

RAHMEN TRAGWERKE UND DURCHLAUFTRÄGER

VON

DR. ING. HABIL. RICHARD GULDAN
O. PROFESSOR AN DER DEUTSCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN PRAG

MIT 435 TEXTABBILDUNGEN UND 58 TAFELN

ZWEITE, NEUBEARBEITETE
UND WESENTLICH ERWEITERTE AUFLAGE



SPRINGER-VERLAG WIEN GMBH
1943

ISBN 978-3-662-01750-0 ISBN 978-3-662-02045-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-02045-6

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN

COPYRIGHT 1940 AND 1943 BY SPRINGER-VERLAG WIEN

URSPRÜNGLICHERSCHIENEN BEI SPRINGER-VERLAG OHG. IN VIENNA 1943

Vorwort zur ersten Auflage.

Es wird häufig die Ansicht vertreten, daß Baustatik ein Wissensgebiet sei, das derzeit schon als völlig durchforscht und abgeschlossen angesehen werden könne, weshalb auch für die praktische Anwendung keine wesentlichen Verbesserungen und Fortschritte mehr zu erwarten wären. Diese Anschauung ist jedoch grundsätzlich abzulehnen und wird auch durch das laufende Schrifttum ständig widerlegt. Bei dem gegenwärtig in allen Zweigen der Technik herrschenden Bestreben, die Leistungsfähigkeit der einzelnen Betriebe durch eine straffe und zielbewußte Organisation ständig zu steigern, erscheint es dringend notwendig, auch die Berechnungsmethoden der Baustatik und die zugehörigen Hilfsmittel immer zweckmäßiger zu gestalten, um so die Büroarbeiten auch bei der Behandlung schwieriger Konstruktionen auf ein Mindestmaß einschränken zu können.

Diesem Zwecke soll das vorliegende Buch in erster Linie dienen. Bei seinem Gesamtaufbau und seiner Gliederung war der Verfasser daher von dem Bestreben geleitet, vor allem den Wünschen der praktisch tätigen Ingenieure und Statiker gerecht zu werden, deren Ziel in der Regel eine möglichst rasche Lösung der gestellten Aufgaben sein wird. Gleichzeitig sind aber auch die Bedürfnisse der Studierenden weitgehendst berücksichtigt, denen eine anschauliche, wirklichkeitsnahe Darstellung der erforderlichen theoretischen Grundlagen in sinnvoller Verbindung mit der praktischen Anwendung und den zugehörigen Hilfsmitteln stets willkommen sein wird.

Der gesamte Inhalt des Buches ist in drei Teile gegliedert, um die Benutzung vor allem als Hand- und Hilfsbuch zu erleichtern und überall eine gute Übersicht zu erzielen. Im Ersten Teil, der dem Text gewidmet ist, werden in sechs Abschnitten die mit der Ausgestaltung und Weiterentwicklung des bekannten „Drehwinkelverfahrens“ zusammenhängenden Fragen von Grund auf eingehend behandelt und für die verschiedensten Tragwerksgattungen mit und ohne Vouten gebrauchsfertige Gleichungen in einfacher und zweckmäßiger Schreibweise aufgestellt, wobei stets auf eine strenge Unterscheidung zwischen Tragwerksformen mit „verschieblichen“ und „unverschieblichen“ Knotenpunkten besonderer Wert gelegt wird.

Der Einfluß der Querschnittsveränderlichkeit, namentlich der Stabendverstärkungen (Vouten), wird in augenfälliger Weise unter den üblichen Voraussetzungen auch zahlenmäßig vollständig klargestellt. Gleichzeitig wurden, einem in Fachkreisen oft geäußerten Wunsch entsprechend, ausführliche und bequeme Hilfsmittel in einer solchen Ausstattung geschaffen, daß sie dem Statiker die rechnerische Erfassung der Voutenwirkung ohne nennenswerten Mehraufwand an Arbeit gestatten und dazu beitragen, die beträchtlichen konstruktiven und wirtschaftlichen Vorteile zu erschließen, die sich aus einer günstigen Anordnung solcher Schrägen bei vielen Rahmentragwerken erzielen lassen. Es kann auf diese Weise in der Regel auch eine bedeutende Stahlersparnis erreicht werden.

Weiter wird in einem eigenen Abschnitt die Ermittlung der Einflußlinien an statisch unbestimmten Tragsystemen ausführlich dargelegt, wobei wiederum besonderes Augenmerk auf die Berücksichtigung der Voutenwirkung gerichtet ist. Die vorgeschlagenen Berechnungsverfahren gestatten unter gleichzeitiger Ver-

wendung der im Dritten Teil des Buches enthaltenen Zahlen- und Kurventafeln eine wesentliche Vereinfachung in der zahlenmäßigen Bestimmung der Einflußlinien für Rahmentragwerke mit geraden oder parabolischen Vouten.

Die Wirkung von gleichmäßigen und ungleichmäßigen Temperaturänderungen an statisch unbestimmten Tragwerken, sowie ihre rechnerische Erfassung wird in einem solchen Umfange erläutert, wie es für das Verständnis dieses Problems notwendig und für die praktische Anwendung wünschenswert erscheint.

Im Hinblick auf die große Bedeutung, die den Durchlaufträgern mit Auflagerverstärkungen im Bauwesen zukommt, wird diese Trägerform mit allen Sonderfällen im Anschluß an die Abschnitte über Rahmentragwerke einer eingehenden Behandlung unterzogen. Die praktische Berechnung dieser Trägerart für die verschiedensten Belastungsfälle, sowie die Ermittlung der Einflußlinien wird mit Hilfe der im Dritten Teil zusammengestellten Zahlen- und Kurventafeln bedeutend erleichtert.

Da die Auflösung linearer Gleichungssysteme bei der zahlenmäßigen Berechnung von Rahmentragwerken eine große Rolle spielt, war es notwendig, auch dieser Frage einen angemessenen Raum zur Verfügung zu stellen und einige Rechenverfahren für die abgekürzten Auflösungsverfahren in einer solchen Form auszuarbeiten, daß der Rechnungsgang auch von weniger Geübten leicht überblickt werden kann. Es schien zu diesem Zwecke eine bildmäßige Darstellung des Lösungsvorganges am besten geeignet.

Der Zweite Teil des Buches enthält 20 Zahlenbeispiele von Tragwerken aus dem Hoch- und Brückenbau, die die praktische Anwendung der im Ersten Teil beschriebenen Verfahren unter Benutzung der im Dritten Teil des Buches enthaltenen Hilfstafeln zeigen und auch in der ganzen Art der zahlenmäßigen Durchführung als Musterbeispiele aufzufassen sind. Da ein großer Teil von diesen Beispielen sowohl mit, als auch ohne Vouten berechnet worden ist, so kann der Einfluß der Stabendverstärkungen auf die Momentenverteilung bei verschiedenen Tragwerksformen zahlenmäßig verglichen und damit auch in seinen wirtschaftlichen Auswirkungen viel besser beurteilt werden.

Im Dritten Teil des Buches sind sämtliche Hilfstafeln vereinigt. Es stehen 54 Zahlen- und Kurventafeln auf insgesamt 88 Buchseiten zur Verfügung. Sie ermöglichen eine einfache Umgehung zeitraubender und langwieriger Zahlenrechnungen und können so zu einer fühlbaren Entlastung der im Büro tätigen Ingenieure beitragen. Die meisten Tafeln erscheinen gleichzeitig als Zahlen- und Kurventafeln, um die Vorteile beider Darstellungsarten zu erreichen und dem Benutzer beim Gebrauch stets freie Wahl zu lassen.

So möge denn das Buch, dessen Erscheinen in eine wahrhaft große Zeit fällt, nicht nur den bereits berufstätigen Statikern und Ingenieuren bei der Erfüllung ihrer oft schwierigen und verantwortungsreichen Aufgaben ein willkommener Helfer und Berater sein, sondern auch zu einer gediegenen fachlichen Ausbildung und Erziehung unseres Ingenieurwachstums beitragen.

Allen, die an der Vollendung des Werkes Anteil haben, insbesondere meinen beiden ehemaligen Konstrukteuren Dipl.-Ing. B. PÜSCHEL, Dipl.-Ing. K. HORA und meinem derzeitigen Konstrukteur Dr.-Ing. G. ŠIMÁČEK für seine wertvolle Mithilfe beim Lesen der Korrekturen, spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus.

Weiters danke ich der „Deutschen Gesellschaft der Wissenschaften und Künste“ in Prag, die durch ihre Unterstützung die Fertigstellung der umfangreichen Arbeit gefördert hat, und schließlich dem Verlag für die Berücksichtigung aller Sonderwünsche bei der Drucklegung und für die überaus sorgfältige Ausstattung des Buches.

Prag, im Juni 1940.

R. GULDAN.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der rasche Absatz der ersten Auflage, die seit einem Jahr vergriffen ist, und die weiterhin anhaltende rege Nachfrage machten trotz der herrschenden kriegsbedingten Schwierigkeiten eine Neuauflage des Werkes erforderlich. Die zustimmende Aufnahme, die das Buch in weitesten Fachkreisen gefunden hat, läßt deutlich erkennen, daß der eingeschlagene Weg bei der Ausarbeitung der ersten Auflage richtig war und daß damit vielen lange gehegten Wünschen aus Statikerkreisen voll entsprochen worden ist. Das offenbarte sich auch in zahlreichen Zuschriften, die dem Verfasser aus der Fachwelt zugingen und manch freundliche Anregung enthielten.

Über den Aufbau des Werkes, der sich bestens bewährt hat und daher auch weiterhin beibehalten werden konnte, ist im Vorwort zur ersten Auflage Grundsätzliches gesagt. In der neuen Auflage sind jedoch eine ganze Reihe wesentlicher Erweiterungen vorgenommen worden, die den Anwendungsbereich des Buches bedeutend vergrößern. Zunächst wurde im ersten Abschnitt ein Kapitel über die Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment eingeschaltet, in welchem einige grundlegende Sätze der Baustatik in anschaulicher Weise erläutert werden. Sodann sind im ersten und zweiten Abschnitt bei der Behandlung der Tragwerke mit und ohne Vouten auch gelenkige Stabanschlüsse eingehend berücksichtigt worden, um die Vorteile des Drehwinkelverfahrens auch für die Berechnung solcher Tragwerksgattungen zu erschließen und voll zur Geltung zu bringen.

Weiter treten im Ersten Teil des Buches noch zwei Abschnitte, nämlich der siebente und achte, vollkommen neu hinzu. Der siebente Abschnitt ist der vereinfachten Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke gewidmet. Darin wird zunächst die gewöhnliche Iteration beschrieben und einer kritischen Betrachtung unterzogen und dann ein spezielles Verfahren, die „Reduktionsmethode“ mit relativer Schätzung der Nachbarunbekannten, dargelegt. Diese Methode setzt den Statiker in den Stand, auch umfangreiche Tragwerke, die bei Anwendung der üblichen Verfahren einen unvertretbar großen Zeitaufwand erfordern würden, mit ganz einfachen Hilfsmitteln zu berechnen.

Im achten Abschnitt wird zuerst die Festpunktmethode in vereinfachter Anwendung auf unverschiebliche Tragwerke behandelt. Es wird gezeigt, wie die Festpunkte für irgendeinen Rahmenstab sehr leicht aus einer Hilfstafel bestimmt werden können, ohne die Lage der Festpunkte in den benachbarten Rahmenstäben kennen zu müssen. Unter Benutzung der gebotenen neuen Hilfstabeln ergibt sich ein überaus vorteilhaftes Verfahren, das bei hinreichender Genauigkeit wohl mit zu den schnellsten Methoden zu zählen ist, die für unverschiebliche Tragwerke in Betracht kommen. Sodann gelangt in diesem Abschnitt das Momentenverteilungsverfahren für unverschiebliche und verschiebliche Tragwerke mit und ohne Vouten zur Behandlung. Es wird der einfache Zusammenhang dieser häufig nach Cross benannten Berechnungsmethode mit dem Drehwinkelverfahren klargestellt und gleichzeitig dargelegt, wie durch direkte Benutzung der zahlreichen Hilfstabeln im Dritten Teil des Buches auch diese Methode namentlich für Voutentragwerke vorteilhaft angewendet werden kann.

Im Zweiten Teil des Buches sind sieben Zahlenbeispiele vollständig neu aufgenommen worden, und zwar vier Beispiele für Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen in solcher Auswahl, daß unverschiebliche und verschiebliche Tragwerke mit und ohne Vouten vertreten sind, und schließlich drei Beispiele, die die praktische Anwendung der „Reduktionsmethode“ bei hochgradig statisch unbestimmten Tragwerken zeigen.

Der Dritte Teil des Buches wurde durch vier „Hilfstafeln zur Festpunktmethode“ bereichert.

So ist zu hoffen, daß das Werk auch in seiner neuen Form die gleiche freundliche Aufnahme in der Fachwelt finden wird wie die erste Auflage und daß es in gesteigertem Maße die Arbeiten der praktisch tätigen Statiker und Bauingenieure erleichtern, sowie gleichzeitig auch den Studierenden das notwendige Verständnis und die Voraussetzungen zur erfolgreichen Anwendung der neu entwickelten Berechnungsmethoden vermitteln wird.

Es war gewiß nicht leicht, neben der beruflichen Inanspruchnahme und der starken Belastung mit kriegswichtigen Aufgaben, die Bearbeitung der neuen Auflage in dem beträchtlich erweiterten Umfang und mit der für ein solches Werk notwendigen Sorgfalt und Gründlichkeit vorzunehmen. Die aufgetretenen Schwierigkeiten wurden aber überwunden und es sei hier allen, die dazu beigetragen haben, herzlich gedankt. Besonders danke ich meinem Konstrukteur Dr.-Ing. G. ŠIMÁČEK, der mich wieder in gewissenhaftester Weise beim Lesen der Korrekturen und bei der Überprüfung der Zahlenrechnungen unterstützte. Besonderer Dank gebührt aber auch dem Verlag für die wiederum aufs beste gelungene Ausstattung des Buches.

Prag, im Juni 1943.

R. GULDAN.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Erster Abschnitt.

Rahmentragwerke ohne Vouten.

	Seite
I. Rechnungsgrundlagen für das „Drehwinkelverfahren“	1
1. Die Beziehungen zwischen den Formänderungsgrößen des Rahmenstabes..	1
2. Vorzeichenregeln für Stabendmomente und Formänderungsgrößen	2
3. Formeln für die Stabendmomente.....	2
II. Allgemeine Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment	5
1. Allgemeines	5
2. Richtungsbestimmung der Querkraft aus der Momentenlinie	7
III. Rahmentragwerke mit <i>unverschieblichen</i> Knotenpunkten.....	8
1. Allgemeines	8
2. Knotengleichungen für unverschiebliche Tragwerke	11
3. Beschreibung des Rechnungsganges.....	13
4. Tabellarische Aufstellung der Gleichungen	14
5. Bemerkungen über die Verwendung der Stabfestwerte k	15
6. Die zahlenmäßige Ermittlung der Stabbelastungsglieder	15
7. Berücksichtigung gelenkiger Stabanschlüsse	16
A. Allgemeines	16
B. Bedingungsgleichungen	17
C. Anwendungsbeispiel	19
IV. Rahmentragwerke mit <i>verschieblichen</i> Knotenpunkten.....	20
1. Allgemeines	20
2. Aufstellung der Bedingungsgleichungen	23
3. Der beliebig belastete Stockwerkrahmen mit lotrechten, geschoßweise gleich langen Ständern.....	25
a) Bedingungsgleichungen	25
b) Gleichungstabelle für einen unsymmetrischen, dreistielligen, zweistöckigen Rahmen	28
c) Tabellarische Aufstellung der Gleichungen für symmetrische Tragwerke	29
4. Der beliebig belastete, nur waagrecht verschiebliche Stockwerkrahmen mit lotrechten, ungleich langen Ständern	30
Bedingungsgleichungen	31
5. Das BU.-Verfahren bei symmetrischen Tragwerken	33
6. Verschiebliche Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen	36
A. Allgemeines	36
B. Mehrfeldrahmen	37
C. Stockwerkrahmen mit gelenkigen Stabanschlüssen	40
a) Bedingungsgleichungen	40
b) Anwendungsbeispiel	40

	Seite
7. Rahmentragwerke mit nur <i>lotrecht</i> verschieblichen Knotenpunkten	42
A. Symmetrisch ausgebildete und symmetrisch belastete Vierendeel-Rahmentragwerke	42
a) Bedingungsgleichungen	43
b) Gleichungstabelle für ein symmetrisches Vierendeel-Rahmentragwerk	46
B. Unsymmetrisch ausgebildete, seitlich festgehaltene Vierendeel-Rahmentragwerke	47
a) Bedingungsgleichungen	47
b) Gleichungstabelle für ein unsymmetrisches, nur <i>lotrecht</i> verschiebliches Rahmentragwerk	51
8. Rahmentragwerke mit <i>lotrecht</i> und <i>waagrecht</i> verschieblichen Knotenpunkten	52
Bedingungsgleichungen	52

Zweiter Abschnitt.

Rahmentragwerke mit beliebig veränderlichen Stabquerschnitten.

I. Vorbemerkung	54
II. Allgemeines über die Wirkung veränderlicher Stabquerschnitte	54
III. Rechnungsgrundlagen	57
1. Die Endtangentialwinkel der Biegelinie des Rahmenstabes mit veränderlichen Querschnitten	57
2. Formeln für die Stabendmomente	59
IV. Die Stabfestwerte a , b , c	62
1. Statische Deutung	62
2. Die zahlenmäßige Ermittlung der Stabfestwerte a , b , c	62
A. Bei Stäben mit beliebig veränderlichen Querschnitten	62
B. Bei Stäben mit einseitig oder beidseitig geraden oder parabolischen Vouten	63
C. Bei Stäben mit ungleichen Vouten	64
3. Verwendung der Werte a , b , c in der Rahmenberechnung	66
V. Die zahlenmäßige Ermittlung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M}	66
1. Bei Stäben mit beliebig veränderlichen Querschnitten und beliebiger Belastung	66
2. Bei Stäben ohne Vouten	67
3. Bei Stäben mit geraden oder parabolischen Vouten	67
A. Hilfstafeln für gleichmäßige Vollbelastung	67
B. Hilfstafeln für Einzellasten bzw. Streckenlasten	68
C. Stäbe mit ungleichen Vouten	69
VI. Rahmentragwerke mit <i>unverschieblichen</i> Knotenpunkten	71
1. Bedingungsgleichungen	71
2. Beschreibung des Rechnungsganges	72
3. Gleichungstabelle für ein unverschiebliches Tragwerk	72
4. Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen	73
a) Bedingungsgleichungen	74
b) Anwendungsbeispiel	75
VII. Rahmentragwerke mit <i>verschieblichen</i> Knotenpunkten	76
1. Allgemeines	76
2. Der beliebig belastete Stockwerkrahmen mit <i>lotrechten</i> , geschoßweise gleich langen Ständern	77
a) Bedingungsgleichungen	77
b) Gleichungstabelle für ein dreistöckiges, unsymmetrisches Rahmentragwerk	78
3. Der beliebig belastete Stockwerkrahmen mit <i>lotrechten</i> , ungleich langen Ständern	79
Bedingungsgleichungen	79

	Seite
4. Verschiebliche Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen	81
A. Allgemeines	81
B. Mehrfeldrahmen	82
C. Stockwerkrahmen	84
5. Rahmentragwerke mit nur <i>lotrecht</i> verschieblichen Knotenpunkten	85
A. Symmetrisch ausgebildete und symmetrisch belastete Vierendeel-Rahmentragwerke	85
a) Bedingungsgleichungen	85
b) Gleichungstabelle für ein symmetrisches dreigurtiges Vierendeel-Rahmentragwerk	86
B. Unsymmetrisch ausgebildete, seitlich festgehaltene Vierendeel-Rahmentragwerke	87
a) Bedingungsgleichungen	87
b) Gleichungstabelle für ein unsymmetrisches Vierendeel-Rahmentragwerk mit nur <i>lotrecht</i> verschieblichen Knotenpunkten	89
6. Rahmentragwerke mit <i>lotrecht</i> und <i>waagrecht</i> verschieblichen Knotenpunkten	90
a) Bedingungsgleichungen	90
b) Gleichungstabelle für ein unsymmetrisches, <i>lotrecht</i> und <i>waagrecht</i> verschiebliches Rahmentragwerk	91

Dritter Abschnitt.

Einflußlinien für statisch unbestimmte Tragwerke.

I. Vorbemerkung	92
II. Ermittlung der <i>M</i> -Einflußlinien als Biegelinien am $(n - 1)$ -fach statisch unbestimmten Tragwerk	92
1. Grundlagen des Verfahrens	92
2. Ermittlung der Biegelinie aus den Knotendrehwinkeln φ und den Knotenverschiebungen δ	93
3. Vorzeichenregeln für die Einflußlinien und Momente	95
4. <i>M</i> -Einflußlinien für Feldquerschnitte	95
III. Ermittlung der <i>M</i> -Einflußlinien als Biegelinien am n -fach statisch unbestimmten Tragwerk	96
1. Grundlagen des Verfahrens	97
2. Sonderfälle	98
3. Durchführung der Rechnung	98
4. Schlußbemerkung	99
5. Beispiel: Einflußlinien für einen Zweifeldrahmen	100
IV. Ermittlung der Einflußlinien für die Querkräfte	101

Vierter Abschnitt.

Die Wirkung von Temperaturänderungen bei statisch unbestimmten Tragwerken.

I. Tragwerke, die durch eine gleichmäßige Temperaturänderung keine Spannungsänderung erfahren	103
II. Tragwerke, bei welchen die durch Temperaturänderungen hervorgerufenen Knotenverschiebungen aus geometrischen Beziehungen <i>allein</i> bestimmbar sind	103
1. Vorbemerkung	103
2. Knotengleichungen	104
3. Zahlenmäßige Ermittlung der „Temperaturbelastungsglieder“	106
III. Tragwerke, bei welchen die Knotenverschiebungen aus geometrischen Beziehungen <i>allein nicht</i> bestimmbar sind	107
1. Allgemeines	107

	Seite
2. Der unsymmetrische Mehrfeldrahmen mit waagrechten Riegeln und beliebig veränderlichen Stabquerschnitten	107
A. Ansätze für die Verschiebungsgrößen Δ der Rahmenstäbe	107
B. Gleichungsansätze für die Stabendmomente	108
C. Knotengleichungen	109
D. Verschiebungsgleichungen	109
3. Beschreibung des Rechnungsganges	110
4. Gleichungstabelle für einen unsymmetrischen Dreifeldrahmen mit veränderlichen Stabquerschnitten bei Temperaturwirkung	111
5. Schlußbemerkung	112
IV. Wirkung der ungleichmäßigen Temperaturänderungen	112
1. Voraussetzungen	112
2. Belastungsglieder	112
A. Anteil infolge Längenänderung der Stabachse	113
B. Anteil infolge Krümmung der Stabachse	113
V. Verschiedene Nebeneinflüsse bei Rahmentragwerken	114
1. Einfluß des Schwindens bei Eisenbetontragwerken	114
2. Berücksichtigung der durch die Längskräfte hervorgerufenen Formänderungen	115
3. Wirkung der Stützen- und Auflagerverschiebungen	115

Fünfter Abschnitt.

Der Durchlaufträger mit veränderlichen Stabquerschnitten unter Berücksichtigung aller Sonderfälle.

I. Allgemeines	116
II. Der Durchlaufträger mit beliebig veränderlichen Trägheitsmomenten in allen Feldern	117
1. Gleichungsansätze für die Endtangentialwinkel der Biegelinie	117
2. Übergang zu den Dreimomentengleichungen	119
3. Beschreibung des Rechnungsganges	120
4. Tabellarische Aufstellung der Dreimomentengleichungen für einen Fünffeldbalken	121
5. Der Durchlaufträger mit eingespannten Enden	121
A. Gleichungsansätze	121
B. Tabellarische Aufstellung der Dreimomentengleichungen für einen Fünffeldbalken mit eingespannten Enden	122
6. Der Durchlaufträger mit auskragenden Enden	123
III. Sonderfälle	123
1. Der Durchlaufträger mit feldweise verschiedenen, innerhalb der Felder jedoch konstanten Trägheitsmomenten	124
2. Der Durchlaufträger mit gleichen Trägheitsmomenten in allen Feldern	124
3. Der Durchlaufträger mit gleichem Verhältnis $\frac{J}{l}$ in allen Feldern	124
4. Der Durchlaufträger mit gleichen Trägheitsmomenten und gleichen Längen in allen Feldern	125
IV. Temperatureinflüsse beim Durchlaufträger	125
1. Allgemeines	125
2. Voraussetzungen	125
3. Ermittlung der Belastungsglieder	125
V. Der Durchlaufträger mit nachgiebigen Stützen	126
1. Voraussetzungen	126
2. Ansatz für die Dreimomentengleichungen	126

	Seite
VI. Ermittlung der Einflußlinien für den Durchlaufträger	128
1. Vorbemerkung	128
2. Die M -Einflußlinien als Biegelinien am $(n - 1)$ -fach statisch unbestimmten Tragwerke	128
A. Allgemeines	128
B. Ermittlung der Biegelinien aus den Momentenlinien	129
C. Bestimmung des Verdrehungswinkels γ der Gelenkquerschnitte	130

Sechster Abschnitt.

Zweckmäßige Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.

Abgekürzte Eliminationsverfahren	132
1. Allgemeines	132
2. Beschreibung der einzelnen Rechenvorschriften	133
A. Muster I für symmetrische Gleichungssysteme	133
B. Muster II für symmetrische Gleichungssysteme	134
C. Muster III für unsymmetrische Gleichungssysteme	135

Siebenter Abschnitt.

Vereinfachte Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke.

I. Vorbemerkung	136
II. Die gewöhnlichen Iterationsverfahren	137
1. Allgemeines	137
2. Die Anwendung der Iteration in der Baustatik	138
3. Vor- und Nachteile der gewöhnlichen Iterationsverfahren	139
III. Methode der „reduzierten Systeme“ mit relativer Schätzung der Nachbar- unbekanntem (Reduktionsmethode)	140
1. Vorbemerkung	140
2. Allgemeine Erläuterung der Reduktionsmethode	140
3. Statische Deutung	141
4. Anwendung der Methode bei unverschieblichen Tragwerken	143
A. Wahl des „reduzierten Systems“	143
B. Durchführung der „relativen Schätzung“	143
C. Beschreibung des Rechnungsganges	145
5. Anwendung bei waagrecht verschieblichen Tragwerken	146
A. Allgemeines	146
B. Durchführung der „relativen Schätzung“ der φ - und ψ -Werte	147
C. Durchführung der Rechnung	150
D. Zahlenbeispiel	150
6. Anwendung bei lotrecht verschieblichen Tragwerken	152
Zahlenbeispiel	152

Achter Abschnitt.

Verschiedene Methoden und Näherungsverfahren zur Berechnung von Rahmentragwerken.

I. Die Festpunktmethode in vereinfachter Anwendung auf unverschiebliche Tragwerke	154
1. Ermittlung der Festpunkte	154
2. Ermittlung der Überleitungszahlen γ	156
3. Bestimmung der Knotenverteilungszahlen μ	157
4. Ermittlung der Ausgangsmomente des belasteten Rahmenstabes	158
5. Rechnungsgang bei Anwendung der Festpunktmethode auf unverschiebliche Tragwerke und Durchlaufträger	159
6. Anwendungsbeispiel	160

	Seite
II. Das Momentenverteilungsverfahren	160
1. Allgemeine Beschreibung des Verfahrens	161
A. Unverschiebliche Tragwerke	161
B. Verschiebliche Tragwerke	161
2. Bestimmung der Momentenverteilungszahlen μ	162
3. Ermittlung der Überleitungszahlen γ	163
4. Ermittlung der Ausgangsmomente \mathfrak{M}	164
5. Bestimmung der Verschiebungsmomente für $\Delta = 1$ bei unverdrehbaren Knoten	164
6. Ermittlung der Verteilungszahlen ω für die Verschiebungsmomente bei unverdrehbaren Knoten	165
7. Anwendungsbeispiel für ein unverschiebliches Tragwerk	165

Zweiter Teil.

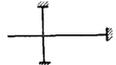
Zahlenbeispiele.

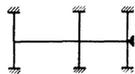
Vorbemerkung	168
--------------------	-----

Erster Abschnitt.

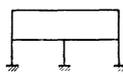
Rahmentragwerke ohne Vouten.

I. <i>Unverschiebliche</i> Tragwerke	169
--	-----

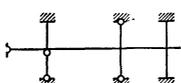
Zahlenbeispiel 1. Rahmenteil mit Kragarm		169
--	--	-----

Zahlenbeispiel 2. Zweifeldiger Unterzug in steifer Verbindung mit den Säulen		170
--	--	-----

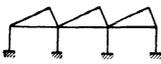
Zahlenbeispiel 3. Symmetrischer Dachrahmen		172
--	--	-----

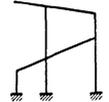
Zahlenbeispiel 4. Symmetrischer zweistöckiger Rahmen		173
--	--	-----

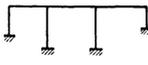
Zahlenbeispiel 5. Vierteiliger Zellensilo		175
---	---	-----

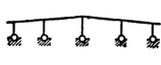
Zahlenbeispiel 6. Dreifeldiger Unterzug mit teils gelenkig angeschlossenen Säulen		178
---	--	-----

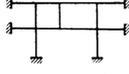
II. <i>Verschiebliche</i> Tragwerke	180
---	-----

Zahlenbeispiel 7. Dreischiffiger Shedrahmen		180
---	--	-----

Zahlenbeispiel 8. Tribünenrahmen		184
--	--	-----

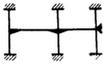
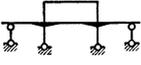
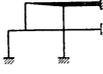
Zahlenbeispiel 9. Unsymmetrischer Dreifeldrahmen (mit Temperaturwirkung)		187
--	--	-----

Zahlenbeispiel 10. Vierschiffiger symmetrischer Hallenrahmen mit Fußgelenken		191
--	--	-----

		Seite
Zahlenbeispiel 11. Symmetrisches Vierendeel-Rahmen-tragwerk		194
Zahlenbeispiel 12. Unsymmetrisches, lotrecht verschiebliches Tragwerk		196
Zahlenbeispiel 13. Lotrecht verschiebliches Tragwerk mit zurückgesetztem Obergeschoß		199

Zweiter Abschnitt.

Rahmentragwerke mit Vouten.

I. Ermittlung der Stabfestwerte a, b, c und der Belastungsglieder \mathfrak{M} mit Hilfe der Zahlen- und Kurventafeln		202
Einführungsbeispiel 1. Stab mit beidseitig gleichen geraden Vouten		202
Einführungsbeispiel 2. Stab mit einseitig parabolischer Voute		204
Einführungsbeispiel 3. Säule mit Voute		205
Einführungsbeispiel 4. Stab mit verschiedenen Vouten an beiden Enden ..		207
Einführungsbeispiel 5. Geneigte Rahmenstäbe mit Vouten		209
II. <i>Unverschiebliche</i> Tragwerke		209
Zahlenbeispiel 14. Rahmenteil mit Kragarm		210
Zahlenbeispiel 15. Zweifeldiger Unterzug in steifer Verbindung mit den Säulen		212
Zahlenbeispiel 16. Symmetrischer zweistöckiger Rahmen		214
Zahlenbeispiel 17. Symmetrischer Rahmen mit Fußgelenken und Pendelsäulen		216
III. <i>Verschiebliche</i> Tragwerke		219
Zahlenbeispiel 18. Tribünenrahmen		219
Zahlenbeispiel 19. Vierschiffiger symmetrischer Hallenrahmen mit Fußgelenken		224
Zahlenbeispiel 20. Lotrecht verschiebliches Tragwerk mit zurückgesetztem Obergeschoß		229
Zahlenbeispiel 21. Unsymmetrischer dreifeldiger Brückenrahmen (mit Einflußlinien)		233

Dritter Abschnitt.

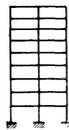
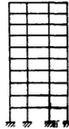
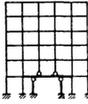
Der Durchlaufträger.

I. Ermittlung der Stabfestwerte $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ und der Belastungsglieder α_1^0, α_2^0 mit Hilfe der Zahlen- und Kurventafeln	240
Einführungsbeispiel 1. Stab mit beidseitig parabolischen Vouten	241
Einführungsbeispiel 2. Stab mit einseitig gerader Voute	242

	Seite
II. Vollständig durchgerechnete Zahlenbeispiele	243
Zahlenbeispiel 22. Unsymmetrischer Zweifeldträger ohne Vouten (mit ungleicher Temperaturwirkung)	243
Zahlenbeispiel 23. Unsymmetrischer Zweifeldträger mit geraden Vouten (mit Einflußlinien) ..	244
Zahlenbeispiel 24. Symmetrischer Dreifeldträger mit parabolischen Vouten (mit Einflußlinien)	246

Vierter Abschnitt.

Hochgradig statisch unbestimmte Rahmentragwerke.

Zahlenbeispiel 25. Symmetrischer, 10geschossiger, dreistieliger Stockwerkrahmen mit symmetrischer Belastung.....		251
Zahlenbeispiel 26. Symmetrischer, 10geschossiger, vierstieliger Stockwerkrahmen mit waagrechtlicher Belastung.....		255
Zahlenbeispiel 27. Symmetrisches, lotrecht verschiebliches, 6geschossiges und sechsstieliges Rahmentragwerk aus Stahlbeton und Stahl mit lotrechter Belastung		261

Dritter Teil.

Hilfstafeln zur Berechnung von Rahmentragwerken und Durchlaufträgern.

		Seite			
I. Trägheitsmomente von Rechtecksquerschnitten	Taf. 1	270—271			
II. Stäbe ohne Vouten:					
Belastungsglieder	{	für gleichmäßig verteilte Streckenlasten	Taf. 2	272	
M_1, M_2 (= Einspannmomente)		für Dreieckslasten, Momente, Temperatur ..	„ 3	273—275	
α_1^0, α_2^0 (= Endtangentialwinkel)		für Einzellasten	„ 4	276—277	
K_1^0, K_2^0 (= Kreuzlinienabschnitte)					
III. Stäbe mit Vouten:					
A. Stabfestwerte und Belastungsglieder zur Berechnung von Rahmentragwerken.					
Stabfestwerte a_1, a_2, b	{	Zahlen- tafeln	einseitig gerade Vouten	Taf. 5	278—279
			„ parab. „	„ 6	280—281
		Kurven- tafeln	beidseitig gerade Vouten	„ 7	282
			„ parab. „	„ 8	283
			einseitig gerade Vouten	„ 5a	284—286
			„ parab. „	„ 6a	287—289
			beidseitig gerade Vouten	„ 7a	290—291
			„ parab. „	„ 8a	292—293

				Seite		
Belastungsglieder $M_1 M_2$ (Vollbelastung)	Zahlen- tafeln	{	einseitig gerade Vouten	Taf. 9	294	
			„ parab. „	„ 10	295	
	Kurven- tafeln	{	beidseitig gerade Vouten	„ 11	296	
			„ parab. „	„ 12	297	
			einseitig gerade Vouten.	„ 9a	298	
			„ parab. „	„ 10a	299	
			beidseitig gerade Vouten	„ 11a	300	
			„ parab. „	„ 12a	301	
Belastungsglieder $M_1 M_2$ (Einflußlinien)	Zahlen- tafeln (12teilig)	{	einseitig gerade Vouten	Taf. 13	302–304	
			„ parab. „	„ 14	305–307	
	Kurven- tafeln (10teilig)	{	beidseitig gerade Vouten	„ 15	308–309	
			„ parab. „	„ 16	310–311	
			einseitig gerade Vouten	„ 13a	312–314	
			„ parab. „	„ 14a	315–317	
			beidseitig gerade Vouten	„ 15a	318–319	
			„ parab. „	„ 16a	320–321	
B. Stabfestwerte und Belastungsglieder zur Berechnung von <i>Durchlaufträgern.</i>						
Stabfestwerte $\alpha_1 \alpha_2 \beta$	Zahlen- tafeln	{	einseitig gerade Vouten	Taf. 17	322–323	
			„ parab. „	„ 18	324–325	
	Kurven- tafeln	{	beidseitig gerade Vouten	„ 19	326	
			„ parab. „	„ 20	327	
			einseitig gerade Vouten	„ 17a	328	
			„ parab. „	„ 18a	329	
			beidseitig gerade Vouten	„ 19a	330	
			„ parab. „	„ 20a	331	
Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$ (Vollbelastung)	Zahlen- tafeln	{	einseitig gerade Vouten	Taf. 21	332–333	
			„ parab. „	„ 22	334–335	
	Kurven- tafeln	{	beidseitig gerade Vouten	„ 23	336	
			„ parab. „	„ 24	337	
			einseitig gerade Vouten	„ 21a	338	
			„ parab. „	„ 22a	339	
			beidseitig gerade Vouten	„ 23a	340	
			„ parab. „	„ 24a	341	
Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$ (Einflußlinien)	Zahlen- tafeln (12teilig)	{	einseitig gerade Vouten	Taf. 25	342–344	
			„ parab. „	„ 26	345–347	
			{	beidseitig gerade Vouten	„ 27	348–349
				„ parab. „	„ 28	350–351
IV. Rechenvorschriften zur Auflösung linearer Gleichungssysteme.						
Symmetrische Gleichungssysteme	Muster I	{	bildmäßige Darstellung	Taf. 29	352	
			Zahlenbeispiel	„ 29a	353	
	Muster II	{	bildmäßige Darstellung	„ 30	354	
			Zahlenbeispiel	„ 30a	355	
Unsymmetrische Gleichungssysteme	Muster III	{	bildmäßige Darstellung	Taf. 31	356	
			Zahlenbeispiel	„ 31a	357	
V. Hilfstafeln zur Festpunktmethode.						
Festpunktabstände	{	Zahlentafel	Taf. 32	358		
		Kurventafel (mit Überleitungszahlen)	„ 32a	359		
Ausgangsmomente $M_1 M_2$ symmetrisch belasteter Rahmenstäbe	{	Zahlentafel	Taf. 33	358		
		graphische Tafel	„ 33a	359		

Erster Teil.

Erster Abschnitt.

Rahmentragwerke ohne Vouten.

I. Rechnungsgrundlagen für das „Drehwinkelverfahren“.

1. Die Beziehungen zwischen den Formänderungsgrößen des Rahmenstabes.

Die Bezeichnung „Drehwinkelverfahren“ ist in den Kreisen der Statiker überall geläufig und soll deshalb auch hier beibehalten werden, obwohl dieser Ausdruck nicht ganz zutreffend ist, da als Rechnungsunbekannte neben Drehwinkeln häufig auch Verschiebungsgrößen Verwendung finden.

In Abb. 1 ist ein Rahmenstab mit den beiden anschließenden Knotenpunkten 1 und 2 vor und nach der Verformung zur Darstellung gebracht. Dabei wurde der allgemeine Fall vorausgesetzt, daß die Stabenden infolge der äußeren Belastung des Tragwerkes sowohl Verdrehungen als auch Verschiebungen erleiden. Die Formänderungsgrößen sind in Abb. 1 unter Berücksichtigung der im folgenden Kapitel angegebenen Vorzeichenregeln stark verzerrt wiedergegeben. Es bedeuten:

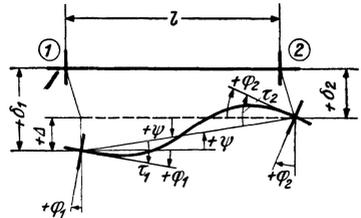


Abb. 1.
Drehwinkel und Verschiebungsgrößen.

- φ_1 bzw. $\varphi_2 \dots$ die Winkel, um welche die Knotenpunkte 1 bzw. 2 verdreht werden („Knotendrehwinkel“),
- $\psi \dots \dots \dots$ den Winkel, um den sich die Stabsehne verdreht („Stabdrehwinkel“),
- τ_1 bzw. $\tau_2 \dots$ die Winkel, welche die Endtangenten an die Biegelinie mit der Stabsehne einschließen („Endtangentialwinkel“),
- δ_1 bzw. $\delta_2 \dots$ die wahren Werte der senkrecht zur ursprünglichen Lage der Stabachse gemessenen Verschiebungen der Stabenden 1 bzw. 2 („wirkliche Verschiebungen“),
- $\Delta = \delta_1 - \delta_2 \dots$ die gegenseitige Verschiebung der beiden Stabenden senkrecht zur Stabachse („gegenseitige Verschiebung“).

Der Stabdrehwinkel ψ ist nach Abb. 1 gegeben durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\Delta}{l} \quad (1)$$

oder wegen der Kleinheit des Winkels auch durch

$$\psi = \frac{\Delta}{l}, \quad (2)$$

wobei l die Stablänge bedeutet. Setzt man an Stelle der „gegenseitigen“ Stabendverschiebung Δ die „wirklichen“ Verschiebungen δ_1 und δ_2 , so erhält man

$$\psi = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l}. \quad (3)$$

Weiter ergeben sich aus Abb. 1 noch folgende Beziehungen:

$$\tau_1 = \varphi_1 + \psi; \quad \tau_2 = \varphi_2 + \psi. \quad (4)$$

Für alle Fälle, wo $\psi = 0$ wird, d. h. wo die Stabsehne nur parallel zu sich selbst verschoben wird, sind die Endtangentialwinkel τ_1 und τ_2 mit den entsprechenden Knotendrehwinkeln φ_1 und φ_2 identisch. Für den Sonderfall $\psi = 0$ wird also aus (4)

$$\tau_1 = \varphi_1; \quad \tau_2 = \varphi_2. \quad (4a)$$

2. Vorzeichenregeln für Stabendmomente und Formänderungsgrößen.

Für die Aufstellung von Beziehungen zwischen den Formänderungsgrößen und Momenten ist es notwendig, diese Werte nicht nur der *Größe*, sondern auch der

Richtung nach eindeutig festlegen zu können. Die zu diesem Zwecke festzusetzenden Vorzeichenregeln sollen so beschaffen sein, daß sich die zahlenmäßige Rechnung möglichst einfach und übersichtlich gestaltet und der häufige Wechsel der Vorzeichen in den verschiedenen Gleichungsansätzen vermieden wird. Es werden daher ein für allemal folgende Annahmen getroffen:

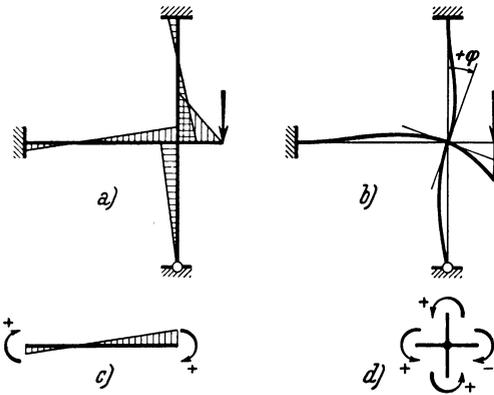


Abb. 2a, b, c und d. Vorzeichenregeln.

1. Die *Knotendrehwinkel* sind *positiv*, wenn die Verdrehung *im Uhrzeigersinn* erfolgt (Abb. 1 und 2 b).

2. Die *Stabdrehwinkel* sind *positiv*, wenn die Verdrehung *entgegen dem Uhrzeigersinn* erfolgt (Abb. 1).

3. Die *Momente* am herausgeschnittenen *Stab* sind *positiv*, wenn sie *im Uhrzeigersinn* drehen (Abb. 2 c).

4. Die *Momente* am herausgeschnittenen *Knoten* sind *positiv*, wenn sie *entgegen dem Uhrzeigersinn* drehen (Abb. 2 d).

5. Die „gegenseitigen“ Stabendverschiebungen Δ sind *positiv*, wenn sie positive Stabdrehwinkel erzeugen, d. h. wenn der Stab *entgegen dem Uhrzeigersinn* verdreht wird (Abb. 1).

6. Die „wirklichen“ Stabendverschiebungen sind *positiv*, wenn sie von oben nach unten oder von links nach rechts erfolgen (Abb. 1).

7. Die *Momente* werden in den Abbildungen stets an der *Zugseite* angebracht (Abb. 2 a).

3. Formeln für die Stabendmomente.

Die Stabendmomente oder Stabanschlußmomente sind von den Formänderungsgrößen und der äußeren Belastung abhängig. Die Ableitung dieser Beziehungen kann in anschaulicher Weise mit Hilfe der MOHRschen Sätze erfolgen. Dies wird im zweiten Abschnitt, IV, 1 und 2 für den ganz allgemeinen Fall eines Stabes mit veränderlichen Trägheitsmomenten ausführlich dargelegt. Dort ergeben sich schließ-

lich als Sonderfall auch die bekannten vereinfachten Ausdrücke [siehe Gl. (139)] für einen Stab 1—2 mit gleichbleibendem Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= \frac{4 EJ}{l} \varphi_1 + \frac{2 EJ}{l} \varphi_2 + \frac{6 EJ}{l} \psi + \mathfrak{M}_{1,2} \\ M_{2,1} &= \frac{4 EJ}{l} \varphi_2 + \frac{2 EJ}{l} \varphi_1 + \frac{6 EJ}{l} \psi + \mathfrak{M}_{2,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Hierin bedeuten $M_{1,2}$ und $M_{2,1}$ die Stabendmomente bei 1 bzw. 2, E die Dehnungszahl, J das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes und l die Stablänge.

Führt man zur weiteren Vereinfachung der Gleichungen die Bezeichnung

$$k = \frac{2 EJ}{l} \quad (6)$$

ein, wobei der Wert k künftig als *Steifigkeitszahl* oder *Stabfestwert* bezeichnet werden soll, so erscheinen die Gl. (5) in der gebräuchlicheren Form

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= k (2 \varphi_1 + \varphi_2 + 3 \psi) + \mathfrak{M}_{1,2} \\ M_{2,1} &= k (2 \varphi_2 + \varphi_1 + 3 \psi) + \mathfrak{M}_{2,1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Die statische Bedeutung der Glieder $\mathfrak{M}_{1,2}$ bzw. $\mathfrak{M}_{2,1}$, die lediglich von der unmittelbar auf den betrachteten Stab einwirkenden äußeren Belastung abhängen, ergibt sich,

wenn man in den vorstehenden Ausdrücken $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ und $\psi = 0$ setzt. Man hat es dann mit einem beiderseits vollkommen eingespannten Träger zu tun und es wird für diesen Sonderfall nach Gl. (7)

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= \mathfrak{M}_{1,2}; \\ M_{2,1} &= \mathfrak{M}_{2,1}, \end{aligned} \quad (8)$$

d. h. die Werte $\mathfrak{M}_{1,2}$ und $\mathfrak{M}_{2,1}$, die man am besten als „*Stabbelastungsglieder*“ bezeichnet, sind identisch mit den Einspannmomenten für den vollkommen eingespannt gedachten Stab. Daraus ergibt sich, daß diese „*Stabbelastungsglieder*“ auch derselben Vorzeichenregel unterliegen wie die Stabanschlußmomente.

Es ist also z. B. für einen von *oben* belasteten, liegenden Stab (Abb. 3a) das Stabbelastungsglied $\mathfrak{M}_{\text{links}}$ *negativ* (weil dieses Einspannmoment am herausgeschnittenen Stab entgegen dem Uhrzeigersinn dreht), während $\mathfrak{M}_{\text{rechts}}$ *positiv* ist (weil es dort im Uhrzeigersinn dreht). Für einen liegenden Stab, der von *unten* belastet wird (Abb. 3b), ergibt sich *umgekehrt* $\mathfrak{M}_{\text{links}}$ *positiv* und $\mathfrak{M}_{\text{rechts}}$ *negativ*.

Wird ein stehender Stab von *links* belastet (Abb. 4a), so wird $\mathfrak{M}_{\text{unten}}$ *negativ* (weil dieses Einspannmoment am herausgeschnittenen Stab entgegen dem Uhrzeigersinn dreht) und $\mathfrak{M}_{\text{oben}}$ *positiv*. Ist der Stab von *rechts* belastet (Abb. 4b), so tritt wieder das *Umgekehrte* ein.

Wird ein stehender Stab von *links* belastet (Abb. 4a), so wird $\mathfrak{M}_{\text{unten}}$ *negativ* (weil dieses Einspannmoment am herausgeschnittenen Stab entgegen dem Uhrzeigersinn dreht) und $\mathfrak{M}_{\text{oben}}$ *positiv*. Ist der Stab von *rechts* belastet (Abb. 4b), so tritt wieder das *Umgekehrte* ein.

In den Hilfstafeln 2 bis 4 sind gebrauchsfertige Formeln zur zahlenmäßigen Ermittlung der \mathfrak{M} -Werte für die wichtigsten Belastungsfälle enthalten.

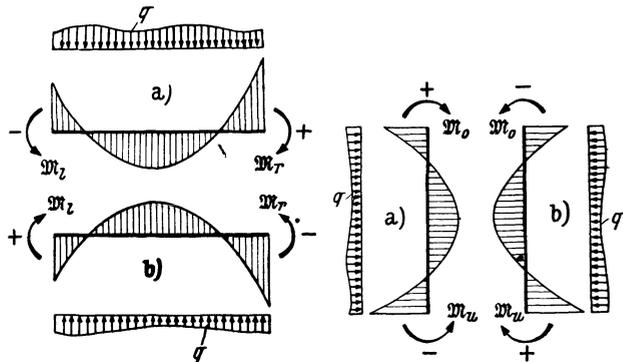
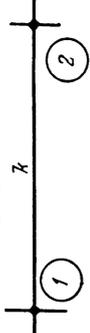
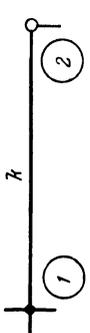
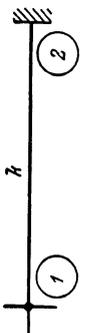
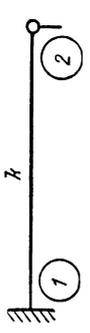
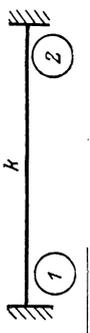


Abb. 3 a und b.

Abb. 4 a und b.

Vorzeichen der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Tafel I. Formeln für die Endmomente $M_{1,2}$, $M_{2,1}$ für Stäbe konstanter Querschnitte¹ bei verschiedenen Lagerungsbedingungen.

Nr.	Lagerungsbedingungen	a) Allgemein (Stab belastet und verdrehbar)	b) Stab unbelastet ($\mathfrak{M} = 0$)	c) Stab unverdrehbar ($\psi = 0$)	d) Stab unbelastet und unverdrehbar ($\mathfrak{M} = 0, \psi = 0$)
1	Beide Stabenden elastisch eingespannt. 	$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2 + 3\psi) + \mathfrak{M}_{1,2}$	$k(2\varphi_1 + \varphi_2 + 3\psi)$	$k(2\varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2}$	$k(2\varphi_1 + \varphi_2)$
		$M_{2,1} = k(2\varphi_2 + \varphi_1 + 3\psi) + \mathfrak{M}_{2,1}$	$k(2\varphi_2 + \varphi_1 + 3\psi)$	$k(2\varphi_2 + \varphi_1) + \mathfrak{M}_{2,1}$	$k(2\varphi_2 + \varphi_1) + \mathfrak{M}_{2,1}$
2	Stabende (1) elastisch eingespannt, Stabende (2) gelenkig angeschlossen. 	$M_{1,2} = 1,5k(\varphi_1 + \psi) + \mathfrak{M}_{1,2} - 0,5\mathfrak{M}_{2,1}$	$1,5k(\varphi_1 + \psi)$	$1,5k\varphi_1 + \mathfrak{M}_{1,2} - 0,5\mathfrak{M}_{2,1}$	$1,5k\varphi_1$
		$M_{2,1} = 0$	0	0	0
3	Stabende (1) elastisch eingespannt, Stabende (2) fest eingespannt ($\varphi_2 = 0$). 	$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\left(\varphi_1 + 3\psi + \frac{\mathfrak{M}_{2,1}}{k}\right)$	$-\frac{1}{2}(\varphi_1 + 3\psi)$	$-\frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \frac{\mathfrak{M}_{2,1}}{k}\right)$	$-\frac{1}{2}\varphi_1$
		$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + 3\psi) + \mathfrak{M}_{1,2}$	$k(2\varphi_1 + 3\psi)$	$2k\varphi_1 + \mathfrak{M}_{1,2}$	$2k\varphi_1$
4	Stabende (1) fest eingespannt ($\varphi_1 = 0$), Stabende (2) gelenkig angeschlossen. 	$M_{2,1} = k(\varphi_1 + 3\psi) + \mathfrak{M}_{2,1}$	$k(\varphi_1 + 3\psi)$	$k\varphi_1 + \mathfrak{M}_{2,1}$	$k\varphi_1$
		$M_{1,2} = 1,5k\psi + \mathfrak{M}_{1,2} - 0,5\mathfrak{M}_{2,1}$	$1,5k\psi$	$\mathfrak{M}_{1,2} - 0,5\mathfrak{M}_{2,1}$	0
5	Beide Stabenden fest eingespannt ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). 	$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\left(3\psi + \frac{\mathfrak{M}_{2,1}}{k}\right)$	$-1,5\psi$	$-\frac{\mathfrak{M}_{2,1}}{2k}$	0
		$M_{1,2} = 3k\psi + \mathfrak{M}_{1,2}$	$3k\psi$	$\mathfrak{M}_{1,2}$	0
		$M_{2,1} = 3k\psi + \mathfrak{M}_{2,1}$	$3k\psi$	$\mathfrak{M}_{2,1}$	0

¹ Für Stäbe mit veränderlichen Stabquerschnitten siehe Tafel II, Seite 61.

Der später öfter gebrauchte Ansatz für die Summe der beiden Anschlußmomente eines Stabes ergibt sich unmittelbar aus (7), und zwar ist

$$M_{1,2} + M_{2,1} = 3k(\varphi_1 + \varphi_2 + 2\psi) + \mathfrak{M}_{1,2} + \mathfrak{M}_{2,1}. \quad (9)$$

Benutzt man als Unbekannte an Stelle des Stabdrehwinkels ψ nach (2) die „gegenseitige“ Stabendverschiebung Δ , so lauten die Gl. (7) bzw. (9)

$$\boxed{\begin{aligned} M_{1,2} &= k\left(2\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{3\Delta}{l}\right) + \mathfrak{M}_{1,2} \\ M_{2,1} &= k\left(2\varphi_2 + \varphi_1 + \frac{3\Delta}{l}\right) + \mathfrak{M}_{2,1}. \end{aligned}} \quad (10)$$

$$M_{1,2} + M_{2,1} = 3k\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2\Delta}{l}\right) + \mathfrak{M}_{1,2} + \mathfrak{M}_{2,1}. \quad (11)$$

In vielen Fällen ist es zweckmäßiger, an Stelle von ψ nach (3) die „wirklichen“ Stabendverschiebungen δ_1 und δ_2 einzuführen. Wenn δ_1 die Verschiebung des linken bzw. unteren, δ_2 dagegen die des rechten bzw. oberen Stabendes bedeutet, dann nehmen die vorstehenden Gleichungen folgende Form an:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{1,2} &= k\left[2\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{3(\delta_1 - \delta_2)}{l}\right] + \mathfrak{M}_{1,2} \\ M_{2,1} &= k\left[2\varphi_2 + \varphi_1 + \frac{3(\delta_1 - \delta_2)}{l}\right] + \mathfrak{M}_{2,1}. \end{aligned}} \quad (10a)$$

$$M_{1,2} + M_{2,1} = 3k\left[\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2(\delta_1 - \delta_2)}{l}\right] + \mathfrak{M}_{1,2} + \mathfrak{M}_{2,1}. \quad (11a)$$

In der Tafel I, S. 4 ist eine Zusammenstellung der Formeln für die Stabendmomente $M_{1,2}$ und $M_{2,1}$ bei verschiedenen Lagerungsbedingungen und unter Berücksichtigung häufig auftretender Sonderfälle gegeben.

II. Allgemeine Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment.

1. Allgemeines.

Bevor die Anwendung des „Drehwinkelverfahrens“ in der Rahmenberechnung näher behandelt werden soll, seien hier in Kürze von den bekannteren Sätzen der Baustatik diejenigen wiedergegeben, die zum Verständnis der späteren Erörterungen zweckdienlich sind. Dabei sollen vor allem die wichtigsten Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment erläutert und an Hand einiger Beispiele ihre praktische Verwertung in augenfälliger Weise in Erinnerung gebracht werden. Vorausgeschickt sei zunächst eine Klarstellung der Begriffe Querkraft und Biegemoment am freiaufliegenden Träger.

Die *Querkraft* für einen bestimmten Querschnitt eines Trägers stellt die Summe der senkrecht zur Stabachse wirkenden Komponenten aller links oder rechts von diesem Querschnitt angreifenden Kräfte vor. Man bezeichnet die Querkraft als *positiv*, wenn sie *links* vom Querschnitt nach *oben* oder *rechts* vom Querschnitt nach *unten* gerichtet ist (Abb. 5 und 6).

Unter dem *Biegemoment* in einem bestimmten Querschnitt eines Trägers versteht man die Summe der Momente aller links oder rechts von diesem Querschnitt angreifenden Kräfte in bezug auf den Querschnittsschwerpunkt (Abb. 5 und 6).

6 Allgemeine Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment.

Weiter ist bekannt, daß die erste Ableitung der Querkraft nach x den Belastungswert $-q$ ergibt, d. h. es ist

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \quad (12)$$

Da nun die erste Ableitung einer Funktion stets als Neigung der Kurventangente aufgefaßt werden kann, so ergibt sich aus der Beziehung (12), daß die Neigung der Querkraftlinie an jeder beliebigen Stelle gleich ist der Belastung ($-q$) an dieser Stelle.

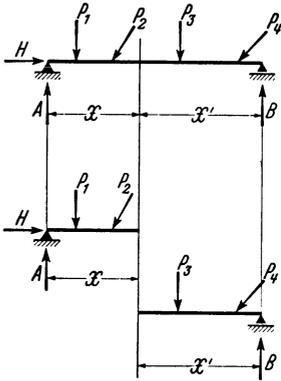


Abb. 5.

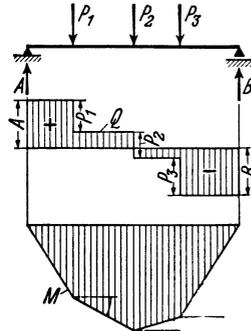


Abb. 6.

Abb. 5 und 6. Querkräfte und Biegemomente am freiaufliegenden Träger.

Es kann also aus einer gegebenen Querkraftlinie sofort auch die Art der zugehörigen Belastung mit einem Blick erfaßt werden. So zeigt z. B. die Querkraftlinie in Abb. 7 eine gleichbleibende Neigung auf der ganzen Trägerlänge, also muß auch die Belastung (q) auf der ganzen Länge konstant sein.

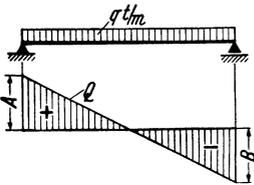


Abb. 7.

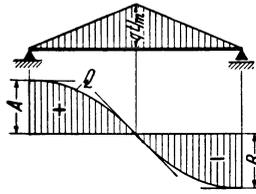


Abb. 8.

In Abb. 8 ist die Neigung der Querkraftlinie am Auflager gleich Null und wächst zur Trägermitte allmählich an. Es muß also auch der Belastungswert (q) am Auflager gleich Null sein und in der Trägermitte einen Größtwert erreichen. In Abb. 9 ist die Neigung der Querkraftlinie von A bis C gleich Null, also kann in diesem Bereich auch keine Belastung (q) vorhanden sein. Dasselbe trifft in der Strecke zwischen C und B zu. An der Stelle C selbst ist eine Unstetigkeit, die auf eine dort wirkende Einzellast hinweist. In Abb. 10 ist die Neigung der Querkraftlinie von A

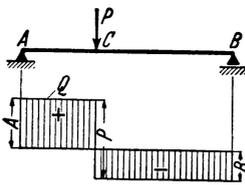


Abb. 9.

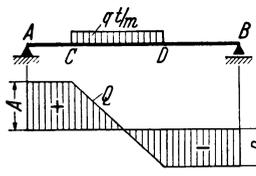


Abb. 10.

Abb. 7 bis 10. Beziehungen zwischen Belastung und Querkraft.

bis C und von D bis B gleich Null, weshalb in diesen Bereichen keine Belastung (q) vorhanden sein kann. Im Bereich zwischen C und D zeigt die Querkraftlinie eine konstante Neigung, woraus sich ergibt, daß dort eine gleichmäßige Belastung (q) wirksam sein muß.

Dieselbe Beziehung wie zwischen Querkraft und Belastung besteht zwischen Biegemoment und Querkraft. Es ist nämlich

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (13)$$

Die Neigung der Momentenlinie gegen die Stabachse an irgendeiner Stelle gibt somit die Querkraft an dieser Stelle an. Wo also die Neigung der M -Linie gegen die Stabachse gleich Null ist, nimmt auch die Querkraft den Wert Null an und umgekehrt.

Diese wichtigen Beziehungen werden durch die Abb. 11 und 12 veranschaulicht. Abb. 11 zeigt einen freiaufliegenden Träger, Abb. 12 einen Durchlaufträger über zwei Feldern. In beiden Fällen sind Momenten- und Querkraftlinie für eine gleichmäßig verteilte Belastung gezeichnet. Die größte Querkraft tritt stets dort auf, wo die Momentenlinie gegen die

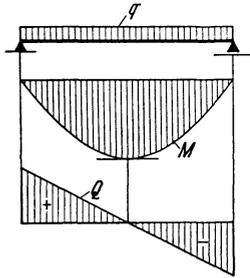


Abb. 11.

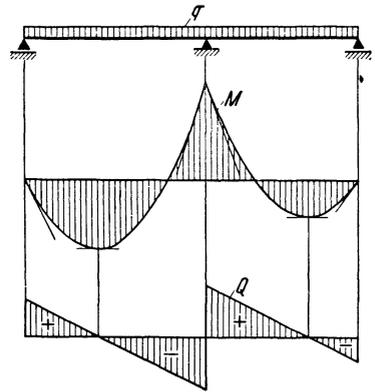


Abb. 12.

Stabachse die größte Neigung aufweist, also bei den Auflagern. Die Querkraft ist an jenen Stellen gleich Null, wo die Tangenten an die Momentenlinie parallel zur Stabachse verlaufen. Bei Abb. 12 fällt sofort auf, daß die Momentenlinie bei der Mittelstütze wesentlich steiler geneigt ist als an den Randstützen. Die Querkraft muß also bei der Mittelstütze auch wesentlich größer sein als bei den Randstützen. In Abb. 13 tritt diese Erscheinung besonders kraß zutage. Das Moment zeigt links von der Mittelstütze einen sehr steilen Verlauf. In diesem Bereich tritt auch die größte Querkraft auf.

Die hier durchgeführten Überlegungen gelten natürlich auch für jeden geraden *Rahmenstab*. Man kann somit selbst bei einem komplizierten Momentenbild leicht jene Stellen des Tragwerks herausfinden, wo die Querkraft einen großen bzw. den größten Wert erreicht. Das ist beim praktischen Rechnen besonders wichtig, weil die Querkraft oft nur an jenen Stellen ermittelt wird, wo sie für die Bemessung maßgebend ist.

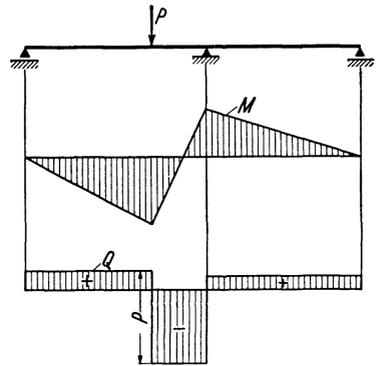


Abb. 13.

Abb. 11 bis 13. Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment.

2. Richtungsbestimmung der Querkraft aus der Momentenlinie.

Auf S. 2 wurde bereits die Regel aufgestellt, daß die Momente grundsätzlich immer an jener Seite des Stabes anzutragen sind, wo sie *Zug* erzeugen.

Damit ist eine Darstellungsart festgelegt, die auch gleichzeitig bei der Bestimmung der *Querkraft* sehr gute Dienste leistet. Aus Gl. (13) $\frac{dM}{dx} = Q$ geht nämlich sowohl die Größe als auch die Richtung der Querkraft hervor, so daß aus einem vorliegenden Momentenbild für irgendein beliebiges Tragsystem rasch und sicher auch das *Vorzeichen* der Querkräfte bestimmt werden kann. Es gilt daher unter der Voraussetzung, daß die Momente durchwegs an der Zugseite des Stabes angetragen werden, folgende Regel:

Fällt die Momentenlinie von links nach rechts (\searrow), so ist die Querkraft *positiv*, d. h. links vom Querschnitt nach *aufwärts* gerichtet.

Steigt die Momentenlinie von links nach rechts (\nearrow), so ist die Querkraft *negativ*, d. h. links vom Querschnitt nach *abwärts* gerichtet.

Diese Regel gilt ganz allgemein sowohl für liegende als auch für stehende Stäbe. Auch ist es gleichgültig, ob die liegenden Stäbe von oben oder von unten und die stehenden Stäbe von links oder von rechts betrachtet werden.

Es empfiehlt sich, diese Regel gleich an den Abb. 11 bis 13 zu erproben und dem Gedächtnis einzuprägen. Sie leistet in der Rahmenrechnung sehr gute Dienste und gibt dem Anfänger in der Stahlbetonstatik überdies ein sehr einfaches Mittel in die Hand, die Richtung der Aufbiegungen (Hauptzugeisen) in den verschiedenen Rahmenstäben zu bestimmen bzw. zu überprüfen. Es ist nur zu beachten, daß die abgebogenen Eisen immer denselben Richtungssinn aufweisen wie die Momentenlinie. In Abb. 14 ist z. B. die Momentenlinie und die Lage der Aufbiegungen für einen

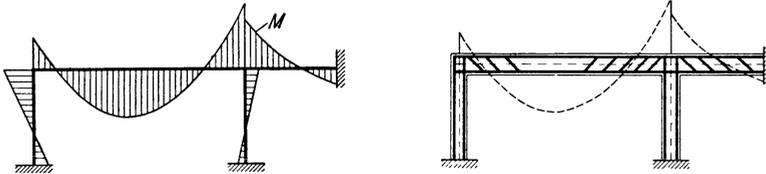


Abb. 14. Richtungssinn der Momentenlinie und Lage der Schrägeisen bei Stahlbetontragwerken.

Zweifeldrahmen mit einem sehr großen und einem sehr kleinen Feld angedeutet. Aus der Lage der *M*-Linie im kleinen Feld ist ersichtlich, daß die abgebogenen Eisen auf der ganzen Länge dieses Feldes dieselbe Richtung aufweisen müssen, während im langen Feld an beiden Enden die Richtung wechselt.

III. Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knotenpunkten.

1. Allgemeines.

Der Momentenverlauf eines Tragwerkes für einen gegebenen Belastungsfall ist bestimmt, wenn sämtliche Stabmomente bekannt sind. Die Stabmomente können aber aus den Gl. (7) erst dann berechnet werden, wenn die Knoten- und Stabdrehwinkel ermittelt sind. Die eigentlichen Unbekannten der Rechnung sind zunächst daher diejenigen Größen, durch welche die Verformung eines Tragwerkes vollkommen bestimmt ist. Es sind dies allgemein entweder die Knotendrehwinkel φ und die Stabdrehwinkel ψ oder die Knotendrehwinkel φ und die Verschiebungen δ bzw. Δ .

Bei Tragwerken, deren Knotenpunkte durch die äußere Belastung nur Verdrehungen, aber keine Verschiebungen erleiden, können auch keine Stabdrehwinkel in Erscheinung treten, weshalb sich die Behandlung derartiger Systeme besonders einfach gestaltet.

Es ist also immer zuerst festzustellen, ob bei einem Tragwerk verschiebliche Knotenpunkte vorhanden sind, bzw. wieviel unbekannte Stabdrehwinkel insgesamt zu bestimmen sind. Ein besonderes Kennzeichen für solche Tragwerke, deren Knotenpunkte bei jeder beliebigen Belastung unverschieblich bleiben, besteht darin, daß sie auch dann noch stabil bleiben, wenn sämtliche steifen Stabanschlüsse durch Gelenke ersetzt werden. Als Beispiele dafür sind in den Abb. 15 bis 25 eine Anzahl solcher Tragwerkstypen zusammengestellt und die jeweils auftretenden unbekanntenen Knotendrehwinkel besonders vermerkt.

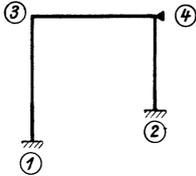


Abb. 15. Unbekannte: φ_3, φ_4 .

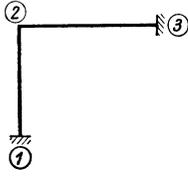


Abb. 16. Unbekannte: φ_2 .

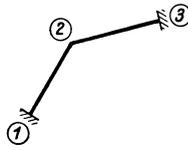


Abb. 17. Unbekannte: φ_2 .

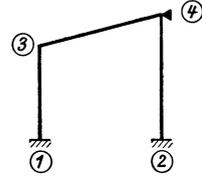


Abb. 18. Unbekannte: φ_3, φ_4 .

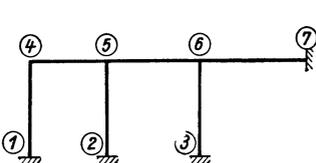


Abb. 19. Unbekannte: $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$.

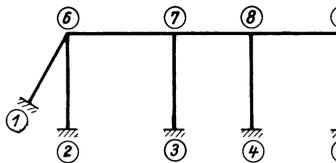


Abb. 20. Unbekannte: $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9$.

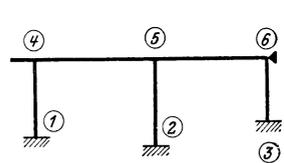


Abb. 21. Unbekannte: $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$.

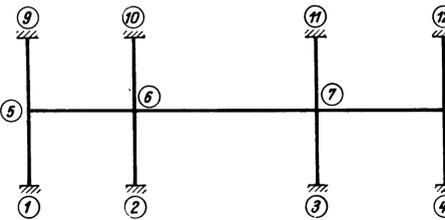


Abb. 22. Unbekannte: $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$.

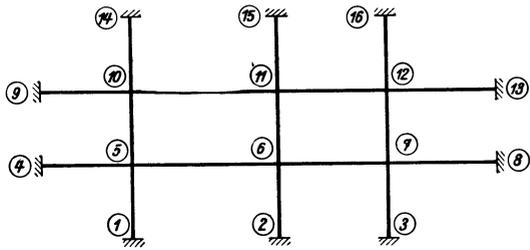


Abb. 23. Unbekannte: $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{12}$.

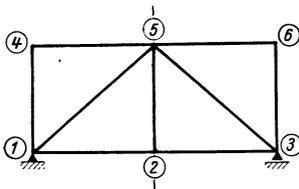


Abb. 24.
Bei unsymmetrischer Bel.:
 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$;
bei symmetrischer Bel.:
 φ_1, φ_4 ;
bei antisymmetrischer Bel.:
 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_5$.

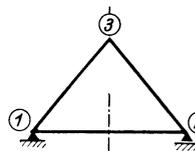


Abb. 25.
Bei unsymmetr. Bel.:
 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$;
bei symmetrischer Bel.:
 φ_1 ;
bei antisymmetrischer Bel.:
 φ_1, φ_3 .

Abb. 15 bis 25. „Unverschiebliche“ Tragwerke ohne Gelenke.

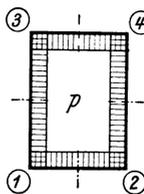


Abb. 26. Silorahmen. Unbekannte: φ_1 .

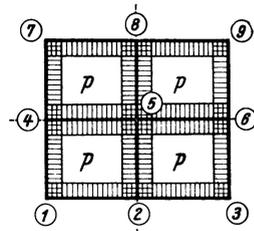


Abb. 27. Silorahmen. Unbekannte: φ_1 .

Es gibt ferner noch eine ganze Reihe von *symmetrischen* Tragwerksarten, die zwar an sich zu den Systemen mit *verschieblichen* Knotenpunkten zu rechnen sind, die aber bei *symmetrischer* Belastung *keine* Knotenverschiebungen erfahren. In den Abb. 28 bis 35 sind einige Vertreter solcher Systeme dargestellt, wobei die bei *unsymmetrischer*, *symmetrischer* und *antimetrischer* Belastung jeweils auftretenden Unbekannten getrennt angeführt sind.

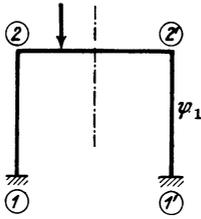


Abb. 28.

Bei unsymm. Bel.: $\varphi_2, \varphi_2', \psi_1$;
 „ symmetr. „ : φ_2 ;
 „ antimetr. „ : φ_2, ψ_1 .

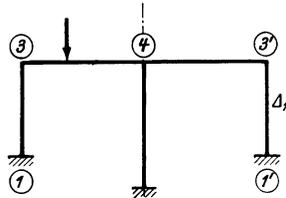


Abb. 29.

Bei unsymm. Bel.: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_3', \Delta_1$;
 „ symmetr. „ : φ_3 ;
 „ antimetr. „ : $\varphi_3, \varphi_4, \Delta_1$.

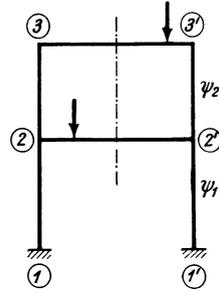


Abb. 30.

Bei unsymm. Bel.: $\varphi_2, \varphi_2', \varphi_3, \varphi_3', \psi_1, \psi_2$;
 „ symmetr. „ : φ_2, φ_3 ;
 „ antimetr. „ : $\varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2$.

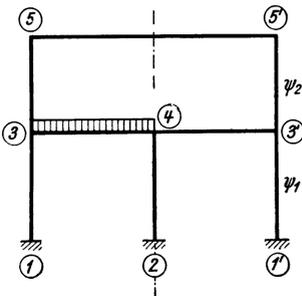


Abb. 31.

Bei unsymmetrischer Belastung:
 $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_3', \varphi_5, \varphi_5', \psi_1, \psi_2$;
 bei symmetrischer Belastung:
 φ_3, φ_5 ;
 bei antimetrischer Belastung:
 $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1, \psi_2$.

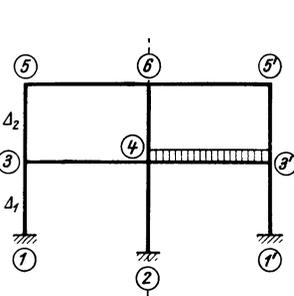


Abb. 32.

Bei unsymmetrischer Belastung:
 $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_3', \varphi_5, \varphi_5', \Delta_1, \Delta_2$;
 bei symmetrischer Belastung:
 φ_3, φ_5 ;
 bei antimetrischer Belastung:
 $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \Delta_1, \Delta_2$.

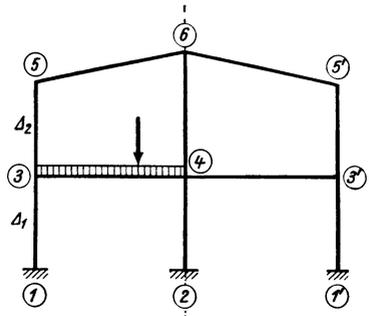


Abb. 33.

Bei unsymmetrischer Belastung:
 $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_3', \varphi_5, \varphi_6, \varphi_5', \Delta_1, \Delta_2$;
 bei symmetrischer Belastung:
 φ_3, φ_5 ;
 bei antimetrischer Belastung:
 $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \Delta_1, \Delta_2$.

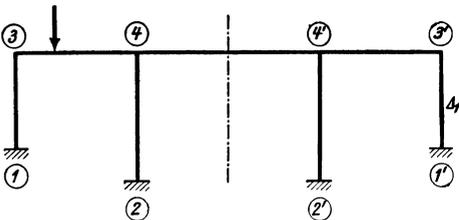


Abb. 34. Bei unsymm. Belastung: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_4', \varphi_3', \Delta_1$;
 „ symmetrischer „ : φ_3, φ_4 ;
 „ antimetrischer „ : $\varphi_3, \varphi_4, \Delta_1$.

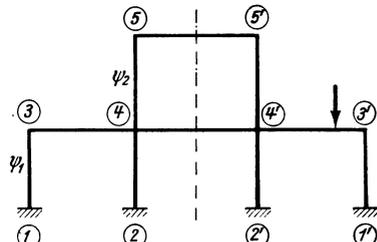


Abb. 35. Bei unsymm. Bel.: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_4', \varphi_5, \varphi_5', \psi_1, \psi_2$;
 „ symmetr. „ : $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$;
 „ antimetr. „ : $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1, \psi_2$.

Abb. 28 bis 35. *Symmetrische* Tragwerke, die nur bei *symmetrischer* Belastung „*unverschieblich*“ sind.

Eine besondere Gruppe stellen schließlich die in den Abb. 36 bis 39 ersichtlichen Tragwerkstypen dar, bei welchen trotz symmetrischer Ausbildung und symmetrischer Belastung Knotenpunktverschiebungen auftreten.

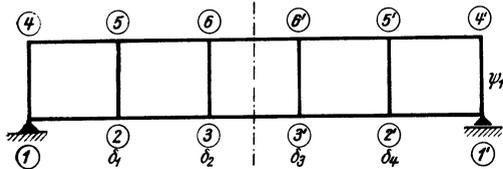


Abb. 36.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_3', \varphi_2', \varphi_1', \varphi_4, \varphi_6, \varphi_6, \varphi_6', \varphi_6', \varphi_4', \psi_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$;
 bei symmetrischer Belastung: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \delta_1, \delta_2$;
 „ antisymmetrischer „ : $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \psi_1, \delta_1, \delta_2$.

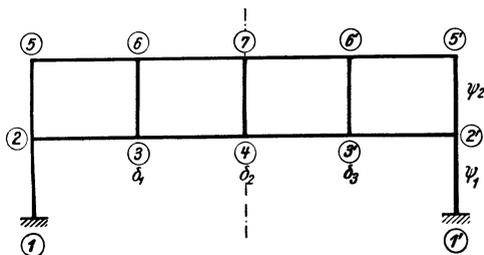


Abb. 37.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_4', \varphi_2', \varphi_6, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_6', \varphi_5', \psi_1, \psi_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3$;
 bei symmetrischer Belastung: $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5, \varphi_6, \delta_1, \delta_2$;
 „ antisymmetrischer „ : $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \psi_1, \psi_2, \delta_1$.

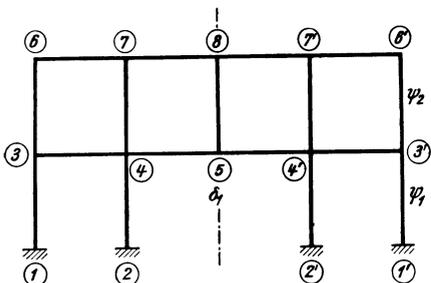


Abb. 38.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_3', \varphi_4', \varphi_6', \varphi_7', \delta_1, \psi_1, \psi_2$;
 bei symmetrischer Belastung: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_7, \delta_1$;
 „ antisymmetrischer „ : $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \psi_1, \psi_2$.

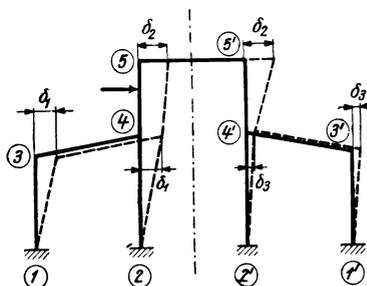


Abb. 39.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_5', \varphi_4', \varphi_3', \delta_1, \delta_2, \delta_3$;
 bei symmetrischer Belastung: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \delta_1$;
 „ antisymmetrischer „ : $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \delta_1, \delta_2$.

Abb. 36 bis 39. *Symmetrische* Tragwerke, die auch bei symmetrischer Belastung „verschieblich“ sind.

2. Knotengleichungen für unverschiebliche Tragwerke.

Da bei derartigen Tragwerken keine Stabdrehwinkel ψ vorkommen, so entfallen in den allgemeinen Ausdrücken (7) für die Stabanschlußmomente eines Stabes 1–2 die ψ -Glieder und man erhält einfach:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= k(2\varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2} \\ M_{2,1} &= k(2\varphi_2 + \varphi_1) + \mathfrak{M}_{2,1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Es brauchen hier also nur so viele Gleichungen aufgestellt werden, als unbekannte Knotendrehwinkel φ im Tragwerk vorhanden sind. Diese Gleichungen führen die Bezeichnung „Knotengleichungen“ und sollen hier in allgemeiner Form aufgestellt werden.

Man denke sich aus irgendeinem unverschieblichen Rahmentragwerk einen Knotenpunkt n mit vier anschließenden, beliebig belasteten Stäben und den benachbarten Knotenpunkten 1 bis 4 herausgezeichnet (Abb. 40). In dieser Skizze sind auch die Steifigkeitszahlen k der einzelnen Rahmenstäbe, und zwar jeweils in der Stabmitte, eingetragen.

Nach (14) lauten die Ansätze für die Stabanschlußmomente im Knotenpunkt n mit den hier gewählten Bezeichnungen:

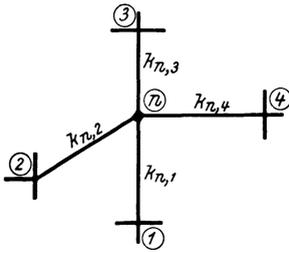


Abb. 40. Tragwerkteil mit Knoten n .

$$\begin{aligned} M_{n,1} &= k_{n,1} (2\varphi_n + \varphi_1) + \mathfrak{M}_{n,1} \\ M_{n,2} &= k_{n,2} (2\varphi_n + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{n,2} \\ M_{n,3} &= k_{n,3} (2\varphi_n + \varphi_3) + \mathfrak{M}_{n,3} \\ M_{n,4} &= k_{n,4} (2\varphi_n + \varphi_4) + \mathfrak{M}_{n,4}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die sog. Knotengleichung stellt nun die Bedingung dar, daß die Summe der in einem Knotenpunkt angreifenden Momente gleich Null ist. Durch Summieren der Ausdrücke (15) erhält man somit:

$$\sum_{i=1}^{i=4} M_{n,i} = 0 = \varphi_n \cdot 2 \sum_{i=1}^{i=4} k_{n,i} + \sum_{i=1}^{i=4} k_{n,i} \varphi_i + \sum_{i=1}^{i=4} \mathfrak{M}_{n,i}. \quad (16)$$

Für den ganz allgemeinen Fall, daß beliebig viele Stäbe in den Knoten n einmünden und dort auch Kragarmmomente M_k übertragen werden, kann diese Bedingung folgendermaßen geschrieben werden:

$$\varphi_n \cdot 2 \sum_i k_{n,i} + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k = 0. \quad (17)$$

Diese Gleichung kann für jeden Knotenpunkt des Tragwerkes verwendet werden. Man erhält auf diese Weise ein lineares Gleichungssystem mit so vielen Gleichungen, als unbekannte Knotendrehwinkel vorhanden sind. Ordnet man die Gleichungen nach den Unbekannten tabellarisch, so kommen die Beiwerte von φ_n in die von links nach rechts fallende *Diagonale* zu stehen. Sie sollen daher als „*Diagonalglieder*“ mit dem Buchstaben „*d*“ bezeichnet werden.

Weiter soll für die nur von der äußeren Belastung abhängigen Glieder der Gl. (17), also für die Summe der „*Stabbelastungsglieder*“ $\mathfrak{M}_{n,i}$, einschließlich der etwa vorhandenen Kragarmmomente M_k , die Bezeichnung „*Knotenbelastungsglied*“ eingeführt und dafür der Buchstabe „*s*“ gesetzt werden. Damit lautet die *Knoten-gleichung* (17) in einfacher Schreibweise

$$\boxed{d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.} \quad (18)$$

Darin bedeuten also

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}, \quad (19)$$

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k \quad (20)$$

oder, wenn keine Kragarmmomente vorhanden sind, einfach

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}. \quad (20a)$$

Das „*Diagonalglied*“ d_n für einen Knoten n ist somit gleich der doppelten Summe der Steifigkeitszahlen k aller in diesem Knoten steif angeschlossenen Stäbe.

Die Gl. (18) enthält außer dem Diagonalglied $d_n \varphi_n$ und dem Absolutglied s_n allgemein noch so viele Glieder $k_{n,i} \varphi_i$, als steife Stabanschlüsse im Knotenpunkt n vorhanden sind. Diese Glieder stellen jeweils das Produkt dar aus dem Drehwinkel eines benachbarten Knotenpunktes und dem Steifigkeitswert des Verbindungsstabes.

Die zahlenmäßige Aufstellung der Knotengleichungen kann nun unmittelbar durch wiederholte Anwendung der Gl. (18) vorgenommen werden. Es ist hierbei

vorteilhaft, vorher alle k -Werte, die am besten tabellarisch ermittelt werden, in eine besondere Tragwerksskizze einzuschreiben, die künftig kurz „Beiwertschizze“ genannt werden soll.

Werden die Gleichungen in Form einer Tabelle angeschrieben, so erzielt man damit nicht nur eine sehr gute Übersicht, sondern es ergibt sich auch sofort eine leichte Kontrolle der meisten Glieder des gesamten Gleichungssystems. Dieses erscheint nämlich symmetrisch in bezug auf die von links nach rechts fallende Diagonale der Gleichungstabelle. Dadurch treten etwaige Schreibfehler sofort in Erscheinung. Allerdings können auf diese Weise weder die Diagonalglieder „ d “, noch die Knotenbelastungsglieder „ s “ überprüft werden, weshalb sie von vornherein mit größerer Sorgfalt einzutragen sind.

Nach Auflösung des so erhaltenen Gleichungssystems kann dann wiederum an Hand der Beiwertschizze die Ermittlung der Stabendmomente nach den Gl. (14) vorgenommen werden. Hierzu werden auch die \mathfrak{M} -Glieder benötigt, die bereits am Beginn der Rechnung bei der Ermittlung der s -Werte verwendet worden sind.

3. Beschreibung des Rechnungsganges.

Der praktische Vorgang bei der Berechnung von Rahmentragwerken mit unverschieblichen Knotenpunkten ist, kurz zusammengefaßt, folgender:

1. Feststellung der Tragwerksabmessungen, also der Stablängen und Querschnittsgrößen.
2. Berechnung der Querschnitt-Trägheitsmomente J (für Rechtecksquerschnitte nach Tafel 1) und der Festwerte k nach (24) für sämtliche Stäbe.
3. Herstellung der „Beiwertschizze“.
4. Berechnung der „Diagonalglieder“ d nach (19).
5. Ermittlung der „Stabelastungsglieder“ \mathfrak{M} für die einzelnen Belastungsfälle (nach Tafel 2 bis 4) und der „Knotenbelastungsglieder“ s nach (20) bzw. (20a).
6. Aufstellung der Gleichungstabelle nach (18) unter Benutzung der Beiwertschizze, wobei mit dem Anschreiben aller Glieder d und s begonnen werden kann.
7. Auflösung der Gleichungen nach Muster I oder II (siehe sechster Abschnitt).
8. Berechnung der Stabendmomente nach den Gl. (14) unter Zuhilfenahme der Beiwertschizze.

Sehr häufig sind nun die Tragwerke für verschiedene Belastungsfälle, z. B. Eigengewicht, Nutzlast, Erddruck, Wind, Temperatur usw., *getrennt* zu behandeln, um das ungünstigste Zusammenwirken der einzelnen Belastungen besser erfassen zu können. Da aber in den Gleichungen eine Belastungsänderung nur in den Absolutgliedern zum Ausdruck kommt, während der übrige Teil des Gleichungssystems unverändert bleibt, so wird bei Berücksichtigung mehrerer Belastungsfälle immer nur die letzte Spalte der Gleichungstabelle, welche die s -Werte enthält, betroffen. Es kann somit der größte Teil der Arbeit bei der Auflösung der Gleichungen für alle Belastungsfälle gemeinsam durchgeführt werden.

Dieser Vorteil bleibt auch erhalten, wenn bei symmetrisch ausgebildeten Tragwerken das BU.-Verfahren (siehe Kapitel IV, 5 dieses Abschnittes) zur Anwendung gelangt. Es sind dann zwei Gleichungsgruppen getrennt voneinander zu behandeln, wovon die eine alle symmetrischen, die andere alle antimetrischen Belastungsfälle enthält.

Die Aufstellung der Gleichungen in allgemeiner Form wird im folgenden an einem Beispiel gezeigt; die zahlenmäßige Durchführung der Rechnung für Tragwerke mit unverschieblichen Knotenpunkten ist in den Beispielen Nr. 1 bis 5 im Zweiten Teil des Buches gezeigt.

4. Tabellarische Aufstellung der Gleichungen.

Die Gestalt des zu behandelnden Tragwerkes ist aus der Beiwertskizze Abb. 41 ersichtlich, in der alle k -Werte eingetragen sind. Wegen voller Einspannung in den

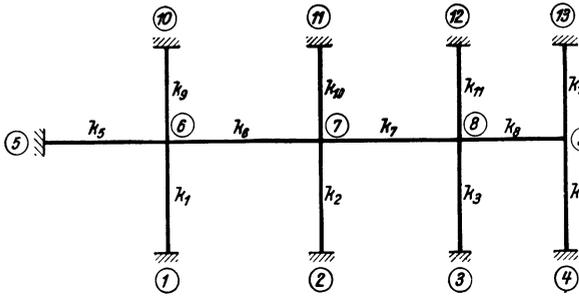


Abb. 41. Beiwertskizze.

Punkten 1 bis 5 und 10 bis 13 sind dort die entsprechenden Knotendrehwinkel $\varphi = 0$ und es bleiben als Unbekannte nur $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9$ übrig. Um die zu ihrer Bestimmung erforderlichen vier Knotengleichungen aufstellen zu können, sind vorher die entsprechenden d -Glieder d_6, d_7, d_8, d_9 nach (19) und die zugehörigen s -Glieder s_6, s_7, s_8, s_9 nach (20a) zu ermitteln, also

$$\begin{aligned}
 d_6 &= 2 \cdot (k_1 + k_5 + k_6 + k_9) & s_6 &= \sum \mathfrak{M}_6 = \mathfrak{M}_{6,1} + \mathfrak{M}_{6,5} + \mathfrak{M}_{6,7} + \mathfrak{M}_{6,10} \\
 d_7 &= 2 \cdot (k_2 + k_6 + k_7 + k_{10}) & s_7 &= \sum \mathfrak{M}_7 \\
 d_8 &= 2 \cdot (k_3 + k_7 + k_8 + k_{11}) & s_8 &= \sum \mathfrak{M}_8 \\
 d_9 &= 2 \cdot (k_4 + k_8 + k_{12}) & s_9 &= \sum \mathfrak{M}_9.
 \end{aligned}$$

Wenn verschiedene Belastungsfälle $B^{(1)}, B^{(2)}$ usw. getrennt behandelt werden sollen, so sind auch die s -Glieder für diese Fälle getrennt zu ermitteln.

Sodann kann durch wiederholte Anwendung der Knotengleichung (18)

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0$$

die Aufstellung der Gleichungen erfolgen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 d_6 \varphi_6 + k_6 \varphi_7 &+ s_6 = 0 \\
 d_7 \varphi_7 + k_6 \varphi_6 + k_7 \varphi_8 + s_7 &= 0 \\
 d_8 \varphi_8 + k_7 \varphi_7 + k_8 \varphi_9 + s_8 &= 0 \\
 d_9 \varphi_9 + k_8 \varphi_8 &+ s_9 = 0
 \end{aligned}$$

Das Anschreiben dieser Gleichungen kann aber auch sofort tabellarisch, nach den Unbekannten geordnet, vorgenommen werden, wobei die Belastungsfälle $B^{(1)}, B^{(2)}$ usw. nur in den letzten Spalten in Erscheinung treten (siehe Gleichungstabelle 1).

Gleichungstabelle 1.

	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	$B^{(1)}$	$B^{(2)}$	usw.
φ_6	d_6	k_6			s_6	—	—
φ_7	k_6	d_7	k_7		s_7	—	—
φ_8		k_7	d_8	k_8	s_8	—	—
φ_9			k_8	d_9	s_9	—	—

Nach Auflösung dieser Gleichungsgruppe folgt nach (14) an Hand der Beiwerts-kizze die Ermittlung der Stabendmomente, z. B.

$$\begin{aligned}
 M_{1,6} &= k_1 \varphi_6 + \mathfrak{M}_{1,6} & M_{6,1} &= 2 k_1 \varphi_6 + \mathfrak{M}_{6,1} \\
 M_{2,7} &= k_2 \varphi_7 + \mathfrak{M}_{2,7} & M_{6,5} &= 2 k_5 \varphi_6 + \mathfrak{M}_{6,5} \\
 M_{3,8} &= k_3 \varphi_8 + \mathfrak{M}_{3,8} & M_{6,7} &= k_6 (2 \varphi_6 + \varphi_7) + \mathfrak{M}_{6,7} \\
 &\text{usw.} & M_{6,10} &= 2 k_9 \varphi_6 + \mathfrak{M}_{6,10} \\
 & & &\text{usw.}
 \end{aligned}$$

5. Bemerkungen über die Verwendung der Stabfestwerte k .

Werden die Stabfestwerte $k^* = \frac{2 EJ}{l}$ in wahrer Größe in die Rechnung eingeführt, so ergeben sich nicht nur die Momente, sondern auch die Formänderungswerte in wahrer Größe. Werden nun sämtliche k -Zahlen mit dem z -fachen Wert in Rechnung gesetzt, so erhält man sämtliche Formänderungsgrößen $\frac{1}{z}$ -fach verzerrt, während die Stabendmomente wiederum in wahrer Größe erscheinen.

Davon wird man bei der Rechnung immer Gebrauch machen, um allzu große Zahlenwerte in den Gleichungen zu vermeiden. Wenn aber auch die wahren Werte der Formänderungsgrößen für ein Rahmentragwerk zu ermitteln sind, so braucht man nur die unter Einführung der z -fach verzerrten k -Zahlen erhaltenen Werte der Unbekannten wieder zu entzerren. Beispielsweise gelten dann folgende Beziehungen, wenn die mit * bezeichneten Größen die wahren Werte und die gleichnamigen, aber ohne *, die $\frac{1}{z}$ -fach verzerrten Werte bedeuten:

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \varphi \cdot z & \Delta^* &= \Delta \cdot z \\ \psi^* &= \psi \cdot z & \delta^* &= \delta \cdot z. \end{aligned} \quad (21)$$

Wählt man als Verzerrungsfaktor

$$z = \frac{1}{2 EJ_0} \quad (22)$$

und für J_0 beispielsweise $0,001 \text{ m}^4$, so wird

$$z = \frac{1000}{2E} \quad (23)$$

und es ergeben sich die für die Rechnung zu verwendenden, verzerrten Steifigkeitszahlen k mit

$$k = k^* \cdot z = \frac{2 EJ}{l} \cdot \frac{1000}{2E}$$

oder einfach

$$k = \frac{J}{l} \cdot 1000, \quad (24)$$

wobei J in m^4 und l in m einzuführen sind. Die k -Zahlen können für die praktische Berechnung auf drei gültige Ziffern abgerundet werden, ohne damit der Genauigkeit merklich zu schaden. Zur Erleichterung der rechnerischen Ermittlung der k -Werte kann für Rechtecksquerschnitte die Zahlentafel 1 benutzt werden.

6. Die zahlenmäßige Ermittlung der Stabbelastungsglieder.

Die Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} sind, wie bereits hervorgehoben, nichts anderes als die *Einspannmomente* des fest eingespannt gedachten Trägers. Es können daher zu ihrer Ermittlung ganz allgemein auch die für den fest eingespannten Stab geltenden Formeln Anwendung finden. Unter Berücksichtigung der für die Stabendmomente aufgestellten Vorzeichenregel ist also z. B. für einen liegenden Stab 1–2, der von oben belastet wird (Abb. 42),

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{1,2} &= - 2 \cdot \frac{2 \alpha_1^0 - \alpha_2^0}{l} \\ \mathfrak{M}_{2,1} &= + 2 \cdot \frac{2 \alpha_2^0 - \alpha_1^0}{l}. \end{aligned} \quad (25)$$

Darin bedeuten α_1^0 und α_2^0 die EJ -fachen *Endtangentialwinkel* der Biegelinie des freiauflegend gedachten Stabes infolge der äußeren Belastung. Sie sind hier nach

dem MOHRschen Satz gleich den Auflagerdrücken A_1 und A_2 der als Belastung aufgefaßten Momentenfläche F_0 (Abb. 42).

Für die häufiger vorkommenden Belastungsfälle sind in den Tafeln 2 bis 4 im Dritten Teil des Buches gebrauchsfertige Formeln sowohl für die α^0 -Werte als auch für die \mathcal{M} -Werte zusammengestellt. Es finden sich dort auch stets diejenigen Werte der zugehörigen M_0 -Linie, d. h. der Momentenlinie für den freiaufliegenden Träger, die zum Aufzeichnen des endgültigen Momentenverlaufes am Rahmenstabe gebraucht werden.

Die α^0 -Werte werden vor allem zur Ermittlung der Belastungsglieder bei der Berechnung des Durchlaufträgers (vgl. fünfter Abschnitt, III) benötigt. Schließlich ergeben sich mit Hilfe der α^0 -Werte aber auch sehr einfach die sog. „Kreuz-

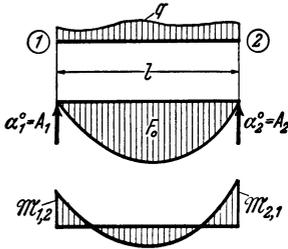


Abb. 42. Zur Ermittlung der \mathcal{M} -Werte aus den α^0 -Werten.

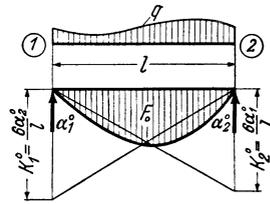


Abb. 43. Zur Ermittlung der Kreuzlinienabschnitte K^0 aus den α^0 -Werten.

linienabschnitte“ K_1^0 und K_2^0 , die bei der Festpunktmethode verwendet werden. Es ist nämlich der Kreuzlinienabschnitt K_1^0 gleich dem sechsfachen Auflagerdrehwinkel α_2^0 des freiaufliegenden Trägers, geteilt durch die Trägerspannweite l (Abb. 43), also

$$K_1^0 = \frac{6 \alpha_2^0}{l} \quad \text{bzw.} \quad K_2^0 = \frac{6 \alpha_1^0}{l} \tag{26}$$

und bei symmetrischer Belastung

$$K_1^0 = K_2^0 = \frac{6 \alpha^0}{l} \tag{27}$$

In manchen Fällen wird es zweckmäßig sein, die Stabbelastungsglieder \mathcal{M} durch Auswertung der Einflußlinien für die Einspannmomente am fest eingespannten Träger zu ermitteln (vgl. Tafel 4). Dies wird besonders dann von Vorteil sein, wenn es sich um viele Einzellasten oder um unregelmäßige Streckenlasten handelt, die durch eine Reihe von Einzellasten ersetzt werden können.

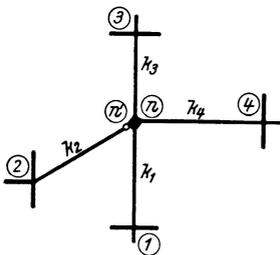


Abb. 44. Knoten mit einem gelenkigen Stabanschluß.

7. Berücksichtigung gelenkiger Stabanschlüsse.

A. Allgemeines.

Ist in irgendeinem Knotenpunkt ein Stab gelenkig angeschlossen (Abb. 44), so wären für diese Stelle zwei Knotendrehwinkel zu ermitteln und damit auch zwei Knotengleichungen aufzustellen. Es handelt sich dann gewissermaßen um zwei voneinander unabhängige Knotenpunkte, für welche die zugehörigen Diagonalglieder getrennt zu bestimmen sind. Es wäre also z. B. mit den Bezeichnungen der Abb. 44, wo sich unmittelbar links vom Knotenpunkt n ein Gelenk n' befindet,

$$d_{n'} = 2 k_2; \quad d_n = 2 (k_1 + k_3 + k_4).$$

Es mündet nämlich in den Knotenpunkt n' nur der Stab (2) ein, während im Knotenpunkt n die Stäbe (1), (3) und (4) zusammentreffen. In ähnlicher Weise wären auch die zugehörigen Knotenbelastungsglieder zu bilden, und zwar nach (20a)

$$s_{n'} = \mathfrak{M}_{n', 2};$$

$$s_n = \mathfrak{M}_{n, 1} + \mathfrak{M}_{n, 3} + \mathfrak{M}_{n, 4}.$$

Die Knotengleichungen für die beiden Punkte n' und n würden somit nach (18) in ausführlicher Schreibweise lauten:

für n' :

$$d_{n'} \varphi_{n'} + k_2 \varphi_2 + s_{n'} = 0,$$

für n :

$$d_n \varphi_n + k_1 \varphi_1 + k_3 \varphi_3 + k_4 \varphi_4 + s_n = 0.$$

Die Symmetrie der tabellarisch aufgestellten Gleichungen wird hiebei nicht gestört.

Es würden sich auf diese Weise in einem Rahmentragwerk mit gelenkigen Stabanschlüssen aber in der Regel mehr Bedingungsgleichungen ergeben als bei demselben Tragwerk mit nur steifen Anschlüssen. Dieser Nachteil kann leicht umgangen werden, wenn bereits bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen die unbekanntene Gelenkdrehwinkel als Funktion der am gleichen Stabe gegenüberliegenden Stabendverdrehungen ausgedrückt werden, wie im folgenden gezeigt wird. Es kann auf diese Weise die Anzahl der Knotengleichungen bei Rahmentragwerken mit gelenkigen Stabanschlüssen erheblich herabgesetzt werden, weil die Bestimmung der Gelenkdrehwinkel gänzlich entfällt. Auch die Symmetrie des Gleichungssystems in bezug auf die Diagonale bleibt bei diesem Berechnungsverfahren erhalten.

In den Abb. 45 bis 54 sind verschiedene Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen zusammengestellt und dabei die jeweils zu bestimmenden Unbekannten vermerkt. Die Tragwerke der Abb. 45 bis 49 sind bei jeder Belastung unverschieblich, die der Abb. 50, 51, 53 und 54 dagegen nur bei symmetrischer Belastung.

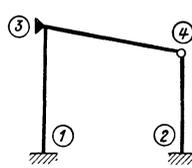


Abb. 45. Unbekannte: φ_3 .

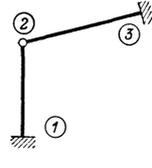


Abb. 46. Unbekannte: 0.

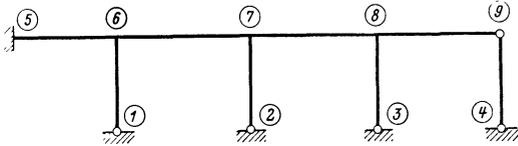


Abb. 47. Unbekannte: $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$.

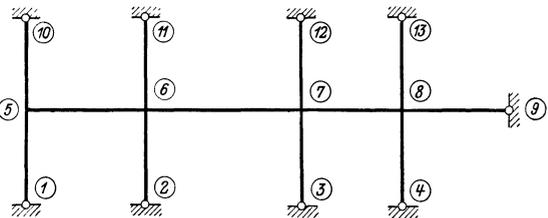


Abb. 48. Unbekannte: $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$.

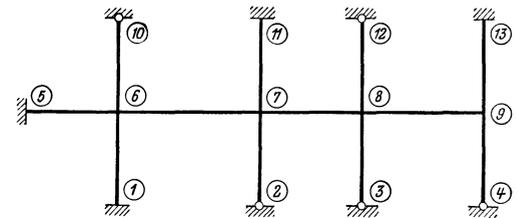


Abb. 49. Unbekannte: $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9$.

Abb. 45 bis 49. „Unverschiebliche“ Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen.

B. Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Für den Knoten (n) des in Abb. 55 dargestellten unverschieblichen Tragwerksteiles würde die Knotengleichung nach (18) lauten:

$$d_n \varphi_n + k_{n, 1} \varphi_1 + k_{n, 2} \varphi_2 + k_{n, 3} \varphi_3 + k_{n, 4} \varphi_4 + s_n = 0.$$

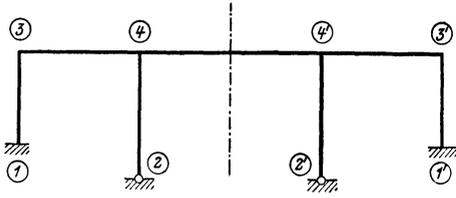


Abb. 50.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_4', \varphi_3', \Delta$;
 „ symmetrischer „ : φ_3, φ_4 ;
 „ antimetrischer „ : $\varphi_3, \varphi_4, \Delta$.

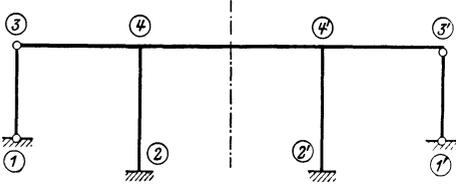


Abb. 51.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_4, \varphi_4', \Delta$;
 „ symmetrischer „ : φ_4 ;
 „ antimetrischer „ : φ_4, Δ .

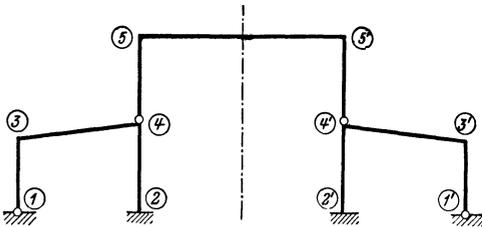


Abb. 52.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_5', \varphi_4'$;
 $\varphi_3', \delta_1, \delta_2, \delta_3$;
 „ symmetrischer „ : $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \delta_1$;
 „ antimetrischer „ : $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \delta_1, \delta_2$.

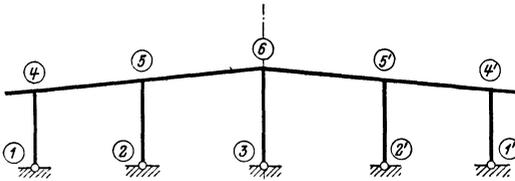


Abb. 53.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_5', \varphi_4'$;
 Δ ;
 „ symmetrischer „ : φ_5 ;
 „ antimetrischer „ : $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \Delta$.

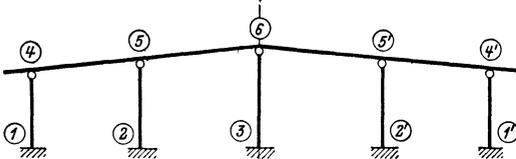


Abb. 54.

Bei unsymmetrischer Belastung: $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_5', \Delta$;
 „ symmetrischer „ : φ_5 ;
 „ antimetrischer „ : $\varphi_5, \varphi_6, \Delta$.

Abb. 50 bis 54. „Symmetrische“ Tragwerke mit Gelenken.

Nun ist aber der Gelenkdrehwinkel (vgl. Tafel I, S. 4, Fall 2c)

$$\varphi_{\bar{x}} = -\frac{1}{2} \left(\varphi_n + \frac{\mathfrak{M}_{\bar{x}, n}}{k_{n, \bar{x}}} \right).$$

Führt man diesen Wert in die vorstehende Gleichung ein, so ergibt sich nach Ordnung der einzelnen Glieder

$$(d_n - 0,5 k_{n, \bar{x}}) \cdot \varphi_n + k_{n, 1} \varphi_1 + k_{n, 2} \varphi_2 + k_{n, 3} \varphi_3 + (s_n - 0,5 \mathfrak{M}_{\bar{x}, n}) = 0 \quad (28)$$

und schließlich in vereinfachter Schreibweise die allgemeine Form der *Knoten-gleichung*, in der beliebig viele gelenkige Stabanschlüsse berücksichtigt sind:

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r k_{n, r} \varphi_r + s_n^0 = 0. \quad (29)$$

Darin bedeuten:

$$d_n^0 = d_n - 0,5 \sum_g k_{n,g}, \tag{30}$$

$$s_n^0 = s_n - 0,5 \sum_g \mathfrak{M}_{g,n}. \tag{31}$$

Das *Diagonalglied* d_n^0 für einen Knoten, dessen steif angeschlossene Stäbe zum Teil auf der Gegenseite gelenkig gelagert sind, wird also erhalten, indem man zuerst in üblicher Weise den Wert $d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$ für alle in (n) steif angeschlossenen Stäbe bildet und davon $0,5 \sum_g k_{n,g}$, d. i. die halbe Summe der Stabfestwerte $k_{n,g}$ aller jener Stäbe abzieht, die im Knoten (n) steif, auf der Gegenseite aber gelenkig angeschlossen sind.

Ähnlich erhält man nach (31) in einem solchen Falle das *Knotenbelastungsglied* s_n^0 in der Weise, daß man zuerst allgemein $s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$ für alle im Knoten steif angeschlossenen Stäbe ermittelt und davon $0,5 \sum_g \mathfrak{M}_{g,n}$, d. i. die halbe Summe der Belastungsglieder $\mathfrak{M}_{g,n}$ jener Stäbe abzieht, die im Knoten (n) steif und auf der Gegenseite gelenkig angeschlossen sind. Der Wert $\mathfrak{M}_{g,n}$ bedeutet hierbei das Belastungsglied auf der Gelenkseite solcher Stäbe.

Die Glieder $\sum_r k_{n,r} \varphi_r$ beziehen sich auf die sowohl im Knoten (n) als auch im Nachbarknoten elastisch eingespannten Stäbe.

Es sei hier noch besonders darauf hingewiesen, daß solche Stäbe, die im betrachteten Knoten gelenkig angeschlossen sind, keine Beiträge für die Knotengleichungen (29) liefern. Für einen Knoten, in dem sämtliche Stäbe gelenkig angeschlossen sind, braucht somit keine Knotengleichung aufgestellt werden.

C. Anwendungsbeispiel.

Die Benutzung der Knotengleichung (29) soll hier an dem Rahmentragwerk der Abb. 56, dessen Riegel beliebig belastet sei, gezeigt werden.

Es sind lediglich zwei Unbekannte, nämlich die Knotendrehwinkel φ_5 und φ_6 zu bestimmen. Die zugehörigen *Diagonalglieder* erhält man nach (30) an Hand der Beiwertschizze (Abb. 56) wie folgt:

$$d_5^0 = d_5 - 0,5 (k_1 + k_6) = 2 (k_1 + k_3 + k_4 + k_6) - 0,5 (k_1 + k_6),$$

$$d_6^0 = d_6 - 0,5 k_5 = 2 (k_4 + k_5) - 0,5 k_5$$

und die *Knotenbelastungsglieder* nach (31)

$$s_5^0 = s_5 = \mathfrak{M}_{5,4} + \mathfrak{M}_{5,6},$$

$$s_6^0 = s_6 - 0,5 \mathfrak{M}_{7,6} = \mathfrak{M}_{6,5} + \mathfrak{M}_{6,7} - 0,5 \mathfrak{M}_{7,6}.$$

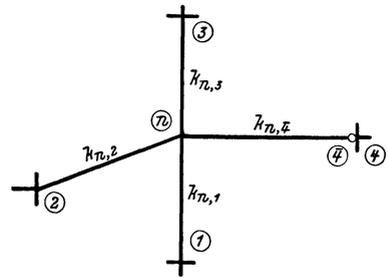


Abb. 55. Tragwerksteil mit gelenkigem Stabanschluß.

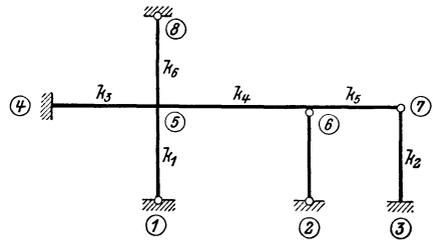


Abb. 56. Rahmentragwerk mit Gelenken. Beiwertschizze.

Damit lauten die beiden *Knotengleichungen* nach (29)

$$d_5^0 \varphi_5 + k_4 \varphi_6 + s_5^0 = 0,$$

$$d_6^0 \varphi_6 + k_4 \varphi_5 + s_6^0 = 0$$

oder in tabellarischer Form

Gleichungstabelle 2.

	φ_5	φ_6	B
φ_5	d_5^0	k_4	s_5^0
φ_6	k_4	d_6^0	s_6^0

Mit Hilfe der Unbekannten φ_5 und φ_6 sind sämtliche Stabendmomente bestimmbar, und zwar für den vorliegenden Fall nach (14) bzw. nach den entsprechenden Formeln der Tafel I, Seite 4:

$$M_{4,5} = k_3 \varphi_5 + \mathfrak{M}_{4,5},$$

$$M_{5,4} = 2 k_3 \varphi_5 + \mathfrak{M}_{5,4},$$

$$M_{5,1} = 1,5 k_1 \varphi_5,$$

$$M_{5,6} = k_4 (2 \varphi_5 + \varphi_6) + \mathfrak{M}_{5,6},$$

$$M_{5,8} = 1,5 k_6 \varphi_5,$$

$$M_{6,5} = k_4 (2 \varphi_6 + \varphi_5) + \mathfrak{M}_{6,5},$$

$$M_{6,7} = 1,5 k_5 \varphi_6 + \mathfrak{M}_{6,7} - 0,5 \mathfrak{M}_{7,6}.$$

(Vgl. auch Zahlenbeispiel 6.)

IV. Rahmentragwerke mit verschieblichen Knotenpunkten.

1. Allgemeines.

Bei vielen Tragwerken treten infolge der Belastung nicht nur *Knotenverdrehungen*, sondern auch *Knotenverschiebungen* auf. In solchen Fällen sind außer den Knotendrehwinkeln φ auch Knotenverschiebungen δ bzw. die „gegenseitigen“ Stabendverschiebungen Δ oder die sog. *Stabdrehwinkel* ψ als Formänderungsgrößen zu bestimmen.

Es wird sich also zuerst immer darum handeln, bei einem vorliegenden Tragwerk festzustellen, welche Knotenpunkte verschieblich sind und wie viele verschiedene Stabdrehwinkel ψ dadurch insgesamt erzeugt werden. Allgemein kann man sagen, daß stets so viele voneinander unabhängige Stabdrehwinkel ψ bzw. „gegenseitige“ Stabendverschiebungen Δ auftreten, als gedachte Lager in den Knotenpunkten notwendig wären, um das gesamte Tragwerk „*unverschieblich*“ zu machen.

Um eine bessere Übersicht über diese Tragwerksarten zu erhalten und auch eine raschere Beurteilung des zu erwartenden Umfangs der zahlenmäßigen Berechnung zu ermöglichen, erscheint es zweckmäßig, eine Einteilung in verschiedene Gruppen nach besonderen Merkmalen vorzunehmen. Man kann demnach unterscheiden:

1. Symmetrische Tragwerke, und zwar:

a) solche, deren Knotenpunkte bei symmetrischer Belastung unverschieblich, bei unsymmetrischer Belastung aber verschieblich sind (Abb. 28 bis 35, 66, 67) und

b) solche, die auch bei symmetrischer Belastung Knotenpunktverschiebungen erfahren (Abb. 36 bis 39).

2. Unsymmetrische Tragwerke (Abb. 57 bis 65).

Diese beiden Hauptgruppen können eine weitere Unterteilung erfahren in:

A. Tragwerke mit Dreieckstabzügen (Abb. 66 bis 71),

B. Tragwerke mit lotrecht und waagrecht verschieblichen Knotenpunkten (Abb. 36, 37, 38, 65),

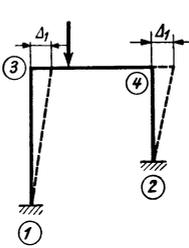


Abb. 57. Unbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \Delta_1$.

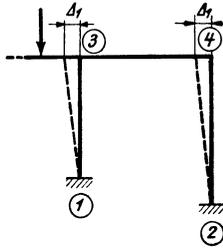


Abb. 58. Unbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \Delta_1$.

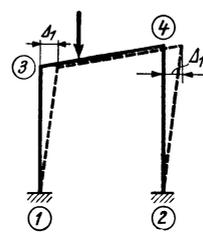


Abb. 59. Unbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \Delta_1$.

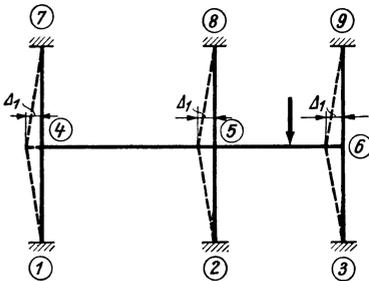


Abb. 60. Unbekannte: $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \Delta_1$.

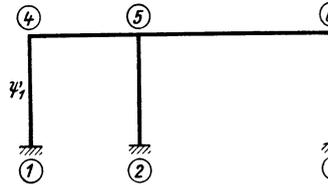


Abb. 61. Unbekannte: $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \psi_1$.

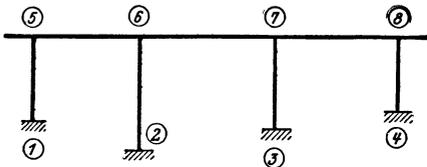


Abb. 62. Unbekannte: φ_5 bis φ_8, Δ_1 .

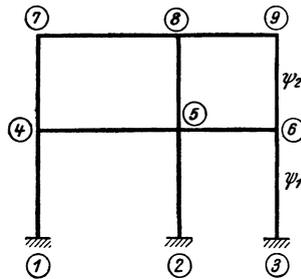


Abb. 63. Unbekannte: φ_4 bis $\varphi_6, \psi_1, \psi_2$.

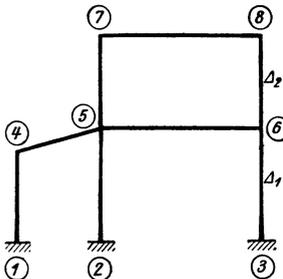


Abb. 64. Unbekannte: φ_4 bis $\varphi_6, \Delta_1, \Delta_2$.

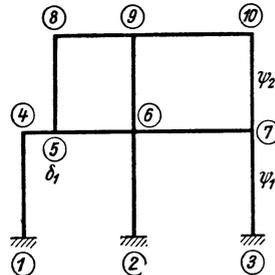


Abb. 65. Unbekannte: φ_4 bis $\varphi_{10}, \psi_1, \psi_2, \delta_1$.

Abb. 57 bis 65. „Verschiebliche“ unsymmetrische Tragwerke ohne Gelenke.

C. Tragwerke mit gebrochenen Stabzügen oder beliebig geneigten Stäben (Abb. 72 bis 75).

Zu diesen verschiedenen Tragwerksarten wäre im einzelnen noch folgendes zu sagen. Die unter 1 a (Abb. 28 bis 35, 66, 67) beschriebene Gruppe wird bei unsymmetrischer lotrechter Belastung in manchen Fällen nur eine verhältnismäßig geringe Verschiebung ihrer Knotenpunkte in waagrechter Richtung erleiden, so daß es in der Praxis mitunter zulässig sein wird, diese Verschieblichkeit zu vernachlässigen und derartige Tragwerke so zu behandeln, als ob sie unverschieblich wären.

Auf diese Weise kann die Rechnung erheblich vereinfacht werden. Das gilt aber auch bei vielen unsymmetrischen, lotrecht belasteten Tragwerken. Bei der zahlenmäßigen Berechnung von unsymmetrisch belasteten, aber *symmetrisch* ausgebildeten Tragwerken kann die Anwendung des Verfahrens der „Belastungs-Umordnung“ (BÜ.-Verfahren) zu bedeutenden Vereinfachungen führen (siehe Kapitel IV, 5 dieses Abschnittes). Danach wird die gegebene unsymmetrische Belastung durch eine *symmetrische* und eine *antisymmetrische* ersetzt und die Berechnung für beide Belastungsarten getrennt durchgeführt. Auf diese Weise kann die Anzahl der gemeinsam zu bestimmenden Unbekannten beträchtlich herabgesetzt werden. Um darüber einen Überblick zu gewinnen, ist bei den einzelnen Abbildungen stets die Anzahl der Unbekannten vermerkt, die bei den in Betracht kommenden Belastungsfällen auftreten.

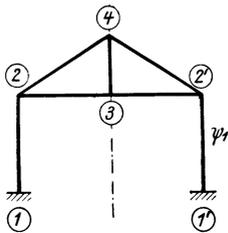


Abb. 66. Unbekannte bei symm. Belastung: φ_2 .

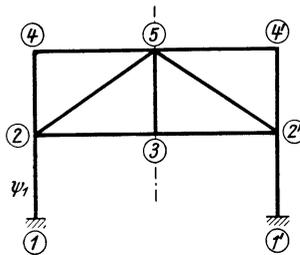


Abb. 67. Unbekannte bei symm. Belastung: φ_2, φ_4 .

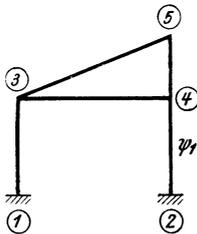


Abb. 68. Unbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \psi_1$.

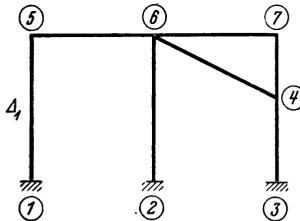


Abb. 69. Unbekannte: $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \Delta_1$.

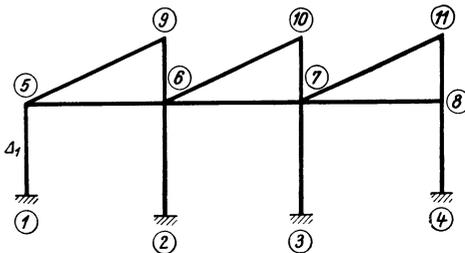


Abb. 70. Unbekannte: φ_5 bis φ_{11}, Δ_1 .

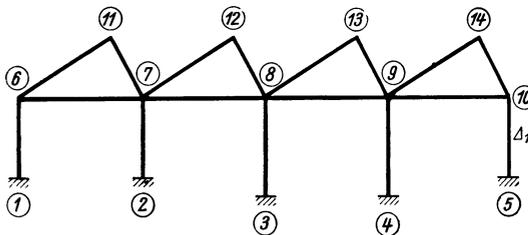


Abb. 71. Unbekannte: φ_6 bis φ_{14}, Δ_1 .

Abb. 66 bis 71. Tragwerke mit Dreieckstabzügen.

Bei Tragwerken mit *Dreieckstabzügen* (Abb. 66 bis 71) ist zu beachten, daß bei einer Parallelverschiebung eines Stabes stets $\Delta=0$ und damit auch $\psi=0$ ist. So werden z. B. bei dem in Abb. 76 dargestellten Tragwerk die Stabdrehwinkel ψ der Dreieckseiten gleich Null, obwohl die Knotenpunkte 3, 4, 5 bei der Verformung Verschiebungen erleiden.

Für die Behandlung der in der Gruppe C zusammengefaßten Rahmentragwerke bringt die Verwendung des Drehwinkelverfahrens in der Regel keine Vorteile mit sich. Es sind nämlich häufig mehr Formänderungsgrößen zu bestimmen, als statisch überzählige Größen vorhanden sind. Außerdem sind auch Verschiebungspläne zu zeichnen, so daß es in solchen Fällen oft zweckmäßiger sein wird, auf die Verwendung des Drehwinkelverfahrens überhaupt zu verzichten und auf die Elastizitätsgleichungen zurückzugreifen, wenn nicht für die einfacheren Rahmenformen die in den verschiedenen Handbüchern enthaltenen fertigen Formeln Verwendung finden können.

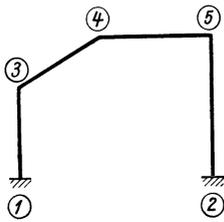


Abb. 72.

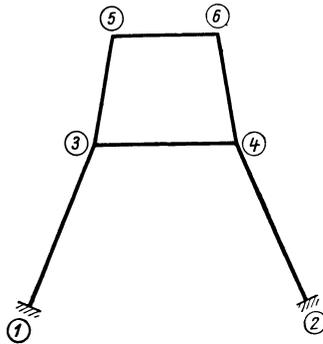


Abb. 73.

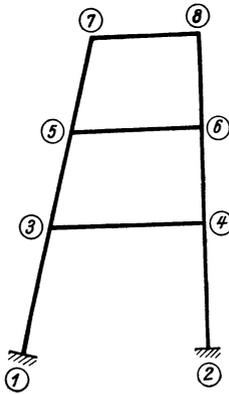


Abb. 74.

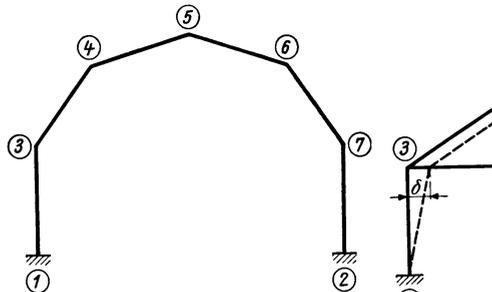


Abb. 75.

so daß es in solchen Fällen oft zweckmäßiger sein wird, auf die Verwendung des Drehwinkelverfahrens überhaupt zu verzichten und auf die Elastizitätsgleichungen zurückzugreifen, wenn nicht für die einfacheren Rahmenformen die in den verschiedenen Handbüchern enthaltenen fertigen Formeln Verwendung finden können.

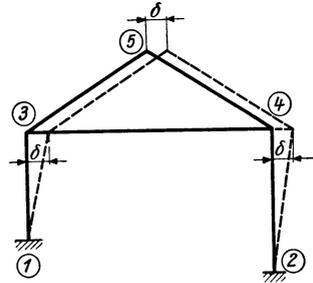


Abb. 72 bis 75. Tragwerke mit gebrochenen Stabzügen oder geneigten Stielen. Abb. 76. Unbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \delta$.

2. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

Es sind hier zwei Arten von Bedingungsgleichungen zu unterscheiden, die im folgenden getrennt voneinander behandelt werden. Die erste Art ist bereits bekannt. Es sind dies die sog. *Knotengleichungen*, deren Anzahl immer genau so groß ist, als unbekannte Knotendrehwinkel φ vorhanden sind. Wenn nun aber noch r unbekannte Stabdrehwinkel ψ oder Verschiebungsgrößen δ bzw. Δ dazukommen, so sind auch noch r unabhängige Gleichungen aufzustellen, die als *Verschiebungsgleichungen* bezeichnet werden sollen.

Zur Aufstellung dieser beiden Gleichungsgruppen wird man am besten wieder gebrauchsfertige Mustergleichungen verwenden, deren Herleitung am einfachsten aus den allgemeinen statischen Gleichgewichtsbedingungen erfolgt.

Knotengleichungen. Hier kann derselbe Weg eingeschlagen werden wie bei den Systemen mit unverschieblichen Knotenpunkten. Abb. 77 stellt einen Knoten n dar, der mit vier Stäben und den benachbarten Knoten 1, 2, 3, 4 aus einem Rahmentragwerk herausgeschnitten zu denken ist. Unter der Voraussetzung, daß bei allen vier Stäben Stabdrehwinkel ψ auftreten, lauten die Ausdrücke für die Stabendmomente am Knotenpunkt n

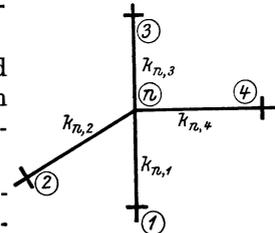


Abb. 77. Tragwerksteil mit Knoten n .

nach den Gl. (7) unter Beachtung der in der Abb. 77 gewählten Bezeichnung:

$$\begin{aligned} M_{n,1} &= k_{n,1} (2 \varphi_n + \varphi_1 + 3 \psi_{n,1}) + \mathfrak{M}_{n,1} \\ M_{n,2} &= k_{n,2} (2 \varphi_n + \varphi_2 + 3 \psi_{n,2}) + \mathfrak{M}_{n,2} \\ M_{n,3} &= k_{n,3} (2 \varphi_n + \varphi_3 + 3 \psi_{n,3}) + \mathfrak{M}_{n,3} \\ M_{n,4} &= k_{n,4} (2 \varphi_n + \varphi_4 + 3 \psi_{n,4}) + \mathfrak{M}_{n,4}. \end{aligned} \quad (32)$$

Die bereits bekannte Bedingung $\sum M = 0$ für den Knotenpunkt n ergibt durch Summieren der Ausdrücke (32):

$$\sum_{i=1}^{i=4} M_{n,i} = 0 = \varphi_n \cdot 2 \sum_{i=1}^{i=4} k_{n,i} + \sum_{i=1}^{i=4} k_{n,i} \varphi_i + \sum_{i=1}^{i=4} 3 k_{n,i} \psi_{n,i} + \sum_{i=1}^{i=4} \mathfrak{M}_{n,i}. \quad (33)$$

Treffen im Knotenpunkt n beliebig viele Stäbe zusammen und werden außerdem dort auch angreifende Kragarmmomente M_k in Betracht gezogen, so nimmt die Gl. (33) folgende Form an:

$$\varphi_n \cdot 2 \sum_i k_{n,i} + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \sum_i 3 k_{n,i} \psi_{n,i} + \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k = 0. \quad (34)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise kann wieder ähnlich wie bei Gl. (18) gesetzt werden:

für den Beiwert des Diagonalgliedes

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}, \quad (35)$$

für das Knotenbelastungsglied

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k, \quad (36)$$

bzw., wenn keine Kragarmmomente vorhanden sind, einfach

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}. \quad (36a)$$

Damit lautet die Gl. (34)

$$\boxed{d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \sum_i 3 k_{n,i} \psi_{n,i} + s_n = 0.} \quad (37)$$

Vergleicht man nun diese für Tragwerke mit *verschieblichen* Knotenpunkten geltende Gl. (37) mit der für *unverschiebliche* Tragwerke aufgestellten Gl. (18), so ergibt sich, daß hier nur die Glieder $\sum_i 3 k_{n,i} \psi_{n,i}$ hinzukommen, während alle übrigen Bestandteile in der gleichen Form wie bei (18) in Erscheinung treten. Die dort gegebenen Erläuterungen haben daher auch hier volle Gültigkeit.

Führt man in der Rechnung an Stelle der Stabdrehwinkel ψ die „gegenseitigen“ Stabendverschiebungen Δ ein, so lautet die Knotengleichung (37), wenn nach (2)

$$\psi_{n,i} = \frac{\Delta_{n,i}}{l_{n,i}} \text{ und weiter } \frac{3 k_{n,i}}{l_{n,i}} = \bar{k}_{n,i} \quad (38)$$

gesetzt wird:

$$\boxed{d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \sum_i \bar{k}_{n,i} \Delta_{n,i} + s_n = 0.} \quad (39)$$

In der Knotengleichung ergeben sich somit stets so viele Glieder von der Form $3 k_{n,i} \psi_{n,i}$ bzw. $\bar{k}_{n,i} \Delta_{n,i}$, als in den betrachteten Knotenpunkt Stäbe mit Stabdrehwinkeln ψ bzw. mit „gegenseitigen“ Stabendverschiebungen Δ einmünden.

Verschiebungsgleichungen. Zur gemeinsamen Bestimmung der unbekanntnen Formänderungsgrößen φ und ψ bzw. φ und Δ sind noch so viele sog. Verschiebungsgleichungen aufzustellen, als im Tragwerk insgesamt „gegenseitige“ Stabendverschiebungen Δ oder Stabdrehwinkel ψ als Unbekannte vorkommen.

Denkt man sich durch das Tragwerk einen beliebigen Schnitt geführt und an den Trennstellen die Schnittkräfte M, N, Q angebracht, so können die bekannten statischen Gleichgewichtsbedingungen $\sum H = 0$ bzw. $\sum V = 0$ für den abgetrennten Tragwerksteil aufgestellt werden. Wenn hierbei die Schnittkräfte M, N, Q als Funktion der Formänderungsgrößen φ und ψ bzw. φ und Δ ausgedrückt werden, so erhält man eine brauchbare Bedingungsgleichung. Sie bringt also stets zum Ausdruck, daß die Projektion aller auf den abgetrennten oder übrigen Tragwerksteil einwirkenden Kräfte auf eine beliebige Richtung gleich Null sein muß.

Durch passende Wahl dieser Schnittführung an verschiedenen Stellen des Tragwerkes gewinnt man eine Reihe von unabhängigen linearen Gleichungen, die in der Regel zusammen mit den Knotengleichungen ausreichen, um sämtliche unbekannte Formänderungsgrößen gemeinsam zu ermitteln.

Es ist allerdings für die „Verschiebungsgleichungen“ im Gegensatze zu den Knotengleichungen nicht möglich, eine einfache, gebrauchsfertige Form zu finden, die für *alle* Arten von Tragwerken Gültigkeit besitzt. Dennoch gelingt es aber, solche „Verschiebungsgleichungen“ wenigstens für einzelne *Tragwerksarten* (z. B. Stockwerkrahmen, Vierendeelträger usw.) ein für allemal aufzustellen und so die Berechnung immerhin noch beträchtlich zu erleichtern. Dies soll nun im folgenden für verschiedene Tragwerksformen, die im Hochbau besonders häufig vorkommen, durchgeführt werden.

3. Der beliebig belastete Stockwerkrahmen mit lotrechten, geschoßweise gleich langen Ständern.

Es können hier auch ungleiche Feldweiten und Stockwerkshöhen sowie eine beliebige Zahl der Felder und Stockwerke vorausgesetzt werden. Abb. 78 zeigt einen Vertreter dieser Rahmengruppe. Ein Teil des Rahmentragwerkes ist mit seiner Verformung in größerem Maßstabe in Abb. 79 herausgezeichnet. Es ist leicht einzusehen, daß unter Vernachlässigung der Formänderung durch die Längskräfte die oberen Enden sämtlicher Stiele ein und desselben Stockwerkes gegenüber den unteren Enden durchwegs die *gleiche* „gegenseitige“ Verschiebung Δ in waagrechtlicher Richtung erleiden, während die Stabsehnern der einzelnen Riegel parallel zur ursprünglichen Stabachse bleiben. Es erscheinen also im gesamten Tragwerk nur so viele verschiedene Stabdrehwinkel ψ , als Stockwerke vorhanden sind.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen: Für den vorliegenden Fall lautet die allgemeine Knotengleichung (37) in ausführlicher Schreibweise

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + 3 k_\mu \psi_\mu + 3 k_{\mu+1} \psi_{\mu+1} + s_n = 0. \quad (40)$$

Es treten also hier jeweils höchstens *zwei* ψ -Glieder auf, und zwar beziehen sich $3 k_\mu \psi_\mu$ und $3 k_{\mu+1} \psi_{\mu+1}$ auf die in den betrachteten Knoten n einmündenden Säulen des darunter- bzw. darüberliegenden Stockwerkes.

In den Gleichungen für jene Knoten des Tragwerkes, wo nur je *eine* Säule einmündet, z. B. in den obersten Knoten des Tragwerkes, erscheint auch nur *ein* ψ -Glieder.

Wendet man die Knotengleichung (40) beispielsweise für den Knoten (8) des in Abb. 78 bzw. 79 dargestellten Stockwerkrahmens an, so erhält man mit den dort ersichtlichen Bezeichnungen:

$$d_8 \varphi_8 + k_7 \varphi_7 + k_8 \varphi_9 + k_{12} \varphi_{13} + 3 k_3 \psi_1 + 3 k_{12} \psi_2 + s_8 = 0.$$

Verschiebungsgleichungen. Es sind also noch so viele unabhängige Bedingungengleichungen aufzustellen, als unbekannte Stabdrehwinkel auftreten, d. h. als Stockwerke vorhanden sind. Man denke sich zu diesem Zwecke durch jedes Stockwerk an den oberen Säulenenden einen waagrechten Schnitt geführt und die

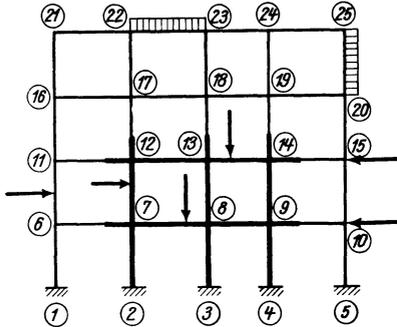


Abb. 78. Stockwerkrahmen mit beliebiger Belastung.

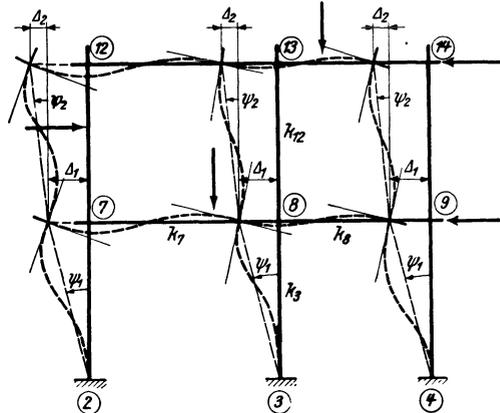


Abb. 79. Tragwerksteil aus Abb. 78 mit Verformung.

Schnittkräfte M, N, Q angebracht. Für den abgetrennten Tragwerksteil kann sodann jeweils die statische Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ aufgestellt werden. Dies soll für den in Abb. 80 dargestellten beliebig belasteten Stockwerkrahmen für ein Stockwerk durchgeführt werden. In Abb. 81 ist der oberhalb des Schnittes $s-s$

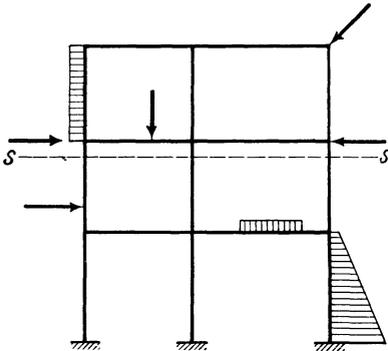


Abb. 80. Stockwerkrahmen mit beliebiger Belastung.

befindliche Tragwerksteil mit allen auf ihn einwirkenden äußeren Kräften einschließlich der Schnittkräfte, die dort nur symbolisch angedeutet sind, gesondert heraus-

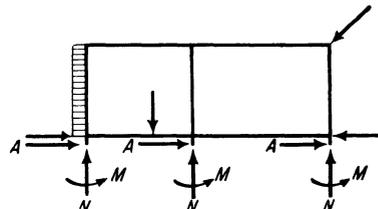


Abb. 81. Abgetrennter Tragwerksteil aus Abb. 80 mit Schnittkräften.

gezeichnet. Die Bedingung $\sum H = 0$ kann nun für diesen Rahmenteil allgemein in folgender Form geschrieben werden:

$$\text{darin bedeuten:} \quad \sum P + \sum q + \sum Q = 0, \tag{41}$$

- $\sum P$ die Summe der waagrechten Projektionen aller auf den abgetrennten Tragwerksteil, also oberhalb der gedachten Schnittstelle einwirkenden äußeren Einzellasten,
- $\sum q$ die Summe aller in waagrechter Richtung oberhalb der Schnittstelle wirkenden Streckenlasten,
- $\sum Q$ die Summe der an den Schnittstellen übertragenen Querkräfte.

Über den Richtungssinn dieser Kräfte P, q und Q sei ein für allemal festgesetzt, daß die von links nach rechts gerichteten Kräfte positiv $| \leftarrow \rightarrow + |$ in die Rechnung einzuführen sind.

Die Glieder $\sum Q$ stimmen zahlenmäßig mit den Auflagerdrücken $\sum A$ überein, wenn man die Schnittstellen am obersten Ende der Säulen annimmt. Sie setzen sich aus *zwei* Beiträgen zusammen, und zwar:

1. aus den Auflagerdrücken \mathfrak{A} der freiauflegend gedachten Stäbe infolge der auf sie direkt einwirkenden äußeren Lasten (Abb. 82a),

2. aus den durch die Stabendmomente M_o (Moment am *oberen* Säulenende) und M_u (Moment am *unteren* Säulenende) hervorgerufenen Anteilen $\frac{M_o + M_u}{l}$ (Abb. 82b).

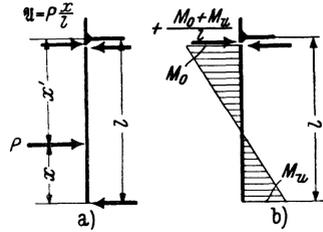


Abb. 82a und b. Querkraftanteile.

Es ist also:

$$\sum Q = \sum A = \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{M_o + M_u}{l}. \tag{42}$$

Damit lautet die Gl. (41)

$$\sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{M_o + M_u}{l} = 0 \tag{43}$$

oder, da voraussetzungsgemäß sämtliche Säulen eines Stockwerkes dieselbe Länge l aufweisen,

$$(\sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A}) \cdot l + \sum (M_o + M_u) = 0. \tag{44}$$

Man kann nun den Ausdruck $\sum (M_o + M_u)$ nach (9) mit den hier gewählten Bezeichnungen als Funktion der Formänderungsgrößen und der Stabbelastungsglieder ausdrücken und erhält

$$\sum (M_o + M_u) = \sum 3 k \varphi_o + \sum 3 k \varphi_u + \sum 6 k \psi + \sum (\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u). \tag{45}$$

Hierin bedeuten φ_o bzw. φ_u die Knotendrehwinkel des am „oberen“ bzw. „unteren“ Säulenende gelegenen Knotenpunktes. Führt man diesen Ausdruck in (44) ein, so ergibt sich:

$$\sum 3 k \varphi_o + \sum 3 k \varphi_u + \sum 6 k \psi + (\sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A}) l + \sum (\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u) = 0. \tag{46}$$

Setzt man für den Beiwert von ψ , der in der Gleichungstabelle in die Diagonale zu stehen kommt, die sinngemäße Bezeichnung D_μ (= Diagonalglied des Stockwerkes μ), ferner für die Summe aller von der äußeren Belastung abhängigen Glieder den Buchstaben S_μ (= Belastungsglied des Stockwerkes μ), so erhält man die *Verchiebungsgleichung* für ein beliebiges Stockwerk in zweckmäßiger Schreibweise

$$\boxed{\sum_\mu 3 k \varphi_u + \sum_\mu 3 k \varphi_o + D_\mu \psi_\mu + S_\mu = 0.} \tag{47}$$

Dabei ist

$$D_\mu = 6 \sum_\mu k, \tag{48}$$

d. h. gleich der *sechsfachen* Summe der Steifigkeitszahlen sämtlicher Säulen des betrachteten Stockwerkes, und

$$S_\mu = (\sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A}) \cdot l_\mu + \sum_\mu (\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u). \tag{49}$$

Das S -Glied enthält somit die Summe aller oberhalb des betrachteten Stockwerkes waagrecht wirkenden Kräfte P und q sowie die oberen Auflagerdrücke \mathfrak{A} aller freigelagert gedachten Säulen dieses Stockwerkes $[- \rightleftharpoons +]$, multipliziert mit der Stockwerkshöhe l_μ , und außerdem die Summe der oberen und unteren Stabbelastungsglieder ($\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u$) dieser Säulen. Die Vorzeichen der Auflagerdrücke \mathfrak{A} stimmen immer mit dem Vorzeichen der Kräfte überein, aus welchen sie gebildet werden.

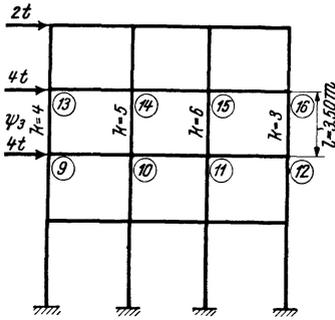


Abb. 83. Belastungs- und Beiwertschizze.

Bei der zahlenmäßigen Bestimmung der S_μ -Glieder ergeben sich oft Vereinfachungen. Wirken z. B. nur lotrechte Kräfte auf das Tragwerk ein, so ist $S_\mu = 0$; wirken waagrechte Knotenlasten, so wird einfach

$$S_\mu = l_\mu \sum P \text{ usw.}$$

Die φ -Glieder treten paarweise für jede Säule in der Form $3 k \varphi_u$ und $3 k \varphi_o$ auf. Ihre Zahl ist somit gleich der Anzahl der in dem betrachteten Stockwerk auftretenden unbekanntem Drehwinkel φ_u und φ_o .

Durch die Benutzung der gebrauchsfertigen Gl. (47) unter Zuhilfenahme einer Beiwertschizze werden viele Zwischenrechnungen entbehrlich und das Anschreiben der Gleichungstabelle gestaltet sich sehr einfach.

Anschließend sei die zahlenmäßige Anwendung der Gl. (47) für das vorletzte Geschoß eines Stockwerkrahmens gezeigt. In Abb. 83 ist die Belastung mit den erforderlichen Beiwerten dargestellt. Es ist also nach (48)

$$D_\mu = 6 \sum_\mu k = 6 (4 + 5 + 6 + 3) = 108.$$

Weiter ist nach (49)

$$S_\mu = l_\mu \sum P = 3,50 (4 + 2) = 21.$$

Damit wird nach (47)

$$12 \varphi_9 + 15 \varphi_{10} + 18 \varphi_{11} + 9 \varphi_{12} + 12 \varphi_{13} + 15 \varphi_{14} + 18 \varphi_{15} + 9 \varphi_{16} + 108 \psi_3 + 21 = 0.$$

In derselben Weise wäre bei allen übrigen Stockwerken zu verfahren.

b) Gleichungstabelle für einen unsymmetrischen, dreistieligen, zwei-stöckigen Rahmen.

In Abb. 84 ist die Beiwertschizze des Rahmentragwerkes dargestellt. Der Gang der Rechnung ist im wesentlichen derselbe wie bei unverschieblichen Tragwerken.

Für den vorliegenden Rahmen, der beliebig belastet sei, sind als Unbekannte die sechs Knotendrehwinkel φ_4 bis φ_9 und zwei Stabdrehwinkel ψ_1 und ψ_2 gemeinsam zu bestimmen. Demgemäß werden für die Aufstellung der entsprechenden Rahmen-gleichungen folgende Werte zu ermitteln sein:

für die Knotengleichungen: d_4 bis d_9 nach (35) und s_4 bis s_9 nach (36 a);

für die Verschiebungsgleichungen: D_1, D_2 nach (48) und S_1, S_2 nach (49).

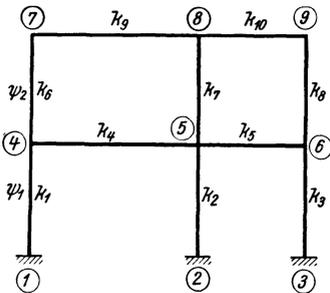


Abb. 84. Beiwertschizze.

Damit kann unter Zuhilfenahme der Beiwertschizze die tabellarische Aufstellung der Gleichungen vorgenommen werden. Man benutzt dazu die allgemeine Form der Knotengleichung (40):

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + 3 k_\mu \psi_\mu + 3 k_{\mu+1} \psi_{\mu+1} + s_n = 0$$

und die Verschiebungsgleichung (47):

$$\sum_\mu 3 k \varphi_u + \sum_\mu 3 k \varphi_o + D_\mu \psi_\mu + S_\mu = 0.$$

(Siehe Gleichungstabelle 3.)

Gleichungstabelle 3.

	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	ψ_1	ψ_2	B
φ_4	d_4	k_4		k_6			$3 k_1$	$3 k_6$	s_4
φ_5	k_4	d_5	k_5		k_7		$3 k_2$	$3 k_7$	s_5
φ_6		k_5	d_6			k_8	$3 k_3$	$3 k_8$	s_6
φ_7	k_6			d_7	k_9			$3 k_6$	s_7
φ_8		k_7		k_9	d_8	k_{10}		$3 k_7$	s_8
φ_9			k_8		k_{10}	d_9		$3 k_8$	s_9
ψ_1	$3 k_1$	$3 k_2$	$3 k_3$				D_1		S_1
ψ_2	$3 k_6$	$3 k_7$	$3 k_8$	$3 k_6$	$3 k_7$	$3 k_8$		D_2	S_2

Nach Auflösung dieser Gleichungen erhält man nach (7) die Stabendmomente, z. B.

$$\begin{aligned}
 M_{1,4} &= k_1 (\varphi_4 + 3 \psi_1) + \mathfrak{M}_{1,4}, & M_{4,1} &= k_1 (2 \varphi_4 + 3 \psi_1) + \mathfrak{M}_{4,1}, \\
 M_{2,5} &= k_2 (\varphi_5 + 3 \psi_1) + \mathfrak{M}_{2,5}, & M_{4,5} &= k_4 (2 \varphi_4 + \varphi_5) + \mathfrak{M}_{4,5}, \\
 M_{3,6} &= k_3 (\varphi_6 + 3 \psi_1) + \mathfrak{M}_{3,6}, & M_{4,7} &= k_6 (2 \varphi_4 + \varphi_7 + 3 \psi_2) + \mathfrak{M}_{4,7} \\
 & & & \text{usw.}
 \end{aligned}$$

c) Tabellarische Aufstellung der Gleichungen für symmetrische Tragwerke.

Bei symmetrisch ausgebildeten und symmetrisch belasteten Tragwerken ergeben sich beträchtliche Vereinfachungen in der rechnerischen Behandlung. Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Symmetrale des Tragwerkes enthält Knotenpunkte.

Bei dem in Abb. 85 dargestellten, symmetrisch belasteten Rahmen treten als Unbekannte nur die Knotendrehwinkel φ_3, φ_5 und φ_7 auf, da infolge der festen Einspannung

Gleichungstabelle 4.

	φ_3	φ_5	φ_7	B
φ_3	d_3	k_3		s_3
φ_5	k_3	d_5	k_5	s_5
φ_7		k_5	d_7	s_7

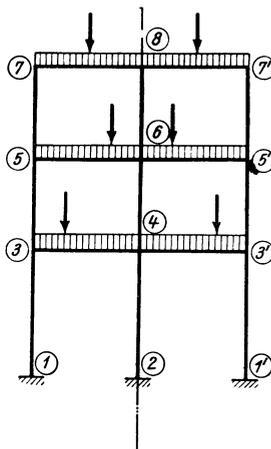


Abb. 85. Tragwerk mit „Knotensymmetrale“.

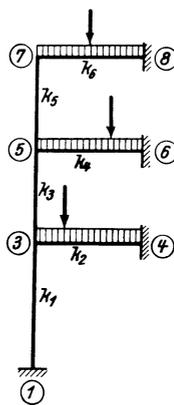


Abb. 86. Beiwertskeizze.

der Säulenfüße $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1' = 0$, ferner wegen der symmetrischen Verformung auch $\varphi_4 = \varphi_6 = \varphi_8 = 0$ und ebenso $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ sind. Aus Symmetriegründen muß weiter $\varphi_3' = -\varphi_3, \varphi_5' = -\varphi_5$ und $\varphi_7' = -\varphi_7$ sein. Der Rahmen ist somit für symmetrische Belastung genau so zu berechnen wie der in Abb. 86 samt den Stabfestwerten k dargestellte Rahmen, der in den Punkten 4, 6 und 8 fest eingespannt ist. Es sind also hier nur drei Knotengleichungen nach (18) anzuschreiben (siehe Gleichungstabelle 4).

2. Die Symmetrale des Tragwerkes geht durch die Feldmitte.

Einen solchen Fall zeigt Abb. 87, in welcher auch die Stabfestwerte k eingetragen sind. Auch hier treten bei symmetrischer Belastung keine Stabdrehwinkel auf. Als Unbekannte sind nur die Knotendrehwinkel $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ zu bestimmen. Wegen der angenommenen festen Einspannung der Säulenfüße ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_2' = \varphi_1' = 0$.

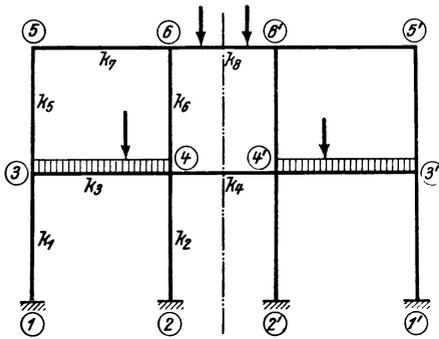


Abb. 87. Tragwerk mit „Feldsymmetrale“.

Ferner ergibt sich wegen der symmetrischen Verformung $\varphi_4' = -\varphi_4$ und $\varphi_6' = -\varphi_6$. Es würde also z. B. die Knotengleichung für den Punkt 4 nach (18) lauten:

$$d_4 \varphi_4 + k_3 \varphi_3 + k_4 \varphi_4' + k_6 \varphi_6 + s_4 = 0.$$

Da nun $\varphi_4' = -\varphi_4$, so kann die vorstehende Gleichung auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(d_4 - k_4) \varphi_4 + k_3 \varphi_3 + k_6 \varphi_6 + s_4 = 0.$$

Es wird also das Diagonalglied d für jeden der Symmetrale zunächst gelegenen Knotenpunkt um den Stabfestwert k jenes Stabes vermindert, der zum symmetrisch gelegenen

Knotenpunkt führt. Es ist daher zweckmäßig, für diesen verkleinerten Wert des Diagonalgliedes die Bezeichnung d' einzuführen. Also z. B. $d_4' = d_4 - k_4$ oder allgemein für einen Stab zwischen zwei symmetrischen Knotenpunkten $n-n'$ mit der Steifigkeitszahl $k_{n,n'}$

$$d_n' = d_n - k_{n,n'}. \quad (50)$$

Damit kann wieder nach (18) die Aufstellung der Gleichungstabelle 5 vorgenommen werden. Dabei bedeutet also nach (50) $d_4' = d_4 - k_4$ und $d_6' = d_6 - k_8$.

Bei symmetrischen Tragwerken ist somit immer darauf zu achten, ob die Symmetrieachse durch Knotenpunkte oder durch die Feldmitte verläuft (vgl. Zahlenbeispiel 4).

Gleichungstabelle 5.

	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	B
φ_3	d_3	k_3	k_5		s_3
φ_4	k_3	d_4'		k_6	s_4
φ_5	k_5		d_5	k_7	s_5
φ_6		k_6	k_7	d_6'	s_6

4. Der beliebig belastete, nur waagrecht verschiebliche Stockwerkrahmen mit lotrechten, ungleich langen Ständern.

Solche Tragwerke kommen bei Tribünenbauten, bei Stiegenhäusern, Dachbauten usw. vor. Einen Vertreter dieser Art zeigt ganz allgemein Abb. 88. Ein Teil dieses Rahmengebldes ist in Abb. 89 mit der zu erwartenden Verformung vergrößert dargestellt. Daraus ist ersichtlich, daß die oberen Säulenenden ein und desselben Stockwerkes stets um das gleiche Stück Δ gegenüber den unteren Säulenenden verschoben werden. Die Stabsehnen der Riegel verschieben sich bei der Verformung nur parallel zur ursprünglichen Lage. Es sind also auch hier die Stabdrehwinkel der Riegel gleich Null.

Durch die Verschiebungsgröße Δ der Säulen eines Stockwerkes sind die Stabdrehwinkel sämtlicher Säulen dieses Stockwerkes bestimmt. Mit den Bezeichnungen der Abb. 89 ist daher z. B. im untersten Geschoß:

$$\psi_1 = \frac{\Delta_1}{l_1}; \quad \psi_2 = \frac{\Delta_1}{l_2}; \quad \psi_3 = \frac{\Delta_1}{l_3}; \quad \psi_n = \frac{\Delta_1}{l_n}. \quad (51)$$

Es erscheint somit hier zweckmäßiger, an Stelle der ungleichen Stabdrehwinkel ψ die Verschiebung Δ als Unbekannte zu wählen. Damit wird erreicht, daß außer

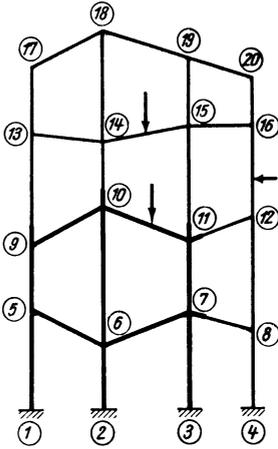


Abb. 88. Stockwerkrahmen mit ungleich hohen Stielen.

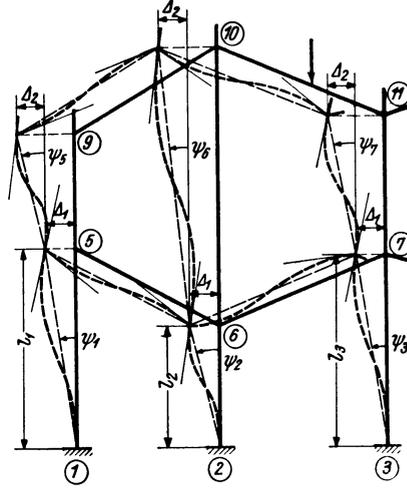


Abb. 89. Tragwerkstell aus Abb. 88 mit Verformung.

den Knotendrehwinkel φ nur noch so viele Δ -Werte zu bestimmen sind, als Stockwerke vorhanden sind. Die Aufstellung der Rahmgleichungen erfolgt ähnlich wie früher.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Durch Einführen der Beziehungen (51) in die Knotengleichung (40) erhält man wieder in vereinfachter Schreibweise

$$\boxed{d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_\mu \Delta_\mu + \bar{k}_{\mu+1} \Delta_{\mu+1} + s_n = 0,} \quad (52)$$

wobei $\bar{k}_\mu = \frac{3k_\mu}{l_\mu}$ und $\bar{k}_{\mu+1} = \frac{3k_{\mu+1}}{l_{\mu+1}}$, (53)

ferner Δ_μ und $\Delta_{\mu+1}$ die den übereinanderliegenden Stockwerken μ bzw. $(\mu + 1)$ zugeordneten Verschiebungsgrößen bedeuten (Abb. 90).

Verschiebungsgleichungen. Die Auswertung der Bedingung $\sum H = 0$ für irgendein Stockwerk μ ergibt unter Beachtung, daß hier die Säulenlängen l verschieden sind, folgende Mustergleichung [vgl. auch (47)]:

$$\boxed{\sum_\mu \bar{k} \varphi_\mu + \sum_\mu \bar{k} \varphi_o + D_\mu \Delta_\mu + S_\mu = 0;} \quad (54)$$

hierin bedeuten:

$$\bar{k} = \frac{3k}{l}, \quad D_\mu = 2 \sum_\mu \frac{\bar{k}}{l}; \quad (55)$$

$$S_\mu = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u}{l}; \quad (56)$$

die \sum beziehen sich auf alle Säulen des betrachteten Stockwerkes μ . Die Bedeutung der Glieder P , q , \mathfrak{A} und \mathfrak{M}_o , \mathfrak{M}_u ist dieselbe wie in (49).

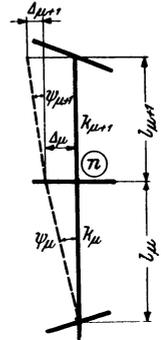


Abb. 90. Bezeichnungen.

Die Anwendung dieser Gleichung läßt sich am besten an einem Zahlenbeispiel zeigen. In Abb. 91 ist ein Zweigeschoßrahmen mit der vorhandenen waagrecht

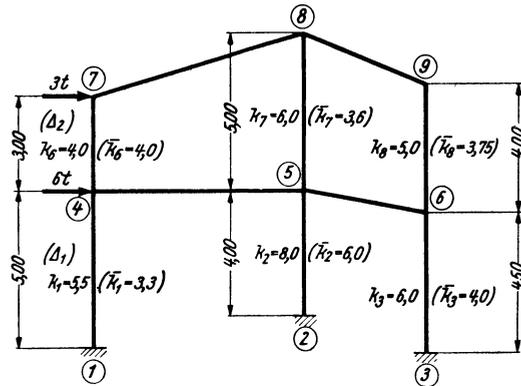


Abb. 91. Belastungs- und Beiwertskeizze.

Belastung und den erforderlichen k -Werten dargestellt. Die Säulen sind bei 1, 2, 3 fest eingespannt. Es wären die Verschiebungsgleichungen für beide Stockwerke anzuschreiben. Nach (53) ist

$$\bar{k}_1 = \frac{3 \cdot 5,5}{5,0} = 3,3; \quad \bar{k}_2 = \frac{3 \cdot 8,0}{4,0} = 6,0; \quad \bar{k}_3 = \frac{3 \cdot 6,0}{4,5} = 4,0;$$

$$\bar{k}_6 = \frac{3 \cdot 4,0}{3,0} = 4,0; \quad \bar{k}_7 = \frac{3 \cdot 6,0}{5,0} = 3,6; \quad \bar{k}_8 = \frac{3 \cdot 5,0}{4,0} = 3,75.$$

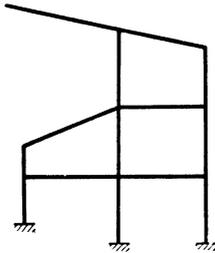


Abb. 92.

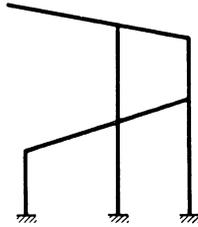


Abb. 93.

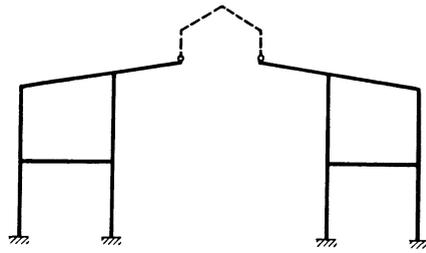


Abb. 94.

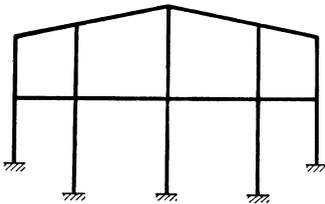


Abb. 95.

Abb. 92 bis 95. Tragwerke mit ungleich hohen Stielen.

Diese \bar{k} -Werte sind ebenfalls in Abb. 91, und zwar als Klammerwerte eingetragen. Nach (55) wird weiter

$$D_1 = 2 \sum_{\mu} \frac{\bar{k}}{l} = 2 \left(\frac{3,3}{5,0} + \frac{6,0}{4,0} + \frac{4,0}{4,5} \right) = 6,10,$$

$$D_2 = 2 \left(\frac{4,0}{3,0} + \frac{3,6}{5,0} + \frac{3,75}{4,0} \right) = 5,98$$

und schließlich nach (56)

$$S_1 = 3,0 + 6,0 = 9,0 \text{ t,}$$

$$S_2 = \quad \quad \quad 3,0 \text{ t.}$$

Somit lauten nach (54) die Verschiebungsgleichungen:

für das erste Stockwerk

$$3,3 \varphi_4 + 6,0 \varphi_5 + 4,0 \varphi_6 + 6,10 \Delta_1 + 9,0 = 0$$

und für das zweite Stockwerk

$$4,0 \varphi_4 + 3,6 \varphi_5 + 3,75 \varphi_6 + 4,0 \varphi_7 + 3,6 \varphi_8 + 3,75 \varphi_9 + 5,98 \Delta_2 + 3,0 = 0.$$

Mit Hilfe der allgemeinen Gl. (52) und (54) können u. a. auch Tragwerksformen berechnet werden, wie sie die Abb. 29, 32, 33, 34, 58, 59, 62, 64, 69, 70, 71, 92, 93, 94 und 95 zeigen.

5. Das BU.-Verfahren bei symmetrischen Tragwerken.

Sind symmetrisch ausgebildete Tragwerke *unsymmetrisch* belastet, so ist die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten genau so groß, als ob auch das Tragwerk *unsymmetrisch gestaltet* wäre. Durch das bekannte Verfahren der „Belastungs-umordnung“, kurz *BU.-Verfahren* genannt, können auch in einem solchen Fall die Vorteile der Symmetrie ausgenutzt werden.

Diese Art der Behandlung soll an einem einfachen Beispiel kurz erläutert werden. Abb. 96 zeigt ein symmetrisches Tragwerk mit der unsymmetrisch einwirkenden Belastung P . Dieser gegebene Belastungsfall kann nun durch zwei andere ersetzt

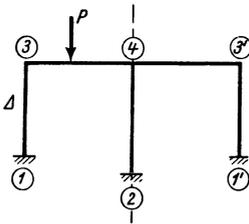


Abb. 96. Unsymm. Belastung P .
Unbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_3', \Delta$.

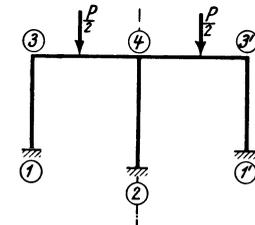


Abb. 96a. Symm. Belastung $\frac{P}{2}$.
Unbekannte: $\bar{\varphi}_3$.

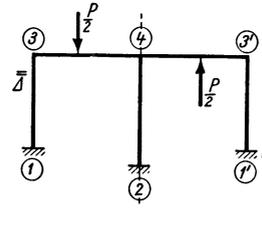


Abb. 96b. Antimetr. Belastung $\frac{P}{2}$.
Unbekannte: $\bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_4, \bar{\Delta}$.

werden, die in den Abb. 96a und 96b dargestellt sind. Der Belastungsfall a besteht aus den *symmetrisch* einwirkenden Lasten $\frac{P}{2}$, der Belastungsfall b zeigt die Kräfte $\frac{P}{2}$ in *antimetrischer* Anordnung. Da die Überlagerung dieser beiden Belastungsfälle wieder die ursprüngliche Belastung ergibt, so muß auch die Überlagerung der aus den Fällen a und b erhaltenen *Rechnungsergebnisse* die gesuchten Werte ergeben.

