right)^3}}$$

формулу, опредѣляющую N число цыфръ до запятой въ рядѣ частныхъ

$$\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}^{u^3}}\right]_{u=1}^{u=E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}}{Log\mathrm{B}}}} \;\; .$$

$$\mathrm{N} = E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}}{Log\mathrm{B}}} + E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}-1}{Log\mathrm{B}}} + E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}-2}{Log\mathrm{B}}} + \ldots\ldots$$

$$+ E\sqrt[3]{\frac{Log\mathrm{A}-ELog\mathrm{A}}{Log\mathrm{B}}}$$

Для $\mathrm{A} = 1000000$, $\mathrm{B} = 2$ частныя будутъ

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 500000,\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}^8} = 3902,\ldots\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}^{27}} = 0,\ \ldots\ldots$$

Число цыфръ во всѣхъ этихъ частныхъ выражается формулою

$$N = E\sqrt[3]{\frac{6}{0{,}30103}} + E\sqrt[3]{\frac{5}{0{,}30103}} + E\sqrt[3]{\frac{4}{0{,}30103}} +$$

$$+ E\sqrt[3]{\frac{3}{0{,}30103}} + E\sqrt[3]{\frac{2}{0{,}30103}} + E\sqrt[3]{\frac{1}{0{,}30103}} = 10.$$

Если мы положимъ въ общей формулѣ (I) $\psi_1 y = b\psi y$ и $\psi x = ax$, то получимъ

$$\sum_{u=1}^{u=E\phi\frac{n}{b}} E\frac{n-b\psi u}{a} = \sum_{u=1}^{u=E\frac{n}{a}} E\,\phi\,\frac{n-au}{b}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (11)$$

гдѣ, положивъ $a=1$, $n=Log\,A$, $b=Log\,B$, находимъ

$$(12)\left\{\begin{array}{l} E\,Log\,\dfrac{A}{B^{\psi 1}} + E\,Log\,\dfrac{A}{B^{\psi 2}} + E\,Log\,\dfrac{A}{B^{\psi 3}} + \ldots + \\[2ex] + E\,Log\,\dfrac{A}{B^{\psi\left\{E\left(\phi\frac{Log A}{Log B}\right)\right\}}} = E\phi\left(\dfrac{Log\,(A)-1}{Log B}\right) + \\[2ex] E\phi\left(\dfrac{Log A-2}{Log B}\right) + \ldots + E\left(\phi\dfrac{Log\,A - E\,Log\,A}{Log\,B}\right) \end{array}\right.$$

формулу, дающую возможность опредѣлить N число цыфръ цѣлаго ряда частныхъ $\frac{A}{B^{\psi 1}}$, $\frac{A}{B^{\psi 2}}$, $\frac{A}{B^{\psi 3}}$ .... $\frac{A}{B^{\psi E\phi\frac{Log A}{Log B}}}$

$$N = E\,\phi\left(\frac{Log A}{Log\,B}\right) + E\phi\left(\frac{Log A-1}{Log B}\right) + E\phi\left(\frac{Log A-2}{Log B}\right) + \ldots$$

$$+ E\phi\left(\frac{Log A - E\,Log A}{Log B}\right).$$

Если положить въ формулѣ (11) $a=\frac{1}{k}$, число цыфръ

въ частныхъ $\left[\left(\frac{A}{B^{\psi u}}\right)^{\frac{1}{k}}\right]_{u=1}^{u=E\phi\frac{LogA}{LogB}}$ будетъ выражаться формулою

$$N(k)=E\phi\left(\frac{LogA-\frac{1}{k}}{LogB}\right)+E\phi\left(\frac{LogA-\frac{2}{k}}{LogB}\right)+\dots$$
$$\dots+E\phi\left(\frac{LogA-\frac{1}{k}EkLogA}{LogB}\right).$$

Замѣнивъ въ (12) $B^{\psi x}$ чрезъ ψx, ψx выраженіемъ $\frac{Log\psi x}{LogB}$, ϕx формулою $\phi(10^{xLogB})$, находимъ:

$$\sum_{u=1}^{u=E\phi A} E\,Log\,\frac{A}{\psi u}=\sum_{u=1}^{u=E\,LogA} E\,\phi\left(\frac{A}{10^u}\right),$$

откуда, означая чрезъ N число цыфръ во всѣхъ частныхъ до запятой ряда $\left[\frac{A}{\psi u}\right]_{u=1}^{u=E\phi A}$, находимъ

$$N=E\phi(A)+E\phi\left(\frac{A}{10}\right)+E\phi\left(\frac{A}{10^2}\right)+\dots$$
$$\dots+E\phi\left(\frac{A}{10^{ELogA}}\right)\dots\dots\dots\quad(13)$$

Если $\psi x=x$, $\phi x=x$, число цыфръ въ частныхъ $\left[\frac{A}{u}\right]_{u=1}^{u=EA}$ будетъ $N=EA+E\frac{A}{10}+E\frac{A}{10^2}+\dots+E\frac{A}{10^{ELogA}}$.

Для даннаго числа

$A = a + 10b + 100c + 1000d$, число цыфръ N выражается формулою

$N = a + 11b + 111c + 1111d.$

Если $\psi x = x^2 + 2$, число цыфръ въ рядѣ частныхъ $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, 6 \frac{A}{11}, \frac{A}{18} \ldots$ выражается формулою

$$N = \sum_{u=0}^{u=ELogA} E\sqrt{\frac{A}{10^u} - 2}$$

Обозначивъ чрезъ Ц (x) функцію, выражающую число цыфръ въ рядѣ частныхъ $\left[\frac{x}{\psi u}\right]_{u=1}^{u=E\phi x}$, получимъ:

$$Ц\,(x) = E\phi\,(x) + E\phi\frac{x}{10} + E\phi\frac{x}{10^2} + \ldots + E\phi\frac{x}{10^{ELogx}},$$

гдѣ, замѣнивъ x чрезъ $\frac{x}{10}$, находимъ

$$Ц\left(\frac{x}{10}\right) = E\,\phi\left(\frac{10}{x}\right) + E\,\phi\left(\frac{x}{10^2}\right) + \ldots + E\phi\frac{10}{x^{ELogx}}$$

откуда получаемъ

$$Ц\,(x) - Ц\left(\frac{x}{10}\right) = E\phi x \qquad (14)$$

формулу, дающую возможность опредѣлять $E\phi x$, если извѣстны двѣ функціи Ц (x) и Ц $\left(\frac{x}{10}\right)$, вычисленіе которыхъ не представляетъ никакихъ особенныхъ трудностей со стороны теоріи.

Этою формулою (14) можно воспользоваться для приближеннаго опредѣленія корней уравненія $\psi x = a$. Дѣйствительно, корень этого уравненія есть ничто иное, какъ значеніе функціи φy, обратной функціи ψx при $y = a$, то есть φa, и $E\varphi a$ выражаетъ это значеніе вѣрно до цѣлыхъ чиселъ.

Если въ основной формулѣ

$$\sum_{u=1}^{u=E\varphi_1(n)} E\varphi(n - \psi_1 u) = \sum_{u=1}^{u=E\varphi n} E\varphi_1(n - \psi u)$$

положимъ $\psi x = 10^x$, тогда она приметъ видъ

$$\sum_{u=1}^{u=E\varphi_1 n} E\,Log\,(n - \psi_1 u) = \sum_{u=1}^{u=E\,Log\,n} E\varphi_1(n - 10^u)$$

Формула эта можетъ послужить для опредѣленія N числа цыфръ до запятой въ рядѣ выраженій $\Big[n - \psi u\Big]_{u=1}^{u=E\varphi n}$

$$N = E\varphi n + E\varphi(n - 10) + E\varphi(n - 10^2) + \ldots + E\varphi(n - 10^{E\,Log\,n}) \quad (15)$$

Замѣнивъ въ общей формулѣ (I) ψx черезъ $Log x$, n черезъ $Log n$, получимъ уравненіе

$$\sum_{u=1}^{u=E\varphi\,Log\,n} E\left(10^{Log\,n - \psi_1 u}\right) = \sum_{u=1}^{u=n} E\,\varphi_1\left(Log\,\frac{n}{u}\right),$$

изъ котораго послѣ замѣны $10^{\psi x}$ чрезъ ψx, $\varphi_1 x$ чрезъ $\varphi(10^x)$, находимъ

$$E\frac{n}{\psi 1} + E\frac{n}{\psi 2} + E\frac{n}{\psi 3} + \ldots + E\frac{n}{\psi(E\varphi n)} = E\varphi\,n + E\varphi\frac{n}{2} + \ldots$$

$$\ldots + E\varphi\left(\frac{n}{En}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

формулу, опредѣляющую сумму цѣлыхъ чиселъ до запятой въ рядѣ частныхъ $\left[\frac{n}{\psi u}\right]_{u=1}^{u=\mathrm{E}\varphi n}$.

Формула (16) даетъ возможность рѣшать одинъ вопросъ помощію другого и выбирать для вычисленія тотъ или другой способъ, смотря по величинѣ числа n и виду функціи $\psi(x)$. Если $\psi(x)$ есть функція, чрезвычайно быстро возрастающая и число n очень велико, число дѣйствій, требуемыхъ первою частію уравненія (16), значительно менѣе числа дѣйствій, требуемыхъ второю частію. Если же функція ψx возрастаетъ медленно, или n малое количество, тогда число дѣйствій, выражаемыхъ второю частію, въ свою очередь менѣе числа дѣйствій, требуемыхъ первою.

§ 7.

Взглядываясь въ формулу (16), мы видимъ, что она прямо вытекаетъ изъ разсматриванія неопредѣленнаго уравненія

$$z + \psi(x) \,.\, y = n$$

Число его рѣшеній въ томъ случаѣ, когда z получаетъ только положительныя, а x и y цѣлыя и положительныя значенія, начиная съ 1, будетъ равно или числу рѣшеній системы уравненій

$$z + \psi(x) \,.\, \Big[\, u \,\Big]_1^{\mathrm{E}n} = n$$

или системы

$$z + y\Big[\psi u\Big]_1^{\mathrm{E}\varphi n} = n$$

Число рѣшеній этихъ системъ выражается формулами:

$$N = \sum_{u=1}^{u=E(n)} E\varphi\left(\frac{n}{u}\right) \text{ и } N_1 = \sum_{1}^{E\varphi n} E\frac{n}{\psi u}$$

Сравнивая эти величины, мы находимъ формулу (16).

Изъ разсматриванія неопредѣленнаго уравненія

$$z + \psi x \,.\, \psi_1 y = n,$$

гдѣ ψx и $\psi_1 y$ функціи возрастающія и имѣющія положительныя значенія, начиная съ 1, получаемъ первый законъ числового тожества въ видѣ

$$\sum_{1}^{E\varphi(n)} E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right) = \sum_{1}^{E\varphi_1(n)} E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II)}$$

гдѣ φ и φ_1 суть функціи, обратныя функціямъ ψ и ψ_1.

Для $\psi x = x^2$, $\psi_1 y = \sqrt[3]{y}$, $\varphi x = \sqrt{x}$, $\varphi_1 y = y^3$ общая формула (II) даетъ

$$E\sqrt{\frac{n}{1}} + E\sqrt{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}} + E\sqrt{\frac{n}{\sqrt[3]{3}}} + \ldots + E\sqrt{\frac{n}{\sqrt[3]{\kappa}}} + \ldots$$

$$+ E\sqrt{\frac{n}{\sqrt[3]{n^3}}} = E\left(\frac{n}{1^2}\right)^3 + E\left(\frac{n}{2^2}\right)^3 + E\left(\frac{n}{3^2}\right)^3 + \ldots$$

$$+ E\left(\frac{n}{\kappa_1{}^2}\right)^3 + \ldots + E\left[\frac{n}{(E\sqrt{n})^2}\right]^3$$

Для уравненія $z + (\psi x)^{\psi_1 y} = n$ первый законъ числовыхъ тожествъ приметъ форму

$$\sum_{u=1}^{u=k} E\varphi_1\left[\frac{Log n}{Log \psi u}\right] = \sum_{u=1}^{u=k_1} E\varphi\left(n^{\frac{1}{\psi_1 u}}\right),$$

въ которой $k = \mathrm{E}\varphi\left(n^{\frac{1}{\psi_1 1}}\right)$ и $k_1 = \mathrm{E}\varphi_1\left(\frac{Log n}{Log \psi 1}\right)$

Однимъ словомъ, если намъ дано неопредѣленное уравненіе

$$z + \psi(x, y) = n,$$

гдѣ $\psi(x, y)$ функція возрастающая, начиная съ $x = 1$ и $y = 1$, и имѣющая для этихъ значеній перемѣннаго положительную величину, число рѣшеній его будетъ равно или a) числу рѣшеній системы уравненій:

$$z + \Big[\psi(u, y)\Big]_{u=1}^{u=k} = n,$$

гдѣ k количество, удовлетворяющее неравенствамъ

$$\psi(k, 1) \lesseqqgtr n \text{ и } \psi(k + 1, 1) > n$$

или b) числу рѣшеній системы

$$z + \Big[\psi(x, u)\Big]_{u=1}^{u=\rho} = n,$$

гдѣ ρ удовлетворяетъ неравенствамъ

$$\psi(1, \rho) \lesseqqgtr n \quad \psi(1, \rho + 1) > n$$

Означивъ чрезъ η_a и ξ_b величины y и x, удовлетворяющія уравненіямъ $\psi(a, \eta_a) = n$ и $\psi(\xi_b, b) = n$, мы получимъ для выраженія числа корней этихъ системъ уравненія:

$$\mathrm{N} = \mathrm{E}\eta_1 + \mathrm{E}\eta_2 + \mathrm{E}\eta_3 + \ldots + \mathrm{E}\eta_k = \sum_{u=1}^{u=k} \mathrm{E}\eta_u$$

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{E}\xi_1 + \mathrm{E}\xi_2 + \mathrm{E}\xi_3 + \ldots + \mathrm{E}\xi_\rho = \sum_{u=1}^{u=\rho} \mathrm{E}\xi_u$$

и числовой законъ въ формѣ

$$\sum_{u=1}^{u=\rho} E\xi_u = \sum_{u=1}^{u=k} E\eta_u.$$

Пользуясь формулами

$$N(n) = \sum_{u=o}^{u=ELogn} E\phi\left(\frac{n}{10^u}\right) \text{ и } S(n) = \sum_{n=1}^{u=n} E\phi\left(\frac{n}{u}\right),$$

опредѣляющими $N(n)$ число цыфръ и $S(n)$ сумму всѣхъ частныхъ ряда $\left[\frac{n}{\psi u}\right]_{u=1}^{u=E\phi n}$, можно рѣшать и другіе вопросы.

Такъ для опредѣленія суммы всѣхъ цыфръ этихъ частныхъ, найдемъ сперва, σ_1 сумму всѣхъ цыфръ, стоящихъ на мѣстѣ единицъ. Опредѣливъ $S\left(\frac{n}{10}\right)$, не трудно видѣть, что рядъ частныхъ для числа $\frac{n}{10}$ будетъ состоять изъ тѣхъ же чиселъ, уменьшенныхъ только въ 10 разъ. Цѣлыя части частныхъ числа $\frac{n}{10}$ будутъ отличаться отъ цѣлыхъ частей числа n только тѣмъ, что цыфры, стоящія на мѣстѣ единицъ входить не будутъ, слѣдовательно

$$\sigma_1 = S(n) - 10\, S\left(\frac{n}{10}\right)$$

Если наибольшія частныя числа n будутъ состоять только изъ двухъ цыфръ, σ_2, сумма цыфръ, стоящихъ на мѣстѣ десятковъ, будетъ выражаться формулою

$$\sigma_2 = \frac{1}{10}\left[S(n) - \left(Sn - 10\, S\left(\frac{n}{10}\right)\right)\right] = S\left(\frac{n}{10}\right)$$

Если же наибольшія частныя будутъ состоять изъ нѣсколькихъ цыфръ, то, опредѣливъ $S(n)$, $S\left(\frac{n}{10}\right)$, $S\left(\frac{n}{100}\right)$, найдемъ для σ_2 формулу $\sigma_2 = \frac{1}{10}\left[10\,S\left(\frac{n}{10}\right) - S\left(\frac{n}{100}\right)\right]$.

Подобнымъ же образомъ можно рѣшать и другіе вопросы для этихъ частныхъ.

§ 8.

До сихъ поръ мы находили полное число паръ корней неопредѣленнаго уравненія $z + \psi x + \psi_1 y = n$ въ предѣлахъ возможнаго измѣненія перемѣнныхъ x отъ 1 до $E\varphi(n - \psi_1 1)$ и y отъ 1 до $E\varphi_1(n - \psi 1)$, и выводили соотвѣтствующія этому предположенію формулы. Если же перемѣнныя x и y должны заключаться въ опредѣленныхъ предѣлахъ, тогда вышевыведенныя формулы дла числа паръ корней измѣнятся соотвѣтственно величинамъ этихъ предѣловъ, и законъ числовыхъ тожествъ приметъ другой видъ.

Положимъ, что мы имѣемъ въ виду опредѣлить число паръ корней неопредѣленнаго уравненія $z + \psi x + \psi_1 y = n$, предполагая, что x можетъ получать положительныя цѣлыя значенія въ предѣлахъ цѣлыхъ чиселъ отъ m_1 до m_2, а y въ предѣлахъ отъ n_1 до n_2 включительно. Мы полагаемъ, что $m_2 > m_1$, $n_2 > n_1$, и притомъ цѣлыя числа m_2 и n_2 не превосходятъ чиселъ $E\varphi(n - \psi_1 1)$ и $E\varphi_1(n - \psi 1)$, предѣловъ возможныхъ измѣненій перемѣнныхъ x и y.

Возможные предѣлы измѣненія для величинъ y, соотвѣтствующія даннымъ измѣненіямъ x отъ m_1 до m_2, будутъ:

$E\varphi_1(n - \psi m_1)$, $E\varphi_1(n - \psi(m_1 + 1))$,..... $E\varphi_1(n - \psi m_2)$... (e).

Возможные предѣлы для измѣненій величинъ x, соотвѣтствующіе даннымъ измѣненіямъ y отъ n_1 до n_2, будутъ:

$E\varphi(n - \psi_1 n_1)$, $E\varphi(n - \psi_1(n_1 + 1))$...... $E\varphi(n - \psi_1 n_2)$... (f).

Ряды (e) и (f), выражающіе возможные предѣлы измѣненія перемѣнныхъ, будутъ идти въ нисходящемъ порядкѣ, ибо ψx и $\psi_1 y$ функціи возрастающія. Означимъ чрезъ θ_1, θ_2, ω_1 и ω_2 крайніе возможные предѣлы измѣненія перемѣнныхъ y и x:

$$\theta_1 = E\varphi_1(n - \psi m_2),\quad \theta_2 = E\varphi_1(n - \psi m_1)$$
$$\omega_1 = E\varphi(n - \psi_1 n_2),\quad \omega_2 = E\varphi(n - \psi_1 n_1)$$

Смотря потому, въ какомъ отношеніи находятся данные предѣлы m_1, m_2, n_1, n_2, къ ω_1, ω_2, θ_1, θ_2, крайнимъ возможнымъ предѣламъ измѣненія перемѣнныхъ, формулы, выражающія число паръ корней, и законы числовыхъ тожествъ примутъ для каждаго частнаго случая соотвѣтствующій видъ.

Число корней неопредѣленнаго уравненія $z + \psi x + \psi_1 y = n$ при данныхъ условіяхъ будетъ зависѣть или отъ величинъ возможныхъ предѣловъ ряда (e) въ связи съ n_1, n_2 данными предѣлами y, или отъ величинъ возможныхъ предѣловъ ряда (f) въ связи съ m_1, m_2, данными предѣлами измѣненія x.

Если одна изъ величинъ π ряда (e) будетъ $< n_1$, то ν_k число паръ корней, соотвѣтствующее этому члену ряда (e), будетъ $= 0$, если π заключается въ предѣлахъ n_1 и n_2, то $\nu_k = \pi - n_1 + 1$, если $\pi > n_2$, число корней $\nu_k = n_2 - n_1 + 1$.

Полное число корней N равно суммѣ всѣхъ величинъ ν, соотвѣтствующихъ всѣмъ членамъ ряда (e): $N = \sum_{u=1}^{u=m_2-m_1+1} \nu_u$.

Означая чрезъ μ_1, $\mu_2 \dots \mu_{n_2-n_2+1}$ подобныя же величины, соотвѣтствующія членамъ ряда (f), въ зависимости ихъ отъ m_1, m_2, предѣловъ измѣненія x, мы найдемъ туже величину

$$N = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_{n_2-n_1+1} = \sum_{u=1}^{u=n_2-n_1+1} \mu_u.$$

Уравненіе, выражающее законъ числового тожества, будетъ

$$\sum \nu_u = \sum \mu_u$$

Распредѣляя 4 количества n_1, n_2, θ_1, θ_2 въ восходящемъ порядкѣ, начиная съ наименьшаго по величинѣ, будемъ имѣть слѣдующія шесть случаевъ:

1)	θ_1	θ_2	n_1	n_2
2)	n_1	n_2	θ_1	θ_2
3)	θ_1	n_1	θ_2	n_2
4)	n_1	θ_1	n_2	θ_2
5)	θ_1	n_1	n_2	θ_2
6)	n_1	θ_1	θ_2	n_2

Количества $m_1, m_2, \omega_1, \omega_2$, распредѣленныя такимъ же образомъ, размѣстятся въ порядкѣ, соотвѣтствующемъ каждому изъ этихъ случаевъ, такъ что взаимное соотношеніе между n_1, n_2, θ_1, θ_2, $m_1, m_2, \omega_1, \omega_2$ выразится слѣдующею таблицею:

1.	θ_1	θ_2	n_1	n_2	ω_1	ω_2	m_1	m_2
2.	n_1	n_2	θ_1	θ_2	m_1	m_2	ω_1	ω_2
3.	θ_1	n_1	θ_2	n_2	ω_1	m_1	ω_2	m_2
4.	n_1	θ_1	n_2	θ_2	m_1	ω_1	m_2	ω_2
5.	θ_1	n_1	n_2	θ_2	m_1	ω_1	ω_2	m_2
6.	n_1	θ_1	θ_2	n_2	ω_1	m_1	m_2	ω_2

Доказать, что количества m_1, m_2, ω_1, ω_2 распредѣлятся соотвѣтственно въ порядкѣ, выражаемомъ правою таблицею, очень легко. Дѣйствительно, первый случай θ_1, θ_2, n_1, n_2 характеризуется неравенствомъ

$$\theta_2 < n_1 \quad \text{или} \quad E\varphi_1 (n - \psi m_1) < n_1$$

Это неравенство показываетъ, что наибольшее значеніе, которое можетъ получить величина $E\varphi_1 (n-\psi m_1)$ есть n_1-1, а слѣдовательно $\varphi_1 (n-\psi m_1) < n_1$, отсюда $n - \psi m_1 < \psi_1 n_1$ и $E\varphi (n - \psi_1 n_1) = \omega_2 < m_1$.

Неравенство же $\omega_2 < m_1$ характеризуетъ распредѣленіе количествъ m_1, m_2, ω_1, ω_2 въ порядкѣ ω_1, ω_2, m_1, m_2.

Для второго случая, характеризуемаго неравенствомъ $\theta_1 > n_2$, будетъ имѣть мѣсто неравенство, выведенное подобнымъ же образомъ, $\omega_1 > m_2$, и указывающее на распредѣленіе этихъ количествъ въ порядкѣ m_1, m_2, ω_1, ω_2.

Третій случай характеризуется неравенствами

$$\theta_1 < n_1,\ \theta_2 < n_2,\ \theta_2 > n_1,$$

которымъ соотвѣтствуютъ неравенства

$$\omega_2 < m_2,\ \omega_1 < m_1,\ \omega_2 > m_1,$$

характерузующія порядокъ распредѣленія ω_1, m_1, ω_2, m_2.

Подобнымъ же образомъ можно доказать и всѣ остальныя соотвѣтственныя порядки распредѣленія количествъ m_1, m_2 ω_1, ω_2.

Если въ какомъ-нибудь случаѣ одно изъ количествъ ω равнялось бы одному нзъ количествъ m, то мы всегда будемъ такъ ставить ω въ порядкѣ распредѣленія, чтобы данный случай приводился къ одному изъ вышепоказанныхъ.

Теперь остается только выразить число корней N, соотвѣтствующее каждому порядку распредѣленія, и сравнить два выраженія для N для вывода закона числовыхъ тожествъ.

Очевидно, что число корней для перваго и второго порядковъ распредѣленія $N = o$, ибо предѣлы возможныхъ измѣненій θ_1 и θ_2 находятся внѣ предѣловъ данныхъ измѣненій, и слѣдовательно уравненіе $z + \psi x + \psi_1 y = n$ не имѣетъ корней, соотвѣтствующихъ значеніямъ x и y, содержащимся въ

рядахъ $\Big[u\Big]_{m_1}^{m_2}$ и $\Big[u\Big]_{n_1}^{n_2}$.

Число корней для случая $(\theta_1,\ n_1,\ \theta_2,\ n_2)$ найдется, когда мы опредѣлимъ выраженія ν, соотвѣтствующія членамъ числового ряда (e).

Число k, для котораго $E\varphi_1(n-\psi k) \geqq n_1$ опредѣлится изъ неравенствъ

$$\varphi_1(n-\psi k) \geqq n_1,\ n-\psi k \geqq \psi_1 n_1,\ \psi k \leqq n-\psi_1 n_1,$$

откуда $$k = E\varphi(n-\psi_1 n_1) = \omega_2$$

и $$N = E\varphi_1(n-\psi m_1) + E\varphi_1(n-\psi(m_1+1)) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + E\varphi_1(n-\psi\omega_2) - (n_1-1)(\omega_2-m_1+1)\ldots \quad (17)$$

Примѣръ. Найти число паръ корней уравненія $z+3x+5y=43$, когда x заключается между 5 и 10, а y между 5 и 8 включительно.

Изъ того, что

$$m_1=5,\ m_1=10;\ \omega_1=1,\ \omega_2=6$$
$$n_2=5,\ n_1=8;\ \theta_1=2,\ \theta_2=5$$

видно, что этотъ случай принадлежитъ къ порядку распредѣленія $(\theta_1, n_1, \theta_2, n_2)$ и

$$N = E\frac{43-3.5}{5} + E\frac{43-3.6}{5} - 4.2 = 5+5-8 = 2.$$

Число корней для случая $(n_1, \theta_1, n_2, \theta_2)$ опредѣлится формулою:

$$N = E\varphi_1(n-\psi\omega_1) + E\varphi_1(n-\psi(\omega_1+1)) + \ldots\ldots$$
$$+ E\varphi_1(n-\psi m_2) - (n_1-1)(m_2-\omega_1+1)$$
$$+ (\omega_1-m_1)(n_2-n_1+1) \ldots\ldots \quad (18)$$

такъ для предѣловъ измѣненія перемѣнныхъ

$$m_1=4,\ m_2=9,\ \omega_1=6,\ \omega_2=13$$
$$n_1=2,\ n_2=6,\ \theta_1=4,\ \theta_2=7$$

имѣемъ 4-й случай распредѣленія $(n_1, \theta_1, n_2, \theta_2)$ и

$$N = E\frac{49-3.6}{5} + E\frac{49-3.7}{5} + E\frac{49-4.8}{5} +$$

$$+ \mathrm{E}\frac{49 - 3.9}{5} - 1.4 + 2.5 = 26.$$

Для порядка $(\theta_1, n_1, n_2, \theta_2)$ распредѣленія предѣльныхъ величинъ число корней будетъ выражаться формулою:

$$\mathrm{N} = \mathrm{E}\varphi_1(n - \psi\omega_1) + \mathrm{E}\varphi_1(n - \psi(\omega_1 + 1)) + \ldots.$$
$$+ \mathrm{E}\varphi_1(n_1 - \psi\omega_2) - (n_1 - 1)(\omega_2 - \omega_1 + 1) +$$
$$+ (\omega_1 - m_1)(n_2 - n_1 + 1). \ldots\ldots \quad (19)$$

Если въ предшедствующимъ примѣрѣ предѣлы измѣненія будутъ

$$\begin{matrix} m_1 = 4, & m_2 = 12 & \multirow{2}{*}{то} & \omega_1 = 6, & \omega_2 = 11 \\ n_1 = 3, & n_2 = 16 & & \theta_1 = 2, & \theta_2 = 7 \end{matrix}$$

то число корней выражается формулою

$$\mathrm{N} = \mathrm{E}\frac{49 - 3.6}{5} + \mathrm{E}\frac{49 - 3.7}{5} + \mathrm{E}\frac{49 - 3.8}{5} + \mathrm{E}\frac{49 - 3.9}{5} +$$

$$+ \mathrm{E}\frac{49 - 3.10}{5} + \mathrm{E}\frac{49 - 3.11}{5} - 2.6 + 2.4 = 22.$$

Наконецъ для случая распредѣленія предѣльныхъ величинъ въ порядкѣ $(n_1, \theta_1, \theta_2, n_2)$ число паръ корней будетъ выражаться формулою:

$$\mathrm{N} = \mathrm{E}\varphi_1(n - \psi m_1) + \mathrm{E}\varphi_1(n - \psi(m_1 + 1)) + \ldots.$$
$$\ldots + \mathrm{E}\varphi_1(n - \psi m_2) - (n_1 - 1)(m_2 - m_1 + 1) \ldots. \quad (20)$$

такъ для уравненія $z + 5x + 3y = 49$ и для предѣловъ

$$\begin{matrix} m_1 = 3, & m_2 = 6 & \multirow{2}{*}{и} & \omega_1 = 2, & \omega_2 = 7 \\ n_1 = 4, & n_2 = 12 & & \theta_1 = 6, & \theta_2 = 11, \end{matrix}$$

удовлетворяющихъ условію $(n_1, \theta_1, \theta_2, n_2)$, число корней будетъ

$$\mathrm{N} = \mathrm{E}\frac{49 - 5.3}{3} + \mathrm{E}\frac{49 - 5.4}{3} + \mathrm{E}\frac{49 - 5.5}{3} +$$

$$+ \mathrm{E}\frac{49 - 5.6}{3} - 3.4 = 22.$$

Замѣняя въ выраженіяхъ для N количества ω_1, ω_2, θ_1, θ_2, ихъ величинами, мы получимъ для перваго закона числовыхъ тожествъ уравненія въ третьемъ случаѣ:

$$\sum_{u=m_1}^{u=E\varphi(n-\psi_1 n_1)} E\varphi_1(n-\psi u)-(n_1-1)\left[E\varphi(n-\psi_1 n_1)-m_1+1\right]=$$

$$=\sum_{u=n_1}^{u=E\varphi_1(n-\psi m_1)} E\varphi(n-\psi_1 u)-(m_1-1)\left[E\varphi_1(n-\psi m_1)-n_1+1\right]. \quad (21)$$

въ четвертомъ:

$$(22)\ \sum_{u=E\varphi(n-\psi_1 n_2)}^{u=m_2} E\varphi_1(n-\psi u)-(n_1-1)\left[m_2-E\varphi(n-\psi_1 n_2)\right]+$$

$$+(n_2-n_1+1)\left[E\varphi(n-\psi_1 n_2)-m_1\right]=$$

$$=\sum_{u=E\varphi_1(n-\psi m_2)}^{u=n_2} E\varphi(n-\psi_1 u)-(n_1-1)\left[n_2-E\varphi_1(n-\psi n_1)\right]+$$

$$+(m_2-m_1+1)\left[E\varphi_1(n-\psi m_2)-n_1\right]$$

въ пятомъ:

$$(23)\ \sum_{u=E\varphi(n-\psi_1 n_2)}^{u=E\varphi(n-\psi_1 n_1)} E\varphi_1(n-\psi u)-(n_1-1)\left[E\varphi(n-\psi_1 n_1)-E\varphi(n-\psi_1 n_2)\right]+$$

$$+\left[E\varphi(n-\psi_1 n_2)-m_1\right](n_2-n_1+1)=$$

$$=\sum_{u=n_1}^{u=n_2} E\varphi(n-\psi_1 u)-(m_1-1)(n_2-n_1+1)$$

въ шестомъ:

$$\sum_{u=m_1}^{u=m_2} \mathrm{E}\varphi_1(n-\psi u)-(n_1-1)(m_2-m_1+1)=\sum_{u=\mathrm{E}\varphi_1(n-\psi m_2)}^{u=\mathrm{E}\varphi_1(n-\psi m_1)} \mathrm{E}\varphi(n-\psi_1 u)-$$

$$-(m_1-1)\Big[\mathrm{E}\varphi_1(n-\psi m_1)-\mathrm{E}\varphi_1(n-\psi m_2)\Big]+$$

$$+\Big[\mathrm{E}\varphi_1(n-\psi m_2)-n_1\Big](m_2-m_1+1)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (24)$$

§ 9.

Мы нашли, что число паръ корней неопредѣленнаго уравненія $z+\psi x+\psi_1 y=n$ выражается или формулою:

$$\mathrm{N}(n)=\sum_{1}^{\mathrm{E}\varphi_1 n} \mathrm{E}\varphi(n-\psi_1 u) \text{ или формулою } \mathrm{N}(n)=\sum_{1}^{\mathrm{E}\varphi n} \mathrm{E}\varphi_1(n-\psi u),$$

если не будемъ считать въ этомъ числѣ тѣхъ паръ, для которыхъ x или y равны нулю.