Der mit diesem Verfahren verbundene Vorteil ist klar. Es sind an Stelle *einer umfangreichen* Gleichungsgruppe *zwei* voneinander unabhängige, *kleinere* Gleichungsgruppen aufzulösen und die Ergebnisse zu summieren. So wären z. B. bei der Behandlung der gegebenen unsymmetrischen Belastung nach Abb. 96 *vier* Unbekannte zu ermitteln, nämlich die Knotendrehwinkel $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_3'$ und die Verschiebungsgröße Δ der Säulen. Nach dem BU.-Verfahren ist für den Belastungsfall a nur *eine* Unbekannte zu bestimmen, nämlich der Knotendrehwinkel $\bar{\varphi}_3$, denn $\bar{\Delta} = 0, \bar{\varphi}_4 = 0$ und $\bar{\varphi}_3' = -\bar{\varphi}_3$. Für den Belastungsfall b sind *drei* Unbekannte zu ermitteln, und zwar die Knotendrehwinkel $\bar{\varphi}_3 = \bar{\varphi}_3'$ und $\bar{\varphi}_4$ sowie die Verschiebungsgröße $\bar{\Delta}$ der Säulen. Durch die Summierung der entsprechenden Formänderungswerte aus den beiden *Ersatzbelastungsfällen* erhält man dann bereits die gesuchten Formänderungswerte für den *gegebenen* Belastungsfall. Es wird hier also z. B.

$$\varphi_3 = \bar{\varphi}_3 + \bar{\varphi}_3; \quad \varphi_3' = -\bar{\varphi}_3 + \bar{\varphi}_3; \quad \varphi_4 = \bar{\varphi}_4; \quad \Delta = \bar{\Delta}.$$

Aus den so erhaltenen Werten können dann die Stabanschlußmomente in der gewohnten Weise ermittelt werden.

Ebensogut kann man zunächst die Momente für beide Belastungsfälle getrennt ermitteln und sie dann summieren.

Ähnlich ist natürlich auch bei vorhandenen Streckenlasten vorzugehen (siehe Abb. 97 und 97 a, b).

Bei der Durchführung der Rechnung nach diesem Verfahren ist darauf zu achten, daß sich die beiden Gleichungssysteme für den *symmetrischen* und *antimetrischen* Belastungsfall auch in einzelnen *s*-Gliedern und *d*-Gliedern unterscheiden. Über *symmetrische* Belastungsfälle wurde im vorhergehenden Kapitel ausführlich ge-

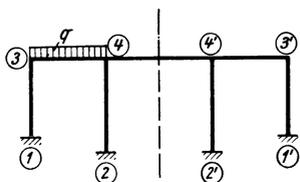


Abb. 97. Unsymm. Belastung q .
Unbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_4', \varphi_3', \Delta$.

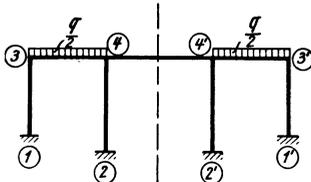


Abb. 97a. Symmetr. Belastung $\frac{q}{2}$.
Unbekannte: φ_3, φ_4 .

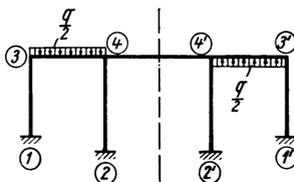


Abb. 97b. Antimetr. Belastung $\frac{q}{2}$.
Unbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \Delta$.

sprochen. Über die Behandlung *antimetrischer* Belastungsfälle ist hier noch einiges zu ergänzen.

Antimetrische Belastungsfälle. Es sind wieder *zwei* Möglichkeiten in Betracht zu ziehen, die anschließend gesondert erörtert werden sollen.

1. Die Symmetrale des Tragwerkes enthält Knotenpunkte.

Es empfiehlt sich, in solchen Fällen bei der Aufstellung der Gleichungen nur eine *Hälfte* des Tragwerkes mit der entsprechenden Belastung in Betracht zu ziehen.

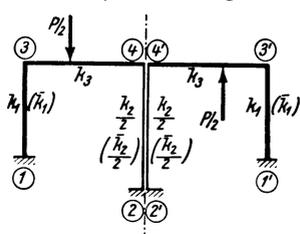


Abb. 98. Beiwertschizze.

Dabei ist aber zu beachten, daß dann bei den in der Symmetrale liegenden Säulen nur der *halbe* Wert der zugeordneten Steifigkeitszahl k in Rechnung zu setzen ist. Auf diese Weise ergibt sich wiederum sofort eine vollständig *symmetrische* Gleichungstabelle. So kann z. B. der in Abb. 96b ersichtliche Fall bei antimetrischer Belastung auch so aufgefaßt werden, wie in Abb. 98 angedeutet ist. Es kann dann die eine Hälfte mit der zugehörigen Belastung wie ein *unsymmetrisches* Tragwerk behandelt werden und es ergeben sich in der vorliegenden

Aufgabe als Unbekannte die Knotendrehwinkel φ_3, φ_4 und die Verschiebungsgröße Δ . Somit kann unter Benutzung der Knotengleichung (52) und der Verschiebungsgleichung (54) die Aufstellung der Gleichungstabelle 6 vorgenommen werden.

Die darin enthaltenen *d*-Glieder sind:

$$d_3 = 2(k_1 + k_3) \text{ bzw. } d_4 = 2(k_3 + 0,5 k_2);$$

das *D*-Glieder für die Verschiebungsgleichung ist nach (55)

$$D = 2 \left(\frac{\bar{k}_1}{l_1} + \frac{0,5 \bar{k}_2}{l_2} \right).$$

(Siehe auch Zahlenbeispiel 5.)

Gleichungstabelle 6.

	φ_3	φ_4	Δ	<i>B</i>
φ_3	d_3	k_3	\bar{k}_1	s_3
φ_4	k_3	d_4	$0,5 \bar{k}_2$	s_4
Δ	\bar{k}_1	$0,5 \bar{k}_2$	<i>D</i>	<i>S</i>

2. Die Symmetrale des Tragwerkes geht durch die Feldmitte.

Hier ist bei antimetrischer Belastung nur auf die Bildung der *d*-Glieder jener Knoten zu achten, die der Symmetrale benachbart sind. Im übrigen braucht wieder nur eine Hälfte des Tragwerkes in Betracht gezogen zu werden. Es ist z. B.

nach (39) unter Voraussetzung einer *antimetrischen* Belastung die Knotengleichung für den Knoten 5 des Rahmentragwerkes der Abb. 99:

$$d_5 \varphi_5 + k_5 \varphi_4 + k_6 \varphi_5' + \bar{k}_5 \Delta_2 + s_5 = 0.$$

Da $\varphi_5 = \varphi_5'$ ist, so kann die Gleichung auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(d_5 + k_6) \cdot \varphi_5 + k_5 \varphi_4 + \bar{k}_5 \Delta_2 + s_5 = 0.$$

Es zeigt sich, daß hier bei *antimetrischer* Belastung das d -Glied um den Betrag der Steifigkeitszahl k des Verbindungsstabes zum symmetrisch gelegenen Knoten *vergrößert* wird, während bei den *symmetrisch* belasteten Tragwerken das Umgekehrte der Fall war. Es empfiehlt sich auch hier, für das vergrößerte d -Glied eine besondere Bezeichnung einzuführen, so z. B.

$$d_5 + k_6 = \bar{d}_5$$

oder allgemein für einen Stab zwischen zwei symmetrisch gelegenen Knotenpunkten $n-n'$ mit der Steifigkeitszahl $k_{n,n'}$

$$\bar{d}_n = d_n + k_{n,n'}. \tag{57}$$

Unter Beachtung dieser Bezeichnung kann die Gleichungstabelle 7 aufgestellt werden. Hierzu können wieder die Knotengleichung (52) und die Verschiebungsgleichung (54) Verwendung finden.

Es gibt natürlich auch Tragwerke, bei welchen die Symmetrale abwechselnd durch Knoten und

Gleichungstabelle 7.

	φ_3	φ_4	φ_5	Δ_1	Δ_2	B
φ_3	d_3	k_3		\bar{k}_1		s_3
φ_4	k_3	\bar{d}_4	k_5	\bar{k}_2	\bar{k}_5	s_4
φ_5		k_5	\bar{d}_5		\bar{k}_5	s_5
Δ_1	\bar{k}_1	\bar{k}_2		D_1		S_1
Δ_2		\bar{k}_5	\bar{k}_5		D_2	S_2

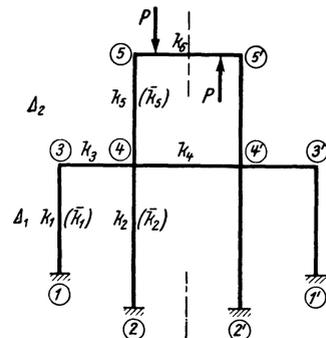


Abb. 99. Beiwertskizze.

durch Feldmitten hindurchgeht (Abb. 100). Auch dann können bei der Aufstellung der Gleichungen die vorstehenden Erläuterungen sinngemäße Anwendung finden.

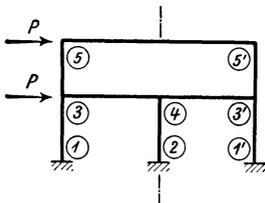


Abb. 100. Unsymmetrische Belastung P .

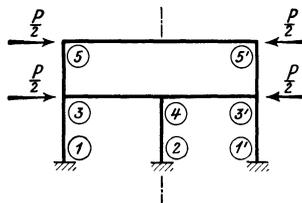


Abb. 100 a. Symmetrische Belastung $\frac{P}{2}$.

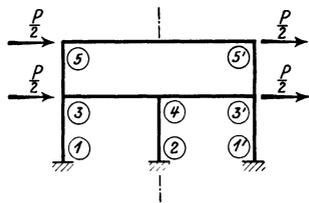


Abb. 100 b. Antimetrische Belastung $\frac{P}{2}$.

Zu beachten ist, daß der Belastungsfall nach Abb. 100 für die Berechnung der Momente und Querkräfte ohne weiteres als *antimetrisch* (Abb. 100 b) angesehen werden kann. Sein *symmetrischer* Anteil (Abb. 100 a) ergibt nämlich nur Längskräfte in den Riegeln und kann daher bei der Ermittlung des Momenten- und Querkraftverlaufes vollständig außeracht gelassen werden.

6. Verschiebliche Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen.

A. Allgemeines.

In den Abb. 101 bis 104 sind einige verschiebliche Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen dargestellt und gleichzeitig auch die nach dem hier behandelten Verfahren jeweils zu bestimmenden Unbekannten vermerkt.

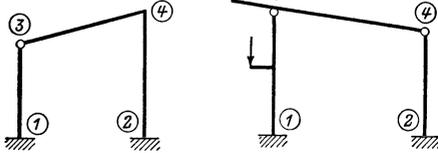


Abb. 101. Unbekannte: φ_4, Δ .

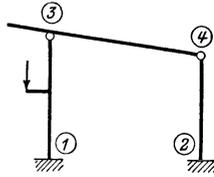


Abb. 102. Unbekannte: φ_4 .

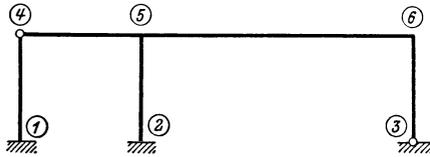


Abb. 103. Unbekannte: $\varphi_5, \varphi_6, \psi$.

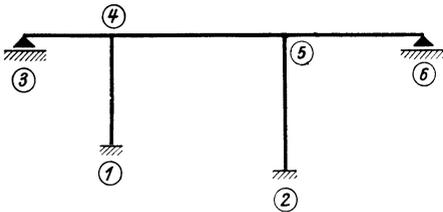


Abb. 104. Unbekannte: $\varphi_4, \varphi_5, \Delta$.

Abb. 101 bis 104. Verschiebliche Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen.

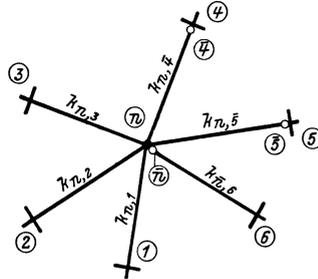


Abb. 105. Tragwerksteil mit gelenkigen Stabanschlüssen.

ist ein solcher Knoten (n) mit den benachbarten Knotenpunkten als Teil eines beliebig gestalteten Rahmentragwerkes dargestellt. Wollte man auch die Gelenkdrehwinkel $\varphi_{\bar{1}}$ und $\varphi_{\bar{5}}$ in der Rechnung mitführen, so könnte die Knotengleichung nach (37) auch hier Anwendung finden:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \sum_i 3 k_{n,i} \psi_{n,i} + s_n = 0.$$

Auf diese Weise würde man aber auch für jeden zu bestimmenden Gelenkdrehwinkel eine Knotengleichung aufzustellen haben. Um dies zu vermeiden ist es notwendig, alle dem Knoten (n) gegenüberliegenden Gelenkdrehwinkel φ_g durch φ_n und den zugehörigen Stabdrehwinkel $\psi_{n,g}$ auszudrücken. Im vorliegenden Falle ist also nach Tafel I, Seite 4, Fall 2a beispielsweise der Gelenkdrehwinkel

$$\varphi_{\bar{5}} = -\frac{1}{2} \left(\varphi_n + 3 \psi_{n,\bar{5}} + \frac{M_{5,n}}{k_{n,\bar{5}}} \right).$$

Führt man diese Elimination in der obigen Gleichung allgemein durch, so erhält man die neue *Knotengleichung* in folgender Form:

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r k_{n,r} \varphi_r + \sum_r 3 k_{n,r} \psi_{n,r} + \sum_g 1,5 k_{n,g} \psi_{n,g} + s_n^0 = 0. \tag{58}$$

Hierin haben d_n^0 , s_n^0 und $\sum_r k_{n,r} \varphi_r$ die gleiche Bedeutung wie bei (29), und zwar:

$$d_n^0 = d_n - 0,5 \sum_g k_{n,g}, \quad (59)$$

$$s_n^0 = s_n - 0,5 \sum_g \mathfrak{M}_{g,n}. \quad (60)$$

Die Glieder $\sum_r k_{n,r} \varphi_r$ und $\sum_r 3 k_{n,r} \psi_{n,r}$ beziehen sich auf jene Stäbe, die beiderseits steif angeschlossen sind. Die Glieder $\sum_g 1,5 k_{n,g} \psi_{n,g}$ gelten für jene Stäbe, die im Knoten (n) elastisch eingespannt, auf der Gegenseite aber gelenkig gelagert sind.

Wählt man an Stelle der Stabdrehwinkel ψ die Verschiebungsgrößen Δ als Unbekannte, so lautet die *Knotengleichung*

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r k_{n,r} \varphi_r + \sum_r \bar{k}_{n,r} \Delta_{n,r} + \sum_g 0,5 \bar{k}_{n,g} \Delta_{n,g} + s_n^0 = 0, \quad (61)$$

wobei $\bar{k} = \frac{3k}{l}$ bedeutet.

Verschiebungsgleichungen. In der gleichen Weise, wie dies in den vorangegangenen Kapiteln für Tragwerke ohne Gelenke gezeigt worden ist, lassen sich auch hier für die verschiedenen Tragwerksarten gebrauchsfertige Mustergleichungen aufstellen. Das wird im folgenden für einige wichtige Fälle durchgeführt.

B. Mehrfeldrahmen.

Es erscheint zweckmäßig, hier die verschiedenen Sonderformen des einstöckigen Mehrfeldrahmens getrennt zu betrachten und die Knotengleichungen sowie die zugehörigen Verschiebungsgleichungen für diese Rahmentypen anzuschreiben.

Die Verschiebungsgleichungen erhält man jeweils in der Weise, daß in der allgemeinen Form (54)

$$\sum \bar{k} \varphi_u + \sum \bar{k} \varphi_o + D \Delta + S = 0 \quad (62)$$

die Gelenkdrehwinkel als Funktion der übrigen Formänderungsgrößen des betreffenden Stabes ausgedrückt werden.

Nach Tafel I, Seite 4, Fall 2a und 4a ergeben sich für die in Abb. 106 a, b, c dargestellten drei Stabarten, die beim Mehrfeldrahmen als Stiele auftreten können, folgende Ausdrücke für die *Gelenkdrehwinkel*:

$$\text{Fall a) } \varphi_u = -\frac{1}{2} \left(\varphi_o + \frac{3 \Delta}{l} + \frac{\mathfrak{M}_u}{k} \right) \quad (63)$$

$$\text{Fall b) } \varphi_o = -\frac{1}{2} \left(\frac{3 \Delta}{l} + \frac{\mathfrak{M}_o}{k} \right) \quad (64)$$

$$\text{Fall c) } \varphi_o = -\frac{1}{2} \left(\varphi_u + \frac{3 \Delta}{l} + \frac{\mathfrak{M}_o}{k} \right). \quad (65)$$

a) Der Mehrfeldrahmen mit durchwegs fest eingespannten Säulenfüßen (Abb. 107).

Knotengleichungen. Diese lauten nach (52) unter Beachtung, daß hier immer nur ein Δ -Glied auftreten kann,

$$d_n \varphi_n + \sum_r k_{n,r} \varphi_r + \bar{k}_s \Delta + s_n = 0. \quad (66)$$

Hierin beziehen sich die Glieder $k_{n,r} \varphi_r$ nur auf die im Knoten (n) angeschlossenen Riegel und $\bar{k}_s \Delta$ auf die einmündende Säule.

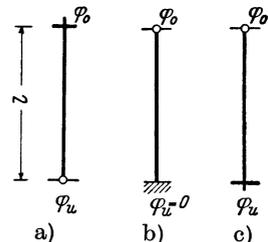


Abb. 106 a, b und c. Stäbe mit verschiedenen Endanschlüssen.

Verschiebungsgleichungen. Die Verschiebungsgleichung lautet nach (62) unter Beachtung, daß hier durchwegs $\varphi_u = 0$:

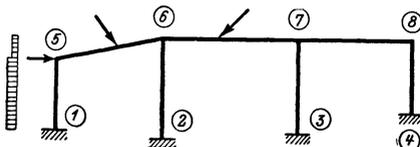


Abb. 107. Mehrfeldrahmen mit eingespannten Säulenfüßen.

$$\sum \bar{k} \varphi_o + D \Delta + S = 0, \quad (67)$$

wobei nach (55)

$$D = 2 \sum \frac{\bar{k}}{l} \quad (68)$$

und im Sinne von (56)

$$S = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u}{l}, \quad (69)$$

worin P und q die waagrechten Komponenten der an den Riegeln angreifenden äußeren Kräfte bedeuten und die übrigen Größen aus (56) bzw. (49) hervorgehen.

b) Der Mehrfeldrahmen mit durchwegs gelenkig angeschlossenen Säulenfüßen (Abb. 108).

Knotengleichungen. Diese ergeben sich aus (61) und lauten:

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r k_{n,r} \varphi_r + 0,5 \bar{k}_s \Delta + s_n^0 = 0. \quad (70)$$

Hierin ist nach (59)

$$d_n^0 = d_n - 0,5 k_s, \quad (71)$$

nach (60)

$$s_n^0 = s_n - 0,5 \mathfrak{M}_{s,u} \quad (72)$$

und wie in (61) der Säulenfestwert

$$\bar{k}_s = \frac{3 k_s}{l}. \quad (73)$$

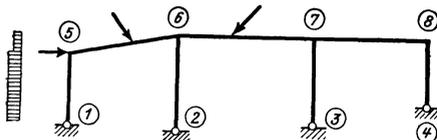


Abb. 108. Mehrfeldrahmen mit Fußgelenken.

Verschiebungsgleichungen. Die Verschiebungsgleichung erhält man, wenn (63) in (62) eingeführt wird, in folgender Form:

$$\sum 0,5 \bar{k} \varphi_o + D^0 \Delta + S^0 = 0, \quad (74)$$

wobei

$$D^0 = 0,5 \sum \frac{\bar{k}}{l} \quad (75)$$

$$\text{und } S^0 = S - \sum \frac{1,5 \mathfrak{M}_u}{l} = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{\mathfrak{M}_o - 0,5 \mathfrak{M}_u}{l}. \quad (76)$$

(Vgl. auch Zahlenbeispiel 10.)

c) Der Mehrfeldrahmen mit durchwegs gelenkig ausgebildeten Säulenköpfen (Abb. 109).

Knotengleichungen. Diese enthalten hier kein Δ -Glied, sind sonach unabhängig von der Verschiebungsgleichung und lauten:

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r k_{n,r} \varphi_r + s_n^0 = 0. \quad (77)$$

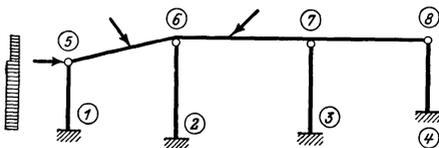


Abb. 109. Mehrfeldrahmen mit Kopfgelenken

Die Glieder $k_{n,r} \varphi_r$ beziehen sich nur auf die Riegel.

Verschiebungsgleichungen. Die Verschiebungsgleichung kann hier wegen

$\varphi_u = 0$ nach Einführung von (64) in (62) wie folgt geschrieben werden:

$$D^0 \Delta + S^0 = 0, \tag{78}$$

wobei

$$D^0 = 0,5 \sum \frac{\bar{k}}{l} \tag{79}$$

und
$$S^0 = S - \sum \frac{1,5 \mathfrak{M}_o}{l} = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{\mathfrak{M}_u - 0,5 \mathfrak{M}_o}{l}. \tag{80}$$

d) Der Mehrfeldrahmen mit Fuß- oder Kopfgelenken in beliebiger Anordnung (Abb. 110).

Knotengleichungen. Für diese gilt die Form (66), (70) oder (77), je nachdem, ob die in den betrachteten Knoten einmündende Säule kein Gelenk, bzw. ein Gelenk oben, oder aber ein Gelenk unten aufweist. Ist sowohl oben als auch unten ein Gelenk vorhanden (Pendelsäule), so gilt die Form (77).

Verschiebungsgleichungen. Die Verschiebungsgleichung ergibt sich durch sinn-gemäße Einführung von (63) und (64) in (62) wie folgt:

$$\sum_e \bar{k} \varphi_o + \sum_g 0,5 \bar{k} \varphi_o + D^0 \Delta + S^0 = 0. \tag{81}$$

Hierin beziehen sich die Glieder $\sum_e \bar{k} \varphi_o$ auf die gelenklosen Säulen und $\sum_g 0,5 \bar{k} \varphi_o$ auf die unten gelenkig angeschlossenen Säulen. Weiter ist das Diagonalglied

$$D^0 = D - 1,5 \sum_g \frac{\bar{k}}{l}. \tag{82}$$

Setzt man nach (55) für $D = 2 \sum \frac{\bar{k}}{l}$, so erhält man nach Vereinfachung in zweckmäßiger Schreibweise:

$$D^0 = 2 \sum_e \frac{\bar{k}}{l} + 0,5 \sum_g \frac{\bar{k}}{l}. \tag{83}$$

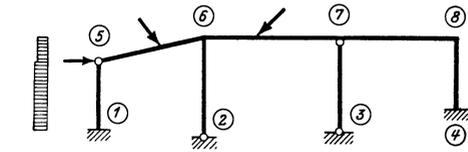


Abb. 110. Mehrfeldrahmen mit Fuß- oder Kopfgelenken.

Hierin beziehen sich \sum_e auf die gelenklosen Säulen, hingegen \sum_g auf die oben oder unten gelenkig angeschlossenen Säulen. Pendelsäulen liefern keine Beiträge für diese Glieder.

Das Belastungsglied S^0 für die Verschiebungsgleichung ergibt sich hier mit

$$S^0 = S - 1,5 \sum \frac{\mathfrak{M}_o^0 + \mathfrak{M}_u^0}{l}; \tag{84}$$

\mathfrak{M}_o^0 und \mathfrak{M}_u^0 bedeuten die Stabbelastungsglieder der oben oder unten gelenkig angeschlossenen Säulen, und zwar auf der Gelenkseite, und

$$S = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum_a \frac{\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u}{l}, \tag{85}$$

wobei sich $\sum P$ und $\sum q$ auf die waagrechten Komponenten der an den Riegeln angreifenden äußeren Kräfte beziehen, $\sum \mathfrak{A}$ über sämtliche Säulen einschließlich der Pendelsäulen zu nehmen ist, hingegen \sum_a sich über alle Säulen außer den Pendelsäulen erstreckt.

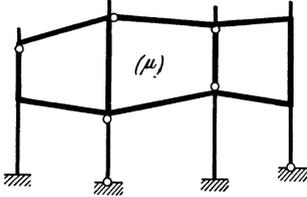


Abb. 111. Teil eines Stockwerkrahmens mit Gelenken.

C. Stockwerkrahmen mit gelenkigen Stabanschlüssen.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Zur Aufstellung der Knotengleichungen kann die allgemeine Form (61) benutzt werden. Die darin enthaltenen Δ -Glieder beziehen sich aber im vorliegenden Fall nur auf die im betrachteten Knoten steif angeschlossenen Säulen.

Verschiebungsgleichungen. Die Verschiebungsgleichung für irgendein Stockwerk (μ) eines Stockwerkrahmens (Abb. 111) ergibt sich durch Einführung von (63) und (65) in (62) wie folgt:

$$\sum_e \bar{k} \varphi_u + \sum_g 0,5 \bar{k} \varphi_u + \sum_e \bar{k} \varphi_o + \sum_g 0,5 \bar{k} \varphi_o + D_\mu^0 \Delta_\mu + S_\mu^0 = 0. \quad (86)$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder geht sinngemäß aus den Erläuterungen zu (81) bis (83) hervor. Das S^0 -Glieder ergibt sich in Anlehnung an (56) und (84) bzw. (85) mit

$$S^0 = S - 1,5 \sum \frac{\mathfrak{M}_o^0 + \mathfrak{M}_u^0}{l}, \quad (87)$$

wobei

$$S = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{Q} + \sum_a \frac{\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u}{l}. \quad (88)$$

Für $\sum P$ und $\sum q$ sind die oberhalb des betrachteten Stockwerkes waagrecht angreifenden äußeren Lasten zu setzen.

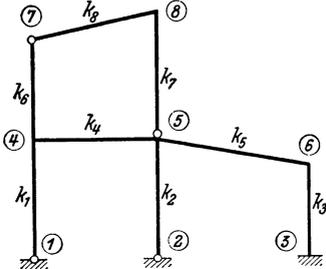


Abb. 112. Beiwertskeizze für einen Stockwerkrahmen mit Gelenken.

b) Anwendungsbeispiel.

Die Anwendung der allgemeinen Knotengleichung (61) und der Verschiebungsgleichung (86) soll für das in Abb. 112 ersichtliche Rahmentragwerk ausführlich gezeigt werden. Als Unbekannte sind unter Voraussetzung beliebiger Belastung die vier Knotendrehwinkel $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_8$ und die den beiden Stockwerken entsprechenden Verschiebungsgrößen Δ_1 und Δ_2 zu ermitteln.

Die *Knotengleichung* lautet nach (61)

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r k_{n,r} \varphi_r + \sum_r \bar{k}_{n,r} \Delta_{n,r} + \sum_g 0,5 \bar{k}_{n,g} \Delta_{n,g} + s_n^0 = 0.$$

Die vier *Diagonalglieder* ergeben sich hier nach (59) mit

$$d_4^0 = d_4 - 0,5 \sum_g k_{4,g} = 2(k_1 + k_4 + k_6) - 0,5(k_1 + k_6),$$

$$d_5^0 = d_5 - 0,5 \sum_g k_{5,g} = 2(k_2 + k_4 + k_5) - 0,5 k_2,$$

$$d_6^0 = d_6 = 2(k_3 + k_5),$$

$$d_8^0 = d_8 - 0,5 \sum_g k_{8,g} = 2(k_7 + k_8) - 0,5(k_7 + k_8).$$

Die zugehörigen *Knotenbelastungsglieder* sind nach (60)

$$\begin{aligned} s_4^0 &= s_4 - 0,5 \sum \mathfrak{M}_{g,4} = \mathfrak{M}_{4,1} + \mathfrak{M}_{4,5} + \mathfrak{M}_{4,7} - 0,5 (\mathfrak{M}_{1,4} + \mathfrak{M}_{7,4}), \\ s_5^0 &= s_5 - 0,5 \sum \mathfrak{M}_{g,5} = \mathfrak{M}_{5,2} + \mathfrak{M}_{5,4} + \mathfrak{M}_{5,6} - 0,5 \mathfrak{M}_{2,5}, \\ s_6^0 &= s_6 = \mathfrak{M}_{6,3} + \mathfrak{M}_{6,5}, \\ s_8^0 &= s_8 - 0,5 \sum \mathfrak{M}_{g,8} = \mathfrak{M}_{8,5} + \mathfrak{M}_{8,7} - 0,5 (\mathfrak{M}_{5,8} + \mathfrak{M}_{7,8}). \end{aligned}$$

Es treten sodann zwei Arten von Δ -Gliedern auf. Die $\sum_r \bar{k}_{n,r} \Delta_{n,r}$ beziehen sich hier auf die im betrachteten Knoten und auf der Gegenseite steif angeschlossenen Säulen, während die $\sum_g 0,5 \bar{k}_{n,g} \Delta_{n,g}$ für solche Säulen gelten, die im betrachteten Knoten steif, hingegen im Nachbarknoten gelenkig angeschlossen sind.

Die Δ -Glieder für die einzelnen Knoten ergeben sich also in folgender Form:

$$\begin{array}{llll} \text{für Knoten 4} & 0,5 \bar{k}_1 \Delta_1 & \text{und } 0,5 \bar{k}_6 \Delta_2, & \text{für Knoten 6} & \bar{k}_3 \Delta_1, \\ \text{,, ,, 5} & 0,5 \bar{k}_2 \Delta_1, & & \text{,, ,, 8} & 0,5 \bar{k}_7 \Delta_2. \end{array}$$

Beachtet man noch, daß die Glieder $\sum_r k_{n,r} \varphi_r$ sich nur auf solche Stäbe des betrachteten Knotens beziehen, die hier und auf der Gegenseite elastisch eingespannt sind, so erhält man nach (61) die *Knotengleichungen* an Hand der Beiwertschizze (Abb. 112):

$$\begin{aligned} d_4^0 \varphi_4 + k_4 \varphi_5 + 0,5 \bar{k}_1 \Delta_1 + 0,5 \bar{k}_6 \Delta_2 + s_4^0 &= 0, \\ d_5^0 \varphi_5 + k_4 \varphi_4 + k_5 \varphi_6 + 0,5 \bar{k}_2 \Delta_1 + s_5^0 &= 0, \\ d_6^0 \varphi_6 + k_5 \varphi_5 + \bar{k}_3 \Delta_1 + s_6 &= 0, \\ d_8^0 \varphi_8 + 0,5 \bar{k}_7 \Delta_2 + s_8^0 &= 0. \end{aligned}$$

Die *Verschiebungsgleichung* lautet nach (86)

$$\sum_e \bar{k} \varphi_u + \sum_g 0,5 \bar{k} \varphi_u + \sum_e \bar{k} \varphi_o + \sum_g 0,5 \bar{k} \varphi_o + D_\mu^0 \Delta_\mu + S_\mu^0 = 0.$$

Nach (83) erhält man die Diagonalglieder

$$\begin{array}{ll} \text{für das 1. Stockwerk: } D_1^0 = 2 \frac{\bar{k}_3}{l_3} + 0,5 \left(\frac{\bar{k}_1}{l_1} + \frac{\bar{k}_2}{l_2} \right), \\ \text{,, ,, 2. ,, : } D_2^0 = 0,5 \left(\frac{\bar{k}_6}{l_6} + \frac{\bar{k}_7}{l_7} \right). \end{array}$$

Die zugehörigen Belastungsglieder S_1^0 und S_2^0 ergeben sich nach (87):

$$S_1^0 = S_1 - 1,5 \left(\frac{\mathfrak{M}_{1,4}}{l_1} + \frac{\mathfrak{M}_{2,5}}{l_2} \right); \quad S_2^0 = S_2 - 1,5 \left(\frac{\mathfrak{M}_{7,4}}{l_6} + \frac{\mathfrak{M}_{5,8}}{l_7} \right).$$

Somit lauten die *Verschiebungsgleichungen* für die beiden Stockwerke:

$$\begin{aligned} \bar{k}_3 \varphi_6 + 0,5 \bar{k}_1 \varphi_4 + 0,5 \bar{k}_2 \varphi_5 + D_1^0 \Delta_1 + S_1^0 &= 0, \\ 0,5 \bar{k}_6 \varphi_4 + 0,5 \bar{k}_7 \varphi_8 + D_2^0 \Delta_2 + S_2^0 &= 0. \end{aligned}$$

Schreibt man sämtliche Gleichungen in Tabellenform an, so erhält man:

Gleichungstabelle 8.

	φ_4	φ_5	φ_6	φ_8	Δ_1	Δ_2	B
φ_4	d_4^0	k_4			$0,5 \bar{k}_1$	$0,5 \bar{k}_6$	s_4^0
φ_5	k_4	d_5^0	k_5		$0,5 \bar{k}_2$		s_5^0
φ_6		k_5	d_6		\bar{k}_3		s_6
φ_8				d_8^0		$0,5 \bar{k}_7$	s_8^0
Δ_1	$0,5 \bar{k}_1$	$0,5 \bar{k}_2$	\bar{k}_3		D_1^0		S_1^0
Δ_2	$0,5 \bar{k}_6$			$0,5 \bar{k}_7$		D_2^0	S_2^0

7. Rahmentragwerke mit nur lotrecht verschieblichen Knotenpunkten.

Derartige Tragwerke kommen im Hochbau ziemlich häufig vor. Es sind da vor allem die im Fachschrifttum unter der Bezeichnung „Vierendeelrahmen“ bekannten Pfostenrahmentragwerke (Abb. 113, 114) und die Dachrahmen mit zurückgesetzten

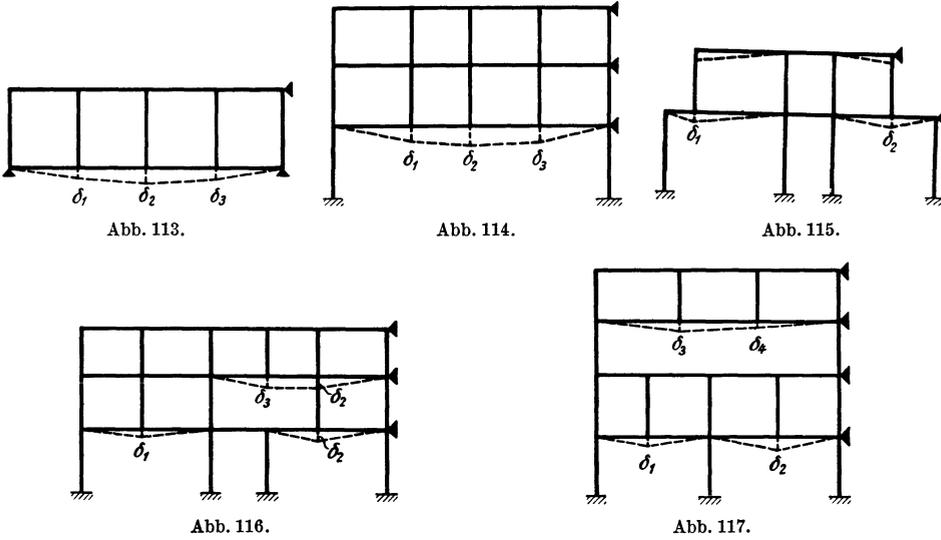


Abb. 113 bis 117. Rahmentragwerke mit nur lotrecht verschieblichen Knotenpunkten.

Außensäulen zu nennen (Abb. 115). Weiter gehören zu dieser Gruppe auch solche Rahmentragwerke, bei welchen einzelne Säulen nicht bis zum Fundament reichen (Abb. 116, 117). Bei allen diesen Rahmengebilden soll vorläufig vorausgesetzt werden, daß die waagrechte Verschieblichkeit ihrer Knoten verhindert sei, was in den Abbildungen durch seitliche Lager angedeutet ist.

Sind solche Tragwerke *symmetrisch* gebaut, so ergeben sich in der Berechnung verschiedene Vereinfachungen. Dieser Sonderfall soll zuerst behandelt werden.

A. Symmetrisch ausgebildete und symmetrisch belastete Vierendeel-Rahmentragwerke.

In Abb. 118 ist ein Vertreter dieser Tragwerksgattung mit dem zugehörigen Stabsehnenbild nach der Verformung infolge einer *symmetrisch* angeordneten Be-

lastung dargestellt. Es ist leicht festzustellen, daß die Knotenreihen (3—7—11), (4—8—12), (5—9—13) und die symmetrisch gelegenen Knoten (4'—8'—12'), (3'—7'—11') nur lotrecht verschieblich sind und daß wegen der Symmetrie der Verformung nur drei verschiedene Knotenverschiebungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ auftreten. Diese drei Verschiebungen bringen insgesamt drei verschiedene Stabdrehwinkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 hervor, die den Feldern 1, 2, 3 zugeordnet sind. Außerdem sind neun Knotendrehwinkel zu bestimmen, nämlich $\varphi_{2,3,4}, \varphi_{6,7,8}$ und $\varphi_{10,11,12}$. Die jeweils symmetrisch gelegenen Knoten erleiden gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Verdrehungen, z. B. $\varphi_2' = -\varphi_2; \varphi_3' = -\varphi_3; \varphi_4' = -\varphi_4$ usw. Ferner ist wegen der Symmetrie $\varphi_5 = \varphi_9 = \varphi_{13} = 0$ und bei Annahme einer vollkommenen Einspannung auch $\varphi_1 = \varphi_{1'} = 0$.

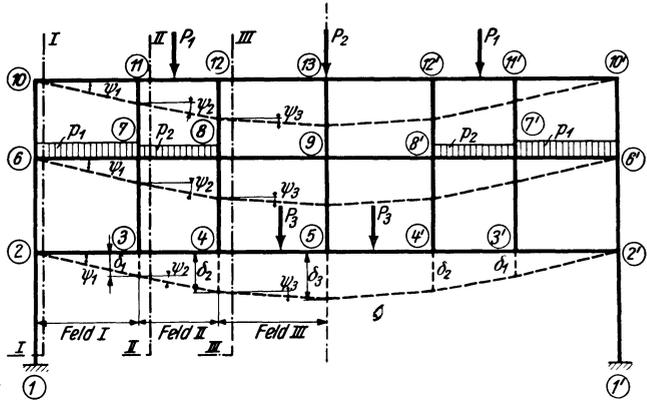


Abb. 118. Symmetrisches Vierendeel-Rahmentragwerk.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Es kann hier die für Stockwerkrahmen aufgestellte Form (40) Verwendung finden, wenn der Buchstabe μ , der sich auf die Stockwerke bezieht, durch den Buchstaben ν ersetzt wird, der nunmehr als Ordnungsziffer für die Rahmenfelder gelten soll. Sie lautet dann:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + 3 k_\nu \psi_\nu + 3 k_{\nu+1} \psi_{\nu+1} + s_n = 0. \tag{89}$$

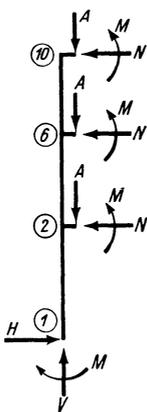


Abb. 118a.

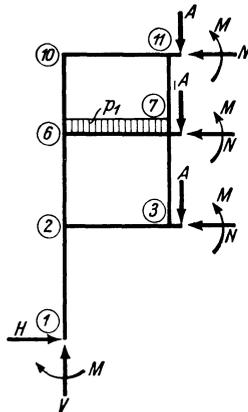


Abb. 118b.

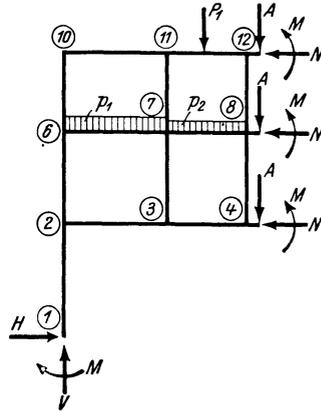


Abb. 118c.

Abb. 118 a, b und c. Abgetrennte Teile des Tragwerkes aus Abb. 118 mit Schnittkräften.

Darin bedeuten somit:

ψ_ν und $\psi_{\nu+1}$.. die Stabdrehwinkel der Riegel in dem Feld ν bzw. $\nu + 1$, also die Stabdrehwinkel im Feld links bzw. rechts von dem betrachteten Knoten n , k_ν und $k_{\nu+1}$.. die Steifigkeitszahlen der Riegel links bzw. rechts vom Knoten n .

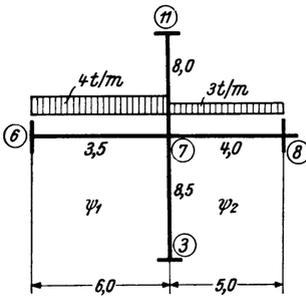


Abb. 119. Belastungs- und Beiwertschizze.

Die zahlenmäßige Verwendung dieser Gleichung soll nun für den Knoten (7) des Tragwerkes der Abb. 118 gezeigt werden, der zur besseren Übersicht mit den zugehörigen Stäben und den benachbarten Knoten in Abb. 119 als Beiwertschizze samt der vorhandenen Belastung gesondert dargestellt ist. Man kann nun sofort das Diagonalglied d_7 berechnen, und zwar ist nach (35)

$$d_7 = 2 \sum_i k_{7,i} = 2 (8,5 + 3,5 + 4,0 + 8,0) = 48,0.$$

Die zur Ermittlung des Knotenbelastungsgliedes s_7 erforderlichen Stabbelastungsglieder $\mathfrak{M}_{7,6}$ und $\mathfrak{M}_{7,8}$ erhält man nach Tafel 2:

$$\mathfrak{M}_{7,6} = + \frac{q l^2}{12} = \frac{4,0 \cdot 6,0^2}{12} = + 12,0 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{7,8} = - \frac{3,0 \cdot 5,0^2}{12} = - 6,25 \text{ tm};$$

daher nach (36a)

$$s_7 = \sum_i \mathfrak{M}_{7,i} = + 12,0 - 6,25 = + 5,75 \text{ tm}.$$

Damit kann bereits die Gleichung für den Knoten (7) an Hand der Beiwertschizze nach (89) angeschrieben werden. Sie lautet:

$$48 \varphi_7 + 8,5 \varphi_3 + 3,5 \varphi_6 + 4,0 \varphi_8 + 8,0 \varphi_{11} + 10,5 \varphi_1 + 12,0 \varphi_2 + 5,75 = 0.$$

Verschiebungsgleichungen. Man denke sich der Reihe nach in Abb. 118 die Schnitte I—I, II—II, III—III in den einzelnen Feldern links in unmittelbarer Nähe der Knoten durchgeführt und dort die Schnittkräfte M, N, Q angebracht. Für die auf diese Weise abgetrennten Tragwerksteile, die in den Abb. 118a, b, c mit den symbolisch angedeuteten Schnittkräften gesondert herausgezeichnet sind, muß nun die Gleichgewichtsgleichung $\sum V = 0$ erfüllt sein, d. h. es muß die Summe der lotrechten Komponenten aller auf den abgeschnittenen Tragwerksteil einwirkenden Kräfte Null ergeben. Die lotrechte Teilkraft V im Punkte (1) kann nun für den vorliegenden Sonderfall eines symmetrischen Tragwerkes mit symmetrischer Belastung immer schon von vornherein zahlenmäßig angegeben werden, und zwar ist sie gleich dem halben Betrag der lotrecht wirkenden Gesamtbelastung des Tragwerkes.

Die Bedingungsgleichung $\sum V = 0$ kann unter Bezugnahme auf die verschiedenartigen Kräftegruppen etwas ausführlicher folgendermaßen geschrieben werden:

$$V + \sum P' + \sum q' + \sum Q = 0. \quad (90)$$

Hierin bedeuten:

V den lotrechten Anteil der Stützkraft im Punkte (1) infolge der Gesamtbelastung,

$\sum P'$ die Summe aller links vom Schnitt einwirkenden Einzellasten,

$\sum q'$ die Summe aller links vom Schnitt einwirkenden Streckenlasten,

$\sum Q$ die Summe der im Schnitt übertragenen Querkräfte.

Es ist

$$V = \frac{1}{2} (\sum P + \sum q). \quad (91)$$

Die Werte für P' und q' sind jeweils unmittelbar aus der Belastungsschizze zu entnehmen. Im übrigen kann ähnlich wie bei der Weiterentwicklung der Gl. (41) verfahren werden. Es können auch an Stelle der Querkräfte Q an den Stabenden

die Auflagerdrücke A gesetzt werden, so daß unter Beachtung des Richtungssinnes der Kräfte $\left(\begin{smallmatrix} + \\ \downarrow \\ - \end{smallmatrix}\right)$

$$\sum Q = \sum A = -\sum \mathfrak{A} + \sum \frac{M_l + M_r}{l_v} \quad (92)$$

geschrieben werden kann, wobei M_l und M_r die Momente am linken bzw. rechten Stabende des betrachteten Feldes v bedeuten (Abb. 120). Die Summenzeichen \sum beziehen sich auf alle Stäbe jenes Feldes, durch welches der Schnitt geführt ist.

Die Beiträge $\sum \mathfrak{A}$, d. s. also die Auflagerdrücke auf der linken Seite der freiauflegend gedachten Stäbe, haben denselben Richtungssinn wie die Lasten, aus welchen sie gebildet werden.

Überträgt man (92) und (91) in (90), so ergibt sich für eine von oben nach unten gerichtete Belastung mit der angegebenen Vorzeichenregel und unter Beachtung, daß die Stäbe des Feldes v stets die gleiche Länge l_v aufweisen,

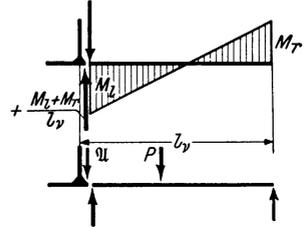


Abb. 120. Querkraftanteile.

$$+ \frac{1}{2} \left(\sum P + \sum q \right) - \sum P' - \sum q' - \sum \mathfrak{A} + \frac{1}{l_v} \sum (M_l + M_r) = 0. \quad (93)$$

Ersetzt man nun nach (45) unter sinngemäßer Abänderung der Bezeichnung die Summe der Stabendmomente durch die Formänderungsgrößen und Stabbelastungsglieder, so ergibt sich schließlich die *Verschiebungsgleichung* für *symmetrische* parallelgurtige Vierendeeltragwerke in folgender Form:

$$\boxed{\sum_v 3 k \varphi_l + \sum_v 3 k \varphi_r + D_v \psi_v + S_v = 0}, \quad (94)$$

wobei $D_v = 6 \sum_v k$, (95)

$$S_v = \left[\frac{1}{2} \left(\sum P + \sum q \right) - \sum P' - \sum q' - \sum \mathfrak{A} \right] l_v + \sum_v (M_l + M_r). \quad (96)$$

Die in diesem Ausdruck vorhandenen Vorzeichen von P , q , P' , q' , \mathfrak{A} gelten unter der Voraussetzung, daß diese Kräfte von oben nach unten wirken.

Die Verschiebungsgleichung (94) enthält also vier Arten von Gliedern:

$\sum_v 3 k \varphi_l$ die Summe der Produkte aus dem dreifachen Stabfestwerte k und dem zugehörigen *linken* Knotendrehwinkel φ_l für alle Stäbe des Feldes v .

$\sum_v 3 k \varphi_r$ die Summe der Produkte aus dem dreifachen Stabfestwerte k und dem zugehörigen *rechten* Knotendrehwinkel φ_r für alle Stäbe des Feldes v .

$D_v \psi_v$ das *Diagonalglied*, wobei D_v nach (95) gleich der *sechsfachen* Summe der k -Werte des Feldes v ist.

S_v das *Belastungsglied*, das nach (96) zu berechnen ist, wobei $\sum P'$ und $\sum q'$ jeweils nur die Summe der *links* vom gedachten Schnitt auf das Tragwerk einwirkenden Einzellasten bzw. Streckenlasten bedeuten, während jedoch unter $\sum P$ und $\sum q$ *sämtliche* Lasten zu verstehen sind. $\sum \mathfrak{A}$ bedeutet die Summe der an der Schnittstelle übertragenen Auflagerdrücke der freiauflegend gedachten Stäbe des Feldes v .

Schlußbemerkung: Die Verschiebungsgleichung (94) kann u. a. auch für Tragwerke von der Form, wie sie Abb. 121 zeigt, unmittelbar benutzt werden. Bei der Bestimmung der Belastungsglieder S nach (96) kann dabei eine Vereinfachung in Anwendung kommen, indem für die in der Formel auftretenden Belastungswerte P, q usw. nur jene in Rechnung gesetzt werden, die sich *innerhalb* der Öffnung des

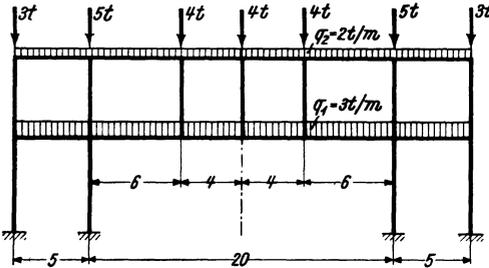


Abb. 121.

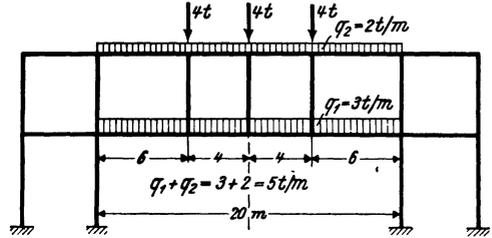


Abb. 121a.

eigentlichen Vierendeelträgers befinden, wie Abb. 121 a zeigt, denn die *außerhalb* dieser Öffnung wirkenden Lasten würden sich aus der Formel ohnehin herauskürzen.

Es ergeben sich z. B. die Belastungsglieder S_1 und S_2 für das mit seiner Belastung in Abb. 121 ersichtliche Tragwerk nach Formel (96)

$$S_1 = \left[\frac{1}{2} (12 + 5 \cdot 20) - \frac{5 \cdot 6}{2} \right] \cdot 6,0 = + 246 \text{ tm}$$

und für das zweite Feld

$$S_2 = \left[\frac{1}{2} (12 + 5 \cdot 20) - 4,0 - 5 \cdot 6 - \frac{5 \cdot 4}{2} \right] \cdot 4,0 = + 48 \text{ tm}.$$

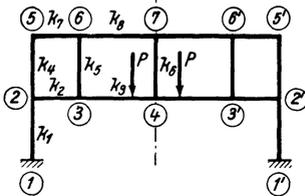


Abb. 122. Beiwertschizze.

Das letzte Glied der Formel (96) liefert hier keinen Beitrag, da wegen der vorhandenen symmetrischen Stabbelastung stets $\mathfrak{M}_l = -\mathfrak{M}_r$ wird, so daß die Summe beider Werte Null ergibt.

Die Anwendung der Mustergleichungen (89) und (94) wird im folgenden an einem Beispiel gezeigt.

b) Gleichungstabelle für ein symmetrisches Vierendeel-Rahmentragwerk.

Das Tragwerk ist in Abb. 122 zugleich als Beiwertschizze dargestellt. Wird symmetrische Belastung vorausgesetzt, so verbleiben als Unbekannte die vier Knotendrehwinkel $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5, \varphi_6$ und die zwei Stabdrehwinkel ψ_1 und ψ_2 . Die in der Symmetrieachse

Gleichungstabelle 9.

	φ_2	φ_3	φ_5	φ_6	ψ_1	ψ_2	B
φ_2	d_2	k_2	k_4		$3 k_2$		s_2
φ_3	k_2	d_3		k_5	$3 k_2$	$3 k_3$	s_3
φ_5	k_4		d_5	k_7	$3 k_7$		s_5
φ_6		k_5	k_7	d_6	$3 k_7$	$3 k_8$	s_6
ψ_1	$3 k_2$	$3 k_2$	$3 k_7$	$3 k_7$	D_1		S_1
ψ_2		$3 k_3$		$3 k_8$		D_2	S_2

gelegenen Knoten 4 und 7 erleiden zwar eine Verschiebung in lotrechter Richtung, aber keine Verdrehung, so daß $\varphi_4 = \varphi_7 = 0$ ist. Weiter wird auch $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$, wenn die Stützenfüße vollkommen eingespannt sind.

Unter wiederholter Benutzung der Knotengleichung (89) und der Verschiebungsgleichung (94) können die Bestimmungsgleichungen an Hand der Beiwertskizze in tabellarischer Form angeschrieben werden (siehe Gleichungstabelle 9).

Die Gl. (89) und (94) können aber auch für anders gestaltete symmetrische Rahmengebilde, wie sie z. B. in den Abb. 123 und 124 angedeutet sind, unmittelbar verwendet werden, wenn symmetrische Belastung vorliegt. (Siehe Zahlenbeispiel 11.) Hingegen treten in dem

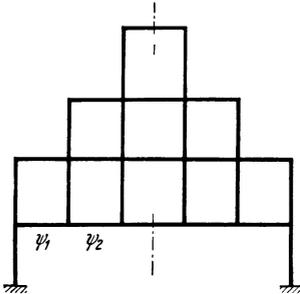


Abb. 123.

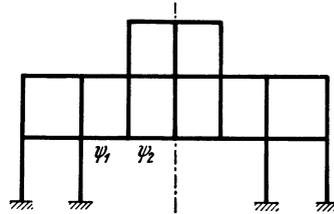


Abb. 124.

Abb. 123 und 124. Symmetrische, bei symmetrischer Belastung nur lotrecht verschiebliche Rahmentragwerke.

symmetrischen Tragwerk der Abb. 125 bei symmetrischer Belastung nicht nur lotrechte, sondern im obersten Stockwerk auch waagrechte Knotenverschiebungen auf.

B. Unsymmetrisch ausgebildete, seitlich festgehaltene Vierendeel-Rahmentragwerke.

In Abb. 126 ist ein Tragwerk dieser Art ersichtlich. Es ist durch Lager in den Knoten 7 und 12 in waagrechtlicher Richtung unverschieblich festgehalten, so daß die Knoten 4–9, 5–10, 6–11 nur in *lotrechter* Richtung verschieblich sind. Unter der Annahme fester Einspannung in den Punkten 1 und 2 bleiben noch *zehn* Knotendrehwinkel φ und *vier* Stabdrehwinkel ψ als Unbekannte übrig.

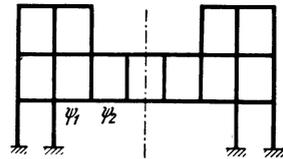


Abb. 125. Lotrecht und waagrecht verschiebliches symmetrisches Tragwerk.

Im Gegensatz zu den früher behandelten symmetrischen Tragwerken sind hier die in den Punkten 1 bzw. 2 auftretenden lotrechten Auflagerteilkräfte V zunächst zahlenmäßig nicht bekannt. Daher muß bei der Aufstellung der Verschiebungsgleichung ein anderer Weg eingeschlagen werden. Es ist vor allem zweckmäßig, an Stelle der Stabdrehwinkel ψ der waagrecht festgehaltenen Stäbe die „wirklichen“ Verschiebungen δ der Knoten in lotrechter Richtung in die Rechnung einzuführen. Man erreicht damit zunächst, daß die *vier* Stabdrehwinkel ψ durch *drei* Verschiebungsgrößen δ ausgedrückt werden können, wodurch von vornherein die Gesamtzahl der Unbekannten um *eins* geringer ist. Außerdem ergibt sich auf diese Weise auch hier wieder sofort ein vollständig symmetrisches Gleichungssystem.

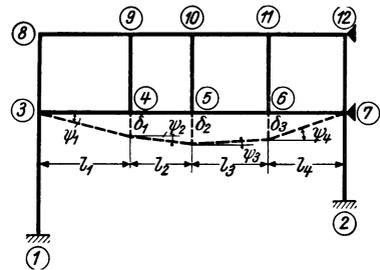


Abb. 126. Unsymmetrisches, nur lotrecht verschiebliches Tragwerk.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Man kann hier von dem allgemeinen Ansatz in der Form (89) ausgehen, welcher lautet:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + 3 k_v \psi_v + 3 k_{v+1} \psi_{v+1} + s_n = 0. \tag{97}$$

Die Bedeutung der einzelnen Größen ist bei (89) ausführlich beschrieben und geht auch aus der Abb. 127 hervor. Darin ist ein Teil eines lotrecht verschieblichen Tragwerkes dargestellt, wobei die „wirklichen“ Verschiebungen der Knotenreihen $(m-1)$, m und $(m+1)$ mit δ_{m-1} , δ_m und δ_{m+1} bezeichnet sind.

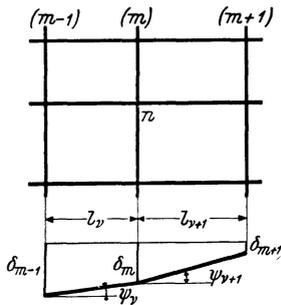


Abb. 127. Bezeichnungen.

Der Knoten n , für welchen allgemein die Knotengleichung angeschrieben werden soll, gehört der Knotenreihe m an. Die benachbarten Felder haben die Längen l_v und l_{v+1} . Die zugehörigen Stabdrehwinkel sind somit ψ_v und ψ_{v+1} .

In der obigen Gl. (97) kann man nun nach (3) an Stelle der Stabdrehwinkel die „wirklichen“ Verschiebungen einführen. Mit der gewählten Bezeichnung wird also

$$\psi_v = \frac{\delta_{m-1} - \delta_m}{l_v}; \quad \psi_{v+1} = \frac{\delta_m - \delta_{m+1}}{l_{v+1}}. \quad (98)$$

Damit nimmt die Knotengleichung (97) nach kurzer Umformung folgende Gestalt an:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_v \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{k}_{v+1} \delta_{m+1} + s_n = 0. \quad (99)$$

Hierin bedeuten also nach Abb. 127:

- δ_m die lotrechte Verschiebung jener Knotenreihe, die den Knoten n enthält,
- δ_{m-1} und δ_{m+1} .. die lotrechten Verschiebungen der links bzw. rechts von n befindlichen Knotenreihen,

$$\bar{k}_v = \frac{3 k_v}{l_v} \text{ bzw. } \bar{k}_{v+1} = \frac{3 k_{v+1}}{l_{v+1}}, \quad (100)$$

$$\kappa_n = \bar{k}_{v+1} - \bar{k}_v, \quad (101)$$

und zwar beziehen sich:

- $\bar{k}_v \delta_{m-1}$ auf den links in den Knoten n einmündenden Stab (+),
- $\bar{k}_{v+1} \delta_{m+1}$ auf den rechts in den Knoten n einmündenden Stab (-),
- $\kappa_n \delta_m$ auf den betrachteten Knoten n (\pm).

Als Beispiel soll die Anwendung der Knotengleichung (99) für die Knotenpunkte (5) und (10) der Abb. 126 gezeigt werden. Zu diesem Zwecke benötigt man die Beiwertskeizze Abb. 128, in welcher die erforderlichen k -Werte und die vorhandene Belastung eingetragen sind.

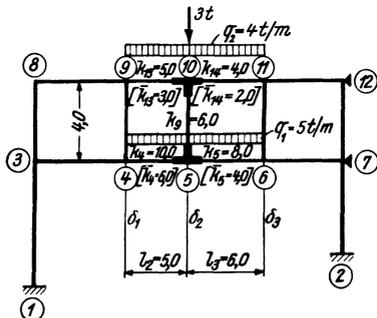


Abb. 128. Belastungs- und Beiwertskeizze.

Nach (100) wird

$$\bar{k}_4 = \frac{3 \cdot 10,0}{5,0} = 6,0 \quad \bar{k}_{13} = \frac{3 \cdot 5,0}{5,0} = 3,0$$

$$\bar{k}_5 = \frac{3 \cdot 8,0}{6,0} = 4,0 \quad \bar{k}_{14} = \frac{3 \cdot 4,0}{6,0} = 2,0$$

und nach (101)

$$\kappa_5 = \bar{k}_5 - \bar{k}_4 = 4,0 - 6,0 = -2,0$$

$$\kappa_{10} = \bar{k}_{14} - \bar{k}_{13} = 2,0 - 3,0 = -1,0.$$

Weiter wird nach (35) $d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$

$$d_5 = 2 (10,0 + 8,0 + 6,0) = 48,0$$

$$d_{10} = 2 (6,0 + 5,0 + 4,0) = 30,0.$$

Die zur Ermittlung der Knotenbelastungsglieder s erforderlichen Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} ergeben sich nach Tafel II.

$$\mathfrak{M}_{5,4} = + \frac{5,0 \cdot 5,0^2}{12} = + 10,42 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,6} = - \frac{5,0 \cdot 6,0^2}{12} = - 15,0 \text{ tm}$$

$$s_5 = + 10,42 - 15,0 = - 4,58 \text{ tm}$$

$$\mathfrak{M}_{10,9} = + \frac{4,0 \cdot 5,0^2}{12} = + 8,33 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{10,11} = - \frac{4,0 \cdot 6,0^2}{12} = - 12,0 \text{ tm}$$

$$s_{10} = + 8,33 - 12,0 = - 3,67 \text{ tm}.$$

Damit können nach (99) unter Zuhilfenahme der Beiwertschizze die *Knotengleichungen* angeschrieben werden. Sie lauten für den Knoten (5):

$$\left. \begin{aligned} 48,0 \varphi_5 + 10,0 \varphi_4 + 8,0 \varphi_6 + 6,0 \varphi_{10} + 6,0 \delta_1 - 2,0 \delta_2 - 4,0 \delta_3 - 4,58 &= 0 \\ \text{und für den Knoten (10):} \\ 30,0 \varphi_{10} + 6,0 \varphi_5 + 5,0 \varphi_9 + 4,0 \varphi_{11} + 3,0 \delta_1 - 1,0 \delta_2 - 2,0 \delta_3 - 3,67 &= 0. \end{aligned} \right\} (99a)$$

Verschiebungsgleichungen. Man denke sich aus dem Tragwerk eine Knotenreihe (m), der die Knotenverschiebung δ_m zugeordnet ist, herausgeschnitten und sowohl die äußeren Kräfte als auch sämtliche Schnittkräfte angebracht (Abb. 129).

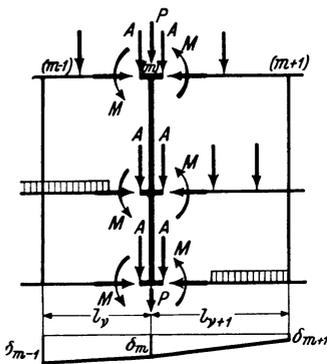


Abb. 129. Knotenreihe (m) mit Schnittkräften.

Die Gleichgewichtsgleichung $\sum V=0$ lautet für den herausgeschnittenen Stabzug ganz allgemein, wenn der Schnitt in unmittelbarer Nähe der Knoten geführt wird,

$$\sum P + \sum_v A_v^r + \sum_{v+1} A_{v+1}^l = 0. \quad (102)$$

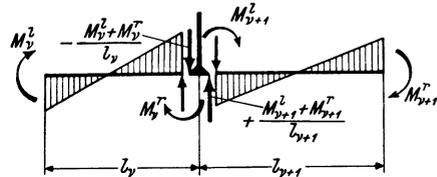


Abb. 130. Querkraftanteile.

Darin bedeuten:

- $\sum P$ die Summe der *lotrecht* wirkenden Anteile aller am herausgeschnittenen Stabzug angreifenden äußeren Kräfte,
- $\sum_v A_v^r$ und $\sum_{v+1} A_{v+1}^l$... die Summe der *rechten* Auflagerdrücke aller Stäbe im Felde v bzw. der *linken* Auflagerdrücke aller Stäbe im Felde ($v + 1$).

Die in der Gl. (102) auftretenden Auflagerdrücke ergeben sich unter der Voraussetzung von *positiven* Stabendmomenten nach Abb. 130 wie folgt ($\uparrow \downarrow$):

$$\left. \begin{aligned} \sum_v A_v^r &= - \sum_v \mathfrak{M}_v^r - \sum_v \frac{M_v^l + M_v^r}{l_v} \\ \sum_{v+1} A_{v+1}^l &= - \sum_{v+1} \mathfrak{M}_{v+1}^l + \sum_{v+1} \frac{M_{v+1}^l + M_{v+1}^r}{l_{v+1}}. \end{aligned} \right\} (103)$$

Es bedeuten sinngemäß wie vorher:

$\sum_{\nu} \mathfrak{A}_{\nu}^r$ und $\sum_{\nu+1} \mathfrak{A}_{\nu+1}^l \dots$ die Summe der *rechten* Auflagerdrücke aller freiaufliegend gedachten Stäbe im Felde ν bzw. aller *linken* Auflagerdrücke der freiaufliegend gedachten Stäbe im Felde $(\nu + 1)$,

M_{ν}^l und $M_{\nu}^r \dots$ die *linken* bzw. *rechten* Anschlußmomente der Stäbe im Felde ν ,

$M_{\nu+1}^l$ und $M_{\nu+1}^r \dots$ die *linken* bzw. *rechten* Anschlußmomente der Stäbe im Felde $(\nu + 1)$.

Setzt man (103) in (102) ein, so ergibt sich unter Beachtung des Richtungssinnes ($\begin{smallmatrix} + \\ \uparrow \\ - \\ \downarrow \end{smallmatrix}$):

$$-\sum P - \sum_{\nu} \mathfrak{A}_{\nu}^r - \sum_{\nu+1} \mathfrak{A}_{\nu+1}^l - \sum_{\nu} \frac{1}{l_{\nu}} (M_{\nu}^l + M_{\nu}^r) + \\ + \sum_{\nu+1} \frac{1}{l_{\nu+1}} (M_{\nu+1}^l + M_{\nu+1}^r) = 0. \quad (104)$$

Ersetzt man in (104) die Summen der Stabendmomente nach (11a) unter Benutzung der hier gewählten Bezeichnungsweise, so erhält man nach kurzer Umformung die *Verschiebungsgleichung* für irgendeine Knotenreihe (m) in einfacher Schreibart:

$$\boxed{-\sum_{\nu} \bar{k}_{\nu} \varphi_{m-1} + \sum_{\nu} \varkappa_{\nu} \varphi_m + \sum_{\nu+1} \bar{k}_{\nu+1} \varphi_{m+1} - K_{\nu} \delta_{m-1} + D_m \delta_m - K_{\nu+1} \delta_{m+1} + S_m = 0.} \quad (105)$$

Hierin bedeuten:

$$K_{\nu} = \frac{2}{l_{\nu}} \sum_{\nu} \bar{k}_{\nu} \quad \text{bzw.} \quad K_{\nu+1} = \frac{2}{l_{\nu+1}} \sum_{\nu+1} \bar{k}_{\nu+1} \quad (106)$$

$$D_m = K_{\nu} + K_{\nu+1} \quad (107)$$

$$S_m = -\sum P - \sum_{\nu} \mathfrak{A}_{\nu}^r - \sum_{\nu+1} \mathfrak{A}_{\nu+1}^l - \frac{1}{l_{\nu}} \sum_{\nu} (\mathfrak{M}_{\nu}^l + \mathfrak{M}_{\nu}^r) + \\ + \frac{1}{l_{\nu+1}} \sum_{\nu+1} (\mathfrak{M}_{\nu+1}^l + \mathfrak{M}_{\nu+1}^r). \quad (108)$$

Es beziehen sich also: K_{ν} (= Beiwert von δ_{m-1}) auf das Feld *links* und $K_{\nu+1}$ (= Beiwert von δ_{m+1}) auf das Feld *rechts* von der betrachteten Knotenreihe.

Das *Diagonalglied* D_m für die Knotenreihe (m) ergibt sich stets als Summe der K -Werte der beiden anschließenden Felder. Das Belastungsglied S_m wird nach (108) bestimmt. Die nähere Bedeutung der einzelnen Glieder ist bei (102) und (103) erläutert. Die in (108) angegebenen Vorzeichen von P und \mathfrak{A} gelten unter der Voraussetzung, daß diese Kräfte von oben nach unten wirken.

Die Beiwerte \bar{k}_{ν} , $\bar{k}_{\nu+1}$ und \varkappa_m (identisch mit \varkappa_n von früher) werden nach (100) bzw. (101) ermittelt. Die \varkappa -Werte brauchen aber nur für die lotrecht verschieblichen Knoten aufgestellt werden.

Über die Gliederzahl der vorstehenden Gleichung kann zusammenfassend gesagt werden:

1. Die Zahl der φ_{m-1} -Glieder ist gleich der Anzahl der *links* in die betrachtete Knotenreihe einmündenden Stäbe.

2. Die Anzahl der φ_{m+1} -Glieder ist gleich der Anzahl der im Felde *rechts* von der betrachteten Knotenreihe vorhandenen Stäbe.

3. Die Zahl der φ_m -Glieder ist im allgemeinen gleich der Anzahl der Knoten in der betrachteten Knotenreihe m . Wenn jedoch für einen Knoten $\bar{k}_{\nu} = \bar{k}_{\nu+1}$ ist, so wird nach (101) $\varkappa = \bar{k}_{\nu+1} - \bar{k}_{\nu} = 0$, wodurch dann das diesem Knoten zugeordnete φ_m -Glied entfällt.

4. Die δ -Glieder treten in jeder Gleichung nur je *einmal* auf.

Die praktische Verwendung der Gl. (105) soll hier sofort an einem Beispiel zahlenmäßig vorgeführt werden, und zwar für die Knotenreihe 5–10 des in Abb. 128 mit Belastung und Beiwerten ersichtlichen Tragwerkes. Daraus sind noch folgende Werte zu ermitteln:

nach (101): $\varkappa_5 = 4,0 - 6,0 = -2,0$; $\varkappa_{10} = 2,0 - 3,0 = -1,0$;

nach (106): $K_2 = \frac{2}{5,0} (6,0 + 3,0) = 3,6$; $K_3 = \frac{2}{6,0} (4,0 + 2,0) = 2,0$;

nach (107): $D_2 = K_2 + K_3 = 3,6 + 2,0 = 5,6$;

nach (108): $S_2 = -3,0 - (5 + 4) \frac{5,0}{2} - (5 + 4) \frac{6,0}{2} = -52,5 \text{ t.}$

Damit kann nach (105) die Gleichung für die Knotenreihe 5–10 mit der Verschiebung δ_2 angeschrieben werden:

$$-6,0\varphi_4 - 3,0\varphi_9 - 2,0\varphi_5 - 1,0\varphi_{10} + 4,0\varphi_6 + 2,0\varphi_{11} - 3,6\delta_1 + 5,6\delta_2 - 2,0\delta_3 - 52,5 = 0.$$

(Siehe auch die Zahlenbeispiele 12 und 13.)

b) Gleichungstabelle für ein unsymmetrisches, nur lotrecht verschiebliches Rahmentragwerk.

Dieses Beispiel soll nur eine Übersicht über den Gang der gesamten Rechnung bieten, weshalb hier auf zahlenmäßige Angaben verzichtet werden kann. Abb. 131 zeigt die Beiwertschizze mit allen erforderlichen Eintragungen. Unter der Voraussetzung, daß das Rahmentragwerk in den Knoten 7 und 12, bzw. 3 und 8 gegen waagrechte Verschiebungen gesichert ist, treten bei beliebiger Belastung nur *lotrechte* Verschiebungen δ_1 , δ_2 und δ_3 auf. Weiter ergeben sich bei Annahme einer festen Einspannung in den Säulenfüßen $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ und es verbleiben *zehn* unbekannte Knotendrehwinkel φ_3 bis φ_{12} .

Vor dem Anschreiben der *Knotengleichungen* nach (99) sind zunächst zu ermitteln: die Diagonalglieder d_3 bis d_{12} nach (35), weiter nach (101) die Beiwerte $\varkappa_4, \varkappa_5, \varkappa_6, \varkappa_9, \varkappa_{10}, \varkappa_{11}$ für die verschieblichen Knoten, und schließlich die Knotenbelastungsglieder s_3 bis s_{12} .

Für die Aufstellung der *Verschiebungsgleichungen* werden nach (105) benötigt: die Diagonalglieder D_1, D_2, D_3 nach (107), ferner die Beiwerte K_2 und K_3 nach (106) sowie die Belastungsglieder S_1, S_2, S_3 nach (108). Damit kann bei wiederholter Benutzung der Knotengleichung (99) und der Verschiebungsgleichung (105)

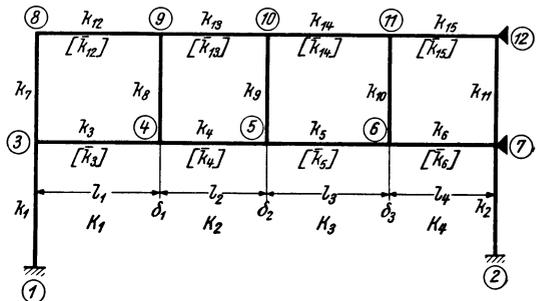


Abb. 131. Beiwertschizze.

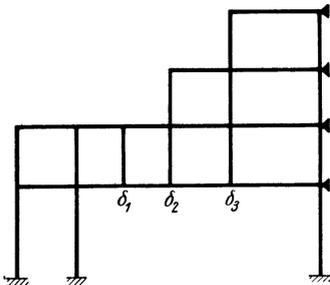


Abb. 132.

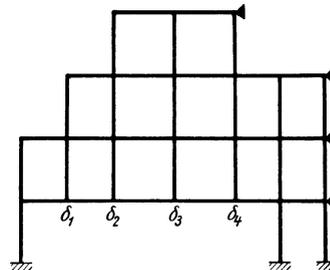


Abb. 133.

Abb. 132 und 133. Unsymmetrische, nur lotrecht verschiebliche Tragwerke.

unter gleichzeitiger Zuhilfenahme der Beiwertschizze das gesamte Gleichungssystem unmittelbar in Form einer Tabelle angeschrieben werden (siehe Gleichungstabelle 10).

Gleichungstabelle 10.

	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	δ_1	δ_2	δ_3	B
φ_3	d_3	k_3				k_7					$-\bar{k}_3$			s_3
φ_4	k_3	d_4	k_4				k_8				κ_4	$-\bar{k}_4$		s_4
φ_5		k_4	d_5	k_5				k_9			\bar{k}_4	κ_5	$-\bar{k}_5$	s_5
φ_6			k_5	d_6	k_6				k_{10}			\bar{k}_5	κ_6	s_6
φ_7				k_6	d_7					k_{11}			\bar{k}_6	s_7
φ_8	k_7					d_8	k_{12}				$-\bar{k}_{12}$			s_8
φ_9		k_8				k_{12}	d_9	k_{13}			κ_9	$-\bar{k}_{13}$		s_9
φ_{10}			k_9				k_{13}	d_{10}	k_{14}		\bar{k}_{13}	κ_{10}	$-\bar{k}_{14}$	s_{10}
φ_{11}				k_{10}				k_{14}	d_{11}	k_{15}		\bar{k}_{14}	κ_{11}	s_{11}
φ_{12}					k_{11}				k_{15}	d_{12}			\bar{k}_{15}	s_{12}
δ_1	$-\bar{k}_3$	κ_4	\bar{k}_4			$-\bar{k}_{12}$	κ_9	\bar{k}_{13}			D_1	$-K_2$		S_1
δ_2		$-\bar{k}_4$	κ_5	\bar{k}_5			$-\bar{k}_{13}$	κ_{10}	\bar{k}_{14}		$-K_2$	D_2	$-K_3$	S_2
δ_3			$-\bar{k}_5$	κ_6	\bar{k}_6			$-\bar{k}_{14}$	κ_{11}	\bar{k}_{15}		$-K_3$	D_3	S_3

Die allgemeinen Mustergleichungen (99) und (105) können u. a. auch für die in Abb. 132 und 133 ersichtlichen Tragwerksarten unmittelbar verwendet werden.

8. Rahmentragwerke mit lotrecht und waagrecht verschieblichen Knotenpunkten.

Als Ausgangspunkt für die hier anzustellenden Betrachtungen soll wieder das in Abb. 126 dargestellte Tragwerk dienen, das dort in *waagrechter* Richtung unverschieblich festgehalten war.

Denkt man sich diese Lager entfernt, so werden die Knoten 3—4—5—6—7 bzw. 8—9—10—11—12 infolge der äußeren Belastung in *waagrechter* Richtung um die

Beträge δ_4 bzw. δ_5 verschoben, während gleichzeitig die Knoten 4—9, 5—10, 6—11 Verschiebungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ in *lotrechter* Richtung erleiden (Abb. 134).

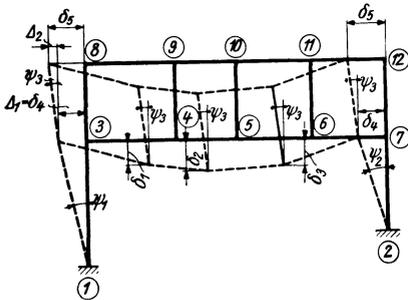


Abb. 134. Lotrecht und waagrecht verschiebliches Tragwerk.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Man kann hier die zuletzt abgeleitete Form (99) benutzen, die für *nur lotrecht* verschiebliche Tragwerke gilt, wenn man noch eine kleine Ergänzung anbringt. Diese Ergänzung besteht für den allgemeinen Fall, daß in dem betrachteten Knotenpunkt sowohl aus dem darunterliegenden Stockwerk (μ)

als auch aus dem darüberliegenden Stockwerk ($\mu + 1$) je ein lotrechter Stab einmündet, aus zwei Gliedern von der Form [vgl. (40)]

$$3 k_{\mu} \psi_{\mu} + 3 k_{\mu+1} \psi_{\mu+1} \quad (109)$$

bzw. [vgl. (52)]

$$\bar{k}_{\mu} \Delta_{\mu} + \bar{k}_{\mu+1} \Delta_{\mu+1}. \quad (109a)$$

Damit wird dem Umstand Rechnung getragen, daß in diesem Fall auch die lotrechten Stäbe Verdrehungen mitmachen und daher je ein ψ -Glied (bzw. Δ -Glied) in die Gleichung bringen (Abb. 135). Dabei bedeutet wie früher:

$$\bar{k}_{\mu} = \frac{3 k_{\mu}}{l_{\mu}}; \quad \bar{k}_{\mu+1} = \frac{3 k_{\mu+1}}{l_{\mu+1}}.$$

Somit ergibt sich die *Knotengleichung* für *lotrecht* und *waagrecht* verschiebliche Tragwerke, indem zur Gl. (99) der Ausdruck (109) bzw. (109a) hinzugefügt wird.

Sie lautet dann:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_v \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{k}_{v+1} \delta_{m+1} + 3 k_{\mu} \psi_{\mu} + 3 k_{\mu+1} \psi_{\mu+1} + s_n = 0 \quad (110)$$

bzw.

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_v \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{k}_{v+1} \delta_{m+1} + \bar{k}_{\mu} \Delta_{\mu} + \bar{k}_{\mu+1} \Delta_{\mu+1} + s_n = 0. \quad (110a)$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder ist bei Gl. (99) in allen Einzelheiten angegeben.

Die zahlenmäßige Anwendung dieser Gleichung kann am besten an dem bereits behandelten Fall der Abb. 128 gezeigt werden, wenn im Gegensatz zu früher das Tragwerk auch in *waagrecht*er Richtung verschieblich angenommen wird. Um die Knotengleichung für die Knoten 5 und 10 aufstellen zu können, ist nach (109 a) noch der Wert

$$\bar{k}_9 = \frac{3 \cdot 6,0}{4,0} = 4,5$$

zu ermitteln. Es mündet also hier nur *ein* lotrechter Stab (9) im Stockwerk (2) in den betrachteten Knoten ein, so daß nur *ein* Δ -Glied, nämlich $4,5 \Delta_2$ in der Gleichung vorkommt. Werden die übrigen Beiwerte aus Abb. 128 übernommen, so ergeben sich nach (110a) für Knoten 5:

$$48,0 \varphi_5 + 10,0 \varphi_4 + 8,0 \varphi_6 + 6,0 \varphi_{10} + 6,0 \delta_1 - 2,0 \delta_2 - 4,0 \delta_3 + 4,5 \Delta_2 - 4,58 = 0$$

und für Knoten 10:

$$30,0 \varphi_{10} + 6,0 \varphi_5 + 5,0 \varphi_9 + 4,0 \varphi_{11} + 3,0 \delta_1 - 1,0 \delta_2 - 2,0 \delta_3 + 4,5 \Delta_2 - 3,67 = 0.$$

Die hier aufgestellten Gleichungen unterscheiden sich also von (99a) lediglich durch das Δ -Glied.

Verschiebungsgleichungen. Es sind immer so viele unabhängige Verschiebungsgleichungen aufzustellen, als insgesamt voneinander unabhängige Verschiebungsgrößen Δ bzw. δ vorhanden sind. Zu diesem Zwecke stehen die bekannten zwei Arten von Gleichgewichtsgleichungen zur Verfügung, nämlich $\sum V = 0$ und $\sum H = 0$.

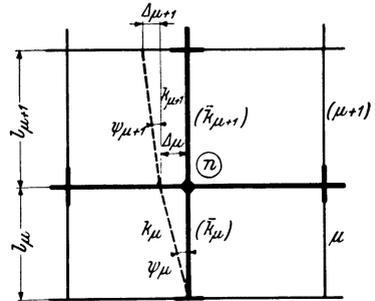


Abb. 135. Bezeichnungen.

Die Bedingung $\sum V = 0$ ist für jede *lotrecht* verschiebliche Knotenreihe des Tragwerkes aufzustellen. Hierfür kann die allgemeine Gl. (105) in unveränderter Form übernommen werden.

Die Bedingung $\sum H = 0$ ist auch hier wie bei allen *waagrecht* verschieblichen Tragwerken für jedes Stockwerk gesondert anzuschreiben. Es kann dazu die allgemeine Gl. (54) Verwendung finden, die mit den hier gewählten Bezeichnungen für das Stockwerk μ folgende Form annimmt:

$$\sum_{\mu} \bar{k}_{\mu} \varphi_u + \sum_{\mu} \bar{k}_{\mu} \varphi_o + D_{\mu} \Delta_{\mu} + S_{\mu} = 0. \quad (111)$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder ist ausführlich bei Gl. (54) erläutert.

Auf die Durchführung eines Beispielen kann hier verzichtet werden, da die Anwendung der vorstehenden Gleichungen nichts Neues bringt.

Zweiter Abschnitt.

Rahmentragwerke mit beliebig veränderlichen Stabquerschnitten.

I. Vorbemerkung.

Es ist zwar bekannt, daß die Veränderlichkeit der Stabquerschnitte, insbesondere die als „*Vouten*“ oder „*Schrägen*“ bezeichneten Auflagerverstärkungen, auf die Momentenverteilung bei statisch unbestimmten Tragwerken einen großen Einfluß ausüben.¹ Dennoch kann man beobachten, daß in vielen Fällen die Ausbildung der unter Umständen sehr günstig wirkenden Vouten entweder überhaupt vermieden oder der durch ihre Ausführung bedingte wirtschaftliche Vorteil nicht genügend ausgenutzt wird. Das hat wohl in erster Linie seinen Grund darin, daß man häufig bei Berücksichtigung der Querschnittsveränderungen eine weniger übersichtliche und schwerer kontrollierbare Rechnung erwartet, als dies bei Außerachtlassung der Voutenwirkung der Fall ist.

Bei Anwendung zweckmäßiger Rechenverfahren und geeigneter Hilfsmittel, die in diesem Abschnitt zur Behandlung gelangen, treten aber solche Nachteile kaum in Erscheinung. Durch Schaffung der im Dritten Teil enthaltenen Zahlen- und Kurventafeln wird auch der Mehraufwand an Arbeit und Zeit, der mit der Berücksichtigung der Voutenwirkung verbunden ist, auf ein Mindestmaß herabgedrückt, so daß damit die notwendige Voraussetzung für eine weitgehende Anwendung in der Praxis gegeben ist.

II. Allgemeines über die Wirkung veränderlicher Stabquerschnitte.

In welcher Weise sich der Einfluß der Querschnittsveränderlichkeit bei Rahmentragwerken geltend macht und wie durch eine zweckmäßige Querschnittsgestaltung der Momentenverlauf günstig beeinflusst werden kann, darüber herrschen vielfach

¹ STRASSNER: Neuere Methoden, 3. Aufl. Berlin: W. Ernst & Sohn, 1925. — SUTER: Methode der Festpunkte, 2. Aufl. Berlin: Springer, 1932. — MANN: Theorie der Rahmentragwerke. Berlin: Springer, 1927. — BEYER: Die Statik im Eisenbetonbau, 2. Aufl. Berlin: Springer, 1933, u. a.

noch recht unklare Vorstellungen. Man kann aber verhältnismäßig rasch Einblick in die Wirkungsweise veränderlicher Stabquerschnitte gewinnen, wenn man zunächst bei einfacheren Tragwerken einige *Grenzfälle* ins Auge faßt. Zu diesem Zweck soll vor allem der beiderseits fest eingespannte Träger näher betrachtet werden. Besitzt der Stab auf seiner ganzen Länge denselben Querschnitt, so hat der Momentenverlauf für eine gleichmäßige Vollbelastung die in Abb. 136 in voller Linie gezeichnete Form. Es ist dann an den Einspannstellen

$$M_E = \frac{q l^2}{12} \text{ und im Feld } M_F = \frac{q l^2}{24}.$$

Denkt man sich nun an den beiden Trägerenden gleichartige Auflagerverstärkungen, sog. *Vouten*, angeordnet, so werden sich unter der gleichen Belastung wie vorher die Stützenmomente *größer*, die Feldmomente hingegen *kleiner* ergeben, wie dies in Abb. 136 in schwächeren vollen Linien angedeutet ist. Der Unterschied wird um so größer sein, je kräftiger die Vouten ausgebildet sind.

Setzt man eine symmetrische Trägers Ausbildung, also symmetrische Vouten, voraus, so wird sich die *M*-Linie bei gleichmäßiger Vollbelastung ebenfalls symmetrisch ergeben. Das Anwachsen der Stützenmomente und die Abnahme des Feldmomentes kann im Grenzfall so weit gehen, daß

$$M_E = \frac{q l^2}{8} \text{ und } M_F = 0$$

wird, wie aus dem stark strichliert gezeichneten Momentenverlauf der Abb. 136 zu entnehmen ist. Dieser Fall würde dann eintreten, wenn die Auflagerverstärkungen bis zur Stabmitte reichen würden und der Verhältniswert

$$n = \frac{J_c}{J_A} = 0$$

wäre, wobei J_c das Trägheitsmoment in der Stabmitte und J_A das Trägheitsmoment am Auflager bedeuten. Es würde dann der beiderseits vollkommen eingespannte Träger genau so wirken wie zwei aneinanderstoßende, durch ein Gelenk verbundene Kragträger, deren Spannweite je $\frac{l}{2}$ beträgt (Abb. 137).

Aus dieser Überlegung ergibt sich, daß die Einspannmomente des beiderseits fest eingespannten Trägers bei Anordnung symmetrischer Auflagerverstärkungen im Grenzfall um 50% größer sein können als bei demselben Träger *ohne* Vouten.

Nun soll aber dieser Gedankengang auch noch in der anderen Richtung ergänzt werden. Würde man nämlich umgekehrt an den Enden des fest eingespannten Trägers statt Verstärkungen Verschwächungen vornehmen, so würden die Stützenmomente an Größe *abnehmen*, während aber gleichzeitig das Feldmoment in demselben Maß *zunehmen* würde, wie in Abb. 136 die schwach strichlierten Linien zeigen, die allmählich in die stark strichpunktiierte Grenzlage übergehen. Dieser Grenzfall tritt ein, wenn

$$n = \frac{J_c}{J_A} = \infty$$

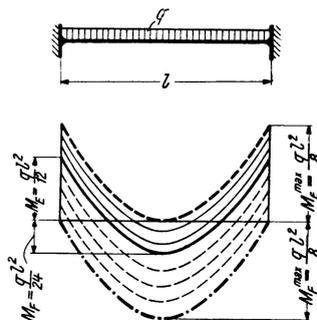


Abb. 136. Einfluß der Querschnittsveränderlichkeit auf den Momentenverlauf.

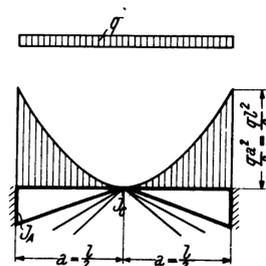


Abb. 137. Grenzfall bei symmetrischen Vouten.

ist. Es werden dann die Stützenmomente $M_E = 0$ und das zugehörige größte Feldmoment erreicht den Wert

$$M_F = \frac{q l^2}{8}$$

d. h. es wirkt ein solcher „fest eingespannter“ Träger dann genau so wie ein beiderseits *gelenkig* angeschlossener Balken.

Der Einfluß der Querschnittsveränderlichkeit kann also ziemlich bedeutend sein. Noch krasser liegen die Verhältnisse bei dem fest eingespannten Träger, der nur an *einer* Seite eine Voute besitzt. Diese bewirkt ein beträchtliches Ansteigen des an der Voutenseite gelegenen Einspannmomentes, während das der Gegenseite zugehörige Einspannmoment gleichzeitig verkleinert wird (Abb. 138). Im Grenzfalle, wenn also die Auflagerverstärkung über die ganze Trägerlänge reicht und wiederum so bemessen ist, daß

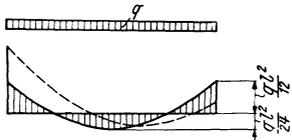


Abb. 138. M-Verlauf beim fest eingespannten Träger mit Voute links (strichliert) und ohne Vouten (voll).

die Einspannmomente gleichzeitig verkleinert wird (Abb. 138). Im Grenzfalle, wenn also die Auflagerverstärkung über die ganze Trägerlänge reicht und wiederum so bemessen ist, daß

$$n = \frac{J_c}{J_A} = 0$$

wird (Abb. 138a), wirkt der beiderseits eingespannte Stab wie ein einseitig eingespannter *Kragträger* von derselben Länge l . Es wird das der Voutenseite zugehörige Stützenmoment $M_1 = \frac{q l^2}{2}$, während das andere Stützenmoment den Wert $M_2 = 0$ annimmt, wie aus Abb. 138a ersichtlich ist. Es ergibt sich also hier im Grenzfalle ein Anwachsen des Stützenmomentes auf den sechsfachen Betrag jenes Wertes, der sich bei eingespannten Trägern ohne Vouten einstellt.

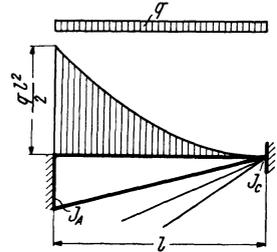


Abb. 138 a. Grenzfalle bei einseitigen Vouten.

Obzwar nun bei den praktisch vorkommenden Fällen diese theoretischen Grenzwerte kaum erreicht werden, so ist doch eine Vernachlässigung der Voutenwirkung bei der Berechnung von statisch unbestimmten Tragwerken nicht zu empfehlen. Einen besonderen Ansporn zur Berücksichtigung der Querschnittsveränderlichkeit bildet aber vor allem die Tatsache, daß eine richtige und zweckmäßige Anordnung von Vouten einen außerordentlich günstigen Einfluß auf die Momentenverteilung zur Folge hat. Man vergleiche z. B. die in Abb. 139 eingetragene Momentenverteilung für Vollbelastung bei einem durchlaufenden Träger mit und ohne Vouten. Der voll gezeichnete Linienzug stellt die Momente für den Träger ohne Vouten dar, die strichlierte Linie gibt den Momentenverlauf für den Träger mit Vouten wieder. Denkt man nun an die Bemessung eines solchen Trägers, so ist es wohl einleuchtend,



Abb. 139. M-Verlauf beim Durchlaufträger mit und ohne Vouten.

daß die vergrößerten Stützenmomente von den durch die Vouten beträchtlich erhöhten Querschnitten im Bereich der Stützen verhältnismäßig leicht aufzunehmen sind und daß weiter die Verringerung der Feldmomente stets besonders willkommen sein wird, da im Feld in der Regel ein möglichst niedriger Querschnitt gefordert wird und außerdem, besonders bei weitgespannten Platten oder Balken, eine nicht unbeträchtliche Gewichtsverringerung erzielt wird. Schließlich kommt noch hinzu, daß die Auflagerverstärkungen auch für die Aufnahme der Querkräfte, die dort einen Größtwert erreichen, sehr vorteilhaft sind.

III. Rechnungsgrundlagen.

1. Die Endtangentialwinkel der Biegelinie des Rahmenstabes mit veränderlichen Querschnitten.

Es sei der Momentenverlauf für eine bestimmte Belastung eines Rahmenstabes mit beliebigen Auflagerverstärkungen gegeben (Abb. 140a) und die zugehörigen Endtangentialwinkel τ_1, τ_2 der Biegelinie in bezug auf die Stabsehne gesucht. Zur

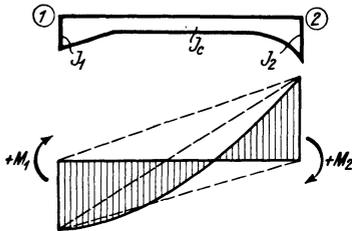


Abb. 140a.

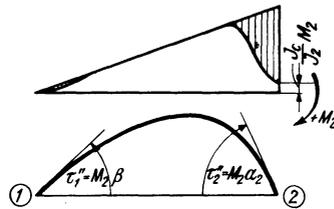


Abb. 140e.

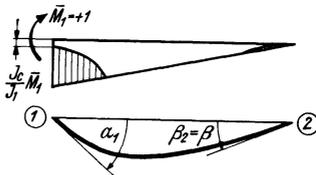


Abb. 140b.

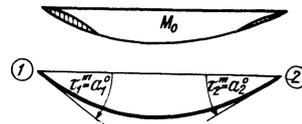


Abb. 140f.

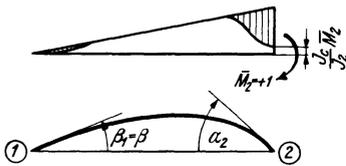


Abb. 140c.

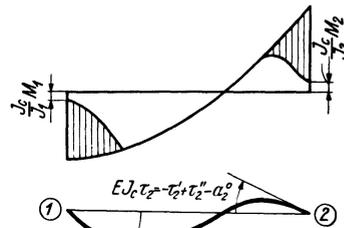


Abb. 140g.

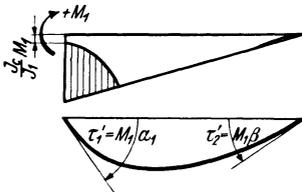


Abb. 140d.

Abb. 140a bis g. Beziehungen zwischen Endtangentialwinkeln und Momentenverlauf bei Rahmenstäben mit veränderlichen Querschnitten.

Lösung dieser Aufgabe können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Hier erscheint es der Anschaulichkeit wegen zweckmäßig, den bekannten MOHRschen Satz anzuwenden, welcher für den Stab mit gleichbleibender Dehnungszahl E und veränderlichem Trägheitsmoment J bei Annahme eines Vergleichswertes J_c lautet:

„Die EJ_c -fach verzerrten Endtangentialwinkel der Biegelinie sind gleich den Auflagerdrücken A_1 und A_2 der als Belastung aufgefaßten $\frac{J_c}{J}$ -fach verzerrten M -Fläche.“

Es wird also, wenn τ_1 und τ_2 die wahren Werte der Endtangentialwinkel bedeuten,

$$\begin{aligned} EJ_c \tau_1 &= A_1 \\ EJ_c \tau_2 &= A_2. \end{aligned} \quad (112)$$

Um nun diesen Satz von MOHR auf den vorliegenden Fall in übersichtlicher Weise anwenden zu können, ist es zweckmäßig, den gegebenen Momentenverlauf in folgende drei Bestandteile zu zerlegen, die am freiaufliegend gedachten Stab angreifen:

1. Momentenverlauf infolge $+M_1$ am Stabende 1 (Abb. 140d).
2. „ „ „ $+M_2$ „ „ 2 (Abb. 140e).
3. „ „ „ der äußeren Belastung (Abb. 140f).

Für diese drei Fälle können die Endtangentialwinkel als Auflagerdrücke der jeweils $\frac{J_c}{J}$ -fach verzerrten M -Flächen getrennt bestimmt werden und man erhält der Reihe nach folgende drei Anteile:

$$\begin{aligned} \text{Für den ersten Fall} & \tau_1', \tau_2', \\ \text{„ „ zweiten „} & \tau_1'', \tau_2'', \\ \text{„ „ dritten „} & \alpha_1^0, \alpha_2^0. \end{aligned}$$

Durch Überlagerung dieser drei Fälle erhält man nach (112) unter Beachtung der aus den Abbildungen sich ergebenden Vorzeichen aller Winkelwerte (Uhrzeigersinn +):

$$\begin{aligned} EJ_c \tau_1 &= +\tau_1' - \tau_1'' + \alpha_1^0 \\ EJ_c \tau_2 &= -\tau_2' + \tau_2'' - \alpha_2^0. \end{aligned} \quad (113)$$

(Siehe auch Abb. 140g).

Die Belastungsfälle 1 und 2, die sich auf die Stabendmomente $+M_1$ und $+M_2$ beziehen, können unter Anwendung des Proportionalitätsgesetzes am besten so behandelt werden, daß man zunächst die Einheitsmomente angreifen läßt, also im ersten Fall das Moment $\bar{M}_1 = +1$ (Abb. 140b) und im zweiten Fall das Moment $\bar{M}_2 = +1$ (Abb. 140c). Die diesen Einheitsmomenten zugeordneten EJ_c -fach verzerrten Endtangentialwinkel α_1 und β_2 , bzw. α_2 und β_1 können wieder nach MOHR als Auflagerdrücke der entsprechenden $\frac{J_c}{J}$ -fach verzerrten \bar{M} -Flächen bestimmt werden. Dieser Gedankengang ist in den Abb. 140b und 140c veranschaulicht, in welchen auch die zugehörigen Biegelinien jeweils angedeutet sind.

Nach dem MAXWELLSchen Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen muß aber $\beta_1 = \beta_2$ sein. Es braucht daher für die Rechnung der Wert β nur einmal ermittelt werden, weshalb künftig einfach

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta \quad (114)$$

geschrieben wird. Es ist darunter immer jener EJ_c -fach verzerrte Endtangentialwinkel zu verstehen, der bei der Belastung des einen Stabendes mit dem Einheitsmoment $\bar{M} = +1$ am entgegengesetzten Stabende auftritt.

Es ergeben sich also, wie auch in Abb. 140d ersichtlich gemacht ist, bei dem Belastungsfall 1 für ein beliebiges Moment M_1 die EJ_c -fach verzerrten Endtangentialwinkel nach dem Proportionalitätsgesetz

$$\tau_1' = M_1 \cdot \alpha_1; \quad \tau_2' = M_1 \cdot \beta \quad (115)$$

und ebenso beim Belastungsfall 2, Abb. 140e, für ein beliebiges Moment M_2

$$\tau_1'' = M_2 \cdot \beta; \quad \tau_2'' = M_2 \cdot \alpha_2. \quad (116)$$

Führt man diese Ausdrücke in (113) ein, so erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} EJ_c \tau_1 &= + M_1 \alpha_1 - M_2 \beta + \alpha_1^0 \\ EJ_c \tau_2 &= - M_1 \beta + M_2 \alpha_2 - \alpha_2^0. \end{aligned} \quad (117)$$

Hiermit sind die gesuchten Endtangentialwinkel τ_1 und τ_2 als Funktion der Stabendmomente M_1 , M_2 , der äußeren Belastung (α_1^0 und α_2^0) und der nur von der Stabform abhängigen Winkelwerte α_1 , α_2 , β dargestellt (Abb. 140a bis g).

2. Formeln für die Stabendmomente.

In den Ausdrücken (117) sind bereits die wichtigsten Beziehungen zwischen Formänderungsgrößen, Stabendmomenten und äußerer Belastung enthalten. Sie können deshalb auch als Ausgangspunkt für weitere Ableitungen benutzt werden. Löst man z. B. diese beiden Gleichungen nach M_1 und M_2 auf, so erscheinen die *Stabendmomente* als Funktion der Endtangentialwinkel τ_1 , τ_2 , der Stabbelastung (α_1^0 und α_2^0) und der Winkelwerte α_1 , α_2 und β .

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{EJ_c \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \cdot \tau_1 + \frac{EJ_c \beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \cdot \tau_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \cdot \alpha_1^0 + \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \cdot \alpha_2^0 \\ M_2 &= \frac{EJ_c \beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \cdot \tau_1 + \frac{EJ_c \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \cdot \tau_2 - \frac{\beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \cdot \alpha_1^0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} \cdot \alpha_2^0. \end{aligned} \quad (118)$$

Für die in den vorstehenden Ausdrücken immer wiederkehrenden Festwerte, die nur von den Stababmessungen abhängen, kann eine vereinfachende Bezeichnung eingeführt werden, und zwar

$$\frac{EJ_c \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} = a_1; \quad \frac{EJ_c \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} = a_2; \quad \frac{EJ_c \beta}{\alpha_1 \alpha_2 - \beta^2} = b. \quad (119)$$

Damit lauten die Gl. (118) etwas übersichtlicher

$$\begin{aligned} M_1 &= a_1 \tau_1 + b \tau_2 - \frac{1}{EJ_c} (a_1 \alpha_1^0 - b \alpha_2^0) \\ M_2 &= b \tau_1 + a_2 \tau_2 - \frac{1}{EJ_c} (b \alpha_1^0 - a_2 \alpha_2^0). \end{aligned} \quad (120)$$

Um nun diese Ansätze in eine für die Berechnung von Rahmentragwerken geeignetere Form zu bringen, ist es zweckmäßig, an Stelle der Endtangentialwinkel τ_1 und τ_2 die *Knotendrehwinkel* φ und *Stabdrehwinkel* ψ einzuführen. Nach den schon im ersten Abschnitt aufgestellten Beziehungen (4) ist nun allgemein

$$\tau_1 = \varphi_1 + \psi \quad \text{und} \quad \tau_2 = \varphi_2 + \psi,$$

so daß damit (120) übergeführt werden kann in

$$\begin{aligned} M_1 &= a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + (a_1 + b) \psi - \frac{1}{EJ_c} (a_1 \alpha_1^0 - b \alpha_2^0) \\ M_2 &= a_2 \varphi_2 + b \varphi_1 + (a_2 + b) \psi - \frac{1}{EJ_c} (b \alpha_1^0 - a_2 \alpha_2^0). \end{aligned} \quad (121)$$

Setzt man

$$a_1 + b = c_1; \quad a_2 + b = c_2, \quad (122)$$

ferner

$$-\frac{1}{EJ_c} (a_1 \alpha_1^0 - b \alpha_2^0) = \mathfrak{M}_1; \quad -\frac{1}{EJ_c} (b \alpha_1^0 - a_2 \alpha_2^0) = \mathfrak{M}_2, \quad (123)$$

so erhält man die Ausdrücke für die Anschlußmomente M_1, M_2 eines Rahmenstabes 1—2 mit beliebig veränderlichen Querschnitten in übersichtlicher Form:

$$\begin{aligned} M_1 &= a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + c_1 \psi + \mathfrak{M}_1 \\ M_2 &= a_2 \varphi_2 + b \varphi_1 + c_2 \psi + \mathfrak{M}_2. \end{aligned} \quad (124)$$

Bei Verwendung von Δ als Rechnungsunbekannte an Stelle von ψ würden diese Ausdrücke lauten:

$$\begin{aligned} M_1 &= a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \frac{c_1}{l} \cdot \Delta + \mathfrak{M}_1 \\ M_2 &= a_2 \varphi_2 + b \varphi_1 + \frac{c_2}{l} \cdot \Delta + \mathfrak{M}_2. \end{aligned} \quad (124a)$$

Die Anwendung dieser Gleichungen in der Rahmenberechnung macht es erforderlich, sowohl für die Momente als auch für die Beiwerte eine genauere Bezeichnung einzuführen, um eine Verwechslung zu vermeiden und Irrtümer tunlichst auszuschalten. Zu diesem Zweck schreibt man die Gl. (124) in allgemeiner Form für einen Stab ν mit den Endpunkten m und n (Abb. 141) am besten folgendermaßen:

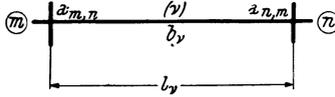


Abb. 141. Beiwerte des Rahmenstabes.

$$\begin{aligned} M_{m,n} &= a_{m,n} \varphi_m + b_\nu \varphi_n + c_{m,n} \psi_\nu + \mathfrak{M}_{m,n} \\ M_{n,m} &= a_{n,m} \varphi_n + b_\nu \varphi_m + c_{n,m} \psi_\nu + \mathfrak{M}_{n,m}. \end{aligned} \quad (125)$$

Darin bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} a_{m,n} &= \frac{E J_c \cdot \alpha_{n,m}}{\alpha_{m,n} \cdot \alpha_{n,m} - \beta_\nu^2}; & (\text{Beiwert } a \text{ für das Stabende } m) \\ a_{n,m} &= \frac{E J_c \cdot \alpha_{m,n}}{\alpha_{m,n} \cdot \alpha_{n,m} - \beta_\nu^2}; & (\text{Beiwert } a \text{ für das Stabende } n) \\ b_\nu &= \frac{E J_c \cdot \beta_\nu}{\alpha_{m,n} \cdot \alpha_{n,m} - \beta_\nu^2}; & (\text{Beiwert } b \text{ des Stabes } \nu) \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

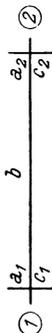
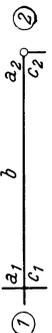
$$\left. \begin{aligned} c_{m,n} &= a_{m,n} + b_\nu; & (\text{Beiwert } c \text{ für das Stabende } m) \\ c_{n,m} &= a_{n,m} + b_\nu; & (\text{Beiwert } c \text{ für das Stabende } n). \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Schließlich sei noch der Ausdruck für die Summe der beiden Stabendmomente angeschrieben, der bei späteren Ableitungen öfter gebraucht wird. Durch Summieren der beiden Gl. (125) ergibt sich:

$$M_{m,n} + M_{n,m} = c_{m,n} \varphi_m + c_{n,m} \varphi_n + (c_{m,n} + c_{n,m}) \psi_\nu + \mathfrak{M}_{m,n} + \mathfrak{M}_{n,m}. \quad (128)$$

Die Tafel II, Seite 61, enthält eine Zusammenstellung der Formeln für die Stabendmomente $M_{1,2}$ und $M_{2,1}$ bei verschiedenen Lagerungsbedingungen und unter Berücksichtigung häufig auftretender Sonderfälle. Die dort angeführten Ausdrücke gelten allgemein für unsymmetrisch ausgebildete Stäbe. Bei symmetrischen Stäben ist $a_1 = a_2 = a$ und $c_1 = c_2 = c$ zu setzen.

Tafel II. Formeln für die Endmomente $M_{1,2}$, $M_{2,1}$ für Stäbe mit veränderlichen Querschnitten bei verschiedenen Lagerungsbedingungen.¹

Nr.	Lagerungsbedingungen	a) Allgemein (Stab belastet und verdrehbar)	b) Stab unbelastet ($\mathfrak{M} = 0$)	c) Stab unverdrehbar ($\psi = 0$)	d) Stab unbelastet und unverdrehbar ($\mathfrak{M} = 0, \psi = 0$)
1	Beide Stäbenden elastisch eingespannt.	$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + c_1 \psi + \mathfrak{M}_{1,2}$	$a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + c_1 \psi$	$a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \mathfrak{M}_{1,2}$	$a_1 \varphi_1 + b \varphi_2$
		$M_{2,1} = a_2 \varphi_2 + b \varphi_1 + c_2 \psi + \mathfrak{M}_{2,1}$	$a_2 \varphi_2 + b \varphi_1 + c_2 \psi$	$a_2 \varphi_2 + b \varphi_1 + \mathfrak{M}_{2,1}$	$a_2 \varphi_2 + b \varphi_1$
2	Stabende (1) elastisch eingespannt, Stabende (2) gelenkig angeschlossen.	$M_{1,2} = \left(a_1 - \frac{b^2}{a_2} \right) \varphi_1 + \left(c_1 - \frac{b c_2}{a_2} \right) \psi + \mathfrak{M}_{1,2} - \frac{b}{a_2} \mathfrak{M}_{2,1}$	$\left(a_1 - \frac{b^2}{a_2} \right) \varphi_1 + \left(c_1 - \frac{b c_2}{a_2} \right) \psi$	$\left(a_1 - \frac{b^2}{a_2} \right) \varphi_1 + \mathfrak{M}_{1,2} - \frac{b}{a_2} \mathfrak{M}_{2,1}$	$\left(a_1 - \frac{b^2}{a_2} \right) \varphi_1$
		$M_{2,1} = 0$	0	0	0
3	Stabende (1) elastisch eingespannt, Stabende (2) fest eingespannt ($\varphi_2 = 0$).	$M_{1,2} = \frac{1}{a_2} (b \varphi_1 + c_2 \psi + \mathfrak{M}_{2,1})$	$-\frac{1}{a_2} (b \varphi_1 + c_2 \psi)$	$-\frac{1}{a_2} (b \varphi_1 + \mathfrak{M}_{2,1})$	$-\frac{b}{a_2} \varphi_1$
		$M_{2,1} = a_1 \varphi_1 + c_1 \psi + \mathfrak{M}_{1,2}$	$a_1 \varphi_1 + c_1 \psi$	$a_1 \varphi_1 + \mathfrak{M}_{1,2}$	$a_1 \varphi_1$
4	Stabende (1) fest eingespannt ($\varphi_1 = 0$), Stabende (2) gelenkig angeschlossen.	$M_{1,2} = b \varphi_1 + c_2 \psi + \mathfrak{M}_{2,1}$	$b \varphi_1 + c_2 \psi$	$b \varphi_1 + \mathfrak{M}_{2,1}$	$b \varphi_1$
		$M_{2,1} = \left(c_1 - \frac{b c_2}{a_2} \right) \psi + \mathfrak{M}_{1,2} - \frac{b}{a_2} \mathfrak{M}_{2,1}$	$\left(c_1 - \frac{b c_2}{a_2} \right) \psi$	$\mathfrak{M}_{1,2} - \frac{b}{a_2} \mathfrak{M}_{2,1}$	0
5	Beide Stäbenden fest eingespannt ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$).	$M_{1,2} = \frac{1}{a_2} (c_2 \psi + \mathfrak{M}_{2,1})$	$-\frac{c_2}{a_2} \psi$	$-\frac{\mathfrak{M}_{2,1}}{a_2}$	0
		$M_{2,1} = c_1 \psi + \mathfrak{M}_{1,2}$	$c_1 \psi$	$\mathfrak{M}_{1,2}$	0
		$c_2 \psi + \mathfrak{M}_{2,1}$	$c_2 \psi$	$\mathfrak{M}_{2,1}$	0

¹ Vgl. auch Tafel I, Seite 4, für Stäbe konstanten Querschnittes.

IV. Die Stabfestwerte a, b, c .

1. Statische Deutung.

Über die Frage der Dimension und statischen Bedeutung der Stabfestwerte, die zugleich ein Maß der Stabsteifigkeit darstellen, geben unmittelbar die Ausdrücke (125) für die Stabendmomente Auskunft. Es ist daraus zunächst sofort ersichtlich, daß die drei Beiwerte a, b, c die Dimension eines Momentes haben müssen, da die Drehwinkel $\varphi_m, \varphi_n, \psi$ unbenannte Zahlen vorstellen. Die nähere statische Bedeutung der einzelnen Glieder und Beiwerte ergibt sich schließlich, wenn jeweils alle übrigen Glieder zum Verschwinden gebracht werden.

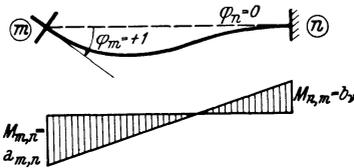


Abb. 142.

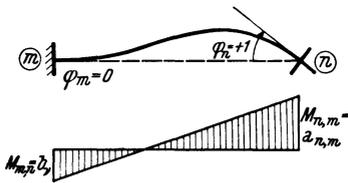


Abb. 143.

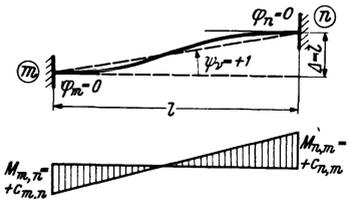


Abb. 144.

Abb. 142 bis 144. Statische Deutung der Werte a, b, c .

Setzt man beispielsweise

$$\varphi_n = 0; \quad \psi_v = 0; \quad \mathfrak{M}_{m,n} = 0; \quad \mathfrak{M}_{n,m} = 0,$$

so lauten die Gl. (125)

$$M_{m,n} = a_{m,n} \varphi_m; \quad M_{n,m} = b_v \varphi_m. \quad (129)$$

Für $\varphi_m = 1$ wird weiter

$$M_{m,n} = a_{m,n}; \quad M_{n,m} = b_v, \quad (129a)$$

d. h. der Stabfestwert $a_{m,n}$ kann statisch als jenes Moment $M_{m,n}$ gedeutet werden, das bei einer Verdrehung $\varphi_m = 1$ auftritt, wenn gleichzeitig alle übrigen Formänderungsgrößen gleich Null sind und der Stab unbelastet ist. Ebenso kann der Stabfestwert b_v als jenes Moment aufgefaßt werden, das unter denselben Voraussetzungen am *entgegengesetzten* Stabende, also am fest eingespannten Ende auftritt (Abb. 142).

Für den Stabfestwert $a_{n,m}$ gilt sinngemäß dieselbe Überlegung (Abb. 143).

Um über die Bedeutung der c -Werte Aufschluß zu erhalten, setzt man

$$\varphi_m = 0; \quad \varphi_n = 0; \quad \mathfrak{M}_{m,n} = 0; \quad \mathfrak{M}_{n,m} = 0.$$

Für diesen Fall lauten die Gl. (125)

$$M_{m,n} = c_{m,n} \cdot \psi_v; \quad M_{n,m} = c_{n,m} \cdot \psi_v; \quad (130)$$

für $\psi_v = 1$ ergibt sich schließlich

$$M_{m,n} = c_{m,n}; \quad M_{n,m} = c_{n,m}, \quad (130a)$$

d. h. die Beiwerte $c_{m,n}$ bzw. $c_{n,m}$ können statisch als Stabendmomente $M_{m,n}$ bzw. $M_{n,m}$ gedeutet werden, die bei einer Stabverdrehung $\psi_v = 1$ an dem Stabende m bzw. n auftreten, wenn gleichzeitig die übrigen Formänderungsgrößen verschwinden und der Stab unbelastet ist (Abb. 144).

2. Die zahlenmäßige Ermittlung der Stabfestwerte a, b, c .

Es sind hier allgemein zwei Fälle zu unterscheiden.

A. Bei Stäben mit beliebig veränderlichen Querschnitten.

In solchen Fällen müssen zunächst die Winkelwerte $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ für die Belastung $\bar{M}_1 = +1$ bzw. $\bar{M}_2 = +1$ am freiaufliegend gedachten Stab ermittelt werden. Dies kann in der bereits beschriebenen Weise nach dem MOHRschen Satz erfolgen. Sodann erhält man aus den Formeln (119) bzw. (126) und (127) die endgültigen Werte. Sind die Stäbe symmetrisch ausgebildet, so wird natürlich

$$a_{m,n} = a_{n,m} \quad \text{bzw.} \quad c_{m,n} = c_{n,m}. \quad (131)$$

B. Bei Stäben mit einseitig oder beidseitig geraden oder parabolischen Vouten.

Diese Stabformen treten im Bauwesen am häufigsten auf, weshalb sie eine besonders eingehende Behandlung erfordern. Unter der Annahme, daß sich die Trägheitsmomente der verschiedenen Querschnitte im gleichen Verhältnis ändern wie die dritten Potenzen der Querschnittshöhen, lassen sich für die Stabsteifigkeitswerte a_1, a_2 und b gebrauchsfertige Zahlentafeln aufstellen, in denen die verschiedensten Voutenlängen und Voutenhöhen berücksichtigt sind. Dies ist hier in der Weise geschehen, daß zunächst unter teilweiser Benützung der in STRASSNERS „Neuere Methoden“ entwickelten analytischen Ausdrücke die Endtangentenwinkel α_1, α_2 und β für alle in Betracht kommenden Voutenformen berechnet und sodann mit Hilfe der Ausdrücke (119) die Stabfestwerte a_1, a_2 und b ermittelt worden sind. Es wurden auf diese Weise für vier verschiedene Stabformen Zahlen- und Kurventafeln geschaffen, und zwar für:¹

1. Stäbe mit *einseitig geraden* Vouten (Zahlentafel 5, Kurventafel 5a).
2. Stäbe mit *einseitig parabolischen* Vouten (Zahlentafel 6, Kurventafel 6a).
3. Stäbe mit *beidseitig geraden*, zur Stabmitte symmetrisch ausgebildeten Vouten (Zahlentafel 7, Kurventafel 7a).
4. Stäbe mit *beidseitig parabolischen*, zur Stabmitte symmetrisch ausgebildeten Vouten (Zahlentafel 8, Kurventafel 8a).

In sämtlichen Tafeln sind die a - und b -Werte in $\frac{1}{EJ_c}$ -facher Verzerrung für einen Einheitsstab von der Länge $l = 1$ enthalten. Um die Zuordnung dieser *verzerrten* Tafelwerte zu den *wahren* a^* - und b^* -Werten eindeutig zum Ausdruck zu bringen und doch eine Verwechslung zu vermeiden, sind die Tafelwerte mit den entsprechenden deutschen Buchstaben a_1, a_2 und b bezeichnet. Es bestehen sonach folgende Beziehungen:

1. Bei Stäben mit einseitigen Vouten (Abb. 145):

$$a_1^* = \frac{EJ_c}{l} a_1; \quad a_2^* = \frac{EJ_c}{l} a_2; \quad b^* = \frac{EJ_c}{l} b. \quad (132)$$

2. Bei Stäben mit beidseitig symmetrisch angeordneten Vouten (Abb. 146):

$$a^* = \frac{EJ_c}{l} a; \quad b^* = \frac{EJ_c}{l} b. \quad (133)$$

Darin bedeutet J_c das Trägheitsmoment im unveränderlichen Stabbereich und l die wirkliche Länge des Stabes. Die verschiedenen Voutenformen und Voutengrößen kommen in den Tafeln durch die Verhältniszahlen λ und n zum Ausdruck. Es ist

$$\lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{\text{Voutenlänge}}{\text{Stablänge}}, \quad (134)$$

$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{\text{Trägheitsmoment im unveränderlichen Stabbereich}}{\text{Trägheitsmoment des Auflagerquerschnittes}}. \quad (135)$$

¹ Vgl. GULDAN: Beitrag zur Berechnung von Rahmentragwerken mit veränderlichen Stabquerschnitten. Prag: J. CALVE, 1933 und H. D. I.-Mitteilungen, Jg. 1934.

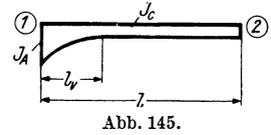


Abb. 145.

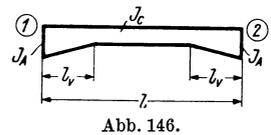


Abb. 146.

Abb. 145 und 146. Grundwerte der Voutenstäbe.

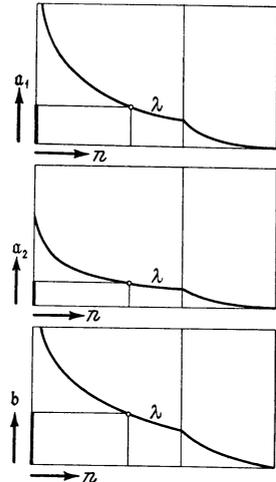


Abb. 147. Schema der Kurventafeln 5a und 6a zur Ermittlung der Werte a_1, a_2, b bei Voutenstäben.

Zwischenwerte von n bzw. λ sind in den Tafeln einzuschalten, was naturgemäß in den Kurventafeln bequemer durchzuführen ist. Die Anordnung der Kurventafeln 5a bzw. 6a für Stäbe mit einseitigen Vouten ist aus der schematischen Abb. 147 ersichtlich, in der nur *eine* λ -Kurve eingezeichnet ist. Die Werte a_1, a_2, b sind der Reihe nach für gegebene n - und λ -Werte aus den drei aufeinanderfolgenden Tafeln zu entnehmen. Jede einzelne dieser drei Tafeln, die eine Schar von λ -Kurven enthalten, ist so eingerichtet, daß die n -Werte als *Abszissen* und die Stabfestwerte a bzw. b als *Ordinaten* erscheinen. (Siehe Einführungsbeispiele 1 bis 4, Seite 202 bis 209.)

Für den Sonderfall, daß $\lambda = 0$ oder $n = 1$ wird, hat man es mit einem Stab mit unveränderlichem Trägheitsmoment zu tun. Die Zahlen- und Kurventafeln liefern für diesen Fall stets

$$a_1 = a_2 = a = 4; \quad b = 2. \quad (136)$$

Damit wird nach (132) oder (133)

$$a^* = \frac{4 EJ_c}{l}; \quad b^* = \frac{2 EJ_c}{l}, \quad (137)$$

ferner nach (122) oder (127)

$$c^* = a^* + b^* = \frac{6 EJ_c}{l}. \quad (138)$$

Für diesen Sonderfall gehen die allgemeinen Gl. (125) für die Stabendmomente in die bereits im ersten Abschnitt benutzte Form (5) für Stäbe mit unveränderlichem Querschnitt über und lauten:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= \frac{4 EJ_c}{l} \varphi_1 + \frac{2 EJ_c}{l} \varphi_2 + \frac{6 EJ_c}{l} \psi + \mathfrak{M}_{1,2} \\ M_{2,1} &= \frac{4 EJ_c}{l} \varphi_2 + \frac{2 EJ_c}{l} \varphi_1 + \frac{6 EJ_c}{l} \psi + \mathfrak{M}_{2,1}. \end{aligned} \quad (139)$$

Die Zahlen- und Kurventafeln ermöglichen ferner auch die Berücksichtigung der sprunghaft ansteigenden Trägheitsmomente an den Stabkreuzungspunkten. Es kann dort eine sehr steil abfallende Voute angenommen und im Grenzfall $n = \frac{J_c}{J_A} = 0$ gesetzt werden (siehe Zahlenbeispiele 15, 17, 18, 19, 21).

C. Bei Stäben mit ungleichen Vouten.

Besitzen die auf beiden Seiten des Stabes vorhandenen Vouten verschiedene Formen, so können die Stabfestwerte zwar nicht direkt aus den Tafeln entnommen werden, doch ist ihre Bestimmung unter Zuhilfenahme der Tafeln 17, 18, bzw. 17a, 18a für die Winkelwerte α_1, α_2 und β noch verhältnismäßig einfach. Diesem Ermittlungsverfahren liegt folgender Gedankengang zugrunde.¹

Soll z. B. für den in Abb. 148 dargestellten Einheitsstab der EJ_c -fach verzerrte Winkelwert α_1 bestimmt werden, so kann dies nach MOHR bekanntlich in der Weise erfolgen, daß man den Auflagerdruck A_1 der $\frac{J_c}{J}$ -fach verzerrten \bar{M} -Linie ermittelt.

Nun kann man aber die vorliegende Stabform durch andere Stäbe ersetzen, für welche die gesuchten Winkelwerte aus den vorhandenen Tafeln unmittelbar zu entnehmen sind. Man denkt sich also an Stelle des gegebenen Stabes mit zwei verschiedenen Vouten (Abb. 148) drei Ersatzstäbe, und zwar zwei Stäbe mit nur je *einer* Voute von der jeweils gleichen Form wie beim gegebenen Stab

¹ Vgl. auch DAŠEK, Beton und Eisen 1936, wo unabhängig von den bereits weiter zurückliegenden Arbeiten des Verfassers ebenfalls auf diesen Zusammenhang hingewiesen worden ist.

(Abb. 148a, b) und einen Stab *ohne* Vouten (Abb. 148c). Für jeden dieser Stäbe können nun die zugehörigen Auflagerdrehwinkel α_1, α_2 und β in der bekannten Weise als Auflagerdrücke bestimmt werden. Es ist weiter unschwer festzustellen, daß der in Abb. 148 dargestellte Fall mit ungleichen Vouten durch eine entsprechende Überlagerung der drei in Abb. 148a, b, c dargestellten Fälle erhalten werden kann. Wenn zugleich beachtet wird, daß in Übereinstimmung mit dem Aufbau der Zahlen- und Kurventafeln das Stabende auf der Voutenseite stets mit „1“ und das entgegengesetzte, also voutenfreie Ende mit „2“ bezeichnet ist, so kann unter Bezug auf die Abbildungen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^{(a)} + A_2^{(b)} - A_1^{(c)}; \\ A_2 &= A_2^{(a)} + A_1^{(b)} - A_2^{(c)}. \end{aligned} \quad (140)$$

Hierin bedeuten sämtliche A -Werte jeweils die Auflagerdrücke der in den Abbildungen schraffierten \bar{M} -Flächen, wobei sich die Zeichen $(a), (b)$ und (c) auf die Ersatzstäbe beziehen.

Setzt man in (140) an Stelle der Auflagerdrücke A die entsprechenden Auflagerdrehwinkel und beachtet man, daß

$$A_1^{(c)} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad A_2^{(c)} = \frac{1}{6} \quad (141)$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1^{(a)} + \alpha_2^{(b)} - \frac{1}{3}; \\ \beta_2 &= \beta_2^{(a)} + \beta_1^{(b)} - \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (142)$$

Die letzte Gleichung kann, da nach dem MAXWELL'schen Satz $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ sein muß, auch so geschrieben werden:

$$\beta = \beta^{(a)} + \beta^{(b)} - \frac{1}{6}. \quad (143)$$

Dieselbe Überlegung führt natürlich zum Ziel, wenn es sich um die Ermittlung von α_2 handelt. Zwecks besserer Übersicht werden die drei entsprechenden Formeln zur Ermittlung von α_1, α_2 und β bei Stäben mit ungleichen Vouten noch einmal gemeinsam angeschrieben, wobei die in den Hilfstafeln verwendeten Bezeichnungen $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}$ für den „Einheitsstab“ verwendet werden:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \bar{\alpha}_1^{(a)} + \bar{\alpha}_2^{(b)} - \frac{1}{3} \\ \bar{\alpha}_2 &= \bar{\alpha}_2^{(a)} + \bar{\alpha}_1^{(b)} - \frac{1}{3} \\ \bar{\beta} &= \bar{\beta}^{(a)} + \bar{\beta}^{(b)} - \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (144)$$

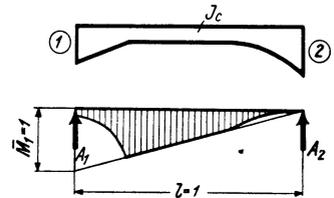


Abb. 148.

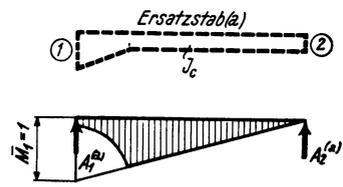


Abb. 148a.

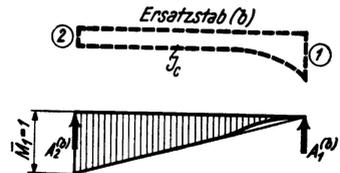


Abb. 148b.

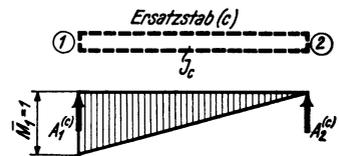


Abb. 148c.

Abb. 148a bis c. Ersatzstäbe (a) (b) (c) zur Bestimmung der Werte $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ bei Stäben mit ungleichen Vouten.

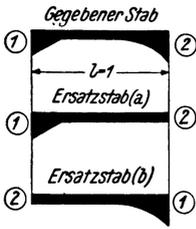


Abb. 149.

Die Bedeutung der Zeiger ist in der schematischen Abb. 149 ersichtlich gemacht.

Die praktische Verwendung ist damit hinreichend klar. Die Winkelwerte für die *Ersatzstäbe* (a) und (b) sind bei geraden Vouten aus Tafel 17 bzw. 17a, bei parabolischen Vouten aus Tafel 18 bzw. 18a zu entnehmen. Damit können dann aus den Formeln (144) die *gesuchten* Winkelwerte leicht ermittelt werden. Die Stabfestwerte $a_{1,2}$, $a_{2,1}$ und b ergeben sich dann aus den Formeln (119) (siehe auch Einführungsbeispiel 4, Seite 207).

3. Verwendung der Werte a , b , c in der Rahmenberechnung.

Für die Verwendung der Stabfestwerte a , b , c bei der zahlenmäßigen Berechnung von Rahmentragwerken gilt im wesentlichen dasselbe, was bereits im ersten Abschnitt, III, 5 über die Steifigkeitszahl k gesagt worden ist. Führt man die Beiwerte a , b , c in *wahrer* Größe in die Rechnung ein, so erhält man auch die Momente und die Formänderungswerte in *wahrer* Größe. Führt man hingegen sämtliche Stabfestwerte z -fach *verzerrt* in die Rechnung ein, so ergeben sich die Momente wieder in wahrer Größe, obwohl die Formänderungswerte durchwegs $\frac{1}{z}$ -fach *verzerrt* erscheinen. Als Verzerrungsfaktor kann auch hier

$$z = \frac{1}{E J_0} \quad (145)$$

gewählt werden, wobei J_0 ein in der Rechnung öfter wiederkehrendes Trägheitsmoment oder einen willkürlich gewählten runden Wert bedeutet. So kann z. B. für $J_0 = 0,001 \text{ m}^4$ gesetzt werden, womit der Verzerrungsfaktor

$$z = \frac{1000}{E} \quad (146)$$

wird. Es würde also z. B. für die zahlenmäßige Rechnung zu setzen sein:

$$a_1 = \frac{E J_c}{l} a_1 \cdot z = \frac{E J_c}{l} a_1 \cdot \frac{1000}{E} = \frac{1000 J_c}{l} a_1$$

und ähnlich

$$a_2 = \frac{1000 J_c}{l} a_2; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} b, \quad (147)$$

wobei auch J_c in m^4 gedacht ist. Sollen ausnahmsweise auch die Formänderungswerte in ihrer wahren Größe bestimmt werden, so sind die aus der Rechnung erhaltenen *verzerrten* Größen nachträglich durch Multiplikation mit z wieder zu entzerren [siehe auch Gl. (21) des ersten Abschnittes].

V. Die zahlenmäßige Ermittlung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

1. Bei Stäben mit beliebig veränderlichen Querschnitten und beliebiger Belastung.

Da die Stabbelastungsglieder mit den Einspannmomenten des fest eingespannten Trägers identisch sind, so unterliegen sie derselben Vorzeichenregel, die bereits im ersten Abschnitt, I, 2 für die Stabendmomente festgelegt worden ist. Im übrigen kann die Berechnung allgemein nach den Ausdrücken (123) erfolgen, welche mit der neuen Bezeichnungswiese lauten:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{E J_c} (a_1^* \alpha_1^0 - b^* \alpha_2^0); \quad \mathfrak{M}_2 = -\frac{1}{E J_c} (b^* \alpha_1^0 - a_2^* \alpha_2^0). \quad (148)$$

Ersetzt man nach (132) die wahren Stabfestwerte a_1^* , a_2^* , b^* durch die auf den *Einheitsstab* bezogenen Werte a_1 , a_2 , b , so erhält man:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{l} (a_1 \alpha_1^0 - b \alpha_2^0); \quad \mathfrak{M}_2 = +\frac{1}{l} (a_2 \alpha_2^0 - b \alpha_1^0). \quad (149)$$

Die in dieser Formel enthaltenen Werte α_1^0 und α_2^0 können am einfachsten nach MOHR als Auflagerdrücke A_1^0 und A_2^0 der $\frac{J_c}{J}$ -fach verzerrten M_o -Fläche am freiaufhängend gedachten Träger bestimmt werden (Abb. 150).

Bei symmetrisch ausgebildeten Vouten und symmetrischer Stabbelastung wird

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha^0 \quad \text{und} \quad a_1 = a_2 = a,$$

so daß die Formeln (149) dann einfach lauten:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{\alpha^0}{l} (a - b); \quad \mathfrak{M}_2 = +\frac{\alpha^0}{l} (a - b). \quad (150)$$

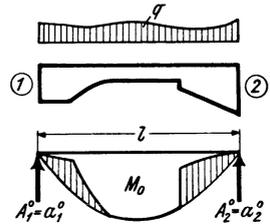


Abb. 150. Bestimmung der α^0 -Werte.

2. Bei Stäben ohne Vouten.

In diesem Falle wird nach (136) $a_1 = a_2 = 4$ und $b = 2$, womit die Gl. (149) übergehen in

$$\mathfrak{M}_1 = -2 \frac{2 \alpha_1^0 - \alpha_2^0}{l}; \quad \mathfrak{M}_2 = +2 \frac{2 \alpha_2^0 - \alpha_1^0}{l}. \quad (149 a)$$

Bei symmetrischer Belastung wird überdies $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha^0$ und damit

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{2 \alpha^0}{l}; \quad \mathfrak{M}_2 = +\frac{2 \alpha^0}{l}. \quad (150 a)$$

Die \mathfrak{M} -Werte für Stäbe ohne Vouten sind für verschiedene Belastungsfälle in den Tafeln 2 bis 4 zusammengestellt.

3. Bei Stäben mit geraden oder parabolischen Vouten.

Für alle Belastungsfälle, mit denen der praktisch tätige Ingenieur am häufigsten zu tun hat, wurde eine ganze Reihe von Zahlen- und Kurventafeln aufgestellt, um die sonst allzu zeitraubende Ermittlung der Stabbelastungsglieder einfacher zu gestalten. Die Einrichtung und der Gebrauch dieser Hilfstafeln, die nach den verschiedenen Stabformen und Belastungsfällen geordnet sind, seien hier kurz beschrieben.

A. Hilfstafeln für gleichmäßige Vollbelastung.

Hierbei sind folgende Stabformen berücksichtigt:

1. Stäbe mit *einseitig geraden* Vouten (Zahlentafel 9, Kurventafel 9a).
2. Stäbe mit *einseitig parabolischen* Vouten (Zahlentafel 10, Kurventafel 10a).
3. Stäbe mit *beidseitig geraden*, zur Stabmitte symmetrisch ausgebildeten Vouten (Zahlentafel 11, Kurventafel 11a).
4. Stäbe mit *beidseitig parabolischen*, zur Stabmitte symmetrisch ausgebildeten Vouten (Zahlentafel 12, Kurventafel 12a).

Die Ausgangswerte für die Benutzung der Hilfstafeln sind stets die von der Voutenform abhängigen Werte

$$n = \frac{J_c}{J_A} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{l_v}{l},$$

deren Bedeutung aus (134) und (135) hervorgeht.

Sämtliche Tafeln sind so aufgebaut, daß sich die gesuchten Belastungsglieder \mathfrak{M} , also die Einspannmomente des voll eingespannten Trägers, aus folgenden Formeln ergeben:

Bei Stäben mit beidseitig symmetrisch ausgebildeten Vouten:

$$\mathfrak{M}_1 = -\kappa \cdot \frac{ql^2}{12}; \quad \mathfrak{M}_2 = +\kappa \cdot \frac{ql^2}{12}, \quad (151)$$

bei Stäben mit einseitigen Vouten:

$$\mathfrak{M}_1 = -\kappa_1 \frac{ql^2}{12}; \quad \mathfrak{M}_2 = +\kappa_2 \frac{ql^2}{12}. \quad (151a)$$

Zur Entnahme der κ -Werte können die Zahlen- und Kurventafeln Verwendung finden. Die Kurventafeln für Stäbe mit einseitigen Vouten sind als Doppeltafeln eingerichtet, und zwar ergibt der obere Teil den Wert κ_1 und der untere Teil κ_2 .

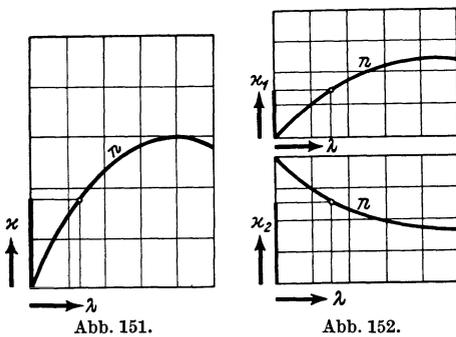


Abb. 151 und 152. Schema der Kurventafeln 9a und 11a, bzw. 10a und 12a zur Bestimmung der \mathfrak{M} -Werte bei Voutenstäben.

Sämtliche Kurventafeln zur Ermittlung der Belastungsglieder für Vollbelastung enthalten die n -Werte als Kurvenschar, während die λ -Werte als Abszissen und die gesuchten κ -Werte als Ordinaten erscheinen. In Abb. 151 ist die Anlage dieser Kurventafeln für Stäbe mit *beidseitig* symmetrisch ausgebildeten Vouten schematisch dargestellt, während die Abb. 152 die Anordnung der Doppeltafeln für Stäbe mit *einseitigen* Vouten zeigt. (Siehe auch Einführungsbeispiele 1, 2, 3, Seite 202 bis 207.)

Die Größe des Einflusses der verschieden geformten Vouten tritt bei den Kurventafeln ganz besonders klar hervor, weshalb

sie auch für die Gestaltung der verschiedenen Rahmenstäbe und namentlich bei fest eingespannten Trägern wertvolle Anhaltspunkte liefern können.

B. Hilfstafeln für Einzellasten bzw. Streckenlasten.

Um allen Laststellungen Rechnung zu tragen, wurden für die wichtigsten Voutenformen die *Einflußlinien* für die Einspannmomente des voll eingespannten Trägers ermittelt und in den Hilfstafeln 13 bis 16 und 13a bis 16a zusammengestellt.

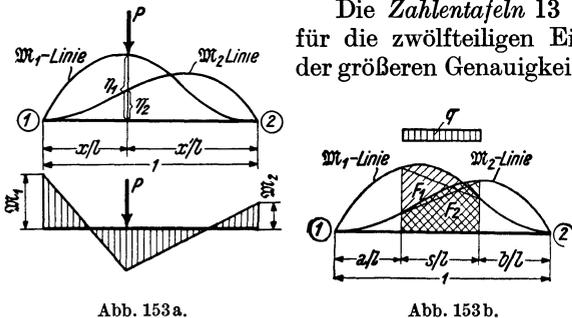


Abb. 153a und b. Auswertung der \mathfrak{M} -Einflußlinien für Einzellasten bzw. Streckenlasten bei Voutenstäben.

Die *Zahlentafeln* 13 bis 16 enthalten jeweils die Werte für die zwölfteiligen Einflußlinien und eignen sich wegen der größeren Genauigkeit besonders zum Auftragen, während

die *graphischen* Tafeln 13a bis 16a als zehnteilige Einflußlinien dargestellt sind und dadurch vorteilhaft zur direkten Auswertung,

also zur unmittelbaren Bestimmung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 benutzt werden können. Die Einrichtung dieser Tafel ist so getroffen, daß immer eine Gruppe von Einflußlinien für einen bestimmten Wert λ und die

zugeordneten Werte $n = (0); (0,03); (0,05); (0,10); (0,20); (0,50); (1,0)$ in *einem Felde* gezeichnet ist. Dadurch ist die Einschaltung zwischen verschiedenen n -Werten, die häufiger vorkommt, leicht durchführbar.

Da in jedem Falle sowohl die Einflußlinien für \mathfrak{M}_1 als auch für \mathfrak{M}_2 gezeichnet sind, so wird die Auswertung besonders einfach, wie auch aus der Abb. 153a hervorgeht. Es wird für irgendeine von oben nach unten wirkende Last P an der Stelle x unter Beachtung der Vorzeichenregel (erster Abschnitt, I, 2)

$$\mathfrak{M}_1 = -\eta_1 \cdot Pl; \quad \mathfrak{M}_2 = +\eta_2 \cdot Pl. \quad (152)$$

Für mehrere gleich große Einzellasten wird

$$\mathfrak{M}_1 = -Pl \sum \eta_1; \quad \mathfrak{M}_2 = +Pl \sum \eta_2. \quad (152a)$$

Handelt es sich um gleichmäßig verteilte Streckenlasten, so können ebenfalls die Einflußlinien vorteilhaft zur Auswertung verwendet werden. Es ergibt sich dann nach Abb. 153b

$$\mathfrak{M}_1 = -F_1 \cdot ql^2; \quad \mathfrak{M}_2 = +F_2 \cdot ql^2, \quad (153)$$

wobei F_1 und F_2 die der belasteten Strecke entsprechenden Flächen der Einflußlinien für \mathfrak{M}_1 bzw. \mathfrak{M}_2 eines Trägers mit $l=1$ bedeuten (siehe Zahlenbeispiel Seite 203).

Ist ferner der Stab völlig unregelmäßig belastet, so geschieht die Ermittlung der Belastungsglieder \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 am zweckmäßigsten in der Art, daß die gegebene Belastung durch eine Reihe von Einzellasten ersetzt wird, womit dann die Auswertung der Einflußlinien durch Summieren der einzelnen Einflüsse erfolgen kann.

Schließlich können diese Tafeln auch zur Ermittlung der Stabbelastungsglieder Verwendung finden, wenn die äußere Belastung aus einem Biegemoment besteht.

Denkt man sich dieses Angriffsmoment M durch ein Kräftepaar mit dem Hebelarm a ersetzt, dann ist

$$M = P \cdot a, \text{ also } P = \frac{M}{a}. \quad (154)$$

Werden für dieses Kräftepaar die \mathfrak{M} -Einflußlinien ausgewertet, so erhält man nach Abb. 154 für ein *rechtsdrehendes* Angriffsmoment (\curvearrowright):

$$\mathfrak{M}_{1,2} = -M \frac{\eta_1'' - \eta_1'}{a}; \quad \mathfrak{M}_{2,1} = +M \frac{\eta_2'' - \eta_2'}{a}. \quad (155)$$

Hingegen erhält man für ein *linksdrehendes* Angriffsmoment (\curvearrowleft):

$$\mathfrak{M}_{1,2} = +M \frac{\eta_1'' - \eta_1'}{a}; \quad \mathfrak{M}_{2,1} = -M \frac{\eta_2'' - \eta_2'}{a}. \quad (155a)$$

Die vorstehenden Formeln liefern natürlich auch für den Sonderfall, daß das äußere Moment M am Stabende (1) oder (2) angreift, die entsprechenden Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} mit dem richtigen Vorzeichen. Greift also z. B. das rechtsdrehende Moment \mathfrak{M} am Stabende (1) an, so wird, da die Neigung der $\mathfrak{M}_{1,2}$ -Einflußlinie an dieser Stelle bekanntlich gleich 1 ist (also $\frac{\eta_1'' - \eta_1'}{a} = 1$), nach (155) $\mathfrak{M}_{1,2} = -M$. Gleichzeitig wird für diesen Fall $\mathfrak{M}_{2,1} = 0$, weil die Neigung der $\mathfrak{M}_{2,1}$ -Einflußlinie an dieser Stelle gleich Null ist (also $\frac{\eta_2'' - \eta_2'}{a} = 0$). Der Einfluß der Vouten oder einer anderen Veränderlichkeit der Stabquerschnitte tritt also bei der Bestimmung der Belastungsglieder \mathfrak{M} in diesem Sonderfalle nicht in Erscheinung.

C. Stäbe mit ungleichen Vouten.

Hier gelten ähnliche Überlegungen wie bei der Ermittlung der Stabfestwerte a_1 , a_2 und b für solche Stäbe und es gestaltet sich damit die Berechnung wieder ver-

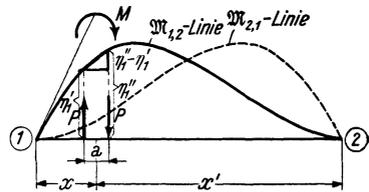


Abb. 154. Auswertung der \mathfrak{M} -Einflußlinien für äußere Momente.

hältnismäßig einfach. Zur Verwendung gelangen die allgemeinen Formeln (149), welche lauten:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{l} (a_1 \alpha_1^0 - b \alpha_2^0) \tag{156}$$

$$\mathfrak{M}_2 = +\frac{1}{l} (a_2 \alpha_2^0 - b \alpha_1^0).$$

Die in diesen Ausdrücken enthaltenen Werte a_1, a_2 und b sind nach IV, 2, C dieses Abschnittes zu ermitteln, während für die Bestimmung der Auflagerdrehwinkel α_1^0 und α_2^0 , die von der äußeren Belastung abhängen, sinngemäß zu verfahren ist wie bei der in IV, 2, C ausführlich behandelten Ermittlung der Winkelwerte α_1, α_2 und β . Hier sind die gesuchten EJ_c -fachen Auflagerdrehwinkel α_1^0 und α_2^0 identisch mit den entsprechenden Auflagerdrücken der $\frac{J_c}{J}$ -fach verzerrten M_0 -Fläche am freiaufliegenden Träger. Wie nun aus Abb. 155 hervorgeht, läßt sich diese verzerrte M_0 -Fläche F_0 durch die drei darunter gezeichneten M -Flächen $F^{(a)}, F^{(b)}, F^{(c)}$ in der Art ersetzen, daß

$$F_0 = F^{(a)} + F^{(b)} - F^{(c)} \tag{157}$$

wird. Dieselbe Beziehung muß auch für die Auflagerdrücke der verzerrten M_0 -Fläche gelten, so daß mit den Bezeichnungen der Abb. 155 a, b, c geschrieben werden kann:

$$A_1^0 = A_1^{0(a)} + A_2^{0(b)} - A_1^{0(c)} \tag{158}$$

oder auch

$$\alpha_1^0 = \alpha_1^{0(a)} + \alpha_2^{0(b)} - \alpha_1^{0(c)} \tag{159}$$

bzw.

$$\alpha_2^0 = \alpha_2^{0(a)} + \alpha_1^{0(b)} - \alpha_2^{0(c)}.$$

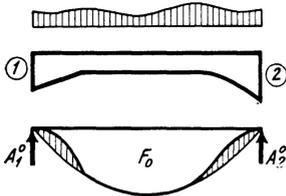


Abb. 155.

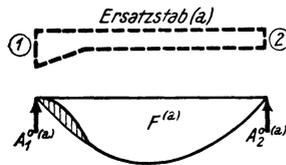


Abb. 155 a.

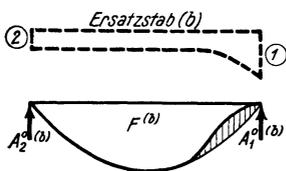


Abb. 155 b.

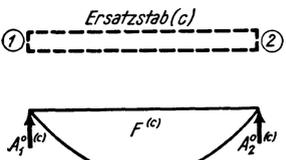


Abb. 155 c.

Abb. 155 a bis c. Ersatzstäbe (a) (b) (c) zur Bestimmung der Werte α_1^0 und α_2^0 bei Stäben mit ungleichen Vouten.

Diese Formeln entsprechen in ihrem Aufbau und auch in ihrer Bedeutung sinngemäß den Formeln (144). Die Werte $\alpha_1^{0(a)}, \alpha_1^{0(b)}, \alpha_2^{0(a)}, \alpha_2^{0(b)}$ und $\alpha_1^{0(c)}, \alpha_2^{0(c)}$ beziehen sich wieder auf die Ersatzstäbe (a), (b), (c), wie aus der schematischen Skizze in Abb. 156 klar hervorgeht.

Verwendet man auch hier die in den Hilfstafeln gewählten Bezeichnungen $\bar{\alpha}_1^{0(a)}, \bar{\alpha}_2^{0(a)}$ usw. für die auf den Stab mit der Länge $l=1$ bezogenen Auflagerdrehwinkel, so lauten die vorstehenden Formeln (159)

$$\bar{\alpha}_1^0 = \bar{\alpha}_1^{0(a)} + \bar{\alpha}_2^{0(b)} - \bar{\alpha}_1^{0(c)} \tag{159a}$$

$$\bar{\alpha}_2^0 = \bar{\alpha}_2^{0(a)} + \bar{\alpha}_1^{0(b)} - \bar{\alpha}_2^{0(c)}.$$

Für die zahlenmäßige Auswertung der Ausdrücke (159) sind nach der Art der Belastung folgende Fälle zu unterscheiden:

1. *Gleichmäßige Vollbelastung.* In diesem Falle sind die α^0 -Werte für die Ersatzstäbe mit geraden Vouten aus der Hilfstafel 21 bzw. 21 a und für Ersatzstäbe mit parabolischen Vouten aus der Hilfstafel 22 bzw. 22 a direkt zu entnehmen (siehe Einführungsbeispiel Seite 208).

2. *Einzellasten.* Für diesen Fall stehen wieder *Einflußlinien* zur Verfügung, und zwar für Stäbe

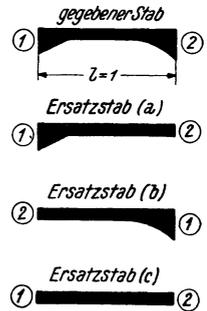


Abb. 156.

mit geraden Vouten in Tafel 25 und für Stäbe mit parabolischen Vouten in Tafel 26.

3. *Streckenlasten* oder *beliebige* Belastung. Bei gleichmäßig verteilten Streckenlasten kann die Auswertung der unter 2 erwähnten Einflußlinien in ähnlicher Weise erfolgen, wie dies an Hand der Abb. 153 b für die Ermittlung der \mathfrak{M} -Werte beschrieben worden ist. Etwaige unregelmäßige Belastungen sind durch Einzellasten zu ersetzen, so daß wieder die Einflußlinien zur Auswertung herangezogen werden können.

VI. Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knotenpunkten.

In allen folgenden Ableitungen wird stets auf die entsprechenden Ausführungen des ersten Abschnittes Bezug genommen. Dadurch werden einerseits überflüssige Wiederholungen vermieden, andererseits ergeben sich direkte Vergleichsmöglichkeiten, die auch gewisse Unterschiede in den Einzelheiten der Berechnungen in Erscheinung treten lassen.

1. Bedingungsgleichungen.

Für die Ableitung einer gebrauchsfertigen Mustergleichung kann naturgemäß genau derselbe Weg eingeschlagen werden wie im ersten Abschnitt für den gleichen Fall. Man betrachte also auch hier wieder einen Rahmenknotenpunkt n , in welchen vier Stäbe mit beliebig veränderlichen Trägheitsmomenten einmünden (Abb. 157). Die zugehörigen Stabfestwerte a und b der einzelnen Stäbe seien bekannt. Sie sind in dieser Skizze eingetragen, und zwar die a -Werte jeweils an den Stabenden und die b -Werte in der Stabmitte.

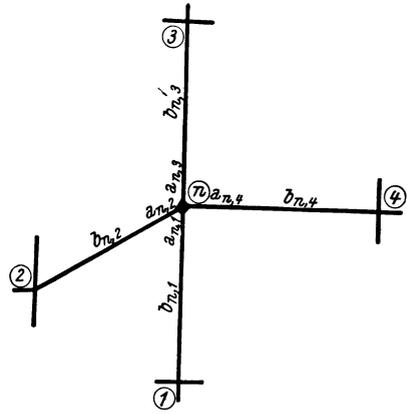


Abb. 157. Beiwertskeizze.

Zur Aufstellung der Knotengleichgewichtsbedingung, welche besagt, daß die Summe aller im Knoten n angreifenden Momente gleich Null sein muß, werden zunächst die Ausdrücke für die Stabanschlußmomente im Knoten n angeschrieben. Nach (125) wird mit der Bezeichnung in Abb. 157 und unter Beachtung, daß hier φ für alle Stäbe Null ist:

$$\begin{aligned} M_{n,1} &= a_{n,1} \varphi_n + b_{n,1} \varphi_1 + \mathfrak{M}_{n,1} \\ M_{n,2} &= a_{n,2} \varphi_n + b_{n,2} \varphi_2 + \mathfrak{M}_{n,2} \\ M_{n,3} &= a_{n,3} \varphi_n + b_{n,3} \varphi_3 + \mathfrak{M}_{n,3} \\ M_{n,4} &= a_{n,4} \varphi_n + b_{n,4} \varphi_4 + \mathfrak{M}_{n,4} \end{aligned} \quad (160)$$

Entsprechend der Gl. (16) erhält man auch hier durch Summieren der Ausdrücke (160)

$$\sum_{i=1}^{i=4} M_{n,i} = 0 = \varphi_n \sum_{i=1}^{i=4} a_{n,i} + \sum_{i=1}^{i=4} b_{n,i} \varphi_i + \sum_{i=1}^{i=4} \mathfrak{M}_{n,i}. \quad (161)$$

In allgemeiner Schreibweise für beliebig viele in einem Knoten n zusammentreffende Stäbe und unter Annahme, daß dort außerdem Kragarmmomente M_k angreifen, lautet die Gl. (161) [vgl. Gl. (17)]:

$$\varphi_n \sum_i a_{n,i} + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k = 0. \quad (162)$$

Durch Einführung der von früher bereits bekannten vereinfachenden Bezeichnungen

ergibt sich die endgültige Form der *Knotengleichung* für Rahmentragwerke mit unverschieblichen Knotenpunkten [vgl. Gl. (18)]

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + s_n = 0. \quad (163)$$

Hierin bedeuten [vgl. Gl. (19) und (20)]

$$d_n = \sum_i a_{n,i}, \quad (164)$$

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k \quad (165)$$

oder, wenn kein Kragarmmoment auftritt, einfach

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}. \quad (165a)$$

Das *Diagonalglied* d_n stellt somit die Summe der am betrachteten Knoten n liegenden a -Werte aller dort steif angeschlossenen Stäbe vor.

Das *Knotenbelastungsglied* s_n ist die Summe der nach V dieses Abschnittes zahlenmäßig zu ermittelnden Stäbelastungsglieder $\mathfrak{M}_{n,i}$, einschließlich der Summe der etwa vorhandenen, direkt im Knoten angreifenden Kragarmmomente.

Die Glieder $\sum b_{n,i} \varphi_i$ treten in einer Knotengleichung in solcher Zahl auf, als in dem betrachteten Knoten Stäbe steif angeschlossen sind. Sind jedoch einzelne dieser Stäbe im gegenüberliegenden Knoten φ_i fest eingespannt, so daß dort $\varphi_i = 0$ wird, so entfallen auch die diesen Stäben zugeordneten Glieder $b_{n,i} \varphi_i$.

2. Beschreibung des Rechnungsganges.

Der Arbeitsvorgang bei Aufstellung der Rahmgleichungen läßt sich in folgende Abschnitte gliedern:

1. Feststellung der Tragwerksabmessungen: Stablängen, Querschnittsgrößen, Voutenlängen usw.,
2. Ermittlung der Beiwerte a_1 , a_2 und b nach IV dieses Abschnittes,
3. Anfertigung der „Beiwertskeizze“,
4. Ermittlung der Diagonalglieder d_n nach (164),
5. Berechnung der „Stäbelastungsglieder“ \mathfrak{M} nach V dieses Abschnittes und der „Knotenbelastungsglieder“ s_n nach (165) bzw. (165a),
6. Tabellarische Aufstellung der Gleichungen nach (163) unter Benutzung der „Beiwertskeizze“,
7. Auflösung des Gleichungssystems nach Muster I oder II,
8. Ermittlung der Stabendmomente nach (125) unter Zuhilfenahme der Beiwertskeizze.

(Siehe auch Zahlenbeispiele 14 bis 16.)

3. Gleichungstabelle für ein unverschiebliches Tragwerk.

In Abb. 158 ist die Gestalt des Tragwerkes mit der zugehörigen Belastung ersichtlich, während Abb. 159 die Beiwertskeizze darstellt.

Es sind hier insgesamt vier Knotendrehwinkel, nämlich φ_6 , φ_7 , φ_8 , φ_9 gemeinsam zu bestimmen, also vier Gleichungen aufzustellen. Nach Ermittlung von d_6 , d_7 , d_8 , d_9 nach (164) und s_6 , s_7 , s_8 , s_9 nach (165a) kann an Hand der Beiwertskeizze die

Aufstellung der Gleichungsgruppe 11 bzw. der Gleichungstabelle 11 durch wiederholte Anwendung der Mustergleichung (163) vorgenommen werden.

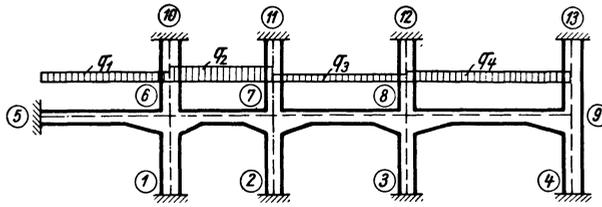


Abb. 158.

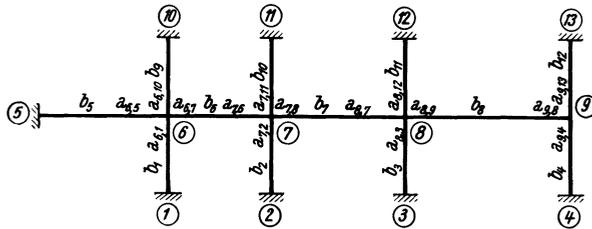


Abb. 159. Beiwertskeizze.

Gleichungstabelle 11.

Gleichungsgruppe 11.

$$\begin{aligned} d_6 \varphi_6 + b_6 \varphi_7 + s_6 &= 0 \\ d_7 \varphi_7 + b_6 \varphi_6 + b_7 \varphi_8 + s_7 &= 0 \\ d_8 \varphi_8 + b_7 \varphi_7 + b_8 \varphi_9 + s_8 &= 0 \\ d_9 \varphi_9 + b_8 \varphi_8 + s_9 &= 0 \end{aligned}$$

	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	B
φ_6	d_6	b_6			s_6
φ_7	b_6	d_7	b_7		s_7
φ_8		b_7	d_8	b_8	s_8
φ_9			b_8	d_9	s_9

Nach Auflösung dieser Gleichungen können an Hand der Beiwertskeizze die Stabendmomente nach (125) unter Beachtung, daß hier $\psi = 0$ ist, bestimmt werden. Man erhält z. B.

$$\begin{aligned} M_{1,6} &= b_1 \varphi_6, & M_{6,1} &= a_{6,1} \varphi_6, \\ M_{2,7} &= b_2 \varphi_7, & M_{6,5} &= a_{6,5} \varphi_6 + \mathfrak{M}_{6,5}, \\ M_{3,8} &= b_3 \varphi_8, & M_{6,7} &= a_{6,7} \varphi_6 + b_6 \varphi_7 + \mathfrak{M}_{6,7}, \\ M_{4,9} &= b_4 \varphi_9, & M_{6,10} &= a_{6,10} \varphi_6. \end{aligned}$$

(Siehe auch Zahlenbeispiele 14 bis 16.)

4. Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen.

Für Tragwerke mit *veränderlichen* Stabquerschnitten gilt bei gelenkigen Stabanschlüssen im wesentlichen dasselbe, was bereits im ersten Abschnitt, Seite 16, ganz allgemein gesagt worden ist. Auch hier kann man wieder die Gelenkdrehwinkel als Funktion der am gleichen Stab gegenüberliegenden Stabendverdrehungen ausdrücken und dadurch die Zahl der Bedingungsgleichungen entsprechend vermindern, wie im folgenden gezeigt werden soll.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Die Knotengleichung für den Knoten (n) des in Abb. 160 dargestellten Teiles eines *unverschieblichen* Tragwerkes mit einem gelenkigen Stabanschluß (4) lautet zunächst allgemein nach (163):

$$d_n \varphi_n + b_{n,1} \varphi_1 + b_{n,2} \varphi_2 + b_{n,3} \varphi_3 + b_{n,\bar{4}} \varphi_{\bar{4}} + s_n = 0.$$

Für den Gelenkdrehwinkel $\varphi_{\bar{4}}$ kann aber nach Tafel II, Seite 61, Fall 2c, mit den vorliegenden Bezeichnungen gesetzt werden:

$$\varphi_{\bar{4}} = -\frac{1}{a_{\bar{4},n}} (b_{n,\bar{4}} \varphi_n + \mathfrak{M}_{\bar{4},n}).$$

Führt man diesen Ausdruck in die obige Gleichung ein, so erhält man nach Ordnung der einzelnen Glieder:

$$\left(d_n - \frac{b_{n,\bar{4}}^2}{a_{\bar{4},n}} \right) \varphi_n + b_{n,1} \varphi_1 + b_{n,2} \varphi_2 + b_{n,3} \varphi_3 + s_n - \frac{b_{n,\bar{4}}}{a_{\bar{4},n}} \cdot \mathfrak{M}_{\bar{4},n} = 0. \quad (166)$$

Diese Gleichung kann wieder auf eine allgemeine Form gebracht werden, in der beliebig viele gelenkige Stabanschlüsse berücksichtigt sind:

$$\boxed{d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + s_n^0 = 0.} \quad (167)$$

Darin bedeuten:

$$d_n^0 = d_n - \sum_g \frac{b_{n,g}^2}{a_{g,n}}; \quad (168)$$

$$s_n^0 = s_n - \sum_g \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \cdot \mathfrak{M}_{g,n}. \quad (169)$$

Man erhält also das *Diagonalglied* d_n^0 für einen Knoten (n), dessen steif angeschlossene Stäbe zum Teil auf der Gegenseite gelenkig gelagert sind, indem man zuerst in üblicher Weise den Wert $d_n = \sum_i a_{n,i}$ für alle in (n) elastisch eingespannten Stäbe bildet und davon den Summenwert $\sum_g \frac{b_{n,g}^2}{a_{g,n}}$ abzieht, der sich nur auf solche Stäbe erstreckt, die in (n) steif und auf der Gegenseite gelenkig angeschlossen sind. Hierbei bedeutet $a_{g,n}$ den a -Wert auf der Gelenkseite des betreffenden Stabes.

Ähnlich erhält man nach (169) das *Knotenbelastungsglied* s_n^0 , indem man von dem Summenwert $s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$ für alle im Knoten (n) elastisch eingespannten Stäbe den Summenwert $\sum_g \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \mathfrak{M}_{g,n}$ abzieht, der sich nur auf die in (n) steif und auf der Gegenseite gelenkig angeschlossen Stäbe erstreckt. Es bedeuten darin $\mathfrak{M}_{g,n}$ das Stabelastungsglied und $a_{g,n}$ den a -Wert auf der *Gelenkseite* solcher Stäbe.

Die Glieder $\sum_r b_{n,r} \varphi_r$ beziehen sich nur auf jene Stäbe des Knotens (n), die beidseitig elastisch eingespannt sind.

Die Anwendung der Knotengleichung (167) soll anschließend an einem Beispiel eingehend dargestellt werden.

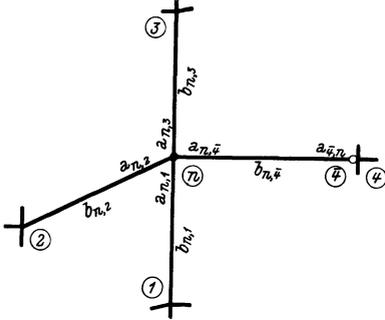


Abb. 160. Rahmenteil mit gelenkigem Stabanschluß. Beiwertskeizze.

b) Anwendungsbeispiel.

Für das in Abb. 161 ersichtliche Tragwerk, dessen Riegel und Säulen beliebig belastet seien, sind unter Annahme gelenkiger Stabanschlüsse bei 2, 6 und 7 die Knotengleichungen anzuschreiben.

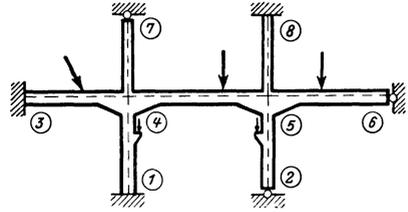


Abb. 161. Rahmentragwerk mit Gelenken.

Als Unbekannte sind hier nur die Knotendrehwinkel φ_4 und φ_5 zu bestimmen. Die Knotengleichung für unverschiebliche Tragwerke lautet nach (167):

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + s_n^0 = 0.$$

Nach (168) erhält man unter Zuhilfenahme der Beiwertschizze Abb. 162 die *Diagonalglieder*

$$d_4^0 = d_4 - \sum \frac{b_{4,g}^2}{a_{g,4}} = a_{4,1} + a_{4,3} + a_{4,5} + a_{4,7} - \frac{b_6^2}{a_{7,4}},$$

$$d_5^0 = d_5 - \sum \frac{b_{5,g}^2}{a_{g,5}} = a_{5,2} + a_{5,4} + a_{5,6} + a_{5,8} - \frac{b_2^2}{a_{2,5}} - \frac{b_5^2}{a_{6,5}}$$

und nach (169) die zugehörigen *Knotenbelastungsglieder*

$$s_4^0 = s_4 - \sum \frac{b_{4,g}}{a_{g,4}} \mathfrak{M}_{g,4} = \mathfrak{M}_{4,1} + \mathfrak{M}_{4,3} + \mathfrak{M}_{4,5} + \mathfrak{M}_{4,7} - \frac{b_6}{a_{7,4}} \mathfrak{M}_{7,4},$$

$$s_5^0 = s_5 - \sum \frac{b_{5,g}}{a_{g,5}} \mathfrak{M}_{g,5} = \mathfrak{M}_{5,2} + \mathfrak{M}_{5,4} + \mathfrak{M}_{5,6} + \mathfrak{M}_{5,8} - \frac{b_2}{a_{2,5}} \mathfrak{M}_{2,5} - \frac{b_5}{a_{6,5}} \mathfrak{M}_{6,5}.$$

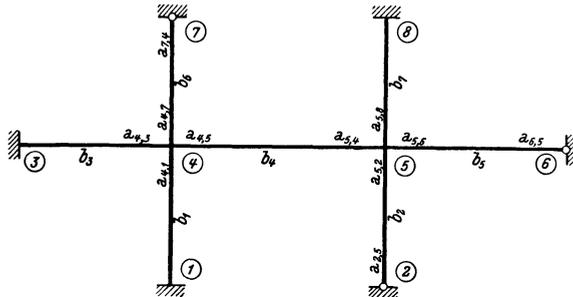


Abb. 162. Beiwertschizze.

Damit ergeben sich an Hand der Beiwertschizze die *Knotengleichungen* in gewöhnlicher Schreibweise bzw. in Tabellenform.

$$d_4^0 \varphi_4 + b_4 \varphi_5 + s_4^0 = 0,$$

$$d_5^0 \varphi_5 + b_4 \varphi_4 + s_5^0 = 0.$$

Gleichungstabelle 12.

	φ_4	φ_5	B
φ_4	d_4^0	b_4	s_4^0
φ_5	b_4	d_5^0	s_5^0

Nach Auflösung dieser beiden Gleichungen kann nach (125) bzw. nach den entsprechenden Formeln der Tafel II, Seite 61, die Ermittlung der *Stabendmomente* vorgenommen werden. Man erhält hier mit den Bezeichnungen der Beiwertschizze:

$$M_{1,4} = b_1 \varphi_4 + \mathfrak{M}_{1,4},$$

$$M_{3,4} = b_3 \varphi_4 + \mathfrak{M}_{3,4},$$

$$M_{4,1} = a_{4,1} \varphi_4 + \mathfrak{M}_{4,1},$$

$$\begin{aligned}
 M_{4,3} &= a_{4,3} \varphi_4 + \mathfrak{M}_{4,3}, \\
 M_{4,5} &= a_{4,5} \varphi_4 + b_4 \varphi_5 + \mathfrak{M}_{4,5}, \\
 M_{4,7} &= \left(a_{4,7} - \frac{b_6^2}{a_{7,4}} \right) \varphi_4 + \mathfrak{M}_{4,7} - \frac{b_6}{a_{7,4}} \mathfrak{M}_{7,4}, \\
 M_{5,2} &= \left(a_{5,2} - \frac{b_2^2}{a_{2,5}} \right) \varphi_5 + \mathfrak{M}_{5,2} - \frac{b_2}{a_{2,5}} \mathfrak{M}_{2,5}, \\
 M_{5,4} &= a_{5,4} \varphi_5 + b_4 \varphi_4 + \mathfrak{M}_{5,4}, \\
 M_{5,6} &= \left(a_{5,6} - \frac{b_5^2}{a_{6,5}} \right) \varphi_5 + \mathfrak{M}_{5,6} - \frac{b_5}{a_{6,5}} \mathfrak{M}_{6,5}, \\
 M_{5,8} &= a_{5,8} \varphi_5 + \mathfrak{M}_{5,8}, \\
 M_{8,5} &= b_7 \varphi_5 + \mathfrak{M}_{8,5}.
 \end{aligned}$$

(Siehe auch Zahlenbeispiel 17.)

VII. Rahmentragwerke mit verschieblichen Knotenpunkten.

1. Allgemeines.

Wie schon im ersten Abschnitt ausführlich dargelegt wurde, versteht man darunter solche Tragwerke, bei welchen nicht allein *Knotenverdrehungen*, sondern auch *Stabverdrehungen* vorkommen. Als Unbekannte der Rechnung treten in solchen Fällen die Knotendrehwinkel φ und die Stabdrehwinkel ψ bzw. die „gegenseitigen“ Verschiebungen Δ oder die Knotenverschiebungen δ auf. Demgemäß sind zwei Arten von

Bedingungsgleichungen zur Bestimmung dieser Unbekannten zu unterscheiden.

Knotengleichungen. In Abb. 163 ist der Knotenpunkt n irgendeines verschieblichen Tragwerkes mit vier Stäben und den benachbarten Knotenpunkten 1, 2, 3, 4 herausgezeichnet. Ferner sind darin die Festwerte a_1, a_2 und b sowie c_1 und c_2 der einzelnen Stäbe in ordnungsgemäßer Bezeichnung so eingetragen, wie es für eine Beiwertskizze zweckmäßig ist. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß *alle* vier im Knotenpunkt n zusammentreffenden Stäbe verdrehbar sind.

Durch Auswertung der Bedingung $\sum_i M_{n,i} = 0$ ergibt sich sodann unter Benutzung von (125) in derselben Weise wie früher [vgl. (37)] die allgemeine Form der *Knotengleichung*

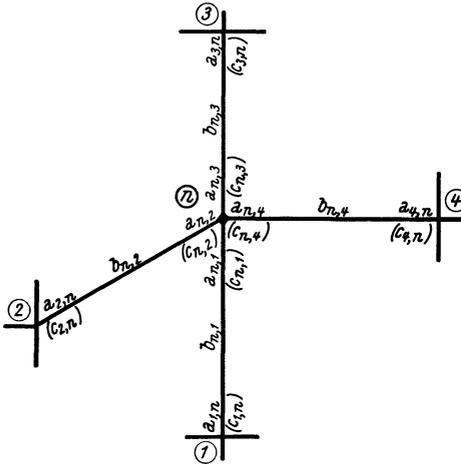


Abb. 163. Beiwertskizze für einen verschieblichen Tragwerksteil mit veränderlichen Stabquerschnitten.

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + \sum_i c_{n,i} \psi_{n,i} + s_n = 0. \tag{170}$$

Die Werte d_n und s_n sind nach (164) bzw. (165) zu ermitteln.

Die Glieder $c_{n,i} \psi_{n,i}$, wobei unter $c_{n,i}$ stets der am Knoten n gelegene c -Wert zu verstehen ist, treten nur bei Stäben in Erscheinung, die eine Verdrehung erleiden. Es ergeben sich also in einer Knotengleichung immer nur so viele ψ -Glieder, als in den betrachteten Knoten Stäbe mit Verdrehungen vorhanden sind.

Verschiebungsgleichungen. Wie im ersten Abschnitt, so können auch hier für die verschiedenen Tragwerkstypen gebrauchsfertige Mustergleichungen aufgestellt werden. Das soll in den folgenden Kapiteln gezeigt werden.

2. Der beliebig belastete Stockwerkrahmen mit lotrechten, geschoßweise gleich langen Ständern.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Zieht man in Betracht, daß für die hier behandelten Tragwerksformen in einer Knotengleichung höchstens zwei ψ -Glieder auftreten

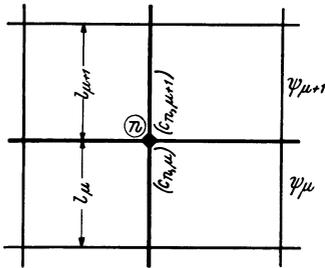


Abb. 164. Bezeichnungen.

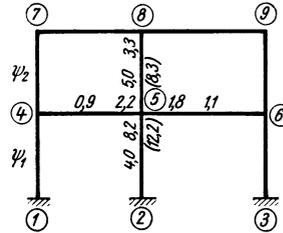


Abb. 165. Beiwertschizze.

können, und zwar für die oberhalb und unterhalb in den betrachteten Knoten einmündenden Stiele, so kann in Gl. (170) an Stelle von

$$\sum_i c_{n,i} \psi_{n,i} = c_{n,\mu} \psi_{\mu} + c_{n,\mu+1} \psi_{\mu+1} \quad (171)$$

gesetzt werden. Hierin bedeuten ψ_{μ} bzw. $\psi_{\mu+1}$ die Stabdrehwinkel in den unterhalb bzw. oberhalb des Knotens n liegenden Stockwerken und $c_{n,\mu}$ bzw. $c_{n,\mu+1}$ die am Knoten n gelegenen c -Werte der Stiele im Stockwerk μ bzw. $\mu+1$ (Abb. 164). Damit lautet die *Knotengleichung* (170) [vgl. (40)] ausführlicher:

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + c_{n,\mu} \psi_{\mu} + c_{n,\mu+1} \psi_{\mu+1} + s_n = 0. \quad (172)$$

Die zahlenmäßige Anwendung dieser Gleichung sei an folgendem Beispiel für einen Knoten gezeigt. In Abb. 165 ist die Beiwertschizze für einen Tragwerksteil dargestellt. Darin sind nur die Beiwerte enthalten, die für die Aufstellung dieser einen Gleichung benötigt werden. Es sind dies die am Knoten (5) gelegenen a -Werte, sowie die zugehörigen Klammerwerte c und schließlich die in der Stabmitte eingetragenen b -Werte für jene Stäbe, die am Knoten (5) zusammentreffen. Dabei ist zu beachten, daß nach (127) die c -Werte immer einfach als Summe der entsprechenden Werte a und b des betrachteten Stabes erhalten werden. Das Diagonalglied für den Knoten (5) ergibt sich nach (164) mit

$$d_5 = \sum_i a_{5,i} = 8,2 + 2,2 + 5,0 + 1,8 = 17,2.$$

Damit lautet die Gleichung für den Knoten (5) nach (172):

$$17,2 \varphi_5 + 0,9 \varphi_4 + 1,1 \varphi_6 + 3,3 \varphi_8 + 12,2 \psi_1 + 8,3 \psi_2 + s_5 = 0.$$

Verschiebungsgleichungen. Für die Aufstellung und weitere Auswertung der statischen Gleichgewichtsgleichung $\sum H = 0$ für irgendein Stockwerk kann auch

hier von der allgemeinen Gl. (44) ausgegangen werden, da dort dieselben Voraussetzungen vorliegen wie hier. Diese Gleichung lautet:

$$\left(\sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A}\right) l + \sum (M_o + M_u) = 0. \quad (173)$$

Drückt man den Summenausdruck $(M_o + M_u)$ nach (128) als Funktion der Formänderungsgrößen und der Stabbelastung aus, so erhält man die *Verschiebungsgleichung* für ein Stockwerk μ mit der hier gewählten Bezeichnung:

$$\sum_{\mu} c_u \varphi_u + \sum_{\mu} c_o \varphi_o + D_{\mu} \psi_{\mu} + S_{\mu} = 0, \quad (174)$$

wobei

$$D_{\mu} = \sum_{\mu} (c_o + c_u) \quad (175)$$

$$S_{\mu} = \left(\sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A}\right) \cdot l_{\mu} + \sum_{\mu} (\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u). \quad (176)$$

Vorzeichen: $- \nearrow +$

Die Verschiebungsgleichung enthält somit:

1. Die Glieder $\sum_{\mu} c_u \varphi_u$, d. h. die Summe der Produkte aus den unteren Drehwinkeln und den unteren c -Werten aller Stäbe des Stockwerkes μ .
2. Die Glieder $\sum_{\mu} c_o \varphi_o$, d. h. die Summe der Produkte aus den oberen Drehwinkeln und den oberen c -Werten aller Stäbe des Stockwerkes μ .
3. Das Diagonalglied $D_{\mu} \psi_{\mu}$, wobei nach (175) D_{μ} die Summe der oberen und unteren c -Werte sämtlicher Stäbe des Stockwerkes bedeutet.
4. Das Belastungsglied S_{μ} , das nach (176) aus der äußeren Belastung zu ermitteln ist. (Genauere Angaben siehe im ersten Abschnitt, IV, 3.)

Die praktische Anwendung der Verschiebungsgleichung (174) wird anschließend an einem Beispiel gezeigt. In Abb. 166 sind nur die erforderlichen Beiwerte c der Säulen eingetragen. Nach (175) werden die Diagonalglieder

$$D_1 = \sum_{(1)} (c_o + c_u) = 15,0 + 12,5 + 26,4 + 20,0 + 13,0 + 10,2 = 97,1$$

$$D_2 = \sum_{(2)} (c_o + c_u) = 12,5 + 10,0 + 20,5 + 15,5 + 11,3 + 8,4 = 78,2$$

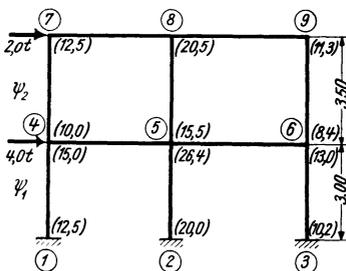


Abb. 166. Beiwertschizze.

und nach (176) die Belastungsglieder

$$S_1 = (4,0 + 2,0) \cdot 3,0 = 18,0 \text{ tm}$$

$$S_2 = 2,0 \cdot 3,5 = 7,0 \text{ tm.}$$

Somit lauten die Verschiebungsgleichungen nach (174) für das erste Stockwerk:

$$15,0 \varphi_4 + 26,4 \varphi_5 + 13,0 \varphi_6 + 97,1 \psi_1 + 18,0 = 0$$

und für das zweite Stockwerk:

$$10,0 \varphi_4 + 15,5 \varphi_5 + 8,4 \varphi_6 + 12,5 \varphi_7 + 20,5 \varphi_8 + 11,3 \varphi_9 + 78,2 \psi_2 + 7,0 = 0.$$

b) Gleichungstabelle für ein dreistöckiges, unsymmetrisches Rahmentragwerk.

Die Gestalt des Tragwerkes ist aus Abb. 167 ersichtlich, die zugleich als Beiwertschizze dargestellt ist. Es seien beliebige Belastung und verschiedene Feldweiten und Geschoßhöhen vorausgesetzt.

Gleichungstabelle 13.

	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	ψ_1	ψ_2	ψ_3	B	
φ_5	d_5	b_5			b_8						$c_{5,1}$	$c_{5,9}$		s_5	
φ_6	b_5	d_6	b_6			b_9					$c_{6,2}$	$c_{6,10}$		s_6	
φ_7		b_6	d_7	b_7			b_{10}				$c_{7,3}$	$c_{7,11}$		s_7	
φ_8			b_7	d_8				b_{11}			$c_{8,4}$	$c_{8,12}$		s_8	
φ_9	b_8				d_9	b_{12}			b_{15}			$c_{9,5}$	$c_{9,13}$	s_9	
φ_{10}		b_9			b_{12}	d_{10}	b_{13}					$c_{10,6}$		s_{10}	
φ_{11}			b_{10}			b_{13}	d_{11}	b_{14}		b_{16}		$c_{11,7}$	$c_{11,14}$	s_{11}	
φ_{12}				b_{11}			b_{14}	d_{12}				$c_{12,8}$		s_{12}	
φ_{13}					b_{15}				d_{13}	b_{17}			$c_{13,9}$	s_{13}	
φ_{14}						b_{16}			b_{17}	d_{14}			$c_{14,11}$	s_{14}	
ψ_1	$c_{5,1}$	$c_{6,2}$	$c_{7,3}$	$c_{8,4}$							D_1			S_1	
ψ_2	$c_{5,9}$	$c_{6,10}$	$c_{7,11}$	$c_{8,12}$	$c_{9,5}$	$c_{10,6}$	$c_{11,7}$	$c_{12,8}$				D_2			S_2
ψ_3					$c_{9,13}$		$c_{11,14}$		$c_{13,9}$	$c_{14,11}$			D_3	S_3	

Insgesamt sind 13 Unbekannte zu bestimmen, und zwar: die Knotendrehwinkel φ_5 bis φ_{14} und die Stabdrehwinkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Mit Hilfe der Beiwertschizze sind nach (164) die Diagonalglieder d_5 bis d_{14} der Knotengleichungen und nach (175) die Diagonalglieder D_1, D_2, D_3 der Verschiebungsgleichungen zu bestimmen. Weiter sind noch die Belastungsglieder s_5 bis s_{14} nach (165a) sowie S_1, S_2, S_3 nach (176) zu ermitteln. Damit kann die tabellarische Aufstellung der Knotengleichungen nach (172) und der Verschiebungsgleichungen nach (174) vorgenommen werden.

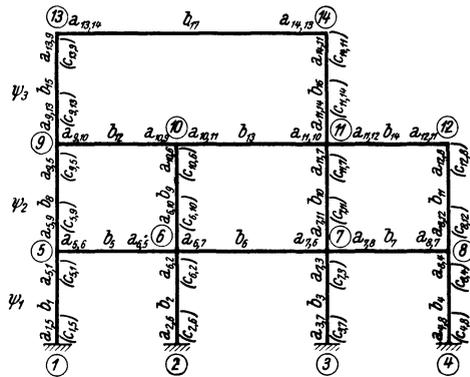


Abb. 167. Beiwertschizze.

3. Der beliebig belastete Stockwerkrahmen mit lotrechten, ungleich langen Ständern.

Es ist hier zweckmäßig, als Unbekannte an Stelle der ψ -Werte die Verschiebungsgrößen Δ einzuführen (vgl. auch die im ersten Abschnitt, IV, 4 an Hand der Abb. 89 gegebenen näheren Erklärungen).

Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Führt man für die in Gl. (172) enthaltenen ψ -Werte, die nach den Stockwerken benannt sind, nach (2) die entsprechenden Δ -Werte ein, so ergibt sich die *Knotengleichung* in übersichtlicher Form:

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + \bar{c}_{n,\mu} \Delta_\mu + \bar{c}_{n,\mu+1} \Delta_{\mu+1} + s_n = 0. \quad (177)$$

Hierin bedeuten:

$$\bar{c}_{n,\mu} = \frac{c_{n,\mu}}{l_\mu}; \quad \bar{c}_{n,\mu+1} = \frac{c_{n,\mu+1}}{l_{\mu+1}}. \quad (178)$$

Bei der Ermittlung der Stabendmomente aus den Formänderungsgrößen empfiehlt es sich, die bereits in der Festwerttabelle nach (178) enthaltenen \bar{c} -Werte zu verwenden. Die entsprechenden Formeln lauten dann für eine Säule $m-n$ des Stockwerkes μ unter Beachtung, daß $\varphi_\mu = \frac{\Delta_\mu}{l_\mu}$ ist:

$$\begin{aligned} M_{m,n} &= a_{m,n} \varphi_m + b \varphi_n + \bar{c}_{m,n} \Delta_\mu + \mathfrak{M}_{m,n} \\ M_{n,m} &= a_{n,m} \varphi_n + b \varphi_m + \bar{c}_{n,m} \Delta_\mu + \mathfrak{M}_{n,m}. \end{aligned} \quad (179)$$

Verschiebungsgleichungen. Die allgemeine Form der *Verschiebungsgleichung* für das Stockwerk μ ergibt sich wieder durch Auswertung der Bedingung $\sum H = 0$ und lautet in übersichtlicher Schreibweise (vgl. 54):

$$\sum_{\mu} \bar{c}_u \varphi_u + \sum_{\mu} \bar{c}_o \varphi_o + D_\mu \Delta_\mu + S_\mu = 0. \quad (180)$$

Hierin bedeuten:

$$D_\mu = \sum_{\mu} \frac{1}{l} (\bar{c}_o + \bar{c}_u), \quad (181)$$

$$S_\mu = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{U} + \sum_{\mu} \frac{1}{l} (\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u). \quad (182)$$

Vorzeichen: $\rightarrow +$, $\leftarrow -$.

Es folgt ein Zahlenbeispiel, in welchem die Anwendung der Gl. (180) gezeigt wird. In Abb. 168 sind nur die zur Aufstellung der Verschiebungsgleichung erforderlichen Beiwerte (\bar{c}) der einzelnen Stiele eingetragen. Nach (181) ergibt sich

$$D_1 = \frac{1}{4,0} (6,5 + 5,4) + \frac{1}{3,1} (8,6 + 6,2) = 7,75$$

$$D_2 = \frac{1}{3,0} (5,8 + 4,4) + \frac{1}{3,8} (6,6 + 5,3) = 6,53$$

und nach (182) ist

$$S_1 = 2,1 + 1,3 + 0,45 + 0,6 \cdot 1,2 = 4,57 \text{ t}$$

$$S_2 = 1,3 + 0,45 + 0,6 \cdot 1,2 = 2,47 \text{ t}.$$

Damit erhält man nach (180) die Verschiebungsgleichung für das unterste Stockwerk:

$$6,5 \varphi_3 + 8,6 \varphi_4 + 7,75 \Delta_1 + 4,57 = 0$$

und ebenso für das zweite Stockwerk:

$$4,4 \varphi_3 + 5,3 \varphi_4 + 5,8 \varphi_5 + 6,6 \varphi_6 + 6,53 \Delta_2 + 2,47 = 0.$$

(Siehe auch die Zahlenbeispiele 18, 19.)

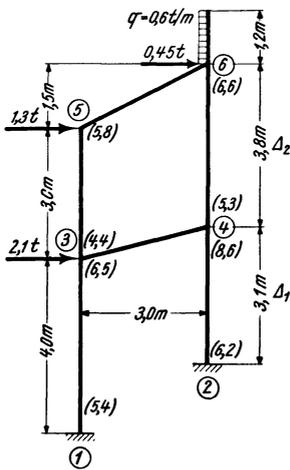


Abb. 168. Belastungs- und Beiwertschizze.

4. Verschiebliche Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen.

A. Allgemeines.

Knotengleichungen. Ist ein im Knoten (n) einmündender Stab auf der Gegenseite (g) gelenkig angeschlossen (Abb. 169), so kann der Gelenkdrehwinkel φ_g allgemein nach Tafel II, Seite 61, Fall 2a als Funktion von φ_n und $\psi_{n,g}$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\varphi_g = -\frac{1}{a_{g,n}} (b_{n,g} \varphi_n + c_{g,n} \psi_{n,g} + \mathfrak{M}_{g,n}). \quad (183)$$

Denkt man sich nun in einem Rahmenknoten (n) beliebig viele Stäbe zusammentreffend, von denen eine beliebige Anzahl in den benachbarten Knoten gelenkig angeschlossen, während die übrigen dort fest oder elastisch eingespannt sind, so erhält man durch Einführen des Ausdrucks (183) für φ_g in Gl. (170) nach entsprechendem Ordnen der einzelnen Glieder die allgemeine Form der *Knotengleichung* für verschiebliche Tragwerke mit gelenkigen Stabanschlüssen:



Abb. 169.

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + \sum_r c_{n,r} \psi_{n,r} + \sum_g c_{n,g}^0 \psi_{n,g} + s_n^0 = 0 \quad (184)$$

oder, wenn für $\psi = \frac{\Delta}{l}$ und für $\frac{c}{l} = \bar{c}$ gesetzt wird,

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + \sum_r \bar{c}_{n,r} \Delta_{n,r} + \sum_g \bar{c}_{n,g}^0 \Delta_{n,g} + s_n^0 = 0. \quad (185)$$

Hierin bedeuten wie früher

$$d_n^0 = d_n - \sum_g \frac{b_{n,g}^2}{a_{g,n}}; \quad (186)$$

$$s_n^0 = s_n - \sum_g \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \cdot \mathfrak{M}_{g,n} \quad (187)$$

und weiter:

$$c_{n,g}^0 = c_{n,g} - \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \cdot c_{g,n} \quad (188)$$

bzw.

$$\bar{c}_{n,g}^0 = \bar{c}_{n,g} - \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \cdot \bar{c}_{g,n}. \quad (189)$$

Die \sum_g beziehen sich auf jene Gelenkstäbe, die im Knoten (n) elastisch eingespannt und auf der Gegenseite gelenkig angeschlossen sind, während sich \sum_r über die beidseitig steif angeschlossenen Stäbe erstreckt.

Die Werte d_n und s_n sind in üblicher Weise nach (164) bzw. (165) zu ermitteln. Im übrigen gelten hier sinngemäß die im ersten Abschnitt, Seite 36 gegebenen Erläuterungen.

Verschiebungsgleichungen. Ähnlich wie im ersten Abschnitt, Seite 37 sollen die Verschiebungsgleichungen mit den zugehörigen Knotengleichungen wiederum zuerst für verschiedene Formen des Mehrfeldrahmens und anschließend für den Stockwerkrahmen angeschrieben werden. Sie ergeben sich aus der allgemeinen Form (180)

$$\sum_{\mu} \bar{c}_{\mu} \varphi_{\mu} + \sum_{\mu} \bar{c}_o \varphi_o + D_{\mu} \Delta_{\mu} + S_{\mu} = 0, \quad (190)$$

wenn die Gelenkdrehwinkel φ_{μ} bzw. φ_o durch die übrigen Formänderungsgrößen des betreffenden Stabes ersetzt werden. Die hierzu notwendigen Ausdrücke sollen gleich hier zusammengestellt werden.

Nach Tafel II, Seite 61, Fall 2a und 4a erhält man für die in Abb. 170 a, b, c dargestellten drei Stabarten folgende Formeln für die Gelenkdrehwinkel φ_u bzw. φ_o ,

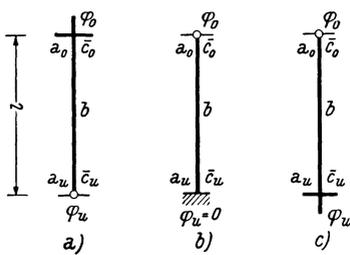


Abb. 170 a, b und c.

wenn für $\psi = \frac{\Delta}{l}$ bzw. für $\frac{c}{l} = \bar{c}$ eingeführt wird:

$$\text{Fall a) } \varphi_u = -\frac{1}{a_u} (b \varphi_o + \bar{c}_u \Delta + \mathfrak{M}_u), \quad (191)$$

$$\text{,, b) } \varphi_o = -\frac{1}{a_o} (\bar{c}_o \Delta + \mathfrak{M}_o), \quad (192)$$

$$\text{,, c) } \varphi_o = -\frac{1}{a_o} (b \varphi_u + \bar{c}_o \Delta + \mathfrak{M}_o). \quad (193)$$

B. Mehrfeldrahmen.

a) Der Mehrfeldrahmen mit durchwegs fest eingespannten Säulenfüßen (Abb. 171).

Knotengleichungen. Diese ergeben sich für die vorliegende Tragwerksform aus (177) und lauten:

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + \bar{c}_o \Delta + s_n = 0, \quad (194)$$

wobei \bar{c}_o den oberen c -Wert der zum Knoten (n) gehörigen Säule bedeutet und d_n bzw. s_n in üblicher Weise nach (164) bzw. (165) bestimmt werden.

Verschiebungsgleichungen. Nach (190) lautet die Verschiebungsgleichung unter Berücksichtigung, daß hier durchwegs $\varphi_u = 0$:

$$\sum \bar{c}_o \varphi_o + D \cdot \Delta + S = 0. \quad (195)$$

Hierin bedeuten nach (181)

$$D = \sum \frac{1}{l} (\bar{c}_o + \bar{c}_u) \quad (196)$$

und nach (69)

$$S = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{U} + \sum \frac{\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u}{l}. \quad (197)$$

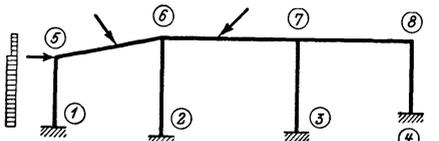


Abb. 171. Mehrfeldrahmen mit eingespannten Säulenfüßen.

b) Der Mehrfeldrahmen mit durchwegs gelenkig angeschlossenen Säulenfüßen (Abb. 172).

Knotengleichungen. Sie ergeben sich aus der allgemeinen Form (185) in zweckmäßiger Schreibweise:

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + \bar{c}_{n,g}^0 \Delta + s_n^0 = 0. \quad (198)$$

Die Glieder $\sum_r b_{n,r} \varphi_r$ beziehen sich hier nur auf die Riegel, das Glied $\bar{c}_{n,g}^0 \Delta$ nur auf die Säule des betreffenden Knotens. Im einzelnen bedeuten:

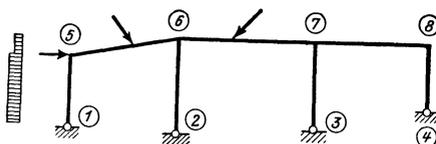


Abb. 172. Mehrfeldrahmen mit Fußgelenken.

$$\text{Nach (189) } \bar{c}_{n,g}^0 = \bar{c}_{n,g} - \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \cdot \bar{c}_{g,n}; \quad (199)$$

$$\text{,, (186) } d_n^0 = d_n - \frac{b_{n,g}^2}{a_{g,n}}; \quad (200)$$

$$\text{,, (187) } s_n^0 = s_n - \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \cdot \mathfrak{M}_{g,n}. \quad (201)$$

Verschiebungsgleichungen. Setzt man in (190) für φ_u den Ausdruck (191) ein, so erhält man nach entsprechender Vereinfachung die Verschiebungsgleichung in der Form:

$$\sum \bar{c}_o^0 \varphi_o + D^0 \Delta + S^0 = 0. \quad (202)$$

Hierin bedeuten (Abb. 170a):

$$\bar{c}_o^0 = \bar{c}_o - \frac{b}{a_u} \cdot \bar{c}_u, \quad (203)$$

$$D^0 = D - \sum \frac{\bar{c}_u^2}{a_u} = \sum \frac{1}{l} (\bar{c}_o + \bar{c}_u) - \sum \frac{\bar{c}_u^2}{a_u}, \quad (204)$$

$$S^0 = S - \sum \frac{\bar{c}_u}{a_u} \cdot \mathfrak{M}_u \quad (205)$$

bzw. nach Einführung von S nach (69)

$$S^0 = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u}{l} - \sum \frac{\bar{c}_u}{a_u} \cdot \mathfrak{M}_u. \quad (206)$$

(Vgl. auch Zahlenbeispiel 19.)

c) Der Mehrfeldrahmen mit durchwegs gelenkig ausgebildeten Säulenköpfen (Abb. 173).

Knotengleichungen. Die Knotengleichungen sind hier identisch mit der für den gewöhnlichen Durchlaufträger geltenden Form. Sie ergeben sich aus (198) durch Fortlassung des Δ -Gliedes und lauten:

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + s_n^0 = 0. \quad (207)$$

Die Stiele liefern in diesem Falle keinen Beitrag für die Knotengleichungen, die hier von der Verschiebungsgleichung völlig unabhängig sind und daher getrennt von dieser aufgestellt und aufgelöst werden können.

Verschiebungsgleichungen. Führt man in (190) für φ_o den Ausdruck (192) ein, so erhält man nach entsprechender Vereinfachung die *Verschiebungsgleichung* in folgender Form:

$$D^0 \Delta + S^0 = 0. \quad (208)$$

Hierin bedeuten:

$$D^0 = D - \sum \frac{\bar{c}_o^2}{a_o} = \sum \frac{1}{l} (\bar{c}_o + \bar{c}_u) - \sum \frac{\bar{c}_o^2}{a_o}, \quad (209)$$

$$S^0 = S - \sum \frac{\bar{c}_o}{a_o} \cdot \mathfrak{M}_o \quad (210)$$

bzw. nach Einführung von S nach (69)

$$S^0 = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{\mathfrak{M}_o + \mathfrak{M}_u}{l} - \sum \frac{\bar{c}_o}{a_o} \cdot \mathfrak{M}_o. \quad (211)$$

d) Der Mehrfeldrahmen mit Fuß- oder Kopfgelenken in beliebiger Anordnung (Abb. 174).

Knotengleichungen. Diese können nach (194), (198) oder (207) angeschrieben werden, je nachdem, ob die zugehörige Säule gelenklos ist, oder aber ein Gelenk unten bzw. oben aufweist.

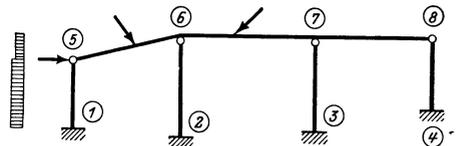


Abb. 173. Mehrfeldrahmen mit Kopfgelenken.

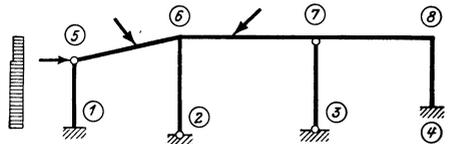


Abb. 174. Mehrfeldrahmen mit Fuß- oder Kopfgelenken.

Verschiebungsgleichungen. Ersetzt man in (190) die Gelenkdrehwinkel φ_o bzw. φ_u durch die Ausdrücke (191) und (192), so ergibt sich die *Verschiebungsgleichung* bei Verwendung der gekürzten Schreibart wie folgt:

$$\sum_e \bar{c}_o \varphi_o + \sum_{g_u} \bar{c}_o^0 \varphi_o + D^0 \Delta + S^0 = 0. \quad (212)$$

Hierin ist analog (203)

$$\bar{c}_o^0 = \bar{c}_o - \frac{b}{a_u} \cdot \bar{c}_u, \quad (213)$$

ferner

$$D^0 = D - \sum_{g_u} \frac{\bar{c}_u^2}{a_u} - \sum_{g_o} \frac{\bar{c}_o^2}{a_o} = \sum_a \frac{1}{l} (\bar{c}_o + \bar{c}_u) - \sum_{g_u} \frac{\bar{c}_u^2}{a_u} - \sum_{g_o} \frac{\bar{c}_o^2}{a_o} \quad (214)$$

und

$$S^0 = S - \sum_{g_u} \frac{\bar{c}_u}{a_u} \mathfrak{M}_u - \sum_{g_o} \frac{\bar{c}_o}{a_o} \mathfrak{M}_o, \quad (215)$$

wobei S nach (85) zu bestimmen ist.

In den vorstehenden Ausdrücken beziehen sich:

$$\begin{aligned} \sum_e & \dots \text{ auf alle gelenklosen Säulen.} \\ \sum_{g_u} & \dots \text{ ,, ,, Säulen mit ,,Gelenk unten"":} \\ \sum_{g_o} & \dots \text{ ,, ,, ,, ,, ,,Gelenk oben"":} \\ \sum_a & \dots \text{ ,, ,, ,, ausschließlich Pendelsäulen.} \end{aligned}$$

Zu dem Ausdruck (215) für S^0 sei bemerkt, daß dieser für den allgemeinsten Fall beliebiger Säulenbelastung gilt. Sehr häufig sind aber die Säulen selbst unbelastet, dann wird einfach $S^0 = P$, wenn in der Rahmenecke die waagrechte Last P wirkt. Entfällt auch diese Last, so ist $S^0 = 0$.

C. Stockwerkrahmen.

Es sollen hier Stockwerkrahmen mit verschiedenen hohen Ständern und beliebig vielen Gelenkanschlüssen behandelt werden (Abb. 175).

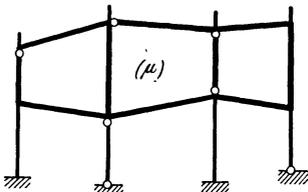


Abb. 175. Teil eines Stockwerkrahmens mit Gelenken.

Knotengleichungen. Hier kann die allgemeine Form (185) Anwendung finden. Dabei tritt aber noch insofern eine Vereinfachung ein, als sich die Δ -Glieder nur auf die in den betrachteten Knoten einmündenden Säulen beziehen.

Verschiebungsgleichungen. Führt man in (190) für die Gelenkdrehwinkel φ_o bzw. φ_u die Ausdrücke (191) und (193) ein, so erhält man die *Verschiebungsgleichung* für irgendein Stockwerk (μ) des vorliegenden Tragwerkes. Sie lautet in gekürzter Schreibweise:

$$\sum_e \bar{c}_u \varphi_u + \sum_e \bar{c}_o \varphi_o + \sum_{g_o} \bar{c}_u^0 \varphi_u + \sum_{g_u} \bar{c}_o^0 \varphi_o + D_\mu^0 \Delta_\mu + S^0 = 0. \quad (216)$$

Die Glieder $\sum_{g_o} \bar{c}_u^0 \varphi_u$ und $\sum_{g_u} \bar{c}_o^0 \varphi_o$ beziehen sich auf die Säulen mit „Gelenk oben“ bzw. „Gelenk unten“, und zwar bedeuten analog (203):

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_u^0 &= \bar{c}_u - \frac{b}{a_o} \cdot \bar{c}_o, \\ \bar{c}_o^0 &= \bar{c}_o - \frac{b}{a_u} \cdot \bar{c}_u. \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

Die Glieder $\sum_e \bar{c}_u \varphi_u$ und $\sum_e \bar{c}_o \varphi_o$ beziehen sich auf jene Säulen, die oben und unten steif angeschlossen sind. Die Bedeutung von D^0 geht aus (214) hervor.

Für die Ermittlung von S^0 gilt nach (215) sinngemäß

$$S^0 = S - \sum_{g_u} \frac{\bar{c}_u}{a_u} \mathfrak{M}_u - \sum_{g_o} \frac{\bar{c}_o}{a_o} \mathfrak{M}_o, \quad (218)$$

wobei hier aber für S der Wert für Stockwerkrahmen nach (56) zu nehmen ist.

5. Rahmentragwerke mit nur lotrecht verschieblichen Knotenpunkten.

A. Symmetrisch ausgebildete und symmetrisch belastete Vierendeel-Rahmentragwerke.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Es kann hier die für Stockwerkrahmen aufgestellte Gl. (172) übernommen werden, wenn die Stockwerksbezeichnung μ durch die Felderbezeichnung ν ersetzt wird (Abb. 176). Sie lautet dann:

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + c_{n,\nu} \psi_\nu + c_{n,\nu+1} \psi_{\nu+1} + s_n = 0. \quad (219)$$

Wie aus Abb. 177 hervorgeht, bedeuten also:

ψ_ν bzw. $\psi_{\nu+1} \dots$ die Stabdrehwinkel im Feld ν bzw. $(\nu + 1)$, also in den Feldern links bzw. rechts von dem betrachteten Knoten.

$c_{n,\nu}$ bzw. $c_{n,\nu+1} \dots$ die am betrachteten Knoten n gelegenen c -Werte der links bzw. rechts einmündenden Riegel.

Verschiebungsgleichungen. Da die allgemeinen Ausführungen im ersten Abschnitt, IV, 7, A auch hier volle Gültigkeit haben, so sind weitere Erläuterungen an dieser Stelle entbehrlich. Durch

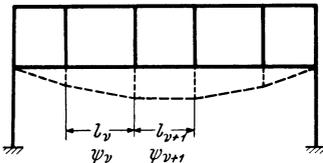


Abb. 176. Symmetrisches, bei symm. Bel. nur lotrecht verschiebliches Rahmentragwerk.

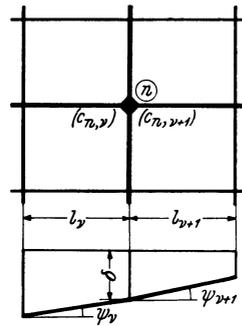


Abb. 177. Teil eines nur lotrecht verschieblichen Tragwerkes. Bezeichnungen.

Auswertung der statischen Gleichgewichtsgleichung $\sum V = 0$ erhält man die *Verschiebungsgleichung* in übersichtlicher Darstellung für ein Feld (ν) wie folgt:

$$\sum_\nu c_l \varphi_l + \sum_\nu c_r \varphi_r + D_\nu \psi_\nu + S_\nu = 0, \quad (220)$$

wobei

$$D_\nu = \sum_\nu (c_l + c_r), \quad (221)$$

$$S_\nu = \left[\frac{1}{2} (\sum P + \sum q) - \sum P' - \sum q' - \sum \mathfrak{M} \right] l_\nu + \sum_\nu (\mathfrak{M}_l + \mathfrak{M}_r). \quad (222)$$

Die in diesem Ausdruck vorhandenen Vorzeichen von $P, q, P', q', \mathfrak{A}$ gelten unter der Voraussetzung, daß diese Kräfte von oben nach unten wirken.

Nähere Erläuterungen über die Bedeutung der einzelnen Werte von (222) sind bei (90) gegeben.

Die Gl. (220) enthält somit vier Arten von Gliedern:

$\sum_{\nu} c_l \varphi_l \dots\dots$ die Produkte aus den linken c -Werten und den linken Knotendrehwinkeln des betrachteten Feldes ν .

$\sum_{\nu} c_r \varphi_r \dots\dots$ die Produkte aus den rechten c -Werten und den rechten Knotendrehwinkeln des betrachteten Feldes ν .

$D_{\nu} \psi_{\nu} \dots\dots$ wobei das Diagonalglied D_{ν} nach (221) die Summe der linken und rechten c -Werte sämtlicher Stäbe des Feldes ν bedeutet.

$S_{\nu} \dots\dots$ das Belastungsglied, das nach (222) zu bestimmen ist.

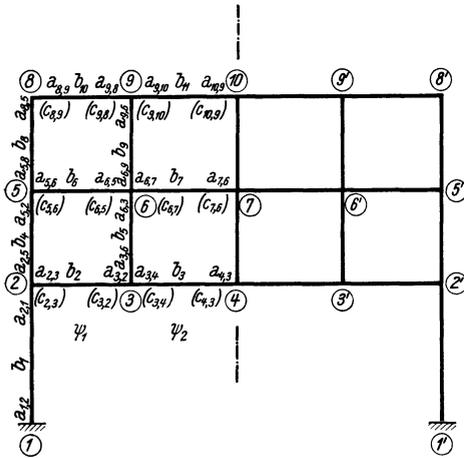


Abb. 178. Beiwertschizze.

b) Gleichungstabelle für ein symmetrisches dreigurtiges Vierendeel-Rahmentragwerk.

Die Gestalt des Tragwerkes ist aus Abb. 178 ersichtlich, worin auch die wichtigsten Beiwerte eingetragen sind, nämlich die a - und b -Werte für sämtliche Stäbe und außerdem für die waagrechten Riegel auch die c -Werte. Als Unbekannte sind sechs Knotendrehwinkel zu ermitteln, und zwar $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_8, \varphi_9$ und die Stabdrehwinkel ψ_1 und ψ_2 . Wegen der Symmetrie wird $\varphi_4 = \varphi_7 = \varphi_{10} = 0$ und wegen fester Einspannung der Säulenfüße auch $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$.

Nach Ermittlung der Diagonalglieder d und D , sowie der Belastungsglieder s und

Gleichungstabelle 14.

	φ_2	φ_3	φ_5	φ_6	φ_8	φ_9	ψ_1	ψ_2	B
φ_2	d_2	b_2	b_4				$c_{2,3}$		s_2
φ_3	b_2	d_3		b_5			$c_{3,2}$	$c_{3,4}$	s_3
φ_5	b_4		d_5	b_6	b_8		$c_{5,6}$		s_5
φ_6		b_5	b_6	d_6		b_9	$c_{6,5}$	$c_{6,7}$	s_6
φ_8			b_8		d_8	b_{10}	$c_{8,9}$		s_8
φ_9				b_9	b_{10}	d_9	$c_{9,8}$	$c_{9,10}$	s_9
ψ_1	$c_{2,3}$	$c_{3,2}$	$c_{5,6}$	$c_{6,5}$	$c_{8,9}$	$c_{9,8}$	D_1		S_1
ψ_2		$c_{3,4}$		$c_{6,7}$		$c_{9,10}$		D_2	S_2

S nach den entsprechenden Formeln, kann die Aufstellung der Gleichungstabelle 14 an Hand der Beiwertschizze durch wiederholte Anwendung der *Knotengleichung* (219) bzw. der *Verschiebungsgleichung* (220) erfolgen.

B. Unsymmetrisch ausgebildete, seitlich festgehaltene Vierendeel-Rahmentragwerke.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Bei solchen Tragwerken erscheint es vorteilhafter, an Stelle der Stabdrehwinkel ψ die Knotenverschiebungen δ in Rechnung zu stellen (Abb. 179).

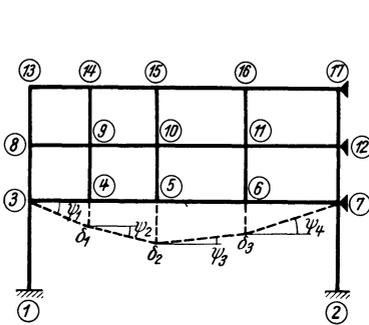


Abb. 179.

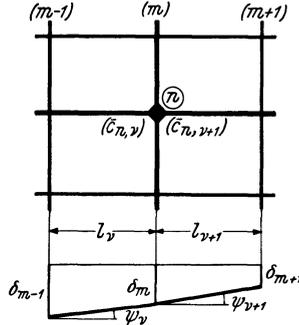


Abb. 180.

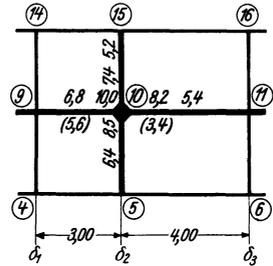


Abb. 181. Beiwertskizze für einen lotrecht verschieblichen Tragwerksteil.

Abb. 179 und 180. Allgemeine Bezeichnungsweise bei lotrecht verschieblichen Tragwerken.

Ersetzt man also in Gl. 219, die auch hier Gültigkeit haben muß, nach (3) ψ durch δ , so erhält man nach entsprechender Umformung die Knotengleichung wieder in zweckmäßiger Schreibart, und zwar

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + \bar{c}_{n,v} \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{c}_{n,v+1} \delta_{m+1} + s_n = 0. \quad (223)$$

Hierin bedeuten sinngemäß wie früher:

$$\bar{c}_{n,v} = \frac{c_{n,v}}{l_v}; \quad \bar{c}_{n,v+1} = \frac{c_{n,v+1}}{l_{v+1}} \quad (224)$$

$$\kappa_n = \bar{c}_{n,v+1} - \bar{c}_{n,v}. \quad (225)$$

Ein Vergleich mit der Knotengleichung (219) ergibt, daß an Stelle der dort enthaltenen zwei ψ -Glieder hier drei δ -Glieder auftreten, deren Bedeutung aus Abb. 180 eindeutig hervorgeht. Es bezieht sich also δ_m immer auf die Knotenreihe, in welcher der betrachtete Knoten (n) liegt, während δ_{m-1} und δ_{m+1} die Verschiebungen der links bzw. rechts von (n) befindlichen Knotenreihen bedeuten. Ist einer von den drei δ -Werten Null, so verschwindet das entsprechende δ -Glieder der Gleichung.

Das Glied $\kappa_n \delta_m$ entfällt aber auch, wenn $\bar{c}_{n,v} = \bar{c}_{n,v+1}$ wird, denn dann ist nach (225) der Beiwert $\kappa_n = 0$.

Die in der Knotengleichung auftretenden Beiwerte $\bar{c}_{n,v}$ und $\bar{c}_{n,v+1}$ sind stets die am betrachteten Knoten n gelegenen \bar{c} -Werte der links bzw. rechts einmündenden Stäbe.

Anschließend soll nun sofort die zahlenmäßige Anwendung der zuletzt gewonnenen Knotengleichung für den Knoten (10) des in Abb. 179 dargestellten Rahmens als Beispiel gezeigt werden. In Abb. 181 sind die erforderlichen Beiwerte a , b , \bar{c} , die zur Aufstellung dieser Gleichung benötigt werden, eingetragen, wobei die \bar{c} -Werte zur besseren Unterscheidung von den a -Werten in eine Klammer gesetzt sind. Es ist also z. B. nach (224)

$$\bar{c}_{10,9} = \frac{16,8}{3,0} = 5,6; \quad \bar{c}_{10,11} = \frac{13,6}{4,0} = 3,4$$

und nach (225)

$$\varkappa_{10} = \bar{c}_{10,11} - \bar{c}_{10,9} = 3,4 - 5,6 = -2,2.$$

Weiter wird das Diagonalglied

$$d_{10} = \sum a_{10} = 8,5 + 10,0 + 7,4 + 8,2 = 34,1.$$

Damit kann bereits nach (223) die *Knotengleichung* für den Knoten (10) aufgestellt werden. Sie lautet:

$$34,1 \varphi_{10} + 6,4 \varphi_5 + 6,8 \varphi_9 + 5,4 \varphi_{11} + 5,2 \varphi_{15} + 5,6 \delta_1 - 2,2 \delta_2 - 3,4 \delta_3 + s_{10} = 0.$$

Verschiebungsgleichungen. Für eine aus dem Tragwerk herausgeschnittene Reihe übereinanderliegender Knotenpunkte (Abb. 129 und 130) kann nach (104) die statische Gleichgewichtsgleichung $\sum V = 0$ in folgender Form geschrieben werden ($\uparrow \downarrow$):

$$- \sum P - \sum_{\nu} \mathcal{A}_{\nu} r - \sum_{\nu+1} \mathcal{A}_{\nu+1}^l - \sum_{\nu} \frac{1}{l_{\nu}} (M_{\nu}^l + M_{\nu}^r) + \sum_{\nu+1} \frac{1}{l_{\nu+1}} (M_{\nu+1}^l + M_{\nu+1}^r) = 0. \quad (226)$$

Drückt man nach (128) die Summen der Stabendmomente wieder als Funktion der Formänderungsgrößen und Stabelastungsglieder aus und berücksichtigt man außerdem unter Bezugnahme auf Abb. 180, daß

$$\psi_{\nu} = \frac{\delta_{m-1} - \delta_m}{l_{\nu}}; \quad \psi_{\nu+1} = \frac{\delta_m - \delta_{m+1}}{l_{\nu+1}}, \quad (227)$$

so ergibt sich nach entsprechender Umformung die *Verschiebungsgleichung* für irgendeine Knotenreihe mit der hier gewählten Bezeichnungsweise in folgender Form:

$$\boxed{- \sum_{\nu} \bar{c}_{m-1,m} \varphi_{m-1} + \sum \varkappa_m \varphi_m + \sum_{\nu+1} \bar{c}_{m+1,m} \varphi_{m+1} - C_{\nu} \delta_{m-1} + D_m \delta_m - C_{\nu+1} \delta_{m+1} + S_m = 0,} \quad (228)$$

wobei

$$C_{\nu} = \sum_{\nu} \frac{\bar{c}_{m-1,m} + \bar{c}_{m,m-1}}{l_{\nu}}, \quad (229)$$

d. i. der Beiwert von δ_{m-1} und bedeutet die Summe aller \bar{c} -Werte im Felde (ν) (also im Felde *links* der betrachteten Knotenpunktreihe), geteilt durch l_{ν} ;

$$C_{\nu+1} = \sum_{\nu+1} \frac{\bar{c}_{m+1,m} + \bar{c}_{m,m+1}}{l_{\nu+1}}, \quad (229a)$$

d. i. der Beiwert von δ_{m+1} und bedeutet die Summe aller \bar{c} -Werte im Felde ($\nu + 1$) (also im Felde *rechts* der betrachteten Knotenpunktreihe), geteilt durch $l_{\nu+1}$;

$$D_m = C_{\nu} + C_{\nu+1}, \quad (230)$$

d. i. das Diagonalglied (Beiwert von δ_m) und bedeutet die Summe der C -Werte der *links* und *rechts* von der betrachteten Knotenpunktreihe (m) gelegenen Felder (ν) und ($\nu + 1$);

$$\varkappa_m = (\bar{c}_{m,m+1} - \bar{c}_{m,m-1}), \quad (231)$$

d. s. die Beiwerte von φ_m und bedeuten jeweils die Differenz der *rechts* und *links* der betrachteten Knotenpunktreihe (m) gelegenen \bar{c} -Werte;

$$S_m = - \sum P - \sum \mathfrak{A}_v^r - \sum \mathfrak{A}_{v+1}^l - \frac{1}{l_v} \sum (\mathfrak{M}_v^l + \mathfrak{M}_v^r) + \frac{1}{l_{v+1}} \sum (\mathfrak{M}_{v+1}^l + \mathfrak{M}_{v+1}^r), \tag{232}$$

d. i. das Belastungsglied für die Knotenpunktreihe (m). Die Bedeutung der einzelnen Glieder wurde bereits bei (102) und (103) erläutert.

Die in obigem Ausdruck vorhandenen Vorzeichen von P und \mathfrak{A} gelten unter der Voraussetzung, daß diese Kräfte von oben nach unten wirken.

Zur Beschreibung der Gl. (228) sei noch folgendes bemerkt:

Die Zahl der φ_{m-1} Glieder ist gleich der Anzahl der auf der *linken* Seite der betrachteten Knotenreihe (m) einmündenden Stäbe.

Ebenso ist die Anzahl der φ_{m+1} -Glieder gleich der Anzahl der *rechts* in die betrachtete Knotenreihe (m) einmündenden Stäbe.

Die Anzahl der φ_m -Glieder ist allgemein gleich der Anzahl der Knotenpunkte in der betrachteten Knotenreihe (m). Wenn jedoch für einen Knoten $\varkappa = 0$ ist, was dann zutrifft, wenn $\bar{c}_{m,m+1} - \bar{c}_{m,m-1} = 0$ wird, so entfällt das zugehörige φ_m -Glied.

Die δ -Glieder treten in jeder Gleichung nur je einmal auf.

b) Gleichungstabelle für ein unsymmetrisches Vierendeel-Rahmentragwerk mit nur lotrecht verschieblichen Knotenpunkten.

In Abb. 182 ist die Beiwertskeizze eines derartigen Tragwerkes ersichtlich. Es ist in den Knotenpunkten 6 und 10 in waagrechtlicher Richtung unverschieblich festgehalten und bei 1 und 2 fest eingespannt, so daß als Unbekannte insgesamt die acht Knotendrehwinkel φ_3 bis φ_{10} und die Verschiebungs-

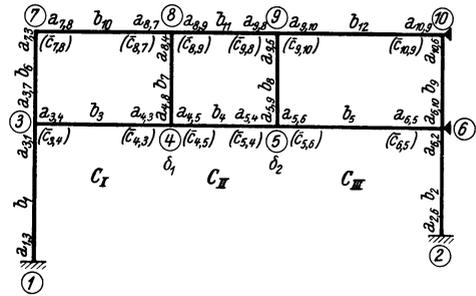


Abb. 182. Beiwertskeizze.

Gleichungstabelle 15.

	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	δ_1	δ_2	B
φ_3	d_3	b_3			b_6				$-\bar{c}_{3,4}$		s_3
φ_4	b_3	d_4	b_4			b_7			\varkappa_4	$-\bar{c}_{4,5}$	s_4
φ_5		b_4	d_5	b_5			b_8		$\bar{c}_{5,4}$	\varkappa_5	s_5
φ_6			b_5	d_6				b_9		$\bar{c}_{6,5}$	s_6
φ_7	b_6				d_7	b_{10}			$-\bar{c}_{7,8}$		s_7
φ_8		b_7			b_{10}	d_8	b_{11}		\varkappa_8	$-\bar{c}_{8,9}$	s_8
φ_9			b_8			b_{11}	d_9	b_{12}	$\bar{c}_{9,8}$	\varkappa_9	s_9
φ_{10}				b_9			b_{12}	d_{10}		$\bar{c}_{10,9}$	s_{10}
δ_1	$-\bar{c}_{3,4}$	\varkappa_4	$\bar{c}_{5,4}$		$-\bar{c}_{7,8}$	\varkappa_8	$\bar{c}_{9,8}$		D_1	$-C_{II}$	S_1
δ_2		$-\bar{c}_{4,5}$	\varkappa_5	$\bar{c}_{6,5}$		$-\bar{c}_{8,9}$	\varkappa_9	$\bar{c}_{10,9}$	$-C_{II}$	D_2	S_2

größen in lotrechter Richtung δ_1 und δ_2 gemeinsam zu bestimmen sind. Mit Hilfe der Beiwertskeizze Abb. 182 sind zunächst noch weitere Rechnungsgrößen zu ermitteln, und zwar:

d_3 bis d_{10} in der bekannten Art, $\kappa_4, \kappa_5, \kappa_8, \kappa_9$ nach (225) bzw. (231), sodann C_I, C_{II}, C_{III} nach (229) und D_1, D_2 nach (230), wobei $D_1 = C_I + C_{II}$ und $D_2 = C_{II} + C_{III}$.

Schließlich sind noch die Belastungsglieder s_3 bis s_{10} und nach (232) S_1 und S_2 zu bestimmen, worauf die Aufstellung der Gleichungstabelle 15 unter Benutzung der *Knotengleichung* (223) und der *Verschiebungsgleichung* (228) an Hand der Beiwertskeizze unmittelbar erfolgen kann. (Siehe auch Zahlenbeispiel 20.)

6. Rahmentragwerke mit lotrecht und waagrecht verschieblichen Knotenpunkten.

Allgemeine Betrachtungen über die Eigenart dieser Tragwerksgattung finden sich im ersten Abschnitt, IV, 8. Es ist darnach lediglich bei den *Knotengleichungen* eine kleine Erweiterung der bereits bekannten Ansätze für *nur* lotrecht verschiebliche Systeme vorzunehmen, während für die *Verschiebungsgleichungen* die früher aufgestellten Gleichungsformen *unverändert* übernommen werden können.

a) Bedingungsgleichungen.

Knotengleichungen. Der bei Rahmentragwerken mit nur lotrecht verschieblichen Knotenpunkten aufgestellten Knotengleichung liegt die Voraussetzung zugrunde, daß höchstens zwei Stäbe, und zwar die waagrecht in den betrachteten Knotenpunkt (n) einmündenden Riegel, eine Stabverdrehung erleiden. Es kommen daher in dieser Gleichung auch nur zwei ψ -Glieder vor. Zieht man nun in Betracht, daß in dem vorliegenden Fall, wo die Knotenpunkte in lotrechter und waagrechter Richtung verschieblich sind, auch die lotrechten Stäbe Verdrehungen mitmachen, so müssen in der Knotengleichung noch zwei weitere ψ -Glieder oder Δ -Glieder von derselben Bauart hinzutreten, wie sie von den Stockwerkrahmen her bereits bekannt sind. Diese Glieder haben die Form [vgl. (171)]

$$c_{n,\mu} \psi_\mu + c_{n,\mu+1} \psi_{\mu+1}, \quad (233)$$

wenn als Unbekannte die Stabdrehwinkel der lotrechten Stäbe gewählt werden, oder [vgl. (177)]

$$\bar{c}_{n,\mu} \Delta_\mu + \bar{c}_{n,\mu+1} \Delta_{\mu+1}, \quad (233a)$$

wenn die gegenseitigen Stabendverschiebungen der lotrechten Stäbe als Unbekannte Verwendung finden. Fügt man also den Ausdruck (233) bzw. (233a) zur Gl. (223) hinzu, so erhält man die *Knotengleichung* für beliebig verschiebliche Tragwerke:

$$\boxed{d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + \bar{c}_{n,\nu} \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{c}_{n,\nu+1} \delta_{m+1} + c_{n,\mu} \psi_\mu + c_{n,\mu+1} \psi_{\mu+1} + s_n = 0,} \quad (234)$$

bzw.

$$\boxed{d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + \bar{c}_{n,\nu} \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{c}_{n,\nu+1} \delta_{m+1} + \bar{c}_{n,\mu} \Delta_\mu + \bar{c}_{n,\mu+1} \Delta_{\mu+1} + s_n = 0.} \quad (234a)$$

Die Zeiger ν beziehen sich auf die Felder, die Zeiger μ auf die Stockwerke des Tragwerkes.

Verschiebungsgleichungen. Hier kommen beide Arten der bekannten statischen Gleichgewichtsbedingungen $\sum V = 0$ und $\sum H = 0$ zur Anwendung. Es sind

aber dafür keine neuen Ableitungen erforderlich, da die gebrauchsfertigen Gleichungen von früher unmittelbar benutzt werden können. So hat z. B. die aus der Bedingung $\sum V = 0$ für Tragwerke mit nur lotrecht verschieblichen Knotenpunkten aufgestellte Gl. (228) auch hier volle Gültigkeit.

Ebenso kann die für Stockwerkrahmen mit waagrecht verschieblichen Knotenpunkten aus der Bedingung $\sum H = 0$ abgeleitete Verschiebungsgleichung (174) bzw. (180) in unveränderter Form übernommen werden.

b) Gleichungstabelle für ein unsymmetrisches, lotrecht und waagrecht verschiebliches Rahmentragwerk.

Ein solches Tragwerk zeigt Abb. 183. Es treten hier folgende Unbekannte auf: die sechs Knotendrehwinkel φ_3 bis φ_8 , die Verschiebung δ_1 der Knotenreihe 4—7 in lotrechter Richtung sowie die den zwei Stockwerken entsprechenden Ver-

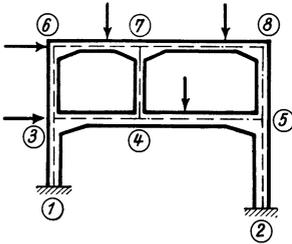


Abb. 183. Lotrecht und waagrecht verschiebliches Tragwerk.

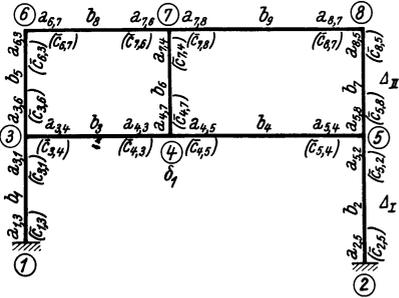


Abb. 184. Beiwertschizze.

schiebungsgrößen Δ_1 und Δ_2 . Zur Aufstellung der *Knotengleichungen* nach (234a) sind vorher die Diagonalglieder d_3 bis d_8 und die Belastungsglieder s_3 bis s_8 sowie die Werte κ_4 und κ_7 nach (225) zu ermitteln. Für die *Verschiebungsgleichung* (228), welche die Bedingung $\sum V = 0$ zum Ausdruck bringt, sind das Diagonalglied D_1 und das Belastungsglied S_1 , und schließlich für die *Verschiebungsgleichung* (180), welche aus der Bedingung $\sum H = 0$ abgeleitet worden ist, die Diagonalglieder D_I und D_{II} und die Belastungsglieder S_I und S_{II} zahlenmäßig festzulegen.

An Hand der Beiwertschizze Abb. 184 kann dann die Gleichungstabelle 16 unter Benutzung der Mustergleichungen unmittelbar angeschrieben werden.

Gleichungstabelle 16.

	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	δ_1	Δ_I	Δ_{II}	B
φ_3	d_3	b_3		b_5			$-\bar{c}_{3,4}$	$\bar{c}_{3,1}$	$\bar{c}_{3,6}$	s_3
φ_4	b_3	d_4	b_4		b_6		κ_4		$\bar{c}_{4,7}$	s_4
φ_5		b_4	d_5			b_7	$\bar{c}_{5,4}$	$\bar{c}_{5,2}$	$\bar{c}_{5,8}$	s_5
φ_6	b_5			d_6	b_8		$-\bar{c}_{6,7}$		$\bar{c}_{6,3}$	s_6
φ_7		b_6		b_8	d_7	b_9	κ_7		$\bar{c}_{7,4}$	s_7
φ_8			b_7		b_9	d_8	$\bar{c}_{8,7}$		$\bar{c}_{8,5}$	s_8
δ_1	$-\bar{c}_{3,4}$	κ_4	$\bar{c}_{5,4}$	$-\bar{c}_{6,7}$	κ_7	$\bar{c}_{8,7}$	D_1			S_1
Δ_I	$\bar{c}_{3,1}$		$\bar{c}_{5,2}$					D_I		S_I
Δ_{II}	$\bar{c}_{3,6}$	$\bar{c}_{4,7}$	$\bar{c}_{5,8}$	$\bar{c}_{6,3}$	$\bar{c}_{7,4}$	$\bar{c}_{8,5}$			D_{II}	S_{II}

Dritter Abschnitt.

Einflußlinien für statisch unbestimmte Tragwerke.**I. Vorbemerkung.**

In diesem Abschnitt soll hauptsächlich die Ermittlung der *Momenteneinflußlinien* eingehend behandelt werden, da diese in der Regel die Grundlage zur Berechnung der übrigen inneren Kräfte, also der Quer- und Längskräfte bilden. Es kommen hier zwei verschiedene Verfahren zur Behandlung. Die zu lösenden Aufgaben werden dabei immer auf einen ruhenden Belastungsfall zurückgeführt, so daß die bisher erläuterten Berechnungsmethoden für Rahmentragwerke auch hier wiederum unmittelbar zur Anwendung kommen können.

Da die M -Einflußlinien für beliebig gelegene Feldquerschnitte eines Rahmenstabes leicht bestimmbar sind, wenn die Einflußlinien für die Stabendmomente bekannt sind, so werden diese in der Regel auch immer zuerst ermittelt und dann erst daraus die übrigen abgeleitet (siehe auch Kapitel II, 4 dieses Abschnittes).

II. Ermittlung der M -Einflußlinien als Biegelinien am $(n-1)$ -fach statisch unbestimmten Tragwerk.**1. Grundlagen des Verfahrens.**

Auf Grund des MAXWELLSchen Satzes kann die M -Einflußlinie bei statisch unbestimmten Tragwerken für irgendeinen Querschnitt in folgender Weise erhalten werden. Man schaltet an dieser Stelle ein Gelenk ein, wodurch der Grad der statischen Unbestimmtheit um 1 vermindert wird, und läßt dort zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Momente von solcher Größe angreifen, daß sie eine gegenseitige Verdrehung der beiden Gelenkquerschnitte um den Winkel $\gamma = 1$ hervor-

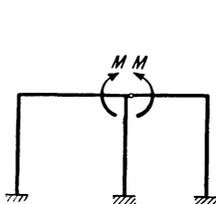


Abb. 185 a.

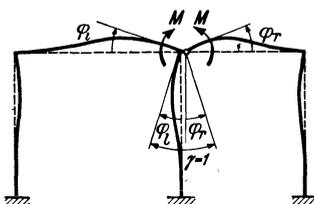


Abb. 185 b.

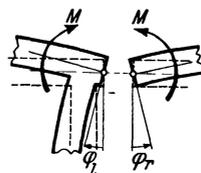


Abb. 185 c.

Abb. 185 a bis c. M -Einflußlinie als Biegelinie für $\gamma = 1$ im Gelenkquerschnitt.

rufen (Abb. 185 a, b, c). Die Biegelinie für diesen Belastungszustand ist dann bereits die gesuchte M -Einflußlinie für den Gelenkquerschnitt.

Unter Voraussetzung der Gültigkeit des Proportionalitätsgesetzes ist nun ohne weiteres klar, daß man die M -Einflußlinie auch erhalten kann, wenn in dem Gelenkquerschnitt zunächst zwei Momente von der Größe $M = 1$ angreifen. Es wird dann allgemein eine Verdrehung der beiden Gelenkquerschnitte um den Winkel $\gamma \leq 1$ hervorgerufen. In diesem Fall stellt die zugehörige Biegelinie die γ -fach *verzerrte* M -Einflußlinie dar. Das Verzerrungsmaß ist also durch den Winkelwert γ gegeben, der deshalb stets zahlenmäßig ermittelt werden muß. Die wirklichen Einflußlinienordinaten η ergeben sich somit aus

$$\eta = \frac{y}{\gamma},$$

(235)

wobei y die für $M = 1$ erhaltenen Biegeliniennordinaten und γ den zugehörigen Öffnungswinkel der Gelenkquerschnitte bedeuten.

Bei der zahlenmäßigen Ermittlung des Winkelwertes γ denkt man sich diesen in zwei Teile φ_r und φ_l gespalten. Unter Berücksichtigung der früheren Vorzeichenregel für Knotendrehwinkel ergibt sich

$$\gamma = \varphi_l - \varphi_r, \quad (236)$$

wobei nach Abb. 185 b, c φ_l bzw. φ_r den Verdrehungswinkel des links bzw. rechts vom Gelenk liegenden Querschnittes bedeutet. Diese beiden Werte sind also identisch mit den in der Rahmenberechnung auftretenden Knotendrehwinkeln im Gelenk und können daher in der bekannten Art ermittelt werden. Dabei ist noch folgendes zu beachten:

Wenn die in der Rahmenberechnung verwendeten Stabfestwerte a, b, c (bei Stäben mit veränderlichen Querschnitten) oder k (bei Stäben mit konstanten Querschnitten), wie üblich, z -fach verzerrt werden, so ergeben sich bekanntlich sämtliche Formänderungsgrößen ($\varphi, \psi, \Delta, \delta, y, \gamma$ usw.) stets $\frac{1}{z}$ -fach verzerrt. Bezeichnet man also die wahren Werte mit $*$, so ergibt sich nach (235)

$$\eta = \frac{y^*}{\gamma^*} = \frac{y \cdot z}{\gamma \cdot z} = \frac{y}{\gamma}, \quad (237)$$

d. h. die wahren Werte (η) der Einflußlinienordinaten erhält man auch bei Verwendung der aus der Rechnung erhaltenen verzerrten Formänderungswerte y und γ bzw. φ_r und φ_l .

2. Ermittlung der Biegelinie aus den Knotendrehwinkeln φ und den Knotenverschiebungen δ .

Die Form der Biegelinie eines unbelasteten Rahmenstabes (1–2) ist bekanntlich bestimmt, wenn die Stabendverschiebungen δ_1 und δ_2 und die Endtangentialwinkel τ_1, τ_2 gegeben sind, wobei nach (4)

$$\tau_1 = \varphi_1 + \psi; \quad \tau_2 = \varphi_2 + \psi. \quad (238)$$

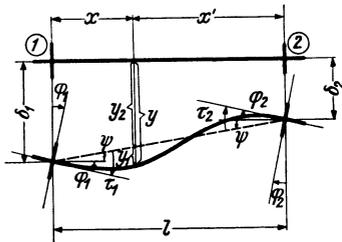


Abb. 186. Biegelinie eines Rahmenstabes.

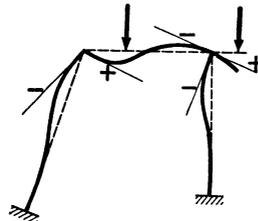


Abb. 187. Vorzeichen der Biegeliniennordinaten.

Wie aus der Abb. 186 hervorgeht, setzen sich die Biegeliniennordinaten y allgemein aus den zwei Beiträgen y_1 und y_2 zusammen. Es gilt somit für eine beliebige Stelle des Stabes, wenn y senkrecht zur ursprünglichen Stabachse gemessen wird,

$$y = y_1 + y_2. \quad (239)$$

Hierin bedeutet y_1 den Beitrag infolge der Stabkrümmung und y_2 den Beitrag infolge der Stabendverschiebungen. Beide Werte können getrennt voneinander ermittelt werden.

Es soll hier folgende Vorzeichenregel gelten: Eine Durchbiegung ist *positiv*, wenn ein *liegender* Stab nach *unten*, ein *stehender* nach *rechts* durchgebogen wird (Abb. 187).

Demgemäß wird auch eine Knotenverschiebung positiv eingeführt, wenn sie von oben nach unten oder von links nach rechts erfolgt.

Die Werte y_1 sind nur von der Stabkrümmung, also nur von den Endtangentialwinkeln τ_1 und τ_2 abhängig. Sie könnten bei Stäben mit konstantem Querschnitt



Abb. 188.



Abb. 188a.

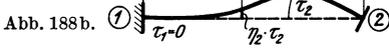


Abb. 188b.

Abb. 188, 188a, b. Ermittlung der Biegelinie eines Stabes mit den Endtangentialwinkeln τ_1 und τ_2 aus den Einflußlinien für \mathfrak{M} .

in der bekannten Weise mit Hilfe der ω -Zahlen¹ ermittelt werden. Es soll hier aber ein anderer Weg gezeigt werden, der auch bei Stäben mit geraden und parabolischen Vouten verhältnismäßig rasch zum Ziele führt. Der Gedanken-gang ist dabei folgender:

Die Biegelinie für einen Stab mit den gegebenen Endtangentialwinkeln τ_1 und τ_2 (Abb. 188) kann auch durch Überlagerung von zwei Biegelinien erhalten werden, bei welchen abwechselnd $\tau_2 = 0$ bzw. $\tau_1 = 0$ ist (Abb. 188 a, b). Wenn also für irgendeinen Stab mit geraden oder parabolischen Vouten für bestimmte Werte τ_1 und τ_2 die Biegelinie zu er-

mitteln ist, so können hierzu die in den Tafeln 13 bis 16 bzw. 13a bis 16a festgelegten Einflußlinien für die Einspannmomente \mathfrak{M} des vollkommen eingespannten Trägers verwendet werden. Denn diese Einflußlinien sind nichts anderes als Biegelinien mit den Randbedingungen $\tau_1 = 1$ und $\tau_2 = 0$ bzw. $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 = 1$.

Da nun auch hier das Proportionalitätsgesetz Gültigkeit hat, so können diese Linien auch für den vorliegenden Fall benutzt werden, wo $\tau_1 \neq 1$ und $\tau_2 = 0$ bzw. $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 \neq 1$ ist. Es brauchen die einzelnen Ordinaten η der \mathfrak{M} -Einflußlinien nur entsprechend verzerrt zu werden. So ergibt sich z. B. die in Abb. 188a dargestellte Biegelinie durch τ_1 -fache Verzerrung der \mathfrak{M}_1 -Einflußlinie für die entsprechende Stabform und sinngemäß die in Abb. 188b angedeutete Einflußlinie durch τ_2 -fache Verzerrung der zugehörigen \mathfrak{M}_2 -Einflußlinie. Durch Überlagerung beider Linien erhält man die gesuchten Einflußlinienordinaten y_1 . Dabei ist nur noch zu berücksichtigen, daß die \mathfrak{M} -Einflußlinien für Stäbe mit $l = 1$ aufgestellt sind, so daß diese Ordinaten noch mit der wirklichen Stablänge l zu multiplizieren sind. Es wird also

$$y_1 = (\eta_1 \cdot \tau_1 - \eta_2 \cdot \tau_2) l. \tag{240}$$

Durch das hier angegebene Verfahren zur Ermittlung der Biegelinien aus den Endtangentialwinkeln τ und insbesondere durch Verwendung der im Dritten Teil zur Verfügung stehenden \mathfrak{M} -Einflußlinien für verschiedene Stabformen wird die Ermittlung der *M*-Einflußlinien für Rahmentragwerke beträchtlich vereinfacht (siehe Zahlenbeispiel 21).

Die Ermittlung von y_2 , das nur von den *senkrecht* zur ursprünglichen Stabachse gemessenen Verschiebungen δ_1 und δ_2 der beiden Stabenden abhängig ist, geschieht aus einer rein geometrischen Beziehung.

Nach Abb. 186 wird:

$$y_2 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l} \cdot x' + \delta_2 \quad \text{oder} \quad y_2 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{l} \cdot x + \delta_1. \tag{241}$$

Sind die beiden Stabendverschiebungen gleich Null, so ist auch $y_2 = 0$ und es wird nach (239) für diesen Fall

$$y = y_1. \tag{239a}$$

¹ Siehe u. a. BEYER (Fußnote S. 54) und DOMKE: Handbuch f. Eisenbetonbau, 4. Aufl., Bd. 1. Berlin 1930.

3. Vorzeichenregeln für die Einflußlinien und Momente.

Unter der Voraussetzung, daß die zur Erzeugung der Einflußlinie im Gelenk angebrachten Momente bei liegenden Stäben den in Abb. 189, bei stehenden Stäben den in Abb. 189a dargestellten Richtungssinn aufweisen, gelten folgende Regeln:

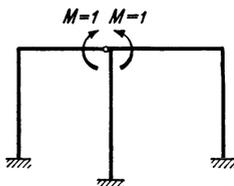


Abb. 189.

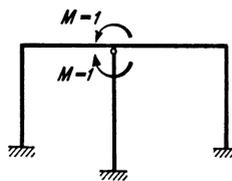


Abb. 189a.

Abb. 189 und 189a. Richtungssinn der Momente $M = 1$ im Gelenk.

1. Die Vorzeichen eines Einflußlinienzweiges sind *positiv*, wenn er bei einem *liegenden* Stab *unterhalb*, bei einem *stehenden* Stab *rechts* von der Stabachse liegt (Abb. 190).

2. Die Vorzeichen der durch die Auswertung eines Einflußlinienzweiges erhaltenen Momentenwerte stimmen mit den Vorzeichen dieses Einflußlinienzweiges überein, wenn die Belastung bei liegenden Stäben von oben nach unten, bei stehenden Stäben

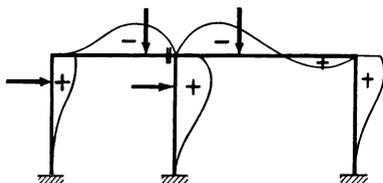


Abb. 190.

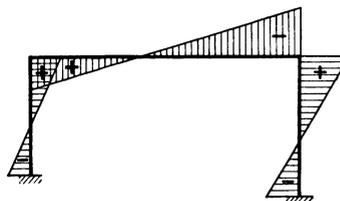


Abb. 191.

Abb. 190 und 191. Vorzeichen der Biegeliniennormaten und der Momente.

von links nach rechts wirkt. Im umgekehrten Fall ergeben sich die entgegengesetzten Vorzeichen.

3. *Positive* Momente erzeugen bei *liegenden* Stäben *unten* Zug und *oben* Druck, bei *stehenden* Stäben *rechts* Zug und *links* Druck (Abb. 191).

Anmerkung: Diese hier festgesetzte Vorzeichenregel für die Momente weicht zwar von der im ersten Abschnitt, I, 2 für die Stabendmomente angegebenen ab, ist aber für das hier behandelte Verfahren der *M*-Einflußlinienermittlung und auch für die Auswertung zweckmäßiger.

4. *M*-Einflußlinien für Feldquerschnitte.

Nach Abb. 192 ergibt sich das Feldmoment an der Stelle x für einen Stab 1—2 mit den Stabendmomenten M_1 und M_2 wie folgt:

$$M_x = M_1 \cdot \frac{x'}{l} + M_2 \cdot \frac{x}{l} + M_0^{(x)} \quad (242)$$

oder

$$M_x = M_1 + (M_2 - M_1) \cdot \frac{x}{l} + M_0^{(x)}, \quad (243)$$

wobei $M_0^{(x)}$ das an der Stelle x am freiaufliegend gedachten Träger auftretende

Moment infolge der äußeren Belastung bedeutet. Wirkt auf den Stab selbst keine Belastung ein, so vereinfachen sich die beiden Formeln zu

$$M_x = M_1 \cdot \frac{x'}{l} + M_2 \cdot \frac{x}{l} \tag{242 a}$$

oder

$$M_x = M_1 + (M_2 - M_1) \cdot \frac{x}{l}. \tag{243 a}$$

Mit Hilfe dieser Formeln können nun auch die Ordinaten der M -Einflußlinien für Feldquerschnitte aus den Ordinaten der Einflußlinien für die benachbarten Stützmente errechnet werden. Die Zahlenrechnung wird am

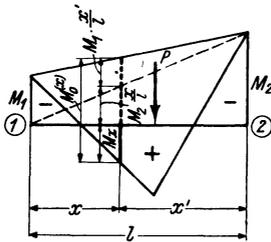


Abb. 192. Bestimmung des Feldmomentes M_x eines Rahmenstabes.

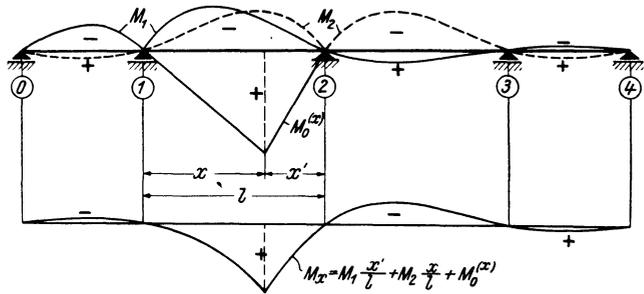


Abb. 193. Entwicklung der Einflußlinie für M_x .

besten tabellarisch durchgeführt und besteht bei Benutzung der Formel (242) im wesentlichen aus einer $\frac{x'}{l}$ - bzw. $\frac{x}{l}$ -fachen Verzerrung der Einflußwerte für M_1 bzw. M_2 , die dann einfach zu addieren sind. Bei Benutzung der Formel (243) ist zuerst die Differenz der Einflußordinaten ($M_2 - M_1$) zu bilden und dann $\frac{x}{l}$ -fach zu verzerrern. Die allgemeine Formel (242) bzw. (243) ist nur für die Ermittlung der Ordinaten in dem einen Feld zu verwenden, in welchem der Querschnitt selbst liegt, da hier die wandernde Einzelast den Betrag M_0 liefert. Die Ordinaten in den übrigen Feldern können mit der vereinfachten Formel (242a) bzw. (243a) berechnet werden. Dieser Vorgang ist in Abb. 193 für die Entwicklung der M_x -Einflußlinie bei einem durchlaufenden Träger angedeutet.

III. Ermittlung der M -Einflußlinien als Biegelinien am n -fach statisch unbestimmten Tragwerk.

Vorbemerkung.

Der wesentlichste Unterschied gegenüber dem vorher behandelten Verfahren besteht darin, daß diesmal das gegebene Tragwerk vollständig *unverändert* bleibt, also die statische Unbestimmtheit nicht vermindert wird.¹ Dadurch ergibt sich ein bedeutender Vorteil, da die Gleichungstabelle nur *einmal* angeschrieben werden muß und die Auflösung für alle ideellen Belastungsfälle *gleichzeitig* vorgenommen werden kann. Außerdem ist die Möglichkeit gegeben, in derselben Gleichungstabelle auch beliebig viele *wirkliche* Belastungsfälle, z. B. eine etwa vorhandene ruhende Belastung, Vollbelastung, Eigengewicht usw., gleichzeitig mit zu erledigen.

¹ Siehe auch L. MANN: Theorie der Rahmenwerke. Berlin, 1927. — BEYER: Statik im Eisenbetonbau. Berlin, 1933.

1. Grundlagen des Verfahrens.

Das Anschlußmoment $M_{m,n}$ eines Rahmenstabes $m-n$ mit beliebig veränderlichen Querschnitten ist nach (125)

$$M_{m,n} = a_{m,n} \varphi_m + b_v \varphi_n + c_{m,n} \psi_v + \mathfrak{M}_{m,n}. \tag{244}$$

In diesem Ausdruck ist das Stabendmoment $M_{m,n}$ als Funktion der beiden Knotendrehwinkel φ_m und φ_n , des Stabdrehwinkels ψ_v und der auf den Stab einwirkenden äußeren Belastung dargestellt. Es sind somit allgemein vier Teilbeträge vorhanden. Wenn es also ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist, die Einflußlinien für diese vier Teilbeträge zu ermitteln, so ergibt sich damit ein brauchbares Verfahren zur Bestimmung der M -Einflußlinien. Diese Forderung kann nun tatsächlich mit Hilfe des Satzes von MAXWELL von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen erfüllt werden. Darnach ist z. B. die Einflußlinie des Knotendrehwinkels φ_m identisch mit der Biegelinie infolge der Belastung durch ein Moment $M = 1$ im Knotenpunkt m . In ähnlicher Weise erhält man die Einflußlinie für ψ_v als Biegelinie, wenn auf den Stab v ein Kräftepaar $M = 1$ als Belastung wirkt. Da in dem vorliegenden Falle aber die algebraische Summe der durch die Beiwerte $a_{m,n}$, b_v , $c_{m,n}$ verzerrten Einflußwerte der Formänderungsgrößen gebraucht wird, so ist es natürlich zweckmäßig, schon von vornherein die Einflußlinie für diesen Summenausdruck

$$\bar{M}_{m,n} = a_{m,n} \varphi_m + b_v \varphi_n + c_{m,n} \psi_v \tag{245}$$

zu ermitteln. Dies ist leicht zu erreichen, wenn man im gegebenen Tragwerk gleichzeitig folgende Belastungen anbringt und dafür die Biegelinie ermittelt:

1. im Knotenpunkte m das Moment $M_m = a_{m,n} \cdot 1 = a_{m,n}$,
2. „ „ „ „ $M_n = b_v \cdot 1 = b_v$,
3. am Stab v „ „ $M_v = c_{m,n} \cdot 1 = c_{m,n}$.

Das am Stab v anzubringende Moment $M_v = c_{m,n}$ ist als Kräftepaar mit dem Hebelarm l_v in der Weise wirkend zu denken, daß an beiden Enden des Stabes, welcher den zu untersuchenden Querschnitt enthält, die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte

$$P = \frac{c_{m,n}}{l_v} = \bar{c}_{m,n} \tag{247}$$

angreifen. An dieser ideellen Belastung braucht auch dann nichts geändert werden, wenn als Unbekannte an Stelle von ψ die gegenseitige Verschiebung Δ in Rechnung gestellt wird.

Läßt man die in den Knotenpunkten angreifenden Momente $a_{m,n}$ und b_v im Uhrzeigersinn, das Kräftepaar entgegen dem Uhrzeigersinn drehen, so bleiben die im ersten Abschnitt, I, 2 festgelegten Vorzeichen für die Formänderungsgrößen und Stabendmomente auch hier in voller Gültigkeit.

In Abb. 194 sind nun diese „ideellen Belastungen“, die zur Bestimmung der Einflußlinie von $\bar{M}_{m,n}$ erforderlich sind, in dem angegebenen Richtungssinn eingetragen. Damit sind die ersten drei Beiträge summarisch erfaßt und es fehlt nur noch der vierte Anteil, nämlich die Einflußlinie für $\mathfrak{M}_{m,n}$. Diese erstreckt sich nur über den Bereich jenes Stabes, in welchem sich der zu untersuchende Querschnitt befindet, denn sie ist identisch mit der Einflußlinie für das Einspannmoment des

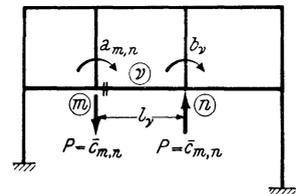


Abb. 194. „Ideelle Belastung“ zur Bestimmung der $\bar{M}_{m,n}$ -Einflußlinie.

beiderseits fest eingespannt gedachten Stabes *m*–*n*. Durch Überlagerung der beiden Einflußlinien für $\bar{M}_{m,n}$ und $\mathfrak{M}_{m,n}$ erhält man schließlich die gesuchte Einflußlinie für $M_{m,n}$.

2. Sonderfälle.

Kommen in dem zu untersuchenden Tragwerke nur solche Stäbe vor, deren Querschnitte zwar feldweise verschieden sind, innerhalb eines Feldes jedoch gleichbleiben, so können auch die Formeln und Gleichungen des ersten Abschnittes Verwendung finden. Der Ausdruck für das Stabendmoment lautet dann nach (7) für einen Stab zwischen den Knotenpunkten *m*, *n*

$$\begin{aligned} M_{m,n} &= k (2 \varphi_m + \varphi_n + 3 \psi_v) + \mathfrak{M}_{m,n} \\ &= 2 k \varphi_m + k \varphi_n + 3 k \psi_v + \mathfrak{M}_{m,n}. \end{aligned} \tag{248}$$

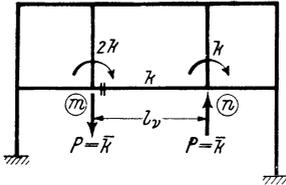


Abb. 195. „Ideelle Belastung“ für ein Tragwerk ohne Vouten.

Der Summenausdruck (245) ergibt sich für diesen Sonderfall mit $\bar{M}_{m,n} = 2 k \varphi_m + k \varphi_n + 3 k \psi_v$ (249)

und damit die ideelle Belastung zur Ermittlung der Einflußlinie für $\bar{M}_{m,n}$ [vgl. auch (246)]:

$$M_m = 2 k; \quad M_n = k; \quad M_v = 3 k. \tag{250}$$

Das Moment $M_v = 3 k$ kann hier durch das Kräftepaar [vgl. auch (247)]

$$P = \frac{3 k}{l_v} = \bar{k} \tag{251}$$

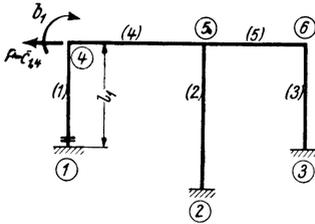


Abb. 196.

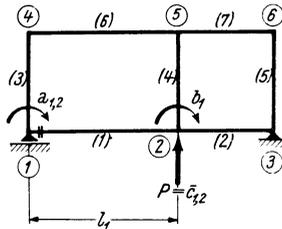


Abb. 197.

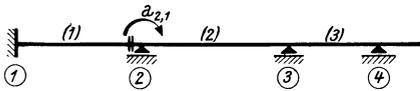


Abb. 198.

Abb. 196 bis 198. „Ideelle Belastungen“ zur Bestimmung der *M*-Einflußlinien.

mit dem Hebelarm l_v ersetzt werden. In Abb. 195 ist für diesen Sonderfall die ideelle Belastung zur Bestimmung der $\bar{M}_{m,n}$ -Einflußlinie dargestellt.

In vielen Fällen ergeben sich aber bei der Annahme der „ideellen Belastung“ verschiedene Vereinfachungen. Ist z. B. der zu untersuchende Stab im Knotenpunkte *m* bzw. *n* fest eingespannt, so ist der zugehörige Knotendrehwinkel φ_m

bzw. φ_n für jeden Belastungsfall gleich Null. Die „ideelle Belastung“ am fest eingespannten Stabende bringt im Tragwerk keine Formänderungen hervor und kann daher entfallen. Ebenso entfällt bei einem Stabe, für den $\psi = 0$ ist, die „ideelle Belastung“ durch das Kräftepaar.

In den Abb. 196, 197, 198 ist für einige Tragwerke die „ideelle Belastung“ zur Bestimmung der \bar{M} -Einflußlinie für den jeweils besonders bezeichneten Querschnitt eingetragen.

3. Durchführung der Rechnung.

Bei diesem Verfahren wird also das Stabanschlußmoment $M_{m,n}$ zunächst in zwei Bestandteile $\bar{M}_{m,n}$ [siehe (245)] und $\mathfrak{M}_{m,n}$ gespalten, die vollkommen unab-

hängig voneinander bestimmt werden können. Der Ausdruck (244) kann daher auch geschrieben werden:

$$M_{m,n} = \bar{M}_{m,n} + \mathfrak{M}_{m,n} \quad (252)$$

oder

$$\eta^*_{m,n} = y + y^0_{m,n} \quad (253)$$

wobei y die Ordinaten der Einflußlinie für $\bar{M}_{m,n}$ und $y^0_{m,n}$ die Ordinaten der Einflußlinie für $\mathfrak{M}_{m,n}$ bedeuten.

Da sich nun, wie bereits hervorgehoben worden ist, die Einflußlinie für $\mathfrak{M}_{m,n}$ nur über jenes Feld erstreckt, das den zu untersuchenden Querschnitt enthält, so wird außerhalb dieses Feldes überall $y^0_{m,n} = 0$ und damit nach (253) einfach

$$\eta^*_{m,n} = y. \quad (254)$$

In Abb. 199 ist die Anwendung der beiden Formeln (253) und (254) an einem unverschieblich festgehaltenen Mehrfeldrahmen veranschaulicht. Es sind darin gezeichnet:

1. die Einflußlinie für $\bar{M}_{7,8}$ (voll);
2. die Einflußlinie für $\mathfrak{M}_{7,8}$ (strichliert);
3. in dem Feld 7–8 der nach (253) durch Überlagerung der $\mathfrak{M}_{7,8}$ - und $\bar{M}_{7,8}$ -Linie erhaltene Einflußlinienzweig von $M_{7,8}$ (strichpunktirt).

Der strichpunktirt gezeichnete Linienzug im Felde 7–8 in Verbindung mit dem außerhalb dieses Feldes gelegenen Linienzug $\bar{M}_{7,8}$ stellt die gesuchte Einflußlinie $M_{7,8}$ dar (siehe Zahlenbeispiel 21).

Über die zahlenmäßige Durchführung der Rechnung wäre noch folgendes zu sagen. Die „ideelle Belastung“ besteht nach (246) aus den Beiwerten a, b, c , die in der Rahmenrechnung als Stabfestwerte vorkommen. Wie nun im zweiten Abschnitt, IV, 3 dargelegt worden ist, verwendet man zur Aufstellung der Rahmengleichungen nicht die wahren Steifigkeitswerte a, b, c , sondern aus Zweckmäßigkeitsgründen entsprechend verzerrte Werte. Wenn nun dieselben verzerrten Werte auch als „ideelle Belastung“ zur Ermittlung der $\bar{M}_{m,n}$ -Einflußlinie angebracht werden, so ergeben sich sämtliche damit errechneten Formänderungswerte $\varphi, \psi, \Delta, \delta, y$ usw. wieder in wahrer Größe, so daß daraus ohne weiteres die Biegelinie bestimmt werden kann, die zugleich die Einflußlinie für $\bar{M}_{m,n}$ darstellt.

Zur Ermittlung der Einflußlinie für $\mathfrak{M}_{m,n}$ stehen für Stäbe mit geraden oder parabolischen Vouten zwölfteilige Einflußlinien als Zahlentafeln (13 bis 16) und zehnteilige Einflußlinien als graphische Tafeln (13a bis 16a) zur Verfügung. In jeder dieser Tafeln sind stets auch die Einflußlinien für den Stab ohne Vouten ($n = 1$) berücksichtigt und außerdem sind die \mathfrak{M} -Einflußlinien für Stäbe mit konstantem Querschnitt auch auf der Tafel 4 gesondert enthalten.

4. Schlußbemerkung.

Mit Rücksicht auf die auch hier geltende Vorzeichenregel aus dem ersten Abschnitt, I, 2 ist bei der Benutzung der \mathfrak{M} -Einflußlinientafeln 13a bis 16a des Dritten Teiles noch folgendes zu beachten. Um an Raum zu sparen, sind dort sowohl die \mathfrak{M}_1 - als auch die \mathfrak{M}_2 -Linien ohne Rücksicht auf das Vorzeichen nach oben gezeichnet. Unter Beachtung des Vorzeichens sollten aber nur die \mathfrak{M}_1 -Linien nach oben aufgetragen werden, weil sie negativ sind, hingegen die \mathfrak{M}_2 -Linien nach

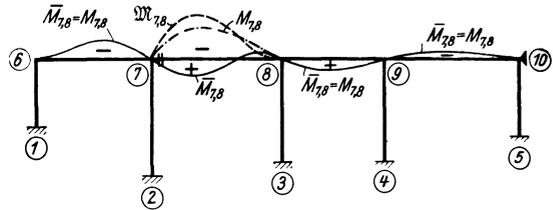


Abb. 199. Entwicklung der Einflußlinie für $M_{7,8}$.

unten, weil sie positiv sind (Abb. 200). Bei Überlagerung der $\bar{M}_{m,n}$ -Linie mit der $\mathfrak{M}_{m,n}$ -Linie ist daher diesem Umstande Rechnung zu tragen. Abb. 201a zeigt

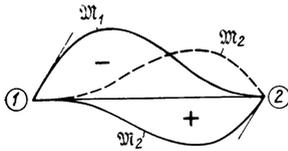


Abb. 200. \mathfrak{M} -Einflußlinien.

z. B., wie die $\bar{M}_{5,4}$ - und $\mathfrak{M}_{5,4}$ -Linien für einen unverschieblich festgehaltenen Zweifeldrahmen den Vorzeichen gemäß aufzutragen und zu überlagern wären. Die endgültige Einflußlinie für $M_{5,4}$ ist in Abb. 201 b zwischen den Punkten 4 bis 6 aufgetragen. Die Einflußlinie für $M_{5,6}$ würde sich, wie aus Abb. 202a, b hervorgeht, zwar in ähnlicher Form, jedoch mit negativen Vorzeichen ergeben.

In dieser Art müßten also die Einflußlinien gezeichnet werden, wenn man folgerichtig die früheren Vorzeichenregeln für die Stabendmomente beibehalten wollte.

Beim Vergleich der Einflußlinien für $M_{5,4}$ und $M_{5,6}$ in den Abb. 201 b und 202 b fällt das ungewohnte Aussehen der $M_{5,4}$ -Linie auf, da sie nach der früheren Vorzeichenregel *positiv* erscheint und daher nach *unten* aufgetragen ist. Im Fachschrifttum findet man aber häufiger die M -Einflußlinien für Stützenmomente

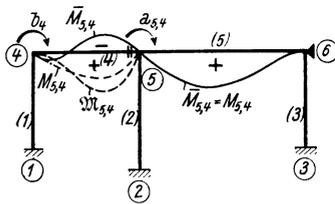


Abb. 201 a.

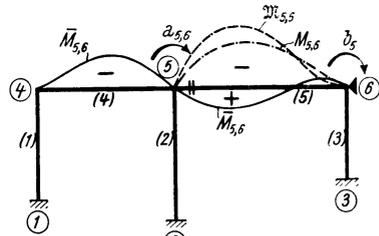


Abb. 202 a.

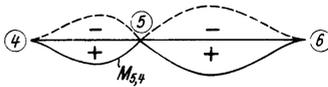


Abb. 201 b.

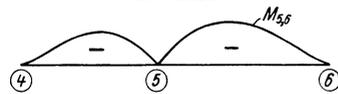


Abb. 202 b.

Abb. 201 a und b. Einflußlinie für $M_{5,4}$.

Abb. 202 a und b. Einflußlinie für $M_{5,6}$.

als *negative* Zweige nach *oben* aufgetragen, wie das auch in dem früher besprochenen Verfahren der Einflußlinienermittlung geschehen ist. Zur Wahrung der Einheitlichkeit ist es daher zu empfehlen, die fertigen Einflußlinien für die Auswertung ebenfalls in der gebräuchlicheren Art darzustellen. Um dies zu erreichen, braucht man nur beim Aufzeichnen der M -Einflußlinie für einen Querschnitt *links* eines Knotenpunktes einen Vorzeichenwechsel vornehmen, wie dies in Abb. 201 b strichliert angedeutet ist. Damit haben für die Auswertung auch hier die auf Seite 95 angegebenen Vorzeichenregeln Gültigkeit (siehe Zahlenbeispiel 21).

5. Beispiel: Einflußlinien für einen Zweifeldrahmen.

Die Gestalt des Tragwerkes ist aus der Beiwertskeizze Abb. 203 ersichtlich. Es sollen die M -Einflußlinien gleichzeitig für alle vier Riegelendquerschnitte ermittelt werden. Die „ideelle Belastung“ besteht hier nach (246) für die einzelnen \bar{M} -Einflußlinien aus folgenden Beträgen:

für $\bar{M}_{4,5}$:	$a_{4,5}$ und b_4 (siehe Abb. 204 a)	Belastungsfall B_I ,
„ $\bar{M}_{5,4}$:	$a_{5,4}$ „ b_4 („ „ 204 b)	„ B_{II} ,
„ $\bar{M}_{5,6}$:	$a_{5,6}$ „ b_5 („ „ 204 c)	„ B_{III} ,
„ $\bar{M}_{6,5}$:	$a_{6,5}$ „ b_5 („ „ 204 d)	„ B_{IV} .

Für die „ideelle Belastung“ entfällt im Riegel überall das Kräftepaar nach (247), da bei den Riegeln keine Stabdrehwinkel auftreten können.

Zur Aufstellung der Gleichungstabelle 17 können auch hier die Knotengleichungen (177) und die Verschiebungsgleichungen (180) benutzt werden. Es ergeben sich als Unbekannte die drei Knotendrehwinkel φ_4 , φ_5 und φ_6 sowie die Verschiebungsgröße Δ der Säulen. Die Knotenbelastungsglieder s_n sind hier unmittelbar gegeben durch die in den Knotenpunkten angreifende „ideelle Belastung“. Ihre Vorzeichen sind durchwegs negativ, weil die als äußere Belastung in den Knotenpunkten wirkenden Momente im Sinne des Uhrzeigers drehen. Es sind insgesamt die in den Abb. 204a bis d ersichtlichen vier Belastungsfälle B_I bis B_{IV} zu behandeln, die gemeinsam in einer Gleichungstabelle mitgeführt werden können.

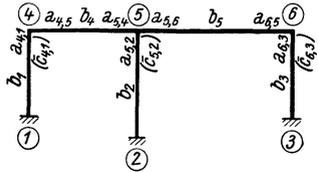


Abb. 203. Beiwertskeizze.

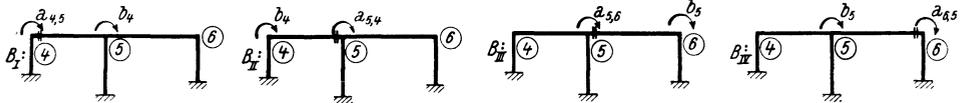


Abb. 204a.

Abb. 204b.

Abb. 204c.

Abb. 204d.

Abb. 204 a bis d. „Ideelle Belastungen“.

Gleichungstabelle 17.

	φ_4	φ_5	φ_6	Δ	B_I	B_{II}	B_{III}	B_{IV}
φ_4	d_4	b_4		$\bar{c}_{4,1}$	$-a_{4,5}$	$-b_4$	—	—
φ_5	b_4	d_5	b_5	$\bar{c}_{5,2}$	$-b_4$	$-a_{5,4}$	$-a_{5,6}$	$-b_5$
φ_6		b_5	d_6	$\bar{c}_{6,3}$	—	—	$-b_5$	$-a_{6,5}$
Δ	$\bar{c}_{4,1}$	$\bar{c}_{5,2}$	$\bar{c}_{6,3}$	D	—	—	—	—

Nach Auflösung des Gleichungssystems und der getrennten Ermittlung der unbekannt Formänderungsgrößen für die vier verschiedenen Belastungsfälle kann die Ermittlung der Biegelinien bzw. der Einflußlinien in der unter III, 3 dieses Abschnittes angegebenen Weise erfolgen (siehe auch Zahlenbeispiel 21).

IV. Ermittlung der Einflußlinien für die Querkräfte.

Für einen Rahmenstab zwischen den Knotenpunkten $m-n$ erhält man nach Abb. 205 unter Berücksichtigung der in II, 3 dieses Abschnittes angegebenen Vorzeichenregel an der Stelle x die Querkraft.

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_{n,m} - M_{m,n}}{l_v} \quad (255)$$

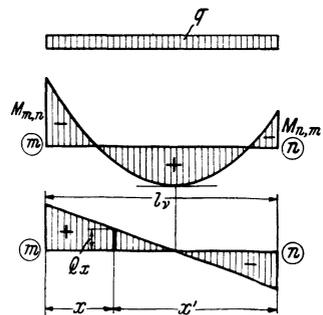


Abb. 205. Momenten- und Querkraftlinie eines Rahmenstabes.

Dabei ist, wie allgemein üblich, angenommen, daß eine positive Querkraft links vom Querschnitt nach oben bzw. rechts vom Schnitt nach unten gerichtet ist. Q_x^0 bedeutet die Querkraft an der Stelle x des freiaufhängend gedachten Stabes. Liegen für irgendein Rahmentragwerk die Einflußlinien der Anschlußmomente

$M_{m,n}$ und $M_{n,m}$ eines Stabes $m-n$ bekannt vor, so kann die Ermittlung der Q_x -Einflußlinie nach (255) durchgeführt werden. Um nun bei einer vorwiegend zeichnerischen Durchführung der Aufgabe ein bequemes Auftragen der einzelnen Ordinaten zu ermöglichen, empfiehlt es sich, die Gl. (255) in folgender Form zu benutzen:

$$Q_x = \frac{1}{l_v} [Q_x^0 l_v + (M_{n,m} - M_{m,n})] \tag{256}$$

oder

$$Q_x = \frac{1}{l_v} (\eta_1 + \eta_2). \tag{256 a}$$

Hierin bedeuten also:

- $\eta_1 = Q_x^0 \cdot l_v$ die l_v -fach verzerrten Ordinaten der Q_x^0 -Einflußlinie, die sich nur über das Feld erstreckt, in welchem der zu untersuchende Querschnitt liegt,
- $\eta_2 = M_{n,m} - M_{m,n}$ die Ordinatendifferenz der Einflußlinien für die benachbarten Stabendmomente,
- l_v die Länge des Stabes, dem der zu untersuchende Querschnitt angehört.

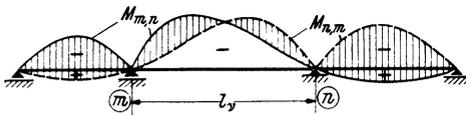


Abb. 206 a.

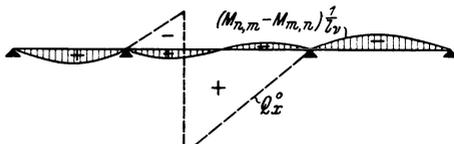


Abb. 206 b.

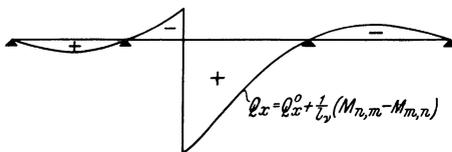


Abb. 206 c.

Abb. 206 a bis c. Entwicklung der Einflußlinie für Q_x .

Wird jedoch die Ermittlung der Q -Einflußlinien rechnerisch in Tabellenform vorgezogen, so geschieht dies am besten nach Gl. (255). Dies ist in den Abb. 206 a, b, c für einen Dreifeldbalken veranschaulicht. Abb. 206 a zeigt die Einflußlinien für $M_{m,n}$ und $M_{n,m}$, deren Differenz durch Schraffieren besonders hervorgehoben ist. In Abb. 206 b ist die $\frac{1}{l_v}$ -fach verzerrte Differenz der M -Einflußlinien aufgetragen, und zwar auf die Waagrechte bezogen. Gleichzeitig ist auch die Q_x^0 -Einflußlinie im Felde $m-n$ eingezeichnet. Abb. 206 c zeigt schließlich die endgültige Einflußlinie für Q_x , die durch Überlagerung der beiden in Abb. 206 b ersichtlichen Linienzüge erhalten wird.

Es wäre an dieser Stelle noch etwas über die Ermittlung der Einflußlinien für die *Längskräfte* und für die *Auflagerdrücke* zu sagen. Da nun die Längskräfte und Auflagerdrücke als Funktion der Querkräfte in Erscheinung treten, so ergeben sich auch die zugehörigen Einflußlinien durch eine entsprechende Überlagerung von Querkräfteinflußlinien. Man erhält also z. B. die Längskraft in der Säule (2-5) des in Abb. 207 ersichtlichen Rahmentragwerkes unter Beachtung der Vorzeichen mit

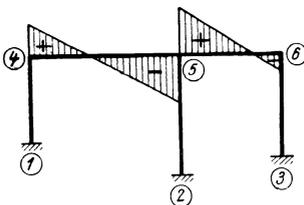


Abb. 207. Q -Verlauf im Riegel.

$$N_{2,5} = Q_{5,6} - Q_{5,4}$$

Man wird aber nur in seltenen Fällen Einflußlinien für die Längskräfte wirklich zeichnen, da es in der Regel wegen der einfachen Beziehung zwischen Quer- und Längskräften genügen wird, durch entsprechende Auswertung der Querkräfteinflußlinien auch die gesuchten Größtwerte der Längskräfte zu ermitteln.

Vierter Abschnitt.

Die Wirkung von Temperaturänderungen bei statisch unbestimmten Tragwerken.

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Temperaturänderungen untersucht, die sich entweder über das ganze Tragwerk oder nur über einzelne seiner Teile erstrecken. Zunächst soll vorausgesetzt werden, daß sich diese Temperaturänderungen in allen Querschnitten ein und desselben Stabes *gleichmäßig* vollziehen. Die Berücksichtigung einer über den Querschnitt *ungleichmäßig*, jedoch linear verlaufenden Temperaturzunahme oder -abnahme wird in Kapitel IV dieses Abschnittes behandelt.

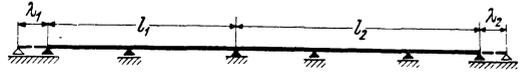


Abb. 208.

I. Tragwerke, die durch eine gleichmäßige Temperaturänderung keine Spannungsänderung erfahren.

Auch bei statisch unbestimmten Tragwerken kann eine Temperaturänderung ohne Einfluß auf die Spannungsverteilung sein. Das ist dann der Fall, wenn bei einer Temperaturänderung die Stäbe des Tragwerkes nur Verschiebungen erleiden, ohne daß an irgendeiner Stelle dieser Gestaltsänderung ein Widerstand entgegengesetzt wird. Es treten dann nirgends Stabkrümmungen und daher auch nirgends Biegemomente auf.

Einige solcher Tragwerksarten, die bei *gleichmäßigen* Temperaturänderungen spannungslos bleiben, sind in den Abb. 208 bis 211 dargestellt, worin auch die Gestaltsänderung strichliert angedeutet ist.

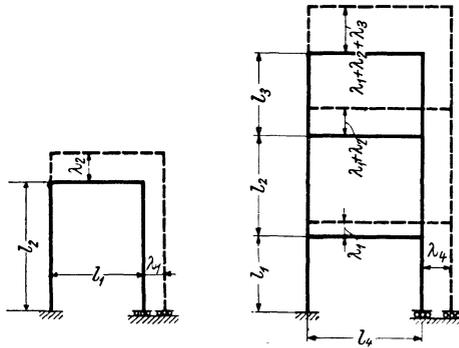


Abb. 209.

Abb. 210.

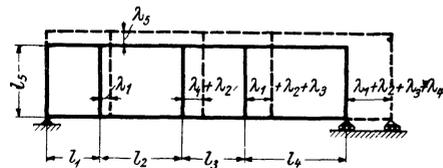


Abb. 211.

Abb. 208 bis 211. Tragwerke, die einer gleichmäßigen Wärmeänderung keinen Widerstand entgegengesetzen.

II. Tragwerke, bei welchen die durch Temperaturänderungen hervorgerufenen Knotenverschiebungen aus geometrischen Beziehungen allein bestimmbar sind.

1. Vorbemerkung.

Bei den folgenden Ableitungen soll grundsätzlich angenommen werden, daß die einzelnen Stäbe der Tragwerke beliebig veränderliche Stabquerschnitte (Vouten) aufweisen und auch die Temperaturänderungen der einzelnen Rahmenstäbe verschieden sein können.

Da bei den hier zur Behandlung gelangenden Rahmentragwerken die Knotenverschiebungen sofort aus den Längenänderungen durch Ausnutzung geometrischer Beziehungen bestimmt werden können, so sind damit auch die Stabdrehwinkel ψ

von vornherein gegeben und nur die Knotendrehwinkel φ zu berechnen. In den Abb. 218 und 219 sind Tragwerke dieser Art dargestellt, für welche also nur die Knotengleichungen $\sum M = 0$ aufzustellen sind.

Aber auch bei vielen symmetrischen Tragwerksformen können die Knotenverschiebungen bzw. die Stabdrehwinkel ψ aus den Stablängenänderungen unmittel-

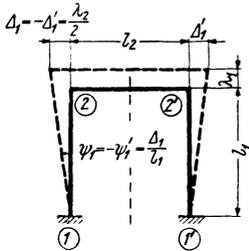


Abb. 212.

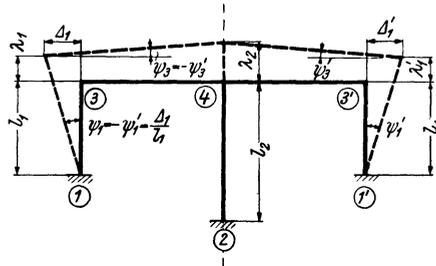


Abb. 213.

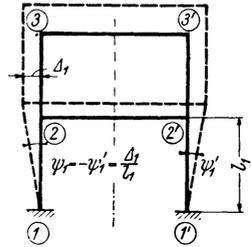


Abb. 214.

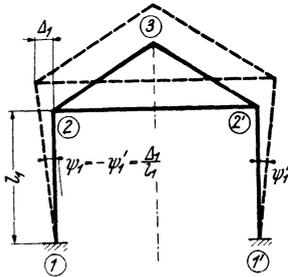


Abb. 215.

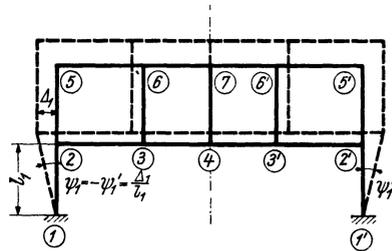


Abb. 216.

Abb. 212 bis 216. Symmetrische Tragwerke, deren Knotenverschiebungen bei gleichartigen Wärmeänderungen geometrisch bestimmbar sind.

bar bestimmt werden, wenn die Temperaturänderung in den symmetrisch gelegenen Stäben gleich ist. Als Beispiele hierfür können die Rahmenformen in Abb. 212 bis 216 angesehen werden, in welchen auch die zu erwartenden Knotenverschiebungen infolge einer *gleichmäßigen* Temperaturerhöhung angedeutet sind.

2. Knotengleichungen.

Denkt man sich aus einem *unbelasteten* Tragwerk, das einer Temperaturänderung ausgesetzt ist, einen Knotenpunkt (n) herausgeschnitten, so kann unter der Annahme, daß bei allen im Knotenpunkte (n) zusammentreffenden Stäben verschiedene Stabdrehwinkel ψ auftreten, für die Stabanschlußmomente nach (125) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} M_{n,1} &= a_{n,1} \varphi_n + b_{n,1} \varphi_1 + c_{n,1} \psi_{n,1} \\ M_{n,2} &= a_{n,2} \varphi_n + b_{n,2} \varphi_2 + c_{n,2} \psi_{n,2} \\ M_{n,i} &= a_{n,i} \varphi_n + b_{n,i} \varphi_i + c_{n,i} \psi_{n,i}. \end{aligned} \quad (257)$$

Die Bedingung $\sum_i M_{n,i} = 0$ ergibt somit für diesen Fall:

$$\sum_i M_{n,i} = \varphi_n \sum_i a_{n,i} + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + \sum_i c_{n,i} \psi_{n,i} = 0. \quad (258)$$

Nun liegen aber voraussetzungsgemäß die Stabdrehwinkel ψ hier für jeden Stab bekannt vor und können deshalb in die vorstehenden Gleichungen zahlenmäßig

eingeführt werden. Dadurch erhält das dritte Glied in den Gl. (257) die Bedeutung eines *Belastungsgliedes* und wird daher künftig mit \mathfrak{M}^t bezeichnet.

Damit lauten im vorliegenden Falle die Ausdrücke für die Anschlußmomente eines Stabes ν zwischen den Knotenpunkten m und n

$$\begin{aligned} M_{m,n} &= a_{m,n} \varphi_m + b_\nu \varphi_n + \mathfrak{M}_{m,n}^t \\ M_{n,m} &= a_{n,m} \varphi_n + b_\nu \varphi_m + \mathfrak{M}_{n,m}^t \end{aligned} \tag{259}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{m,n}^t &= c_{m,n} \psi_\nu = \frac{c_{m,n}}{l_\nu} \cdot \Delta_\nu = \bar{c}_{m,n} \Delta, \\ \mathfrak{M}_{n,m}^t &= c_{n,m} \psi_\nu = \frac{c_{n,m}}{l_\nu} \cdot \Delta_\nu = \bar{c}_{n,m} \Delta_\nu. \end{aligned} \tag{260}$$

Die „Temperaturbelastungsglieder“ $\mathfrak{M}_{m,n}^t$ bzw. $\mathfrak{M}_{n,m}^t$ bedeuten nichts anderes als die Stabanschlußmomente eines fest eingespannt gedachten Stabes ($\varphi_m = \underline{0}$, $\varphi_n = 0$), der um den Winkel ψ verdreht wird, bzw. dessen Endpunkte eine gegenseitige Verschiebung um den Betrag Δ erfahren (Abb. 217). Die Vorzeichen von \mathfrak{M}^t sind jeweils durch das Vorzeichen von ψ bzw. Δ bestimmt.

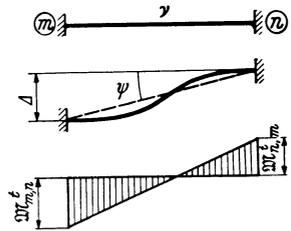


Abb. 217. „Temperaturbelastungsglieder“ $\mathfrak{M}_{m,n}^t$ und $\mathfrak{M}_{n,m}^t$.

Für Stäbe, die symmetrisch zur Stabmitte ausgebildet sind, ist $c_{m,n} = c_{n,m}$, so daß dann auch $\mathfrak{M}_{m,n}^t = \mathfrak{M}_{n,m}^t$ wird.

Setzt man in der Gl. (258) in Anlehnung an die früheren Ableitungen

für das Diagonalglied $d_n = \sum_i a_{n,i}$, (261)

für das Knotenbelastungsglied $s_n^t = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}^t = \sum_i c_{n,i} \psi_{n,i}$, (262)

so erscheint die *Knotengleichung* in derselben äußeren Form wie bei den Tragwerken mit unverschieblichen Knotenpunkten [vgl. (163)]:

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + s_n^t = 0. \tag{263}$$

Bemerkung: Erfolgt die Berechnung eines Rahmentragwerkes nach den Gleichungen des ersten Abschnittes, so lauten die Ausdrücke (259) für die Stabendmomente entsprechend (7) sinngemäß unter den hier getroffenen Voraussetzungen für den Temperaturbelastungsfall:

$$\begin{aligned} M_{m,n} &= 2 k \varphi_m + k \varphi_n + \mathfrak{M}_{m,n}^t \\ M_{n,m} &= 2 k \varphi_n + k \varphi_m + \mathfrak{M}_{n,m}^t \end{aligned} \tag{259 a}$$

wobei die „Temperaturbelastungsglieder“ folgende Werte annehmen:

$$\mathfrak{M}_{m,n}^t = \mathfrak{M}_{n,m}^t = 3 k \psi_\nu = \frac{3k}{l_\nu} \Delta_\nu = \bar{k} \Delta_\nu. \tag{260 a}$$

Die *Knotengleichung* würde in diesem Falle lauten [vgl. (18)]:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n^t = 0. \tag{263 a}$$

3. Zahlenmäßige Ermittlung der „Temperaturbelastungsglieder“.

Um die zahlenmäßige Ermittlung der Belastungsglieder M^t und s^t einfach und übersichtlich gestalten zu können, muß vorerst wieder eine klare Bezeichnungsweise und eine geeignete Vorzeichenregel für die verschiedenen Größen festgesetzt werden. Es bedeuten:

λ_ν die „wirkliche“ Längenänderung des Stabes ν ;

Δ_ν die „gegenseitige Verschiebung“ der Endpunkte des Stabes ν senkrecht zur Stabachse;

$\psi_\nu = \frac{\Delta_\nu}{l_\nu}$ den durch die gegenseitige Verschiebung Δ_ν hervorgerufenen Stabdrehwinkel.

Vorzeichenregel:

λ_ν wird als *Verlängerung positiv*, als Verkürzung negativ eingeführt.

Δ_ν wird *positiv* angenommen, wenn es einen positiven Stabdrehwinkel ψ_ν hervorruft, d. h. wenn es eine Stabverdrehung *entgegen* dem Uhrzeigersinn erzeugt.

Man erhält also z. B. für das in Abb. 218 ersichtliche Tragwerk:

$$\Delta_1 = \lambda_3; \quad \Delta_2 = 0; \quad \Delta_3 = \lambda_2 - \lambda_1$$

und damit
$$\psi_1 = \frac{\lambda_3}{l_1}; \quad \psi_2 = 0; \quad \psi_3 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l_3}. \quad (264)$$

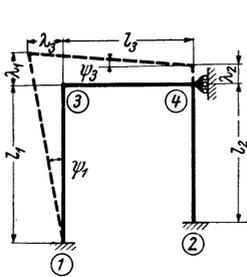


Abb. 218.

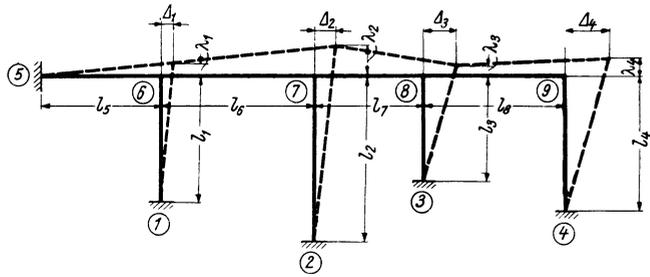


Abb. 219.

Abb. 218 und 219. Bestimmung der Verschiebungen Δ aus den Stablängenänderungen λ .

Für das in Abb. 219 dargestellte Tragwerk ergeben sich die Δ -Werte der einzelnen Stäbe aus den bekannt vorausgesetzten Stablängenänderungen folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\lambda_5; \quad \Delta_2 = -(\lambda_5 + \lambda_6); \quad \Delta_3 = -(\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7); \quad \Delta_4 = -(\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8); \\ \Delta_5 &= \lambda_1; \quad \Delta_6 = \lambda_2 - \lambda_1; \quad \Delta_7 = \lambda_3 - \lambda_2; \quad \Delta_8 = \lambda_4 - \lambda_3. \end{aligned} \quad (265)$$

Sind auf diese Weise die Werte ψ bzw. Δ für die einzelnen Stäbe ermittelt, so erhält man damit unmittelbar aus den Formeln (260) die gesuchten „Temperaturbelastungsglieder“ M^t .

Es muß hier ausdrücklich hervorgehoben werden, daß bei der zahlenmäßigen Ermittlung der M^t -Glieder die *wahren* Werte von k bzw. \bar{k} und c bzw. \bar{c} benutzt werden müssen, um auch die Momente infolge der Temperaturwirkung in *wahrer* Größe zu erhalten. Es empfiehlt sich daher, gleich in der Stabfestwerttabelle auch die wahren Werte k^* bzw. \bar{k}^* oder c^* bzw. \bar{c}^* mitzuführen. Dabei ist z. B.

$$\bar{k}^* = \frac{\bar{k}}{z} \quad \text{oder} \quad \bar{c}^* = \frac{\bar{c}}{z}.$$

wenn \bar{k} oder \bar{c} die z -fach verzerrten Stabfestwerte bedeuten. Es ist weiter zu beachten, daß die Dimension der aus der Rechnung erhaltenen Momente mit der Dimension der zur Ermittlung der „Temperaturbelastungsglieder“ M^t benutzten wahren Werte \bar{k}^* bzw. \bar{c}^* übereinstimmt. Will man also die Momente in tm erhalten, so sind auch E in t/m^2 , J in m^4 und l in m einzusetzen.

III. Tragwerke, bei welchen die Knotenverschiebungen aus geometrischen Beziehungen allein nicht bestimmbar sind.

1. Allgemeines.

Die bisher behandelten Fälle, in welchen von der Annahme ausgegangen worden ist, daß sämtliche Stabdrehwinkel ψ bzw. Verschiebungsgrößen Δ mit Hilfe von geometrischen Beziehungen aus den Stablängenänderungen unabhängig von den Knotendrehwinkeln φ zu ermitteln sind, werden in Wirklichkeit seltener vorkommen. Hingegen wird es sich sehr oft ergeben, daß zwar die ψ - und Δ -Werte einzelner Stäbe auf diese Art bestimmt werden können, daß aber die übrigen Stabdrehwinkel gemeinsam mit den Knotendrehwinkeln durch Auflösen des gesamten Gleichungssystems berechnet werden müssen. Bei derartigen Tragwerken müssen also zur Ermittlung der noch fehlenden Formänderungsgrößen ψ bzw. Δ wieder die schon bekannten Verschiebungsgleichungen herangezogen werden. Diese Art der Behandlung soll im folgenden ausführlich an einer Tragwerksform gezeigt werden, die im Bauwesen besonders häufig auftritt.

2. Der unsymmetrische Mehrfeldrahmen mit waagrechten Riegeln und beliebig veränderlichen Stabquerschnitten.

A. Ansätze für die Verschiebungsgrößen Δ der Rahmenstäbe.

In Abb. 220 ist das Stabsehnenbild eines solchen Tragwerkes infolge einer Temperaturerhöhung gezeichnet. Aus den bekannt anzunehmenden Längenänderungen der einzelnen Stäbe können hier nur die gegenseitigen Verschiebungen $\Delta_5, \Delta_6, \Delta_7$ der Riegel unmittelbar berechnet werden, und zwar ist mit den Bezeichnungen der Abb. 220:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_5 &= \lambda_2 - \lambda_1; \quad \Delta_6 = \lambda_3 - \lambda_2; \quad \Delta_7 = \lambda_4 - \lambda_3 \\ \text{und damit} \quad \psi_5 &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l_5}; \quad \psi_6 = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{l_6}; \quad \psi_7 = \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{l_7} \end{aligned} \right\} \quad (266)$$

Mit Hilfe dieser Werte ergeben sich dann aus (260) bzw. (260 a) die M^t -Glieder der Riegel.

Die Verschiebungsgrößen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ der Stiele sind deshalb nicht sofort zu ermitteln, weil der Ruhepunkt im Riegel 5–8, von welchem die Ausdehnung nach beiden Seiten fortschreitet, wegen der Unsymmetrie des Tragwerkes von vornherein nicht angegeben werden kann.

Es steht aber nur eine Verschiebungsgleichung zur Verfügung, da nur ein Stockwerk vorhanden ist. Es kann damit auch nur eine Verschiebungsgröße, etwa Δ_1 ,

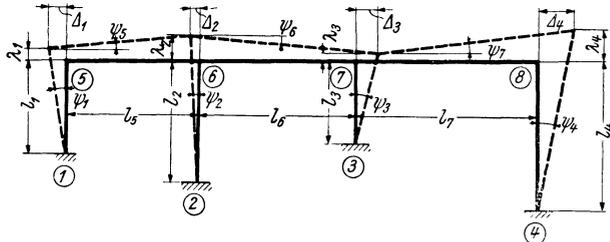


Abb. 220. Tragwerk, dessen Knotenverschiebungen bei Wärmeänderungen geometrisch nicht bestimmbar sind.

bestimmt werden, alle übrigen ergeben sich aus geometrischen Beziehungen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 220 und unter Beachtung der angenommenen Vorzeichenregel gilt:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \Delta_1 - \lambda_5 \\ \Delta_3 &= \Delta_2 - \lambda_6 = \Delta_1 - (\lambda_5 + \lambda_6) \\ \Delta_4 &= \Delta_3 - \lambda_7 = \Delta_1 - (\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7).\end{aligned}\quad (267)$$

Wenn bei der zahlenmäßigen Auswertung dieser Ausdrücke die Längenänderungen λ der angenommenen Vorzeichenregel gemäß als Verlängerung *positiv* und als Verkürzung *negativ* eingeführt werden, so ergeben sich auch die Δ -Werte bereits mit dem richtigen Vorzeichen.

B. Gleichungsansätze für die Stabendmomente.

Die Ausdrücke für die Stabendmomente in einem unbelasteten Tragwerk, das einer Temperaturänderung ausgesetzt ist, lauten nach (259) bzw. (260) allgemein:

$$\begin{aligned}M_{m,n} &= a_{m,n} \varphi_m + b_v \varphi_n + \bar{c}_{m,n} \Delta_v \\ M_{n,m} &= a_{n,m} \varphi_n + b_v \varphi_m + \bar{c}_{n,m} \Delta_v,\end{aligned}\quad (268)$$

dabei bedeuten wie früher $\bar{c}_{m,n} = \frac{c_{m,n}}{l_v}$ und $\bar{c}_{n,m} = \frac{c_{n,m}}{l_v}$.

Bei Anwendung dieser Ausdrücke (268) auf die einzelnen Stäbe des Tragwerkes sind aber drei Fälle zu unterscheiden.

1. Die Verschiebungsgrößen Δ sind aus den Längenänderungen *allein* berechenbar. Die Δ -Werte können daher unabhängig von den φ -Werten gesondert bestimmt und in die vorstehenden Gleichungen eingeführt werden. Die Gleichungen sind dann identisch mit den Ausdrücken (259).

2. Die Δ -Werte sind als *Unbekannte* mitzuführen, da sie aus geometrischen Beziehungen nicht bestimmt werden können. In diesem Falle bleiben die Gleichungen in der Form (268) bestehen.

3. Die Δ -Werte sind im Sinne von (267) als eine lineare Funktion einer unbekanntem Stabendverschiebung Δ_p und einer Reihe von gesondert bestimmbareren Verschiebungen λ (Stablängenänderungen) im Gesamtwert λ_s in Rechnung zu setzen. Dieser Fall trifft beispielsweise für das in Abb. 220 dargestellte Rahmentragwerk bei den Verschiebungen $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ zu. Allgemein kann man schreiben

$$\Delta_v = f(\Delta_p, \lambda_s^{(v)}). \quad (269)$$

Bedeutet Δ_p die gegenseitige Verschiebung des äußersten linken Ständers, so lautet die vorstehende Gleichung

$$\Delta_v = \Delta_p - \lambda_s^{(v)}. \quad (269a)$$

Hierin ist λ_s die *Summe* der Längenänderungen des Riegels zwischen den Knotenpunkten, denen die Verschiebungsgrößen Δ_v und Δ_p zugeordnet sind. Führt man die Beziehung (269a) in (268) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}M_{m,n} &= a_{m,n} \varphi_m + b_v \varphi_n + \bar{c}_{m,n} (\Delta_p - \lambda_s^{(v)}) \\ M_{n,m} &= a_{n,m} \varphi_n + b_v \varphi_m + \bar{c}_{n,m} (\Delta_p - \lambda_s^{(v)}).\end{aligned}\quad (270)$$

Nun kann man, da der Summenwert $\lambda_s^{(v)}$ jeweils bekannt ist, für

$$\begin{aligned}-\bar{c}_{m,n} \cdot \lambda_s^{(v)} &= \mathfrak{M}_{m,n}^t \\ -\bar{c}_{n,m} \cdot \lambda_s^{(v)} &= \mathfrak{M}_{n,m}^t\end{aligned}\quad (271)$$

setzen. Dieser Wert hat auch hier wieder die Bedeutung eines Stabbelastungsgliedes. Damit erhalten die Ausdrücke (270) für die Stabendmomente auch bei

Temperaturwirkung wieder denselben Aufbau wie für gewöhnliche Belastung. Sie lauten:

$$\begin{aligned} M_{m,n} &= a_{m,n} \varphi_m + b_v \varphi_n + \bar{c}_{m,n} \Delta_p + \mathfrak{M}_{m,n}^t \\ M_{n,m} &= a_{n,m} \varphi_n + b_v \varphi_m + \bar{c}_{n,m} \Delta_p + \mathfrak{M}_{n,m}^t. \end{aligned} \quad (272)$$

Nach diesen vorbereitenden Arbeiten kann an die Aufstellung der allgemeinen Rahmgleichungen für die vorliegende Tragwerksart geschritten werden.

C. Knotengleichungen.

In Abb. 221 ist ein Teil eines Mehrfeldrahmens unter Verwendung einer allgemeinen Bezeichnungsart der Stäbe und Knotenpunkte dargestellt. Die Ansätze für die Stabanschlußmomente im Knotenpunkte n lauten:

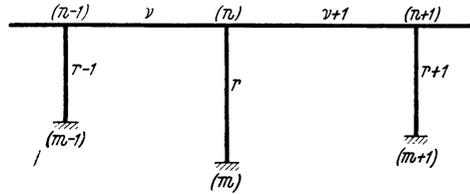


Abb. 221. Knoten- und Stabbezeichnung bei Mehrfeldrahmen.

$$\left. \begin{aligned} M_{n,n-1} &= a_{n,n-1} \varphi_n + b_v \varphi_{n-1} + \mathfrak{M}_{n,n-1}^t \\ M_{n,n+1} &= a_{n,n+1} \varphi_n + b_{v+1} \varphi_{n+1} + \mathfrak{M}_{n,n+1}^t \end{aligned} \right\} \text{ nach (259)}$$

$$M_{n,m} = a_{n,m} \varphi_n + b_r \varphi_m + \bar{c}_{n,m} \Delta_p + \mathfrak{M}_{n,m}^t \quad \text{nach (272)}$$

Damit erhält man die Bedingung $\sum_i M_{n,i} = 0$ im Knotenpunkte n in der üblichen Schreibweise:

$$d_n \varphi_n + b_v \varphi_{n-1} + b_r \varphi_m + b_{v+1} \varphi_{n+1} + \bar{c}_{n,m} \Delta_p + s_n^t = 0. \quad (273)$$

Hierbei ist $s_n^t = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}^t$ [siehe auch (262)].

Im vorliegenden Falle ist φ_m durch die Randbedingungen gegeben. Bei voller Einspannung der Säulenfüße wird $\varphi_m = 0$ und die Knotengleichung nimmt dann folgende Form an:

$$d_n \varphi_n + b_v \varphi_{n-1} + b_{v+1} \varphi_{n+1} + \bar{c}_{n,m} \Delta_p + s_n^t = 0. \quad (273 a)$$

D. Verschiebungsgleichungen.

Wenn außer der Temperaturänderung keine andere Belastung auf das Tragwerk einwirkt, so ergibt sich die Verschiebungsgleichung $\sum H = 0$ nach (43) in vereinfachter Form, nämlich:

$$\sum_r \frac{M_o + M_u}{l_r} = 0, \quad (274)$$

worin l_r jeweils die Länge der Säule (r) bedeutet.

Es sind nun wieder die Stabendmomente durch die Formänderungsgrößen zu ersetzen. Das geschieht nach (128) und man erhält mit der hier gewählten Bezeichnung an Stelle von (274)

$$\sum_r \frac{c_o}{l_r} \varphi_o + \sum_r \frac{c_u}{l_r} \varphi_u + \sum_r \frac{c_o + c_u}{l_r} \psi_r = 0. \quad (275)$$

Weiter ist unter Beachtung von (269 a)

$$\psi_r = \frac{\Delta_r}{l_r} = \frac{\Delta_p - \lambda_s^{(r)}}{l_r}. \quad (276)$$

Damit ergibt sich unter gleichzeitiger Einführung der \bar{c} -Werte:

$$\sum_r \bar{c}_o \varphi_o + \sum_r \bar{c}_u \varphi_u + \sum_r \frac{\bar{c}_o + \bar{c}_u}{l_r} \cdot \Delta_p - \sum_r \frac{\bar{c}_o + \bar{c}_u}{l_r} \cdot \lambda_s(r) = 0. \quad (277)$$

Die \sum_r beziehen sich auf alle Säulen des Rahmens. Der letzte Summenausdruck der vorstehenden Gleichung enthält nur bekannte Größen und kann sofort zahlenmäßig ermittelt werden. Er stellt somit das Belastungsglied der Verschiebungsgleichung bei Temperaturwirkung vor. Man setzt also wie früher:

$$D = \sum_r \frac{\bar{c}_o + \bar{c}_u}{l_r}, \quad (278)$$

$$S^t = - \sum_r \frac{\bar{c}_o + \bar{c}_u}{l_r} \cdot \lambda_s(r). \quad (279)$$

Damit lautet die *Verschiebungsgleichung* in brauchbarer und übersichtlicher Form:

$$\boxed{\sum_r \bar{c}_u \varphi_u + \sum_r \bar{c}_o \varphi_o + D \Delta_p + S^t = 0.} \quad (280)$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach überein mit der allgemeinen Verschiebungsgleichung (180) für Stockwerkrahmen mit lotrechten, ungleich hohen Ständern.

Sind die Säulenfüße fest eingespannt, so wird $\varphi_u = 0$ und die Gleichung vereinfacht sich noch weiter zu

$$\boxed{\sum_r \bar{c}_o \varphi_o + D \Delta_p + S^t = 0.} \quad (280 a)$$

3. Beschreibung des Rechnungsganges.

Zur besseren Übersicht sei hier die Reihenfolge der Rechenarbeiten bei Berücksichtigung der Temperaturwirkung nochmals kurz zusammengefaßt.

1. Ermittlung der Längenänderung λ jedes einzelnen Stabes. Diese nimmt für einen Stab ν mit der Länge l_ν bei einer Temperaturänderung von t^0 den Wert $\lambda_\nu = \omega \cdot t^0 \cdot l_\nu$ an, wobei ω die Wärmeausdehnungszahl des Stabmaterials bedeutet.

2. Berechnung der Stabfestwerte a , b , c bzw. \bar{c} unter Zuhilfenahme der Zahlen- oder Kurventafeln des Dritten Teiles.

3. Herstellung der Beiwerts-kizze.

4. Feststellung derjenigen gegenseitigen Verschiebungen Δ , die aus den Längenänderungen der Stäbe allein bestimmbar sind, und ihre Ermittlung nach (266).

5. Wahl einer Säulenverschiebung Δ_p (am besten die der linken Säule) als Rechnungs-unbekannte, durch welche alle übrigen Säulenverschiebungen ausgedrückt werden.

6. Berechnung der \mathfrak{M}^t -Glieder für jede einzelne Säule nach (271) und für jeden Riegel nach (260) mit Hilfe von (266).

7. Ermittlung der für die Knotengleichungen bzw. Verschiebungsgleichung erforderlichen Werte, und zwar d_n in der üblichen Weise und s_n^t nach (262), ferner D nach (278) und S^t nach (279).

8. Anschreiben der Gleichungen nach (273) und (280) und deren Auflösung.

9. Ermittlung der Stabendmomente nach 2, B dieses Kapitels.

4. Gleichungstabelle für einen unsymmetrischen Dreifeldrahmen mit veränderlichen Stabquerschnitten bei Temperaturwirkung.

Die Form des Tragwerkes ist in Abb. 222 dargestellt. Die zugehörige Beiwertskeizze zeigt Abb. 223. Bei Annahme fester Einspannung der Säulenfüße werden φ_1 bis φ_4 gleich Null, so daß als Unbekannte nur die vier Knotendrehwinkel $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ und die Verschiebungsgröße Δ_1 zu bestimmen sind. Zunächst wären die

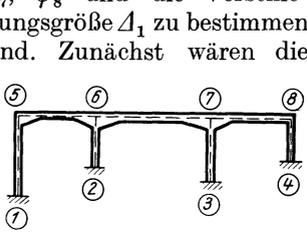


Abb. 222.

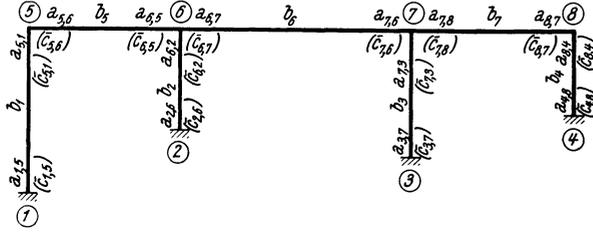


Abb. 223.

Abb. 222 und 223. Tragwerk und Beiwertskeizze.

Längenänderungen λ_1 bis λ_7 aus $\lambda_n = \omega \cdot t^0 \cdot l_n$ zu berechnen, worauf die Ansätze für die Δ -Werte der einzelnen Stäbe aufgestellt werden können, und zwar:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 & \dots \dots \dots \text{gewählte Rechnungsunbekannte,} \\ \Delta_2 & = \Delta_1 - \lambda_5 \\ \Delta_3 & = \Delta_1 - (\lambda_5 + \lambda_6) \\ \Delta_4 & = \Delta_1 - (\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7) \\ \Delta_5 & = \lambda_2 - \lambda_1; \quad \Delta_6 = \lambda_3 - \lambda_2; \quad \Delta_7 = \lambda_4 - \lambda_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{nach (267) bzw. (269a)} \\ \text{nach (266)} \end{array}$$

Nach (262) ergeben sich die „Knotenbelastungsglieder“ s_n^t wie folgt:

$$s_5^t = \mathfrak{M}_{5,1}^t + \mathfrak{M}_{5,6}^t; \quad s_6^t = \mathfrak{M}_{6,2}^t + \mathfrak{M}_{6,5}^t + \mathfrak{M}_{6,7}^t; \quad s_7^t = \sum \mathfrak{M}_{7,i}^t; \quad s_8^t = \sum \mathfrak{M}_{8,i}^t.$$

Die \mathfrak{M}^t -Glieder erhält man wie folgt:

für die *Stiele* nach (271)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{5,1}^t & = -\bar{c}_{5,1} \cdot \lambda_s^{(1)} = 0 && \text{(weil } \lambda_s^{(1)} = 0), \\ \mathfrak{M}_{6,2}^t & = -\bar{c}_{6,2} \cdot \lambda_s^{(2)} = -\bar{c}_{6,2} \cdot \lambda_5, \\ \mathfrak{M}_{7,3}^t & = -\bar{c}_{7,3} \cdot \lambda_s^{(3)} = -\bar{c}_{7,3} (\lambda_5 + \lambda_6), \\ \mathfrak{M}_{8,4}^t & = -\bar{c}_{8,4} \cdot \lambda_s^{(4)} = -\bar{c}_{8,4} (\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7) \end{aligned}$$

und für die *Riegel*, wenn angenommen wird, daß diese unsymmetrisch ausgebildet sind (also $\bar{c}_{m,n} \neq \bar{c}_{n,m}$), nach (260)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{5,6}^t & = \bar{c}_{5,6} \Delta_5, & \mathfrak{M}_{6,5}^t & = \bar{c}_{6,5} \Delta_5, \\ \mathfrak{M}_{6,7}^t & = \bar{c}_{6,7} \Delta_6, & \mathfrak{M}_{7,6}^t & = \bar{c}_{7,6} \Delta_6, \\ \mathfrak{M}_{7,8}^t & = \bar{c}_{7,8} \Delta_7, & \mathfrak{M}_{8,7}^t & = \bar{c}_{8,7} \Delta_7. \end{aligned}$$

Wenn die Stäbe symmetrisch ausgebildet sind, so wird, weil dann $\bar{c}_{m,n} = \bar{c}_{n,m}$, immer auch $\mathfrak{M}_{m,n}^t = \mathfrak{M}_{n,m}^t$.

Weiter sind die *Diagonalglieder* zu ermitteln, und zwar für die Knotengleichungen:

$$d_5 = \sum a_5; \quad d_6 = \sum a_6; \quad d_7 = \sum a_7; \quad d_8 = \sum a_8$$

Gleichungstabelle 18.

	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	Δ_1	B^t
φ_5	d_5	b_5			$\bar{c}_{5,1}$	s_5^t
φ_6	b_5	d_6	b_6		$\bar{c}_{6,2}$	s_6^t
φ_7		b_6	d_7	b_7	$\bar{c}_{7,3}$	s_7^t
φ_8			b_7	d_8	$\bar{c}_{8,4}$	s_8^t
Δ_1	$\bar{c}_{5,1}$	$\bar{c}_{6,2}$	$\bar{c}_{7,3}$	$\bar{c}_{8,4}$	D_1	S_1^t

und für die Verschiebungsgleichung nach (278)

$$D_1 = \sum \frac{\bar{c}_o + \bar{c}_u}{l_r}$$

ferner nach (279) das Belastungsglied

$$S_1^t = - \sum \frac{\bar{c}_o + \bar{c}_u}{l_r} \cdot \lambda_s^{(r)}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann die Aufstellung der Gleichungstabelle 18 vorgenommen werden. Da-

zu wird die Knotengleichung (273 a) und die Verschiebungsgleichung (280 a) benutzt.

Nach Auflösen der Gleichungen können nach (267) auch die Verschiebungsgrößen $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ der Stiele (2), (3), (4) ermittelt werden, so daß dann die Stabendmomente nach den bekannten Formeln bestimmbar sind (siehe Zahlenbeispiel 9).

5. Schlußbemerkung.

Nun wären auf ähnliche Weise auch noch andere Tragwerksarten, z. B. die Stockwerkrahmen mit schiefen Riegeln oder die Vierendeelrahmen usw. zu untersuchen und dafür gebrauchsfertige Gleichungen aufzustellen. Zu diesem Zwecke wäre im wesentlichen genau so vorzugehen, wie das bisher gezeigt worden ist. Es werden oft Verschiebungspläne erforderlich sein, um die Δ -Werte zur Ermittlung der „Temperaturbelastungsglieder“ M^t bestimmen zu können. Grundsätzlich haben bei allen Rahmentypen die Gleichungen auch unter Berücksichtigung der Temperaturwirkung denselben Aufbau wie jene für gewöhnliche Belastungsfälle, die in den früheren Abschnitten ja bereits ausführlich behandelt worden sind. Praktisch liefert also die Untersuchung des Temperatureinflusses lediglich mehr Belastungsfälle, während im übrigen aber dieselben Rahmengleichungen Verwendung finden können.

IV. Wirkung der ungleichmäßigen Temperaturänderungen.

1. Voraussetzungen.

1. Es werden hier nur solche Tragwerke in Betracht gezogen, bei welchen die verschiedenen Stäbe zwar ungleiche Trägheitsmomente aufweisen können, jeder einzelne Stab aber auf seiner ganzen Länge einen *gleichbleibenden* Querschnitt besitzt.

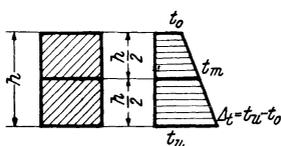


Abb. 224. Temperaturverteilung im Querschnitt.

2. Die Temperaturänderung kann für jeden Stab verschieden sein, für ein und denselben Stab soll sie aber in allen seinen Querschnitten denselben Verlauf haben.

3. Der Verlauf der Temperaturänderung innerhalb eines Querschnittes ist *linear*. Sind t_o und t_u die Temperaturänderungen an der oberen bzw. unteren Querschnittsrandfaser, so ist $\Delta t = t_u - t_o$ der Unterschied der Temperaturänderungen in den Randfasern (Abb. 224).

4. Die durch die Temperaturänderungen eintretenden Verformungen sind so klein, daß die infolge der Krümmung der Stabachse auftretenden Stabverkürzungen vernachlässigt werden können.

2. Belastungsglieder.

Es sind hier zwei Beiträge zu unterscheiden:

A. Der Anteil infolge *Längenänderung* der Stabachse.

B. Der Anteil infolge *Krümmung* der Stabachse durch die ungleichen Temperaturänderungen in den verschiedenen Querschnittsfasern.

A. Anteil infolge Längenänderung der Stabachse.

Die Temperaturänderung t_m in der Stabachse wird nun unter der Annahme, daß diese in der halben Querschnittshöhe liegt,

$$t_m = \frac{t_u + t_o}{2} \tag{281}$$

betragen, wenn t_u bzw. t_o die Temperaturänderungen am unteren bzw. oberen Querschnittsrand bedeuten (Abb. 224). Damit ergibt sich die Verlängerung der Stabachse

$$\lambda_m = \omega \cdot t_m \cdot l = \omega \cdot l \frac{t_u + t_o}{2}. \tag{282}$$

Mit den so ermittelten Verlängerungen λ_m der Stabachsen sind die Δ -Werte der einzelnen Stäbe zu bestimmen und dann in der bereits früher angegebenen Weise die \mathfrak{M} -Glieder zu berechnen.

B. Anteil infolge Krümmung der Stabachse.

Dieser Beitrag wird nur in Ausnahmefällen zu berücksichtigen sein. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß er für irgendeinen Stab *nur* infolge des Temperaturunterschiedes in der oberen und unteren Querschnittsfaser *dieses* Stabes hervorgerufen werden kann. Um die statische Deutung der einer solchen Temperaturwirkung entsprechenden *Belastungsglieder* richtig erfassen zu können, sei auf die Ansätze (7) für die Stabendmomente bei Stäben mit gleichen Trägheitsmomenten zurückgegriffen. Sie lauten:

$$M_{1,2} = k (2 \varphi_1 + \varphi_2 + 3 \psi) + \mathfrak{M}_{1,2}$$

$$M_{2,1} = k (2 \varphi_2 + \varphi_1 + 3 \psi) + \mathfrak{M}_{2,1}.$$

Die in diesen Ausdrücken enthaltenen Belastungsglieder $\mathfrak{M}_{1,2}$ und $\mathfrak{M}_{2,1}$ stellen Einspannmomente am beiderseits fest eingespannt gedachten Träger vor und ergeben sich nach (149a) auch allgemein aus den Formeln

$$\mathfrak{M}_{1,2} = -2 \cdot \frac{2 \alpha_1^0 - \alpha_2^0}{l}, \quad \mathfrak{M}_{2,1} = +2 \cdot \frac{2 \alpha_2^0 - \alpha_1^0}{l}, \tag{283}$$

wenn die Werte α_1^0 und α_2^0 die EJ -fach verzerrten Tangentenwinkel der Biegelinie an den Enden des freiauflegend gedachten Stabes infolge der äußeren Belastung bedeuten (Abb. 225).

Dieselben Ausdrücke können nun benutzt werden, um die Belastungsglieder bei ungleichmäßiger Temperaturänderung zahlenmäßig zu berechnen. Zu diesem Zwecke

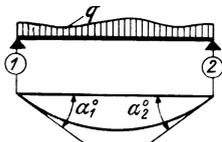


Abb. 225.

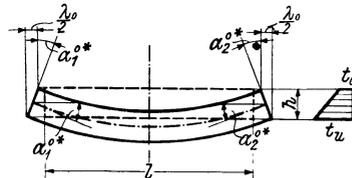


Abb. 226. Bestimmung der Winkelwerte α_1^{0*} und α_2^{0*} .

sind lediglich die infolge der ungleichartigen Temperaturwirkung hervorgerufenen Verdrehungen der Endquerschnitte des freiauflegend gedachten Stabes zu ermitteln, EJ -fach zu verzerren und dann in die Formeln (283) einzuführen.

Abb. 226 zeigt die Verformung eines freiauflegenden Trägers von der Höhe h und der Länge l infolge ungleichartiger Temperaturänderung in starker Verzerrung. Aus Symmetriegründen müssen die Tangentenwinkel an beiden Stabenden gleich

groß sein, also $\alpha_1^0 = \alpha_2^0$. Nach den vorangegangenen Erläuterungen ist nun, wenn α_1^{0*} und α_2^{0*} die wahren Winkelwerte bedeuten,

$$\alpha_1^0 = EJ \alpha_1^{0*}; \quad \alpha_2^0 = EJ \alpha_2^{0*}. \quad (284)$$

Die zahlenmäßige Größe der Winkel α_1^{0*} und α_2^{0*} ergibt sich nach Abb. 226 aus einfachen geometrischen Beziehungen. Die Längenänderung der oberen Faser in bezug auf die untere beträgt:

$$\lambda_o = \omega \cdot \Delta t \cdot l. \quad (285)$$

Es verschiebt sich also an den beiden Stabenden der obere Querschnittsrand in bezug auf den unteren um den Betrag von $\frac{\lambda_o}{2}$. Somit ist

$$\operatorname{tg} \alpha_1^{0*} = \frac{\lambda_o}{2h} = \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot l}{2h}, \quad (286)$$

oder wegen der Kleinheit des Winkels auch

$$\alpha_1^{0*} = \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot l}{2h}. \quad (287)$$

Nach (284) wird also

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{EJ \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot l}{2h} \quad (288)$$

und damit nach (283)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{1,2}^t &= -2 EJ \cdot \frac{2\omega \cdot \Delta t \cdot l}{2h} \cdot \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot l}{l} = -\frac{EJ \cdot \omega \cdot \Delta t}{h}, \\ \mathfrak{M}_{2,1}^t &= +\frac{EJ \cdot \omega \cdot \Delta t}{h}, \end{aligned} \quad (289)$$

wobei

$$\Delta t = t_u - t_o. \quad (290)$$

Sind nun die „Temperaturbelastungsglieder“ aus beiden Anteilen zahlenmäßig festgestellt, so werden sie zusammengefaßt und die weitere Berechnung erfolgt dann in der bekannten Weise. Auch hier wird an der Form der Gleichungstabelle nichts geändert, so daß der Temperaturbelastungsfall gemeinsam mit den übrigen Belastungsfällen berechnet werden kann.

Bei Stäben mit veränderlichen Querschnittshöhen würden sich bei der Ermittlung des Anteiles infolge Krümmung der Stabachse gewisse Schwierigkeiten ergeben, wenn dieser Einfluß genau berücksichtigt werden sollte. Zur Vereinfachung der Rechnung wird es aber in den meisten Fällen zulässig sein, diesen Beitrag unter Annahme einer konstanten Querschnittshöhe zu ermitteln oder den Einfluß der ungleichmäßigen Temperaturänderung überhaupt zu vernachlässigen.

V. Verschiedene Nebeneinflüsse bei Rahmentragwerken.

1. Einfluß des Schwindens bei Eisenbetontragwerken.

Unter der Voraussetzung, daß sich das Schwinden innerhalb der Stabmasse in der Längsrichtung vollkommen *gleichmäßig* vollzieht, ist die Wirkung einer solchen Stabverkürzung in derselben Weise rechnermäßig zu verfolgen wie etwa der Einfluß einer gleichmäßigen Temperaturerniedrigung. Tatsächlich gestatten bis heute die Vorschriften der meisten Staaten, die Schwindwirkungen bei Eisenbetontragwerken genau so zu behandeln wie eine Temperaturwirkung, die die gleiche Stabverkürzung hervorruft. Nach diesen vereinfachenden Annahmen bietet die Berücksichtigung der Schwindwirkung bei Eisenbetontragwerken nichts Neues und es kann auf die Kapitel I bis III dieses Abschnittes verwiesen werden.

2. Berücksichtigung der durch die Längskräfte hervorgerufenen Formänderungen.

Bekanntlich treten die Einflüsse der Formänderungen der Längs- und Querkräfte im Verhältnis zu denen, die durch die Momente verursacht werden, bei Rahmentragwerken stark zurück. Es ist daher üblich, diese Nebeneinflüsse, namentlich die infolge Formänderung durch Querkräfte, in den meisten Fällen zu vernachlässigen. Es kann sich aber doch in Ausnahmefällen die Notwendigkeit ergeben, die durch die Formänderung infolge von *Längskräften* hervorgerufenen Zusatzmomente zu bestimmen.

Man wird sich aber wohl fast in allen Fällen mit einer nachträglichen Ermittlung dieser Zusatzbeanspruchungen begnügen können. Liegt also die Berechnung der Momente ohne Berücksichtigung der Stablängenänderung durch die Längskräfte vor, so werden mit diesen Momenten die Längskräfte berechnet, die natürlich in Wirklichkeit nur Näherungswerte darstellen. Mit diesen Näherungswerten bestimmt man nach dem bekannten HOOKESchen Gesetz die Längenänderungen der einzelnen Rahmenstäbe. Für einen Stab mit gleichbleibendem Querschnitt F und der Länge l ergibt sich somit bei einer Längskraft P die Längenänderung

$$\lambda = \frac{P \cdot l}{EF}, \quad (291)$$

wobei E die Dehnungszahl bedeutet.

Ist die Querschnittsfläche des untersuchten Stabes nicht durchwegs gleich, so wird, wenn man die Spannung in jedem Querschnitte gleichmäßig verteilt annimmt, die gesamte Längenänderung

$$\lambda = \int_0^l \frac{P \cdot dx}{EF} = \frac{P}{E} \int_0^l \frac{dx}{F} \quad (292)$$

oder auch

$$\lambda = \frac{P}{E} \sum \frac{\Delta x}{F}, \quad (292 \text{ a})$$

wenn man sich den Stab in einzelne Teile von der Länge Δx zerlegt denkt und F jeweils die mittlere Querschnittsfläche dieses Stabteiles bedeutet.

Sind auf diese Weise sämtliche Längenänderungen ermittelt, so können in der gleichen Art wie früher bei der Berücksichtigung von Temperaturänderungen die Belastungsglieder \mathfrak{M} aus diesen Längenänderungen berechnet werden. Unter Verwendung derselben Gleichungstabelle, aus welcher die ersten Momente bestimmt worden sind, ergeben sich nun durch Auswerten des neuen Belastungsfalles die Zusatzmomente, die durch die Formänderung infolge der Stablängskräfte verursacht werden. Fügt man die so erhaltenen Werte zu den zuerst ermittelten hinzu, so ergeben sich angenähert die gesuchten endgültigen Werte. Auf eine Wiederholung dieser Rechnung unter Berücksichtigung der neuen Längskräfte zur Verbesserung der Ergebnisse kann wegen des geringfügigen Einflusses in der Regel verzichtet werden.

3. Wirkung der Stützen- und Auflagerverschiebungen.

Wenn ein Tragwerk den auftretenden Stützensenkungen oder Auflagerverschiebungen einen inneren Widerstand entgegensetzt, so werden sich Formänderungen einstellen, die im Tragwerk Spannungen erzeugen. Die unter diesem Einfluß entstehenden Momente sind in ähnlicher Weise zu ermitteln wie bei einer Temperaturwirkung, wo diese Stützen- und Auflagerverschiebungen durch Längenänderungen in den einzelnen Stäben hervorgerufen werden. Es hängt auch hier von der Be-

schaffenheit des Tragwerkes ab, ob die durch Auflagerverschiebungen bewirkten übrigen Knotenverschiebungen aus geometrischen Beziehungen, also aus Verschiebungsplänen *allein* bestimmt werden können. Ist dies der Fall, so brauchen wiederum nur die Knotengleichungen aufgestellt und aufgelöst werden. Dies trifft bei vielen symmetrischen Tragwerken zu, wenn auch die Auflagersenkungen symmetrisch erfolgen (Abb. 227, 228, 229). In der Regel wird jedoch mit solchen Fällen

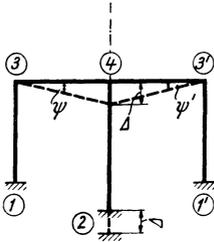


Abb. 227.

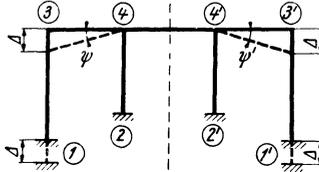


Abb. 228.

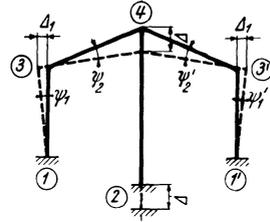


Abb. 229.

Abb. 227 bis 229. Symmetrische Stützensenkungen bei Rahmentragwerken.

zu rechnen sein, wo zur Bestimmung der Unbekannten auch Verschiebungsgleichungen herangezogen werden müssen. Es können aber stets beliebig viele Stützensenkungen *gleichzeitig* in Rechnung gesetzt werden.

Die Größe der Stützensenkungen muß naturgemäß als bekannt vorausgesetzt werden. Es wird freilich in den meisten Fällen sehr schwierig sein, namentlich wenn es sich um Fundamentsetzungen handelt, auch nur annähernd richtige Annahmen zu treffen. Einfacher ist diese Aufgabe, wenn etwa nur die Zusammendrückung von schlanken Stützen (z. B. bei Pendelstützen) zu berücksichtigen ist, oder wenn ein Tragwerk aus Eisenbeton zum Teil auf einer Stahlkonstruktion aufgesetzt ist. In solchen Fällen kann die Senkung der Stützen aus dem HOOKESchen Gesetz für bekannte Auflagerkräfte ermittelt werden. Die Aufgabe unterscheidet sich dann aber nicht mehr von der in dem vorhergehenden Kapitel behandelten und es gilt daher die dort angestellte Betrachtung auch hier.

Fünfter Abschnitt.

Der Durchlaufträger mit veränderlichen Stabquerschnitten unter Berücksichtigung aller Sonderfälle.

I. Allgemeines.

Die Behandlung dieser Tragwerksform, die eine überaus große Rolle im gesamten Bauwesen spielt, bietet an sich keine besonderen Schwierigkeiten. Sie stellt eigentlich nur einen Sonderfall eines Rahmentragwerkes vor, dessen Knotenpunkte sich bei den Stützen befinden. Unter der Voraussetzung, daß keine Stützensenkungen auftreten, können die durchlaufenden Träger als „unverschiebliche“ Tragwerke in dem Sinne aufgefaßt werden, wie sie im ersten Abschnitt, III bzw. im zweiten Abschnitt, VI ausführlich besprochen worden sind. Es ergeben sich also keine Stabdrehwinkel, so daß wiederum nur *Knotengleichungen* aufzustellen sind. Ihre Anzahl ist allgemein gleich der Zahl der Stützen. Da aber die Drehwinkel der Endauflager sehr einfach als Funktion der benachbarten Knotendrehwinkel aus-

gedrückt werden können, so verbleiben nur noch so viele Gleichungen, als Innenstützen vorhanden sind.

Ein Durchlaufträger mit Stützensenkungen stellt hingegen ein „verschiebliches“ Tragwerk vor. Wenn aber die Verschiebungen von vornherein zahlenmäßig bekannt sind, so lassen sich daraus auch die Stabdrehwinkel sofort unabhängig von den Knotendrehwinkeln bestimmen. Es wären daher auch in diesem Falle nur *Knotengleichungen* aufzustellen, deren Anzahl wieder auf die Zahl der Innenstützen beschränkt werden könnte.

Die Berechnung könnte also allgemein in der Weise erfolgen, daß die Knotendrehwinkel als Unbekannte gewählt werden, nach deren Ermittlung die Berechnung der gesuchten Stützenmomente aus den bekannten Formeln für die Stabendmomente durchzuführen wäre. Dieses Verfahren würde hier aber keine Vorteile bieten. Es ist hingegen zweckmäßiger, sofort die *Stützenmomente* als *Unbekannte* der Rechnung zu benutzen. Es ergibt sich damit eine Gruppe von Gleichungen, die unter der Bezeichnung „Dreimomentengleichungen“ bekannt sind. Darin treten in der Regel nur so viele unbekannte Momente auf, als Mittelstützen vorhanden sind. Im übrigen zeigt die Gleichungstabelle der „Dreimomentengleichungen“ äußerlich denselben Aufbau und dieselben Eigenschaften wie jene der entsprechenden Knotengleichungen. Die Auflösung des Gleichungssystems liefert aber bereits die gesuchten Momente, weshalb der gesamte Rechnungsaufwand natürlich wesentlich geringer ist als bei der Wahl der Formänderungsgrößen als Unbekannte. Daher soll auch hier bei der Besprechung des durchlaufenden Trägers den „Dreimomentengleichungen“ der Vorzug gegeben werden.

Nach diesen Gesichtspunkten wird nun im folgenden der Durchlaufträger zuerst in der *allgemeinsten* Art behandelt, indem sowohl verschiedene Feldweiten als auch innerhalb eines jeden Feldes beliebig veränderliche Stabquerschnitte (Vouten) vorausgesetzt sind. Anschließend daran wird auch auf die häufig auftretenden Sonderfälle Rücksicht genommen.

II. Der Durchlaufträger mit beliebig veränderlichen Trägheitsmomenten in allen Feldern.

1. Gleichungsansätze für die Endtangentialwinkel der Biegelinie.

Ausgehend von den Gl. (117), in welchen die Endtangentialwinkel der Biegelinie eines Rahmenstabes als Funktion der Stabendmomente und der äußeren Belastung dargestellt sind, kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} EJ_c \tau_1 &= M_1 \alpha_1 - M_2 \beta + \alpha_1^0 \\ EJ_c \tau_2 &= M_2 \alpha_2 - M_1 \beta - \alpha_2^0. \end{aligned} \quad (293)$$

Die in diesen Ausdrücken auftretenden Winkelwerte beziehen sich durchwegs auf den *freiaufliegend* gedachten Stab, und zwar bedeuten:

- α_1 den EJ_c -fachen Tangentialwinkel der Biegelinie im Endpunkte (1), wenn dort ein Moment $M = +1$ angreift (Abb. 230 a).
- α_2 den EJ_c -fachen Tangentialwinkel der Biegelinie im Endpunkte (2), wenn dort ein Moment $M = +1$ angreift (Abb. 230 b).
- β den EJ_c -fachen Tangentialwinkel der Biegelinie, der bei der Belastung des *einen* Stabendes mit dem Moment $M = +1$ am *anderen* Stabende auftritt (Abb. 230 a, b).
- α_1^0 bzw. α_2^0 . . die EJ_c -fachen Endtangentialwinkel der Biegelinie am Stabende (1) bzw. (2), infolge der äußeren Belastung (Abb. 230 c).

Weiter sind unter M_1 und M_2 die endgültigen Stabanschlußmomente zu verstehen, während J_c ein beliebig zu wählendes Vergleichsträgheitsmoment darstellt.

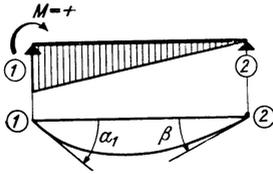


Abb. 230 a.

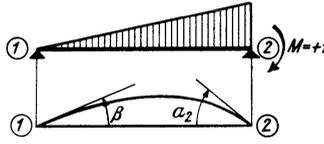


Abb. 230 b.

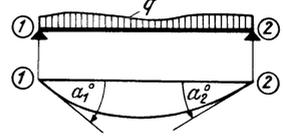


Abb. 230 c.

Abb. 230 a bis c. Bestimmung der Endtangentialwinkel $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ bzw. α_1^0, α_2^0 .

Diese Gleichungen sollen jetzt auf den durchlaufenden Träger angewendet werden. Unter der Voraussetzung, daß keine Stabdrehwinkel auftreten, sind die

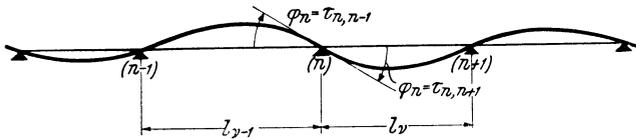


Abb. 231. Bezeichnung der Stützen und Felder bei Durchlaufträgern.

Endtangentialwinkel τ nach (4) identisch mit den entsprechenden Knotendrehwinkel. Man kann nun beim durchlaufenden Träger alle Knotendrehwinkel für die Mittelstützen auf zweifache Art

durch die Endtangentialwinkel ausdrücken. Mit der Bezeichnung der Abb. 231 ergibt sich z. B., daß der Knotendrehwinkel φ_n als Endtangentialwinkel $\tau_{n, n-1}$ an der rechten Seite des Stabes ($v-1$) und auch als Endtangentialwinkel $\tau_{n, n+1}$ an der linken Seite des Stabes (v) in Erscheinung tritt.

Durch sinngemäße Anwendung der Ausdrücke (293) kann also mit Bezug auf Abb. 231 für diese beiden Endtangentialwinkel geschrieben werden:

$$E J_c^{(v-1)} \tau_{n, n-1} = M_{n, n-1} \cdot \alpha_{n, n-1} - M_{n-1, n} \beta_{v-1} - \alpha_{n, n-1}^0 \quad (294)$$

$$E J_c^{(v)} \tau_{n, n+1} = M_{n, n+1} \cdot \alpha_{n, n+1} - M_{n+1, n} \beta_v + \alpha_{n, n+1}^0$$

Hierin bedeuten $J_c^{(v-1)}$ bzw. $J_c^{(v)}$ die Vergleichsträgheitsmomente in den Feldern ($v-1$) bzw. (v).

Da nun die Stabanschlußmomente links und rechts einer jeden Stütze gleich groß sind, so ergeben sich in den vorstehenden Gleichungen noch einige Vereinfachungen. Es ist jedoch zu beachten, daß nach der Vorzeichenregel, welche den hier benutzten Ausdrücken zugrunde liegt, die Momente im vorliegenden Falle links und rechts einer jeden Stütze mit *verschiedenen* Vorzeichen erscheinen. Dieser Nachteil ist jedoch leicht zu beseitigen, wenn in den Gl. (294) jeweils nur das rechts von jeder Stütze gelegene Moment in Rechnung gesetzt wird. Es ergibt sich dann auch sofort eine Übereinstimmung mit der sonst im Fachschrifttum bei durchlaufenden Trägern üblichen Vorzeichenwahl für die Momente. Weiter kann auch die Bezeichnung der Stützenmomente vereinfacht werden, indem nur je ein Zeiger verwendet wird, der angibt, zu welcher Stütze das Moment gehört. Es soll also künftig geschrieben werden:

$$M_{n, n-1} = -M_{n, n+1} = -M_n; \quad M_{n+1, n} = -M_{n+1, n+2} = -M_{n+1} \quad (295)$$

$$M_{n-1, n} = M_{n-1}; \quad M_{n, n+1} = M_n$$

Damit erscheinen die Gl. (294) in folgender Form:

$$\tau_{n, n-1} = \frac{1}{E J_c^{(v-1)}} [-M_n \alpha_{n, n-1} - M_{n-1} \beta_{v-1} - \alpha_{n, n-1}^0]$$

$$\tau_{n, n+1} = \frac{1}{E J_c^{(v)}} [M_n \alpha_{n, n+1} + M_{n+1} \beta_v + \alpha_{n, n+1}^0]$$
(296)

2. Übergang zu den Dreimomentengleichungen.