Если ψx и $\psi_1 y$ будутъ функціями, получающими цѣлыя значенія для цѣлыхъ величинъ x и y, если n цѣлое число, то значенія $z=n-\psi x-\psi_1 y$ будутъ тоже цѣлыя и способны измѣняться отъ o до n, поэтому предшествовавшія выраженія будутъ въ тоже время означать число паръ корней цѣлыхъ и положительныхъ, удовлетворяющихъ системѣ уравненій:

$$\psi x+\psi_1 y=\Big[u\Big]_1^n$$

Если замѣнимъ n количествомъ цѣлымъ k, то формулы

$$\mathrm{N}(k)=\sum_{1}^{\mathrm{E}\varphi_1 k} \mathrm{E}\varphi(k-\psi_1 u)=\sum_{1}^{\mathrm{E}\varphi k} \mathrm{E}\varphi_1(k-\psi u)$$

выражаютъ число корней системы

$$\psi x + \psi_1 y = \Big[u\Big]_1^k,$$

откуда не трудно заключить, что числовое выраженіе $N(n) - N(k)$ выражаетъ число цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній системы уравненій:

$$\psi(x) + \psi_1(y) = \Big[u\Big]_{k+1}^n$$

и выраженіе $N(n) - N(n-1)$ выражаетъ число рѣшеній неопредѣленнаго уравненія

$$\psi x + \psi_1 y = n.$$

Тоже самое можно сказать и для неопредѣленнаго уравненія

$$z + \psi x.\ \psi_1 y = n$$

Такимъ образомъ число рѣшеній системы уравненій

$$xy = \Big[u\Big]_1^n$$

выражается формулою

$$N(n) = \varphi n = \sum_1^n E\frac{n}{u} = E\frac{n}{1} + E\frac{n}{2} + E\frac{n}{3} + \dots$$

$$+ E\frac{n}{k} + \dots + E\frac{n}{n},$$

но такъ какъ число рѣшеній уравненія $xy = k$ выражаетъ въ тоже время числовую функцію $\rho(k)$, означающую число дѣлителей цѣлаго числа k, то выраженіе $\varphi(n)$ показываетъ число всѣхъ дѣлителей въ рядѣ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n.

$$\varphi(n) = \sum_1^n \rho(u).$$

$\varphi(n) - \varphi(k)$ выражаетъ число дѣлителей въ рядѣ чиселъ

$$\left[u\right]_{k+1}^{n}.$$

§ 10.

Такъ какъ мы коснулись функціи $\rho(m)$, означающей число дѣлителей числа m, то мы остановимся на доказательствѣ двухъ теоремъ, относящихся къ этой функціи.

Исходнымъ пунктомъ для вывода ихъ будетъ служить извѣстная теорема Гаусса, состоящая въ томъ, что, если 1, d, d',... m будутъ дѣлителями числа m, а $\psi(m)$ функція, выражающая число чиселъ, первыхъ съ m и меньшихъ m, считая въ числѣ чиселъ первыхъ съ m и единицу, то

$$\psi(1) + \psi(d) + \psi(d') + \ldots\ldots + \psi(m) = m, \text{ гдѣ } \psi 1 = 1.$$

Если послѣдовательно замѣнимъ въ этомъ уравненіи m черезъ $m-1$, $m-2$,... 3, 2, 1, то получимъ, по сложеніи этихъ уравненій

$$\sum_1^m \psi(u).\ \mathrm{E}\frac{m}{u} = \frac{m.\ (m+1)}{1.\ 2}$$

Дѣйствительно, функція $\psi(d)$ будетъ повторяться столько разъ въ первыхъ частяхъ этихъ уравненій, сколько заключается единицъ въ выраженіи $\mathrm{E}\frac{m}{d}$.

Другая теорема получится въ томъ случаѣ, когда мы замѣнимъ m всѣми его дѣлителями

$$m = \psi(1) + \psi(d) + \psi(d') + \ldots + \psi(d^{(k)}) + \ldots + \psi m$$
$$d^{(k)} = \psi\, 1 + \psi(d^{(l)}) + \ldots + \psi(d^{(h)})$$
. . . .
$$1 = \psi\, 1$$

Сложивъ эти уравненія, мы получимъ въ первой части сумму всѣхъ дѣлителей числа m, которую вмѣстѣ съ Ейлеромъ означимъ чрезъ $\int(m)$.

Во второй части членъ $\psi\, 1 = 1$ будетъ повторяться $\rho(m)$ разъ, то есть столько, сколько дѣлителей въ m. Члены же $\psi(d)$, $\psi(d')$... будутъ имѣть коеффиціентами числа $a_{(d)}$ и $a_{(d')}$, означающія, сколькимъ дѣлителямъ числа m количества d и d' будутъ дѣлителями.

Такимъ образомъ по сложеніи получимъ

$$\int(m) = \rho(m) + a_{(d)}\psi(d) + a_{(d')}\psi(d') + \ldots + a_{(d^k)}\psi(d^k) + \ldots + \psi(m)$$

Для опредѣленія коеффиціента $a_{d^{(k)}}$ положимъ, что

$$m = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta}\, e^{\iota} \ldots \text{ а } d^{(k)} = a^{\varkappa}\, b^{\lambda}\, c^{\mu}\, d^{\nu},$$

гдѣ a, b, c, d, e... первыя числа.

Очевидно, что число $a_{d^{(k)}}$ равно $\rho\left(\frac{m}{a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta}}\right)$, числу дѣлителей числа $\frac{m}{a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta}}$, повторенному столько разъ ξ, сколько дѣлителей числа $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta}$ будутъ дѣлится на $d^{(k)}$.

$$a_{d^{(k)}} = \xi\, \rho\left(\frac{m}{a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta}}\right)$$

Это же число $\xi = (\alpha - \varkappa + 1)\ (\beta - \lambda + 1)\ (\gamma - \mu + 1)$

$$= \rho\left(\frac{a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta}}{d^{(k)}}\right).$$

Отсюда выводимъ формулу

$$\int(m)=\rho(m)+\sum\psi(d^u)\,\rho\left(\frac{m}{a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta}\right)\rho\left(\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta}{d^{(u)}}\right). \quad (25)$$

гдѣ α, β, γ, δ показатели высшихъ степеней первыхъ чиселъ, входящихъ въ m, знакъ Σ распространяется на всѣхъ дѣлителей числа m кромѣ единицы, множитель $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ заключаетъ въ себѣ первыя числа, входящія въ дѣлителя $d^{(k)}$.

Для $m=18$ имѣемъ

$$\int(18)=\rho(18)+\psi(2)\rho(9)\rho(1)+\psi(3)\rho(2)\rho(3)+$$
$$+\psi(6)\rho(1)\rho(3)+\psi(9)\rho(2)\rho(1)+\psi(18)\rho(1)\rho(1)=39.$$

§ 11.

Опредѣливъ число паръ корней неопредѣленнаго уравненія

$$z+\psi x+\psi_1 y=n,$$

не трудно найти и сумму ихъ, соотвѣтствующую перемѣнному x или y.

Дѣйствительно, число разъ, когда перемѣнное x будетъ равно 1, 2, 3... k опредѣляется послѣдовательно выраженіями $E\phi_1(n-\psi 1)$, $E\phi_1(n-\psi 2)$, $E\phi_1(n-\psi 3)$. . . . $E\phi_1(n-\psi k)$

На этомъ основаніи сумма всѣхъ корней, соотвѣтствую щихъ перемѣнному x во всѣхъ парахъ, будетъ выражаться формулою

$$S_1=\sum_{u=1}^{u=E\phi(n-\psi_1 1)} u\,E\phi_1(n-\psi u)$$

а подобная же сумма для корней y опредѣляется формулою

$$S^1{}_1=\sum_{1}^{u=E\phi(n-{}_1 1)} u\,E\,\phi(n-\psi_1 u)$$

Вообще сумма функцій корней неопредѣленнаго уравненія, соотвѣтствующая перемѣнному x или y, будетъ выражаться формулою

$$\mathrm{S}\,(\varphi\,x) = \sum_{u=1}^{u=\mathrm{E}\phi\,(n-\psi_1 u)} \varphi u\,\mathrm{E}\phi_1\,(n-\psi u)$$

$$\mathrm{S}\,(\varphi\,y) = \sum_{u=1}^{u=\mathrm{E}\phi_1\,(n-\psi 1)} \varphi u\,\mathrm{E}\phi\,(n-\psi_1 u)$$

Всѣ эти функціи числовыя представляютъ конечно много замѣчательныхъ свойствъ, но трудно найти общіе пріемы для ихъ изслѣдованія, и мы воспользуемся результатами, найденными изъ разложенія безконечныхъ произведеній въ безконечные ряды, для показанія соотношеній нѣкоторыхъ изъ нихъ. Числовая функція, выражающая сумму всѣхъ корней неопредѣленнаго уравненія $z+xy=n$ для перемѣннаго x будетъ таже, что и для перемѣннаго y. Означивъ ее чрезъ $\sigma\,(n)$, мы имѣемъ для опредѣленія ея слѣдующую формулу

$$\sigma\,(n) = \sum_{u=1}^{u=n} u\mathrm{E}\,\frac{n}{u} = \mathrm{E}n + 2\mathrm{E}\,\frac{n}{2} + 3\mathrm{E}\,\frac{n}{3} + \ldots + n\mathrm{E}\,\frac{n}{n}$$

Означивъ вмѣстѣ съ Ейлеромъ чрезъ $\int(q)$ сумму дѣлителей цѣлаго числа q, мы видимъ, что въ тоже время

$$\sigma\,(n) = \int(1) + \int(2) + \int(3) + \ldots + \int(n) = \sum_1^n \int(u)$$

означаетъ сумму корней системы неопредѣленныхъ уравненій $xy = \Big[\,u\,\Big]_1^n$, рѣшеніями которой будутъ всѣ дѣлители всѣхъ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n. Сумма дѣлителей для ряда чиселъ

$$\left[u\right]_{k+1}^{n}$$

будетъ выражаться формулою $\sigma(n) - \sigma(k)$.

Ейлеръ изъ разложенія безконечнаго произведенія въ рядъ

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-x^n) = \sum(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}$$

гдѣ знакъ $\sum$ распространяется на всѣ величины m, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, вывелъ, взявъ дифференціалъ логариѳма обѣихъ частей, слѣдующую замѣчательную формулу для выраженія $\int(a)$ суммы дѣлителей:

$$\int(a) = \sum(-1)^{m+1}\int\left(a - \frac{3m^2 \pm m}{2}\right) = \int(a-1) +$$
$$+ \int(a-2) - \int(a-5) - \int(a-7) + \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

Рядъ этотъ нужно продолжать до тѣхъ поръ, пока подъ знакомъ $\int$ будутъ положительныя количества. Если a будетъ вида $\frac{3m^2 \mp m}{2}$, то въ немъ нужно величину $\int(o)$ замѣнить черезъ a.

Изъ этого выраженія для $\int(a)$ не трудно вывести выраженіе для $\sigma(a)$. Дѣйствительно, замѣнивъ въ (26) a черезъ $a-1$, $a-2$, . . . 3, 2, 1 и сложивъ полученные ряды, находимъ формулу

$$\sigma(a) = \sigma(a-1) + \sigma(a-2) - \sigma(a-5) - \sigma(a-7) + \ldots$$

$$+ \sum (-1)^{m+1} \frac{3m^2 \mp m}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

гдѣ $\sigma(o) = a$, если a вида $\dfrac{3m^2 \mp m}{2}$.

Весьма важно было бы, если бы формула (27), представляющая такую замѣчательную связь между чисто числовыми функціями, могла быть выведена одними числовыми пріемами безъ помощи разложенія безконечныхъ произведеній въ безконечные ряды.

Функція $\sigma(a)$ встрѣчается въ коеффиціентахъ при разложеніи по степенямъ x ряда

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \sigma(p)\, x^p$$

Изъ формулы (27) вытекаетъ выраженіе $\int(a)$ по $\sigma(a)$

$$\int(a) = \sigma(a-1) - \sigma(a-5) - \sigma(a-7) + \ldots$$

$$\ldots + \sum (-1)^{m+1} \frac{3m^2 \mp m}{2}.$$

§ 12.

Формулы, опредѣляющія число паръ корней и первый законъ числового тожества, примутъ совершенно другой видъ для неопредѣленнаго уравненія

$$z + \psi x - \psi_1 y = n,$$

гдѣ ψx и $\psi_1 y$ возрастающія функціи, имѣющія положительныя значенія для $x = 1$, $y = 1$. Это уравненіе имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, если z получаетъ положительныя, а x и y цѣлыя и положительныя значенія, но, если y будетъ получать только значенія, заключающіяся въ рядѣ натуральныхъ чиселъ $\Big[u\Big]_1^k$, то число рѣшеній будетъ ограничено и соотвѣтствующія значенія x могутъ заключаться только въ рядѣ натуральныхъ чиселъ $\Big[u\Big]_1^{\mathrm{E}(n+\psi_1 k)}$. Измѣняя y, не трудно видѣть, что всѣ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія $z+\psi x-\psi_1 y=n$ будутъ тѣже, что и рѣшенія системы уравненій

$$z+\psi x=n+\Big[\psi u\Big]_1^k$$

Число же рѣшеній N_1 этой системы выражается формулою

$$\mathrm{N}_1=\sum_{u=1}^{u=k}\mathrm{E}\varphi\,(n+\psi_1 u)$$

Измѣняя x, не трудно видѣть, что рѣшенія уравненія $z+\psi x-\psi_1 y=n$ будутъ тѣже, что и рѣшенія системы

$$z+\Big[\psi u\Big]_1^{\mathrm{E}\varphi\,(n+\psi_1 k)}-\psi_1 y=n\quad\ldots\ldots\quad(g)$$

Пока перемѣнное x измѣняется въ этой системѣ въ предѣлахъ отъ 1 до $\theta=\mathrm{E}\varphi n$, перемѣнное y можетъ получать всѣ значенія отъ 1 до k, и слѣдовательно число рѣшеній первыхъ θ уравненій этой системы будетъ выражаться формулою $\theta.\ k=k\mathrm{E}\varphi n$. Для случая же, когда x получаетъ значеніе

$\tau > \theta$, значенія перемѣннаго y, кромѣ условія быть не болѣе k, ограничиваются еще условіемъ

$$\psi(\tau) - \psi_1 y \gtreqless n,$$

вытекающимъ изъ того положенія, что z получаетъ только положительныя значенія. Неравенство это ограничиваетъ значенія перемѣннаго y условіемъ

$$y \gtreqless \varphi_1(\psi\tau - n)$$

поэтому всякій разъ, когда $x = \tau > \mathrm{E}\varphi n$, перемѣнное y не можетъ имѣть тѣхъ цѣлыхъ значеній, которыя $< \varphi_1(\psi\tau - n)$, то есть число соотвѣтствующихъ значеній y будетъ или $k - \mathrm{E}\varphi_1(\psi\tau - n)$, если $\varphi_1(\psi\tau - n)$ число не цѣлое, или $k + 1 - \mathrm{E}\varphi_1(\psi\tau - n)$, если $\varphi_1(\psi\tau - n)$ число цѣлое. Означивъ вообще чрезъ $\text{ц}\Big[\varphi u\Big]_a^k$ сколько разъ функція φu бываетъ цѣлымъ числомъ при измѣненіи u отъ a до k включительно, мы можемъ величину N_1, опредѣляющую число рѣшеній системы (g), выразить уравненіемъ

$$N_1 = k\mathrm{E}\varphi n + \sum_{u=1+\mathrm{E}\varphi n}^{u=\mathrm{E}\varphi(n+\psi_1 k)} (k - \mathrm{E}\varphi_1(\psi u - n)) \text{ или}$$

$$N_1 = k\mathrm{E}\varphi(n + \psi_1 k) - \sum_{u=1+\mathrm{E}\varphi n}^{u=\mathrm{E}\varphi(n+\psi_1 k)} \mathrm{E}\varphi_1(\psi u - n) + \Delta,$$

$$\text{гдѣ } \Delta = \text{ц}\Big[\varphi_1(\psi u - n)\Big]_{u=1+\mathrm{E}\varphi n}^{u=\mathrm{E}\varphi(n+\psi_1 k)}$$

Сравнивая два выраженія для N_1, мы получимъ *первый законъ числовыхъ тожествъ* для уравненія $z + \psi x - \psi_1 y = n$ въ формѣ

$$(\mathrm{III})\ \sum_{u=1}^{u=k} \mathrm{E}\varphi\,(n+\psi_1 u) + \sum_{u=1+\mathrm{E}\varphi n}^{u=\mathrm{E}\varphi\,(n+\psi_1 k)} \mathrm{E}\varphi_1\,(\psi u - n) = k\mathrm{E}\varphi(n+\psi_1 k) + \Delta$$

Формула эта для уравненія $z + 3x - 5y = 17$, гдѣ $\psi x = 3x$,

$\varphi x = \frac{x}{3}$, $\psi_1 y = 5y$, $\varphi_1 y = \frac{y}{5}$, $n = 17$, принимаетъ видъ

$$\sum_{u=1}^{u=8} \mathrm{E}\,\frac{17+5u}{3} + \sum_{u=6}^{u=19} \mathrm{E}\,\frac{3u-17}{5} = 8.19 + \text{ц}\left[\frac{3u-17}{5}\right]_{u=6}^{u=19} =$$

$$= 8.19 + 3.$$

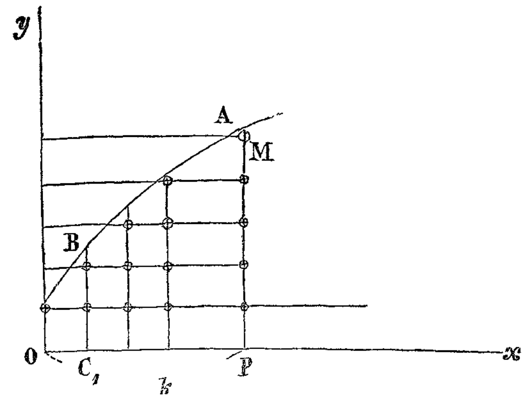
Для уравненія $z + 2x^2 - 3y^2 = 9$ и $k = 8$ формула даетъ

$$\sum_{1}^{8} \mathrm{E}\sqrt{\frac{9+2u^2}{2}} + \sum_{u=3}^{u=10} \mathrm{E}\sqrt{\frac{2u^2-9}{3}} = 8.10, \text{ ибо } \Delta = 0.$$

Эта общая формула (III) числовыхъ тожествъ можетъ послужить точно также для рѣшенія соотвѣтствующихъ вопросовъ о числѣ и суммѣ цыфръ, содержащихся въ рядѣ чиселъ, идущихъ по извѣстнымъ законамъ. Разбирая подобный вопросъ съ достаточною полнотою въ предшествующихъ параграфахъ, я считаю лишнимъ останавливаться долѣе на немъ.

§ 13.

Если $y = \psi x$ есть уравненіе кривой, то ψk выражаетъ величину ординаты, соотвѣтствующей абсциссѣ k, а $\mathrm{E}\psi k$ число точекъ, помѣщающихся на ординатѣ $\psi k = \mathrm{AP}$ и находящихся другъ отъ друга въ разстояніи, равномъ единицѣ. Остатокъ $\mathrm{AM} = \psi k - \mathrm{E}\psi k$ всегда менѣе единицы. Означимъ величину этого остатка чрезъ $\mathrm{O}\psi k$.



Черт. 1.

Числовое выраженіе $E\psi 1 + E\psi 2 + E\psi 3 + \ldots + E\psi k$ означаетъ число точекъ, помѣщающихся въ криволинейной площади BCAP, считая тутъ и точки на BC и AP и полагая $OP = k$.

Это же выраженіе опредѣляетъ и сумму частей ординатъ прямолинейныхъ, считая эти части отъ оси x до послѣдней верхней точки, лежащей на ординатѣ. Замѣнивъ въ числовомъ выраженіи

$$R(n) = E\psi 1 + E\psi 2 + E\psi 3 + \ldots + E\psi(n)$$

каждый членъ $E\psi K$ его величиною $E\psi K = \psi K - O\psi K$, получимъ

$$R(n) = \sum_1^n \psi u - \sum_1^n O\psi u \quad \text{или}$$

$$\sum_{u=1}^{u=n} E\psi u = \sum_1^n \psi u - \sum_1^n O\psi u$$

Такимъ образомъ, замѣнивъ $\sum_1^n E\psi u$ чрезъ $\sum_1^n \psi u$, мы сдѣлаемъ ошибку въ опредѣленіи первой суммы на величину $\sum_{1}^{n} \mathrm{O}\psi u < n$. Ошибку, не превосходящую n, будемъ называть ошибкою порядка n.

Величину $\sum_{1}^{n} \psi u$ можно выразить по теоремѣ Ейлера. Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ числовую сумму $\sum_{1}^{n} \mathrm{E}\psi u$ можно выразить помощію меньшаго числа числовыхъ членовъ и вѣроятная ошибка будетъ менѣе, при опредѣленіи величины $\sum_{1}^{n} \mathrm{E}\psi u$, помощію замѣны числовой суммы соотвѣтствующею суммою по конечнымъ разностямъ.

Первый законъ числового тожества, выведенный въ предшествующихъ §§ показываетъ, когда и при какихъ случаяхъ это возможно.

Если найдена величина выраженія $\sum_{1}^{n} \mathrm{E}\psi u$, то можно опредѣлить и величину выраженія $\sum_{1}^{n} \mathrm{O}\psi u$, и раздѣливъ его на n, найдемъ среднее значеніе остатка, равное $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \mathrm{O}\psi u$.

Сдѣлаемъ приложеніе нашихъ формулъ къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ.

Положимъ $\psi x = \sqrt{x}$ и опредѣлимъ

$S(n) = \sum\limits_1^n E\sqrt{u}$. На основаніи закона числового тожества

$$S(n) = \sum_1^n E\sqrt{u} = (n+1)E\sqrt{n} - \sum_1^{E\sqrt{n}} u^2 = (n+1)E\sqrt{n} - \frac{E\sqrt{n}(1+E\sqrt{n})(1+2E\sqrt{n})}{1.\ 2.\ 3.}.$$

Но съ другой стороны $\sum\limits_1^n E\sqrt{u} = \sum\limits_1^n \sqrt{u} - \sum\limits_1^n O\sqrt{u}.$

Величина $\sum u$ найдется по теоремѣ Ейлера.

$$\sum u = \int u dx + A_0 u + A_1 u' + A_2 u'' + A_3 u''' + \ldots$$

гдѣ коеффиціенты A_0, A_1, $A_2 \ldots$ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$A_0 + \frac{1}{2} = 0$$

$$A_1 + \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2.\ 3} = 0$$

$$A_2 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2.\ 3}A_0 + \frac{1}{2.\ 3.\ 4} = 0.$$

. . . .

$$\sum_1^n \sqrt{u} = \sqrt{n} + \int \sqrt{u}\, du + \left[A_0\sqrt{u}\right] + \left[\frac{A_1}{2\sqrt{u}}\right] + \ldots =$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{n}+\frac{2n\sqrt{n}}{3}+k,$$

гдѣ величина k незначительна при n довольно большомъ.

Отсюда находимъ

$$\sum_{1}^{n}\mathrm{O}\sqrt{u}=\left[\frac{2n\sqrt{n}}{3}-n\mathrm{E}\sqrt{n}+\frac{1}{3}\left(\mathrm{E}\sqrt{n}\right)^{3}\right]+\frac{(\mathrm{E}\sqrt{n})^{2}}{2}+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{5}{6}\mathrm{E}\sqrt{n}\right)+k$$

Если мы будемъ останавливать рядъ на величинѣ $n=\pi^{2}$, полномъ квадратѣ, то

$$\sum_{1}^{\pi^{2}}\mathrm{O}\sqrt{u}=\frac{\pi^{2}}{2}-\frac{1}{3}\pi+k,$$

откуда средняя величина остатка

$$\frac{1}{\pi^{2}}\sum_{1}^{\pi^{2}}\mathrm{O}\sqrt{u}=\frac{\pi^{2}}{2}-\frac{1}{3}\pi+\frac{k}{\pi^{2}}<\frac{1}{2}$$

показываетъ, что въ рядѣ $\left[\mathrm{O}\sqrt{u}\right]_{1}^{\pi^{2}}$ членовъ менѣе половины гораздо болѣе членовъ болѣе $\frac{1}{2}$.

Изъ другихъ соображеній можно вывести, что число членовъ ряда $\left[\sqrt{u}\right]_{1}^{\pi^{2}}$, дающихъ въ остаткѣ $<\frac{1}{2}$, будетъ $\frac{\pi^{2}+\pi}{2}$, а число членовъ, дающихъ въ остаткѣ болѣе $\frac{1}{2}$, будетъ $\frac{\pi^{2}-\pi}{2}$.

Если $\psi x = \sqrt[3]{x}$, то, на основанiи закона числовыхъ тожествъ, имѣемъ

$$\sum_{1}^{n} \mathrm{E}\sqrt[3]{x} = (n+1)\,\mathrm{E}\sqrt[3]{n} - \left(\frac{\mathrm{E}\sqrt[3]{n}}{4} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}\sqrt[3]{n}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\left(\mathrm{E}\sqrt[3]{n}\right)^2\right)$$

По теоремѣ Ейлера

$$\sum_{1}^{n} \sqrt[3]{x} = \frac{3}{4} n \sqrt[3]{n} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{n} + k,$$

откуда, принимая въ соображенiе формулу

$$\sum_{1}^{n} \sqrt[3]{x} = \sum_{1}^{n} \mathrm{E}\sqrt[3]{x} + \sum_{1}^{n} \mathrm{O}\sqrt[3]{x}\text{, имѣемъ:}$$

$$\sum_{1}^{n} \mathrm{O}\sqrt[3]{x} = \left(\frac{3}{4} n\sqrt[3]{n} - n\,\mathrm{E}\sqrt[3]{n} + \left(\frac{\mathrm{E}\sqrt[3]{n}}{4}\right)^4\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}\sqrt[3]{n}\right)^3 +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\mathrm{E}\sqrt[3]{n}\right)^2 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{n} - \mathrm{E}\sqrt[3]{n} + k$$

Полагая $n = \pi^3$, полному кубу цѣлаго числа, находимъ

$$\sum_{1}^{\pi^3} \mathrm{O}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}\pi^3 + \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2}\pi + k\text{, откуда средняя величина}$$

остатка будетъ

$$\frac{1}{\pi^3}\sum_{1}^{\pi^3} \mathrm{O}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} - \frac{3}{2\pi^2} + \frac{k}{\pi^3} > \frac{1}{2}$$

Изъ этой формулы заключаемъ, что въ рядѣ $\left[\sqrt[3]{u}\right]_1^{\pi^3}$ остатковъ болѣе половины будетъ гораздо болѣе, нежели остатковъ, меньшихъ половины. Можно для степеней корней выше 3-й вывести тоже заключеніе, что и для третьей.

Такъ какъ для корней второй и третьей степени числа остатковъ идутъ въ совершенно обратномъ порядкѣ, то можно поставить вопросъ, нѣтъ ли между $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ такого показателя α, чтобы число членовъ, дающихъ въ остаткѣ $<\frac{1}{2}$, было столько же, сколько членовъ, дающихъ въ остаткѣ болѣе $\frac{1}{2}$.

Для точнаго опредѣленія числа членовъ ряда $\left[\sqrt[m]{u}\right]_1^{(n+1)^m}$, для которыхъ $O\sqrt[m]{u}<\frac{1}{2}$ и $O\sqrt[m]{u}>\frac{1}{2}$ нужно принять въ соображеніе, что вообще въ промежуткѣ между n^m и n^{m+1} число членовъ, дающихъ $O\sqrt{u}<\frac{1}{2}$, будетъ

$$E\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^m-n^m\right]=E\left(\frac{m}{2}n^{m-1}+\frac{m.m-1}{1.2.}\,\frac{n^{m-2}}{2^2}+\ldots\right)$$

Число членовъ, дающихъ $O\sqrt{u}<\frac{1}{2}$ для промежутка между 1 и $(n+1)^m$, будетъ опредѣляться формулою

$$N=\sum_1^n E\left(\frac{m}{2}u^{m-1}+\frac{m.m-1}{1.2}\,\frac{u^{m-2}}{2^2}+\ldots\right),$$

не считая въ числѣ этихъ членовъ полныхъ m-хъ степеней, которыхъ $n+1$.

Для случая $m = 2$, мы будемъ имѣть

$$\sum_1^n E\left(u + \frac{1}{4}\right) = \sum_1^n Eu = \frac{n.(n+1)}{12}.$$

§ 14.

Хотя числовыя функціи, разсматриваемыя въ числовомъ исчисленіи, не подчиняются никакому аналитическому закону и потому не могутъ быть представлены вполнѣ точно помощію аналитическихъ выраженій и возрастаютъ совершенно неправильно, однако въ средней ихъ величинѣ замѣчается стремленіе все къ большей и большей правильности. Дѣйствительно, по мѣрѣ того какъ число членовъ числового ряда берется все больше и больще, средняя величина ихъ суммы дѣлается все болѣе и болѣе способною выражаться помощію опредѣленныхъ аналитическихъ выраженій. Эти опредѣленныя аналитическія формулы служатъ такимъ образомъ какъ бы ассимптотическими выраженіями, къ которымъ числовыя выраженія все болѣе и болѣе подходятъ. Такое ассимптотическое свойство аналитическихъ выраженій указано Лежандромъ въ его формулѣ для числа первыхъ чиселъ, Гауссомъ въ его изслѣдованіяхъ о числѣ квадратичныхъ формъ для даннаго опредѣлителя; Леженъ-Дирикле останавливался на этихъ изысканіяхъ еще болѣе, Чебышевъ въ своихъ изящныхъ изслѣдованіяхъ о числѣ первыхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго предѣла, касался тоже этого вопроса.

Такимъ образомъ функція $\rho(n)$, выражающая число дѣлителей числа n. измѣняется весьма неправильно. Если же мы возьмемъ выведенное выше числовое выраженіе $\varphi(n) = \sum_1^n \rho(u)$, то оно съ возрастаніемъ n стремится все болѣе и болѣе къ опредѣленному аналитическому выраженію, которое и будетъ *ассимптотическимъ*.

Дѣйствительно, выраженіе

$$\varphi(n) = \sum_{u=1}^{u=n} E\frac{n}{u} = n\sum_{1}^{n}\frac{1}{u} - \sum_{1}^{n} O\frac{n}{u}.$$

съ ошибкою порядка n можно принять равнымъ

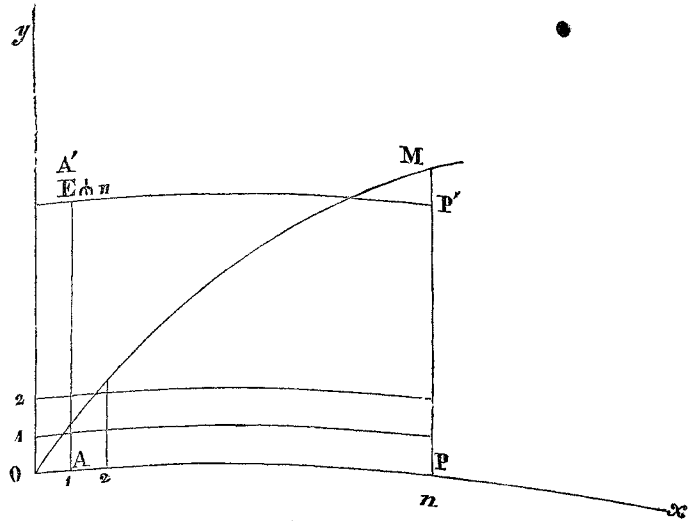
$$\varphi(n) = n\sum_{1}^{n}\frac{1}{u} = n\left(log n + K + \frac{1}{2n} + \dots\right)$$

гдѣ $K = 0{,}5772\dots$

Такъ какъ, замѣняя $\sum_{u=1}^{u=n} E\frac{n}{u}$ чрезъ $\sum_{u=1}^{u=n}\frac{n}{u}$, мы совершимъ ошибку порядка n, то можемъ въ разложеніи по теоремѣ Ейлера удержать только членъ $nlog n$ и выраженіе $log(n)$ будетъ тѣмъ ассимптотическимъ выраженіемъ, къ которому приближается функція $\frac{\varphi(n)}{n}$ съ возрастаніемъ n, и уравненіе $\sum_{1}^{n}\rho(u) = nlog(n)$ точно до величины порядка n. Рѣшеніе вопросовъ, имѣющихъ связь съ выраженіемъ $\sum_{u=1}^{u=n} E\left(\frac{n}{u}\right)$, будетъ зависѣть единственно отъ болѣе точнаго опредѣленія этого количества. Для этого же необходимо надъ этими и подобными ему выраженіями совершать иногда преобразованія, которыя давали бы возможность имѣть дѣло съ меньшимъ числомъ членовъ, зависящихъ отъ знака E.

Если $y = \psi x$, гдѣ $\psi(x)$ есть функція возрастающая, выражаетъ уравненіе кривой, проходящей чрезъ начало координатъ, то

$$S_1 = E\psi 1 + E\psi 2 \dots + E\psi n$$



Черт. 2.

представляетъ число точекъ, лежащихъ на ординатахъ 1, 2, 3, 4,.... n въ разстояніяхъ, равныхъ единицѣ. Если сочтемъ точки, находящіяся на линіяхъ, проведенныхъ параллельно оси x въ разстояніяхъ другъ отъ друга, равныхъ единицѣ, и лежащія въ промежуткѣ между осью ординатъ, кривою OM, начиная съ первой абсциссы и оканчивая абсциссой съ номеромъ $E\psi n = PP'$, тогда число точекъ на абсциссахъ будетъ выражаться формулою

$$S_2 = \sum_{1}^{E\psi n} E\varphi u.$$

Если сложимъ S_1 съ S_2, то эта сумма будетъ означать число точекъ, лежащихъ въ прямоугольннкѣ $AA'PP'$ съ прибавочнымъ членомъ.