Da die beiden Endtangentialwinkel $\tau_{n,n-1}$ und $\tau_{n,n+1}$, die durch die Ausdrücke (296) festgelegt sind, sowohl der Größe als auch der Richtung nach übereinstimmen müssen, so können diese beiden Ausdrücke gleichgesetzt werden. Man erhält:

$$M_{n-1} \frac{\beta_{v-1}}{E J_c^{(v-1)}} + M_n \left[\frac{\alpha_{n,n-1}}{E J_c^{(v-1)}} + \frac{\alpha_{n,n+1}}{E J_c^{(v)}} \right] + M_{n+1} \frac{\beta_v}{E J_c^{(v)}} + \frac{\alpha_{n,n-1}^0}{E J_c^{(v-1)}} + \frac{\alpha_{n,n+1}^0}{E J_c^{(v)}} = 0. \quad (297)$$

Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten eines Durchlaufträgers dar und man bezeichnet sie deshalb als „Dreimomentengleichung“.

Um für die einzelnen Beiwerte und Absolutgrößen der Dreimomentengleichungen bei praktischen Rechnungen stets eine günstige Größenordnung zu erhalten, multipliziert man die allgemeine Gl. (297) mit einem geeigneten Verzerrungsfaktor z und erhält dann:

$$M_{n-1} \frac{\beta_{v-1}}{E J_c^{(v-1)}} \cdot z + M_n \left[\frac{\alpha_{n,n-1}}{E J_c^{(v-1)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n+1}}{E J_c^{(v)}} \cdot z \right] + M_{n+1} \frac{\beta_v}{E J_c^{(v)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n-1}^0}{E J_c^{(v-1)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n+1}^0}{E J_c^{(v)}} \cdot z = 0. \quad (297a)$$

Führt man nun ähnlich wie bei der Rahmenberechnung auch in der vorstehenden Gleichung eine vereinfachende Bezeichnung ein, so erhält man die Dreimomentengleichung in übersichtlicher Form:

$$\boxed{b_{v-1} M_{n-1} + d_n M_n + b_v M_{n+1} + S_n = 0.} \quad (298)$$

Hierin bedeuten:

$$b_{v-1} = \frac{\beta_{v-1}}{E J_c^{(v-1)}} \cdot z = \beta_{v-1}^* \cdot z \quad (299)$$

$$b_v = \frac{\beta_v}{E J_c^{(v)}} \cdot z = \beta_v^* \cdot z,$$

$$d_n = \left[\frac{\alpha_{n,n-1}}{E J_c^{(v-1)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n+1}}{E J_c^{(v)}} \cdot z \right] = \alpha_{n,n-1}^* \cdot z + \alpha_{n,n+1}^* \cdot z = a_{n,n-1} + a_{n,n+1} \quad (300)$$

$$S_n = \left[\frac{\alpha_{n,n-1}^0}{E J_c^{(v-1)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n+1}^0}{E J_c^{(v)}} \cdot z \right] = \alpha_{n,n-1}^{0*} \cdot z + \alpha_{n,n+1}^{0*} \cdot z. \quad (301)$$

Die mit * bezeichneten Größen stellen jeweils die *wahren* Winkelwerte vor (Abb. 230 a, b, c). Der Verzerrungsfaktor z ist beliebig wählbar, ist aber für das gesamte System konstant. Man setzt am besten

$$z = E J_0, \quad (302)$$

worin J_0 ein öfter vorkommendes Trägheitsmoment oder irgendein geeigneter runder Wert ist.

Der Beiwert d_n , der nach (300) die Summe der links und rechts von der betrachteten Stütze gelegenen, z -fach verzerrten α^* -Werte bedeutet, erscheint in der Gleichungstabelle in der Diagonale, weshalb er auch hier wieder als „Diagonalglied“ bezeichnet werden soll.

Die Gl. (298) kann in dieser Form so oft aufgestellt werden, als Innenstützen vorhanden sind. Die so erhaltene Gleichungszahl genügt aber nur dann, wenn der Träger in seinen Endstützen nicht *fest eingespannt* ist. In diesem Falle müssen

noch zwei Bestimmungsgleichungen für die Einspannmomente hinzutreten. (Näheres siehe in Kapitel II, 5 dieses Abschnittes.)

Bei der zahlenmäßigen Berechnung von Durchlaufträgern mit Hilfe der Dreimomentengleichungen (298) sind als Vorbereitung die Festwerte b nach (299), die Diagonalglieder d_n nach (300) für die Mittelstützen und schließlich die Belastungsglieder S_n nach (301) ebenfalls für alle Mittelstützen zu bestimmen. Die Bedeutung und Herkunft dieser Werte geht aus den angeführten Formeln hervor. Die darin enthaltenen Winkelwerte α , β und α^0 müßten für Felder mit beliebig veränderlichem Trägheitsmoment unter Zuhilfenahme des MOHRschen Satzes ermittelt werden. Hingegen sind alle diese Werte für Felder mit geraden oder parabolischen Vouten aus den Tafeln 17 bis 28 bzw. 17a bis 24a im Dritten Teil zu entnehmen. Dort sind beispielsweise die EJ_c -fach verzerrten Winkelwerte $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\beta}$ für Voutenstäbe von der Länge $l = 1$ angegeben. Die wahren Werte α_1^* , α_2^* , β^* für einen Stab mit der Länge l ergeben sich daher wie folgt:

$$\alpha_1^* = \bar{\alpha}_1 \cdot \frac{l}{EJ_c}; \quad \alpha_2^* = \bar{\alpha}_2 \cdot \frac{l}{EJ_c}; \quad \beta^* = \bar{\beta} \cdot \frac{l}{EJ_c}. \quad (303)$$

Damit erhält man nach (299) den *Stabfestwert*

$$b = \bar{\beta} \cdot \frac{l}{EJ_c} \cdot z \quad (304)$$

und nach (300) das *Diagonalglied*

$$d_n = a_{n,n-1} + a_{n,n+1} = \bar{\alpha}_{n,n-1} \cdot \frac{l}{EJ_c} \cdot z + \bar{\alpha}_{n,n+1} \cdot \frac{l}{EJ_c} \cdot z. \quad (305)$$

Bei der Ermittlung der Belastungsglieder ist sinngemäß vorzugehen. (Vgl. Zahlenbeispiele 23, 24.)

Die Benutzung der Hilfstafeln für Stäbe mit ungleichen Vouten auf beiden Seiten ist im zweiten Abschnitt, IV, 2 und V, 3 ausführlich behandelt. Es gelten dann vor allem die Formeln (144) und (159).

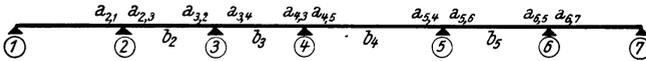


Abb. 232. Beiwertschizze.

sich auch hier, eine Beiwertschizze anzulegen, in welcher sowohl die b -Werte als auch die a -Werte eingetragen sind. Eine solche Beiwertschizze zeigt z. B. Abb. 232, in welcher die b -Werte jeweils in der Stabmitte und die a -Werte an den zugehörigen Stabenden erscheinen. An Hand dieser Skizze sind nach (300) die Diagonalglieder der Mittelstützen sehr leicht zu ermitteln. So wird z. B.:

$$d_2 = a_{2,1} + a_{2,3}; \quad d_3 = a_{3,2} + a_{3,4} \text{ usw.}$$

3. Beschreibung des Rechnungsganges.

Der Gang der Berechnung ist im wesentlichen derselbe wie bei den Rahmentragwerken, wo die Formänderungsgrößen als Unbekannte auftreten. Er läßt sich in folgende Abschnitte zusammenfassen:

1. Feststellung der Tragwerksabmessungen, also der Stablängen, Querschnittsgrößen, Voutenlängen und Trägheitsmomente.

2. Ermittlung der Winkelwerte α und β (bei Vouten unter Benutzung der Tafeln 17 bis 20 bzw. 17a bis 20a des Dritten Teiles) und der Stabfestwerte a und b nach (299) und (300).

3. Herstellung der Beiwertschizze und Berechnung der Diagonalglieder d nach (300).

4. Ermittlung der Winkelwerte α^0 (bei Vouten unter Benutzung der Zahlentafeln 21 bis 28 oder der Kurventafeln 21a bis 24a des Dritten Teiles) und der Belastungsglieder S_n nach (301).

5. Tabellarische Aufstellung der Dreimomentengleichungen nach (298) und deren Auflösung.

(Siehe auch Zahlenbeispiele 22 bis 24.)

Es ist natürlich auch hier vorteilhaft, sämtliche in Betracht kommenden Belastungsfälle in einer einzigen Gleichungstabelle zu vereinigen und gemeinsam zu behandeln.

4. Tabellarische Aufstellung der Dreimomentengleichungen für einen Fünffeldbalken.

Der Träger hätte die in Abb. 233a ersichtliche Form. In Abb. 233b ist die zugehörige Beiwertskizze dargestellt. Durch wiederholte Anwendung des Gleichungsansatzes (298) können die den vier Innenstützen entsprechenden Dreimomentengleichungen tabellarisch angeschrieben werden (siehe Gleichungstabelle 19).

In den letzten Spalten erscheinen die Belastungsglieder für die verschiedenen Belastungsfälle, die zur Unterscheidung mit $B_I, B_{II} \dots$ usw. bezeichnet sind.

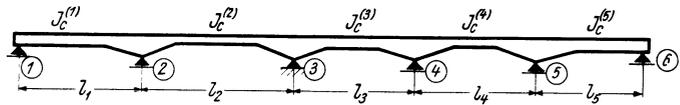


Abb. 233 a.

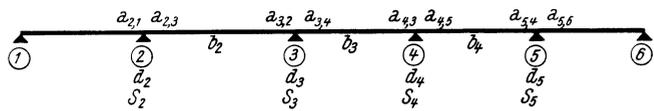


Abb. 233 b.

Abb. 233 a und b. Fünffeldbalken mit Beiwertskizze.

Gleichungstabelle 19.

5. Der Durchlaufträger mit eingespannten Enden.

A. Gleichungsansätze.

Der Unterschied gegenüber dem soeben behandelten Fall, wo eine freie Lagerung in den Endstützen vorausgesetzt worden ist, besteht lediglich darin, daß hier zwei Gleichungen mehr aufgestellt werden müssen, weil auch die Einspannmomente in den Endstützen gemeinsam mit den übrigen Stützen-

	M_2	M_3	M_4	M_5	B_I	B_{II}	usw.
M_2	d_2	b_2			$S_2^{(I)}$	$S_2^{(II)}$	—
M_3	b_2	d_3	b_3		$S_3^{(I)}$	$S_3^{(II)}$	—
M_4		b_3	d_4	b_4	$S_4^{(I)}$	$S_4^{(II)}$	—
M_5			b_4	d_5	$S_5^{(I)}$	$S_5^{(II)}$	—

momenten zu bestimmen sind. Zur Aufstellung dieser neu hinzutretenden Gleichungen kann wiederum die allgemeine Form (298) sinngemäß Verwendung finden. Für die linke Stütze würde sie mit den Bezeichnungen der Abb. 234 lauten:

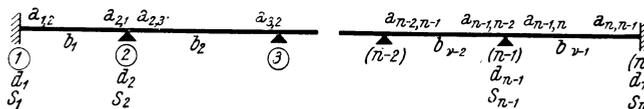


Abb. 234. Beiwertskizze.

momenten zu bestimmen sind. Zur Aufstellung dieser neu hinzutretenden Gleichungen kann wiederum die allgemeine Form (298) sinngemäß Verwendung finden. Für die linke Stütze würde sie mit den Bezeichnungen der Abb. 234 lauten:

$$\boxed{d_1 M_1 + b_1 M_2 + S_1 = 0,} \tag{306}$$

d. h. es entfällt hier das Glied $b_{v-1} M_{n-1}$, weil links von der betrachteten Stütze

überhaupt kein Feld vorhanden ist. Das zugehörige Diagonalglied vereinfacht sich in diesem Falle nach (300) zu

$$d_1 = \frac{\alpha_{1,2}}{E J_c^{(1)}} \cdot z = \alpha_{1,2}^* \cdot z = a_{1,2}, \tag{307}$$

ebenso das Belastungsglied nach (301) zu

$$S_1 = \frac{\alpha_{1,2}^0}{E J_c^{(1)}} \cdot z = \alpha_{1,2}^{0*} \cdot z. \tag{308}$$

Bei voller Einspannung der *rechten* Endstütze lautet die Gl. (298) für diese Stütze mit den Bezeichnungen der Abb. 234

$$\boxed{b_{v-1} M_{n-1} + d_n M_n + S_n = 0.} \tag{309}$$

Hier verschwindet das Glied $b_v M_{n+1}$, weil *rechts* von der betrachteten Stütze kein Feld mehr vorhanden ist. Das zugeordnete Diagonalglied ergibt sich daher mit

$$d_n = \frac{\alpha_{n,n-1}}{E J_c^{(v-1)}} \cdot z = \alpha_{n,n-1}^* \cdot z = a_{n,n-1} \tag{310}$$

und das Belastungsglied mit

$$S_n = \frac{\alpha_{n,n-1}^0}{E J_c^{(v-1)}} \cdot z = \alpha_{n,n-1}^{0*} \cdot z. \tag{311}$$

Bei der Beurteilung des Umfanges der Rechnung muß hier in Betracht gezogen werden, daß so viele Gleichungen gemeinsam aufzulösen sind, als insgesamt Stützen vorkommen. Würde man in einem solchen Falle den Durchlaufträger wie ein Rahmentragwerk mit Formänderungsgrößen als Unbekannte berechnen, so würden sich zwei Gleichungen *weniger* ergeben. Allerdings müßten dann die gesuchten Momente nach Auflösung des Gleichungssystems noch aus den bekannten Formeln ermittelt werden. Dennoch bietet für die Berechnung des durchlaufenden Trägers mit eingespannten Enden auch das Drehwinkelverfahren beachtenswerte Vorteile.

B. Tabellarische Aufstellung der Dreimomentengleichungen für einen Fünffeldbalken mit eingespannten Enden.

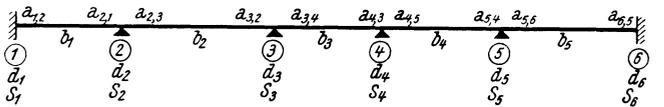


Abb. 235. Beiwertschizze.

Gleichungstabelle 20.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	B
M_1	d_1	b_1					S_1
M_2	b_1	d_2	b_2				S_2
M_3		b_2	d_3	b_3			S_3
M_4			b_3	d_4	b_4		S_4
M_5				b_4	d_5	b_5	S_5
M_6					b_5	d_6	S_6

Abb. 235 zeigt die Beiwertschizze, in welcher also auch für die Endstützen die entsprechenden Werte eingetragen sind. Damit kann die tabellarische Aufstellung der Dreimomentengleichungen vorgenommen werden (siehe Gleichungstabelle 20). Die erste und letzte Gleichung in der Tabelle ergibt sich unter Benutzung von (306) bzw. (309).

6. Der Durchlaufträger mit auskragenden Enden.

Der Einfluß der belasteten Kragarme kommt in der Gleichungstabelle für die *zweite* und *vorletzte* Stütze zur Geltung, und zwar nur in den Belastungsgliedern. Wendet man die allgemeine Gl. (298) auf die zweite Stütze des Durchlaufträgers (Abb. 236) an, so erhält man

$$b_1 M_1 + d_2 M_2 + b_2 M_3 + S_2 = 0. \quad (312)$$

Nun ist das Moment M_1 von vornherein bekannt, da es gleich ist dem Moment M_k des Kragarmes. Also kann gesetzt werden:

$$M_1 = M_k.$$

Es ist somit das erste Glied der Gl. (312) zahlenmäßig bestimmt und kann mit dem ebenfalls zahlenmäßig gegebenen Belastungsglied S_2 vereinigt werden. Damit erhält man ein neues Belastungsglied

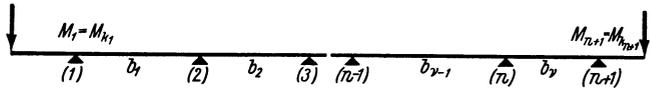


Abb. 236. Beiwertskeizze.

$$S_2' = S_2 + b_1 \cdot M_k \quad (313)$$

und die Gleichung für die zweite Stütze lautet dann

$$d_2 M_2 + b_2 M_3 + S_2' = 0. \quad (314)$$

Ähnlich ergibt sich für die vorletzte Stütze n

$$b_{v-1} M_{n-1} + d_n M_n + S_n' = 0, \quad (315)$$

wobei

$$S_n' = S_n + b_v \cdot M_{k_{n+1}}. \quad (316)$$

Die äußere Form der Gleichungstabelle hat also für den Durchlaufträger mit Kragarmen dasselbe Aussehen wie für einen solchen *ohne* Kragarme.

III. Sonderfälle.

In den bisherigen Ausführungen wurde allgemein angenommen, daß die Querschnitte des Durchlaufträgers entweder *beliebig* veränderlich sind oder daß bei den Stützen sog. Vouten als Auflagerverstärkungen vorkommen. Da nun sämtliche Zahlentafeln, die zur Ermittlung der Beiwerte und Belastungsglieder für Stäbe mit verschiedenen Voutenformen im Dritten Teil zur Verfügung stehen, stets auch den Sonderfall „Stäbe ohne Vouten“ (d. h. $n = 1$ oder $\lambda = 0$) enthalten, so sind natürlich die bisher angegebenen Gleichungen unter Benutzung dieser Hilfstafeln auch dann vorteilhaft zu verwenden, wenn die zu behandelnden Durchlaufträger gleichzeitig Felder mit und ohne Vouten aufweisen.

Es würde sich also erübrigen, auf einzelne Sonderfälle näher einzugehen. Sie sollen aber trotzdem in den folgenden Kapiteln der Reihe nach zur Sprache kommen, um den genauen Zusammenhang zwischen der *allgemeinen* Form der Dreimomentengleichungen (298) und den für die verschiedenen Sonderfälle im Fachschrifttum gebräuchlichen Gleichungsformen, welche verhältnismäßig häufig Verwendung finden, zu zeigen.

1. Der Durchlaufträger mit feldweise verschiedenen, innerhalb der Felder jedoch konstanten Trägheitsmomenten.

Die in Gl. (297) auftretenden EJ_c -fach verzerrten Winkelwerte α und β können für Stäbe mit konstanten Trägheitsmomenten $J_c^{(v-1)}$ bzw. $J_c^{(v)}$ nach dem bekannten Satz von MOHR als Auflagerdrücke der in Abb. 237 b angedeuteten M -Flächen sehr

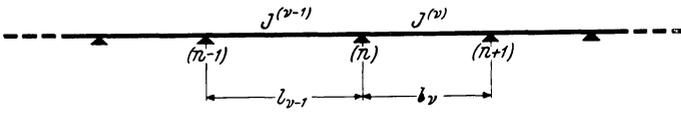


Abb. 237 a. Bezeichnungen.

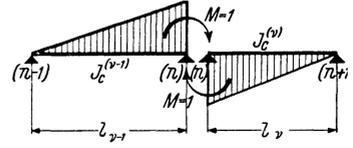


Abb. 237 b.

einfach bestimmt werden, und zwar ergeben sich:

$$\alpha_{n, n-1} = \frac{l_{v-1}}{3}; \quad \beta_{v-1} = \frac{l_{v-1}}{6}$$

$$\alpha_{n, n+1} = \frac{l_v}{3}; \quad \beta_v = \frac{l_v}{6}.$$

(317)

Führt man nun die vorstehenden Ausdrücke für α und β in die allgemeine Gl. (297) ein, so erhält man, wenn der als konstant angenommene Wert E fortgelassen wird, die Gleichungsform für eine Stütze (n) (siehe Abb. 237 a)

$$M_{n-1} \frac{l_{v-1}}{J^{(v-1)}} + 2 M_n \left(\frac{l_{v-1}}{J^{(v-1)}} + \frac{l_v}{J^{(v)}} \right) + M_{n+1} \frac{l_v}{J^{(v)}} + \frac{6 \alpha_{n, n-1}^0}{J^{(v-1)}} + \frac{6 \alpha_{n, n+1}^0}{J^{(v)}} = 0.$$

(318)

Die Werte α^0 sind für Stäbe mit unveränderlichen Querschnitten mit Hilfe der in den Tafeln 2 bis 4 für verschiedene Belastungsfälle angegebenen Formeln zu berechnen. Für Einzellasten können auch die Einflußlinien auf Tafel 4 benutzt werden.

Der Zusammenhang zwischen den Werten α^0 und M auf den Tafeln 2 bis 4 geht aus den Gl. (149 a) und (150 a) hervor.

2. Der Durchlaufträger mit gleichen Trägheitsmomenten in allen Feldern.

Es kann also in Gl. (318) $J^{(v-1)} = J^{(v)}$ gesetzt werden, und man erhält nach Kürzung dieser Werte

$$M_{n-1} l_{v-1} + 2 M_n (l_{v-1} + l_v) + M_{n+1} l_v + 6 \alpha_{n, n-1}^0 + 6 \alpha_{n, n+1}^0 = 0.$$

(319)

3. Der Durchlaufträger mit gleichem Verhältnis $\frac{J}{l}$ in allen Feldern.

In diesem Falle kann man in Gl. (318) $\frac{l_{v-1}}{J^{(v-1)}} = \frac{l_v}{J^{(v)}}$ setzen und es ergibt sich nach entsprechender Vereinfachung:

$$M_{n-1} + 4 M_n + M_{n+1} + \frac{6 \alpha_{n, n-1}^0}{l_{v-1}} + \frac{6 \alpha_{n, n+1}^0}{l_v} = 0.$$

(320)

4. Der Durchlaufträger mit gleichen Trägheitsmomenten und gleichen Längen in allen Feldern.

Unter dieser Voraussetzung kann in Gl. (318) $l_{\nu-1} = l_{\nu} = l$, ferner $J^{(\nu-1)} = J^{(\nu)} = J$ gesetzt werden und man erhält nach Multiplikation mit $\frac{J}{l}$

$$M_{n-1} + 4 M_n + M_{n+1} + \frac{6}{l} (\alpha_{n,n-1}^0 + \alpha_{n,n+1}^0) = 0. \tag{321}$$

IV. Temperatureinflüsse beim Durchlaufträger.

1. Allgemeines.

Da der durchlaufende Träger nur ein festes Auflager besitzt, werden die infolge einer *gleichmäßigen* Temperaturänderung entstehenden gleich großen Längenänderungen aller Fasern in keiner Weise behindert, so daß auch keine Spannungen im Träger auftreten können. Sind jedoch die Temperaturänderungen nicht gleichmäßig über die Trägerquerschnitte verteilt, so zeigt der Träger das Bestreben, sich wegen der ungleichen Längenänderungen der einzelnen Fasern zu krümmen. Diese Krümmungen können sich aber nicht ungehindert einstellen, da die Stützen sowohl ein Durchsenken als auch ein Abheben des Trägers von den Lagern nicht zulassen, wodurch dort Auflagerkräfte wirksam werden.

Es treten also beim Durchlaufträger infolge ungleichmäßig über den Querschnitt verteilter Temperaturänderungen sowohl Biegemomente als auch Querkräfte auf.

2. Voraussetzungen.

Die Behandlung der vorliegenden Aufgabe erfolgt unter Zugrundelegung nachstehender Annahmen:

1. Die Querschnitte ändern sich nur von Feld zu Feld, innerhalb eines jeden Feldes sind sie stets gleich.
2. Die Temperaturänderungen sind nur feldweise verschieden, innerhalb eines jeden Feldes sind sie für alle Querschnitte gleichartig.
3. Die Temperaturänderungen gehen innerhalb eines jeden Querschnittes so vor sich, daß sie der Breite nach gleichmäßig und der Höhe nach linear erfolgen.
4. Die Elastizitätszahl E ist für den gesamten Träger gleich groß.

3. Ermittlung der Belastungsglieder.

Nach der im ersten Punkt enthaltenen Voraussetzung gelten hier die Dreimomentengleichungen (318), wobei das Belastungsglied in der Form

$$S_n = 6 \left(\frac{\alpha_{n,n-1}^0}{J^{(\nu-1)}} + \frac{\alpha_{n,n+1}^0}{J^{(\nu)}} \right) \tag{322}$$

erscheint. Um nun dieses Belastungsglied in eine unmittelbare Beziehung zur Temperaturänderung selbst zu bringen, können die bei der Untersuchung der Temperaturwirkung an Rahmentragwerken angestellten Betrachtungen verwertet werden. Es ergeben sich mit den hier gewählten Bezeichnungen (Abb. 238) die EJ_c -fachen Werte von α_1^0 und α_2^0 nach (288) für das Feld $(\nu - 1)$ mit der Trägerhöhe ($h_{\nu-1}$) und der Temperaturänderung ($\Delta t_{\nu-1}$)

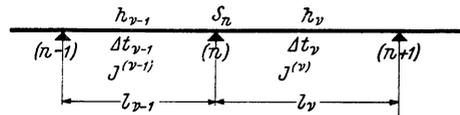


Abb. 238. Allgemeine Bezeichnungen.

$$\alpha_{n,n-1}^0 = \frac{EJ^{(\nu-1)} \cdot \omega \cdot \Delta t_{\nu-1} l_{\nu-1}}{2 h_{\nu-1}} \tag{323}$$

und für das Feld (ν) mit der Trägerhöhe h_ν und dem Temperaturunterschied Δt ,

$$\alpha_{n, n+1}^0 = \frac{E J^{(\nu)} \cdot \omega \cdot \Delta t_\nu \cdot l_\nu}{2 h_\nu} \tag{323a}$$

Damit wird nach (322) das „Temperaturbelastungsglied“

$$S_n^t = 3 E \omega \left(\frac{\Delta t_{\nu-1} \cdot l_{\nu-1}}{h_{\nu-1}} + \frac{\Delta t_\nu \cdot l_\nu}{h_\nu} \right), \tag{324}$$

wobei

$$\Delta t = t_u - t_o. \tag{325}$$

Sind die Trägerhöhen in allen Feldern gleich, also $h_\nu = h_{\nu+1} = h$, so wird

$$S_n^t = \frac{3 E \omega}{h} (\Delta t_{\nu-1} \cdot l_{\nu-1} + \Delta t_\nu \cdot l_\nu) \tag{324a}$$

und wenn außerdem auch die Temperaturänderungen in benachbarten Feldern gleich sind, so ergibt sich für die dazwischenliegende Stütze (n)

$$S_n^t = \frac{3 E \omega \cdot \Delta t}{h} (l_{\nu-1} + l_\nu). \tag{324b}$$

Nach Ermittlung der „Temperaturbelastungsglieder“ kann somit die zahlenmäßige Durchrechnung unter den hier zugrunde gelegten Voraussetzungen nach der Form (318) der Dreimomentengleichungen durchgeführt werden. (Siehe Zahlenbeispiel 22.)

V. Der Durchlaufträger mit nachgiebigen Stützen.

1. Voraussetzungen.

1. Die Trägerquerschnitte sind beliebig veränderlich.
2. Die Nachgiebigkeit kann bei beliebig vielen Stützen eintreten, sie kann aus Hebungen und Senkungen bestehen.
3. Die Verschiebungen senkrecht zur Trägerachse sind so klein, daß sie nur elastische Formänderungen im Tragwerk hervorrufen.
4. Die Senkungen bzw. Hebungen der Stützen sind zahlenmäßig gegeben.

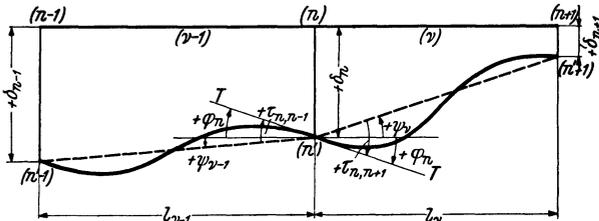


Abb. 239. Durchlaufträger mit Stützensenkungen.

2. Ansatz für die Dreimomentengleichungen.

In Abb. 239 ist die Verformung eines beliebig belasteten Durchlaufträgers mit positiven Stützenverschiebungen, also Stützensenkungen dargestellt. Darin sind folgende Winkelwerte besonders bezeichnet:

1. Die Winkel $\tau_{n, n-1}$ und $\tau_{n, n+1}$, welche die gemeinsame Tangente $T-T'$ an die Biegelinie in der verschobenen Stütze (n') mit den endgültigen Stabsehnen (n') - ($n' - 1$) und (n') - ($n' + 1$) einschließt.
2. Die Stabdrehwinkel $\psi_{\nu-1}$ bzw. ψ_ν , also die Winkel, um welche die Stabsehnen im Felde ($\nu - 1$) bzw. (ν) durch die Stützensenkungen gedreht werden (nach der gewählten Vorzeichenregel entgegen dem Uhrzeigersinn positiv).
3. Der Knotendrehwinkel φ_n des Knotenpunktes n , der als Scheitelwinkel zweimal in Erscheinung tritt, und zwar

$$\begin{aligned} \text{im Felde } (\nu - 1) & \quad \varphi_n = \tau_{n, n-1} - \psi_{\nu-1} \\ \text{und im Felde } (\nu) & \quad \varphi_n = \tau_{n, n+1} - \psi_\nu. \end{aligned} \tag{326}$$

Ersetzt man nun in (326) die Endtangentialwinkel τ nach (296), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{1}{EJ_c^{(v-1)}} [-M_n \alpha_{n,n-1} - M_{n-1} \beta_{v-1} - \alpha_{n,n-1}^0] - \psi_{v-1} \\ \varphi_n &= \frac{1}{EJ_c^{(v)}} [M_n \alpha_{n,n+1} + M_{n+1} \beta_v + \alpha_{n,n+1}^0] - \psi_v. \end{aligned} \quad (327)$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke erhält man nach entsprechender Vereinfachung und unter Annahme eines bei jedem Glied auftretenden Verzerrungsfaktors z :

$$\begin{aligned} M_{n-1} \frac{\beta_{v-1}}{EJ_c^{(v-1)}} \cdot z + M_n \left[\frac{\alpha_{n,n-1}}{EJ_c^{(v-1)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n+1}}{EJ_c^{(v)}} \cdot z \right] + M_{n+1} \frac{\beta_v}{EJ_c^{(v)}} \cdot z + \\ + \frac{\alpha_{n,n-1}^0}{EJ_c^{(v-1)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n+1}^0}{EJ_c^{(v)}} \cdot z + (\psi_{v-1} - \psi_v) \cdot z = 0. \end{aligned} \quad (328)$$

Setzt man an Stelle des nur von der Stützenverschiebung abhängigen Gliedes

$$(\psi_{v-1} - \psi_v) \cdot z = S_n' \quad (329)$$

und an Stelle des von der äußeren Belastung abhängigen Belastungsgliedes [vgl. auch (301)]

$$\frac{\alpha_{n,n-1}^0}{EJ_c^{(v-1)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n+1}^0}{EJ_c^{(v)}} \cdot z = S_n, \quad (329a)$$

so kann man die Gl. (328) ähnlich wie (298) in gekürzter Form schreiben:

$$\boxed{b_{v-1} M_{n-1} + d_n M_n + b_v M_{n+1} + S_n + S_n' = 0,} \quad (330)$$

wobei in Übereinstimmung mit (299) und (300) bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} b_{v-1} &= \frac{\beta_{v-1}}{EJ_c^{(v-1)}} \cdot z, \\ b_v &= \frac{\beta_v}{EJ_c^{(v)}} \cdot z, \end{aligned} \right\} \quad (331)$$

$$d_n = \frac{\alpha_{n,n-1}^0}{EJ_c^{(v-1)}} \cdot z + \frac{\alpha_{n,n+1}^0}{EJ_c^{(v)}} \cdot z = a_{n,n-1} + a_{n,n+1}. \quad (332)$$

Die zahlenmäßige Ermittlung der Beiwerte b und d und die Wahl des Verzerrungsfaktors z wurde bereits auf Seite 119 besprochen.

Über die Auswertung der Formel (329) zur Ermittlung des Belastungsgliedes S_n' infolge Nachgiebigkeit der Stützen ist folgendes zu sagen. Da voraussetzungsgemäß die Stützensenkungen δ zahlenmäßig gegeben sind, so sind auch die Stabdrehwinkel ψ von vornherein bekannt, und zwar ist

$$\psi_{v-1} = \frac{\delta_{n-1} - \delta_n}{l_{v-1}} \quad \text{und} \quad \psi_v = \frac{\delta_n - \delta_{n+1}}{l_v}. \quad (333)$$

Führt man diese Werte in (329) ein, so erhält man

$$S_n' = \left(\frac{\delta_{n-1} - \delta_n}{l_{v-1}} + \frac{\delta_{n+1} - \delta_n}{l_v} \right) \cdot z. \quad (334)$$

In diesem Ausdruck ist δ *positiv* einzuführen, wenn es sich um eine *Stützensenkung* handelt.

Sonderfälle. Auf eine eingehende Behandlung der verschiedenen Sonderfälle kann hier verzichtet werden, da sie nichts Neues bringen. Es können die in III, 1 bis 4 zusammengestellten Dreimomentengleichungen, die durch das Belastungsglied S' sinngemäß zu ergänzen sind, unmittelbar übernommen werden. Wird aber der Einfluß von Stützensenkungen *allein* untersucht, so entfallen die von der äußeren Belastung stammenden α^0 -Glieder und man erhält in ausführlicher Schreibweise:

1. Für Durchlaufträger mit *feldweise verschiedenen*, innerhalb der Felder jedoch *konstanten* Trägheitsmomenten [vgl. Gl. (318)]

$$M_{n-1} \frac{l_{v-1}}{J^{(v-1)}} + 2 M_n \left(\frac{l_{v-1}}{J^{(v-1)}} + \frac{l_v}{J^{(v)}} \right) + M_{n+1} \frac{l_v}{J^{(v)}} + 6 E \left[\frac{\delta_{n-1} - \delta_n}{l_{v-1}} + \frac{\delta_{n+1} - \delta_n}{l_v} \right] = 0. \quad (330 a)$$

2. Für Durchlaufträger mit *gleichem* J in allen Feldern [vgl. Gl. (319)]

$$M_{n-1} l_{v-1} + 2 M_n (l_{v-1} + l_v) + M_{n+1} l_v + 6 E J \left[\frac{\delta_{n-1} - \delta_n}{l_{v-1}} + \frac{\delta_{n+1} - \delta_n}{l_v} \right] = 0. \quad (330 b)$$

3. Für Durchlaufträger mit *gleichem Verhältnis* $\frac{J}{l}$ in allen Feldern

$$M_{n-1} + 4 M_n + M_{n+1} + 6 E \left[(\delta_{n-1} - \delta_n) \frac{J^{(v-1)}}{l_{v-1}^2} + (\delta_{n+1} - \delta_n) \frac{J^{(v)}}{l_v^2} \right] = 0. \quad (330 c)$$

4. Für Durchlaufträger mit *gleichem* J und l in allen Feldern.

$$M_{n-1} + 4 M_n + M_{n+1} + \frac{6 E J}{l^2} (\delta_{n-1} - 2 \delta_n + \delta_{n+1}) = 0. \quad (330 d)$$

VI. Ermittlung der Einflußlinien für den Durchlaufträger.

1. Vorbemerkung.

Im dritten Abschnitt wurden zwei verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Einflußlinien für Rahmentragwerke behandelt, die auch für den durchlaufenden Träger Verwendung finden können. Besonders geeignet erscheint hier das erste, bei dem die Ermittlung der Einflußlinien als Biegelinien am $(n-1)$ -fach statisch unbestimmten Tragwerk erfolgt. Zu diesem Verfahren werden im folgenden noch einige für den Durchlaufträger wichtige Betrachtungen hinzugefügt.

2. Die M -Einflußlinien als Biegelinien am $(n-1)$ -fach statisch unbestimmten Tragwerke.

A. Allgemeines.

Es bestehen beim durchlaufenden Träger zunächst zwei Möglichkeiten zur rechnerischen Lösung der gestellten Aufgabe.

1. Die Anwendung des Drehwinkelverfahrens.
2. Die Anwendung der Dreimomentengleichungen.

Über den ersten Fall ist nichts Neues zu sagen, die Behandlung erfolgt in derselben Art wie dies für Rahmentragwerke ausführlich erläutert worden ist. Wesentlich anders gestaltet sich hingegen die Benutzung der Dreimomentengleichungen,

die bei Durchlaufträgern mit frei oder gelenkig gelagerten Enden verschiedene Vorteile mit sich bringt. Durch die Einschaltung des Gelenkes über einer Stütze ergeben sich zwei voneinander unabhängige, einfachere Tragwerke, wobei für jedes immer nur so viele unbekannte Momente zu ermitteln sind, als jeweils Zwischenstützen übrig bleiben. So wird z. B. der Zweifeldbalken in Abb. 240 durch Einschaltung eines Gelenkes in zwei freiaufliegende Träger zerlegt und der Dreifeldbalken der Abb. 241 für die Ermittlung der M_2 -Einflußlinie in einen freiaufliegenden Träger und einen Zweifeldbalken. Weiter wird der Vierfeldbalken der Abb. 242 für die Ermittlung der M_2 -Einflußlinie in einen freiaufliegenden Träger und in einen Dreifeldbalken gespalten (Abb. 242a) und für die Bestimmung der M_3 -Einflußlinie in zwei Zweifeldbalken (Abb. 242b).

Die zahlenmäßige Durchrechnung dieser „ideellen“ Belastungsfälle geschieht zunächst nach den in diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen. Sind auf diese Weise die Momente bestimmt, so folgt der zweite Teil der Rechnung, nämlich die Ermittlung der Biegelinien für die einzelnen ideellen Belastungsfälle und der zugehörigen Drehwinkel φ_l und φ_r der Gelenkquerschnitte. Davon soll in den nächsten Kapiteln die Rede sein.

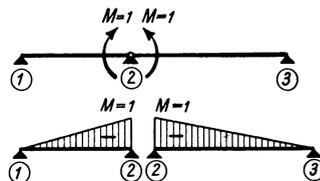


Abb. 240.

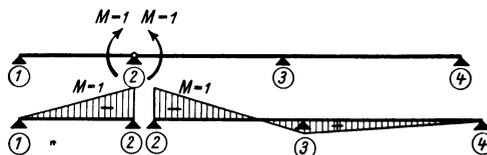


Abb. 241.

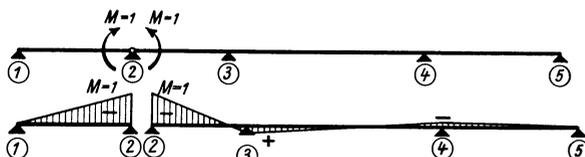


Abb. 242a.

B. Ermittlung der Biegelinien aus den Momentenlinien.

Diese Aufgabe kann in der bekannten Weise mit Hilfe des MOHRschen Satzes gelöst werden, indem man die entsprechend verzerrten M -Flächen als Belastung in Rechnung stellt. Diese Art ist aber ziemlich zeitraubend und kann bei durchlaufenden Trägern mit geraden oder parabolischen Vouten mit Hilfe der Zahlen- und Kurventafeln des Dritten Teiles durch ein rascheres Verfahren ersetzt werden.

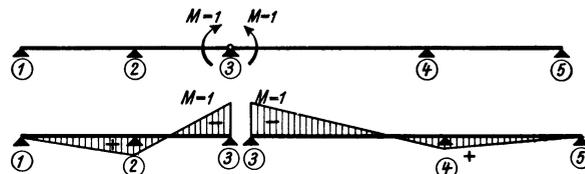


Abb. 242b.

Abb. 240 bis 242. Ermittlung der M -Einflußlinien durch Gelenkeinschaltung.

Die Aufgabe besteht darin, für einen Stab mit gegebenem M -Verlauf die zugehörige Biegelinie zu ermitteln. Dieser M -Verlauf kann nach Abb. 243 durch zwei dreieckförmige M -Flächen ersetzt werden. Die Ordinaten der Biegelinien für jede dieser beiden Teilbelastungsflächen können nach dem Proportionalitätsgesetz aus den Biegelinienordinaten η_1 bzw. η_2 für $M = 1$ bestimmt werden, die für verschiedene Stabformen mit $l = 1$ in den Zahlentafeln 25 bis 28 enthalten sind. Denn die in diesen Tafeln dargestellten Einflußlinien für die Endtangentialwinkel α_1^0 bzw. α_2^0 sind nichts anderes als *Biegelinien* des freiaufliegenden Trägers von der Länge $l = 1$, wenn abwechselnd an beiden Stabenden ein Moment $M = 1$ angreift.

Es ergeben sich also allgemein unter Benutzung dieser Hilfstafeln die wahren Werte y_i^* der Biegelinienordinaten in einem Trägerfeld (i) von der Länge l_i durch einfache Überlagerung der den beiden M -Dreiecken zugeordneten Beiträge, also

$$y_i^* = (M_m \cdot \eta_1 + M_n \cdot \eta_2) \frac{l_i^2}{EJ_c^{(i)}} \quad (335)$$

Wird M_m oder M_n gleich Null, was bei der ersten und letzten Stütze des durchlaufenden Trägers gewöhnlich der Fall ist, so verschwindet für diese Felder im Ausdruck (335) das entsprechende M -Glied. Die Vorzeichen von M_m und M_n sind in der üblichen Art anzunehmen, also *positiv*, wenn das Moment unten Zug erzeugt, und *negativ*, wenn es oben Zug erzeugt.

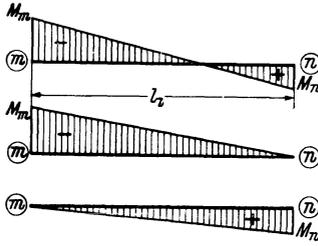


Abb. 243.

Um nun die wahren Werte der gesuchten M -Einflußlinienordinaten η_M zu erhalten, sind die aus (335) zu bestimmenden Biegelinienordinaten aber noch nach (235) durch den Öffnungswinkel γ der Gelenkquerschnitte zu dividieren. Über die zahlenmäßige Ermittlung dieses Wertes γ bei Trägern mit geraden oder parabolischen Vouten ist im nächsten Kapitel die Rede.

C. Bestimmung des Verdrehungswinkels γ der Gelenkquerschnitte.

Nach (236) ist

$$\gamma = \varphi_l - \varphi_r \quad (336)$$

Hierin bedeuten φ_r die Verdrehung des rechten und φ_l die des linken Gelenkquerschnittes. Bei durchlaufenden Trägern mit unnachgiebigen Stützen werden infolge der im Gelenk angebrachten gleich großen, aber *entgegengesetzt* gerichteten Momente

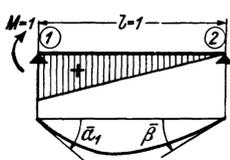


Abb. 244 a.

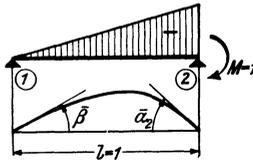


Abb. 244 b.

die beiden Drehwinkel φ_l und φ_r stets entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen, was bei den früher behandelten Tragwerken mit *verschieblichen* Knotenpunkten nicht immer der Fall sein muß. Es kann also hier im weiteren Verlaufe der Rechnung der Wert γ , der den Öffnungswinkel im Gelenk darstellt, der Einfachheit halber als die Summe der *absoluten* Werte $|\varphi_l|$ und $|\varphi_r|$ aufgefaßt werden, ohne auf ihr Vorzeichen noch besonders achten zu müssen. Es kann somit geschrieben werden:

$$\gamma = |\varphi_l| + |\varphi_r| \quad (336 a)$$

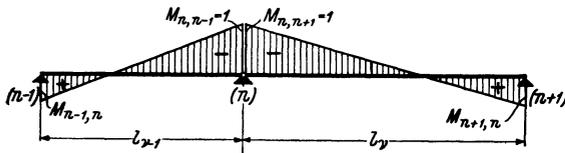


Abb. 245 a.

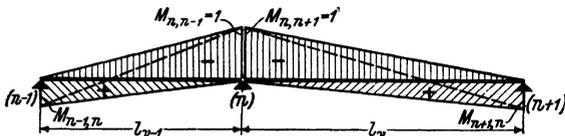


Abb. 245 b.

Die Werte φ_l und φ_r , welche mit den Auflagerdrehwinkeln bzw. Endtangentialwinkeln links und rechts vom Gelenk identisch sind, könnten wieder nach MOHR als Auflagerdrücke der entsprechend verzerrten

M -Flächen ermittelt werden. Für Stäbe mit geraden und parabolischen Vouten gibt es aber auch hier einen einfacheren Weg, indem wieder die Hilfstafeln des Dritten Teiles herangezogen werden.

In den Tafeln 17 bis 20 bzw. 17a bis 20a sind die Auflagerdrehwinkel $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ für einen freiaufliegenden Träger von der Länge $l = 1$ infolge eines am Trägerende angreifenden Momentes $M = 1$ enthalten. Die diesen Tafeln zugrunde liegenden Bezeichnungen sind in den Abb. 244a, b schematisch dargestellt.

Nun können z. B. die in der Abb. 245a gegebenen M -Flächen in beiden Feldern durch je zwei einfache Dreieckflächen ersetzt werden, von welchen stets eine positiv und eine negativ erscheint (Abb. 245b). Durch Anwendung des Proportionalitätsgesetzes lassen sich somit aus den zahlenmäßig gegebenen $\bar{\alpha}$ - und $\bar{\beta}$ -Werten die gesuchten wahren Winkelwerte φ_i^* und φ_r^* für Stäbe mit verschiedenen Voutenformen leicht ermitteln. Es werden also mit den Bezeichnungen der Abb. 244a, b bzw. 245a, b

$$\varphi_l^* = \varphi_{n, n-1}^* = (M_{n, n-1} \cdot \bar{\alpha}_{n, n-1} - M_{n-1, n} \cdot \bar{\beta}_{v-1}) \frac{l_{v-1}}{E J_c^{(v-1)}}$$

oder, da $M_{n, n-1} = 1$

$$\varphi_{n, n-1}^* = (\bar{\alpha}_{n, n-1} - M_{n-1, n} \cdot \bar{\beta}_{v-1}) \frac{l_{v-1}}{E J_c^{(v-1)}}. \quad (337)$$

Ferner

$$\varphi_r^* = \varphi_{n, n+1}^* = (M_{n, n+1} \cdot \bar{\alpha}_{n, n+1} - M_{n+1, n} \cdot \bar{\beta}_v) \frac{l_v}{E J_c^{(v)}}$$

oder, da $M_{n, n+1} = 1$,

$$\varphi_{n, n+1}^* = (\bar{\alpha}_{n, n+1} - M_{n+1, n} \cdot \bar{\beta}_v) \frac{l_v}{E J_c^{(v)}}. \quad (337a)$$

Man erhält also unter Anwendung von (337) und (337a) den wahren Wert des Öffnungswinkels

$$\gamma^* = |\varphi_{n, n-1}^*| + |\varphi_{n, n+1}^*|$$

bzw.

$$\gamma^* = \frac{1}{E} \left[(\bar{\alpha}_{n, n-1} - M_{n-1, n} \cdot \bar{\beta}_{v-1}) \frac{l_{v-1}}{J_c^{(v-1)}} + (\bar{\alpha}_{n, n+1} - M_{n+1, n} \cdot \bar{\beta}_v) \frac{l_v}{J_c^{(v)}} \right]. \quad (338)$$

Bezeichnet man der Einfachheit halber den Klammerausdruck, der den E -fachen Wert von γ^* bedeutet, mit γ , so kann auch geschrieben werden

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{E}. \quad (338a)$$

Die endgültigen Ordinaten $\eta_M^{(i)}$ der M -Einflußlinienzweige in irgendeinem Trägerfeld (i) ergeben sich schließlich nach (235) unter Beachtung von (335) mit

$$\eta_M^{(i)} = \frac{y_i^*}{\gamma^*} = (M_m \eta_1 + M_n \eta_2) \frac{l_i^2}{E J_c^{(i)}} \cdot \frac{E}{\gamma}$$

oder

$$\eta_M^{(i)} = \frac{1}{\gamma} (M_m \eta_1 + M_n \eta_2) \frac{l_i^2}{J_c^{(i)}}. \quad (339)$$

In der zahlenmäßigen Berechnung der vorstehenden Ausdrücke ergibt sich noch eine kleine Vereinfachung, wenn J_c in allen Feldern des Durchlaufträgers gleich groß ist. Es kann dann in (338) $J_c^{(v-1)} = J_c^{(v)} = J_c$ gesetzt werden, so daß die Beziehung (338a) auch in der Form

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{E J_c} \quad (340)$$

geschrieben werden kann, worin aber

$$\gamma = (\bar{\alpha}_{n,n-1} - M_{n-1,n} \cdot \bar{\beta}_{v-1}) l_{v-1} + (\bar{\alpha}_{n,n+1} - M_{n+1,n} \cdot \bar{\beta}_v) l_v \quad (341)$$

zu setzen ist. Damit ergeben sich dann die gesuchten Einflußlinienordinaten $\eta_M^{(i)}$ für irgendein Trägerfeld (i)

$$\eta_M^{(i)} = \frac{y_i^*}{\gamma^*} = \frac{1}{\gamma} (M_m \eta_1 + M_n \eta_2) l_i^2. \quad (342)$$

Sechster Abschnitt.

Zweckmäßige Auflösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.

Abgekürzte Eliminationsverfahren.

1. Allgemeines.

Die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen spielt bei der rechnerischen Behandlung statisch unbestimmter Tragwerke eine wichtige Rolle. Es herrschen aber über den erforderlichen Zeitaufwand zur Auflösung einer Gleichungsgruppe vielfach noch recht irriige Anschauungen, und zwar vor allem in dem Sinne, daß die damit verbundene Arbeit weit *überschätzt* wird.

Es ist hier besonders hervorzuheben, daß die Gleichungssysteme, die sich nach dem Drehwinkelverfahren ergeben, im allgemeinen einen für die Auflösung sehr günstigen Aufbau zeigen, da die Diagonalglieder zahlenmäßig gegenüber allen übrigen Gliedern in der Regel bedeutend überwiegen. Man erzielt in diesem Falle selbst bei Verwendung des gewöhnlichen Rechenschiebers hinreichend genaue Ergebnisse.

Von den gebräuchlichen Verfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme bietet das aus der Ausgleichsrechnung der Geodäsie¹ bekannte „GAUSSsche Eliminationsverfahren“, namentlich bei Anwendung der abgekürzten Form, die meisten Vorteile, so daß diesem auch hier der Vorzug gegeben wird.

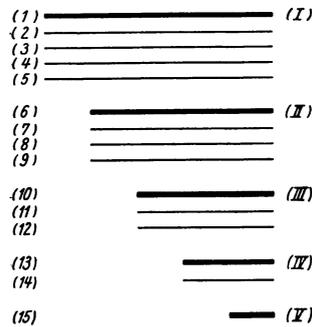


Abb. 246. Schema des gewöhnlichen Auflösungs vorganges.

Das Wesen der hier zu besprechenden abgekürzten Verfahren läßt sich am besten durch folgende Überlegungen veranschaulichen. Wäre z. B. ein System von *fünf* Gleichungen mit den Unbekannten X_1 bis X_5 gegeben, so könnte man im Wege der Elimination zunächst aus sämtlichen Gleichungen die Unbekannte X_1 beseitigen und erhielte so ein System von *vier* Gleichungen mit den Unbekannten X_2 bis X_5 . In derselben Art kann man aus diesen *vier* Gleichungen X_2 eliminieren und erhält so eine weitere Gruppe von *drei* Gleichungen mit den Unbekannten X_3 bis X_5 . Setzt man diesen Weg fort, so gelangt man in der letzten Rechenstufe zu *einer* Gleichung mit *einer* Unbekannten.

Dieser Vorgang ist in Abb. 246, wo die gegebenen *fünf* Gleichungen und auch die Gleichungen der einzelnen Rechenstufen durch einfache Striche angedeutet sind, schematisch dargestellt. Die erste Gleichung jeder Gruppe ist durch einen starken

¹ W. JORDAN: Handbuch der Vermessungskunde, 7. Aufl., Bd. 1. Stuttgart, 1920.

Strich besonders hervorgehoben und mit einer römischen Ziffer versehen. Aus diesen Gleichungen (I) bis (V), die als *Hauptgleichungen* bezeichnet werden sollen, kann man sodann rückläufig, bei (V) beginnend, die einzelnen Unbekannten ermitteln. Bei den abgekürzten Eliminationsverfahren verzichtet man nun darauf, sämtliche Gleichungen jeder Rechenstufe anzuschreiben, und stellt jeweils nur die „Hauptgleichungen“ auf.

Zur zahlenmäßigen Durchführung der Berechnung eignet sich besonders die Tabellenform. Es sollen darin *alle* Rechenoperationen enthalten sein, so daß außerhalb derselben keine besonderen Nebenrechnungen zur Auflösung des gesamten Gleichungssystems erforderlich sind. Diese Rechenverfahren sind in der Ausgleichsrechnung der Geodäsie schon längst eingebürgert und finden in letzter Zeit auch bei der Lösung der Aufgaben der Statik immer mehr Verbreitung.

Für die allgemeine Darstellung des Lösungsvorganges wurde bisher auch in Statiklehrbüchern vorwiegend die aus der Ausgleichsrechnung der Geodäsie übernommene Bezeichnungsweise nach GAUSS verwendet. Da diese Art aber den praktisch tätigen Ingenieuren und Statikern nicht immer hinreichend geläufig ist, wird hier eine bildmäßige Darstellung gewählt, bei welcher der Gang der Rechnung einprägsamer erscheint und auch die Reihenfolge der einzelnen Rechenoperationen leichter zu überblicken ist.

Der Grundgedanke dieser bildmäßigen Darstellung der abgekürzten Gleichungslösung, die in den Mustern I, II, III auf den Tafeln 29, 30, 31 zur Anwendung gelangt, ist kurz folgender: An Stelle der *Zahlenwerte* werden einfache *Zeichen* gesetzt, und zwar so, daß in jeder Gleichung nur *ein* solches Zeichen vorkommt, also z. B. in der ersten Gleichung ein \square , in der zweiten ein \circ , in der dritten ein \triangle usw. Um aber die Verschiedenheit der einzelnen Beiwerte in ein und derselben Gleichung anzudeuten, werden *Ziffern* verwendet, die mit den Ordnungszahlen der Unbekannten übereinstimmen. So wird z. B. der Beiwert von X_4 in der ersten Gleichung mit \square_4 , in der zweiten Gleichung mit \circ_4 , in der dritten Gleichung mit \triangle_4 usw. bezeichnet.

2. Beschreibung der einzelnen Rechenverfahren.

A. Muster I für symmetrische Gleichungssysteme.

Der Lösungsvorgang nach dieser Rechenverfahren ist aus der bildmäßigen Darstellung auf der Tafel 29 unmittelbar ersichtlich. Es soll hier aber an Hand dieser Tafel noch eine ausführliche Beschreibung gegeben werden.

In der ersten Spalte der Tabelle ist die Benennung der Gleichungen bzw. Zeilen nach den Unbekannten durchgeführt, die den Diagonalgliedern D zugeordnet sind, während auf der rechten Seite die Zeilen fortlaufend beziffert sind.

Bei der Durchführung der einzelnen Rechenstufen bleiben die Bildzeichen der ursprünglichen Gleichungen erhalten. Die Verschiedenheit der Zahlenwerte wird nur durch *Punkte* über den Figuren zum Ausdruck gebracht. So wird z. B. auf Tafel 29 zunächst die Gl. (I) der Reihe nach mit $-\frac{\square}{D_1}, -\frac{\square}{D_1}, \dots, -\frac{\square}{D_1}$ multipliziert. Demgemäß ist die der *ersten* Umformung entsprechende Zeile (6) mit *einem* Punkte, die der *zweiten* Umformung entsprechende Zeile (7) mit *zwei* Punkten bezeichnet usw. Man erhält auf diese Weise die Zeilen (6) bis (9). Wegen der Symmetrie des gegebenen Gleichungssystems brauchen die Zeilen (6) bis (9) nicht vollständig angeschrieben zu werden, sondern es genügen die Glieder rechts von der neuen Diagonale.

Die „Hauptgleichung“ (II) ergibt sich sodann durch einfaches Summieren aller in der ersten Spalte mit (X_2) bezeichneten Gleichungen. Auch hier bleiben die

Zeichen der ursprünglichen Gleichung für (X_2) erhalten. Um den wertmäßigen Unterschied gegenüber dieser Gleichung auszudrücken, ist aber die Schraffur der Zeichen fortgelassen und statt D_2 und B_2 jetzt d_2 bzw. b_2 gesetzt [siehe Zeile (10)].

Der weitere Gang der Rechnung ist nur eine Wiederholung des bisherigen Vorganges, und zwar wird nun die Gl. (II) der Reihe nach mit $-\frac{\textcircled{3}}{d_2}$, $-\frac{\textcircled{4}}{d_2}$, $-\frac{\textcircled{5}}{d_2}$ multipliziert, was in den Zeilen (11) bis (13) durchgeführt ist. Auch hier sind die Zeilen nicht vollständig angeschrieben, sondern nur die Glieder rechts der Diagonale.

Die „Hauptgleichung“ (III) erhält man durch einfaches Summieren aller in der ersten Spalte mit (X_3) bezeichneten Gleichungen. Sie ist in der Zeile (14) angeschrieben und enthält dieselben Zeichen wie die ursprüngliche Gleichung (X_3) , jedoch ohne Schraffur.

In derselben Weise werden auch die „Hauptgleichungen“ (IV) und (V) ermittelt, wie aus der Tafel 29 ersichtlich ist. So kann schließlich die rückläufige Ermittlung der Unbekannten X_5 bis X_1 aus den „Hauptgleichungen“ (V) bis (I) erfolgen.

Anschließend wird die Reihenfolge der Rechenarbeiten nach Muster I in Schlagworten zusammengefaßt:

1. Anschreiben der Gleichungen ohne die Glieder links der Diagonale [siehe Zeile (1) bis (5)].

2. Anschreiben der Umwandlungsfaktoren $-\frac{z_1}{D_1}$, wobei für z_1 der Reihe nach die Glieder der „Hauptgleichung“ (I) zu setzen sind.

3. Multiplikation der „Hauptgleichung“ (I) mit diesen Faktoren [siehe Zeile (6) bis (9)].

4. Ermittlung der „Hauptgleichung“ (II) durch Summieren aller Gleichungen (X_2) [siehe Zeile (10)].

5. Anschreiben der Umwandlungsfaktoren $-\frac{z_2}{d_2}$, wobei für z_2 der Reihe nach die Glieder der „Hauptgleichung“ (II) zu setzen sind.

6. Multiplikation der „Hauptgleichung“ (II) mit diesen Faktoren [siehe Zeile (11) bis (13)].

7. Ermittlung der „Hauptgleichung“ (III) durch Summieren aller Gleichungen (X_3) [siehe Zeile (14)] usw. bis zur Aufstellung der letzten „Hauptgleichung“.

8. Rückläufige Ermittlung der Unbekannten, beginnend bei der letzten „Hauptgleichung“.

(Vgl. auch Zahlenbeispiel auf Tafel 29a.)

B. Muster II für symmetrische Gleichungssysteme.

Diese Rechenvorschrift, die auf Tafel 30 schematisch dargestellt ist, zeigt im Vergleich mit jener auf Tafel 29 nur eine andere Reihenfolge der einzelnen Rechenoperationen.

Es wird hier zunächst die gegebene Gl. (1*) als „Hauptgleichung“ (I) in unveränderter Form in Zeile (1) nochmals angeschrieben. Sodann wird, wieder in unveränderter Form, die gegebene Gl. (2*) in Zeile (2) angeschrieben und darunter die mit $-\frac{\textcircled{2}}{D_1}$ multiplizierte „Hauptgleichung“ (I) als Zeile (3). Durch Summieren der Zeilen (2) und (3) erhält man die „Hauptgleichung“ (II) als Zeile (4).

Es werden hier also immer nur jene Rechenoperationen durchgeführt, die zur Ermittlung der nächsten „Hauptgleichung“ erforderlich sind. Dadurch kommen die zu summierenden Zeilen unmittelbar untereinander zu stehen.

Zur Aufstellung der „Hauptgleichung“ (III) schreibt man die *gegebene* Gl. (3*) unverändert als Zeile (5) an, setzt darunter die mit $-\frac{\textcircled{3}}{D_1}$ multiplizierte „Haupt-

gleichung“ (I) als Zeile (6) und schließlich die mit $-\frac{\textcircled{3}}{d_2}$ multiplizierte „Hauptgleichung“ (II) als Zeile (7). Die Summe der Zeilen (5) bis (7) ergibt bereits die „Hauptgleichung“ (III) als Zeile (8). In derselben Weise ist die Ermittlung der übrigen „Hauptgleichungen“ vorzunehmen, wie aus dem Auflösungsschema selbst ersichtlich ist.

In Schlagworten läßt sich der *Rechnungsgang* nach Muster II wie folgt zusammenfassen:

1. Anschreiben der gegebenen Gl. (1*) bis (5*) ohne die Glieder links der Diagonale.
2. Anschreiben der unveränderten Gl. (1*) als „Hauptgleichung“ (I) [siehe Zeile (1)].
3. Anschreiben der gegebenen Gl. (2*) als Zeile (2).
4. Multiplikation der „Hauptgleichung“ (I) mit dem Faktor $-\frac{\textcircled{2}}{D_1}$ [siehe Zeile (3)].
5. Ermittlung der „Hauptgleichung“ (II) durch Summieren der Zeilen (2) und (3) [siehe Zeile (4)].
6. Anschreiben der gegebenen Gl. (3*) als Zeile (5).
7. Multiplikation der „Hauptgleichung“ (I) mit dem Faktor $-\frac{\textcircled{2}}{D_1}$ und der „Hauptgleichung“ (II) mit dem Faktor $-\frac{\textcircled{3}}{d_2}$ [siehe Zeile (6) und (7)].
8. Ermittlung der „Hauptgleichung“ (III) durch Summieren der Zeilen (5) bis (7) [siehe Zeile (8)] usw. bis zur Aufstellung der letzten „Hauptgleichung“.
9. Rückläufige Ermittlung der Unbekannten X_5 bis X_1 , beginnend bei der letzten „Hauptgleichung“.

(Vgl. auch Zahlenbeispiel auf Tafel 30a.)

Ein Vergleich der Tafeln 29 und 30 zeigt den Zusammenhang der beiden Rechenverfahren und auch die Unterschiede in der Reihenfolge der einzelnen Rechenarbeiten klar auf. Für den praktischen Gebrauch sind wohl beide Arten nahezu gleichwertig.

C. Muster III für unsymmetrische Gleichungssysteme.

Der Unterschied gegenüber der Auflösung von *symmetrischen* Gleichungssystemen besteht nur darin, daß hier die Umrechnungsfaktoren in der zweiten Spalte nicht einfach aus den einzelnen Gliedern der zuletzt erhaltenen „Hauptgleichungen“ jeweils direkt zu entnehmen sind, sondern wegen der fehlenden Symmetrie gesondert ermittelt werden müssen. Aber auch dieser Vorgang kann nach dem Muster III auf Tafel 31 vollständig mechanisiert werden. Der dabei einzuhaltende Vorgang ist wieder in der zweiten Spalte der Tafel ersichtlich. Die Faktoren zur Umwandlung der „Hauptgleichung“ (I) können noch unmittelbar aus den gegebenen Gleichungen übernommen werden. Diese Umwandlungsfaktoren haben auch hier den gemeinsamen Nenner D_1 , während als Zähler der Reihe nach die übrigen Beiwerte von X_1 aus den gegebenen Gleichungen auftreten. Es ergeben sich damit die Zeilen (6) bis (9), die aber hier wegen der Unsymmetrie des Gleichungssystems stets vollständig anzuschreiben sind. Die „Hauptgleichung“ (II) erhält man durch einfaches Summieren aller (X_2) -Gleichungen.

Die Faktoren zur Umwandlung der „Hauptgleichung“ (II) haben wie bei der Auflösung eines symmetrischen Gleichungssystems durchwegs den gemeinsamen Nenner d_2 . Der jeweilige Zähler ergibt sich der Reihe nach mit $\sum (X_{3,2})$, $\sum (X_{4,2})$, $\sum (X_{5,2})$. Hierin bezieht sich der erste Zeiger auf die in der ersten Spalte an-

gegebene *Benennung* der einzelnen *Gleichungen*, der zweite Zeiger auf die Spalte der *Unbekannten*. Es bedeutet also z. B. $\sum(X_{4,2})$ die Summe jener Glieder der Gleichungen (X_4), welche in der Spalte unter X_2 vorkommen.

Die „Hauptgleichung“ (III) erhält man wie früher als Summe aller (X_3)-Gleichungen.

Der weitere Rechnungsgang geht ähnlich vor sich wie der bisher beschriebene. Die Faktoren zur Umwandlung der „Hauptgleichung“ (III) haben wieder durchwegs den gleichen Nenner, und zwar d_3 . Die Zähler ergeben sich der Reihe nach mit $\sum(X_{4,3})$, $\sum(X_{5,3})$. Es ist also wieder z. B. $\sum(X_{5,3})$ die Summe jener Glieder der Gleichungen (X_5), welche in der Spalte unter X_3 stehen.

Die „Hauptgleichung“ (IV) ergibt sich als Summe aller (X_4)-Gleichungen.

In derselben Weise erhält man die „Hauptgleichung“ (V). Die Ermittlung der einzelnen Unbekannten X_5 bis X_1 kann dann in der üblichen Weise rückläufig aus (V) bis (I) erfolgen.

Zusammenfassend ergibt sich somit nach Muster III für unsymmetrische Gleichungssysteme folgender *Rechnungsgang*:

1. Anschreiben des gesamten Gleichungssystems [siehe Zeile (1) bis (5)].
 2. Anschreiben der Umwandlungsfaktoren $-\frac{z_1}{D_1}$, wobei für z_1 der Reihe nach die Beiwerte von X_1 aus den gegebenen Gleichungen zu setzen sind.
 3. Multiplikation der „Hauptgleichung“ (I) mit diesen Faktoren [siehe Zeile (6) bis (9)].
 4. Ermittlung der „Hauptgleichung“ (II) durch Summieren aller Gleichungen (X_2).
 5. Anschreiben der Umwandlungsfaktoren $-\frac{z_2}{d_2}$. Für z_2 sind der Reihe nach die Werte $\sum(X_{3,2})$, $\sum(X_{4,2})$, $\sum(X_{5,2})$ zu setzen, wobei z. B. $\sum(X_{3,2})$ die Summe jener Glieder der Gleichungen (X_3) bedeutet, die in der Spalte X_2 vorkommen.
 6. Multiplikation der „Hauptgleichung“ (II) mit diesen Faktoren [siehe Zeile (11) bis (13)].
 7. Ermittlung der „Hauptgleichung“ (III) durch Summieren aller Gleichungen (X_3) [siehe Zeile (14)] usw. bis zur Aufstellung der letzten „Hauptgleichung“.
 8. Rückläufige Ermittlung der Unbekannten, beginnend bei der letzten „Hauptgleichung“.
- (Vgl. auch Zahlenbeispiel auf Tafel 31 a.)

Siebenter Abschnitt.

Vereinfachte Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke.

I. Vorbemerkung.

Die bisher behandelten Verfahren zur Berechnung der verschiedenen Rahmen-tragwerke bestehen in ihrer praktischen Durchführung im wesentlichen aus *zwei* Teilen, und zwar aus der zahlenmäßigen Aufstellung der Bedingungsgleichungen in Form einer Gleichungstabelle und aus der Auflösung dieses Gleichungssystems.

Zur Durchführung des *ersten* Teiles sind wohl noch gewisse Vorbereitungsarbeiten zu leisten, die mit der Ermittlung der Stabfestwerte und der Belastungsglieder zusammenhängen. Diese Arbeiten werden jedoch durch die im Dritten Teil des Buches

enthaltenen Hilfstafeln bedeutend erleichtert und vereinfacht. Aber auch die eigentliche *Aufstellung* der Gleichungstabellen bietet in der Regel keinerlei Schwierigkeiten, da hierzu die für verschiedene Tragwerksgattungen ein für allemal abgeleiteten, gebrauchsfertigen Mustergleichungen zur Verfügung stehen, so daß auch dieser Teil der Berechnung in den meisten Fällen nahezu mechanisch erfolgen kann.

Was nun den *zweiten* Teil der Rechenarbeiten, nämlich die *Auflösung* der Gleichungen anbelangt, so wird man in der Regel bei Verwendung der auf Tafel 29 bis 31 angegebenen gekürzten Eliminationsverfahren wohl am schnellsten zum Ziel gelangen. Wird aber, wie dies bei hochgradig statisch unbestimmten Tragwerken der Fall ist, die Zahl der Gleichungen sehr groß, so kann die Rechenarbeit selbst bei Benutzung dieser gekürzten Auflösungsschemen noch ziemlich umfangreich werden. In solchen Fällen empfiehlt es sich daher, auch Möglichkeiten in Erwägung zu ziehen, die eine direkte Auflösung des vorliegenden Gleichungssystems zu umgehen gestatten.

Die einfachste Art wäre natürlich, sofern es sich mit der Beschaffenheit des Tragwerkes vereinbaren läßt, dieses für die Berechnung in mehrere Teile zu zerlegen. Auf diese Weise wären an Stelle des gegebenen umfangreichen Gleichungssystems mehrere kleinere Gleichungsgruppen aufzulösen. Von einer derartigen Spaltung kann namentlich bei Rahmentragwerken mit vollkommen festgehaltenen oder nur wenig verschieblichen Knotenpunkten Gebrauch gemacht werden, da in solchen Fällen die Einflüsse benachbarter Tragwerksteile in der Regel leichter abzuschätzen sind. Hingegen ist eine solche Trennung bei stark verschieblichen Tragwerken nicht so leicht durchführbar, weshalb bei diesen Tragwerksgattungen vereinfachende Maßnahmen mit einer gewissen Vorsicht zu treffen sind. In diesem Abschnitt soll nun grundsätzlich vorausgesetzt werden, daß sämtliche Formänderungswerte für das gesamte Tragwerk mit der für praktische Zwecke ausreichenden Genauigkeit gemeinsam zu bestimmen sind.

Hier kommen zunächst die aus der Mathematik und der Ausgleichsrechnung der Geodäsie bekannten sog. *Iterationsverfahren* in Betracht, die in letzter Zeit auch in Statikerkreisen stärkere Beachtung gefunden haben und vielfach angewendet worden sind. Es läßt sich aber in Anlehnung an diese bekannten Iterationsverfahren besonders für die Auflösung der Rahmengleichungen durch ganz einfache Maßnahmen eine bedeutende Beschleunigung der sonst üblichen Berechnungsverfahren erzielen, wie im III. Kapitel dieses Abschnittes gezeigt wird.

Vorerst soll jedoch noch ganz kurz über die Zweckmäßigkeit und Brauchbarkeit der gewöhnlichen Iterationsverfahren gesprochen werden.

II. Die gewöhnlichen Iterationsverfahren.

1. Allgemeines.

Die wichtigste Voraussetzung für eine vorteilhafte Anwendung der verschiedenen Iterationsverfahren¹ ist ein günstiger Aufbau des zu lösenden Gleichungssystems. Je mehr die Beiwerte der Diagonalglieder zahlenmäßig gegenüber den übrigen Beiwerten des Gleichungssystems überwiegen, um so besser ist die Konvergenz, d. h. um so weniger Rechnungswiederholungen sind erforderlich, um die wahren Werte der Unbekannten zu ermitteln. Überhaupt ist eine gute Konvergenz nur dann zu erwarten, wenn in jeder Gleichung der Beiwert des Diagonalgliedes größer ist als die Summe der Beiwerte aller übrigen Unbekannten derselben Gleichung.

Der Sinn aller Iterationsverfahren besteht im wesentlichen ganz einfach darin,

¹ Vgl. u. a. BEYER, DOMKE (Fußnoten S. 94 und 96), TAKABEYA, Rahmentafeln, Berlin 1930.

zunächst nur ungefähre Näherungswerte für die Unbekannten zu beschaffen und damit der Reihe nach aus jeder einzelnen Gleichung unter Verwendung dieser *ersten* Näherungswerte die verbesserten *zweiten* Näherungswerte zu ermitteln. Durch Wiederholung dieses Vorganges mit den jeweils zuletzt erhaltenen Werten kann die Genauigkeit gesteigert werden, bis sich schließlich keiner der neu erhaltenen Werte mehr ändert und diese somit als die gesuchten *wahren* Werte der Unbekannten angesehen werden können.

Der ganze Rechenvorgang kann also vollständig mechanisiert werden. Ein nicht entdeckter Rechenfehler während des Lösungsvorganges wirkt sich nur in der Weise aus, daß die Zahl der notwendigen Rechnungswiederholungen größer wird, weil eben dieser Fehler, der natürlich auch einen Teil der übrigen Unbekannten beeinflusst, erst allmählich wieder getilgt werden kann.

2. Die Anwendung der Iteration in der Baustatik.

Da mit Hilfe des Iterationsverfahrens die Auflösung eines Gleichungssystems, sofern es einen geeigneten Aufbau zeigt, selbst bei Verwendung von sehr groben ersten Näherungswerten möglich ist, so kann man diese auch in ganz einfacher Weise ermitteln. Das geschieht z. B. so, daß in der ersten Gleichung alle Unbekannten X_1 bis X_n vorerst gleich X_1' angenommen werden und daraus als erste grobe Annäherung dieser Wert X_1' zahlenmäßig ermittelt wird. Ähnlich kann man aus der zweiten Gleichung X_2' ermitteln, wobei natürlich für X_1 der bereits bekannte Näherungswert X_1' Verwendung finden kann.

Ein anderer Weg zur Gewinnung der ersten rohen Näherungswerte ist der, daß zunächst in jeder Gleichung alle Glieder mit Ausnahme des Diagonalgliedes $d_n X_n$ und des Absolutgliedes s_n (also des Belastungsgliedes) gestrichen werden, so daß sich die ersten rohen Näherungswerte X' der einzelnen Unbekannten der Reihe nach aus den willkürlich vereinfachten Gleichungen mit

$$X_n' = \frac{-s_n}{d_n} \quad (343)$$

ergeben. Selbstverständlich können diese ersten Näherungswerte auch nach irgendeiner beliebigen anderen Art ermittelt werden, doch ist zu beachten, daß naturgemäß die Zahl der erforderlichen Rechnungswiederholungen um so geringer sein wird, je genauer diese ersten Näherungswerte sind.

Wenn nun im folgenden wieder auf das Drehwinkelverfahren bezug genommen wird, so kann man sagen, daß die für Tragwerke mit *unverschieblichen* Knotenpunkten aufgestellten Gleichungen wohl immer ohne besondere Schwierigkeiten mittels Iteration gelöst werden können, da die Beiwerte der Diagonalglieder stets gegenüber jenen der übrigen Glieder ausreichend überwiegen. Im Gegensatz dazu werden aber Tragwerke mit *verschieblichen* Knotenpunkten vorsichtiger zu behandeln sein, weil bei ihnen die Voraussetzungen für eine gute Konvergenz wesentlich ungünstiger liegen. So wird z. B. in jenen Knotengleichungen, in welchen ψ -Glieder auftreten, der Beiwert des Diagonalgliedes gegenüber der Summe aller übrigen Beiwerte der Gleichung meist nicht mehr überwiegen. Dieselbe Erscheinung tritt aber auch in den Verschiebungsgleichungen auf, namentlich wenn als Unbekannte Δ oder δ verwendet wird.

Um auch in solchen Gleichungssystemen eine günstigere Konvergenz zu erzwingen, können verschiedene Umformungen vorgenommen werden, die aber selbst wieder eine Vermehrung der gesamten Rechenarbeit bedeuten. Man könnte also beispielsweise vorerst die ψ -Glieder bzw. Δ - oder δ -Glieder aus dem gesamten Gleichungssystem zum Verschwinden bringen. Dies gelingt verhältnismäßig leicht, wenn in jeder Verschiebungsgleichung nur je *ein* Glied mit ψ bzw. Δ oder δ vor-

kommt. Man kann dann der Reihe nach diese Werte aus den Verschiebungsgleichungen als Funktion der dort vorhandenen Knotendrehwinkel φ ermitteln und damit auch in den Knotengleichungen diese die Konvergenz störenden Glieder eliminieren. Gleichzeitig wird damit die ursprüngliche Zahl der Gleichungen um soviel verringert, als unbekannte Stabdrehwinkel bzw. Verschiebungsgrößen zu bestimmen sind.

Diese Art versagt aber dort, wo in den einzelnen Verschiebungsgleichungen mehrere ψ - bzw. Δ - oder δ -Glieder auftreten, wie z. B. bei unsymmetrischen, lotrecht verschieblichen Tragwerken, die für das gewöhnliche Iterationsverfahren weniger gut geeignet sind

3. Vor- und Nachteile der gewöhnlichen Iterationsverfahren.

Es wäre hier vor allem zu prüfen, in welchen Fällen das Iterationsverfahren einer direkten Auflösung vorzuziehen ist. Bei der Behandlung dieser Frage spielen selbst unter der Voraussetzung einer sichergestellten Konvergenz des Iterationsverfahrens noch zwei andere Umstände, die gleichzeitig in Betracht zu ziehen sind, eine wichtige Rolle, nämlich die Anzahl der vorhandenen Gleichungen und die Anzahl der zu behandelnden Belastungsfälle. Denn es ist hier vor allem zu beachten, daß bei Verwendung der Iteration das gesamte Verfahren für jeden Belastungsfall getrennt und vollständig neu durchzuführen ist, während die direkte Auflösung es gestattet, beliebig viele Lastfälle gleichzeitig mitzuführen.

Man wird nun freilich gerade bei hochgradig statisch unbestimmten Tragwerken die rechnungsmäßig zu behandelnden Belastungsfälle auf eine Mindestzahl beschränken. Die Anzahl der Gleichungen, die natürlich von der Beschaffenheit des Tragwerkes abhängt, wird wohl in den weitaus meisten Fällen nicht mehr als 10 betragen, in Ausnahmefällen aber auch 20 übersteigen, hingegen nur selten größer als 30 sein.

Es ist natürlich sehr schwer, allgemeine Regeln dafür anzugeben, wann das eine oder andere Verfahren den Vorzug verdient, weil hier auch die persönliche Einstellung des Rechners mitbestimmend ist. Um aber doch einen gewissen Anhaltspunkt für die Wahl zwischen den beiden Verfahren zu haben, könnte man auf Grund der bisherigen Erläuterungen sagen, daß die *direkte* Auflösung nach dem gekürzten Eliminationsverfahren in folgenden Fällen dem gewöhnlichen Iterationsverfahren noch vorzuziehen wäre:

1. Wenn nur 8 bis 10 Gleichungen vorhanden sind.
2. Wenn etwa 10 bis 15 Gleichungen mit mindestens *zwei* Belastungsfällen vorliegen.
3. Wenn etwa 15 bis 20 Gleichungen mit mindestens *drei* Belastungsfällen zu behandeln sind.

Es wird also das gewöhnliche Iterationsverfahren nur in Ausnahmefällen dem direkten Lösungsverfahren ebenbürtig oder gar überlegen sein. Der Grund hierfür ist leicht zu finden. Vergleicht man die Anzahl aller Rechenoperationen, also Multiplikationen, Divisionen, Additionen usw., die erforderlich sind, um beispielsweise ein Gleichungssystem von 5 Unbekannten nach dem Iterationsverfahren zu lösen, mit der Anzahl aller Rechenoperationen bei Auflösung desselben Gleichungssystems nach dem gekürzten Eliminationsverfahren (Tafel 29 bis 31), so ist unschwer zu erkennen, daß bei diesem die gesamte Rechenarbeit wesentlich kleiner ist. Dazu kommt aber noch, daß hierbei auch die Gefahr von Irrtümern in den Vorzeichen viel geringer ist, da in den einzelnen Zeilen stets sämtliche Vorzeichen gleich oder sämtliche Vorzeichen entgegengesetzt jenen der vorangegangenen Hauptgleichung sein müssen und daher immer leicht zu überblicken und zu überprüfen sind. Beim

Iterationsverfahren werden etwaige Fehler als solche wohl meist nicht entdeckt, sie bewirken aber naturgemäß eine Verlängerung des Auflösungsverfahrens, weil dadurch die Anzahl der notwendigen Rechnungswiederholungen anwächst.

III. Methode der „reduzierten Systeme“ mit relativer Schätzung der Nachbarunbekannten (Reduktionsmethode).

1. Vorbemerkung.

Die Mathematiker waren schon frühzeitig bemüht, Maßnahmen zu finden, die auch dort zu einer Beschleunigung der Konvergenz des gewöhnlichen Iterationsverfahrens führen, wo ein ungünstiger Bau der Gleichungen vorliegt. So hat vor allem bereits C. F. GAUSS¹ gezeigt, wie durch Einführung von Hilfsunbekannten dieses Ziel erreicht werden kann. Diese Verfahren beziehen sich jedoch in der Regel ganz allgemein auf solche Gleichungssysteme, über deren Unbekannte weder in bezug auf ihre Größe, noch auf ihre Vorzeichen von vornherein eine Auskunft gegeben werden kann.

Nun treffen aber gerade diese erschwerenden Umstände bei den Gleichungen in der Baustatik häufig nicht zu. Unter Ausnutzung dieser Tatsache lassen sich für verschiedene Rahmentypen auf Grund statischer Überlegungen sowie durch geschickte Verbindung des direkten Lösungsverfahrens mit dem Iterationsverfahren unter gleichzeitiger Anwendung einer „relativen Schätzung“ einiger Unbekannten oft bedeutende Abkürzungen des gesamten Rechenaufwandes erzielen. Dieses kombinierte Rechenverfahren, das der Verfasser bereits in seiner Dissertation² entwickelt hat und das gewissermaßen ein abgekürztes Iterationsverfahren darstellt, soll weiterhin zur besonderen Kennzeichnung seiner Eigenart kurz als „Reduktionsmethode“ bezeichnet werden. Es eignet sich namentlich für hochgradig statisch unbestimmte Tragwerke und soll im folgenden kurz dargelegt werden.

2. Allgemeine Erläuterung der Reduktionsmethode.

Es wäre, wie in Abb. 247 schematisch angedeutet ist, irgendein umfangreiches Gleichungssystem gegeben, in dem die Beiwerte der Diagonalglieder (=) gegenüber denen der übrigen Glieder (—) überwiegen. Würde man nun aus diesem Gleichungssystem eine kleine Gruppe herausgreifen, also z. B. die Gleichungen 1 bis 5, so treten darin natürlich mehr Unbekannte auf, als Gleichungen vorhanden sind (Abb. 248). Die in den Spalten 6 bis n stehenden Unbekannten X_6 bis X_n sind also überzählig und müssen zum Verschwinden gebracht werden, wenn diese Gleichungsgruppe zur Auflösung geeignet sein soll. Würde man nun diese Glieder einfach streichen, so wäre das gleichbedeutend einer vorläufigen Annahme von $X_6 = X_7 = X_8 = \dots = X_n = 0$ bzw. der Annahme $f(X_6, X_7, \dots, X_n) = 0$ in den Ausgangsgleichungen. Die unter dieser willkürlichen Voraussetzung erfolgende Auflösung der kleinen Gleichungsgruppe (Abb. 249) würde Näherungswerte für X_1 bis X_5 ergeben, die um so ungenauer wären, je größer der durch die Streichung begangene Fehler war. Es ist wohl ohne weiteres einleuchtend, daß es vorteilhafter sein wird, für die überzähligen Unbekannten in irgendeiner Form brauchbare Schätzwerte einzuführen, als sie einzeln oder in Verbindung mit ihren Beiwerten als Summe kurzerhand gleich Null zu setzen.

Hier liegt nun der wesentliche Unterschied in der Behandlung solcher Gleichungs-

¹ JORDAN: Handbuch der Vermessungskunde, I. Bd. Stuttgart 1920.

² GULDAN: Ein Beitrag zur Vereinfachung der Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke. HDI-Mitteilungen, Jg. 1931.

systeme, über deren Unbekannte zunächst weder der Größe noch dem Vorzeichen nach etwas ausgesagt werden kann, und den Gleichungssystemen der Baustatik, wo es oft sogar sehr leicht ist, wenigstens ungefähre Angaben zu machen. Es ist dabei aber gar nicht notwendig, eine Annahme über die „absoluten“ Werte dieser überzähligen Unbekannten zu treffen; es genügt vollkommen, wenn ihre Größen im *Verhältnis* zu einer der Unbekannten geschätzt werden, die in der Gleichung verbleiben. Diese „relative Schätzung“ hat nicht nur den Vorteil, daß sie viel leichter durchführbar ist, sie wirkt sich auch in der Rechnung selbst bedeutend günstiger aus als eine Schätzung der „absoluten“ Werte.

Enthält somit z. B. das hier vorliegende Gleichungssystem Formänderungswerte, also Drehwinkel und Verschiebungsgrößen als Unbekannte, so kommt es zunächst nur darauf an, die überzähligen Unbekannten X_6 bis X_n ganz roh im Verhältnis zu den Ausgangsunbekannten X_1 bis X_5 abzuschätzen. Zur Erleichterung dieser Schätzung werden später für die häufiger auftretenden Fälle einfache Regeln und Vorschläge angegeben werden.

Auf diese Weise gelingt es also, durch Auflösung einer kleinen Gleichungsgruppe bereits sehr gute Näherungswerte für die Ausgangsunbekannten zu gewinnen, die eine verlässliche Grundlage zur Berechnung der übrigen Unbekannten bilden. Diese werden dann der Reihe nach immer aus je *einer* Gleichung ermittelt, in welche die bereits bekannten Werte einzuführen sind, während für die dort noch vorhandenen überzähligen Unbekannten wieder eine „relative Schätzung“ vorgenommen werden kann. Nach jeder neu erhaltenen Unbekannten kann auch flüchtig die zu ihrer Ermittlung verwendete „relative Schätzung“ überprüft werden, um allzu grobe Versehen rechtzeitig festzustellen und zu berichtigen.

Damit ist der *erste* Rechnungsgang abgeschlossen. Die Verbesserung der erhaltenen Werte ist auf verschiedene Weise zu erreichen. Entweder man geht nun so vor, wie es beim gewöhnlichen Iterationsverfahren üblich ist, oder man leitet auch den *zweiten* Rechnungsgang in der Weise ein, daß zunächst wieder eine kleinere Gleichungsgruppe für sich aufgelöst wird. Für die darin vorhandenen überzähligen Unbekannten können entweder die Werte aus dem *ersten* Rechnungsgang direkt eingeführt werden, oder aber es kann in gewissen Fällen wiederum eine „relative Schätzung“ zur Anwendung kommen, die mit Hilfe der bereits vorliegenden Werte viel leichter durchzuführen ist, als dies für den *ersten* Rechnungsgang möglich war. Nach der gemeinsamen Ermittlung der neuen Ausgangsunbekannten kann weiterhin wie im *ersten* Rechnungsgang verfahren werden. In ähnlicher Weise wären sodann eventuell erforderliche *weitere* Rechnungsgänge durchzuführen.

3. Statische Deutung.

In statischer Hinsicht ergibt sich für die in ihrem Wesen bereits erläuterte „Reduktionsmethode“ eine ganz einfache Deutung. Man denkt sich vorerst aus dem

G/N	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{n-1}	X_n	β
1	=	-	-	-	-	-	-	-	β_1
2	-	=	-	-	-	-	-	-	β_2
3	-	-	=	-	-	-	-	-	β_3
4	-	-	-	=	-	-	-	-	β_4
5	-	-	-	-	=	-	-	-	β_5
6	-	-	-	-	-	=	-	-	β_6

$n-1$	-	-	-	-	-	-	=	-	β_{n-1}
n	-	-	-	-	-	-	-	=	β_n

Abb. 247. Schema eines Gleichungssystems mit den Unbekannten X_1 bis X_n .

G/N	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_{n-1}	X_n	β
1	=	-	-	-	-	-	-	-	β_1
2	-	=	-	-	-	-	-	-	β_2
3	-	-	=	-	-	-	-	-	β_3
4	-	-	-	=	-	-	-	-	β_4
5	-	-	-	-	=	-	-	-	β_5

Abb. 248. Gleichungsgruppe aus Abb. 247.

G/N	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	β
1	=	-	-	-	-	β_1
2	-	=	-	-	-	β_2
3	-	-	=	-	-	β_3
4	-	-	-	=	-	β_4
5	-	-	-	-	=	β_5

Abb. 249. Gleichungsgruppe aus Abb. 248 nach Beseitigung der überzähligen Unbekannten.

gegebenen Tragwerk einen kleinen Teil herausgetrennt, der künftig einfach als „reduziertes System“ bezeichnet werden soll. Das ist z. B. bei dem in Abb. 250 dargestellten Tragwerk veranschaulicht, wobei als „reduziertes System“ der stark betonte Teil des Tragwerkes gewählt sei, der in Abb. 251 in größerem Maßstab gesondert herausgezeichnet ist. Die Bedingungsgleichungen für dieses „reduzierte System“ werden zunächst so angesetzt, daß der Zusammenhang mit dem übrigen Tragwerk in keiner Weise gestört wird, so daß diese Gleichungen vorläufig noch identisch sind mit den entsprechenden Gleichungen für das Gesamtsystem. Die so erhaltene Gleichungsgruppe enthält jedoch mehr Unbekannte als Gleichungen. Die

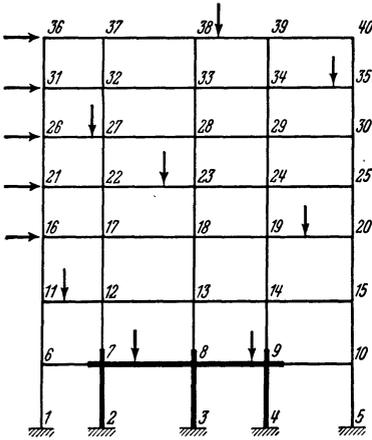


Abb. 250. Tragwerk mit „reduziertem System“.

überzähligen Unbekannten, nämlich die Drehwinkel $\varphi_6, \varphi_{10}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}$ der benachbarten Knotenpunkte und der Stabdrehwinkel ψ_2 sind in Abb. 251 besonders vermerkt. Es wären somit vier Ausgangsunbekannte, und zwar $\varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \psi_1$ gemeinsam zu bestimmen. Der Stabdrehwinkel ψ_2 des anschließenden Stockwerkes könnte allerdings ebensogut als Ausgangs-

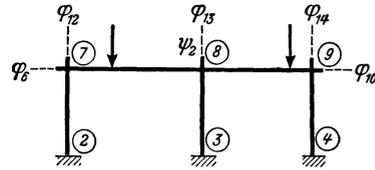


Abb. 251. „Reduziertes System“ aus Abb. 250. Ausgangsunbekannte: $\varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \psi_1$.

unbekannte in das „reduzierte Gleichungssystem“ einbezogen werden (vgl. Zahlenbeispiel 26).

Die vorhandenen überzähligen Unbekannten sind durch Anwendung der „relativen Schätzung“ in bezug auf die im „reduzierten System“ auftretenden Ausgangsunbekannten zu beseitigen. Die zahlenmäßige Durchführung dieser Schätzung, die allgemein sowohl von der Gestalt des Tragwerkes als auch von der Art der Belastung abhängt, wird später noch ausführlicher behandelt.

Die Auflösung des „reduzierten Gleichungssystems“ und die anschließende stufenweise Ermittlung der übrigen Unbekannten aus je einer Gleichung des Gesamtsystems stellt den *ersten* Rechnungsgang dar, dem je nach Empfindlichkeit des Tragwerkes und der angestrebten Genauigkeit einige *weitere* Rechnungsgänge folgen.

Es entsteht die Frage, nach welchen Gesichtspunkten die Wahl des „reduzierten Systems“ getroffen werden soll, um möglichst rasch zum Ziel zu gelangen. Auch hier sind naturgemäß Art und Belastung des zu behandelnden Tragwerkes in erster Linie maßgebend. Bei Tragwerken mit *unverschieblichen* Knotenpunkten werden weniger Ausgangsunbekannte erforderlich sein als bei *verschieblichen* Tragwerken. Die Wahl ist jedoch in keinem Falle an bestimmte Regeln gebunden. Es wird aber oft von Vorteil sein, das „reduzierte System“ so zu wählen, daß die Randbedingungen des Tragwerkes mit erfaßt werden, weil man auf diese Weise mit der geringsten Anzahl von Schätzungen auskommt.

Es ist klar, daß die „Reduktionsmethode“ auch dann anwendbar ist, wenn *Momente* als Unbekannte in den Gleichungen auftreten, z. B. bei den Dreimomentengleichungen für Durchlaufträger und verwandte Systeme.

4. Anwendung der Methode bei unverschieblichen Tragwerken.

Es ist auch bei der praktischen Anwendung der „Reduktionsmethode“ stets zweckmäßig, vorerst die Bedingungsgleichungen für das gesamte Tragwerk vollständig anzuschreiben und dann die Wahl des „reduzierten Systems“ sowie die Schätzung der in den zugehörigen Ausgangsgleichungen vorhandenen überzähligen Unbekannten vorzunehmen.

A. Wahl des „reduzierten Systems“.

Bei *unverschieblichen* Tragwerken wird man in der Regel von sehr einfachen „reduzierten Systemen“ ausgehen können, die nur *zwei* bis *drei* Ausgangsunbekannte aufweisen. Zeigt jedoch das Tragwerk stellenweise besondere Unregelmäßigkeiten in Gestalt oder Belastung, in deren Bereich die Durchführung von Schätzungen der Unbekannten erschwert ist, so ist zu empfehlen, diesen Teil des Tragwerkes mit in das „reduzierte System“ einzubeziehen.

B. Durchführung der „relativen Schätzung“.

Je nach der Beschaffenheit des Tragwerkes und seiner Belastung sind hier verschiedene Wege gangbar. Grundsätzlich wird jedoch die Aufgabe immer darin bestehen, einen Knotendrehwinkel φ_r in bezug auf einen benachbarten Knotendrehwinkel φ_n ungefähr zu schätzen. Das kann allgemein in der Form geschehen, daß man

$$\varphi_r \doteq \varkappa \varphi_n \quad (344)$$

oder

$$\varkappa \doteq \frac{\varphi_r}{\varphi_n} \quad (344a)$$

setzt.

Es soll nun zuerst gezeigt werden, wie zur Schätzung des Verhältniswertes \varkappa aus den einzelnen Gleichungen selbst brauchbare Ansätze gewonnen werden können. Der Einfachheit wegen sei von einem regelmäßig gebauten Stockwerkrahmen (Abb. 252) ausgegangen, dessen Riegelbelastungen in benachbarten Geschossen keine allzu krassen Unterschiede zeigen. Die Knotengleichungen für die beiden übereinanderliegenden Knoten n und r lauten nach (18):

$$\begin{aligned} d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n &= 0 \\ d_r \varphi_r + \sum_i k_{r,i} \varphi_i + s_r &= 0 \end{aligned} \quad (345)$$

Unter den hier getroffenen Voraussetzungen werden die Knotendrehwinkel φ_n und φ_r in erster Linie von ihren zugehörigen Knotenbelastungsgliedern s_n bzw. s_r und den Knotensteifigkeiten d_n bzw. d_r abhängig sein, während die übrigen Gleichungsglieder in solchen Fällen von geringerer Bedeutung sein werden. Man könnte daher für die Ermittlung der ersten rohen Näherungswerte von φ_n und φ_r in den beiden Knotengleichungen (345) die Glieder $\sum_i k_{n,i} \varphi_i$ und $\sum_i k_{r,i} \varphi_i$ streichen und erhalte in sinngemäßer Übereinstimmung mit (343) die einfachen Formeln:

$$\varphi_n \doteq \frac{-s_n}{d_n} \quad \text{und} \quad \varphi_r \doteq \frac{-s_r}{d_r}. \quad (346)$$

Diese Werte würden dann als völlig genau anzusehen sein, wenn die vernachlässigten Summenwerte $\sum_i k_{n,i} \varphi_i = 0$ bzw. $\sum_i k_{r,i} \varphi_i = 0$ wären. Je mehr diese

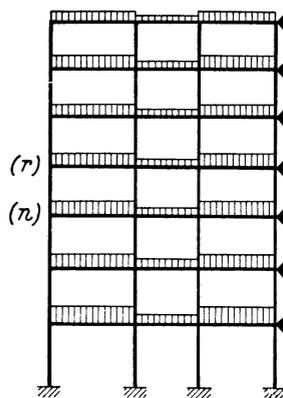


Abb. 252. Unverschiebliches Tragwerk.

Werte aber von Null verschieden sind, bzw. je mehr sie im Verhältnis zu s_n bzw. s_r ins Gewicht fallen, um so weniger zutreffend wird diese Schätzung sein. Dagegen wird das Verhältnis

$$\frac{\varphi_r}{\varphi_n} \doteq \frac{d_n}{d_r} \cdot \frac{s_r}{s_n} \quad (347)$$

oder

$$\boxed{\varphi_r \doteq \frac{d_n}{d_r} \cdot \frac{s_r}{s_n} \cdot \varphi_n} \quad (348)$$

unter den eingangs angeführten Voraussetzungen mit einem weit geringeren Fehler behaftet sein.

Der Grund hierfür ergibt sich aus einem Vergleich der Näherung (347) mit dem genauen Ausdruck, den man aus (345) erhält, nämlich

$$\frac{\varphi_r}{\varphi_n} = \frac{d_n}{d_r} \cdot \frac{s_r + \sum_i k_{r,i} \varphi_i}{s_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i} \quad (349)$$

Nach den getroffenen Annahmen werden s_r und s_n für die beiden übereinanderliegenden Knoten (r) und (n) ungefähr von der gleichen Größenordnung sein und ebenso werden die Summen $\sum_i k_{n,i} \varphi_i$ und $\sum_i k_{r,i} \varphi_i$ keine allzu großen Unterschiede aufweisen. Wenn also diese beiden Summenwerte im Zähler und Nenner der Gl. (349) gestrichen werden, wodurch dieser Ausdruck in (347) übergeht, so ändert sich dadurch der Wert des Bruches nur wenig. Die Schätzung nach Formel (347) bzw. (348) wird daher in solchen Fällen in der Regel recht gut entsprechen.

Hingegen versagen diese Formeln aber dort, wo das Glied s_n gleich Null oder sehr klein gegenüber s_r ist. Es wird dann, wie überhaupt bei unregelmäßigen Tragwerken, zweckmäßig sein, eine andere Art der Schätzung zu wählen. Ein einfacher Weg hierzu ist der, die zu erwartende Verformung des Tragwerkes nach der Vorstellung unter Beachtung der verschiedenen Knotensteifigkeiten ungefähr einzuzichnen und danach eine grobe Schätzung der gesuchten Größenverhältnisse benachbarter Knotendrehwinkel vorzunehmen. Geht man also wieder von der allgemeinen Form (344) aus, nämlich

$$\varphi_r \doteq \kappa \cdot \varphi_n, \quad (344)$$

so wird es ausreichend sein, auf Grund dieser Überlegungen einen runden Wert für κ anzunehmen. Man wird also z. B. einfach $\kappa = 1$, d. h.

$$\varphi_r \doteq \varphi_n \quad (350)$$

setzen, wenn zwischen φ_r und φ_n kein größerer Unterschied wahrscheinlich ist. Sind jedoch für die Schätzung von κ in (344) keine hinreichenden Anhaltspunkte vorhanden, so daß nicht einmal die Vorzeichen von φ_r bzw. φ_n sicher festliegen, dann empfiehlt es sich, $\kappa \doteq 0$, d. h. auch

$$\varphi_r \doteq 0 \quad (351)$$

zu setzen. In anderen Fällen wird sich natürlich auch

$$0 < \kappa < 1 \quad (352)$$

oder

$$\kappa > 1 \quad (353)$$

ergeben. Etwaige Fehler derartiger Schätzungen wirken sich wenig aus, da sie ja immer nur untergeordnete Glieder von geringem Einfluß in der Gleichung treffen.

Strebt man auch in solchen Fällen, wo das Knotenbelastungsglied s_r gleich Null oder doch sehr klein ist, eine größere Genauigkeit der κ -Schätzung an, so ist noch

folgende Überlegung zweckdienlich. Ist der Stab $n - r$ unbelastet und der Drehwinkel φ_r in bezug auf φ_n zu schätzen, so wäre bei fester Einspannung dieses Stabes in (r) der Drehwinkel $\varphi_r = 0$, hingegen bei gelenkiger Lagerung $\varphi_r = -0,5 \varphi_n$. Ist der Stab in (r) jedoch elastisch eingespannt, so wird der Wert φ_r zwischen 0 und $-0,5 \varphi_n$ liegen, d. h. man wird für

$$\varphi_r \doteq -0,2 \varphi_n \text{ bis } -0,3 \varphi_n \tag{354}$$

annehmen können, wenn der Knoten (r) nicht auch durch die anderen dort einmündenden Stäbe noch erheblich in seiner Verdrehung beeinflusst wird. Wenn das der Fall ist, und dieser Umstand mit berücksichtigt werden soll, so ist zu prüfen, ob dieser Einfluß dem zuerst betrachteten gleich- oder entgegengerichtet ist. Davon wird es abhängen, ob für die endgültige Schätzung von φ_r der Wert nach (354) entsprechend zu vergrößern bzw. zu verkleinern oder aber in Zweifelsfällen, bei entgegengerichteten Einflüssen, einfach $\varphi_r \doteq 0$ zu setzen ist, wie dies auch in (351) angegeben wurde.

C. Beschreibung des Rechnungsganges.

Der Gang der Berechnung nach dem „Reduktionsverfahren“ gliedert sich im Prinzip in folgende Abschnitte:

1. Aufstellung sämtlicher Bedingungsgleichungen.
2. Wahl des „reduzierten Systems“ und Übernahme der zugehörigen Ausgangsgleichungen.
3. „Relative Schätzung“ der darin auftretenden überzähligen Unbekannten.
4. Auflösung der Ausgangsgleichungen und stufenweise Berechnung der übrigen Unbekannten aus je einer Gleichung.
5. Durchführung des zweiten und, wenn notwendig, der weiteren Rechnungsgänge.

Würde also beispielsweise für das in Abb. 253 ersichtliche Tragwerk der stark gezeichnete Teil als „reduziertes System“ gewählt werden, so wären die Unbekannten φ_4, φ_5 und φ_6 als Ausgangsunbekannte gemeinsam aus den zugehörigen Knotengleichungen zu bestimmen. In diesen Gleichungen treten aber als benachbarte Unbekannte noch die überzähligen Knotendrehwinkel $\varphi_7, \varphi_8, \varphi_9$ auf, die mit Hilfe „relativer Schätzungen“ in bezug auf die Ausgangsunbekannten zu beseitigen sind. Unter Anwendung von (348) würde man also z. B. annehmen:

$$\varphi_7 \doteq \frac{d_4}{d_7} \cdot \frac{s_7}{s_4} \cdot \varphi_4; \quad \varphi_8 \doteq \frac{d_5}{d_8} \cdot \frac{s_8}{s_5} \cdot \varphi_5; \quad \varphi_9 \doteq \frac{d_6}{d_9} \cdot \frac{s_9}{s_6} \cdot \varphi_6$$

oder gegebenenfalls auch:

$$\varphi_8 \doteq \varphi_5.$$

Führt man diese Schätzungen, die natürlich immer abgerundet werden können, zahlenmäßig in die Ausgangsgleichungen ein, so verschwinden darin die überzähligen Unbekannten, während gleichzeitig nur die Beiwerte der Diagonalglieder, im vorliegenden Beispiel d_4, d_5, d_6 , eine zahlenmäßige Änderung erfahren. Damit ist auch im „reduzierten Gleichungssystem“ die Symmetrie wieder vollständig hergestellt. Nach seiner Auflösung erfolgt die Ermittlung der übrigen Unbekannten in passender Reihenfolge aus je einer Gleichung, wobei auch da die Schätzung der jeweils überzähligen Unbekannten im Verhältnis zu dem gesuchten Knotendrehwinkel nach (348), (350) bzw. (351) geschehen kann.

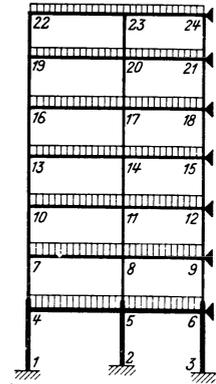


Abb. 253.
Unverschiebliches Tragwerk mit „reduziertem System“.

Der *zweite* Rechnungsgang wird meist nurmehr geringe Änderungen bringen. Er kann in der Weise durchgeführt werden, daß die einzelnen Unbekannten der Reihe nach aus je einer Gleichung ermittelt werden, wobei auch die zuletzt erhaltenen Werte des *zweiten* Rechnungsganges bereits mit Verwendung finden. In der gleichen Art wären, wenn notwendig, die weiteren Rechnungsgänge durchzuführen, die sich auch nur über einzelne Teile des Tragwerkes erstrecken können (vgl. Zahlenbeispiel 25).

5. Anwendung bei waagrecht verschieblichen Tragwerken.

A. Allgemeines.

Als häufigste Vertreter dieser Art von Tragwerken sind vor allem die Stockwerkrahmen zu nennen. Bei ihnen macht sich namentlich bei Windbelastung der Einfluß der waagrechten Verschieblichkeit stark geltend. Das kommt schon durch den Bau der Knoten- bzw. Verschiebungsgleichungen zum Ausdruck, in welchen neben den Diagonalgliedern auch die φ -Glieder bzw. Δ -Glieder stark hervortreten. Beim gewöhnlichen Iterationsverfahren ist dies der Konvergenz stark abträglich. Bei der „Reduktionsmethode“ kann dagegen durch geeignete Wahl des „reduzierten Systems“ sowie durch Anwendung der „relativen Schätzung“ der ungünstige Einfluß dieser Glieder weitgehend ausgeschaltet werden. Im übrigen ist der Gang der Rechnung hier ähnlich wie bei den *unverschieblichen* Tragwerken.

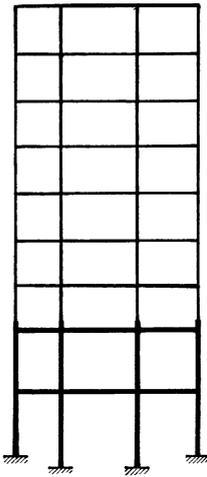


Abb. 254.

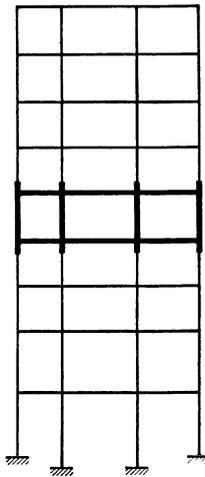


Abb. 255.

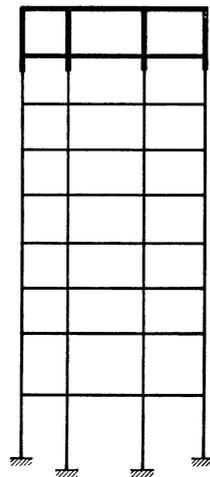


Abb. 256.

Abb. 254 bis 256. Stockwerkrahmen. Wahl des „reduzierten Systems“.

Was die Wahl des „reduzierten Systems“ anbelangt, so bestehen im wesentlichen die drei Möglichkeiten, dieses entweder am unteren Ende des Tragwerkes (Abb. 254), in der Tragwerkmitte (Abb. 255) oder aber am oberen Ende des Tragwerkes (Abb. 256) anzunehmen.

Das „reduzierte Gleichungssystem“ enthält hier sowohl Knotengleichungen als auch Verschiebungsgleichungen, die zunächst wieder aus dem gesamten Gleichungssystem unverändert entnommen werden können. Die Beseitigung der darin enthaltenen überzähligen φ - und ψ - bzw. Δ -Werte erfolgt dann wieder mit Hilfe der „relativen Schätzung“, die jedoch für solche Tragwerke anders vorzunehmen ist als bei unverschieblichen Systemen.

B. Durchführung der „relativen Schätzung“ der φ - und ψ -Werte.

Grundsätzlich sollen für die Durchführung der Schätzung immer möglichst einfache Ansätze gewählt werden, deren Anwendung nur ganz geringe Rechenarbeit erfordert.

Um solche Ansätze beschaffen zu können, ist es nützlich, über die zu erwartende Verformung des zu behandelnden Tragwerkes von vornherein eine annähernd richtige Vorstellung zu besitzen. In dieser Beziehung ergibt sich ein recht guter Einblick, wenn man zunächst nur idealisierte Rahmentypen als Sonderfälle in Betracht zieht und ihr Verhalten bei verschiedenen Belastungsfällen vergleicht. Daraus können dann für ähnliche Tragwerksarten, die sich von diesem Sonderfall in ihrer Bauart nur wenig unterscheiden, wertvolle Schlüsse gezogen werden.

Sind also z. B. die in den Abb. 257 dargestellten viestöckigen Rahmen, bei welchen zunächst die Steifigkeitszahlen sämtlicher Stäbe und auch die Stockwerkshöhen durchwegs gleich groß angenommen seien, in der obersten Rahmenecke durch eine waagrechte Kraft P belastet, so stellt sich der in diesen Abbildungen eingetragene Momentenverlauf ein.

Die „relative Schätzung“ der Stabdrehwinkel ψ in zwei übereinanderliegenden Stockwerken gestaltet sich für diesen Fall besonders einfach. Denn mit Ausnahme

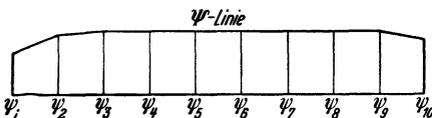


Abb. 258.

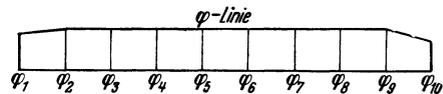


Abb. 259.

Abb. 258 und 259. ψ - und φ -Linie für den Stockwerkrahmen der Abb. 257 a.

der obersten und untersten Geschosse, die noch im Bereich der Randeinflüsse liegen, werden die ψ -Werte in den übrigen Fächern einen nahezu konstanten Wert annehmen. Würde man also zur besseren Veranschaulichung die Stabdrehwinkel ψ bzw. Knotendrehwinkel φ für den in Abb. 257 a dargestellten Idealfall der Reihe nach von einer Grundlinie aus als Ordinaten mit gleichen Abständen in einem passenden Maßstab auftragen, so würde man ungefähr die in den Abb. 258 bzw. 259 ersichtlichen Linienzüge erhalten. Ähnliche Bilder würden sich auch ergeben, wenn man in derselben Weise die den Belastungsfällen Abb. 257 b, c entsprechenden Stabdrehwinkel ψ und, getrennt für Rand- und Mittelstiele, die Knotendrehwinkel φ der Reihe nach zeichnerisch darstellen würde.

Die bisher angestellten Betrachtungen sollen nun auf die in den Abb. 260 a, b, c ersichtlichen Belastungsfälle erweitert werden, wo im obersten Knotenpunkt die Kraft $\frac{P}{2}$ und in den darunterliegenden Knoten je eine Kraft P angreift. Die übrigen

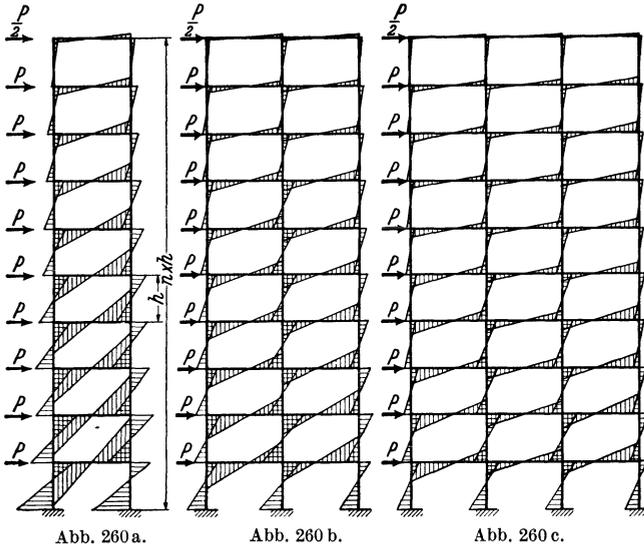


Abb. 260 a, b und c. Momentenverlauf bei Stockwerkrahmen mit konstanten k -Werten für waagrechte Knotenlasten P .

Voraussetzungen in bezug auf die Steifigkeit der einzelnen Stäbe bleiben vorläufig noch unverändert. Der diesen Annahmen entsprechende Momentenverlauf ist in den Abb. 260 a, b, c angedeutet. Die Abb. 261 und 262 zeigen ungefähr den Verlauf der ψ - bzw. φ -Linie für den zwei-stieligen Stockwerkrahmen der Abb. 260 a. Bemerkenswert ist hier, daß, abgesehen vom obersten und untersten Tragwerksbereich, die φ - und ψ -Werte ungefähr linear von unten nach oben abnehmen. Dasselbe trifft auch für die Formänderungswerte und die Stabendmomente der in Abb. 260 b, c darge-

stellten mehrstieligen Stockwerkrahmen zu. Es wäre somit auch für diesen Belastungsfall, der den Einfluß der Windwirkung vorstellt, die „relative Schätzung“

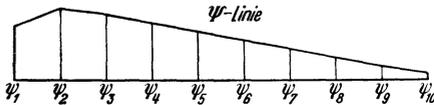


Abb. 261.

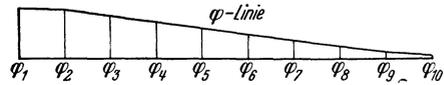


Abb. 262.

Abb. 261 und 262. ψ - und φ -Linie für den Stockwerkrahmen der Abb. 260 a.

sehr leicht durchzuführen. Im mittleren Bereich eines solchen Tragwerkes müßte also unter Bezugnahme auf Abb. 263 gelten

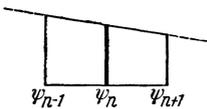


Abb. 263. Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden ψ -Werten. Sonderfall.

oder

$$\psi_n \doteq \frac{\psi_{n-1} + \psi_{n+1}}{2} \tag{355}$$

$$\psi_{n+1} \doteq 2\psi_n - \psi_{n-1} \tag{356}$$

und ähnlich auch

$$\varphi_{n+1} \doteq 2\varphi_n - \varphi_{n-1} \tag{356a}$$

Wenn also die stufenweise Berechnung von unten nach oben erfolgt, so kann im vorliegenden Falle die Voraus-schätzung der Winkelwerte nach den Formeln (356) bzw. (356a) vorgenommen werden. Es ist einleuchtend, daß diese Art der Schätzung sinngemäß auch direkt für die Stabendmomente Anwendung finden kann.

Es fragt sich nun, welche Form die Linienzüge für die einzelnen Formänderungs-

werte bei Rahmentragwerken annehmen, deren Stäbe nicht durchwegs die gleichen Steifigkeiten besitzen, wie das bisher angenommen worden ist, und ob auch da so einfache und zugleich brauchbare Ansätze für eine „relative Schätzung“ der benachbarten Winkelwerte gefunden werden können. Denn bei den Stockwerkrahmen der Skelettbauten sind in der Regel die Säulenquerschnitte in den unteren Stockwerken größer als in den oberen, und auch die Querschnitte der Rahmenriegel können verschieden sein. Dadurch ergeben sich naturgemäß verschiedenartige Formen der ψ - bzw. φ -Linien. Es können also z. B. die Stabdrehwinkel eines durch waagrechte Kräfte belasteten Stockwerkrahmens den in Abb. 264 ersichtlichen Linienzug ergeben, wenn die Steifigkeit der Säulen in den oberen Stockwerken sehr stark abnimmt. Einen ähnlichen Verlauf kann auch die „ φ -Linie“ zeigen. Diese Linienzüge nehmen aber mitunter, wie in Abb. 265 angedeutet, auch eine leichte S-Form an.

Selbst für diese Fälle kann jedoch die in den Formeln (356) und (356a) zum Ausdruck gebrachte Schätzungsart Verwendung finden. Der Fehler, der dabei unter Umständen begangen werden kann, läßt sich an Hand der Abb. 266 bzw. 266a

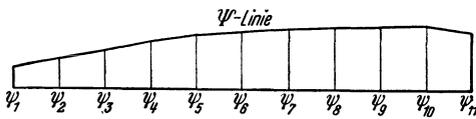


Abb. 264.

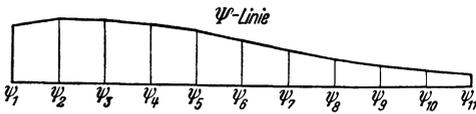


Abb. 265.

Abb. 264 und 265. Verschiedene Formen der ψ -Linie bei Stockwerkrahmen mit ungleichen k -Werten.

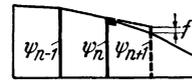


Abb. 266. Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden ψ -Werten. Allgemeiner Fall.

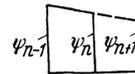


Abb. 266 a. Vorausschätzung von ψ_{n+1} aus ψ_n und ψ_{n-1}

leicht veranschaulichen. Um den Schätzungsfehler besonders deutlich in Erscheinung treten zu lassen, ist dort die ψ -Linie in stark gekrümmter Form angenommen. Wird also der Wert ψ_{n+1} mittels der Formel (356) aus den beiden vorangehenden Werten ψ_n und ψ_{n-1} geschätzt, so ist der Fehler dieser Schätzung ungefähr f . Der wirkliche Fehler hängt natürlich auch von der Genauigkeit der bereits ermittelten Werte ψ_n und ψ_{n-1} ab. Naturgemäß wird die Schätzung um so zutreffender sein, je weniger der Linienzug gekrümmt ist. Der Einfluß eines Fehlers wird jedoch in der Regel verhältnismäßig klein bleiben, da sich die Schätzung stets nur über ein Intervall erstreckt. Es schmiegt sich die Gerade, nach welcher jeweils geschätzt wird, immer wieder dem tatsächlichen Linienzug an. Stehen also gute Ausgangswerte zur Verfügung, die man durch die gemeinsame Bestimmung mehrerer Unbekannten erhält, so führt dieses Verfahren auch in solchen Fällen außerordentlich rasch zum Ziel, wo das gewöhnliche Iterationsverfahren entweder überhaupt versagt oder eine große Zahl von Rechnungswiederholungen erfordern würde.

Durch örtlich nicht ganz zutreffende Schätzungen wird der Grad der Genauigkeit nicht wesentlich beeinflusst, falls nicht sehr grobe Versehen vorkommen. Diese treten aber sofort zutage, wenn man sich laufend durch Stichproben überzeugt, ob die neu erhaltenen Werte annähernd in dem ursprünglich geschätzten Verhältnis zueinander stehen. Wichtig erscheint hier auch der Umstand, daß die Rechnung durch keine ungünstige Fehlerfortpflanzung gefährdet ist. Das ergibt sich schon daraus, daß nie aus einem geschätzten Wert ein weiterer geschätzt wird, sondern immer aus einem errechneten, der also bereits um einen Grad genauer ist als die vorangegangene Schätzung.

Die bisher gebrachten Überlegungen sollen nur zeigen, in welcher Weise man zu einfachen Ansätzen von brauchbaren Schätzungen gelangen kann. Sie können natürlich für den jeweils vorliegenden Fall abgeändert, erweitert oder auch verfeinert werden. Es wird auf diese Weise auch bei Tragwerken, die durch örtliche Unregelmäßigkeiten in der Gestaltung oder Belastung gekennzeichnet sind, möglich sein, dieser Störung entweder durch geschickte Wahl des „reduzierten Systems“ oder auch durch eine mehr gefühlsmäßige „relative Schätzung“ Rechnung zu tragen.

C. Durchführung der Rechnung.

Die praktische Durchführung des *ersten* Rechnungsganges erfolgt im wesentlichen nach den Erläuterungen, die bereits bei der Behandlung der *unverschieblichen* Tragwerke gegeben worden sind.

Es sei hier nur noch darauf hingewiesen, daß sich bei manchen *verschieblichen* Tragwerken, die sich durch einen mehr regelmäßigen Bau auszeichnen, auch im *zweiten* Rechnungsgang die Anwendung einer „relativen Schätzung“ vorteilhaft auswirkt. Diese kann sehr leicht nach den bereits bekannten Werten aus dem *ersten* Rechnungsgang erfolgen. Würde man also z. B. den Knotendrehwinkel φ_r'' , für den *zweiten* Rechnungsgang im Verhältnis zu dem benachbarten Drehwinkel φ_n'' zu schätzen haben, so könnte man schreiben:

$$\varphi_n'' : \varphi_r'' \doteq \varphi_n' : \varphi_r' \quad (357)$$

oder allgemein in Worten: die im *neuen* Rechnungsgang zu erwartenden Werte von benachbarten Knotendrehwinkeln werden sich bei solchen Tragwerken wieder meist ungefähr so verhalten, wie im *vorhergehenden* Rechnungsgang. Damit würde sich also ergeben

$$\boxed{\varphi_r'' \doteq \varphi_n'' \cdot \frac{\varphi_r'}{\varphi_n'}} \quad (358)$$

Auf diese Weise wird die sich vermutlich einstellende weitere Änderung der benachbarten Unbekannten und auch ihre Auswirkung auf die übrigen Unbekannten gewissermaßen „vorausgeschätzt“. Die Konvergenz des Verfahrens kann dadurch oft außerordentlich günstig beeinflusst werden (siehe Zahlenbeispiel 26).

D. Zahlenbeispiel.

Es soll nun ein zehnstöckiger, vierstieliger, symmetrischer Rahmen für waagrechte Belastung (Abb. 267) auf Grund der vorangegangenen Ausführungen zahlenmäßig durchgerechnet werden. Die Rechnung selbst ist im Zweiten Teil des Buches als *Zahlenbeispiel 26* durchgeführt, während hier nur der Rechnungsgang kurz beschrieben werden soll.

Nach Ermittlung der Steifigkeitszahlen, die in der Beiwertschizze Abb. 427 eingetragen sind, können die Gleichungen für das gesamte Tragwerk aufgestellt werden. Es ergeben sich 20 Knotengleichungen und 10 Verschiebungsgleichungen. Sie sind, um an Raum zu sparen, nicht in Tabellenform, sondern untereinander angeschrieben. Als „reduziertes System“ werden die unteren zwei Stockwerke (Abb. 267 a) mit den Ausgangsunbekannten $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ und ψ_1, ψ_2, ψ_3 gewählt, die also gemeinsam aus dem „reduzierten Gleichungssystem“ zu ermitteln sind. Als überzählige Unbekannte sind hierbei nur die benachbarten Knotendrehwinkel φ_7 und φ_8 zu schätzen. Dafür empfiehlt sich hier der einfache Ansatz:

$$\varphi_7 \doteq \varphi_5; \quad \varphi_8 \doteq \varphi_6. \quad (359)$$

Es wird bei den Ausgangsgleichungen absichtlich nicht die Schätzung nach den Ansätzen (356) bzw. (356a) verwendet, weil sich hier noch der Einfluß der Randbedingungen störend bemerkbar macht und außerdem die Symmetrie der Ausgangsgleichungen verlorengehe. Mit der Annahme (359) dagegen wird das gesamte

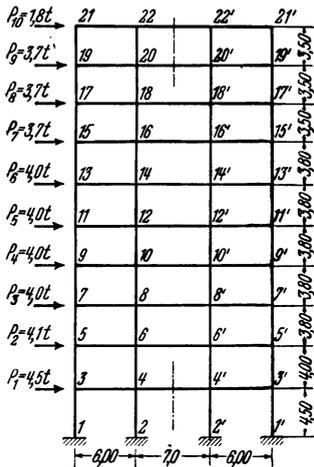


Abb. 267. Stockwerkrahmen. Abmessungen und Belastungsangaben.

„reduzierte Gleichungssystem“ vollkommen symmetrisch, wenn man die Verschiebungsgleichung für das dritte Stockwerk (ψ_3) noch durch 2 dividiert.

Nach Auflösung dieses Gleichungssystems schließt sich die stufenweise Berechnung der übrigen Unbekannten unter ausschließlicher Anwendung der Ansätze (356) bzw. (356a) für die vorzuschätzenden Nachbarunbekannten an.

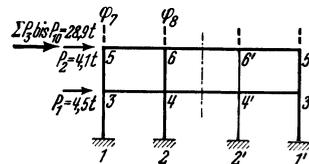


Abb. 267 a. „Reduziertes System“ für den ersten Rechnungsgang. Ausgangsunbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \psi_1, \psi_2, \psi_3$.

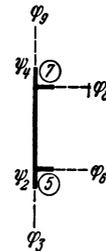


Abb. 267 b. „Reduziertes System“ für den zweiten Rechnungsgang. Ausgangsunbekannte: $\varphi_5, \varphi_7, \psi_3$.

Für die Durchführung des zweiten Rechnungsganges wird hier das „reduzierte System“ nach Abb. 267 b mit den drei Ausgangsunbekannten φ_5, φ_7 und ψ_3 gewählt. Die benachbarten Unbekannten $\varphi_3, \varphi_6, \varphi_8, \varphi_9$ und ψ_2, ψ_4 werden nach dem Ansatz (358) mit Hilfe der Ergebnisse des ersten Rechnungsganges als Funktion der Ausgangswerte geschätzt. Nach Auflösung der kleinen Gleichungsgruppe werden die übrigen Unbekannten wieder stufenweise aus je einer Gleichung ermittelt. Hierbei werden stets die aus dem zweiten Rechnungsgang bereits vorliegenden Werte direkt verwendet, während die übrigen wieder nach (358) im Verhältnis zur jeweils gesuchten Unbekannten eingeführt werden. Die dazu erforderlichen Verhältniswerte können aber sofort für den gesamten zweiten Rechnungsgang gleichzeitig ermittelt werden.

Zum Vergleich wurden auch noch ein dritter und vierter Rechnungsgang durchgeführt, wobei jedoch kein „reduziertes System“ mehr zur Anwendung kam. Die Ergebnisse erbrachten nur noch geringfügige Abweichungen. In Abb. 268 a, b, c sind die ψ -Linie und die φ -Linien für dieses Rahmentragwerk dargestellt. Der Linienzug Abb. 268 b zeigt die Knotendrehwinkel am äußeren Stiel, während Abb. 268 c die Knotendrehwinkel am inneren Stiel enthält.

Die aus den Ergebnissen des vierten Rechnungsganges ermittelten Momente sind in Abb. 430 aufgetragen.

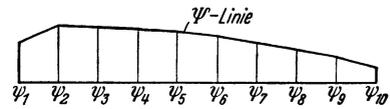


Abb. 268 a.

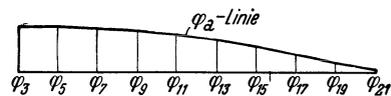


Abb. 268 b.

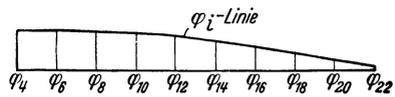


Abb. 268 c.

Abb. 268 a, b und c. ψ - und φ -Linien für die äußeren und inneren Knotenreihen des Tragwerks aus Abb. 267.

6. Anwendung bei lotrecht verschieblichen Tragwerken.

Zahlenbeispiel.

Die bisherigen Ausführungen über die Vereinfachung der Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke können sinngemäß auch auf Systeme mit *lotrecht verschieblichen* Knotenpunkten Anwendung finden. Dies soll hier an einem Zahlenbeispiel anschaulich erläutert werden.

In Abb. 269 ist ein Stockwerkrahmen wiedergegeben, der vor allem dadurch bemerkenswert erscheint, daß das stark gezeichnete Portal als genietete Stahlkonstruktion ausgeführt worden ist, während der übrige Teil aus Stahlbeton besteht. Bei diesem Tragwerk wird sich der Einfluß der Verschiebung der Knotenpunktreihe 7—22 auf das gesamte

Tragwerk auswirken. Die Verschiedenheit der Dehnungszahlen E_s und E_b der beiden Baustoffe muß in der Berechnung selbstverständlich beachtet werden.

Im Zweiten Teil des Buches ist dieses Tragwerk als *Zahlenbeispiel 27* durchgerechnet, während an dieser Stelle nur der Gang der gesamten Rechnung eingehend besprochen werden soll.

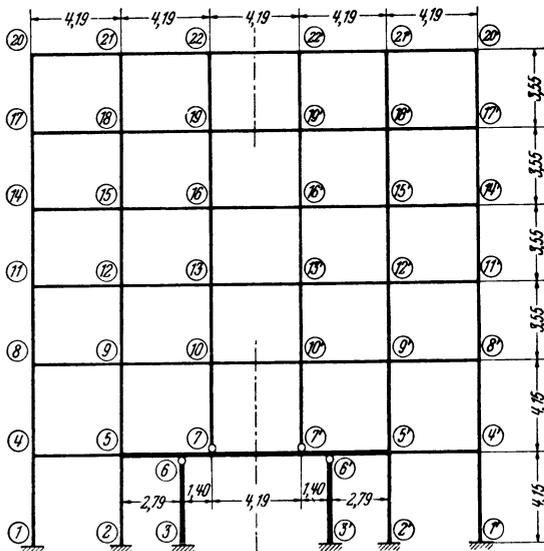


Abb. 269. Tragwerksabmessungen.

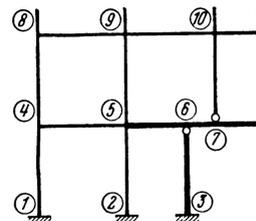


Abb. 270. „Reduziertes System“ für den ersten Rechnungsgang.

Infolge der symmetrischen Belastung (siehe Abb. 431) ergeben sich insgesamt nur 19 Knotengleichungen und eine Verschiebungsgleichung, die bei Zahlenbeispiel 27 vollständig angeschrieben sind. Ihre Auflösung nach dem gewöhnlichen Iterationsverfahren würde hier nur schwer zum Ziele führen, da das Gleichungssystem einen hierfür ungünstigen Aufbau zeigt und keine gute Konvergenz verspricht. Hingegen kann bei Verwendung der „Reduktionsmethode“ die störende Unregelmäßigkeit in der Tragwerksgestaltung vorteilhaft durch ein „reduziertes System“ nach Abb. 270 erfaßt werden, das gleichzeitig auch die Randbedingungen enthält. Als Ausgangsunkbekannte sind die 7 Knotendrehwinkel $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}$ und die Verschiebung δ der Knotenpunktreihe 7—22 gemeinsam zu bestimmen. Man braucht also nur die entsprechenden 8 Gleichungen aus dem Gesamtsystem herauszugreifen. Von diesen kommen in den Gleichungen für $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$ überhaupt nur Ausgangswerte vor. In den Gleichungen für $\varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}$ tritt je ein Wert auf, der geschätzt werden muß, während aber in der Verschiebungsgleichung für δ eine größere Anzahl solcher Werte erscheint, die im Verhältnis zu den Ausgangsunkbekannten zu schätzen sind.

Das Größenverhältnis der Werte $\varphi_8, \varphi_{11}, \varphi_{14}, \varphi_{17}, \varphi_{20}$ (Knotendrehwinkel am äußersten Rahmenstiel) kann nach (346) bzw. (347) in der Weise bestimmt werden, daß in den zugeordneten Knotengleichungen nur das Absolutglied und das Diagonal-

glied in Betracht gezogen werden, während alle übrigen Glieder zunächst zu streichen sind.

Danach erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi_8 : \varphi_{11} : \varphi_{14} : \varphi_{17} : \varphi_{20} &\doteq \frac{5,27}{13,56} : \frac{5,56}{8,66} : \frac{5,56}{8,46} : \frac{5,56}{8,02} : \frac{3,66}{3,50} \\ \text{oder} & \doteq 1 : 1,65 : 1,69 : 1,78 : 2,69. \end{aligned} \quad (360)$$

Bei der „relativen Schätzung“ der übereinanderliegenden Knotendrehwinkel φ_9 , φ_{12} , φ_{15} , φ_{18} , φ_{21} am benachbarten Stiel, die sehr stark von der Verschiebung δ beeinflusst werden, kann man einfach so vorgehen, daß in den zugeordneten Knotengleichungen nur das δ -Glieder und das Diagonalglied berücksichtigt werden. Die gleichartigen Vernachlässigungen in den verwendeten Gleichungen haben auf die gesuchten *Verhältniszahlen* nur einen geringfügigen Einfluß.

Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \varphi_9 : \varphi_{12} : \varphi_{15} : \varphi_{18} : \varphi_{21} &\doteq \frac{2,51}{20,56} : \frac{1,34}{12,40} : \frac{1,34}{12,20} : \frac{1,34}{11,76} : \frac{0,57}{5,08} \\ \text{oder} & \doteq 1 : 0,89 : 0,90 : 0,93 : 0,92, \end{aligned} \quad (361)$$

d. h. es verhalten sich die Drehwinkel der übereinanderliegenden Knotenpunkte ungefähr so wie die Quotienten aus den Beiwerten der δ -Glieder und der Diagonalglieder der zugehörigen Knotengleichungen.

In ähnlicher Weise erhält man für die Drehwinkel der nächsten Knotenreihe:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} : \varphi_{13} : \varphi_{16} : \varphi_{19} : \varphi_{22} &\doteq \frac{2,51}{16,06} : \frac{1,34}{10,53} : \frac{1,34}{10,33} : \frac{1,34}{9,89} : \frac{0,57}{4,29} \\ \text{oder} & \doteq 1 : 0,81 : 0,83 : 0,87 : 0,85. \end{aligned} \quad (362)$$

Somit können nun bereits die überzähligen Glieder in den Knotengleichungen ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \text{In der Knotengleichung } (\varphi_8): & 1,28 \varphi_{11} = 1,28 \cdot 1,65 \cdot \varphi_8 = 2,11 \varphi_8, \\ \text{„ „ „ „ } (\varphi_9): & 1,28 \varphi_{12} = 1,28 \cdot 0,89 \cdot \varphi_9 = 1,14 \varphi_9, \\ \text{„ „ „ „ } (\varphi_{10}): & 1,28 \varphi_{13} = 1,28 \cdot 0,81 \cdot \varphi_{10} = 1,04 \varphi_{10}. \end{aligned} \quad (363)$$

In derselben Weise sind auch die überzähligen Glieder der Verschiebungsgleichung zu ersetzen. Damit ergibt sich das „reduzierte Gleichungssystem“, aus dem die Ausgangsunkbepannten durch direkte Auflösung zu ermitteln sind. Die Bestimmung der übrigen Unbekannten erfolgt in der gewohnten Weise aus je *einer* Gleichung unter Benutzung der Verhältniszahlen nach (360) bis (362).

Für die Durchführung des *zweiten* Rechnungsganges kann ein einfacheres „reduziertes System“ gewählt werden (Abb. 271), für welches nur *drei* Unbekannte gemeinsam zu bestimmen sind, und zwar die Knotendrehwinkel φ_6 , φ_7 und die Verschiebung δ . Im *zweiten* Rechnungsgang wurden die Werte des *ersten* Rechnungsganges direkt verwendet, ohne von einer „relativen Schätzung“ im Sinne von (358) Gebrauch zu machen. Die Ergebnisse sind, wie aus den einzelnen Proben hervorgeht, durchaus befriedigend. Das Momentenbild ist in Abb. 435 dargestellt.

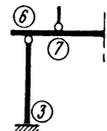


Abb. 271.
„Reduziertes System“ für den zweiten Rechnungsgang.

Verschiedene Methoden und Näherungsverfahren zur Berechnung von Rahmentragwerken.

In diesem Abschnitt gelangen zwei Verfahren zur Behandlung, die einander in mancher Hinsicht ähnlich sind und in gleicher Weise als praktisch genaue Methoden und als Näherungsberechnungen Anwendung finden können. Es sind dies die Festpunktmethode, die wohl zu den bekanntesten Berechnungsmethoden der Praxis zu zählen ist, und das in letzter Zeit in der Literatur öfter besprochene sog. Momentenverteilungsverfahren.¹ Allerdings wird die Anwendung der Festpunktmethode nur für *unverschiebliche* Tragwerke *ohne* Vouten gezeigt, da ihre Vorzüge auch nur in solchen Fällen zur Geltung kommen, während bei der Erläuterung des Momentenverteilungsverfahrens auch *verschiebliche* Tragwerke *mit veränderlichen* Querschnitten bzw. *mit Vouten* berücksichtigt werden.

I. Die Festpunktmethode in vereinfachter Anwendung auf unverschiebliche Tragwerke.

Es kann hier darauf verzichtet werden, die theoretischen Grundlagen der Festpunktmethode ausführlich zu behandeln, da dies bereits in vielen einschlägigen Werken und Abhandlungen mit großer Gründlichkeit geschehen ist.² Es sollen daher im folgenden nur jene Beziehungen kurz dargelegt werden, deren Kenntnis für die vereinfachte Anwendung dieser Methode notwendig erscheint.

1. Ermittlung der Festpunkte.

Allgemeines. Der Festpunkt F_1 eines Stabes 1—2 ist identisch mit dem Momentennullpunkt und Biegelinienwendepunkt dieses Stabes, wenn am Stabende 2 ein Moment $M_{2,1}$ angreift bzw. dort eine Verdrehung $\tau_{2,1}$ erfolgt. In Abb. 272 sind diese Beziehungen veranschaulicht. Die Lage des Festpunktes ist lediglich vom Verhältnis der Steifigkeit $k_{1,2}$ des Stabes zum Verdrehungswiderstand seines „Widerlagers“ bei 1 abhängig. Für diesen Verdrehungswiderstand ist aber nicht nur die Steifigkeit der „Widerlagerstäbe“ im Knoten 1 maßgebend, sondern auch der Einspanngrad an ihren gegenüberliegenden Stabenden. Für Stäbe mit konstantem Querschnitt tritt die Größe dieses Einflusses auf den Festpunktabstand a_1 am besten in Erscheinung, wenn zwei *Grenzfälle* ins Auge gefaßt werden.

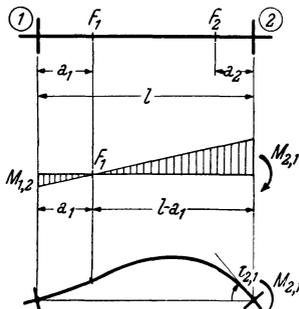


Abb. 272. Der Festpunkt F_1 als Momentennullpunkt und Biegelinienwendepunkt.

Sind also z. B. sämtliche im Knoten 1 zusammen-treffenden „Widerlagerstäbe“ des Rahmenstabes 1—2 auf ihrer Gegenseite fest eingespannt (Abb. 273a), dann wird

$$a_1 = \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,5k}{K}}. \quad (364)$$

¹ FORNEROD, M.: Berechnung mehrstöckiger Rahmen durch die Methode der algebraischen Momentenverteilung. Schweizerische Bauzeitung 1933. — DERNEDDE: Näherungsweise Berechnung von durchlaufenden Trägern und Rahmen. Bauingenieur 1938, u. a.

² SUTER, STRASSNER u. a. (Fußnote S. 54).

Sind hingegen alle im Knoten 1 zusammentreffenden „Widerlagerstäbe“ des Stabes 1—2 auf ihrer Gegenseite gelenkig angeschlossen. (Abb. 273 b), so wird

$$a_1 = \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,6k}{K}}. \quad (365)$$

Hierin bedeuten l die Länge des Stabes, dessen Festpunktabstand a_1 gesucht wird, k seine Steifigkeitszahl und $K = k_1 + k_2 + k_3$ bzw. allgemein

$$K = \sum k_w, \quad (366)$$

die Summe der Stabfestwerte der bei 1 steif angeschlossenen „Widerlagerstäbe“. Für die Stabfestwerte k brauchen natürlich auch hier im allgemeinen nicht die

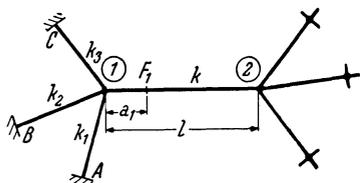


Abb. 273 a. Rahmenstab 1—2 mit fest eingespannten Widerlagerstäben bei A B C.

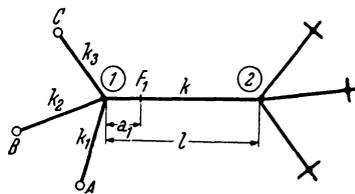


Abb. 273 b. Rahmenstab 1—2 mit gelenkig angeschlossenen Widerlagerstäben bei A B C.

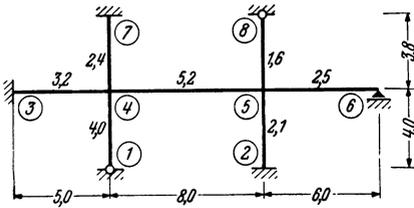
wahren Werte $\frac{2EJ}{l}$ gesetzt werden, sondern es kann hierfür wie früher wieder $\frac{1000J}{l}$ oder einfach $\frac{J}{l}$ Verwendung finden.

Durch die beiden Formeln (364) und (365) sind somit die größtmöglichen Schwankungen des Festpunktabstandes a_1 für jedes beliebige Steifigkeitsverhältnis $\frac{k}{K}$ bei verschiedenen Einspanngraden auf der Gegenseite der „Widerlagerstäbe“ festgelegt.

Hilfstafeln zur Bestimmung der Festpunkte. In der Zahlentafel 32 bzw. Kurventafel 32 a sind durch Auswertung von (364) und (365) diese beiden Grenzwerte in der Form $\frac{a}{l}$ für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse $\frac{k}{K}$ dargestellt. Gleichzeitig sind in diesen Tafeln auch die Mittelwerte zwischen den beiden Grenzfällen festgehalten. Diese Mittelwerte entsprechen etwa jenen Fällen, wo ein Teil der Widerlagerstäbe (mit dem Steifigkeitsanteil $\frac{K}{2}$) auf der Gegenseite fest eingespannt, der andere hingegen dort gelenkig angeschlossen ist oder aber, wo sämtliche Widerlagerstäbe auf der anderen Seite eine „mittlere“ elastische Einspannung zeigen usw.

Anwendung der Hilfstafeln. Mit Hilfe der Tafeln 32 oder 32 a können nun die Festpunktabstände für beliebige Stäbe eines Rahmentragwerkes mit hinreichender Genauigkeit sehr rasch bestimmt werden, ohne die Festpunkte der benachbarten Stäbe kennen zu müssen. Man braucht hierzu lediglich die Werte $\frac{k}{K}$. Wenn nicht einer der beiden Grenzfälle nach Gl. (364) oder (365) vorliegt, wird es in der Regel genügen, die gesuchten Werte $\frac{a}{l}$ einfach als „Mittelwerte“ zu entnehmen. Doch kann beim Ablesen dieser Werte ohne weiteres auch darauf Rücksicht genommen werden, ob die Einspanngrade der Widerlagerstäbe in ihrer Gesamtheit diesem Mittelwert ungefähr entsprechen oder ob die Ablesung mehr gegen den oberen bzw. den unteren Grenzwert zu verlegen ist.

Die praktische Anwendung dieser Tafeln soll für den Stab 4—5 des in Abb. 274 ersichtlichen Tragwerkes gezeigt werden. Es sind dort alle erforderlichen Längenabmessungen und auch die Stabfestwerte k eingetragen. Zur Ermittlung von $a_{4,5}$ braucht man den Steifheitssummenwert $K_{4,5}$ der Widerlagerstäbe für Stab 4—5, also $K_{4,5} = 4,0 + 3,2 + 2,4 = 9,6$; damit wird



$$\frac{k_{4,5}}{K_{4,5}} = \frac{5,2}{9,6} = 0,54.$$

Abb. 274. Beiwertschizze.

Die richtige Ablesung würde um ein geringes über dem Mittelwert liegen, da hier die Stäbe mit überwiegender Steifigkeitszahl *fest eingespannt* sind. Doch sind die Unterschiede der Grenzwerte in diesem Bereich sehr gering, so daß auch der der Mittellage entsprechende Wert $\frac{a}{l} = 0,254$ verwendet werden kann. Der genaue Wert beträgt 0,256.

Zur Bestimmung des rechten Festpunktabstandes $a_{5,4}$ benötigt man

$$K_{5,4} = 2,1 + 2,5 + 1,6 = 6,2$$

und
$$\frac{k_{5,4}}{K_{5,4}} = \frac{5,2}{6,2} = 0,84.$$

Die Ablesung in der Mittellage ergibt hier $\frac{a}{l} = 0,224$. Der genaue Wert beträgt 0,222 und liegt also etwas unter der Mittellage, da die Stäbe mit überwiegenden Steifigkeitszahlen *gelenkig* angeschlossen sind.

Zum Vergleich seien in folgenden auch die der Mittellage entsprechenden $\frac{a}{l}$ -Werte für alle übrigen Stäbe angeführt und den wahren Werten (in Klammern) gegenübergestellt:

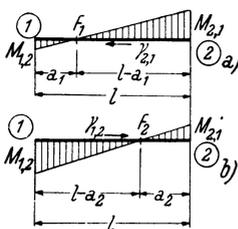
$$\frac{a_{4,1}}{l_{4,1}} = 0,274 (0,278); \quad \frac{a_{4,3}}{l_{4,3}} = 0,287 (0,287); \quad \frac{a_{4,7}}{l_{4,7}} = 0,300 (0,300);$$

$$\frac{a_{5,2}}{l_{5,2}} = 0,295 (0,294); \quad \frac{a_{5,6}}{l_{5,6}} = 0,287 (0,288); \quad \frac{a_{5,8}}{l_{5,8}} = 0,304 (0,305).$$

Die Abweichungen der einzelnen Werte sind somit geringfügig.

2. Ermittlung der Überleitungszahlen γ .

Wird auf den Rahmenstab 1—2 bei 2 ein Moment $M_{2,1}$ übertragen, so stellt sich der in Abb. 275 a ersichtliche Momentenverlauf mit dem Nullpunkt in F_1 ein.



Zwischen dem eingetragenen Moment $M_{2,1}$ und dem am anderen Stabende 1 entstehenden Moment $M_{1,2}$ besteht demnach folgende Beziehung:

$$M_{1,2} : M_{2,1} = a_1 : (l - a_1) \text{ bzw. } M_{1,2} = \frac{a_1}{l - a_1} \cdot M_{2,1} \quad (367)$$

oder

$$M_{1,2} = \gamma_{2,1} \cdot M_{2,1} \quad (368)$$

wobei

$$\gamma_{2,1} = \frac{a_1}{l - a_1}. \quad (369)$$

Abb. 275 a und b. Zur Bestimmung der „Überleitungszahlen“ γ .

Analog erhält man für die Überleitung eines Moments in entgegengesetzter Richtung (Abb. 275 b)

$$\gamma_{1,2} = \frac{a_2}{l - a_2}. \quad (369a)$$

Diese „Überleitungszahlen“ γ der Rahmenstäbe hängen also nur von der Lage der Festpunkte ab.

Geht man von den aus der Tafel 32 bzw. 32a zu entnehmenden Werten $\frac{a}{l} = \lambda$ aus, so kann die Formel (369) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\gamma_{2,1} = \frac{\lambda_1 \cdot l}{l - \lambda_1 \cdot l} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} \quad (369b)$$

bzw.

$$\gamma_{1,2} = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2}$$

Die „Überleitungszahlen“ γ können also sehr einfach aus den Festpunktständen a oder den Werten $\lambda = \frac{a}{l}$ bestimmt werden. Sie können aber auch sofort für die jeweiligen Steifigkeitsverhältnisse $\frac{k}{K}$ aus der Kurventafel 32a entnommen werden.

3. Bestimmung der Knotenverteilungszahlen μ .

Wird in einen unverschieblichen Rahmenknoten n durch einen belasteten Stab oder durch einen Kragarm (Abb. 276) ein Moment M übertragen, so treten in den übrigen dort steif angeschlossenen Stäben Gegenmomente auf, die in ihrer Summe dem Ausgangsmoment das Gleichgewicht halten. Die Verteilung des Ausgangsmoments auf die einzelnen Stäbe hängt von deren Verdrehungswiderständen ab. Sind alle diese Stäbe auf der Gegenseite fest eingespannt oder alle Stäbe dort gelenkig angeschlossenen oder aber alle in gleichem Maße elastisch eingespannt, so erfolgt diese Verteilung einfach im Verhältnis ihrer Steifigkeitswerte k . Es wird sich in solchen Fällen also z. B. die Verteilung des Kragmoments M in Abb. 276 auf die drei am anderen Ende fest eingespannten angenommenen „Widerlagerstäbe“ mit den Steifigkeitszahlen k_1, k_2, k_3 folgendermaßen ergeben:

$$M_{n,1} = -\frac{k_1}{K} \cdot M; \quad M_{n,2} = -\frac{k_2}{K} \cdot M; \quad M_{n,3} = -\frac{k_3}{K} \cdot M \quad (370)$$

wobei

$$K = k_1 + k_2 + k_3 \quad (371)$$

wie in (366) die Summe der Steifigkeitszahlen der Widerlagerstäbe bedeutet.

Es entfällt somit allgemein von dem zu verteilenden Moment $M_{n,m}$ auf einen Widerlagerstab $n-r$ der Anteil

$$\boxed{M_{n,r} = \mu_{n,r} \cdot M_{n,m}} \quad (372)$$

Hierin bedeutet also $\mu_{n,r}$ die *Knotenverteilungszahl* für den Stab $n-r$, und zwar ist

$$\mu_{n,r} = \frac{k_{n,r}}{K_{n,m}} \quad (373)$$

wobei unter $K_{n,m}$ die Summe der k -Werte der Widerlagerstäbe des belasteten Stabes $n-m$ zu verstehen ist.

Sind jedoch die Einspanngrade der einzelnen Widerlagerstäbe an ihren gegenüberliegenden Stabenden nicht durchwegs gleich, so liefert die in (372) angegebene

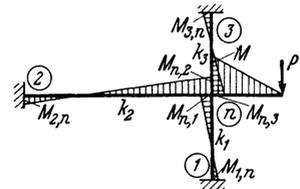


Abb. 276. Verteilung des Momentes M im Knoten n .

Verteilung nicht mehr die streng genauen Ergebnisse. Es ist dann der Fehler, der bei ihrer Anwendung begangen wird, um so größer, je mehr die einzelnen Einspanngrade voneinander verschieden sind. Er wird also am größten sein, wenn einzelne Stäbe gelenkig gelagert, die anderen aber fest eingespannt sind, und zwar ergeben sich dabei die Momente der fest eingespannten Stäbe etwas zu klein und die der gelenkig angeschlossenen etwas zu groß. Führt man in solchen Fällen jedoch bei Benutzung der Formeln (372) und (373) für die k -Werte der gelenkigen Stäbe die Werte $0,75 k$ in die Rechnung ein, so erhält man wieder fehlerfreie Ergebnisse.

Da nun aber die Fehler in normalen Fällen, wo die eben besprochenen Grenzfälle nicht vorliegen, nur verhältnismäßig gering sind, so wird man bei der Ermittlung der Knotenverteilungszahlen in der Regel auf die hier angedeutete Möglichkeit zur Verbesserung der Genauigkeit verzichten können.

Die auf Seite 2 festgelegte Vorzeichenregel für die Stabanschlußmomente kann auch hier mit Vorteil angewendet werden. Demnach erhalten also stets die Momentenanteile in einem Knoten das entgegengesetzte Vorzeichen des zu verteilenden Moments und das weitergeleitete Moment auf dem anderen Stabende aber durchwegs das gleiche Vorzeichen wie das überzuleitende. So ist z. B. in Abb. 276 das

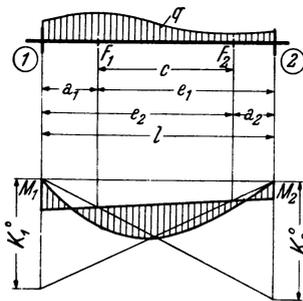


Abb. 277. Zur Bestimmung der „Ausgangsmomente“.

Kragmoment negativ, während die Momentenanteile $M_{n,1}, M_{n,2}, M_{n,3}$ positiv sein müssen. Ebenso sind auch alle durch Überleitung zu den anderen Stäben erhaltenen Momente ($M_{1,n}, M_{2,n}, M_{3,n}$) positiv.

4. Ermittlung der Ausgangsmomente des belasteten Rahmenstabes.

Bei der praktischen Anwendung der Festpunktmethode ist der Momentenverlauf im Tragwerk für jedes belastete Feld gesondert zu ermitteln. Zu diesem Zwecke müssen zunächst die „Ausgangsmomente“ im belasteten Feld bestimmt werden, die dann nach (372) auf die anschließenden Stäbe zu verteilen und nach (368) zu den benachbarten Knoten weiterzuleiten sind, dort wiederum verteilt werden usw. Die Ausgangsmomente eines von oben belasteten Rahmenstabes 1—2 ergeben sich mit den Bezeichnungen der Abb. 277 allgemein aus den bekannten Festpunktabständen a_1, a_2 und den Kreuzlinienabschnitten K_1^0, K_2^0 wie folgt:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{a_1}{cl} (K_2^0 \cdot e_2 - K_1^0 \cdot a_2) = -\frac{a_1}{c} \left[K_2^0 - \frac{a_2}{l} (K_1^0 + K_2^0) \right] \\ M_2 &= +\frac{a_2}{cl} (K_1^0 \cdot e_1 - K_2^0 \cdot a_1) = +\frac{a_2}{c} \left[K_1^0 - \frac{a_1}{l} (K_1^0 + K_2^0) \right]. \end{aligned} \tag{374}$$

Für eine symmetrische Belastung, wo also $K_1^0 = K_2^0 = K^0$ ist, vereinfachen sich diese Formeln zu:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{a_1 K^0}{cl} (l - 2a_2) \\ M_2 &= +\frac{a_2 K^0}{cl} (l - 2a_1). \end{aligned} \tag{375}$$

Die zur Auswertung der vorstehenden Ausdrücke erforderlichen Kreuzlinienabschnitte K_1^0 und K_2^0 bzw. K^0 für die verschiedenen Belastungsfälle sind in den Tafeln 2 bis 4 enthalten.

Zur Bestimmung der Einspannmomente bei symmetrisch belasteten Stäben kann jedoch mit Vorteil an Stelle der Formeln (375) die Zahlentafel 33 oder die graphische Tafel 33a benutzt werden. Man entnimmt z. B. aus der Zahlentafel 33 für die beiden bekannten Festpunktabstände $\left(\frac{a_1}{l}\right)$ und $\left(\frac{a_2}{l}\right)$ im Kreuzungspunkt der entsprechenden $\left(\frac{a}{l}\right)$ -Spalten und -Zeilen die Werte κ_1 und κ_2 und erhält damit sofort für einen von oben belasteten Rahmenstab 1—2

$$M_1 = -\frac{\kappa_1 K^0}{100}; \quad M_2 = +\frac{\kappa_2 K^0}{100}. \quad (376)$$

In gleicher Weise können die κ -Werte aus der graphischen Tafel 33a im Schnittpunkt der entsprechenden $\frac{a}{l}$ -Geraden als Koordinaten abgelesen werden, wie aus der schematischen Skizze Abb. 277 a hervorgeht.

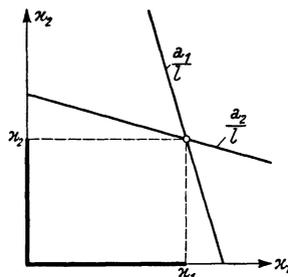


Abb 277 a. Schema der graphischen Tafel 33a zur Bestimmung der „Ausgangsmomente“ bei symmetrischer Belastung.

5. Beschreibung des Rechnungsganges bei Anwendung der Festpunktmethode auf unverschiebliche Tragwerke und Durchlaufträger.

Nach den vorangegangenen Darlegungen kann die Anwendung der Festpunktmethode bei Benutzung der entsprechenden Hilfstafeln in folgende Abschnitte gegliedert werden:

1. Ermittlung der Stabfestwerte k und der Summenwerte K nach (366).
2. Ermittlung der Festpunktabstände $\left(\frac{a}{l}\right)$ und Überleitungszahlen γ aus der Zahlentafel 32 bzw. Kurventafel 32a mit Hilfe der Verhältniswerte $\frac{k}{K}$.
3. Bestimmung der Knotenverteilungszahlen μ nach (373).
4. Ermittlung der „Ausgangsmomente“, und zwar bei unsymmetrischer Belastung nach (374), bei symmetrischer Belastung nach (375) oder aus der Zahlentafel 33 bzw. der Kurventafel 33a.
5. Verteilung und Weiterleitung der „Ausgangsmomente“ für jedes belastete Feld gesondert.
6. Ermittlung des endgültigen Momentenverlaufes durch Zusammenfassung der einzelnen Belastungsfälle.

Bei *Durchlaufträgern* sind die Verhältniswerte

$$\frac{k}{K} = \frac{k}{k_w}, \quad (377)$$

da immer nur *ein* Widerlagerstab vorhanden ist. Sind die Querschnitte in allen Feldern durchgehend konstant, so wird einfach

$$\frac{k}{k_w} = \frac{l_w}{l}, \quad (378)$$

wobei nach Abb. 278 k_w die Steifigkeitszahl und l_w die Länge des jeweiligen Widerlagerstabes bedeuten, während sich k und l auf den Stab beziehen, dessen Festpunkt ermittelt werden soll.

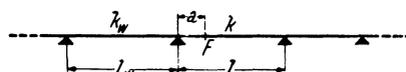


Abb. 278. Zur Festpunktbestimmung am Durchlaufträger.

Diese Methode eignet sich auch für flüchtige Näherungsberechnungen besonders gut. Wenn es z. B. darum geht, in einem umfangreichen unverschieblichen Tragwerk für irgendeinen Stab, der durch große Spannweiten oder Belastungen gekennzeichnet ist, den Momentenverlauf zu ermitteln, so kommt man damit sehr rasch zum Ziel. Das soll im folgenden an einem Beispiel gezeigt werden.

6. Anwendungsbeispiel.

Es soll für das in Abb. 279 ersichtliche unverschiebliche Rahmentragwerk der Momentenverlauf im Stab 6—7 für die angegebene Belastung näherungsweise ermittelt werden. Die Steifigkeitszahlen k der einzelnen Stäbe sind in der Skizze bereits eingetragen. Nach (366) ergibt sich für den Stab 6—7

$$K_{6,7} = 5,8 + 9,0 + 3,5 = 18,3; \quad K_{7,6} = 3,2 + 2,3 + 2,8 = 8,3;$$

somit wird
$$\frac{k_{6,7}}{K_{6,7}} = \frac{3,6}{18,3} = 0,197; \quad \frac{k_{7,6}}{K_{7,6}} = \frac{3,6}{8,3} = 0,434.$$

Mit diesen Werten können aus der Kurventafel 32a die Festpunktabstände in der Form

$$\frac{a_1}{l} = 0,299; \quad \frac{a_2}{l} = 0,266$$

entnommen werden. Damit erhält man aus der Tafel 33a: $\kappa_1 = 32,2$, $\kappa_2 = 24,6$,

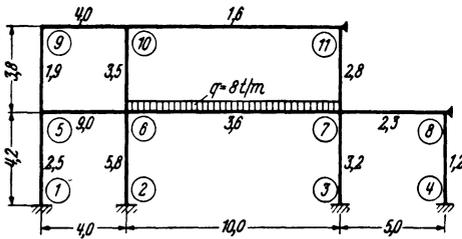


Abb. 279. Beiwertskizze mit Belastungsangaben.

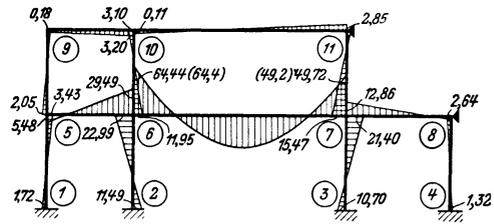


Abb. 280. Momentenverlauf.

Die gesuchten Stabendmomente sind daher nach (376) mit dem aus Tafel 2 entnommenen Kreuzlinienabschnitt $K^0 = \frac{q l^2}{4} = \frac{8 \cdot 10^2}{4} = 200 \text{ tm}$

$$M_{6,7} = - \frac{\kappa_1 \cdot K^0}{100} = - \frac{32,2 \cdot 200}{100} = - 64,4 \text{ tm};$$

$$M_{7,6} = + \frac{\kappa_2 \cdot K^0}{100} = + \frac{24,6 \cdot 200}{100} = + 49,2 \text{ tm}.$$

Wollte man diese Ausgangsmomente auf die Widerlagerstäbe in den Knoten 6 und 7 verteilen, so könnte dies näherungsweise nach (372) geschehen.

Zum Vergleich sind in Abb. 280 die hier ermittelten Näherungswerte (in Klammern) den nach einer genauen Berechnung erhaltenen Momenten gegenübergestellt.

II. Das Momentenverteilungsverfahren.

Dieses Verfahren, das in den letzten Jahren in der Literatur auch unter der Bezeichnung Cross-Methode oft behandelt worden ist,¹ stellt eigentlich ein Iterationsverfahren dar, bei dem die statische Deutung der einzelnen Rechenoperationen in allen Phasen stets klar sichtbar bleibt. Obzwar in der Rechnung selbst keine Formänderungsgrößen Verwendung finden, bestehen doch recht einfache und anschauliche Zusammenhänge mit dem Drehwinkelverfahren, so daß die ausführlichen Zahlen- und Kurventafeln im Dritten Teil dieses Buches besonders bei Tragwerken mit *Voutenstäben* auch für das Momentenverteilungsverfahren unmittelbar verwendet werden können. Auf diese Weise ergeben sich wieder bedeutende Vereinfachungen in der sonst ziemlich zeitraubenden Ermittlung aller zur Durchführung der zahlenmäßigen Berechnung erforderlichen Hilfswerte, wie im folgenden noch ausführlich dargelegt wird.

¹ Siehe Fußnote Seite 154.

1. Allgemeine Beschreibung des Verfahrens.

A. Unverschiebliche Tragwerke.

Man denkt sich zunächst sämtliche Stäbe des Tragwerkes *fest eingespannt*, also alle Knoten unverdrehbar festgehalten. Für diesen Zustand ermittelt man für die gegebene Belastung die Stabanschlußmomente, die also mit den beim „Drehwinkelverfahren“ verwendeten *Stabbelastungsgliedern* \mathfrak{M} (= Stabendmomente bei voller Einspannung) identisch sind. Nun denkt man sich die Verdrehungsbehinderung irgendeines Knotens n (am besten dort, wo die Momentensumme $\sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$ von Null sehr verschieden ist) beseitigt, während die volle Einspannung der Stäbe in allen übrigen Knoten zunächst unverändert bleibt. Es ergibt sich dann z. B. der in Abb. 281 schematisch dargestellte Fall, daß ein Rahmenknoten n , dessen Stäbe auf der Gegenseite fest eingespannt sind, durch ein Moment $M_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$ belastet wird.

Dieses Moment M_n , das mit dem beim Drehwinkelverfahren verwendeten *Knotenbelastungsglied* s_n identisch ist, verteilt sich nun im Verhältnis der Verdrehungswiderstände auf die einzelnen im Knoten n angeschlossenen Stäbe und pflanzt sich bis zu deren Einspannstellen 1, 2, 3, 4 fort.

Nun denkt man sich den zuerst betrachteten Knoten n , in dem die Momente soeben verteilt bzw. ausgeglichen wurden, wieder *unverdrehbar* festgehalten und einen anderen Knoten losgelassen. Es wiederholt sich derselbe Vorgang, wobei aber zu beachten ist, daß beim neuen Knoten der eventuell durch Weiterleitung bereits ermittelte Momentenanteil mit zu verteilen ist. In dieser Weise wird fortgeschritten, bis alle Momente, einschließlich der weitergeleiteten, in allen Knoten ausgeglichen sind. Durch Addition der einzelnen Beiträge für die Stabendmomente zu den entsprechenden Stabbelastungsgliedern \mathfrak{M} erhält man schließlich die endgültigen Momente für das *unverschiebliche* Tragwerk.

Die praktische Durchführung der Rechnung kann zur Erzielung einer besseren Übersicht in der Weise erfolgen, daß alle Zwischenwerte in eine vorbereitete Tabelle oder in einer Rahmenskizze an die Stabenden geschrieben werden.

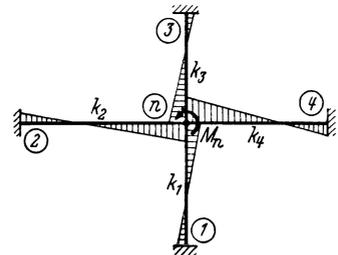


Abb. 281. Verteilung des Momentes M_n im Knoten n .

B. Verschiebliche Tragwerke.

In diesem Falle denkt man sich die einzelnen Knoten des Tragwerkes zunächst so festgehalten, daß sie weder Verdrehungen noch Verschiebungen erleiden können (Abb. 282). Für diesen Zustand können die Momente in der gleichen Art wie früher durch stufenweise Verteilung und Weiterleitung ermittelt und anschließend die Auflagerkräfte in den gedachten Lagern bestimmt werden. Diese „Festhaltekräfte“ können nun mit umgekehrtem Richtungssinn als äußere Kräfte auf das Tragwerk einwirkend angenommen werden. Der diesem Lastfall entsprechende M -Verlauf kann nun wieder schrittweise erhalten werden, indem man zunächst nur Verschiebungen, aber keine Verdrehungen der Knoten zuläßt (Abb. 283). Die dabei auftretenden Stabendmomente M_o und M_u in den Säulen der einzelnen Stockwerke sind nur abhängig vom „Stockwerkschub“ der äußeren Kräfte, also z. B. bei Stockwerkrahmen von der Summe der oberhalb des betreffenden Stockwerkes angreifenden waagrechten Kräfte, und von der Steifigkeit der einzelnen Säulen.