Этотъ прибавочный членъ зависитъ отъ того, что точки, лежащія на кривой, вошли въ общій счетъ два раза, поэтому этотъ прибавочный членъ, выражая число точекъ, лежащихъ на самой кривой, означаетъ въ тоже время, сколько разъ функція $\psi(x)$ при измѣненіи x отъ 1 до n, или функція ϕu, въ промежуткѣ измѣненія u отъ 1 до $E\psi(n)$ чрезъ цѣлыя значенія, равнялися цѣлому числу. Означивъ это число чрезъ $ц\left[\psi u\right]_1^n$ и принявъ въ соображеніе, что число точекъ, лежащихъ въ прямоугольникѣ $AA'PP'$, будетъ $nE\psi(n)$, мы получимъ формулу

$$(IV)\quad \sum_1^n E\psi u + \sum_1^{E\psi n} E\phi u = nE\psi n + ц\left[\psi u\right]_1^n.$$

Имѣя эту формулу, мы можемъ рѣшать вопросы о взаимномъ преобразованіи первой или второй суммы, смотря потому, которая изъ нихъ представляетъ вѣроятность наименьшей ошибки при замѣнѣ суммы, зависящей отъ E, суммою по конечнымъ разностямъ. Формула (IV) и формула числового тожества для уравненія $z + \psi x - \psi_1 y = n$ совершенно тѣже по характеру образованія

Замѣнивъ въ (IV) n чрезъ a, получимъ

$$\sum_1^a E\psi u + \sum_1^{E\psi a} E\psi u = aE\psi a + ц\left[\psi u\right]_1^a$$

Вычитая это уравненіе изъ (IV), получаемъ

$$\sum_{a+1}^n E\psi u + \sum_{1+E\psi(a)}^{E\psi(n)} E\phi u = nE\psi(n) - aE\psi(a) + ц\left[\psi u\right]_{a+1}^n.$$

Членъ $ц\left[\psi u\right]_1^n$, входящій въ выраженіе формулы (IV), можетъ быть исключенъ помощію простого преобразованія. Дѣйствительно, на основаніи этой формулы имѣемъ

$$\sum_{1}^{E\psi n} E\varphi u + \sum_{1}^{E\varphi E\psi n} E\psi u = E\psi n \,.\, E\varphi E\psi n + \text{Ц}_{1}^{E\varphi n}\Big[\psi u\Big]$$

Такъ какъ $\text{Ц}_{1}^{n}[\psi u] = \text{Ц}_{1}^{E\psi n}[\varphi u]$, то, послѣ вычитанія второй формулы изъ первой, имѣемъ:

$$\sum_{1}^{n} E\psi u = \sum_{1}^{E\varphi E\psi n} E\psi u + E\psi n\,(n - E\varphi E\psi n) \qquad (28)$$

Выражая членъ $\sum_{1}^{E\varphi E\psi n} E\psi u$ подобнымъ же образомъ по формулѣ (28), мы можемъ получить такую формулу разложенія въ рядъ величины

$$\sum_{1}^{n} E\psi u = E\psi(n)\;(n - E\varphi E\psi n) +$$

$$E\psi E\varphi E\psi n\,(E\varphi E\psi n - E\varphi E\psi E\varphi E\psi n) + \;.\;.\;.\;.\;. \qquad (29).$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ каждый изъ символовъ распространяется на все количество, стоящее послѣ него, такъ что вмѣсто $E\psi E\varphi E\psi n$ мы должны бы были писать

$$E\Big[\psi\{E(\varphi\{E[\psi(n)]\})\}\Big].$$

Означивъ чрезъ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m, \mu_{m+1}, \ldots n_1, n_2, .\,.\, n_m, n_{m+1}.$ количества, связанныя уравненіями

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 = E\psi(n) & n_1 = E\varphi\mu_1 = E\varphi E\varphi n \\
\mu_2 = E\psi(n_1) & n_2 = E\varphi\mu_2 \\
\mu_3 = E\psi(n_2) & .\;.\;.\;.\;.\;. \\
.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & \\
\mu_{m+1} = E\psi(n_m) & n_{m+1} = E\varphi\mu_{m+1}
\end{array}$$

мы рядъ (29) можемъ представить въ формѣ

$$\sum_{1}^{n} \mathrm{E}\psi u = \mu_1(n-n_1) + \mu_2(n_1-n_2) + \mu_3(n_2-n_3) + \ldots$$

$$= \sum_{u=1}^{u=\infty} \mu_u(n_{u-1}-n_u). \ldots \qquad (30)$$

По формуламъ (29) и (30) можно опредѣлять послѣдовательно

$\sum_{1}^{n} \mathrm{E}\psi u$ по $\sum_{1}^{n_1} \mathrm{E}\psi u$, гдѣ $n_1 = \mathrm{E}\varphi\mathrm{E}\psi n < n$, ибо $\mathrm{E}\psi n < \psi n$ и $\varphi\mathrm{E}\psi n < n$.

Только въ томъ случаѣ, когда $\psi(n)$ есть цѣлое число $\mathrm{E}\psi(n) = \psi(n)$, $\varphi\mathrm{E}\psi n = n$, верхній предѣлъ n_1 не понижается и это преобразованіе не ведетъ къ цѣли; но въ такомъ случаѣ можно по той же формулѣ преобразовывать $\sum_{1}^{n-1} \mathrm{E}\psi u$, ибо $\sum_{1}^{n} \mathrm{E}\psi u = \mathrm{E}\psi n + \sum_{1}^{n=1} \mathrm{E}\psi u$. Въ примѣръ приложенія предыдущей формулы вычислимъ $\sum_{1}^{100} \mathrm{E}u^{\frac{2}{7}}$

$$\sum_{1}^{100} \mathrm{E}u^{\frac{2}{7}} = \sum_{1}^{46} \mathrm{E}u^{\frac{2}{7}} + 3\,(100-46)$$

$$\sum_{1}^{46} \mathrm{E}u^{\frac{2}{7}} = \sum_{1}^{11} \mathrm{E}u^{\frac{2}{7}} + 2\,(46-11)$$

$$\sum_{1}^{11} \mathrm{E} u^{\frac{2}{7}} = \sum_{1}^{1} \mathrm{E} u^{\frac{2}{7}} + 1\,(11-1) \text{ откуда}$$

$$\sum_{1}^{100} \mathrm{E} u^{\frac{2}{7}} = 3\,(100-46) + 2\,(46-11) + 1\,(11-1) + 1 = 243.$$

§ 15.

Если мы имѣемъ сравненіе первой степени

$$ax \equiv u \quad (\text{мод}\, p),$$

гдѣ $a < p$, то, замѣняя послѣдовательно x черезъ $1, 2, 3 \ldots n$, и приводя u къ величинѣ наименьшаго положительнаго вычета, будемъ имѣть послѣдовательно сравненія:

$$a \equiv r_1 \quad (\text{мод.}\ p)$$
$$2a \equiv r_2 \quad (\text{мод.}\ p)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$na \equiv r_n \quad (\text{мод.}\ p)$$

Эти сравненія представляютъ по способу своего образованія ничто иное, какъ символическое изображеніе числовыхъ уравненій

$$a = p_1 + p\mathrm{E}\frac{a}{p}$$

$$2a = p_2 + p\mathrm{E}\frac{2a}{p}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$na = r_n + p\mathrm{E}\frac{na}{p}$$

Означивъ сумму первичныхъ вычетовъ формулы ax при измѣненіи x отъ 1 до n чрезъ $\mathrm{S}\,(n)$, будемъ имѣть по сложеніи этихъ уравненій.

$$\frac{n(n+1)a}{1.2} = S(n) + p\sum_1^n E\frac{au}{p}$$

Количество $\sum_1^n E\frac{au}{p}$ опредѣлится изъ общей формулы (IV), если положимъ въ ней $\psi u = \frac{au}{p}$.

$$\sum_1^n E\frac{au}{p} + \sum_1^{E\frac{an}{p}} E\frac{pu}{a} = nE\frac{na}{p} + \text{Ц}\left[\frac{au}{p}\right]_1^n$$

Для случая, когда p простое число и $n < p$, $\text{Ц}\left[\frac{au}{p}\right]_1^n = 0$

Полагая $p = a\rho_1 + a_1 = aE\frac{p}{a} + a_1$, гдѣ $a < a_1$, имѣемъ

$$\sum_1^n E\frac{au}{p} + \rho_1\sum_1^{E\frac{na}{\rho_1}} u + \sum_1^{E\frac{na}{p}} E\frac{a_1 u}{a} = nE\frac{na}{p} \text{ или}$$

$$\sum_1^n E\frac{au}{p} = E\frac{na}{p}\left[n - \rho_1\frac{\left(1 + E\frac{na}{p}\right)}{1.2}\right] + \sum_1^{E\frac{na}{p}} E\frac{a_1 u}{a}$$

Замѣняя a_1 чрезъ $p - aE\frac{p}{a}$, ρ_1 чрезъ $E\frac{p}{a}$, имѣемъ

$$\sum_1^n E\frac{au}{p} = E\frac{na}{p}\left[n - \frac{\left(1 + E\frac{na}{p}\right)}{1.2}E\frac{p}{a}\right] - \sum_1^{E\frac{na}{p}} E\frac{\left(p - aE\frac{p}{a}\right)u}{a}$$

Означивъ чрезъ

$$
\begin{array}{lll}
a_1, & n_1, & \rho_1 \\
a_2, & n_2, & \rho_2 \\
a_3 & ,n_3, & \rho_3 \\
\cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
a_m, & n_m, & \rho_m,
\end{array}
$$

количества, въ которыхъ

$$a_1 = p - a\,\mathrm{E}\frac{p}{a}, n_1 = \mathrm{E}\frac{na}{p}, \ \rho_1 = \mathrm{E}\frac{p}{a}$$

$$a_2 = a - a_1\,\mathrm{E}\frac{a}{a_1}, \ n_2 = \mathrm{E}\frac{n_1 a_1}{a}, \ \rho_2 = \mathrm{E}\frac{a}{a_1}$$

$$a_3 = a_1 - a_2\,\mathrm{E}\frac{a_1}{a_1}, \ n_3 = \mathrm{E}\frac{n_2 a_2}{a}, \ \rho_3 = \mathrm{E}\frac{a_1}{a_2}$$

. . . .

$$a_m = a_{m-2} - a_{m-1}\,\mathrm{E}\frac{a_{m-2}}{a_{m-1}}, n_m = \mathrm{E}\frac{n_{m-1} a_{m-1}}{a_{m-2}},$$

$$\rho_m = \mathrm{E}\frac{a_{m-2}}{a_{m-1}},$$

можно помощію послѣдовательныхъ преобразованій легко вычислить $\sum_1^n \mathrm{E}\frac{au}{p}$. Зная $\sum_1^n \mathrm{E}\frac{au}{p}$, не трудно найти и $\mathrm{S}(n)$.

Такъ, при опредѣленіи $\sum_1^{15} \mathrm{E}\frac{13u}{17}$ имѣемъ

$$
\begin{array}{lll}
a = 13, & n = 15, & p = 17 \\
a_1 = 4, & n_1 = 11, & \rho_1 = 1 \\
a_2 = 1, & n_2 = 3, & \rho_2 = 3 \\
a_3 = 0. & n_3 = 0, & \rho_3 = 4
\end{array}
$$

и слѣдовательно

$$\sum_1^{15} \mathrm{E}\frac{13u}{17} = \text{ц}\left[\frac{13u}{17}\right]_1^{15} + 11\,(15-6) - \sum_1^{11}\mathrm{E}\frac{4u}{13}$$

$$\sum_1^{11} \mathrm{E}\frac{4u}{13} = \text{ц}\left[\frac{4u}{13}\right]_1^{11} + 3\left(11 - \frac{(1+3)\,3}{2}\right) - \sum_1^{3}\mathrm{E}\frac{u}{4}$$

Такъ какъ $\text{ц}\left[\frac{13u}{17}\right]_1^{15} = 0$, $\text{ц}\left[\frac{4u}{13}\right]_1^{4} = 0$, $\sum_1^{3}\mathrm{E}\frac{u}{4} = 0$, то и будемъ имѣть

$$\sum_1^{15} \mathrm{E}\frac{13u}{17} = 99 - 15 = 84.$$

Если мы въ основной формулѣ положимъ $n = p - 1$ и $\psi u = \frac{au}{p}$, то она приметъ видъ

$$\sum_1^{p-1}\mathrm{E}\frac{au}{p} + \sum_1^{\mathrm{E}\frac{(p-1)a}{p}}\mathrm{E}\frac{pu}{a} = (p-1)\,\mathrm{E}\,\frac{(p-1)\,a}{p} = (p-1)(a-1),$$

но такъ какъ на основанiи перваго закопа числовычъ тожествъ

$$\sum_1^{p-1}\mathrm{E}\frac{au}{p} = \sum_1^{a-1}\mathrm{E}\frac{pu}{a}\text{, то}$$

$$\sum_1^{p-1}\mathrm{E}\frac{au}{p} = \sum_1^{a-1}\mathrm{E}\frac{pu}{a} = \frac{(p-1)(a-1)}{2}.$$

Извѣстно изъ теоріи чиселъ, что символъ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$ выражается при p простомъ и всякомъ нечетномъ a формулою (*)

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\mathrm{E}\frac{a}{p} + \mathrm{E}\frac{2a}{p} + \mathrm{E}\frac{3a}{p} + \ldots + \mathrm{E}\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}} \quad . \; . \; (h)$$

По основной формулѣ, полагая $\psi u = \frac{au}{p}$, имѣемъ

$$\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\frac{au}{p} + \sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{\frac{1}{2}a(p-1)}{p}} \mathrm{E}\frac{pu}{a} = (p-1)\,\mathrm{E}\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}$$

Для случая, когда a нечетное число и $< p$, имѣемъ

$$\mathrm{E}\frac{\frac{1}{2}a(p-1)}{p} = \mathrm{E}\frac{\frac{(a-1)}{2}p + \frac{p-a}{2}}{p} = \frac{a-1}{2},$$

и символъ Лежандра можетъ быть выраженъ формулою

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2} - \mathrm{E}\frac{p}{a} - \ldots - \mathrm{E}\frac{\frac{1}{2}(a-1)p}{a}} \quad (i)$$

И такъ, если p и q два нечетныхъ, неравныхъ и простыхъ числа и $p > q$, то по первой формулѣ (h)

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{u=1}^{u=\frac{q-1}{2}} \mathrm{E}\frac{pu}{q}} \text{ и повторой} \qquad (\imath)$$

(*) Теорія сравненій Чебышева стр. 74.

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} - \sum\limits_{u=1}^{u=\frac{q-1}{2}} \mathrm{E}\frac{pu}{q}}$$

откуда, по перемноженіи этихъ формулъ, находимъ *законъ взаимности двухъ простыхъ чиселъ*.

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) \text{ или } \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right).$$

Взявъ сравненіе второй степени

$$x^2 \equiv u \text{ (мод. } p),$$

и замѣняя послѣдовательно x чрезъ $1, 2, 3$ до $\frac{p-1}{2}$, мы получимъ рядъ сравненій

$$\left[u^2\right]_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left[r_u\right]_1^{\frac{p-1}{2}} \text{ (мод. } p),$$

въ которомъ r_u наименьшій положительный вычетъ количества u^2 по модулю p.

Сравненія эти прѣдставляютъ символически уравненія

$$\left[u^2\right]_1^{\frac{p-1}{2}} = \left[r_u\right]_1^{\frac{p-1}{2}} + p\left[\mathrm{E}\frac{u^2}{p}\right]_1^{\frac{p-1}{2}}$$

Количества $r_1, r_2 \ldots r_{\frac{p-1}{2}}$ выражаютъ всѣ квадратичные вычеты числа p.

Означивъ сумму ихъ чрезъ S_1, мы, по сложеніи этихъ уравненій, получимъ:

$$\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} u^2 = \mathrm{S}_1 + p \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\,\frac{u^2}{p}, \text{ откуда,}$$

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{1}^{\frac{p-1}{1}} u^2 - p \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\,\frac{u^2}{p} \tag{k}$$

Если бы мы продолжали вышенаписанныя сравненія, то получили бы

$$\left[u^2\right]_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} \equiv \left[r_{p-u}\right]_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} \quad (\text{мод. } p)$$

сравненія, соотвѣтствующія уравненіямъ

$$\left[u^2\right]_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} = \left[r_{p-u}\right]_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} + p\left[\mathrm{E}\frac{u^2}{p}\right]_{\frac{p+1}{2}}^{p-1}.$$

Сложивъ эти уравненія, имѣемъ

$$\sum_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} u^2 = \mathrm{S}_1 + p \sum_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} \mathrm{E}\,\frac{u^2}{p}, \quad \text{откуда}$$

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} u^2 - p \sum_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} \mathrm{E}\,\frac{u^2}{p} \tag{l}$$

Сравнивая (k) и (l) двѣ величины для суммы квадратичныхъ вычетовъ, находимъ:

$$\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} u^2 - p\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\,\frac{u^2}{p} = \sum_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} u^2 - p\sum_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} \mathrm{E}\,\frac{u^2}{p},$$

откуда

$$\sum_{\frac{p+1}{2}}^{p-1} \mathrm{E}\,\frac{u^2}{p} - \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \mathrm{E}\,\frac{u^2}{p} = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Сумма неквадратичныхъ вычетовъ S_2 опредѣлится изъ уравненія

$$S_1 + S_2 = \frac{p\,(p-1}{1\,.\,2}$$

Подобнымъ образомъ можно опредѣлить сумму S какихъ угодно вычетовъ по формуламъ, зависящимъ отъ числовыхъ выраженій. Такъ, означивъ чреезъ $\Big[r_u\Big]_1^{p-1}$ наименьшіе положительные вычеты по модулю p выраженій $\Big[\psi u\Big]_1^{p-1}$, мы будемъ имѣть рядъ сравненій

$$\Big[\psi u\Big]_1^{p-1} \equiv \Big[r_u\Big]_1^{p-1} \ (\text{мод. } p),$$

а слѣдовательно и соотвѣтствующихъ числовыхъ уравненій

$$\Big[\psi u\Big]_1^{p-1} = \Big[r_u\Big]_1^{p-1} + p\left[\mathrm{E}\frac{\psi u}{p}\right]_1^{p-1},$$

дающихъ по сложеніи уравненіе

$$\sum_{1}^{p-1}\psi u = \sum_{1}^{p-1} r_u + p\sum_{1}^{p-1} \mathrm{E}\frac{\psi u}{p}, \text{ откуда}$$

$$\mathrm{S} = \sum_{1}^{p-1} r_u = \sum_{1}^{p-1}\psi u - p\sum_{1}^{p-1}\mathrm{E}\frac{\psi u}{p}$$

Если мы имѣемъ рядъ сравненій

$$\Big[a_u\Big]_1^{p-1} \equiv \Big[r_u\Big]_1^{p-1} (\text{мод. } p),$$

въ которыхъ a будетъ первообразнымъ корнемъ числа p, то между вычетами $\Big[r_u\Big]_1^{p-1}$ будутъ заключаться всѣ натуральныя числа отъ 1 до $p-1$. Замѣнивъ эти сравненія соотвѣтствующими числовыми уравненіями и сложивъ ихъ, мы получимъ

$$\frac{a^p - a}{a-1} = \frac{(p-1)p}{2} + p\sum_{1}^{p-1}\mathrm{E}\frac{a^u}{p}, \text{ откуда}$$

$$\sum_{1}^{p-1}\mathrm{E}\frac{a^u}{p} = \frac{a^p - a}{p(a-1)} - \frac{p-1}{2}.$$

Это числовое уравненіе характеризуетъ свойство первообразныхъ корней точно также, какъ и рядъ вышенаписанныхъ сравненій. Такъ какъ по теоремѣ Фермата

$a^{p-1} = 1 + p\,\mathrm{E}\,\dfrac{a^{p-1}}{p}$ и $\mathrm{E}\,\dfrac{a^{p-1}}{p} = \dfrac{a^{p-1}-1}{p}$, то первообразные корни могутъ быть характеризованы уравненіемъ

$$\sum_{1}^{p-2} \mathrm{E}\,\frac{a^{u}}{p} = \frac{a^{p-1}-1}{p\,(a-1)} - \frac{p-1}{2}\,.$$

На основаніи основной формулы

$$\sum_{1}^{p-1} \mathrm{E}\,\frac{a^{u}}{p} + \sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{a^{p-1}}{p}} \mathrm{E}\,\frac{\mathrm{L}(pu)}{\mathrm{L}a} = (p-1)\,\mathrm{E}\,\frac{a^{p-1}}{p} \quad \text{имѣемъ}$$

$$\sum_{1}^{\frac{a^{p-1}-1}{p}} \mathrm{E}\,\frac{\mathrm{L}\,(pu)}{\mathrm{L}\,(a)} = \frac{(p-1)}{p}\,(a^{p-1}-1) + \frac{p\,(p-1)}{2}$$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Второй законъ числовыхъ тожествъ.

§ 16.

Мы вывели въ предшествующей главѣ, что сумма корней неопредѣленнаго уравненія $z+\psi x+\psi_1 y=n$, распространенная на всѣ значенія перемѣннаго x во всѣхъ парахъ, выражалась формулою

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{u=1}^{u=\mathrm{E}\pitchfork\,(n-\psi_1 1)} u\mathrm{E}\pitchfork_1\,(n-\psi u)$$

и такая же сумма для перемѣннаго y формулою

$$\mathrm{S}_2 = \sum_{1}^{\mathrm{E}\pitchfork_1\,(n-\psi 1)} u\mathrm{E}\pitchfork\,(n-\psi_1 u)\,.$$

Суммы эти могутъ быть выражены иначе, если станемъ производить счетъ ихъ иначе. Дѣйствительно, для образованія этой суммы, соотвѣтствующей перемѣнному x, мы производили счетъ того числа паръ, для которыхъ x равнялось 1, 2, 3.... и т. д; но ту же сумму можно получить, производя счетъ такимъ образомъ: если $y=1$, то x получаетъ всѣ значенія, заключающіяся въ рядѣ натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $E\varphi(n-\psi_1 1)$, для $y=2, 3\ldots\ k\ldots$, x получаетъ всѣ значенія, содержащіяся въ рядахъ натуральныхъ чиселъ, начинающихся съ 1 и оканчивающихся высшими предѣлами $E\varphi(n-\psi_1 2)$, $E\varphi(n-\psi_1 3)$, $E\varphi(n-\psi_1 4)\ldots\ldots$ $E\varphi(n-\psi_1 k)$ и т. д; слѣдовательно, для опредѣленія суммы всѣхъ значеній x во всѣхъ парахъ, мы должны найти сумму всѣхъ ниже написанныхъ прогрессій:

$$\begin{array}{l}
1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ E\varphi(n-\psi_1 1)\\
1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ E\varphi(n-\psi_1 2)\\
1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ E\varphi(n-\psi_1 3)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ E\varphi(n-\psi_1 k)
\end{array}$$

Сумма эта будетъ выражаться формулою

$$S_1=\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} u+\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 2)} u+\ldots.+\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 k)} u+\ldots.+\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1(E\varphi_1(n-\psi 1)))} u$$

или

$$S_1=\frac{1}{2}\Big[E^2\varphi(n-\psi_1 1)+E^2\varphi(n-\psi_1 2)+\ldots+E^2\varphi(n-\psi_1 k)+\ldots$$
$$\ldots.+E^2\varphi(n-\psi_1(E\varphi_1(n-\psi 1)))\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\Big[E\varphi(n-\psi_1 1)+E\varphi(n-\psi_1 2)+\ldots+E\varphi(n-\psi_1 k)+\ldots$$
$$\ldots+E\varphi\,[n-\psi_1(E\varphi_1(n-\psi 1))]\Big]$$

Сравнивая два выраженія для S_1, мы находимъ одну изъ частныхъ формулъ 2-го закона числовыхъ тожествъ:

$$\sum_{u=1}^{u=E\varphi(n-\psi_1 1)} uE\varphi_1(n-\psi u)=\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=E\varphi_1(n-\psi 1)} E^2\varphi(n-\psi_1 u)+\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=E\varphi_1(n-\psi 1)} E\varphi(n-\psi_1 u)$$

Помноживъ обѣ части уравненія на 2, и принявъ въ соображеніе первый законъ числовыхъ тожествъ,

$$\sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} E\varphi(n-\psi_1 u)=\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} E\varphi_1(n-\psi u),$$

мы получимъ окончательно формулу

$$\sum_{u=1}^{u=E\varphi(n-\psi_1 1)} (2u-1)\,E\varphi_1(n-\psi u)=\sum_{u=1}^{u=E\varphi_1(n-\psi 1)} E^2\varphi(n-\psi_1 u),$$

Помощію подобнаго же рода соображеній не трудно вывести, что частный случай 2-го закона числовыхъ тожествъ для перемѣннаго y приметъ форму

$$\sum_{u=1}^{u=E\varphi_1(n-\psi 1)} (2u-1)\,E\varphi(n-\psi_1 u)=\sum_{u=1}^{u=E\varphi(n-\psi_1 1)} E^2\varphi_1(n-\psi u)$$

При опредѣленіи суммы квадратовъ корней, соотвѣтствующихъ перемѣнному x, рядомъ съ выраженіемъ

$$S_2=\sum_{u=1}^{u=E\varphi(n-\psi_1 1)} u^2\,E\varphi_1(n-\psi u)$$

мы бы имѣли выраженіе

$$S_2=\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} u^2+\sum_{1}^{E\varphi(n-\varphi_1 2)} u^2+\ldots+\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 E\varphi_1(n-\psi 1))} u^2$$

и сравнивая ихъ, получимъ 2-й законъ числовыхъ тожествъ для этого случая въ формѣ

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} u^2 \, E\phi_1\,(n-\psi u) = \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} u^2 + \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 2)} u^2 + \ldots + \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 k)} u^2 + \ldots$$

Этотъ же законъ для перемѣннаго y принялъ бы форму

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} u^2 \, E\phi\,(n-\psi_1 u) = \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)} u^2 + \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 2)} u^2 + \ldots \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi k)} u^2 + \ldots$$

Если бы имѣли въ виду опредѣлить вообще сумму $\sum \psi u$, распространенную на всѣ величины корней, соотвѣтствующія перемѣнному x, то, рядомъ съ выраженіемъ

$$S(\varphi) = \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} \varphi u \; E\phi_1\,(n-\psi u),$$

имѣли бы формулу

$$S(\varphi) = \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} \varphi u + \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 2)} \varphi u + \ldots + \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 k)} \varphi u + \ldots$$

что намъ даетъ второй законъ числовыхъ тожествъ для перемѣннаго x съ одной произвольной функціей въ общемъ видѣ

$$\text{(I)} \quad \sum_{u=1}^{u=E\phi(n-\psi_1 1)} \varphi u \; E\phi_1\,(n-\psi u) = \sum_{u=1}^{u=E\phi_1(n-\psi 1)} \quad \sum_{u=1}^{u=E\phi(n-\psi_1 u)} \psi u$$

Тотъ же законъ для перемѣннаго y принимаетъ форму

$$\text{(I')} \quad \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)} \varphi u \; E\phi\,(n-\psi_1\, u) = \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} \quad \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi u)} \varphi u$$

§ 17.

Разсмотримъ частный случай, когда $\psi x = x$, $\psi_1 y = y$, то есть разсмотримъ 2-й законъ числового тожества для неопредѣленнаго уравненія $z + x + y = n$. Въ этомъ случаѣ $\phi x = x$, $\phi_1 y = y$, $E\phi_1 (n - \psi 1) = n - \psi 1 = n - 1$, $E\phi (n - \psi_1 1) = n - 1$, и слѣдовательно законъ числовыхъ тожествъ приметъ форму

$$\sum_1^{n-1} \varphi u\,(n-u) = \sum_1^{n-1} \sum_1^{n-u} \varphi u$$

Такъ какъ $\sum\limits_1^{n} \sum\limits_1^{1}{}^{n-u} \varphi u = \sum\limits_1^{n-1} \sum\limits_1^{u} \varphi u$, то послѣ замѣны, получаемъ формулу интеграловъ по конечнымъ разностямъ

$$\sum_1^{n-1} \sum_1^{u} \varphi u = n \sum_1^{n-1} \varphi u - \sum_1^{n-1} u \varphi u,$$

являющуюся простымъ слѣдствіемъ второго закона числовыхъ тожествъ съ одной произвольной функціей въ приложеніи къ неопредѣленному уравненію $z + x + y = n$, и дающую возможность разложить двойную интеграцію по конечнымъ разностямъ на разность двухъ первичныхъ. Замѣняя въ этой формулѣ n чрезъ $n + 1$ и n чрезъ a, имѣемъ формулы:

$$\sum_1^{n} \sum_1^{u} \varphi u = (n+1) \sum_1^{n} \varphi u - \sum_1^{n} u \varphi u$$

$$\sum_1^{a-1} \sum_1^{u} \varphi u = a \sum_1^{a-1} \varphi u - \sum_1^{a} u \varphi u$$

дающія по вычитаніи

$$\sum_{1}^{u=n} \sum_{1}^{u} \varphi u = (n+1) \sum_{1}^{n} \varphi u \;-\; a \sum_{1}^{a-1} \varphi u - \sum_{a}^{n} u \psi u$$

Справедливость этихъ формулъ нисколько не зависитъ отъ выбора функцій φu: онѣ сохраняютъ свой общій характеръ, не смотря на то, будетъ ли функція φ аналитическая или числовая.

Опредѣливъ изъ основной формулы $\sum\limits_{1}^{n} \varphi u$, и замѣняя въ ней послѣдовательно φu чрезъ $u\varphi u, u^2\varphi u, \ldots u^{h-1}\varphi u$, мы получаемъ рядъ уравненій:

$$\sum_{1}^{n} \varphi u = \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} u \varphi u + \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{u} \varphi u$$

$$\sum_{1}^{n} u \varphi u + \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} u^2 \varphi u + \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{u} u \varphi u$$

$$\sum_{1}^{n} u^2 \varphi u + \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} u^3 \varphi u + \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{u} u^2 \varphi u$$

. . . .

$$\sum_{1}^{n} u^{k-1} \varphi u = \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} u^{k} \varphi u + \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{u} u^{k-1} \varphi u$$

Помноживъ 2-ое уравненіе на $\frac{1}{n+1}$, третье на $\frac{1}{(n+1)^2}$, и послѣднее на $\frac{1}{(n+1)^{k-1}}$, и сложивъ ихъ, мы найдемъ уравненіе

$$\sum_1^n \varphi u = \frac{1}{(n+1)^k}\sum_1^n u^k \varphi u + \frac{1}{(n+1)^k}\sum_1^n \sum_1^u u^{k-1}\varphi u +$$

$$+\frac{1}{(n+1)^{k-1}}\sum_1^n \sum_1^u u^{k-2}\varphi u + \ldots \frac{1}{(n+1)^2}\sum_1^n \sum_1^u u\varphi u +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_1^n \sum_1^u \varphi u$$

Эта формула имѣетъ мѣсто для какого угодно положительнаго числа k.

Изъ этого же уравненія мы получаемъ

$$\sum_1^n u^k \varphi u = (n+1)^k \sum_1^n \varphi u - \sum_1^n \sum_1^u u^{k-1}\varphi u -$$

$$-(n+1)\sum_1^n \sum_1^u u^{k-2}\varphi u - \ldots - (n+1)^2 \sum_1^n \sum_1^u u^{k-3}\varphi u - \ldots$$

$$\ldots -(n+1)^{k-2}\sum_1^n \sum_1^u u\varphi u - (n+1)^{k-1}\sum_1^n \sum_1^u \varphi u,$$

откуда, замѣняя $u^k\varphi u$ чрезъ φu, находимъ

$$\sum_1^n \varphi u = (n+1)^k \sum_1^n \frac{\varphi u}{u^k} - \sum_1^n \sum_1^u \frac{\varphi u}{u} - (n+1)\sum_1^n \sum_1^u \frac{\varphi u}{u^2} - \ldots$$

$$\ldots -(n+1)^{k-2}\sum_1^n \sum_1^u \frac{\varphi u}{u^{k-1}} - (n+1)^{k-1}\sum_1^n \sum_1^u \frac{\varphi u}{u^k}.$$

§ 18.

Формула

$$\sum_1^n \sum_1^u \varphi u = (n+1) \sum_1^n \varphi u - \sum_1^n u\varphi u \ldots \quad (1)$$

даетъ непосредственно результаты, относящіеся къ интеграціи по конечнымъ разностямъ, если будемъ въ нее вносить вмѣсто φu различныя аналитическія функціи. Такъ, полагая $\varphi u = 1$, получимъ

$$\sum_1^n \sum_1^u 1 = (n-1) \sum_1^n 1 - \sum_1^n u = (n+1)\, n - \sum_1^n u, \text{ откуда}$$

$$2\sum_1^u u = n\,(n+1) \text{ и } \sum_1^n u = \frac{n\,(n+1)}{1.2}\,.$$

Полагая $\varphi u = u$, имѣемъ

$$\sum_1^n \sum_1^u u = (n+1)\sum_1^n u - \sum_1^n u^2.$$

Но на основаніи только что выведенной формулы

$$\sum_1^u u = \frac{u\,(u+1)}{1.2}, \text{ слѣдовательно}$$

$$\sum_1^n \frac{u\,(u+1)}{1.2} = \frac{(n+1)\,n\,(n+1)}{1.2} - \sum_1^n u^2, \text{ откуда}$$

$$\sum_1^n u^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1.2.3} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Полагая $\varphi u = u^2$, имѣемъ

$$\sum_1^n \sum_1^u u^2 = \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6} - \sum_1^n u^3, \quad \text{или}$$

$$\sum_1^n \frac{u^3}{3} + \frac{1}{2}\sum_1^n u^2 + \frac{1}{6}\sum_1^n u + \frac{1}{6}\sum_1^n 1 = \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6} - \sum_1^n u^3, \text{ и}$$

$$\sum_1^n u^3 = \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{2^3} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2^4} -$$

$$- \frac{n(n+1)}{2^4} - \frac{n}{2^3}.$$

Такимъ образомъ рядомъ послѣдовательныхъ дѣйствій можно опредѣлить сумму какихъ угодно степеней натуральныхъ чиселъ. Эта же самая формула позволяетъ опредѣлять для многихъ случаевъ сумму $\sum_1^n u\varphi u$, если предварительно извѣстна $\sum_1^n \varphi u$.

Такъ, полагая $\varphi u = a^u$, мы будемъ имѣть

$$\sum_1^n \sum_1^u a^u = (n+1)\sum_1^n a^u - \sum_1^n u a^u = (n+1)\frac{a^{n+1} - a}{a-1} -$$

$$- \sum_1^n u a^u$$

или

$$\frac{1}{a-1}\sum_{1}^{n}(a^{u+1}-a)=(n+1)\frac{a^{n+1}-a}{a-1}-\sum_{1}^{n}ua^{u}$$

откуда

$$\sum_{1}^{n}ua^{u}=\frac{(n+1)\,a}{a-1}(a^{n}-1)+\frac{na}{a-1}-\frac{a^{2}}{(a-1)^{2}}(a^{n}-1)$$

Послѣдовательнымъ рядомъ подобныхъ же дѣйствій можно

опредѣлить $\sum_{1}^{n}u^{2}a^{u}$, $\sum_{1}^{n}u^{3}a^{u}$ и вообще $\sum_{1}^{n}u^{m}a^{u}$.

Замѣняя въ этой формулѣ a чрезъ a^{-1}, мы опредѣлимъ $\sum ua^{-u}$, $\sum u^{2}a^{-u}$, и вообще $\sum u^{n}a^{-u}$ по $\sum a^{-u}$.

Изъ формулъ, опредѣляющихъ $\sum_{1}^{n}a^{u}$, $\sum_{1}^{n}ua^{u}$, $\sum_{1}^{n}u^{m}a^{u}$ помощію замѣны a чрезъ e^{i}, гдѣ $i=\sqrt{-1}$, можно найти, $\sum e^{ui}$, $\sum ue^{ui}$, $\sum u^{2}e^{ui}$. $\sum u^{m}e^{ui}$, или что тоже $\sum(\mathrm{C}su+i\,\mathrm{S}nu)$, $\sum u\,(\mathrm{C}su+i\,\mathrm{S}nu)$, и вообще $\sum u^{m}\,(\mathrm{C}su+i\,\mathrm{S}nu)$, откуда, приравнивая дѣйствительныя или мнимыя части отдѣльно, найдемъ $\sum \mathrm{S}nu$, $\sum u\,\mathrm{S}nu$, ... $\sum u^{m}\,\mathrm{S}nu$, $\sum \mathrm{C}su$, $\sum u\,\mathrm{C}su$, ... $\sum u^{m}\,\mathrm{C}su$. Мы не дѣлаемъ этихъ опредѣленій, полагая, что они будутъ болѣе у мѣста въ статьѣ объ интеграціи по конечнымъ разностямъ.

Формула $\sum\limits_1^n \sum\limits_1^u \varphi u = (u+1)\sum\limits_1^u \varphi u - \sum\limits_1^u u\varphi u$

даетъ возможность разложить n кратную сумму по простымъ.

Означая для сокращенія $\sum\limits_1^u \varphi u$ чрезъ $\sum \varphi$, $\sum\limits_1^u \sum\limits_1^u \varphi u$ чрезъ $\sum\limits^{(2)} \varphi$ и т. д. мы будемъ имѣть

$$\sum^{(n)} \varphi = (u+1) \sum^{(n-1)} \varphi - \sum^{(n-1)} u\varphi.$$

Въ этой формулѣ члены, зависящіе отъ $\sum\limits^{(n-1)}$, можно выразить по членамъ, зависящимъ отъ $\sum\limits^{(n-2)}$, и продолжая такимъ образомъ понижать указателей суммы, можно дойти до выраженій, зависящихъ только отъ простыхъ суммъ. Для примѣра найдемъ $\sum\limits^{(3)} \varphi = \sum\limits_1^u \sum\limits_1^u \sum\limits_1^u \varphi(u)$.

Производя суммованіе надъ формулою

$$\sum^{(2)} \varphi = (u+1) \sum \varphi - \sum u\varphi, \text{ имѣемъ}$$

$$\sum^{(3)} \varphi = \sum_1^u (u+1) \sum_1^u \varphi u - \sum^{(2)} u\varphi, \text{ или}$$

$$\sum^{(3)}\varphi(u) = \sum u \sum \varphi - \sum u\varphi - (u+1)\sum u\varphi + \sum u^2\varphi \quad (a)$$

Членъ $\sum u \sum \varphi$, зависящій отъ двухъ суммъ, можно исключить, взявъ другое выраженіе $\sum^{(3)}\varphi$, получающееся изъ основной формулы, если въ немъ замѣнимъ $\varphi(u)$ чрезъ $\sum_1^u \varphi(u)$

$$(b)\ \sum^{(3)}\varphi = (u+1)\sum^{(2)}\varphi - \sum u \sum \varphi = -\sum u \sum \varphi +$$

$$(u+1)^2 \sum \varphi - (u+1)\sum \varphi u$$

Сложивъ формулы (a) и (b), имѣемъ:

$$2\sum^{3}\varphi = (u+1)(u+2)\sum\varphi - (2u+3)\sum u\varphi + \sum u^2\varphi,$$ откуда

получаемъ

$$\sum^{(3)}\varphi = \frac{(u+1)(u+2)}{1.\ 2}\sum\varphi - \frac{(2u+3)}{2}\sum u\varphi + \frac{1}{2}\sum u^2\varphi$$

формулу, въ которой тройная сумма выражается по простымъ. Подобнымъ образомъ можно опредѣлить четверную сумму и привести всѣ выраженія, отъ которыхъ она зависитъ, къ простымъ суммамъ.

§ 19.

Уравненіе $\sum_1^n \sum_1^u \varphi u = (n+1)\sum_1^n \varphi u - \sum_1^n u\varphi(u),$

имѣя мѣсто для случая, когда функція φu аналитическая и давая результаты, относящіеся къ интеграціи по конечнымъ разностямъ, должна для случая, когда $\varphi(u)$ функція числовая, дать результаты, выражающіе зависимость между различными числовыми функціями. Дѣйствительно, полагая въ этой формулѣ $\varphi u = \left(\frac{u}{p}\right)$, гдѣ $\left(\frac{u}{p}\right)$ есть лежандровъ символъ, равный $+1$, когда u квадратичный и -1, когда u не квадратичный вычетъ числа p, и означая чрезъ $N_1(u)$ — число квадратичныхъ, а $N_2(u)$ — число неквадратичныхъ вычетовъ, $S_1(u)$ — сумму квадратичныхъ, а $S_2(u)$ — сумму не квадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u, мы получимъ

$$\sum_1^n \sum_1^u \left(\frac{u}{p}\right) = (n+1) \sum_1^n \left(\frac{u}{p}\right) - \sum_1^n u \left(\frac{u}{p}\right).$$

Очевидно, что $\sum\limits_1^n \left(\frac{u}{p}\right) = N_1(u) - N_2(u)$ и

$$\sum_1^n u \left(\frac{u}{p}\right) = S_1(u) - S_2(u).$$

Вставляя эти выраженія, мы получаемъ формулу нашу въ видѣ:

$$\sum_1^n \Big(N_1(u) - N_2(u) \Big) = (n+1) \Big[N_1(n) - N_2(n) \Big] -$$

$$\Big[S_1(n) - S_2(n) \Big],$$

что по сокращеніи даетъ

$$N_1(1) + N_1(2) + N_1(3) + \ldots\ldots + N_1(n-1) -$$

$$-\Big[N_2(1)+N_2(2)+N_2(3)+\ldots\ldots+N_2(n-1)\Big]=$$

$$=nN_1(n)-nN_2(n)-S_1(n)+S_2(n)\;.\;.\;.\quad(c)$$

Замѣняя n чрезъ a, и вычитая полученное такимъ образомъ уравненіе (c), имѣемъ

$$N_1(a)+N_1(a+1)+\ldots+N_1(n-1)-\Big[N_2(a)+N_2(a+1)+\ldots$$

$$\ldots+N_2(n-1)\Big]=nN_1(n)-aN_1(a)-nN_2(n)+aN_2(a)+$$

$$+S_2(n)-S_2(a)-S_1(n)+S_1(a).$$

Полагая въ общей формулѣ $\varphi u=u\left(\frac{u}{p}\right)$, и означая чрезъ $S''_1(u)$ — сумму квадратовъ квадратичныхъ и $S''_2(u)$ — сумму квадратовъ неквадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u, будемъ имѣть

$$\sum_1^n\Big[S_1(u)-S_2(u)\Big]=(n+1)(S_1(n)-S_2(n))-$$

$$-(S''_1(n)-S''_2(n)),$$

откуда

$$S''_1(n)-S''_2(n)=(n+1)(S_1(n)-S_2(n))-$$

$$-\sum_1^n(S_1(u)-S_2(u))\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(d)$$

Для опредѣленія $\sum\limits_1^n(S_1(u)-S_2(u))$ мы должны принять въ соображеніе вышевыведенную формулу

$$\sum_{1}^{n}(N_1(u)-N_2(u))=(n+1)(N_1(n)-N_2(n))-(S_1(n)-S_2(n)),$$

откуда, замѣняя n чрезъ u, имѣемъ

$$\sum_{1}^{n}(S_1(u)-S_2(u))=\sum_{1}^{n}(u+1)(N_1(u)-N_2(u))-$$

$$-\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{u}(N_1(u)-N_2(u)).\;.\;.\;.\;.\quad(e)$$

Разлагая по общей формулѣ двойную сумму, будетъ имѣть

$$\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{u}(N_1(u)-N_2(u))=(n+1)\sum_{1}^{n}(N_1(u)-N_2(u))-$$

$$-\sum_{1}^{n}u(N_1(u)-N_2(u)),$$

слѣдовательно формула (e) приметъ видъ

$$\sum_{1}^{n}(S_1(u)-S_2(u))=\sum_{1}^{n}(u+1)(N_1(u)-N_2(u))-$$

$$-(n+1)\sum_{1}^{n}(N_1(u)-N_2(u))+\sum_{1}^{n}u(N_1(u)-N_2(u))$$

или

$$\sum_{1}^{n}(S_1(u)-S_2(u))=\sum_{1}^{n}(2u-n)(N_1(u)-N_2(u))$$

Вставляя эту величину въ (d), находимъ

$$S''_1(n) - S''_2(n) = (n+1)(S_1(n) - S_2(n)) +$$

$$+\sum_{1}^{n}(n-2u)(N_1(u) - N_2(u)).$$

Точно такимъ же образомъ можно опредѣлить послѣдовательно сумму 3-хъ, 4-хъ и какихъ угодно степеней квадратичныхъ и неквадратичныхъ вычетовъ по функціямъ $N_1(u)$ и $N_2(u)$, числу квадратичныхъ и неквадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u.

Вообще, внося $\psi u = \left(\frac{u}{p}\right)$ въ общее разложенiе тожества, мы будемъ имѣть формулу

$$N_1(n) - N_2(n) = \frac{1}{(n+1)^k}(S_1^{(k)}(n) - S_2^{(k)}(n)) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{1}^{n}(S_1^{(k-1)}(u) - S_2^{(k-1)}(u)) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{1}^{n}(S_1^{(k-2)}(u) - S_2^{(k-2)}(u)) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{1}^{n}(S_1(u) - S_2(u)) + \frac{1}{n+1}\sum_{1}^{n}(N_1(u) - N_2(u))$$

гдѣ вообще $S_1^{(\lambda)}(u)$ и $S_2^{(\lambda)}(u)$ означаютъ сумму степеней λ квадратичныхъ и неквадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u.

Подобнымъ же образомъ, вставляя лежандровъ символъ въ другую формулу, мы будемъ имѣть

$$N_1(n) - N_2(n) = (n+1)^k (S^{(-1)}(n) - S^{(-1)}(n) - \sum_1^n (S_1^{-1}(u) - S_2^{(-1)}(u)) - (n+1) \sum_1^n (S_1^{(-2)}(u) - S^{(-2)}(u)) - \ldots - (n+1)^{k-2} \sum_1^n (S^{-(k-1)}(u) - S_2^{(k-1)} - (u)) - (n+1)^{k-1} \sum_1^n (S_1^{-k}(u) - S_2^{-k}(u))$$

гдѣ вообще подъ выраженіями $S_1^{(-\lambda)}(u)$ и $S_2^{(-\lambda)}(u)$ мы подразумѣваемъ сумму отрицательныхъ степеней ($-\lambda$) квадратичныхъ и неквадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u.

Эти числовые законы, опредѣляющіе зависимость между функціями, выражающими число и сумму квадратичныхъ вычетовъ различпыхъ степеней, могутъ быть распространены и на вычеты другихъ степеней; для этого стоитъ только вмѣсто лежандрова символа вставить другой, соотвѣтствующій различнымъ вычетамъ, ибо вышевыведенное уравненіе числовыхъ тожествъ имѣетъ мѣсто для совершенно произвольныхъ функцій, и вставляя вмѣсто $\varphi(u)$ произвольные символы съ произвольными свойствами, мы нисколько не нарушаемъ этого тожества.

Вставивъ на этомъ основаніи вмѣсто $\varphi(u)$ символъ $\theta(u)$, обращающійся въ 1 или въ нуль, смотря потому, будетъ ли u вычетомъ или невычетомъ числа p какой угодно степени, мы дадимъ нашей формулѣ видъ

$$\sum_1^n \sum_1^u \theta(u) = (n+1) \sum_1^n \theta(n) - \sum_1^n u\,\theta(u)$$

или

$$\sum_1^n N(u) = (n+1)\, N(n) - S_1(n),$$

откуда

$$S_1(n) = (n+1)\,N(n) - \sum_1^n N(u)$$

Замѣняя $\theta(u)$ чрезъ $u\theta(u)$, будемъ имѣть

$$\sum_1^n S_1(u) = (n+1)\,S_1(n) - S_2(n)$$

откуда сумма квадратовъ всѣхъ вычетовъ, не превосходящихъ n, выражается формулою

$$S_2(n) = (n+1)\,S_1(n) - \sum_1^n S_1(u), \text{ но}$$

$$S_1(u) = (u+1)\,N(u) - \sum_1^u N(u),$$

$$\sum_1^n S_1(u) = \sum_1^n (u+1)\,N(u) - \sum_1^n \sum_1^u N(u)$$

$$\sum_1^n \sum_1^u N(u) = (n+1)\sum_1^n N(u) - \sum_1^n u\,N(u), \text{ слѣдовательно}$$

$$\sum_1^n S_1(u) = \sum_1^n (u+1)\,N(u) - (n+1)\sum_1^n N(u) + \sum_1^n u\,N(u) =$$

$$= \sum_1^n (2u-n)\,N(u),$$

$$\text{и } S_2(n)=(n+1)\,S_1(n)+$$

$$\sum_1^n(n-2u)\,N(u)-(n+1)\,S_1\,(n)+n\sum_1^n N(u)-2\sum_1^n u\,N(u)$$

Замѣняя $S_1(n)$, мы будемъ имѣть для $S_2(n)$ формулу

$$S_2\,(n)=(n+1)^2\,N(n)-\sum_1^n(2u+1)\,N(u).$$

Такимъ образомъ можно опредѣлить сумму какихъ угодно степеней произвольныхъ вычетовъ.

Понимая подъ $\theta(u)$ такой символъ, который обращается въ нуль или въ 1, смотря по тому, будетъ ли u сложнымъ или простымъ числомъ, мы получимъ формулу

$$\sum_1^n\psi(u)=(n+1)\,\psi(n)-S_1(n)$$

гдѣ $\psi(n)$ означаетъ число, а $S_1(n)$—сумму простыхъ чиселъ, не превосходящихъ n.

Формула $S_1(n)=(n+1)\,\psi(n)-(\psi 1+\psi 2+\psi 3+\ldots.+\psi(n))$ даетъ возможность рѣшать вопросъ о суммѣ простыхъ чиселъ, какъ скоро аналитическое выраженіе $\psi(n)$ извѣстно.

Пусть a и b будутъ два простыхъ числа, тогда изъ двухъ уравненій

$$S_1(a)=(a+1)\,\psi(a)-\sum_1^a\psi(u)\text{ и}$$

$$S_1(b)=(b+1)\,\psi(b)-\sum_1^b(\psi u)$$

получимъ по вычитаніи

$$S_1(a)-S_1(b)=(a+1)\,\psi(a)-(b+1)\,\psi(b)-\sum_{b+1}^a\psi(u)$$

Замѣняя функціи $\psi(u)$ чрезъ $\int\limits_2^u \frac{du}{\log u}$, опредѣляющій ее до нѣкотораго приближенія, найдемъ

$$S_1(a) - S_1(b) = (a+1)\int\limits_2^a \frac{du}{\log u} - (b+1)\int\limits_2^b \frac{du}{\log u} - \sum_{(b+1)}^{a} \int\limits_2^u \frac{du}{\log u}$$

Подобнымъ же образомъ можно опредѣлить сумму квадратовъ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ n, по формулѣ

$$S_2(n) = (n+1)\,\psi n - \sum_1^n (2u+1)\,\psi(u)$$

Продолжая дальнѣйшее приложеніе нашей формулы, мы могли бы опредѣлить сумму кубовъ и вообще какихъ угодно степеней простыхъ чиселъ, не превосходящихъ данныхъ предѣловъ.

Формулы, выведенныя нами для выраженія зависимости между функціей, выражающей число чиселъ съ какими-нибудь свойствами и суммою ихъ, имѣютъ самый общій характеръ въ томъ смыслѣ, что выражаютъ свойство, принадлежащее всѣмъ числовымъ функціямъ, ибо въ общую формулу мы всегда можемъ вставить такой символъ, который бы обладалъ свойствами, приводящими къ этой зависимости.

§ 20.

Сумму $\sum \varphi(x)\,\psi(y)$, распространенную на всѣ пары корней x и y неопредѣленнаго уравненія $z+x+y+n$, можно выразить двоякимъ образомъ, или а) давая послѣдовательно перемѣнному x всѣ значенія отъ 1 до $n-1$ и принимая въ соображеніе соотвѣтствующія измѣненія y въ парахъ отъ

1 до $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-k$ и т. д. и наша сумма выразится формулою

$$S = \varphi(1)\sum_1^{n-1}\psi(u) + \varphi(2)\sum_1^{n-2}\psi(u) + \ldots + \varphi(n-1)\,\psi(1) =$$

$$\sum_1^{n-1}\varphi(u)\sum_1^{n-u}\psi(u),$$

или b) давая перемѣнному y всѣ значенія отъ 1 до $n-1$ и принимая въ соображеніе соотвѣтствующія измѣненія x, тогда

$$S = \psi(1)\sum_1^{n-1}\varphi(u) + \psi(2)\sum_1^{n-2}\varphi(u) + \ldots + \psi(n-1)\,\varphi(1) =$$

$$\sum_1^{n-1}\psi(u)\sum_1^{n-u}\varphi(u)$$

Сравнивая эти два выраженія для S, мы получаемъ формулу по конечнымъ разностямъ, выражающую второй законъ числовыхъ тожествъ съ двумя произвольными функціями для неопредѣленнаго уравненія $z+x+y=n$.

$$\sum_1^{n-1}\varphi(u)\sum_1^{n-u}\psi(u) = \sum_1^{n-1}\psi(u)\sum_1^{n-u}\varphi(u) \qquad (2)$$

Измѣняя n на $n+1$, и полагая $\psi(u) = 1$, мы имѣемъ

$$(n+1)\sum_1^{n}\varphi(u) - \sum_1^{n} u\,\varphi(u) = \sum_1^{n}\ \sum_1^{n-u+1}\varphi(u) = \sum_1^{u}\varphi(u),$$

вышевыведенную формулу по конечнымъ разностямъ.

Формула (2) даетъ различные результаты, смотря по различнымъ функціямъ аналитическимъ или числовымъ, которыя мы будемъ вносить вмѣсто $\varphi(u)$ и $\psi(u)$. Вмѣсто функцій $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ мы можемъ вносить и различные символы, придавая имъ самыя произвольныя свойства. Это возможно, потому что тожество (2) состоитъ по обѣимъ сторонамъ знака равенства вполнѣ изъ одинаковыхъ элементовъ, и разница въ выраженіи зависитъ единственно отъ того, что счетъ, не имѣющій вліянія на общій результатъ, былъ произведенъ различнымъ образомъ.

Замѣнивъ въ формулѣ (2) n чрезъ $n+1$, имѣемъ

$$\sum_1^n \varphi(u) \sum_1^{n-u+1} \psi(u) = \sum_1^n \psi(u) \sum_1^{n-u+1} \varphi(u). \quad (3)$$

Полагая $\psi(u) = a^u$, а $\varphi(u) = u$, получимъ

$$\sum_1^n u \frac{a^{n-u+2} - a}{a-1} = \sum_1^n a^u \frac{(n-u+1)(n-u+2)}{1.\ 2}$$

Зная $\sum a^u$, $\sum ua^u$ мы можемъ найти $\sum u^2 a^u$.... и т. д.

Вообще мы можемъ рѣшать тѣже самые вопросы по конечнымъ разностямъ, которые разрѣшались предшествовавшею формулою съ тою только разницею, что тамъ мы по $\sum \varphi(u)$ послѣдовательно опредѣляли $\sum u\varphi u$, $\sum u^2\varphi u$ и т. д., гдѣ $\varphi(u)$ умножалось на степень u, тогда какъ здѣсь для многихъ случаевъ по $\sum \varphi(u)$, и $\sum \psi(u)$ мы можемъ иногда опредѣлить выраженія $\sum \varphi(u)\,\psi(u)$.

Дѣйствительно, принимая въ соображеніе, что

$$\sum_{1}^{u-1} \mathrm{Cs}u = \frac{\mathrm{Sn}\,(u - \frac{1}{2}) - \mathrm{Sn}\frac{1}{2}}{2\mathrm{Sn}\frac{1}{2}}, \quad \sum_{1}^{u-1} \mathrm{Sn}u = \frac{\mathrm{Cs}\,\frac{1}{2} - \mathrm{Cs}\,(u - \frac{1}{2})}{2\mathrm{Sn}\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{1}^{u} a^u = \frac{a^{u+1} - a}{a - 1}, \sum_{1}^{u} a^{-u} = \frac{a^{-(u+1)} - a^{-1}}{a^{-1} - 1},$$ мы изъ формулы

$$\sum_{1}^{n-1} \varphi\,(u) \sum_{1}^{n-u} \psi\,(u) = \sum_{1}^{n-1} \psi\,(u) \sum_{1}^{n-u} \varphi\,(u)$$

полагая послѣдовательно

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= a^u, & \psi(u) &= \mathrm{Sn}u, \\ \varphi(u) &= a^u, & \psi(u) &= \mathrm{Cs}u, \\ \varphi(u) &= a^{-u}, & \psi(u) &= \mathrm{Sn}u, \\ \varphi(a) &= a^{-u}, & \psi(u) &= \mathrm{Cs}u, \end{aligned}$$

получимъ 4 формулы

$$\sum_{1}^{n-1} a^u \; \frac{\mathrm{Cs}\frac{1}{2} - \mathrm{Cs}\,(n - u + \frac{1}{2})}{2\mathrm{Sn}\frac{1}{2}} = \sum_{1}^{n-1} \mathrm{Sn}u \; \frac{a^{n-u+1} - a}{a - 1}$$

$$\sum_{1}^{n-1} a^u \; \frac{\mathrm{Sn}\,(u + \frac{1}{2}) - \mathrm{Sn}\,\frac{1}{2}}{2\mathrm{Sn}\frac{1}{2}} = \sum_{1}^{n-1} \mathrm{Cs}u \; \frac{a^{n-u+1} - a}{a - 1}$$

$$\sum_{1}^{n-1} a^{-u} \; \frac{\mathrm{Cs}\frac{1}{2} - \mathrm{Cs}\,(n - u + \frac{1}{2})}{2\mathrm{Sn}\frac{1}{2}} = \sum_{1}^{n-1} \mathrm{Sn}u \; \frac{a^{u-n-1} - a^{-1}}{a^{-1} - 1}$$

$$\sum_{1}^{n-1} a^{-u} \; \frac{\mathrm{Sn}\,(u + \frac{1}{2}) - \mathrm{Sn}\frac{1}{2}}{2\mathrm{Sn}\frac{1}{2}} = \sum_{1}^{n-1} \mathrm{Cs}u \; \frac{a^{u-n-1} - a^{-1}}{a^{-1} - 1}$$

Опредѣливъ изъ послѣднихъ двухъ формулъ $\sum_{1}^{n-1} a^{-u} Csu$ и $\sum_{1}^{n-1} a^{-u} Snu$ по $\sum_{1}^{n-1} a^{u} Csu$ и $\sum_{1}^{n-1} a^{u} Snu$, и вставивъ въ первыя двѣ, найдемъ два уравненія, изъ которыхъ не трудно уже найти выраженія для $\sum_{1}^{n-1} a^{u} Csu$ и $\sum_{1}^{n-1} a^{u} Snu$.

§ 21.

Оставляя въ сторонѣ болѣе подробное развитіе аналитической стороны этой общей формулы, относящееся къ интеграціи по конечнымъ разностямъ, мы остановимся преимущественно на числовой сторонѣ вопроса.

Формула эта, давая самые общіе законы для различныхъ числовыхъ функцій, связываетъ такого рода результаты и указываетъ на такого рода зависимость, которую трудно иногда подозрѣвать.

Вставляя въ общую формулу (3) вмѣсто $\varphi(u)$ символъ $\theta(u)$ такого свойства, что онъ обращается въ нуль или въ единицу, смотря потому будетъ ли u сложнымъ или простымъ числомъ, и вмѣсто $\psi(u)$ символъ $\omega(u)$, обращающійся точно также въ нуль или въ единицу, смотря потому будетъ ли u неквадратичнымъ или квадратичнымъ вычетомъ произвольнаго цѣлаго числа p, мы получаемъ формулу

$$\sum_{1}^{n} \theta(u) \sum_{1}^{n-u+1} \omega(u) = \sum_{1}^{n} \omega(u) \sum_{1}^{n-u+1} \theta(u)$$

Означая чрезъ $\psi(u)$ и $N(u)$ число простыхъ чиселъ и число квадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u, мы видимъ, что

$$\sum_1^u \theta(u) = \psi(u), \sum_1^u \omega(u) = \mathrm{N}(u)$$

Замѣняя этими выраженіями наши суммы, мы получаемъ формулу

$$\sum_1^n \theta(u)\,\mathrm{N}(n-u+1) = \sum_1^n \omega(u)\,\psi(n-u+1)$$

Принимая въ соображеніе значенія $\theta(u)$ и $\omega(u)$, мы можемъ знакъ $\sum$, означающій, что сумма распространяется на рядъ натуральныхъ чиселъ, замѣнить условными знаками σ и s, означающими, что сумма σ распространяется на всѣ простыя числа и s на всѣ квадратичные вычеты, не превосходящіе u, и наша формула приметъ видъ

$$\sigma_1^n \mathrm{N}(n-u+1) = s_1^n \psi(n-u+1)$$

Полагая $n=15$, $p=19$, мы будемъ имѣть

$$\sigma_1{}_1^{15} \mathrm{N}(16-u) = s_1^{15} \psi(16-u).$$

Квадратичные вычеты 19 будутъ 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17,

Простыя числа суть 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Первая сумма σ распространяется на числа, содержащіяся во 2-мъ рядѣ, вторая сумма s — на числа, содержащіяся въ первомъ рядѣ, и наше уравненіе приметъ форму

$$\mathrm{N}(14) + \mathrm{N}(13) + \mathrm{N}(11) + \mathrm{N}(9) + \mathrm{N}(5) + \mathrm{N}(3) = \psi(15) +$$
$$+ \psi(12) + \psi(11) + \psi(10) + \psi(9) + \psi(7) + \psi(5) = 31.$$

Такая общая связь между двумя функціями, выражающими число значеній, существуетъ для всякихъ двухъ числовыхъ функцій, ибо характеромъ и свойствами символовъ $\theta(u)$ и $\omega(u)$ можно располагать совершенно произвольно; поэтому такого рода соотношенія принадлежатъ къ общимъ законамъ числовыхъ функцій.

Полагая въ формулѣ (3) $\varphi(u) = u\theta(u)$ и $\psi(u) = \omega(u)$, гдѣ $\omega(u)$ и $\theta(u)$ сохраняютъ прежнія обозначенія, мы будемъ имѣть

$$\sum_1^n u\theta(u) \sum_1^{n-u+1} \omega(u) = \sum_1^n \omega(u) \sum_1^{n-\omega+1} u\theta u.$$

Означивъ чрезъ $S_1(u)$ сумму первыхъ чиселъ, не превосходящихъ u, мы будемъ имѣть

$$\sum_1^n u\theta(u)\, N(n-u+1) = \sum_1^n \omega(u)\, S_1(n-u+1)$$

гдѣ, замѣняя знакъ $\sum$ вышеобъясненными знаками σ и s, получимъ

$$\sigma_1^n uN(n-u+1) = s_1^n S_1(n-u+1)\,.$$

Полагая $n = 15$, имѣемъ,

$$\sigma_1^{15} uN(16-u) = s_1^{15} S_1(16-u) \text{ или}$$

$$2N(14) + 3N(13) + 5N(11) + 7N(9) + 11N(5) + 13N(3) =$$
$$= S_1(15) + S_1(12) + S_1(11) + S_1(10) + S_1(9) + S_1(7) +$$
$$+ S_1(5) \text{ или}$$

$$2.7 + 3.7 + 5.7 + 7.6 + 11.3 + 13.1 = 41 + 28 + 28 +$$
$$+ 17 + 17 + 17 + 10.$$

Если положимъ $\varphi(u) = \theta(u)$ и $\psi(u) = u\theta(u)$, то будемъ имѣть

$$\sum_{1}^{n} \theta(u)\, S_1(n-u+1) = \sum_{1}^{n} u\theta(u)\, \psi(n-u+1) \text{ или}$$

$$\underset{1}{\overset{n}{\sigma}} S_1(n-u+1) = \underset{1}{\overset{n}{\sigma}} u\psi(n-u+1)$$

гдѣ знакъ σ распространяется на всѣ первыя, числа не превосходящія n.

Полагая $\varphi(u) = \theta(u)$ и $\psi(u) = u$, будемъ имѣть

$$\sum_{1}^{n} \theta(u) \frac{(n-u+1)(n-u+2)}{1.2} = \sum_{1}^{n} u\, N(n-u+1) \text{ или}$$

$$\underset{1}{\overset{n}{\sigma}} \frac{(n-u+1)(n-u+2)}{1.2} = \sum_{1}^{n} u\psi(n-u+1)$$

Полагая $\psi(u) = \int(u)$, суммѣ дѣлителей числа u, и $\varphi(u) = \theta(u)$, будемъ имѣть формулу

$$\sum_{1}^{n} \int(u) \sum_{1}^{n-u+1} \theta(u) = \sum_{1}^{n} \theta(u) \sum_{1}^{n-u+1} \int(u), \text{ но}$$

$$\sum_{1}^{n-u+1} \int(u) = \mu(u-u+1) = E\frac{n-u+1}{1} + 2E\frac{n-u+1}{2} +$$

$$+ \ldots kE\frac{n-u+1}{k} + \ldots (n-u+1)\, E\frac{n-u+1}{n-u+1}$$

$$\sum_{1}^{n-u+1} \theta(u) = \psi(n-u+1), \text{ слѣдовательно}$$

$$\sum_{1}^{n}\psi(n-u+1)\int(u)=\sum_{1}^{n}\theta(u)\,\mu\,(n-u+1)=\sigma\,\mu\,(n-u+1)$$

Полагая $\varphi\,(u)=\int(u)$ и $\psi\,(u)=\rho\,(u)$ числу дѣлителей числа u, мы будемъ имѣть

$$\sum_{1}^{n}\int(u)\sum_{1}^{n-u+1}\rho\,(u)=\sum_{1}^{n}\rho\,(u)\sum_{1}^{n-u+1}\int(u)$$

$$\sum_{1}^{n-u+1}\rho\,(u)=\tau\,(n-u+1)=\mathrm{E}\,\frac{n-u+1}{1}+\mathrm{E}\,\frac{n-u+1}{2}+\ldots$$

$$\ldots+\mathrm{E}\,\frac{n-u+1}{n-u+1}\,,$$

слѣдовательно

$$\sum_{1}^{n}\tau\,(n-u+1)\int(u)=\sum_{1}^{n}\mu(n-u+1)\,\rho\,(u)$$

Изъ примѣровъ, предложенныхъ нами, не трудно видѣть, какимъ образомъ можно находить самую общую связь между двумя произвольными функціями и получать довольно сложныя соотношенія.

§ 22.

Общій законъ числовыхъ тожествъ съ одной произвольной функцій имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда будетъ взято неоопредѣленное уравненіе $z+\psi(x).\psi_1(y)=n$, гдѣ ψ и ψ_1 двѣ возрастающія функціи, имѣющія положительныя значенія для $x=1$, $y=1$. Для этого случая онъ принимаетъ форму для перемѣннаго x

$$\varphi(1)\,E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)+\varphi(2)\,E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 2}\right)+\ldots+\varphi(k)\,E\phi_1\left(\frac{n}{\psi k}\right)+\cdots$$

$$+\ldots+\varphi\left(E\phi\,\frac{n}{\psi_1 1}\right)E\phi_1\left(\frac{n}{\psi\left(E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)\right)}\right)=$$

$$=\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)}\varphi u+\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{u}{\psi_1 2}\right)}\varphi(u)+\ldots\ldots+\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 k}\right)}\varphi u+\ldots\ldots$$

и для перемѣннаго y

$$\varphi(1)\,E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)+\varphi(2)\,E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 2}\right)+\ldots+\varphi(k)\,E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 k}\right)+\cdots$$

$$+\varphi\left(E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)\right)E\phi\left(\frac{n}{\psi_1\left(E\phi_1\,\frac{n}{\psi(1)}\right)}\right)=$$

$$=\sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)}\varphi u+\sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 2}\right)}\varphi u+\ldots+\varphi(k)\sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi k}\right)}\varphi u+\ldots$$

гдѣ ϕ и ϕ_1 функціи, обратныя функціямъ ψ и ψ_1.

Если второй законъ числовыхъ тожествъ для уравненія $z+\psi(x)+\psi_1(y)=n$ мы изображали сокращенно формулами

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)}\varphi u\,E\phi_1(n-\psi u)=\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)}\;\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 u)}\varphi(u)\ \text{ и}$$

$$\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi(1))}\varphi u\,E\phi\,(u-\psi_1 u)=\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)}\;\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi u)}\varphi(u),$$

то сокращенная форма второго закона числовыхъ тожествъ для уравненія $z+\psi(x).\psi_1(y)=n$ будетъ

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} \varphi(u)\, E\phi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right) = \sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} \sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)} \varphi(u) \qquad (II)$$

$$\sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} \varphi(u)\, E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right) = \sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} \sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right)} \varphi(u) \qquad (II')$$

Полагая $\varphi(u) = 1$, мы видимъ, что нашъ второй законъ числовыхъ тожествъ приметъ форму перваго закона.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ функція $\varphi(u)$ можетъ быть какъ аналитическою, такъ и числовою. Подъ функціей $\varphi(u)$ мы можемъ даже подразумѣвать какой угодно символъ съ самыми произвольными свойствами.