Nach der Ermittlung sämtlicher Säulendmomente ist die Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ in den einzelnen Knoten allerdings wieder gestört. Der vor-

zunehmende Ausgleich und die Weiterleitung der Momente geschieht nun abermals in der Weise, daß sämtliche Knoten neuerdings *unverschieblich* festgehalten werden und, wie anfangs beschrieben, nacheinander einzeln verdrehbar gemacht werden (Abb. 281). Nach Beendigung dieses Vorganges können die neuen nun schon bedeutend kleineren Festhaltekräfte ermittelt werden. Durch Wiederholung des Ver-

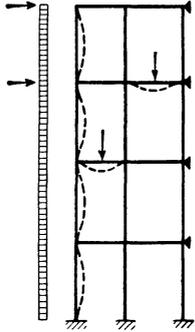


Abb. 282 a.

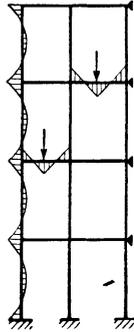


Abb. 282 b.

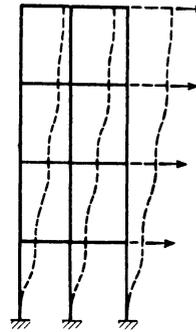


Abb. 283 a.

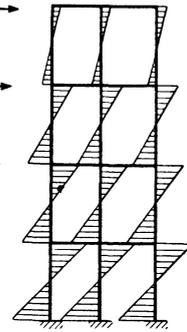


Abb. 283 b.

Abb. 282 a und b. Tragwerksverformung und M -Verlauf bei unverdrehbaren und unverschiebbaren Knoten.

Abb. 283 a und b. Tragwerksverformung und M -Verlauf infolge der umgekehrten „Festhaltekräfte“ bei unverdrehbaren aber verschiebbaren Knoten.

fahrens kann bei entsprechend sorgfältiger Rechnung die Genauigkeit der Ergebnisse beliebig gesteigert werden. Die Werte der so erhaltenen Momente sind dann als genau anzusehen, wenn sich keine Festhaltekräfte mehr ergeben und in allen Knotenpunkten die Bedingung $\sum M = 0$ erfüllt ist.

Es bestehen auch hier verschiedene Möglichkeiten zur Beschleunigung der bei verschieblichen Tragwerken mitunter langsamen Konvergenz dieses Verfahrens. Darauf wird jedoch hier nicht näher eingegangen; hingegen sollen im folgenden die zur Durchführung der Berechnung erforderlichen Formeln, Gleichungen und Hilfs-werte entwickelt und zusammengestellt werden, und zwar sowohl für Tragwerke mit beliebig *veränderlichen* Stabquerschnitten als auch für solche mit *Vouten* und solche mit feldweise *konstanten* Querschnitten.

2. Bestimmung der Momentenverteilungszahlen μ .

Die hier zu lösende Aufgabe besteht nach den früheren Darlegungen darin, ein im Knoten n angreifendes äußeres Moment M_n auf die dort steif angeschlossenen, in den gegenüberliegenden Enden fest eingespannten Stäbe mit bekannten Steifigkeitszahlen zu verteilen (Abb. 284).

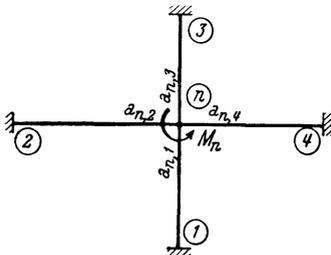


Abb. 284. Zur Verteilung von M_n im Knoten n .

Greift man auf die Knotengleichung (163) für *unverschiebliche* Tragwerke mit *veränderlichen* Stabquerschnitten zurück, so wird hier wegen $s_n = M_n$ und $\varphi_i = 0$

$$d_n \varphi_n + M_n = 0 \text{ und } \varphi_n = -\frac{M_n}{d_n}. \quad (379)$$

Damit erhält man nach Tafel II, Nr. 3d Seite 61 die Stabanschlußmomente in n :

$$M_{n,1} = a_{n,1} \cdot \varphi_n = -\frac{a_{n,1}}{d_n} \cdot M_n; \quad M_{n,2} = -\frac{a_{n,2}}{d_n} \cdot M_n \text{ usw.} \quad (380)$$

oder, da nach (164) $d_n = \sum_i a_{n,i}$, allgemein für einen Stab $n-i$:

$$M_{n,i} = - \frac{a_{n,i}}{\sum_i a_{n,i}} \cdot M_n = - \mu_{n,i} \cdot M_n \quad (381)$$

wobei

$$\mu_{n,i} = \frac{a_{n,i}}{\sum_i a_{n,i}}. \quad (382)$$

Die Verteilung des Moments M_n in einem Knoten n erfolgt also bei Stäben mit *veränderlichen* Stabquerschnitten im Verhältnis der Steifigkeitszahlen $a_{n,i}$. Diese Stabfestwerte a können für Stäbe mit geraden oder parabolischen Vouten aus den Zahlentafeln 5 bis 8 bzw. Kurventafeln 5a bis 8a entnommen werden.

Für Stäbe mit *konstanten* Querschnitten ist nach (19) $d_n = 2 \sum k_{n,i}$; sonach sind mit (379) nach Tafel I, Nr. 3d, Seite 4, die Stabanschlußmomente in n :

$$M_{n,1} = - \frac{2 k_{n,1}}{2 \sum_i k_{n,i}} \cdot M_n = - \frac{k_{n,1}}{\sum_i k_{n,i}} \cdot M_n; \quad M_{n,2} = - \frac{k_{n,2}}{\sum_i k_{n,i}} \cdot M_n \text{ usw.} \quad (383)$$

oder allgemein für einen Stab $n-i$:

$$M_{n,i} = - \frac{k_{n,i}}{\sum_i k_{n,i}} \cdot M_n. \quad (384)$$

Es ist hier also

$$\mu_{n,i} = \frac{k_{n,i}}{\sum_i k_{n,i}}, \quad (385)$$

d. h. die Momentenverteilung auf die im Knoten n angeschlossenen Stäbe mit *konstanten* Querschnitten erfolgt im Verhältnis ihrer Steifigkeitszahlen k .

3. Ermittlung der Überleitungszahlen γ .

Um nun die im Knoten n auf die einzelnen Stäbe verteilten Momente bis zu den gegenüberliegenden, fest eingespannten Stabenden weiterzuleiten, braucht man die sog. „Überleitungszahlen“ γ . Bei Stäben mit *konstanten* Querschnitten ist

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad (386)$$

da die Momentenlinie durch den in $\frac{l}{3}$ liegenden Festpunkt verläuft (Abb. 285).

Es ist also

$$M_{2,1} = \frac{1}{2} M_{1,2}, \quad (387)$$

wenn das Moment $M_{1,2}$ nach 2 weiterzuleiten ist.

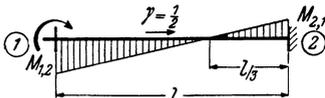


Abb. 285. Stab mit konstantem Querschnitt.

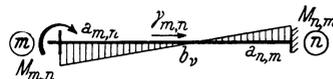


Abb. 286. Stab mit veränderlichen Querschnitten.

Handelt es sich nach Abb. 286 um beliebig *veränderliche* Stabquerschnitte, so verhalten sich nach (129) für einen Stab v mit einem fest eingespannten Ende n und einem drehbaren Ende m die beiden Endmomente

$$M_{m,n} : M_{n,m} = a_{m,n} : b_v.$$

Es ist somit

$$M_{n,m} = \frac{b_v}{\alpha_{m,n}} \cdot M_{m,n} = \gamma_{m,n} \cdot M_{m,n}. \tag{388}$$

Wenn also ein Moment $M_{m,n}$ zum fest eingespannten Stabende n weiterzuleiten ist, so beträgt die *Überleitungszahl* bei *veränderlichen* Stabquerschnitten

$$\gamma_{m,n} = \frac{b_v}{\alpha_{m,n}} \tag{389}$$

bzw. unter Beachtung von (126) auch

$$\gamma_{m,n} = \frac{\beta_v}{\alpha_{n,m}}. \tag{389a}$$

Bei symmetrisch ausgebildeten Stäben ist

$$\gamma_{m,n} = \gamma_{n,m} = \frac{b}{a} \tag{390}$$

bzw. auch

$$\gamma_{m,n} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{390a}$$

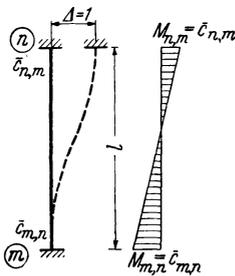
Für Tragwerke mit geraden oder parabolischen Vouten können die Stabfestwerte a und b aus den Tafeln 5 bis 8 oder 5a bis 8a, die Winkelwerte α und β aus den Tafeln 17 bis 20 oder 17a bis 20a entnommen werden.

4. Ermittlung der Ausgangsmomente \mathfrak{M} .

Es sind dies die Einspannmomente bei angenommener fester Einspannung der einzelnen Rahmenstäbe. Sie sind identisch mit den „Stabbelastungsgliedern“ \mathfrak{M} , die auch beim Drehwinkelverfahren gebraucht werden. Zu ihrer Ermittlung dienen für Stäbe mit *konstantem* Querschnitt die Tafeln 2 bis 4, für *Voutenstäbe* mit *gleichmäßiger Vollbelastung* die Tafeln 9 bis 12 oder 9a bis 12a, für *Voutenstäbe* mit *Einzelasten* die Einflußlinientafeln 13 bis 16 oder 13a bis 16a.

5. Bestimmung der Verschiebungsmomente für $\Delta = 1$ bei unverdrehbaren Knoten.

Für Stäbe mit *veränderlichen* Stabquerschnitten ist dieser Fall bereits in Gl. (130) erfaßt. Setzt man darin, noch $\psi = \frac{\Delta}{l}$ und weiter $\Delta = 1$, so ergibt sich (Abb. 287)



$$M_{m,n} = \frac{c_{m,n}}{l} = \bar{c}_{m,n} \tag{391}$$

$$M_{n,m} = \frac{c_{n,m}}{l} = \bar{c}_{n,m}.$$

Die c -Werte ergeben sich nach (122) bzw. (127) zu

$$c_{m,n} = a_{m,n} + b \tag{392}$$

$$c_{n,m} = a_{n,m} + b$$

und können somit ebenfalls mit Hilfe der bereits erwähnten Tafeln bestimmt werden.

Für Stäbe mit *konstantem* Querschnitt wird für $\Delta = 1$, $\varphi_m = \varphi_n = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ aus (10)

$$M_{m,n} = M_{n,m} = \frac{3k}{l} = \bar{k}. \tag{393}$$

Abb. 287. Verschiebungsmomente für $\Delta = 1$ bei unverdrehbaren Stabenden.

6. Ermittlung der Verteilungszahlen ω für die Verschiebungsmomente bei unverdrehbaren Knoten.

Zur Berechnung der Verschiebungsmomente M_o und M_u in einem Stockwerk mit dem „Stockwerkschub“ S , unter Annahme beliebig *veränderlicher* Stabquerschnitte und unverdrehbarer Knoten, können sehr einfache Ausdrücke gewonnen werden, wenn die für das Drehwinkelverfahren entwickelten allgemeinen *Verschiebungsgleichungen* für diesen Sonderfall (Abb. 288) ausgewertet werden. Es ist dabei zweckmäßig, *zwei* Fälle zu unterscheiden:

a) Stockwerke mit *verschieden* hohen Stielen: Aus Gl. (180) in Verbindung mit (124a) ergibt sich mit $\varphi_u = \varphi_o = 0$

$$\boxed{M_o = \omega_o \cdot S; \quad M_u = \omega_u \cdot S,} \tag{394}$$

wobei

$$\omega_o = \frac{\bar{c}_o}{\sum \frac{\bar{c}_o + \bar{c}_u}{l}} \quad \text{und} \quad \omega_u = \frac{\bar{c}_u}{\sum \frac{\bar{c}_o + \bar{c}_u}{l}}. \tag{395}$$

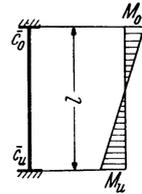


Abb. 288. Verschiebungsmomente M_o M_u bei unverdrehbaren Stabenden.

Die Summe bezieht sich auf alle Säulen des betrachteten Stockwerkes.

b) Stockwerke mit *gleich* hohen Stielen: In diesem Falle erhält man

$$\omega_o = \frac{c_o \cdot l}{\sum (c_o + c_u)} \quad \text{und} \quad \omega_u = \frac{c_u \cdot l}{\sum (c_o + c_u)}. \tag{396}$$

Die Bedeutung der c - bzw. \bar{c} -Werte ergibt sich aus (391) bzw. (392). Für symmetrisch ausgebildete Stäbe wird jeweils $\omega_o = \omega_u$ und damit auch $M_o = M_u$.

Bei Stäben mit *konstantem* Querschnitt erhält man

a) bei Stockwerken mit *verschieden* hohen Stielen:

$$\omega_o = \omega_u = \frac{\bar{k}}{2 \sum \frac{\bar{k}}{l}} \tag{397}$$

b) bei Stäben mit *gleich* hohen Stielen:

$$\omega_o = \omega_u = \frac{k l}{2 \sum k}. \tag{398}$$

Für Tragwerke mit lotrecht verschieblichen Knotenpunkten gelten bei bekanntem S analoge Beziehungen.

7. Anwendungsbeispiel für ein unverschiebliches Tragwerk.

Für das in Abb. 289 ersichtliche Tragwerk soll der Momentenverlauf für die gleichzeitig wirkenden Belastungen $q_1 = 5 \text{ t/m}$ und $q_2 = 4 \text{ t/m}$ mit Hilfe des Momentenverteilungsverfahrens bestimmt werden.

Für *Stab 1–3* mit der angenommenen starren Strecke bei 3 ist $J_o = 0,009 \text{ m}^4$; $J_A = \infty$, also $n = 0$; $\lambda = 0,10$, daher nach Tafel 5: $a_1 = 6,09$; $a_2 = 4,44$; $b = 2,96$, somit nach (147) $a_1 = 13,70$; $a_2 = 9,99$; $b = 6,66$.

Für *Stab 2–3* ist $J_o = 0,0072 \text{ m}^4$; $J_A = 0,0576 \text{ m}^4$, also $n = 0,125$; $\lambda = 0,25$, daher nach Tafel 7a: $a = 9,24$; $b = 6,33$, somit nach (147) $a = 8,32$; $b = 5,70$; und nach Tafel 11a: $\kappa = 1,22$, daher $\mathfrak{M}_{2,3} = -32,53 \text{ tm}$; $\mathfrak{M}_{3,2} = +32,53 \text{ tm}$.

Für *Stab 3–4* ist $J_o = 0,0072 \text{ m}^4$; $J_A = 0,0576 \text{ m}^4$, also $n = 0,125$; $\lambda = 0,30$, und damit nach Tafel 5a: $a_1 = 8,35$; $a_2 = 4,71$; $b = 3,72$, somit nach (147) $a_1 = 10,02$; $a_2 = 5,65$; $b = 4,46$; und nach Tafel 9a: $\kappa_1 = 1,57$; $\kappa_2 = 0,755$, daher $\mathfrak{M}_{3,4} = -18,84 \text{ tm}$; $\mathfrak{M}_{4,3} = +9,06 \text{ tm}$.

Für *Stab 3–5* ist $J_o = J_A = 0,00521 \text{ m}^4$, also $n = 1$; $\lambda = 0$, und damit nach Tafel 5: $a = 4,0$; $b = 2,0$, somit nach (147) $a = 5,95$; $b = 2,98$.

Die Stabfestwerte sind in der Beiwertskizze Abb. 290 eingetragen.
Das im Knoten 3 zu verteilende Moment ist somit hier

$$M_3 = s_3 = \sum_i M_{3,i} = + 32,53 - 18,84 = + 13,69 \text{ tm.}$$

Nach (381) erhält man mit

$$\sum a_{3,i} = d_3 = 13,70 + 5,95 + 10,02 + 8,32 = 37,99$$

folgende Anteile:

$$M'_{3,1} = -\mu_{3,1} \cdot M_3 = -\frac{a_{3,1}}{d_3} \cdot M_3 = -\frac{13,70}{37,99} \cdot 13,69 = -4,94 \text{ tm;}$$

$$M'_{3,2} = -\mu_{3,2} \cdot M_3 = -\frac{a_{3,2}}{d_3} \cdot M_3 = -\frac{8,32}{37,99} \cdot 13,69 = -3,00 \text{ tm;}$$

$$M'_{3,4} = -\mu_{3,4} \cdot M_3 = -\frac{10,02}{37,99} \cdot 13,69 = -3,61 \text{ tm;}$$

$$M'_{3,5} = -\mu_{3,5} \cdot M_3 = -\frac{5,95}{37,99} \cdot 13,69 = -2,14 \text{ tm.}$$

Diese Momentenanteile sind nun jeweils auf das andere Stabende mittels der Überleiterschzahlen γ weiterzuleiten.

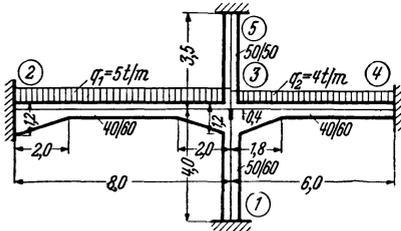


Abb. 289. Tragwerksabmessungen und Belastungsangaben.

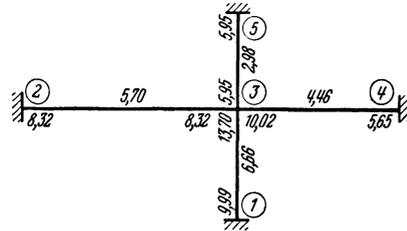


Abb. 290. Beiwertskizze.

Nach (388) bzw. (389) erhält man:

$$M'_{1,3} = \gamma_{3,1} \cdot M'_{3,1} = \frac{b_{3,1}}{a_{3,1}} \cdot M'_{3,1} = -\frac{6,66}{13,70} \cdot 4,94 = -2,40 \text{ tm;}$$

$$M'_{2,3} = \gamma_{3,2} \cdot M'_{3,2} = \frac{b_{3,2}}{a_{3,2}} \cdot M'_{3,2} = -\frac{5,70}{8,32} \cdot 3,00 = -2,05 \text{ tm;}$$

$$M'_{4,3} = \gamma_{3,4} \cdot M'_{3,4} = \frac{b_{3,4}}{a_{3,4}} \cdot M'_{3,4} = -\frac{4,46}{10,02} \cdot 3,61 = -1,61 \text{ tm;}$$

$$M'_{5,3} = \gamma_{3,5} \cdot M'_{3,5} = \frac{b_{3,5}}{a_{3,5}} \cdot M'_{3,5} = -\frac{2,98}{5,95} \cdot 2,14 = -1,07 \text{ tm.}$$

Durch Addition der bisher erhaltenen Teilbeträge der einzelnen Stabendmomente zu den jeweiligen Stabbelastungsgliedern M ergeben sich hier bereits die endgültigen Werte:

$$\begin{array}{ll} M_{1,3} = & = - 2,40 \text{ tm;} & M_{3,1} = & = - 4,94 \text{ tm;} \\ M_{2,3} = & - 2,05 - 32,53 = - 34,58 \text{ ,,;} & M_{3,2} = & - 3,00 + 32,53 = + 29,53 \text{ ,,;} \\ M_{4,3} = & - 1,61 + 9,06 = + 7,45 \text{ ,,;} & M_{3,4} = & - 3,61 - 18,84 = - 22,45 \text{ ,,;} \\ M_{5,3} = & = - 1,07 \text{ ,,;} & M_{3,5} = & = - 2,14 \text{ ,,;} \end{array}$$

Zur Probe und zum Vergleich seien nun anschließend die Momente für den vorliegenden Fall auch nach dem *Drehwinkelverfahren* berechnet. Es erscheinen dadurch auch die direkten Zusammenhänge der beiden Berechnungsarten besonders augenfällig. Nach (163) lautet die Knotengleichung für den vorliegenden Fall

$$d_3 \varphi_3 + s_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_3 = -\frac{s_3}{d_3} = -\frac{13,69}{37,99} = -0,36.$$

Damit ergeben sich nach (125) die Stabendmomente:

$$\begin{aligned}
 M_{1,3} &= -6,66 \cdot 0,36 &= -2,40 \text{ tm}; & M_{3,1} &= -13,70 \cdot 0,36 &= -4,94 \text{ tm}; \\
 M_{2,3} &= -5,70 \cdot 0,36 - 32,53 &= -34,58 \text{ „}; & M_{3,2} &= -8,32 \cdot 0,36 + 32,53 &= +29,53 \text{ „}; \\
 M_{4,3} &= -4,46 \cdot 0,36 + 9,06 &= +7,45 \text{ „}; & M_{3,4} &= -10,02 \cdot 0,36 - 18,84 &= -22,45 \text{ „}; \\
 M_{5,3} &= -2,98 \cdot 0,36 &= -1,07 \text{ „}; & M_{3,5} &= -5,95 \cdot 0,36 &= -2,14 \text{ „}.
 \end{aligned}$$

In Abb. 291 sind diese Momente maßstäblich aufgetragen. Ein Vergleich der beiden Rechnungsarten zeigt, daß in beiden Fällen zwar ähnliche Rechenoperationen

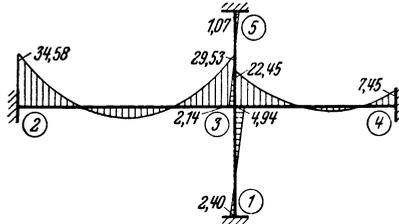


Abb. 291. Momentenverlauf.

zur Anwendung kommen, daß man aber nach dem Drehwinkelverfahren die Endergebnisse mit einem geringeren Aufwand an statischen Überlegungen und Zahlenrechnungen erhalten kann.

Zweiter Teil.

Zahlenbeispiele.

Vorbemerkung.

Bei der Auswahl der Zahlenbeispiele wurde stets darauf Bedacht genommen, daß zunächst die *einfacheren* Rahmentragwerke zur Behandlung gelangen und dann erst allmählich die *schwierigeren* Fälle folgen. Es soll dabei vor allem gezeigt werden, wie die im Ersten Teil des Buches beschriebenen Berechnungsverfahren praktisch anzuwenden sind und wie die zahlenmäßige Durchführung der Berechnung am zweckmäßigsten und vorteilhaftesten erfolgt.

Um auch den zahlenmäßigen Einfluß der Vouten auf die Momentenverteilung bei den im Bauwesen gebräuchlichen Tragwerken zu veranschaulichen und gleichzeitig auch die Art und den Umfang der Berechnungsweise mit und ohne Voutenwirkung gegenüberstellen und vergleichen zu können, wurden in den folgenden zwei Abschnitten einzelne Rahmenformen mit denselben Belastungen zuerst *ohne* und dann *mit Vouten* behandelt.

Die notwendigen Erläuterungen des Rechenganges werden nur in Schlagworten gegeben, um die Übersicht über die eigentliche Zahlenrechnung nicht durch allzu viel Text zu stören. Da aber doch größter Wert darauf zu legen ist, überall den Zusammenhang mit dem Ersten Teil des Buches zu wahren, so wird bei allen zur Anwendung gelangenden Gleichungen und Formeln durch Nummernangaben auf den Textteil hingewiesen. Wo es wünschenswert erscheint, wird außerdem auch auf einschlägige Abschnitte noch besonders aufmerksam gemacht, um ein Nachschlagen im Text zu erleichtern und ein eingehenderes Studium der mit den Beispielen zusammenhängenden allgemeinen Fragen anzuregen.

Erster Abschnitt.

Rahmentragwerke ohne Vouten.

Bei allen folgenden Beispielen, die dem Stahlbetonbau entlehnt sind, wurde für die Ermittlung der Trägheitsmomente J vorwiegend die Hilfstafel 1 benutzt. Bei Rahmentragwerken aus Stahl und Holz können die Werte J in der Regel aus Tabellen der gebräuchlichen Handbücher entnommen werden. Die Berechnung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} erfolgte stets nach den für die verschiedensten Belastungsfälle zusammengestellten Formeln der Tafeln 2, 3, 4. Die Stabfestwerte k werden immer tabellarisch ermittelt, und zwar meist nach (24) in der verzerrten Form $k = \frac{1000J}{l}$. Bei der zahlenmäßigen Bestimmung der Werte k , \mathfrak{M} und M , sowie bei der Auflösung der Gleichungen erzielt man in der Regel mit dem gewöhnlichen Rechenstab hinreichend genaue Ergebnisse.

I. Unverschiebliche Tragwerke.

Zahlenbeispiel 1 (vgl. auch Nr. 14).

Rahmenteil mit Kragarm. Feste Einspannung in den Knotenpunkten 1, 3, 4, daher $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$. Es ist somit nur *eine* Unbekannte zu bestimmen, nämlich φ_2 . Die Stablängen und Querschnittsabmessungen sind aus Abb. 292, die Belastungsangaben aus Abb. 293 zu entnehmen.

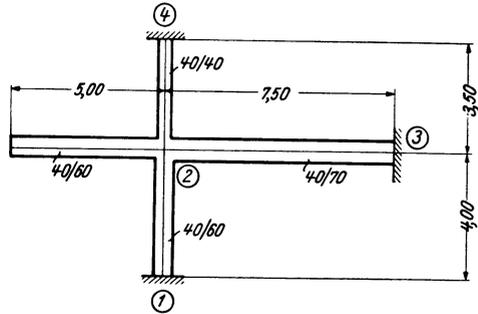


Abb. 292. Tragwerksabmessungen.

Festwerttabelle 1.

Stab	Querschnitt b/h(cm)	Trägheitsmoment J(m ⁴)	Länge l(m)	$k = \frac{1000 J}{l}$
1-2	40/60	0,00720	4,00	1,80
2-3	40/70	0,01143	7,50	1,52
2-4	40/40	0,00213	3,50	0,61

Die k -Werte sind in der Beiwertschizze Abb. 294 eingetragen.

Diagonalglied d_2 .

Nach (19) ist allgemein

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

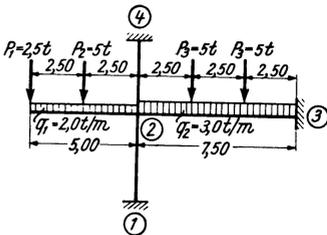


Abb. 293. Belastungsangaben.

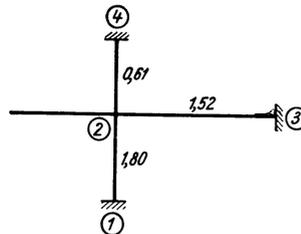


Abb. 294. Beiwertschizze.

daher laut Beiwertschizze (Abb. 294)

$$d_2 = 2 (1,80 + 1,52 + 0,61) = 7,86.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} (siehe Abb. 293).

Stab 2-3. Nach den Tafeln 2 bzw. 4 erhält man

$$\mathfrak{M}_{2,3}^{(q_2)} = - \frac{q l^2}{12} = - \frac{3,0 \cdot 7,5^2}{12} = - 14,06 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{3,2}^{(q_2)} = + 14,06 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{2,3}^{(P_3)} = - \frac{2 P l}{9} = - \frac{2 \cdot 5 \cdot 7,5}{9} = - 8,33 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{3,2}^{(P_3)} = + 8,33 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{2,3} = - 22,39 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{3,2} = + 22,39 \text{ tm}.$$

Kragarm.

$$M_{2,k} = + 2,0 \cdot \frac{5,0^2}{2} + 2,5 \cdot 5,0 + 5,0 \cdot 2,5 = + 50,00 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglied s_2 .

Nach (20) ist allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum_k M_k$$

daher

$$s_2 = \mathfrak{M}_{2,3} + M_{2,k} = - 22,39 + 50,00 = + 27,61 \text{ tm}.$$

Knotengleichung.

Nach (18) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Da sämtliche dem Knoten 2 benachbarten Knotendrehwinkel Null sind, so ergibt sich einfach:

$$d_2 \varphi_2 + s_2 = 0 \text{ oder } 7,86 \varphi_2 + 27,61 = 0$$

und daraus

$$\varphi_2 = -\frac{27,61}{7,86} = -3,51.$$

Momente.

Nach (14) ist für einen Stab 1–2:

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2) + M_{1,2}.$$

Damit erhält man unter Zuhilfenahme der Beiwertskizze:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= -1,80 \cdot 3,51 &&= -6,32 \text{ tm} \\ M_{2,1} &= -2 \cdot 1,80 \cdot 3,51 &&= -12,64 \text{ „} \\ M_{2,3} &= -2 \cdot 1,52 \cdot 3,51 - 22,39 &&= -33,06 \text{ „} \\ M_{2,4} &= -2 \cdot 0,61 \cdot 3,51 &&= -4,28 \text{ „} \\ M_{3,2} &= -1,52 \cdot 3,51 + 22,39 &&= +17,05 \text{ „} \\ M_{4,2} &= -0,61 \cdot 3,51 &&= -2,14 \text{ „} \end{aligned}$$

Das zugehörige Momentenbild ist in Abb. 295 ersichtlich.

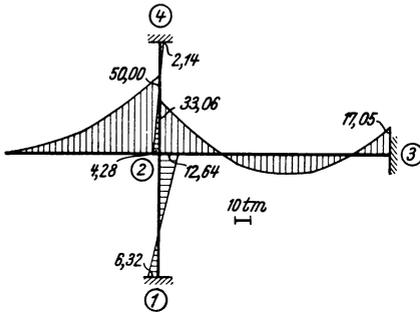


Abb. 295. Momentenverlauf.

Zahlenbeispiel 2 (vgl. auch Nr. 15).

Zweifeldiger Unterzug in steifer Verbindung mit den Säulen des darunter- und darüberliegenden Stockwerkes (Abb. 296). Feste Einspannung in den Knoten-

punkten 1, 2, 3, 7, 8, 9, seitlich unverschieblich festgehalten, daher nur drei Unbekannte, und zwar $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Belastungs- und Maßangaben siehe Abb. 296 und 297.

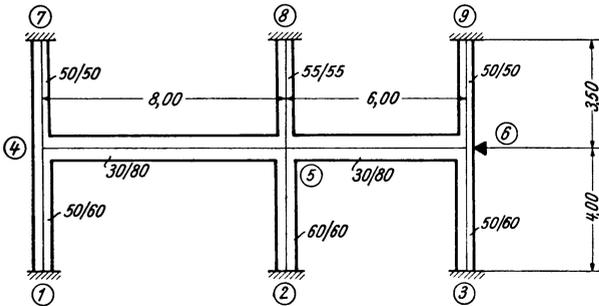


Abb. 296. Tragwerksabmessungen.

Die k -Werte sind in der Beiwertskizze Abb. 298 eingetragen.

Diagonalglieder d .

Nach (19) ist allgemein

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}.$$

Festwerttabelle 2.

Stab	Querschnitt b/h (cm)	Trägheitsmoment J (m ⁴)	Länge l (m)	$k = \frac{1000 J}{l}$
1–4	50/60	0,00900	4,0	2,25
2–5	60/60	0,01080	4,0	2,70
4–5	30/80	0,01280	8,0	1,60
5–6	30/80	0,01280	6,0	2,13
4–7	50/50	0,00521	3,5	1,49
6–9	50/60	0,00900	4,0	2,25
5–8	55/55	0,00763	3,5	2,18

Damit erhält man unter Zuhilfenahme der Beiwertskizze:

$$\begin{aligned} d_4 &= 2(2,25 + 1,60 + 1,49) &&= 10,68 \\ d_5 &= 2(2,70 + 1,60 + 2,13 + 2,18) &&= 17,22 \\ d_6 &= 2(2,25 + 2,13 + 1,49) &&= 11,74. \end{aligned}$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 4–5. Nach den Tafeln 2 bzw. 4 erhält man:

$$\mathfrak{M}_{4,5}^{(q_1)} = -\frac{q l^2}{12} = -\frac{4,0 \cdot 8,0^2}{12} = -21,30 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,4}^{(q_1)} = +21,30 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{4,5}^{(P_1)} = -\frac{P \cdot a b^2}{l^2} = -\frac{5 \cdot 5,0 \cdot 3,0^2}{8,0^2} = -3,51 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{5,4}^{(P_1)} = +\frac{5 \cdot 5^2 \cdot 3}{8,0^2} = +5,87 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -24,81 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,4} = +27,17 \text{ tm}.$$

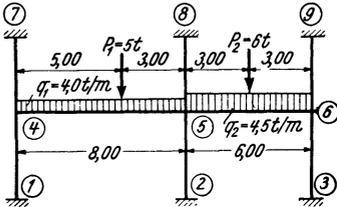


Abb. 297. Belastungsangaben.

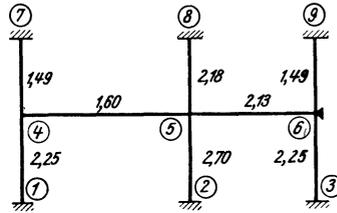


Abb. 298. Beiwertskeizze.

Stab 5–6 (siehe Tafel 2 bzw. 4).

$$\mathfrak{M}_{5,6}^{(q_2)} = -\frac{q l^2}{12} = -\frac{4,5 \cdot 6,0^2}{12} = -13,5 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{6,5}^{(q_2)} = +13,5 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,6}^{(P_2)} = -\frac{P \cdot l}{8} = -\frac{6 \cdot 6,0}{8} = -4,5 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{6,5}^{(P_2)} = +4,5 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -18,0 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{6,5} = +18,0 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (20a) ist allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

$$s_4 = -24,81 \text{ tm};$$

$$s_5 = +27,17 - 18,0 = +9,17 \text{ tm};$$

$$s_6 = +18,0 \text{ tm}.$$

Knotengleichungen.

Nach (18) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Damit können unter gleichzeitiger Benutzung der Beiwertskeizze die Gleichungen für die drei Knotenpunkte 4, 5, 6 unmittelbar in Form einer Tabelle angeschrieben werden (siehe Gleichungstabelle 2).

Daraus erhält man durch Auflösung nach Tafel 29 oder 30

$$\varphi_4 = +2,41; \quad \varphi_5 = -0,58; \quad \varphi_6 = -1,43.$$

Momente.

Nach (14) ist allgemein für einen Stab 1–2:

$$M_{1,2} = k (2 \varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Entnimmt man die entsprechenden k -Werte aus der Beiwertskeizze, so erhält man durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$M_{1,4} = 2,25 \cdot 2,41 = +5,42 \text{ tm} \quad M_{4,1} = 2,25 \cdot 2 \cdot 2,41 = +10,84 \text{ tm}$$

$$M_{2,5} = -2,70 \cdot 0,58 = -1,57 \text{ ,,} \quad M_{4,5} = 1,6 (2 \cdot 2,41 - 0,58) - 24,81 = -18,03 \text{ ,,}$$

$$M_{3,6} = -2,25 \cdot 1,43 = -3,22 \text{ ,,} \quad M_{4,7} = 1,49 \cdot 2 \cdot 2,41 = +7,18 \text{ ,,}$$

Gleichungstabelle 2.

	φ_4	φ_5	φ_6	B
φ_4	10,68	1,60		-24,81
φ_5	1,60	17,22	2,13	+9,17
φ_6		2,13	11,74	+18,0

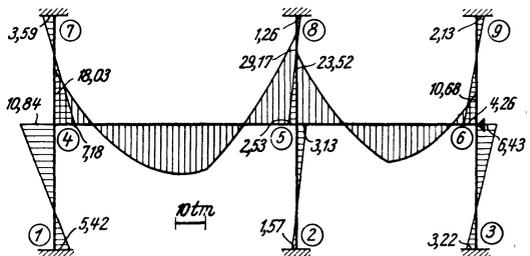


Abb. 299. Momentenverlauf.

und ebenso:

$$\begin{aligned}
 M_{5,2} &= - 3,13 \text{ tm} & M_{6,3} &= - 6,43 \text{ tm} & M_{7,4} &= + 3,59 \text{ tm} \\
 M_{5,4} &= + 29,17 \text{ ,,} & M_{6,5} &= + 10,68 \text{ ,,} & M_{8,5} &= - 1,26 \text{ ,,} \\
 M_{5,6} &= - 23,52 \text{ ,,} & M_{6,9} &= - 4,26 \text{ ,,} & M_{9,6} &= - 2,13 \text{ ,,} \\
 M_{5,8} &= - 2,53 \text{ ,,} & & & &
 \end{aligned}$$

Das zugehörige Momentenbild ist in Abb. 299 ersichtlich.

Zahlenbeispiel 3.

Symmetrischer Dachrahmen mit fest eingespannten Säulenfüßen. Abmessungen des Tragwerkes und Belastungsangaben siehe Abb. 300a, b. Wegen symmetrischer Belastung treten keine Knotenverschiebungen auf, außerdem ist $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$, so daß

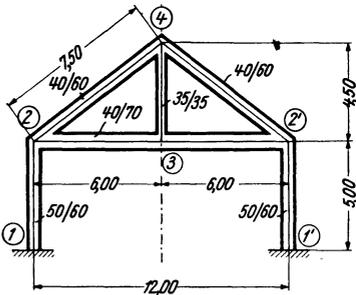


Abb. 300a. Tragwerksabmessungen.

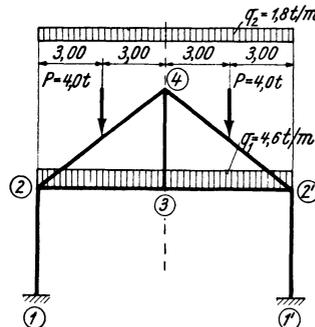


Abb. 300b. Belastungsangaben.

Festwerttabelle 3.

Stab	Querschnitt $b/h(\text{cm})$	Trägheitsmoment $J(\text{m}^4)$	Länge $l(\text{m})$	$k = \frac{1000 J}{l}$
1-2	50/60	0,00900	5,0	1,80
2-3	40/70	0,01143	6,0	1,90
2-4	40/60	0,00720	7,5	0,96

nur eine Unbekannte, nämlich $\varphi_2 = -\varphi_2'$ zu bestimmen ist.

Die k -Werte sind in der Beiwertskizze Abb. 301 eingetragen.

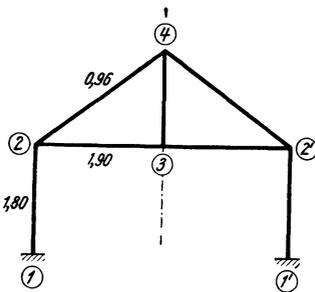


Abb. 301. Beiwertskizze.

Diagonalglied d_2 .

Nach (19) ist allgemein

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

also $d_2 = 2 (1,80 + 1,90 + 0,96) = 9,32$.

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} (siehe Tafel 2 bzw. 4).

$$\mathfrak{M}_{2,3} = - \frac{4,6 \cdot 6,0^2}{12} = - 13,8 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{3,2} = + 13,8 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{2,4}^{(q_2)} = - \frac{1,8 \cdot 6,0^2}{12} = - 5,4 \text{ ,,}$$

$$\mathfrak{M}_{2,4}^{(P)} = - \frac{4,0 \cdot 6,0}{8} = - 3,0 \text{ ,,}$$

$$\mathfrak{M}_{2,4} = \mathfrak{M}_{2,4}^{(q_2)} + \mathfrak{M}_{2,4}^{(P)} = - 5,4 - 3,0 = - 8,4 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{4,2} = + 8,4 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglied s_2 .

Nach (20a) ist allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

daher

$$s_2 = \mathfrak{M}_{2,3} + \mathfrak{M}_{2,4} = - 13,8 - 8,4 = - 22,2 \text{ tm}.$$

Knotengleichung.

Nach (18) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Da hier alle Drehwinkel φ_i der dem Knotenpunkt 2 benachbarten Rahmenknoten gleich Null sind, so wird einfach:

$$d_2 \varphi_2 + s_2 = 0 \quad \text{oder} \quad 9,32 \varphi_2 - 22,2 = 0$$

und daraus

$$\varphi_2 = + \frac{22,2}{9,32} = + 2,38.$$

Momente.

Nach (14) wird allgemein für einen Stab 1–2:

$$M_{1,2} = k (2 \varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Mit Benutzung der Beiwertschizze (Abb. 301) erhält man durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= + 1,80 \cdot 2,38 &&= + 4,28 \text{ tm} \\ M_{2,1} &= + 2 \cdot 1,80 \cdot 2,38 &&= + 8,56 \text{ „} \\ M_{2,3} &= + 2 \cdot 1,90 \cdot 2,38 - 13,8 &&= - 4,76 \text{ „} \\ M_{2,4} &= + 2 \cdot 0,96 \cdot 2,38 - 8,4 &&= - 3,83 \text{ „} \\ M_{3,2} &= + 1,90 \cdot 2,38 + 13,8 &&= + 18,33 \text{ „} \\ M_{4,2} &= + 0,96 \cdot 2,38 + 8,4 &&= + 10,69 \text{ „} \end{aligned}$$

Das zugehörige Momentenbild siehe Abb. 302.

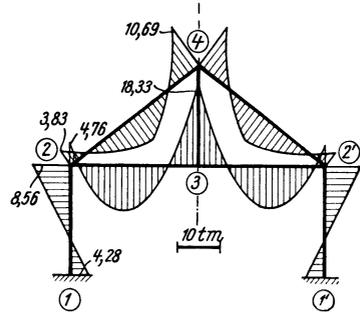


Abb. 302. Momentenverlauf.

Zahlenbeispiel 4 (vgl. auch Nr. 16).

Symmetrischer zweistöckiger, dreistieliger Rahmen mit fest eingespannten Stielen (siehe Abb. 303 und 304). Wegen symmetrischer Belastung treten keine Knotenverschiebungen auf, außerdem wird $\varphi_4 = 0$, so daß nur *zwei* Unbekannte zu bestimmen sind, und zwar

$$\varphi_3 = - \varphi_3' \quad \text{und} \\ \varphi_5 = - \varphi_5'.$$

Die k -Werte sind in der Beiwertschizze Abb. 305 eingetragen.

Diagonalglieder d .

Nach (19) ist allgemein

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

also

$$d_3 = 2 (4,16 + 1,25 + 3,22) = 17,26; \\ d_5 = 2 (3,22 + 2,10) = 10,64.$$

Da es sich aber hier um ein symmetrisches Tragwerk handelt, bei welchem die Symmetrale durch die Mitte des Stabes 5–5' hindurchgeht, so ist an Stelle von d_5 nach (50)

$$d_{5'} = d_5 - k_{5,5'} = 10,64 - 2,10 = 8,54$$

zu setzen (siehe Erster Teil, erster Abschnitt, IV, 3, c).

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 3–4 (siehe Tafel 2 bzw. 4).

Festwerttabelle 4.

Stab	Querschnitt b/h (cm)	Trägheitsmoment J (m ⁴)	Länge l (m)	$k = \frac{1000 J}{l}$
1–3	45/75	0,01582	3,80	4,16
3–4	45/60	0,00810	6,50	1,25
3–5	45/70	0,01286	4,00	3,22
5–5'	45/90	0,02734	13,00	2,10

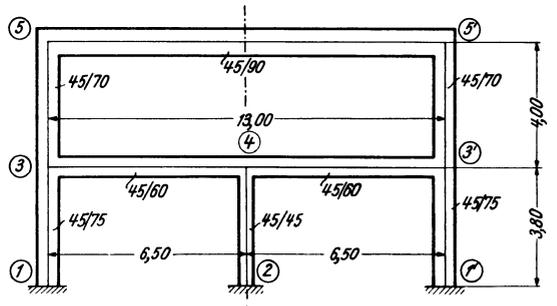


Abb. 303. Tragwerksabmessungen.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{3,4}^{(q_1)} &= -\frac{q l^2}{12} = -\frac{4,0 \cdot 6,5^2}{12} = -14,10 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{4,3}^{(q_1)} = +14,10 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{3,4}^{(P_1)} &= -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = -\frac{7,0 \cdot 2,6 \cdot 3,9^2}{6,5^2} = -6,55 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{4,3}^{(P_1)} = +\frac{7,0 \cdot 2,6^2 \cdot 3,9}{6,5^2} = +4,37 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{3,4}^{(P_2)} &= -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = -\frac{7,0 \cdot 5,2 \cdot 1,3^2}{6,5^2} = -1,46 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{4,3}^{(P_2)} = +\frac{7,0 \cdot 5,2^2 \cdot 1,3}{6,5^2} = +5,83 \text{ ,,}; \\ &\mathfrak{M}_{3,4} = -22,11 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{4,3} = +24,30 \text{ tm}. \end{aligned}$$

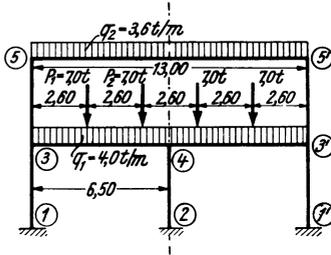


Abb. 304. Belastungsangaben.

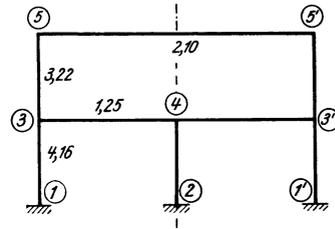


Abb. 305. Beiwertskizze.

Stab 5-5'.

$$\mathfrak{M}_{5,5'} = -\frac{3,6 \cdot 13,0^2}{12} = -50,7 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5',5} = +50,7 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (20a) ist allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

daher

$$s_3 = \mathfrak{M}_{3,4} = -22,11 \text{ tm}; \quad s_5 = \mathfrak{M}_{5,5'} = -50,70 \text{ tm}.$$

Knotengleichungen.

Nach (18) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Damit erhält man die beiden Gleichungen für die Knotenpunkte 3 und 5:

$$\begin{aligned} 17,26 \varphi_3 + 3,22 \varphi_5 - 22,11 &= 0, \\ 3,22 \varphi_3 + 8,54 \varphi_5 - 50,70 &= 0. \end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt:

$$\varphi_3 = +0,186; \quad \varphi_5 = +5,87,$$

Momente.

Nach (14) ist

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

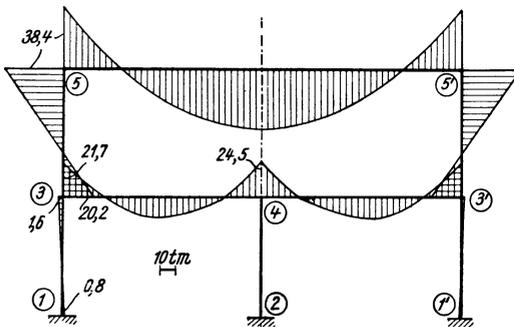


Abb. 306. Momentenverlauf.

Damit erhält man unter Benutzung der Beiwertskizze (Abb. 305):

$$\begin{aligned} M_{1,3} &= 4,16 \cdot 0,186 = +0,775 \text{ tm} \\ M_{3,1} &= 2 \cdot 4,16 \cdot 0,186 = +1,55 \text{ ,,} \\ M_{3,4} &= 2 \cdot 1,25 \cdot 0,186 - 22,11 = -21,65 \text{ ,,} \\ M_{3,5} &= 3,22(2 \cdot 0,186 + 5,87) = +20,15 \text{ ,,} \\ M_{4,3} &= 1,25 \cdot 0,186 + 24,30 = +24,53 \text{ ,,} \\ M_{5,3} &= 3,22(2 \cdot 5,87 + 0,186) = +38,42 \text{ ,,} \\ M_{5,5'} &= 2,10 \cdot 5,87 - 50,70 = -38,37 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Das zugehörige Momentenbild ist aus Abb. 306 ersichtlich.

Zahlenbeispiel 5.

Verteiliger Zellenstilo mit Rechteckgrundriß (Abb. 307). Es sind die waagrecht wirkenden Momente für den in Abb. 308 ersichtlichen Belastungsfall zu ermitteln. Die Berechnung erfolgt für einen Zellenstreifen von 100 cm Höhe und 20 cm Dicke unter der Annahme unverschieblicher Knotenpunkte. Wegen der Symmetrie des Tragwerkes kann hier für die unsymmetrischen Belastungsfälle das BU.-Verfahren mit Vorteil angewendet werden (siehe Erster Teil, erster Abschnitt, IV, 5).

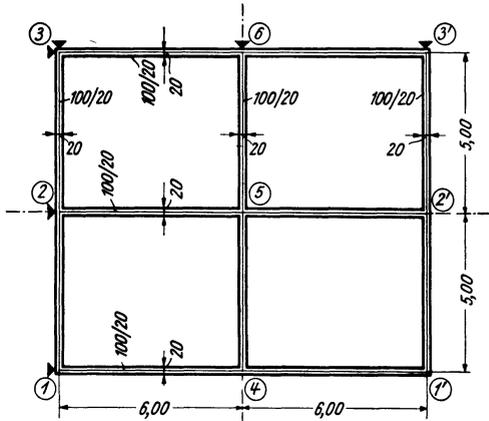


Abb. 307. Tragwerksabmessungen.

Festwerttabelle 5.

Stab	Querschnitt $b/h(\text{cm})$	Trägheitsmoment $J(\text{m}^4)$	Länge $l(\text{m})$	$k = \frac{10}{l}$
1-2-3, 4-5-6	100/20	0,00067	5,00	2,00
1-4, 2-5, 3-6	100/20	0,00067	6,00	1,66

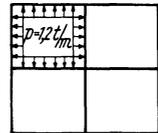


Abb. 308. Belastungsangaben.

Die k -Werte sind in der Beiwertschizze Abb. 309 eingetragen, wobei sinngemäß nach (22) $z = \frac{10}{2 E J}$.

Der *gegebene* unsymmetrische Belastungsfall p wird ersetzt durch einen *symmetrischen* mit $+\frac{p}{2}$ (Abb. 310a) und einen *antisymmetrischen* mit $\pm \frac{p}{2}$ (Abb. 310b). Für den symmetrischen Fall werden $\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0$, so daß nur *drei* Unbekannte, und zwar $\varphi_1 = -\varphi_1', \varphi_2 = -\varphi_2', \varphi_3 = -\varphi_3'$ gemeinsam zu bestimmen sind. Für den antisymmetrischen Fall sind jedoch *sechs* Unbekannte, nämlich $\varphi_1 = \varphi_1', \varphi_2 = \varphi_2', \varphi_3 = \varphi_3', \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ gemeinsam zu ermitteln.

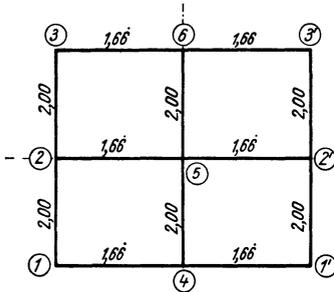


Abb. 309. Beiwertschizze.

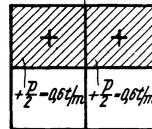


Abb. 310 a.

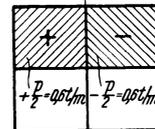


Abb. 310 b.

Abb. 310 a und b. Symmetrische und antisymmetrische Ersatzbelastung.

a) Symmetrischer Fall (Abb. 310a).

Diagonalglieder d .

Aus der Beiwertschizze ergibt sich durch Anwendung von (19)

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

$$d_1 = d_3 = 2(2,00 + 1,66) = 7,33; \quad d_2 = 2(2,00 + 2,00 + 1,66) = 11,33.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Für $\frac{p}{2} = 0,6 \text{ t/m}$ wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{2,3} &= + \frac{0,6 \cdot 5,0^2}{12} = + 1,25 \text{ tm}; & \mathfrak{M}_{3,2} &= - 1,25 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{2,5} &= - \frac{0,6 \cdot 6,0^2}{12} = - 1,80 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{5,2} &= + 1,80 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{3,6} &= + \frac{0,6 \cdot 6,0^2}{12} = + 1,80 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{6,3} &= - 1,80 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (20a) ist allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}.$$

Daher:

$$s_2 = + 1,25 - 1,80 = - 0,55 \text{ tm}; \quad s_3 = - 1,25 + 1,80 = + 0,55 \text{ tm}.$$

Knotengleichungen.

Nach (18) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

An Hand der Beiwertskeizze (Abb. 309) kann durch wiederholte Anwendung dieses Ausdruckes die Gleichungstabelle 5a (symmetrischer Fall).

Gleichungstabelle 5a (symmetrischer Fall).

	φ_1	φ_2	φ_3	B
φ_1	+ 7,33	+ 2,00		—
φ_2	+ 2,00	+ 11,33	+ 2,00	- 0,55
φ_3		+ 2,00	+ 7,33	+ 0,55

Daraus erhält man:

$$\varphi_1 = - 0,0186,$$

$$\varphi_2 = + 0,0683,$$

$$\varphi_3 = - 0,0936.$$

b) Antimetrischer Fall (Abb. 310b):

Diagonalglieder d .

Den sechs Unbekannten entsprechend sind auch *sechs* Diagonalglieder zu bestimmen. Es empfiehlt sich hier, nur eine Hälfte des gesamten Tragwerkes in Betracht zu ziehen (Abb. 311). Dabei ist für die in der Symmetrale gelegenen Stäbe $\frac{k}{2} = 1,0$ anzunehmen (vgl. Erster Teil, erster Abschnitt, IV, 5).

Aus der Beiwertskeizze (Abb. 311) ist ersichtlich, daß d_1, d_2, d_3 gegenüber früher unverändert bleiben:

$$d_1 = d_3 = 7,33; \quad d_2 = 11,33.$$

Neu zu bestimmen sind daher nur d_4, d_5, d_6 . Nach $d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$ wird:

$$d_4 = d_6 = 2 (1,6\ddot{6} + 1,0) = 5,33,$$

$$d_5 = 2 (1,0 + 1,6\ddot{6} + 1,0) = 7,33.$$

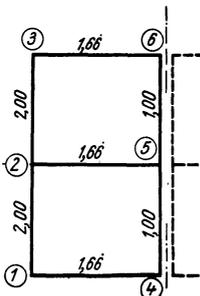


Abb. 311. Beiwertskeizze für antimetrische Belastung.

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Nach der Belastungsskeizze Abb. 310b erhält man unter Beachtung, daß nur eine Tragwerkshälfte in Betracht zu ziehen ist, dieselben Werte wie früher, nämlich:

$$\mathfrak{M}_{2,3} = + 1,25 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{2,5} = - 1,80 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{3,6} = + 1,80 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{5,6} = - 1,25 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{3,2} = - 1,25 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,2} = + 1,80 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{6,3} = - 1,80 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5} = + 1,25 \text{ ,,}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (20a) $s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$ erhält man für eine Tragwerkshälfte:

$$\begin{aligned} s_2 &= -0,55 \text{ tm}; & s_5 &= +1,80 - 1,25 = +0,55 \text{ tm}; \\ s_3 &= +0,55 \text{ ,,}; & s_6 &= -1,80 + 1,25 = -0,55 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Knotengleichungen.

An Hand der Beiwertskeizze Abb. 311 können ähnlich wie früher die Gleichungen wieder in Tabellenform angeschrieben werden.

Gleichungstabelle 5b (antimetrischer Fall).

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	B
φ_1	+ 7,33	+ 2,00		+ 1,66			—
φ_2	+ 2,00	+ 11,33	+ 2,00		+ 1,66		— 0,55
φ_3		+ 2,00	+ 7,33			+ 1,66	+ 0,55
φ_4	+ 1,66			+ 5,33	+ 1,00		—
φ_5		+ 1,66		+ 1,00	+ 7,33	+ 1,00	+ 0,55
φ_6			+ 1,66		+ 1,00	+ 5,33	— 0,55

Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -0,0344; & \varphi_4 &= +0,0342; \\ \varphi_2 &= +0,0978; & \varphi_5 &= -0,1252; \\ \varphi_3 &= -0,1404; & \varphi_6 &= +0,1704. \end{aligned}$$

Durch einfaches Summieren der Unbekannten aus den beiden Fällen a und b ergeben sich die gesuchten φ -Werte für den Belastungsfall nach Abb. 308. Diese Rechnung wird in folgender Tabelle durchgeführt.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_1'	φ_2'	φ_3'
Symmetr. Belastung..	-0,0186	+0,0683	-0,0936	—	—	—	+0,0186	-0,0683	+0,0936
Antimet. Belastung..	-0,0344	+0,0978	-0,1404	+0,0342	-0,1252	+0,1704	-0,0344	+0,0978	-0,1404
Gesamtbelastung . . .	-0,0530	+0,1661	-0,2340	+0,0342	-0,1252	+0,1704	-0,0158	+0,0295	-0,0468

Momente für Gesamtbelastung $p = 1,2 \text{ t/m}$ in einer Zelle.

Nach (14) ist

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Da die bisher verwendeten Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} nur für $\frac{p}{2} = 0,6 \text{ t/m}$ berechnet waren, sind diese zur Momentenermittlung für $p = 1,2 \text{ t/m}$ zu verdoppeln. Es ergeben sich durch wiederholte Anwendung der vorstehenden Formel:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= +0,120 \text{ tm} & M_{4,1} &= +0,026 \text{ tm} & M_{1',2'} &= -0,004 \text{ tm} \\ M_{1,4} &= -0,120 \text{ ,,} & M_{4,1'} &= +0,088 \text{ ,,} & M_{1',4} &= +0,004 \text{ ,,} \\ & & M_{4,5} &= -0,114 \text{ ,,} & & \\ M_{2,1} &= +0,558 \text{ tm} & M_{5,4} &= -0,432 \text{ tm} & M_{2',1'} &= +0,086 \text{ tm} \\ M_{2,3} &= +2,696 \text{ ,,} & M_{5,6} &= -2,660 \text{ ,,} & M_{2',3'} &= +0,024 \text{ ,,} \\ M_{2,5} &= -3,255 \text{ ,,} & M_{5,2'} &= -0,368 \text{ ,,} & M_{2',5} &= -0,110 \text{ ,,} \\ & & M_{5,2} &= +3,459 \text{ ,,} & & \\ M_{3,2} &= -3,104 \text{ tm} & M_{6,5} &= +2,931 \text{ tm} & M_{3',2'} &= -0,128 \text{ tm} \\ M_{3,6} &= +3,104 \text{ ,,} & M_{6,3'} &= +0,490 \text{ ,,} & M_{3',6} &= +0,128 \text{ ,,} \\ & & M_{6,3} &= -3,422 \text{ ,,} & & \end{aligned}$$

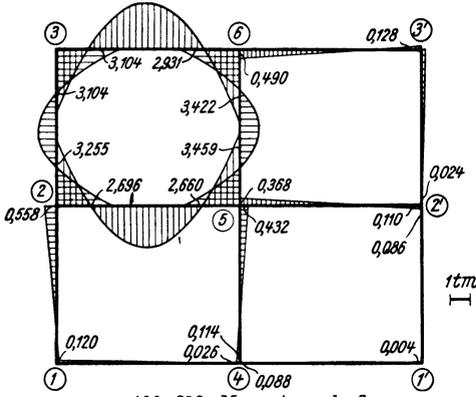


Abb. 312. Momentenverlauf.

Der Momentenverlauf ist aus Abb. 312 ersichtlich.

Aus den Ergebnissen des hier behandelten Belastungsfalles können sehr einfach die Momente für beliebige andere Belastungsfälle ermittelt werden. Sind z. B. gleichzeitig zwei *anliegende* Zellen belastet, so erhält man den zugehörigen Momentenverlauf durch einfache Spiegelung und Überlagerung der in Abb. 312 dargestellten Momente. Sind zwei diagonal *gegenüberliegende* Zellen belastet, so denkt man sich das in Abb. 312 ersichtliche Momentenbild in der Zeichenebene um 180° gedreht und überlagert es wiederum mit dem ursprünglichen Momentenverlauf.

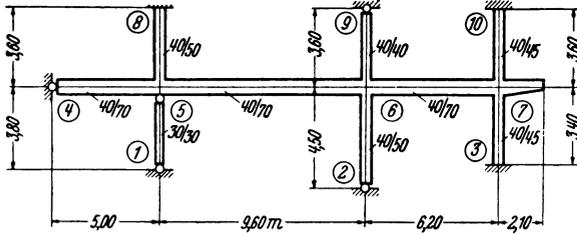


Abb. 313. Tragwerksabmessungen.

Zahlenbeispiel 6.

Dreifeldiger Unterzug mit den Säulen des darunter- und darüberliegenden Stockwerkes. Abmessungen und Belastung siehe Abb. 313 und 314. Die Säulen sind zum Teil gelenkig und zum Teil steif angeschlossen. Nur drei Unbekannte, nämlich $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$, da

weder die festen Einspannungen in 3, 8, 10, noch die gelenkigen Lagerungen in 1, 2, 4, 9 Unbekannte für die Rechnung liefern und der Riegel gegen seitliche Verschiebungen festgehalten ist.

Die k -Werte sind in der Beiwertschizze Abb. 315 eingetragen.

Festwerttabelle 6.

Stab	Querschnitt $b/h(\text{cm})$	Trägheitsmoment $J(\text{m}^4)$	Länge $l(\text{m})$	$k = \frac{1000 J}{l}$
2—6	40/50	0,00417	4,5	0,93
3—7	40/45	0,00304	3,4	0,89
4—5	40/70	0,01143	5,0	2,29
5—6	40/70	0,01143	9,6	1,19
6—7	40/70	0,01143	6,2	1,84
5—8	40/50	0,00417	3,6	1,16
6—9	40/40	0,00213	3,6	0,59
7—10	40/45	0,00304	3,6	0,84

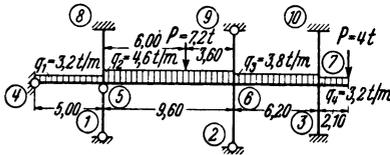


Abb. 314. Belastungsangaben.

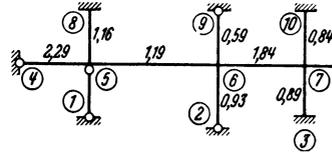


Abb. 315. Beiwertschizze.

Diagonalglieder d und d^0 .

Für die Knoten 5 und 6 mit Stäben, die auf der Gegenseite gelenkig angeschlossen sind, ist nach (30)

$$d_n^0 = d_n - 0,5 \sum_g k_{n,g}$$

Somit unter Zuhilfenahme der Beiwertschizze:

$$d_5^0 = 2 (2,29 + 1,16 + 1,19) - 0,5 \cdot 2,29 = 8,13,$$

$$d_6^0 = 2 (1,19 + 0,59 + 1,84 + 0,93) - 0,5 (0,59 + 0,93) = 8,34.$$

Für Knoten 7 wird nach (19)

$$d_7 = 2 (1,84 + 0,84 + 0,89) = 7,14.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 4—5. Nach Tafel 2 erhält man:

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{3,2 \cdot 5,0^2}{12} = -6,67 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,4} = +6,67 \text{ tm}.$$

Stab 5—6. (Siehe Tafel 2 bzw. 4.)

$$\mathfrak{M}_{5,6}^{(a_2)} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{4,6 \cdot 9,6^2}{12} = -35,33 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{6,5}^{(a_2)} = +35,33 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,6}^{(P)} = -\frac{Pab^2}{l^2} = -\frac{7,2 \cdot 6,0 \cdot 3,6^2}{9,6^2} = -6,08 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5}^{(P)} = +\frac{7,2 \cdot 6,0^2 \cdot 3,6}{9,6^2} = +10,13 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -35,33 - 6,08 = -41,41 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5} = +35,33 + 10,13 = +45,46 \text{ tm}.$$

Stab 6—7. (Siehe Tafel 2.)

$$\mathfrak{M}_{6,7} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{3,8 \cdot 6,2^2}{12} = -12,17 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{7,6} = +12,17 \text{ tm}.$$

Kragarm.

$$M_{7,k} = -\frac{3,2 \cdot 2,1^2}{2} - 4 \cdot 2,1 = -15,5 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Für Knoten 5 gilt nach (31) allgemein

$$s_n^0 = s_n - 0,5 \sum_g \mathfrak{M}_{g,n},$$

somit $s_5^0 = s_5 - 0,5 \mathfrak{M}_{4,5} = +6,67 - 41,41 + 0,5 \cdot 6,67 = -31,41 \text{ tm}.$

Für die Knoten 6 und 7 ist nach (20) allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum_k M_k,$$

daher $s_6 = \mathfrak{M}_{6,5} + \mathfrak{M}_{6,7} = +45,46 - 12,17 = +33,29 \text{ tm};$
 $s_7 = \mathfrak{M}_{7,6} + M_k = +12,17 - 15,50 = -3,33 \text{ ,, .}$

Knotengleichungen.

Für die Knoten 5 und 6 gilt nach (29)

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r k_{n,r} \varphi_r + s_n^0 = 0,$$

hingegen für Knoten 7 nach (18)

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Damit können unter Benutzung der Beiwertskeizze die Gleichungen für die drei Knotenpunkte 5, 6, 7 unmittelbar in Form einer Tabelle angeschrieben werden (siehe Gleichungstabelle 6).

Die Auflösung der Gleichungen ergibt:

$$\varphi_5 = +4,60; \quad \varphi_6 = -5,04; \quad \varphi_7 = +1,765.$$

Gleichungstabelle 6.

	φ_5	φ_6	φ_7	B
φ_5	+ 8,13	+ 1,19		- 31,41
φ_6	+ 1,19	+ 8,34	+ 1,84	+ 33,29
φ_7		+ 1,84	+ 7,14	- 3,33

Momente:

Für einen Stab 1—2 ohne Gelenke ist nach (14)

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Für einen Stab mit Gelenk bei 2 ist nach Seite 4, Formel 2 c

$$M_{1,2} = 1,5 k \varphi_1 + \mathfrak{M}_{1,2} - 0,5 \mathfrak{M}_{2,1}$$

Die entsprechende Anwendung dieser Formeln ergibt an Hand der Beiwertskeizze:

$$\begin{aligned} M_{5,4} &= 1,5 \cdot 2,29 \cdot 4,60 + 6,67 + 0,5 \cdot 6,67 = + 25,81 \text{ tm} \\ M_{5,6} &= 1,19 (2 \cdot 4,60 - 5,04) - 41,41 = - 36,45 \text{ ,,} \\ M_{5,8} &= 1,16 \cdot 2 \cdot 4,60 = + 10,67 \text{ ,,} \\ M_{6,5} &= 1,19 (-2 \cdot 5,04 + 4,60) + 45,46 = + 38,94 \text{ ,,} \\ M_{6,7} &= 1,84 (-2 \cdot 5,04 + 1,765) - 12,17 = - 27,46 \text{ ,,} \\ M_{6,9} &= - 1,5 \cdot 0,59 \cdot 5,04 = - 4,46 \text{ ,,} \\ M_{6,2} &= - 1,5 \cdot 0,93 \cdot 5,04 = - 7,03 \text{ ,,} \\ M_{7,6} &= 1,84 (2 \cdot 1,765 - 5,04) + 12,17 = + 9,40 \text{ ,,} \\ M_{7,10} &= 0,84 \cdot 2 \cdot 1,765 = + 2,97 \text{ ,,} \\ M_{7,3} &= 0,89 \cdot 2 \cdot 1,765 = + 3,14 \text{ ,,} \\ M_{8,5} &= 1,16 \cdot 4,60 = + 5,34 \text{ ,,} \\ M_{10,7} &= 0,84 \cdot 1,765 = + 1,48 \text{ ,,} \\ M_{3,7} &= 0,89 \cdot 1,765 = + 1,57 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Das zugehörige Momentenbild ist aus Abb. 316 ersichtlich.

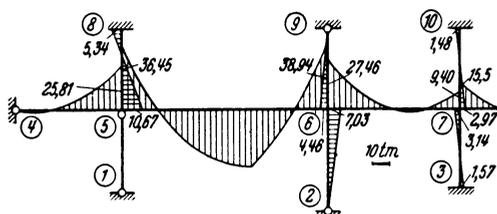


Abb. 316. Momentenverlauf.

II. Verschiebliche Tragwerke.

Zahlenbeispiel 7.

Dreischiffiger Shedrahmen (Abb. 317). Säulenfüße fest eingespannt, also $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$. Längen-, Querschnitts- und Belastungsangaben siehe

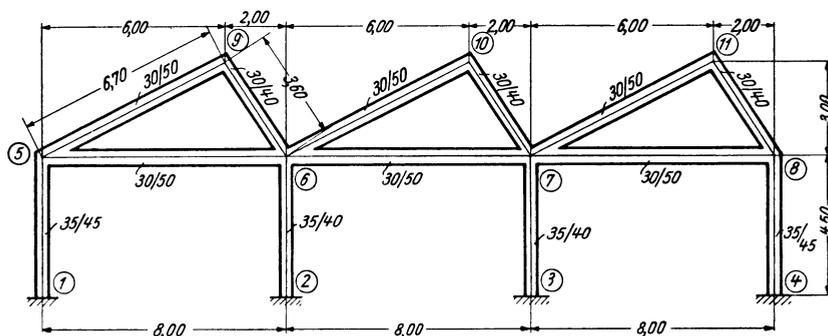


Abb. 317. Tragwerksabmessungen.

Abb. 317 und 318. Unbekannte: *Sieben* Knotendrehwinkel $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}, \varphi_{11}$ und ein Stabdrehwinkel ψ .

Festwerttabelle 7.

Stab	Querschnitt b/h (cm)	Trägheitsmoment J (m ⁴)	Länge l (m)	$k = \frac{1000 J}{l}$
1-5, 4-8	35/45	0,00266	4,50	0,59
2-6, 3-7	35/40	0,00187	4,50	0,42
5-6-7-8	30/50	0,00313	8,00	0,39
5-9, 6-10, 7-11	30/50	0,00313	6,70	0,47
6-9, 7-10, 8-11	30/40	0,00160	3,60	0,44

Die k -Werte sind in der Beiwertskeizze Abb. 319 eingetragen.

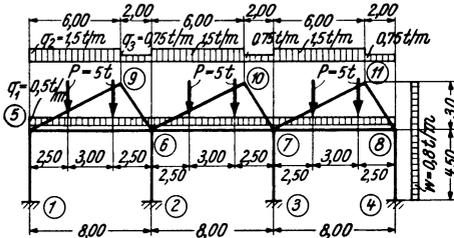


Abb. 318. Belastungsangaben.

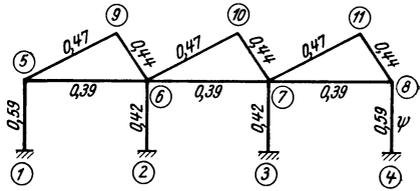


Abb. 319. Beiwertskeizze.

Diagonalglieder d und D .

Nach (35) ist allgemein

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

also

$$\begin{aligned} d_5 &= 2(0,59 + 0,39 + 0,47) = 2,90, \\ d_6 = d_7 &= 2(0,42 + 0,39 + 0,39 + 0,44 + 0,47) = 4,22, \\ d_8 &= 2(0,59 + 0,39 + 0,44) = 2,84, \\ d_9 = d_{10} = d_{11} &= 2(0,47 + 0,44) = 1,82. \end{aligned}$$

Nach (48) ist allgemein

$$D_\mu = 6 \sum_\mu k$$

also

$$D = 6(2 \cdot 0,59 + 2 \cdot 0,42) = 12,12.$$

a) Lotrechte Lasten.

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Nach Tafel 2 bzw. 4 erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{5,6} = \mathfrak{M}_{6,7} = \mathfrak{M}_{7,8} &= -\frac{q_1 l^2}{12} - \frac{P \cdot a(l-a)}{l} = -\frac{0,5 \cdot 8,0^2}{12} - \frac{5,0 \cdot 2,5 \cdot 5,5}{8,0} = \\ &= -2,66 - 8,60 = -11,26 \text{ tm}; \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}_{6,5} = \mathfrak{M}_{7,6} = \mathfrak{M}_{8,7} = +11,26 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,9} = \mathfrak{M}_{6,10} = \mathfrak{M}_{7,11} = -\frac{1,5 \cdot 6,0^2}{12} = -4,50 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{9,5} = \mathfrak{M}_{10,6} = \mathfrak{M}_{11,7} = +4,50 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{9,6} = \mathfrak{M}_{10,7} = \mathfrak{M}_{11,8} = -\frac{0,75 \cdot 2,0^2}{12} = -0,25 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{6,9} = \mathfrak{M}_{7,10} = \mathfrak{M}_{8,11} = +0,25 \text{ ,,}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (36a) ist allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

Damit wird

$$s_5 = -11,26 - 4,50 = -15,76 \text{ tm};$$

$$s_6 = s_7 = +11,26 + 0,25 - 4,50 - 11,26 = -4,25 \text{ ,,};$$

$$s_8 = +11,26 + 0,25 = +11,51 \text{ ,,};$$

$$s_9 = s_{10} = s_{11} = +4,50 - 0,25 = +4,25 \text{ ,,}.$$

b) Wind.

$$w = 0,8 \text{ t/m.}$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

$$\mathfrak{M}_{4,8} = + \frac{0,8 \cdot 4,5^2}{12} = + 1,35 \text{ tm; } \mathfrak{M}_{8,4} = - 1,35 \text{ tm;}$$

$$\mathfrak{M}_{8,11} = + \frac{0,8 \cdot 3,0^2}{12} = + 0,60 \text{ ,, ; } \mathfrak{M}_{11,8} = - 0,60 \text{ ,, .}$$

Knotenbelastungsglieder s .

$$s_8 = - 1,35 + 0,60 = - 0,75 \text{ tm; } s_{11} = - 0,60 \text{ tm.}$$

Belastungsglied S der Verschiebungsgleichung.Da hier $P = 0$ und stets $\mathfrak{M}_u = -\mathfrak{M}_o$, so wird nach (49)

$$S_\mu = (\sum q + \sum_{\mu} \mathfrak{M}) l_\mu;$$

daher, wenn das Ableiten eines Teiles der Windkraft nicht in Rechnung gestellt wird,

$$S = - \left(0,8 \cdot 3,0 + \frac{0,8 \cdot 4,50}{2} \right) 4,50 = - 18,90 \text{ tm.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Die Knotengleichungen lauten allgemein nach (40) unter Beachtung, daß hier das Glied $3 k_{\mu+1} \cdot \psi_{\mu+1}$ entfällt, weil nur in den Säulen Stabverdrehungen auftreten:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + 3 k_\mu \psi_\mu + s_n = 0.$$

Für die Knotenpunkte 9, 10, 11 entfällt auch das Glied $3 k_\mu \psi_\mu$, da bei allen dort einmündenden Stäben $\psi = 0$. Die Verschiebungsgleichung lautet nach (47):

$$\sum_{\mu} 3 k \varphi_u + \sum_{\mu} 3 k \varphi_o + D_\mu \psi_\mu + S_\mu = 0.$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen kann an Hand der Beiwertschizze die Gleichungstabelle 7 angeschrieben werden. Die beiden gleichzeitig zu behandelnden Belastungsfälle $B^{(a)}$ und $B^{(b)}$ unterscheiden sich nur durch die letzte Spalte der Tabelle.

Gleichungstabelle 7.

	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	ψ	$B^{(a)}$	$B^{(b)}$
φ_5	+ 2,90	+ 0,39			+ 0,47			+ 1,77	- 15,76	—
φ_6	+ 0,39	+ 4,22	+ 0,39		+ 0,44	+ 0,47		+ 1,26	- 4,25	—
φ_7		+ 0,39	+ 4,22	+ 0,39		+ 0,44	+ 0,47	+ 1,26	- 4,25	—
φ_8			+ 0,39	+ 2,84			+ 0,44	+ 1,77	+ 11,51	- 0,75
φ_9	+ 0,47	+ 0,44			+ 1,82				+ 4,25	—
φ_{10}		+ 0,47	+ 0,44			+ 1,82			+ 4,25	—
φ_{11}			+ 0,47	+ 0,44			+ 1,82		+ 4,25	- 0,60
ψ	+ 1,77	+ 1,26	+ 1,26	+ 1,77				+ 12,12	—	- 18,90

Die Auflösung der Gleichungen ergibt:

a) Für lotrechte Belastung ($B^{(a)}$)

$$\varphi_5 = + 6,42; \quad \varphi_7 = + 2,00; \quad \varphi_9 = - 4,30; \quad \varphi_{11} = - 2,00;$$

$$\varphi_6 = + 1,25; \quad \varphi_8 = - 3,54; \quad \varphi_{10} = - 3,15; \quad \psi = - 0,76.$$

b) Für Wind ($B^{(b)}$)

$$\varphi_5 = - 1,222; \quad \varphi_7 = - 0,564; \quad \varphi_9 = + 0,439; \quad \varphi_{11} = + 0,721;$$

$$\varphi_6 = - 0,507; \quad \varphi_8 = - 1,016; \quad \varphi_{10} = + 0,267; \quad \psi = + 1,996.$$

Momente.

Nach (7) ist allgemein für einen Stab 1-2:

$$M_{1,2} = k (2 \varphi_1 + \varphi_2 + 3 \psi) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man sämtliche Stabendmomente.

a) Für lotrechte Belastung ($B^{(a)}$).

$M_{1,5} = + 2,45 \text{ tm}$	$M_{6,9} = - 0,54 \text{ tm}$	$M_{8,4} = - 5,52 \text{ tm}$
$M_{2,6} = - 0,43 \text{ ,,}$	$M_{6,10} = - 4,80 \text{ ,,}$	$M_{8,7} = + 9,28 \text{ ,,}$
$M_{3,7} = - 0,12 \text{ ,,}$	$M_{6,7} = - 9,50 \text{ ,,}$	$M_{8,11} = - 3,75 \text{ ,,}$
$M_{4,8} = - 3,44 \text{ ,,}$	$M_{7,3} = + 0,72 \text{ ,,}$	$M_{9,5} = + 3,48 \text{ ,,}$
$M_{5,1} = + 6,24 \text{ ,,}$	$M_{7,6} = + 13,31 \text{ ,,}$	$M_{9,6} = - 3,48 \text{ ,,}$
$M_{5,6} = - 5,76 \text{ ,,}$	$M_{7,10} = + 0,62 \text{ ,,}$	$M_{10,6} = + 2,13 \text{ ,,}$
$M_{5,9} = - 0,48 \text{ ,,}$	$M_{7,11} = - 3,56 \text{ ,,}$	$M_{10,7} = - 2,13 \text{ ,,}$
$M_{6,2} = + 0,10 \text{ ,,}$	$M_{7,8} = - 11,09 \text{ ,,}$	$M_{11,7} = + 3,56 \text{ ,,}$
$M_{6,5} = + 14,74 \text{ ,,}$		$M_{11,8} = - 3,56 \text{ ,,}$

Zugehöriges Momentenbild siehe Abb. 320.

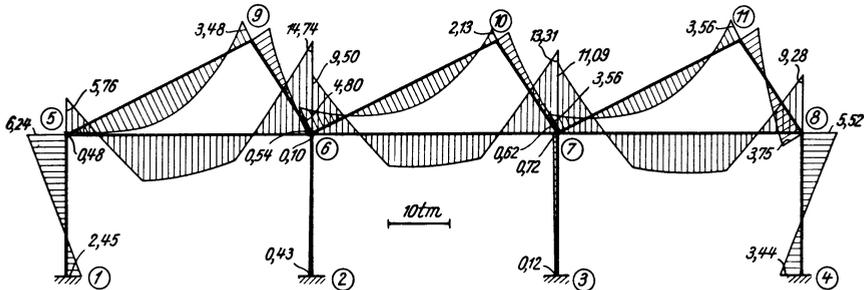


Abb. 320. Momentenverlauf für lotrechte Belastung.

b) Für Wind ($B^{(b)}$).

$M_{1,5} = + 2,82 \text{ tm}$	$M_{6,9} = - 0,25 \text{ tm}$	$M_{8,4} = + 0,99 \text{ tm}$
$M_{2,6} = + 2,30 \text{ ,,}$	$M_{6,10} = - 0,35 \text{ ,,}$	$M_{8,7} = - 1,01 \text{ ,,}$
$M_{3,7} = + 2,28 \text{ ,,}$	$M_{6,7} = - 0,62 \text{ ,,}$	$M_{8,11} = + 0,02 \text{ ,,}$
$M_{4,8} = + 4,29 \text{ ,,}$	$M_{7,3} = + 2,04 \text{ ,,}$	$M_{9,5} = - 0,16 \text{ ,,}$
$M_{5,1} = + 2,09 \text{ ,,}$	$M_{7,6} = - 0,64 \text{ ,,}$	$M_{9,6} = + 0,16 \text{ ,,}$
$M_{5,9} = - 0,94 \text{ ,,}$	$M_{7,10} = - 0,38 \text{ ,,}$	$M_{10,6} = + 0,01 \text{ ,,}$
$M_{5,6} = - 1,15 \text{ ,,}$	$M_{7,11} = - 0,19 \text{ ,,}$	$M_{10,7} = - 0,01 \text{ ,,}$
$M_{6,5} = - 0,87 \text{ ,,}$	$M_{7,8} = - 0,84 \text{ ,,}$	$M_{11,7} = + 0,41 \text{ ,,}$
$M_{6,2} = + 2,09 \text{ ,,}$		$M_{11,8} = - 0,41 \text{ ,,}$

Zugehöriges Momentenbild siehe Abb. 321.

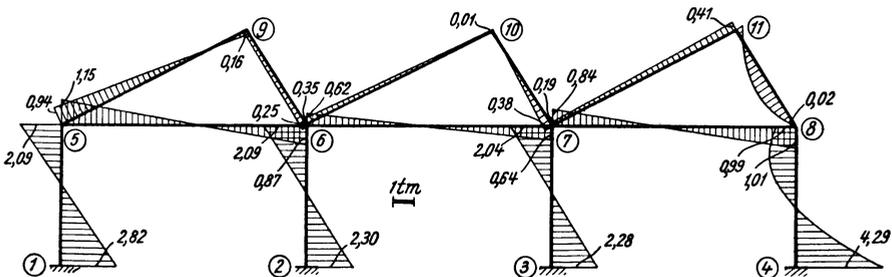


Abb. 321. Momentenverlauf für Wind von rechts.

Zahlenbeispiel 8 (vgl. auch Nr. 18).

Tribünenrahmen mit fest eingespannten Säulenfüßen (Abb. 322). Daher $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Es sind somit nur *fünf* unbekannte Knotendrehwinkel $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ und *zwei* Verschiebungsgrößen Δ_I und Δ_{II} gemeinsam zu bestimmen. Längen- und Querschnittsangaben siehe Abb. 322. Zu behandeln sind zwei Fälle:

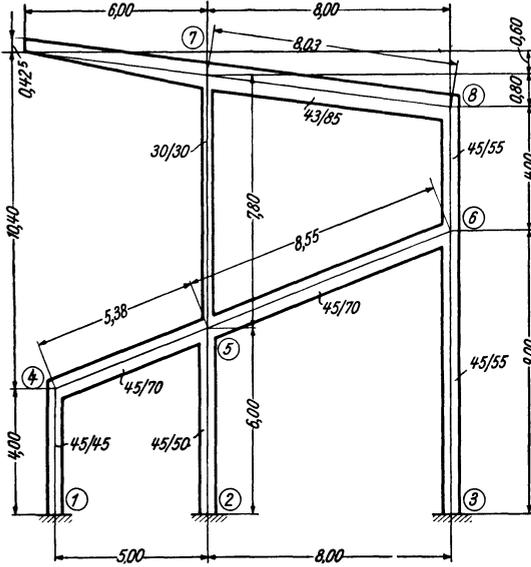


Abb. 322. Tragwerksabmessungen.

- a) Lotrechte Belastung (Abb. 323) und
- b) Wind (Abb. 324).

Die Werte k und \bar{k} (in Klammern) sind in der Beiwertskizze Abb. 325 eingetragen.

Diagonalglieder d und D .

Nach (35) erhält man:

$$d_4 = 6,50; \quad d_6 = 7,50; \quad d_8 = 8,60.$$

$$d_5 = 9,52; \quad d_7 = 5,66;$$

Nach (55) ist allgemein

$$D_\mu = 2 \sum_{\mu} \frac{\bar{k}}{l}$$

Festwerttabelle 8.

Stab	Querschnitt b/h (cm)	Trägheitsmoment J (m ⁴)	Länge l (m)	$k = \frac{1000 J}{l}$	$\bar{k} = \frac{3k}{l}$
1—4	45/45	0,00342	4,00	0,86	0,645
2—5	45/50	0,00469	6,00	0,78	0,390
3—6	45/55	0,00624	9,00	0,69	0,230
4—5	45/70	0,01286	5,38	2,39	—
5—6	45/70	0,01286	8,55	1,50	—
5—7	30/30	0,00068	7,80	0,09	0,035
6—8	45/55	0,00624	4,00	1,56	1,170
7—8	43/85	0,02201	8,03	2,74	—

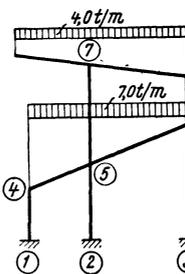


Abb. 323. Lotrechte Belastung.

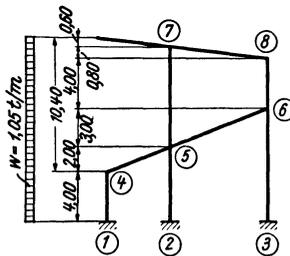


Abb. 324. Windbelastung.

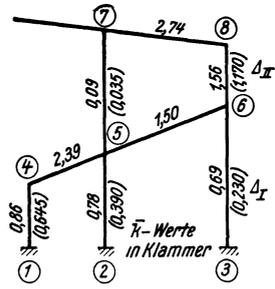


Abb. 325. Beiwertskizze.

also für das erste Stockwerk

$$D_I = 2 \left(\frac{0,645}{4,0} + \frac{0,390}{6,0} + \frac{0,230}{9,0} \right) = 0,504,$$

für das zweite Stockwerk

$$D_{II} = 2 \left(\frac{0,035}{7,8} + \frac{1,170}{4,0} \right) = 0,594.$$

a) Lotrechte Lasten (Abb. 323).

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\frac{7,0 \cdot 5,0^2}{12} = -14,58 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,4} = +14,58 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -\frac{7,0 \cdot 8,0^2}{12} = -37,33 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{6,5} = +37,33 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{7,8} = -\frac{4,0 \cdot 8,0^2}{12} = -21,33 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{8,7} = +21,33 \text{ ,,}.$$

Kragarmmoment.

$$M_{7,k} = +\frac{4,0 \cdot 6,0^2}{2} = +72,00 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (36) ist allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k,$$

also

$$s_4 = -14,58 \text{ tm}; \quad s_7 = -21,33 + 72,00 = +50,67 \text{ tm};$$

$$s_5 = +14,58 - 37,33 = -22,75 \text{ ,,}; \quad s_8 = +21,33 \text{ ,,}.$$

$$s_6 = +37,33 \text{ ,,};$$

Die Belastungsglieder S für die Verschiebungsgleichungen sind hier gleich Null, weil nur lotrecht wirkende Belastungen vorhanden sind.

b) Wind.

$$w = 1,05 \text{ t/m (Abb. 324)}.$$

Stabbelastungsglieder.

$$\mathfrak{M}_{1,4} = -\frac{1,05 \cdot 4,0^2}{12} = -1,40 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{4,1} = +1,40 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\frac{1,05 \cdot 2,0^2}{12} = -0,35 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{5,4} = +0,35 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -\frac{1,05 \cdot 3,0^2}{12} = -0,79 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{6,5} = +0,79 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{6,8} = -\frac{1,05 \cdot 4,0^2}{12} = -1,40 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{8,6} = +1,40 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{7,8} = +\frac{1,05 \cdot 0,8^2}{12} = +0,06 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{8,7} = -0,06 \text{ ,,}.$$

Kragarmmoment.

$$M_{7,k} = -\frac{1,05 \cdot 0,6^2}{2} = -0,19 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

$$s_4 = +1,40 - 0,35 = +1,05 \text{ tm}; \quad s_7 = +0,06 - 0,19 = -0,13 \text{ tm};$$

$$s_5 = +0,35 - 0,79 = -0,44 \text{ ,,}; \quad s_8 = +1,40 - 0,06 = +1,34 \text{ ,,}.$$

$$s_6 = +0,79 - 1,40 = -0,61 \text{ ,,};$$

Belastungsglieder S der Verschiebungsgleichungen.Nach (56) gilt hier unter Beachtung, daß $P = 0$ und stets $\mathfrak{M}_o = -\mathfrak{M}_u$:

$$S_\mu = \sum q + \sum_\mu \mathfrak{M}.$$

Daher wird im ersten Stockwerk

$$S_I = +1,05 \cdot 10,4 + \frac{1,05 \cdot 4,0}{2} = +13,02 \text{ t},$$

im zweiten Stockwerk

$$S_{II} = +1,05 \cdot 1,4 + \frac{1,05 \cdot 4,0}{2} = +3,57 \text{ t}.$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (52):

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_\mu \Delta_\mu + \bar{k}_{\mu+1} \Delta_{\mu+1} + s_n = 0.$$

Verschiebungsgleichungen nach (54):

$$\sum_\mu \bar{k} \varphi_\mu + \sum_\mu \bar{k} \varphi_0 + D_\mu \Delta_\mu + S_\mu = 0.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser allgemeinen Gleichungen kann unter gleichzeitiger Benutzung der Beiwertschizze Abb. 325 die Gleichungstabelle 8 angeschrieben werden. Die beiden Belastungsfälle unterscheiden sich wieder nur durch die letzten zwei Spalten dieser Tabelle.

Gleichungstabelle 8.

	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	Δ_I	Δ_{II}	$B^{(a)}$	$B^{(b)}$
φ_4	+ 6,50	+ 2,39				+ 0,645		- 14,58	+ 1,05
φ_5	+ 2,39	+ 9,52	+ 1,50	+ 0,09		+ 0,390	+ 0,035	- 22,75	- 0,44
φ_6		+ 1,50	+ 7,50		+ 1,56	+ 0,230	+ 1,170	+ 37,33	- 0,61
φ_7		+ 0,09		+ 5,66	+ 2,74		+ 0,035	+ 50,67	- 0,13
φ_8			+ 1,56	+ 2,74	+ 8,60		+ 1,170	+ 21,33	+ 1,34
Δ_I	+ 0,645	+ 0,390	+ 0,230			+ 0,504		—	+ 13,02
Δ_{II}		+ 0,035	+ 1,170	+ 0,035	+ 1,170		+ 0,594	—	+ 3,57

Durch Auflösung erhält man:

a) Für die lotrechte Belastung ($B^{(a)}$).

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= + 0,979; & \varphi_7 &= - 8,84; & \Delta_I &= - 0,153; \\ \varphi_5 &= + 3,48; & \varphi_8 &= - 0,588; & \Delta_{II} &= + 17,90. \\ \varphi_6 &= - 8,34; \end{aligned}$$

b) Für Wind ($B^{(b)}$).

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= + 2,846; & \varphi_7 &= - 0,631; & \Delta_I &= - 31,02; \\ \varphi_5 &= + 0,191; & \varphi_8 &= + 1,529; & \Delta_{II} &= - 14,91. \\ \varphi_6 &= + 3,001; \end{aligned}$$

Momente.

Nach (10) ist allgemein für einen Stab 1—2:

$$M_{1,2} = k \left(2 \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{3 \Delta}{l} \right) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

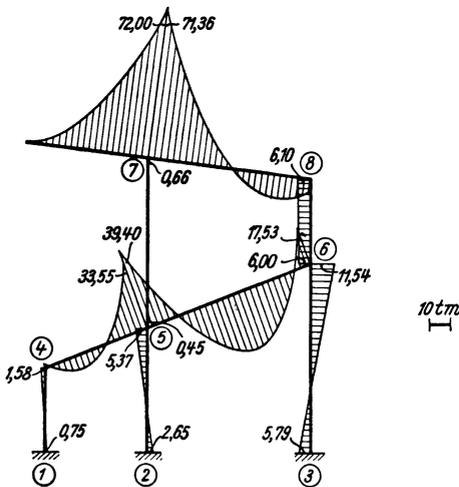


Abb. 326. M-Verlauf für lotrechte Belastung.

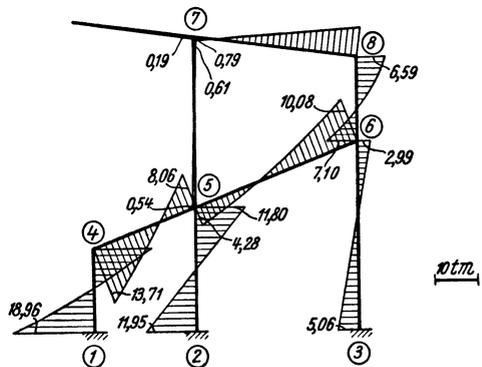


Abb. 327. M-Verlauf für Wind von links.

Damit erhält man:

a) Für die lotrechte Belastung ($B^{(a)}$).

$M_{1,4} = + 0,75 \text{ tm}$	$M_{5,4} = + 33,55 \text{ tm}$	$M_{7,5} = - 0,66 \text{ tm}$
$M_{2,5} = + 2,65 \text{ ,,}$	$M_{5,2} = + 5,37 \text{ ,,}$	$M_{7,8} = - 71,36 \text{ ,,}$
$M_{3,6} = - 5,79 \text{ ,,}$	$M_{5,7} = + 0,45 \text{ ,,}$	$M_{8,6} = + 6,10 \text{ ,,}$
$M_{4,1} = + 1,58 \text{ ,,}$	$M_{5,6} = - 39,40 \text{ ,,}$	$M_{8,7} = - 6,10 \text{ ,,}$
$M_{4,5} = - 1,58 \text{ ,,}$	$M_{6,3} = - 11,54 \text{ ,,}$	
	$M_{6,8} = - 6,00 \text{ ,,}$	
	$M_{6,5} = + 17,53 \text{ ,,}$	

Zugehöriges Momentenbild siehe Abb. 326.

b) Für Wind ($B^{(b)}$).

$M_{1,4} = - 18,96 \text{ tm}$	$M_{5,4} = + 8,06 \text{ tm}$	$M_{7,5} = - 0,61 \text{ tm}$
$M_{2,5} = - 11,95 \text{ ,,}$	$M_{5,2} = - 11,80 \text{ ,,}$	$M_{7,8} = + 0,79 \text{ ,,}$
$M_{3,6} = - 5,06 \text{ ,,}$	$M_{5,7} = - 0,54 \text{ ,,}$	$M_{8,6} = - 6,59 \text{ ,,}$
$M_{4,1} = - 13,71 \text{ ,,}$	$M_{5,6} = + 4,28 \text{ ,,}$	$M_{8,7} = + 6,59 \text{ ,,}$
$M_{4,5} = + 13,71 \text{ ,,}$	$M_{6,3} = - 2,99 \text{ ,,}$	
	$M_{6,5} = + 10,08 \text{ ,,}$	
	$M_{6,8} = - 7,10 \text{ ,,}$	

Zugehöriges Momentenbild siehe Abb. 327.

Zahlenbeispiel 9.

Unsymmetrischer Dreifeldrahmen (Abb. 328). Säulenfüße fest eingespannt, daher $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$. Es sind insgesamt *fünf* Unbekannte gemeinsam zu bestimmen, und zwar *vier* Knotendrehwinkel $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ und die Verschiebungsgröße Δ . Zu behandeln sind *zwei* Fälle:

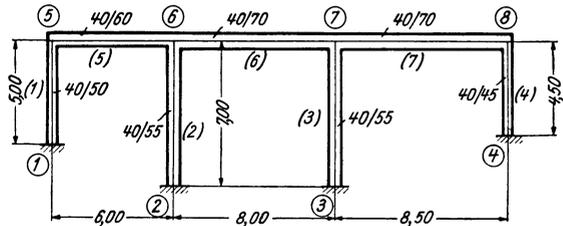


Abb. 328. Tragwerksabmessungen.

a) Vollbelastung (Abb. 329).

b) Temperaturerhöhung (Abb. 330).

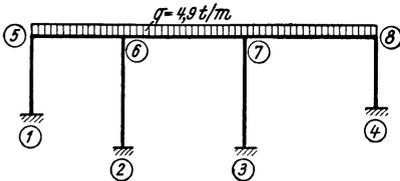


Abb. 329. Vollbelastung.

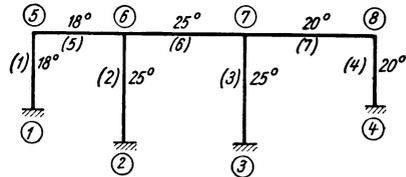


Abb. 330. Temperaturerhöhung.

Festwerttabelle 9.

Diese enthält hier die Werte k für sämtliche Stäbe, sowie \bar{k} für die Säulen und außerdem die *wahren* Werte $\bar{k}^* = \frac{3k^*}{l} = \frac{6EJ}{l^2}$ für alle Stäbe, wobei für $E = 2100000 \text{ t/m}^2$ eingesetzt wird. Diese Werte dienen später zur Ermittlung der Temperaturbelastungsglieder.

Stab	Querschnitt b/h (cm)	Trägheitsmoment J (m ⁴)	Länge l (m)	$k = \frac{1000 J}{l}$	$\bar{k} = \frac{3 k}{l}$	$\bar{k}^* = \frac{6 E J}{l^3}$
(1)	40/50	0,00417	5,00	0,83	0,498	2100
(2), (3)	40/55	0,00555	7,00	0,79	0,339	1426
(4)	40/45	0,00304	4,50	0,68	0,453	1891
(5)	40/60	0,00720	6,00	1,20	—	2520
(6)	40/70	0,01143	8,00	1,43	—	2251
(7)	40/70	0,01143	8,50	1,35	—	1994

Die Werte k und \bar{k} (in Klammern) sind in der Beiwertschizze Abb. 331 eingetragen.

Diagonalglieder d und D .

Nach (35)

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

erhält man

$$d_5 = 4,06; \quad d_6 = 6,84; \quad d_7 = 7,14; \quad d_8 = 4,06.$$

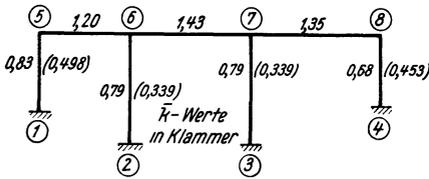


Abb. 331. Beiwertschizze.

Nach (55) ist allgemein

$$D_\mu = 2 \sum_\mu \frac{\bar{k}}{l},$$

somit hier

$$D_1 = 2 \left(\frac{0,498}{5,0} + 2 \cdot \frac{0,339}{7,0} + \frac{0,453}{4,5} \right) = 0,594.$$

a) Vollbelastung $q = 4,9 \text{ t/m}$.

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

$$\mathfrak{M}_{5,6} = - \frac{4,9 \cdot 6,0^2}{12} = - 14,7 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{6,5} = + 14,7 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,7} = - \frac{4,9 \cdot 8,0^2}{12} = - 26,1 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{7,6} = + 26,1 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{7,8} = - \frac{4,9 \cdot 8,50^2}{12} = - 29,5 \text{ ,,}; \quad \mathfrak{M}_{8,7} = + 29,5 \text{ ,,}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (36a) wird

$$s_5 = - 14,7 \text{ tm}; \quad s_7 = + 26,1 - 29,5 = - 3,4 \text{ tm};$$

$$s_6 = + 14,7 - 26,1 = - 11,4 \text{ tm}; \quad s_8 = + 29,5 \text{ tm}.$$

Stablängenänderungen λ .

Stab	Temperaturerhöhung t^0	Stablänge l (m)	Längenänderung λ_ν (m) = $\omega \cdot t^0 \cdot l_\nu$
(1)	18	5,00	0,001080
(2), (3)	25	7,00	0,002100
(4)	20	4,50	0,001080
(5)	18	6,00	0,001296
(6)	25	8,00	0,002400
(7)	20	8,50	0,002040

b) Temperatur.

(Ausführliche Beschreibung des Rechnungsganges siehe Erster Teil, vierter Abschnitt, III, 3 und 4.)

Die Ermittlung der Längenänderung λ_ν der einzelnen Stäbe (ν) erfolgt am besten tabellarisch, wobei $\omega = 0,000012$ angenommen wird.

Die „gegenseitigen“ Verschiebungen Δ_ν der einzelnen Stiele (ν) sind allgemein nach (269a)

$$\Delta_\nu = \Delta_\nu - \lambda_s^{(\nu)}.$$

Wählt man Δ_1 als Unbekannte, so erhält man der Reihe nach unter Bezugnahme auf Abb. 330

$$\Delta_2 = \Delta_1 - \lambda_5 = \Delta_1 - 0,001296;$$

$$\Delta_3 = \Delta_1 - (\lambda_5 + \lambda_6) = \Delta_1 - (0,001296 + 0,002400) = \Delta_1 - 0,003696;$$

$$\Delta_4 = \Delta_1 - (\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7) = \Delta_1 - 0,005736.$$

Für die Riegel erhält man nach (266):

$$\Delta_5 = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,002100 - 0,001080 = + 0,001020;$$

$$\Delta_6 = \lambda_3 - \lambda_2 = 0,002100 - 0,002100 = 0;$$

$$\Delta_7 = \lambda_4 - \lambda_3 = 0,001080 - 0,002100 = - 0,001020.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M}^t .

1. Für die Rahmenstiele.

Nach (271) ist allgemein, wenn an Stelle von \bar{c} das Zeichen für den wahren Wert c^* gesetzt wird,

$$\mathfrak{M}_{m,n}^t = \mathfrak{M}_{n,m}^t = -\bar{c}^* \cdot \lambda_s^{(v)}.$$

Nun ist nach (138) für einen Stab ohne Vouten $c^* = \frac{6 EJ}{l}$ und weiter nach (178) $\bar{c}^* = \frac{c^*}{l}$, also für den vorliegenden Fall

$$\bar{c}^* = \frac{6 EJ}{l^2} = \bar{k}^*.$$

Diese Werte sind für die einzelnen Stäbe in der letzten Spalte der Festwerttabelle enthalten. Es wird also hier für die Stiele

$$\mathfrak{M}_{m,n}^t = \mathfrak{M}_{n,m}^t = -\bar{k}^* \cdot \lambda_s^{(v)}.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Stab (1)} \quad \mathfrak{M}_{1,5}^t = \mathfrak{M}_{5,1}^t &= -\bar{k}_1^* \cdot \lambda_s^{(1)} = 0 \quad (\text{weil } \lambda_s^{(1)} = 0); \\ \text{,, (2)} \quad \mathfrak{M}_{2,6}^t = \mathfrak{M}_{6,2}^t &= -\bar{k}_2^* \cdot \lambda_s^{(2)} = -1426 \cdot 0,001296 = -1,85 \text{ tm}; \\ \text{,, (3)} \quad \mathfrak{M}_{3,7}^t = \mathfrak{M}_{7,3}^t &= -\bar{k}_3^* \cdot \lambda_s^{(3)} = -1426 \cdot 0,003696 = -5,27 \text{ ,,}; \\ \text{,, (4)} \quad \mathfrak{M}_{4,8}^t = \mathfrak{M}_{8,4}^t &= -\bar{k}_4^* \cdot \lambda_s^{(4)} = -1891 \cdot 0,005736 = -10,85 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

2. Für die Rahmenriegel.

Nach (260a) ist allgemein, wenn wieder für \bar{k} der wahre Wert \bar{k}^* gesetzt wird,

$$\mathfrak{M}_{m,n}^t = \mathfrak{M}_{n,m}^t = \bar{k}^* \cdot \Delta_r.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Stab (5)} \quad \mathfrak{M}_{5,6}^t = \mathfrak{M}_{6,5}^t &= \bar{k}_5^* \cdot \Delta_5 = 2520 \cdot 0,001020 = +2,57 \text{ tm}; \\ \text{,, (6)} \quad \mathfrak{M}_{6,7}^t = \mathfrak{M}_{7,6}^t &= \bar{k}_6^* \cdot \Delta_6 = 0; \\ \text{,, (7)} \quad \mathfrak{M}_{7,8}^t = \mathfrak{M}_{8,7}^t &= \bar{k}_7^* \cdot \Delta_7 = -1994 \cdot 0,001020 = -2,03 \text{ tm}. \end{aligned}$$

Knotenbelastungsglieder s^t .

Nach (20a) wird

$$\begin{aligned} s_5^t &= +2,57 \text{ tm}; & s_7^t &= -5,27 - 2,03 = -7,30 \text{ tm}; \\ s_6^t &= -1,85 + 2,57 = +0,72 \text{ tm}; & s_8^t &= -10,85 - 2,03 = -12,88 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Belastungsglied der Verschiebungsgleichung.

Nach (279) ist unter denselben Voraussetzungen wie bisher

$$S^t = -\sum_r \frac{\bar{c}_o^* + \bar{c}_u^*}{l_r} \cdot \lambda_s^{(r)} = -2 \sum_r \frac{\bar{k}^*}{l_r} \cdot \lambda_s^{(r)},$$

denn

$$\bar{c}_o^* = \bar{c}_u^* = \bar{k}^*.$$

Damit ergibt sich hier

$$\begin{aligned} S^t &= -2 \left(\frac{\bar{k}_2^*}{l_2} \cdot \lambda_s^{(2)} + \frac{\bar{k}_3^*}{l_3} \cdot \lambda_s^{(3)} + \frac{\bar{k}_4^*}{l_4} \cdot \lambda_s^{(4)} \right) = \\ &= -2 \left(\frac{1426 \cdot 0,001296}{7,0} + \frac{1426 \cdot 0,003696}{7,0} + \frac{1891 \cdot 0,005736}{4,5} \right) = -6,85^t. \end{aligned}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Die *Knotengleichungen* lauten allgemein nach (52) unter Berücksichtigung, daß hier jeweils das Glied $\bar{k}_{\mu+1} \Delta_{\mu+1}$ entfällt, weil nur ein Stockwerk vorhanden ist:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_\mu \Delta_\mu + s_n = 0.$$

Die *Verschiebungsgleichung* lautet allgemein nach (54)

$$\sum_\mu \bar{k} \varphi_\mu + \sum_\mu \bar{k} \varphi_o + D_\mu \Delta_\mu + S_\mu = 0.$$

Damit kann unter Verwendung der Beiwertskeizze (Abb. 331) die Gleichungstabelle 9 gleichzeitig für beide Belastungsfälle angeschrieben werden.

Gleichungstabelle 9.

	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	Δ_1	$B^{(a)}$	$B^{(b)}$
φ_5	+ 4,06	+ 1,20			+ 0,498	- 14,7	+ 2,57
φ_6	+ 1,20	+ 6,84	+ 1,43		+ 0,339	- 11,4	+ 0,72
φ_7		+ 1,43	+ 7,14	+ 1,35	+ 0,339	- 3,4	- 7,30
φ_8			+ 1,35	+ 4,06	+ 0,453	+ 29,5	- 12,88
Δ_1	+ 0,498	+ 0,339	+ 0,339	+ 0,453	+ 0,594	-	- 6,85

Die Auflösung ergibt:

a) Für Vollbelastung ($B^{(a)}$):

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= + 3,172; & \varphi_8 &= - 8,095; \\ \varphi_6 &= + 0,633; & \Delta_1 &= + 2,135; \\ \varphi_7 &= + 1,778; \end{aligned}$$

b) Für Temperatur ($B^{(b)}$):

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= - 1,985; & \varphi_8 &= + 1,772; \\ \varphi_6 &= - 0,392; & \Delta_1 &= + 11,96. \\ \varphi_7 &= + 0,197; \end{aligned}$$

Momente.

Nach (10) ist für einen Stab 1-2:

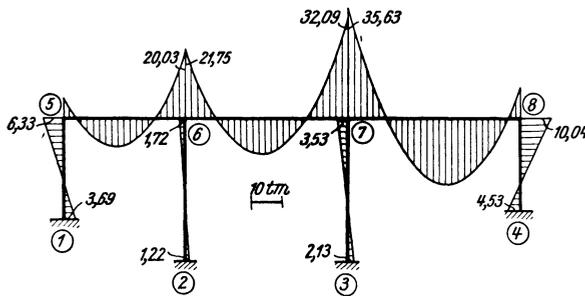
$$M_{1,2} = k \left(2 \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{3 \Delta}{l} \right) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Damit erhält man an Hand der Beiwertskeizze sämtliche Stabendmomente für beide Belastungsfälle.

a) Für Vollbelastung ($B^{(a)}$).

$$\begin{array}{lll} M_{1,5} = + 3,69 \text{ tm} & M_{5,1} = + 6,33 \text{ tm} & M_{7,6} = + 32,09 \text{ tm} \\ M_{2,6} = + 1,22 \text{ „} & M_{5,6} = - 6,33 \text{ „} & M_{7,3} = + 3,53 \text{ „} \\ M_{3,7} = + 2,13 \text{ „} & M_{6,5} = + 20,03 \text{ „} & M_{7,8} = - 35,63 \text{ „} \\ M_{4,8} = - 4,53 \text{ „} & M_{6,2} = + 1,72 \text{ „} & M_{8,7} = + 10,04 \text{ „} \\ & M_{6,7} = - 21,75 \text{ „} & M_{8,4} = - 10,04 \text{ „} \end{array}$$

Das zugehörige Momentenbild siehe Abb. 332.



Al 332. Momentenverlauf für Vollbelastung.

b) Für Temperatur ($B^{(b)}$):

$$\begin{aligned} M_{1,5} &= 0,83 \left(- 1,985 + 3 \cdot \frac{11,96}{5,00} \right) = + 4,31 \text{ tm} \\ M_{2,6} &= 0,79 \left(- 0,392 + 3 \cdot \frac{11,96}{7,00} \right) - 1,85 = + 1,89 \text{ „} \\ M_{3,7} &= 0,79 \left(+ 0,197 + 3 \cdot \frac{11,96}{7,00} \right) - 5,27 = - 1,06 \text{ „} \\ M_{4,8} &= 0,68 \left(+ 1,772 + 3 \cdot \frac{11,96}{4,50} \right) - 10,85 = - 4,22 \text{ „} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{5,1} &= 0,83 \left(-2 \cdot 1,985 + 3 \cdot \frac{11,96}{5,00} \right) &= + 2,66 \text{ tm} \\
 M_{5,6} &= 1,20 \left(-2 \cdot 1,985 - 0,392 \right) + 2,57 &= - 2,66 \text{ ,,} \\
 M_{6,5} &= 1,20 \left(-2 \cdot 0,392 - 1,985 \right) + 2,57 &= - 0,75 \text{ ,,} \\
 M_{6,2} &= 0,79 \left(-2 \cdot 0,392 + 3 \cdot \frac{11,96}{7,00} \right) - 1,85 &= + 1,58 \text{ ,,} \\
 M_{6,7} &= 1,43 \left(-2 \cdot 0,392 + 0,197 \right) &= - 0,84 \text{ ,,} \\
 M_{7,6} &= 1,43 \left(+ 2 \cdot 0,197 - 0,392 \right) &= + 0,00 \text{ ,,} \\
 M_{7,3} &= 0,79 \left(+ 2 \cdot 0,197 + 3 \cdot \frac{11,96}{7,00} \right) - 5,27 &= - 0,91 \text{ ,,} \\
 M_{7,8} &= 1,35 \left(+ 2 \cdot 0,197 + 1,772 \right) - 2,03 &= + 0,90 \text{ ,,} \\
 M_{8,7} &= 1,35 \left(+ 2 \cdot 1,772 + 0,197 \right) - 2,03 &= + 3,02 \text{ ,,} \\
 M_{8,4} &= 0,68 \left(+ 2 \cdot 1,772 + 3 \cdot \frac{11,96}{4,50} \right) - 10,85 &= - 3,02 \text{ ,,} .
 \end{aligned}$$

Das zugehörige Momentenbild siehe Abb. 333.

Zahlenbeispiel 10
(vgl. auch Nr. 19).

Vierschiffiger symmetrischer
Hallenrahmen mit Fußgelenken
(Abb. 334).

Zu untersuchen sind die
Lastfälle:

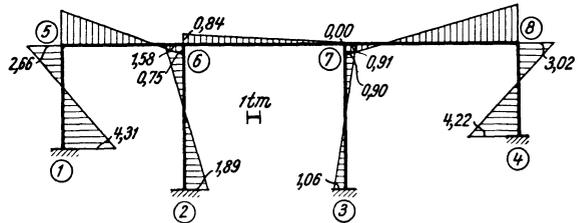


Abb. 333. Momentenverlauf für Temperaturerhöhung.

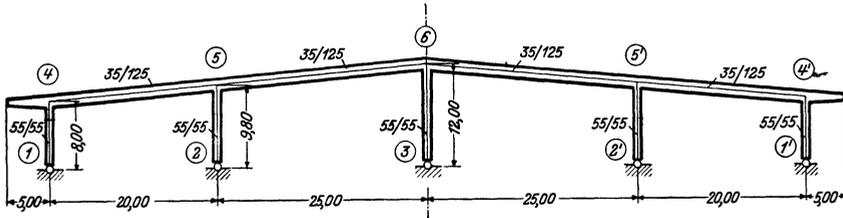


Abb. 334. Tragwerksabmessungen.

- a) Lotrechte Belastung (Abb. 335) und
- b) Wind (Abb. 336).

Für den *symmetrischen* Lastfall a sind zwei Unbekannte, und zwar φ_4 und φ_5 zu ermitteln. Der Lastfall b kann am vorliegenden Tragwerk für die Berechnung der

Momente durch den *antisymmetrischen* der Abb. 339 ersetzt werden (siehe Seite 35), für welchen vier Unbekannte, nämlich φ_4 , φ_5 , φ_6 , Δ gemeinsam zu bestimmen sind.

Festwerttabelle 10.

Stab	Querschnitt $b/h(\text{cm})$	Trägheitsmoment $J(\text{m}^4)$	Länge $l(\text{m})$	$k = \frac{1000 J}{l}$	$\bar{k}_s = \frac{3 k}{l}$
1—4	55/55	0,00763	8,0	0,95	0,356
2—5	55/55	0,00763	9,8	0,78	0,239
3—6	55/55	0,00763	12,0	0,64	0,160
4—5	35/125	0,05697	20,0	2,85	—
5—6	35/125	0,05697	25,0	2,28	—

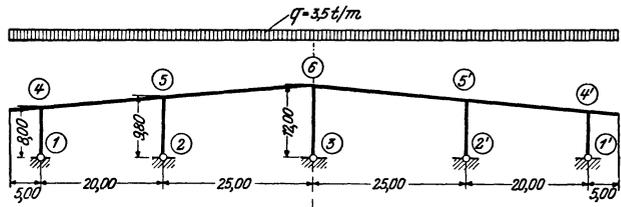


Abb. 335. Lotrechte Belastung.

Für die Längen der schiefen Stäbe wurden die runden Werte $l_{4-5} = 20,0$ und $l_{5-6} = 25,0$ m verwendet.

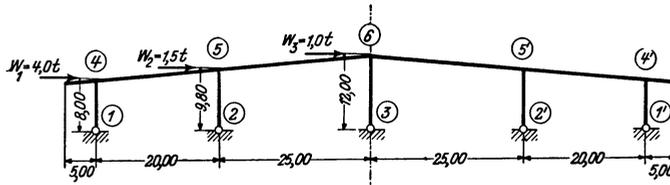


Abb. 336. Windbelastung.

a) Lotrechte Belastung (Abb. 335).

Die in der Festwerttabelle ermittelten k -Werte sind in der Beiwertskizze Abb. 337 eingetragen.

Diagonalglieder d^0 .

Mit Rücksicht auf die gelenkigen Stabanschlüsse ist nach (30) allgemein

$$d_n^0 = d_n - 0,5 \sum_r k_{n,r} \varphi_r$$

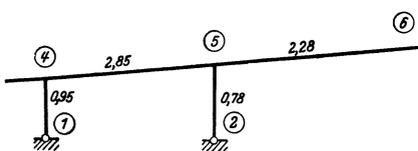


Abb. 337. Beiwertskizze für Lastfall a.

Mithin unter Zuhilfenahme der Beiwertskizze:

$$d_4^0 = 2(0,95 + 2,85) - 0,5 \cdot 0,95 = 7,12,$$

$$d_5^0 = 2(2,85 + 2,28 + 0,78) - 0,5 \cdot 0,78 = 11,43.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 4—5. (Siehe Tafel 2.)

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\frac{q l^2}{12} = -\frac{3,5 \cdot 20^2}{12} = -116,7 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,4} = +116,7 \text{ tm}.$$

Stab 5—6. (Siehe Tafel 2.)

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -\frac{q l^2}{12} = -\frac{3,5 \cdot 25^2}{12} = -182,3 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{6,5} = +182,3 \text{ tm}.$$

Kragarm.

$$M_{4,k} = +\frac{q l^2}{2} = +\frac{3,5 \cdot 5,0^2}{2} = +43,8 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Da alle gelenkig angeschlossenen Stäbe unbelastet sind, wird nach (31) $s_n^0 = s_n$, also

$$s_4 = \mathfrak{M}_{4,5} + M_{4,k} = -116,7 + 43,8 = -72,9 \text{ tm},$$

$$s_5 = \mathfrak{M}_{5,4} + \mathfrak{M}_{5,6} = +116,7 - 182,3 = -65,6 \text{ tm}.$$

Knotengleichungen.

Nach (29) ist allgemein

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r k_{n,r} \varphi_r + s_n^0 = 0.$$

Damit erhält man die beiden Gleichungen für die Knotenpunkte 4 und 5:

$$7,12 \varphi_4 + 2,85 \varphi_5 - 72,9 = 0,$$

$$2,85 \varphi_4 + 11,43 \varphi_5 - 65,6 = 0.$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\varphi_4 = +8,82; \quad \varphi_5 = +3,54.$$

Momente.

Nach (14) ist für einen gelenklosen Stab 1—2 allgemein

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2}$$

bzw. nach Seite 4, Formel 2 c, für einen Stab mit Gelenk bei 2

$$M_{1,2} = 1,5 k \varphi_1 + \mathfrak{M}_{1,2} - 0,5 \mathfrak{M}_{2,1}.$$

Mithin

$$\begin{aligned}
 M_{4,1} &= 1,5 \cdot 0,95 \cdot 8,82 &= + 12,6 \text{ tm} \\
 M_{4,5} &= 2,85 (2 \cdot 8,82 + 3,54) - 116,7 &= - 56,3 \text{ ,,} \\
 M_{5,4} &= 2,85 (2 \cdot 3,54 + 8,82) + 116,7 &= + 162,0 \text{ ,,} \\
 M_{5,6} &= 2,28 \cdot 2 \cdot 3,54 - 182,3 &= - 166,2 \text{ ,,} \\
 M_{6,2} &= 1,5 \cdot 0,78 \cdot 3,54 &= + 4,1 \text{ ,,} \\
 M_{6,5} &= 2,28 \cdot 3,54 + 182,3 &= + 190,4 \text{ ,,} .
 \end{aligned}$$

Der zugehörige Momentenverlauf ist aus Abb. 338 ersichtlich.

b) Wind (Abb. 339).
(Antimetrischer Fall.)

Die in der Festwertta-
belle ermittelten k - und \bar{k} -
Werte sind in der Beiwert-
skizze Abb. 340 eingetragen.

Diagonalglieder d^0 und D^0 .

Aus Lastfall a können
unverändert übernommen
werden:

$$d_4^0 = 7,12; \quad d_5^0 = 11,43.$$

d_6^0 ergibt sich an Hand der
Beiwertskeizze Abb. 340 nach
(30):

$$d_6^0 = d_6 - 0,5 k_{3,6} = 2 (2,28 + 0,32) - 0,5 \cdot 0,32 = 5,04.$$

Nach (75) ist

$$D^0 = 0,5 \sum \frac{\bar{k}}{l},$$

somit hier

$$D^0 = 0,5 \left(\frac{0,356}{8,0} + \frac{0,239}{9,8} + \frac{0,080}{12,0} \right) = 0,0378.$$

Belastungsglied der Verschiebungsgleichung.

Nach (76) ist allgemein

$$S^0 = \sum P + \sum q + \sum \mathfrak{A} + \sum \frac{\mathfrak{M}_0 - 0,5 \mathfrak{M}_u}{l},$$

somit im vorliegenden Falle

$$S^0 = \sum P = 2,0 + 0,75 + 0,5 = + 3,25 \text{ t.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (70):

$$d_n^0 \varphi_n + \sum k_{n,r} \varphi_r + 0,5 \bar{k}_s \Delta + s_n^0 = 0.$$

Verschiebungsgleichung nach (74):

$$\sum 0,5 \bar{k}_s \varphi_n + D^0 \Delta + S^0 = 0.$$

Damit kann an Hand der Beiwertskeizze Abb. 340 die Aufstellung der Gleichungstabelle 10 vorgenommen werden.

Gleichungstabelle 10.

	φ_4	φ_5	φ_6	Δ	B
φ_4	+ 7,12	+ 2,85		+ 0,178	—
φ_5	+ 2,85	+ 11,43	+ 2,28	+ 0,120	—
φ_6		+ 2,28	+ 5,04	+ 0,040	—
Δ	+ 0,178	+ 0,120	+ 0,040	+ 0,0378	+ 3,25

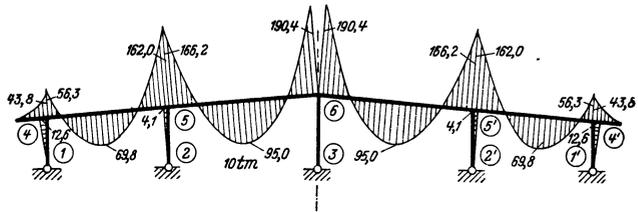


Abb. 338. M-Verlauf für Lastfall a.

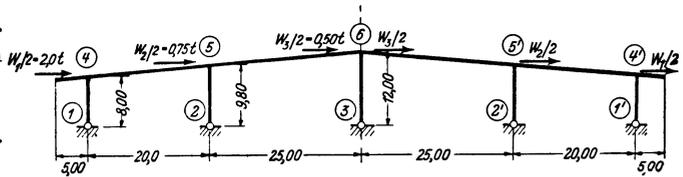


Abb. 339. Antimetrischer Lastfall.

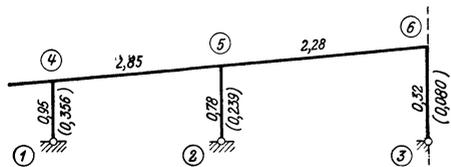


Abb. 340. Beiwertskeizze für Lastfall b.

Die Auflösung der Gleichungen ergibt:

$$\Delta = -98,69; \varphi_6 = +0,636; \varphi_5 = +0,327; \varphi_4 = +2,337.$$

Momente.

Für die Riegelanschlußmomente gilt nach (14) unter Beachtung, daß hier $\mathfrak{M} = 0$ ist,

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2).$$

Die Säulenkopfmomente ergeben sich nach Seite 4,

Formel 2 b, wenn für $\psi = \frac{\Delta}{l}$ gesetzt wird, aus

$$M_{1,2} = 1,5k\left(\varphi_1 + \frac{\Delta}{l}\right).$$

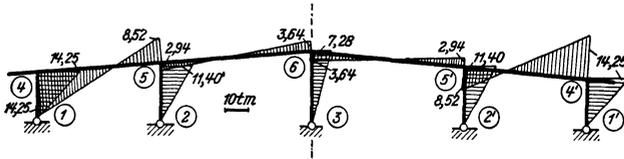


Abb. 341. M-Verlauf für Lastfall b.

Somit:

$$M_{4,1} = 1,5 \cdot 0,95 \cdot \left(2,337 - \frac{98,69}{8,0}\right) = -14,25 \text{ tm}$$

$$M_{4,5} = 2,85(2 \cdot 2,337 + 0,327) = +14,25 \text{ ,,}$$

$$M_{5,4} = 2,85(2 \cdot 0,327 + 2,337) = +8,52 \text{ ,,}$$

$$M_{5,2} = 1,5 \cdot 0,78 \left(0,327 - \frac{98,69}{9,8}\right) = -11,40 \text{ ,,}$$

$$M_{5,6} = 2,28(2 \cdot 0,327 + 0,636) = +2,94 \text{ ,,}$$

$$M_{6,5} = 2,28(2 \cdot 0,636 + 0,327) = +3,64 \text{ ,,}$$

$$M_{6,3} = 1,5 \cdot 0,32 \left(0,636 - \frac{98,69}{12,0}\right) = -3,64 \text{ ,,}$$

Das zugehörige Momentenbild siehe Abb. 341.

Zahlenbeispiel 11.

Symmetrisches Vierendeel-Rahmentragwerk (Abb. 342). Die Säulenfüße sind fest eingespannt, somit $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$. Wegen der symmetrischen Belastung (Abb. 343) verbleiben nur fünf Unbekannte, und zwar die vier Knotendrehwinkel $\varphi_2 = -\varphi_2'$, $\varphi_3 = -\varphi_3'$, $\varphi_4 = -\varphi_4'$, $\varphi_5 = -\varphi_5'$ und der Stabdrehwinkel ψ_1 . Für die Stäbe des mittleren Feldes ist $\psi_2 = 0$. (Siehe Erster Teil, erster Abschnitt, IV, 7, A.)

Festwerttabelle 11.

Stab	b/h(cm)	J(m ⁴)	l(m)	$k = \frac{1000 J}{l}$
1-2	50/80	0,02133	6,50	3,28
2-4	50/80	0,02133	3,80	5,61
2-3	45/70	0,01286	3,50	3,68
4-5	45/85	0,02303	3,50	6,58
3-5	25/28	0,00046	3,80	0,12
3-3'	45/70	0,01286	5,00	2,57
5-5'	45/85	0,02303	5,00	4,61

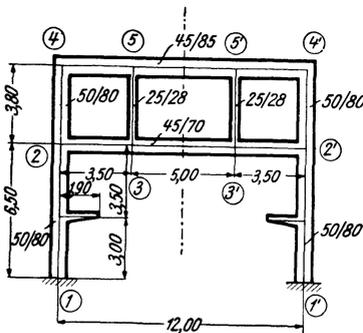


Abb. 342. Tragwerksabmessungen.

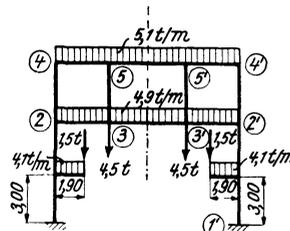


Abb. 343. Belastungsangaben.

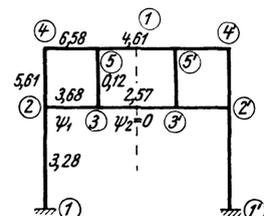


Abb. 344. Beiwertskizze.

Beiwertschizze siehe Abb. 344.

Diagonalglieder d und D .

Nach (35)
$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

erhält man $d_2 = 25,14; d_3 = 12,74; d_4 = 24,38; d_5 = 22,62$.

Da hier die Symmetrale durch die Mitte der Stäbe 3–3' und 5–5' verläuft, so sind die zugehörigen Diagonalglieder nach (50)

$$d_3' = d_3 - k_{3,3'} = 12,74 - 2,57 = 10,17$$

$$d_5' = d_5 - k_{5,5'} = 22,62 - 4,61 = 18,01.$$

Nach (95)
$$D_v = 6 \sum_v k$$

wird $D_1 = 6 (k_{2,3} + k_{4,5}) = 6 (3,68 + 6,58) = 61,56$.

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 1–2: Kragarmmoment

$$M_k = 1,5 \cdot 1,9 + \frac{4,1 \cdot 1,9^2}{2} = 10,25 \text{ tm.}$$

Nach \mathfrak{M} -Formel 23 auf Tafel 3 ist:

$$\mathfrak{M}_{1,2} = + M \cdot \frac{b}{l} \left(2 - \frac{3b}{l} \right) = + 10,25 \cdot \frac{3,50}{6,5} \left(2 - \frac{3 \cdot 3,5}{6,5} \right) = + 2,12 \text{ tm,}$$

$$\mathfrak{M}_{2,1} = + M \cdot \frac{a}{l} \left(2 - \frac{3a}{l} \right) = + 10,25 \cdot \frac{3,0}{6,5} \left(2 - \frac{3 \cdot 3,0}{6,5} \right) = + 2,91 \text{ ,, .}$$

Weiter wird nach der \mathfrak{M} -Formel 1 auf Tafel 2:

$$\mathfrak{M}_{2,3} = - \frac{4,9 \cdot 3,5^2}{12} = - 5,00 \text{ tm; } \mathfrak{M}_{3,2} = + 5,00 \text{ tm;}$$

$$\mathfrak{M}_{4,5} = - \frac{5,1 \cdot 3,5^2}{12} = - 5,21 \text{ ,, ; } \mathfrak{M}_{5,4} = + 5,21 \text{ ,, ;}$$

$$\mathfrak{M}_{3,3'} = - \frac{4,9 \cdot 5,0^2}{12} = - 10,21 \text{ ,, ;}$$

$$\mathfrak{M}_{5,5'} = - \frac{5,1 \cdot 5,0^2}{12} = - 10,62 \text{ ,, .}$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (36a)
$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

erhält man

$$s_2 = + 2,91 - 5,00 = - 2,09 \text{ tm; } s_4 = - 5,21 \text{ tm;}$$

$$s_3 = + 5,00 - 10,21 = - 5,21 \text{ ,, ; } s_5 = + 5,21 - 10,62 = - 5,41 \text{ ,, .}$$

Belastungsglied S der Verschiebungsgleichung.

Nach (96) ist allgemein für ein Feld (v)

$$S_v = \left[\frac{1}{2} \left(\sum P + \sum q \right) - \sum P' - \sum q' - \sum_v \mathfrak{A} \right] l_v + \sum_v (\mathfrak{M}_l + \mathfrak{M}_r).$$

Die Glieder $\sum P'$ und $\sum q'$ fallen hier weg und man erhält

$$S_1 = \left[\frac{1}{2} (9,0 + 4,9 \cdot 12,0 + 5,1 \cdot 12,0) - \frac{(4,9 + 5,1) \cdot 3,5}{2} \right] 3,5 = + 164,5 \text{ tm.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (89):

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + 3 k_v \psi_v + 3 k_{v+1} \psi_{v+1} + s_n = 0.$$

Verschiebungsgleichung nach (94):

$$\sum_v 3 k \varphi_l + \sum_v 3 k \varphi_r + D_v \psi_v + S_v = 0.$$

Damit kann an Hand der Beiwertskeizze Abb. 344 die Aufstellung der Gleichungstabelle 11 vorgenommen werden.

Gleichungstabelle 11.

	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	ψ_1	B
φ_2	+ 25,14	+ 3,68	+ 5,61		+ 11,04	— 2,09
φ_3	+ 3,68	+ 10,17		+ 0,12	+ 11,04	— 5,21
φ_4	+ 5,61		+ 24,38	+ 6,58	+ 19,74	— 5,21
φ_5		+ 0,12	+ 6,58	+ 18,01	+ 19,74	— 5,41
ψ_1	+ 11,04	+ 11,04	+ 19,74	+ 19,74	+ 61,56	+ 164,50

Die Auflösung ergibt:

$$\varphi_2 = + 1,484; \quad \varphi_4 = + 4,764; \quad \psi_1 = - 8,731.$$

Momente.

$$\varphi_3 = + 9,363; \quad \varphi_5 = + 8,067;$$

Nach (7)

$$M_{1,2} = k (2 \varphi_1 + \varphi_2 + 3 \psi) + \mathfrak{M}_{1,2}$$

erfolgt an Hand der Beiwertskeizze die Berechnung der Stabendmomente.

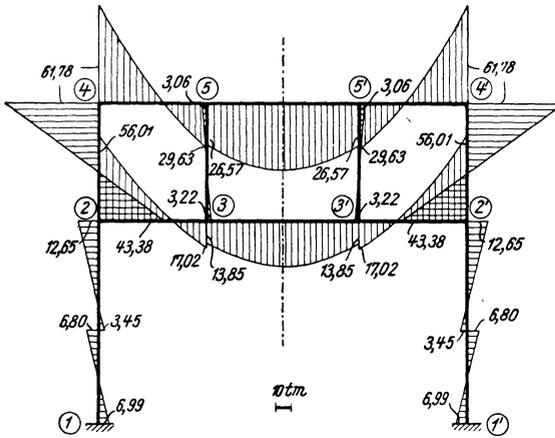


Abb. 345. Momentenverlauf.

$$M_{1,2} = + 6,99 \text{ tm}$$

$$M_{2,1} = + 12,65 \text{ ,,}$$

$$M_{2,4} = + 43,38 \text{ ,,}$$

$$M_{2,3} = - 56,01 \text{ ,,}$$

$$M_{3,2} = - 17,02 \text{ ,,}$$

$$M_{3,5} = + 3,22 \text{ ,,}$$

$$M_{3,3'} = + 13,85 \text{ ,,}$$

$$M_{4,2} = + 61,78 \text{ ,,}$$

$$M_{4,5} = - 61,78 \text{ ,,}$$

$$M_{5,3} = + 3,06 \text{ ,,}$$

$$M_{5,4} = - 29,63 \text{ ,,}$$

$$M_{5,5'} = + 26,57 \text{ ,,}$$

Das zugehörige Momentenbild siehe Abb. 345.

Zahlenbeispiel 12.

Unsymmetrisches, lotrecht verschiebliches Tragwerk (Abb. 346). Feste Einspannung in den Knotenpunkten 1, 2, 3, 7, 8, 12, daher $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_7 = \varphi_8 = \varphi_{12} = 0$. Unbekannte: Die sechs Knotendrehwinkel $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_9, \varphi_{10}, \varphi_{11}$ und die lotrechte Verschiebung δ der Knotenreihe 5–10. Belastungsangaben siehe Abb. 347.

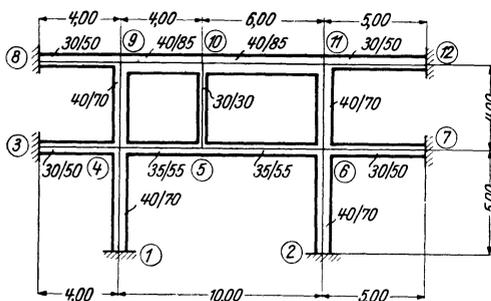


Abb. 346. Tragwerksabmessungen.

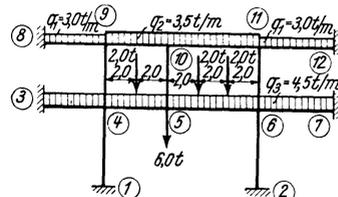


Abb. 347. Belastungsangaben.

Festwerttabelle 12.

Stab	Querschnitt $b/h(\text{cm})$	Trägheitsmoment $J(\text{m}^4)$	Länge $l(\text{m})$	$k = \frac{1000 J}{l}$	$\bar{k} = \frac{3 k}{l}$
1-4, 2-6	40/70	0,01143	5,00	2,29	—
3-4, 8-9	30/50	0,00313	4,00	0,78	—
4-5	35/55	0,00485	4,00	1,21	0,908
5-6	35/55	0,00485	6,00	0,81	0,405
6-7, 11-12	30/50	0,00313	5,00	0,63	—
4-9, 6-11	40/70	0,01143	4,00	2,86	—
5-10	30/30	0,00068	4,00	0,17	—
9-10	40/85	0,02047	4,00	5,12	3,84
10-11	40/85	0,02047	6,00	3,41	1,705

Die Werte k bzw. \bar{k} (in Klammern) sind in der Beiwertschizze Abb. 348 eingetragen.

Beiwerte α und K .

Nach (101) ist allgemein

$$\alpha_n = \bar{k}_{v+1} - \bar{k}_v,$$

also

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= \bar{k}_{5,6} - \bar{k}_{5,4} = 0,405 - 0,908 = -0,503; \\ \alpha_{10} &= \bar{k}_{10,11} - \bar{k}_{10,9} = 1,705 - 3,84 = -2,135; \end{aligned}$$

nach (106) ist

$$K_v = \frac{2}{l_v} \sum_v \bar{k}_v,$$

daher für das Feld I:

$$K_I = \frac{2}{4,0} (0,908 + 3,84) = 2,374;$$

für das Feld II:

$$K_{II} = \frac{2}{6,0} (0,405 + 1,705) = 0,703.$$

Diagonalglieder d und D .

Nach (35)

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

wird

$$\begin{aligned} d_4 &= 14,28; & d_6 &= 13,18; & d_{10} &= 17,40; \\ d_5 &= 4,38; & d_9 &= 17,52; & d_{11} &= 13,80. \end{aligned}$$

Nach (107) ist allgemein

$$D_m = K_v + K_{v+1},$$

somit hier

$$D = K_I + K_{II} = 2,374 + 0,703 = 3,077.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Nach

$$\mathfrak{M}_{1,2} = -\mathfrak{M}_{2,1} = -\frac{q l^2}{12}$$

wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{3,4} &= -6,00 \text{ tm}; & \mathfrak{M}_{10,11} &= -10,50 \text{ tm}; & \mathfrak{M}_{9,8} &= +4,00 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{6,7} &= -9,38 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{11,12} &= -6,25 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{10,9} &= +4,67 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{8,9} &= -4,00 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{4,3} &= +6,00 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{11,10} &= +10,50 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{9,10} &= -4,67 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{7,6} &= +9,38 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{12,11} &= +6,25 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Ferner wird unter gleichzeitiger Verwendung der \mathfrak{M} -Formel 25 auf Tafel 4

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\frac{4,5 \cdot 4,0^2}{12} - \frac{2,0 \cdot 4,0}{8} = -7,00 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,4} = +7,0 \text{ tm}$$

u. ä. mit \mathfrak{M} -Formel 26:

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -\frac{4,5 \cdot 6,0^2}{12} - \frac{2 \cdot 2,0 \cdot 6,0}{9} = -16,17 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{6,5} = +16,17 \text{ tm}.$$

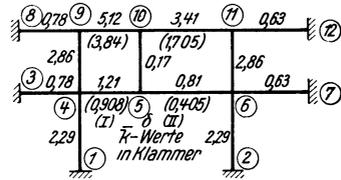


Abb. 348. Beiwertschizze.

Knotenbelastungsglieder s.

Nach (36a)

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

erhält man

$$\begin{aligned} s_3 &= && - 6,00 \text{ tm}; & s_8 &= && - 4,00 \text{ tm}; \\ s_4 &= + 6,00 - 7,00 = - 1,00 \text{ ,,}; & s_9 &= + 4,00 - 4,67 = - 0,67 \text{ ,,}; \\ s_5 &= + 7,00 - 16,17 = - 9,17 \text{ ,,}; & s_{10} &= + 4,67 - 10,50 = - 5,83 \text{ ,,}; \\ s_6 &= + 16,17 - 9,38 = + 6,79 \text{ ,,}; & s_{11} &= + 10,50 - 6,25 = + 4,25 \text{ ,,}; \\ s_7 &= && + 9,38 \text{ ,,}; & s_{12} &= && + 6,25 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Belastungsglied S der Verschiebungsgleichung.

Nach (108) ergibt sich unter Beachtung, daß hier die \mathfrak{M} -Glieder entfallen, weil für jeden Stab $\mathfrak{M}^l = -\mathfrak{M}^r$ ist:

$$S = -\sum P - \sum_v \mathfrak{X}_v^r - \sum_{v+1} \mathfrak{X}_{v+1}^l.$$

Somit

$$S = - 6,0 - (4,5 + 3,5) \frac{4,0}{2} - \frac{2,0}{2} - (4,5 + 3,5) \frac{6,0}{2} - 2,0 = - 49,0 \text{ t.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (99):

$$\delta_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_v \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{k}_{v+1} \delta_{m+1} + s_n = 0.$$

Verschiebungsgleichung nach (105) mit der Vereinfachung, daß hier die beiden Glieder $K_v \delta_{m-1}$ und $K_{v+1} \delta_{m+1}$ entfallen, weil die Verschiebungen $\delta_{m-1} = \delta_{m+1} = 0$ sind:

$$-\sum_v \bar{k}_v \varphi_{m-1} + \sum \kappa_m \varphi_m + \sum_{v+1} \bar{k}_{v+1} \varphi_{m+1} + D_m \delta_m + S_m = 0.$$

An Hand der Beiwertschizze Abb. 348 kann die Gleichungstabelle 12 aufgestellt werden, wobei sämtliche Beiwerte nur mit zwei Dezimalstellen zur Verwendung gelangen.

Gleichungstabelle 12.

	φ_4	φ_5	φ_6	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	δ	B
φ_4	+ 14,28	+ 1,21		+ 2,86			- 0,91	- 1,00
φ_5	+ 1,21	+ 4,38	+ 0,81		+ 0,17		- 0,50	- 9,17
φ_6		+ 0,81	+ 13,18			+ 2,86	+ 0,41	+ 6,79
φ_9	+ 2,86			+ 17,52	+ 5,12		- 3,84	- 0,67
φ_{10}		+ 0,17		+ 5,12	+ 17,40	+ 3,41	- 2,13	- 5,83
φ_{11}			+ 2,86		+ 3,41	+ 13,80	+ 1,71	+ 4,25
δ	- 0,91	- 0,50	+ 0,41	- 3,84	- 2,13	+ 1,71	+ 3,08	- 49,00

Die Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= + 0,365; & \varphi_6 &= - 0,759; & \varphi_{10} &= + 3,030; & \delta &= + 28,02. \\ \varphi_5 &= + 5,215; & \varphi_9 &= + 5,236; & \varphi_{11} &= - 4,371; \end{aligned}$$

Momente.

Nach (10a) ist für einen Stab 1, 2 mit den Stabendverschiebungen δ_1 und δ_2 :

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= k \left[2 \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{3(\delta_1 - \delta_2)}{l} \right] + \mathfrak{M}_{1,2} \\ M_{2,1} &= k \left[2 \varphi_2 + \varphi_1 + \frac{3(\delta_1 - \delta_2)}{l} \right] + \mathfrak{M}_{2,1}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Momente:

$M_{1,4} = + 0,84 \text{ tm}$	$M_{5,4} = - 5,37 \text{ tm}$	$M_{9,4} = + 30,99 \text{ tm}$
$M_{2,6} = - 1,74 \text{ ,,}$	$M_{5,10} = + 2,29 \text{ ,,}$	$M_{9,8} = + 12,16 \text{ ,,}$
$M_{4,1} = + 1,67 \text{ tm}$	$M_{5,6} = + 3,01 \text{ ,,}$	$M_{9,10} = - 43,14 \text{ ,,}$
$M_{4,3} = + 6,58 \text{ ,,}$	$M_{6,2} = - 3,48 \text{ tm}$	$M_{10,5} = + 1,92 \text{ tm}$
$M_{4,9} = + 17,06 \text{ ,,}$	$M_{6,5} = + 30,51 \text{ ,,}$	$M_{10,9} = - 45,09 \text{ ,,}$
$M_{4,5} = - 25,24 \text{ ,,}$	$M_{6,11} = - 16,84 \text{ ,,}$	$M_{10,11} = + 43,03 \text{ ,,}$
$M_{3,4} = - 5,72 \text{ tm}$	$M_{6,7} = - 10,34 \text{ ,,}$	$M_{11,6} = - 27,17 \text{ tm}$
$M_{7,6} = + 8,90 \text{ ,,}$	$M_{8,9} = + 0,08 \text{ tm}$	$M_{11,10} = + 38,80 \text{ ,,}$
	$M_{12,11} = + 3,50 \text{ ,,}$	$M_{11,12} = - 11,76 \text{ ,,}$

Das zugehörige Momentenbild siehe Abb. 349.

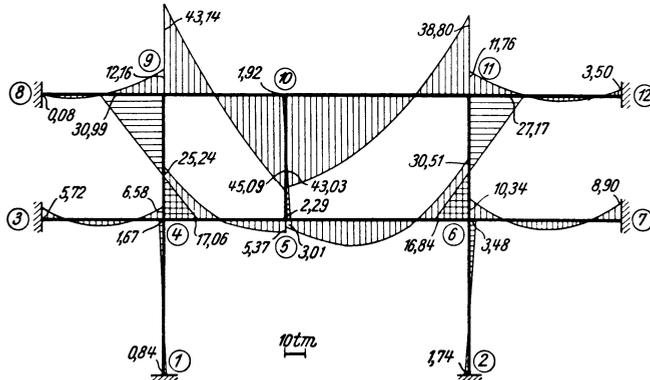


Abb. 349. Momentenverlauf.

Zahlenbeispiel 13 (vgl. auch Nr. 20).

Lotrecht verschiebliches Tragwerk mit zurückgesetztem Obergeschoß (Abb. 350). Feste Einspannung in den Knotenpunkten 1, 2, 6, 9, daher $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_6 = \varphi_9 = 0$. Unbekannte: Die fünf Knotendrehwinkel $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_7, \varphi_8$ und die lotrechte Verschiebung δ der Knotenreihe 4—7. Belastungsangaben siehe Abb. 351.

Festwerttabelle 13.

Stab	Querschnitt $b/h(\text{cm})$	Trägheitsmoment $J(\text{m}^4)$	Länge $l(\text{m})$	$k = \frac{1000 J}{l}$	$\bar{k} = \frac{3 k}{l}$
1—3, 2—5	45/40	0,00240	3,00	0,80	—
3—4	35/60	0,00630	1,70	3,71	6,55
4—5	35/60	0,00630	3,80	1,66	1,31
5—6	35/60	0,00630	3,20	1,97	—
4—7	30/30	0,00068	2,70	0,25	—
5—8	40/30	0,00090	2,70	0,33	—
7—8	30/50	0,00313	3,80	0,82	0,65
8—9	35/70	0,01000	3,20	3,12	—

Die Werte k bzw. \bar{k} (in Klammern) sind in der Beiwertskizze Abb. 352 eingetragen.

Beiwerte κ und K .

Nach (101) ist allgemein $\kappa_n = \bar{k}_{\nu+1} - \bar{k}_{\nu}$, daher

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= \bar{k}_{4,5} - \bar{k}_{4,3} = 1,31 - 6,55 = - 5,24, \\ \kappa_7 &= \bar{k}_{7,8} &= + 0,65. \end{aligned}$$

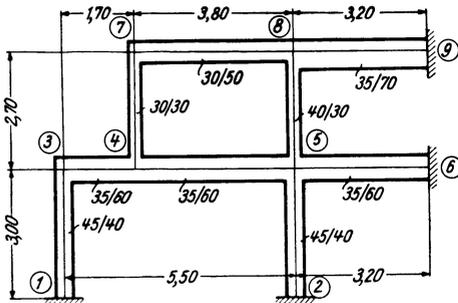


Abb. 350. Tragwerksabmessungen.

Nach (106) ist

$$K_v = \frac{2}{l_v} \sum \bar{k}_v,$$

daher für das Feld (I):

$$K_I = \frac{2}{1,7} (6,55) = 7,70;$$

für das Feld (II):

$$K_{II} = \frac{2}{3,8} (1,31 + 0,65) = 1,03.$$

Diagonalglieder d und D .

Nach (35)

$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

wird

$$\begin{aligned} d_3 &= 9,02; & d_5 &= 9,52; & d_8 &= 8,54. \\ d_4 &= 11,24; & d_7 &= 2,14; \end{aligned}$$

Nach (107) wird allgemein

$$D_m = K_v + K_{v+1},$$

also

$$D = K_I + K_{II} = 7,70 + 1,03 = 8,73.$$

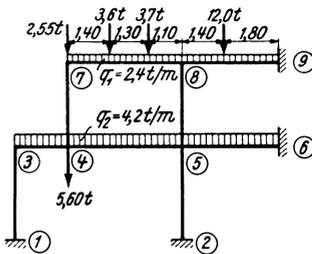


Abb. 351. Belastungsangaben.

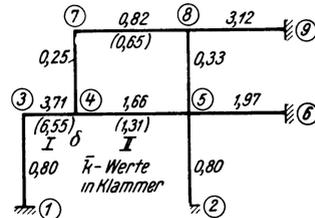


Abb. 352. Beiwertschizze.

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Mit den \mathfrak{M} -Formeln 1 bzw. 34 erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{3,4} &= -1,01 \text{ tm}; & \mathfrak{M}_{4,3} &= +1,01 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{4,5} &= -5,05 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{5,4} &= +5,05 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{5,6} &= -3,58 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{6,5} &= +3,58 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{7,8} &= -\frac{2,4 \cdot 3,8^2}{12} - \frac{3,6 \cdot 1,4 \cdot 2,4^2}{3,8^2} - \frac{3,7 \cdot 2,7 \cdot 1,1^2}{3,8^2} = -5,74 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{8,7} &= +\frac{2,4 \cdot 3,8^2}{12} + \frac{3,6 \cdot 1,4^2 \cdot 2,4}{3,8^2} + \frac{3,7 \cdot 2,7^2 \cdot 1,1}{3,8^2} = +6,11 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{8,9} &= -\frac{2,4 \cdot 3,2^2}{12} - \frac{12,0 \cdot 1,4 \cdot 1,8^2}{3,2^2} = -7,37 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{9,8} &= +\frac{2,4 \cdot 3,2^2}{12} + \frac{12,0 \cdot 1,4^2 \cdot 1,8}{3,2^2} = +6,18 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (36a)

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

wird

$$\begin{aligned} s_3 &= & &= -1,01 \text{ tm}; & s_7 &= & &= -5,74 \text{ tm}; \\ s_4 &= +1,01 - 5,05 &= &= -4,04 \text{ ,,}; & s_8 &= +6,11 - 7,37 &= &= -1,26 \text{ ,,}; \\ s_5 &= +5,05 - 3,58 &= &= +1,47 \text{ ,,}; \end{aligned}$$

Belastungsglieder S der Verschiebungsgleichung

Nach (108) ist allgemein

$$S_m = -\sum P - \sum \mathfrak{M}_v^r - \sum \mathfrak{M}_{v+1}^l - \frac{1}{l_v} \sum (\mathfrak{M}_v^l + \mathfrak{M}_v^r) + \frac{1}{l_{v+1}} \sum (\mathfrak{M}_{v+1}^l + \mathfrak{M}_{v+1}^r).$$

Damit erhält man hier laut Belastungsskizze Abb. 351:

$$S = -2,55 - 5,60 - \frac{4,2 \cdot 1,7}{2} - \frac{4,2 \cdot 3,8}{2} - \frac{2,4 \cdot 3,8}{2} - \frac{3,6 \cdot 2,4}{3,8} - \frac{3,7 \cdot 1,1}{3,8} + \frac{-5,74 + 6,11}{3,8} = -27,50 \text{ t.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (99):

$$d_n \varphi_n + \sum_i \bar{k}_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_v \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{k}_{v+1} \delta_{m+1} + s_n = 0.$$

Verschiebungsgleichungen nach (105) mit der Vereinfachung, daß auch hier die Glieder $K_v \delta_{m-1}$ und $K_{v+1} \delta_{m+1}$ entfallen, weil die beiden Verschiebungen δ_{m-1} und δ_{m+1} der benachbarten Knotenpunktreihen gleich Null sind:

$$-\sum \bar{k}_v \varphi_{m-1} + \sum \kappa_m \varphi_m + \sum_{v+1} \bar{k}_{v+1} \varphi_{m+1} + D_m \delta_m + S_m = 0.$$

Damit kann unter Benutzung der Beiwertschizze Abb. 352 die Gleichungstabelle 13 aufgestellt werden.

Gleichungstabelle 13.

	φ_3	φ_4	φ_5	φ_7	φ_8	δ	B
φ_3	+ 9,02	+ 3,71				- 6,55	- 1,01
φ_4	+ 3,71	+ 11,24	+ 1,66	+ 0,25		- 5,24	- 4,04
φ_5		+ 1,66	+ 9,52		+ 0,33	+ 1,31	+ 1,47
φ_7		+ 0,25		+ 2,14	+ 0,82	+ 0,65	- 5,74
φ_8			+ 0,33	+ 0,82	+ 8,54	+ 0,65	- 1,26
δ	- 6,55	- 5,24	+ 1,31	+ 0,65	+ 0,65	+ 8,73	- 27,50

Die Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= + 6,125; & \varphi_7 &= - 0,641; \\ \varphi_4 &= + 3,436; & \varphi_8 &= - 0,487; \\ \varphi_5 &= - 2,144; & \delta &= + 10,227. \end{aligned}$$

Momente.

Nach (10a) ist für einen Stab 1, 2 mit den Stabendverschiebungen δ_1, δ_2 :

$$M_{1,2} = k \left[2 \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{3(\delta_1 - \delta_2)}{l} \right] + \mathfrak{M}_{1,2}$$

$$M_{2,1} = k \left[2 \varphi_2 + \varphi_1 + \frac{3(\delta_1 - \delta_2)}{l} \right] + \mathfrak{M}_{2,1}$$

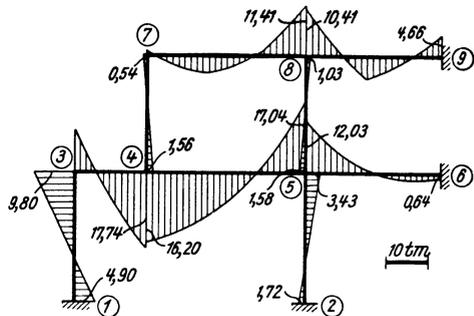


Abb. 353. Momentenverlauf.

Damit erhält man folgende Stabendmomente:

$M_{1,3} = + 4,90 \text{ tm}$	$M_{5,4} = + 17,04 \text{ tm}$	$M_{7,4} = + 0,54 \text{ tm}$
$M_{2,5} = - 1,72 \text{ ,,}$	$M_{5,8} = - 1,58 \text{ ,,}$	$M_{7,8} = - 0,54 \text{ ,,}$
$M_{3,1} = + 9,80 \text{ tm}$	$M_{5,6} = - 12,03 \text{ ,,}$	$M_{8,5} = - 1,03 \text{ tm}$
$M_{3,4} = - 9,80 \text{ ,,}$	$M_{5,2} = - 3,43 \text{ ,,}$	$M_{8,7} = + 11,41 \text{ ,,}$
$M_{4,3} = - 17,74 \text{ tm}$	$M_{6,5} = - 0,64 \text{ tm}$	$M_{8,9} = - 10,41 \text{ ,,}$
$M_{4,7} = + 1,56 \text{ ,,}$		$M_{9,8} = + 4,66 \text{ tm}$
$M_{4,5} = + 16,20 \text{ ,,}$		

Diese Momente sind in Abb. 353 maßstäblich aufgetragen.

Zweiter Abschnitt.

Rahmentragwerke mit Vouten.

I. Ermittlung der Stabfestwerte $a b c$ und der Belastungsglieder \mathfrak{M} mit Hilfe der Zahlen- und Kurventafeln.

Es soll hier nur an einigen Fällen ausführlich gezeigt werden, wie die als „Vorarbeit“ zur eigentlichen Rahmenberechnung aufzufassende zahlenmäßige Ermittlung der Stabfestwerte a, b, c und der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} unter Benutzung der Zahlen- und Kurventafeln durchzuführen ist. Es kann dann bei den später folgenden Zahlenbeispielen, bei welchen diese Arbeit in der Regel tabellarisch erfolgt, auf lange Erläuterungen in jedem einzelnen Fall verzichtet werden, weil im wesentlichen immer derselbe Vorgang einzuhalten ist, wie er hier eingehend besprochen wird.

1. Stab mit beidseitig gleichen geraden Vouten.

Die Längen- und Querschnittsabmessungen sind aus Abb. 354, die Belastungen aus Abb. 355 zu entnehmen.

A. Ermittlung der Stabfestwerte a, b, c .

Aus Zahlentafel I erhält man:

für den unveränderlichen Stabbereich mit $b/h \doteq 30/50 \text{ (cm)}$ $J_c = 0,003125 \text{ m}^4$,
 für den Auflagerquerschnitt mit $b/h_A = 30/85 \text{ (cm)}$ $J_A = 0,015353 \text{ ,,}$;

somit ist

$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,003125}{0,015353} = 0,204 \doteq 0,20 \text{ und } \lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{1,50}{6,00} = 0,25.$$

Mit diesen Werten für n und λ erhält man aus Zahlentafel 7

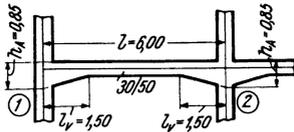


Abb. 354. Stababmessungen.

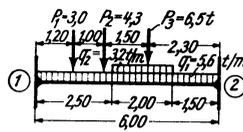


Abb. 355. Belastungsangaben.

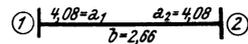


Abb. 356. Beiwertskeizze.

$a = 7,84$; $b = 5,10$ und damit nach (147)

$$a_1 = a_2 = a = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a = \frac{1000 \cdot 0,003125}{6,00} \cdot 7,84 = 4,08;$$

$$b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b = \frac{1000 \cdot 0,003125}{6,00} \cdot 5,10 = 2,66.$$

Nach (127) ist

$$c_{1,2} = c_{2,1} = a + b = 4,08 + 2,66 = 6,74.$$

Die Festwerte a, b sind in der Beiwertschizze Abb. 356 eingetragen, und zwar die a -Werte an den Stabenden, der b -Wert in der Stabmitte.

B. Ermittlung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Nach Abb. 355 kommen hier *drei* Arten der Belastung vor, nämlich:

- a) eine durchgehende Gleichlast $q_1 = 5,6 \text{ t/m}$,
- b) eine gleichförmige Streckenlast $q_2 = 3,2 \text{ ,, ,}$
- c) drei Einzellasten: $P_1 = 3,0 \text{ t}$, $P_2 = 4,3 \text{ t}$, $P_3 = 6,5 \text{ t}$.

Diese drei Fälle kommen nachstehend getrennt zur Behandlung.

a) *Durchgehende Gleichlast* $q_1 = 5,6 \text{ t/m}$.

Aus der Zahlentafel 11 oder aus der Kurventafel 11a erhält man für die hier vorliegenden Leitwerte $n = 0,20$ und $\lambda = 0,25$ den Wert $\varkappa = 1,183$ und damit

$$\mathfrak{M}_1 = -\varkappa \frac{q_1 l^2}{12} = -1,183 \frac{5,6 \cdot 6,0^2}{12} = -19,87 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_2 = +19,87 \text{ tm}.$$

b) *Gleichförmige Streckenlast* $q_2 = 3,2 \text{ t/m}$.

Hier kommt man am besten durch Auswertung der \mathfrak{M} -Einflußlinie zum Ziel. Die entsprechende Einflußlinie für $n = 0,20$ und $\lambda = 0,25$ ist auf Tafel 15a enthalten. Es empfiehlt sich, die Auswertung so vorzunehmen, daß die jeweils zu ermittelnde Fläche stets in ein Trapez (F_1') und in ein Reststück (F_1'') zerlegt wird, wie in der

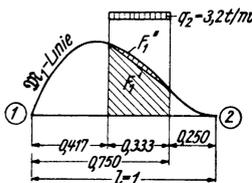


Abb. 355 a. Auswertung der \mathfrak{M} -Einflußlinie bei Streckenlasten.

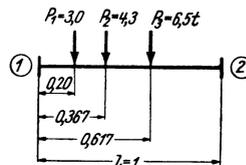


Abb. 355 b.

schematischen Abb. 355a angedeutet ist. Es wird dann $F_1 = F_1' + F_1''$ bzw. $F_2 = F_2' + F_2''$. Damit erhält man für den vorliegenden Fall

$$F_1 = 0,0374; \quad F_2 = 0,0567,$$

wobei die Flächen F_1 und F_2 auf den Träger mit der Länge $l = 1$ bezogen sind. Nach (153) ergeben sich somit die der Streckenlast q_2 entsprechenden Belastungsglieder für den vorliegenden Träger mit $l = 6,0 \text{ m}$:

$$\mathfrak{M}_1 = -F_1 \cdot q_2 \cdot l^2 = -0,0374 \cdot 3,2 \cdot 6,0^2 = -4,31 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_2 = +F_2 \cdot q_2 \cdot l^2 = +0,0567 \cdot 3,2 \cdot 6,0^2 = +6,53 \text{ ,,}$$

c) *Drei Einzellasten* $P_1 = 3,0 \text{ t}$, $P_2 = 4,3 \text{ t}$, $P_3 = 6,5 \text{ t}$.

Es kann hier dieselbe Einflußlinie zur Auswertung benutzt werden wie vorher (auf Tafel 15a; $n = 0,20$, $\lambda = 0,25$). Es ist allgemein $\mathfrak{M}_1 = -\eta_1 \cdot P \cdot l$; $\mathfrak{M}_2 =$

$= + \eta_2 \cdot P \cdot l$. Die auf den Träger mit der Länge $l = 1$ bezogenen Maße sind in Abb. 355 b enthalten. Damit erhält man für die drei Laststellungen

$$\begin{aligned} \eta_1 & \dots\dots\dots 0,158; \quad 0,191; \quad 0,099; \\ \eta_2 & \dots\dots\dots 0,025; \quad 0,091; \quad 0,188. \end{aligned}$$

Somit
$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= - [0,158 \cdot 3,0 + 0,191 \cdot 4,3 + 0,099 \cdot 6,5] \cdot 6,0 = - 11,63 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_2 &= + [0,025 \cdot 3,0 + 0,091 \cdot 4,3 + 0,188 \cdot 6,5] \cdot 6,0 = + 10,13 \text{ ,,} . \end{aligned}$$

Zusammenfassung.

Bei gleichzeitiger Einwirkung der zunächst getrennt in Rechnung gestellten drei Belastungsarten erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= - 19,87 - 4,31 - 11,63 = - 35,81 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_2 &= + 19,87 + 6,53 + 10,13 = + 36,53 \text{ ,,} . \end{aligned}$$

Die Momentenverteilung für diesen Fall (beidseitig volle Einspannung) ist in Abb. 357 dargestellt.

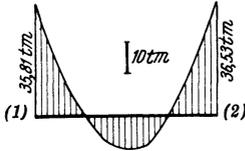


Abb. 357. M -Verlauf bei voller Einspannung.

2. Stab mit einseitig parabolischer Voute.

Die Längen- und Querschnittsabmessungen sind in Abb. 358, die Belastungen in Abb. 359 angegeben.

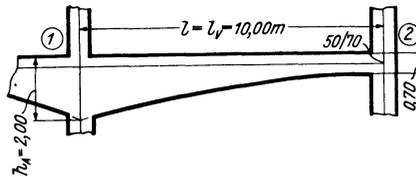


Abb. 358. Stababmessungen.

A. Ermittlung der Stabfestwerte a_1, a_2, b, c_1, c_2 .

Aus Zahlentafel 1 ergibt sich:

für den Voutenanfang mit $b/h = 50/70$ (cm) $J_c = 0,014292 \text{ m}^4$,

für den Auflagerquerschnitt mit $b/h_A = 50/200$ (cm) $J_A = 0,3 \text{ m}^4$;

somit ist
$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,014292}{0,3} = 0,043 \text{ und } \lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{10,0}{10,0} = 1,0.$$

Mit diesen beiden Leitwerten erhält man aus der Kurventafel 6a:

$$a_1 = 28,00; \quad a_2 = 6,30; \quad b = 7,64$$

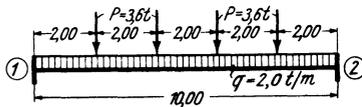


Abb. 359. Belastungsangaben.

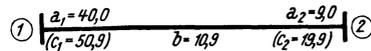


Abb. 360. Beiwertschizze.

und damit nach (147)

$$a_1 = \frac{1000 \cdot J_c}{l} \cdot a_1 = \frac{1000 \cdot 0,014292}{10,0} \cdot 28,0 = 40,0;$$

$$a_2 = \frac{1000 \cdot J_c}{l} \cdot a_2 = 9,0; \quad b = \frac{1000 \cdot J_c}{l} \cdot b = 10,9.$$

Nach (127) ist

$$c_1 = a_1 + b = 40,0 + 10,9 = 50,9;$$

$$c_2 = a_2 + b = 9,0 + 10,9 = 19,9.$$

Die Festwerte a_1, a_2, b, c_1, c_2 sind in der Beiwertschizze Abb. 360 eingetragen.

B. Ermittlung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Nach Abb. 359 besteht die Belastung aus einer gleichmäßig verteilten Vollast q und aus vier Einzellasten P . Die beiden Belastungsfälle werden nachstehend getrennt behandelt.

a) Gleichlast $q = 2,0 \text{ t/m}$.

Aus der Kurventafel 10a erhält man für $n = 0,043$ und $\lambda = 1,0$ die Werte $\kappa_1 = 1,90$ und $\kappa_2 = 0,545$.

Damit wird:

$$\mathfrak{M}_1 = - \kappa_1 \frac{q l^2}{12} = - 1,90 \frac{2,0 \cdot 10,0^2}{12} = - 31,67 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_2 = + \kappa_2 \frac{q l^2}{12} = + 0,545 \frac{2,0 \cdot 10,0^2}{12} = + 9,08 \text{ ,, .}$$

b) Vier Einzellasten $P = 3,6 \text{ t}$.

Es gelangen hier am besten die Einflußlinien auf Tafel 14a zur Verwendung. Mit Rücksicht darauf, daß alle vier Einzellasten gleich groß sind, wird hier einfach

$$\mathfrak{M}_1 = - P \cdot l \sum \eta_1; \quad \mathfrak{M}_2 = + P \cdot l \sum \eta_2.$$

Die Ordinaten η_1 bzw. η_2 unter den vier Lasten erhält man für die Leitwerte $n = 0,043$ und $\lambda = 1,0$ der Reihe nach:

$$\eta_1 \dots\dots\dots 0,170; \quad 0,262; \quad 0,237; \quad 0,103;$$

$$\eta_2 \dots\dots\dots 0,007; \quad 0,033; \quad 0,074; \quad 0,096.$$

Hierbei ist zwischen den Einflußlinien für $n = 0,03$ und $0,05$ schätzungsweise interpoliert worden. Damit ergibt sich

$$\mathfrak{M}_1 = - 3,6 \cdot 10,0 (0,170 + 0,262 + 0,237 + 0,103) = - 27,79 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_2 = + 3,6 \cdot 10,0 (0,007 + 0,033 + 0,074 + 0,096) = + 7,56 \text{ ,, .}$$

Zusammenfassung.