Если $\varphi(u) = \theta(u)$ символу, обращающемуся въ нуль, какъ скоро u сложное число и въ единицу, какъ скоро u простое число, то нашъ законъ приметъ видъ

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} \theta(u)\, E\phi_1(n-\psi u) = \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)} N\left[E\phi(n-\psi_1 u)\right]$$

гдѣ $N(u)$ означаетъ число первыхъ чиселъ, не превосходящихъ u.

Первую часть можно замѣнить выраженіемъ $\sigma \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} E\phi_1(n-\psi u)$ съ означеніемъ, что знакъ суммы распространяется на одни первыя числа и формула наша даетъ

$$\sigma \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} E\phi_1(n-\psi u) = \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)} N\left[E\phi(n-\psi_1 u)\right]$$

Полагая въ частномъ члучаѣ $\psi(u) = u^2$, $\psi_1(u) = u$, $\phi(u) = \sqrt{u}$, $\phi_1(u) = u$, мы дадимъ нашей общей формулѣ видъ

$$\sum_{1}^{E\sqrt{n-1}} \sigma\, E\,(n - u^2) = \sum_{1}^{n-1} N\left[E\,\sqrt{n-u}\right].$$

Означая чрезъ $S_2(u)$ сумму квадратовъ первыхъ чиселъ, не превосходящихъ u, мы будемъ имѣть

$$n\,N\,(E\sqrt{n-1}) - S_2\,(E\sqrt{n-1}) = \sum_{1}^{n-1} N\,(E\sqrt{n-u})$$

Для $n = 11$ имѣемъ

$$11 N E\sqrt{10} - S_2\,(E\sqrt{10}) = \sum_{1}^{10} N\,(E\sqrt{11-u}) \text{ или}$$

$$11\,N(3) - S_2(3) = N(E\sqrt{10}) + N(E\sqrt{9}) + N(E\sqrt{8}) + N(E\sqrt{7}) +$$
$$+ N(E\sqrt{6}) + N(E\sqrt{5}) + N(E\sqrt{4}) + N(E\sqrt{3}) + N(E\sqrt{2}) +$$
$$+ N(E\sqrt{1}) = 9$$

Дѣлая въ формулѣ числовыхъ тожествъ тѣже обозначенія, для уравненія $z + \psi(x)\psi_1(y) = n$, мы получимъ уравненіе

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} \theta\,(u)\, E\phi_1\left(\frac{n}{\psi(u)}\right) = \sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi(1)}\right)} \;\; \sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)} \theta(u) \text{ или}$$

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} E\phi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right) = \sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi(1)}\right)} N\left[E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)\right] \text{ или}$$

$$\sigma_{1}^{E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right) = \sum_{1}^{E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} N\left[E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)\right]$$

Полагая $\psi(u) = u^2$, $\psi_1(u) = u$, $\varphi u = \sqrt{u}$, $\psi_1 u = u$, мы найдемъ

$$\sigma_{1}^{E\sqrt{n}} E\left(\frac{n}{u^2}\right) = \sum_{1}^{n} N\left[E\sqrt{\frac{n}{u}}\right]$$

Для $n = 18$ будемъ имѣть

$$\sigma_{1}^{E\sqrt{18}} E\left(\frac{18}{u^2}\right) = \sigma_{1}^{4} E\left(\frac{18}{u^2}\right) = \sum_{1}^{18} N\, E\sqrt{\frac{18}{u}}.$$

Полагая $\varphi(u) = u\theta(u)$, гдѣ $\theta(u)$ символъ, сохраняющій прежнія свойства, и означая чрезъ $S_1(u)$ сумму первыхъ чиселъ, мы будемъ имѣть

$$\sum_{1}^{E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} u\theta(u)\; E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right) = \sum_{1}^{E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} \sum_{1}^{E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)} u\theta(u) \text{ или}$$

$$\sigma_{1}^{E\varphi\frac{n}{\psi_1 1}} u E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right) = \sum_{1}^{E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} S_1\left(E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)\right)$$

Вторая формула (II′) приметъ

$$\sigma_{1}^{E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} u E\psi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right) = \sum_{1}^{E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} S_1\left[E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right)\right]$$

Для случая, когда $\psi(u)=u^2$, $\psi_1(u)=u$, $\varphi(u)=\sqrt{u}$, $\varphi_1(u)=u$, эти формулы примутъ видъ:

$$\sum_{1}^{E\sqrt{n}} \sigma\, u\, E\,\frac{n}{n^2} = \sum_{1}^{n} S_1\left(E\sqrt{\frac{n}{u}}\right)$$

$$\sum_{1}^{n} \sigma\, u\, E\sqrt{\frac{n}{u}} = \sum_{1}^{E\sqrt{n}} S_1\left(E\,\frac{n}{u^2}\right).$$

Если бы мы вставили вмѣсто $\varphi(u)$ символъ Лежандра $\left(\frac{n}{u}\right)$, тогда бы имѣли формулы

$$\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} \left(\frac{u}{p}\right) E\varphi_1(n-\psi u) = \sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} \sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 u)} \left(\frac{u}{p}\right)$$

$$\sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} \left(\frac{u}{p}\right) E\varphi(n-\psi_1 u) = \sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} \sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi u)} \left(\frac{u}{p}\right)$$

или

$$\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} \left(\frac{u}{p}\right) E\varphi_1(n-\psi u) = \sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} \left(N_1\left[E\varphi(n-\psi_1 u)\right] - N_2\left[E\varphi(n-\psi_1 u)\right]\right)$$

$$\sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} \left(\frac{u}{p}\right) E\varphi(n-\psi_1 u) = \sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} \left(N_1\left[E\varphi_1(n-\psi u)\right] - N_2\left[E\varphi_1(n-\psi u)\right]\right)$$

Подобнымъ же образомъ имѣемъ

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} \left(\frac{u}{p}\right) E\phi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right) = \sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} \left(N_1\left[E\left(\phi\frac{n}{\psi_1 u}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - N_2\left[E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)\right]\right)$$

$$\sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} \left(\frac{u}{p}\right) E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right) = \sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} \left(N_1\left[E\left(\phi_1\frac{n}{\psi u}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - N_2\left[E\left(\phi_1\frac{n}{\psi u}\right)\right]\right)$$

гдѣ $N_1(u)$ и $N_2(u)$ означаютъ число квадратичныхъ и неквадратичныхъ вычетовъ числа p.

Для случая, когда $\psi u = u^2$, $\psi_1 u = \sqrt{u}$, $\phi(u) = \sqrt{u}$, $\phi_1(u) = u^2$, эти формулы даютъ

$$\sum_{1}^{E\sqrt{n}} \left(\frac{u}{p}\right) E\left(\frac{n}{u^2}\right)^2 = \sum_{1}^{n^2} \left\{ N_1\left[E\sqrt{\frac{n}{\sqrt{u}}}\right] - N_2\left[E\sqrt{\frac{n}{\sqrt{u}}}\right]\right\}$$

$$\sum_{1}^{n^2} \left(\frac{u}{p}\right) E\sqrt{\frac{n}{\sqrt{u}}} = \sum_{1}^{E\sqrt{n}} \left\{ N_1\left[E\left(\frac{n}{u^2}\right)^2\right] - N_2\left[E\left(\frac{n}{u^2}\right)^2\right]\right\}.$$

Можно такимъ образомъ вывести безчисленное множество частныхъ числовыхъ законовъ, выражающихъ зависимость между различными числовыми функціями, дѣлая различныя предположенія, какъ для функцій $\varphi(u)$, такъ и для функцій ψ и ψ_1.

§ 23.

Перейдемъ теперь къ усложненному закону числовыхъ тождествъ, зависящему отъ двухъ произвольныхъ функцій. Опредѣлить сумму $\sum \varphi(x)\,\theta(y)$, распространенную на всѣ пары корней неопредѣленнаго уравненія $z+\psi x+\psi_1 y=n$, можно двумя способами: *a*) или давая перемѣнному x значенія, равныя 1, 2, 3... и принимая въ соображеніе значенія y, заключающіяся въ ариѳметическихъ прогрессіяхъ, начинающихся съ 1 и оканчивающихся верхними предѣлами $E\phi_1(n-\psi 1)$, $E\phi_1(n-\psi 2)$, $E\phi_1(n-\psi 3)$.... $E\phi_1(n-\psi k)$ и т. д. тогда наша сумма будетъ

$$S=\varphi(1)\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)}\theta(u)+\varphi(2)\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 2)}\theta(u)+\ldots+\varphi(k)\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi k)}\theta(u)\ldots$$

$$\ldots+\varphi\left(E\phi(n-\psi_1 1)\right)\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi E(\phi n-\psi_1 1))}\theta(u).$$

или b) давая перемѣнному y значенія 1, 2,.., $E\phi_1(n-\psi 1)$ и принимая въ соображеніе значенія x, заключающіяся въ ариѳметическихъ прогрессіяхъ, начинающихся съ 1 и оканчивающихся верхними предѣлами $E\phi(n-\psi_1 1)$, $E\phi(n-\psi_1 2)$, ...$E\phi(n-\psi_1 k)$...., тогда таже сумма выразится формулою

$$S=\theta(1)\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)}\varphi(u)+\theta(2)\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 2)}\varphi(u)+\ldots$$

$$\ldots+\theta\left[E\phi_1(n-\psi 1)\right]\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 E\phi_1(n-\psi 1))}\varphi(u)$$

Сравнивая эти два выраженія, мы получаемъ усложненный второй законъ числовыхъ тождествъ въ формѣ:

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)}\varphi(u)\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi u)}\theta(u)=\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)}\theta(u)\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 u)}\varphi(u)\quad\text{(III)}$$

Тотъ же самый законъ для уравненія $z+\psi(x).\psi_1(y)=n$ приметъ видъ

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)}\varphi(u)\sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right)}\theta(u)=\sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)}\theta(u)\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)}\varphi(u)\ldots\text{(IV)}$$

Функціями, $\varphi(u)$ и $\theta(u)$, входящими въ выраженіе числового закона, можно располагать совершенно произвольно, придавая имъ какія угодно аналитическія или числовыя значенія. Во всѣхъ этихъ случаяхъ мы получаемъ особыя соотношенія, которыя доказать иначе иногда очень трудно. Особенно результаты получаются сложными въ томъ случаѣ, когда $\varphi(u)$ или $\theta(u)$ замѣняемъ числовыми символами съ произвольными свойствами. Такъ, положивъ, что $\theta(u)=0$ для u сложнаго, и $=1$ для u простого числа, и полагая $\varphi(u)=0$ или 1, смотря потому, будетъ ли u неквадратичнымъ или квадратичнымъ вычетомъ числа p, мы получимъ формулу

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)}\varphi(u)\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi u)}\theta(u)=\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)}\theta(u)\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 u)}\varphi(u).$$

Означая чрезъ $N(u)$ число первыхъ чиселъ и $n(u)$ число квадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u, будемъ имѣть:

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)}\varphi(u)\,N\left[E\phi_1(n-\psi u)\right]=\sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)}\theta(u)\,n\left[E\phi(n-\psi_1 u)\right]$$

Откинувъ подъ знакомъ $\sum$ величины $\varphi(u)$ и $\theta(u)$, мы должны замѣнить знакъ $\sum$ знаками σ и s

$$\sigma \mathop{N}\limits_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} \left[E\varphi_1(n-\psi u)\right] = \mathop{sn}\limits_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} \left[E\varphi(n-\psi_1 u)\right]$$

гдѣ σ означаетъ, что сумма распространяется на одни квадратичные вычеты, а s на одни первыя числа.

Формула (IV) приметъ для этого случая видъ

$$\sigma \mathop{N}\limits_{1}^{E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} \left[E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right)\right] = \mathop{sn}\limits_{1}^{E\varphi_1\left(\frac{\psi 1}{n}\right)} \left[E\left(\varphi\frac{n}{\psi_1 u}\right)\right]$$

Если $\varphi(u) = u\theta(u)$, гдѣ $\theta(u)$ сохраняетъ вышеуказанное значеніе, то наши формулы даютъ законы числовыхъ тожествъ въ видѣ

$$\sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} u\theta(u) \sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi u)} \theta(u) = \sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} \theta(u) \sum_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 u)} u\theta(u), \text{ или}$$

$$\sum_{1}^{E\ (n-\psi_1 1)} u\theta(u) N\left[E\varphi_1(n-\psi u)\right] = \sum_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} \theta(u)\, S_1\left(E\varphi(n-\psi_1 u)\right) \text{ или}$$

$$\sigma u \mathop{N}\limits_{1}^{E\varphi(n-\psi_1 1)} \left[E\varphi_1(n-\psi u) = \sigma \mathop{S_1}\limits_{1}^{E\varphi_1(n-\psi 1)} \left[E\varphi(n-\psi_1 u)\right].\right.$$

Формула (IV) даетъ

$$\sigma\, u \mathop{N}\limits_{1}^{E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1(1)}\right)} \left(E\varphi_1 \frac{n}{\psi u}\right) = \sigma \mathop{S}\limits_{1}^{E\varphi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} \left[E\varphi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)\right]$$

Знакъ суммы σ распространяется въ обоихъ случаяхъ на одни первыя числа, $N(u)$ выражаетъ число, а $S_1(u)$ сумму первыхъ чиселъ, не превосходящихъ u.

Для случая, когда $\psi(u)=u^2$, $\psi_1(u)=u$, $\phi(u)=\sqrt{u}$, $\phi_1(u)=u$, наши формулы принимаютъ видъ

$$\sigma_1^{E\sqrt{n}} uN\left[n-u^2\right]=\sigma_1^{n-1} S\left[E\sqrt{n-u}\right]$$

$$\sigma_1^{E\sqrt{n}} uN\left[E\frac{n}{u^2}\right]=\sigma_1^{n} S_1\left[E\sqrt{\frac{n}{u}}\right]$$

Для $n=26$ эти формулы даютъ

$$\sigma_1^{5} uN(25-u^2)=\sigma_1^{25} S_1[E\sqrt{26-u}]$$

или

$$2N22+3N17+5N1=S_1(E\sqrt{24})+S_1(E\sqrt{23})+S_1(E\sqrt{21})$$
$$+S_1(E\sqrt{19})+S_1(E\sqrt{15})+S_1(E\sqrt{13})+S_1E(\sqrt{9})$$
$$+S_1(E\sqrt{7})+S_1(E\sqrt{3})=37$$

и

$$\sigma_1^{5} uN\left(E\frac{26}{u^2}\right)=\sigma_1^{26} S_1\left(E\sqrt{\frac{26}{u}}\right)$$

или

$$2N(5)+3N(2)=S_1(3)+2S_1(2)=9.$$

Если мы положимъ $\varphi(u)=u$, $\theta(u)=\rho(u)$ числу дѣлителей числа u, то получимъ формулы

$$\sum_1^{E\phi(n-\psi_1 1)} u\sum_1^{E\phi_1(n-\psi u)}\rho(u)=\sum_1^{E\phi_1(n-\psi 1)}\rho(u)\sum_1^{E\phi(n-\psi_1 u)} u$$

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} u \sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right)} \rho u = \sum_{1}^{E\phi_1\frac{n}{\psi 1}} \rho u \sum_{1}^{E\phi\frac{n}{\psi_1 u}} u$$

Принимая въ соображеніе, что

$$\sum_{1}^{u} \rho(u) = \mathrm{E}\frac{u}{1} + \mathrm{E}\frac{u}{2} + \mathrm{E}\frac{u}{3} + \ldots\ldots + \mathrm{E}\frac{u}{u} = \mu(u),$$

имѣемъ

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} \mu\,[E\phi_1(n-\psi u)] = \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)} \rho(u)\,\frac{E^2\phi(n-\psi_1 u) + E\phi(n-\psi_1 u)}{2},$$

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} u\mu\left[E\phi_1\,\frac{n}{\psi u}\right] = \sum_{1}^{E\phi_1\frac{n}{\phi 1}} \frac{1}{2}\left[E^2\phi\,\frac{n}{\psi_1 u} + E\phi\,\frac{n}{\psi_1 u}\right]\rho(u)$$

Полагая $\varphi(u) = \int(u)$ суммѣ дѣлителей числа u, а $\theta(u) = 1$ или 0, смотря потому, будетъ ли u простымъ или сложнымъ числомъ, получимъ уравненія

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} \int(u) N[E\phi_1(n-\psi u)] = \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)} \theta(u)\tau[E\phi(n-\psi_1 u)]$$

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} N\left[E\phi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right)\right]\int(u) = \sum_{1}^{E\phi_1\frac{n}{\psi 1}} \theta(u)\tau\left[E\phi\frac{n}{\psi_1 u}\right],$$

гдѣ $N(u)$ означаетъ число простыхъ чиселъ, а

$$\tau(u) = \mathrm{E}\frac{u}{1} + 2\mathrm{E}\frac{u}{2} + 3\mathrm{E}\frac{u}{3} + \ldots\ldots + k\mathrm{E}\frac{u}{k} + \ldots\ldots + u\mathrm{E}\frac{u}{u}.$$

Опуская $\theta(u)$, мы должны замѣнить знакъ $\sum$ знакомъ σ, означающимъ, что сумма распространяется на одни простыя числа. Для $\psi(u) = u^2$, $\varphi u = \sqrt{u}$, $\psi_1(u) = u$, $\varphi_1(u) = u$, наши формулы примутъ видъ

$$\sum_{1}^{\mathrm{E}\sqrt{n-1}} \mathrm{N}(n - u^2) \int (u) = \sigma_{1}^{n-1} \tau(\mathrm{E}\sqrt{n-u})$$

$$\sum_{1}^{n} \mathrm{N}\left[\mathrm{E}\frac{n}{u^2}\right] \int (u) = \sigma_{1}^{n} \tau\left[\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{u}}\right].$$

Дѣлая различныя вставки, мы могли бы вывести множество числовыхъ законовъ между прерывными функціями. Мы оставляемъ это, полагая, что на показанныхъ примѣрахъ достаточно ясно указанъ тотъ методъ, помощію котораго могутъ быть выведены эти законы. Всѣ эти законы, являясь простымъ слѣдствіемъ второго общаго закона числовыхъ тожествъ, составляютъ необходимую принадлежность числового исчисленія и безъ помощи пріемовъ этого исчисленія едвали всегда могутъ быть выведены другимъ путемъ съ достаточною простотою.

Приложеніе числовыхъ тожествъ къ выводу нѣкоторыхъ формулъ по конечнымъ разностямъ дѣлаетъ изъ нихъ область соотношеній и законовъ, имѣющихъ нѣчто общее и для функцій аналитическихъ и для функцій числовыхъ.

§ 24.

Второй законъ числовыхъ тожествъ даетъ возможность преобразовывать одно числовое выраженіе въ другое и выбирать для вычисленія такое изъ нихъ, какое болѣе удобно и проще.

Но можно совершать частныя преобразованія, смотря по виду функцій ψ и ψ_1, зависящія отъ соображеній, находящихся въ непосредственной связи съ формою этихъ функцій, ихъ способностію возрастать и убавляться. Мы укажемъ здѣсь на частное преобразованіе, употребленное Леженомъ-Дирикле для вычисленія числового выраженія

$$\varphi(1)\mathrm{E}\,\frac{n}{1}+\varphi(2)\mathrm{E}\,\frac{n}{2}+\varphi(3)\,\mathrm{E}\,\frac{n}{3}+\ldots\ldots+\varphi(p)\mathrm{E}\,\frac{n}{p}+\ldots\ldots$$

Взглядываясь въ это выраженіе, не трудно замѣтять, что числовыя количества въ рядѣ $\mathrm{E}\,\frac{n}{1}$, $\mathrm{E}\,\frac{n}{2}$, $\ldots\ldots\mathrm{E}\,\frac{n}{k}\ldots\ldots$ уменьшаются чрезвычайно быстро вначалѣ, но потомъ, дойдя до извѣстнаго члена, начинаютъ по величинѣ повторяться, и если уменьшаются, то не болѣе, какъ на единицу

Для опредѣленія, съ какого члена начинается подобное свойство даннаго числового ряда, нужно найти такой указатель μ чтобы разница между двумя рядомъ стоящими числами равнялась или была менѣе единицы, т. е. нужно удовлетворить условію

$$\frac{n}{\mu}-\frac{n}{\mu+1}=\frac{\mu(\mu+1)}{n}\leqq 1,\ \text{откуда}\ \mu(\mu+1)\geqq n$$

Не имѣя въ виду точно опредѣлить подобный членъ до единицы, мы можемъ опредѣлить μ изъ условія $\mu^2\geqq n$ и положить $\mu=\mathrm{E}\sqrt{n}$, если n полный и $\mu=1+\mathrm{E}\sqrt{n}$, если n неполный квадратъ, тогда условіе $\mu(\mu+1)\geqq n$ будетъ выполнено.

Положивъ $\mathrm{E}\,\frac{n}{\mu}=\nu$, мы видимъ, что μ членовъ ряда

$\sum\limits_{1}^{n}\varphi(u)\mathrm{E}\,\frac{n}{u}$ будутъ обладать свойствомъ быстраго убыванія; начиная же съ члена $\mu+1$, числовой рядъ

$$\varphi(\mu+1)\mathrm{E}\frac{n}{\mu+1}+\varphi(\mu+2)\mathrm{E}\frac{n}{\mu+2}+\ldots.+\varphi(p)\mathrm{E}\frac{n}{p} \qquad (f)$$

будетъ въ числовыхъ частяхъ, зависящихъ отъ E, принимаетъ всѣ значенія, содержащіяся въ рядѣ натуральныхъ чиселъ, начиная съ $\nu=\mathrm{E}\frac{n}{\mu}$ до $\mathrm{E}\frac{n}{p}=q$; притомъ нѣсколько членовъ могутъ имѣть одинаковую величину.

Указатель s послѣдняго члена въ числовомъ рядѣ $\mathrm{E}\frac{n}{1}$, $\mathrm{E}\frac{n}{2}$, ... $\mathrm{E}\frac{n}{p}$ .... $\mathrm{E}\frac{n}{n}$, который равенъ t величинѣ $<\nu$, и за которымъ слѣдуетъ членъ, меньшій t по величинѣ, опредѣлится изъ условій $\frac{n}{s}\geqq t$, $\frac{n}{s+1}<t$, $s\leqq\frac{n}{t}$, $s+1>\frac{n}{t}$, откуда $s=\mathrm{E}\frac{n}{t}$.

Поэтому въ рядѣ указатели членовъ, имѣющихъ одинаковую величину, должны возрастать,

начиная съ $s=\mu$ до $s=\mathrm{E}\frac{n}{\nu}$, для членовъ, имѣющихъ велич. $\mathrm{E}\frac{n}{s}=\nu$

. . . . съ $s=\mathrm{E}\frac{n}{\nu}$ до $s=\frac{n}{\nu-1}$ . . . . $\mathrm{E}\frac{n}{s}=\nu-1$

. . . .

начиная съ $s=\mathrm{E}\frac{n}{q+1}$ до $s=p$ для членовъ, имѣющихъ величину $\mathrm{E}\frac{n}{s}=q$.

Частныя суммы этихъ членовъ съ числовыми коеффиціентами, имѣющими одинаковую величину для ряда (f), будутъ

$$\nu\left[\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{\nu}\right)-\psi(\mu)\right],\quad (\nu-1\left[\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{\nu-1}\right)\psi-\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{\nu}\right)\right],$$

$$(\nu-2)\left[\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{\nu-2}\right)-\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{\nu-1}\right)\right],\ q\left[\psi p-\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{q+1}\right)\right]$$

гдѣ $\psi(s)=\sum\varphi(s)$

Общая же сумма ряда (f) будетъ

$$\sum_{\mu+1}^{p}\varphi(u)\,\mathrm{E}\frac{n}{u}=-\nu\psi(\mu)+\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{\nu}\right)+\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{\nu-1}\right)+\ldots\ldots$$

$$+\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{q+1}\right)+q\psi(p)$$

откуда получаемъ общую формулу преобразованія

$$\sum_{1}^{p}\varphi(u)\mathrm{E}\frac{n}{u}=\psi(p)\,\mathrm{E}\frac{n}{p}-\mathrm{E}\frac{n}{\mu}\psi(\mu)$$

$$+\sum_{1}^{\mu}\varphi(u)\,\mathrm{E}\frac{n}{\mu}+\sum_{q+1}^{\nu}\psi\left[\mathrm{E}\frac{n}{u}\right]$$

Для $p=n$ имѣемъ

$$\sum_{1}^{n}\varphi(u)\mathrm{E}\frac{n}{u}=-\mathrm{E}\frac{n}{\mu}\psi(u)+\sum_{1}^{\mu}\varphi(u)\mathrm{E}\frac{n}{u}+\sum_{1}^{\nu}\psi\left(\mathrm{E}\frac{n}{u}\right).$$

Это преобразованіе числового выраженія полезно въ томъ отношеніи, что n членовъ замѣнились μ и ν числовыми членами, и слѣдовательно при приближенномъ вычисленіи этой суммы можно достигнуть большей точности.

Такъ для случая, когда $\varphi(u)=1$, будемъ имѣть

$$\mathrm{N}(n)=\sum_{1}^{n}\mathrm{E}\frac{n}{u}=-\mu\nu+\sum_{1}^{\mu}\mathrm{E}\frac{n}{u}+\sum_{1}^{\nu}\mathrm{E}\frac{n}{u}.$$

Замѣняя $E\frac{n}{s}$ чрезъ $\frac{n}{s}$ для приближеннаго опредѣленія $N(n)$, мы совершимъ ошибку только порядка $\sqrt{n}$, слѣдовательно опредѣленіе будетъ гораздо точнѣе того, какое мы сдѣлали выше.

Съ подобною же погрѣшностію порядка $\sqrt{n}$ мы можемъ положить

$$n\sum_{1}^{\mu}\frac{1}{u} = n\sum_{1}^{\nu}\frac{1}{u} = \frac{1}{2}n\log n + Cn, \text{ гдѣ } C = 0.5772,\ \mu\nu = n, \text{ и}$$

$$\text{слѣдовательно } \sum_{1}^{n} E\frac{n}{u} = N(n) = n\log n + (2C - 1)\,n$$

Изъ этой формулы Дирикле вывелъ весьма интересное заключеніе при сравненіи ея съ формулою

$$\sum_{1}^{n}\frac{n}{u} = n\log n + Cn, \text{ вѣрною до порядка } \sqrt{n}.$$

Вычитая одну изъ другой, мы имѣемъ

$$\sum_{1}^{n}\left(\frac{n}{u} - E\frac{n}{u}\right) = \sum_{1}^{n} O\left(\frac{n}{u}\right) = (1 - C)n$$

откуда средняя величина количества $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} O\left(\frac{n}{u}\right) = (1 - C) < \frac{1}{2}$,

слѣдовательно при раздѣленіи числа n на рядъ чиселъ отъ 1 до n, мы чаще должны встрѣчать случай, когда остатокъ менѣе половины дѣлителя, чѣмъ случай, когда онъ болѣе, то есть въ рядѣ сравненій, $n \equiv \left[a_u\right]_1^n \left(\text{мод. } \left[u\right]_1^n\right)$ наименьшій положительный вычетъ a_u будетъ чаще менѣе $\frac{u}{2}$.

Дирикле не останавливается на этомъ замѣчаніи о вычетахъ a_u, но старается численно опредѣлить самое отношеніе или предѣлъ, къ которому стремится отношеніе числа остатковъ этихъ двухъ группъ.

§ 25.

Выведенныя нами формулы второго закона числовыхъ тождествъ даютъ возможность рѣшать вопросъ о числѣ цыфръ послѣ ряда опредѣленныхъ ариѳметическихъ операцій въ формѣ болѣе сложной.

Такъ, составивъ рядъ чиселъ

$$n - \psi_1(1),\ n - \psi_1(2),\ n - \psi_1(3),\ \ldots\ldots n - \psi_1(k)\ldots.$$

и означивъ число цыфръ до запятой въ этихъ частныхъ послѣдовательно чрезъ ν_1, $\nu_2, \ldots \nu_k \ldots$, мы докажемъ, что имѣетъ мѣсто формула

$$\sum_{1}^{E\phi_1(n-10)} \varphi u . \nu_u = \sum_{1}^{E\phi_1(n-10)} \varphi u + \sum_{1}^{\nu_1 \quad 1} \sum_{1}^{E\phi_1(n-10^u)} \varphi(u)$$

Дѣйствительно, положивъ въ общемъ законѣ числового тожества

$$\sum_{1}^{E\phi_1(n \quad \psi 1)} \varphi u \, E\phi\,(n - \psi_1 u) = \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi u)} \varphi(u).$$

$\psi(x) = 10^x$, $\phi(x) = Log x$, и сдѣлавъ вышепоказанныя обозначенія, мы найдемъ предшествующую формулу.

Составивъ подобнымъ же образомь рядъ чиселъ

$$\frac{n}{\psi(1)}, \frac{n}{\psi(2)} \ldots\ldots \frac{n}{\psi\left(E\left(\psi\frac{n}{\psi_1 1}\right)\right)},$$

и означивъ послѣдовательно число цыфръ въ нихъ черезъ

$$\nu_1,\ \nu_2 \ldots\ldots \nu_k \ldots\ldots \nu_{E\left(\phi\frac{n}{\psi_1 1}\right)},$$

мы будемъ имѣть слѣдующую формулу

$$\sum_{1}^{\mathrm{E}\dagger\frac{n}{10}} \nu_u\,\varphi(u) = \sum_{1}^{\mathrm{E}\dagger\frac{n}{10}} \varphi u + \sum_{1}^{\nu_1-1} \sum_{1}^{\mathrm{E}\left(\dagger\frac{n}{10^u}\right)} \varphi(u).$$

Мы вывели формулу при опредѣленіи суммы корней неопредѣленнаго уравненія $z+xy=n$

$$\mathrm{E}^2\frac{n}{1}+\mathrm{E}^2\frac{n}{2}+\mathrm{E}^2\frac{n}{3}+\ldots+\mathrm{E}^2\frac{n}{h}+\ldots$$

$$\ldots=\mathrm{E}\frac{n}{1}+3\mathrm{E}\frac{n}{2}+5\mathrm{E}\frac{n}{3}+\ldots+(2k-1)\mathrm{E}\frac{n}{k}+\ldots$$

Такъ какъ $\displaystyle\sum_{1}^{n}\int(u)=\mathrm{E}\frac{n}{1}+2\mathrm{E}\frac{n}{2}+3\mathrm{E}\frac{n}{3}+\ldots$ и

$$\sum_{1}^{n}\xi(u)=\mathrm{E}\frac{n}{1}+\mathrm{E}\frac{n}{2}+\mathrm{E}\frac{n}{3}+\ldots$$

гдѣ $\int(u)$ означаетъ сумму, а $\xi(u)$ число дѣлителей числа u, то, замѣняя вторую часть соотвѣтствующими числовыми функціями, мы найдемъ

$$2\sum_{1}^{n}\int(u)-\sum_{1}^{n}\xi(u)=\sum_{1}^{n}\mathrm{E}^2\frac{n}{u}\quad\ldots\ldots\quad(g)$$

На основаніи формулы

$$\sum_{1}^{n}\varphi(u)\mathrm{E}\frac{n}{u}=\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{u}}\varphi(u)\qquad(i)$$

можно еще преобразовать выраженіе $\sum_{1}^{n} E^2 \frac{n}{u}$, полагая въ ней

$\varphi(u) = E\frac{n}{u}$, тогда

$$\sum_{1}^{n} E^2 \frac{n}{u} = \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{E\frac{n}{u}} E\frac{n}{u}.$$

Итакъ, внося въ формулу (g) эту величину для $\sum_{1}^{n} E^2 \frac{n}{u}$,

мы получимъ

$$2\sum_{1}^{n} \int(u) - \sum_{1}^{n} \xi(u) = \sum_{1}^{E\frac{n}{1}} E\frac{n}{u} + \sum_{1}^{E\frac{n}{2}} E\frac{n}{u} + \sum_{1}^{E\frac{n}{3}} E\frac{n}{u} + \cdots\cdots$$

$$+ \sum_{1}^{E\frac{n}{k}} E\frac{n}{u} + \cdots\cdots$$

Замѣняя n чрезъ $n - 1$, и вычитая эту формулу изъ предшествующей, найдемъ

$$2\int(n) - \xi(n) = \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{E\frac{n}{u}} E\frac{n}{u} - \sum_{1}^{n-1} \sum_{1}^{E\frac{n-1}{u}} E\frac{n-1}{u} \qquad (h).$$

Распредѣливъ дѣлителей числа n по ихъ величинѣ, начиная съ меньшаго 1 и кончая n, мы означимъ чрезъ $\xi'(u)$ число дѣлителей числа n, не превосходящихъ u. Вторая часть формулы (h) выражается помощію этихъ числовыхъ функцій.

Чтобы найти выраженіе второй части, мы представимъ ее въ формѣ

$$\left(\sum_{1}^{E\frac{n}{1}} E\frac{n}{u} - \sum_{1}^{E\frac{n-1}{1}} E\frac{n-1}{u}\right) + \left(\sum_{1}^{E\frac{n}{2}} E\frac{n}{u} - \sum_{1}^{E\frac{n-1}{2}} E\frac{n-1}{u}\right) + \ldots .$$

$$+\left(\sum_{1}^{E\frac{n}{k}} E\frac{n}{u} - \sum_{1}^{E\frac{n-1}{k}} E\frac{n-1}{u}\right) + \ldots .$$

и разсмотримъ какую нибудь разность $\sum_{1}^{E\frac{n}{k}} E\frac{n}{u} - \sum_{1}^{E\frac{n-1}{k}} E\frac{n-1}{u}$.

Послѣдній членъ въ первой суммѣ будетъ $E\dfrac{n}{E\frac{n}{k}}$. во второй $E\dfrac{n-1}{E\frac{n-1}{k}}$. Если число k не будетъ дѣлителемъ числа n, то $E\frac{n}{k} = E\frac{n-1}{k} = k'$ и оба ряда будутъ состоять изъ одинаковаго числа членовъ, давая въ своей разности величину $\xi\left(\frac{n}{k}\right)$; если же k будетъ дѣлителемъ числа n, то

$E\frac{n}{k} = k' = 1 + E\frac{n-1}{k}$, и слѣдовательно

$$\sum_{1}^{E\frac{n}{k}} E\frac{n}{u} - \sum_{1}^{E\frac{n-1}{k}} E\frac{n-1}{u} = \xi\left(\frac{n}{k}\right) + E\frac{n-1}{k'}$$

Означивъ дѣлителя n, сопряженнаго съ дѣлителемъ k, чрезъ λ, такъ что $n=k\lambda$, мы будемъ имѣть $\mathrm{E}\frac{n}{k}=\lambda$ и $\mathrm{E}\dfrac{n}{\mathrm{E}\frac{n}{k}}$

$$=\mathrm{E}\frac{n}{\lambda}=k \text{ и } \mathrm{E}\frac{n-1}{\lambda}=k-1.$$

Итакъ всякій разъ, когда $k=$ дѣлителю числа n

$$\sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{k}}\mathrm{E}\frac{n}{u}-\sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n-1}{k}}\mathrm{E}\frac{n-1}{u}=\xi\left(\frac{n}{k}\right)+k-1.$$

На этомъ основаніи

$$2\int(n)-\xi(n)=\xi'(n)+\xi'\left(\frac{n}{2}\right)+\xi'\left(\frac{n}{3}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\xi'\left(\frac{n}{n}\right)+\int(n)-\xi(n),$$

откуда получаемъ

$$\xi_1(n)=\int(n)=\xi'(n)+\xi'\left(\frac{n}{2}\right)+\xi'\left(\frac{n}{3}\right)+\cdots\cdots+\xi'\left(\frac{n}{n}\right).$$

Если положимъ въ формулѣ (i) $\varphi(u)=\mathrm{E}^2\frac{n}{u}$, то найдемъ

$$\sum_{1}^{n}\mathrm{E}^3\frac{n}{u}=\sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{1}}\mathrm{E}^2\frac{n}{u}+\sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{2}}\mathrm{E}^2\frac{n}{u}+\sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{3}}\mathrm{E}^2\frac{n}{u}+\cdots\cdots$$

Замѣняя n черезъ $n-1$, мы получимъ

$$3\xi_2(n)-3\xi_1(n)+\xi(n)=\left(\sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{1}}\mathrm{E}^2\frac{n}{u}-\sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n-1}{u}}\mathrm{E}^2\frac{n-1}{u}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\sum_{1}^{E\frac{n}{k}} E^2\frac{n}{u} - \sum_{1}^{E\frac{n-1}{k}} E^2\frac{n-1}{u}\right) + \ldots\ldots$$

гдѣ $\xi_2(n)$ означаетъ сумму квадратовъ, а $\xi_1(n)$ сумму дѣлителей числа n.

Означимъ чрезъ $\bar{\xi}'_1(u)$ сумму дѣлителей, сопряженныхъ всѣмъ дѣлителямъ, не превосходящимъ u, тогда

$$\sum_{1}^{E\frac{n}{k}} E^2\frac{n}{u} - \sum_{1}^{E\frac{n-1}{k}} E^2\frac{n-1}{u} = 2\bar{\xi}'_1\left(\frac{n}{k}\right) - \xi'\left(\frac{n}{k}\right) + \theta$$

величина $\theta = 0$, если k не будетъ дѣлителемъ n, если же k будетъ дѣлителемъ n, то $\theta = \left(E\frac{n}{k} - 1\right)^2 = (\lambda - 1)^2$

Принимая это въ соображеніе, не трудно видѣть, что

$$3\xi_2(n) - 3\xi_1(n) + \xi(n) = 2\sum_{1}^{n} \bar{\xi}_1'\left(\frac{n}{u}\right) -$$

$$-\sum_{1}^{n} \xi'\left(\frac{n}{u}\right) + \xi_2(n) - 2\xi_1(n) + \xi(n)$$

откуда по сокращеніи имѣемъ формулу

$$\xi_2(n) = \bar{\xi}'_1\left(\frac{n}{1}\right) + \bar{\xi}'_1\left(\frac{n}{2}\right) + \bar{\xi}'_1\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots\ldots$$

Означивъ чрезъ $\xi'_{-1}(u)$ сумму дѣлителей минусъ первой степени, не превосходящихъ u, мы имѣемъ вообще $\bar{\xi}'_1(u) = n\xi'_{-1}(u)$, слѣдовательно наша формула приметъ видъ

$$\xi_2(n) = n\left[\xi'_{-1}\left(\frac{n}{1}\right) + \xi'_{-1}\left(\frac{n}{2}\right) + \xi'_{-1}\left(\frac{n}{3}\right) + \cdots\right.$$

$$\ldots + \xi'_{-1}\left(\frac{n}{k}\right) + \ldots\Big] = n\sum_{1}^{n}\xi'_{-1}\left(\frac{n}{u}\right).$$

Докажемъ, что, если имѣетъ мѣсто для m — 1-й степени и всѣхъ нисшихъ степеней дѣлителей уравненіе

$$\xi_k(n) = \bar{\xi}_{k-1}(u) + \bar{\xi}_{k-1}\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots = n^{k-1}\sum_{1}^{n}\xi_{-(k-1)}(u)$$

то оно будетъ имѣть мѣсто и для $m^{й}$ степени.

Здѣсь $\bar{\xi}_{k-1}(u)$ означаетъ сумму всѣхъ дѣлителей, сопряженныхъ дѣлителямъ n, не превосходящимъ u.

Дѣйствительно, замѣнивъ въ уравненіи

$$\sum_{1}^{n}\mathrm{E}^{m+1}\frac{n}{u} = \sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{1}}\mathrm{E}^{m}\frac{n}{u} + \sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{2}}\mathrm{E}^{m}\frac{n}{u} + \ldots$$

n чрезъ $n-1$ и вычтя, получимъ

$$(m+1)\xi_m(n) - \frac{(m+1)m}{2}\xi_{m-1}(n) + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\xi_{m-2}(n) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots k+1}\xi_{m-k}(n) + \ldots =$$

$$= m\sum_{1}^{n}\bar{\xi}_{m-1}\left(\frac{n}{u}\right) - \frac{m(m-1)}{1.2}\sum\bar{\xi}_{m-2}\left(\frac{n}{u}\right) +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sum_{1}^{n}\bar{\xi}_{m-3}\left(\frac{n}{u}\right) - \ldots + \xi_m(n)$$

$$-m\xi_{m-1}(n) + \frac{m(m-1)}{1.2}\xi_{m-2}(n) - \ldots$$

Принявъ въ соображеніе уравненія

$$\sum_{1}^{n}\xi_{m-2}\left(\frac{n}{u}\right)=\xi'_{m-1}(n),\ \sum_{1}^{n}\xi_{m-3}\left(\frac{n}{u}\right)=\xi'_{m-2}(n),\ldots\ldots,$$

мы находимъ по сокращеніи

$$\xi_m(n)=\xi_{m-1}(n)+\xi_{m-1}\left(\frac{n}{2}\right)+\xi_{m-1}\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots=$$

$$=\sum_{1}^{n}\xi_{m-1}\left(\frac{n}{u}\right)=n^{m-1}\sum_{1}^{n}\xi'\left(\frac{n}{u}\right)_{-(m-1)}.$$

Всѣ эти формулы могли бы быть выведены гораздо проще изъ общей формулы

$$\sum_{1}^{n}\varphi(u)\mathrm{E}\frac{n}{u}=\sum_{1}^{n}\ \sum_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{u}}\varphi(u),$$

если бы мы замѣняли въ ней $\varphi(u)$ различными произвольными символами. Полагая въ этой формулѣ $\varphi(u)=(-1)^{u+1}$ и означая чрезъ $q(n)$ число нечетныхъ чиселъ въ числовомъ рядѣ $\left[\mathrm{E}\frac{n}{u}\right]_1^n$, мы найдемъ $q(n)=\mathrm{E}\frac{n}{1}-\mathrm{E}\frac{n}{2}+\mathrm{E}\frac{n}{3}-\mathrm{E}\frac{n}{4}+\ldots$

Возрастающая функція $\varphi(u)$ можетъ быть найдена по уравненію $\sum_{1}^{u}\varphi(u)=\psi(u)$, если возрастающая функція $\psi(u)$ дана. Дѣйствительно, $\varphi(u)=\psi(u)-\psi(u-1)$. Это даетъ намъ возможность опредѣлять выраженіе $\sum_{1}^{u}\varphi(u)\mathrm{E}\frac{n}{u}$, тожественно равное выраженію $\sum_{1}^{n}\psi\left(E\frac{n}{u}\right)$. Такъ, положивъ, что мы ищемъ выраженіе, равное выраженію

$$S = E\frac{\left(E\frac{n}{1}\right)^2}{2} + E\frac{\left(E\frac{n}{2}\right)^2}{2} + \dots\dots = \sum_{1}^{n} E\frac{\left(E\frac{n}{u}\right)^2}{2}$$

мы должны принять $\psi(u) = E\frac{u^2}{2}, \psi(u-1) = E\frac{(u-1)^2}{2}$;

$$\psi(u) = \psi(u-1) = E\frac{u^2}{2} - E\frac{u^2+1}{2} + u \text{ и}$$

$$E\frac{\left(E^2\frac{n}{1}\right)}{2} + E\frac{E^2\frac{n}{2}}{2} + E\frac{E^2\frac{n}{3}}{2} + \dots\dots =$$

$$= E\frac{n}{1} + 2E\frac{n}{2} + 3E\frac{n}{3} + \dots + nE\frac{n}{n}$$

$$-\left[E\frac{n}{1} + E\frac{n}{3} + E\frac{n}{5} + E\frac{n}{7} + \dots\right]$$

Такъ какъ $E\frac{n}{1} + 2E\frac{n}{2} + 3E\frac{n}{3} + \dots + nE\frac{n}{n} = \sum_{1}^{n}\int(u) = \sigma(n)$ и

$N(n) = E\frac{n}{1} + E\frac{n}{3} + E\frac{n}{5} + \dots$ означаетъ число нечетныхъ дѣлителей всѣхъ чиселъ отъ 1 до n, то

$$\sigma(n) = N(n) + \sum_{1}^{n} E\frac{E^2\frac{n}{u}}{2}$$

Преобразованіе, указанное нами, мы можемъ совершать не только для числовыхъ функцій, но и надъ суммою какихъ угодно функцій. Дѣйствительно, имѣя $S = \psi 1 + \psi(2) + \ldots + \psi(n)$, мы можемъ выразить эту сумму въ видѣ:

$$S = \frac{\psi(1)}{E\frac{n}{1}} \cdot E\frac{n}{1} + \frac{\psi(2)}{E\frac{n}{2}} \cdot E\frac{n}{2} + \ldots + \frac{\psi(n)}{E\frac{n}{n}} E\frac{n}{n}.$$

Полагая въ формулѣ (i) $\varphi(u) = \frac{\psi u}{E\frac{n}{10}}$, получимъ

$$S = \sum_1^n \psi(u) = \sum_1^n \sum_1^{E\frac{n}{u}} \frac{\psi u}{E\frac{u}{u}} = \sum_1^{E\frac{n}{1}} \frac{\psi u}{E\frac{n}{u}} + \sum^{E\frac{n}{2}} \frac{\psi(u)}{E\frac{n}{u}} + \ldots$$

Полагая $\psi(u) = u^2$, $n = 5$, имѣемъ

$$S = \sum_1^5 u^2 = \sum_1^5 \frac{u^2}{E\frac{5}{u}} + \sum_1^2 \frac{u^2}{E\frac{5}{u}} + \frac{3}{5} = 53.$$

§ 26.

Разсмотримъ, какую форму приметъ второй законъ числовыхъ тожествъ съ одной произвольной функціей для неопредѣленнаго уравненія $z + \psi(x) - \psi_1(y) = n$. Предполагая, что y получаетъ значенія только отъ 1 до k, законъ этотъ можно вывести изъ того соображенія, что величину $\sum \varphi(y)$, распространенную на всѣ значенія перемѣннаго y въ данномъ уравненіи, можно найти двумя способами: 1) или опредѣляя число разъ, для котораго $y = 1, 2, 3 \ldots k$, или 2) полагая послѣдовательно $x = 1, 2, \ldots\ldots E\phi(n + \psi_1 k)$, принять въ соображеніе соотвѣтствующія измѣненія y.

Въ первомъ случаѣ

$$S_1 = \sum \varphi(y) = \varphi(1)\,E\phi\,(n + \psi_1(1)) + \varphi(2)\,E\phi\,(n + \psi_1 2) + \ldots$$
$$\ldots + \varphi(k)\,E\phi\,(n + \psi_1 k) + \ldots\ldots$$

Во второмъ случаѣ легко видѣть, что для измѣненія x отъ 1 до $E\phi\,(n)$ перемѣнное y можетъ принимать всѣ значенія отъ 1 до k, и слѣдовательно для этихъ измѣненій перемѣннаго x сумма значеній $\varphi(y)$, распространенная на величины соотвѣтствующихъ корней y, будетъ составлять величину

$E\phi\,(n)\sum\limits_{1}^{k}\varphi(u)$. Для значеній же $x > E\phi(n)$ y получаетъ величины, содержащіяся или въ рядѣ натуральныхъ чиселъ отъ $1 + E\phi_1(\psi\tau - n)$ до k включительно для случая, когда $\phi_1(\psi\tau - n)$ не цѣлое число, или въ рядѣ отъ $E\phi_1\,(\psi\tau - n)$ до k для случая, когда количество $\phi_1\,(\psi\tau - n)$ будетъ цѣлымъ, слѣдовательно сумма S_1, сосчитанная такимъ образомъ, будетъ выражаться формулою

$$S_1 = E\phi\,(n)\sum_{1}^{k}\varphi\,(u) + \sum_{1+E\phi_1(\psi(1+\theta)-n)}^{k}\varphi\,(u) + \sum_{1+E\phi_1\,(\psi(\theta+2)-n)}^{k}\varphi(u) + \ldots +$$
$$\ldots + \sum_{1+E\phi_1\,(\psi\,\Omega - n)}^{k}\varphi(u) + \sum_{1+\theta}^{\Omega}\omega_u\,\phi_1\,(\psi u - n),$$

гдѣ $\theta = E\phi\,(n)$, $\Omega = E\phi\,(n + \psi_1 k)$, $\omega_u = 1$ или 0 смотря потому, будетъ ли или не будетъ количество $\phi_1\,(\psi u - n)$ числомъ цѣлымъ.

Не трудно видѣть, что

$$S_1 = E\phi\,(n + \psi_1 k)\sum_{1}^{k}\varphi\,(u) - \Big[\sum_{1}^{E\phi_1\,(\psi(1+\theta)-n)}\varphi(u) + \ldots\ldots$$

$$+\sum_{1}^{E\phi_1(\psi\Omega-n)}\varphi(u)\Big] \qquad +\sum_{1+\theta}^{\Omega}\omega_u\,\varphi\,(\phi_1\,(\psi u-n)).$$

Сравнивая два выраженія для одной и той же числовой суммы, мы получаемъ формулу второго закона числовыхъ тождествъ съ одной произвольной функціей для уравненія $z+\psi x-\psi_1 y=n$.

$$(\mathrm{V})\sum_{1}^{k}\varphi(u)\,E\phi\,(n+\psi_1 u)+\sum_{1+E\phi(n)}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\ \sum_{1}^{E\phi_1(\psi u-n)}\varphi(u)=$$

$$=E\phi(n+\psi_1 k)\sum_{1}^{k}\varphi(u)+\sum_{1E\phi n}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\omega_u\,\varphi\,(\phi_1\,(\psi u-n))$$

Формула эта для случая, когда $\psi(x)=x$, $\psi_1(y)=y$, то есть для неопредѣленнаго уравненія $z+x-y=n$, принимаетъ видъ

$$\sum_{1}^{k}\varphi u\,(n+u)+\sum_{n+1}^{n+k}\ \sum_{1}^{u-n}\varphi(u)=(n+k)\sum_{1}^{k}\varphi u+\sum_{n+1}^{n+k}\omega_n\varphi(u-n)$$

но такъ какъ $\sum\limits_{n+1}^{n+k}\omega_u\,(u-n=\sum\limits_{1}^{k}\varphi(u)$, то послѣ сокращенія получаемъ

$$\sum_{1}^{k}u\varphi(u)+\sum_{n+1}^{n+k}\ \sum_{1}^{u-n}\varphi(u)=k\sum_{1}^{k}\varphi(u)+\sum_{1}^{k}\varphi(u),\quad \text{или}$$

$$\sum_{n+1}^{n+k}\ \sum_{1}^{u-n}\varphi(u)=(k+1)\sum_{1}^{k}\varphi(u)-\sum_{1}^{k}u\varphi(u).$$

Принимая въ соображеніе, что $\sum_{n+1}^{n+k} \sum_{1}^{u-n} \varphi(u) = \sum_{1}^{k} \sum_{1}^{u} \varphi u$, не трудно видѣть, что эта формула по конечнымъ разностямъ есть таже самая формула, которая получалась изъ теоріи неопредѣленнаго уравненія $z + x + y = n$.

Для неопредѣленнаго уравненія $z + x^2 - y^3 = n$ мы имѣемъ $\psi(x) = x^2$, $\psi_1(y) = y^3$, $\phi(x) = \sqrt{x}$, $\phi_1(y) = \sqrt[3]{y}$. Полагая $n = 8$, $k = 5$, $\varphi(u) = u$, имѣемъ

$$\sum_{1}^{5} u \mathrm{E}\sqrt{8+u^3} + \sum_{3}^{11} \sum_{1}^{\mathrm{E}\sqrt[3]{u^2-8}} u = 11 \sum_{1}^{5} u + \sum_{3}^{11} \omega_u \sqrt{u^2-8}$$

$$\sum_{1}^{5} u \mathrm{E}\sqrt{8+u^3} = 113, \sum_{3}^{11} \sum_{1}^{\mathrm{E}\sqrt[3]{u^2-8}} u = 55, \sum_{3}^{11} \omega_u \sqrt[3]{u^2-8} = 3,$$ слѣдовательно наша формула въ этомъ случаѣ даетъ $113 + 55 = 11.15 + 3$.

Выведенная общая формула для случая, когда $\psi(x) = x$, принимаетъ видъ

$$\sum^{k} \varphi(u) \mathrm{E}(n + \psi_1(u)) + \sum_{n+1}^{\mathrm{E}(n+\psi_1 k)} \sum_{1}^{\mathrm{E}\phi_1(u-n)} \varphi(u) = \mathrm{E}(n + \psi_1 k) \sum_{1}^{k} \varphi(u) +$$

$$+ \sum_{n+1}^{\mathrm{E}(n+\psi_1 k)} \omega_u \varphi[\phi_1(u-n)] \qquad (j)$$

Для случая, когда $\psi_1(u)$ цѣлая функція, и $n = 0$, имѣемъ

$$\sum_{1}^{k} \varphi(u)\psi_1(u) + \sum_{n+1}^{\psi_1 k} \sum_{1}^{\mathrm{E}\phi_1(u)} \varphi(u) = \psi_1 k \sum_{1}^{k} \varphi(u) + \sum_{1}^{\psi_1 k} \omega \varphi(\phi_1 u) \qquad (k)$$

Случаю же, когда $\phi_1(u)$ цѣлая функція, будетъ соотвѣтствовать формула

$$\sum_{1}^{k}\varphi(u)E\psi_1(u)+\sum_{n+1}^{E\psi_1 k}\ \sum_{1}^{\phi_1(u-n)}\varphi(u)=$$

$$=E\psi_1 k\sum_{1}^{k}\varphi(u)+\sum_{n+1}^{E\psi_1(k)}\omega_u\varphi[\phi_1(u-n)] \qquad (l)$$

Для неопредѣленнаго уравненія $z+\psi(x)-y=n$ общій законъ числовыхъ тожествъ приметъ видъ

$$\sum_{1}^{k}\varphi(u)E\phi(n+u)+\sum_{1+E\phi(n)}^{E\phi(n+k)}\ \sum_{1}^{E(\psi u-n)}\varphi(u)=$$

$$=E\phi(n+k)\sum_{1}^{k}\varphi(u)+\sum_{1+E\phi(n)}^{E\phi(n+k)}\omega_u\varphi[\psi u-n] \qquad (m)$$

Если ψu функція цѣлая и $n=0$, $\phi 0=0$, то будетъ

$$\sum_{1}^{k}\varphi(u)E\phi(u)+\sum_{1}^{E\phi(k)}\ \sum_{1}^{\psi(u)-n}\varphi(u)=$$

$$=E\phi k\sum_{1}^{k}\varphi(u)+\sum_{1}^{E\phi(k)}\varphi[\psi u-n] \qquad (n)$$

§ 27,

Можно выводить законъ числовыхъ тожествъ съ одной произвольной функціей, вычисляя величину $\sum\varphi(x)$, гдѣ знакъ суммы распространяется на всѣ значенія x, удовлетворяющія неопредѣленному уравненію $z+\psi x-\psi_1 y=n$. Мы сохранимъ тотъ же пріемъ при этомъ выводѣ, то есть или опредѣлимъ: a) какія значенія получаетъ перемѣнное x для $y=1, 2, 3, \ldots k$, или b) найдемъ, сколько разъ $x=1, 2, \ldots E\phi(n+\psi_1 k)$ во всѣхъ парахъ (x, y), удовлетворяющихъ нашему уравненію.

Въ первомъ случаѣ $N_1=\sum\varphi(x)$ будетъ выражаться формулою

$$N_1=\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 1)}\varphi(u)+\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 2)}\varphi(u)+\ldots\ldots+\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)=\sum_{1}^{k}\ \sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 u)}\varphi(u)$$

Во второмъ случаѣ таже величина выразится формулою

$$N_2=k\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)-\sum_{1+E\phi(n)}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)E\phi_1(\psi u-n)+\sum_{1+E\phi n}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)\omega[\phi_1(\psi u-n)],$$

гдѣ вообще $\omega(u)=1$ или 0, смотря потому, будетъ ли u цѣлымъ или нецѣлымъ числомъ. Уравненіе $N_1=N_2$ даетъ въ этомъ случаѣ формулу

$$\text{(VI)}\quad \sum_{1}^{k}\ \sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 u)}\varphi(u)+\sum_{1+E\phi n}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)E\phi_1(\psi u-n)=k\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)+$$
$$+\sum_{1+E\phi(n)}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)\omega[\phi_1(\psi u-n)]$$

Для $\psi x=\phi x=x$, $\psi_1 y=\phi_1 y=y$, то есть для неопредѣленнаго уравненія $z+x-y=n$, этотъ законъ принимаетъ видъ слѣдующей формулы по конечнымъ разностямъ

$$\sum_{1}^{k}\ \sum_{1}^{n+u}\varphi(u)+\sum_{n+1}^{n+k}u\varphi(u)=k\sum_{1}^{n+k}\varphi(u)+(n+1)\sum_{n+1}^{n+k}\varphi(u) \qquad (o)$$

Для уравненія $z + x - \psi_1 y = n$, гдѣ $\psi_1 y$ цѣлая функція, общая формула принимаетъ видъ

$$\sum_{1}^{k}\sum_{1}^{n+\psi_1 u}\varphi(u)+\sum_{n+1}^{n+\psi_1 k}\varphi(u)\mathrm{E}\phi_1(u-n)=\sum_{1}^{n+\psi_1 k}\varphi(u)+\sum_{n+1}^{n+\psi_1 k}\varphi u\omega[\phi_1(u-n)] \quad (p)$$

Для $n = 0$ имѣемъ

$$\sum_{1}^{k}\sum_{1}^{\psi_1(u)}\varphi(u)+\sum_{1}^{\psi_1 k}\varphi(u)\mathrm{E}\phi_1(u)=k\sum_{1}^{\psi_1 k}\varphi(u)+\sum_{1}^{\psi_1 k}\varphi(u)\omega[\phi_1 u]$$

Для уравненія $z + \psi x - y = n$, гдѣ $\psi(x)$ цѣлая функція, имѣемъ

$$\sum_{1}^{k}\sum_{1}^{\mathrm{E}\phi(n+u)}\varphi(u)+\sum_{1+\mathrm{E}\phi(n)}^{\mathrm{E}\phi(n+k)}\varphi(u)\,(\psi(u)-n)=k\sum_{1}^{\mathrm{E}\phi(n+k)}\varphi(u)+\sum_{1+\mathrm{E}\phi n}^{\mathrm{E}\phi(n+k)}\varphi(u) \quad (\nu)$$

Для $n = 0$, $\psi 0 = \phi(0) = 0$, получимъ

$$\sum_{1}^{k}\sum_{1}^{\mathrm{E}\phi u}\varphi(u)+\sum_{1}^{\mathrm{E}\phi k}\varphi(u)\psi(u)=k\sum_{1}^{\mathrm{E}\phi k}\varphi(u)+\sum_{1}^{\mathrm{E}\ k}\varphi u=(k+1)\sum_{1}^{k}\varphi(u)$$

Полагая въ послѣднемъ уравненіи $\psi(u) = u^3$, $k = 10$, получимъ

$$\sum_{1}^{10}\sum_{1}^{\mathrm{E}\sqrt[3]{u}}\varphi(u)+\sum_{1}^{2}u^3\varphi(u)=11\sum_{1}^{2}(\varphi\ u)$$

что для $\varphi(u) = u$ даетъ

$$\sum_{1}^{10}\frac{\mathrm{E}^2\sqrt[3]{u}+\mathrm{E}\sqrt[3]{u}}{1.2}+\sum_{1}^{2}u^4=11\sum_{1}^{2}u=33.$$

§ 28.

Для нахожденія второго закона числовыхъ тожествъ съ двумя произвольными функціями, мы опредѣлимъ двумя способами сумму $\sum \varphi(x)\,\theta(y)$, распространенную на всѣ пары (x,y) неопредѣленнаго уравненія $z+\psi x-\psi_1 y=n$ въ предположеніи, что перемѣнное y измѣняется только отъ 1 до k.

Эта сумма выражается съ одной стороны формулою

$$N_1=\theta(1)\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 1)}\varphi(u)+\theta(2)\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 2)}\varphi(u)+\ldots+\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)=$$

$$=\sum_{1}^{k}\theta(u)\sum_{1}^{E\phi(n+\psi_1 u)}\varphi(u)$$

Съ другой стороны формулою

$$N_2=\varphi(1)\sum_{1}^{k}\theta(u)+\varphi(2)\sum_{1}^{k}\theta(u)+\ldots+\varphi(E\phi(n+\psi_1 k))\sum_{1}^{k}\theta(u)-$$

$$-\left[\varphi(1+E\phi n)\sum_{1}^{E\phi_1[\psi(1+E\phi n)-n]}\varphi(u)+\ldots+\varphi\left[E\phi(n+\psi_1 k)\right]\sum_{1}^{E\phi_1[\phi\Omega-n]}\varphi u\right]+$$

$$+\sum_{1+E\phi n}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\omega_u\,\varphi u\theta\,[\phi_1\,(\psi u-n)],$$

гдѣ $\Omega=E\phi(n+\psi_1 k)$ и $\omega_u=1$ или 0, смотря потому будетъ, или не будетъ $\phi_1\,(\psi u-n)$ числомъ цѣлымъ,

Выраженіе N_2 можетъ быть представлено въ видѣ

$$N_2 = \sum_1^k \theta(u) \sum_1^{E\phi\,(n+\psi_1 k)} \varphi(u) - \sum_{1+E\phi n}^{E\phi\,(n+\psi_1 k)} \varphi(u) \sum_1^{E\phi_1\,(\psi u - n)} \theta(u) +$$

$$+ \sum_{1+E\phi n}^{E\phi\,(n+\psi_1 k)} \omega_u \varphi(u) \theta\,[\phi_1\,(\psi u - n)]$$

Уравненіе $N_1 = N_2$ приводитъ къ формулѣ 2-го закона числовыхъ тожествъ съ двумя произвольными функціями.

$$\text{(VII)} \sum_1^k \theta(u) \sum_1^{E\phi\,(n+\psi_1 u)} \varphi(u) + \sum_{1+E\phi n}^{E\phi\,(n+\psi_1 k)} \varphi(u) \sum_1^{E\phi_1\,(\psi u - n)} \theta(u) =$$

$$= \sum_1^k \theta\,(u). \sum_1^{E\phi\,(n+\psi_1 k)} \varphi u + \sum_{1+E\phi(n)}^{E\phi(n+\psi_1 k)} \omega_u\, \varphi(u) \theta\,[\phi_1\,(\psi u - n)]$$

Для уравненія $z + x - y = n$ этотъ законъ принимаетъ видъ формулы по конечнымъ разностямъ

$$\sum_1^k \theta(u) \sum_1^{n+u} \varphi\,(u) + \sum_{n+1}^{n+k} \varphi\,(u) \sum_1^{u-n} \theta\,(u) = \sum_1^k \theta\,(u) \sum_1^{n+k} \varphi(u) +$$

$$+ \sum_{n+1}^{n+k} \varphi u \theta\,(u - n).\ (s)$$

Для уравненія $z + x - \psi_1 y = n$, и когда $\psi_1 y$ — цѣлая функція, законъ числовыхъ тожествъ принимаетъ форму

$$\sum_1^k \theta\,(u) \sum_1^{n+\psi_1 u} \varphi(u) + \sum_{n+1}^{n+k} \varphi\,(u) \sum_1^{E\phi_1\,(u-n)} \theta(u) = \sum_1^k \theta\,(u). \sum_1^{n+\psi_1 u} \varphi u +$$

$$+ \sum_{n+1}^{n+\psi_1 k} \omega_u\, \varphi\,(u) \theta\,[\phi(u - n)]\ \ (t)$$

Полагая $n = 0$, $\psi_1 0 = \phi_1 0 = 0$, имѣемъ

$$\sum_1^k \theta u \sum_1^{\psi u} \varphi(u) = \sum_1^k \varphi(u) \sum_1^{E\phi_1 u} \theta(u) = \sum_1^k \theta(u). \sum_1^{\psi_1 k} \varphi(u) +$$

$$+ \sum_1^{\psi_1(k)} \omega_u \, \varphi(u)\theta(\phi_1 u).$$

Для уравненія $z+\psi(x)-y=n$, и если $\psi(x)$ цѣлая функція, 2-й законъ числовыхъ тожествъ будетъ имѣть форму

$$\sum_1^k \theta(u) \sum_1^{E\phi\,(n+u)} \varphi(u) + \sum_{1+E\phi n}^{E\phi\,(n+k)} \varphi\,(u) \sum_1^{\psi u - n} \theta\,(u) = \sum_1^k \theta\,(u) \sum_1^{E\phi\,(n+k)} \varphi(u) +$$

$$+ \sum_{1+E\phi(n)}^{E\phi\,(n+k)} \varphi u \theta\,[\psi u - n] \qquad (u)$$

Полагая $n = 0$, $\psi 0 = \phi 0 = 0$, имѣемъ

$$\sum_1^k \theta\,(u) \sum_1^{E\phi(u)} \varphi(u) + \sum_1^{E\phi k} \varphi\,(u) \sum_1^{\psi u} \theta\,(u) + \sum_1^k \theta(u). \sum_1^{E\phi k} \varphi(u) +$$

$$+ \sum_1^{E\phi k} \varphi(u)\theta\,[\psi u].$$

Полагая въ послѣднемъ уравненіи $\psi u = u^2$, $\phi(u) = \sqrt{u}$, мы получимъ при $\varphi(u) = 1$, $\theta(u) = a^u$

$$\sum_1 a^u E\sqrt{u} + \frac{a}{a-1} \sum_1^{E\sqrt{k}} (a^{u^2} - 1) = E\sqrt{k} \sum_1 a^u + \sum_1^{E\sqrt{k}} a^{u^2},$$

откуда послѣ преобразованія имѣемъ

$$\sum_{1}^{E\sqrt{k}} {}_a u^2 = E\sqrt{k.a^{k+1}} - (a-1)\sum_{1}^{k} a^u E\sqrt{u}.$$

§ 29.

Во всѣхъ этихъ формулахъ числовыхъ тожествъ, какъ съ одной, такъ и съ двумя произвольными функціями, можно выбирать эти функціи не только между аналитическими, но и между числовыми; можно даже вставлять вмѣсто этихъ функцій произвольные символы съ произвольными свойствами. При вставкѣ произвольныхъ числовыхъ функцій, мы получаемъ различные числовые законы, имѣющіе самый общій характеръ— законы, которые едва ли можно доказать, не пользуясь методами числового исчисленія. — Помимо теоретическаго значенія эти законы могутъ быть прилагаемы для рѣшенія различныхъ вопросовъ.

Такъ напримѣръ опредѣлимъ, сколько разъ выраженіе u^2-n при измѣненіи количества u отъ $1+E\sqrt{n}$ до $E\sqrt{n+k}$ дѣлается первымъ числомъ, то есть сколько разъ рядъ

$$(1+E\sqrt{n})^2-n,\ (2+E\sqrt{n})^2-n,\ \ldots\ (E\sqrt{n+k})^2-n$$

имѣетъ членовъ, равныхъ первымъ числамъ. Означивъ это количество чрезъ $\mathrm{N}_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}}(u^2-n)$, мы найдемъ его величину изъ формулы

$$\mathrm{N}_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}}(u^2-n) = \sum_{1}^{\psi(k)} E\sqrt{n+\theta_u} + \sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}} \psi(u^2-n) - E\sqrt{n+k}.\ \psi k$$

гдѣ θ_u — величина простого числа, стоящаго въ таблицѣ на мѣстѣ u, а $\psi(u)$ означаетъ число первыхъ чиселъ, не превосходящихъ u.

Для примѣра опредѣлимъ, сколько разъ количество u^2-2 дѣлается простымъ числомъ при измѣненіи u отъ 2 до 5 включительно. Изъ формулы предшествующей имѣемъ, полагая $n=2$, $k=23$.

$$\underset{2}{\overset{5}{\mathrm{N}}}\,(u^2-2)=\sum_1^9 \mathrm{E}\sqrt{2+\theta_u}+\sum_2^5\psi(u^2-2)-5.9=3.$$

Дѣйствительно, въ этомъ промежуткѣ рядъ 2^2-2, 3^2-2, 4^2-2, 5^2-2 имѣетъ три простыхъ числа.