Bei gleichzeitiger Einwirkung der beiden Belastungsarten erhält man

$$\mathfrak{M}_1 = - 31,67 - 27,79 = - 59,46 \text{ tm},$$

$$\mathfrak{M}_2 = + 9,08 + 7,56 = + 16,64 \text{ ,, .}$$

Die Momentenverteilung für diesen beidseitig fest eingespannt gedachten Stab unter dem Einfluß der Gesamtbelastung ist in Abb. 361 dargestellt.

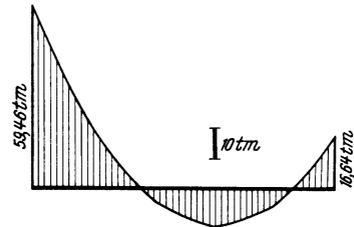


Abb. 361. M-Verlauf bei voller Einspannung.

3. Säule mit Voute.

In Abb. 362 ist eine Säule als Glied eines Rahmentragwerkes mit der vorhandenen Belastung und allen erforderlichen Längen- und Querschnittsabmessungen dargestellt. Da es mitunter üblich ist, an Stelle der Voute eine entsprechend kürzere starre Stabstrecke in Rechnung zu setzen, sollen nachstehend beide Arten zahlenmäßig durchgeführt und einander gegenübergestellt werden.

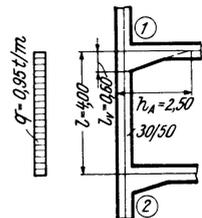


Abb. 362. Stababmessungen und Belastung.

1. Art: *Stab mit gerader Voute.*

A. Ermittlung der Festwerte a_1, a_2, b, c_1, c_2 .

Aus Tafel 1 ergibt sich:

für den unveränderlichen Stabbereich mit $b/h = 30/50$ (cm) $J_c = 0,003125 \text{ m}^4$,
 für den Auflagerquerschnitt mit $b/h_A = 30/250$ (cm) $J_A = 0,390625 \text{ ,,}$.

Somit ist
$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,003125}{0,390625} = 0,008 \text{ und } \lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{0,60}{4,00} = 0,15.$$

Mit diesen Werten für n und λ erhält man aus der Kurventafel 5a

$$a_1 = 7,00; \quad a_2 = 4,60; \quad b = 3,35$$

und damit nach (147)

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1 = \frac{1000 \cdot 0,003125}{4,0} \cdot 7,0 = 5,47;$$

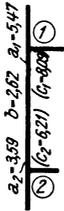
$$a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2 = 3,59; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b = 2,62;$$

sowie nach (127)

$$c_1 = a_1 + b = 5,47 + 2,62 = 8,09;$$

$$c_2 = a_2 + b = 3,59 + 2,62 = 6,21.$$

Abb. 362 a. Beiwertskizze.



Sämtliche Festwerte sind in Abb. 362a eingetragen.

B. Ermittlung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Aus Tafel 9a erhält man mit den vorliegenden Leitwerten $n = 0,008$ und $\lambda = 0,15$ die Werte $\kappa_1 = 1,53$ und $\kappa_2 = 0,76$ und damit für die vorhandene Gleichlast $q = 0,95 \text{ t/m}$ unter Beachtung der Vorzeichenregel

$$\mathfrak{M}_1 = + \kappa_1 \frac{q l^2}{12} = + 1,53 \cdot \frac{0,95 \cdot 4,0^2}{12} = + 1,94 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_2 = - \kappa_2 \frac{q l^2}{12} = - 0,76 \cdot \frac{0,95 \cdot 4,0^2}{12} = - 0,96 \text{ ,,} .$$

2. Art: *Stab mit starrer Strecke.*

Es wird als Ersatz für die Abschrägung eine unendlich starre Strecke mit der Länge $l_v = 0,50 \text{ m}$ angenommen (Abb. 363), so daß hier

$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,003125}{\infty} = 0 \text{ und } \lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{0,50}{4,00} = 0,125.$$

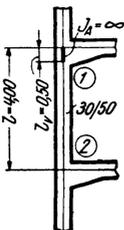


Abb. 363. Abb. 363 a.

Abb. 363 und 363 a. Stababmessungen und Beiwertskizze.

A. Ermittlung der Festwerte a_1, a_2, b, c_1, c_2 .

Aus Tafel 5a erhält man für die Leitwerte $n = 0$ und $\lambda = 0,125$:

$$a_1 = 6,80; \quad a_2 = 4,60; \quad b = 3,25$$

und damit nach (147)

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1 = \frac{1000 \cdot 0,003125}{4,0} \cdot 6,80 = 5,31;$$

$$a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2 = 3,59; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b = 2,54$$

und nach (127)

$$c_1 = a_1 + b = 5,31 + 2,54 = 7,85;$$

$$c_2 = a_2 + b = 3,59 + 2,54 = 6,13.$$

Diese Beiwerte, die nur geringe Abweichungen gegenüber den für den Voutenstab berechneten Werten zeigen, sind in Abb. 363a eingetragen.

B. Ermittlung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Mit den Leitwerten $n=0$ und $\lambda=0,125$ erhält man aus Tafel 9a

$$\kappa_1 = 1,52 \text{ und } \kappa_2 = 0,765$$

und damit unter Beachtung der Vorzeichenregel

$$\mathfrak{M}_1 = + \kappa_1 \frac{q l^2}{12} = + 1,52 \cdot \frac{0,95 \cdot 4,0^2}{12} = + 1,92 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_2 = - \kappa_2 \frac{q l^2}{12} = - 0,765 \cdot \frac{0,95 \cdot 4,0^2}{12} = - 0,97 \text{ ,, ,}$$

also wieder nur geringe Abweichungen gegenüber früher. Die Momentenverteilung nach beiden Rechnungsarten ist in Abb. 363 b für volle Einspannung eingetragen.



Abb. 363 b. M-Verlauf bei voller Einspannung.

4. Stab mit verschiedenen Vouten an beiden Enden.

Die Form des Stabes mit allen erforderlichen Maßangaben ist aus Abb. 364 ersichtlich.

A. Ermittlung der Stabfestwerte a_1, a_2, b, c_1, c_2 .

Auch in diesem Falle können die Zahlentafeln Verwendung finden. Die Festwerte a_1, a_2, b sind aber nicht direkt aus den Tafeln zu entnehmen, sondern nach (144) aus den Werten α_1, α_2 und β der in Abb. 364 a, b dargestellten Ersatzstäbe „a“ und „b“ mit je einer Voute zu bestimmen.

(Siehe Erster Teil, zweiter Abschnitt, IV, 2, C.)

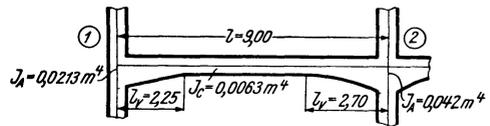


Abb. 364. Stababmessungen.

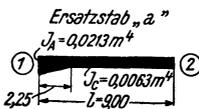


Abb. 364 a.

Ersatzstab „a“ mit *gerader* Voute.

Nach Abb. 364a wird

$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,0063}{0,0213} = 0,296 = 0,30;$$

$$\lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{2,25}{9,0} = 0,25.$$

Aus Tafel 17 erhält man mit diesen Leitwerten für den Ersatzstab „a“:

$$\bar{\alpha}_1^{(a)} = 0,242; \quad \bar{\alpha}_2^{(a)} = 0,332;$$

$$\bar{\beta}^{(a)} = 0,158.$$

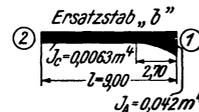


Abb. 364 b.

Ersatzstab „b“ mit *parabolischer* Voute.

Nach Abb. 364b wird

$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,0063}{0,042} = 0,15;$$

$$\lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{2,70}{9,0} = 0,30.$$

Aus Tafel 18 erhält man mit diesen Leitwerten für den Ersatzstab „b“:

$$\bar{\alpha}_1^{(b)} = 0,227; \quad \bar{\alpha}_2^{(b)} = 0,332;$$

$$\bar{\beta}^{(b)} = 0,156.$$

Damit ergeben sich nach (144) die Winkelwerte $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\beta}$ für die gegebene Stabform der Abb. 364, und zwar:

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1^{(a)} + \bar{\alpha}_2^{(b)} - \frac{1}{3} = + 0,242 + 0,332 - 0,333 = + 0,241;$$

$$\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_2^{(a)} + \bar{\alpha}_1^{(b)} - \frac{1}{3} = + 0,332 + 0,227 - 0,333 = + 0,226;$$

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}^{(a)} + \bar{\beta}^{(b)} - \frac{1}{6} = + 0,158 + 0,156 - 0,167 = + 0,147.$$

Mit diesen Werten, die noch auf den Stab mit der Länge $l = 1$ bezogen sind, erhält man nach (119)

$$a_1 = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\beta}^2} = \frac{0,226}{0,241 \cdot 0,226 - 0,147^2} = \frac{0,226}{0,0329} = 6,87;$$

$$a_2 = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\beta}^2} = \frac{0,241}{0,0329} = 7,33; \quad b = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\beta}^2} = \frac{0,147}{0,0329} = 4,47.$$

Daraus folgt schließlich nach (147)

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1 = \frac{1000 \cdot 0,0063}{9,0} \cdot 6,87 = 4,81;$$

$$a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2 = 5,13; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b = 3,13$$

und nach (127)

$$c_1 = a_1 + b = 4,81 + 3,13 = 7,94;$$

$$c_2 = a_2 + b = 5,13 + 3,13 = 8,26.$$

$$\textcircled{1} \left| \begin{array}{ccc} \bar{a}_1 = 4,81 & \bar{b} = 3,13 & \bar{a}_2 = 5,13 \\ \hline c_1 = 7,94 & & c_2 = 8,26 \end{array} \right| \textcircled{2}$$

Abb. 365. Beiwertskeizze.

Diese Festwerte sind in Abb. 365 eingetragen.

B. Ermittlung der Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Der Vorgang ist hier ähnlich wie bei der Ermittlung der Stabfestwerte. Es werden wieder zuerst für die Ersatzstäbe „a“, „b“ mit je einer Voute und für den Ersatzstab „c“ ohne Voute mit Hilfe der Zahlen- und Kurventafeln die der gegebenen Belastung (hier Gleichlast $q = 4,7$ t/m) entsprechenden Winkelwerte $\bar{\alpha}_1^{0(a)}$, $\bar{\alpha}_2^{0(a)}$; $\bar{\alpha}_1^{0(b)}$, $\bar{\alpha}_2^{0(b)}$ und $\bar{\alpha}_1^{0(c)}$, $\bar{\alpha}_2^{0(c)}$ bestimmt und damit nach (159a) die Winkelwerte $\bar{\alpha}_1^0$ und $\bar{\alpha}_2^0$ für die vorliegende Stabform mit ungleichen Vouten ermittelt.

(Siehe Erster Teil, zweiter Abschnitt, V, 3 C.)

Ersatzstab „a“ mit *gerader* Voute.

Aus Tafel 21 erhält man mit den Leitwerten $n = 0,30$ und $\lambda = 0,25$

$$\bar{\alpha}_1^{0(a)} = 0,0378; \quad \bar{\alpha}_2^{0(a)} = 0,0411.$$

Ersatzstab „b“ mit *parabolischer* Voute.

Aus Tafel 22 erhält man mit den Leitwerten $n = 0,15$ und $\lambda = 0,30$

$$\bar{\alpha}_1^{0(b)} = 0,0372; \quad \bar{\alpha}_2^{0(b)} = 0,0410.$$

Für den Ersatzstab „c“ ohne Vouten kann aus jeder der beiden Tafeln entnommen werden:

$$\bar{\alpha}_1^{0(c)} = \bar{\alpha}_2^{0(c)} = 0,0417.$$

Damit wird nach (159a)

$$\bar{\alpha}_1^0 = \bar{\alpha}_1^{0(a)} + \bar{\alpha}_2^{0(b)} - \bar{\alpha}_1^{0(c)} = 0,0378 + 0,0410 - 0,0417 = 0,0371;$$

$$\bar{\alpha}_2^0 = \bar{\alpha}_2^{0(a)} + \bar{\alpha}_1^{0(b)} - \bar{\alpha}_2^{0(c)} = 0,0411 + 0,0372 - 0,0417 = 0,0366$$

und es ergeben sich die EJ_c -fachen Auflagerdrehwinkel für die gegebene Belastung $q = 4,7 \text{ t/m}$:

$$\alpha_1^0 = \bar{\alpha}_1^0 \cdot q l^3 = 0,0371 \cdot 4,7 \cdot 9,0^3 = 127,1;$$

$$\alpha_2^0 = \bar{\alpha}_2^0 \cdot q l^3 = 0,0366 \cdot 4,7 \cdot 9,0^3 = 125,4.$$

Damit erhält man schließlich die Belastungsglieder \mathfrak{M} nach (156):

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{l} (a_1 \alpha_1^0 - b \alpha_2^0) = -\frac{1}{9,0} (6,87 \cdot 127,1 - 4,47 \cdot 125,4) = -34,74 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_2 = +\frac{1}{l} (a_2 \alpha_2^0 - b \alpha_1^0) = -\frac{1}{9,0} (4,47 \cdot 127,1 - 7,33 \cdot 125,4) = +39,01 \text{ ,, .}$$

Der zugehörige Momentenverlauf für den voll eingespannten Träger ist in Abb. 366 dargestellt.

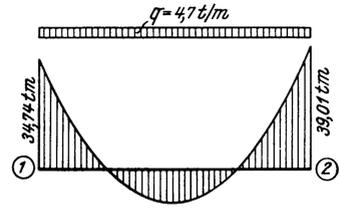


Abb. 366. M -Verlauf bei voller Einspannung.

5. Geneigte Rahmenstäbe mit Vouten.

Bei solchen Stäben wird es oft nicht ganz klar sein, welche Werte als Voutenlänge l_v und als Querschnittshöhe h_A am Auflager in Rechnung zu setzen sind. Die Abb. 367 a und 367 b zeigen, welche Annahmen in solchen Fällen getroffen werden können. Man kann natürlich auch irgendeine ungleichmäßige Auflagerverstärkung, so z. B. die Säulenverbreiterungen bei Pilzdecken, durch eine einfachere Voutenform oder auch durch eine kürzere, unendlich starre Strecke ersetzen. Die weitere Berechnung ist dann unter Benutzung der Hilfstafeln im Dritten Teil des Buches in der gewohnten Weise vorzunehmen.

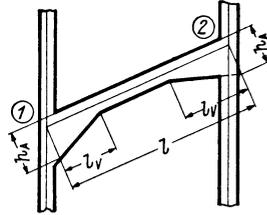


Abb. 367 a.

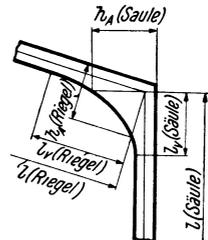


Abb. 367 b.

Abb. 367 a und b. Geneigte Voutenstäbe.

II. Unverschiebliche Tragwerke.

Vorbemerkung. Die in diesem Abschnitte zur Behandlung gelangenden Zahlenbeispiele wurden auch im ersten Abschnitt bereits vollständig durchgerechnet. Es sind also hier wieder dieselben Längenabmessungen der einzelnen Rahmenstäbe und auch dieselben Belastungen vorhanden, jedoch treten im Gegensatz zu früher nun bei einzelnen Stäben Vouten auf. Es empfiehlt sich daher, das Endergebnis, also die Momentenverteilung der Tragwerke *mit* und *ohne* Vouten zu vergleichen, um den Einfluß der Veränderlichkeit der Stabquerschnitte auch zahlenmäßig ungefähr abschätzen zu lernen.

Will man aber auch die *Formänderungswerte* φ , ψ , Δ , δ in beiden Fällen miteinander vergleichen, so ist zu beachten, daß bei der Berechnung der Tragwerke *ohne* Vouten aus Zweckmäßigkeitsgründen in der Regel nach (23) der Reduktionsfaktor $z = \frac{1000}{2E}$ verwendet worden ist, während bei den Tragwerken *mit* Vouten meist nach (146) $z = \frac{1000}{E}$ gewählt wird. Es sind daher die unter dieser Voraussetzung ermittelten Formänderungsgrößen vorerst zu verdoppeln, damit sie unmittelbar mit den entsprechenden Werten aus der ersten Rechnung (ohne Vouten) verglichen werden können.

Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Bezeichnung der Festwerte a_1 und a_2 grundsätzlich immer so gewählt wird, daß bei Stäben mit einseitigen Vouten a_1

den Festwert auf der *Voutenseite* und a_2 den Festwert auf dem *voutenfremen* Ende bedeutet. Zur Erzielung einer guten Übersicht enthalten die Festwerttabellen in der letzten Spalte jeweils die Nummern jener Hilfstafeln, aus welchen die Werte a_1 , a_2 und b für die zugehörigen Leitwerte n und λ entnommen worden sind.

Zahlenbeispiel 14 (vgl. auch Nr. 1).

Rahmenteil mit Kragarm. Feste Einspannung in den Knotenpunkten 1, 3, 4, daher $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$. Es ist also nur *eine* Unbekannte zu bestimmen, nämlich φ_2 . Die Längen- und Querschnittsabmessungen sind aus Abb. 368, die Belastungsangaben aus Abb. 369 zu entnehmen. Bei der Berechnung soll die gerade Voute des Stabes 2–3 berücksichtigt werden.

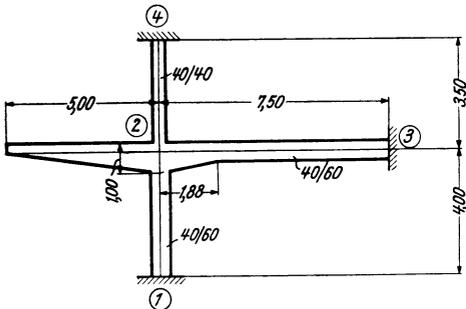


Abb. 368. Tragwerksabmessungen.

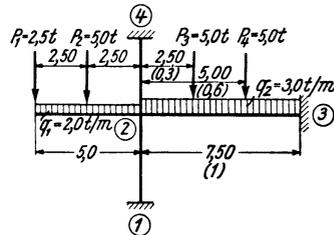


Abb. 369. Belastungsangaben.

Die Ermittlung der Festwerte a_1 , a_2 , b für die einzelnen Stäbe erfolgt am besten in einer Tabelle, in welcher alle Zwischenrechnungen aufgenommen sind.

Festwerttabelle 14.

Stab	b/h (cm)	J_c (m ⁴)	b/h_A	J_A (m ⁴)	l (m)	l_v (m)	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$
1–2	40/60	0,00720	40/60	0,00720	4,0	0	0	1
2–3	40/60	0,00720	40/100	0,03333	7,5	1,88	0,25	0,216
2–4	40/40	0,00213	40/40	0,00213	3,5	0	0	1

Stab	λ	n	a_1	a_2	b	a_1	a_2	b	Tafel
1–2	0	1	4	4	2	7,20	7,20	3,60	—
2–3	0,25	0,216	6,60	4,47	3,10	6,34	4,28	2,98	5a
2–4	0	1	4	4	2	2,44	2,44	1,22	—

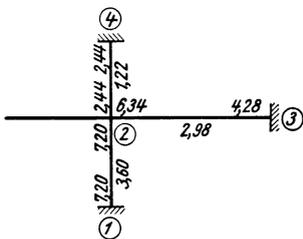


Abb. 370. Beiwertskeizze.

Die Beiwerte a_1 , a_2 , b in der vorstehenden Tabelle ergeben sich nach (147) wie folgt:

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1; \quad a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b.$$

Sämtliche Festwerte sind in der Beiwertskeizze Abb. 370 eingetragen, und zwar die a -Werte an den Stabenden und die b -Werte in der Stabmitte.

Diagonalglied d_2 .

Nach (164) ist allgemein

$$d_n = \sum_i a_{n,i}$$

daher laut Beiwertskeizze Abb. 370

$$d_2 = 7,20 + 6,34 + 2,44 = 15,98.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 2–3. Einseitig gerade Voute mit $n = 0,216$; $\lambda = 0,25$; $l = 7,5$ m.

Die Beiträge für die durchgehende Belastung $q_2 = 3,0$ t/m sowie für die Einzel-
lasten $P_3 = P_4 = 5$ t an den Orten $\frac{2,5}{7,5} = 0,3$ bzw. $\frac{5,0}{7,5} = 0,6$ werden getrennt er-
mittelt und dann summiert. Es ergeben sich nach Tafel 9a

$$\mathfrak{M}_{2,3}^{(q_2)} = -\kappa_1 \frac{q l^2}{12} = -1,39 \cdot \frac{3,0 \cdot 7,5^2}{12} = -19,60 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{3,2}^{(q_2)} = +\kappa_2 \frac{q l^2}{12} = +0,826 \cdot \frac{3,0 \cdot 7,5^2}{12} = +11,60 \text{ ,,}$$

und nach den Einflußlinientafeln 13a

$$\mathfrak{M}_{2,3}^{(P_3)} = -\eta_1 \cdot P \cdot l = -0,210 \cdot 5,0 \cdot 7,5 = -7,87 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{3,2}^{(P_3)} = +\eta_2 \cdot P \cdot l = +0,047 \cdot 5,0 \cdot 7,5 = +1,76 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{2,3}^{(P_4)} = -\eta_1 \cdot P \cdot l = -0,113 \cdot 5,0 \cdot 7,5 = -4,24 \text{ ,,};$$

$$\mathfrak{M}_{3,2}^{(P_4)} = +\eta_2 \cdot P \cdot l = +0,132 \cdot 5,0 \cdot 7,5 = +4,95 \text{ ,,};$$

somit zusammengefaßt:

$$\mathfrak{M}_{2,3} = \mathfrak{M}_{2,3}^{(q_2)} + \mathfrak{M}_{2,3}^{(P_3)} + \mathfrak{M}_{2,3}^{(P_4)} = -19,60 - 7,87 - 4,24 = -31,71 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{3,2} = \mathfrak{M}_{3,2}^{(q_2)} + \mathfrak{M}_{3,2}^{(P_3)} + \mathfrak{M}_{3,2}^{(P_4)} = +11,60 + 1,76 + 4,95 = +18,31 \text{ ,,}.$$

Kragarm. $M_{2,k} = +2,0 \cdot \frac{5,0^2}{2} + 2,5 \cdot 5,0 + 5,0 \cdot 2,5 = +50,00 \text{ tm}.$

Knotenbelastungsglied s_2 .

Nach (165) ist allgemein $s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k,$

daher

$$s_2 = \mathfrak{M}_{2,3} + M_{2,k} = -31,71 + 50,0 = +18,29 \text{ tm}.$$

Knotengleichung.

Nach (163) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Da im vorliegenden Fall sämtliche dem Knoten 2 benachbarten Knotendrehwinkel
gleich Null sind, so wird einfach

$$d_2 \varphi_2 + s_2 = 0 \text{ oder } 15,98 \varphi_2 + 18,29 = 0$$

und daraus

$$\varphi_2 = -\frac{18,29}{15,98} = -1,145.$$

Momente.

Nach (124) ist allgemein für einen Stab 1–2
mit $\psi = 0$:

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Damit ergeben sich unter Benutzung der Beiwert-
skizze Abb. 370 zur Entnahme der Werte a
und b :

$$M_{2,1} = -7,20 \cdot 1,145 = -8,24 \text{ tm}$$

$$M_{2,3} = -6,34 \cdot 1,145 - 31,71 = -38,97 \text{ ,,}$$

$$M_{2,4} = -2,44 \cdot 1,145 = -2,79 \text{ ,,}$$

$$M_{1,2} = -3,60 \cdot 1,145 = -4,12 \text{ tm}$$

$$M_{3,2} = -2,98 \cdot 1,145 + 18,31 = +14,90 \text{ ,,}$$

$$M_{4,2} = -1,22 \cdot 1,145 = -1,40 \text{ ,,}.$$

Diese Momente sind in Abb. 371 maßstäblich aufgetragen.

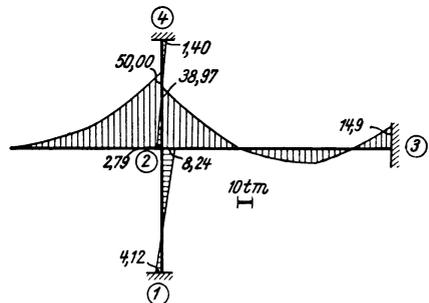


Abb. 371. Momentenverlauf.

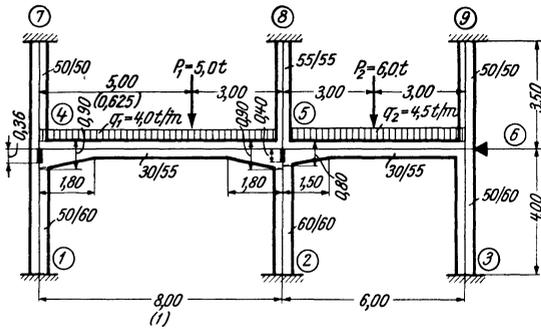


Abb. 372. Tragwerksabmessungen mit Belastungsangaben.

Zahlenbeispiel 15 (vgl. auch Nr. 2).

Zweifeldiger Unterzug in steifer Verbindung mit den Säulen des darunter- und darüberliegenden Stockwerkes. Feste Einspannung in den Knotenpunkten 1, 2, 3, 7, 8, 9. Seitlich unverschieblich festgehalten, daher nur *drei* Unbekannte, und zwar $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Die Belastungsangaben sowie die Längen- und Querschnittsabmessungen sind aus Abb. 372 zu entnehmen.

Bei der Berechnung sollen bei den Riegeln 4–5 und 5–6 die geraden Vouten berücksichtigt werden, während bei den Säulen 1–4 und 2–5 am oberen Ende an Stelle der Vouten starre Strecken mit den Längen $l_v = 0,36$ m bzw. 0,40 m anzunehmen sind, längs welcher also $J_A = \infty$ ist.

Festwerttabelle 15.

Stab	b/h (cm)	J_c (m ⁴)	b/h_A	J_A (m ⁴)	l (m)	l_v (m)	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$
1–4	50/60	0,00900	50/∞	∞	4,00	0,36	0,09	0
2–5	60/60	0,01080	60/∞	∞	4,00	0,40	0,10	0
3–6	50/60	0,00900	50/60	0,00900	4,00	0	0	1
4–5	30/55	0,00416	30/90	0,01823	8,00	1,80	0,225	0,228
5–6	30/55	0,00416	30/80	0,01280	6,00	1,50	0,25	0,325
4–7, 6–9	50/50	0,00521	50/50	0,00521	3,50	0	0	1
5–8	55/55	0,00763	55/55	0,00763	3,50	0	0	1

Stab	λ	n	a_1	a_2	b	a_1	a_2	b	Tafel
1–4	0,09	0	5,90	4,40	2,85	13,24	9,90	6,41	5a
2–5	0,10	0	6,09	4,44	2,96	16,44	12,00	7,99	5a
3–6	0	1	4	4	2	9,00	9,00	4,50	—
4–5	0,225	0,228	7,00	7,00	4,45	3,64	3,64	2,31	7a
5–6	0,25	0,325	5,85	4,35	2,79	4,05	3,01	1,93	5a
4–7, 6–9	0	1	4	4	2	5,95	5,95	2,98	—
5–8	0	1	4	4	2	8,72	8,72	4,36	—

Die Beiwerte a_1, a_2, b in der vorstehenden Tabelle werden nach (147) wie folgt bestimmt:

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1; \quad a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b.$$

Alle Festwerte sind in der Beiwertskizze Abb. 373 eingetragen, und zwar die a -Werte an den Stabenden, die b -Werte in der Stabmitte.

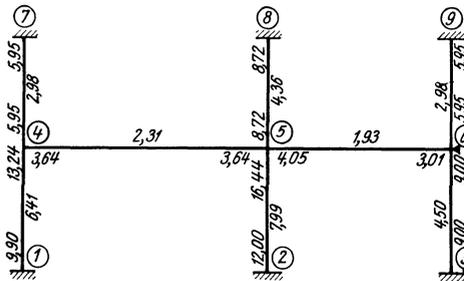


Abb. 373. Beiwertschizze.

Diagonalglieder d.

Nach (164) ist allgemein $d_n = \sum_i a_{n,i}$.

An Hand der Beiwertschizze Abb. 373 erhält man damit für den vorliegenden Fall:

$$d_4 = 13,24 + 3,64 + 5,95 = 22,83;$$

$$d_5 = 16,44 + 3,64 + 4,05 + 8,72 = 32,85;$$

$$d_6 = 9,00 + 3,01 + 5,95 = 17,96.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Die Beiträge für die verschiedenen Belastungen werden jeweils getrennt ermittelt und dann summiert.

Stab 4–5. Beidseitig gerade Vouten mit $n = 0,228$ und $\lambda = 0,225$; $l = 8,0$ m.

Belastung: $q_1 = 4,0$ t/m und $P_1 = 5,0$ t an der Stelle $\frac{a}{l} = \frac{5,0}{8,0} = 0,625$.

Nach Tafel 11a wird

$$\mathfrak{M}_{4,5}^{(q_1)} = -\kappa \frac{q l^2}{12} = -1,162 \cdot \frac{4,0 \cdot 8,0^2}{12} = -24,79 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,4}^{(q_1)} = +24,79 \text{ tm}.$$

Aus den Einflußlinientafeln 15a ergibt sich nach Interpolation

$$\mathfrak{M}_{4,5}^{(P_1)} = -\eta_1 \cdot P \cdot l = -0,091 \cdot 5,0 \cdot 8,0 = -3,64 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,4}^{(P_1)} = +\eta_2 \cdot P \cdot l = +0,186 \cdot 5,0 \cdot 8,0 = +7,44 \text{ ,,};$$

daher

$$\mathfrak{M}_{4,5} = \mathfrak{M}_{4,5}^{(q_1)} + \mathfrak{M}_{4,5}^{(P_1)} = -24,79 - 3,64 = -28,43 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,4} = \mathfrak{M}_{5,4}^{(q_1)} + \mathfrak{M}_{5,4}^{(P_1)} = +24,79 + 7,44 = +32,23 \text{ ,,}.$$

Stab 5–6. Einseitig gerade Voute mit $n = 0,325$ und $\lambda = 0,25$; $l = 6,0$ m.

Belastung: $q_2 = 4,5$ t/m; $P_2 = 6,0$ t in der Stabmitte.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{5,6}^{(q_2)} = -\kappa_1 \frac{q l^2}{12} = -1,293 \cdot \frac{4,5 \cdot 6,0^2}{12} = -17,45 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5}^{(q_2)} = +\kappa_2 \frac{q l^2}{12} = +0,872 \cdot \frac{4,5 \cdot 6,0^2}{12} = +11,77 \text{ ,,}.$$

Nach den Einflußlinientafeln 13a wird

$$\mathfrak{M}_{5,6}^{(P_2)} = -\eta_1 P \cdot l = -0,171 \cdot 6,0 \cdot 6,0 = -6,16 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5}^{(P_2)} = +\eta_2 P \cdot l = +0,105 \cdot 6,0 \cdot 6,0 = +3,78 \text{ ,,};$$

daher

$$\mathfrak{M}_{5,6} = \mathfrak{M}_{5,6}^{(q_2)} + \mathfrak{M}_{5,6}^{(P_2)} = -17,45 - 6,16 = -23,61 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5} = \mathfrak{M}_{6,5}^{(q_2)} + \mathfrak{M}_{6,5}^{(P_2)} = +11,77 + 3,78 = +15,55 \text{ ,,}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (165a) ist allgemein

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

also

$$s_4 = -28,43 \text{ tm};$$

$$s_5 = +32,23 - 23,61 = +8,62 \text{ tm};$$

$$s_6 = +15,55 \text{ tm}.$$

Knotengleichungen.

Nach (163) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Damit kann unter Benutzung der Beiwertschizze Abb. 373 die Gleichungstabelle 15 aufgestellt werden.

Gleichungstabelle 15.

	φ_4	φ_5	φ_6	B
φ_4	+ 22,83	+ 2,31		- 28,43
φ_5	+ 2,31	+ 32,85	+ 1,93	+ 8,62
φ_6		+ 1,93	+ 17,96	+ 15,55

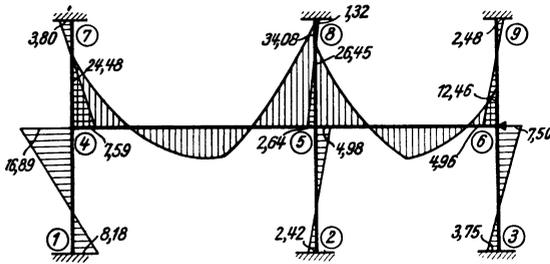


Abb. 374. Momentenverlauf.

$M_{1,4} = + 6,41 \cdot 1,276$	$= + 8,18 \text{ tm}$
$M_{2,5} = - 7,99 \cdot 0,303$	$= - 2,42 \text{ ,,}$
$M_{3,6} = - 4,50 \cdot 0,833$	$= - 3,75 \text{ ,,}$
$M_{4,1} = + 13,24 \cdot 1,276$	$= + 16,89 \text{ ,,}$
$M_{4,5} = + 3,64 \cdot 1,276 - 2,31 \cdot 0,303 - 28,43$	$= - 24,48 \text{ ,,}$
$M_{4,7} = + 5,95 \cdot 1,276$	$= + 7,59 \text{ ,,}$
$M_{5,2} = - 16,44 \cdot 0,303$	$= - 4,98 \text{ ,,}$
$M_{5,4} = - 3,64 \cdot 0,303 + 2,31 \cdot 1,276 + 32,23$	$= + 34,08 \text{ ,,}$
$M_{5,6} = - 4,05 \cdot 0,303 - 1,93 \cdot 0,833 - 23,61$	$= - 26,45 \text{ ,,}$
$M_{5,8} = - 8,72 \cdot 0,303$	$= - 2,64 \text{ ,,}$
$M_{6,3} = - 9,00 \cdot 0,833$	$= - 7,50 \text{ ,,}$
$M_{6,5} = - 3,01 \cdot 0,833 - 1,93 \cdot 0,303 + 15,55$	$= + 12,46 \text{ ,,}$
$M_{6,9} = - 5,95 \cdot 0,833$	$= - 4,96 \text{ ,,}$
$M_{7,4} = + 2,98 \cdot 1,276$	$= + 3,80 \text{ ,,}$
$M_{8,5} = - 4,36 \cdot 0,303$	$= - 1,32 \text{ ,,}$
$M_{9,6} = - 2,98 \cdot 0,833$	$= - 2,48 \text{ ,,}$

Diese Momente sind in Abb. 374 maßstäblich aufgetragen.

Zahlenbeispiel 16 (vgl. auch Nr. 4).

Symmetrischer zweistöckiger Rahmen mit fest eingespannten Stielen. Die Längen- und Querschnittsabmessungen sind aus Abb. 375, die Belastungen aus

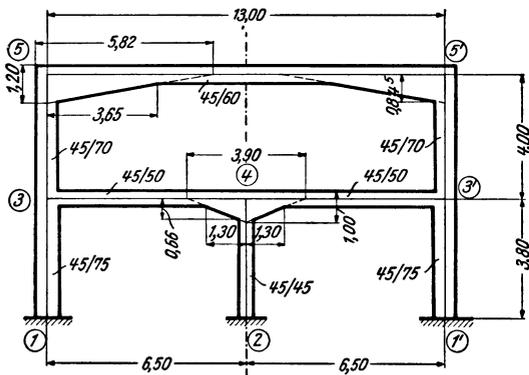


Abb. 375. Tragwerksabmessungen.

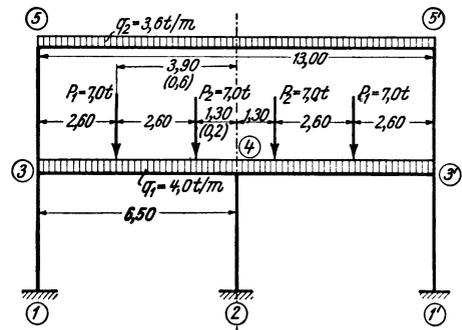


Abb. 376. Belastungsangaben.

Abb. 376 zu entnehmen. Wegen symmetrischer Belastung treten keine Knotenverschiebungen auf, außerdem ist $\varphi_4 = 0$, so daß nur zwei Unbekannte zu ermitteln sind, und zwar φ_3 und $\varphi_5 = -\varphi_5'$. Es sind bei der Berechnung die geraden Vouten der Riegel 3-4 und 5-5' sowie der Säule 3-5 zu berücksichtigen.

Die Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= + 1,276; \\ \varphi_5 &= - 0,303; \\ \varphi_6 &= - 0,833. \end{aligned}$$

Momente.

Nach (124) ist allgemein für einen Stab 1-2 mit $\psi = 0$:

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + M_{1,2}$$

Damit ergeben sich unter Benutzung der Beiwertschizze Abb. 373 zur Entnahme der Werte a und b :

Festwerttabelle 16.

Stab	$b/h(\text{cm})$	$J_c(\text{m}^4)$	b/h_A	$J_A(\text{m}^4)$	$l(\text{m})$	$l_v(\text{m})$	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$
1-3	45/75	0,01582	45/75	0,01582	3,80	0	0	1
3-4	45/50	0,00469	45/100	0,03750	6,50	1,30	0,20	0,125
3-5	45/70	0,01286	45/582	7,39265	4,00	0,845	0,21	0,0017
5-5'	45/60	0,00810	45/120	0,06480	13,00	3,65	0,28	0,125

Stab	λ	n	a_1	a_2	b	a_1	a_2	b	Tafel
1-3	0	1	4	4	2	16,66	16,66	8,33	—
3-4	0,20	0,125	6,60	4,50	3,10	4,76	3,25	2,24	5a
3-5	0,21	0,0017	9,70	5,00	4,30	31,19	16,08	13,82	5a
5-5'	0,28	0,125	10,25	10,25	7,10	6,39	6,39	4,42	7a

Die Tabellenwerte a_1, a_2, b sind nach (147) wie folgt gerechnet:

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1; \quad a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b.$$

Sämtliche Festwerte sind in der Beiwerts-
skizze Abb. 377 eingetragen.

Diagonalglieder d .

Nach (164) ist allgemein

$$d_n = \sum_i a_{n,i}$$

also

$$d_3 = 16,66 + 3,25 + 16,08 = 35,99;$$

$$d_5 = 31,19 + 6,39 = 37,58.$$

Da aber die Symmetrale durch die Mitte des
Stabes 5-5' hindurchgeht, so ist an Stelle von
 d_5 sinngemäß nach (50)

$$d'_5 = d_5 - b_{5,5'} = 37,58 - 4,42 = 33,16$$

zu setzen.

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Die Beiträge der verschiedenen Belastungen werden getrennt ermittelt und dann
summiert.

Stab 3-4. Einseitig gerade Voute auf der rechten Seite mit $n = 0,125$ und $\lambda = 0,20$; $l = 6,5$ m.

Belastung: $q_1 = 4,0$ t/m und $P_1 = P_2 = 7,0$ t an den Orten $\frac{a}{l} = \frac{1,3}{6,5} = 0,2$ bzw. $\frac{a}{l} = \frac{3,9}{6,5} = 0,6$ von der Voutenseite aus gemessen.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{3,4}^{(q_1)} = -\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = -0,81 \cdot \frac{4,0 \cdot 6,5^2}{12} = -11,41 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{4,3}^{(q_1)} = +\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = +1,43 \cdot \frac{4,0 \cdot 6,5^2}{12} = +20,14 \text{ „.}$$

Nach der Einflußlinientafel 13a wird

$$\mathfrak{M}_{3,4}^{(P_1)} = -\eta_2 \cdot P \cdot l = -0,121 \cdot 7,0 \cdot 6,5 = -5,51 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{4,3}^{(P_1)} = +\eta_1 \cdot P \cdot l = +0,148 \cdot 7,0 \cdot 6,5 = +6,73 \text{ „.}$$

$$\mathfrak{M}_{3,4}^{(P_2)} = -\eta_2 \cdot P \cdot l = -0,013 \cdot 7,0 \cdot 6,5 = -0,59 \text{ „.}$$

$$\mathfrak{M}_{4,3}^{(P_2)} = +\eta_1 \cdot P \cdot l = +0,171 \cdot 7,0 \cdot 6,5 = +7,78 \text{ „.}$$

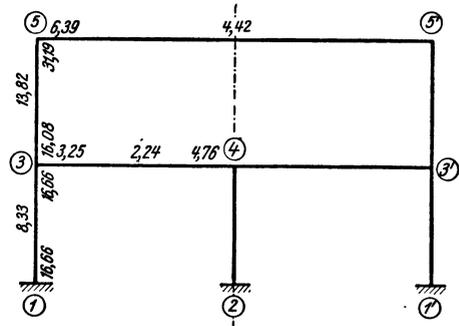


Abb. 377. Beiwerts-skizze.

Damit ergeben sich zusammengefaßt:

$$\mathfrak{M}_{3,4} = -11,41 - 5,51 - 0,59 = -17,51 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{4,3} = +20,14 + 6,73 + 7,78 = +34,65 \text{ ,,}.$$

Stab 5-5'. Beidseitig gerade Vouten mit $n = 0,125$ und $\lambda = 0,28$; $l = 13,0 \text{ m}$.

Belastung: $q_2 = 3,6 \text{ t/m}$.

Nach Tafel 11a wird

$$\mathfrak{M}_{5,5'}^{(q_2)} = -\kappa \cdot \frac{q l^2}{12} = -1,23 \cdot \frac{3,6 \cdot 13,0^2}{12} = -62,36 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (165a) ist allgemein

$$\text{daher } s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i},$$

$$s_3 = -17,51 \text{ tm};$$

$$s_5 = -62,36 \text{ ,,}.$$

Knotengleichungen.

Nach (163) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Damit erhält man unter Benutzung der Beiwertskizze Abb. 377 die Gleichungen

$$(\varphi_3) \dots 35,99 \varphi_3 + 13,82 \varphi_5 - 17,51 = 0;$$

$$(\varphi_5) \dots 13,82 \varphi_3 + 33,16 \varphi_5 - 62,36 = 0.$$

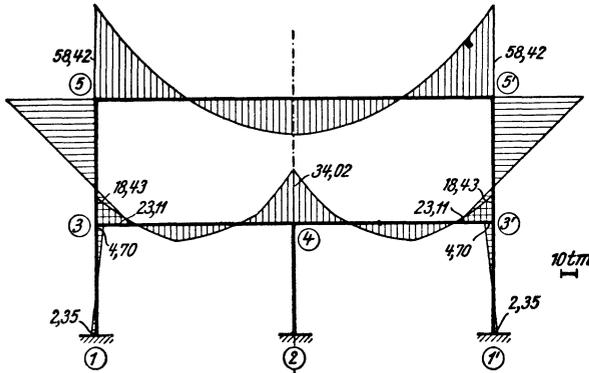


Abb. 378. Momentenverlauf.

Die Auflösung ergibt: $\varphi_5 = +2,00$; $\varphi_3 = -0,282$.

Momente.

Nach (124) ist allgemein für Stäbe mit $\psi = 0$:

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Damit ergeben sich an Hand der Beiwertskizze Abb. 377 folgende Stabendmomente:

$$M_{1,3} = -8,33 \cdot 0,282 = -2,35 \text{ tm}$$

$$M_{3,1} = -16,66 \cdot 0,282 = -4,70 \text{ ,,}$$

$$M_{3,4} = -3,25 \cdot 0,282 - 17,51 = -18,43 \text{ ,,}$$

$$M_{3,5} = -16,08 \cdot 0,282 + 13,82 \cdot 2,00 = +23,11 \text{ ,,}$$

$$M_{4,3} = -2,24 \cdot 0,282 + 34,65 = +34,02 \text{ ,,}$$

$$M_{5,3} = +31,19 \cdot 2,00 - 13,82 \cdot 0,282 = +58,48 \text{ ,,}$$

$$M_{5,5'} = + (6,39 - 4,42) \cdot 2,00 - 62,36 = -58,42 \text{ ,,}.$$

Diese Momente sind in Abb. 378 maßstäblich aufgetragen.

Zahlenbeispiel 17.

Symmetrischer zweistöckiger Rahmen mit Fußgelenken und Pendelsäulen. Abmessungen und Belastung sind in Abb. 379 und 380 gegeben. Da auch die Belastung symmetrisch ist und die Gelenkknoten keine Unbekannten in die Rechnung bringen, sind nur die beiden Knotendrehwinkel φ_4 und φ_5 zu berechnen. Die geraden Vouten der Riegel und Säulen sind in der Berechnung zu berücksichtigen.

Die Stabfestwerte a_1, a_2, b werden nach (147) wie folgt gerechnet:

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1; \quad a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2; \quad b = \frac{1000 J_e}{l} \cdot b.$$

Die Festwerte sind in der Beiwertskizze Abb. 381 eingetragen.

Festwerttabelle 17.

Stab	b/h(cm)	J_c (m ⁴)	b/h _A	J_A (m ⁴)	l(m)	l_v (m)	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$
2—4	50/70	0,01429	50/∞	∞	5,2	0,60	0,115	0
3—4	40/65	0,00915	40/140	0,09147	7,0	2,30	0,329	0,100
4—4'	40/65	0,00915	40/140	0,09147	12,0	3,00	0,250	0,100
4—5	40/70	0,01143	40/∞	∞	5,0	0,50	0,100	0
5—5'	35/60	0,00630	35/130	0,06408	12,0	3,20	0,267	0,098

Stab	λ	n	a ₁	a ₂	b	a ₁	a ₂	b	Tafel
2—4	0,115	0	6,50	4,52	3,15	17,86	12,42	8,66	5 a
3—4	0,329	0,100	9,45	4,85	4,10	12,35	6,34	5,36	5 a
4—4'	0,250	0,100	9,95	9,95	6,97	7,59	7,59	5,31	7
4—5	0,100	0	6,09	4,44	2,96	13,92	10,15	6,77	5
5—5'	0,267	0,098	10,60	10,60	7,60	5,57	5,57	3,99	7 a

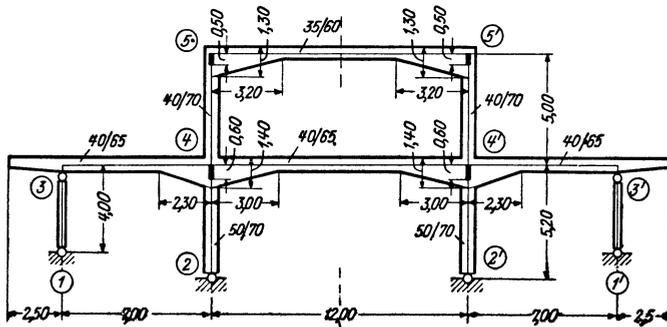


Abb. 379. Tragwerksabmessungen.

Diagonalglieder d und d^0 .

Für Knoten 4, dessen Stäbe auf der Gegenseite zum Teil gelenkig angeschlossen sind, ist nach (168)

$$d_n^0 = d_n - \sum_g \frac{b_{n,g}^2}{a_{g,n}}$$

Daher mit (164) unter Zuhilfenahme der Beiwertschizze:

$$d_4^0 = 17,86 + 12,35 + 10,15 + 7,59 - \frac{8,66^2}{12,42} - \frac{5,36^2}{6,34} = 37,38.$$

Für Knoten 5 ist nach (164)

$$d_n = \sum_i a_{n,i}$$

demnach

$$d_5 = 13,92 + 5,57 = 19,49.$$

Da aber die Symmetrale durch die Mitte der Stäbe 4—4' und 5—5' geht, ist nach (50) sinngemäß zu setzen:

$$d_4^{0'} = d_4^0 - b_{4,4'} = 37,38 - 5,31 = 32,07,$$

$$d_5' = d_5 - b_{5,5'} = 19,49 - 3,99 = 15,50.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 3—4. Einseitig gerade Voute auf der rechten Stabseite mit $\lambda = 0,329$ und $n = 0,10$; $l = 7,0$ m.

Belastung: $q = 5,0$ t/m und ein linksdrehendes, beim Stabende 3 angreifendes Moment

$$M_k = \frac{5,0 \cdot 2,5^2}{2} = 15,63 \text{ tm.}$$

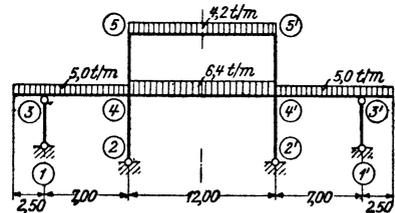


Abb. 380. Belastungsangaben.

Nach Tafel 9a ist

$$\mathfrak{M}_{3,4}^{(q)} = -\alpha_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = -0,72 \cdot \frac{5,0 \cdot 7,0^2}{12} = -14,70 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{4,3}^{(q)} = +\alpha_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = +1,67 \cdot \frac{5,0 \cdot 7,0^2}{12} = +34,10 \text{ tm}.$$

Vom Kragmoment

$$\mathfrak{M}_{3,4}^{(k)} = M_k = 15,63 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{4,3}^{(k)} = 0.$$

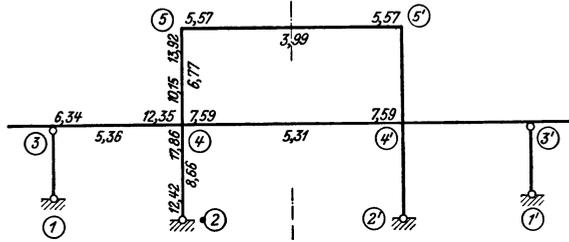


Abb. 381. Beiwertskezze.

Zusammengefaßt ergibt sich

$$\mathfrak{M}_{3,4}' = -14,70 + 15,63 = +0,93 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{4,3} = +34,10 \text{ tm}.$$

Stab 4—4'. Beidseitig gerade Vouten mit $\lambda = 0,25$ und $n = 0,10$; $l = 12,0$ m; Belastung $q = 6,4$ t/m.

Nach Tafel 11 wird

$$\mathfrak{M}_{4,4}' = -\alpha \cdot \frac{q l^2}{12} = -1,235 \cdot \frac{6,4 \cdot 12,00^2}{12} = -94,85 \text{ tm}.$$

Stab 5—5'. Beidseitig gerade Vouten mit $\lambda = 0,267$ und $n = 0,098$; $l = 12,0$ m; Belastung $q = 4,2$ t/m.

Nach Tafel 11a wird

$$\mathfrak{M}_{5,5}' = -\alpha \cdot \frac{q l^2}{12} = -1,245 \cdot \frac{4,2 \cdot 12,00^2}{12} = -62,75 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (165a) ist allgemein
$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}.$$

Für Knoten, deren Stäbe auf der Gegenseite zum Teil gelenkig angeschlossen sind, gilt nach (169)

$$s_n^0 = s_n - \sum_g \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \cdot \mathfrak{M}_{g,n}.$$

Somit

$$s_4^0 = \mathfrak{M}_{4,3} + \mathfrak{M}_{4,4}' - \frac{b_{4,3}}{a_{3,4}} \mathfrak{M}_{3,4} = +34,10 - 94,85 - \frac{5,36}{6,34} 0,93 = -61,54 \text{ tm};$$

$$s_5 = \mathfrak{M}_{5,5}' = -62,75 \text{ tm}.$$

Knotengleichungen.

Für Knoten 4, dessen Stäbe auf der Gegenseite zum Teil gelenkig angeschlossen sind, gilt nach (167) allgemein

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + s_n^0 = 0.$$

Für Knoten 5 ist nach (163)

$$d_n \varphi_n + \sum_i b_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Damit können unter Benutzung der Beiwertskezze die Gleichungen wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} (\varphi_4) \dots\dots 32,07 \varphi_4 + 6,77 \varphi_5 - 61,54 &= 0, \\ (\varphi_5) \dots\dots 6,77 \varphi_4 + 15,50 \varphi_5 - 62,75 &= 0. \end{aligned}$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\varphi_4 = + 1,172; \quad \varphi_5 = + 3,536.$$

Momente.

Für einen Stab 1—2 ohne Gelenke ist nach (125), wenn $\psi = 0$,

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Für einen Stab mit einem Gelenk bei 2 ist nach Seite 61, Formel 2c

$$M_{1,2} = \left(a_1 - \frac{b^2}{a_2} \right) \varphi_1 + \mathfrak{M}_{1,2} - \frac{b}{a_2} \mathfrak{M}_{2,1}.$$

Die entsprechende Anwendung dieser Formeln an Hand der Beiwertskeizze ergibt:

$$M_{4,2} = \left(17,86 - \frac{8,66^2}{12,42} \right) 1,172 = + 13,86 \text{ tm};$$

$$M_{4,3} = \left(12,35 - \frac{5,36^2}{6,34} \right) 1,172 + 34,10 - \frac{5,36}{6,34} 0,93 = + 42,48 \text{ tm};$$

$$M_{4,4'} = (7,59 - 5,31) 1,172 - 94,85 = - 92,18 \text{ tm};$$

$$M_{4,5} = 10,15 \cdot 1,172 + 6,77 \cdot 3,536 = + 35,84 \text{ tm};$$

$$M_{5,4} = 13,92 \cdot 3,536 + 6,77 \cdot 1,172 = + 57,16 \text{ tm};$$

$$M_{5,5'} = (5,57 - 3,99) 3,536 - 62,75 = - 57,16 \text{ tm}.$$

Das zugehörige Momentenbild zeigt Abb. 382.

Zum Vergleich ist in Abb. 383 auch das Momentenbild wiedergegeben, das man für das gleiche Tragwerk, jedoch ohne Vouten, erhält.

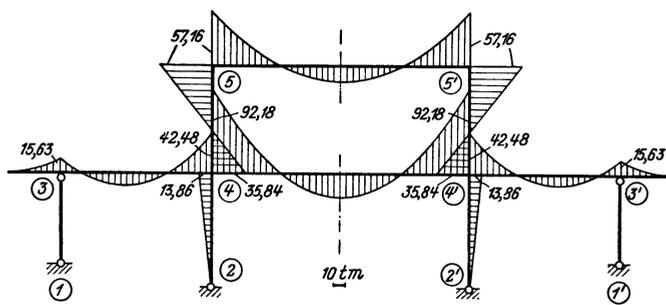


Abb. 382. *M-Verlauf für den Rahmen mit Vouten.*

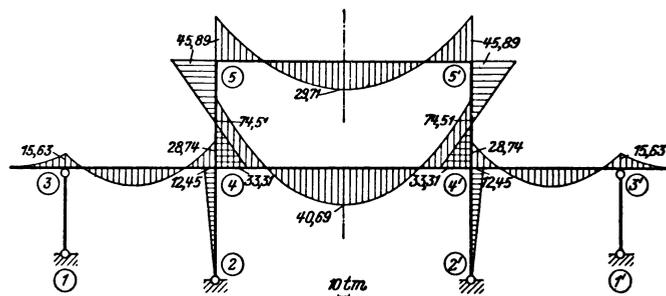


Abb. 383. *M-Verlauf für den Rahmen ohne Vouten.*

III. Verschiebliche Tragwerke.

Zahlenbeispiel 18 (vgl. auch Nr. 8).

Tribünenrahmen mit fest eingespannten Säulenfüßen (Abb. 384). Es sind also $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, so daß insgesamt *fünf* Knotendrehwinkel $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ und *zwei* Verschiebungsgrößen Δ_I und Δ_{II} als Unbekannte gemeinsam zu bestimmen sind. Längen- und Querschnittsabmessungen siehe Abb. 384. Es sind bei den ge-

neigten Stäben 4-5, 5-6 und 7-8 die einseitig geraden Vouten, ferner bei den Säulen 2-5 und 5-7 am oberen Ende starre Strecken in Rechnung zu stellen.

Zu behandeln sind zwei Belastungsfälle:

- a) Lotrechte Belastung (Abb. 385 a).
- b) Wind (Abb. 385 b).

Die in der Festwerttabelle 18 enthaltenen Werte a , b , \bar{c} ergeben sich wie folgt:
Nach (147)

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1; \quad a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b;$$

nach (122)

$$c_1 = a_1 + b; \quad c_2 = a_2 + b;$$

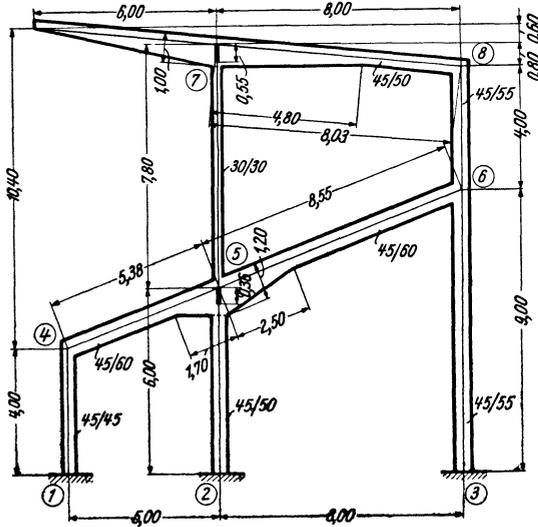


Abb. 384. Tragwerksabmessungen.

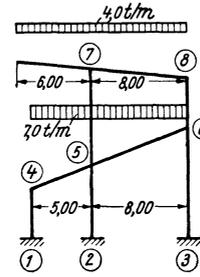


Abb. 385 a. Lotrechte Belastung.

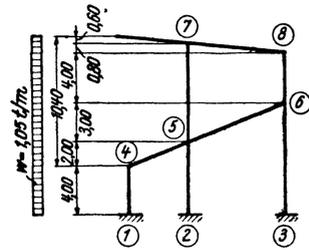


Abb. 385 b. Windbelastung.

Festwerttabelle 18.

Stab	b/h (cm)	J_c (m ⁴)	b/h_A	J_A (m ⁴)	l (m)	l_v (m)	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$
1-4	45/45	0,00342	45/45	0,00342	4,00	0	0	1,000
2-5	45/50	0,00469	45/∞	∞	6,00	0,36	0,06	0
3-6	45/55	0,00624	45/55	0,00624	9,00	0	0	1,000
4-5	45/60	0,00810	45/120	0,06480	5,38	1,70	0,316	0,125
5-6	45/60	0,00810	45/120	0,06480	8,55	2,50	0,293	0,125
5-7	30/30	0,000675	45/∞	∞	7,80	0,55	0,070	0
6-8	45/55	0,00624	45/55	0,00624	4,00	0	0	1,000
7-8	45/50	0,00469	45/100	0,03750	8,03	4,80	0,598	0,125

Stab	λ	n	a_1	a_2	b	a_1	a_2	b	\bar{c}_1	\bar{c}_2	Tafel
1-4	0	1,000	4	4	2	3,42	3,42	1,71	1,285	1,285	—
2-5	0,06	0	5,15	4,26	2,55	4,02	3,33	1,99	1,002	0,887	5 a
3-6	0	1,000	4	4	2	2,77	2,77	1,39	0,462	0,462	—
4-5	0,316	0,125	8,65	4,75	3,81	13,02	7,15	5,74	—	—	5 a
5-6	0,293	0,125	8,20	4,70	3,68	7,76	4,45	3,48	—	—	5 a
5-7	0,070	0	5,36	4,27	2,64	0,464	0,370	0,228	0,089	0,077	5 a
6-8	0	1,000	4	4	2	6,24	6,24	3,12	2,34	2,34	—
7-8	0,598	0,125	14,20	5,07	5,03	8,30	2,96	2,94	—	—	5 a

nach (178) für einen Stab mit der Länge l_μ

$$\bar{c}_1 = \frac{c_1}{l_\mu} = \frac{a_1 + b}{l_\mu}; \quad \bar{c}_2 = \frac{c_2}{l_\mu} = \frac{a_2 + b}{l_\mu}.$$

Die Werte \bar{c}_1 und \bar{c}_2 brauchen nur für die Säulen bestimmt zu werden, da bei den übrigen Stäben keine Verdrehung auftritt.

In der Beiwertschizze Abb. 386 sind die Festwerte a_1, a_2, b , ferner (in Klammern) auch die Werte \bar{c}_1 und \bar{c}_2 eingetragen.

Diagonalglieder d und D .

Nach (164)

$$d_n = \sum_i a_{n,i}$$

erhält man

$$\begin{aligned} d_4 &= 3,42 + 7,15 &&= 10,57; \\ d_5 &= 4,02 + 13,02 + 7,76 + 0,37 &&= 25,17; \\ d_6 &= 2,77 + 4,45 + 6,24 &&= 13,46; \\ d_7 &= 0,464 + 8,30 &&= 8,76; \\ d_8 &= 6,24 + 2,96 &&= 9,20. \end{aligned}$$

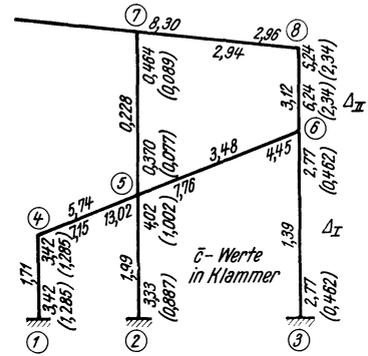


Abb. 386. Beiwertschizze.

Nach (181) ist allgemein für ein Stockwerk μ

$$D_\mu = \sum \frac{1}{l} (\bar{c}_o + \bar{c}_u),$$

also hier für das erste Stockwerk

$$D_I = \frac{2 \cdot 1,285}{4,0} + \frac{1,002 + 0,887}{6,0} + \frac{2 \cdot 0,462}{9,0} = 1,060$$

und für das zweite Stockwerk

$$D_{II} = \frac{0,089 + 0,077}{7,80} + \frac{2 \cdot 2,34}{4,0} = 1,191.$$

a) Lotrechte Lasten (Abb. 385a).

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 4–5. Einseitig gerade Voute auf der *rechten* Seite mit $n = 0,125$ und $\lambda = 0,316$; $l' = 5,00$ m.

Belastung: $q = 7,0$ t/m.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = -0,75 \cdot \frac{7,0 \cdot 5,0^2}{12} = -10,92 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,4} = +\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = +1,59 \cdot \frac{7,0 \cdot 5,0^2}{12} = +23,2 \text{ ,, .}$$

Stab 5–6. Einseitig gerade Voute auf der *linken* Seite mit $n = 0,125$ und $\lambda = 0,293$; $l' = 8,0$ m.

Belastung: $q = 7,0$ t/m.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = -1,56 \cdot \frac{7,0 \cdot 8,0^2}{12} = -58,3 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5} = +\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = +0,76 \cdot \frac{7,0 \cdot 8,0^2}{12} = +28,4 \text{ ,, .}$$

Stab 7–8. Einseitig gerade Voute auf der *linken* Seite mit $n = 0,125$ und $\lambda = 0,598$; $l' = 8,0$ m.

Belastung: $q = 4,0$ t/m.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{7,8} = -\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = -1,64 \cdot \frac{4,0 \cdot 8,0^2}{12} = -35,0 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{8,7} = +\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = +0,71 \cdot \frac{4,0 \cdot 8,0^2}{12} = +15,16 \text{ ,, .}$$

Kragmoment:

$$M_{7,k} = \frac{+4,0 \cdot 6,0^2}{2} = +72,0 \text{ tm.}$$

Knotenbelastungsglieder s.

Nach (165)

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k$$

erhält man

$$s_4 = -10,92 \text{ tm}; \quad s_7 = -35,0 + 72,0 = +37,0 \text{ tm};$$

$$s_5 = +23,2 - 58,3 = -35,1 \text{ ,,}; \quad s_8 = +15,16 \text{ ,, .}$$

$$s_6 = +28,4 \text{ ,,};$$

Die *Belastungsglieder S* für die Verschiebungsgleichungen sind durchwegs Null, weil nur lotrechte Belastungen vorhanden sind.

b) Wind.

$$w = 1,05 \text{ t/m (Abb. 385 b).}$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M}.

Stab 1-4. Keine Vouten; $l = 4,0 \text{ m}$; $q = 1,05 \text{ t/m}$, daher

$$\mathfrak{M}_{1,4} = -\frac{q l^2}{12} = -\frac{1,05 \cdot 4,0^2}{12} = -1,40 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{4,1} = +1,40 \text{ ,, .}$$

Stab 4-5. Einseitig gerade Vouten auf der *rechten* Seite mit $n = 0,125$ und $\lambda = 0,316$; $l' = 2,0 \text{ m}$.

Belastung: $q = 1,05 \text{ t/m}$.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = -0,75 \cdot \frac{1,05 \cdot 2,0^2}{12} = -0,26 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,4} = +\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = +1,59 \cdot \frac{1,05 \cdot 2,0^2}{12} = +0,56 \text{ ,, .}$$

Stab 5-6. Einseitig gerade Voute auf der *linken* Seite mit $n = 0,125$ und $\lambda = 0,293$; $l' = 3,0 \text{ m}$.

Belastung: $q = 1,05 \text{ t/m}$.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = -1,56 \cdot \frac{1,05 \cdot 3,0^2}{12} = -1,23 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5} = +\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = +0,76 \cdot \frac{1,05 \cdot 3,0^2}{12} = +0,60 \text{ ,, .}$$

Stab 6-8. Keine Vouten; $l = 4,0 \text{ m}$; $q = 1,05 \text{ t/m}$, daher wie bei Stab 1-4

$$\mathfrak{M}_{6,8} = -1,40 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{8,6} = +1,40 \text{ tm.}$$

Stab 7-8. Einseitig gerade Voute auf der *linken* Seite, jedoch von *unten* belastet; $n = 0,125$ und $\lambda = 0,598$; $l' = 0,8 \text{ m}$; $q = 1,05 \text{ t/m}$.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{7,8} = +\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = +1,64 \cdot \frac{1,05 \cdot 0,8^2}{12} = +0,09 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{8,7} = -\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = -0,71 \cdot \frac{1,05 \cdot 0,8^2}{12} = -0,04 \text{ ,, .}$$

Kragmoment:

$$M_{7,k} = -\frac{1,05 \cdot 0,6^2}{2} = -0,19 \text{ tm.}$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (165)

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum_k M_k$$

erhält man

$$\begin{aligned} s_4 &= + 1,40 - 0,26 = + 1,14 \text{ tm}; & s_7 &= - 0,19 + 0,09 = - 0,10 \text{ tm}; \\ s_5 &= + 0,56 - 1,23 = - 0,67 \text{ ,,}; & s_8 &= + 1,40 - 0,04 = + 1,36 \text{ ,,}; \\ s_6 &= + 0,60 - 1,40 = - 0,80 \text{ ,,}; \end{aligned}$$

Belastungsglieder S der Verschiebungsgleichungen.

Nach (182) wird hier unter Beachtung, daß $P = 0$ und bei den belasteten Säulen stets $\mathfrak{M}_o = -\mathfrak{M}_u$, einfach

$$S_\mu = \sum q + \sum_\mu \mathfrak{M};$$

daher für das erste Stockwerk

$$S_I = + 1,05 \cdot 10,40 + \frac{1,05 \cdot 4,0}{2} = + 13,02 \text{ t}$$

und für das zweite Stockwerk

$$S_{II} = + 1,05 \cdot 1,40 + \frac{1,05 \cdot 4,0}{2} = + 3,57 \text{ t.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (177):

$$\bar{d}_n \varphi_n + \sum_i \bar{b}_{n,i} \varphi_i + \bar{c}_{n,\mu} \Delta_\mu + \bar{c}_{n,\mu+1} \Delta_{\mu+1} + s_n = 0.$$

Verschiebungsgleichungen nach (180):

$$\sum_\mu \bar{c}_\mu \varphi_\mu + \sum_\mu \bar{c}_o \varphi_o + D_\mu \Delta_\mu + S_\mu = 0.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichungen kann an Hand der Beiwertschizze Abb. 386 die Aufstellung der Gleichungstabelle 18 vorgenommen werden. Die beiden Belastungsfälle unterscheiden sich nur durch die letzte Spalte dieser Tabelle.

Gleichungstabelle 18.

	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	Δ_I	Δ_{II}	$B^{(a)}$	$B^{(b)}$
φ_4	+ 10,57	+ 5,74				+ 1,285		- 10,92	+ 1,14
φ_5	+ 5,74	+ 25,17	+ 3,48	+ 0,228		+ 1,002	+ 0,077	- 35,1	- 0,67
φ_6		+ 3,48	+ 13,46		+ 3,12	+ 0,462	+ 2,340	+ 28,4	- 0,80
φ_7		+ 0,228		+ 8,76	+ 2,94		+ 0,089	+ 37,0	- 0,10
φ_8			+ 3,12	+ 2,94	+ 9,20		+ 2,340	+ 15,16	+ 1,36
Δ_I	+ 1,285	+ 1,002	+ 0,462			+ 1,060		—	+ 13,02
Δ_{II}		+ 0,077	+ 2,340	+ 0,089	+ 2,340		+ 1,191	—	+ 3,57

Durch Auflösung erhält man:

a) Für die lotrechte Belastung ($B^{(a)}$):

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= - 0,079; & \varphi_6 &= - 4,456; & \Delta_I &= + 0,148; \\ \varphi_5 &= + 2,014; & \varphi_7 &= - 3,568; & \Delta_{II} &= + 13,821. \\ & & \varphi_8 &= - 2,510; & & \end{aligned}$$

b) Für Wind ($B^{(b)}$):

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= + 1,755; & \varphi_6 &= + 2,042; & \Delta_I &= - 15,287; \\ \varphi_5 &= - 0,008; & \varphi_7 &= - 0,636; & \Delta_{II} &= - 11,389. \\ & & \varphi_8 &= + 2,259; & & \end{aligned}$$

Momente.

Nach (179) ist allgemein für einen Stab 1–2

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \bar{c}_1 \Delta + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Damit erhält man an Hand der Beiwertskeizze Abb. 386:

a) Für die lotrechte Belastung.

$$\begin{aligned} M_{1,4} &= + 0,05 \text{ tm} & M_{5,4} &= + 48,97 \text{ tm} & M_{7,5} &= 0,00 \text{ tm} \\ M_{2,5} &= + 4,14 \text{ „} & M_{5,2} &= + 8,25 \text{ „} & M_{7,8} &= - 71,99 \text{ „} \\ M_{3,6} &= - 6,12 \text{ „} & M_{5,6} &= - 58,18 \text{ „} & M_{8,7} &= - 2,77 \text{ „} \\ M_{4,1} &= - 0,08 \text{ „} & M_{5,7} &= + 0,99 \text{ „} & M_{8,6} &= + 2,77 \text{ „} \\ M_{4,5} &= + 0,08 \text{ „} & M_{6,5} &= + 15,58 \text{ „} & & \\ & & M_{6,3} &= - 12,27 \text{ „} & & \\ & & M_{6,8} &= - 3,30 \text{ „} & & \end{aligned}$$

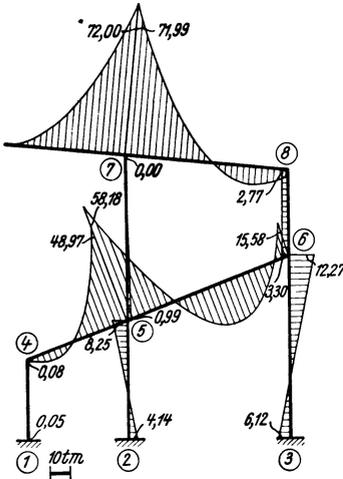


Abb. 387. M-Verlauf für lotrechte Belastung.

Zugehöriges Momentenbild siehe Abb. 387.

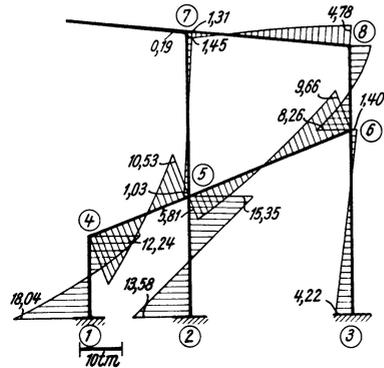


Abb. 388. M-Verlauf für Wind von links.

b) Für Wind.

$$\begin{aligned} M_{1,4} &= - 18,04 \text{ tm} & M_{5,4} &= + 10,53 \text{ tm} & M_{6,5} &= + 9,66 \text{ tm} \\ M_{2,5} &= - 13,58 \text{ „} & M_{5,2} &= - 15,35 \text{ „} & M_{6,3} &= - 1,40 \text{ „} \\ M_{3,6} &= - 4,22 \text{ „} & M_{5,6} &= + 5,81 \text{ „} & M_{6,8} &= - 8,26 \text{ „} \\ M_{4,1} &= - 12,24 \text{ „} & M_{5,7} &= - 1,03 \text{ „} & M_{7,5} &= - 1,31 \text{ „} \\ M_{4,5} &= + 12,24 \text{ „} & M_{8,7} &= + 4,78 \text{ „} & M_{7,8} &= + 1,45 \text{ „} \\ & & M_{8,6} &= - 4,78 \text{ „} & & \end{aligned}$$

Zugehöriges Momentenbild siehe Abb. 388.

Zahlenbeispiel 19 (vgl. auch Nr. 10).

Vierschiffiger symmetrischer Hallenrahmen mit Fußgelenken. Längen- und Querschnittsabmessungen siehe Abb. 389. Es sind bei den Riegeln die parabolischen Vouten, ferner bei den Innensäulen am oberen Ende starre Strecken in Rechnung zu stellen.

Zu untersuchen sind die Lastfälle:

- a) Lotrechte Belastung (Abb. 390) und
- b) Wind (Abb. 391).

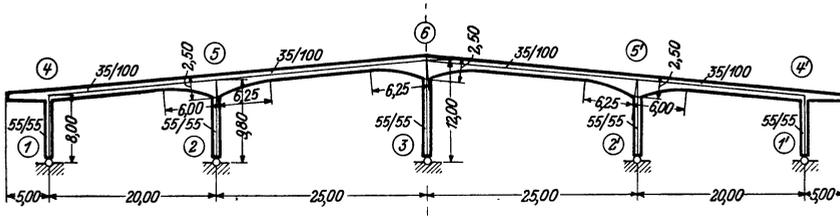


Abb. 389. Tragwerksabmessungen. Starre Strecken an den oberen Enden der Mittelstiele 0,80 m.

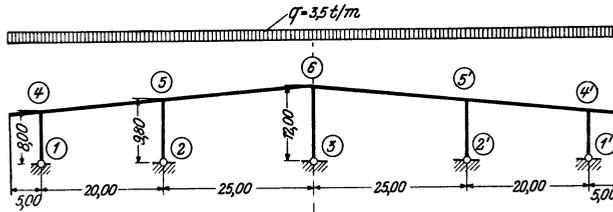


Abb. 390. Lotrechte Belastung.

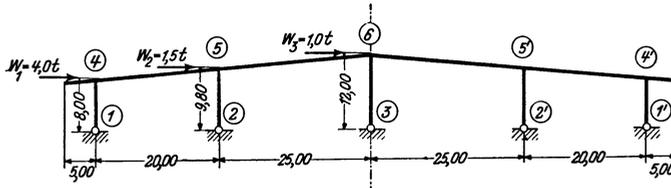


Abb. 391. Windbelastung.

Für den symmetrischen Lastfall a sind zwei Unbekannte, und zwar φ_4 und φ_5 zu ermitteln.

Der Lastfall b kann am vorliegenden Tragwerk für die Ermittlung der Momente durch den antisymmetrischen der Abb. 394 ersetzt werden (siehe Seite 35), für welchen vier Unbekannte, nämlich φ_4 , φ_5 , φ_6 , Δ gemeinsam zu bestimmen sind.

Festwerttabelle 19.

Stab	b/h (cm)	J_c (m ⁴)	b/h_A (cm)	J_A (m ⁴)	l (m)	l_v (m)	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$
1—4	55/55	0,00763	55/55	0,00763	8,0	0	0	1,000
2—5	55/55	0,00763	55/∞	∞	9,8	0,80	0,08	0
3—6	55/55	0,00763	55/∞	∞	12,0	0,80	0,06	0
4—5	35/100	0,02917	35/250	0,45573	20,0	6,00	0,30	0,064
5—6	35/100	0,02917	35/250	0,45573	25,0	6,25	0,25	0,064

Stab	λ	n	a_1	a_2	b	a_1	a_2	b	\bar{c}_0	\bar{c}_u	Tafel
1—4	0	1,000	4,00	4,00	2,00	3,82	3,82	1,91	0,716	0,716	—
2—5	0,08	0	5,50	4,35	2,74	4,28	3,39	2,13	0,654	0,563	6 a
3—6	0,06	0	5,20	4,30	2,62	3,31	2,74	1,67	0,415	0,368	6 a
4—5	0,30	0,064	7,58	4,64	3,48	11,06	6,77	5,08	—	—	6 a
5—6	0,25	0,064	8,35	8,35	5,63	9,74	9,74	6,57	—	—	8 a

Die in der Festwerttabelle 19 enthaltenen Werte a , b , \bar{c} ergeben sich wie folgt:

Nach (147)

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1; \quad a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2; \quad b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b;$$

nach (122)

$$c_1 = a_1 + b; \quad c_2 = a_2 + b;$$

nach (178) für einen Stab mit der Länge l_μ

$$\bar{c}_1 = \frac{c_1}{l_\mu}; \quad \bar{c}_2 = \frac{c_2}{l_\mu}.$$

Die Werte \bar{c}_1 und \bar{c}_2 brauchen nur für die Säulen bestimmt zu werden, da bei den Riegeln keine Verdrehung auftritt. Für die Längen der schiefen Stäbe wurden hier wegen des unbedeutenden Einflusses ihrer Neigung die runden Werte $l_{4-5} = 20,0$ und $l_{5-6} = 25,0$ m verwendet.

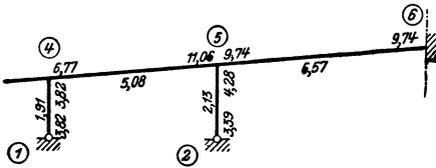


Abb. 392. Beiwertskeizze.

a) Lotrechte Belastung (Abb. 390).

Die in der Festwerttabelle ermittelten Werte a_1 , a_2 , b sind, soweit hier benötigt, in der Beiwertskeizze (Abb. 392) eingetragen.

Diagonalglieder d^0 .

Nach (164) ist

$$d_n = \sum_i a_{n,i},$$

somit

$$d_4 = 3,82 + 6,77 = 10,59,$$

$$d_5 = 11,06 + 9,74 + 4,28 = 25,08.$$

Mit Rücksicht auf die gelenkigen Stabanschlüsse gilt hier nach (168)

$$d_n^0 = d_n - \sum_g \frac{b_{n,g}^2}{a_{g,n}},$$

daher

$$d_4^0 = 10,59 - \frac{1,91^2}{3,82} = 9,63; \quad d_5^0 = 25,08 - \frac{2,13^2}{3,39} = 23,74.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 4—5. Einseitig parabolische Voute auf der rechten Seite mit $n = 0,064$ und $\lambda = 0,30$; $l' = 20,0$ m; $q = 3,5$ t/m.

Nach Tafel 10a wird

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\alpha_2 \frac{q l^2}{12} = -0,76 \frac{3,5 \cdot 20^2}{12} = -88,7 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{5,4} = +\alpha_1 \frac{q l^2}{12} = +1,55 \frac{3,5 \cdot 20^2}{12} = +180,8 \text{ tm}.$$

Stab 5—6. Beidseitig parabolische Vouten mit $n = 0,064$ und $\lambda = 0,25$; $l' = 25,0$ m; $q = 3,5$ t/m.

Nach Tafel 12a wird

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -\alpha \frac{q l^2}{12} = -1,207 \frac{3,5 \cdot 25^2}{12} = -220,0 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{6,5} = +220,0 \text{ tm}.$$

Kragmoment.

$$M_{4,k} = +\frac{q l^2}{2} = +\frac{3,5 \cdot 5,0^2}{2} = +43,8 \text{ tm}.$$

Knotenbelastungsglieder s^0 .

Da alle Gelenkstäbe unbelastet sind, wird nach (169) bzw. (165)

$$s_n^0 = s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} + \sum M_k;$$

daher

$$s_4^0 = s_4 = -88,7 + 43,8 = -44,9 \text{ tm},$$

$$s_5^0 = s_5 = +180,8 - 220,0 = -39,2 \text{ tm}.$$

Knotengleichungen.

Nach (167) ist allgemein

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + s_n^0 = 0.$$

Damit erhält man die beiden Gleichungen für die Knotenpunkte 4 und 5:

$$\begin{aligned} (\varphi_4) \dots\dots 9,63 \varphi_4 + 5,08 \varphi_5 - 44,9 &= 0, \\ (\varphi_5) \dots\dots 5,08 \varphi_4 + 23,74 \varphi_5 - 39,2 &= 0. \end{aligned}$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\varphi_4 = 4,274; \quad \varphi_5 = + 0,737.$$

Momente.

Für die Riegel ist nach (125), da $\psi = 0$,

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Für die Stiele gilt nach Seite 61, Formel 2d

$$M_{1,2} = \left(a_1 - \frac{b^2}{a_2} \right) \varphi_1.$$

Mithin

$$\begin{aligned} M_{4,1} &= \left(3,82 - \frac{1,91^2}{3,82} \right) 4,274 &&= + 12,2 \text{ tm} \\ M_{4,5} &= 6,77 \cdot 4,274 + 5,08 \cdot 0,737 - 88,7 &&= - 56,0 \text{ ,,} \\ M_{5,2} &= \left(4,28 - \frac{2,13^2}{3,39} \right) 0,737 &&= + 2,2 \text{ ,,} \\ M_{5,4} &= 11,06 \cdot 0,737 + 5,08 \cdot 4,274 + 180,8 &&= + 210,6 \text{ ,,} \\ M_{5,6} &= 9,74 \cdot 0,737 - 220,0 &&= - 212,8 \text{ ,,} \\ M_{6,5} &= 6,57 \cdot 0,737 + 220,0 &&= + 224,8 \text{ ,,} . \end{aligned}$$

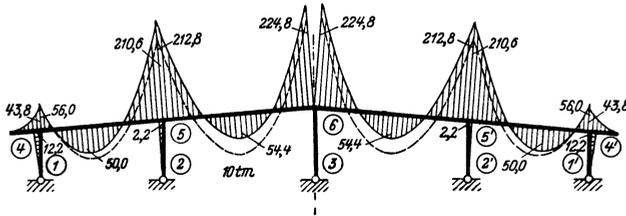


Abb. 393. Momentenverlauf mit und ohne Voutenwirkung.

Das zugehörige Momentenbild zeigt Abb. 393. Zum Vergleich sind in diesem Bild auch die Momente für den Rahmen *ohne* Vouten (siehe Zahlenbeispiel 10) strichliert eingetragen.

b) Wind (Abb. 394).
(Antimetrischer Fall.)

Die in der Festwerttabelle ermittelten Werte a_1, a_2, b , ferner \bar{c}_0, \bar{c}_u (in Klammern) sind in der Beiwertschizze Abb. 395 eingetragen. Da hier nur das halbe Tragwerk in

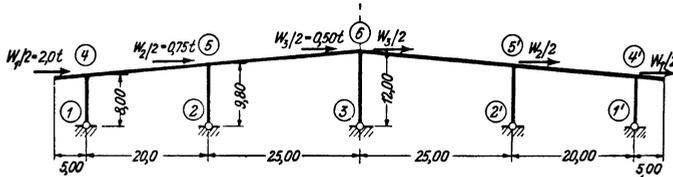


Abb. 394. Antimetrischer Lastfall.

Betracht gezogen wird, sind für den Mittelstiel im Sinne der Abb. 98 auch nur die halben Werte in Rechnung gesetzt.

Diagonalglieder d^0 und D^0 .

Aus Lastfall a können unverändert übernommen werden:

$$d_4^0 = 9,63; \quad d_5^0 = 23,74.$$

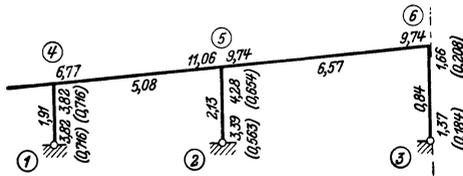


Abb. 395. Beiwertskeizze.

d_6^0 ergibt sich an Hand der Beiwertskeizze Abb. 395 nach (168) bzw. (164):

$$d_6^0 = 1,66 + 9,74 - \frac{0,84^2}{1,37} = 10,88.$$

Nach (204) ist

$$D^0 = \sum \frac{1}{l} (\bar{c}_o + \bar{c}_u) - \sum \frac{\bar{c}_u^2}{a_u},$$

somit hier

$$D^0 = \frac{2 \cdot 0,716}{8,0} + \frac{0,654 + 0,563}{9,8} + \frac{0,208 + 0,184}{12,0} - \frac{0,716^2}{3,82} - \frac{0,563^2}{3,39} - \frac{0,184^2}{1,37} = 0,0834.$$

Belastungsglied der Verschiebungsgleichung.

Nach (206) wird für die vorliegende Belastung

$$S^0 = \sum P = 2,0 + 0,75 + 0,5 = 3,25 \text{ t.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (198):

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + \bar{c}_{n,o}^0 \Delta + s_n^0 = 0.$$

Verschiebungsgleichung nach (202):

$$\sum \bar{c}_o^0 \varphi_o + D^0 \Delta + S^0 = 0.$$

Hierin ist nach (199)

$$\bar{c}_{n,o}^0 = c_o^0 = \bar{c}_o - \frac{b}{a_u} \cdot \bar{c}_u,$$

somit

$$\bar{c}_{4,1}^0 = 0,716 - \frac{1,91}{3,82} \cdot 0,716 = 0,358,$$

$$\bar{c}_{5,2}^0 = 0,654 - \frac{2,13}{3,39} \cdot 0,563 = 0,300,$$

$$\bar{c}_{6,3}^0 = 0,208 - \frac{0,84}{1,37} \cdot 0,184 = 0,095.$$

Es kann nunmehr die Aufstellung der Gleichungstabelle 19 erfolgen.

Gleichungstabelle 19.

	φ_4	φ_5	φ_6	Δ	B
φ_4	9,63	5,08		0,358	—
φ_5	5,08	23,74	6,57	0,300	—
φ_6		6,57	10,88	0,095	—
Δ	0,358	0,300	0,095	0,0834	3,25

Die Auflösung der Gleichungen ergibt:

$$\varphi_4 = +1,671; \quad \varphi_5 = +0,148; \quad \varphi_6 = +0,3214; \quad \Delta = -47,04.$$

Momente.

Für die Riegel ist nach (125), da $\psi = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$,

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2.$$

Für die Stiele gilt nach Seite 61, Formel 2b

$$M_u = 0; \quad M_o = \left(a_o - \frac{b^2}{a_u} \right) \varphi_o + \left(\bar{c}_o - \frac{b \bar{c}_u}{a_u} \right) \Delta.$$

(Für Stiele mit $J = \text{konst.}$ vereinfacht sich dieser Ausdruck wegen $a_o = a_u = 2b$ und $\bar{c}_o = \bar{c}_u$ auf $M_o = 1,5 b \varphi_o + 0,5 \bar{c}_o \Delta$.)

Somit

$$M_{4,1} = 1,5 \cdot 1,91 \cdot 1,671 - 0,5 \cdot 0,716 \cdot 47,04 = -12,06 \text{ tm},$$

$$M_{4,5} = 6,77 \cdot 1,671 + 5,08 \cdot 0,148 = +12,06 \text{ tm},$$

$$M_{5,2} = \left(4,28 - \frac{2,13^2}{3,39} \right) 0,148 - \left(0,654 - \frac{2,13 \cdot 0,563}{3,39} \right) 47,04 = -13,68 \text{ tm},$$

$$M_{5,4} = 11,06 \cdot 0,148 + 5,08 \cdot 1,671 = +10,13 \text{ tm},$$

$$M_{5,6} = 9,74 \cdot 0,148 + 6,57 \cdot 0,3214 = +3,55 \text{ tm},$$

$$M_{6,3} = \left(1,66 - \frac{0,84^2}{1,37} \right) 0,3214 - \left(0,208 - \frac{0,84 \cdot 0,184}{1,37} \right) 47,04 = -4,10 \text{ tm},$$

$$M_{6,5} = 9,74 \cdot 0,3214 + 6,57 \cdot 0,148 = +4,10 \text{ tm}.$$

Abb. 396 zeigt das zugehörige Momentenbild für das *gesamte* Tragwerk. Im Mittelstiel erscheint also das Moment $M_{6,3} = -2 \cdot 4,10 = -8,2 \text{ tm}$.

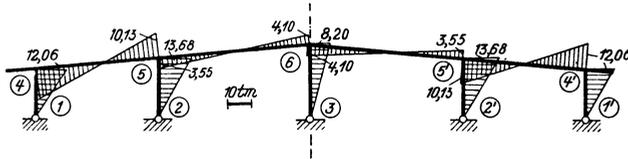


Abb. 396. M-Verlauf für Wind von links.

Zahlenbeispiel 20 (vgl. auch Nr. 13).

Lotrecht verschiebliches Tragwerk mit zurückgesetztem Obergeschoß (Abb. 397).

Wegen fester Einspannung in den Knotenpunkten 1, 2, 6, 9 ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_6 = \varphi_9 = 0$, so daß insgesamt *sechs* Unbekannte, nämlich *fünf* Knotendrehwinkel $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_7, \varphi_8$ und die Verschiebungsgröße δ der Knotenreihe 4–7 gemeinsam zu bestimmen sind. Die Belastungsangaben sind aus Abb. 398 zu entnehmen.

Das Tragwerk enthält *einen* Stab mit veränderlichen Querschnitten.

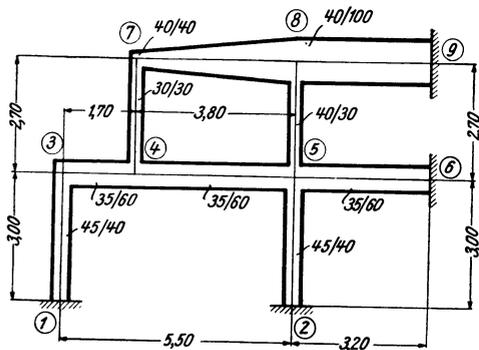


Abb. 397. Tragwerksabmessungen.

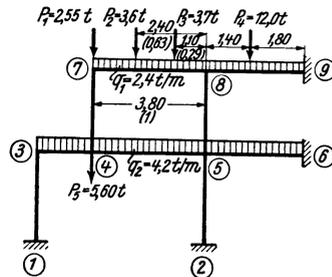


Abb. 398. Belastungsangaben.

Es ist dies der Stab 7–8, der eine über die ganze Länge reichende gerade Voute aufweist ($\lambda = \frac{l_v}{l} = 1$). Am linken Auflager ist $b/h = 40/40$ (cm), am rechten $40/100$ (cm), somit $J_c = 0,00213 \text{ m}^4$, $J_A = 0,03333 \text{ m}^4$ und $n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,00213}{0,03333} = 0,064$. Für $\lambda = 1,0$ und $n = 0,064$ ergeben sich aus Tafel 5a

$$a_1 = 32,6; a_2 = 8,2; b = 8,05,$$

für alle übrigen Stäbe ist $a_1 = a_2 = 4$ und $b = 2$.

Die in der Festwerttabelle 20 enthaltenen Werte a , b , \bar{c} werden wie folgt gerechnet:

Nach (147)

$$a_1 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_1; a_2 = \frac{1000 J_c}{l} \cdot a_2; b = \frac{1000 J_c}{l} \cdot b.$$

Nach (122)

$$c_1 = a_1 + b; c_2 = a_2 + b.$$

Nach (178) für einen Stab mit der Länge l_μ :

$$\bar{c}_1 = \frac{c_1}{l_\mu} = \frac{a_1 + b}{l_\mu}; \quad \bar{c}_2 = \frac{c_2}{l_\mu} = \frac{a_2 + b}{l_\mu}.$$

Festwerttabelle 20.

Stab	b/h(cm)	J _c (m ⁴)	l(m)	a ₁	a ₂	b	a ₁	a ₂	b	c ₁	c ₂	Tafel
1–3, 2–5	45/40	0,00240	3,00	4	4	2	3,20	3,20	1,60	—	—	—
3–4	35/60	0,00630	1,70	4	4	2	14,82	14,82	7,41	13,076	13,076	—
4–5	35/60	0,00630	3,80	4	4	2	6,63	6,63	3,32	2,618	2,618	—
5–6	35/60	0,00630	3,20	4	4	2	7,88	7,88	3,94	—	—	—
4–7	30/30	0,000675	2,70	4	4	2	1,00	1,00	0,50	—	—	—
5–8	40/30	0,00090	2,70	4	4	2	1,33	1,33	0,67	—	—	—
7–8	40/40	0,00213	3,80	32,6	8,2	8,05	18,27	4,60	4,51	5,995	2,397	5a
8–9	40/100	0,03333	3,20	4	4	2	41,66	41,66	20,83	—	—	—

In der Beiwertskeizze Abb. 399 sind die Festwerte a_1 , a_2 , b sowie (in Klammern) die erforderlichen Werte \bar{c}_1 und \bar{c}_2 eingetragen.

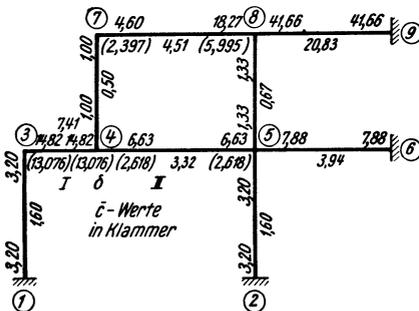


Abb. 399. Beiwertskeizze.

Beiwerte κ und C .

Nach (225) ist für einen lotrecht verschieblichen Knotenpunkt (n) zwischen den Feldern (v) und ($v + 1$) allgemein

$$\kappa_n = \bar{c}_{n,v+1} - \bar{c}_{n,v},$$

daher

$$\kappa_4 = + 2,618 - 13,076 = - 10,458;$$

$$\kappa_7 = + 2,397.$$

Nach (229) ist allgemein für ein Feld (v) zwischen den Knotenpunktreihen ($m-1$) und m

$$C_v = \sum_v \frac{\bar{c}_{m-1,m} + \bar{c}_{m,m-1}}{l_v},$$

somit für das Feld (I):

$$C_I = \frac{2 \cdot 13,076}{1,70} = 15,383;$$

für das Feld (II):

$$C_{II} = \frac{2 \cdot 2,618 + 2,397 + 5,995}{3,8} = 3,586.$$

Diagonalglieder d und D .

Nach (164)
$$d_n = \sum_i a_{n,i}$$

erhält man an Hand der Beiwertschizze:

$$\begin{aligned} d_3 &= 18,02; & d_5 &= 19,04; & d_8 &= 61,26. \\ d_4 &= 22,45; & d_7 &= 5,60; \end{aligned}$$

Nach (230) ist für eine verschiebliche Knotenpunktreihe (m) zwischen den Feldern (ν) und ($\nu + 1$) allgemein

$$D_m = C_\nu + C_{\nu+1},$$

also für die Knotenpunktreihe (4–7):

$$D = C_I + C_{II} = 15,383 + 3,586 = 18,969.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Für die Stäbe *ohne* Vouten können die \mathfrak{M} -Glieder aus Zahlenbeispiel 13 übernommen werden, weil dort mit derselben Belastung gerechnet worden ist. Also:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{3,4} &= -1,01 \text{ tm}; & \mathfrak{M}_{5,6} &= -3,58 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{4,3} &= +1,01 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{6,5} &= +3,58 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{4,5} &= -5,05 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{8,9} &= -7,37 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{5,4} &= +5,05 \text{ ,,}; & \mathfrak{M}_{9,8} &= +6,18 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Stab 7–8. Einseitig gerade Voute auf der rechten Stabseite mit $\lambda = 1$, $n = 0,064$; $l = 3,8$ m.

Belastung: $q_1 = 2,4$ t/m sowie die Einzellasten $P_2 = 3,6$ t und $P_3 = 3,7$ t an den Orten $\frac{a}{l} = \frac{2,4}{3,8} = 0,63$ bzw. $\frac{1,1}{3,8} = 0,29$ von der Voutenseite aus gemessen.

Die Einflüsse der verschiedenen Belastungen werden getrennt ermittelt und dann summiert.

Nach Tafel 9a wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{7,8}^{(q_1)} &= -\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = -0,540 \cdot \frac{2,4 \cdot 3,8^2}{12} = -1,56 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{8,7}^{(q_1)} &= +\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = +1,625 \cdot \frac{2,4 \cdot 3,8^2}{12} = +4,69 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Nach der Einflußlinientafel 13a wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{7,8}^{(P_2)} &= -\eta_2 \cdot P \cdot l = -0,078 \cdot 3,6 \cdot 3,8 = -1,07 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{8,7}^{(P_2)} &= +\eta_1 \cdot P \cdot l = +0,180 \cdot 3,6 \cdot 3,8 = +2,46 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{7,8}^{(P_3)} &= -\eta_2 \cdot P \cdot l = -0,020 \cdot 3,7 \cdot 3,8 = -0,28 \text{ ,,}; \\ \mathfrak{M}_{8,7}^{(P_3)} &= +\eta_1 \cdot P \cdot l = +0,198 \cdot 3,7 \cdot 3,8 = +2,78 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassung erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{7,8} &= -1,56 - 1,07 - 0,28 = -2,91 \text{ tm}; \\ \mathfrak{M}_{8,7} &= +4,69 + 2,46 + 2,78 = +9,93 \text{ ,,}. \end{aligned}$$

Knotenbelastungsglieder s .

Nach (165a)

$$s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} s_3 &= & -1,01 \text{ tm}; & s_7 &= & -2,91 \text{ tm}; \\ s_4 &= +1,01 - 5,05 = -4,04 \text{ ,,}; & s_8 &= +9,93 - 7,37 = +2,56 \text{ ,,}. \\ s_5 &= +5,05 - 3,58 = +1,47 \text{ ,,}; \end{aligned}$$

Belastungsglied S der Verschiebungsgleichung.

Nach (232) ist allgemein für eine Knotenreihe (m)

$$S_m = - \sum P - \sum_{\nu} \mathfrak{M}_{\nu}^r - \sum_{\nu+1} \mathfrak{M}_{\nu+1}^l - \frac{1}{l_{\nu}} \sum_{\nu} (\mathfrak{M}_{\nu}^l + \mathfrak{M}_{\nu}^r) + \frac{1}{l_{\nu+1}} \sum_{\nu+1} (\mathfrak{M}_{\nu+1}^l + \mathfrak{M}_{\nu+1}^r).$$

Zahlenmäßig wird sich dieser Ausdruck nur durch das letzte Glied $\frac{1}{l_{7,8}} (\mathfrak{M}_{7,8} + \mathfrak{M}_{8,7})$ von jenem bei Zahlenbeispiel 13 unterscheiden. Es wird:

$$S = - 2,55 - 5,60 - \frac{4,2 \cdot 1,7}{2} - \frac{4,2 \cdot 3,8}{2} - \frac{2,4 \cdot 3,8}{2} - \frac{3,6 \cdot 2,4}{3,8} - \frac{3,7 \cdot 1,1}{3,8} + \\ + \frac{- 2,91 + 9,93}{3,8} = - 25,75 \text{ t.}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (223):

$$d_n \varphi_n + \sum_i \bar{b}_{n,i} \varphi_i + \bar{c}_{n,\nu} \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{c}_{n,\nu+1} \delta_{m+1} + s_n = 0.$$

Verschiebungsgleichung nach (228) mit der Vereinfachung, daß die Glieder $C_{\nu} \delta_{m-1}$ und $C_{\nu+1} \delta_{m+1}$ entfallen, weil die Verschiebungen δ_{m-1} und δ_{m+1} der benachbarten Knotenpunktreihen gleich Null sind:

$$- \sum_{\nu} \bar{c}_{m-1,m} \varphi_{m-1} + \sum \kappa_m \varphi_m + \sum_{\nu+1} \bar{c}_{m+1,m} \varphi_{m+1} + D_m \delta_m + S_m = 0.$$

Damit kann an Hand der Beiwertskizze Abb. 399 die Gleichungstabelle 20 aufgestellt werden.

Gleichungstabelle 20.

	φ_3	φ_4	φ_5	φ_7	φ_8	δ	B
φ_3	+ 18,02	+ 7,41				- 13,076	- 1,01
φ_4	+ 7,41	+ 22,45	+ 3,32	+ 0,50		- 10,458	- 4,04
φ_5		+ 3,32	+ 19,04		+ 0,67	+ 2,618	+ 1,47
φ_7		+ 0,50		+ 5,60	+ 4,51	+ 2,397	- 2,91
φ_8			+ 0,67	+ 4,51	+ 61,26	+ 5,995	+ 2,56
δ	- 13,076	- 10,458	+ 2,618	+ 2,397	+ 5,995	+ 18,969	- 25,75

Die Auflösung ergibt:

$$\varphi_5 = + 2,631; \quad \varphi_5 = - 0,939; \quad \varphi_8 = - 0,375; \\ \varphi_4 = + 1,536; \quad \varphi_7 = - 1,207; \quad \delta = + 4,419.$$

Momente.

Nach (125) ist allgemein für einen Stab 1-2 mit den Stabendverschiebungen δ_1 und δ_2 , wenn nach (3) für $\psi = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l}$ und für $\frac{c}{l} = \bar{c}$ gesetzt wird:

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \bar{c}_1 (\delta_1 - \delta_2) + \mathfrak{M}_{1,2}. \\ M_{2,1} = a_2 \varphi_2 + b \varphi_1 + \bar{c}_2 (\delta_1 - \delta_2) + \mathfrak{M}_{2,1}.$$

Nach (147)

$$a_1 = \frac{100 J_c}{l} a_1; \quad a_2 = \frac{100 J_c}{l} \cdot a_2; \quad b = \frac{100 J_c}{l} \cdot b$$

(wobei hier aber wegen der großen Querschnitte nach (146) sinngemäß $z = \frac{100}{E}$ gewählt wurde).

Nach (122)

$$c_1 = a_1 + b; \quad c_2 = a_2 + b.$$

Nach (178) für einen Stab mit der Länge l_μ

$$\bar{c}_1 = \frac{c_1}{l_\mu}; \quad \bar{c}_2 = \frac{c_2}{l_\mu}.$$

Die Werte \bar{c}_1 und \bar{c}_2 brauchen nur für die Säulen bestimmt zu werden, da bei den übrigen Stäben $\psi = 0$ ist.

Festwerttabelle 21.

Stab	b/h (cm)	J_c (m ⁴)	b/h_A	J_A (m ⁴)	l (m)	l_v (m)	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$
1-4	45/90	0,0273	45/∞	∞	9,00	1,20	0,133	0
2-5	45/90	0,0273	45/∞	∞	12,00	1,20	0,10	0
3-4	45/95	0,0322	45/195	0,2781	15,00	7,50	0,50	0,12
4-5	45/95	0,0322	45/195	0,2781	26,00	9,00	0,35	0,12
5-6	45/100	0,0375	45/195	0,2781	18,00	9,00	0,50	0,135

Stab	λ	n	a_1	a_2	b	a_1	a_2	b	\bar{c}_1	\bar{c}_2	Tafel
1-4	0,133	0	7,15	4,62	3,40	2,17	1,40	1,03	0,356	0,270	5a
2-5	0,10	0	6,09	4,44	2,96	1,39	1,01	0,67	0,172	0,140	5
3-4	0,50	0,12	12,52	5,01	4,81	2,68	1,07	1,03	—	—	5
4-5	0,35	0,12	12,83	12,83	9,24	1,59	1,59	1,14	—	—	7
5-6	0,50	0,135	11,90	4,95	4,60	2,48	1,03	0,96	—	—	5a

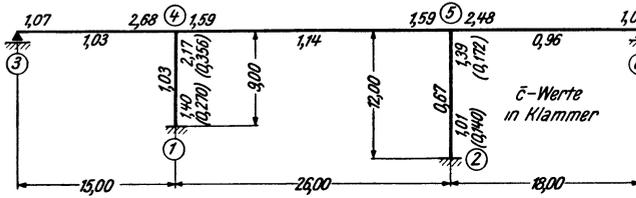


Abb. 403. Beiwertskizze.

In der Beiwertskizze Abb. 403 sind die Festwerte a_1, a_2, b und (in Klammer) auch die Werte \bar{c}_1 und \bar{c}_2 eingetragen.

Diagonalglieder d^0 und D .

Nach (186) und (164) ist

$$d_n^0 = \sum_i a_{n,i} - \sum_g \frac{b^2_{n,g}}{a_{g,n}}$$

und somit

$$d_4^0 = 2,68 + 1,59 + 2,17 - \frac{1,03^2}{1,07} = 5,45; \quad d_5^0 = 2,48 + 1,59 + 1,39 - \frac{0,96^2}{1,03} = 4,57.$$

Nach (181) ist allgemein für ein Stockwerk (μ)

$$D_\mu = \sum_\mu \frac{1}{l} (\bar{c}_o + \bar{c}_u),$$

also hier

$$D = \frac{0,356 + 0,270}{9,0} + \frac{0,172 + 0,140}{12,0} = 0,096.$$

Belastungsglieder.

1. Ständige Belastung: $g = 2,7$ t/m (Abb. 402).

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} .

Stab 3-4. Einseitig gerade Voute am rechten Stabende mit $n = 0,12$ und $\lambda = 0,50$; $l = 15,0$ m.

Nach Tafel 9 wird

$$\mathfrak{M}_{3,4} = -\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = -0,710 \cdot \frac{2,7 \cdot 15,0^2}{12} = -35,9 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{4,3} = +\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = +1,683 \cdot \frac{2,7 \cdot 15,0^2}{12} = +85,2 \text{ ,, .}$$

Stab 4–5. Beidseitig gerade Vouten mit $n = 0,12$ und $\lambda = 0,35$; $l = 26,0$ m.

Nach Tafel 11 wird:

$$\mathfrak{M}_{4,5} = -\kappa \cdot \frac{q l^2}{12} = -1,256 \cdot \frac{2,7 \cdot 26,0^2}{12} = -191,0 \text{ tm}; \quad \mathfrak{M}_{5,4} = +191,0 \text{ tm}.$$

Stab 5–6. Einseitig gerade Voute mit $n = 0,135$ und $\lambda = 0,50$; $l = 18,0$ m.

Nach Tafel 9a wird

$$\mathfrak{M}_{5,6} = -\kappa_1 \cdot \frac{q l^2}{12} = -1,640 \cdot \frac{2,7 \cdot 18,0^2}{12} = -119,6 \text{ tm};$$

$$\mathfrak{M}_{6,5} = +\kappa_2 \cdot \frac{q l^2}{12} = +0,725 \cdot \frac{2,7 \cdot 18,0^2}{12} = +52,9 \text{ ,, .}$$

Knotenbelastungsglieder s^0 .

Nach (187) und (165) ist

$$s_n^0 = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i} - \sum_g \frac{b_{n,g}}{a_{g,n}} \mathfrak{M}_{g,n}$$

somit hier

$$s_4^0 = +85,2 - 191,0 + \frac{1,03}{1,07} 35,9 = -71,2 \text{ tm};$$

$$s_5^0 = +191,0 - 119,6 - \frac{0,96}{1,03} 52,9 = +22,1 \text{ ,, .}$$

Das Belastungsglied S für die Verschiebungsgleichung ist Null, weil keine waagrechte Belastung vorhanden ist.

2. „Ideelle“ Belastung zur Ermittlung der Einflußlinie für $M_{4,3}$ (Abb. 404).

Diese Belastung besteht hier aus den in den Knotenpunkten 4 bzw. 3 angreifenden Momenten im Betrage von

$$a_{4,3} = 2,68 \text{ bzw. } b_{3,4} = 1,03$$

(vgl. Erster Teil, dritter Abschnitt, III). Damit ergibt sich nach (187) das

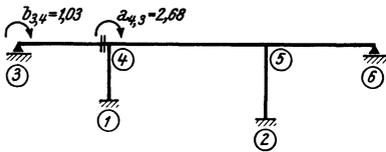


Abb. 404. „Ideelle“ Belastung für die $M_{4,3}$ -Einflußlinie.

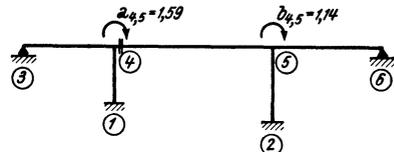


Abb. 405. „Ideelle“ Belastung für die $M_{4,5}$ -Einflußlinie.

Knotenbelastungsglied:

$$s_4^0 = -2,68 + \frac{1,03}{1,07} 1,03 = 1,69.$$

3. „Ideelle“ Belastung zur Ermittlung der Einflußlinie für $M_{4,5}$ (Abb. 405).

Diese Belastung besteht hier aus den in den Knotenpunkten 4 bzw. 5 angreifenden Momenten im Betrage von

$$a_{4,5} = 1,59 \text{ bzw. } b_{4,5} = 1,14.$$

Knotenbelastungsglieder s^0 :

$$s_4^0 = s_4 = -1,59; \quad s_5^0 = s_5 = -1,14.$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (185), unter Beachtung, daß hier $\Delta_{n,g} = 0$,

$$d_n^0 \varphi_n + \sum_r b_{n,r} \varphi_r + \sum_r \bar{c}_{n,r} \Delta_{n,r} + s_n^0 = 0.$$

Verschiebungsgleichung nach (195):

$$\sum \bar{c}_o \varphi_o + D \cdot \Delta + S = 0.$$

Damit kann an Hand der Beiwertskeizze Abb. 403 die Gleichungstabelle 21 für alle drei Belastungsfälle ($B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $B^{(3)}$) gemeinsam aufgestellt werden.

Gleichungstabelle 21.

	φ_4	φ_5	Δ	$B^{(1)}$	$B^{(2)}$	$B^{(3)}$
φ_4	+ 5,45	+ 1,14	+ 0,356	— 71,2	— 1,69	— 1,59
φ_5	+ 1,14	+ 4,57	+ 0,172	+ 22,1	—	— 1,14
Δ	+ 0,356	+ 0,172	+ 0,096	—	—	—

Die Auflösung ergibt:

1. Fall (ständige Last):	2. Fall („ideelle“ Belastung für $M_{4,3}$):	3. Fall („ideelle“ Belastung für $M_{4,5}$):
$\varphi_4 = + 18,10;$	$\varphi_4 = + 0,4140;$	$\varphi_4 = + 0,3569;$
$\varphi_5 = - 7,33;$	$\varphi_5 = - 0,0488;$	$\varphi_5 = + 0,2256;$
$\Delta = - 53,42;$	$\Delta = - 1,4366;$	$\Delta = - 1,7183.$

Für die Ermittlung der Einflußlinien werden auch die Werte φ_3 und φ_6 benötigt. Sie ergeben sich nach Seite 61, Formel 2c.

Man erhält danach für den 2. Fall

$$\varphi_3 = - \frac{1}{a_{3,4}} (b_{3,4} \varphi_4 + \mathfrak{M}_{3,4}) = - \frac{1}{1,07} (1,03 \cdot 0,414 - 1,03) = + 0,5641$$

und

$$\varphi_6 = - \frac{b_{5,6}}{a_{6,5}} \varphi_5 = \frac{0,96}{1,03} \cdot 0,0488 = + 0,0458.$$

Für den 3. Fall ist

$$\varphi_3 = - \frac{1,03}{1,07} \cdot 0,3569 = - 0,3436; \quad \varphi_6 = - \frac{0,96}{1,03} \cdot 0,2256 = - 0,2095.$$

Momente für den ersten Fall (ständige Last):

Nach (179) ist allgemein für einen Stab 1—2

$$M_{1,2} = a_1 \varphi_1 + b \varphi_2 + \bar{c}_1 \Delta + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Für einen Stab 1—2 mit Gelenk bei 2 gilt nach Seite 61, Formel 2c

$$M_{1,2} = \left(a_1 - \frac{b^2}{a_2} \right) \varphi_1 + \mathfrak{M}_{1,2} - \frac{b}{a_2} \mathfrak{M}_{2,1}.$$

Damit ergeben sich an Hand der Beiwertskeizze Abb. 403 die Stabendmomente:

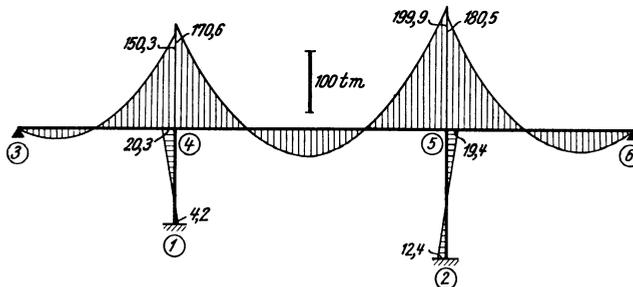


Abb. 406. M -Verlauf für die ständige Belastung $g = 2,7$ t/m.

$M_{4,3} = + 150,3$ tm	$M_{5,4} = + 199,9$ tm	$M_{1,4} = + 4,2$ tm
$M_{4,5} = - 170,6$ „	$M_{5,6} = - 180,5$ „	$M_{2,5} = - 12,4$ „
$M_{4,1} = + 20,3$ „	$M_{5,2} = - 19,4$ „	

In Abb. 406 sind diese Momente maßstäblich aufgetragen.

Einflußlinie für $M_{4,3}$ und $M_{4,5}$.

Für das praktische Rechnen kann der Ausdruck (253) zur Ermittlung der $M_{m,n}$ -Einflußlinienordinaten $\eta^*_{m,n}$ sinngemäß auch in der Form

$$\eta^*_{m,n} = y \pm y^0_{m,n} \quad (1)$$

geschrieben werden. Hierin bedeuten y die Ordinaten der Biegelinie infolge der „ideellen“ Belastung und $y^0_{m,n}$ die Ordinaten der Einflußlinie für $\mathfrak{M}_{m,n}$, die *positiv* einzuführen sind, wenn sich der zu untersuchende Querschnitt am *rechten*, und *negativ*, wenn er sich am *linken* Stabende befindet (vgl. Erster Teil, dritter Abschnitt, III, 3).

Die Einflußlinie für $\mathfrak{M}_{m,n}$, also für das Einspannmoment an der Stelle m des fest eingespannt gedachten Trägerfeldes $m-n$, erstreckt sich nur über dieses Feld, so daß außerhalb desselben einfach nach (254)

$$\eta^*_{m,n} = y \quad (1a)$$

wird. Die Ordinaten y und $y^0_{m,n}$ können für Stäbe mit geraden oder parabolischen Vouten aus den Einflußlinientafeln im Dritten Teil des Buches entnommen werden.

a) Ermittlung der Ordinaten y .

Es gelten hier die allgemeinen Ausführungen aus dem Ersten Teil, dritter Abschnitt, II, 2 über die Ermittlung der Biegelinien aus den Knotendrehwinkeln φ und den Knotenpunktverschiebungen δ . Da im vorliegenden Fall die Knotenpunktverschiebungen keinen Beitrag liefern, so entfällt der in der allgemeinen Formel (239) enthaltene Wert y_2 und es wird einfach $y = y_1$. Somit ist nach (240)

$$y_1 = y = (\eta_1 \cdot \tau_1 - \eta_2 \cdot \tau_2) l,$$

und da hier die Endtangentialwinkel τ identisch sind mit den Knotendrehwinkeln φ , so kann die vorstehende Gleichung in der Form

$$y = (\eta_1 \varphi_1 - \eta_2 \varphi_2) l = \bar{y} \cdot l \quad (2)$$

Verwendung finden. Hierin bedeuten also: η_1 bzw. η_2 die aus den Hilfstafeln zu entnehmenden Ordinaten der \mathfrak{M}_1 - bzw. \mathfrak{M}_2 -Einflußlinie für die jeweils vorliegende Stabform und l die Länge des Stabes.

b) Ermittlung der Ordinaten $y^0_{m,n}$.

Diese sind identisch mit den Ordinaten η der \mathfrak{M} -Einflußlinie, werden aber nur für jenes Feld gebraucht, in welchem der zu untersuchende Querschnitt liegt.

Da nun die Tafelwerte $\eta_{m,n}$ auf einen Stab mit der Länge $l = 1$ bezogen sind, so ergeben sich für ein Feld mit der Länge l die Ordinaten

$$y^0_{m,n} = \eta_{m,n} \cdot l. \quad (3)$$

Es kann also die allgemeine Formel (1), die für das Feld mit dem zu untersuchenden Querschnitt gilt, unter Beachtung von (2) und (3) für die zahlenmäßige Auswertung in folgender Form Verwendung finden:

$$\eta^*_{m,n} = \bar{y} \cdot l \pm \eta_{m,n} \cdot l = (\bar{y} \pm \eta_{m,n}) l. \quad (4)$$

Für die übrigen Felder ist nach (254) sinngemäß

$$\eta^*_{m,n} = \bar{y} \cdot l.$$

c) Zahlenmäßige Durchführung der Rechnung.

Sie erfolgt wieder am besten tabellarisch, und zwar für jedes Feld getrennt. In der Spalte 1 werden jeweils die den Leitwerten n und λ entsprechenden η -Werte der \mathfrak{M} -Einflußlinie aus den Hilfstafeln eingetragen. In der Spalte 2 werden diese Ordinaten, mit den für die ideelle Belastung bereits ermittelten Drehwinkeln φ der anschließenden Knotenpunkte verzerrt und in Spalte 3 summiert. In dieser Spalte ist bei jenem Feld, das den zu untersuchenden Querschnitt enthält, noch ein weiterer Wert aufzunehmen, nämlich die in Formel (4) enthaltene Summe $(\bar{y} \pm \eta_{m,n})$. Dies trifft z. B. bei der Ermittlung der Einflußlinie für $M_{4,3}$ im Feld 3–4 zu, wobei die Werte $(\bar{y} + \eta_4)$ zu setzen sind, weil es sich um einen Querschnitt am *rechten* Stabende handelt. Bei der Ermittlung

Ermittlung der Einflußlinie für $M_{4,3}$.

Ort	Stab 3-4 $l = 15,0\text{m}$ $\lambda = 0,50$ $n = 0,12$ $\varphi_3 = +0,5641$ $\varphi_4 = +0,4140$				Stab 4-5 $l = 26,0\text{m}$ $\lambda = 0,35$ $n = 0,12$ $\varphi_4 = +0,4140$ $\varphi_5 = -0,0488$				Stab 5-6 $l = 18,0\text{m}$ $\lambda = 0,50$ $n = 0,135$ $\varphi_5 = -0,0488$ $\varphi_6 = +0,0458$			
	η_3 η_4 1	$+\eta_3\varphi_3$ $-\eta_4\varphi_4$ 2	$\bar{y} + \eta_4$ 3	$\eta_{4,3}^* =$ $=(\bar{y} + \eta_4) \cdot l$ 4	η_4 η_5 1	$+\eta_4\varphi_4$ $-\eta_5\varphi_5$ 2	$\bar{y} =$ $=\eta_4\varphi_4 - \eta_5\varphi_5$ 3	$\eta_{4,3}^* = \bar{y} \cdot l$ 4	η_5 η_6 1	$+\eta_5\varphi_5$ $-\eta_6\varphi_6$ 2	$\bar{y} =$ $= +\eta_5\varphi_5 - \eta_6\varphi_6$ 3	$\eta_{4,3}^* = \bar{y} \cdot l$ 4
1	0,002 0,091	+ 0,0011 - 0,0377	- 0,0366 + 0,0544	+ 0,816	0,094 0,006	+ 0,0389 + 0,0003	+ 0,0392	0,093 0,004	- 0,0045 - 0,0002	- 0,0047	- 0,085	
2	0,011 0,164	+ 0,0062 - 0,0679	- 0,0617 + 0,1023	+ 1,535	0,163 0,025	+ 0,0675 + 0,0012	+ 0,0687	0,166 0,014	- 0,0081 - 0,0006	- 0,0087	- 0,157	
3	0,028 0,217	+ 0,0164 - 0,0898	- 0,0734 + 0,1436	+ 2,154	0,206 0,059	+ 0,0853 + 0,0029	+ 0,0882	0,214 0,029	- 0,0104 - 0,0013	- 0,0117	- 0,211	
4	0,049 0,243	+ 0,0276 - 0,1006	- 0,0730 + 0,1700	+ 2,550	0,206 0,114	+ 0,0853 + 0,0056	+ 0,0909	0,239 0,053	- 0,0117 - 0,0024	- 0,0141	- 0,254	
5	0,078 0,239	+ 0,0440 - 0,0989	- 0,0549 + 0,1841	+ 2,762	0,168 0,168	+ 0,0696 + 0,0082	+ 0,0778	0,230 0,081	- 0,0112 - 0,0037	- 0,0149	- 0,268	
6	0,103 0,199	+ 0,0581 - 0,0824	- 0,0243 + 0,1747	+ 2,621	0,114 0,206	+ 0,0472 + 0,0101	+ 0,0573	0,190 0,107	- 0,0093 - 0,0049	- 0,0142	- 0,256	
7	0,118 0,137	+ 0,0666 - 0,0567	+ 0,0099 + 0,1469	+ 2,204	0,059 0,206	+ 0,0244 + 0,0101	+ 0,0345	0,131 0,120	- 0,0064 - 0,0055	- 0,0119	- 0,214	
8	0,114 0,071	+ 0,0643 - 0,0294	+ 0,0349 + 0,1059	+ 1,589	0,025 0,163	+ 0,0104 + 0,0080	+ 0,0184	0,069 0,114	- 0,0034 - 0,0052	- 0,0086	- 0,155	
9	0,074 0,021	+ 0,0417 - 0,0087	+ 0,0330 + 0,0540	+ 0,810	0,006 0,094	+ 0,0025 + 0,0046	+ 0,0071	0,021 0,076	- 0,0010 - 0,0035	- 0,0045	- 0,081	

Ermittlung der Einflußlinie für $M_{4,5}$.

Ort	Stab 3-4 $l = 15,0\text{ m}$ $\lambda = 0,50$ $\eta = 0,12$ $\varphi_3 = -0,3436$ $\varphi_4 = +0,3569$ (Tafel 13a)		Stab 4-5 $l = 26,0\text{ m}$ $\lambda = 0,35$ $\eta = 0,12$ $\varphi_4 = +0,3569$ $\varphi_5 = +0,2256$ (Tafel 15a)		Stab 5-6 $l = 18,0\text{ m}$ $\lambda = 0,50$ $\eta = 0,185$ $\varphi_5 = +0,2256$ $\varphi_6 = -0,2095$ (Tafel 13a)		$\eta^*_{4,5} = \bar{y} \cdot l$	$\bar{y} = \eta_5 \varphi_5 - \eta_6 \varphi_6$	$\eta^*_{4,5} = \bar{y} \cdot l$	
	η_3 η_4 1	$+\eta_3 \varphi_3$ $-\eta_4 \varphi_4$ 2	η_4 η_5 1	$+\eta_4 \varphi_4$ $-\eta_5 \varphi_5$ 2	η_5 η_6 1	$+\eta_5 \varphi_5$ $-\eta_6 \varphi_6$ 2				$\bar{y} = \eta_3 \varphi_3 - \eta_4 \varphi_4$ 3
1	0,002 0,091	-0,0007 -0,0325	0,094 0,006	+0,0335 -0,0014	0,093 0,004	+0,0210 +0,0008	+0,0321 -0,0619	-1,609	+0,0218	+0,392
2	0,011 0,164	-0,0038 -0,0585	0,163 0,025	+0,0582 -0,0056	0,166 0,014	+0,0374 +0,0029	+0,0526 -0,1104	-2,870	+0,0403	+0,725
3	0,028 0,217	-0,0096 -0,0774	0,206 0,059	+0,0735 -0,0133	0,214 0,029	+0,0483 +0,0061	+0,0602 +0,1458	-3,791	+0,0544	+0,979
4	0,049 0,243	-0,0168 -0,0867	0,206 0,114	+0,0735 -0,0257	0,239 0,053	+0,0539 +0,0111	+0,0478 -0,1582	-4,113	+0,0650	+1,170
5	0,078 0,239	-0,0268 -0,0853	0,168 0,168	+0,0600 -0,0379	0,230 0,081	+0,0519 +0,0170	+0,0221 -0,1459	-3,793	+0,0689	+1,240
6	0,103 0,199	-0,0354 -0,0710	0,114 0,206	+0,0407 -0,0465	0,190 0,107	+0,0429 +0,0224	-0,0058 -0,1198	-3,115	+0,0653	+1,175
7	0,118 0,137	-0,0405 -0,0489	0,059 0,206	+0,0211 -0,0465	0,131 0,120	+0,0296 +0,0251	-0,0254 -0,0844	-2,194	+0,0547	+0,985
8	0,114 0,071	-0,0392 -0,0253	0,025 0,163	+0,0089 -0,0368	0,069 0,114	+0,0156 +0,0239	-0,0279 -0,0529	-1,375	+0,0395	+0,711
9	0,074 0,021	-0,0254 -0,0075	0,006 0,094	+0,0021 -0,0212	0,021 0,076	+0,0047 +0,0159	-0,0191 -0,0251	-0,653	+0,0206	+0,371

Die Einflußlinien für $M_{4,3}$ (= Ordinaten $\eta^*_{4,3}$) und für $M_{4,5}$ (= Ordinaten $\eta^*_{4,5}$) sind in den Abb. 407 bzw. 408 aufgetragen. (Über die Art des Auftragens vgl. Erster Teil, dritter Abschnitt, III, 4.)

der Einflußlinie für $M_{4,5}$ sind im Feld 4–5 die Werte $(\bar{y} - \eta_4)$ in Rechnung zu stellen, weil sich der zu untersuchende Querschnitt am *linken* Stabende befindet.

In der Spalte 4 ergeben sich schließlich jeweils die endgültigen Ordinaten η^* der gesuchten Einflußlinien.

Dieser Vorgang kann an Hand der beiden Tabellen, in welchen die Ermittlung der Einflußlinien für $M_{4,3}$ und $M_{4,5}$ zahlenmäßig durchgeführt worden ist, in allen Einzel-

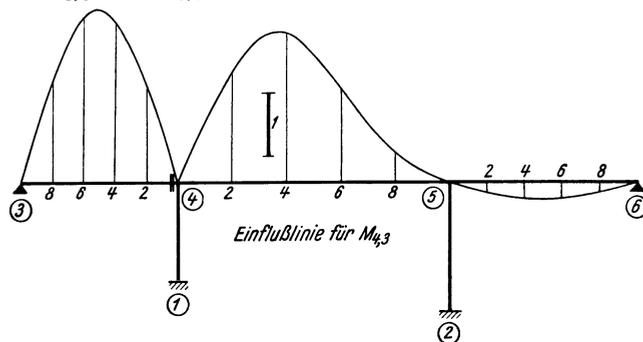


Abb. 407.

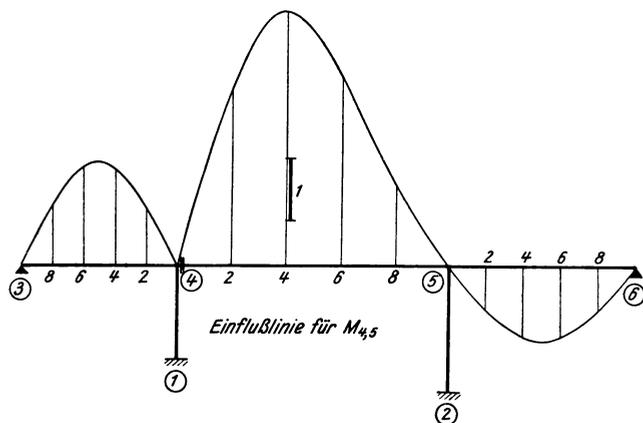


Abb. 408.

heiten verfolgt werden. Zu bemerken wäre noch, daß die Ortsbezeichnung in Übereinstimmung mit den Hilfstafeln bei Stäben mit einseitigen Vouten stets bei der Voutenseite beginnt. Im übrigen sind alle erforderlichen Angaben aus dem Tabellenkopf zu entnehmen.

Dritter Abschnitt.

Der Durchlaufträger.

I. Ermittlung der Stabfestwerte $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ und der Belastungsglieder α_1^0, α_2^0 mit Hilfe der Zahlen- und Kurventafeln.

Es soll hier zunächst wieder der Gebrauch der Hilfstafeln zur zahlenmäßigen Berechnung der Stabfestwerte und Belastungsglieder für den durchlaufenden Träger mit Vouten an zwei Beispielen etwas ausführlicher behandelt werden. Der Vorgang ist im wesentlichen derselbe wie bei der Ermittlung der Stabfestwerte und Belastungsglieder für Rahmentragwerke, so daß auch auf die eingehendere Behandlung dieser Aufgaben in der Einleitung des vorangehenden Abschnittes verwiesen werden kann und die folgenden Erörterungen etwas kürzer gefaßt werden dürfen.

1. Stab mit beidseitig parabolischen Vouten.

Die Längen- und Querschnittsabmessungen sowie die Belastungsangaben sind in Abb. 409 bzw. 409a eingetragen.

Aus Zahlentafel 1 erhält man:

für den unveränderlichen Stabbereich mit $b/h = 40/70$ (cm) $J_c = 0,0114 \text{ m}^4$,
 für den Auflagerquerschnitt $b/h_A = 40/150$ (,,) $J_A = 0,1125$,, .

Somit ist

$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,0114}{0,1125} = 0,101 \sim 0,10$$

und

$$\lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{3,90}{13,00} = 0,30.$$

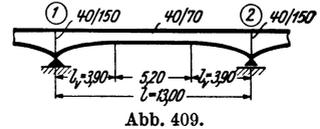


Abb. 409.

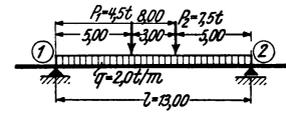


Abb. 409 a.

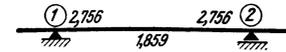


Abb. 409 b.

A. Ermittlung der Stabfestwerte α , β .

Mit den vorliegenden Leitwerten $n = 0,10$ und $\lambda = 0,30$ entnimmt man aus der Zahlentafel 20

$$\bar{\alpha} = 0,212; \bar{\beta} = 0,143.$$

Diese Winkelwerte $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ sind EJ_c -fach verzerrt und auf einen Stab mit der Länge $l = 1$ bezogen. Die wahren Werte würden lauten:

$$\alpha^* = \bar{\alpha} \cdot \frac{l}{EJ_c}; \beta^* = \bar{\beta} \cdot \frac{l}{EJ_c}.$$

Für die Rechnung verwendet man jedoch aus Zweckmäßigkeitsgründen die z-fach verzerrten Werte, wobei nach (302) $z = EJ_o$ gesetzt werden kann. Wählt man für $J_o = J_c$, so wird

$$\alpha^* \cdot z = \bar{\alpha} \cdot l = 0,212 \cdot 13,00 = 2,756;$$

$$\beta^* \cdot z = \bar{\beta} \cdot l = 0,143 \cdot 13,00 = 1,859.$$

Diese Werte sind in Abb. 409b so eingetragen, wie es für die weitere Berechnung zweckmäßig erscheint: α an den Stabenden und β in der Stabmitte.

B. Ermittlung der Belastungsglieder α_1^0 , α_2^0 .

Es sind nach Abb. 409a zwei Belastungsarten vorhanden:

- a) eine durchgehende Gleichlast $q = 2,0 \text{ t/m}$,
- b) die Einzellasten $P_1 = 4,5 \text{ t}$; $P_2 = 7,5 \text{ t}$.

Die beiden Fälle werden getrennt behandelt.

a) Gleichlast $q = 2,0 \text{ t/m}$.

Nach Tafel 24 wird für $n = 0,10$ und $\lambda = 0,30$:

$$\bar{\alpha}_1^0 = \bar{\alpha}_2^0 = \bar{\alpha}^0 = 0,0357.$$

Diese EJ_c -fach verzerrten Werte beziehen sich wieder auf den Stab mit der Länge $l = 1$ und der Belastung $q = 1$. Die wahren Werte wären somit

$$\alpha^{0*} = \bar{\alpha}^0 \cdot \frac{q l^3}{EJ_c}.$$

Mit dem bereits festgelegten Verzerrungsfaktor $z = EJ_c$ ergibt sich das Belastungsglied in der für die Rechnung verwendeten Form:

$$\alpha^{0*} \cdot z = \bar{\alpha}^0 \cdot q \cdot l^3 = 0,0357 \cdot 2,0 \cdot 13,00^3 = 156,9 \text{ tm}^2.$$

b) *Einzellasten* $P_1 = 4,5\text{ t}$, $P_2 = 7,5\text{ t}$.

Aus der Einflußlinien-*tafel* 28 erhält man für die auf Zwölferteilung bezogenen Laststellungen $\frac{12a}{l} = \frac{12 \cdot 5,0}{13,0} = 4,62$ und $\frac{12 \cdot 8,0}{13,0} = 7,38$ mit den Leitwerten $n = 0,10$ und $\lambda = 0,30$ durch geradlinige Einschaltung folgende Einflußlinien-*ordinaten*:

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha_1^0: & \quad \eta_1 \rightarrow 0,055 \text{ und } 0,049; \\ \text{für } \alpha_2^0: & \quad \eta_2 \rightarrow 0,049 \text{ und } 0,055. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich wieder unter der Annahme von $z = EJ_c$

$$\alpha_1^{0*} \cdot z = \eta_1 P \cdot l^2 \text{ und } \alpha_2^{0*} \cdot z = \eta_2 P \cdot l^2$$

und mit den obigen Zahlenwerten

$$\alpha_1^{0*} \cdot z = (0,055 \cdot 4,5 + 0,049 \cdot 7,5) \cdot 13,0^2 = 103,9\text{ tm}^2;$$

$$\alpha_2^{0*} \cdot z = (0,049 \cdot 4,5 + 0,055 \cdot 7,5) \cdot 13,0^2 = 107,0\text{ tm}^2.$$

Zusammenfassung.

Bei gleichzeitiger Einwirkung der unter a und b behandelten Belastungsarten ergibt sich

$$\alpha_1^{0*} \cdot z = 156,9 + 103,9 = 260,8\text{ tm}^2;$$

$$\alpha_2^{0*} \cdot z = 156,9 + 107,0 = 263,9\text{ tm}^2.$$

2. Stab mit einseitig gerader Voute.

Die Belastungs- und Maßangaben sind aus Abb. 410 bzw. 410a zu entnehmen.

Aus *Zahlentafel* 1 erhält man:

für den unveränderlichen Stabbereich mit $b/h = 15/35$ (cm) $J_c = 0,000536\text{ m}^4$,

für den Auflagerquerschnitt mit $b/h_A = 15/60$ („) $J_A = 0,002700$ „.

Somit ist

$$n = \frac{J_c}{J_A} = \frac{0,000536}{0,002700} = 0,199 \sim 0,20 \text{ und } \lambda = \frac{l_v}{l} = \frac{1,50}{5,00} = 0,30.$$

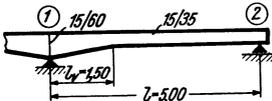


Abb. 410.

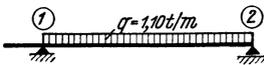


Abb. 410a.

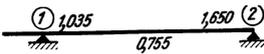


Abb. 410b.

A. Ermittlung der Stabfestwerte a_1 , a_2 , b .

Mit den Leitwerten $n = 0,20$ und $\lambda = 0,30$ ergeben sich aus *Tafel* 17 die auf den Einheitsstab bezogenen EJ_c -fach verzerrten Winkelwerte

$$\bar{\alpha}_1 = 0,207; \quad \bar{\alpha}_2 = 0,330; \quad \bar{\beta} = 0,151.$$

Die wahren Werte für den Stab mit der Länge l sind daher:

$$\alpha_1^* = \bar{\alpha}_1 \cdot \frac{l}{EJ_c}; \quad \alpha_2^* = \bar{\alpha}_2 \cdot \frac{l}{EJ_c}; \quad \beta^* = \bar{\beta} \cdot \frac{l}{EJ_c}.$$

Wählt man wieder den Verzerrungsfaktor $z = EJ_o = EJ_c$, so erhält man die Rechnungswerte

$$a_1 = \alpha_1^* \cdot z = \bar{\alpha}_1 \cdot l = 0,207 \cdot 5,0 = 1,035;$$

$$a_2 = \alpha_2^* \cdot z = \bar{\alpha}_2 \cdot l = 0,330 \cdot 5,0 = 1,650;$$

$$b = \beta^* \cdot z = \bar{\beta} \cdot l = 0,151 \cdot 5,0 = 0,755.$$

Diese Werte sind in Abb. 410b eingetragen.

B. Ermittlung der Belastungsglieder α_1^0, α_2^0 .

Für die Gleichlast $q = 1,1 \text{ t/m}$ erhält man mit den Leitwerten $n = 0,20$ und $\lambda = 0,30$ aus Tafel 21 die auf den Einheitsstab mit der Belastung $q = 1$ bezogenen, EJ_c -fach verzerrten Winkelwerte

$$\bar{\alpha}_1^0 = 0,0351; \quad \bar{\alpha}_2^0 = 0,0404.$$

Die wahren Werte würden sich für den Stab mit der Länge l und der Belastung q mit

$$\alpha_1^{0*} = \bar{\alpha}_1^0 \cdot \frac{q l^3}{EJ_c}; \quad \alpha_2^{0*} = \bar{\alpha}_2^0 \cdot \frac{q l^3}{EJ_c}$$

ergeben.

Mit dem bereits bei der Bestimmung der Werte α_1, α_2 und β festgelegten Verzerrungsfaktor $z = EJ_c$ erhält man die Rechnungswerte

$$\alpha_1^{0*} \cdot z = \bar{\alpha}_1^0 \cdot q l^3 = 0,0351 \cdot 1,1 \cdot 5,0^3 = 4,83 \text{ tm}^2;$$

$$\alpha_2^{0*} \cdot z = \bar{\alpha}_2^0 \cdot q l^3 = 0,0404 \cdot 1,1 \cdot 5,0^3 = 5,56 \text{ ,, ,}$$

II. Vollständig durchgerechnete Zahlenbeispiele.

Zahlenbeispiel 22 (vgl. auch Nr. 23).

Zweifeldträger mit verschiedenen Feldweiten, aber konstantem Querschnitt. Die Belastungs- und Maßangaben sind aus Abb. 411 zu entnehmen. Es sind zwei Belastungsfälle zu behandeln, nämlich:

1. Gleichmäßige Vollbelastung $q = 0,5 \text{ t/m}$.
2. Ungleiche Temperaturänderung $\Delta t = t_u - t_o = -15^\circ$.

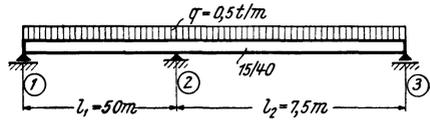


Abb. 411.

1. Gleichmäßige Vollbelastung $q = 0,5 \text{ t/m}$.

Nach (319) lautet die Dreimomentengleichung für den vorliegenden Fall wegen $M_1 = M_3 = 0$:

$$2 M_2 (l_1 + l_2) + 6 \alpha_{2,1}^0 + 6 \alpha_{2,3}^0 = 0.$$

Nach Tafel 2 ist für gleichmäßige Vollbelastung

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{q l^3}{24},$$

$$\text{also } 6 (\alpha_{2,1}^0 + \alpha_{2,3}^0) = 6 \left(\frac{0,5 \cdot 5,0^3}{24} + \frac{0,5 \cdot 7,5^3}{24} \right) = 68,36 \text{ tm}^2.$$

Weiter ist

$$l_1 + l_2 = 5,0 + 7,5 = 12,5 \text{ m,}$$

womit die obige Gleichung einfach lautet:

$$25,0 M_2 + 68,36 = 0;$$

daraus wird

$$M_2 = \frac{-68,36}{25,0} = -2,73 \text{ tm.}$$

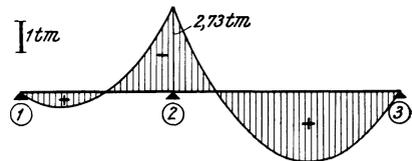


Abb. 412.

Der zugehörige Momentenverlauf ist aus Abb. 412 ersichtlich. Zum Vergleich ist diese Momentenlinie auch in Abb. 414 strichliert eingezeichnet, in welcher der Momentenverlauf für dieselbe Belastung, jedoch unter Annahme von Vouten dargestellt ist.

2. Ungleichmäßige Temperaturwirkung.

Es kann hier die Dreimomentengleichung in derselben Form Verwendung finden wie vorher:

$$2 M_2 (l_1 + l_2) + 6 \alpha_{2,1}^0 + 6 \alpha_{2,3}^0 = 0.$$

Es sind also nur die α^0 -Werte infolge Temperaturwirkung neu zu bestimmen.

Nach (323) bzw. (323a) wird mit $J_1 = J_2 = 0,0008 \text{ m}^4$, $E = 2100000 \text{ t/m}^2$ (für Beton), $\omega = 0,000012$, $h = 0,40 \text{ m}$ und $\Delta t = -15^\circ$:

$$\alpha_{2,1}^0 = \frac{E J \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot l_1}{2 h}; \quad \alpha_{2,3}^0 = \frac{E J \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot l_2}{2 h}$$

und somit

$$6 (\alpha_{2,1}^0 + \alpha_{2,3}^0) = \frac{3 E J \cdot \omega \cdot \Delta t}{h} (l_1 + l_2) = \\ = - \frac{3 \cdot 2100000 \cdot 0,0008 \cdot 0,000012 \cdot 15}{0,40} (5,0 + 7,5) = - 28,35 \text{ tm}^2.$$

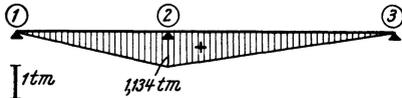


Abb. 412 a.

Damit lautet die Gleichung für M_2 :

$$25,0 M_2 - 28,35 = 0;$$

daraus wird

$$M_2 = \frac{28,35}{25,0} = + 1,134 \text{ tm}.$$

Der zugehörige Momentenverlauf ist aus Abb. 412 a ersichtlich.

Zahlenbeispiel 23 (vgl. auch Nr. 22).

Unsymmetrischer Zweifeldträger mit geraden Vouten. Die Abmessungen des Tragwerkes sind aus Abb. 413 zu entnehmen. Es ist wie im vorhergehenden Beispiel der Momentenverlauf für eine durchgehende Gleichlast $q = 0,5 \text{ t/m}$ zu bestimmen und sodann die Einflußlinie für das Stützenmoment M_2 zu ermitteln.

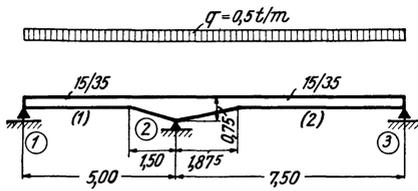


Abb. 413.

1. Gleichlast $q = 0,5 \text{ t/m}$.

Die Dreimomentengleichung für die Mittelstütze (2) lautet nach (298) unter Beachtung, daß hier $M_1 = M_3 = 0$ ist:

$$d_2 M_2 + S_2 = 0. \tag{I}$$

Der Beiwert d_2 ergibt sich nach (300)

$$d_2 = a_{2,1} + a_{2,3} = \alpha_{2,1}^* \cdot z + \alpha_{2,3}^* \cdot z \tag{II}$$

und das Belastungsglied S_2 nach (301)

$$S_2 = \alpha_{2,1}^{0*} \cdot z + \alpha_{2,3}^{0*} \cdot z. \tag{III}$$

Hier kann der Verzerrungsfaktor $z = EJ_o = EJ_c$ gewählt werden, da J_c in beiden Feldern vorkommt. Es ergeben sich also wie in den Einführungsbeispielen die Festwerte

$$\text{für Stab 1: } \alpha_{2,1} = \alpha_{2,1}^* \cdot z = \bar{\alpha}_{2,1} \cdot l_1 = \bar{\alpha}_1 \cdot l_1 = 0,179 \cdot 5,0 = 0,895, \\ \text{,, ,, 2: } \alpha_{2,3} = \alpha_{2,3}^* \cdot z = \bar{\alpha}_{2,3} \cdot l_2 = \bar{\alpha}_1 \cdot l_2 = 0,199 \cdot 7,5 = 1,493.$$

Sie sind in der letzten Spalte der Festwerttabelle 23 enthalten. Die Werte $\bar{\alpha}_1$ in der vorletzten Spalte sind aus der Tafel 17 für die Leitwerte $n = 0,10$ und $\lambda = 0,30$ bzw. $n = 0,10$ und $\lambda = 0,25$ entnommen und beziehen sich auf die *Voutenseite* des Stabes. Die Werte $\bar{\alpha}_2$ und $\bar{\beta}$ werden hier nicht gebraucht.

Mit obigen Werten wird nach (II)

$$d_2 = 0,895 + 1,493 = 2,388.$$

Festwerttabelle 23.

Stab	$b/h(\text{cm})$	$J_c(\text{m}^4)$	$b/h_A(\text{cm})$	$J_A(\text{m}^4)$	$\lambda(\text{m})$	$l_v(\text{m})$	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_1 \cdot l$	Tafel
1-2	15/35	0,000536	15/75	0,005273	5,0	1,50	0,30	0,10	0,179	0,895	17
2-3	15/35	0,000536	15/75	0,005273	7,5	1,875	0,25	0,10	0,199	1,493	17

Ermittlung des Belastungsgliedes S.

Dazu benötigt man nach (III) die α^0 -Werte, die zur Mittelstütze gehören.

Stab 1–2. Einseitig gerade Voute mit $n = 0,10$ und $\lambda = 0,30$; $l_1 = 5,0$ m.

Belastung: $q = 0,5$ t/m.

Aus Tafel 21 ergibt sich mit den vorliegenden Leitwerten n und λ der der Voutenseite zugeordnete Winkelwert

$$\bar{\alpha}_1^0 = 0,0333.$$

Mit $z = EJ_c$ folgt somit:

$$\alpha_{2,1}^{0*} \cdot z = \bar{\alpha}_1^0 \cdot q l_1^3 = 0,0333 \cdot 0,5 \cdot 5,0^3 = 2,08 \text{ tm}^2.$$

Stab 2–3. Einseitig gerade Voute mit $n = 0,10$ und $\lambda = 0,25$; $l_2 = 7,5$ m.

Belastung: $q = 0,5$ t/m.

Aus Tafel 21 ergibt sich

$$\bar{\alpha}_1^0 = 0,0355.$$

Mit $z = EJ_c$ erhält man

$$\alpha_{2,3}^{0*} \cdot z = \bar{\alpha}_1^0 \cdot q l_2^3 = 0,0355 \cdot 0,5 \cdot 7,5^3 = 7,49 \text{ tm}^2;$$

daher nach (III)

$$S_2 = 2,08 + 7,49 = 9,57 \text{ tm}^2.$$

Die Gleichung (I) lautet daher zahlenmäßig

$$2,388 M_2 + 9,57 = 0,$$

woraus

$$M_2 = - \frac{9,57}{2,388} = - 4,01 \text{ tm}$$

wird. Der zugehörige Momentenverlauf ist in Abb. 414 dargestellt, wo zugleich auch die Momente aus dem vorangehenden Zahlenbeispiel ersichtlich gemacht sind, um den Einfluß der Voutenwirkung besser zu veranschaulichen.

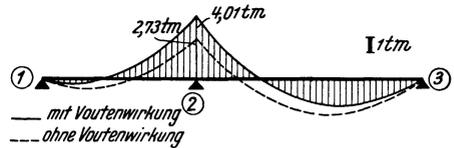


Abb. 414.

2. Ermittlung der Einflußlinie für M_2 .

Es wird hier das im Ersten Teil, fünfter Abschnitt, VI, 2 ausführlich behandelte Verfahren am $(n - 1)$ -fach statisch unbestimmten System durch Einschaltung eines Gelenkes bei Stütze (2) angewendet. Dadurch entstehen zwei freiaufliegende Träger mit den Spannweiten $l_1 = 5,0$ m und $l_2 = 7,5$ m (Abb. 415). Nach (342) ergeben sich die Einflußlinienordinaten für ein Feld (i) zwischen den Stützen 1–2 mit

$$\eta^{(i)} = (M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2) \cdot \frac{l_i^2}{\gamma}.$$

Bei der Auswertung dieser Formel geht man für die einzelnen Felder getrennt vor. Um eine Übereinstimmung mit der Bezeichnung der Hilfstafeln zu erhalten, wird festgesetzt, daß sich bei Feldern mit einseitigen Vouten M_1 auf die Voutenseite und M_2 auf die voutenfreie Seite bezieht. Damit wird

für das Feld (1) wegen $M_1 = - 1, M_2 = 0$: $\eta^{(1)} = - \eta_1 \cdot \frac{l_1^2}{\gamma},$ (IV)

„ „ „ (2) „ „ $M_1 = - 1, M_2 = 0$: $\eta^{(2)} = - \eta_1 \cdot \frac{l_2^2}{\gamma}.$ (V)

Hierin bedeuten η_1 die aus der Tafel 25 zu entnehmenden Ordinaten der Einflußlinie für die Auflagerdrehwinkel α_1^0 .

Der Wert γ ergibt sich nach (341) unter Beachtung, daß hier die nach den Stützen benannten Momente $M_1 = M_3 = 0$ sind, mit

$$\gamma = \bar{\alpha}_{2,1} \cdot l_1 + \bar{\alpha}_{2,3} \cdot l_2 = 0,895 + 1,493 = 2,388,$$

wobei die entsprechenden Werte $\bar{\alpha} \cdot l$ aus der letzten Spalte der Festwerttabelle 23 entnommen sind.

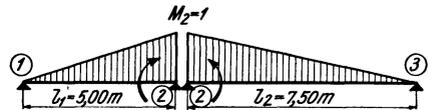


Abb. 415.

Für die zahlenmäßige Auswertung der Ausdrücke (IV) und (V) kann noch eine kleine Vereinfachung vorgenommen werden. Es ist

$$\frac{l_1^2}{\gamma} = \frac{5,0^2}{2,388} = 10,47; \quad \frac{l_2^2}{\gamma} = \frac{7,5^2}{2,388} = 23,56,$$

so daß nach (IV) bzw. (V) $\eta^{(1)} = -10,47 \eta_1$ und $\eta^{(2)} = -23,56 \eta_1$ wird. In der folgenden Tabelle ist nach diesen Formeln die zwölfteilige Einflußlinie für M_2 ausgerechnet.

Einflußlinie für M_2 .

Feld 1-2		Feld 2-3	
$\lambda = 0,30$	$n = 0,10$	$\lambda = 0,25$	$n = 0,10$
$\eta^{(1)} = -10,47 \cdot \eta_1$; Tafel 25		$\eta^{(2)} = -23,56 \cdot \eta_1$; Tafel 25	
Ort	η_1	$\eta^{(1)} = -10,47 \cdot \eta_1$	$\eta^{(2)} = -23,56 \cdot \eta_1$
1	0,0145	-0,152	0,0163
2	0,0280	-0,293	0,0312
3	0,0399	-0,418	0,0439
4	0,0484	-0,507	0,0522
5	0,0525	-0,550	0,0557
6	0,0526	-0,551	0,0553
7	0,0492	-0,515	0,0515
8	0,0427	-0,447	0,0446
9	0,0340	-0,356	0,0355
10	0,0238	-0,249	0,0247
11	0,0122	-0,128	0,0126

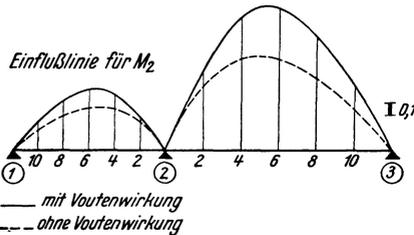


Abb. 416.

In Abb. 416 ist die Einflußlinie für M_2 dargestellt. Zum Vergleich ist dort diese Einflußlinie für denselben Träger, jedoch ohne Vouten, strichliert eingezeichnet.

Zahlenbeispiel 24.

Symmetrischer Dreifeldträger mit parabolischen Vouten. Die Abmessungen des Tragwerkes sind aus Abb. 417 zu ersehen. Es sind zu ermitteln:

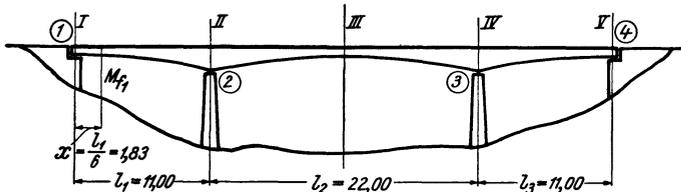


Abb. 417.

1. Der Momentenverlauf für eine Gleichlast $q = 2,5 \text{ t/m}$.

2. Die Einflußlinie für das Stützenmoment M_2 .

3. Die Einflußlinie für das Feldmoment M_{f1} im ersten Feld an der Stelle $x = \frac{l_1}{6}$ vom Auflager 1.

Die Ermittlung der Stabfestwerte erfolgt wieder tabellarisch.

Festwerttabelle 24.

Stab	$J_c \text{ (m}^4\text{)}$	$J_A \text{ (m}^4\text{)}$	$\gamma \text{ (m)}$	$l_v \text{ (m)}$	$\lambda = \frac{l_v}{l}$	$n = \frac{J_c}{J_A}$	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\beta}$	$\bar{\alpha}_1 \cdot l$	$\bar{\beta} \cdot l$	Tafel
1-2 3-4	0,0265	0,5194	11,00	11,0	1,00	0,05	0,058	0,241	0,068	0,638	0,748	18
2-3	0,0265	0,5194	22,00	11,0	0,50	0,05	0,123	0,123	0,094	2,706	2,068	20

Die Berechnung der Trägheitsmomente J_c und J_A für die vorliegenden Platten balkenquerschnitte erfolgt nach der Formel

$$J = J_1 + J_2 + x^2 \frac{F_1 \cdot F_2}{F_1 + F_2},$$

wobei sich J_1 bzw. F_1 auf den Plattenteil und J_2 bzw. F_2 auf den Stegteil des Plattenbalkenquerschnitts beziehen und x den Abstand der beiden Flächenschwerpunkte bedeutet. Es ist also für den Querschnitt nach Abb. 417a

$$J_c = 0,0005625 + 0,00720 + 0,375^2 \cdot \frac{0,30 \cdot 0,24}{0,30 + 0,24} = 0,0265 \text{ m}^4$$

und ebenso mit Bezug auf Abb. 417b

$$J_A = 0,0005625 + 0,2667 + 1,075^2 \cdot \frac{0,30 \cdot 0,80}{0,30 + 0,80} = 0,5194 \text{ m}^4.$$

1. Momentenverlauf für eine Gleichlast $q = 2,5 \text{ t/m}$.

Aus Symmetriegründen ist $M_2 = M_3$, so daß die Dreimomentengleichung nur für M_2 aufgestellt werden muß. Sie lautet nach (298) unter Beachtung, daß hier $M_1 = 0$ und $M_3 = M_2$ ist:

$$(d_2 + b_2) M_2 + S_2 = 0, \tag{I}$$

wobei nach (300)

$$d_2 = a_{2,1} + a_{2,3} = \alpha_{2,1}^* \cdot z + \alpha_{2,3}^* \cdot z;$$

nach (299)

$$b_2 = \beta_2^* \cdot z$$

und nach (301)

$$S_2 = \alpha_{2,1}^{0*} \cdot z + \alpha_{2,3}^{0*} \cdot z.$$

Die Winkelwerte $\alpha_{2,1}^*$, $\alpha_{2,3}^*$ und β_2^* sind in den letzten Spalten der Festwerttabelle 24 enthalten. Da J_c in allen Feldern gleich groß ist, kann wiederum $z = EJ_o = EJ_c$ gewählt werden. Man erhält daher:

$$\alpha_{2,1}^* \cdot z = 0,638; \quad \alpha_{2,3}^* \cdot z = 2,706; \quad \beta_2^* \cdot z = 2,068.$$

Damit wird nach den vorstehenden Formeln:

$$d_2 = 0,638 + 2,706 = 3,344 \text{ und } b_2 = 2,068 \text{ sowie } d_2 + b_2 = 3,344 + 2,068 = 5,412.$$

Mithin lautet die Gl. (I):

$$5,412 M_2 + S_2 = 0. \tag{I'}$$

Ermittlung des Belastungsgliedes S .

Zu diesem Zwecke sind zuerst die α^0 -Werte für die einzelnen Stäbe zu bestimmen.

Stab 1–2. Einseitig parabolische Voute mit $n = 0,05$ und $\lambda = 1,0$; $l_1 = 11,0 \text{ m}$.

Belastung: $q = 2,5 \text{ t/m}$.

Aus Tafel 22 ergibt sich der der Voutenseite zugeordnete Wert $\bar{\alpha}_1^0 = 0,0121$; mit $z = EJ_c$ wird

$$\alpha_{2,1}^{0*} \cdot z = \bar{\alpha}_1^0 \cdot q l_1^3 = 0,0121 \cdot 2,5 \cdot 11,0^3 = 40,3 \text{ tm}^2.$$

Stab 2–3. Beidseitig parabolische Vouten mit $n = 0,05$ und $\lambda = 0,50$; $l_2 = 22,0 \text{ m}$.

Belastung: $q = 2,5 \text{ t/m}$.

Aus Tafel 24 erhält man

$$\bar{\alpha}_1^0 = \bar{\alpha}_2^0 = \bar{\alpha}^0 = 0,0236;$$

mit $z = EJ_c$ wird

$$\alpha_{2,3}^{0*} \cdot z = \bar{\alpha}^0 \cdot q l_2^3 = 0,0236 \cdot 2,5 \cdot 22,0^3 = 628,2 \text{ tm}^2;$$

somit wird

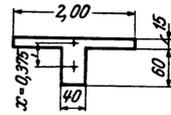
$$S_2 = \alpha_{2,1}^{0*} + \alpha_{2,3}^{0*} = 40,3 + 628,2 = 668,5.$$

Führt man diesen Wert in Gl. (I') ein, so erhält man

$$5,412 M_2 + 668,5 = 0$$

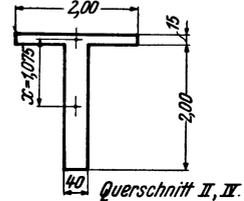
und daraus

$$M_2 = - \frac{668,5}{5,412} = - 123,5 \text{ tm}.$$



Querschnitt I, III, V

Abb. 417 a.



Querschnitt II, IV

Abb. 417 b.

Der zugehörige Momentenverlauf ist in Abb. 418 eingetragen. Zum Vergleich ist dort auch die Momentenverteilung für dieselbe Belastung, jedoch unter Außerachtlassung der Voutenwirkung eingezeichnet.

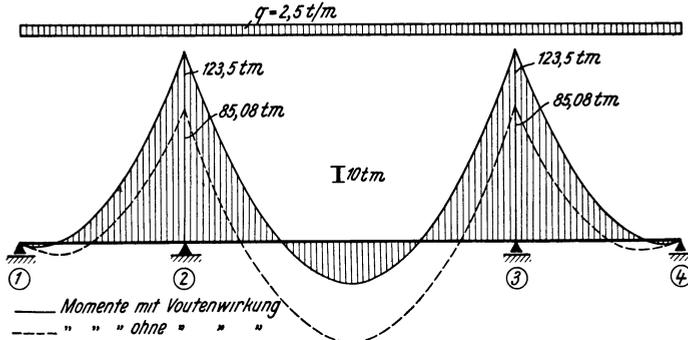


Abb. 418.

2. Ermittlung der Einflußlinie für M_2 .

Auch hier soll das im Ersten Teil, fünfter Abschnitt, VI, 2 erläuterte Verfahren am $(n - 1)$ -fach statisch unbestimmten System benutzt werden.

Durch Einschaltung eines Gelenkes bei Stütze (2), wo die beiden Momente $M = 1$ anzubringen sind, wird der gegebene Dreifeldträger in einen freiaufliegenden und einen Zweifeldbalken zerlegt (Abb. 419b).

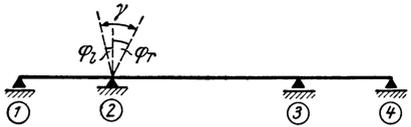


Abb. 419 a.

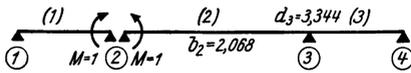


Abb. 419 b.

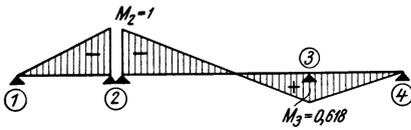


Abb. 419 c.

Es ist also zunächst der Momentenverlauf infolge der Belastung $M = 1$ am Zweifeldträger 2-3-4 zu bestimmen, um die gesuchte Einflußlinie als Biegelinie ermitteln zu können. Die Dreimomentengleichung für M_3 lautet nach (298) mit den Bezeichnungen der Abb. 419b unter Beachtung, daß $M_4 = 0$ und $S_3 = 0$ ist:

$$b_2 M_2 + d_3 M_3 = 0.$$

Nun ist hier $M_2 = -1$ und weiter aus der vorangehenden Rechnung bereits bekannt:

$$b_2 = 2,068; \quad d_3 = d_2 = 3,344.$$

Somit lautet die vorstehende Gleichung für M_3 zahlenmäßig:

$$-2,068 + 3,344 M_3 = 0;$$

daraus wird
$$M_3 = \frac{2,068}{3,344} = +0,618.$$

Damit ist der gesamte Momentenverlauf bereits gegeben (siehe Abb. 419c), für den die Biegelinie zu ermitteln und der Winkelwert γ (Abb. 419a) zu bestimmen ist.

Die endgültigen Einflußlinienordinaten ergeben sich für ein Feld (i) zwischen den Stützen 1 und 2 nach (342) allgemein mit:

$$\eta^{(i)} = (M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2) \cdot \frac{l_i^2}{\gamma}.$$

Die Auswertung des vorstehenden Ausdruckes erfolgt wieder am besten tabellarisch, wobei die jeweiligen Werte für η_1 bzw. η_2 für die entsprechenden Stabformen aus den Einflußlinientafeln für α_1^0 bzw. α_2^0 zu entnehmen sind. Um eine Übereinstimmung in der Bezeichnung mit den zur Anwendung gelangenden Hilfstafeln zu erzielen und Irrtümer zu vermeiden, sei wieder festgesetzt, daß in der vorstehenden Formel M_1 bei Stäben mit einseitigen Vouten stets das Moment auf der Voutenseite und M_2 das Moment auf der voutenfreien Seite bedeutet. Unter dieser Voraussetzung wird:

für das Feld (1) wegen $M_1 = -1; M_2 = 0;$
$$\eta^{(1)} = -\eta_1 \frac{l_1^2}{\gamma}; \tag{I}$$

„ „ „ (2) mit $M_1 = -1; M_2 = +0,618;$
$$\eta^{(2)} = (-\eta_1 + 0,618 \eta_2) \frac{l_2^2}{\gamma}; \tag{II}$$

„ „ „ (3) „ $M_1 = +0,618; M_2 = 0;$
$$\eta^{(3)} = +0,618 \eta_1 \cdot \frac{l_1^2}{\gamma}. \tag{III}$$

Der Wert γ ergibt sich nach (341) unter Beachtung, daß $M_1 = 0$ ist:

$$\gamma = \bar{\alpha}_{2,1} \cdot l_1 + (\bar{\alpha}_{2,3} - M_3 \cdot \bar{\beta}_2) \cdot l_2.$$

Aus der Festwerttabelle entnimmt man:

$$\bar{\alpha}_{2,1} \cdot l_1 = 0,638; \quad \bar{\alpha}_{2,3} \cdot l_2 = 2,706; \quad \bar{\beta}_2 \cdot l_2 = 2,068$$

und aus Abb. 419c

$$M_3 = 0,618.$$

Damit erhält man $\gamma = 0,638 + 2,706 - 0,618 \cdot 2,068 = 2,066$

und schließlich

$$\frac{l_1^2}{\gamma} = \frac{11,0^2}{2,066} = 58,57,$$

bzw.

$$\frac{l_2^2}{\gamma} = \frac{22,0^2}{2,066} = 234,27.$$

Mit diesen Werten ergeben sich die Ausdrücke I, II, III für die Einflußlinienordinaten in den Feldern (1), (2) und (3) in einer zur tabellarischen Auswertung geeigneteren Form:

$$\eta^{(1)} = - 58,57 \eta_1; \tag{I'}$$

$$\eta^{(2)} = 234,27 (-\eta_1 + 0,618 \eta_2); \tag{II'}$$

$$\eta^{(3)} = + 0,618 \cdot 58,57 \eta_1 = - 0,618 \cdot \eta^{(1)}. \tag{III'}$$

Die weitere Rechnung ist in den folgenden Tabellen durchgeführt.

Ermittlung der Einflußlinie für M_2 .

Feld 1-2		Feld 2-3			Feld 3-4	
$\lambda = 1,00$ $n = 0,05$ 		$\lambda = 0,50$ $n = 0,05$ 				
$\eta^{(1)} = - 58,57 \eta_1$; Tafel 26		$\eta^{(2)} = 234,27 (-\eta_1 + 0,618 \eta_2)$; Tafel 28				
Ort	η_1	$\eta^{(1)} = - 58,57 \cdot \eta_1$	$-\eta_1$ $0,618 \eta_2$	$A =$ $= -\eta_1 + 0,618 \eta_2$	$\eta^{(2)} = 234,27 A$	$\eta^{(3)} = - 0,618 \eta^{(1)}$
1	0,0047	- 0,275	- 0,0101 + 0,0048	- 0,0053	- 1,242	+ 0,170
2	0,0089	- 0,521	- 0,0195 + 0,0096	- 0,0099	- 2,319	+ 0,322
3	0,0125	- 0,732	- 0,0279 + 0,0143	- 0,0136	- 3,186	+ 0,452
4	0,0156	- 0,914	- 0,0345 + 0,0186	- 0,0159	- 3,725	+ 0,565
5	0,0177	- 1,037	- 0,0383 + 0,0220	- 0,0163	- 3,819	+ 0,641
6	0,0189	- 1,107	- 0,0386 + 0,0239	- 0,0147	- 3,444	+ 0,684
7	0,0187	- 1,095	- 0,0356 + 0,0237	- 0,0119	- 2,788	+ 0,677
8	0,0174	- 1,019	- 0,0301 + 0,0213	- 0,0088	- 2,062	+ 0,630
9	0,0146	- 0,855	- 0,0232 + 0,0172	- 0,0060	- 1,406	+ 0,528
10	0,0106	- 0,621	- 0,0156 + 0,0121	- 0,0035	- 0,820	+ 0,384
11	0,0056	- 0,328	- 0,0078 + 0,0062	- 0,0016	- 0,375	+ 0,203

Die Einflußlinie für M_2 ist in Abb. 420 dargestellt. Gleichzeitig ist in dieser Abbildung die Einflußlinie für M_2 ohne Berücksichtigung der Voutenwirkung eingetragen.