Сумма этихъ простыхъ чиселъ σ будетъ выражаться формулою

$$\sigma=\sum_1^{\psi(k)}\theta_u\mathrm{E}\sqrt{n+\theta_u}+\sum_{1+\mathrm{E}\sqrt{n}}^{\mathrm{E}\sqrt{n+k}}\mathrm{S}\,(u^2-n)-\mathrm{E}\sqrt{n+k}.\mathrm{S}(k),$$

гдѣ $\mathrm{S}(u)$ означаетъ сумму простыхъ чиселъ, не превосходящихъ u.

Въ нашемъ примѣрѣ

$$\sigma=\sum_1^9\theta_u\,\mathrm{E}\sqrt{2+\theta_u}+\sum_2^5\mathrm{S}\,(u^2-2)-5\mathrm{S}(23)=32.$$

Эти формулы являются простымъ слѣдствіемъ 2-го закона числовыхъ тожествъ съ одной функціей по y для уравненія $z+\psi x-y=n$.

$$\sum_1^k\varphi(u)\,\mathrm{E}\phi\,(n+u)+\sum_{1+\mathrm{E}\phi n}^{\mathrm{E}\phi\,(n+k)}\;\sum_1^{\mathrm{E}(\psi u-n)}\varphi(u)=\mathrm{E}\phi(n+k)\sum_1^k\varphi(u)+$$

$$+\sum_{1+E\psi(n)}^{E\psi(n+k)} \omega_u \varphi\,[\psi u - n]$$

При $\psi(u) = u^2$ и $\varphi(u) =$ символу, равному 1 или 0, смотря потому, будетъ ли u числомъ простымъ или сложнымъ,

$\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}} \varphi(u^2 - n)$ по смыслу φ будетъ выражаться вышевыведенное число простыхъ чиселъ.

Полагая вообще $\psi(u) = u^m$, мы при тѣхъ же предположеніяхъ для $\varphi(u)$ найдемъ формулы, выражающія число N и сумму σ тѣхъ простыхъ чиселъ, которымъ равно выраженіе $u^m - n$ въ промежуткѣ измѣненія u отъ $1 + E\sqrt[m]{n}$ до $E\sqrt[m]{n+k}$.

$$N = \sum_{1}^{\psi k} E\sqrt[m]{n+\theta_u} + \sum_{1+E\sqrt[m]{n}}^{E\sqrt[m]{n+k}} \psi(u^m - n) - N\sqrt[m]{n+k}.\,\psi(u)$$

$$\sigma = \sum_{1}^{\psi k} \theta_u\, E\sqrt[m]{n+\theta_u} + \sum_{1+E\sqrt[m]{n}}^{E\sqrt[m]{n+k}} S(u^m - n) - E\sqrt[m]{n+k}.\,S(k).$$

Число разъ, которое выраженіе $3u - 2$ въ промежуткѣ измѣненія u отъ 1 до 7 обратится въ простое число, будетъ

$$\overset{7}{\underset{1}{N}}(3u - 2) = \sum_{1}^{8} E\frac{\theta_u + 2}{3} + \sum_{1}^{7} \psi\,(3u - 2) - 7.8 = 3.$$

Подобные же вопросы мы можемъ рѣшать не только для первыхъ чиселъ, но и для квадратичныхъ и вообще какихъ угодно вычетовъ, стоитъ только найти приличное выраженіе для символа $\varphi(u)$ и ввести въ формулу другія числовыя функціи. Такъ, полагая, что $\varphi(u)$ обращается въ 0 или въ 1, смотря потому ли u неквадратичнымъ или квадратичнымъ вычетомъ числа p, и означивъ чрезъ q_u—величину квадратичнаго вычета, стоящаго на мѣстѣ u, чрезъ $N_1(u)$ число квадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u мы находимъ формулу

$$\sum_{1+E\psi n}^{E\psi(n+k)} \omega_u \varphi\left[\psi u - n\right] = \sum_{1}^{N_1(k)} E\psi(n+q_u) + \sum_{1+E\psi n}^{E\psi(n+k)} N_1(\psi u - n) -$$

$$- E\psi(n+k)\, N_1(k).$$

гдѣ первая часть показываетъ, сколько разъ выраженіе $\psi u—n$ дѣлается квадратичнымъ вычетомъ въ промежуткѣ измѣненія u отъ $1+E\psi n$ до $1+E\psi(n+k)$. Такъ какъ цѣлыми количествами n и k можно располагать произвольно, то мы всегда можемъ выбрать ихъ такими, чтобы величина ихъ соотвѣтствовала предлагаемому вопросу.

Если въ общей формулѣ

$$\sum_{1}^{k} \varphi u\, E\psi(n+u) + \sum_{1+E\psi n}^{E\psi(n+k)} \sum_{1}^{\psi u - n} \varphi(u) = E\psi(n+k) \sum_{1}^{k} \varphi u +$$

$$\sum_{1+E\psi n}^{E\psi(n+k)} \omega_u \varphi(\psi u - n)$$

положимъ $\varphi u = (-1)^{u+1}$ и введемъ функціи $q(u)$ и $n(u)$, гдѣ $q(u)=1$ или 0, смотря потому, будетъ ли u нечетное или четное число, и $n(u)$ функція, означающая число нечетныхъ чиселъ, не превосходящихъ u, то есть $n(u) = E\frac{u}{2} + q(u)$, то общая формула приметъ видъ

$$\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}\,E\phi(n+u)=\sum_{1+E\phi n}^{E\phi(n+k)}\ \sum_{1}^{\psi u-n}(-1)^{u+1}=$$

$$E\phi(n+k)\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}+\sum_{1+E\phi n}^{E\phi(n+k)}(-1)^{\psi u-n+1}$$

Вставляя $\sum_{1}^{\psi u-n}(-1)^{u+1}=q(\psi u-n)$, $\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}=q(k)$ и полагая $\psi u=u^2$, $n=0$, $\psi 0=\psi 0=0$, имѣемъ

$$\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}\,E\sqrt{u}+\sum_{1}^{E\sqrt{k}}q(u^2)=E\sqrt{k}\,q(k)+\sum_{1}^{E\sqrt{k}}(-1)^{u^2+1}$$

но

$$\sum_{1}^{E\sqrt{k}}(-1)^{u^2+1}=q(E\sqrt{k}),\ \sum_{1}^{E\sqrt{k}}q(u^2)=\sum_{1}^{E\sqrt{k}}q(u)=n\,(E\sqrt{k})=$$

$$=E\,\frac{E\sqrt{k}}{2}+q(E\sqrt{k})$$

слѣдовательно

$$\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}\,E\sqrt{u}=E\sqrt{k}\,q(k)-E\,\frac{E\sqrt{k}}{2}\qquad(\alpha)$$

Для $k=17$ имѣемъ

$$\sum_{1}^{17}(-1)^{u+1}\,E\sqrt{u}=4.1-2=2.$$

Если k число нечетное, то $\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}\,E\sqrt{u} = E\sqrt{k} -$

$- E\dfrac{E\sqrt{k}}{2}$, если k число четное, то $\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}\,E\sqrt{u} =$

$$- E\frac{E\sqrt{k}}{2}$$

Подобнымъ же образомъ мы могли бы вывести формулы

$$\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}\,E\sqrt[3]{u} = E\sqrt[3]{q}\,q(k) + E\,\frac{E\sqrt[3]{k}}{2}$$

$$\sum_{1}^{k}(-1)^{u+1}\,E\sqrt[m]{u} = E\sqrt[m]{k}\,q(k) + E\frac{E\sqrt[m]{k}}{2}$$

Произведя суммованіе по обѣимъ частямъ уравненія (α), мы получаемъ

$$\sum_{1}^{u}\;\sum_{1}^{u}(-1)^{u+1}\,E\sqrt{u} = \sum_{1}^{u}q(u)\,E\sqrt{u} - \sum_{1}^{u}E\,\frac{E\sqrt{u}}{2} =$$

$$= (u+1)\sum_{1}^{u}E\sqrt{u} - \sum_{1}^{u}(-1)^{u+1}\,E\sqrt{u}.$$

$$\sum_{1}^{u}q(u)\,E\sqrt{u} = \sum_{1}^{E\frac{u+1}{2}}q(u)\,E\sqrt{2u-1}$$

$$\sum_{1}^{u}(-1)^{u+1}\, u\, E\sqrt{u} = \sum_{1}^{E\frac{u+1}{2}}(2u-1)\, E\sqrt{2u-1} - \sum_{1}^{E\frac{u}{2}} 2uE\sqrt{2u}.$$

Замѣнивъ эти выраженія, найдемъ формулу

$$\sum_{1}^{u} E\frac{E\sqrt{u}}{2} = \sum_{1}^{\frac{u+1}{2}} E\sqrt{2u-1} + \sum_{1}^{E\frac{u+1}{2}}(2u-1)\, E\sqrt{2u-1} +$$

$$+ (u+1)\, E\frac{E\sqrt{u}}{2} - \left[(u+1)\, q(u)\, E\sqrt{u} + \sum_{1}^{E\frac{u}{2}} 2u\, E\sqrt{2u}\right]$$

Если въ общей формулѣ 2-го закона числовыхъ тожествъ съ одной произвольной функціей по y положимъ $\psi x = x^2$, $\psi_1 y = y^2$, $\varphi(u) =$ символу, равному 1 или 0, смотря потому, будетъ ли u простое или сложное число, то найдемъ формулу:

$$\sum_{1}^{\psi(k)} E\sqrt{n+\theta_u^2} + \sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}} \psi\left(E\sqrt{u^2-n}\right) = E\sqrt{n+k^2}\quad \psi(k) +$$

$$+ \sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k^2}} \omega_u\, \varphi\left(\sqrt{u^2-n}\right)$$

Полагая $n=1$ и означая чрезъ $N\left[u^2-n\right]_{1+E\sqrt{}}^{E\sqrt{n+k^2}} = \theta_{\xi}$, сколько разъ количество $\sqrt{u^2 - n}$ дѣлается простымъ числомъ, найдемъ

$$N\left[\sqrt{u^2-1}=\theta_{\xi}\right]_2^k=\sum_1^{\psi k}\theta_u+\sum_2^k\psi(u-1)-k\psi k \text{ или}$$

$$N\left[\sqrt{u^2-1}=\theta^{\circ}\right]_2^k=S(\psi k)+\sum_1^{k-1}\psi u-k\psi k$$

Главная особенность второго закона числовыхъ тожествъ съ одной произвольной функцiей по x состоитъ въ томъ, что въ него входитъ членъ $\sum\limits_{1+E\phi n}^{E\phi(n+\psi_1 k)}\varphi(u)\omega[\phi_1(\psi u-n)]$, придающiй нѣсколько отличительный характеръ тѣмъ вопросамъ, въ рѣшенiе которыхъ онъ можетъ входить.

Такимъ образомъ, положивъ въ формулѣ этого числового закона для неопредѣленнаго уравненiя $z+x-\psi_1 y=n, \psi_1 u=u^2$, имѣемъ

$$\sum_1^k\sum_1^{n+u^2}\varphi(u)+\sum_{n+1}^{n+k^2}\varphi u\, E\sqrt{u-n}=$$

$$=k\sum_1^{n+k^2}\varphi(u)+\sum_{n+1}^{n+k^2}\varphi(u)\,\omega\left[\sqrt{u-n}\right]$$

Давъ $\psi(u)$ извѣстное обозначенiе, характезируемое первыми числами, имѣемъ

$$\sum_1^k\psi(n+u^2)+\sum_{1+\psi n}^{\psi(n+k^2)}E\sqrt{\theta_u-n}=$$

$$=k\psi(n+k^2)+\sum_{n+1}^{n+k^2}\varphi u\omega\,[\sqrt{u-n}]$$

но

$$\sum_{n+1}^{n+k^2}\varphi(u)\omega\,[\sqrt{u-n}]=\sum_{1}^{k^2}\varphi(n+u)\omega\,[\sqrt{u}]=$$

$$=\sum_{1}^{k}\varphi(n+u)=\psi(n+k)-\psi(n)$$

слѣдовательно

$$\sum_{1}^{k}\psi(n+u^2)+\sum_{1+\psi n}^{\psi(n+k^2)}\mathrm{E}\sqrt{\theta_u-n}=k\psi(n+k^2)+\psi(n+k)-\psi n$$

Для $k=3$, $n=4$, имѣемъ

$$\sum_{1}^{3}\psi(4+u^2)+\sum_{3}^{6}\mathrm{E}\sqrt{\theta_u-4}=3\psi 13+\psi 7-\psi 4$$

или

$$\psi 5+\psi 8+\psi 13+\mathrm{E}\sqrt{1}+\mathrm{E}\sqrt{3}+\mathrm{E}\sqrt{9}=3.6+2=20.$$

Если тѣже обозначенія сдѣлаемъ въ числовомъ законѣ для уравненія $z+\psi x-y=n$, то получимъ

$$\sum_{1}^{k}\psi\,[\mathrm{E}\sqrt{n+u}]+\sum_{1+\mathrm{E}\sqrt{n}}^{\mathrm{E}\sqrt{n+k}}\varphi u[u^2-n]=$$

$$=k\psi(\mathrm{E}\sqrt{n+k})+\psi\mathrm{E}\sqrt{n+k}-\psi\mathrm{E}\sqrt{n}$$

или

$$\sum_{1}^{k}\psi[E\sqrt{n+u}]+\sum_{1+\psi(E\sqrt{n})}^{\psi[E\sqrt{n+k}]}\theta^2_u=\psi(E\sqrt{n+k})\,(n+k+1)-\psi(E\sqrt{n})$$

Для $n=2$, $k=7$ имѣемъ

$$\sum_{1}^{7}\psi(E\sqrt{2+u})+\sum_{1}^{2}\theta_u^{\,2}=10.2.$$

Можно вывести безчисленное множество такихъ числовыхъ законовъ, которые всѣ будутъ непосредственнымъ слѣдствіемъ общихъ законовъ числовыхъ тожествъ съ одной произвольной функціей по x, или по y. Мы не можемъ сказать теперь, насколько каждый изъ этихъ законовъ можетъ быть точкою отправленія для дальнѣйшихъ изслѣдованій и заключеній, ибо не разсматривали ихъ съ такой точки зрѣнія.

§ 30.

Перейдемъ теперь къ числовымъ законамъ, являющимся непосредственнымъ слѣдствіемъ общаго закона числовыхъ тожествъ съ двумя произвольными функціями. Законъ этотъ для уравненія $z+x-y=n$ принимаетъ видъ формулы по конечнымъ разностямъ

$$\sum_{1}^{k}\theta(u)\sum_{1}^{n+u}\varphi(u)+\sum_{n+1}^{n+k}\varphi(u)\sum_{1}^{u-n}\theta(u)=$$

$$=\sum_{1}^{k}\theta(u)\sum_{1}^{n+k}\varphi(u)+\sum_{n+1}^{n+k}\varphi u\theta(u-n). \qquad (\beta)$$

Дѣлая въ этой формулѣ $n=0$, имѣемъ

$$\sum_{1}^{k}\theta(u)\sum_{1}^{u}\varphi(u)+\sum_{1}^{k}\varphi(u)\sum_{1}^{u}\theta(u)=$$

$$=\sum_{1}^{k}\theta(u).\sum_{1}^{k}\varphi(u)+\sum_{1}^{k}\varphi u\theta u \qquad (\gamma)$$

формулу, могущую послужить прямо къ опредѣленію выраженія $\sum\limits_{1}^{k}u\sum\limits_{1}^{u}\varphi(u)$, необходимаго при разложеніи многократной суммы по простымъ. Дѣйствительно, изъ этого уравненія имѣемъ

$$\sum_{1}^{u}u\sum_{1}^{u}\varphi(u)=\sum_{1}^{u}u.\sum_{1}^{u}\varphi(u)+\sum_{1}^{u}u\varphi(u)-\sum_{1}^{u}\varphi u\frac{u(u+1)}{1.2}$$

или

$$\sum_{1}^{u}u\sum_{1}^{u}\varphi u=\frac{u(u+1)}{1.2}\sum_{1}^{u}\varphi u+\frac{1}{2}\sum_{1}^{u}u\varphi u-\frac{1}{2}\sum_{1}^{u}u^2\varphi u.$$

Подобнымъ же образомъ можемъ найти вообще $\sum\limits_{1}^{u}u^m\sum\limits_{1}^{u}\varphi u$

Эта же формула (j) указываетъ на слѣдующую алгебраическую теорему:
если намъ дано $2k$ количествъ $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots b_k$, то всегда

$$(a_1+a_1+a_3+..+a_k)(b_1+b_2+\ldots+b_k)+a_1b_1+a_2b_2+..+a_kb_k=$$
$$=a_1b_1+a_2(b_1+b_2)+a_3(b_1+b_2+b_3)+\ldots+a_k(b_1+b_2+\ldots+b_k)+$$
$$+b_1a_1+b_2(a_1+a_2)+b_3(a_1+a_2+a_3)+\ldots+b_k(a_1+a_2+\ldots+a_k).$$

Замѣняя въ формулѣ (j) $\theta(u)$ чрезъ $\theta(u-k)$ и $\varphi(u)$ чрезъ $\varphi(u-1)$, мы найдемъ формулу

$$\sum_1^k \varphi(u-1) \sum_1^u \theta(u-k) + \sum_1^k \theta(u-k) \sum_1^u \varphi(u-1) =$$

$$= \sum_1^k \theta(u-k) . \sum_1^k \varphi(u-1) + \sum_1^k \theta(u-k)\varphi(u-1)$$

или

$$\sum_1^k \theta(u-k)\varphi(u-1) = \sum_1^k \varphi(u-1) \sum_1^u \theta(u-k) +$$

$$+ \sum_1^k \theta(u-k) \sum_1^u \varphi(u-1) - \sum_1^k \theta(u-k) \sum_1^k \varphi(u-1).$$

Развернутый членъ въ первой части даетъ

$$\sum_1^k \theta(u-k)\varphi(u-1) = \varphi(0)\theta(k-1) + \varphi(1)\theta(k-2) + .. + \varphi(k-1)\theta(0)$$

Если мы имѣемъ два ряда

$$f_1(x) = \varphi 0 + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \ldots\ldots + \varphi(k)x^k + \ldots\ldots$$
$$f_2(x) = \theta(0) + \theta(1)x + \theta(2)x^2 + \ldots\ldots + \theta(k)x^k + \ldots\ldots$$

и найдемъ $f_1(x) . f_2(x)$ рядъ, составленный изъ произведенія этихъ рядовъ

$$f_1(x) . f_2(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_{k-1} x^{k-1} + A_k x^k + \ldots\ldots$$

то коеффиціентъ A_{k-1} при x^{k-1} будетъ по коеффиціентамъ данныхъ рядовъ выражаться формулою

$$A_{k-1} = \varphi(0) . \theta(k-1) + \varphi(1)\theta(k-2) + \ldots\ldots + \varphi(k-1)\theta 0$$

слѣдовательно коеффиціентъ при x^{k-1} въ разложеніи произведенія $f_1 x f_2 x$ двухъ рядовъ будетъ выражаться формулою:

$$A_{k-1}=\sum_{1}^{k}\varphi(u-1)+\sum_{1}^{k}\theta(u-k)\sum_{1}^{u}\varphi(u-1)-\sum_{1}^{k}\theta(u-k).\sum_{1}^{k}\varphi(u-1)$$

и рядъ $f_1(x).f_2(x)$ можетъ быть выраженъ формулою

$$f_1(x).f_2(x)=\sum_{k=1}^{k=\infty}x^{k-1}\Big(\sum_{1}^{k}\varphi(u-1)\sum_{1}^{u}\theta(u-k)+$$

$$+\sum_{k=1}^{k=\infty}x^{k-1}\Big(\sum_{1}^{k}\theta(u-k)\sum_{1}^{u}\varphi(u-1)\Big)-$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\infty}x^{k-1}\Big(\sum_{1}^{k}\theta(u-k)\sum_{1}^{k}\varphi(u-1)\Big).$$

Давая различныя аналитическія значенія функціямъ $\varphi(u)$ и $\theta(u)$ въ формулѣ (β), мы получили бы различныя формулы по конечнымъ разностямъ; давая же имъ различныя числовыя значенія, мы получимъ формулы для выраженія различныхъ числовыхъ законовъ и рѣшенія различныхъ числовыхъ вопросовъ.

Такъ, найдемъ общую числовую формулу для рѣшенія слѣдующей задачи: даны два ряда натуральныхъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots\ldots k$, и $n+1, n+2, \ldots\ldots n+k$, гдѣ k и n два произвольныхъ цѣлыхъ числа, найти сколько паръ $(n+u, u)$ въ этихъ рядахъ такого рода, что оба числа u и $n+u$ суть простыя.

Означивъ это число черезъ N, не трудно доказать формулу

$$N=\sum_{1}^{\psi(k)}\psi(n+\theta_u)+\sum_{1+\psi(n)}^{\psi(n+k)}\psi(\theta_u-n)-\psi(k).\psi(n+k).$$

гдѣ θ_u простое число, стоящее въ таблицѣ на мѣстѣ u.

Формула эта для выраженія N получается изъ уравненія (β) помощію замѣны произвольныхъ функцій $\theta(u)$ и $\varphi(u)$ символами, обращающимися въ 1 или въ 0, смотря потому, будетъ ли u простое или сложное число. Дѣйствительно, формула (β) даетъ

$$\sum_{n+1}^{n+k}\varphi u\theta(u-n)=\sum_{1}^{\psi k}\psi(n+\theta_u)+\sum_{1+\psi n}^{\psi(n+k)}\psi(\theta_u-n)-\psi(k).\psi(n+k),$$

гдѣ первая часть и есть наше искомое N.

Для $k=7$, $n=8$ наши ряды примутъ видъ:

1, 2, 3*, 4, 5*, 6, 7

9, 10, 11*, 12, 13*, 14, 15

Формула для этого случая даетъ

$$N=\sum_{1}^{4}\psi(8+\theta_u)+\sum_{5}^{6}\psi(\theta_u-8)-4.6=2.$$

Если бы мы имѣли въ виду опредѣлить сумму простыхъ чиселъ ряда $n+u$ въ такихъ парахъ $(u,\ n+u)$, то должны были бы замѣнить $\varphi(u)$ чрезъ $u\varphi(u)$ и для опредѣленія этой суммы имѣли бы формулу

$$S_1=\sum_{n+1}^{n+k}u\varphi(u)\,\theta(u-n)=\sum_{1}^{\psi k}S(n+\theta_u)+\sum_{1+\psi n}^{\psi(n+k)}\theta_u\psi(\theta_u-n)-$$
$$-\psi(k)\,S(n+k)$$

гдѣ $S(u)$ означаетъ сумму простыхъ чиселъ, не превосходящихъ u.

Для нашего частнаго случая мы имѣемъ

$$S_1=\sum_{1}^{4}S(8+\theta_u)+\sum_{5}^{6}\theta_u\,\psi(\theta_u-8)-\psi(7).\,S(15)=24$$

Замѣняя $\theta(u)$ чрезъ $u\theta(u)$, мы бы имѣли для выраженія суммы S_2 простыхъ чиселъ перваго ряда въ этихъ парахъ формулу

$$S_2 = \sum_{n+1}^{n+k} \varphi(u)\theta(u-n)(u-n) = \sum_{1}^{\psi k} \theta_u \psi(n+\theta_u) +$$

$$+ \sum_{1+\psi n}^{\psi(n+k)} S(\theta_u - n) - S(k)\,\psi(n+k).$$

Для выраженія суммы произведеній простыхъ чиселъ въ этихъ парахъ мы бы имѣли послѣ замѣны $\varphi(u)$ и $\theta(u)$ чрезъ $u\varphi(u)$ и $u\theta(u)$ формулу

$$S_3 = \sum_{1}^{\psi k} \theta_u\, S(n+\theta_u) + \sum_{1+\psi n}^{\psi(n+k)} \theta_u S(\theta_u - n) - S(k)\, S(n+k).$$

Замѣтимъ, что во всѣхъ формулахъ функцію $S(u)$ можемъ замѣнить изъ уравненія $S(u) = (u+1)\,\psi(u) - \sum_{1}^{u} \psi(u)$, такъ что по вставкѣ въ рѣшеніе этихъ задачъ войдутъ только числовыя функціи $\psi(u)$.

Если бы мы имѣли въ виду опредѣлить, сколько разъ въ рядахъ:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & \ldots\ldots & k \\ n+1, & n+2, & \ldots\ldots & n+k \end{array}$$

такихъ паръ $(u,\ n+u)$, для которыхъ u было бы квадратичнымъ вычетомъ числа p, а $n+u$ простымъ числомъ, то мы должны бы были положить, что $\theta(u)$ есть символъ, обращающійся въ 1 или въ нуль, смотря потому, будетъ ли u квадратичнымъ или неквадратичнымъ вычетомъ p, а $\varphi(u) = 1$ или 0, смотря по отношенію числа u къ простымъ числамъ, и для выраженія N требуемаго число паръ мы бы имѣли формулу

$$N = \sum_{n+1}^{n+k} \varphi(u)\,\theta\,(u-n) = \sum_{1}^{N(k)} \psi(n+q_u) + \sum_{1+\psi n}^{\psi(n+k)} N\,(\theta_u - n) - N\,(k)\,.\,\psi(n+k)$$

гдѣ q_u есть величина квадратичнаго вычета числа p, стоящаго на мѣстѣ u, $N(u)$ число квадратичныхъ вычетовъ, не превосходящихъ u.

Для рядовъ $\Big[u\Big]_1^{10}$, $\Big[9+u\Big]_1^{10}$ мы будемъ имѣть $k=10$, $n=9$.

Положивъ $p=17$, мы найдемъ

$$\sum_{10}^{19}\varphi(u)\,\theta\,(u-9) = \sum_{1}^{5}\psi\,(9+q_u) + \sum_{5}^{8} N\,(\theta_u - 9) -$$

$$- N(10).\psi(19) = \psi(10) + \psi(11) + \psi(13) + \psi(17) +$$
$$+ N(2) + N(4) + N(8) + N(10) - 5.8 = 3.$$

Дѣйствительно, такихъ паръ три: (2, 11), (4, 13), (8, 17).

Подобнымъ же образомъ можно вывести и другія болѣе сложныя формулы.

Числовымъ закономъ для неопредѣленнаго уравненія $z + \psi x - y = n$ рѣшаются вопросы болѣе сложные. Такъ, полагая въ общей формулѣ этого закона $\psi(u) = u^2$, будемъ имѣть

$$\sum_{1}^{k}\theta\,(u) \sum_{1}^{E\sqrt{n+u}}\varphi(u) + \sum^{E\sqrt{n+k}}\varphi(\,u) \sum_{1+E\sqrt{n+1}}^{u^2-n}\theta(u) =$$

$$=\sum_{1}^{k}\theta(u)\sum_{1}^{E\sqrt{n+k}}\varphi(u)+\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}}\varphi(u)\,\theta(u^2-n)$$

Выбирая приличныя значенія для $\theta(u)$ и $\varphi(u)$, находимъ

$$\sum_{1}^{\psi(k)}\psi(E\sqrt{n+\theta_u})+\sum_{1+\psi(E\sqrt{n})}^{\psi(E\sqrt{n+k})}\psi(\theta^2-n)=\psi(k)\,\psi(E\sqrt{n+k})+$$

$$+\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}}\varphi(u)\,\theta(u^2-n),$$

что для $n=0$ даетъ

$$\sum_{1}^{\psi k}\psi(E\sqrt{\theta_u})+\sum_{1}^{\psi(E\sqrt{k})}\psi(\theta^2{}_u)=\psi k\,\psi(E\sqrt{k})$$

$\sum_{1}^{E\sqrt{k}}\varphi u\,\theta(u^2)=0$ всегда, потому что u^2 никогда не можетъ быть простымъ числомъ.

Для $k=17$ имѣемъ

$$\sum_{1}^{7}\psi(E\sqrt{\theta_u})+\sum_{1}^{2}\psi(\theta^2{}_u)=\psi\,17.\psi 4 \text{ или}$$

$$\psi(E\sqrt{2})+\psi(E\sqrt{3})+\psi(E\sqrt{5})+\psi(E\sqrt{7})+\psi(E\sqrt{11})+$$

$$+\psi(E\sqrt{13})+\psi(E\sqrt{17})+\psi(2^2)+\psi(3^2)=7.2=14.$$

Формула

$$\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}}\varphi(u)\,\theta\,(u^2-n)=\sum_{1}^{\psi(k)}\psi\,(E\sqrt{n+\theta_u})+\sum_{1+\psi E\sqrt{n}}^{\psi(E\sqrt{n+k})}\psi\,(\theta^2_u-n)-$$

$$-\,\psi(k)\,E\sqrt{n+k}$$

служитъ для рѣшенія слѣдующаго вопроса: даны два ряда, написанные почленно одинъ подъ другимъ — одинъ, состоящій изъ натуральныхъ чиселъ, начинающихся съ $1+E\sqrt{n}$ до $E\sqrt{n+k}$, другой изъ значеній функціи u^2-n, гдѣ вмѣсто u вставляются эти натуральныя числа

$$1+E\sqrt{n},\ 2+E\sqrt{n},\ \ldots\ldots\ E\sqrt{n+k}$$

$$(1+E\sqrt{n})^2-n,\ (2+E\sqrt{n})^2-n\ \ldots\ (E\sqrt{n+k})^2-n$$

и требуется опредѣлить число случаевъ, для которыхъ соотвѣтствующіе члены обоихъ рядовъ будутъ первыми числами, ибо при ближайшемъ разсматриваніи не трудно видѣть, что $\sum\limits_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}}\varphi(u)\,\theta\,(u^2-n)$ именно выражаетъ это число.

Если бы мы имѣли въ виду опредѣлить число случаевъ, для которыхъ простыя числа перваго ряда соотвѣтствуютъ квадратичнымъ вычетамъ числа p второго ряда, то для опредѣленія этого члена имѣли бы формулу

$$\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}} \varphi(u)\ \theta(u^2-n) = \sum_{1}^{N(k)} \psi(E\sqrt{n+q_u}) + \sum_{1+\psi(E\sqrt{n}}^{\psi(E\sqrt{n+k})} N(\theta^2_u - n) -$$

$$- N(k)\,\psi(E\sqrt{n+k})$$

Полагая въ самой общей формулѣ $\psi(x)=x^2$, $\psi_1(y)=\sqrt{y}$, имѣемъ

$$\sum_{1}^{k} \theta(u) \sum_{1}^{(n+u^2)^2} \varphi(u) + \sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+\sqrt{k}}} \varphi u \sum_{1}^{(u^2-n)^2} \theta(u)$$

$$= \sum_{1}^{k} \theta(u) . \sum_{1}^{E\sqrt{n+\sqrt{k}}} \varphi(u) + \sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+\sqrt{k}}} \varphi(u)\, \theta((u^2-n)^2)$$

Вводя вмѣсто $\theta(u)$ и $\varphi(u)$ вышеупомянутые символы, будемъ имѣть

$$\sum_{1}^{\psi k} \psi\left[(n+u^2)^2\right] + \sum_{\psi(E\sqrt{n})}^{\psi(E\sqrt{n+\sqrt{k})}} \psi\left[(u^2-n)^2\right] = \psi(k) . \psi(E\sqrt{n+\sqrt{k}}),$$

ибо $$\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+\sqrt{k}}} \varphi u \theta\left[(u^2-n)^2\right] = 0.$$

Полагая въ общей формулѣ $\psi(x)=x^2$, $\psi_1(y)=y^2$, имѣемъ формулу послѣ замѣненія $\theta(u)$ и $\varphi(u)$

$$\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k^2}} \omega_u\, \varphi(u)\, \theta\left(\sqrt{u^2-n}\right) = \sum_{1}^{\psi(k)} \psi\left(E\sqrt{n+\theta_u^2}\right) +$$

$$+ \sum_{1+\psi(E\sqrt{n})}^{\psi(E\sqrt{n+k^2})} \psi\left(E\sqrt{\theta_u^2-n}\right) - \psi(k).\, \psi\left(E\sqrt{n+k^2}\right)$$

Первая часть этого уравненія показываетъ, что второю частію дается рѣшеніе слѣдующаго числового вопроса: даны два ряда

$$[u] \;\ldots\; 1+E\sqrt{n},\; 2+E\sqrt{n+1},\; 3+E\sqrt{n+2} \;\ldots$$

$$\ldots\ldots\; E\sqrt{n+k^2} \qquad \text{и}$$

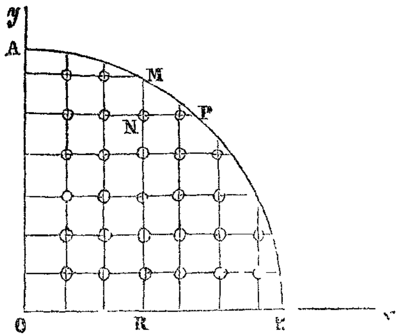
$$[\sqrt{u^2-n}] \;\ldots\; \sqrt{(1+E\sqrt{n})^2-n},\; \sqrt{(2+E\sqrt{n})^2-n} \;\ldots$$

$$\ldots\ldots\; \sqrt{(E\sqrt{n+k^2})^2-n}$$

и ищется, сколько разъ первое число во второмъ рядѣ будетъ находится подъ первымъ числомъ соотвѣтствующаго члена перваго ряда.

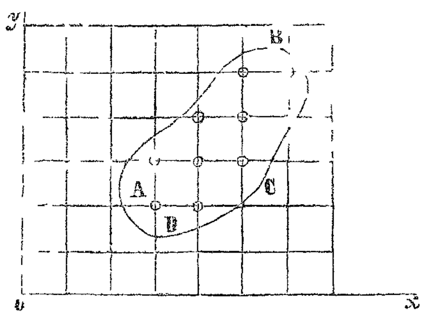
§ 31.

Если $\psi(x)$ есть функція постоянно убывающая, начиная съ $x=0$, и обращающаяся въ нуль при $x=\mu$, тогда уравненіе $y=\psi(x)$ представитъ кривую AB, пересѣкающую обѣ оси координатъ въ точкахъ A и B (*fg* 1) и пространство ABO, ограниченное этою кривой и двумя осями координатъ, будетъ совершенно замкнуто.