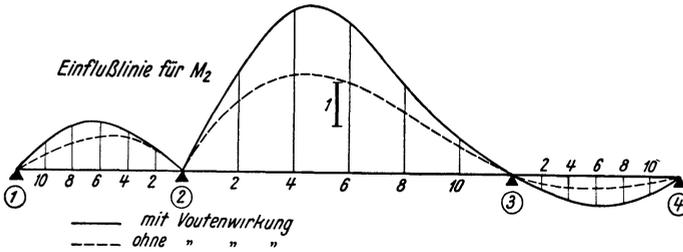


Abb. 420.

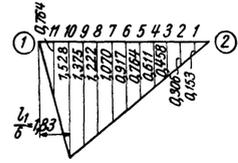


Abb. 421.

3. Einflußlinie für das Feldmoment M_{f_1} im ersten Feld

an der Stelle $x = \frac{l_1}{6}$ vom Auflager 1.

Nach (243) ist mit der hier verwendeten Bezeichnung unter Beachtung, daß $M_1 = 0$ ist:

$$M_{f_1} = M_2 \frac{x}{l_1} + M_0 = 0,16 M_2 + M_0.$$

Ermittlung der Einflußlinie für das Feldmoment M_{f_1} .

	Feld 1-2			Feld 2-3		Feld 3-4	
Ort	$\eta^{(1)}$	M_0	$y^{(1)} = (1) + (2)$	$\eta^{(2)}$	$y^{(2)} = 0,16 \eta^{(2)}$	$\eta^{(3)}$	$y^{(3)} = 0,16 \eta^{(3)}$
	0,16 $\eta^{(1)}$						
	1	2	3	1	2	1	2
1	-0,275 -0,046	+ 0,153	+ 0,107	- 1,242	- 0,207	+ 0,170	+ 0,028
2	-0,521 -0,087	+ 0,306	+ 0,219	- 2,319	- 0,386	+ 0,322	+ 0,054
3	-0,732 -0,122	+ 0,458	+ 0,336	- 3,186	- 0,531	+ 0,452	+ 0,075
4	-0,914 -0,152	+ 0,611	+ 0,459	- 3,725	- 0,621	+ 0,565	+ 0,094
5	-1,037 -0,173	+ 0,764	+ 0,591	- 3,819	- 0,636	+ 0,641	+ 0,107
6	-1,107 -0,184	+ 0,917	+ 0,733	- 3,444	- 0,574	+ 0,684	+ 0,114
7	-1,095 -0,182	+ 1,070	+ 0,888	- 2,788	- 0,465	+ 0,677	+ 0,113
8	-1,019 -0,170	+ 1,222	+ 1,052	- 2,062	- 0,344	+ 0,630	+ 0,105
9	-0,855 -0,142	+ 1,375	+ 1,233	- 1,406	- 0,234	+ 0,528	+ 0,088
10	-0,621 -0,103	+ 1,528	+ 1,425	- 0,820	- 0,137	+ 0,384	+ 0,064
11	-0,328 -0,055	+ 0,764	+ 0,709	- 0,375	- 0,063	+ 0,203	+ 0,034

Setzt man in diesem Ausdruck an Stelle von M_2 die bereits ermittelten Einflußlinienordinaten (η) und ebenso für M_0 , so gelangt man zu den Einflußlinienordinaten (y) von M_{f_1} . Die Einflußlinienwerte für M_0 , die nur im ersten Feld auftreten, sind in Abb. 421 eingetragen.

Damit kann die Auswertung des obigen Ausdruckes tabellarisch erfolgen.

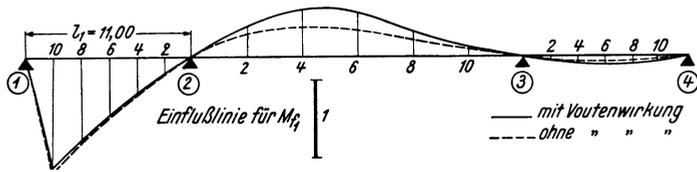


Abb. 422.

In Abb. 422 sind die Einflußlinien für das Feldmoment M_{f_1} mit und ohne Berücksichtigung der Voutenwirkung eingetragen.

Vierter Abschnitt.

Hochgradig statisch unbestimmte Rahmentragwerke.

Im folgenden werden drei Zahlenbeispiele nach der im siebenten Abschnitt des Ersten Teiles entwickelten „Reduktionsmethode“ in allen wesentlichen Einzelheiten durchgerechnet. Für zwei dieser Beispiele (26, 27) sind überdies auf Seite 150 und 152 sowohl der Rechnungsgang als auch die jeweilige Wahl der „reduzierten Systeme“ und die Durchführung der „relativen Schätzung“ eingehend dargelegt.

Es sei hier noch bemerkt, daß die Behandlung von hochgradig statisch unbestimmten Tragwerken mit Vouten in der gleichen Weise vor sich gehen kann.

Zahlenbeispiel 25.

Symmetrischer, 10geschossiger, dreistieliger Stockwerkrahmen mit symmetrischer Belastung (Abb. 423). Unbekannte: Die zehn Knotendrehwinkel $\varphi_3, \varphi_5, \varphi_7, \varphi_9, \varphi_{11}, \varphi_{13}, \varphi_{15}, \varphi_{17}, \varphi_{19}, \varphi_{21}$. Beiwertschizze mit Querschnittsangaben siehe Abb. 424. Es sind die Momente nach der „Reduktionsmethode“ (Seite 140) zu ermitteln.

Diagonalglieder d .

Nach (19) ist allgemein
$$d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$$

Damit ergeben sich an Hand der Beiwertschizze:

$$d_3 = 2 (4,39 + 3,90 + 2,13) = 20,84; \quad d_5 = 2 (3,90 + 3,74 + 2,13) = 19,54$$

und ebenso

$$d_7 = 17,30; \quad d_{11} = 12,80; \quad d_{15} = 9,12; \quad d_{19} = 6,66;$$

$$d_9 = 14,86; \quad d_{13} = 10,60; \quad d_{17} = 7,74; \quad d_{21} = 3,30.$$

Stabbelastungsglieder \mathfrak{M} und Knotenbelastungsglieder s .

Nach (20a) ist $s_n = \sum_i \mathfrak{M}_{n,i}$. Mithin erhält man unter Benutzung der \mathfrak{M} -Formeln von Tafel 2 bzw. 4 an Hand der Belastungsschizze (Abb. 423):

$$s_3 = \mathfrak{M}_{3,4}(a) + \mathfrak{M}_{3,4}(P) = -\frac{4,8 \cdot 9^2}{12} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 9}{9} = -42,4 \text{ tm};$$

$$s_5 = \mathfrak{M}_{5,6}(a) + \mathfrak{M}_{5,6}(P) = -\frac{4,5 \cdot 9^2}{12} - \frac{2 \cdot 4,4 \cdot 9}{9} = -39,2 \text{ ,,};$$

$$s_7 = \mathfrak{M}_{7,8}(a) + \mathfrak{M}_{7,8}(P) = -\frac{4,2 \cdot 9^2}{12} - \frac{3,5 \cdot 9}{8} = -32,3 \text{ ,,};$$

$$s_9 = \mathfrak{M}_{9,10}(a) = -\frac{4 \cdot 9^2}{12} = -27,0 \text{ ,,}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} s_{11} = M_{11,12} &= -27,0; & s_{15} = M_{15,16} &= -25,7; & s_{19} = M_{19,20} &= -23,6; \\ s_{13} = M_{13,14} &= -25,7; & s_{17} = M_{17,18} &= -23,6; & s_{21} = M_{21,22} &= -20,3. \end{aligned}$$

Knotengleichungen.

Nach (18) ist allgemein

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0.$$

Damit können unter Zuhilfenahme der Beiwertskeizze die Knotengleichungen unmittelbar angeschrieben werden. Es ist hier zweckmäßig, die „Diagonalglieder“ an die erste Stelle zu setzen.

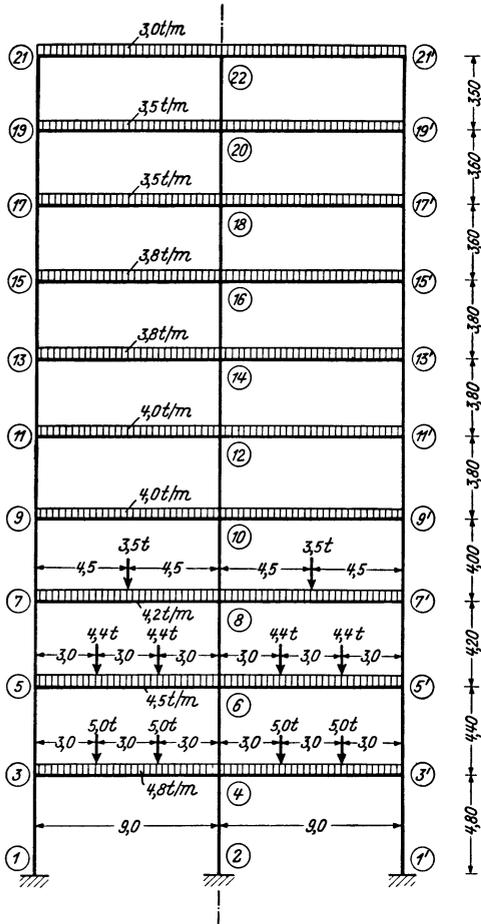


Abb. 423. Längen- und Belastungsangaben.

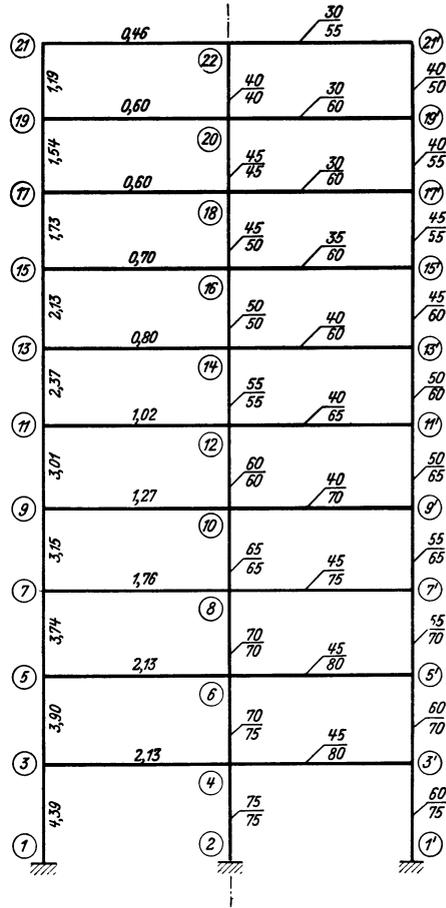


Abb. 424. Beiwertskeizze mit Querschnittsangaben.

Knotengleichungen.

$$\begin{aligned} (\varphi_3) & 20,84 \varphi_3 + 3,90 \varphi_5 - 42,4 = 0 \\ (\varphi_5) & 19,54 \varphi_5 + 3,90 \varphi_3 + 3,74 \varphi_7 - 39,2 = 0 \\ (\varphi_7) & 17,30 \varphi_7 + 3,74 \varphi_5 + 3,15 \varphi_9 - 32,3 = 0 \\ (\varphi_9) & 14,86 \varphi_9 + 3,15 \varphi_7 + 3,01 \varphi_{11} - 27,0 = 0 \\ (\varphi_{11}) & 12,80 \varphi_{11} + 3,01 \varphi_9 + 2,37 \varphi_{13} - 27,0 = 0 \\ (\varphi_{13}) & 10,60 \varphi_{13} + 2,37 \varphi_{11} + 2,13 \varphi_{15} - 25,7 = 0 \\ (\varphi_{15}) & 9,12 \varphi_{15} + 2,13 \varphi_{13} + 1,73 \varphi_{17} - 25,7 = 0 \\ (\varphi_{17}) & 7,74 \varphi_{17} + 1,73 \varphi_{15} + 1,54 \varphi_{19} - 23,6 = 0 \\ (\varphi_{19}) & 6,66 \varphi_{19} + 1,54 \varphi_{17} + 1,19 \varphi_{21} - 23,6 = 0 \\ (\varphi_{21}) & 3,30 \varphi_{21} + 1,19 \varphi_{19} - 20,3 = 0. \end{aligned}$$

Erster Rechnungsgang.

Als „reduziertes System“ wird der untere Tragwerksteil (Abb. 425) mit den beiden Ausgangsunbekannten φ_3 und φ_5 gewählt. In den zugehörigen Gleichungen tritt nur eine „überzählige“ Unbekannte, nämlich φ_7 auf. Diese kann hier durch eine „relative Schätzung“ nach (348) in bezug auf φ_5 eliminiert werden. Danach ist

$$\varphi_7 \doteq \frac{d_n}{d_r} \cdot \frac{s_r}{s_n} \cdot \varphi_n,$$

also

$$\varphi_7 \doteq \frac{d_5}{d_7} \cdot \frac{s_7}{s_5} \cdot \varphi_5 = \frac{19,54 \cdot 32,3}{17,30 \cdot 39,2} \cdot \varphi_5 = 0,93 \varphi_5.$$

Durch Einführung dieses Wertes in Gleichung (φ_5) erhält man

$$19,54 \varphi_5 + 3,90 \varphi_3 + 3,74 \cdot 0,93 \varphi_5 - 39,2 = 0$$

oder

$$23,02 \varphi_5 + 3,90 \varphi_3 - 39,2 = 0.$$

Damit lauten die dem „reduzierten System“ entsprechenden Ausgangsgleichungen in geordneter Schreibweise:

$$20,84 \varphi_3 + 3,90 \varphi_5 - 42,4 = 0$$

$$3,90 \varphi_3 + 23,02 \varphi_5 - 39,2 = 0.$$

Die Auflösung ergibt: $\varphi_3' = 1,77$; $\varphi_5' = 1,40$.

Die Berechnung der übrigen Unbekannten erfolgt stufenweise aus je einer Gleichung. Die hierbei jeweils auftretenden überzähligen Unbekannten werden ebenfalls durch eine „relative Schätzung“ nach (348) beseitigt. Diese Vorarbeit kann sofort für alle Unbekannten durchgeführt werden:

$$\varphi_9 \doteq \frac{d_7}{d_9} \cdot \frac{s_9}{s_7} \cdot \varphi_7 = \frac{17,30 \cdot 27,0}{14,86 \cdot 32,3} \cdot \varphi_7 = 0,97 \varphi_7;$$

$$\varphi_{11} \doteq \frac{d_9}{d_{11}} \cdot \frac{s_{11}}{s_9} \cdot \varphi_9 = \frac{14,86 \cdot 27,0}{12,80 \cdot 27,0} \cdot \varphi_9 = 1,16 \varphi_9$$

und ebenso

$$\varphi_{13} \doteq 1,15 \varphi_{11}; \quad \varphi_{15} \doteq 1,16 \varphi_{13}; \quad \varphi_{17} \doteq 1,08 \varphi_{15}; \quad \varphi_{19} \doteq 1,16 \varphi_{17}; \quad \varphi_{21} \doteq 1,74 \varphi_{19}.$$

Damit erhält man unter Verwendung der jeweils bereits ermittelten und der soeben „vorausgeschätzten“ Unbekannten:

aus Gleichung (φ_7)

$$\varphi_7' = \frac{32,3 - 3,74 \cdot 1,40}{17,3 + 3,15 \cdot 0,97} = 1,33;$$

aus Gleichung (φ_9)

$$\varphi_9' = \frac{27,0 - 3,15 \cdot 1,33}{14,86 + 3,01 \cdot 1,16} = 1,24$$

und auf die gleiche Weise aus den Gleichungen (φ_{11}) bis (φ_{21})

$$\varphi_{11}' = 1,50; \quad \varphi_{13}' = 1,69; \quad \varphi_{15}' = 2,01; \quad \varphi_{17}' = 2,11; \quad \varphi_{19}' = 2,33; \quad \varphi_{21}' = 5,31.$$

Zweiter Rechnungsgang.

Hier wird auf die Annahme eines „reduzierten Systems“ verzichtet und die Berechnung sämtlicher Unbekannten sofort stufenweise unter direkter Benutzung der Werte aus dem *ersten* Rechnungsgang durchgeführt. Man erhält:

aus Gleichung (φ_3)

$$\varphi_3'' = \frac{1}{20,84} (-3,9 \cdot 1,4 + 42,4) = 1,77;$$

aus Gleichung (φ_5)

$$\varphi_5'' = \frac{1}{19,54} (-3,9 \cdot 1,77 - 3,74 \cdot 1,33 + 39,2) = 1,40$$

und ebenso aus den Gleichungen (φ_7) bis (φ_{21})

$$\varphi_7'' = 1,34; \quad \varphi_9'' = 1,23; \quad \varphi_{11}'' = 1,51; \quad \varphi_{13}'' = 1,68; \quad \varphi_{15}'' = 2,03; \quad \varphi_{17}'' = 2,13; \\ \varphi_{19}'' = 2,10; \quad \varphi_{21}'' = 5,39.$$

Ein Vergleich der Ergebnisse aus beiden Rechnungsgängen zeigt nur im oberen Rahmenteil noch fühlbare Abweichungen. Es wird daher in diesem Bereich (für φ_{15} , φ_{17} , φ_{19} , φ_{21}) ein *dritter* Rechnungsgang vorgenommen.



Abb. 425.
„Reduziertes System“. Ausgangsunbekannte φ_3 , φ_5 .

Dritter Rechnungsgang.

Es gelangen auch hier die zuletzt erhaltenen Ergebnisse direkt zur Verwendung. Man erhält:

aus Gleichung (φ_{15})

$$\varphi_{15}''' = \frac{1}{9,12} (-2,13 \cdot 1,68 - 1,73 \cdot 2,13 + 25,7) = 2,02;$$

aus Gleichung (φ_{17})

$$\varphi_{17}''' = \frac{1}{7,74} (-1,73 \cdot 2,02 - 1,54 \cdot 2,10 + 23,6) = 2,18$$

und ebenso aus den Gleichungen (φ_{19}) und (φ_{21}) $\varphi_{19}''' = 2,08$; $\varphi_{21}''' = 5,40$.

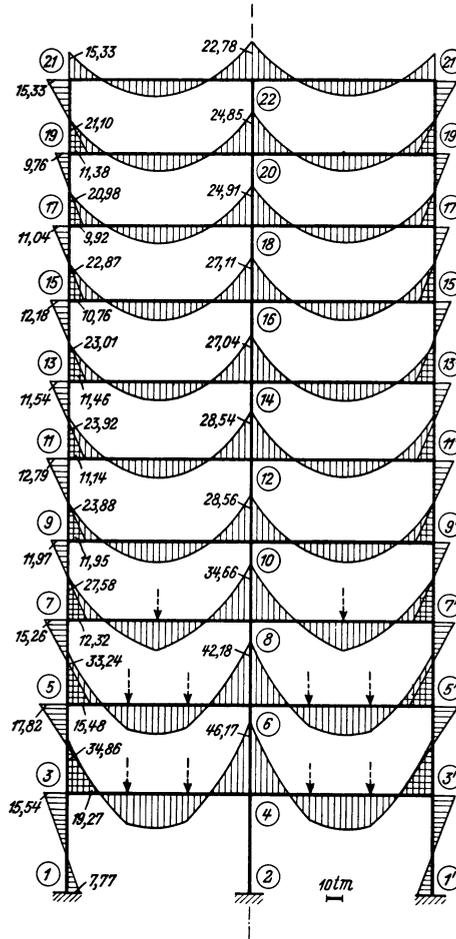


Abb. 426. Momentenbild.

In der folgenden Tabelle ist eine Gegenüberstellung aller Werte aus den drei Rechnungsgängen gegeben.

Ergebnisse der Rechnungsgänge.

	φ_3	φ_5	φ_7	φ_9	φ_{11}	φ_{13}	φ_{15}	φ_{17}	φ_{19}	φ_{21}
I. Rechnungsg.	1,77	1,40	1,33	1,24	1,50	1,69	2,01	2,11	2,33	5,31
II. „	1,77	1,40	1,34	1,23	1,51	1,68	2,03	2,13	2,10	5,39
III. „	—	—	—	—	—	—	2,02	2,18	2,08	5,40

Momente.

Nach (14) ist für einen Stab 1–2 allgemein

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2) + \mathfrak{M}_{1,2}.$$

Damit erhält man mit den zuletzt ermittelten, bereits hinreichend genauen φ -Werten:

$M_{1,3} = + 7,77 \text{ tm}$	$M_{10,9} = + 28,56 \text{ tm}$	$M_{18,17} = + 24,91 \text{ tm}$
$M_{3,1} = + 15,54 \text{ ,,}$	$M_{11,9} = + 12,79 \text{ ,,}$	$M_{19,17} = + 9,76 \text{ ,,}$
$M_{3,4} = - 34,86 \text{ ,,}$	$M_{11,12} = - 23,92 \text{ ,,}$	$M_{19,20} = - 21,10 \text{ ,,}$
$M_{3,5} = + 19,27 \text{ ,,}$	$M_{11,13} = + 11,14 \text{ ,,}$	$M_{19,21} = + 11,38 \text{ ,,}$
$M_{4,3} = + 46,17 \text{ ,,}$	$M_{12,11} = + 28,54 \text{ ,,}$	$M_{20,19} = + 24,85 \text{ ,,}$
$M_{5,3} = + 17,82 \text{ ,,}$	$M_{13,11} = + 11,54 \text{ ,,}$	$M_{21,19} = + 15,33 \text{ ,,}$
$M_{5,6} = - 33,24 \text{ ,,}$	$M_{13,14} = - 23,01 \text{ ,,}$	$M_{21,22} = - 15,33 \text{ ,,}$
$M_{5,7} = + 15,48 \text{ ,,}$	$M_{13,15} = + 11,46 \text{ ,,}$	$M_{22,21} = + 22,78 \text{ ,,}$
$M_{6,5} = + 42,18 \text{ ,,}$	$M_{14,13} = + 27,04 \text{ ,,}$	
$M_{7,5} = + 15,26 \text{ ,,}$	$M_{15,13} = + 12,18 \text{ ,,}$	
$M_{7,8} = - 27,58 \text{ ,,}$	$M_{15,16} = - 22,87 \text{ ,,}$	
$M_{7,9} = + 12,32 \text{ ,,}$	$M_{15,17} = + 10,76 \text{ ,,}$	
$M_{8,7} = + 34,66 \text{ ,,}$	$M_{16,15} = + 27,11 \text{ ,,}$	
$M_{9,7} = + 11,97 \text{ ,,}$	$M_{17,15} = + 11,04 \text{ ,,}$	
$M_{9,10} = - 23,88 \text{ ,,}$	$M_{17,18} = - 20,98 \text{ ,,}$	
$M_{9,11} = + 11,95 \text{ ,,}$	$M_{17,19} = + 9,92 \text{ ,,}$	

Das zugehörige Momentenbild siehe Abb. 426.

Zahlenbeispiel 26

(Erläuterungen auch auf Seite 150).

Symmetrischer, 10geschossiger und vierstieliger Stockwerkrahmen mit waagrechtlicher Belastung. Die Längen- und Belastungsangaben sind in der Beiwertskizze Abb. 427 enthalten, in welcher bereits sämtliche Steifigkeitszahlen k und (in Klammern) die Werte $[3k]$ der Säulen eingetragen sind. Wegen fester Einspannung der Säulenhülsen wird $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Die vorliegende Belastung ergibt ein antisymmetrisches Momentenbild, d. h. es braucht in der Berechnung nur eine Hälfte des Tragwerkes mit der halben Belastung in Betracht gezogen werden (siehe Seite 34). Dabei ist zu berücksichtigen, daß $\varphi_4' = \varphi_4, \varphi_6' = \varphi_6, \dots, \varphi_{22}' = \varphi_{22}$, so daß insgesamt 30 Unbekannte zu bestimmen sind, und zwar 20 Knotendrehwinkel φ und 10 Stabdrehwinkel ψ . Die Berechnung soll nach der im siebenten Abschnitt des Ersten Teiles entwickelten „Reduktionsmethode“ durchgeführt werden.

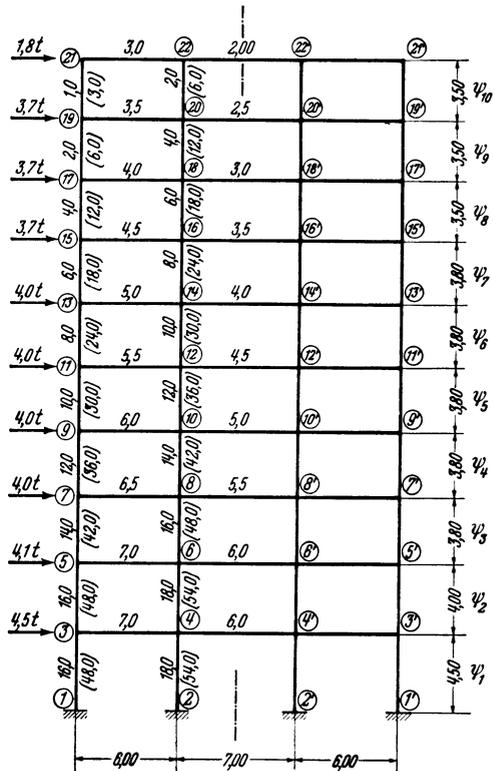


Abb. 427. Belastungs- und Beiwertskizze.

Diagonalglieder d und D.

Für die Knotenreihe 3—21 gilt der allgemeine Ansatz nach (35) $d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$, während für die der Symmetrale benachbarte Knotenreihe 4—22 der Ausdruck (57) $\bar{d}_n = d_n + k_{n,n}$ anzuwenden ist. Damit erhält man an Hand der Beiwertschizze z. B.

$$d_3 = 2(2 \cdot 16 + 7) = 78$$

$$\bar{d}_4 = 2(2 \cdot 18 + 7 + 6) + 6 = 104$$

und in ähnlicher Weise:

$$d_5 = 74; \quad \bar{d}_8 = 89,5; \quad d_{11} = 47; \quad \bar{d}_{14} = 58; \quad d_{17} = 20; \quad \bar{d}_{20} = 26,5;$$

$$\bar{d}_6 = 100; \quad d_9 = 56; \quad \bar{d}_{12} = 68,5; \quad d_{15} = 29; \quad \bar{d}_{18} = 37; \quad d_{21} = 8;$$

$$d_7 = 65; \quad \bar{d}_{10} = 79; \quad d_{13} = 38; \quad \bar{d}_{16} = 47,5; \quad d_{19} = 13; \quad \bar{d}_{22} = 16.$$

Nach (48) erhält man das Diagonalglied D_μ der Verschiebungsgleichung für ein Stockwerk μ allgemein mit $D_\mu = 6 \sum_\mu k$. Unter Beachtung, daß sich hier $\sum_\mu k$ nur auf eine Tragwerkshälfte bezieht, ergeben sich für die einzelnen Stockwerke

$$D_1 = D_2 = 6(16 + 18) = 204; \quad D_5 = 6(10 + 12) = 132; \quad D_8 = 6(4 + 6) = 60;$$

$$D_3 = 6(14 + 16) = 180; \quad D_6 = 6(8 + 10) = 108; \quad D_9 = 6(2 + 4) = 36;$$

$$D_4 = 6(12 + 14) = 156; \quad D_7 = 6(6 + 8) = 84; \quad D_{10} = 6(1 + 2) = 18.$$

Belastungsglieder.

Die Werte \mathfrak{M} und s sind hier durchwegs Null, da sämtliche Stäbe unbelastet sind. Die Belastungsglieder S_μ der Verschiebungsgleichungen ergeben sich nach (49) für ein Stockwerk μ sehr einfach mit

$$S_\mu = (\sum P) \cdot l_\mu,$$

weil alle übrigen Glieder Null sind. Da nur die halbe Belastung in Rechnung zu setzen ist, erhält man der Reihe nach, beim obersten Geschoß beginnend:

$$S_{10} = 0,5 \cdot 1,8 \cdot 3,5 = 3,15 \text{ tm}; \quad S_5 = 0,5 \cdot 20,9 \cdot 3,8 = 39,71 \text{ tm};$$

$$S_9 = 0,5 \cdot 5,5 \cdot 3,5 = 9,63 \text{ ,,}; \quad S_4 = 0,5 \cdot 24,9 \cdot 3,8 = 47,31 \text{ ,,};$$

$$S_8 = 0,5 \cdot 9,2 \cdot 3,5 = 16,10 \text{ ,,}; \quad S_3 = 0,5 \cdot 28,9 \cdot 3,8 = 54,91 \text{ ,,};$$

$$S_7 = 0,5 \cdot 12,9 \cdot 3,8 = 24,51 \text{ ,,}; \quad S_2 = 0,5 \cdot 33,0 \cdot 4,0 = 66,00 \text{ ,,};$$

$$S_6 = 0,5 \cdot 16,9 \cdot 3,8 = 32,11 \text{ ,,}; \quad S_1 = 0,5 \cdot 37,5 \cdot 4,5 = 84,38 \text{ ,,}.$$

Aufstellung der Gleichungen.

Knotengleichungen nach (40) unter Beachtung, daß hier durchwegs $s = 0$ ist:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + 3 k_\mu \psi_\mu + 3 k_{\mu+1} \psi_{\mu+1} = 0.$$

Verschiebungsgleichungen nach (47):

$$\sum_\mu 3 k \varphi_u + \sum_\mu 3 k \varphi_0 + D_\mu \psi_\mu + S_\mu = 0.$$

Damit kann unter Zuhilfenahme der Beiwertschizze Abb. 427 die Aufstellung der Gleichungen vorgenommen werden, wobei aber hier auf die Tabellenform verzichtet und jeweils das Diagonalglied an die erste Stelle gesetzt wird.

Bedingungsgleichungen.

(φ_3)	78 φ_3	+ 7 φ_4	+ 16 φ_5	+ 48 ψ_1	+ 48 ψ_2	= 0	
(φ_4)	104 φ_4	+ 7 φ_3	+ 18 φ_6	+ 54 ψ_1	+ 54 ψ_2	= 0	
(φ_5)	74 φ_5	+ 16 φ_3	+ 7 φ_6	+ 14 φ_7	+ 48 ψ_2	+ 42 ψ_3	= 0
(φ_6)	100 φ_6	+ 18 φ_4	+ 7 φ_5	+ 16 φ_8	+ 54 ψ_2	+ 48 ψ_3	= 0
(φ_7)	65 φ_7	+ 14 φ_5	+ 6,5 φ_8	+ 12 φ_9	+ 42 ψ_3	+ 36 ψ_4	= 0
(φ_8)	89,5 φ_8	+ 16 φ_6	+ 6,5 φ_7	+ 14 φ_{10}	+ 48 ψ_3	+ 42 ψ_4	= 0
(φ_9)	56 φ_9	+ 12 φ_7	+ 6 φ_{10}	+ 10 φ_{11}	+ 36 ψ_4	+ 30 ψ_5	= 0
(φ_{10})	79 φ_{10}	+ 14 φ_8	+ 6 φ_9	+ 12 φ_{12}	+ 42 ψ_4	+ 36 ψ_5	= 0
(φ_{11})	47 φ_{11}	+ 10 φ_9	+ 5,5 φ_{12}	+ 8 φ_{13}	+ 30 ψ_5	+ 24 ψ_6	= 0
(φ_{12})	68,5 φ_{12}	+ 12 φ_{10}	+ 5,5 φ_{11}	+ 10 φ_{14}	+ 36 ψ_5	+ 30 ψ_6	= 0
(φ_{13})	38 φ_{13}	+ 8 φ_{11}	+ 5 φ_{14}	+ 6 φ_{15}	+ 24 ψ_6	+ 18 ψ_7	= 0
(φ_{14})	58 φ_{14}	+ 10 φ_{12}	+ 5 φ_{13}	+ 8 φ_{16}	+ 30 ψ_6	+ 24 ψ_7	= 0
(φ_{15})	29 φ_{15}	+ 6 φ_{13}	+ 4,5 φ_{16}	+ 4 φ_{17}	+ 18 ψ_7	+ 12 ψ_8	= 0
(φ_{16})	47,5 φ_{16}	+ 8 φ_{14}	+ 4,5 φ_{15}	+ 6 φ_{18}	+ 24 ψ_7	+ 18 ψ_8	= 0
(φ_{17})	20 φ_{17}	+ 4 φ_{15}	+ 4 φ_{18}	+ 2 φ_{19}	+ 12 ψ_8	+ 6 ψ_9	= 0
(φ_{18})	37 φ_{18}	+ 6 φ_{16}	+ 4 φ_{17}	+ 4 φ_{20}	+ 18 ψ_8	+ 12 ψ_9	= 0
(φ_{19})	13 φ_{19}	+ 2 φ_{17}	+ 3,5 φ_{20}	+ φ_{21}	+ 6 ψ_9	+ 3 ψ_{10}	= 0
(φ_{20})	26,5 φ_{20}	+ 4 φ_{18}	+ 3,5 φ_{19}	+ 2 φ_{22}	+ 12 ψ_9	+ 6 ψ_{10}	= 0
(φ_{21})	8 φ_{21}	+ φ_{19}	+ 3 φ_{22}	+ 3 ψ_{10}			= 0
(φ_{22})	16 φ_{22}	+ 2 φ_{20}	+ 3 φ_{21}	+ 6 ψ_{10}			= 0
(ψ_1)	204 ψ_1	+ 48 φ_3	+ 54 φ_4			+ 84,38	= 0
(ψ_2)	204 ψ_2	+ 48 φ_3	+ 54 φ_4	+ 48 φ_5	+ 54 φ_6	+ 66,00	= 0
(ψ_3)	180 ψ_3	+ 42 φ_5	+ 48 φ_6	+ 42 φ_7	+ 48 φ_8	+ 54,91	= 0
(ψ_4)	156 ψ_4	+ 36 φ_7	+ 42 φ_8	+ 36 φ_9	+ 42 φ_{10}	+ 47,31	= 0
(ψ_5)	132 ψ_5	+ 30 φ_9	+ 36 φ_{10}	+ 30 φ_{11}	+ 36 φ_{12}	+ 39,71	= 0
(ψ_6)	108 ψ_6	+ 24 φ_{11}	+ 30 φ_{12}	+ 24 φ_{13}	+ 30 φ_{14}	+ 32,11	= 0
(ψ_7)	84 ψ_7	+ 18 φ_{13}	+ 24 φ_{14}	+ 18 φ_{15}	+ 24 φ_{16}	+ 24,51	= 0
(ψ_8)	60 ψ_8	+ 12 φ_{15}	+ 18 φ_{16}	+ 12 φ_{17}	+ 18 φ_{18}	+ 16,10	= 0
(ψ_9)	36 ψ_9	+ 6 φ_{17}	+ 12 φ_{18}	+ 6 φ_{19}	+ 12 φ_{20}	+ 9,63	= 0
(ψ_{10})	18 ψ_{10}	+ 3 φ_{19}	+ 6 φ_{20}	+ 3 φ_{21}	+ 6 φ_{22}	+ 3,15	= 0.

Erster Rechnungsgang.

Als „reduziertes System“ wird der in Abb. 428 dargestellte untere Tragwerksteil gewählt, wofür insgesamt sieben Ausgangsunkbekannte, nämlich die Knotendrehwinkel $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ und die Stabdrehwinkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 gemeinsam zu bestimmen sind. Wie aus den zugehörigen Bedingungsgleichungen des Gesamtsystems hervorgeht, sind hier nur zwei überzählige Unbekannte vorhanden, und zwar φ_7 und φ_8 , die nach dem Ansatz (359) vorläufig $\varphi_7 \doteq \varphi_5$ und $\varphi_8 \doteq \varphi_6$ geschätzt werden.

Damit kann nun das „reduzierte Gleichungssystem I“ angeschrieben werden (siehe nächste Seite), worin die Verschiebungsgleichung für ψ_3 noch durch 2 dividiert wurde, um völlige Symmetrie im Gleichungsaufbau zu erreichen.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt die Ausgangsunkbekannten für den ersten Rechnungsgang:

$$\begin{aligned} \varphi_3' &= + 1,074; & \varphi_5' &= + 1,083; & \psi_1' &= - 0,912; & \psi_3' &= - 1,320. \\ \varphi_4' &= + 0,927; & \varphi_6' &= + 0,957; & \psi_2' &= - 1,330; \end{aligned}$$

Die übrigen Unbekannten werden stufenweise aus je einer Gleichung ermittelt, wobei die Schätzung der überzähligen Unbekannten nach den Ansätzen (356a)

und (356)

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &\doteq 2 \varphi_n - \varphi_{n-1} \\ \psi_{n+1} &\doteq 2 \psi_n - \psi_{n-1} \end{aligned}$$

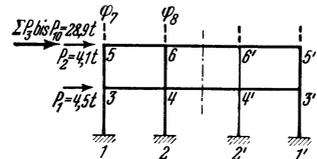


Abb. 428. „Reduziertes System“ für den ersten Rechnungsgang. Ausgangsunkbekannte: $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \psi_1, \psi_2, \psi_3$.

durchgeführt wird. Die Berechnung geschieht in der Weise, daß, von unten nach oben fortschreitend, immer abwechselnd zwei Knotendrehwinkel und ein Stabdrehwinkel bestimmt werden. Die Gleichungen sind jeweils den Bedingungsgleichungen des Gesamtsystems zu entnehmen.

Reduziertes Gleichungssystem I.

	φ_3'	φ_4'	φ_5'	φ_6'	ψ_1'	ψ_2'	ψ_3'	B
φ_3'	78	7	16		48	48		—
φ_4'	7	104		18	54	54		—
φ_5'	16		88	7		48	42	—
φ_6'		18	7	116		54	48	—
ψ_1'	48	54			204			84,38
ψ_2'	48	54	48	54		204		66,00
ψ_3'			42	48			90	27,46

Ermittlung von φ_7' aus Gleichung (φ_7). Geschätzt: $\varphi_8' \doteq 2\varphi_6' - \varphi_4' = 2 \cdot 0,957 - 0,927 = 0,987$; $\varphi_9' \doteq 2\varphi_7' - \varphi_5' = 2\varphi_7' - 1,083$; $\psi_4' \doteq 2\psi_3' - \psi_2' = -2 \cdot 1,32 + 1,33 = -1,31$. Somit

$$\varphi_7' = \frac{-14 \cdot 1,083 - 6,5 \cdot 0,987 + 12 \cdot 1,083 + 42 \cdot 1,32 + 36 \cdot 1,31}{65 + 2 \cdot 12} = +1,060.$$

Ermittlung von φ_8' aus Gleichung (φ_8). Geschätzt: $\varphi_{10}' \doteq 2\varphi_8' - \varphi_6' = 2\varphi_8' - 0,957$; $\psi_4' \doteq -1,31$. Somit

$$\varphi_8' = \frac{-16 \cdot 0,957 - 6,5 \cdot 1,06 + 14 \cdot 0,957 + 48 \cdot 1,32 + 42 \cdot 1,31}{89,5 + 2 \cdot 14} = +0,927.$$

Ermittlung von ψ_4' aus Gleichung (ψ_4). Geschätzt: $\varphi_9' \doteq 2\varphi_7' - \varphi_5' = 2 \cdot 1,06 - 1,083 = +1,037$; $\varphi_{10}' \doteq 2\varphi_8' - \varphi_6' = 2 \cdot 0,927 - 0,957 = +0,897$. Somit

$$\psi_4' = \frac{-36 \cdot (1,06 + 1,037) - 42 \cdot (0,927 + 0,897) - 47,31}{156} = -1,278.$$

Ermittlung von φ_9' aus Gleichung (φ_9). Geschätzt: $\varphi_{10}' \doteq 2\varphi_8' - \varphi_6' = 2 \cdot 0,927 - 0,957 = +0,897$; $\varphi_{11}' \doteq 2\varphi_9' - \varphi_7' = 2\varphi_9' - 1,06$; $\psi_5' \doteq 2\psi_4' - \psi_3' = -2 \cdot 1,278 + 1,32 = -1,236$. Somit

$$\varphi_9' = \frac{-12 \cdot 1,06 - 6 \cdot 0,897 + 10 \cdot 1,06 + 36 \cdot 1,278 + 30 \cdot 1,236}{56 + 2 \cdot 10} = +0,995.$$

Ermittlung von φ_{10}' aus Gleichung (φ_{10}). Geschätzt: $\varphi_{12}' \doteq 2\varphi_{10}' - \varphi_8' = 2\varphi_{10}' - 0,927$; $\psi_5' \doteq -1,236$. Somit

$$\varphi_{10}' = \frac{-14 \cdot 0,927 - 6 \cdot 0,995 + 12 \cdot 0,927 + 42 \cdot 1,278 + 36 \cdot 1,236}{79 + 2 \cdot 12} = +0,877.$$

Ermittlung von ψ_5' aus Gleichung (ψ_5). Geschätzt: $\varphi_{11}' \doteq 2\varphi_9' - \varphi_7' = 2 \cdot 0,995 - 1,06 = +0,93$; $\varphi_{12}' \doteq 2\varphi_{10}' - \varphi_8' = 2 \cdot 0,877 - 0,927 = +0,827$. Somit

$$\psi_5' = \frac{1}{132} [-30(0,995 + 0,930) - 36(0,877 + 0,827) - 39,71] = -1,202.$$

In derselben Weise erhält man aus den übrigen Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi_{11}' &= + 0,898; & \varphi_{13}' &= + 0,827; & \varphi_{15}' &= + 0,676; & \varphi_{17}' &= + 0,448; & \varphi_{19}' &= + 0,233; \\ \varphi_{12}' &= + 0,794; & \varphi_{14}' &= + 0,733; & \varphi_{16}' &= + 0,620; & \varphi_{18}' &= + 0,448; & \varphi_{20}' &= + 0,266; \\ \varphi_6' &= - 1,138; & \varphi_7' &= - 1,031; & \varphi_8' &= - 0,847; & \varphi_9' &= - 0,621; & \varphi_{10}' &= - 0,333; \\ & & \varphi_{21}' &= + 0,064; & \varphi_{22}' &= + 0,080. \end{aligned}$$

Zweiter Rechnungsgang.

Diesem wird das „reduzierte System“ der Abb. 429 mit den drei Ausgangs- unbekanntem $\varphi_5, \varphi_7, \varphi_3$ zugrunde gelegt. Die in den zugehörigen Gleichungen enthaltenen überzähligen Unbekannten $\varphi_3, \varphi_6, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_2, \varphi_4$ werden nach (358) mit den Werten des ersten Rechnungsganges als Funktion der Ausgangsunkbekanntem ausgedrückt. Danach erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_3'' &\doteq \frac{\varphi_3'}{\varphi_5'} \cdot \varphi_5'' = \frac{1,074}{1,083} \cdot \varphi_5'' = 0,992 \varphi_5''; & \varphi_9'' &\doteq \frac{\varphi_9'}{\varphi_7'} \cdot \varphi_7'' = 0,939 \varphi_7''; \\ \varphi_6'' &\doteq \frac{\varphi_6'}{\varphi_5'} \cdot \varphi_5'' = \frac{0,957}{1,083} \cdot \varphi_5'' = 0,884 \varphi_5''; & \varphi_2'' &\doteq \frac{\varphi_2'}{\varphi_3'} \cdot \varphi_3'' = 1,008 \varphi_3''; \\ \varphi_8'' &\doteq \frac{\varphi_8'}{\varphi_7'} \cdot \varphi_7'' = \frac{0,927}{1,060} \cdot \varphi_7'' = 0,875 \varphi_7''; & \varphi_4'' &\doteq \frac{\varphi_4'}{\varphi_3'} \cdot \varphi_3'' = 0,968 \varphi_3''. \end{aligned}$$

Führt man diese Werte in die Ausgangsgleichungen ein, so erhält man das „reduzierte Gleichungssystem II“.

Reduziertes Gleichungssystem II.

	φ_5''	φ_7''	φ_3''	B
φ_5''	96,06	14,0	90,38	—
φ_7''	14,0	81,96	76,85	—
φ_3''	84,43	84,0	180,0	54,91

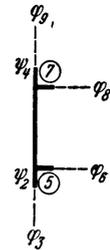


Abb. 429. „Reduziertes System“ für den zweiten Rechnungsgang. Ausgangsunkbekanntem: $\varphi_5, \varphi_7, \varphi_3$.

Die Auflösung ergibt die Ausgangswerte für den zweiten Rechnungsgang:

$$\varphi_5'' = + 1,038; \quad \varphi_7'' = + 1,003; \quad \varphi_3'' = - 1,259.$$

Die weitere Berechnung, in welcher die noch fehlenden Unbekanntem im zweiten Rechnungsgang wieder stufenweise aus je einer Gleichung zu ermitteln sind, erfolgt in der Weise, daß bei der Bestimmung von $\varphi_6'', \varphi_2'', \varphi_4'', \varphi_8'', \varphi_{10}''$ die aus dem ersten Rechnungsgang vorliegenden Werte direkt eingeführt werden, weil sie größtenteils dem ersten „reduzierten System“ angehörten und voraussichtlich eine ausreichende Genauigkeit besitzen. Man erhält sonach:

$$\varphi_6'' = \frac{1}{100} (- 18 \cdot 0,927 - 7 \cdot 1,038 - 16 \cdot 0,927 + 54 \cdot 1,33 + 48 \cdot 1,259) = + 0,938;$$

$$\varphi_2'' = \frac{1}{204} [- 48 (1,074 + 1,038) - 54 (0,927 + 0,938) - 66] = - 1,314$$

und ebenso $\varphi_4'' = + 0,920; \quad \varphi_8'' = + 1,072; \quad \varphi_{10}'' = - 0,910.$

Bei der Ermittlung der übrigen Unbekanntem wird die Schätzung der überzähligen Größen wieder nach (358) vorgenommen:

$$\varphi_9'' \doteq \frac{0,995}{1,060} \cdot \varphi_7'' = 0,939 \varphi_7''; \quad \varphi_{10}'' \doteq \frac{0,877}{0,927} \cdot \varphi_8'' = 0,945 \varphi_8''; \quad \varphi_4'' \doteq \frac{1,278}{1,320} \cdot \varphi_3'' = 0,967 \varphi_3'';$$

$$\varphi_{11}'' \doteq \frac{0,898}{0,995} \cdot \varphi_9'' = 0,903 \varphi_9''; \quad \varphi_{12}'' \doteq \frac{0,794}{0,877} \cdot \varphi_{10}'' = 0,905 \varphi_{10}''; \quad \varphi_5'' \doteq \frac{1,202}{1,278} \cdot \varphi_4'' = 0,942 \varphi_4'' \text{ usw.}$$

Damit ergeben sich

$$\varphi_8'' = \frac{-16.0,938 - 6,5 \cdot 1,003 + 1,259(48 + 42 \cdot 0,967)}{89,5 + 14 \cdot 0,945} = +0,875;$$

$$\varphi_4'' = \frac{-36 \cdot 1,939 \cdot 1,003 - 42 \cdot 1,945 \cdot 0,875 - 47,31}{156} = -1,211;$$

ebenso $\varphi_9'' = +0,935; \varphi_{10}'' = +0,824; \psi_5'' = -1,132$ usw.

Dritter und vierter Rechnungsgang.

Zum Vergleich wurden noch zwei weitere Rechnungswiederholungen ohne Anwendung eines „reduzierten Systems“ durchgeführt. Sämtliche Unbekannten wurden dabei also stufenweise aus je einer Gleichung ermittelt, und zwar im *dritten* Rechnungsgang die Winkel $\varphi_5, \varphi_6, \psi_2, \varphi_4, \varphi_3, \psi_1$ unter direkter Anwendung der Ergebnisse aus dem *zweiten* Rechnungsgang, die übrigen Unbekannten wie früher unter Zuhilfenahme der Verhältniswerte der zuletzt erhaltenen Unbekannten nach (358). Im *vierten* Rechnungsgang gelangten die Ergebnisse des *dritten* Rechnungsganges durchwegs direkt zur Anwendung.

Sämtliche Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

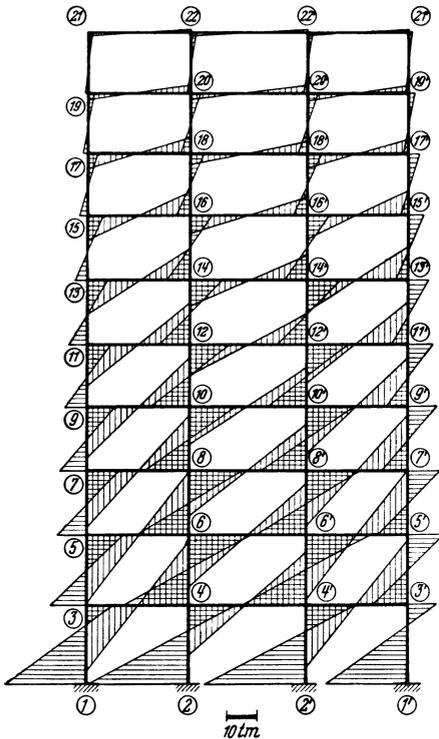


Abb. 430. Momentenbild.

Ergebnisse der Rechnungsgänge.

	I. R. G.	II. R. G.	III. R. G.	IV. R. G.
φ_3	+ 1,074	+ 1,072	+ 1,070	+ 1,069
φ_4	+ 0,927	+ 0,920	+ 0,922	+ 0,922
φ_5	+ 1,083	+ 1,038	+ 1,058	+ 1,062
φ_6	+ 0,957	+ 0,938	+ 0,934	+ 0,936
φ_7	+ 1,060	+ 1,003	+ 0,999	+ 1,004
φ_8	+ 0,927	+ 0,875	+ 0,882	+ 0,880
φ_9	+ 0,995	+ 0,935	+ 0,920	+ 0,923
φ_{10}	+ 0,877	+ 0,824	+ 0,818	+ 0,813
φ_{11}	+ 0,898	+ 0,835	+ 0,839	+ 0,842
φ_{12}	+ 0,794	+ 0,752	+ 0,743	+ 0,742
φ_{13}	+ 0,827	+ 0,757	+ 0,742	+ 0,734
φ_{14}	+ 0,733	+ 0,669	+ 0,657	+ 0,652
φ_{15}	+ 0,676	+ 0,603	+ 0,584	+ 0,580
φ_{16}	+ 0,620	+ 0,547	+ 0,528	+ 0,525
φ_{17}	+ 0,448	+ 0,397	+ 0,397	+ 0,401
φ_{18}	+ 0,448	+ 0,390	+ 0,384	+ 0,391
φ_{19}	+ 0,233	+ 0,209	+ 0,211	+ 0,212
φ_{20}	+ 0,266	+ 0,239	+ 0,243	+ 0,243
φ_{21}	+ 0,064	+ 0,068	+ 0,067	+ 0,067
φ_{22}	+ 0,080	+ 0,079	+ 0,081	+ 0,080
ψ_1	- 0,912	- 0,910	- 0,910	- 0,909
ψ_2	- 1,330	- 1,314	- 1,316	- 1,315
ψ_3	- 1,320	- 1,259	- 1,265	- 1,271
ψ_4	- 1,278	- 1,211	- 1,208	- 1,204
ψ_5	- 1,202	- 1,132	- 1,124	- 1,126
ψ_6	- 1,138	- 1,053	- 1,043	- 1,038
ψ_7	- 1,031	- 0,938	- 0,917	- 0,911
ψ_8	- 0,847	- 0,754	- 0,733	- 0,737
ψ_9	- 0,621	- 0,576	- 0,576	- 0,581
ψ_{10}	- 0,333	- 0,323	- 0,330	- 0,329

Momente.

Mit $\mathfrak{M} = 0$ ist nach (7)

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2 + 3\psi).$$

Danach ergeben sich an Hand der Beiwertskeizze Abb. 427 unter Verwendung der Werte aus dem *vierten* Rechnungsgang folgende Stabendmomente:

$M_{1,3} = -26,53$ tm	$M_{9,7} = -9,14$ tm	$M_{16,14} = -8,25$ tm
$M_{2,4} = -32,49$ „	$M_{9,10} = +15,95$ „	$M_{16,15} = +7,34$ „
$M_{3,1} = -9,42$ „	$M_{9,11} = -6,90$ „	$M_{16,16'} = +5,51$ „
$M_{3,4} = +21,42$ „	$M_{10,8} = -15,48$ „	$M_{16,18} = -4,62$ „
$M_{3,5} = -11,92$ „	$M_{10,9} = +15,29$ „	$M_{17,15} = -3,32$ „
$M_{4,2} = -15,89$ „	$M_{10,10'} = +12,20$ „	$M_{17,18} = +4,77$ „
$M_{4,3} = +20,39$ „	$M_{10,12} = -12,11$ „	$M_{17,19} = -1,46$ „
$M_{4,4'} = +16,60$ „	$M_{11,9} = -7,71$ „	$M_{18,16} = -5,42$ „
$M_{4,6} = -20,97$ „	$M_{11,12} = +13,35$ „	$M_{18,17} = +4,73$ „
$M_{5,3} = -12,03$ „	$M_{11,13} = -5,57$ „	$M_{18,18'} = +3,52$ „
$M_{5,6} = +21,42$ „	$M_{12,10} = -12,95$ „	$M_{18,20} = -2,87$ „
$M_{5,7} = -9,59$ „	$M_{12,11} = +12,80$ „	$M_{19,17} = -1,84$ „
$M_{6,4} = -20,72$ „	$M_{12,12'} = +10,03$ „	$M_{19,20} = +2,33$ „
$M_{6,5} = +20,54$ „	$M_{12,14} = -9,76$ „	$M_{19,21} = -0,50$ „
$M_{6,6'} = +16,85$ „	$M_{13,11} = -6,43$ „	$M_{20,18} = -3,46$ „
$M_{6,8} = -16,98$ „	$M_{13,14} = +10,60$ „	$M_{20,19} = +2,44$ „
$M_{7,5} = -10,40$ „	$M_{13,15} = -4,11$ „	$M_{20,20'} = +1,82$ „
$M_{7,8} = +18,77$ „	$M_{14,12} = -10,67$ „	$M_{20,22} = -0,84$ „
$M_{7,9} = -8,17$ „	$M_{14,13} = +10,19$ „	$M_{21,19} = -0,64$ „
$M_{8,6} = -17,87$ „	$M_{14,14'} = +7,82$ „	$M_{21,22} = +0,64$ „
$M_{8,7} = +17,97$ „	$M_{14,16} = -7,23$ „	$M_{22,20} = -1,17$ „
$M_{8,8'} = +14,52$ „	$M_{15,13} = -5,03$ „	$M_{22,21} = +0,68$ „
$M_{8,10} = -14,55$ „	$M_{15,16} = +7,58$ „	$M_{22,22'} = +0,48$ „
	$M_{15,17} = -2,60$ „	

In Abb. 430 sind diese Momente maßstäblich aufgetragen.

Zahlenbeispiel 27 (Erläuterungen auch auf Seite 152).

Symmetrisches, lotrecht verschiebliches, sechsgeschossiges und sechsstieliges Rahmentragwerk aus Stahlbeton und Stahl mit lotrechter Belastung. Die Längen- und Querschnittsabmessungen sowie die Belastungsangaben sind in Abb. 431 enthalten. Die stark gezeichneten Stäbe zwischen den Knotenpunkten 5 und 5' sowie die Säulen 3—6 bzw. 3'—6' bestehen aus Stahl, während der übrige Teil des Rahmentragwerkes in Stahlbeton ausgeführt ist. In den Knotenpunkten 6 und 7 bzw. 6' und 7' sind die Säulen gelenkig angeschlossen. Es ist der Momentenverlauf für die angegebene Belastung nach der „Reduktionsmethode“ zu ermitteln.

Wegen fester Einspannung in 1, 2 und 3 ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$. Als Unbekannte sind daher zu bestimmen: 19 Knotendrehwinkel (φ_4 bis φ_{22}) und die Verschiebung δ der Knotenpunktsreihe 7—22.

In der Festwerttabelle 27 sind die Werte $k = \frac{1000J}{l} \cdot \frac{E}{E_b}$ für sämtliche Stäbe ermittelt, wobei nach (23) sinngemäß $z = \frac{1000}{2E_b}$ angenommen ist. Es tritt hier also die Verschiedenheit der Dehnungszahlen E_e und E_b für Stahl und Beton in Erscheinung, weshalb in der Tabelle auch eine Spalte mit dem Verhältniswert $\frac{E}{E_b}$ mitgeführt wird, der für Stäbe aus Beton den Wert 1 und für Stahlstäbe den Wert 10 annimmt. Weiter sind für jene Stäbe, die eine Verdrehung erleiden, auch die Werte $\bar{k} = \frac{3k}{l}$ ausgewiesen.

Festwerttabelle 27.

Stab	$b/h(\text{cm})$	$J(\text{m}^4)$	$l(\text{m})$	$\frac{E}{E_b}$	$k = \frac{1000 J}{l} \cdot \frac{E}{E_b}$	$\bar{k} = \frac{3 k}{l}$
1-4	80/60	0,01440	4,15	1	3,47	—
2-5	70/80	0,02987	4,15	1	7,20	—
3-6		0,00018	4,15	10	0,43	—
4-5	100/57	0,01543	4,19	1	3,68	—
5-6		0,00200	2,79	10	7,17	—
6-7		0,00200	1,40	10	14,29	30,62
7-7'		0,00182	4,19	10	4,34	—
4-8, 5-9, 7-10	60/55	0,00832	4,15	1	2,00	—
8-9, 9-10, 10-10'	95/57	0,01466	4,19	1	3,50	2,51
8-11, 9-12, 10-13	60/45	0,00456	3,55	1	1,28	—
11-12, 12-13, 13-13'	85/48	0,00783	4,19	1	1,87	1,34
14-15, 15-16, 16-16'						
17-18, 18-19, 19-19'						
11-14, 12-15, 13-16	55/45	0,00418	3,55	1	1,18	—
14-17, 15-18, 16-19						
17-20, 18-21, 19-22	45/45	0,00342	3,55	1	0,96	—
20-21, 21-22, 22-22'	35/48,5	0,00333	4,19	1	0,79	0,57

Sämtliche k -Werte und auch die erforderlichen \bar{k} -Werte (in Klammern) sind in der Beiwertskizze Abb. 432 eingetragen.

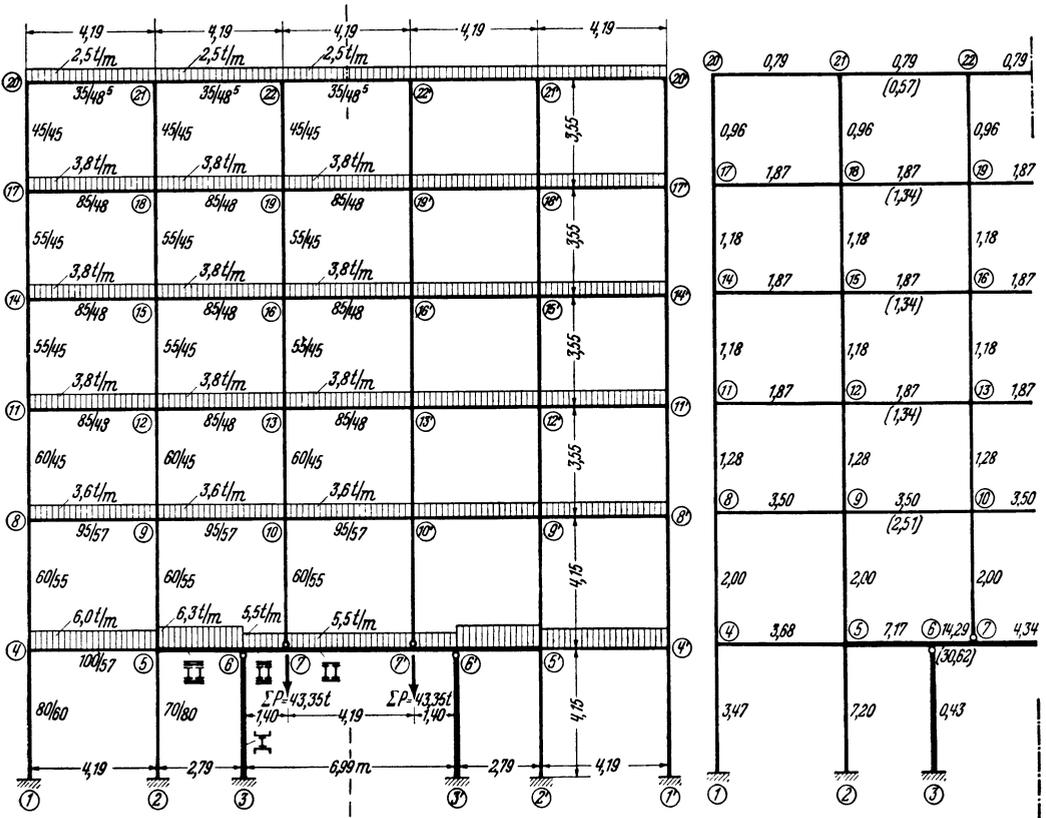


Abb. 431. Tragwerksabmessungen und Belastungsangaben.

Abb. 432. Beiwertskizze.

Diagonalglieder d.

Nach (19) ist allgemein $d_n = 2 \sum_i k_{n,i}$. Für die der Symmetrale benachbarten Knoten gilt nach (50) $d_n' = d_n - k_{n,n'}$. Mithin erhält man an Hand der Beiwertskezze Abb. 432:

$$\begin{aligned} d_4 &= 2 (3,47 + 3,68 + 2,00) &= 18,30; \\ d_5 &= 2 (7,20 + 3,68 + 7,17 + 2,0) &= 40,10; \\ d_6 &= 2 (7,17 + 14,29) &= 42,92; \\ d_7' &= 2 (14,29 + 4,34) - 4,34 &= 32,92; \\ d_8 &= 2 (2,00 + 3,50 + 1,28) &= 13,56. \end{aligned}$$

Ebenso ergeben sich:

$$\begin{aligned} d_9 &= 20,56; & d'_{13} &= 10,53; & d'_{16} &= 10,33; & d'_{19} &= 9,89; & d'_{22} &= 4,29. \\ d_{11} &= 8,66; & d_{14} &= 8,46; & d_{17} &= 8,02; & d_{20} &= 3,50; \\ d_{12} &= 12,40; & d_{15} &= 12,20; & d_{18} &= 11,76; & d_{21} &= 5,08; \end{aligned}$$

Bei Knoten 10 ist der gelenkige Stabanschluß in 7 zu berücksichtigen; nach (59) in Verbindung mit (50) erhält man

$$d'_{10} = d'_{10} - 0,5 k_{10,7} = 2 (2,0 + 2 \cdot 3,5 + 1,28) - 3,5 - 0,5 \cdot 2,0 = 16,06.$$

Stabbelastungsglieder M.

Diese sind ebenfalls tabellarisch zusammengestellt. Sie ergeben sich durchwegs nach der Formel

$$M_{\text{links}} = -M_{\text{rechts}} = -\frac{q l^3}{12}.$$

Stabbelastungsglieder M.

Stab	l(m)	q(t/m)	M _{links} ^(tm)	M _{rechts} ^(tm)
4-5	4,19	6,0	- 8,78	+ 8,78
5-6	2,79	6,3	- 4,09	+ 4,09
6-7	1,40	5,5	- 0,90	+ 0,90
7-7'	4,19	5,5	- 8,05	+ 8,05
8-9, 9-10, 10-10'	4,19	3,6	- 5,27	+ 5,27
11-12, 12-13, 13-13'	} 4,19	3,8	- 5,56	+ 5,56
14-15, 15-16, 16-16'				
17-18, 18-19, 19-19'				
20-21, 21-22, 22-22'	4,19	2,5	- 3,66	+ 3,66

Knotenbelastungsglieder s.

Nach (36a) $s_n = \sum_i M_{n,i}$ erhält man

$$\begin{aligned} s_4 &= - 8,78 \text{ tm}; & s_8 &= - 5,27 \text{ tm}; \\ s_5 &= + 8,78 - 4,09 = + 4,69 \text{ tm}; & s_{11} &= s_{14} = s_{17} = - 5,56 \text{ tm}; \\ s_6 &= + 4,09 - 0,90 = + 3,19 \text{ ,,}; & s_{20} &= - 3,66 \text{ tm}. \\ s_7 &= + 0,90 - 8,05 = - 7,15 \text{ ,,}; \end{aligned}$$

Aufstellung der Gleichungen.

Die *Knotengleichungen* für lotrecht verschiebliche Tragwerke haben nach (99) allgemein folgende Form:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + \bar{k}_v \delta_{m-1} + \kappa_n \delta_m - \bar{k}_{v+1} \delta_{m+1} + s_n = 0.$$

Für die Knotenreihe 7-22 ist $\delta_{m-1} = 0$ und $\delta_m = \delta_{m+1} = \delta$ zu setzen. Beachtet man weiter, daß nach (101) $\kappa_n = \bar{k}_{v+1} - \bar{k}_v$ ist, so nimmt die Knotengleichung für diese Punkte folgende Form an:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i - \bar{k}_v \delta + s_n = 0. \tag{I}$$

Für die Knotenpunkte 6 und 9–21 ist $\delta_{m-1} = \delta_m = 0$ und $\delta_{m+1} = \delta$ zu setzen. Die Knotengleichung für diese Reihe erscheint daher in der Form

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i - \bar{k}_{v+1} \delta + s_n = 0. \quad (\text{II})$$

Für die Knotenpunkte 5 und 4–20 entfallen jedoch sämtliche δ -Werte, weshalb sich die Knotengleichung für diese Punkte weiter vereinfacht und lautet:

$$d_n \varphi_n + \sum_i k_{n,i} \varphi_i + s_n = 0. \quad (\text{III})$$

Die *Verschiebungsgleichung* für die Knotenreihe 7–22 lautet nach (105) allgemein $-\sum_v \bar{k}_v \varphi_{m-1} + \sum \kappa_m \varphi_m + \sum_{v+1} \bar{k}_{v+1} \varphi_{m+1} - K_v \delta_{m-1} + D_m \delta_m - K_{v+1} \delta_{m+1} + S_m = 0$.

Im vorliegenden Fall ergeben sich hierin aber noch einige Vereinfachungen. Aus Symmetriegründen sind die Verschiebungen der Knotenreihen 7–22 und 7'–22' gleich groß, also $\delta_m = \delta_{m+1}$, während die Knotendrehwinkel φ dieser beiden Reihen paarweise gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind, somit $\varphi_m = -\varphi_{m+1}$. Da weiter die Knotenreihe 5–21 unverschieblich ist, wird $\delta_{m-1} = 0$. Beachtet man weiter, daß nach (101) $\kappa_m = \bar{k}_{v+1} - \bar{k}_v$ und nach (107) $D_m = K_v + K_{v+1}$ ist, so kann die Verschiebungsgleichung für die Knotenreihe 7–22 in folgender Form benutzt werden:

$$-\sum_v \bar{k}_v \varphi_{m-1} - \sum_v \bar{k}_v \varphi_m + K_v \delta_m + S_m = 0. \quad (\text{IV})$$

Hierin ist nach (106)

$$K_v = 2 \sum_v \frac{\bar{k}_v}{l_v} = 2 \left(\frac{30,62}{1,40} + \frac{2,51 + 3 \cdot 1,34 + 0,57}{4,19} \right) = 47,13$$

und nach (108) für die Knotenreihe 7–22 mit der Vereinfachung, daß die \mathfrak{M} -Glieder entfallen, weil sie paarweise gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind:

$$\begin{aligned} S_m &= -\sum P - \sum_v \mathfrak{M}_v^r - \sum_{v+1} \mathfrak{M}_{v+1}^l = \\ &= -43,35 - 5,5 \cdot \frac{1,40 + 4,19}{2} - 3,6 \cdot 4,19 - 3 \cdot 3,8 \cdot 4,19 - 2,5 \cdot 4,19 = -132,05 \text{ t.} \end{aligned}$$

Damit können an Hand der Gl. (I) bis (IV) und der Beiwertschizze Abb. 432 die erforderlichen 20 Bedingungsgleichungen aufgestellt werden.

Bedingungsgleichungen.

$$\begin{aligned} (\varphi_4) \quad & 18,30 \varphi_4 + 3,68 \varphi_5 + 2,00 \varphi_8 - 8,78 = 0 \\ (\varphi_5) \quad & 40,10 \varphi_5 + 3,68 \varphi_4 + 7,17 \varphi_6 + 2,00 \varphi_9 + 4,69 = 0 \\ (\varphi_6) \quad & 42,92 \varphi_6 + 7,17 \varphi_5 + 14,29 \varphi_7 - 30,62 \delta + 3,19 = 0 \\ (\varphi_7) \quad & 32,92 \varphi_7 + 14,29 \varphi_6 - 30,62 \delta - 7,15 = 0 \\ (\varphi_8) \quad & 13,56 \varphi_8 + 2,00 \varphi_4 + 3,50 \varphi_9 + 1,28 \varphi_{11} - 5,27 = 0 \\ (\varphi_9) \quad & 20,56 \varphi_9 + 2,00 \varphi_5 + 3,50 \varphi_8 + 3,50 \varphi_{10} + 1,28 \varphi_{12} - 2,51 \delta = 0 \\ (\varphi_{10}) \quad & 16,06 \varphi_{10} + 3,50 \varphi_9 + 1,28 \varphi_{13} - 2,51 \delta = 0 \\ (\varphi_{11}) \quad & 8,66 \varphi_{11} + 1,28 \varphi_8 + 1,87 \varphi_{12} + 1,18 \varphi_{14} - 5,56 = 0 \\ (\varphi_{12}) \quad & 12,40 \varphi_{12} + 1,28 \varphi_9 + 1,87 \varphi_{11} + 1,87 \varphi_{13} + 1,18 \varphi_{15} - 1,34 \delta = 0 \\ (\varphi_{13}) \quad & 10,53 \varphi_{13} + 1,28 \varphi_{10} + 1,87 \varphi_{12} + 1,18 \varphi_{16} - 1,34 \delta = 0 \\ (\varphi_{14}) \quad & 8,46 \varphi_{14} + 1,18 \varphi_{11} + 1,87 \varphi_{15} + 1,18 \varphi_{17} - 5,56 = 0 \\ (\varphi_{15}) \quad & 12,20 \varphi_{15} + 1,18 \varphi_{12} + 1,87 \varphi_{14} + 1,87 \varphi_{16} + 1,18 \varphi_{18} - 1,34 \delta = 0 \\ (\varphi_{16}) \quad & 10,33 \varphi_{16} + 1,18 \varphi_{13} + 1,87 \varphi_{15} + 1,18 \varphi_{19} - 1,34 \delta = 0 \\ (\varphi_{17}) \quad & 8,02 \varphi_{17} + 1,18 \varphi_{14} + 1,87 \varphi_{18} + 0,96 \varphi_{20} - 5,56 = 0 \\ (\varphi_{18}) \quad & 11,76 \varphi_{18} + 1,18 \varphi_{15} + 1,87 \varphi_{17} + 1,87 \varphi_{19} + 0,96 \varphi_{21} - 1,34 \delta = 0 \\ (\varphi_{19}) \quad & 9,89 \varphi_{19} + 1,18 \varphi_{16} + 1,87 \varphi_{18} + 0,96 \varphi_{22} - 1,34 \delta = 0 \\ (\varphi_{20}) \quad & 3,50 \varphi_{20} + 0,96 \varphi_{17} + 0,79 \varphi_{21} - 3,66 = 0 \\ (\varphi_{21}) \quad & 5,08 \varphi_{21} + 0,96 \varphi_{18} + 0,79 \varphi_{20} + 0,79 \varphi_{22} - 0,57 \delta = 0 \\ (\varphi_{22}) \quad & 4,29 \varphi_{22} + 0,96 \varphi_{19} + 0,79 \varphi_{21} - 0,57 \delta = 0 \\ (\delta) \quad & -30,62 (\varphi_6 + \varphi_7) - 2,51 (\varphi_9 + \varphi_{10}) - 1,34 (\varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{15} + \varphi_{16} + \varphi_{18} + \\ & + \varphi_{19}) - 0,57 (\varphi_{21} + \varphi_{22}) + 47,13 \delta - 132,05 = 0. \end{aligned}$$

Erster Rechnungsgang.

Der in Abb. 433 dargestellte Tragwerksteil wird als „reduziertes System“ gewählt. Für dieses sind die 7 Knotendrehwinkel $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}$ und die Verschiebung δ der Knotenreihe 7–22 als Ausgangsunbekannte gemeinsam zu bestimmen. Die zugehörigen Gleichungen werden aus den Bedingungsgleichungen des Gesamtsystems entnommen. In den Knotengleichungen für $\varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}$ ist nur je eine überzählige Unbekannte, nämlich $\varphi_{11}, \varphi_{12}$ bzw. φ_{13} durch „relative Schätzung“ zu beseitigen. In der Verschiebungsgleichung tritt dagegen eine größere Anzahl von überzähligen Unbekannten auf, und zwar $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{15}, \varphi_{16}, \varphi_{18}, \varphi_{19}, \varphi_{21}, \varphi_{22}$, die durch Ausgangsunbekannte auszudrücken sind.

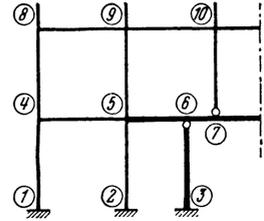


Abb. 433. „Reduziertes System“ für den ersten Rechnungsgang.

Die „relative Schätzung“ wird in der Weise vorgenommen, daß jeweils nur die an ein und demselben Stiel gelegenen Knotendrehwinkel zueinander ins Verhältnis gesetzt werden. Man erhält so

nach (360) $\varphi_8 : \varphi_{11} : \varphi_{14} : \varphi_{17} : \varphi_{20} \doteq 1 : 1,65 : 1,69 : 1,78 : 2,69;$
 „ (361) $\varphi_9 : \varphi_{12} : \varphi_{15} : \varphi_{18} : \varphi_{21} \doteq 1 : 0,89 : 0,90 : 0,93 : 0,92;$
 „ (362) $\varphi_{10} : \varphi_{13} : \varphi_{16} : \varphi_{19} : \varphi_{22} \doteq 1 : 0,81 : 0,83 : 0,87 : 0,85.$

Mit Hilfe dieser Schätzungswerte können die überzähligen Glieder in den Ausgangsgleichungen ersetzt werden, und zwar:

In der Knotengleichung (φ_8): $1,28 \varphi_{11} = 1,28 \cdot 1,65 \varphi_8 = 2,11 \varphi_8.$
 „ „ „ (φ_9): $1,28 \varphi_{12} = 1,28 \cdot 0,89 \varphi_9 = 1,14 \varphi_9.$
 „ „ „ (φ_{10}): $1,28 \varphi_{13} = 1,28 \cdot 0,81 \varphi_{10} = 1,04 \varphi_{10}.$
 „ „ Verschiebungsgleichung (δ): $-1,34 (\varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{15} + \varphi_{16} + \varphi_{18} + \varphi_{19}) -$
 $-0,57 (\varphi_{21} + \varphi_{22}) = -1,34 (0,89 \varphi_9 + 0,81 \varphi_{10} + 0,90 \varphi_9 + 0,83 \varphi_{10} +$
 $+ 0,93 \varphi_9 + 0,87 \varphi_{10}) - 0,57 (0,92 \varphi_9 + 0,85 \varphi_{10}) = -4,17 \varphi_9 - 3,85 \varphi_{10}.$

Damit ergibt sich das tabellarisch zusammengestellte „reduzierte Gleichungssystem I“.

Reduziertes Gleichungssystem I.

	φ_4'	φ_5'	φ_6'	φ_7'	φ_8'	φ_9'	φ'_{10}	δ'	B
φ_4'	18,30	3,68			2,00				-8,78
φ_5'	3,68	40,10	7,17			2,00			+4,69
φ_6'		7,17	42,92	14,29				-30,62	+3,19
φ_7'			14,29	32,92				-30,62	-7,15
φ_8'	2,00				15,67	3,50			-5,27
φ_9'		2,00			3,50	21,70	3,50	-2,51	—
φ'_{10}						3,50	17,10	-2,51	—
δ'			-30,62	-30,62		-6,68	-6,36	+47,13	-132,05

Durch Auflösung erhält man die Ausgangswerte für den ersten Rechnungsgang:

$\varphi_4' = +0,822; \quad \varphi_6' = +7,60; \quad \varphi_8' = -0,144; \quad \varphi'_{10} = +1,965;$
 $\varphi_5' = -1,635; \quad \varphi_7' = +11,58; \quad \varphi_9' = +1,679; \quad \delta' = +15,75.$

Die übrigen Unbekannten ergeben sich stufenweise aus je einer Gleichung, wobei wieder die jeweils auftretenden überzähligen Unbekannten zu schätzen sind. Wie aus den in (360) bis (362) aufgestellten Proportionen hervorgeht, sind in den meisten Fällen die unmittelbar übereinanderliegenden Knotendrehwinkel wertmäßig weniger verschieden zu erwarten, so daß sie der Einfachheit halber für die erste Schätzung in der

Regel gleich groß angenommen werden können. Nur dort, wo größere Unterschiede bestehen, werden diese auch in der Schätzung berücksichtigt.

Nach diesen Gesichtspunkten kann die Bestimmung der noch fehlenden Unbekannten erfolgen, wobei der Reihe nach die Bedingungsgleichungen des Gesamtsystems zu benutzen sind.

Ermittlung von φ'_{11} aus Gleichung (φ_{11}). Geschätzt: $\varphi'_{12} \doteq 0,89 \varphi'_9$; $\varphi'_{14} \doteq \varphi'_{11}$. Somit

$$\varphi'_{11} = \frac{+ 5,56 + 1,28 \cdot 0,144 - 1,87 \cdot 0,89 \cdot 1,679}{8,66 + 1,18} = + 0,300.$$

Ermittlung von φ'_{12} aus Gleichung (φ_{12}). Geschätzt: $\varphi'_{13} \doteq 0,81 \varphi'_{10}$; $\varphi'_{15} \doteq \varphi'_{12}$. Somit

$$\varphi'_{12} = \frac{1,34 \cdot 15,75 - 1,28 \cdot 1,679 - 1,87 \cdot 0,30 - 1,87 \cdot 0,81 \cdot 1,965}{12,40 + 1,18} = + 1,130.$$

Ermittlung von φ'_{13} aus Gleichung (φ_{13}). Geschätzt: $\varphi'_{16} \doteq \varphi'_{13}$. Somit

$$\varphi'_{13} = \frac{+ 1,34 \cdot 15,75 - 1,28 \cdot 1,965 - 1,87 \cdot 1,130}{10,53 + 1,18} = + 1,407.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

aus Gleichung (φ_{14}) mit $\varphi'_{15} \doteq \varphi'_{12}$ und $\varphi'_{17} \doteq \frac{1,78}{1,69} \varphi'_{14}$:	$\varphi'_{14} = + 0,319$;
„ „ (φ_{15}) „ $\varphi'_{16} \doteq 0,83 \varphi'_{10}$ und $\varphi'_{18} \doteq \varphi'_{15}$:	$\varphi'_{15} = + 1,205$;
„ „ (φ_{16}) „ $\varphi'_{19} \doteq \varphi'_{16}$:	$\varphi'_{16} = + 1,494$;
„ „ (φ_{17}) „ $\varphi'_{18} \doteq \varphi'_{15}$ und $\varphi'_{20} \doteq \frac{2,69}{1,78} \varphi'_{17}$:	$\varphi'_{17} = + 0,309$;
„ „ (φ_{18}) „ $\varphi'_{19} \doteq \varphi'_{16}$ und $\varphi'_{21} \doteq \varphi'_{18}$:	$\varphi'_{18} = + 1,282$;
„ „ (φ_{19}) „ $\varphi'_{22} \doteq \varphi'_{19}$:	$\varphi'_{19} = + 1,562$;
„ „ (φ_{20}) „ $\varphi'_{21} \doteq \varphi'_{18}$:	$\varphi'_{20} = + 0,672$;
„ „ (φ_{21}) „ $\varphi'_{22} \doteq \varphi'_{19}$:	$\varphi'_{21} = + 1,178$;
„ „ (φ_{22}):	$\varphi'_{22} = + 1,526$.

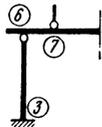


Abb. 434. „Reduziertes System“ für den zweiten Rechnungsgang.

Zweiter Rechnungsgang.

Als „reduziertes System“ wird der in Abb. 434 dargestellte Tragwerksteil gewählt, für welchen nur drei Ausgangsunbekannte gemeinsam zu bestimmen sind, nämlich φ_6'' , φ_7'' und δ'' . Die hierzu erforderlichen Gleichungen werden den Bedingungsgleichungen des Gesamtsystems entnommen. Für die überzähligen Unbekannten werden diesmal die aus dem ersten Rechnungsgang erhaltenen Werte direkt verwendet. Damit ergeben sich die neuen Absolutglieder

für die Knotengleichung (φ_6): $7,17 \varphi_5 + 3,19 \doteq - 7,17 \cdot 1,635 + 3,19 = - 8,53$;

„ „ Verschiebungsgleichung (δ): $- 2,51 (\varphi_9 + \varphi_{10}) - 1,34 (\varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{15} + \varphi_{16} + \varphi_{18} + \varphi_{19}) - 0,57 (\varphi_{21} + \varphi_{22}) - 132,05 \doteq - 2,51 (1,679 + 1,965) - 1,34 (1,13 + 1,407 + 1,205 + 1,494 + 1,282 + 1,562) - 0,57 (1,178 + 1,526) - 132,05 = - 153,57$.

Die Gleichung (φ_7) bleibt vollständig unverändert, weil sie nur Ausgangsunbekannte enthält. Somit kann das „reduzierte Gleichungssystem II“ unmittelbar in Tabellenform angeschrieben werden.

Reduziertes Gleichungssystem II.				
	φ_6''	φ_7''	δ''	B
φ_6''	42,92	14,29	- 30,62	- 8,53
φ_7''	14,29	32,92	- 30,62	- 7,15
δ''	- 30,62	- 30,62	+ 47,13	- 153,57

Durch Auflösung erhält man die Ausgangswerte für den *zweiten* Rechnungsgang:

$$\varphi_6'' = + 7,48; \quad \varphi_7'' = + 11,42; \quad \delta'' = + 15,54.$$

Die übrigen Werte werden wieder aus je einer Gleichung ermittelt, wobei auch hier auf weitere Schätzungen verzichtet wird und für die überzähligen Unbekannten die Werte aus dem *ersten* bzw., soweit bereits bekannt, aus dem *zweiten* Rechnungsgang direkt eingesetzt werden. Man erhält so aus den Bedingungsgleichungen des Gesamtsystems:

$$\varphi_5'' = \frac{1}{40,1} (-3,68 \cdot 0,822 - 7,17 \cdot 7,48 - 2 \cdot 1,679 - 4,69) = -1,614$$

$$\varphi_4'' = \frac{1}{18,3} (3,68 \cdot 1,614 + 2 \cdot 0,144 + 8,78) = + 0,820$$

$$\varphi_8'' = \frac{1}{13,56} (-2 \cdot 0,82 - 3,5 \cdot 1,679 - 1,28 \cdot 0,3 + 5,27) = -0,194$$

$$\varphi_9'' = \frac{1}{20,56} (2 \cdot 1,614 + 3,5 \cdot 0,194 - 3,5 \cdot 1,965 - 1,28 \cdot 1,13 + 2,51 \cdot 15,54) = + 1,682$$

$$\varphi_{10}'' = \frac{1}{16,06} (-3,5 \cdot 1,682 - 1,28 \cdot 1,407 + 2,51 \cdot 15,54) = + 1,950$$

$$\varphi_{11}'' = \frac{1}{8,66} (1,28 \cdot 0,194 - 1,87 \cdot 1,13 - 1,18 \cdot 0,319 + 5,56) = + 0,383$$

$$\varphi_{12}'' = \frac{1}{12,4} (-1,28 \cdot 1,682 - 1,87 \cdot 0,383 - 1,87 \cdot 1,407 - 1,18 \cdot 1,205 + 1,34 \cdot 15,54) = + 1,121$$

$$\varphi_{13}'' = \frac{1}{10,53} (-1,28 \cdot 1,95 - 1,87 \cdot 1,121 - 1,18 \cdot 1,494 + 1,34 \cdot 15,54) = + 1,374$$

und ebenso

$$\varphi_{14}'' = + 0,294; \quad \varphi_{15}'' = + 1,200; \quad \varphi_{16}'' = + 1,463; \quad \varphi_{17}'' = + 0,271; \quad \varphi_{18}'' = + 1,263; \\ \varphi_{19}'' = + 1,544; \quad \varphi_{20}'' = + 0,705; \quad \varphi_{21}'' = + 1,158; \quad \varphi_{22}'' = + 1,506.$$

Die Ergebnisse aus beiden Rechnungsgängen sind in nebenstehender Tabelle zusammengestellt.

Obwohl einzelne Werte aus dem *zweiten* Rechnungsgang noch merkliche Abweichungen gegenüber den Ergebnissen des *ersten* zeigen, wird hier von der Durchführung eines *dritten* Rechnungsganges abgesehen und sofort zur Ermittlung der Momente geschritten.

Ermittlung der Momente.

Nach (7)

$$M_{1,2} = k(2\varphi_1 + \varphi_2 + 3\psi) + \mathfrak{M}_{1,2}$$

kann an Hand der Beiwertschizze (Abb. 432) mit den Ergebnissen des *zweiten* Rechnungsganges die Ermittlung der Momente vorgenommen werden. Der Wert 3ψ ergibt sich für den Stab 6-7 mit

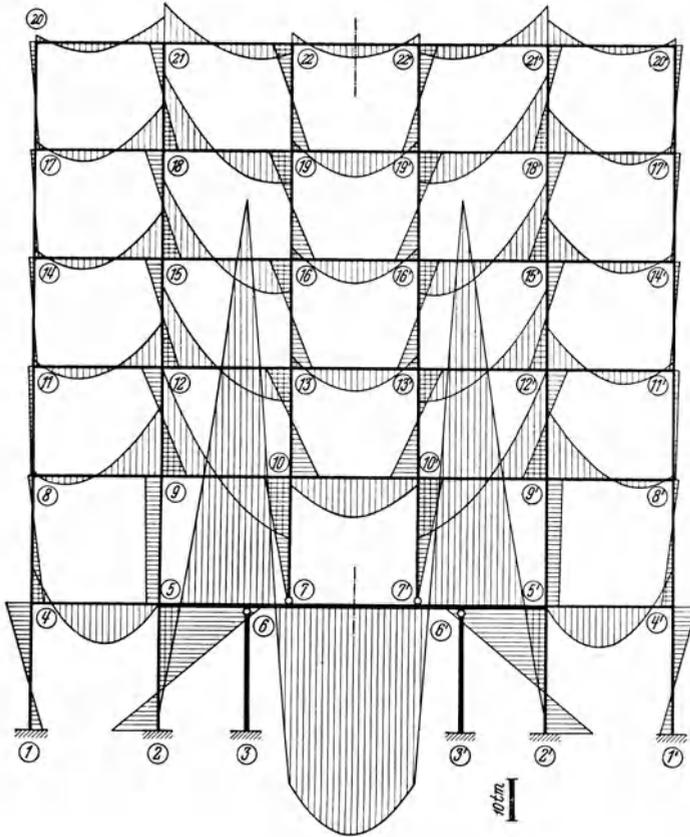
$$3\psi_{6,7} = -\frac{3\delta}{l_{6,7}} = -\frac{3 \cdot 15,54}{1,40} = -33,3.$$

Für die darüberliegenden Riegel dieses Feldes wird

$$3\psi = -\frac{3 \cdot 15,54}{4,19} = -11,13.$$

Ergebnisse.

	Erster Rechnungs- gang	Zweiter Rechnungs- gang
φ_4	+ 0,822	+ 0,820
φ_5	- 1,635	- 1,614
φ_6	+ 7,60	+ 7,48
φ_7	+ 11,58	+ 11,42
φ_8	- 0,144	- 0,194
φ_9	+ 1,679	+ 1,682
φ_{10}	+ 1,965	+ 1,950
φ_{11}	+ 0,300	+ 0,383
φ_{12}	+ 1,130	+ 1,121
φ_{13}	+ 1,407	+ 1,374
φ_{14}	+ 0,319	+ 0,294
φ_{15}	+ 1,205	+ 1,200
φ_{16}	+ 1,494	+ 1,463
φ_{17}	+ 0,309	+ 0,271
φ_{18}	+ 1,282	+ 1,263
φ_{19}	+ 1,562	+ 1,544
φ_{20}	+ 0,672	+ 0,705
φ_{21}	+ 1,178	+ 1,158
φ_{22}	+ 1,526	+ 1,506
δ	+ 15,75	+ 15,54



Die so erhaltenen Stabendmomente lauten:

- $M_{1,4} = + 2,85 \text{ tm}$
- $M_{2,5} = - 11,62 \text{ ,,}$
- $M_{4,1} = + 5,69 \text{ ,,}$
- $M_{4,5} = - 8,68 \text{ ,,}$
- $M_{4,8} = + 2,89 \text{ ,,}$
- $M_{5,2} = - 23,24 \text{ ,,}$
- $M_{5,4} = - 0,08 \text{ ,,}$
- $M_{5,6} = + 26,40 \text{ ,,}$
- $M_{5,9} = - 3,09 \text{ ,,}$
- $M_{6,5} = + 99,78 \text{ ,,}$
- $M_{6,7} = - 99,78 \text{ ,,}$
- $M_{7,6} = - 41,68 \text{ ,,}$
- $M_{7,7'} = + 41,51 \text{ ,,}$
- $M_{8,4} = + 0,86 \text{ ,,}$
- $M_{8,9} = - 0,74 \text{ ,,}$
- $M_{8,11} = - 0,01 \text{ ,,}$
- $M_{9,5} = + 3,50 \text{ ,,}$
- $M_{9,8} = + 16,37 \text{ ,,}$
- $M_{9,10} = - 25,61 \text{ ,,}$
- $M_{9,12} = + 5,74 \text{ ,,}$

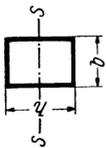
Abb. 435. Momentenbild.

$M_{10,7} = + 5,85 \text{ tm}$	$M_{14,11} = + 1,15 \text{ tm}$	$M_{18,15} = + 4,40 \text{ tm}$
$M_{10,9} = - 14,15 \text{ ,,}$	$M_{14,15} = - 2,22 \text{ ,,}$	$M_{18,17} = + 10,80 \text{ ,,}$
$M_{10,10'} = + 1,55 \text{ ,,}$	$M_{14,17} = + 1,01 \text{ ,,}$	$M_{18,19} = - 18,74 \text{ ,,}$
$M_{10,13} = + 6,75 \text{ ,,}$		$M_{18,21} = + 3,54 \text{ ,,}$
	$M_{15,12} = + 4,15 \text{ ,,}$	$M_{19,16} = + 5,37 \text{ ,,}$
$M_{11,8} = + 0,73 \text{ ,,}$	$M_{15,14} = + 10,60 \text{ ,,}$	$M_{19,18} = - 7,09 \text{ ,,}$
$M_{11,12} = - 2,03 \text{ ,,}$	$M_{15,16} = - 19,14 \text{ ,,}$	$M_{19,19'} = - 2,67 \text{ ,,}$
$M_{11,14} = + 1,25 \text{ ,,}$	$M_{15,18} = + 4,32 \text{ ,,}$	$M_{19,22} = + 4,41 \text{ ,,}$
		$M_{20,17} = + 1,61 \text{ ,,}$
$M_{12,9} = + 5,02 \text{ ,,}$	$M_{16,13} = + 5,07 \text{ ,,}$	$M_{20,21} = - 1,63 \text{ ,,}$
$M_{12,11} = + 10,47 \text{ ,,}$	$M_{16,15} = - 7,53 \text{ ,,}$	$M_{21,18} = + 3,43 \text{ ,,}$
$M_{12,13} = - 19,60 \text{ ,,}$	$M_{16,16'} = - 2,82 \text{ ,,}$	$M_{21,20} = + 6,04 \text{ ,,}$
$M_{12,15} = + 4,06 \text{ ,,}$	$M_{16,19} = + 5,28 \text{ ,,}$	$M_{21,22} = - 9,43 \text{ ,,}$
$M_{13,10} = + 6,01 \text{ ,,}$		
$M_{13,12} = - 8,01 \text{ ,,}$	$M_{17,14} = + 0,99 \text{ ,,}$	$M_{22,19} = + 4,37 \text{ ,,}$
$M_{13,13'} = - 2,99 \text{ ,,}$	$M_{17,18} = - 2,19 \text{ ,,}$	$M_{22,21} = - 1,84 \text{ ,,}$
$M_{13,16} = + 4,97 \text{ ,,}$	$M_{17,20} = + 1,20 \text{ ,,}$	$M_{22,22'} = - 2,47 \text{ ,,}$

$M_{10,7}$ wurde nach Seite 4, Nr. 2d aus $M_{10,7} = 1,5 k \cdot \varphi_{10}$ berechnet.

In Abb. 435 sind diese Momente maßstäblich aufgetragen. Ihre Genauigkeit ist trotz des geringen Rechenaufwandes durchaus befriedigend, wie die Proben $\sum M = 0$ in den einzelnen Knotenpunkten und $\sum V = 0$ in der Knotenreihe 7-22 zeigen.

Dritter Teil.
Hilfstafeln.



Trägheitsmomente

von Rechteckquerschnitten in dm⁴.

$$J_s = \frac{b h^3}{12}$$

$\frac{(cm)^4}{b(cm)}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
10	0,083	0,281	0,667	1,302	2,250	3,573	5,333	7,594	10,417	13,86	18,00	22,89	28,58	35,16	42,67	51,18	60,75	71,45	83,33
15	0,125	0,422	1,000	1,953	3,375	5,359	8,000	11,391	15,625	20,80	27,00	34,33	42,88	52,73	64,00	76,77	91,13	107,17	125,00
20	0,167	0,563	1,333	2,604	4,500	7,146	10,667	15,188	20,833	27,73	36,00	45,77	57,17	70,31	85,33	102,35	121,50	142,90	166,67
25	0,208	0,703	1,667	3,255	5,625	8,932	13,333	18,984	26,042	34,66	45,00	57,21	71,46	87,89	106,67	127,94	151,88	178,62	208,33
30	0,250	0,844	2,000	3,906	6,750	10,719	16,000	22,781	31,250	41,59	54,00	68,66	85,75	105,47	128,00	153,53	182,25	214,34	250,00
35	0,292	0,984	2,333	4,557	7,875	12,505	18,667	26,578	36,458	48,53	63,00	80,10	100,04	123,05	149,33	179,12	212,63	250,07	291,67
40	0,333	1,125	2,667	5,208	9,000	14,292	21,333	30,375	41,667	55,46	72,00	91,54	114,33	140,63	170,67	204,71	243,00	285,79	333,33
45	0,375	1,266	3,000	5,859	10,125	16,078	24,000	34,172	46,875	62,39	81,00	102,98	128,63	158,20	192,00	230,30	273,38	321,52	375,00
50	0,417	1,406	3,333	6,510	11,250	17,365	26,667	37,969	52,083	69,32	90,00	114,43	142,92	175,78	213,33	255,89	303,75	357,24	416,67
55	0,458	1,547	3,667	7,161	12,375	19,651	29,333	41,766	57,292	76,26	99,00	125,87	157,21	193,36	234,67	281,47	334,13	392,96	453,33
60	0,500	1,688	4,000	7,813	13,500	21,438	32,000	45,563	62,500	83,19	108,00	137,31	171,50	210,94	256,00	307,06	364,50	428,69	500,00
65	0,542	1,828	4,333	8,464	14,625	23,224	34,667	49,359	67,708	90,12	117,00	148,76	185,79	228,52	277,33	332,65	394,88	464,41	541,67
70	0,583	1,969	4,667	9,115	15,750	25,010	37,333	53,156	72,917	97,05	126,00	160,20	200,08	246,09	298,67	358,24	425,25	500,14	583,33
75	0,625	2,109	5,000	9,766	16,875	26,791	40,000	56,953	78,125	103,98	135,00	171,64	214,38	263,67	320,00	383,83	455,63	535,86	625,00
80	0,667	2,250	5,333	10,417	18,000	28,553	42,667	60,750	83,333	110,92	144,00	183,08	228,67	281,25	341,33	409,42	486,00	571,58	666,67
85	0,708	2,391	5,667	11,068	19,125	30,370	45,333	64,547	88,542	117,85	153,00	194,53	242,96	298,33	362,67	435,01	516,38	607,31	708,33
90	0,750	2,531	6,000	11,719	20,250	32,156	48,000	68,344	93,750	124,78	162,00	205,97	257,25	316,41	384,00	460,59	546,75	643,03	750,00
95	0,792	2,672	6,333	12,370	21,375	33,943	50,667	72,141	98,958	131,71	171,00	217,41	271,54	333,93	405,38	486,18	577,13	678,76	791,67
100	0,833	2,813	6,667	13,021	22,500	35,729	53,333	75,938	104,167	138,65	180,00	228,85	285,83	351,56	426,67	511,77	607,50	714,48	833,33

Tafel I (Fortsetzung).

Trägheitsmomente von Rechtecksquerschnitten in dm⁴.

$\frac{(cm)^2}{b(cm)}$	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	200
10	96,5	110,9	126,7	144,0	162,8	183,1	205,0	228,7	254,1	281,3	310,3	341,3	374,3	409,4	446,6	486,0	527,6	571,6	666,7
15	144,7	166,4	190,1	216,0	244,1	274,6	307,5	343,0	381,1	421,9	465,5	512,0	561,5	614,1	669,9	729,0	791,5	857,4	1000,0
20	192,9	221,8	253,5	288,0	325,5	366,2	410,1	457,3	508,1	562,5	620,6	682,7	748,7	818,8	893,2	972,0	1055,3	1143,2	1333,3
25	241,2	277,3	316,8	360,0	406,9	457,7	512,6	571,7	635,1	703,1	775,8	853,3	935,9	1023,4	1116,5	1215,0	1319,1	1429,0	1666,7
30	289,4	332,8	380,2	432,0	488,3	549,2	615,1	686,0	762,2	843,8	931,0	1024,0	1123,0	1228,3	1339,8	1458,0	1582,9	1714,7	2000,0
35	337,6	388,2	443,6	504,0	569,7	640,8	717,6	800,3	889,2	984,4	1086,1	1194,7	1310,2	1433,0	1563,2	1701,0	1846,7	2000,5	2333,3
40	385,9	443,7	507,0	576,0	651,0	732,3	820,1	914,7	1016,2	1125,0	1241,3	1365,3	1497,4	1637,7	1786,5	1944,0	2110,5	2286,3	2666,7
45	434,1	499,1	570,3	648,0	732,4	823,9	923,6	1029,0	1143,2	1265,6	1396,5	1536,0	1684,5	1842,4	2009,8	2187,0	2374,4	2572,1	3000,0
50	482,3	554,6	633,7	720,0	813,8	915,4	1025,2	1143,3	1270,3	1406,3	1551,6	1706,7	1871,7	2047,1	2233,1	2430,0	2638,2	2857,9	3333,3
55	530,6	610,0	697,1	792,0	895,2	1007,0	1127,7	1257,7	1397,3	1546,9	1706,8	1877,3	2058,9	2251,8	2456,4	2673,0	2902,0	3143,7	3666,7
60	578,8	665,5	760,4	864,0	976,6	1098,5	1230,2	1372,0	1524,3	1687,5	1861,9	2048,0	2246,1	2456,5	2679,7	2916,0	3165,8	3429,5	4000,0
65	627,0	721,0	823,8	936,0	1057,9	1190,0	1332,7	1486,3	1651,3	1828,1	2017,1	2218,7	2433,2	2661,2	2903,0	3159,0	3429,6	3715,3	4333,3
70	675,3	776,4	887,2	1008,0	1139,3	1281,6	1435,2	1600,7	1778,4	1968,8	2172,3	2389,3	2620,4	2865,9	3126,3	3402,0	3693,4	4001,1	4666,7
75	723,5	831,9	950,5	1080,0	1220,7	1373,1	1537,7	1715,0	1905,4	2109,4	2327,4	2560,0	2807,6	3070,6	3349,6	3645,0	3957,3	4282,9	5000,0
80	771,8	887,3	1013,9	1152,0	1302,1	1464,7	1640,3	1829,3	2032,4	2250,0	2482,6	2730,7	2994,8	3275,3	3572,9	3888,0	4221,1	4572,7	5333,3
85	820,0	942,8	1077,3	1224,0	1388,5	1566,2	1742,8	1943,7	2159,4	2390,6	2637,7	2901,3	3181,9	3480,0	3796,2	4131,0	4484,9	4858,5	5666,7
90	868,2	998,3	1140,7	1296,0	1464,8	1647,7	1845,3	2068,0	2286,5	2531,3	2792,9	3072,0	3369,1	3684,8	4019,5	4374,0	4748,7	5144,2	6000,0
95	916,5	1053,7	1204,0	1368,0	1546,2	1739,3	1947,8	2172,3	2413,5	2671,9	2948,1	3242,7	3556,3	3889,5	4242,8	4617,0	5012,5	5430,0	6333,3
100	964,7	1109,2	1267,4	1440,0	1627,6	1830,8	2050,3	2286,7	2540,5	2812,5	3103,2	3413,3	3743,4	4094,2	4466,1	4860,0	5276,4	5715,8	6666,7

Tafel 2.

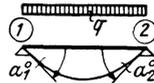
Gleichmäßig verteilte Streckenlasten.



Belastungsglieder

(für Stäbe ohne Vouten)

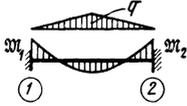
M_1 und M_2 (= Einspannmomente des fest eingespannten Trägers),
 α_1^0 und α_2^0 (= EJ -fach verzerrte Auflagerdrehwinkel des freiauflieg. Trägers),
 K_1^0 und K_2^0 (= Kreuzlinienabschnitte).



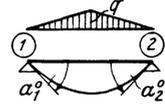
$$K_1^0 = \frac{6\alpha_2^0}{l}; \quad K_2^0 = \frac{6\alpha_1^0}{l}.$$

Nr.	Belastungsart, M_0 -Flächen	$M_1 M_2$	$\alpha_1^0 \alpha_2^0$
1		$M_1 = -M_2 = -\frac{ql^2}{12}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{ql^3}{24}$
2		$M_1 = -M_2 = -\frac{qs}{24l}(3l^2 - s^2)$ für $s = \frac{l}{2}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{11ql^2}{192}$ für $s = \frac{l}{3}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{13ql^2}{324}$ für $s = \frac{l}{4}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{47ql^2}{1536}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs}{48}(3l^2 - s^2)$ für $s = \frac{l}{2}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{11ql^3}{384}$ für $s = \frac{l}{3}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{13ql^3}{648}$ für $s = \frac{l}{4}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{47ql^3}{3072}$
3		$M_1 = -M_2 = -\frac{qs^2}{6l}(2l + a)$ für $a = s = \frac{l}{3}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{7ql^2}{162}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs^2}{12}(2l + a)$ für $a = s = \frac{l}{3}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{7ql^3}{324}$
4		$M_1 = -M_2 = -\frac{qs}{12l}[3l^2 - 3(b+s)^2 - s^2]$ für $a = s = b = \frac{l}{5}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{31ql^2}{750}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs}{24}[3l^2 - 3(b+s)^2 - s^2]$ für $a = s = b = \frac{l}{5}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{31ql^3}{1500}$
5		$M_1 = -\frac{qs^2}{12l^2}[2l(3l - 4s) + 3s^2]$ $M_2 = +\frac{qs^2}{12l^2}(4l - 3s)$ für $s = b = \frac{l}{2}$: $M_1 = -\frac{11ql^2}{192}$ $M_2 = +\frac{5ql^2}{192}$	$\alpha_1^0 = \frac{qs^2}{24l}(2l - s)^2$ $\alpha_2^0 = \frac{qs^2}{24l}(2l^2 - s^2)$ für $s = b = \frac{l}{2}$: $\alpha_1^0 = \frac{9ql^3}{384}$ $\alpha_2^0 = \frac{7ql^3}{384}$
6		$M_1 = -\frac{qs}{12l^2}[12ab^2 + s^2(l - 3b)]$ $M_2 = +\frac{qs}{12l^2}[12a^2b + s^2(l - 3a)]$	$\alpha_1^0 = \frac{qbs}{24l}[4a(b+l) - s^2]$ $\alpha_2^0 = \frac{qas}{24l}[4b(a+l) - s^2]$

Dreieckslasten,
Momentenangriff,
Temperaturwirkung.



M_1 und M_2 (= Einspannmomente des festeingespannten Trägers),
 α_1^0 und α_2^0 (= EJ -fach verzerrte Auflagerdrehwinkel des freiauflieg. Trägers),
 K_1^0 und K_2^0 (= Kreuzlinienabschnitte).

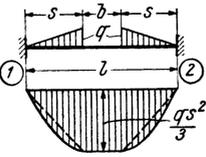
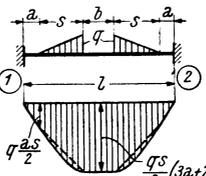
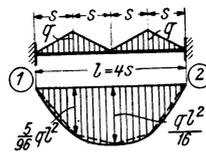
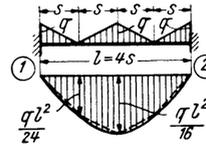
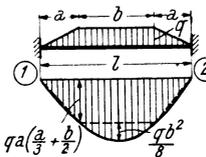
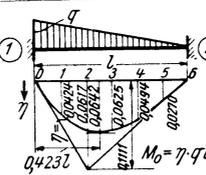
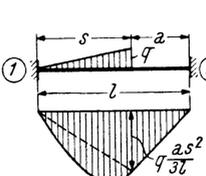


$$K_1^0 = \frac{6 \alpha_2^0}{l}; \quad K_2^0 = \frac{6 \alpha_1^0}{l}.$$

Nr.	Belastungsart, M_σ -Flächen	$M_1 M_2$	$\alpha_1^0 \alpha_2^0$
7		$M_1 = -M_2 = -\frac{5ql^2}{96}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{5ql^3}{192}$
8		$M_1 = -M_2 = -\frac{qs}{24l}(3l^2 - 2s^2)$ für $a = s = \frac{l}{4}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{23ql^2}{768}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs}{48}(3l^2 - 2s^2)$ für $a = s = \frac{l}{4}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{23ql^3}{1536}$
9		$M_1 = -M_2 = -\frac{ql^2}{32}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{ql^3}{64}$
10		$M_1 = -M_2 = -\frac{qs}{8l}(l^2 - 2s^2)$ für $a = s = \frac{l}{4}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{7ql^2}{256}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs}{16}(l^2 - 2s^2)$ für $a = s = \frac{l}{4}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{7ql^3}{512}$
11		$M_1 = -M_2 = -\frac{qs^2}{12l}(2l - s)$ für $s = b = \frac{l}{3}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{5ql^2}{324}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs^2}{24}(2l - s)$ für $s = b = \frac{l}{3}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{ql^3}{648}$
12		$M_1 = -\frac{qs}{12l}[6a(l - a) + s(2b + 3s)]$ für $a = b = s = \frac{l}{5}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{29ql^2}{1500}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs}{24}[6a(l - a) + s(2b + 3s)]$ für $a = b = s = \frac{l}{5}$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{29ql^3}{3000}$

Tafel 3 (Fortsetzung).

Belastungsglieder $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ und $\alpha_1^0 \alpha_2^0$ bzw. $K_1^0 K_2^0$.

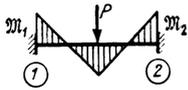
Nr.	Belastungsart, M_0 -Flächen	$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$	$\alpha_1^0 \alpha_2^0$
13		$\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 = -\frac{qs^2}{12l} (4l - 3s)$ <p>für $s = b = \frac{l}{3}$:</p> $\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 = -\frac{ql^2}{36}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs^2}{24} (4l - 3s)$ <p>für $s = b = \frac{l}{3}$:</p> $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{ql^3}{72}$
14		$\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 = -\frac{qs}{12l} [6a(l-a) + s(4l-3s)]$ <p>für $a = s = b = \frac{l}{5}$:</p> $\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 = -\frac{41ql^2}{1500}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{qs}{24} [6a(l-a) + s(4l-3s)]$ <p>für $a = s = b = \frac{l}{5}$:</p> $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{41ql^3}{3000}$
15		$\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 = -\frac{17ql^2}{384}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{17ql^3}{768}$
16		$\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 = -\frac{5ql^2}{128}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{5ql^3}{256}$
17		$\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 = -\frac{q}{12l} [l^3 - a^2(2l-a)]$ <p>für $a = b = \frac{l}{3}$:</p> $\mathfrak{M}_1 = -\mathfrak{M}_2 = -\frac{11ql^2}{162}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{q}{24} [l^3 - a^2(2l-a)]$ <p>für $a = b = \frac{l}{3}$:</p> $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{11ql^3}{324}$
18		$\mathfrak{M}_1 = -\frac{ql^2}{20}$ $\mathfrak{M}_2 = +\frac{ql^2}{30}$	$\alpha_1^0 = \frac{ql^3}{45}$ $\alpha_2^0 = \frac{7ql^3}{360}$
19		$\mathfrak{M}_1 = -\frac{qs^2}{30l^2} [10a^2 + s(5a+s)]$ $\mathfrak{M}_2 = +\frac{qs^3}{20l^2} (5a+s)$ <p>für $s = a = \frac{l}{2}$: $\mathfrak{M}_1 = -\frac{ql^2}{30}$</p> $\mathfrak{M}_2 = +\frac{3ql^2}{160}$	$\alpha_1^0 = \frac{qs^2}{360l} [40a^2 + 7s(5a+s)]$ $\alpha_2^0 = \frac{qs^2}{180l} [10a^2 + 4s(5a+s)]$ <p>für $s = a = \frac{l}{2}$: $\alpha_1^0 = \frac{41ql^3}{2880}$</p> $\alpha_2^0 = \frac{17ql^3}{1440}$

Tafel 3 (Fortsetzung).
Belastungsglieder \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 und α_1^0 α_2^0 bzw. K_1^0 K_2^0 .

Nr.	Belastungsart, M_0 -Flächen	\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2	α_1^0 α_2^0
20		$\mathfrak{M}_1 = -\frac{q s^2}{60 l^2} (10 b l + 3 s^2)$ $\mathfrak{M}_2 = +\frac{q s^3}{60 l^2} (5 b + 2 s)$ <p>für $s = b = \frac{l}{2}$: $\mathfrak{M}_1 = -\frac{23 q l^3}{960}$</p> $\mathfrak{M}_2 = +\frac{7 q l^2}{960}$	$\alpha_1^0 = \frac{q s^2}{360 l} [5 b (4 l + s) + 8 s^2]$ $\alpha_2^0 = \frac{q s^2}{360 l} [10 b (l + s) + 7 s^2]$ <p>für $s = b = \frac{l}{2}$: $\alpha_1^0 = \frac{53 q l^3}{5760}$</p> $\alpha_2^0 = \frac{37 q l^3}{5760}$
21		$\mathfrak{M}_1 = -\frac{q s}{60 l^2} [10 b^2 (3 a + s) + s^2 (15 a + 10 b + 3 s) + 40 a b s]$ $\mathfrak{M}_2 = +\frac{q s}{60 l^2} [10 a^2 (3 b + 2 s) + s^2 (10 a + 5 b + 2 s) + 20 a b s]$ <p>für $a = s = b = \frac{l}{3}$:</p> $\mathfrak{M}_1 = -\frac{q l^2}{45}; \mathfrak{M}_2 = +\frac{29 q l^2}{1620}$	$\alpha_1^0 = \frac{q s}{360 l} [10 a^2 (3 b + 2 s) + 20 b^2 (3 a + s) + s^2 (40 a + 25 b + 8 s) + 100 a b s]$ $\alpha_2^0 = \frac{q s}{360 l} [20 a^2 (3 b + 2 s) + 10 b^2 (3 a + s) + s^2 (35 a + 20 b + 7 s) + 80 a b s]$ <p>für $a = s = b = \frac{l}{3}$:</p> $\alpha_1^0 = \frac{101 q l^3}{9720}; \alpha_2^0 = \frac{47 q l^3}{4860}$
22		$\mathfrak{M}_1 = -\frac{q s}{6 l^2} [6 a b^2 + s^2 (a - 2 b)]$ $\mathfrak{M}_2 = +\frac{q s}{6 l^2} [6 a^2 b + s^2 (b - 2 a)]$	$\alpha_1^0 = \frac{q b s}{12 l} [2 a (b + l) - s^2]$ $\alpha_2^0 = \frac{q a s}{12 l} [2 b (a + l) - s^2]$
23		$\mathfrak{M}_1 = +M \frac{b}{l} \left(2 - \frac{3b}{l}\right)$ $\mathfrak{M}_2 = +M \frac{a}{l} \left(2 - \frac{3a}{l}\right)$ <p>für $a = 0$: $\mathfrak{M}_1 = -M$; $\mathfrak{M}_2 = 0$</p> <p>für $a = \frac{l}{2}$: $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = +\frac{M}{4}$</p> <p>für $a = l$: $\mathfrak{M}_1 = 0$; $\mathfrak{M}_2 = -M$</p>	$\alpha_1^0 = M \frac{l}{6} \left(\frac{3b^2}{l^2} - 1\right)$ $\alpha_2^0 = M \frac{l}{6} \left(1 - \frac{3a^2}{l^2}\right)$ <p>für $a = 0$: $\alpha_1^0 = M \frac{l}{3}$; $\alpha_2^0 = M \frac{l}{6}$</p> <p>für $a = \frac{l}{2}$: $\alpha_1^0 = -\alpha_2^0 = -\frac{Ml}{24}$</p> <p>für $a = l$: $\alpha_1^0 = -M \frac{l}{6}$</p> $\alpha_2^0 = -M \frac{l}{3}$
24		$\mathfrak{M}_1 = -\frac{E J \omega \cdot \Delta t}{h}$ $\mathfrak{M}_2 = +\frac{E J \omega \cdot \Delta t}{h}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = +\frac{l E J \omega \cdot \Delta t}{2 h}$

Tafel 4.

Einzellasten
(Einflußlinien).



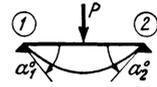
Belastungsglieder

(für Stäbe ohne Vouten)

M_1 und M_2 (= Einspannmomente des festeingespannten Trägers),

α_1^0 und α_2^0 (= EJ -fach verzerrte Auflagerdrehwinkel des freiauflieg. Trägers),

K_1^0 und K_2^0 (= Kreuzlinienabschnitte).

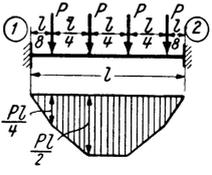
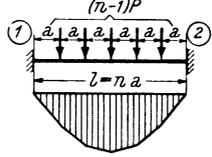
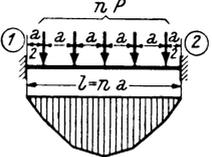
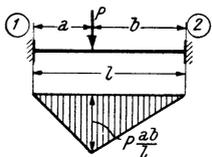


$$K_1^0 = \frac{6 \alpha_2^0}{l}; \quad K_2^0 = \frac{6 \alpha_1^0}{l}.$$

Nr.	Belastungsart, M_0 -Flächen	$M_1 M_2$	$\alpha_1^0 \alpha_2^0$
25		$M_1 = -M_2 = -\frac{Pl}{8}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{Pl^2}{16}$
26		$M_1 = -M_2 = -\frac{Pa(l-a)}{l}$ für $a = b = \frac{l}{3}$: $M_1 = -M_2 = -\frac{2Pl}{9}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{Pa(l-a)}{2}$ $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{Pl^2}{9}$
27		$M_1 = -M_2 = -\frac{3Pl}{16}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{3Pl^2}{32}$
28		$M_1 = -M_2 = -\frac{5Pl}{16}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{5Pl^2}{32}$
29		$M_1 = -M_2 = -\frac{19Pl}{72}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{19Pl^2}{144}$
30		$M_1 = -M_2 = -\frac{2Pl}{5}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{Pl^2}{5}$

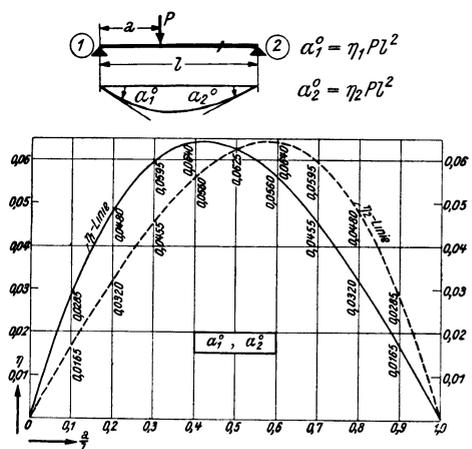
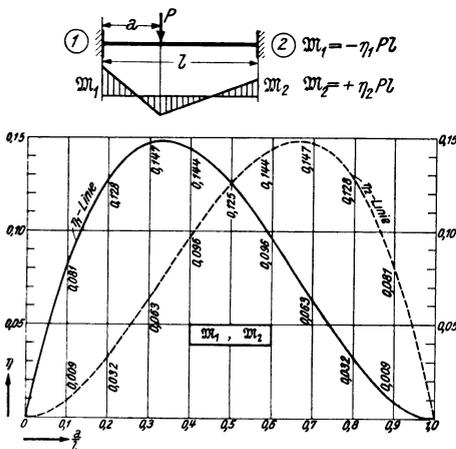
Tafel 4 (Fortsetzung).

Belastungsglieder $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ und $\alpha_1^0 \alpha_2^0$ bzw. $K_1^0 K_2^0$.

Nr.	Belastungsart, M_0 -Flächen	$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$	$\alpha_1^0 \alpha_2^0$
31		$\mathfrak{M}_1 = - \mathfrak{M}_2 = - \frac{11 Pl}{32}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{11 Pl^2}{64}$
32		$\mathfrak{M}_1 = - \mathfrak{M}_2 = - \frac{Pl}{12} \frac{n^2 - 1}{n}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{Pl^2}{24} \frac{n^2 - 1}{n}$
33		$\mathfrak{M}_1 = - \mathfrak{M}_2 = - \frac{Pl}{24} \frac{2n^2 + 1}{n}$	$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \frac{Pl^2}{48} \frac{2n^2 + 1}{n}$
34		$\mathfrak{M}_1 = - \frac{Pa b^2}{l^2}$ $\mathfrak{M}_2 = + \frac{Pa^2 b}{l^2}$	$\alpha_1^0 = \frac{Pa b}{6 l} (b + l)$ $\alpha_2^0 = \frac{Pa b}{6 l} (a + l)$

Einflusslinien für $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$

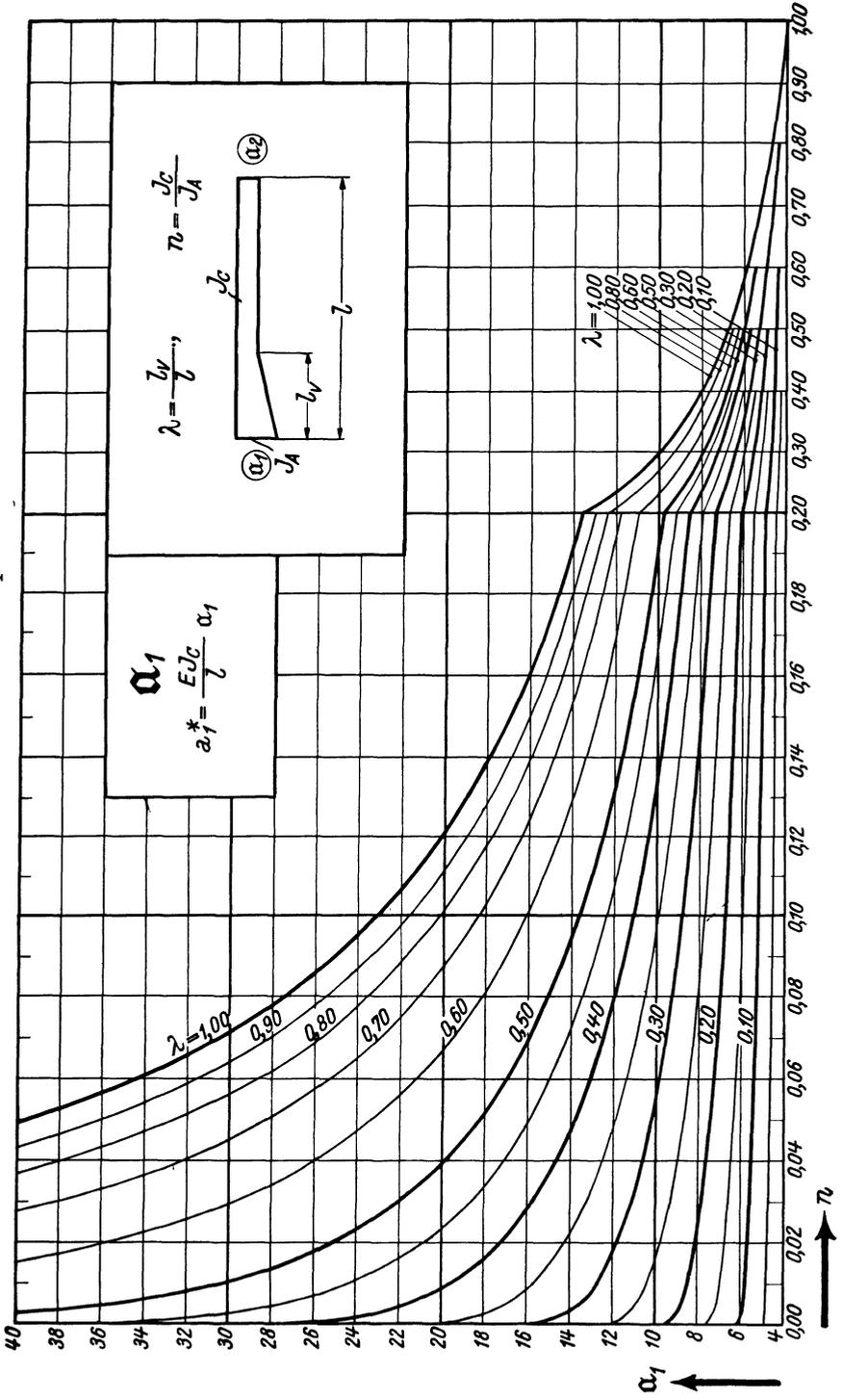
Einflusslinien für $\alpha_1^0 \alpha_2^0$



Tafel 5a

Stabfestwerte a_1 a_2 b .
 Stabfestwert a_1 .

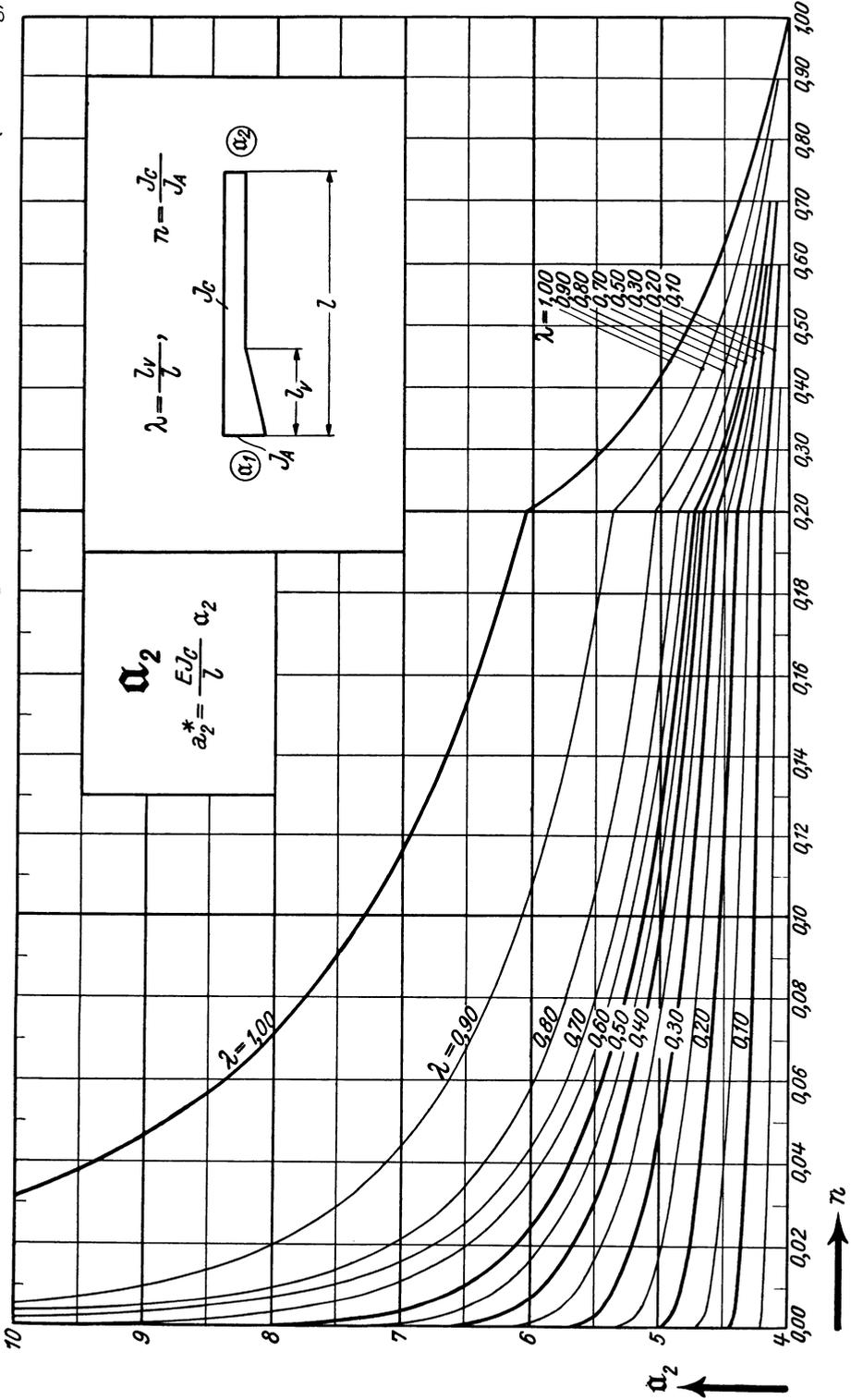
Einseitig gerade Vouten. (1)  (2)



Tafel 5a (Fortsetzung).

Stabfestwert α_2 .

Einseitig gerade Vouten.



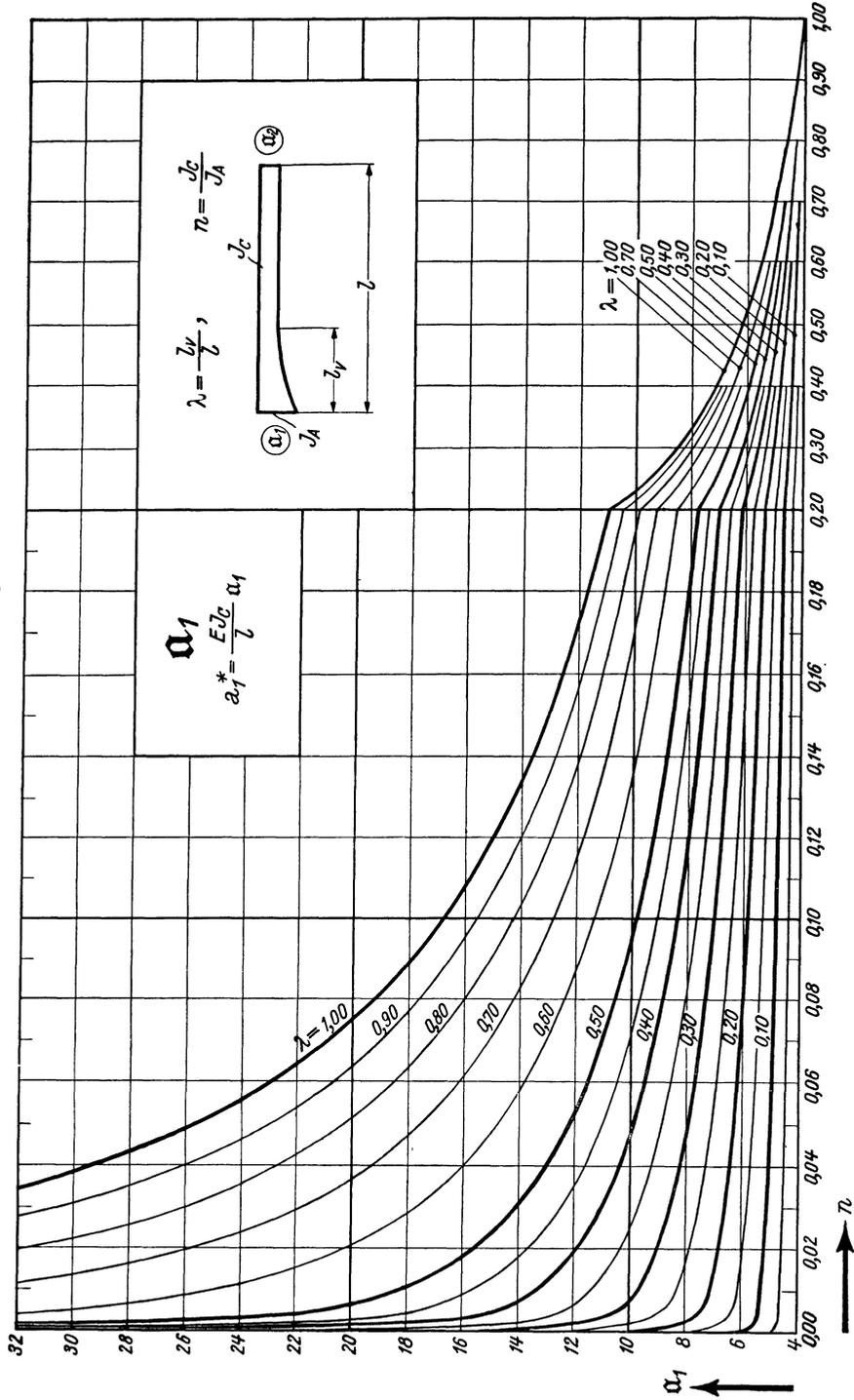
Einseitig parabol. Vouten.



Stabfestwerte $a_1 a_2 b$.

Stabfestwert a_1 .

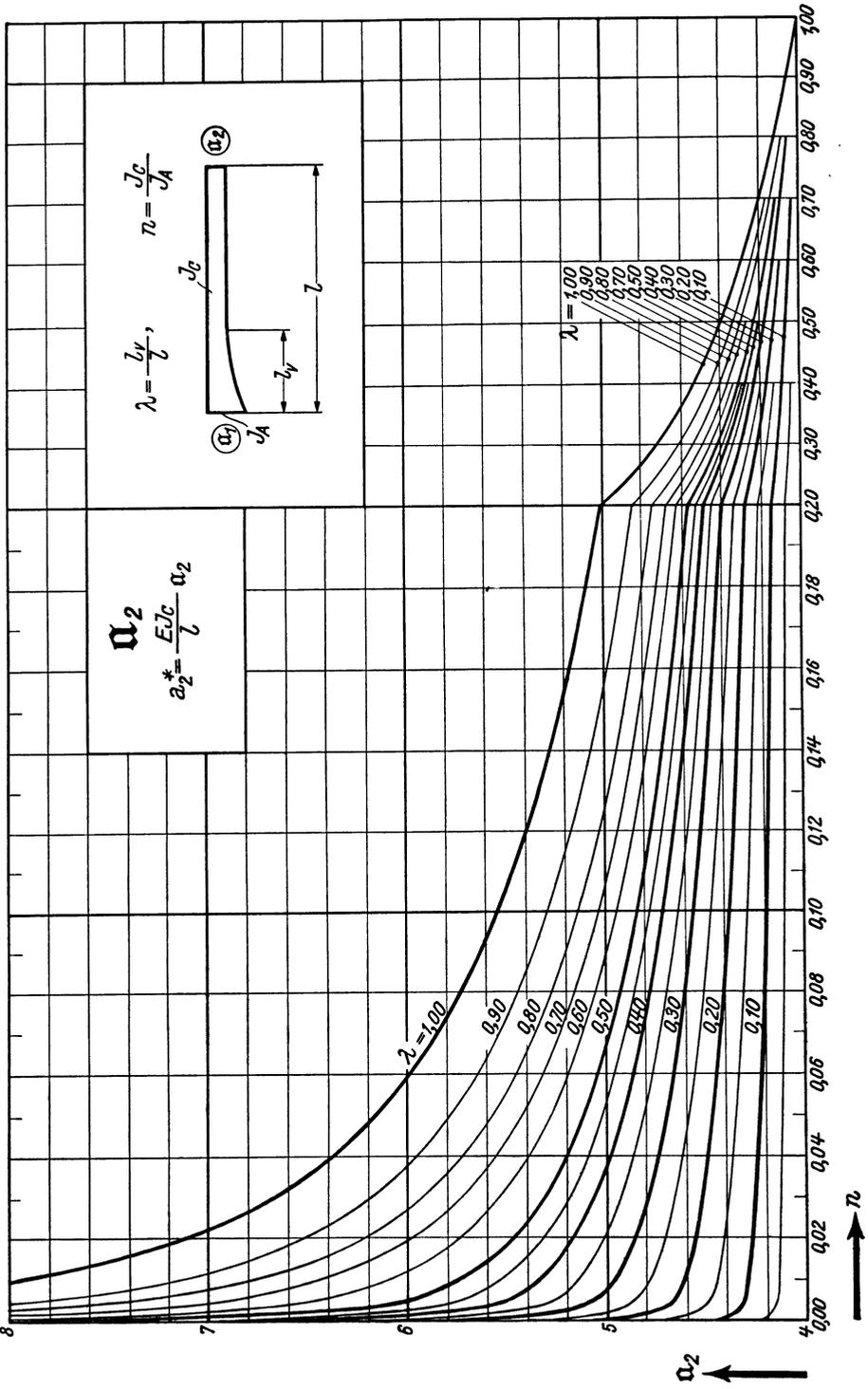
Tafel 6a.



Tafel 6a (Fortsetzung).

Einseitig parabol. Vouten.

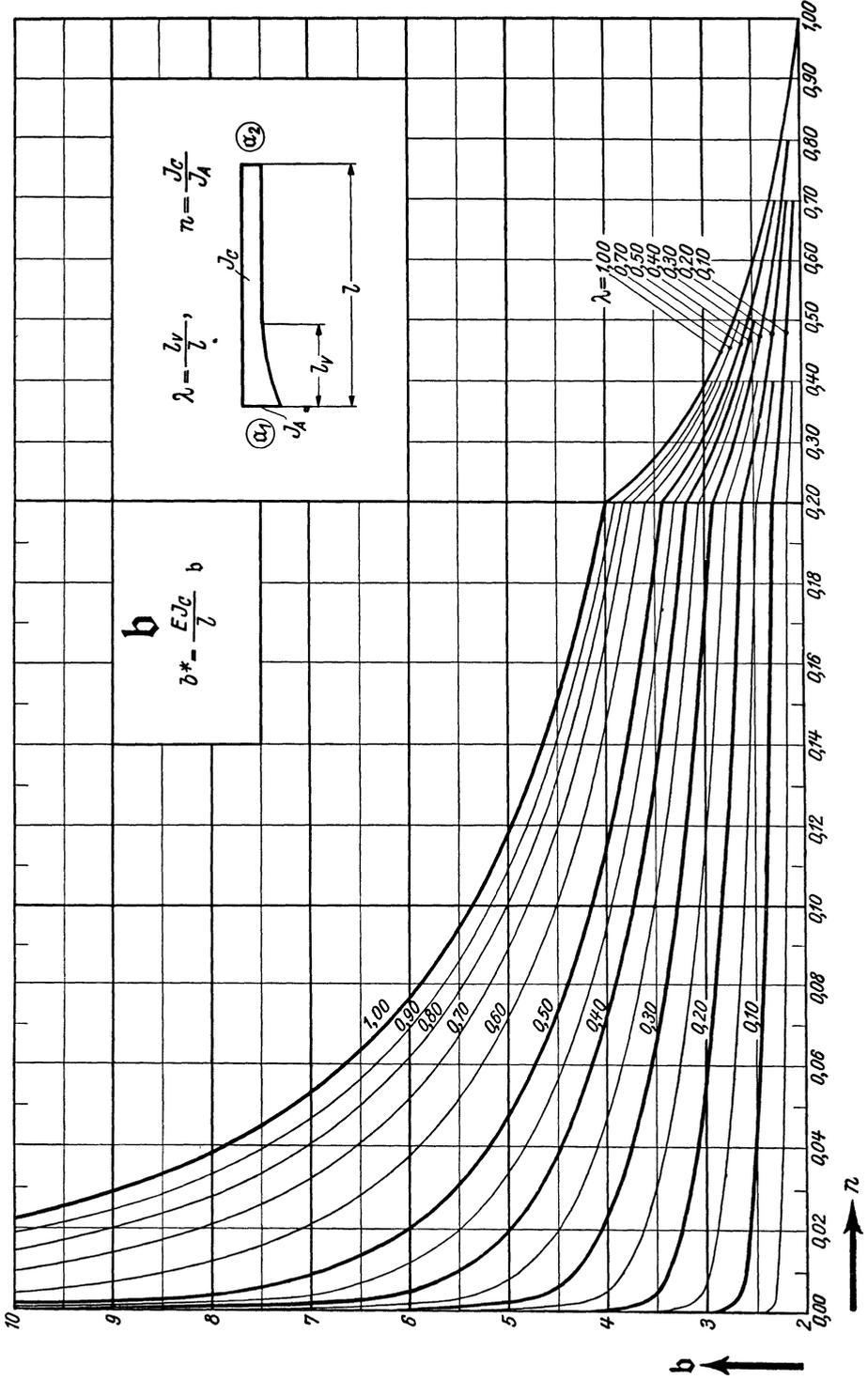
Stabfestwert α_2



Tafel 6a (Fortsetzung).

Stabfestwert b .

Einseitig parabol. Vouten.

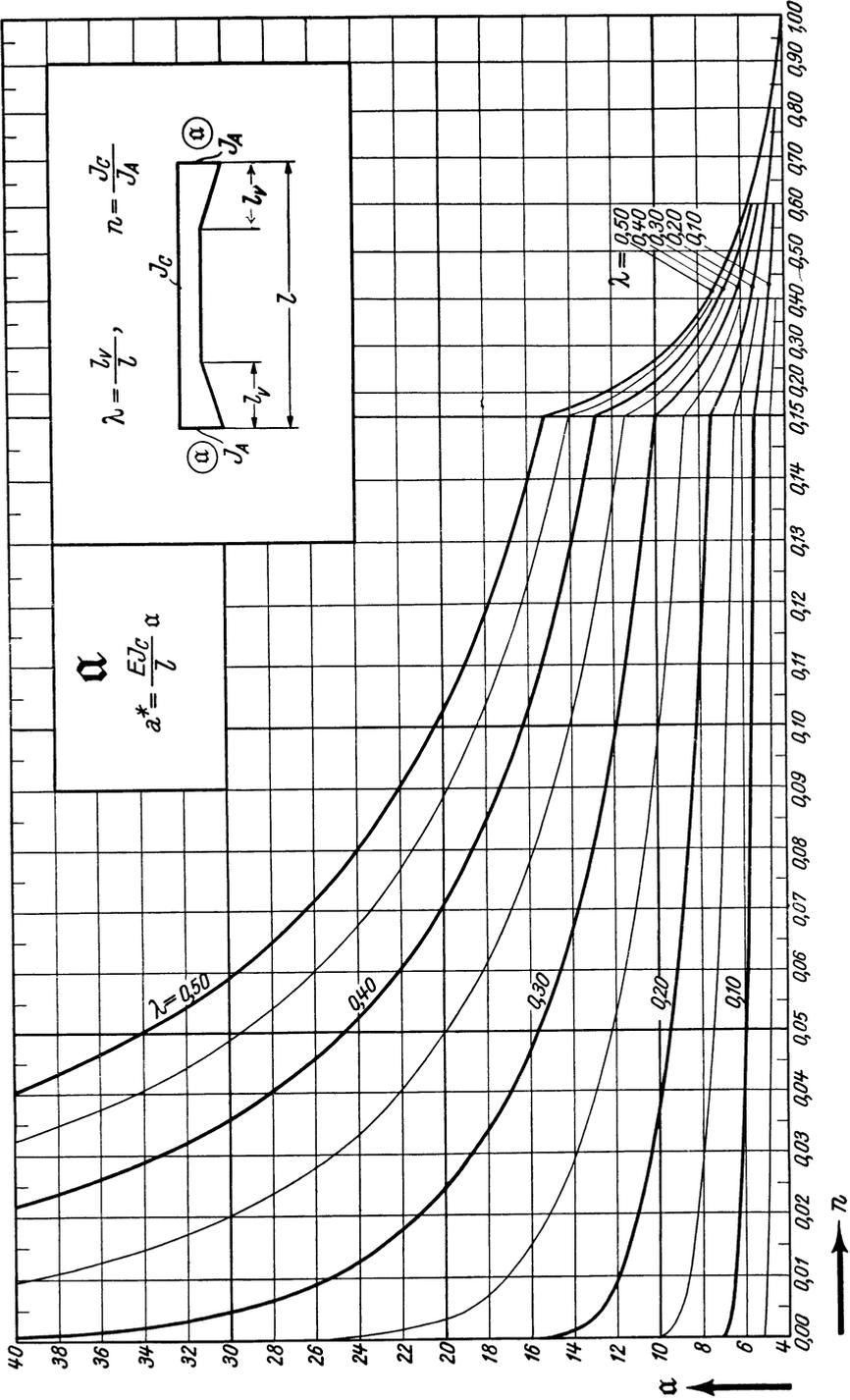


Tafel 7 a.

Stabfestwerte a b.

Stabfestwert a.

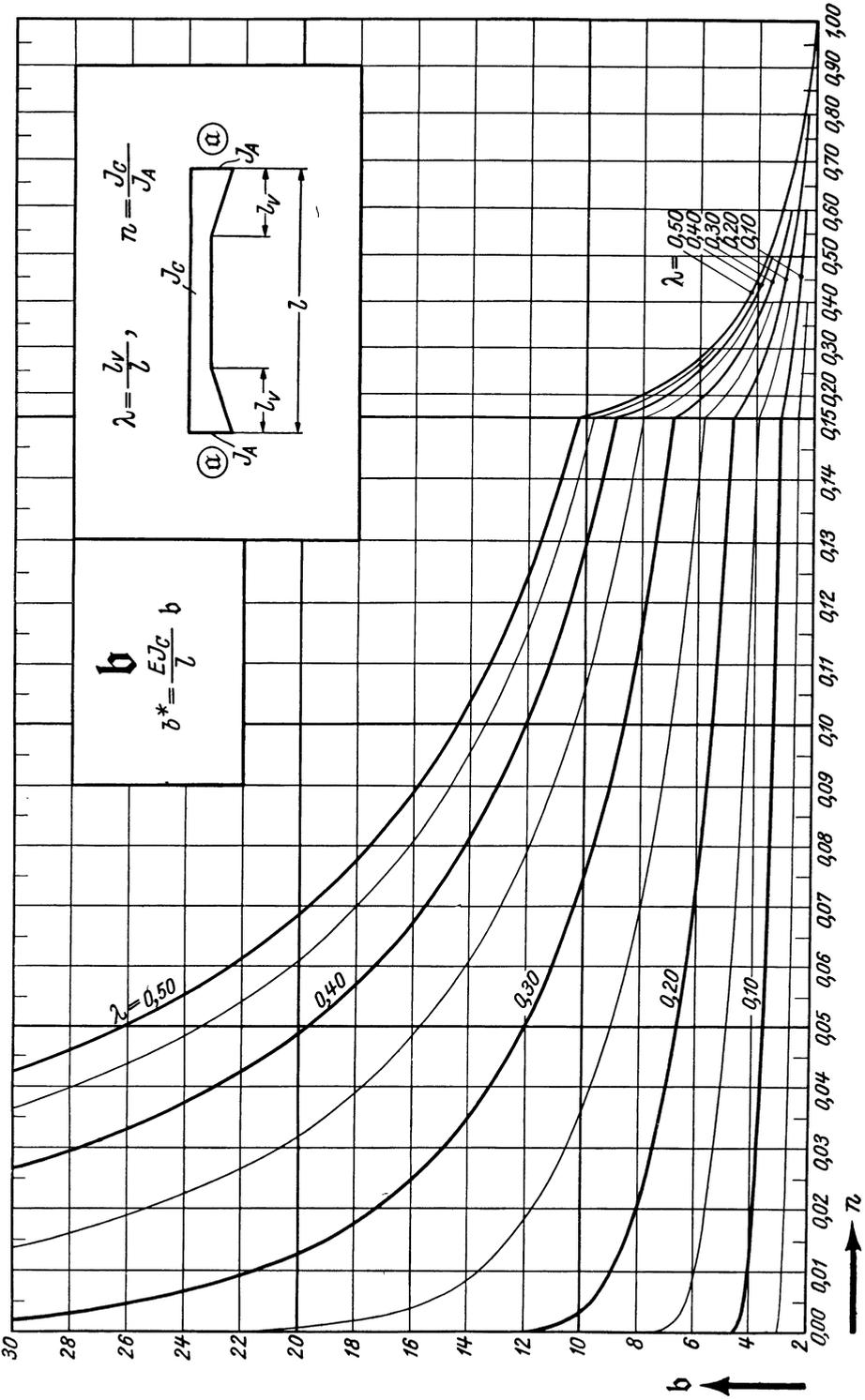
Beidseitig gerade Vouten.



Tafel 7a (Fortsetzung).

Stabfestwert b .

Beidseitig gerade Vouten.

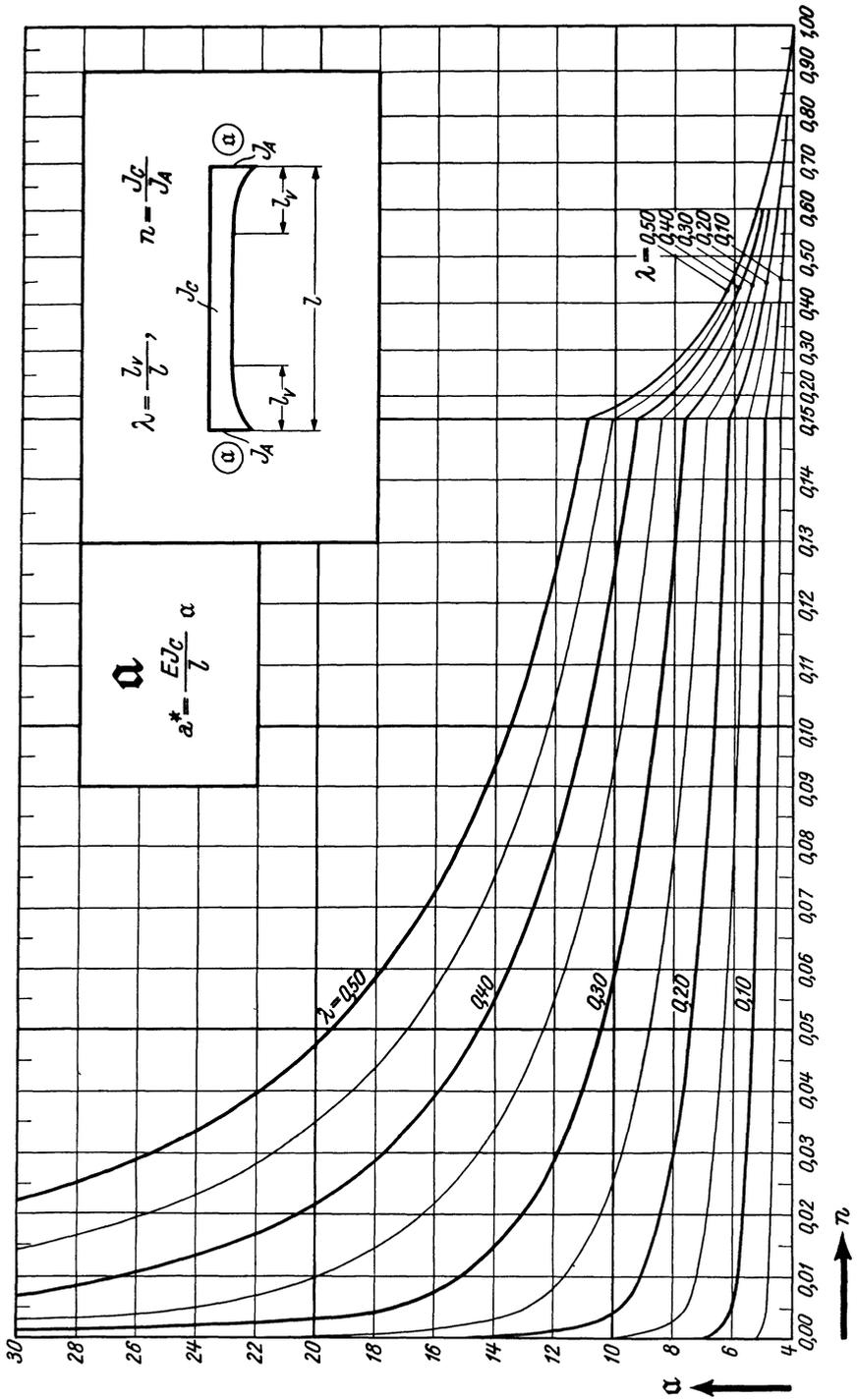


Beidseitig parabol. Vouten.

Tafel 8a.

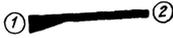
Stabfestwerte a b.

Stabfestwert a.



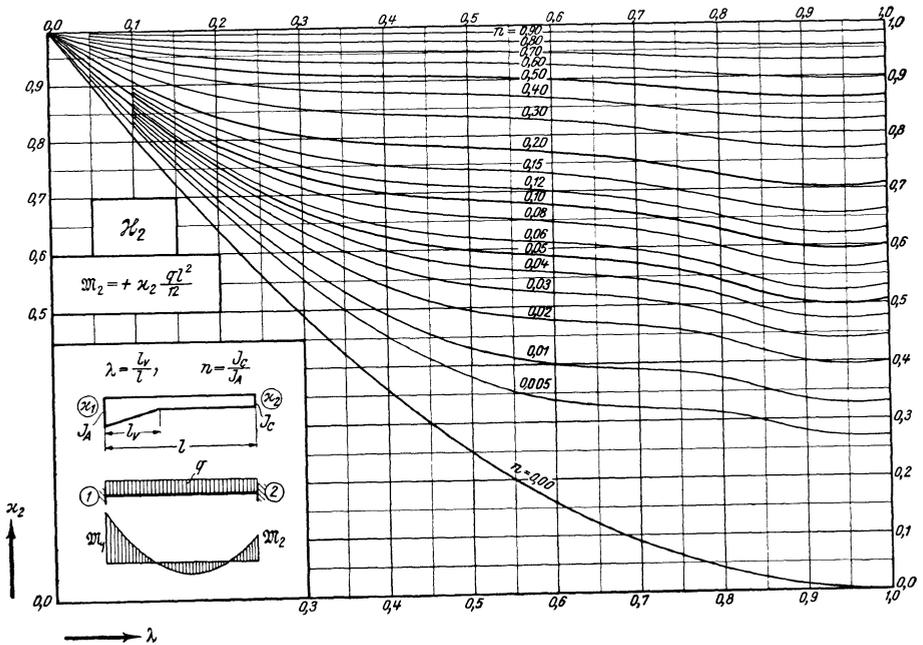
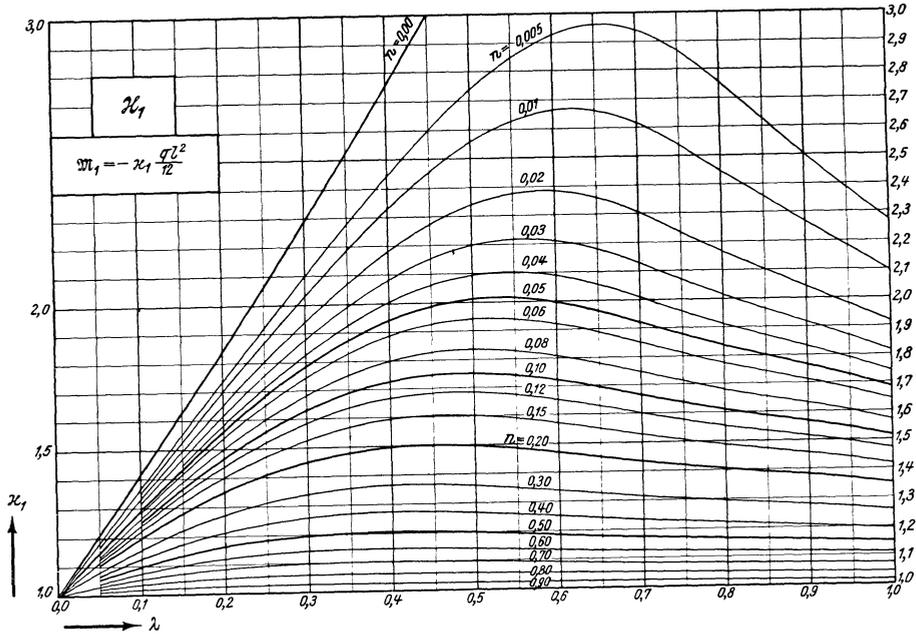
Tafel 9a.

Einseitig gerade
Vouten.



Belastungsglieder $M_1 M_2$

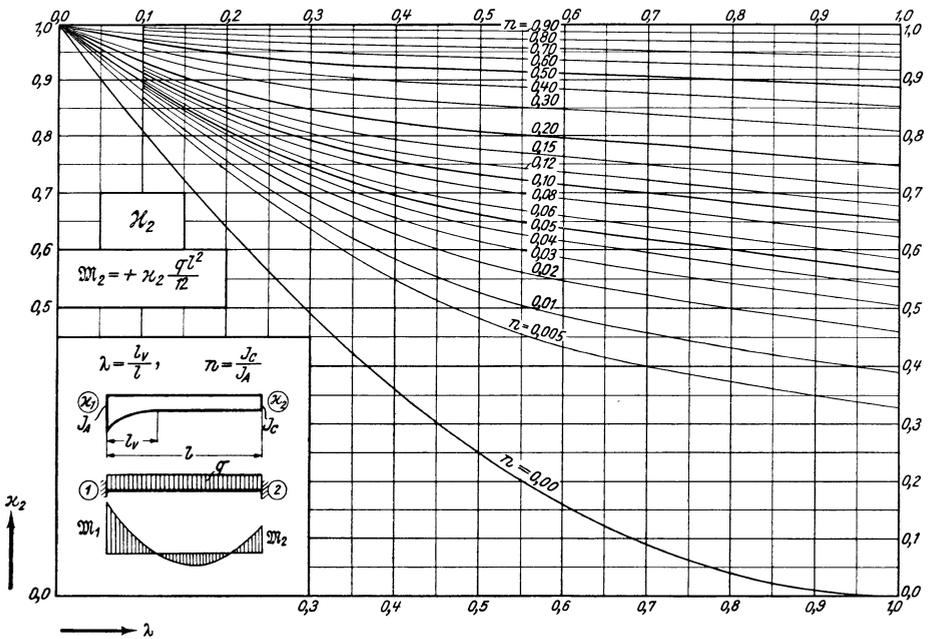
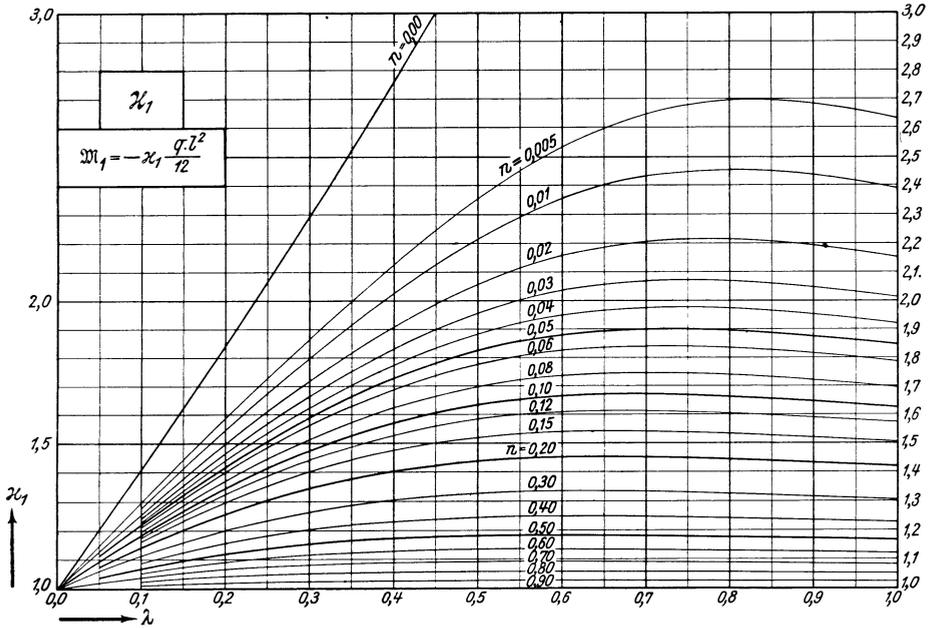
(= Einspannmomente am volleingespannten Träger)
für gleichmäßige Vollbelastung.



Einseitig parabol.
Vouten.

Belastungsglieder M_1 M_2

(= Einspannmomente am vollingespannten Träger)
für gleichmäßige Vollbelastung.

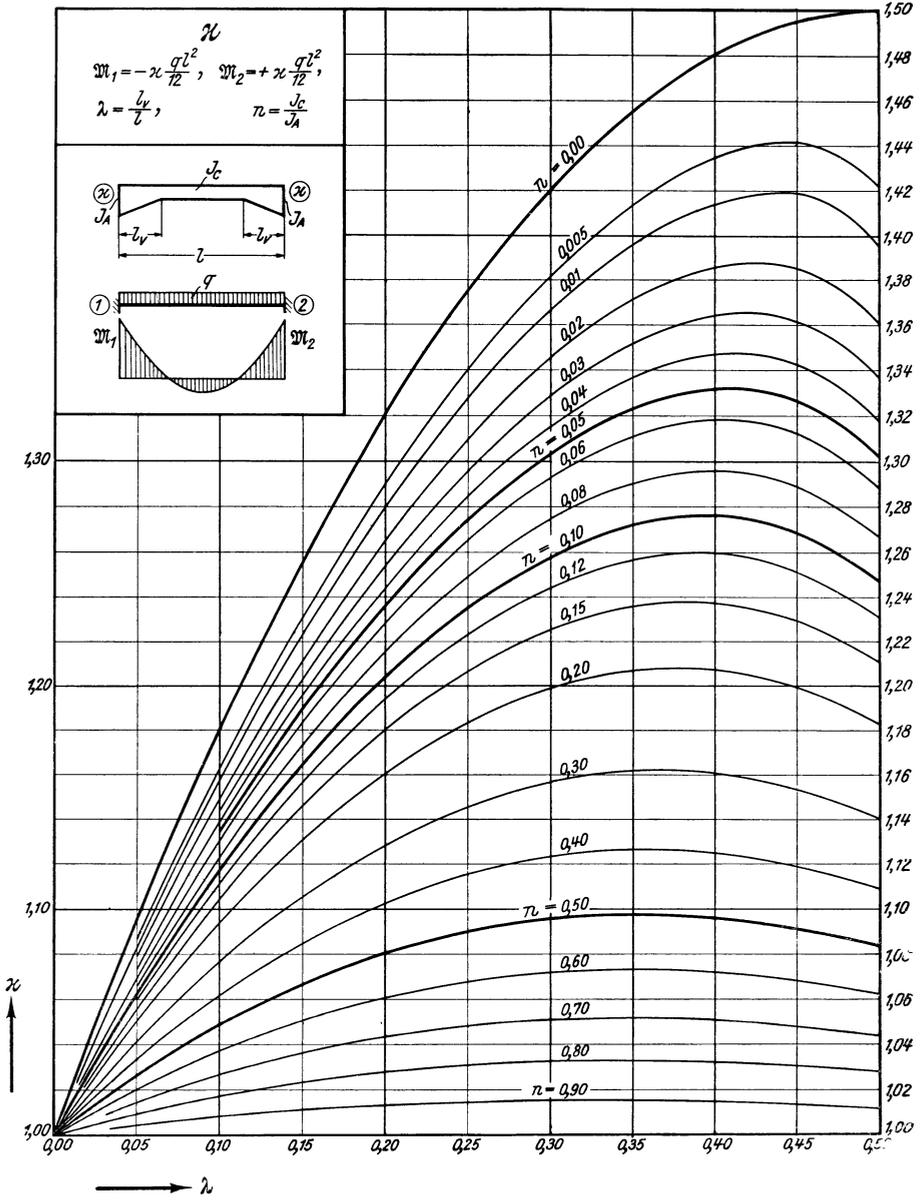


Tafel 11a.

Beidseitig gerade
Vouten.

Belastungsglieder $M_1 M_2$

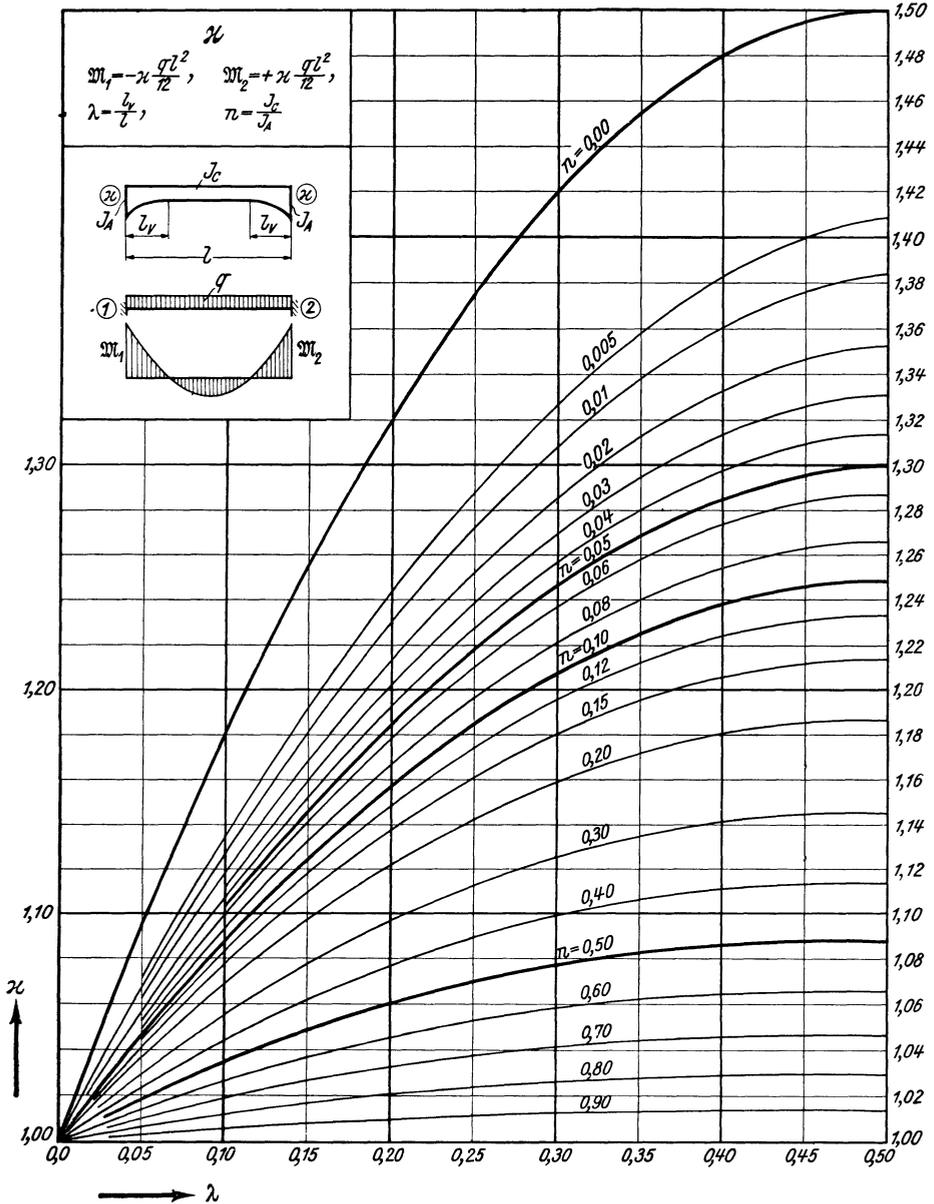
(= Einspannmomente am vollingespannten Träger)
für gleichmäßige Vollbelastung.



Beidseitig parabol.
Vouten.

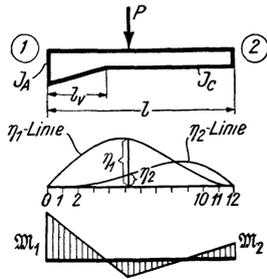
Belastungsglieder M_1 M_2

(= Einspannmomente am volleingespannten Träger)
für gleichmäßige Vollbelastung.



Tafel 13.

Einseitig gerade Vouten.



Einflußlinien für die Belastungsglieder M_1 M_2

(= Einspannmomente am volleingespannten Träger).

$$\lambda = \frac{l_v}{l} \quad \text{Obere Zahl } \eta_1 \quad M_1 = -\eta_1 P l$$

$$n = \frac{J_c}{J_A} \quad \text{Untere Zahl } \eta_2 \quad M_2 = +\eta_2 P l$$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,00	0,00	0,083	0,167	0,250	0,333	0,417	0,500	0,583	0,667	0,750	0,833	0,917
	0,03	077 001	141 005	190 011	225 020	241 031	245 043	229 055	194 068	147 075	088 074	029 056
	0,05	077 002	138 006	186 014	215 025	229 037	227 051	208 065	173 078	126 085	074 081	024 058
	0,10	076 002	134 009	176 019	202 032	210 048	202 065	180 081	147 092	103 098	057 090	018 061
	0,20	075 002	129 012	167 025	186 042	190 061	180 080	156 097	123 108	084 111	044 098	013 065
	0,50	075 003	126 015	156 034	169 056	167 080	153 101	127 119	097 128	064 126	034 107	010 067
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,50	0,00	0,083	0,167	0,250	0,333	0,417	0,500	0,521 012	0,444 037	0,313 063	0,167 074	0,048 058
	0,03	080 001	156 004	222 009	279 017	318 030	332 047	301 070	238 091	161 101	082 096	023 065
	0,05	080 001	153 005	215 012	263 023	293 039	298 058	267 081	209 100	140 108	072 099	019 066
	0,10	079 002	146 008	200 018	238 032	256 052	251 074	220 096	169 113	112 117	057 104	017 066
	0,20	076 003	137 011	183 025	211 043	220 066	208 089	177 111	135 124	088 125	044 108	013 068
	0,50	074 004	126 018	159 037	174 062	172 088	157 110	130 129	096 139	062 133	031 113	009 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Obere Zahl η_1 Einseitig gerade Vouten. Tafel 13 (Fortsetzung).
 Untere Zahl η_2 Einflußlinien für $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$.

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,40	0,00	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,416 001	0,440 014	0,399 038	0,316 065	0,212 085	0,109 087	0,032 062
	0,03	082 000	159 002	228 008	286 017	320 031	311 054	269 079	206 099	134 109	069 099	020 065
	0,05	081 001	155 004	219 011	271 022	296 039	284 063	245 087	186 106	123 112	063 101	018 066
	0,10	080 001	149 007	205 017	246 031	260 053	245 077	208 100	157 116	103 119	051 105	015 067
	0,20	077 003	140 011	187 025	216 044	222 067	206 092	172 113	130 126	084 126	041 109	012 068
	0,50	074 005	126 018	161 037	176 061	175 087	157 111	129 130	096 139	061 134	030 113	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,35	0,00	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,393 006	0,391 027	0,342 054	0,264 080	0,174 095	0,088 092	0,025 063
	0,03	083 000	160 002	229 008	285 017	306 036	291 060	246 085	186 105	122 112	061 101	018 066
	0,05	081 001	156 004	221 011	270 023	286 043	269 068	227 092	171 110	111 116	056 103	016 066
	0,10	080 001	150 007	207 017	246 032	256 054	237 079	199 103	148 119	097 121	048 106	014 067
	0,20	077 002	141 010	190 024	216 044	220 068	201 094	167 115	125 128	080 128	039 109	011 068
	0,50	074 005	127 018	162 037	177 061	174 087	156 112	128 130	094 140	061 134	030 113	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,30	0,00	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,327 002	0,358 016	0,341 041	0,291 067	0,222 091	0,143 103	0,073 096	0,021 063
	0,03	082 000	160 002	230 008	278 020	287 042	266 068	223 093	167 111	108 116	054 104	015 067
	0,05	081 001	156 004	221 011	264 025	270 048	250 074	209 097	155 115	101 119	050 105	015 066
	0,10	080 001	151 007	209 016	243 034	246 058	225 083	187 107	138 122	089 124	045 107	013 067
	0,20	078 002	142 010	190 025	215 045	215 070	194 096	161 117	119 130	077 128	038 110	011 068
	0,50	073 005	128 018	163 037	177 061	173 088	154 112	126 131	093 140	060 134	029 113	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

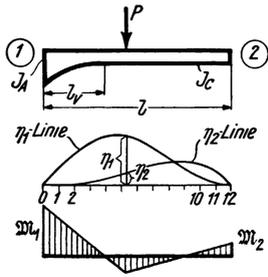
Tafel 13 (Fortsetzung).

Einseitig gerade Vouten.
Einflußlinien für $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$.Obere Zahl η_1
Untere Zahl η_2

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,25	0,00	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,307 009	0,320 029	0,295 055	0,249 084	0,186 104	0,120 111	0,061 102	0,018 065
	0,03	082 000	161 002	228 009	263 025	265 050	242 076	201 100	149 117	097 120	048 106	013 067
	0,05	081 001	157 004	221 012	252 030	252 055	229 081	190 105	141 120	091 122	046 106	013 067
	0,10	081 001	152 007	207 018	234 037	232 063	209 089	173 111	123 125	082 126	041 108	011 068
	0,20	079 002	143 010	190 025	211 047	208 073	187 098	153 120	113 131	073 130	036 110	010 068
	0,50	074 005	129 018	163 037	176 062	171 089	152 113	124 132	091 141	058 135	029 113	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,20	0,00	0,083 —	0,167 —	0,240 003	0,279 019	0,278 042	0,254 070	0,210 096	0,156 113	0,100 118	0,049 104	0,013 067
	0,03	083 001	160 003	218 012	243 032	240 058	216 085	178 108	131 123	085 124	042 108	012 068
	0,05	082 001	157 005	212 015	235 036	231 062	208 089	171 112	126 125	081 125	040 108	011 068
	0,10	081 001	151 008	201 020	220 042	216 068	193 095	158 117	117 129	075 128	037 110	010 068
	0,20	079 002	143 011	186 026	202 050	197 077	176 102	144 123	106 134	068 131	033 111	009 069
	0,50	074 005	129 018	162 037	173 063	167 090	148 115	120 133	088 142	056 136	023 114	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,10	0,00	0,083 —	0,156 005	0,198 022	0,211 045	0,205 073	0,183 100	0,149 120	0,108 133	0,069 130	0,035 110	0,011 068
	0,03	083 002	147 008	184 027	196 051	190 079	168 105	137 125	100 136	064 132	031 112	009 069
	0,05	082 002	145 009	181 028	193 053	186 081	165 106	134 127	098 137	063 132	031 112	008 069
	0,10	081 002	141 011	175 031	187 056	180 083	159 109	129 129	095 138	061 134	030 113	008 069
	0,20	079 003	136 014	168 034	178 060	171 087	152 112	123 132	090 141	058 135	023 113	008 069
	0,50	075 006	126 018	154 040	163 067	156 094	138 119	112 137	082 144	052 137	026 115	007 070
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Einseitig parab. Vouten.

Tafel 14.



Einflußlinien für die Belastungsglieder M_1 M_2

(= Einspannmomente am vollen eingespannten Träger).

$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

Obere Zahl η_1

$$M_1 = -\eta_1 P l$$

$$n = \frac{J_C}{J_A}$$

Untere Zahl η_2

$$M_2 = +\eta_2 P l$$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,00	0,00	0,083	0,167	0,250	0,333	0,417	0,500	0,583	0,667	0,750	0,833	0,917
	0,03	080 001	151 004	207 010	254 019	279 031	286 045	265 063	221 080	159 091	088 088	027 062
	0,05	078 001	146 006	200 013	240 024	259 039	259 055	235 074	194 090	136 098	073 093	022 063
	0,10	078 002	141 008	188 019	220 033	231 050	224 070	199 089	158 104	108 109	057 099	016 065
	0,20	076 003	135 011	176 025	199 042	204 063	191 085	166 103	128 117	085 119	043 104	012 067
	0,50	070 006	122 019	154 037	168 060	166 085	151 108	125 126	094 136	060 132	030 111	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,50	0,00	0,083	0,167	0,250	0,333	0,417	0,500	0,521	0,444	0,313	0,167	0,048
	0,03	082 000	157 003	222 010	269 021	293 039	281 062	242 086	184 105	120 112	062 100	018 065
	0,05	082 001	154 005	216 013	259 026	274 047	260 071	222 095	168 112	110 117	055 104	016 067
	0,10	079 002	148 008	202 018	235 035	244 058	228 083	193 105	144 120	094 122	047 106	014 067
	0,20	078 002	141 011	187 025	211 046	212 070	195 095	162 116	122 129	078 128	038 110	011 068
	0,50	074 004	127 017	161 037	175 061	171 088	153 112	126 131	093 140	060 135	029 113	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Tafel 14 (Fortsetzung).

Einseitig parabol. Vouten.
Einflußlinien für \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 .Obere Zahl η_1
Untere Zahl η_2

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,40	0,00	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,416 001	0,440 014	0,399 038	0,316 065	0,212 085	0,109 087	0,032 062
	0,03	082 000	160 003	224 010	268 024	280 044	259 071	218 095	164 113	105 117	053 104	016 066
	0,05	081 001	156 004	215 013	253 030	260 052	240 077	202 101	151 117	097 120	048 106	014 067
	0,10	080 001	149 008	203 018	233 037	234 062	215 087	178 110	133 124	085 125	043 108	012 068
	0,20	078 002	141 011	186 026	208 047	207 073	188 098	154 119	115 131	074 129	037 110	011 068
	0,50	074 004	126 018	160 037	152 061	170 089	151 113	123 132	091 141	058 135	029 113	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,35	0,00	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,393 006	0,391 027	0,342 054	0,264 080	0,174 095	0,088 092	0,025 063
	0,03	082 000	159 003	222 011	260 026	265 050	243 076	204 099	152 116	097 121	048 106	014 067
	0,05	081 001	155 005	215 014	248 031	251 055	229 081	190 104	141 120	090 123	046 106	013 068
	0,10	080 001	149 008	201 020	228 039	228 065	207 090	171 112	126 127	081 126	041 108	012 068
	0,20	078 002	142 011	185 026	205 048	203 075	182 101	150 121	111 132	070 131	035 111	010 068
	0,50	074 005	126 018	160 038	152 062	168 090	149 114	122 133	090 141	057 135	028 114	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,30	0,00	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,327 002	0,358 016	0,341 041	0,291 067	0,222 091	0,143 103	0,073 096	0,021 063
	0,03	082 001	159 003	218 013	249 030	249 055	226 082	188 105	138 121	090 123	045 106	013 068
	0,05	082 000	155 005	211 016	239 034	238 060	215 086	177 109	131 124	084 125	042 108	012 067
	0,10	080 001	150 007	199 021	221 042	218 068	196 094	161 116	119 129	076 129	038 109	011 068
	0,20	078 002	141 011	184 027	202 050	197 077	176 103	144 123	106 135	068 132	034 111	010 069
	0,50	074 005	126 018	160 038	172 063	166 090	147 115	120 133	088 142	056 136	028 114	008 069
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Obere Zahl η_1
Untere Zahl η_2

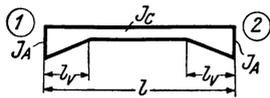
Einseitig parabol. Vouten.
Einflußlinien für $M_1 M_2$.

Tafel 14 (Fortsetzung).

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,25	0,00	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,307 009	0,320 029	0,295 055	0,249 084	0,186 104	0,120 111	0,061 102	0,018 065
	0,03	082 000	158 004	212 015	236 036	233 061	210 088	172 111	128 125	081 126	041 108	011 068
	0,05	082 001	154 006	205 018	227 039	223 065	200 092	164 114	121 127	077 128	039 109	011 068
	0,10	080 001	148 008	194 023	212 046	207 072	185 098	152 119	112 132	072 130	036 110	010 069
	0,20	078 002	141 012	180 029	196 053	190 080	169 106	139 125	101 136	065 133	032 112	009 069
	0,50	074 005	125 018	159 038	170 064	163 091	145 116	118 134	086 143	055 136	027 114	007 070
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,20	0,00	0,083 —	0,167 —	0,240 003	0,279 019	0,278 042	0,254 070	0,210 096	0,156 113	0,100 118	0,049 104	0,013 067
	0,03	081 000	155 006	202 019	220 042	215 069	192 095	157 117	115 130	074 128	036 110	010 068
	0,05	081 001	151 007	196 022	213 045	207 072	185 098	151 119	111 132	071 129	035 110	010 069
	0,10	079 001	146 009	187 026	201 050	195 077	174 103	142 123	104 135	067 131	033 111	009 069
	0,20	077 003	140 013	170 033	188 056	182 083	161 104	131 128	096 138	062 133	030 113	008 069
	0,50	073 005	125 019	157 039	167 066	160 093	142 117	115 135	084 143	054 137	026 114	007 070
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,10	0,00	0,083 —	0,156 005	0,198 022	0,211 045	0,205 073	0,183 100	0,149 120	0,108 133	0,069 130	0,035 110	0,011 068
	0,03	077 003	141 011	174 031	185 057	178 084	157 110	128 129	094 139	060 134	029 113	008 069
	0,05	077 003	139 012	171 032	181 058	174 086	154 111	125 130	092 140	059 134	029 113	008 069
	0,10	075 003	135 014	166 035	176 061	169 088	150 113	121 132	089 141	057 135	028 114	008 069
	0,20	075 004	131 016	160 037	170 064	163 091	144 116	177 134	085 143	055 136	027 114	007 070
	0,50	073 006	123 020	150 042	159 069	152 096	134 121	109 138	080 146	051 138	025 115	007 070
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Tafel 15.

Beidseitig gerade Vouten.



$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

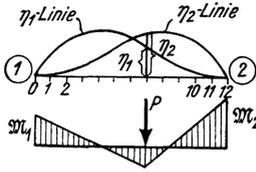
$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

Einflußlinien für die Belastungsglieder M_1 M_2

(= Einspannmomente am vollen gespannten Träger).

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,50	0	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,417 —	0,500 500	— 0,417	— 0,333	— 0,250	— 0,167	— 0,083
	0,03	078 004	142 019	192 044	222 082	222 135	191 191	135 222	082 222	044 192	019 142	004 078
	0,05	077 005	139 021	185 047	210 085	211 132	183 183	132 211	085 210	047 185	021 139	005 077
	0,10	076 005	136 020	178 047	198 085	197 128	171 171	128 197	085 198	047 178	020 136	005 076
	0,20	074 006	131 022	168 048	185 082	181 121	158 158	121 181	082 185	048 168	022 131	006 074
	0,50	073 006	123 024	151 051	163 082	157 114	139 139	114 157	082 163	051 151	024 123	006 073
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,40	0	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,406 009	0,225 225	0,009 406	— 0,333	— 0,250	— 0,167	— 0,083
	0,03	081 003	149 014	205 035	241 071	240 125	192 192	125 240	071 241	035 205	014 149	003 081
	0,05	079 003	146 016	198 039	229 075	226 127	186 186	127 226	075 229	039 198	016 146	003 079
	0,10	078 004	141 019	186 044	211 080	206 127	174 174	127 206	080 211	044 186	019 141	004 078
	0,20	075 005	134 021	174 047	192 081	188 122	161 161	122 188	081 192	047 174	021 134	005 075
	0,50	074 006	126 023	155 049	168 079	161 112	141 141	112 161	079 168	049 155	023 126	006 074
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,35	0	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,348 058	0,212 212	0,058 348	— 0,333	— 0,250	— 0,167	— 0,083
	0,03	081 002	152 012	211 030	246 065	240 118	187 187	118 240	065 246	030 211	012 152	002 081
	0,05	080 002	148 014	204 034	235 068	226 122	181 181	122 226	068 235	034 204	014 148	002 080
	0,10	078 003	142 017	192 039	215 076	207 123	171 171	123 207	076 215	039 192	017 142	003 078
	0,20	076 005	136 019	176 045	194 080	188 120	160 160	120 188	080 194	045 176	019 136	005 076
	0,50	074 006	126 022	157 048	169 078	162 111	141 141	111 162	078 169	048 157	022 126	006 074
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Tafel 15 (Fortsetzung).



Obere Zahl η_1
 Untere Zahl η_2

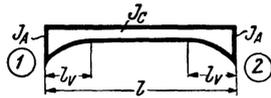
$$M_1 = -\eta_1 P l$$

$$M_2 = +\eta_2 P l$$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,30	0	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,322 009	0,298 087	0,200 200	0,087 298	0,009 322	— 0,250	— 0,167	— 0,083
	0,03	082 001	156 008	217 025	249 058	230 117	180 180	117 230	058 249	025 217	008 156	001 082
	0,05	081 002	153 010	208 030	236 064	220 117	175 175	117 220	064 236	030 208	010 153	002 081
	0,10	079 003	145 015	195 036	216 072	203 120	167 167	120 203	072 216	036 195	015 145	003 079
	0,20	076 005	137 018	179 042	196 077	186 118	157 157	118 186	077 196	042 179	018 137	005 076
	0,50	074 006	127 022	157 047	169 077	161 110	140 140	110 161	077 169	047 157	022 127	006 074
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,25	0	0,083 —	0,167 —	0,250 000	0,290 030	0,259 102	0,188 188	0,102 259	0,030 290	0,000 250	— 0,167	— 0,083
	0,03	083 001	158 006	218 022	238 060	217 115	172 172	115 217	060 238	022 218	006 158	001 083
	0,05	081 002	154 009	210 026	228 064	211 115	168 168	115 211	064 228	026 210	009 154	002 081
	0,10	080 002	148 012	197 033	211 071	196 117	162 162	117 196	071 211	033 197	012 148	002 080
	0,20	078 003	140 017	181 040	194 074	182 115	153 153	115 182	074 194	040 181	017 140	003 078
	0,50	074 006	126 021	157 046	168 076	160 109	139 139	109 160	076 168	046 157	021 126	006 074
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,20	0	0,083 —	0,167 —	0,238 008	0,256 048	0,229 110	0,175 175	0,110 229	0,048 256	0,008 238	— 0,167	— 0,083
	0,03	081 001	154 006	207 027	222 064	203 113	163 163	113 203	064 222	027 207	006 154	001 081
	0,05	080 001	151 008	201 030	214 067	197 114	160 160	114 197	067 214	030 201	008 151	001 080
	0,10	078 002	145 012	190 035	202 070	188 114	155 155	114 188	070 202	035 190	012 145	002 078
	0,20	076 003	136 017	177 040	188 074	176 112	149 149	112 176	074 188	040 177	017 136	003 076
	0,50	073 006	125 021	157 045	166 075	158 108	137 137	108 158	075 166	045 157	021 125	006 073
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Tafel 16.

Beidseitig parab. Vouten.



$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

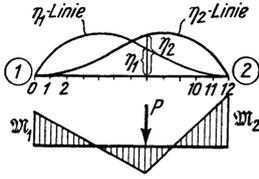
$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

Einflußlinien für die Belastungsglieder M_1 M_2

(= Einspannmomente am vollen gespannten Träger).

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,50	0	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,417 —	0,500 500	— 0,417	— 0,333	— 0,250	— 0,167	— 0,083
	0,03	080 002	150 013	206 033	234 070	228 123	184 184	123 228	070 234	033 206	013 150	002 080
	0,05	080 002	147 014	199 036	225 072	215 124	178 178	124 215	072 225	036 199	014 147	002 080
	0,10	079 003	141 018	187 041	206 078	199 122	168 168	122 199	078 206	041 187	018 141	003 079
	0,20	076 004	135 020	174 044	190 079	182 119	156 156	119 182	079 190	044 174	020 135	004 076
	0,50	074 005	124 022	155 047	167 077	159 110	139 139	110 159	077 167	047 155	022 124	005 074
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,40	0	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,406 009	0,225 225	0,009 406	— 0,333	— 0,250	— 0,167	— 0,083
	0,03	082 001	154 009	210 029	238 064	222 120	178 178	120 222	064 238	029 210	009 154	001 082
	0,05	080 002	149 012	201 034	224 069	212 120	172 172	120 212	069 224	034 201	012 149	002 080
	0,10	079 003	143 016	192 039	208 074	197 119	163 163	119 197	074 208	039 192	016 143	003 079
	0,20	076 004	138 018	176 043	191 077	180 117	154 154	117 180	077 191	043 176	018 138	004 076
	0,50	073 005	124 022	155 046	167 076	159 109	138 138	109 159	076 167	046 155	022 124	005 073
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,35	0	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,333 —	0,348 058	0,212 212	0,058 348	— 0,333	— 0,250	— 0,167	— 0,083
	0,03	082 000	156 008	210 027	234 063	216 118	173 173	118 216	063 234	027 210	008 156	000 082
	0,05	081 002	150 011	203 031	221 069	206 119	168 168	119 206	069 221	031 203	011 150	002 081
	0,10	080 002	145 014	190 036	206 072	193 117	160 160	117 193	072 206	036 190	014 145	002 080
	0,20	077 004	137 018	177 041	189 075	179 115	151 151	115 179	075 189	041 177	018 137	004 077
	0,50	073 005	124 021	156 046	166 076	153 109	137 137	109 153	076 166	046 156	021 124	005 073
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Tafel 16 (Fortsetzung).



Obere Zahl η_1
 Untere Zahl η_2

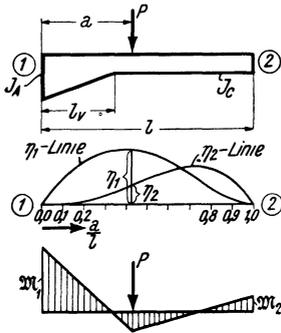
$$\mathfrak{M}_1 = -\eta_1 Pl$$

$$\mathfrak{M}_2 = +\eta_2 Pl$$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,30	0	0,083 —	0,167 —	0,250 —	0,322 009	0,298 087	0,200 200	0,087 298	0,009 322	— 0,250	— 0,167	— 0,083
	0,03	082 001	156 007	210 025	225 065	209 115	167 167	115 209	065 225	025 210	007 156	001 082
	0,05	082 002	151 011	202 030	216 068	200 116	163 163	116 200	068 216	030 202	011 151	002 082
	0,10	080 003	146 013	189 036	202 072	189 115	157 157	115 189	072 202	036 189	013 146	003 080
	0,20	078 004	138 017	175 041	187 075	176 113	149 149	113 176	075 187	041 175	017 138	004 078
	0,50	073 005	124 021	156 046	165 076	157 108	136 136	108 157	076 165	046 156	021 124	005 073
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,25	0	0,083 —	0,167 —	0,250 000	0,290 030	0,259 102	0,188 188	0,102 259	0,030 290	0,000 250	— 0,167	— 0,083
	0,03	082 001	155 008	204 028	216 066	197 114	161 161	114 197	066 216	028 204	008 155	001 082
	0,05	081 001	151 010	196 032	208 069	192 114	158 158	114 192	069 208	032 196	010 151	001 081
	0,10	080 002	146 012	186 036	196 072	182 114	152 152	114 182	072 196	036 186	012 146	002 080
	0,20	078 003	138 016	173 041	183 074	171 112	146 146	112 171	074 183	041 173	016 138	003 078
	0,50	073 005	123 020	154 046	164 075	156 107	135 135	107 156	075 164	046 154	020 123	005 073
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070
0,20	0	0,083 —	0,167 —	0,238 008	0,256 048	0,229 110	0,175 175	0,110 229	0,048 256	0,008 238	— 0,167	— 0,083
	0,03	082 001	152 008	192 033	203 069	187 112	154 154	112 187	069 203	033 192	008 152	001 082
	0,05	081 001	149 010	187 035	197 070	182 112	152 152	112 182	070 197	035 187	010 149	001 081
	0,10	080 002	140 014	178 038	188 072	175 111	147 147	111 175	072 188	038 178	014 140	002 080
	0,20	077 003	131 017	168 042	178 074	167 109	142 142	109 167	074 178	042 168	017 131	003 077
	0,50	073 005	123 020	153 046	162 075	154 106	133 133	106 154	075 162	046 153	020 123	005 073
	1,00	070 007	116 023	141 047	148 074	142 101	125 125	101 142	074 148	047 141	023 116	007 070

Tafel 13a.

Einseitig gerade Vouten.



Einflußlinien für die Belastungsglieder

$$M_1 \quad M_2$$

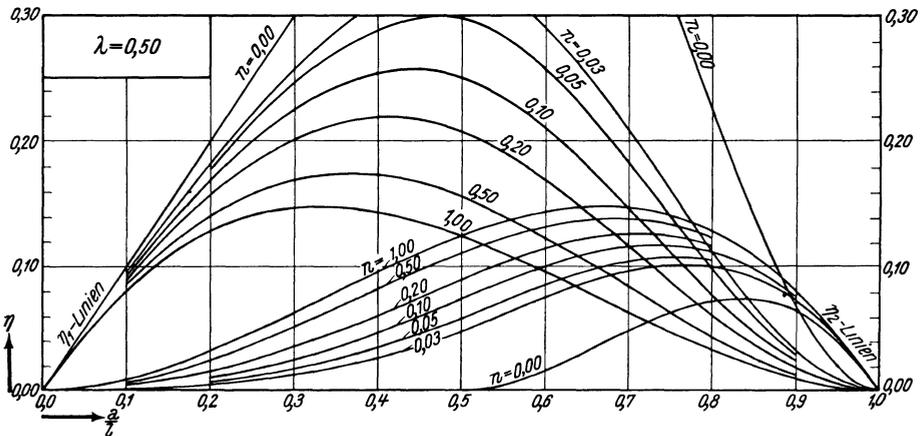
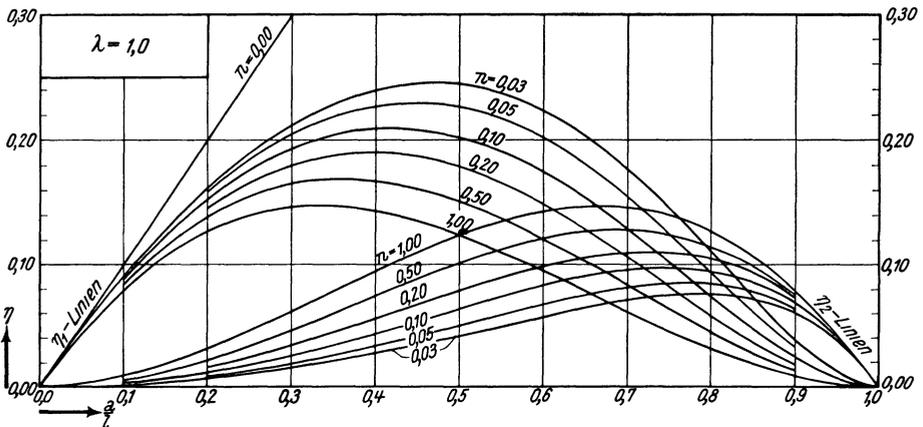
(= Einspannmomente am volleingespannten Träger).

$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

$$M_1 = -\eta_1 P l$$

$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

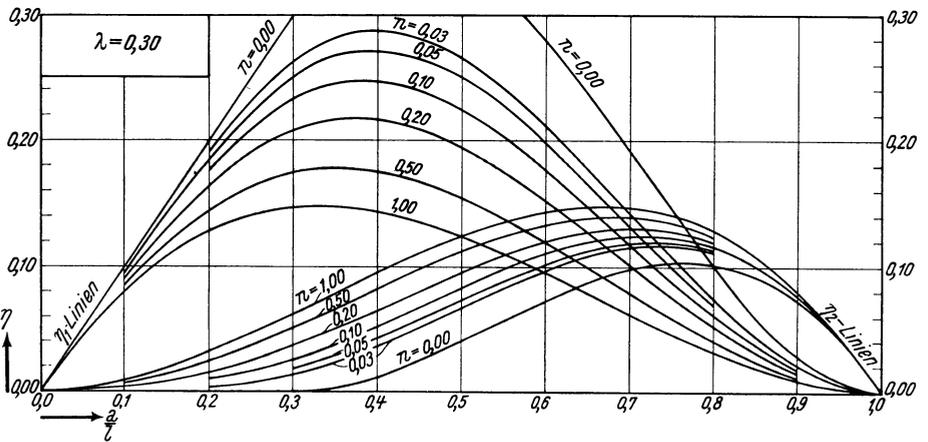
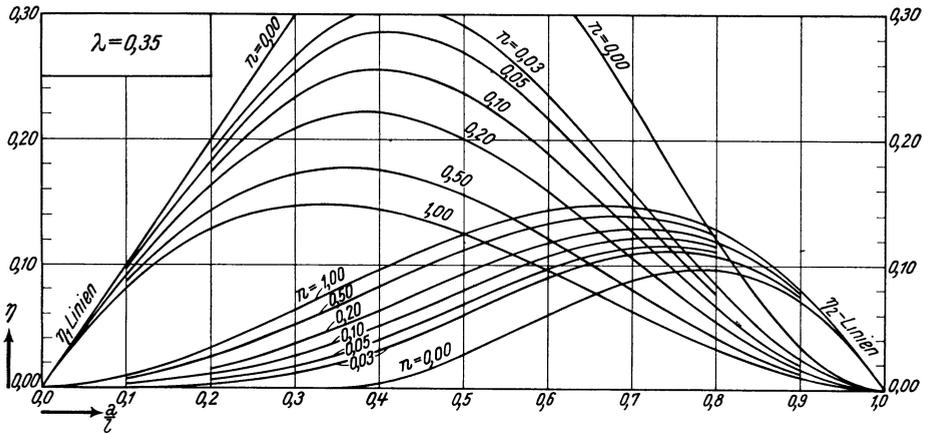
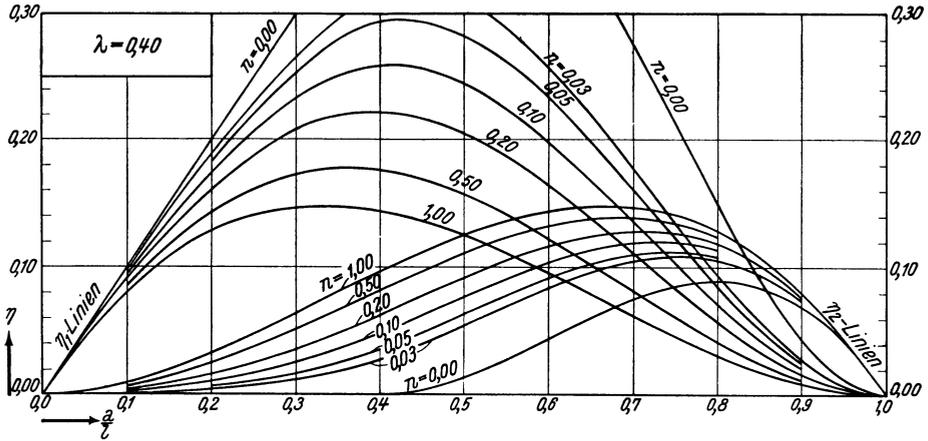
$$M_2 = +\eta_2 P l$$



Einflußlinien für $M_1 M_2$.

$$M_1 = -\eta_1 P l \quad M_2 = +\eta_2 P l$$

Einseitig gerade Vouten.

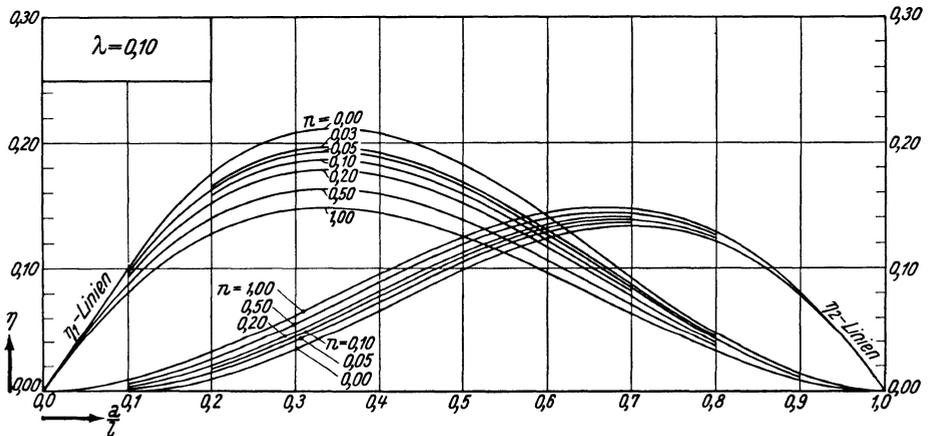
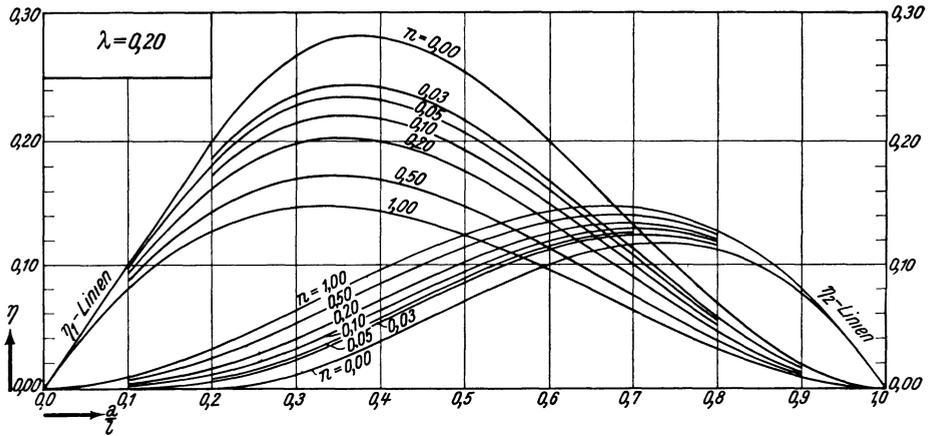
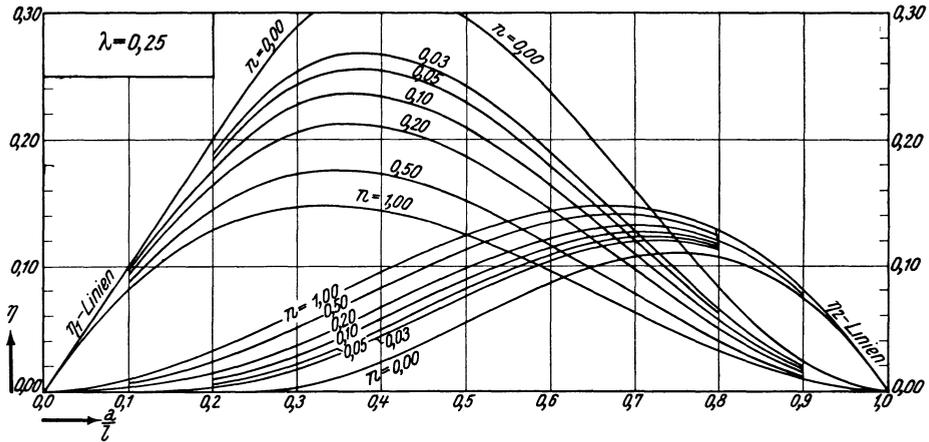


Tafel 13a (Fortsetzung).

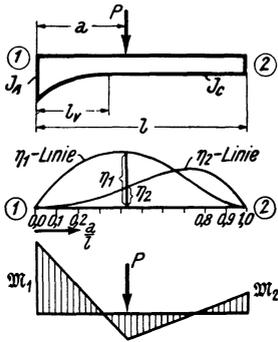
Einflußlinien für $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$.

$$\mathfrak{M}_1 = -\eta_1 P l \quad \mathfrak{M}_2 = +\eta_2 P l$$

Einseitig gerade Vouten.



Einseitig parabol. Vouten.



Einflußlinien für die Belastungsglieder M_1 M_2

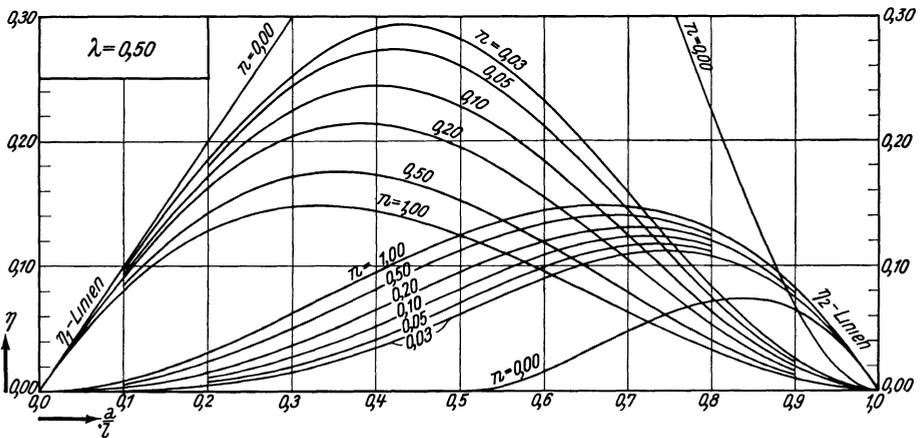
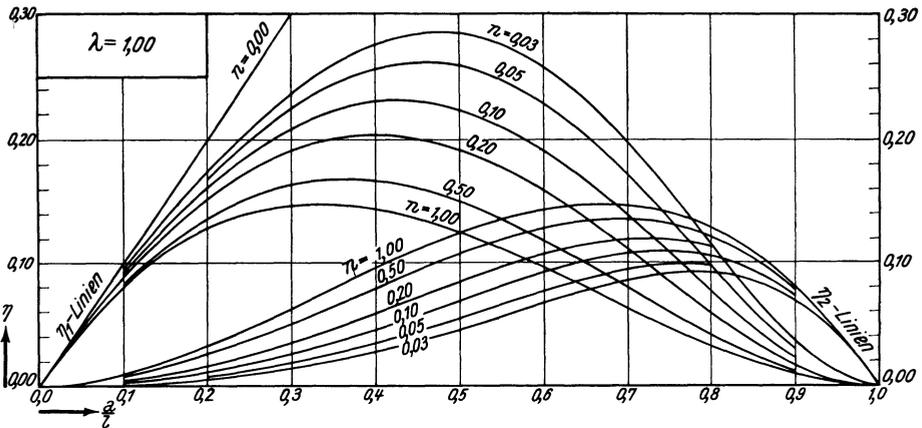
(= Einspannmomente am vollen gespannten Träger).

$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

$$M_1 = -\eta_1 P l$$

$$n = \frac{J_C}{J_A}$$

$$M_2 = +\eta_2 P l$$

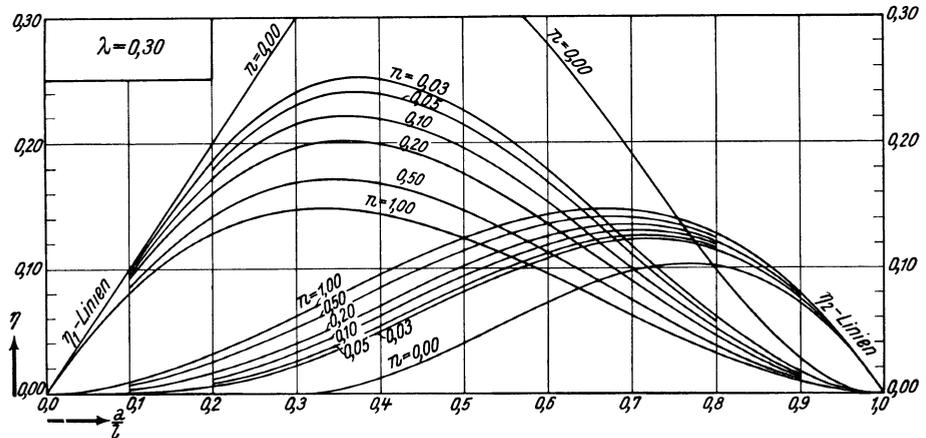
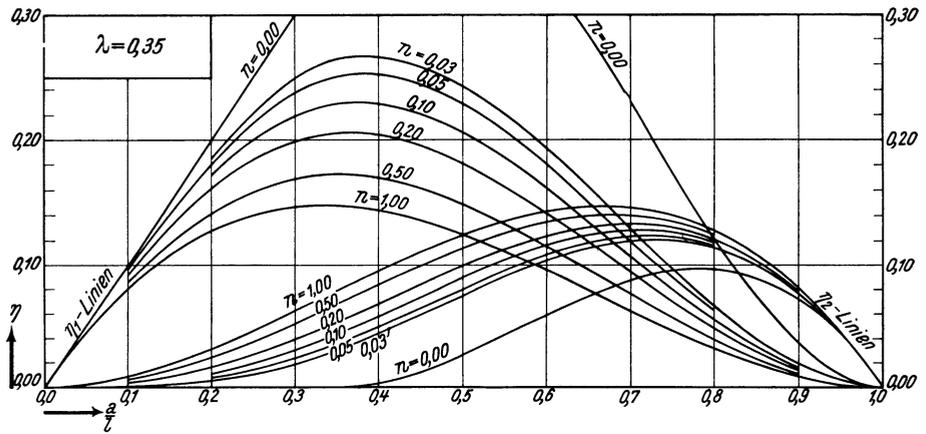
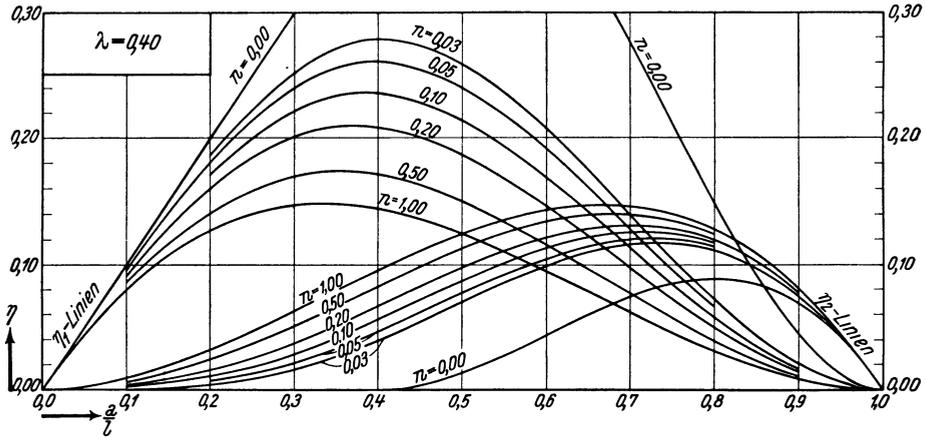


Tafel 14a (Fortsetzung).

Einflußlinien für $M_1 M_2$.

$$M_1 = -\eta_1 P l \quad M_2 = +\eta_2 P l$$

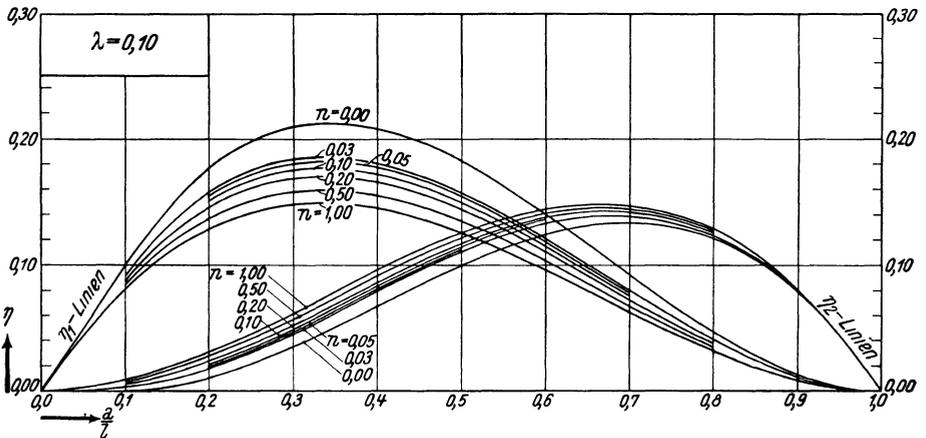
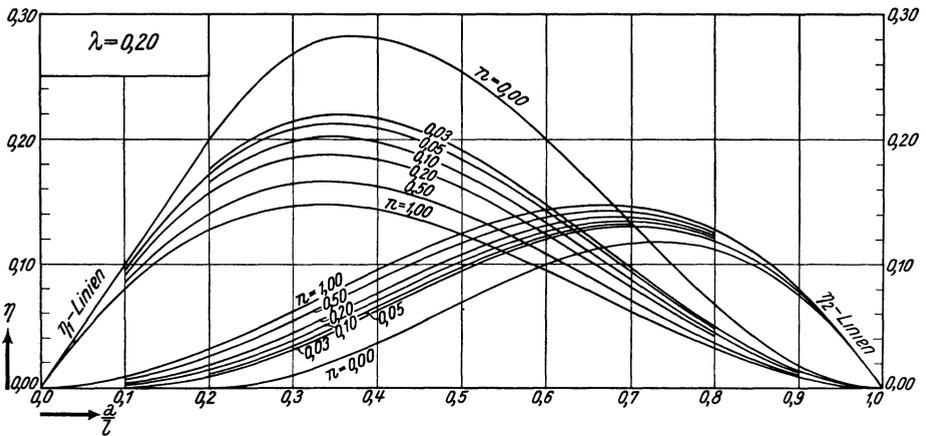
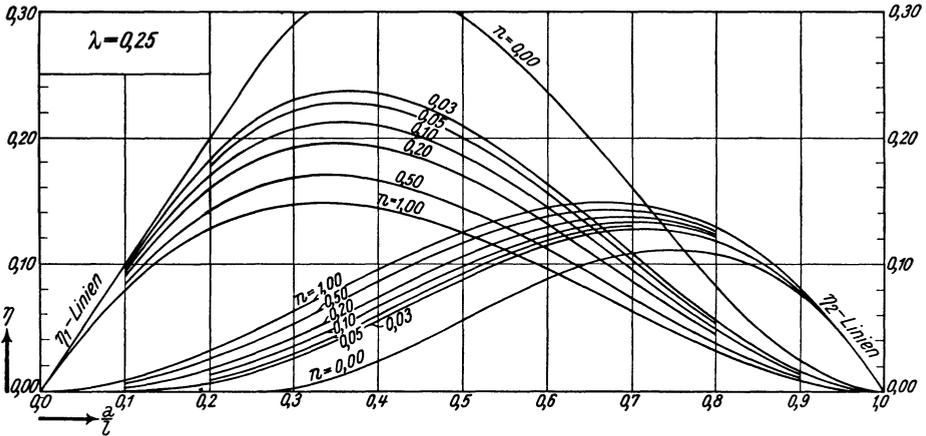
Einseitig parabol. Vouten.



Einflußlinien für $M_1 M_2$.

$$M_1 = -\eta_1 Pl \quad M_2 = +\eta_2 Pl$$

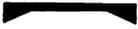
Einseitig parabol. Vouten.



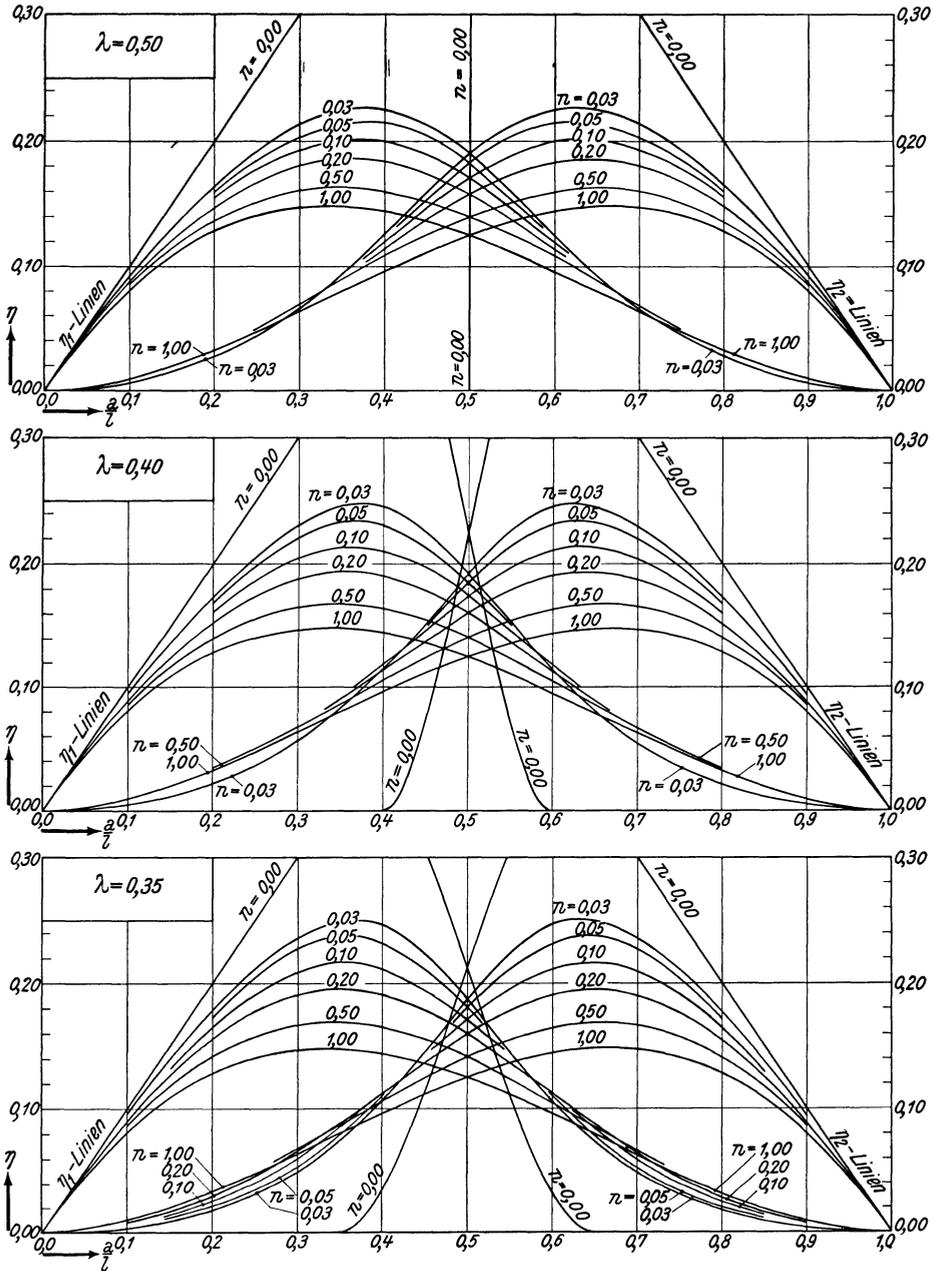
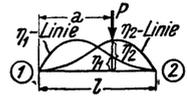
Tafel 15a.

Beidseitig
gerade Vouten.

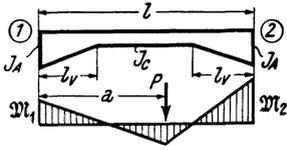
Einflußlinien für die Belastungsglieder M_1 M_2



(= Einspannmomente am vollen gespannten
Träger).



Tafel 15a (Fortsetzung).

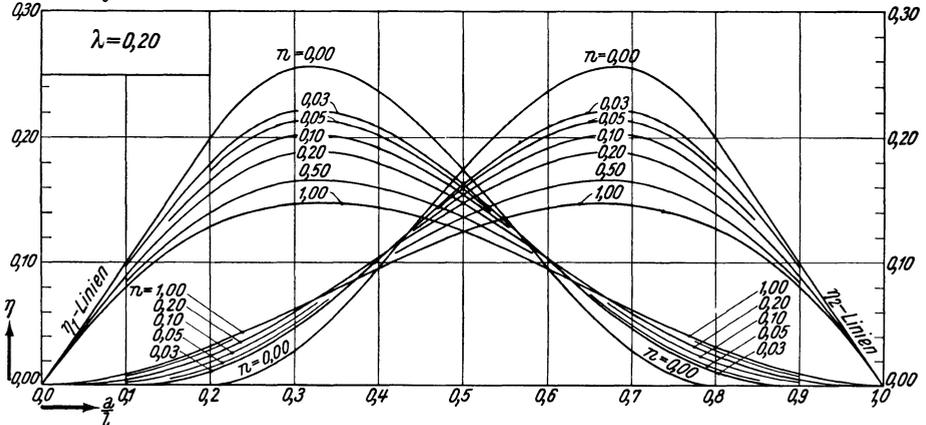
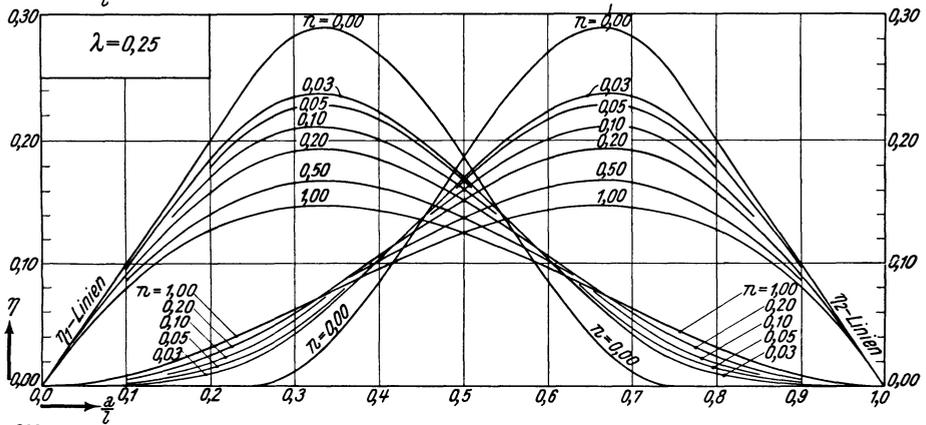
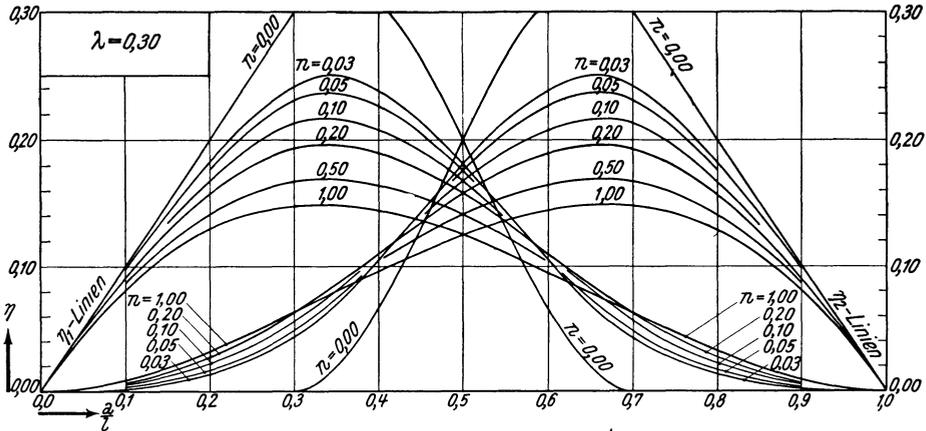


$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

$$M_1 = -\eta_1 P l$$

$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

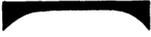
$$M_2 = +\eta_2 P l$$



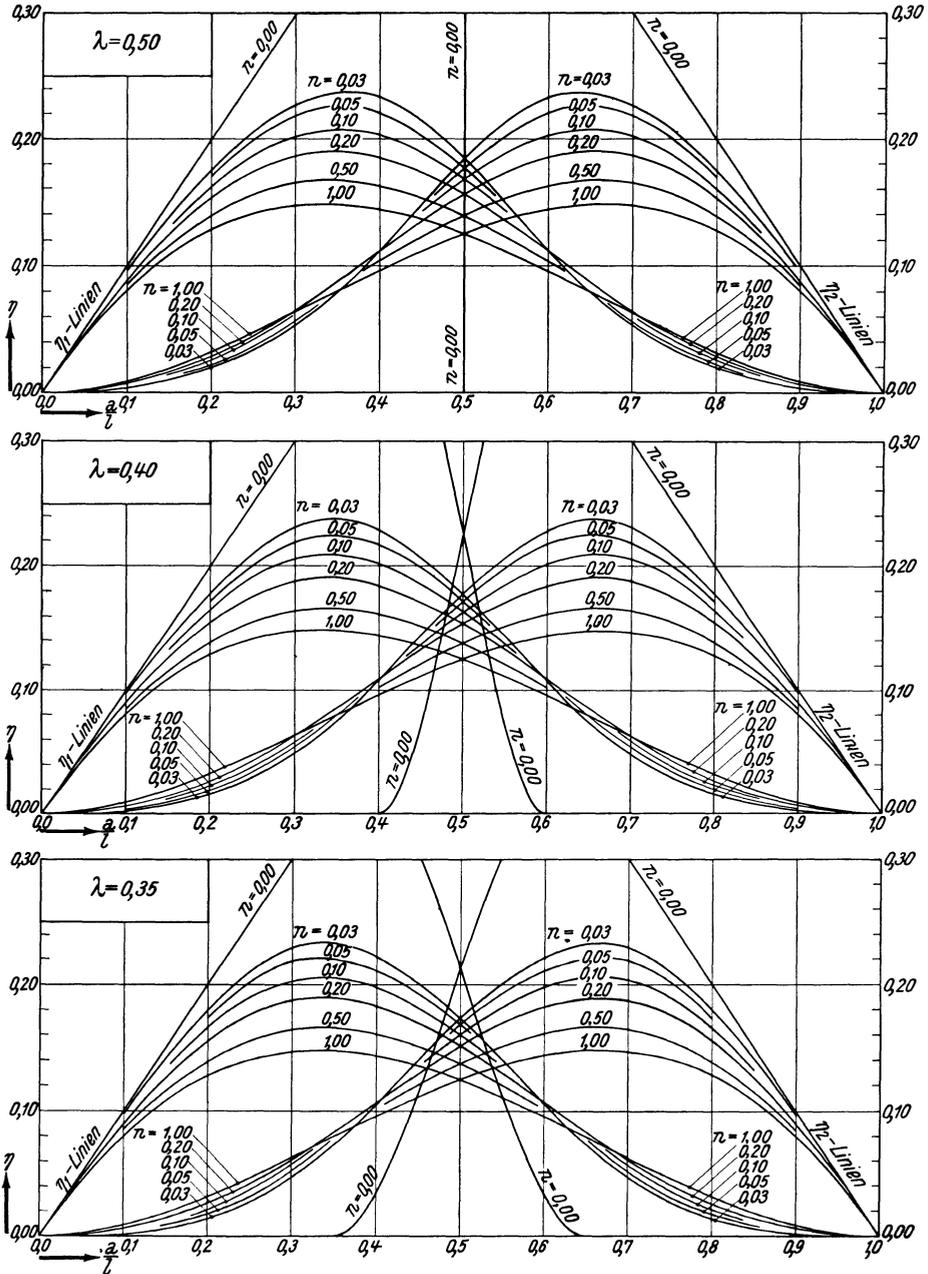
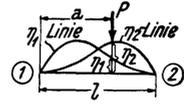
Tafel 16a.

Einflußlinien für die Belastungsglieder $M_1 M_2$

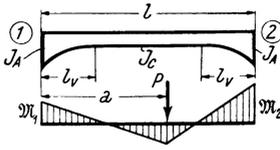
Beidseitig parabol. Vouten.



(= Einspannmomente am volleingespannten Träger).



Tafel 16a (Fortsetzung).

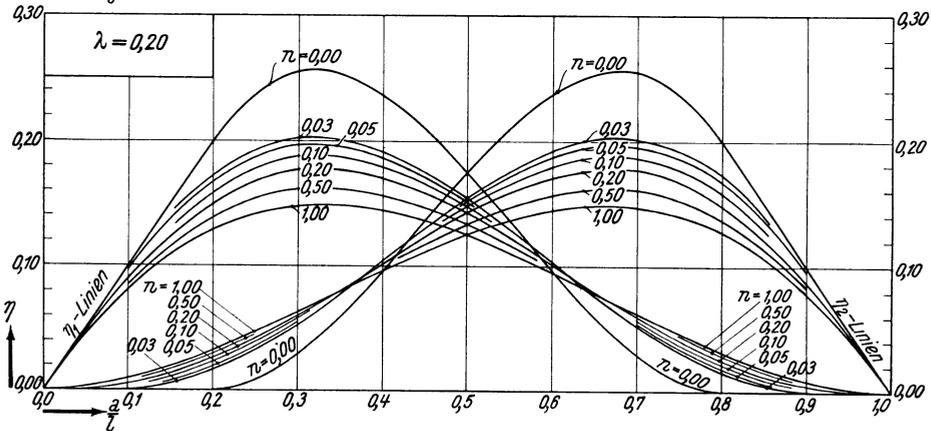
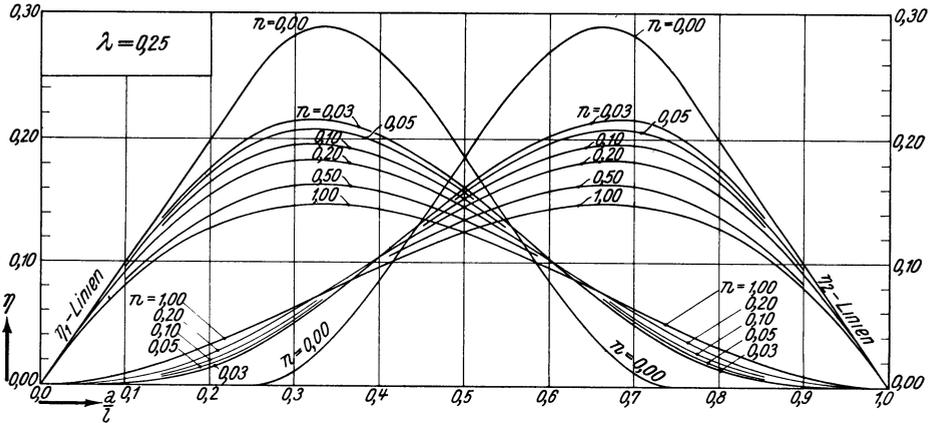
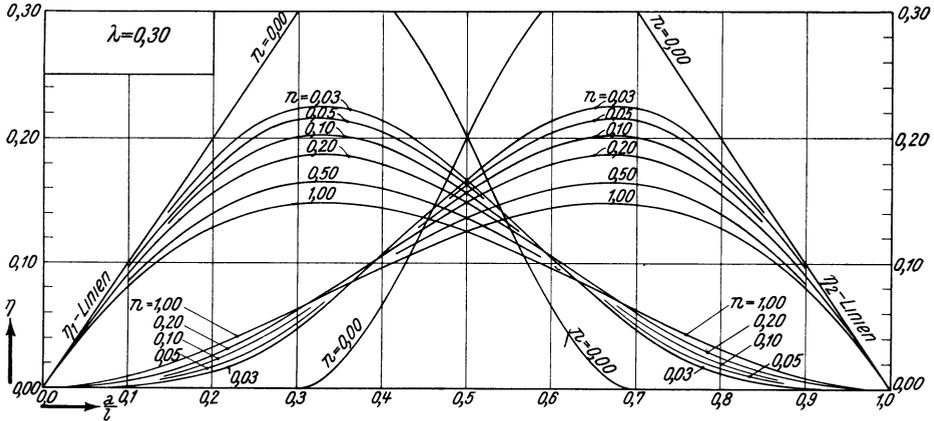


$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

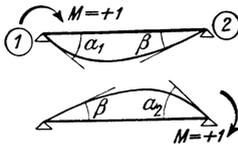
$$\mathfrak{M}_1 = -\eta_1 P l$$

$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

$$\mathfrak{M}_2 = +\eta_2 P l$$



Tafel 17 (Fortsetzung).



Obere Zahl $\bar{\alpha}_1$

Mittlere Zahl $\bar{\alpha}_2$

Untere Zahl $\bar{\beta}$

$$\alpha_1^* = \frac{\alpha_1}{EJ_c} = \bar{\alpha}_1 \frac{l}{EJ_c}$$

$$\alpha_2^* = \frac{\alpha_2}{EJ_c} = \bar{\alpha}_2 \frac{l}{EJ_c}$$

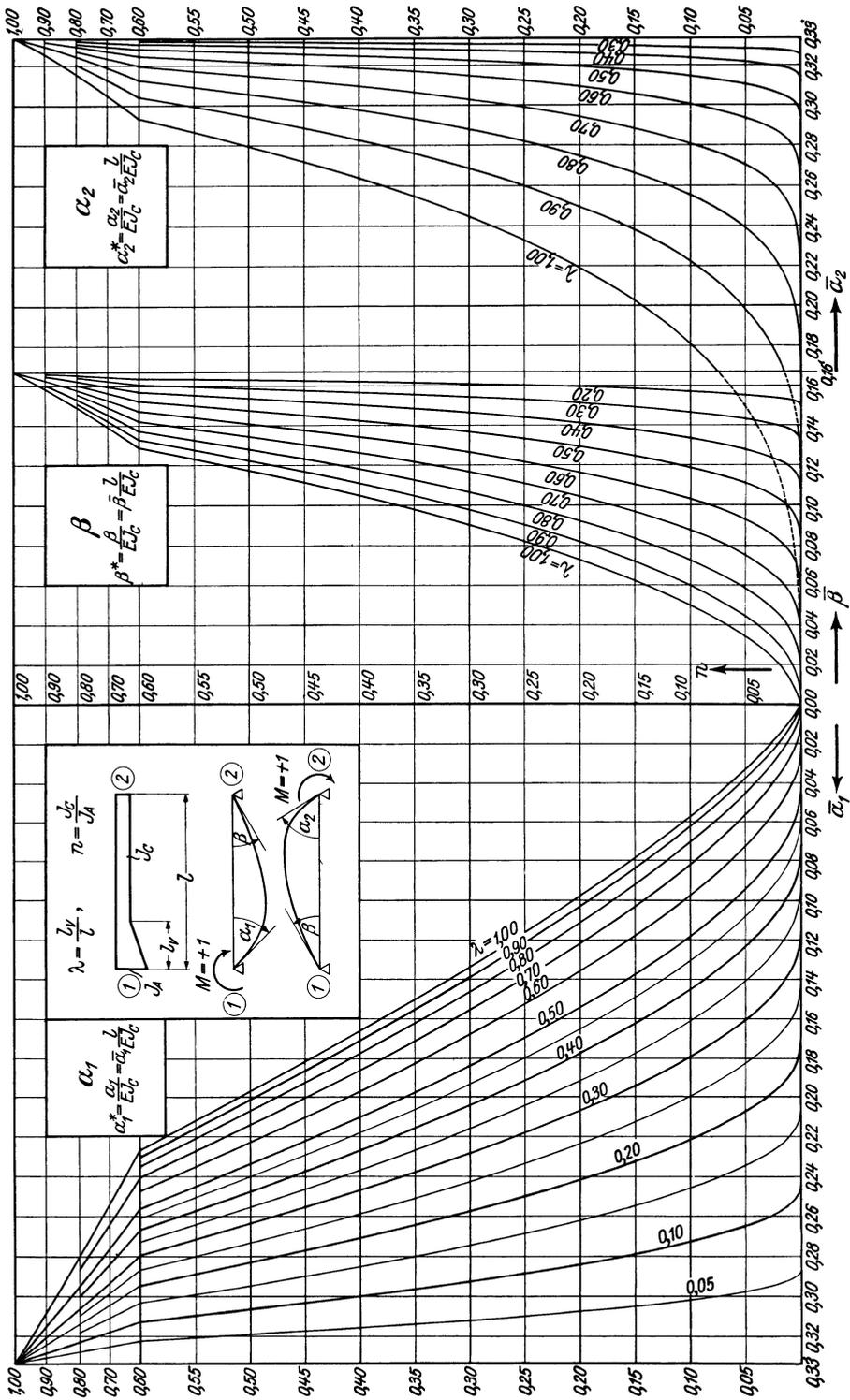
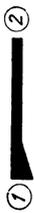
$$\beta^* = \frac{\beta}{EJ_c} = \bar{\beta} \frac{l}{EJ_c}$$

$\lambda \backslash n$	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,005	0
1,00	0,066	0,057	0,048	0,038	0,033	0,028	0,022	0,016	0,009	0,005	—
	191	182	172	157	150	140	129	115	094	076	—
	056	050	045	038	035	031	026	021	014	009	—
0,90	071	063	053	043	038	032	026	020	012	007	0,000
	230	223	216	205	199	193	185	174	159	146	090
	065	060	055	048	045	041	036	031	024	018	005
0,80	079	070	061	051	045	039	033	026	017	012	003
	260	256	251	243	239	235	229	222	211	202	163
	077	073	068	062	059	055	051	045	038	033	017
0,70	091	082	072	062	056	050	044	036	027	021	009
	285	281	278	273	271	267	263	258	251	245	219
	091	087	083	078	075	072	068	063	057	052	036
0,60	106	097	088	078	072	066	060	052	043	036	021
	303	301	298	295	294	292	289	286	282	278	261
	106	103	099	095	093	090	087	083	076	073	059
0,50	126	118	110	100	094	088	082	074	065	058	042
	316	314	313	311	310	309	308	306	303	302	292
	121	119	116	113	111	108	106	103	099	095	083
0,45	139	131	123	113	108	102	096	089	079	073	055
	320	320	319	317	317	316	315	313	311	310	303
	128	126	124	121	119	118	115	113	109	106	096
0,40	153	145	137	128	123	118	112	105	096	090	072
	324	324	323	322	322	321	320	319	318	317	312
	135	134	132	129	128	126	125	122	119	117	108
0,35	168	161	154	146	141	136	130	124	115	109	092
	327	327	326	326	325	325	325	324	323	322	319
	142	140	139	137	136	135	133	131	129	127	120
0,30	186	179	173	165	161	156	151	148	137	131	114
	329	329	329	329	328	328	328	328	327	327	326
	148	147	146	144	143	142	141	140	138	136	131
0,25	205	199	194	187	183	179	174	169	161	156	141
	331	331	331	331	330	330	330	330	330	329	328
	154	152	151	150	150	149	148	147	146	145	141
0,20	226	222	217	211	208	204	200	195	189	184	171
	332	332	332	332	332	332	332	332	331	331	331
	158	157	157	156	156	155	155	154	153	152	149
0,15	249	246	242	237	235	232	229	224	220	216	205
	333	333	333	333	333	333	333	333	333	332	332
	161	161	161	160	160	160	160	159	159	158	157
0,10	275	273	270	266	265	263	260	258	254	251	243
	333	333	333	333	333	333	333	333	333	333	333
	164	164	164	164	164	164	163	163	163	163	162
0,05	303	302	300	298	297	296	295	294	292	290	286
	333	333	333	333	333	333	333	333	333	333	333
	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166
0,00	333	333	333	333	333	333	333	333	333	333	333
	333	333	333	333	333	333	333	333	333	333	333
	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166	166

Tafel 17a.

Stabstwerte α_1 α_2 β
 für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am
 freiaufliegenden Träger infolge $M = +1$).

Einseitig gerade
 Vouten.

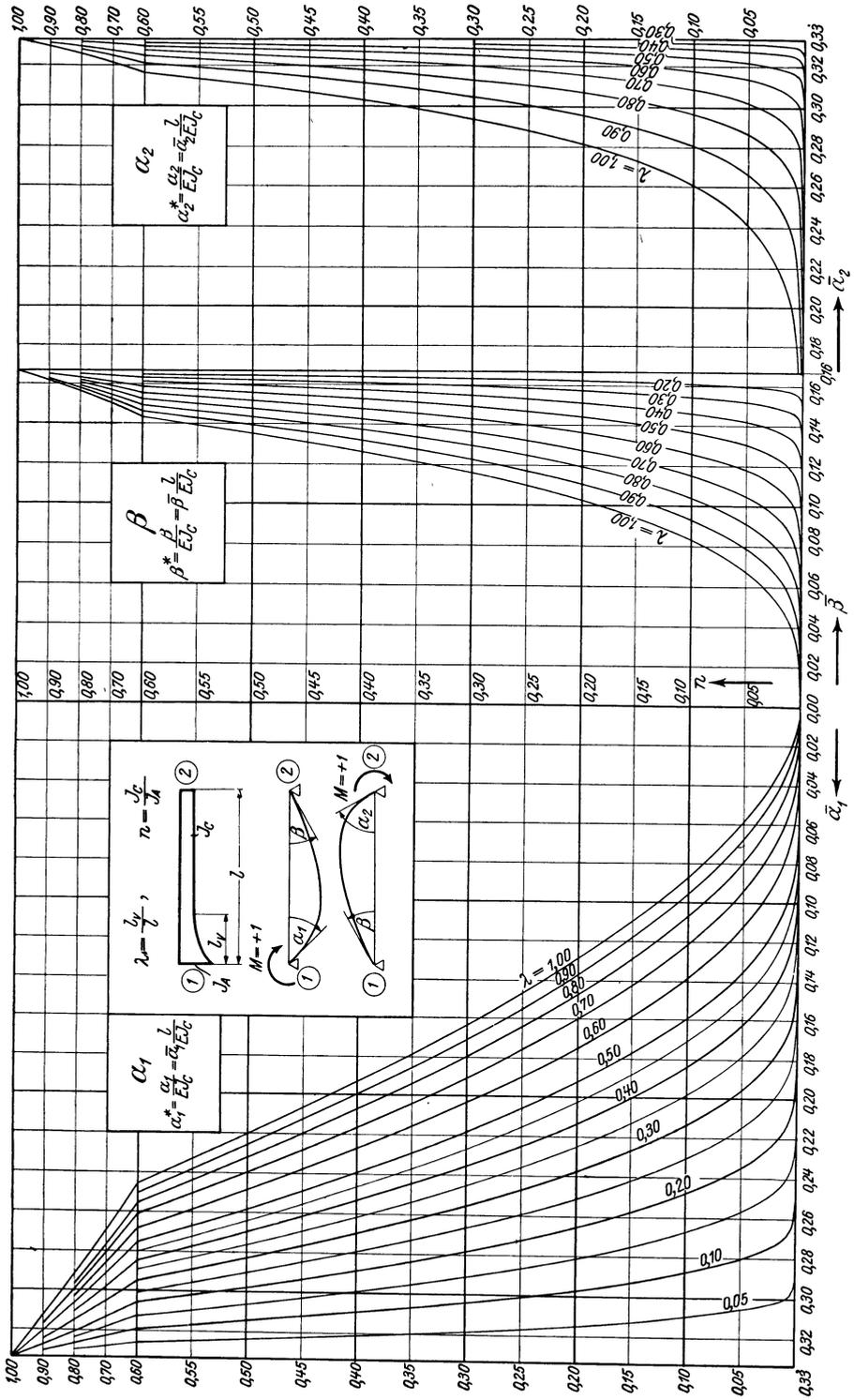


Tafel 18a.

Stabwertwerte α_1 α_2 β

für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger infolge $M = +1$).

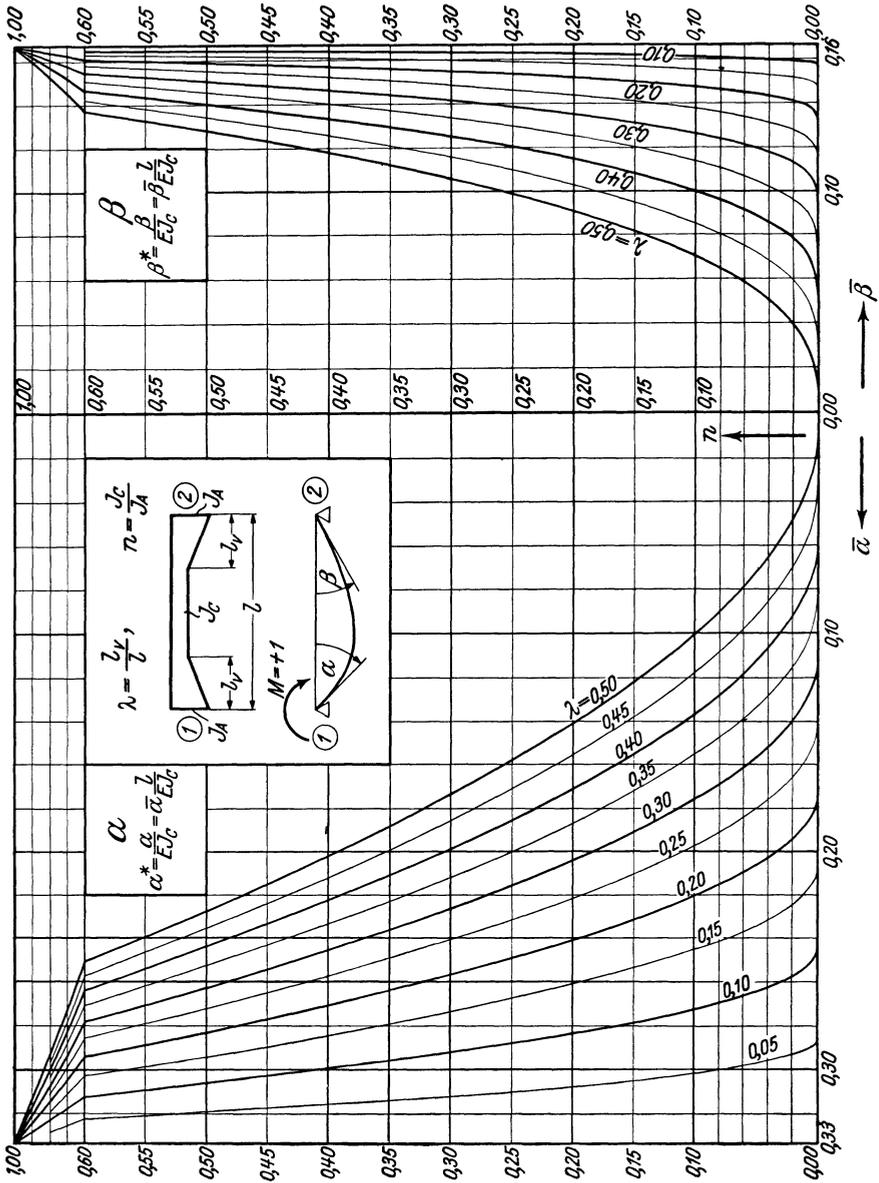
Einseitig parabol.
Vouten.



Stabfestwerte α β

für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger infolge $M = +1$).

Beidseitig gerade Vouten.

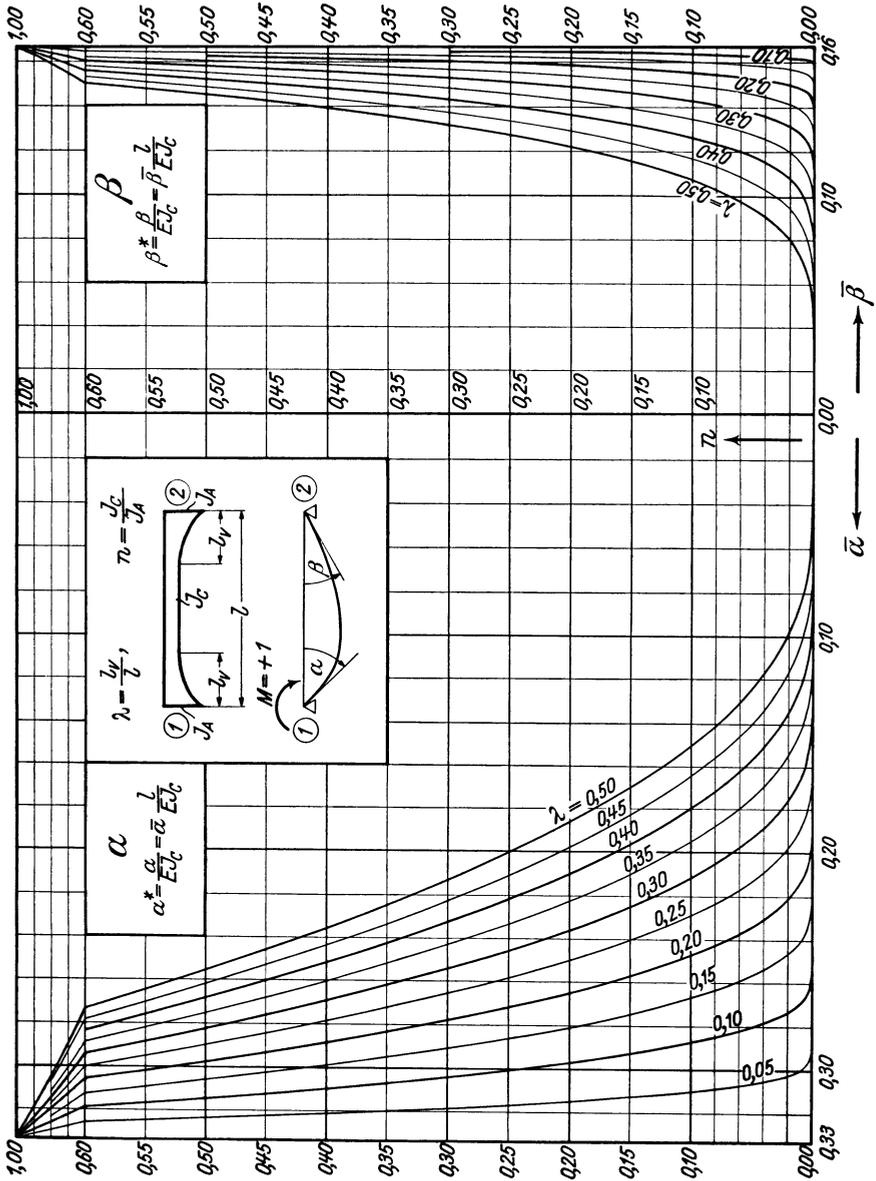


Beidseitig parabol.
Vouten.

Stabfestwerte α β

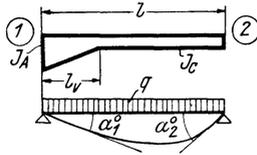
Tafel 20a.

für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger infolge $M = +1$).



Tafel 21.

Einseitig gerade Vouten.



Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger) inf. gleichmäßiger Vollbelastung.

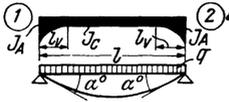
$\lambda \backslash n$	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,15	0,12
1,00	0,0416 0416	0,0392 0401	0,0364 0382	0,0336 0361	0,0306 0338	0,0273 0314	0,0238 0236	0,0198 0253	0,0153 0212	0,0127 0186	0,0110 0168
0,90	0416 0416	0394 0403	0369 0387	0342 0369	0313 0350	0282 0329	0249 0305	0211 0277	0167 0241	0141 0218	0124 0202
0,80	0416 0416	0396 0405	0373 0393	0348 0379	0323 0364	0294 0347	0263 0327	0228 0304	0186 0274	0162 0255	0145 0242
0,70	0416 0416	0398 0408	0378 0398	0357 0388	0334 0377	0309 0364	0281 0349	0249 0332	0211 0309	0188 0294	0173 0284
0,60	0416 0416	0401 0411	0384 0404	0366 0397	0347 0389	0326 0380	0302 0370	0275 0357	0242 0341	0222 0330	0208 0323
0,50	0416 0416	0405 0413	0391 0409	0377 0405	0362 0399	0345 0393	0326 0387	0304 0379	0277 0368	0260 0362	0249 0357
0,45	0416 0416	0406 0414	0394 0411	0382 0407	0369 0403	0354 0399	0338 0394	0319 0388	0295 0380	0281 0375	0271 0371
0,40	0416 0416	0408 0415	0398 0412	0388 0410	0377 0407	0364 0404	0350 0400	0334 0396	0314 0390	0302 0386	0293 0383
0,35	0416 0416	0409 0415	0402 0414	0393 0412	0384 0410	0374 0408	0363 0405	0349 0402	0333 0398	0323 0395	0316 0393
0,30	0416 0416	0411 0416	0405 0414	0398 0413	0391 0412	0383 0411	0374 0409	0364 0407	0351 0404	0343 0402	0337 0401
0,25	0416 0416	0412 0416	0408 0415	0403 0414	0398 0414	0392 0413	0386 0412	0378 0411	0368 0409	0362 0408	0358 0407
0,20	0416 0416	0414 0416	0411 0416	0408 0415	0404 0415	0400 0415	0396 0414	0390 0414	0384 0413	0380 0412	0377 0412
0,15	0416 0416	0415 0416	0414 0416	0412 0416	0409 0416	0407 0416	0404 0416	0401 0415	0397 0415	0394 0415	0393 0414
0,10	0416 0416	0416 0416	0415 0416	0414 0416	0413 0416	0412 0416	0411 0416	0409 0416	0407 0416	0406 0416	0405 0416
0,05	0416 0416	0416 0417	0416 0417	0416 0416	0416 0416	0415 0416	0415 0416	0415 0416	0414 0416	0414 0416	0414 0416
0	0416 0416										

Anm.: Die Kreuzlinienabschnitte sind allgemein $K_1^0 = \frac{\alpha_2^0}{\beta}$; $K_2^0 = \frac{\alpha_1^0}{\beta}$; (β siehe Tafel 17 bis 20).

Tafel 24.

Beidseitig parab. Vouten.

Belastungsglieder α^0



für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger) inf. gleichmäßiger Vollbelastung.

$$\lambda = \frac{l_r}{l} \quad n = \frac{J_c}{J_A} \quad \alpha^{0*} = \frac{\alpha^0}{E J_c} = \bar{\alpha}^0 \frac{q l^3}{E J_c}$$

Tabellenwerte: $\bar{\alpha}^0$

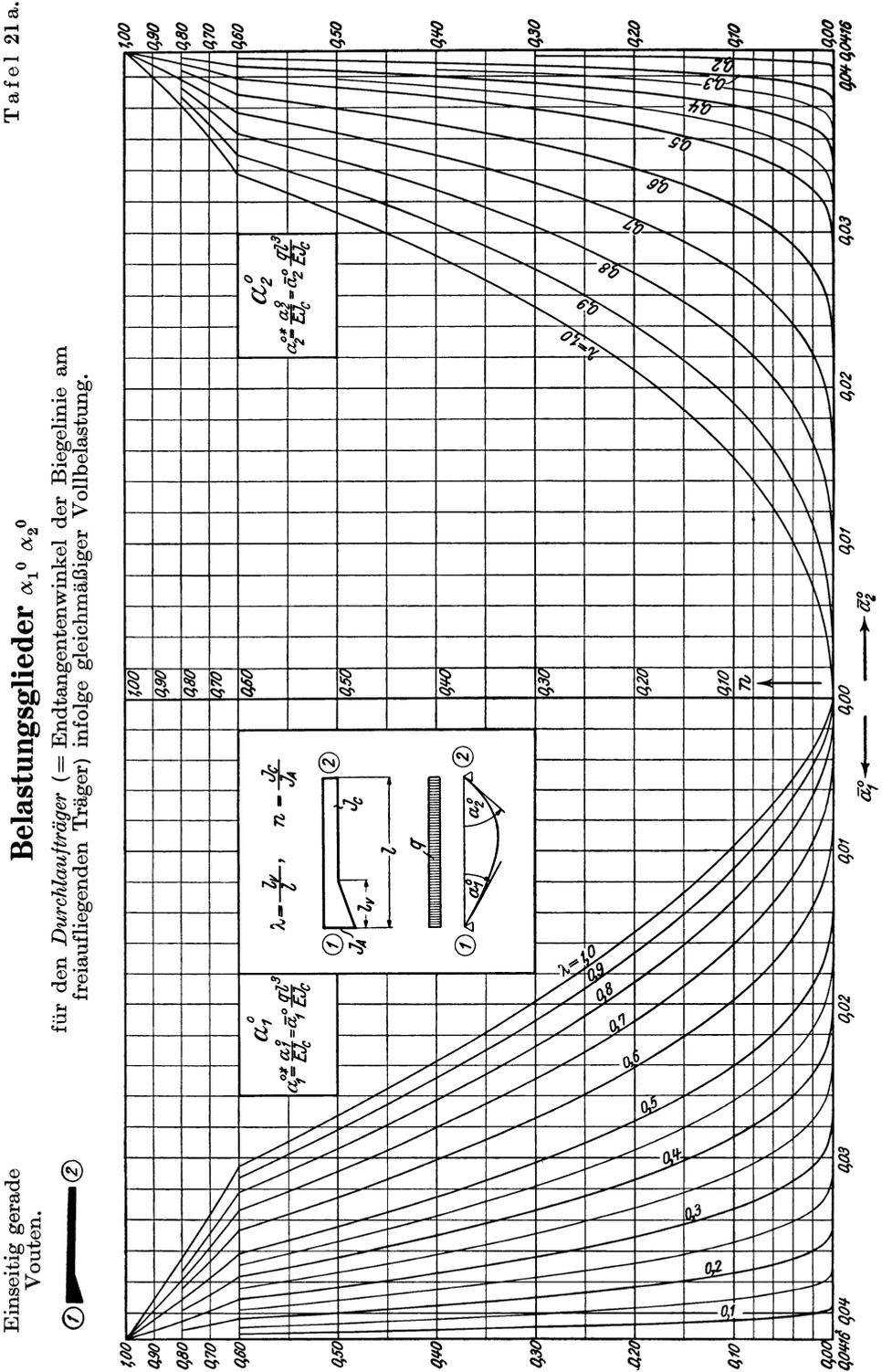
$\lambda \backslash n$	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,15	0,12
0,50	0,0416	0,0408	0,0399	0,0388	0,0377	0,0363	0,0348	0,0329	0,0305	0,0289	0,0277
0,45	0416	0409	0402	0393	0383	0372	0359	0344	0323	0310	0300
0,40	0416	0411	0404	0397	0390	0381	0370	0358	0341	0330	0322
0,35	0416	0412	0407	0402	0395	0388	0380	0370	0357	0348	0342
0,30	0416	0413	0409	0405	0401	0395	0389	0382	0372	0365	0360
0,25	0416	0414	0412	0409	0405	0402	0397	0392	0385	0380	0376
0,20	0416	0415	0413	0411	0409	0407	0404	0400	0396	0393	0390
0,15	0416	0416	0415	0414	0412	0411	0409	0407	0405	0403	0401
0,10	0416	0416	0416	0415	0415	0414	0413	0412	0411	0410	0410
0,05	0416	0417	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0415	0415	0415
0,00	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416

$\lambda \backslash n$	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,005	0
0,50	0,0277	0,0268	0,0257	0,0244	0,0236	0,0226	0,0215	0,0200	0,0177	0,0156	0,0000
0,45	0300	0292	0283	0272	0265	0257	0248	0235	0215	0198	0062
0,40	0322	0316	0308	0299	0293	0287	0279	0268	0252	0238	0123
0,35	0342	0337	0331	0324	0319	0314	0308	0300	0287	0275	0182
0,30	0360	0357	0352	0347	0343	0339	0334	0328	0318	0309	0237
0,25	0376	0374	0371	0367	0364	0361	0358	0353	0346	0340	0287
0,20	0390	0388	0386	0384	0382	0380	0378	0375	0370	0366	0330
0,15	0401	0400	0399	0398	0397	0396	0394	0393	0390	0387	0366
0,10	0410	0409	0409	0408	0408	0407	0406	0406	0404	0403	0393
0,05	0415	0415	0415	0414	0414	0414	0414	0414	0414	0413	0411
0,00	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416	0416

Einseitig gerade
Vouten.

Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger) infolge gleichmäßiger Vollbelastung.



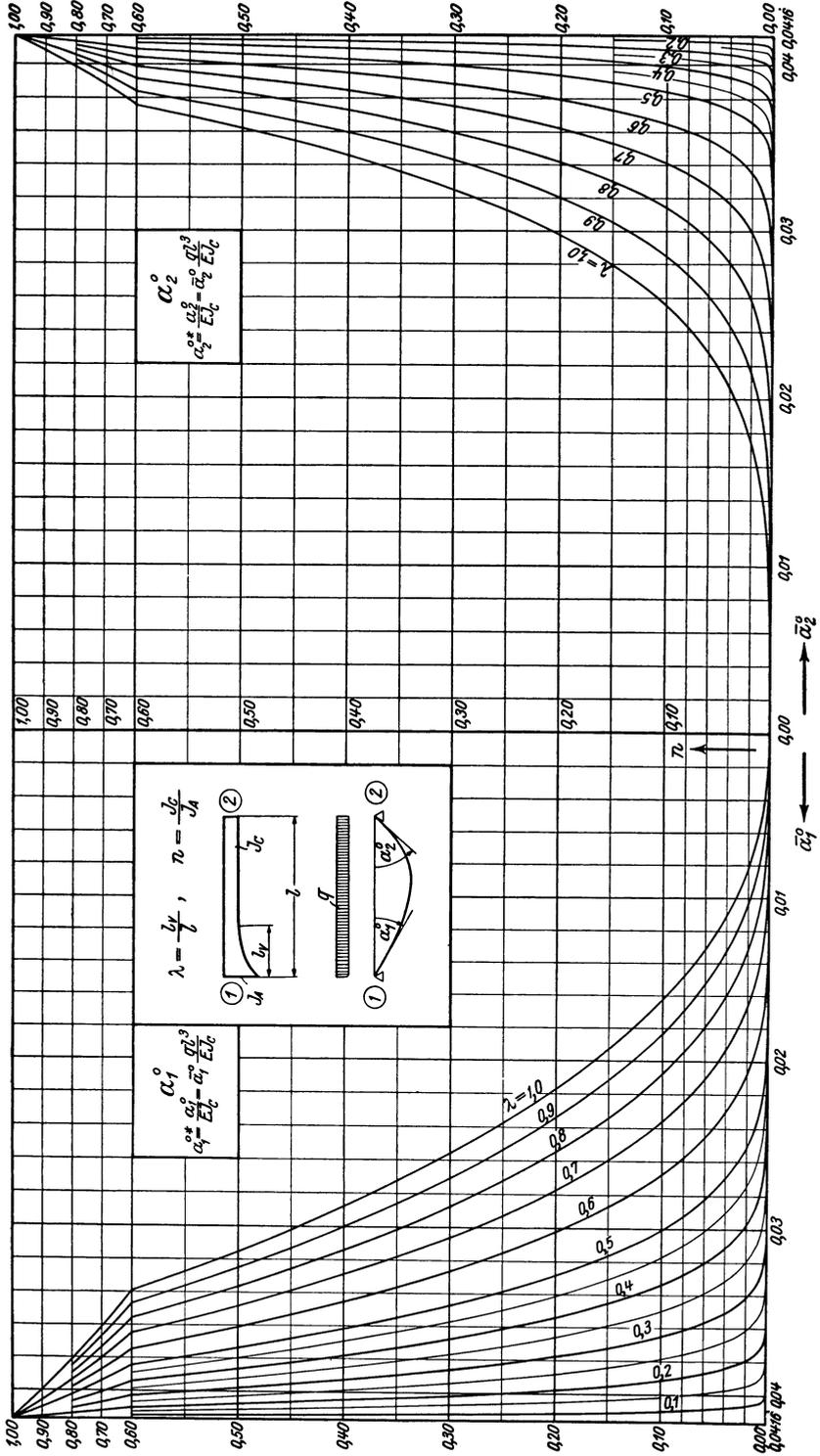
Tafel 21a.

Einseitig parabol.
Vouten.

Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

für den Durchlaufträger (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger) infolge gleichmäßiger Vollbelastung.

Tafel 22ä.



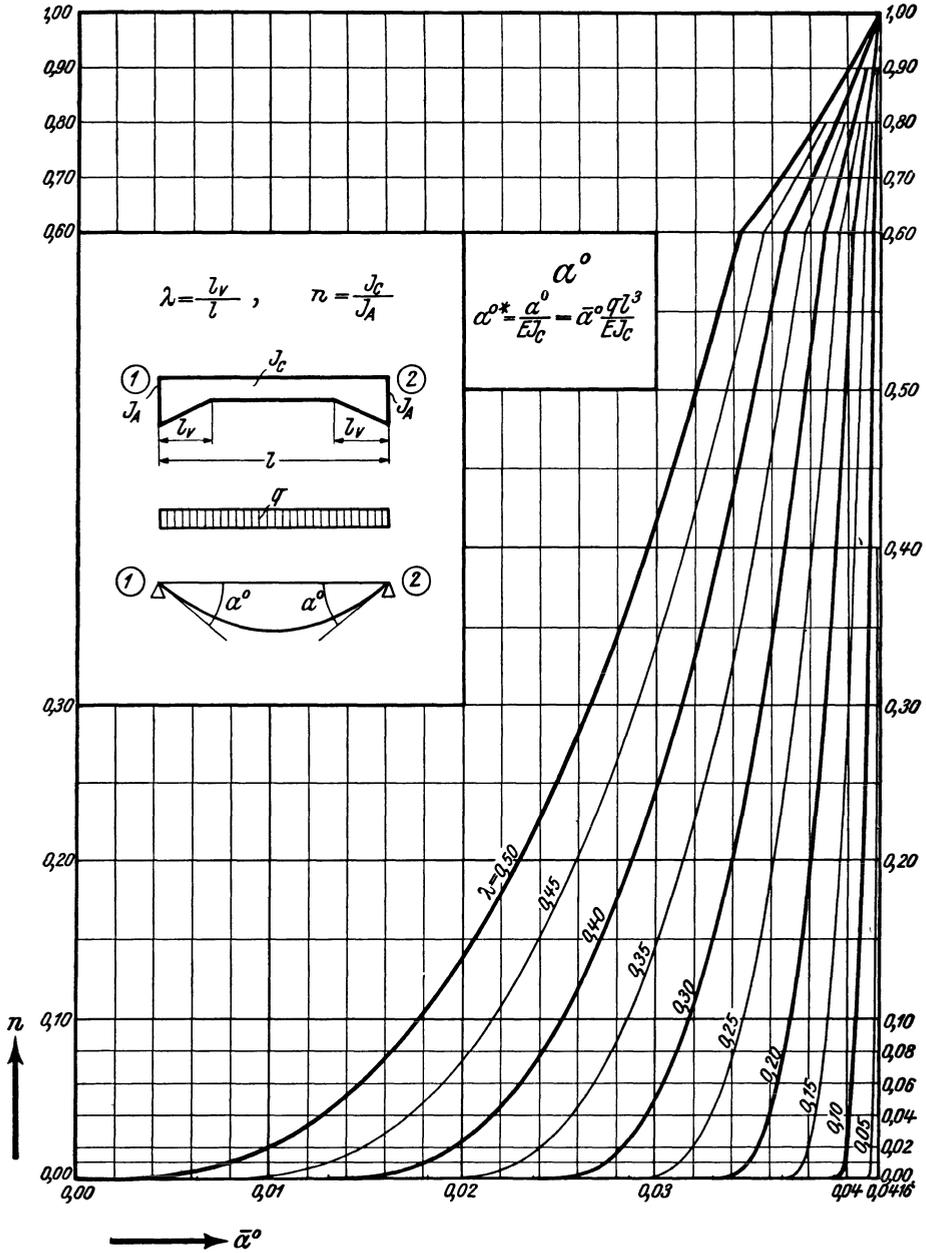
Tafel 23 a.

Beidseitig gerade
Vouten.



Belastungsglieder α^0

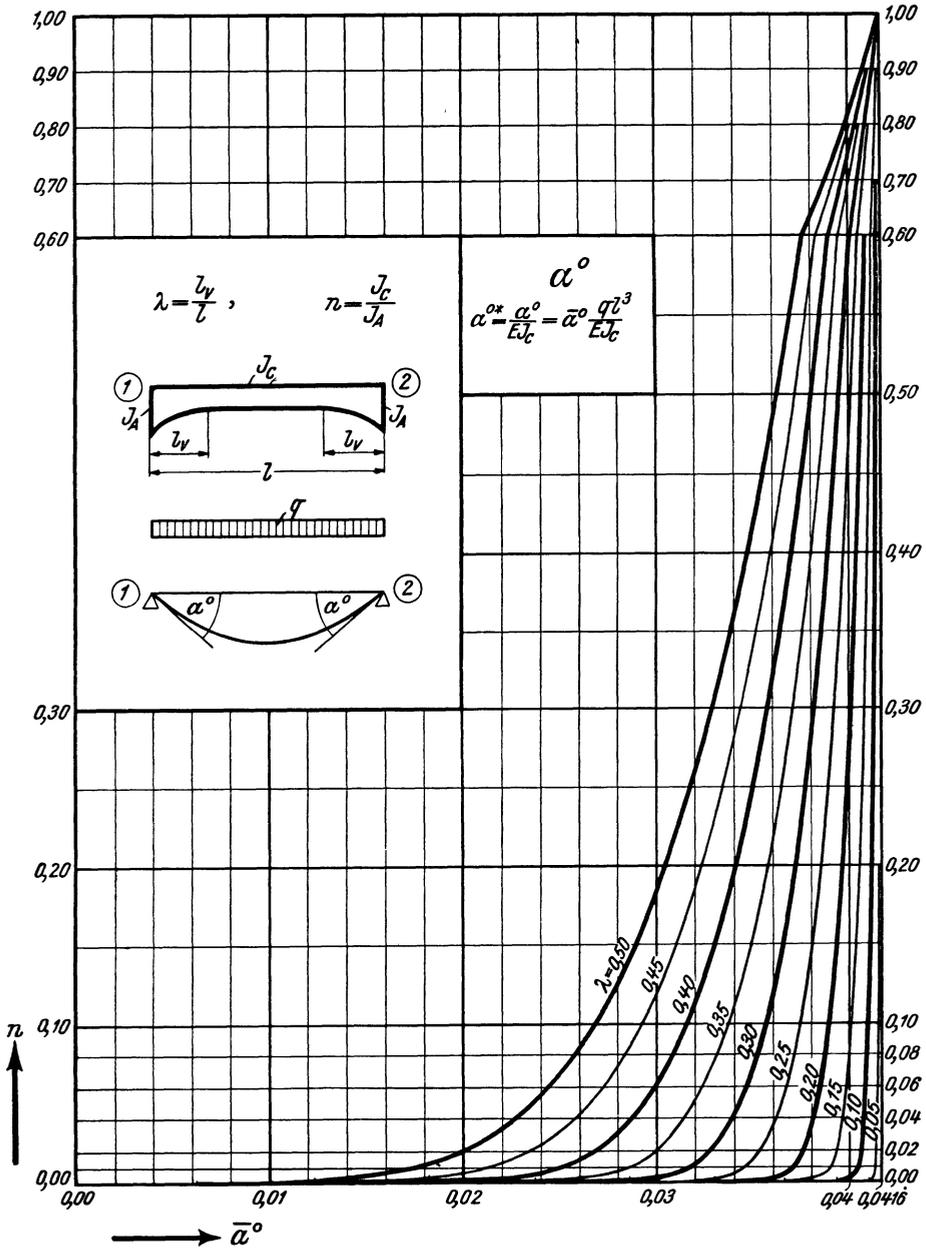
für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger) infolge gleichmäßiger Vollbelastung.



Beidseitig parabol.
Vouten.

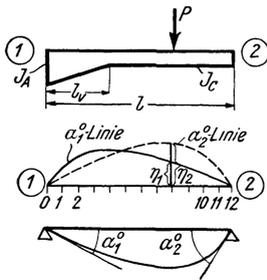
Belastungsglieder α^0

für den *Durchlaufträger* (= Endtangenten-
winkel der Biegelinie am freiaufliegenden
Träger) infolge gleichmäßiger Vollbelastung.



Tafel 25.

Einseitig gerade Vouten.



Einflußlinien der Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger).

$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

Obere Zahl η_1

$$\alpha_1^{0*} = \frac{1}{E J_c} \eta_1 P l^2$$

$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

Untere Zahl η_2

$$\alpha_2^{0*} = \frac{1}{E J_c} \eta_2 P l^2$$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,00	0,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,03	0,0018 0023	0,0033 0044	0,0045 0065	0,0055 0084	0,0062 0104	0,0066 0119	0,0065 0132	0,0061 0138	0,0052 0136	0,0039 0119	0,0021 0079
	0,05	0026 0029	0048 0058	0067 0085	0080 0111	0089 0135	0093 0156	0092 0170	0085 0177	0072 0171	0053 0147	0028 0095
	0,10	0044 0044	0081 0083	0111 0123	0132 0160	0144 0193	0149 0220	0144 0237	0131 0242	0109 0230	0078 0192	0041 0121
	0,20	0075 0060	0135 0121	0182 0177	0213 0229	0231 0272	0234 0306	0223 0326	0199 0327	0163 0304	0115 0248	0060 0151
	0,50	0152 0097	0266 0190	0348 0277	0400 0355	0423 0418	0420 0462	0391 0482	0342 0472	0275 0427	0192 0338	0098 0199
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,50	0,00	0,0035 0069	0,0070 0139	0,0104 0208	0,0139 0277	0,0174 0347	0,0209 0417	0,0227 0469	0,0216 0478	0,0183 0445	0,0131 0355	0,0068 0209
	0,03	0067 0088	0131 0176	0192 0264	0247 0349	0293 0429	0322 0497	0321 0535	0292 0532	0240 0482	0169 0382	0087 0223
	0,05	0076 0092	0150 0184	0216 0275	0273 0362	0319 0444	0345 0510	0341 0546	0308 0541	0251 0489	0177 0386	0091 0225
	0,10	0095 0099	0182 0197	0258 0293	0319 0383	0364 0467	0385 0531	0374 0563	0334 0554	0271 0500	0190 0393	0099 0228
	0,20	0121 0107	0227 0213	0315 0315	0382 0410	0424 0493	0437 0553	0417 0582	0369 0570	0297 0511	0208 0401	0107 0232
	0,50	0180 0124	0321 0244	0428 0357	0498 0459	0532 0542	0530 0591	0495 0613	0430 0595	0343 0528	0238 0413	0123 0238
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Anm.: Die Kreuzlinienabschnitte sind allgemein $K_1^0 = \frac{\alpha_2^0}{\beta}$; $K_2^0 = \frac{\alpha_1^0}{\beta}$; (β siehe Tafel 17 bis 20).

Obere Zahl η_1 Einseitig gerade Vouten. Tafel 25 (Fortsetzung).
 Untere Zahl η_2 Einflußlinien für $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,40	0,00	0,0060 0090	0,0120 0180	0,0180 0270	0,0240 0360	0,0299 0450	0,0332 0519	0,0328 0550	0,0299 0547	0,0244 0494	0,0173 0399	0,0089 0227
	0,03	0092 0104	0182 0207	0266 0311	0340 0409	0397 0498	0415 0560	0399 0587	0354 0574	0286 0515	0201 0403	0104 0233
	0,05	0101 0106	0197 0212	0285 0289	0362 0417	0415 0505	0431 0566	0413 0592	0364 0578	0294 0516	0206 0404	0106 0233
	0,10	0118 0111	0226 0222	0320 0328	0399 0430	0449 0518	0459 0577	0435 0601	0383 0585	0308 0522	0215 0409	0111 0236
	0,20	0141 0117	0265 0232	0367 0343	0446 0446	0490 0532	0495 0588	0466 0611	0408 0592	0326 0529	0227 0412	0117 0238
	0,50	0191 0130	0340 0253	0455 0369	0530 0472	0565 0554	0560 0608	0520 0627	0450 0606	0358 0536	0248 0419	0127 0241
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,35	0,00	0,0076 0099	0,0153 0200	0,0229 0299	0,0302 0399	0,0368 0491	0,0391 0557	0,0378 0583	0,0337 0571	0,0277 0511	0,0192 0400	0,0098 0231
	0,03	0108 0111	0212 0221	0309 0330	0394 0436	0446 0524	0458 0581	0434 0605	0382 0589	0308 0525	0215 0410	0111 0237
	0,05	0115 0113	0225 0225	0327 0337	0412 0441	0462 0528	0471 0585	0445 0608	0391 0591	0314 0527	0219 0412	0113 0238
	0,10	0131 0117	0251 0233	0358 0345	0442 0450	0488 0536	0494 0592	0464 0615	0406 0596	0326 0530	0226 0414	0117 0239
	0,20	0152 0121	0287 0241	0399 0357	0480 0462	0522 0545	0522 0601	0488 0621	0425 0601	0339 0535	0235 0417	0121 0240
	0,50	0197 0132	0352 0258	0472 0376	0547 0479	0581 0560	0573 0614	0531 0632	0459 0610	0365 0539	0253 0421	0129 0242
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,30	0,00	0,0095 0109	0,0191 0218	0,0286 0327	0,0376 0434	0,0430 0520	0,0446 0578	0,0422 0601	0,0373 0583	0,0302 0525	0,0209 0407	0,0106 0232
	0,03	0124 0117	0246 0234	0359 0350	0448 0458	0493 0542	0497 0597	0467 0619	0410 0600	0328 0534	0227 0415	0117 0239
	0,05	0132 0119	0258 0238	0372 0354	0461 0461	0504 0546	0508 0600	0477 0620	0415 0601	0332 0534	0231 0417	0119 0240
	0,10	0145 0122	0280 0244	0399 0361	0484 0467	0525 0550	0526 0604	0492 0625	0427 0604	0340 0537	0238 0418	0122 0241
	0,20	0165 0125	0310 0249	0430 0368	0513 0474	0550 0556	0547 0610	0509 0628	0440 0607	0352 0539	0245 0420	0125 0242
	0,50	0201 0133	0367 0263	0489 0382	0565 0484	0596 0565	0586 0618	0541 0635	0468 0612	0371 0541	0257 0422	0131 0243
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

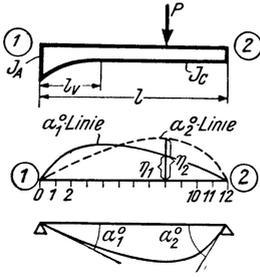
Tafel 25 (Fortsetzung).

Einseitig gerade Vouten.
Einflußlinien für $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

Obere Zahl η_1
Untere Zahl η_2

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,25	0,00	0,0117 0117	0,0235 0235	0,0352 0352	0,0444 0461	0,0492 0546	0,0492 0595	0,0464 0618	0,0405 0596	0,0325 0533	0,0224 0411	0,0117 0239
	0,03	0144 0123	0287 0246	0409 0366	0495 0473	0534 0556	0534 0610	0498 0629	0433 0607	0346 0538	0240 0419	0123 0242
	0,05	0150 0124	0294 0249	0421 0369	0503 0475	0542 0557	0541 0611	0503 0629	0437 0608	0349 0539	0243 0420	0124 0242
	0,10	0163 0126	0312 0253	0439 0373	0522 0478	0557 0561	0553 0614	0515 0632	0446 0609	0355 0541	0247 0420	0126 0242
	0,20	0179 0129	0336 0257	0464 0378	0543 0482	0577 0565	0570 0616	0528 0635	0458 0612	0363 0542	0252 0422	0129 0243
	0,50	0210 0136	0382 0268	0505 0384	0580 0488	0609 0569	0597 0621	0551 0638	0475 0615	0376 0543	0261 0423	0133 0243
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,20	0,00	0,0142 0124	0,0285 0249	0,0416 0370	0,0505 0479	0,0542 0560	0,0540 0612	0,0502 0631	0,0435 0607	0,0347 0540	0,0240 0420	0,0124 0243
	0,03	0168 0132	0325 0257	0456 0378	0536 0483	0571 0565	0564 0616	0523 0635	0453 0612	0360 0541	0250 0422	0128 0243
	0,05	0172 0133	0334 0261	0463 0380	0543 0484	0576 0565	0569 0618	0527 0635	0457 0612	0363 0541	0251 0422	0129 0243
	0,10	0181 0134	0347 0264	0476 0382	0554 0486	0586 0567	0578 0619	0534 0636	0462 0613	0367 0542	0254 0422	0130 0243
	0,20	0194 0136	0363 0265	0491 0384	0568 0488	0598 0569	0588 0621	0543 0638	0469 0614	0372 0542	0258 0423	0132 0243
	0,50	0218 0137	0395 0268	0519 0387	0593 0491	0620 0571	0607 0623	0559 0640	0482 0616	0381 0544	0264 0424	0135 0244
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,10	0,00	0,0202 0135	0,0385 0268	0,0513 0389	0,0586 0492	0,0615 0572	0,0603 0625	0,0557 0641	0,0478 0618	0,0378 0545	0,0263 0423	0,0137 0244
	0,03	0219 0135	0397 0268	0523 0389	0596 0493	0623 0573	0609 0624	0560 0641	0483 0617	0382 0544	0265 0424	0137 0244
	0,05	0220 0136	0400 0269	0525 0389	0598 0493	0624 0573	0610 0624	0562 0641	0484 0617	0383 0544	0265 0424	0137 0244
	0,10	0223 0136	0403 0269	0528 0390	0600 0493	0627 0573	0612 0624	0563 0641	0485 0617	0384 0544	0266 0424	0137 0244
	0,20	0228 0137	0408 0269	0532 0390	0604 0493	0630 0573	0615 0624	0566 0641	0487 0617	0386 0544	0267 0424	0137 0244
	0,50	0240 0137	0416 0270	0540 0390	0611 0494	0636 0574	0620 0625	0570 0641	0491 0617	0388 0544	0268 0424	0138 0244
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Einseitig parabol. Vouten.



Einflußlinien der Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger).

$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

Obere Zahl η_1

$$\alpha_1^{0*} = \frac{1}{E J_c} \eta_1 P l^2$$

$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

Untere Zahl η_2

$$\alpha_2^{0*} = \frac{1}{E J_c} \eta_2 P l^2$$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,00	0,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,03	0,0036 0048	0,0068 0097	0,0097 0144	0,0122 0190	0,0140 0233	0,0151 0270	0,0153 0298	0,0143 0311	0,0122 0299	0,0090 0251	0,0048 0156
	0,05	0047 0056	0089 0113	0125 0168	0156 0220	0177 0269	0189 0309	0187 0338	0174 0347	0146 0330	0106 0274	0056 0168
	0,10	0069 0069	0129 0139	0178 0205	0216 0268	0241 0323	0251 0369	0246 0398	0223 0403	0185 0375	0132 0306	0069 0184
	0,20	0101 0085	0185 0170	0252 0250	0300 0324	0328 0388	0334 0436	0321 0463	0286 0462	0232 0424	0164 0339	0084 0202
	0,50	0162 0113	0293 0222	0389 0324	0452 0414	0480 0487	0478 0539	0447 0561	0390 0548	0311 0492	0218 0386	0111 0225
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,50	0,00	0,0035 0069	0,0070 0139	0,0104 0208	0,0139 0277	0,0174 0347	0,0209 0417	0,0227 0469	0,0216 0478	0,0183 0445	0,0131 0355	0,0068 0209
	0,03	0099 0104	0194 0208	0280 0310	0353 0408	0403 0493	0419 0554	0401 0580	0355 0568	0287 0509	0201 0399	0104 0231
	0,05	0111 0108	0214 0217	0308 0322	0384 0422	0431 0508	0444 0568	0423 0594	0373 0579	0300 0518	0210 0406	0108 0235
	0,10	0129 0114	0246 0227	0348 0337	0423 0436	0468 0521	0476 0580	0450 0603	0394 0587	0316 0524	0220 0409	0114 0237
	0,20	0153 0120	0287 0237	0395 0351	0472 0453	0511 0537	0514 0593	0481 0615	0420 0596	0335 0531	0232 0414	0120 0237
	0,50	0198 0130	0355 0255	0474 0372	0548 0476	0579 0557	0572 0611	0530 0630	0458 0608	0364 0538	0252 0420	0129 0242
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Tafel 26 (Fortsetzung).

Einseitig parabol. Vouten.
Einflußlinien für $\alpha_1^0 \alpha_2^0$ Obere Zahl η_1
Untere Zahl η_2

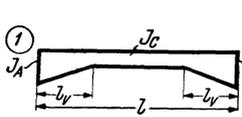
λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,40	0,00	0,0060 0090	0,0120 0180	0,0180 0270	0,0240 0360	0,0299 0450	0,0332 0519	0,0328 0550	0,0299 0547	0,0244 0494	0,0173 0399	0,0089 0227
	0,03	0124 0116	0244 0231	0349 0344	0434 0450	0482 0535	0487 0592	0459 0614	0402 0596	0322 0530	0224 0413	0116 0238
	0,05	0134 0118	0260 0236	0369 0349	0453 0454	0497 0540	0501 0595	0471 0616	0412 0598	0329 0533	0229 0415	0118 0239
	0,10	0149 0122	0286 0243	0401 0358	0484 0463	0523 0548	0525 0602	0489 0623	0426 0602	0340 0536	0237 0418	0122 0240
	0,20	0170 0126	0318 0250	0436 0367	0517 0471	0553 0555	0550 0609	0511 0627	0444 0606	0353 0538	0245 0420	0126 0241
	0,50	0206 0131	0369 0261	0491 0378	0566 0494	0600 0565	0589 0618	0544 0635	0470 0612	0373 0541	0258 0422	0132 0243
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,35	0,00	0,0076 0099	0,0153 0200	0,0229 0299	0,0302 0399	0,0368 0491	0,0391 0557	0,0378 0583	0,0337 0571	0,0277 0511	0,0192 0400	0,0098 0231
	0,03	0138 0120	0270 0241	0387 0358	0473 0464	0515 0548	0516 0602	0484 0622	0422 0602	0336 0537	0234 0418	0120 0241
	0,05	0146 0122	0284 0244	0403 0362	0487 0467	0529 0551	0529 0605	0493 0624	0428 0604	0342 0537	0239 0418	0122 0241
	0,10	0161 0125	0307 0250	0428 0368	0511 0473	0549 0556	0546 0609	0508 0628	0440 0607	0351 0540	0244 0419	0125 0241
	0,20	0180 0129	0336 0255	0458 0375	0537 0478	0573 0562	0565 0615	0525 0633	0455 0610	0361 0542	0251 0421	0129 0242
	0,50	0213 0136	0377 0263	0503 0384	0579 0486	0609 0568	0597 0620	0550 0637	0475 0614	0376 0542	0261 0423	0133 0243
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,30	0,00	0,0095 0109	0,0191 0218	0,0286 0327	0,0376 0434	0,0430 0520	0,0446 0578	0,0422 0601	0,0373 0583	0,0302 0525	0,0209 0407	0,0106 0232
	0,03	0152 0125	0299 0249	0424 0370	0508 0475	0545 0557	0542 0611	0506 0629	0439 0608	0350 0539	0242 0419	0125 0242
	0,05	0161 0126	0312 0252	0436 0372	0520 0477	0556 0559	0552 0613	0512 0631	0445 0610	0355 0541	0246 0421	0126 0242
	0,10	0173 0128	0331 0255	0456 0376	0537 0481	0571 0563	0565 0616	0524 0634	0453 0611	0361 0543	0251 0421	0128 0243
	0,20	0189 0131	0353 0260	0479 0380	0558 0484	0590 0566	0580 0618	0536 0636	0464 0614	0369 0544	0256 0423	0131 0243
	0,50	0218 0137	0386 0265	0515 0386	0589 0490	0617 0570	0604 0622	0556 0639	0480 0615	0380 0543	0263 0423	0134 0244
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Obere Zahl η_1 Einseitig parabol. Vouten. Tafel 26 (Fortsetzung).
 Untere Zahl η_2 Einflußlinien für $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

λ	η	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,25	0,00	0,0117 0117	0,0235 0235	0,0352 0352	0,0444 0461	0,0492 0546	0,0492 0595	0,0464 0618	0,0405 0596	0,0325 0533	0,0224 0411	0,0117 0239
	0,03	0169 0129	0330 0257	0459 0378	0539 0484	0574 0564	0587 0616	0526 0636	0456 0612	0358 0543	0251 0422	0129 0243
	0,05	0177 0130	0339 0259	0469 0380	0548 0484	0581 0565	0573 0619	0531 0636	0459 0612	0364 0544	0253 0422	0130 0244
	0,10	0187 0131	0354 0261	0483 0383	0560 0487	0592 0568	0582 0620	0540 0638	0465 0614	0370 0544	0263 0422	0131 0244
	0,20	0200 0133	0372 0265	0499 0385	0576 0489	0604 0569	0593 0622	0548 0638	0473 0616	0375 0545	0260 0423	0133 0244
	0,50	0223 0138	0400 0265	0524 0388	0597 0492	0624 0572	0610 0623	0561 0640	0484 0616	0383 0544	0265 0424	0135 0244
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,20	0,00	0,0142 0124	0,0285 0249	0,0416 0370	0,0505 0479	0,0542 0560	0,0540 0612	0,0502 0631	0,0435 0607	0,0347 0540	0,0240 0420	0,0124 0243
	0,03	0184 0132	0362 0265	0489 0384	0566 0488	0596 0569	0586 0621	0542 0638	0468 0615	0371 0543	0257 0423	0132 0243
	0,05	0192 0134	0366 0265	0495 0385	0571 0489	0601 0570	0591 0621	0545 0638	0471 0615	0373 0543	0259 0423	0132 0243
	0,10	0198 0135	0377 0266	0505 0386	0580 0490	0609 0571	0597 0622	0550 0639	0475 0615	0376 0543	0261 0423	0133 0244
	0,20	0209 0135	0393 0269	0515 0388	0589 0491	0617 0572	0604 0623	0556 0640	0480 0616	0380 0544	0263 0424	0134 0244
	0,50	0226 0137	0404 0269	0532 0389	0604 0493	0630 0573	0615 0624	0566 0641	0487 0617	0386 0544	0267 0424	0137 0244
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,10	0,00	0,0202 0135	0,0385 0268	0,0513 0389	0,0586 0492	0,0615 0572	0,0603 0625	0,0557 0641	0,0478 0618	0,0378 0545	0,0263 0423	0,0137 0244
	0,03	0225 0135	0407 0269	0532 0390	0604 0493	0630 0573	0615 0624	0565 0641	0487 0617	0385 0544	0267 0424	0136 0244
	0,05	0229 0135	0409 0269	0533 0390	0605 0493	0631 0573	0616 0625	0566 0641	0488 0617	0386 0544	0267 0424	0136 0244
	0,10	0233 0136	0412 0270	0536 0390	0607 0493	0633 0574	0618 0625	0568 0641	0489 0617	0387 0544	0268 0424	0137 0244
	0,20	0236 0136	0415 0270	0539 0390	0610 0494	0635 0574	0620 0625	0569 0641	0490 0617	0388 0545	0268 0424	0137 0244
	0,50	0240 0137	0420 0270	0543 0391	0614 0494	0638 0574	0622 0625	0572 0641	0492 0617	0389 0545	0269 0424	0138 0244
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Tafel 27.

Beidseitig gerade Vouten.



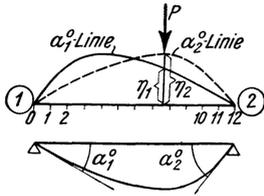
$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

Einflußlinien
der Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$
 für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger).

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,50	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,03	0,0046 0038	0,0089 0075	0,0128 0112	0,0162 0146	0,0186 0177	0,0194 0194	0,0177 0186	0,0146 0162	0,0112 0128	0,0075 0089	0,0038 0046
	0,05	0057 0045	0111 0091	0158 0135	0196 0176	0223 0210	0230 0230	0210 0223	0176 0196	0135 0158	0091 0111	0045 0057
	0,10	0079 0059	0150 0117	0210 0173	0257 0224	0286 0266	0291 0291	0266 0286	0224 0257	0173 0210	0117 0150	0059 0079
	0,20	0110 0076	0204 0151	0279 0221	0334 0284	0364 0335	0365 0365	0335 0364	0284 0334	0221 0279	0151 0204	0076 0110
	0,50	0167 0108	0311 0213	0409 0310	0477 0396	0504 0461	0495 0495	0461 0504	0396 0477	0310 0409	0213 0311	0108 0167
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,40	0	0,0042 0041	0,0085 0082	0,0127 0123	0,0169 0164	0,0210 0205	0,0225 0225	0,0205 0210	0,0164 0169	0,0123 0127	0,0082 0085	0,0041 0042
	0,03	0081 0069	0159 0137	0233 0205	0297 0269	0342 0323	0349 0349	0323 0342	0269 0297	0205 0233	0137 0159	0069 0081
	0,05	0091 0074	0178 0148	0256 0220	0323 0288	0367 0344	0373 0373	0344 0367	0288 0323	0220 0256	0148 0178	0074 0091
	0,10	0109 0083	0210 0167	0296 0246	0365 0320	0407 0379	0410 0410	0379 0407	0296 0365	0246 0296	0167 0210	0083 0109
	0,20	0134 0095	0253 0189	0350 0279	0421 0359	0460 0424	0459 0459	0424 0460	0359 0421	0279 0350	0189 0253	0095 0134
	0,50	0189 0119	0334 0233	0447 0338	0521 0429	0551 0500	0543 0543	0500 0551	0429 0447	0338 0447	0233 0334	0119 0189
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,35	0	0,0064 0060	0,0129 0122	0,0193 0182	0,0257 0242	0,0308 0295	0,0318 0318	0,0295 0308	0,0242 0257	0,0182 0193	0,0122 0129	0,0060 0064
	0,03	0100 0083	0196 0166	0287 0247	0364 0324	0410 0383	0414 0414	0383 0410	0324 0364	0247 0287	0166 0196	0083 0100
	0,05	0109 0087	0212 0174	0308 0259	0385 0338	0428 0399	0432 0432	0399 0428	0338 0385	0259 0308	0174 0212	0087 0109
	0,10	0125 0095	0241 0189	0342 0279	0420 0363	0461 0426	0461 0461	0426 0461	0363 0420	0279 0342	0189 0241	0095 0125
	0,20	0148 0104	0279 0207	0385 0305	0463 0393	0501 0459	0498 0498	0459 0501	0393 0463	0305 0385	0207 0279	0104 0148
	0,50	0196 0123	0351 0240	0468 0351	0542 0444	0572 0517	0563 0563	0517 0572	0444 0542	0351 0468	0240 0351	0123 0196
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Tafel 27 (Fortsetzung).



Obere Zahl η_1

$$\alpha_1^{0*} = \frac{1}{EJ_c} \eta_1 P l^2$$

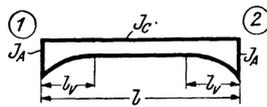
Untere Zahl η_2

$$\alpha_2^{0*} = \frac{1}{EJ_c} \eta_2 P l^2$$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,30	0	0,0087 0079	0,0176 0158	0,0263 0237	0,0348 0314	0,0396 0374	0,0400 0400	0,0374 0396	0,0314 0348	0,0237 0263	0,0158 0176	0,0079 0087
	0,03	0120 0096	0236 0192	0344 0287	0429 0373	0470 0436	0471 0471	0436 0470	0373 0429	0287 0344	0192 0236	0096 0120
	0,05	0128 0099	0250 0199	0361 0296	0445 0382	0484 0447	0483 0483	0447 0484	0382 0445	0296 0361	0199 0250	0099 0128
	0,10	0141 0105	0274 0210	0388 0310	0470 0400	0508 0468	0504 0504	0468 0508	0400 0470	0310 0388	0210 0274	0105 0141
	0,20	0161 0113	0305 0224	0423 0329	0503 0421	0538 0492	0533 0533	0492 0538	0421 0503	0329 0423	0224 0305	0113 0161
	0,50	0203 0127	0367 0250	0483 0361	0560 0457	0589 0532	0579 0579	0532 0589	0457 0560	0361 0483	0250 0367	0127 0203
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,25	0	0,0112 0095	0,0226 0191	0,0339 0287	0,0427 0373	0,0468 0435	0,0469 0469	0,0435 0468	0,0373 0427	0,0287 0339	0,0191 0226	0,0095 0112
	0,03	0142 0108	0278 0216	0402 0321	0485 0412	0521 0480	0517 0517	0480 0521	0412 0485	0321 0402	0216 0278	0108 0142
	0,05	0148 0110	0289 0221	0414 0327	0496 0419	0532 0487	0527 0527	0487 0532	0419 0496	0327 0414	0221 0289	0110 0148
	0,10	0160 0115	0309 0229	0433 0337	0513 0431	0548 0501	0542 0542	0501 0548	0431 0513	0337 0433	0229 0309	0115 0160
	0,20	0178 0120	0333 0238	0459 0349	0537 0444	0569 0517	0560 0560	0517 0569	0444 0537	0349 0459	0238 0333	0120 0178
	0,50	0211 0132	0380 0253	0499 0370	0575 0468	0606 0546	0595 0595	0546 0606	0468 0575	0370 0499	0253 0380	0132 0211
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,20	0	0,0139 0110	0,0281 0220	0,0410 0328	0,0494 0418	0,0530 0487	0,0525 0525	0,0487 0530	0,0418 0494	0,0328 0410	0,0220 0281	0,0110 0139
	0,03	0162 0117	0314 0231	0449 0348	0531 0443	0564 0514	0556 0556	0514 0564	0443 0531	0348 0449	0231 0314	0117 0162
	0,05	0166 0118	0323 0234	0457 0352	0538 0447	0570 0519	0562 0562	0519 0570	0447 0538	0352 0457	0234 0323	0118 0166
	0,10	0175 0120	0338 0241	0473 0358	0550 0454	0581 0527	0572 0572	0527 0581	0454 0550	0358 0473	0241 0338	0120 0175
	0,20	0188 0123	0353 0248	0487 0365	0565 0463	0599 0538	0584 0584	0538 0599	0463 0565	0365 0487	0248 0353	0123 0188
	0,50	0216 0133	0387 0259	0516 0378	0589 0477	0619 0557	0606 0606	0557 0619	0477 0589	0378 0516	0259 0387	0133 0216
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Tafel 28.

Beidseitig parab. Vouten.



$$\lambda = \frac{l_v}{l}$$

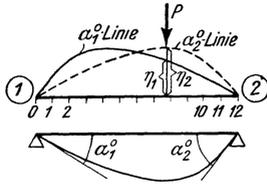
$$n = \frac{J_c}{J_A}$$

Einflußlinien der Belastungsglieder $\alpha_1^0 \alpha_2^0$

für den *Durchlaufträger* (= Endtangentialwinkel der Biegelinie am freiaufliegenden Träger).

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,50	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,03	0,0088 0071	0,0173 0143	0,0250 0212	0,0313 0277	0,0351 0328	0,0356 0356	0,0328 0351	0,0277 0313	0,0212 0250	0,0143 0173	0,0071 0088
	0,05	0101 0078	0195 0156	0279 0232	0345 0301	0383 0356	0386 0386	0356 0383	0301 0345	0232 0279	0156 0195	0078 0101
	0,10	0122 0089	0231 0178	0324 0261	0393 0337	0430 0397	0431 0431	0397 0430	0337 0393	0261 0324	0178 0231	0089 0122
	0,20	0147 0101	0275 0201	0379 0295	0449 0378	0484 0443	0481 0481	0443 0484	0378 0449	0295 0379	0201 0275	0101 0147
	0,50	0196 0120	0349 0236	0465 0345	0539 0440	0566 0512	0557 0557	0512 0566	0440 0539	0345 0465	0236 0349	0120 0196
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,40	0	0,0042 0041	0,0085 0082	0,0127 0123	0,0169 0164	0,0210 0205	0,0225 0225	0,0205 0210	0,0164 0169	0,0123 0127	0,0082 0085	0,0041 0042
	0,03	0118 0093	0231 0185	0333 0276	0412 0357	0452 0420	0454 0454	0420 0452	0357 0412	0276 0333	0185 0231	0093 0118
	0,05	0128 0097	0249 0195	0355 0289	0433 0372	0473 0437	0472 0472	0437 0473	0372 0433	0289 0355	0195 0249	0097 0128
	0,10	0145 0105	0278 0210	0390 0307	0467 0396	0505 0463	0500 0500	0463 0500	0396 0467	0307 0390	0210 0278	0105 0145
	0,20	0166 0113	0314 0225	0423 0330	0506 0421	0538 0492	0533 0533	0492 0538	0330 0506	0225 0423	0113 0314	0166 0113
	0,50	0204 0125	0366 0248	0486 0360	0564 0458	0593 0535	0581 0581	0535 0593	0458 0564	0360 0486	0248 0366	0125 0204
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,35	0	0,0064 0060	0,0129 0122	0,0193 0182	0,0257 0242	0,0308 0295	0,0318 0318	0,0295 0308	0,0242 0257	0,0182 0193	0,0122 0129	0,0060 0064
	0,03	0134 0102	0262 0205	0375 0303	0457 0391	0495 0457	0494 0494	0457 0495	0391 0457	0303 0375	0205 0262	0102 0134
	0,05	0143 0106	0277 0212	0394 0313	0474 0403	0511 0470	0509 0509	0470 0511	0403 0474	0313 0394	0212 0277	0106 0143
	0,10	0159 0112	0302 0222	0421 0328	0500 0419	0535 0489	0530 0530	0489 0535	0419 0500	0328 0421	0222 0302	0112 0159
	0,20	0177 0119	0331 0236	0453 0344	0530 0438	0563 0511	0554 0554	0511 0563	0438 0530	0344 0453	0236 0331	0119 0177
	0,50	0209 0127	0374 0251	0501 0369	0575 0467	0604 0546	0590 0590	0546 0604	0467 0575	0369 0501	0251 0374	0127 0209
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Tafel 28 (Fortsetzung).



Obere Zahl η_1

$$\alpha_1^{0*} = \frac{1}{EJ_c} \eta_1 P l^2$$

Untere Zahl η_2

$$\alpha_2^{0*} = \frac{1}{EJ_c} \eta_2 P l^2$$

λ	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,30	0	0,0087 0079	0,0176 0158	0,0263 0237	0,0348 0314	0,0396 0374	0,0400 0400	0,0374 0396	0,0314 0348	0,0237 0263	0,0158 0176	0,0079 0087
	0,03	0154 0111	0294 0222	0418 0328	0498 0420	0534 0488	0529 0529	0488 0534	0420 0498	0328 0418	0222 0294	0111 0154
	0,05	0159 0114	0306 0228	0431 0335	0511 0428	0545 0498	0540 0540	0498 0545	0428 0511	0335 0431	0228 0306	0114 0159
	0,10	0171 0118	0327 0236	0452 0347	0531 0441	0564 0512	0555 0555	0512 0564	0441 0531	0347 0452	0236 0327	0118 0171
	0,20	0187 0123	0351 0245	0476 0358	0553 0455	0583 0528	0574 0574	0528 0583	0455 0553	0358 0476	0245 0351	0123 0187
	0,50	0214 0130	0383 0256	0513 0377	0586 0476	0614 0553	0599 0599	0553 0614	0476 0586	0377 0513	0256 0383	0130 0214
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,25	0	0,0112 0095	0,0226 0191	0,0339 0287	0,0427 0373	0,0468 0435	0,0469 0469	0,0435 0468	0,0373 0427	0,0287 0339	0,0191 0226	0,0095 0112
	0,03	0168 0119	0327 0238	0455 0349	0534 0444	0566 0515	0559 0559	0515 0566	0444 0534	0349 0455	0238 0327	0119 0168
	0,05	0175 0121	0337 0242	0465 0354	0544 0450	0574 0522	0565 0565	0522 0574	0450 0544	0354 0465	0242 0337	0121 0175
	0,10	0185 0124	0353 0247	0480 0360	0556 0458	0586 0532	0577 0577	0532 0586	0458 0556	0360 0480	0247 0353	0124 0185
	0,20	0200 0128	0371 0252	0497 0369	0572 0468	0600 0543	0589 0589	0543 0600	0468 0572	0369 0497	0252 0371	0128 0200
	0,50	0220 0132	0389 0256	0520 0379	0596 0481	0624 0561	0608 0608	0561 0624	0481 0596	0379 0520	0256 0389	0132 0220
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244
0,20	0	0,0139 0110	0,0281 0220	0,0410 0328	0,0494 0418	0,0530 0487	0,0525 0525	0,0487 0530	0,0418 0494	0,0328 0410	0,0220 0281	0,0110 0139
	0,03	0187 0125	0356 0248	0485 0365	0563 0462	0593 0537	0582 0582	0537 0593	0462 0563	0365 0485	0248 0356	0125 0187
	0,05	0191 0126	0364 0251	0491 0368	0569 0466	0598 0541	0587 0587	0541 0598	0466 0569	0368 0491	0251 0364	0126 0191
	0,10	0201 0128	0374 0255	0501 0372	0578 0471	0606 0547	0594 0594	0547 0606	0471 0578	0372 0501	0255 0374	0128 0201
	0,20	0209 0130	0385 0260	0512 0377	0588 0477	0615 0554	0602 0602	0554 0615	0477 0588	0377 0512	0260 0385	0130 0209
	0,50	0225 0134	0399 0264	0528 0383	0604 0487	0631 0566	0612 0612	0566 0631	0487 0604	0383 0528	0264 0399	0134 0225
	1,00	0244 0138	0424 0270	0547 0390	0617 0494	0641 0574	0625 0625	0574 0641	0494 0617	0390 0547	0270 0424	0138 0244

Tafel 29.

Symmetrisches Gleichungssystem.

Gekürztes Auflösungsverfahren Muster I.

(Bildmäßige Darstellung.)

Gleich.	Rechnungsgang	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Zeile Nr.
(x_1)	$(I) = (1)$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	B_1	(1)
(x_2)			$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	B_2	(2)
(x_3)				$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	B_3	(3)
(x_4)					$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	B_4	(4)
(x_5)						$\boxed{5}$	B_5	(5)
(x_2)	$-\frac{\boxed{2}}{d_1} \cdot x(I)$		$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	\dot{B}_1	(6)
(x_3)	$-\frac{\boxed{3}}{d_1} \cdot x(I)$			$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	\ddot{B}_1	(7)
(x_4)	$-\frac{\boxed{4}}{d_1} \cdot x(I)$				$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\ddot{\ddot{B}}_1$	(8)
(x_5)	$-\frac{\boxed{5}}{d_1} \cdot x(I)$					$\boxed{5}$	$\ddot{\ddot{\ddot{B}}}_1$	(9)
	$(II) = \sum(x_2)$		\dot{d}_2	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	\dot{b}_2	(10) = (2) + (6)
(x_3)	$-\frac{\boxed{3}}{d_2} \cdot x(II)$			$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	\dot{b}_2	(11)
(x_4)	$-\frac{\boxed{4}}{d_2} \cdot x(II)$				$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\dot{\dot{b}}_2$	(12)
(x_5)	$-\frac{\boxed{5}}{d_2} \cdot x(II)$					$\boxed{5}$	$\dot{\dot{\dot{b}}}_2$	(13)
	$(III) = \sum(x_3)$			\dot{d}_3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	\dot{b}_3	(14) = (3) + (7) + (11)
(x_4)	$-\frac{\boxed{4}}{d_3} \cdot x(III)$				$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	\dot{b}_3	(15)
(x_5)	$-\frac{\boxed{5}}{d_3} \cdot x(III)$					$\boxed{5}$	$\dot{\dot{b}}_3$	(16)
	$(IV) = \sum(x_4)$				\dot{d}_4	$\boxed{5}$	\dot{b}_4	(17) = (4) + (8) + (12) + (15)
(x_5)	$-\frac{\boxed{5}}{d_4} \cdot x(IV)$					$\boxed{5}$	\dot{b}_4	(18)
	$(V) = \sum(x_5)$					\dot{d}_5	\dot{b}_5	(19) = (5) + (9) + (13) + (16) + (18)

Ermittlung der Unbekannten: aus (V): $x_5 = \frac{-\dot{b}_5}{\dot{d}_5}$
 „ (IV): $x_4 = \frac{-\dot{b}_4 - x_5 \cdot \boxed{5}}{\dot{d}_4}$
 „ (III): $x_3 = \frac{-\dot{b}_3 - x_5 \cdot \boxed{5} - x_4 \cdot \boxed{4}}{\dot{d}_3}$
 „ (II): $x_2 = \frac{-\dot{b}_2 - x_5 \cdot \boxed{5} - x_4 \cdot \boxed{4} - x_3 \cdot \boxed{3}}{\dot{d}_2}$
 „ (I): $x_1 = \frac{-B_1 - x_5 \cdot \boxed{5} - x_4 \cdot \boxed{4} - x_3 \cdot \boxed{3} - x_2 \cdot \boxed{2}}{d_1}$

(Beschreibung siehe S. 133.)

Zahlenbeispiel.

Gekürzte Auflösung nach Muster I (siehe Tafel 29).

Gleich.	Rechnungsgang	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Zeile Nr.
(x_1)	(I) = (1)	+ 26,50	+ 2,15	+ 3,40	+ 1,92	- 6,84	+ 42,3	(1)
(x_2)			+ 32,40	+ 2,88	+ 3,05	- 5,75	+ 26,5	(2)
(x_3)				+ 38,80	+ 2,85	- 7,05	- 5,4	(3)
(x_4)					+ 29,10	- 4,90	- 52,6	(4)
(x_5)						+ 54,00	+ 15,7	(5)
(x_2)	$-\frac{2,15}{26,50} \cdot (I)$		- 0,175	- 0,276	- 0,156	+ 0,555	- 3,43	(6)
(x_3)	$-\frac{3,40}{26,50} \cdot (I)$			- 0,436	- 0,246	+ 0,878	- 5,43	(7)
(x_4)	$-\frac{1,92}{26,50} \cdot (I)$				- 0,139	+ 0,495	- 3,07	(8)
(x_5)	$+\frac{6,84}{26,50} \cdot (I)$					- 1,765	+ 10,91	(9)
	(II) = $\sum (x_2)$		+ 32,22	+ 2,60	+ 2,89	- 5,19	+ 23,07	(10) = (2) + (6)
(x_3)	$-\frac{2,60}{32,22} \cdot (II)$			- 0,210	- 0,233	+ 0,419	- 1,86	(11)
(x_4)	$-\frac{2,89}{32,22} \cdot (II)$				- 0,259	+ 0,466	- 2,07	(12)
(x_5)	$+\frac{5,19}{32,22} \cdot (II)$					- 0,836	+ 3,72	(13)
	(III) = $\sum (x_3)$			+ 38,15	+ 2,37	- 5,75	- 12,69	(14) = (3) + (7) + (11)
(x_4)	$-\frac{2,37}{38,15} \cdot (III)$				- 0,147	+ 0,357	+ 0,79	(15)
(x_5)	$+\frac{5,75}{38,15} \cdot (III)$					- 0,867	- 1,91	(16)
	(IV) = $\sum (x_4)$				+ 28,55	- 3,58	- 56,95	(17) = (4) + (8) + (12) + (15)
(x_5)	$+\frac{3,58}{28,55} \cdot (IV)$					- 0,449	- 7,14	(18)
	(V) = $\sum (x_5)$					+ 50,08	+ 21,28	(19) = (5) + (9) + (13) + (16) + (18)

Aus Gl. (V): $x_5 = \frac{-21,28}{50,08} = -0,425$

„ „ (IV): $x_4 = \frac{+56,95 - 3,58 \cdot 0,425}{28,55} = + \frac{55,43}{28,55} = +1,942$

„ „ (III): $x_3 = \frac{+12,69 - 5,75 \cdot 0,425 - 2,37 \cdot 1,942}{38,15} = + \frac{5,65}{38,15} = +0,148$

„ „ (II): $x_2 = \frac{-23,07 - 5,20 \cdot 0,425 - 2,89 \cdot 1,942 - 2,60 \cdot 0,148}{32,22} = - \frac{31,27}{32,22} = -0,971$

„ „ (I): $x_1 = \frac{-42,30 - 6,84 \cdot 0,425 - 1,92 \cdot 1,942 - 3,40 \cdot 0,148 + 2,15 \cdot 0,971}{26,50} = - \frac{47,3}{26,5} = -1,787$

Tafel 30.

Symmetrisches Gleichungssystem.

Gekürztes Lösungsverfahren Muster II.

(Bildmäßige Darstellung.)

Rechnungsgang	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Zeile Nr.
(1*)	$\overline{d_1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	B_1	
(2*)		$\overline{d_2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	B_2	
(3*)			$\overline{d_3}$	$\overline{\Delta}$	$\overline{\Delta}$	B_3	
(4*)				$\overline{d_4}$	$\overline{\Delta}$	B_4	
(5*)					$\overline{d_5}$	B_5	
(I) = (1*)	$\overline{d_1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	B_1	(1)
(2*)		$\overline{d_2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	B_2	(2)
$-\frac{\overline{2}}{d_1} \times (I)$		$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	B_1	(3)
(II) = $\Sigma_{(2)}^{(3)}$		$\overline{d_2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{b_2}$	(4) = (2) + (3)
(3*)			$\overline{d_3}$	$\overline{\Delta}$	$\overline{\Delta}$	B_3	(5)
$-\frac{\overline{3}}{d_1} \times (I)$			$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{B_1}$	(6)
$-\frac{\overline{3}}{d_2} \times (II)$			$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{b_2}$	(7)
(III) = $\Sigma_{(5)}^{(7)}$			$\overline{d_3}$	$\overline{\Delta}$	$\overline{\Delta}$	$\overline{b_3}$	(8) = $\Sigma(5)$ bis (7)
(4*)				$\overline{d_4}$	$\overline{\Delta}$	B_4	(9)
$-\frac{\overline{4}}{d_1} \times (I)$				$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{\overline{B_1}}$	(10)
$-\frac{\overline{4}}{d_2} \times (II)$				$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{\overline{b_2}}$	(11)
$-\frac{\overline{\Delta}}{d_3} \times (III)$				$\overline{\Delta}$	$\overline{\Delta}$	$\overline{\overline{b_3}}$	(12)
(IV) = $\Sigma_{(9)}^{(12)}$				$\overline{d_4}$	$\overline{\Delta}$	$\overline{\overline{b_4}}$	(13) = $\Sigma(9)$ bis (12)
(5*)					$\overline{d_5}$	B_5	(14)
$-\frac{\overline{5}}{d_1} \times (I)$					$\overline{5}$	$\overline{\overline{\overline{B_1}}}$	(15)
$-\frac{\overline{5}}{d_2} \times (II)$					$\overline{5}$	$\overline{\overline{\overline{b_2}}}$	(16)
$-\frac{\overline{\Delta}}{d_3} \times (III)$					$\overline{\Delta}$	$\overline{\overline{\overline{b_3}}}$	(17)
$-\frac{\overline{\Delta}}{d_4} \times (IV)$					$\overline{\Delta}$	$\overline{\overline{\overline{b_4}}}$	(18)
(V) = $\Sigma_{(14)}^{(18)}$					$\overline{d_5}$	$\overline{\overline{\overline{b_5}}}$	(19) = $\Sigma(14)$ bis (18)

Ermittlung der Unbekannten x_5 bis x_1 rückläufig aus (V) bis (I) (vgl. auch Tafel 29)

(Beschreibung siehe Seite 134.)

Zahlenbeispiel.

Gekürzte Auflösung nach Muster II (siehe Tafel 30).

Rechnungsgang	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Zeile Nr.
(1*)	+ 26,50	+ 2,15	+ 3,40	+ 1,92	- 6,84	+ 42,3	
(2*)		+ 32,40	+ 2,88	+ 3,05	- 5,75	+ 26,5	
(3*)			+ 38,80	+ 2,85	- 7,05	- 5,4	
(4*)				+ 29,10	- 4,90	- 52,6	
(5*)					+ 54,00	+ 15,7	
(I) = (1*)	+ 26,50	+ 2,15	+ 3,40	+ 1,92	- 6,84	+ 42,3	(1)
(2*)		+ 32,40	+ 2,88	+ 3,05	- 5,75	+ 26,5	(2)
$-\frac{2,15}{26,50} \cdot (I)$		- 0,175	- 0,276	- 0,156	+ 0,555	- 3,43	(3)
(II) = $\sum_{(2)}^{(3)}$		+ 32,22	+ 2,60	+ 2,89	- 5,19	+ 23,07	(4) = (2) + (3)
(3*)			+ 38,80	+ 2,85	- 7,05	- 5,4	(5)
$-\frac{3,40}{26,50} \cdot (I)$			- 0,436	- 0,246	+ 0,878	- 5,43	(6)
$-\frac{2,60}{32,22} \cdot (II)$			- 0,210	- 0,233	+ 0,419	- 1,86	(7)
(III) = $\sum_{(5)}^{(7)}$			+ 38,15	+ 2,37	- 5,75	- 12,69	(8) = (5) bis (7)
(4*)				+ 29,10	- 4,90	- 52,60	(9)
$-\frac{1,92}{26,50} \cdot (I)$				- 0,139	+ 0,495	- 3,07	(10)
$-\frac{2,89}{32,22} \cdot (II)$				- 0,259	+ 0,466	- 2,07	(11)
$-\frac{2,37}{38,15} \cdot (III)$				- 0,147	+ 0,357	+ 0,79	(12)
(IV) = $\sum_{(9)}^{(12)}$				+ 28,55	- 3,58	- 56,95	(13) = (9) bis (12)
(5*)					+ 54,00	+ 15,70	(14)
$+\frac{6,84}{26,50} \cdot (I)$					- 1,765	+ 10,91	(15)
$+\frac{5,19}{32,22} \cdot (II)$					- 0,836	+ 3,72	(16)
$+\frac{5,75}{38,15} \cdot (III)$					- 0,867	- 1,91	(17)
$+\frac{3,58}{28,55} \cdot (IV)$					- 0,449	- 7,14	(18)
(V) = $\sum_{(14)}^{(18)}$					+ 50,08	+ 21,28	(19) = (14) bis (18)

Ermittlung der Unbekannten (vgl. auch Tafel 29a):

aus (V): $x_5 = -0,425$ aus (III): $x_3 = +0,148$ aus (I): $x_1 = -1,787$.
 „ (IV): $x_4 = +1,942$ „ (II): $x_2 = -0,971$

Tafel 31.

Unsymmetrisches Gleichungssystem.
Gekürztes Auflösungsverfahren
Muster III.

(Bildmäßige Darstellung.)

Gleich.	Rechnungsgang	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Zeile Nr.
(x_1)	(I) = (1)	d_1	$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	b_1	(1)
(x_2)		$\textcircled{1}$	d_2	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	b_2	(2)
(x_3)		$\textcircled{1}$	$\textcircled{2}$	d_3	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	b_3	(3)
(x_4)		$\textcircled{1}$	$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	d_4	$\textcircled{5}$	b_4	(4)
(x_5)		$\textcircled{1}$	$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	d_5	b_5	(5)
(x_2)	$-\frac{\textcircled{1}}{d_1} \times \text{(I)}$		$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_1	(6)
(x_3)	$-\frac{\textcircled{1}}{d_1} \times \text{(I)}$		$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_1	(7)
(x_4)	$-\frac{\textcircled{1}}{d_1} \times \text{(I)}$		$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_1	(8)
(x_5)	$-\frac{\textcircled{1}}{d_1} \times \text{(I)}$		$\textcircled{2}$	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_1	(9)
	(II) = $\sum(x_2)$		\dot{d}_2	$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_2	(10) = (2) + (6)
(x_3)	$-\frac{\Sigma(x_{3,2})}{\dot{d}_2} \times \text{(II)}$			$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_2	(11)
(x_4)	$-\frac{\Sigma(x_{4,2})}{\dot{d}_2} \times \text{(II)}$			$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_2	(12)
(x_5)	$-\frac{\Sigma(x_{5,2})}{\dot{d}_2} \times \text{(II)}$			$\textcircled{3}$	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_2	(13)
	(III) = $\sum(x_3)$			\dot{d}_3	$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_3	(14) = (3) + (7) + (11)
(x_4)	$-\frac{\Sigma(x_{4,3})}{\dot{d}_3} \times \text{(III)}$				$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_3	(15)
(x_5)	$-\frac{\Sigma(x_{5,3})}{\dot{d}_3} \times \text{(III)}$				$\textcircled{4}$	$\textcircled{5}$	\dot{b}_3	(16)
	(IV) = $\sum(x_4)$				\dot{d}_4	$\textcircled{5}$	\dot{b}_4	(17) = (4) + (8) + (12) + (15)
(x_5)	$-\frac{\Sigma(x_{5,4})}{\dot{d}_4} \times \text{(IV)}$					$\textcircled{5}$	\dot{b}_4	(18)
	(V) = $\sum(x_5)$					\dot{d}_5	\dot{b}_5	(19) = (5) + (9) + (13) + (16) + (18)

Ermittlung der Unbekannten: aus (V): $x_5 = \frac{-\dot{b}_5}{\dot{d}_5}$
 „ (IV): $x_4 = \frac{-\dot{b}_4 - x_5 \cdot \textcircled{5}}{\dot{d}_4}$
 „ (III): $x_3 = \frac{-\dot{b}_3 - x_5 \cdot \textcircled{5} - x_4 \cdot \textcircled{4}}{\dot{d}_3}$
 „ (II): $x_2 = \frac{-\dot{b}_2 - x_5 \cdot \textcircled{5} - x_4 \cdot \textcircled{4} - x_3 \cdot \textcircled{3}}{\dot{d}_2}$
 „ (I): $x_1 = \frac{-b_1 - x_5 \cdot \textcircled{5} - x_4 \cdot \textcircled{4} - x_3 \cdot \textcircled{3} - x_2 \cdot \textcircled{2}}{d_1}$

(Beschreibung siehe Seite 135.)

Zahlenbeispiel.

Gekürzte Auflösung nach Muster III (siehe Tafel 31).

Gleich.	Rechnungsgang	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	Zeile Nr.
(x_1)	(I) = (1)	+ 62,14	+ 7,46	+ 4,48	- 2,04	- 9,86	+ 51,4	(1)
(x_2)		+ 5,27	+ 49,35	+ 4,08	- 3,56	- 2,19	- 38,1	(2)
(x_3)		+ 3,46	+ 5,03	+ 35,64	+ 3,15	- 2,22	+ 17,2	(3)
(x_4)		+ 1,94	+ 3,72	+ 4,08	+ 28,76	- 1,77	- 4,6	(4)
(x_5)		- 2,16	- 4,38	+ 3,55	+ 10,14	+ 44,18	- 28,8	(5)
(x_2)	$-\frac{5,27}{62,14} \cdot (I)$		- 0,633	- 0,380	+ 0,173	+ 0,836	- 4,36	(6)
(x_3)	$-\frac{3,46}{62,14} \cdot (I)$		- 0,415	- 0,249	+ 0,114	+ 0,549	- 2,86	(7)
(x_4)	$-\frac{1,94}{62,14} \cdot (I)$		- 0,233	- 0,140	+ 0,064	+ 0,308	- 1,60	(8)
(x_5)	$+\frac{2,16}{62,14} \cdot (I)$		+ 0,259	+ 0,156	- 0,071	- 0,343	+ 1,79	(9)
	(II) = $\sum(x_2)$		+ 48,72	+ 3,70	- 3,39	- 1,35	- 42,46	(10) = (2) + (6)
(x_3)	$-\frac{4,62}{48,72} \cdot (II)$			- 0,351	+ 0,321	+ 0,128	+ 4,03	(11)
(x_4)	$-\frac{3,49}{48,72} \cdot (II)$			- 0,265	+ 0,243	+ 0,097	+ 3,04	(12)
(x_5)	$+\frac{4,12}{48,72} \cdot (II)$			+ 0,313	- 0,287	- 0,114	- 3,59	(13)
	(III) = $\sum(x_3)$			+ 35,04	+ 3,59	- 1,54	+ 18,37	(14) = (3) + (7) +
(x_4)	$-\frac{3,68}{35,04} \cdot (III)$				- 0,377	+ 0,162	- 1,93	(15)
(x_5)	$-\frac{4,02}{35,04} \cdot (III)$				- 0,412	+ 0,177	- 2,11	(16)
	(IV) = $\sum(x_4)$				+ 28,69	- 1,20	- 5,09	(17) = (4) + (8) +
(x_5)	$-\frac{9,37}{28,69} \cdot (IV)$					+ 0,392	+ 1,66	(18)
	(V) = $\sum(x_5)$					+ 44,29	- 31,05	(19) = (5) + (9) +
								+ (16) + (1)

Aus Gl. (V): $x_5 = \frac{+ 31,05}{44,29} = + 0,701$

„ „ (IV): $x_4 = \frac{+ 5,09 + 1,20 \cdot 0,701}{28,69} = + \frac{5,93}{28,69} = + 0,207$

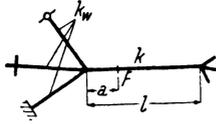
„ „ (III): $x_3 = \frac{- 18,37 + 1,54 \cdot 0,701 - 3,59 \cdot 0,207}{35,04} = - \frac{18,03}{35,04} = - 0,515$

„ „ (II): $x_2 = \frac{+ 42,46 + 1,35 \cdot 0,701 + 3,39 \cdot 0,207 + 3,70 \cdot 0,515}{48,72} = + \frac{46,01}{48,72} = + 0,94$

„ „ (I): $x_1 = \frac{- 51,4 + 9,86 \cdot 0,701 + 2,04 \cdot 0,207 + 4,48 \cdot 0,515 - 7,46 \cdot 0,944}{62,14} = - \frac{48,8}{62,14} = - 0,784$

Tafel 32.

Festpunktabstände a für Rahmenstäbe.¹



$$K = \Sigma k_w$$

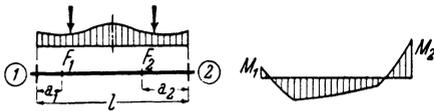
Obere Zahl: bei voller Einspannung aller Widerlagerstäbe.
 Mittlere Zahl: **Mittelwert** (bei mittlerer Einspannung bzw. verschiedenartiger Lagerung der einzelnen Widerlagerstäbe).
 Untere Zahl: bei gelenkiger Lagerung aller Widerlagerstäbe.

k/K	a/l	k/K	a/l	k/K	a/l	k/K	a/l	k/K	a/l	k/K	a/l	k/K	a/l	k/K	a/l
0,0	0,333 333 333	0,5	0,267 258 250	1,0	0,222 211 200	1,5	0,1905 1786 1667	2,0	0,1667 1548 1428	5,0	0,0952 0861 0769	10	0,0556 0495 0435	20	0,0303 0268 0232
0,1	318 315 313	0,6	256 247 238	1,1	215 204 192	1,6	1852 1733 1613	2,5	1481 1366 1250	6,0	0833 0750 0667	12	0476 0423 0370	30	0208 0184 0159
0,2	303 299 294	0,7	247 237 227	1,2	208 197 185	1,7	1802 1682 1563	3,0	1333 1222 1111	7,0	0741 0665 0588	14	0417 0370 0323	40	0159 0140 0120
0,3	290 284 278	0,8	238 228 217	1,3	202 190 179	1,8	1754 1635 1515	3,5	1212 1106 1000	8,0	0667 0596 0526	16	0370 0328 0286	50	0128 0118 0097
0,4	278 270 263	0,9	230 219 208	1,4	196 184 172	1,9	1709 1590 1471	4,0	1111 1010 0909	9,0	0606 0541 0476	18	0333 0295 0256	100	0065 0057 0049

Tafel 33.

Ausgangsmomente M_1 M_2 symmetrisch belasteter Rahmenstäbe²

aus den Festpunktabständen a_1 a_2 .



$$M_1 = \frac{\kappa_1 K^0}{100}; \quad M_2 = \frac{\kappa_2 K^0}{100}$$

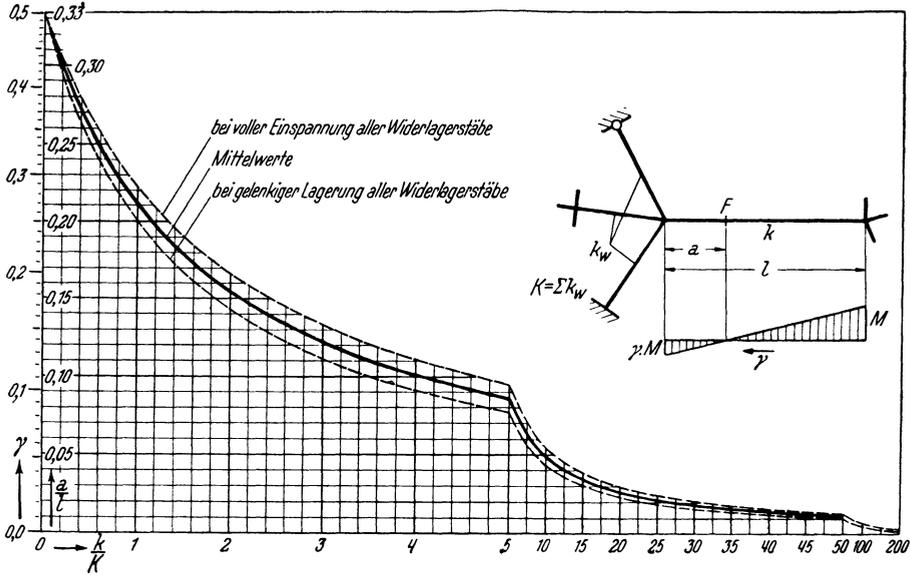
Obere Zahl κ_1
 Untere Zahl κ_2
 (Kreuzlinienabschnitte K^0 siehe Tafel 2 bis 4.)

a_1/l	a_2/l	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,33
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,02	0,00	2,04	2,00	1,96	1,91	1,86	1,82	1,77	1,71	1,66	1,60	1,54	1,47	1,40	1,35	1,26	1,18	1,09	1,03
0,04	0,00	4,17	4,09	4,00	3,91	3,82	3,72	3,62	3,51	3,40	3,28	3,16	3,03	2,89	2,74	2,59	2,42	2,25	2,13
0,06	0,00	6,38	6,26	6,13	6,00	5,86	5,71	5,56	5,40	5,23	5,05	4,87	4,67	4,46	4,23	4,00	3,75	3,48	3,30
0,08	0,00	8,70	8,53	8,36	8,19	8,00	7,81	7,60	7,39	7,16	6,92	6,67	6,40	6,12	5,82	5,50	5,16	4,80	4,54
0,10	0,00	11,1	10,9	10,7	10,5	10,2	10,0	9,74	9,47	9,19	8,89	8,57	8,23	7,88	7,50	7,10	6,67	6,21	5,88
0,12	0,00	13,6	13,4	13,1	12,9	12,6	12,3	12,0	11,7	11,3	11,0	10,6	10,2	9,75	9,29	8,80	8,28	7,71	7,31
0,14	0,00	16,3	16,0	15,7	15,4	15,1	14,7	14,4	14,0	13,6	13,2	12,7	12,3	11,7	11,2	10,6	10,0	9,33	8,86
0,16	0,00	19,0	18,7	18,4	18,1	17,7	17,3	16,9	16,5	16,0	15,5	15,0	14,5	13,9	13,2	12,6	11,9	11,1	10,5
0,18	0,00	22,0	21,6	21,2	20,8	20,4	20,0	19,5	19,1	18,5	18,0	17,4	16,8	16,1	15,4	14,7	13,8	13,0	12,3
0,20	0,00	25,0	24,6	24,2	23,8	23,3	22,9	22,4	21,8	21,3	20,6	20,0	19,3	18,6	17,8	16,9	16,0	15,0	14,3
0,22	0,00	28,2	27,8	27,4	26,9	26,4	25,9	25,3	24,8	24,1	23,5	22,8	22,0	21,2	20,3	19,4	18,3	17,2	16,4
0,24	0,00	31,6	31,1	30,7	30,2	29,6	29,1	28,5	27,9	27,0	26,5	25,7	24,9	24,0	23,0	22,0	20,9	19,6	18,7
0,26	0,00	35,1	34,7	34,2	33,6	33,1	32,5	31,9	31,2	30,5	29,7	28,9	28,0	27,0	26,0	24,9	23,8	22,3	21,3
0,28	0,00	38,9	38,4	37,9	37,3	36,8	36,1	35,5	34,8	34,0	33,2	32,3	31,4	30,3	29,2	28,0	26,7	25,2	24,1
0,30	0,00	42,9	42,4	41,8	41,3	40,6	40,0	39,3	38,6	37,8	36,9	36,0	35,0	33,9	32,7	31,4	30,0	28,4	27,2
0,32	0,00	47,1	46,5	46,0	45,4	44,8	44,1	43,4	42,7	41,8	41,0	40,0	39,0	37,8	36,6	35,2	33,7	32,0	30,7
0,33	0,00	50,0	49,5	48,9	48,3	47,7	47,0	46,3	45,5	44,7	43,8	42,8	41,8	40,6	39,3	37,9	36,3	34,6	33,3

¹ Erläuterungen siehe Seite 155. — ² Erläuterungen siehe Seite 159.

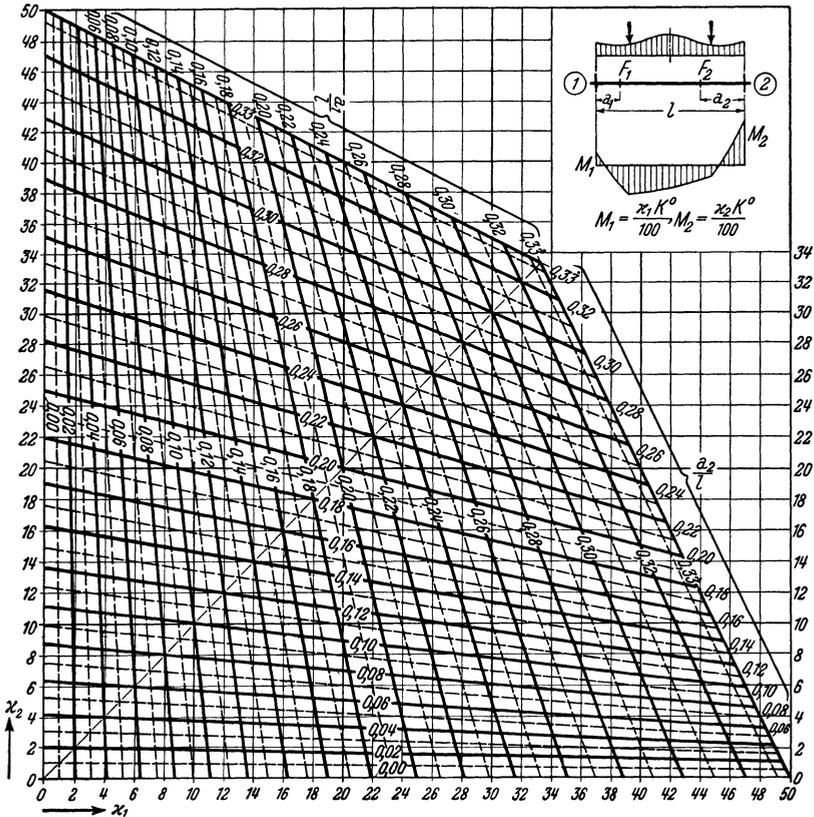
Festpunktabstände a für Rahmenstäbe¹ und Überleitungszahlen γ .

Tafel 32a.



Tafel 33a.

Ausgangsmomente M_1 M_2 symmetrisch belasteter Rahmenstäbe² aus den Festpunktabständen a_1 a_2 . (Kreuzlinienabschnitte K^0 siehe Tafel 2 bis 4.)



¹ Erläuterungen siehe Seite 155. — ² Erläuterungen siehe Seite 159.

Manzsche Buchdruckerei, Wien IX.