Фиг. 1.

Если мы построимъ рѣшетку, состоящую изъ ряда пересѣкающихся абсциссъ и ординатъ, находящихся другъ отъ друга въ разстояніяхъ, равныхъ единицѣ, тогда изъ про-



Фиг 2.

стыхъ соображеній надъ точками этой рѣшетки не трудно вывести одну теорему, связывающую выраженія, зависящія отъ символа E.

Прежде чѣмъ приступить къ выводу этой теоремы, сдѣлаемъ нѣкоторыя обозначенія. Выраженіемъ N (ABCDA) (*fg* 2) будемъ обозначать число точекъ рѣшетки, помѣщающихся внутри сомкнутаго контура ABCDA, не считая точекъ, лежащихъ на самомъ контурѣ. Если же будемъ принимать въ соображеніе и точки, лежащія на какой-нибудь части контура, тогда будемъ надъ соотвѣтствующею линіею въ выраженіи N(ABCDA) ставить тире; такимъ образомъ выраженіе

$N(\overline{ABCDA})$ будетъ обозначать число точекъ, лежащихъ внутри пространства, ограниченнаго сомкнутою кривою ABCDA вмѣстѣ съ числомъ точекъ, лежащихъ на линіи BC. Сдѣлавши эти обозначенія, не трудно видѣть (*fg* 1), что

$$N(\overline{MPNM}) = 0, \text{ откуда}$$

$$N(\overline{AMROA}) + N(\overline{NPBRN}) = N(\overline{APBOA}),$$

$$N(\overline{SNROS}) = N(\overline{SNROS}),$$

что по сложеніи даетъ уравненіе

$$(A)\quad N(\overline{AMROA}) + N(\overline{SPBOS}) = N(\overline{APBOA}) + N(\overline{SNROS})$$

Положивъ $OR = s$ цѣлому числу, и переведя послѣднее уравненіе на числовой языкъ, легко видѣть, что

$$E\psi(1) + E\psi 2 + E\psi 3 + \ldots + E\psi(s) + E\varphi(1) + E\varphi 2 + \ldots$$
$$\ldots E\varphi(E\psi s) = E\psi 1 + E\psi 2 + \ldots E\psi(E\mu) + sE\psi s$$

или

$$(\text{VIII})\quad \sum_1^s E\psi u + \sum_1^{E\psi s} E\varphi u = \sum_1^{E\mu} E\psi u + sE\psi s$$

гдѣ $\varphi(u)$ функція, обратная функціи $\psi(u)$.

Для случая, когда $\psi(x) = \varphi(x)$ или $\psi\psi(x) = x$, то есть для всѣхъ функцій, удовлетворяющихъ уравненію $f(x, \psi x) = 0$, гдѣ f симметричная функція x и $\psi(x)$, предшествующее уравненіе приметъ видъ

$$(a)\quad \sum_1^s E\psi u + \sum_1^{E\psi s} E\psi u = \sum_1^{E(\mu)} E\psi u + sE\psi s$$

Если $s = \theta$ такому количеству, что $\theta = E\psi\theta$, то имѣемъ

$$(b)\quad 2\sum_1^{\theta} E\psi u = \sum_1^{E(\mu)} E\psi u + \theta^2$$

Формулы (a) и (b) были выведены еще Мейсселемъ (*) (Crelle, 48 стр. 301 — 316), но такъ какъ онъ не пользовался такими простыми геометрическими соображенями, то при сложности вывода онъ могъ получить и менѣе общіе результаты.

Полагая въ формулѣ (b) $\psi(u)=\frac{n}{u}$, $\theta=\mathrm{E}\sqrt{n}$, $\mu=\infty$,

имѣемъ

$$2\sum_{1}^{\mathrm{E}\sqrt{n}}\mathrm{E}\frac{n}{u}=\sum_{1}^{n}\mathrm{E}\frac{n}{u}+(\mathrm{E}\sqrt{n})^2,\ \text{ибо}\ \sum_{1}^{\infty}\mathrm{E}\frac{n}{u}=\sum_{1}^{n}\mathrm{E}\frac{n}{u}$$

Если мы въ уравненіи (A) при каждой точкѣ рѣшетки будемъ разсматривать количество $\varphi(y)$, гдѣ y величина ея ординаты, то получимъ уравненіе

$$\text{(IX)}\qquad \sum_{1}^{s}\ \sum_{1}^{\mathrm{E}\psi u}\varphi(u)+\sum_{1}^{\mathrm{E}\psi s}\varphi(u)\mathrm{E}\phi(u)=$$

$$=\sum_{1}^{\mathrm{E}\mu}\ \sum_{1}^{\mathrm{E}\psi u}\varphi u+s\sum_{1}^{\mathrm{E}\psi s}\varphi(u).$$

Распространяя же предшествующее уравненіе на величины $\varphi(x)\ \theta(y)$, гдѣ x и y координаты точекъ рѣшетки, будемъ имѣть

$$\text{(X)}\qquad \sum_{1}^{s}\varphi u\sum_{1}^{\mathrm{E}\psi u}\theta(u)+\sum_{1}^{\mathrm{E}\psi s}\theta(u)\sum_{1}^{\mathrm{E}\phi u}\varphi(u)=$$

$$=\sum_{1}^{\mathrm{E}(\mu)}\varphi u\sum_{1}^{\mathrm{E}\psi u}\theta(u)+\sum_{1}^{s}\varphi u\cdot\sum_{1}^{\mathrm{E}\psi s}\theta(u).$$

(*) Эта статья была намъ указана Академикомъ Чебышевымъ.

Полагая въ послѣдней формулѣ $\psi(u)=n-u$, $\psi(u)=n-u$, будемъ имѣть формулу по конечнымъ разностямъ

$$\sum_{1}^{s}\varphi u\sum_{1}^{n-u}\theta(u)+\sum_{1}^{n-s}\theta(u)\sum_{1}^{n-u}\varphi(u)=$$

$$=\sum_{1}^{n-1}\varphi u\sum_{1}^{n-u}\theta(u)+\sum_{1}^{s}\varphi u\,.\sum_{1}^{n-s}\theta(u).$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ функціи $\varphi(u)$, $\theta(u)$ совершенно произвольныя, и потому можно, дѣлая въ нихъ разныя предположенія для $\varphi(u)$ и $\theta(u)$, выводить различныя числовыя законы.

Развивая этотъ пріемъ съ достаточною полнотою въ предшествующихъ §§, я считаю лишнимъ долѣе останавливаться на этомъ.

ГЛАВА III.

Распространеніе законовъ числовыхъ тожествъ на функціи числовыя.

§ 32.

Выводя законы числовыхъ тожествъ изъ разсматриванія неопредѣленныхъ уравненій $z=\psi x+\psi_1 y=n$, $z+\psi(x)\psi_1(y)=n$, $z+\psi x-\psi_1 y=n$, мы предполагали, что $\psi(x)$ и $\psi_1(y)$ возрастающія аналитическія функціи, но законы эти имѣютъ мѣсто и могутъ быть распространены на тѣ случаи, когда одна изъ нихъ или обѣ суть функціи возрастающія и числовыя. Въ этомъ предположеніи законы числовыхъ тожествъ даютъ различные числовые законы мкжду этими функціями — законы, могущіе быть точкою отправленія для дальнѣйшихъ изслѣдованій. Мы приложимъ наши общія формулы къ выводу только нѣкоторыхъ изъ нихъ, имѣя постоянно въ виду преимущественно методъ изслѣдованія.

Для случая, когда $\psi(x)$ означаетъ число первыхъ чиселъ, не превосходящихъ x, и $\psi_1(y)=y^2$, мы должны въ общей формулѣ

$$E\varphi(n-\psi_1 1)+E\varphi(n-\psi_1 2)+\ldots=E\varphi_1(n-\psi 1)+E\varphi_1(n-\psi 2)+\ldots$$

замѣнить $\varphi(u)$ чрезъ $\theta_{u+1}-1$, гдѣ θ_u означаетъ величину простого числа, стоящаго на мѣстѣ u въ таблицѣ простыхъ чиселъ, и $\varphi_1(u)$ чрезъ $\sqrt{u}$.

Сдѣлавъ это получимъ

$$\theta_{(n+1)-1}+\theta_{(n+1)-2^2}+\theta_{(n+1)-3^2}+\ldots\ldots=$$
$$=E\sqrt{n}+E\sqrt{n-\psi 1}+E\sqrt{n-\psi(2)}+\ldots\ldots$$

или

$$\sum_1^{E\sqrt{n}}\theta_{n-u^2+1}=E\sqrt{n}+\sum_1^{\theta_{n+1}-1}E\sqrt{n-\psi u.}$$

Для $n=6$ этотъ законъ даетъ

$$\sum_1^{2}\theta_{6-u^2+1}=\theta_6+\theta_3=13+5=2+\sum_1^{16}E\sqrt{n-\psi u}=2+16.$$

Полагая въ уравненіи $z+\psi x.\psi_1 y=n$ функцію $\psi x=\theta_x$ и $\psi_1 y=y^2$, мы найдемъ формулу

$$\psi(n)+\psi\left(\frac{n}{2^2}\right)+\psi\left(\frac{n}{3^2}\right)+\ldots=E\sqrt{\frac{n}{\theta_1}}+E\sqrt{\frac{n}{\theta_2}}+\ldots$$

или

$$\sum_1^{E\sqrt{n}}\psi\left(\frac{n}{u^2}\right)=\sum_1^{\psi(n)}E\sqrt{\frac{n}{\theta_u}}$$

Для $n=12$ формула даетъ

$$\sum_{1}^{3}\psi\left(\frac{12}{u^2}\right)=\sum_{1}^{5}E\sqrt{\frac{12}{\theta_u}}$$

или

$$\psi(12)+\psi(3)+\psi(1)=E\sqrt{\frac{12}{2}}+E\sqrt{\frac{12}{3}}+E\sqrt{\frac{12}{5}}+$$
$$+E\sqrt{\frac{12}{7}}+E\sqrt{\frac{12}{11}}=7.$$

§ 33.

Означимъ произведеніе всѣхъ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ числа n чрезъ $\Pi_1(n)$ и разсмотримъ выраженіе

$$T(n)=\Pi_1(n).\Pi_1(n^{\frac{1}{2}}).\Pi_1(n^{\frac{1}{3}}).\;\ldots\;\Pi_1(n^{\frac{1}{k}})\;\ldots$$
$$\Pi_1\left(\frac{n}{2}\right).\Pi_1\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\Pi_1\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Pi_1\left(\frac{n}{l}\right).\Pi_1\left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.\Pi_1\left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{1}{3}}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

въ которомъ горизонтально и вертикально продолжаемъ эти произведенія до тѣхъ поръ, пока вообще $\left(\frac{n}{\mu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ будетъ менѣе 2, перваго простого числа.

Число простыхъ множителей этого произведенія выразится формулою

$$\tau(n)=\psi(n)+\psi(n^{\frac{1}{2}})+\psi(n^{\frac{1}{3}})+\psi(n^{\frac{1}{4}})+\ldots\ldots+\psi(n^{\frac{1}{k}})+\ldots$$

$$\psi\left(\frac{n}{2}\right)+\psi\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\psi\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\ldots\ldots$$

$$\psi\frac{n}{3}+\psi\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\psi\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\ldots\ldots$$

. . . .

$$\psi\left(\frac{n}{l}\right)+\psi\left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{1}{2}}+\psi\left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{1}{3}}+\ldots\ldots$$

. . . .

Это выраженіе $\tau(n)$ можно представить иначе, пользуясь законами числовыхъ тожествъ. Дѣйствительно, изъ разсматриванія уравненія $z+(\theta_y)^x=n$, гдѣ θ_y означаетъ величину простого числа, стоящаго на мѣстѣ y въ таблицѣ простыхъ чиселъ, заключаемъ, что

$$\psi(n)+\psi(\sqrt{n})+\psi(\sqrt[3]{n})+\ldots=\mathrm{E}\frac{Log n}{Log\theta_1}+\mathrm{E}\frac{Log n}{Log\theta_2}+\mathrm{E}\frac{Log n}{Log\theta_3}+\cdot\cdot$$

слѣдовательно

$$\tau(n)=\mathrm{E}\frac{Log n}{Log\theta_1}+\mathrm{E}\frac{Log n}{Log\theta_2}+\mathrm{E}\frac{Log n}{Log\theta_3}+\ldots\ldots$$

$$+\mathrm{E}\frac{Log\frac{n}{2}}{Log\theta_1}+\mathrm{E}\frac{Log\frac{n}{2}}{Log\theta_2}+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\mathrm{E}\frac{Log\frac{n}{l}}{Log\theta_1}+\mathrm{E}\frac{Log\frac{n}{l}}{Log\theta_2}+\mathrm{E}\frac{Log\frac{n}{l}}{Log\theta_3}+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или, перемѣнивъ порядокъ членовъ, имѣемъ

$$\tau(n)=\mathrm{E}\frac{Log n}{Log\theta_1}+\mathrm{E}\frac{Log\frac{n}{2}}{Log\theta_1}+\mathrm{E}\frac{Log\frac{n}{3}}{Log\theta_1}+\ldots\ldots$$

$$E\frac{Logn}{Log\theta_2}+E\frac{Log\frac{n}{2}}{Log\theta_2}+E\frac{Log\frac{n}{3}}{Log\theta_3}+\ldots\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E\frac{Logn}{Log\theta_k}+E\frac{Log\frac{n}{2}}{Log\theta_k}+\ldots\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Прилагая первый законъ числовыхъ тожествъ для уравненія $z+(\theta_k)^x.\ y=n$, мы видимъ, что

$$E\frac{Logn}{Log\theta_k}+E\frac{Log\frac{n}{2}}{Log\theta_k}+E\frac{Log\frac{n}{3}}{Log\theta_k}+\ldots=E\frac{n}{\theta_k}+E\frac{n}{\theta_k^{\,2}}+$$
$$+E\frac{n}{\theta_k^{\,3}}+\ldots$$

слѣдовательно

$$\tau(n)=\sum_1 E\frac{n}{\theta_1^{\,u}}+\sum_1 E\frac{n}{\theta_2^{\,u}}+\sum_1 E\frac{n}{\theta_3^{\,u}}+\ldots+\sum_1 E\frac{n}{\theta_k^{\,u}}+\ldots$$

Но рядъ $E\frac{n}{\theta_k}+E\frac{n}{\theta_k^{\,2}}+E\frac{n}{\theta_k^{\,3}}+\ldots$ выражаетъ, сколько разъ простой дѣлитель θ_k входитъ производителемъ въ произведеніе $1.2.3.\ \ldots\ n$, слѣдовательно число всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ въ произведеніе $1.2.3\ldots n=\Pi(n)$, равно числу множителей, входящихъ въ произведеніе $T(n)$. Число, опредѣляющее, сколько разъ θ_k входитъ въ произведеніе $\Pi(n)$, выражается формулою $E\frac{n}{\theta_k}+E\frac{n}{\theta_k^{\,2}}+$ $+E\frac{n}{\theta_k^{\,3}}+\ldots$ и число опредѣляющее, сколько разъ множитель θ_k входитъ въ $T(n)$, выражается формулою $E\frac{Logn}{Log\theta_k}+$ $+E\frac{Log\frac{n}{2}}{Log\theta_k}+E\frac{Log\frac{n}{3}}{Log\theta_k}+\ldots$, но по первому закону числовыхъ тожествъ эти величины равны, слѣдовательно произведенія $\Pi(n)$ и $T(n)$ будутъ состоять изъ тѣхъ же производителей, по этому

$$\Pi(n) = T(n) = \Pi_1\,(n)\,.\,\Pi_1\,(\sqrt{n})\,.\,\Pi_1\,(\sqrt[3]{n})\ldots$$

$$\Pi_1\left(\frac{n}{2}\right).\,\Pi_1\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right).\,\Pi_1\left(\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\right)\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Pi_1\left(\frac{n}{k}\right).\,\Pi_1\left(\sqrt{\frac{n}{k}}\right).\,\Pi_1\left(\sqrt[3]{\frac{n}{k}}\right)\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Эта теорема извѣстна подъ именемъ теоремы Чебышева. Она послужила ему точкою отправленія для его изящныхъ изслѣдованій о предѣлахъ, между которыми заключается число первыхъ чиселъ, не превосходящихъ данной величины. У насъ она является непосредственнымъ слѣдствіемъ общаго закона числовыхъ тожествъ въ частномъ предположеніи.

Слѣдуя самому естественному ходу изложенія, мы должны бы были прямо перейти къ изслѣдованіямъ Чебышева о первыхъ числахъ для того, чтобы показать какимъ образомъ эти тожества могутъ давать весьма замѣчательные результаты, но мы оставляемъ это, имѣя въ виду болѣе изложеніе общихъ методовъ, нежели дальнѣйшее развитіе результатовъ, полученныхъ этими пріемами.

§ 34.

Замѣняя аналитическія функціи $\psi(x)$, $\psi_1(y)$ числовыми въ одной изъ формулъ второго закона числовыхъ тожествъ, мы получаемъ точно также числовые законы, которые весьма трудно доказать другимъ путемъ.

Такъ, полагая, что въ общей формулѣ

$$E\phi(n-\psi_1 1)+3E\phi(n-\psi_1 2)+\ldots=E^2\phi_1(n-\psi 1)+$$
$$+E^2\phi_1(n-\psi 2)+\ldots$$

функцiи $\psi x=\psi_1 x$ выражаютъ число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ x, и означая чрезъ θ_u величину простого числа, стоящаго на мѣстѣ u въ таблицѣ, мы выводимъ формулы

$$\sum_1^{\theta_{n+1}-1}(2u-1)\,\theta_{n-\psi(u)+1}=\sum_1^{\theta_{n+1}-1}(2u-1)+\sum_1^{\theta_{n+1}-1}(\theta_{n-\psi u+1}-1)^2\,.$$

Для $n=3$ наша формула даетъ

$$\sum_1^{\theta_4-1}\theta_{4-\psi u}=\sum_1^{\theta_4-1}(2u-1)+\sum_1^{\theta_4-1}(\theta_{4-\psi u}-1)^2 \text{ или}$$

$$\theta_4+3\theta_3+5\theta_2+7\theta_2+9\theta_1+11\theta_1=12.3+(\theta_4-1)^2+$$
$$+(\theta_3-1)^2+(\theta_2-1)^2+(\theta_2-1)^2+(\theta_1-1)^2+(\theta_1-1)^2=98.$$

Дѣлая въ общемъ уравненiи

$$\varphi(1)\,E\phi_1(n-\psi 1)+\varphi(2)\,E\phi_1(n-\psi 2)+\ldots$$
$$\ldots=\sum_1^{E\phi(n-\psi_1 1)}\varphi(u)+\sum_1^{E\phi(n-\psi_1 2)}\varphi(u)+\ldots$$

тѣже самыя предположенiя относительно функцiй $\psi(x)$ и $\psi_1(y)$ и полагая $\varphi(u)=\theta_{n-\psi u+1}$, мы найдемъ тожество

$$\sum_1^{\theta_{n+1}-1}\theta^2_{n+1-\psi u}=\theta^2_{n+1-\psi 1}+\theta^2_{n+1-\psi 2}+\ldots$$

$$\ldots=\sum_1^{\theta_{n+1-\psi 1}}\theta_{n+1-\psi u}+\sum_1^{\theta_{n+1-\psi 2}}\theta_{n+1-\psi u}+\ldots$$

$$\text{или}\quad \sum_{1}^{\theta_{n+1}-1} \theta^2_{n+1-\psi u} = \sum_{1}^{\theta_{n+1}-1} \quad \sum_{1}^{\theta_{n+1-\psi u}} \theta_{n+1-\psi u}\,.$$

Полагая въ общей формулѣ

$$\varphi(1)\,\mathrm{E}\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right) + \varphi(2)\,\mathrm{E}\phi_1\left(\frac{n}{\psi 2}\right) + \ldots$$

$$\ldots = \sum_{1}^{\mathrm{E}\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} \varphi u + \sum_{1}^{\mathrm{E}\phi\frac{n}{\psi_1 2}} \varphi(u)\ \ldots$$

$\psi(x) = d_x(n)$, $\psi_1(y) = d_y(n)$, гдѣ $d_u(n)$ означаетъ величину дѣлителя числа n, стоящаго на мѣстѣ u въ рядѣ дѣлителей n, расположенныхъ по ихъ величинѣ, мы получимъ:

$$\varphi(1)\ \xi\left(\frac{n}{d_1}\right) + \varphi(2)\ \xi\left(\frac{n}{d_2}\right) + \ldots = \sum_{1}^{\xi\left(\frac{n}{d_1}\right)} \varphi(u) + \sum_{1}^{\xi\left(\frac{n}{d_2}\right)} \varphi(u) + \ldots$$

гдѣ $\xi(u)$ выражаетъ число дѣлителей числа n, не превосходящихъ u.

Для $\varphi(u) = d_u$ имѣемъ

$$d_1\,\xi(\lambda_1) + d_2\,\xi(\lambda_2) + d_3\,\xi(\lambda_3) + \ldots .$$

$$= \ldots \sum_{1}^{\xi\left(\frac{n}{d_1}\right)} d_u + \sum_{1}^{\xi\left(\frac{n}{d_2}\right)} d_u + \ldots$$

Полагая въ общей формулѣ 2-го закона числовыхъ тождествъ

$$\sum_{1}^{\mathrm{E}\phi(n)} \varphi(u)\,\mathrm{E}\phi_1\,(n - \psi u) = \sum_{1}^{\mathrm{E}\phi_1(n)} \quad \sum_{1}^{\mathrm{E}\phi(n-\psi_1 u)} \varphi(u)$$

$\psi(x) = d_x(n)$, $\psi_1 y = d_y(n)$ и подразумѣвая подъ $\varphi(u)$ символъ, обращающійся въ нуль для u сложнаго и въ 1 для u простого, мы получимъ

$$\sigma \overset{\xi(n)}{\underset{1}{\xi}} (n - d_u) = \sum_1^{\xi(n)} \psi \Big[\xi (n - d_u) \Big]$$

гдѣ знакъ σ распространяется на всѣ простыя числа.

Для $n = 36$ имѣемъ

$$\xi(36 - d_2) + \xi(36 - d_3) + \xi(36 - d_5) + \xi(36 - d_7) =$$
$$= \psi\xi(n - d_1) + \psi\xi(n - d_2) + \ldots = 32.$$

Дѣлая тѣже самыя положенія въ формулѣ

$$\sum_1^{\mathrm{E}\phi(n)} \varphi(u)\, \mathrm{E}\phi_1 \left(\frac{n}{\psi u}\right) = \sum_1^{\mathrm{E}\phi_1(n)} \sum_1^{\mathrm{E}\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)} \varphi(u).$$

мы получимъ

$$\sigma \overset{\xi(n)}{\underset{1}{\xi}} \left(\frac{n}{d_u}\right) = \sum_1^{\xi(n)} \psi \left[\xi \left(\frac{n}{d_u}\right) \right]$$

$$\text{Но } \sum_1^{\xi(n)} \psi \left[\xi \left(\frac{n}{d_u}\right) \right] = \sum_1^{\xi(n)} \psi(u) = (1 + \xi(n))\, \psi\, (1 + \xi(n)) -$$
$$- \sum_1^{\psi(1+\xi n)} \theta_u$$

слѣдовательно

$$\sum_1^{\psi(1+\xi n)} \theta_u = (1 + \xi(n))\, \psi\, (1 + \xi n) - \sigma \overset{\xi(n)}{\underset{1}{\xi}} \left(\frac{n}{d_u}\right)$$

Для $n = 36$ формула приметъ видъ

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2 + 3 + 5 + 7 = 10.4 - [\xi(18) + \\ + \xi(12) + \xi(6) + \xi(3)] = 23.$$

Положивъ въ усложненномъ законѣ числовыхъ тожествъ

$$\sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 1)} \varphi(u) \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi u)} \theta(u) = \sum_{1}^{E\phi_1(n-\psi 1)} \theta(u) \sum_{1}^{E\phi(n-\psi_1 u)} \varphi(u)$$

$$\psi(u) = d_u(n),\ \psi_1(u) = \theta_u,\ \phi(u) = \xi(u),\ \phi_1(u) = \psi(u),$$

и означая чрезъ $\theta(u)$ и $\varphi(u)$ символы, обращающіеся въ 1 или въ 0, смотря по ихъ отношенію къ простымъ числамъ, или квадратичнымъ вычетамъ числа p, мы найдемъ формулу

$$\sigma_{1}^{\xi(n-\theta_1)} \psi\, \psi(n - d_u) = s_{1}^{\psi(n-d_1)} n\, [\xi(n - \theta_u)]$$

гдѣ знакъ суммы σ распространяется на одни квадратичные вычеты, а s_1 на одни первыя числа, и гдѣ функція $n(u)$ означаетъ число квадратичныхъ вычетовъ p, не превосходящихъ u.

Дѣлая тѣже самыя положенія въ общей формулѣ

$$\sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 1}\right)} \varphi(u) \sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi u}\right)} \theta(u) = \sum_{1}^{E\phi_1\left(\frac{n}{\psi 1}\right)} \theta(u) \sum_{1}^{E\phi\left(\frac{n}{\psi_1 u}\right)} \varphi(u)$$

получимъ

$$\sigma_{1}^{\xi\left(\frac{n}{\theta_1}\right)} \psi\, \psi\left(\frac{n}{d_u}\right) = s_{1}^{\psi\left(\frac{n}{d_1}\right)} n\left[\xi\left(\frac{n}{u}\right)\right]$$

Полагая въ общей формулѣ (VII, глава вторая) $\psi_1(u) = d_u$, $\psi(u) = u^2$, имѣемъ

$$\sum_{1}^{k}\theta(u)\sum_{1}^{E\sqrt{n+d_u}}\varphi(u)+\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+d_k}}\varphi(u)\sum_{1}^{\xi(u^2-n)}\theta(u)=$$

$$=\sum_{1}^{k}\theta(u).\sum_{1}^{E\sqrt{n+d_k}}\varphi(u)+\sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+d_k}}\omega_u\,\varphi(u)\,\theta\,[\xi\,(u^2-n)].$$

При $n=0$ имѣемъ

$$\sum_{1}^{k}\theta\,(u)\sum_{1}^{E\sqrt{d_u}}\varphi(u)+\sum_{1}^{E\sqrt{d_k}}\varphi\,(u)\sum_{1}^{\xi(u^2)}\theta(u)=\sum_{1}^{k}\theta(u).\sum_{1}^{E\sqrt{d_k}}\varphi(u)+$$

$$+\sum_{1}^{E\sqrt{d_k}}\omega_u\,\varphi(u)\,\theta\,[\xi\,(u^2)].$$

здѣсь d_u означаетъ величину дѣлителя числа m, стоящаго на мѣстѣ u.

Формула эта даетъ возможность опредѣлить, сколько въ рядѣ паръ $\left[u,\,\xi\,(u^2)\right]_{1}^{E\sqrt{d_k}}$ будетъ членовъ Ω, для которыхъ u и $\xi(u^2)$ будутъ первыми числами. Выбирая для $\varphi(u)=\theta(u)$ символъ, имѣющій значеніе по отношенію къ первымъ числамъ, найдемъ

$$\Omega=\sum_{1}^{\psi(k)}\psi\left[E\sqrt{d_{\theta_u}}\right]+\sum_{1}^{\psi(E\sqrt{d_k})}\psi\left[\xi(\theta_u{}^2)\right]-\psi(k)\,\psi\,(E\sqrt{d_k}).$$

Для $k=10$, $m=72$ будемъ имѣть

$$\Omega = \sum_{1}^{4} \psi \left[\mathrm{E}\sqrt{d_{\theta_u}} \right] + \sum_{1}^{2} \psi \left[\xi(\theta_u{}^2) \right] - 4.2 = 1.$$

Дѣйствительно, вѣ рядѣ паръ

$\left[u,\ \xi(u^2)\right]_1^{\mathrm{E}\sqrt{d_{10}}}$ будетъ только одна пара $[3,\ \xi(3^2)]$, удовлетворяющая требуемымъ условіямъ.

Формулы, выведенныя въ § 31, способны точно также давать новые результаты для числовыхъ функцій въ случаѣ числовыхъ предположеній для $\psi(u)$.

§ 35.

Теорія неопредѣленныхъ уравненій даетъ точно также теоремы для выраженій, зависящихъ отъ E. Извѣстно, что число рѣшеній системы неопредѣленныхъ уравненій $x^2 + y^2 = [u]_1^n$ равно избытку дѣлителей вида $4n + 1$ надъ дѣлителями вида $4n + 3$ въ рядѣ чиселъ отъ 1 до n. Этотъ избытокъ очевидно выражается формулою

$$Q(n) = \mathrm{E}\,\frac{n}{1} - \mathrm{E}\,\frac{n}{3} + \mathrm{E}\,\frac{n}{5} - \mathrm{E}\,\frac{n}{7} + \ldots$$

Съ другой стороны число рѣшеній этой системы, или что тоже неопредѣленнаго уравненія $z + x^2 + y^2 = n$ выражается формулою

$$Q_1(n) = \mathrm{E}\sqrt{n} + \mathrm{E}\sqrt{n-1} + \mathrm{E}\sqrt{n-2^2} + \ . \ . \ .$$

Сравнивая эти выраженія, мы получимъ слѣдующую формулу

$$\mathrm{E}\sqrt{n} + \mathrm{E}\sqrt{n-1} + \mathrm{E}\sqrt{n-2^2} + \mathrm{E}\sqrt{n-3^2} + \ldots$$

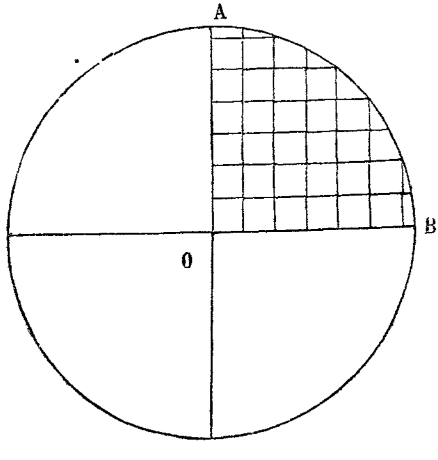
$$\ldots\ldots = \mathrm{E}\,\frac{n}{1} - \mathrm{E}\,\frac{n}{3} + \mathrm{E}\frac{n}{5} - \mathrm{E}\frac{n}{7} + \ldots$$

Эта теорема была выведена Ліувиллемъ.

Весьма важно было бы вывести эту формулу независимо отъ соображеній, взятыхъ изъ теоріи чиселъ, тогда бы доказательство нѣкоторыхъ теоремъ теоріи чиселъ возвелось къ болѣе высшимъ началамъ.

Если мы представимъ графически сумму по лѣвую сторону, то увидитъ, что она означаетъ число точекъ, помѣщающихся въ фигурѣ четверти круга (*fg* 1), описаннаго радіусомъ $\sqrt{n}$, считая эти точки на рѣшеткѣ, составленной изъ абсциссъ и ординатъ, проведенныхъ другъ отъ друга въ разстояніяхъ, равныхъ единицѣ. Величина $4Q$ выражаетъ число точекъ, помѣщающихся въ цѣломъ кругѣ за исключеніемъ точки, находящейся въ центрѣ.

Очевидно, что отношеніе $\frac{4Q}{n}$, по мѣрѣ увеличенія n, будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ выраженію отношенія площади круга къ площади квадрата, построеннаго на радіусѣ.



Фиг. 3.

Итакъ, раздѣливъ обѣ части уравненія на n, имѣемъ

$$\frac{4Q(n)}{n}=\frac{4}{n}\left[E\sqrt{n}+E\sqrt{n-1}+E\sqrt{n-2^2}+\ldots\right]=$$

$$=\left[\frac{E\frac{n}{1}}{n}-\frac{E\frac{n}{3}}{n}+\frac{E\frac{n}{5}}{n}-\ldots\right].$$

Увеличивая постоянно n и дѣлая его въ предѣлѣ равнымъ безконечности, мы будемъ имѣть уравненіе

$$lim.\ \frac{4Q}{n} = \pi = 4\ lim.\left[\frac{E_1^{\frac{n}{}}}{n} - \frac{E_3^{\frac{n}{}}}{n} + \frac{E_5^{\frac{n}{}}}{n}\ \dots\dots\right]$$

но $lim\ \frac{E_k^{\frac{n}{}}}{n} = \frac{1}{k}$ поэтому

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Такимъ образомъ помощію соображеній, взятыхъ изъ теоріи чиселъ, въ связи съ представленіемъ ихъ знакомъ E, мы получили разложеніе величины π.

Функція $\frac{\pi}{4}n$, будучи ассимптотическимъ выраженіемъ $Q(n)$ функціи, опредѣляющей число корней неопредѣленнаго уравненія $z + x^2 + y^2 = n$, можетъ съ достаточною точностію давать величину $Q(n)$ для всякаго n.

$$Q(n) = E\sqrt{n} + E\sqrt{n-1} + E\sqrt{n-2^2} + \dots = \frac{\pi}{4}n$$

Для $n = 100$, $Q(100) = 79$ и $\frac{\pi}{4} \cdot 100 = 78{,}5\dots$

§ 36.

Этотъ краткій очеркъ математическихъ истинъ, находящихся въ непосредственной связи съ свойствами символа E, конечно далеко не исчерпываетъ того богатаго научнаго матеріала, который можетъ быть достояніемъ этой статьи. Вопроса о рядахъ, связаннныхъ съ свойствами символа E — вопроса, обѣщающаго по видимому наиболѣе замѣчательные результаты для теоріи чиселъ, мы вовсе не касались. Не желая выходить изъ границъ самыхъ общихъ положеній, мы не касались и вопросовъ о рѣшеніи уравненій и изслѣдованіи геометрическихъ пространствъ, опредѣляемыхъ выраженіями, зависящими отъ E. Сознавая всю слабость предлагаемаго очерка, мы будемъ считать себя вполнѣ нравственно удовлетворенными, если нашъ трудъ хоть сколько нибудь будетъ содѣйствовать развитію этого отдѣла математическихъ истинъ.